5ª Ed.

Matemáticas de las operaciones financieras

Isaac Pernas

2018

Programa

Executive

JLL®

Matemáticas de las Operaciones Financieras

Isaac Pernas

5ª Ed. - 2017

Dedicado a Eva, Paula y Álvaro.

"Cuando las leyes de la matemáticas se refieren a la realidad, no son ciertas; cuando son ciertas, no se refieren a la realidad"

Albert Einstein

"Si la gente no piensa que las matemáticas son simples, es sólo porque no se dan cuenta de lo complicada que es la vida"

John Von Neumann

ISAAC PERNAS (2017)
ISBN: 978-84-615-3811-9

Índice general

Agradecimientos. Quiero agradecer a todos aquellos que me han considerado merecedor de su confianza bien por medio de una oportunidad (personal, laboral, etc.) o bien por medio de su aliento y su empuje, puesto que es de ellos de los que que he aprendido que ser mejor persona sólo se consigue intentándolo.

No quiero olvidarme de los β-tester, y otros revisores altruistas que han tenido a bien criticar (siempre de forma constructiva) este trabajo.

Quiero agradecer todo el trabajo de la comunidad dedicada a LyX a TeX, LaTeX, XY-pic, Plot y todas las otras herramientas de software libre que he podido usar para escribir y maquetar este libro y su portada.

⋉

Parte I

Conceptos Básicos

Capítulo 1

Leyes Financieras.

1.1. El valor del dinero en el tiempo.

Existe una relación, siempre deseable, de crecimiento del valor del dinero con el paso del tiempo. Esto se explica desde el punto de vista de la facilidad de disposición del mismo en el momento actual o futuro, así siempre es preferible disponer de 1 € ahora que disponer del mismo € dentro de un tiempo. La cosa cambia si lo que se recibe tras el plazo estipulado, son 100 €.

Es por ello, que resulta interesante demorar la disponibilidad a cambio de recibir un pago por este derecho de disponer del dinero más tarde. Lo mismo ocurre desde el punto de vista de la persona que requiere ahora de un capital que no tiene, deberá tomarlo prestado de otra persona por un plazo, y para ello se acuerda la entrega del nominal prestado, en forma y fecha más una cantidad en concepto de intereses, esto es, el precio requerido por disfrutar ahora de unos fondos que no se tienen.

Otra forma de entender este pago de intereses parte de la balanza existente entre riesgo y rentabilidad. El hecho de prestar un capital a quien lo requiere, por un tiempo o plazo, conlleva el riesgo de que, una vez transcurrido dicho plazo no se recuperen ni el capital ni los intereses. Por tanto cuanto más se evidencia el riesgo de "default" de la contrapartida, se exige más contraprestación en concepto de intereses.

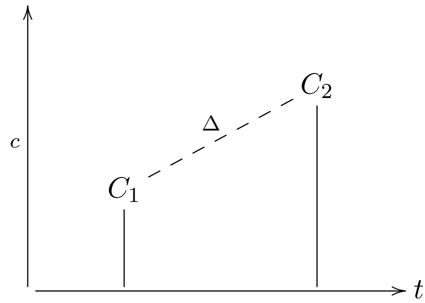


Figura 1.1: Capital en el tiempo.

Por tanto cabe intuir la existencia de ciertas leyes que describan de forma sencilla, esta realidad. Estas leyes permiten "mover" capitales a lo largo de la línea temporal, de tal manera que dado un capital, y fijo el resto de datos, se podrá aplicar la correspondiente ley que nos indique el valor de dicho capital en otro momento del tiempo.

1.2. Definiciones y conceptos.

- **Fenómeno financiero:** Es todo intercambio de bienes económicos (capitales financieros) en el que interviene el tiempo. La variable tiempo es la parte fundamental del fenómeno financiero junto con el rédito/rentabilidad/tipo de interés del fenómeno.

    - Por ejemplo: Hoy recibo 100 € y dentro de 10 meses se retornan 120 €.

- **Capital financiero:** Es todo bien económico referido al instante de tiempo en que es disponible y se representa por C, cuantía del capital que pertenece a los números reales positivos y el instante de tiempo t, que indica el momento de vencimiento. Por ejemplo, son capitales financieros 100 € ahora, 1 000 € dentro de 3 meses, 5 000 € euros dentro de 2 años…

- **Operación financiera:** es la acción de sustitución de un capital o de un conjunto de capitales por otro u otros en el tiempo. Intercambio de capitales en diferentes momentos del tiempo.
  - Ejemplo: Intercambio de flujos (permuta) de tipos de interés o I.R.S. (Interest Rate SWAP).

1.3. Ley Financiera.

Ley financiera es una función matemática F tal que a cada capital financiero C en el momento t le hace corresponder una cuantía C' en un instante de tiempo t' determinado.

Pueden ser:

$$\text{Tipos} \begin{cases} \text{Capitalización} & t' > t \\ \text{Descuento} & t' < t \end{cases}$$

Disponer de leyes financieras, permite llevar o "mover" capitales hasta un mismo instante temporal (futuro, pasado o presente) lo cual resulta bastante útil, en caso de querer comparar unos con otros. Las leyes financieras tienen una forma directa que proyecta capitales a momentos en el futuro, y una forma inversa que trae al pasado o al momento presente, los flujos que vengan a ocurrir en ese futuro. Ambas formas deben ser de tal modo que se conserve el equilibrio, de tal manera que si se lleva de hoy t_0, un capital C_0 a un momento del futuro t_1, por medio de la ley $f_c\left(C,t\right)$, se llegará a un capital C_1. Si ahora se toma ese capital futuro C_1, en el momento t_1, y se vuelve a calcular su valor hoy t_0, por medio de la ley inversa a $f_c\left(C,t\right)$, que se denota por $\tilde{f}_c\left(C,t\right)$, se debe llegar a un capital C_0, de este modo la ley cumple equilibrio y está eventualmente libre de arbitraje.

Suponga que se encuentra ante un esquema de flujos financieros[1] como el de la figura 1.3. Una posible solución al problema de identificar la cuantía total que representa C_1 y C_2, es determinar el valor presente de ambos capitales y sumarlos, ya que no parece correcta la solución $C \neq C_1 + C_2$ al acontecer C_1 y C_2 en diferentes momentos de la línea a temporal.

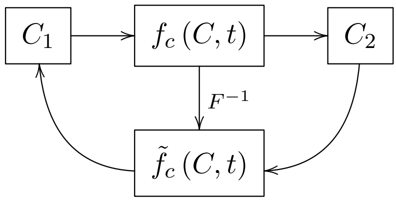


Figura 1.2: Ley Financiera.

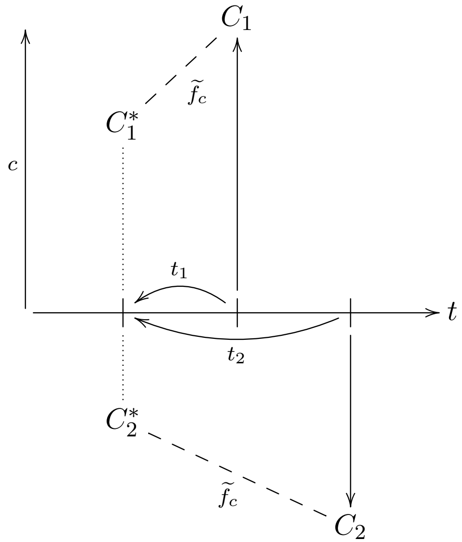
Por tanto el resultado correcto para calcular el total del valor presente del diagrama de flujos sería:

$$C = C_1^* + C_2^*$$

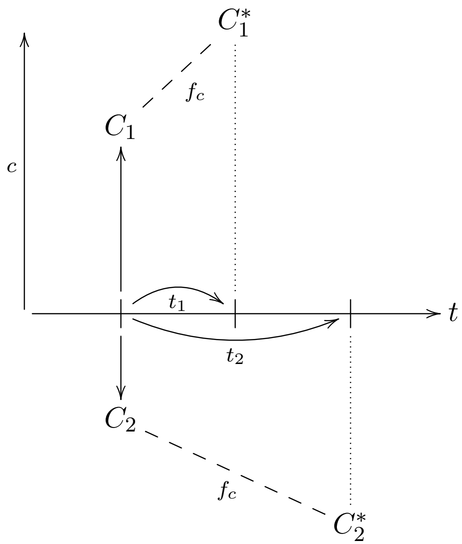
Donde C_1^* y C_2^* son los capitales C_1 y C_2 “proyectados” a fecha de hoy por medio de la función o ley financiera $\widetilde{f}_c\left(t\right)$.

$$C = \widetilde{f}_c\left(C_1, \Delta t_1\right) + \widetilde{f}_c\left(C_2, \Delta t_2\right)$$

[1] En los diagramas de flujos financieros las “flecha” positivas representan ingresos, y las negativas, pagos.



(a) Descuento.



(b) Capitalización.

Figura 1.3: Mover Flujos en el tiempo

$$C = C_1 \widetilde{f}_c(\Delta t_1) + C_2 \widetilde{f}_c(\Delta t_2)$$

Hasta este punto queda patente la que en las leyes financieras hay una serie de elementos fundamentales, como son el plazo, el capital, y en cierta manera, el sentido de la operación (proyectar al futuro o traer desde un futuro). Existen otros parámetros no menos importantes que determinan la dinámica de la ley financiera, ya que en ciertos puntos se ha hablado de "interés" pero no se ha plasmado de forma directa su papel en la expresión de la ley financiera.

1.3.1. Propiedades.

Las propiedades de toda ley financiera son:

1. Positiva: $f(C, t', t) > 0$ si $C > 0$.
2. Creciente con el tiempo: $f(C, t', t) > C \rightarrow t' > t$
    a) Pero $f(C, t', t) < C \rightarrow t' < t$
        1) Por tanto f es creciente en t' y decreciente en t
3. Escalable: $f(C, t', t) = Cf(1, t', t)$
    a) Esto implica que que se ven afectados de igual manera cada parte del capital.
4. Equivalente: Si $f(C, t, t) = f(C, t', t') = C$

1.3.2. Redimiento y tipo de interés.

En la figura 1.1 (Capitalización), puede apreciarse que el capital C_2 es mayor que el capital C_1. La forma en la que se mide esta deferencia, es el rendimiento de la operación. Una posible expresión para esta diferencia la tenemos en la siguiente expresión:

$$r = \frac{C_2 - C_1}{C_1} = \frac{C_2}{C_1} - 1 \tag{1.1}$$

Existe otra posible expresión, que es el rendimiento ballena:

$$r = \frac{C_2 - C_1}{C_2} = 1 - \frac{C_1}{C_2} \tag{1.2}$$

Como se verá más adelante, la expresión 1.1, aun que resulta muy simple, útil y es intuitiva, tiene como inconveniente que no permite la adición directa de los tipos de interés, al componer operaciones. Para solventar este problema se puede definir como rendimiento:

$$r = \ln\left(\frac{C_2}{C_1}\right) \tag{1.3}$$

Las diferencias entre rentabilidades pueden observarse en la figura 1.4, para valores pequeños de rentabilidad, que suelen ser los habituales, ambas expresiones tienen un error muy por debajo de valores representativos.

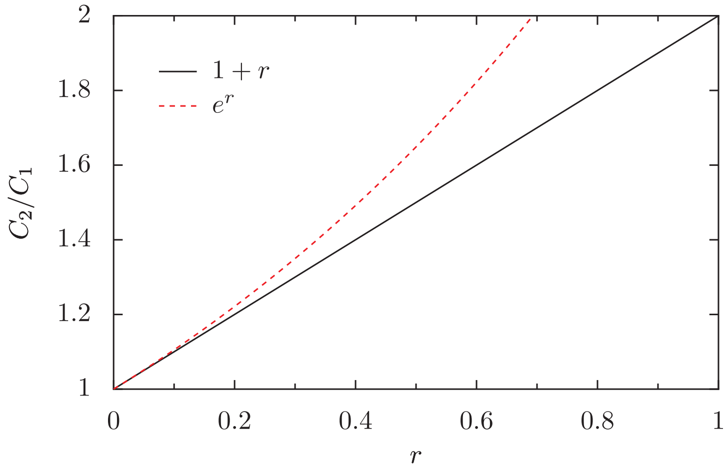


Figura 1.4: Diferencia entre tipos de rentabilidad.

Se puede definir el tipo de interés como el rendimiento por unidad de tiempo, comúnmente se indica como tanto porciento en un plazo (10 % anual, 5 % trimestral, etc.), esto es:

$$i = \frac{r}{\Delta t}$$

Ejemplo 1. *Si una inversión de* $1\,000$ € *durante 2 años, ha retornado* $1\,250$ € *tras este periodo, entonces:*

El rendimiento de la operación (suponiendo Logarítmica) sería:

$$r = \ln\left({}^{1250}/_{1000}\right) = 22{,}31\,\%$$

El rendimiento de la operación (según la expresión 1.1) sería:

$$r = {}^{(1250-1000)}/_{1000} = 25\,\%$$

El tipo de interés de la operación simple anual[2]*:* $i = {}^{25\,\%}/_{2} = 12{,}5\,\%$.

1.4. Problemas.

Problema 1. *Dadas las leyes financieras* $C' = f\left(C, t', t\right) = C \times (1 + 0{,}07 \times (t' - t))$*, y* $C' = f\left(C, t', t\right) = C \times e^{(0{,}07 \times (t'-t))}$ *, donde* t' *y* t *están medidos en años, calcular las siguientes proyecciones financieras:*

$1\,000$ € *ahora, dentro de 3 meses*

$2\,000$ € *ahora, dentro de 7 meses*

$1\,500$ € *ahora, en un año y medio*

800 € *ahora, dentro de dos trimestres.*

Solución:

Para el caso de la primera expresión para la capitalización:

$$\begin{cases} C = 1\,000\,€, (t' - t) = \frac{3}{12} & C' = 1000\left(1 + 0{,}07\frac{3}{12}\right) \\ C = 1\,200\,€, (t' - t) = \frac{7}{12} & C' = 1200\left(1 + 0{,}07\frac{7}{12}\right) \\ C = 1\,500\,€, (t' - t) = 1{,}5 & C' = 1500\left(1 + 0{,}07 \cdot 1{,}5\right) \\ C = 800\,€, (t' - t) = \frac{6}{12} & C' = 800\left(1 + 0{,}07\frac{6}{12}\right) \end{cases}$$

Para el caso de la segunda expresión para la capitalización:

[2]Más adelante se explica este punto.

$$\begin{cases} C = 1\,000 \text{€}, (t'-t) = \frac{3}{12} & C' = 1000e^{0{,}07\frac{3}{12}} \\ C = 1\,200 \text{€}, (t'-t) = \frac{7}{12} & C' = 1200e^{0{,}07\frac{7}{12}} \\ C = 1\,500 \text{€}, (t'-t) = 1{,}5 & C' = 1500e^{0{,}07\cdot 1{,}5} \\ C = 800 \text{€}, (t'-t) = \frac{6}{12} & C' = 800e^{0{,}07\frac{6}{12}} \end{cases}$$

Capítulo 2

Capitalización.

2.1. Introducción.

Con objeto de de calcular el valor del dinero a una fecha futura se aplican las siguientes leyes de capitalización:

1. Capitalización simple: Por lo general para operaciones de hasta un año.

2. Capitalización compuesta: Para operaciones de más de un año.

3. Capitalización continua: Suele usarse como medio para operar con tipos de interés equivalentes de forma sencilla y como base para capitalizar productos como futuros.

La capitalización consiste en proyectar los capitales desde una fecha inicial hasta otra final para obtener el valor del capital a esa última fecha dada una tasa de interés.

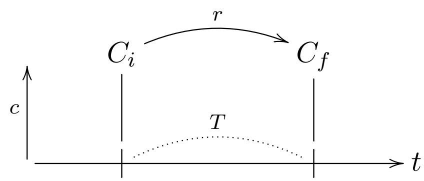


Figura 2.1: Capitalización.

Por motivos de convención según el plazo en el que transcurre la operación se usan diferentes expresiones de capitalización. Como se verá más adelante, en esta misma sección, siempre se pueden calcular tipos equivalentes entre las diferentes expresiones.

2.2. Capitalización Simple.

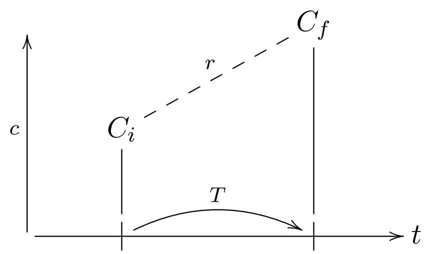


Figura 2.2: Capitalización Simple.

Para operaciones de menos de un año se aplica capitalización simple:

$$\boxed{C_f = C_i\,(1 + r \cdot t)} \tag{2.1}$$

Donde:

- C_f: Es es capital a fecha fin.

- C_i: Es el capital inicial.
- r: Es el tipo simple, que suele expresarse en %, y aplica a plazos, como mensual, trimestral, semestral, anual, etc.
- t: Es el plazo adecuado a la expresión del tipo de interés r. Esto es, si r es trimestral, t deben ser trimestres, si r es anual, t deben ser años o fracciones del mismo.

Aunque, de forma general se aplica a operaciones cuya duración es menor al año, no es incorrecto usarlo para plazos mayores si así se indica. A continuación se proponen una serie de ejemplos:

Ejemplo 2. *Calcular el valor final de una inversión de* 1 000 € *al* 5 % *anual simple durante 1 año.*

Aplicando la expresión 2.1 se tiene:

$$C_f = 1000\,(1 + 0{,}05 \cdot 1) = 1\,050\,€$$

Ejemplo 3. *Calcular el valor final de una inversión de* 1 000 *al* 5 % *trimestral simple durante 1 año.*

En este caso se debe prestar atención a que el tipo es trimestral simple, por lo que aplica la fórmula 2.1, pero el plazo no se expresa en los mismos términos, ya que se indica 1 año, que no son trimestres. Para que las unidades cuadren se debe pasar el tiempo de un año a trimestres (x4)

$$1Y \longrightarrow 4T$$

$$C_f = 1000\,(1 + 0{,}05 \cdot 4) = 1\,200\,€$$

Ejemplo 4. *Calcular el valor final de una inversión de* $1\,000$ *al* $5\,\%$ *anual simple durante* 1845 *días teniendo en cuenta que los años tienen 360 días.*

En el siguiente apartado se aborda el tema de las bases, por tanto se da por bueno el dato de que un año tiene 360 días y se aplica el mismo mecanismo que antes, se pasa el plazo a una unidad coherente con el modo de expresar el tipo de interés, esto es, a años.

$$\begin{tikzcd}
360d \arrow[r] \arrow[dr] & 1Y \\
1845d \arrow[r] \arrow[ur] & ?Y
\end{tikzcd}$$

$$C_f = 1000\left(1 + 0{,}05 \cdot \frac{1845}{360}\right) = 1\,256{,}25\,€$$

2.3. Capitalización Compuesta.

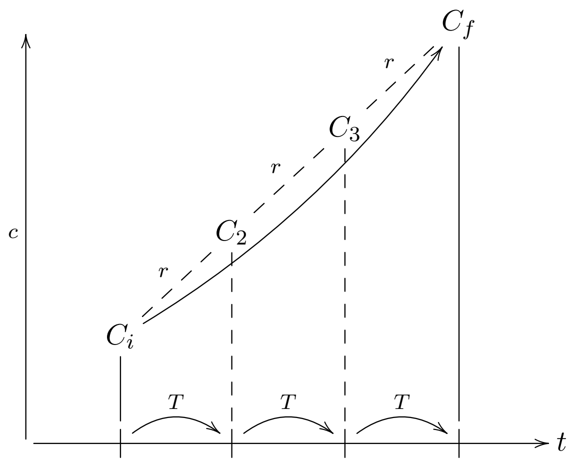


Figura 2.3: Capitalización Compuesta.

Para operaciones de más de un año se aplica capitalización compuesta:

$$\boxed{C_f = C_i\,(1+r)^t} \tag{2.2}$$

Se basa en la reinversión de los intereses, que una vez pagados pasan a formar parte de la masa de capital invertido para el siguiente periodo pagadero.

Donde:

- C_f: Es es capital a fecha fin.
- C_i: Es el capital inicial.
- r: Es el tipo simple, que suele expresarse en %, y aplica a plazos, como mensual, trimestral, semestral, anual, etc.
- t: Es el plazo adecuado a la expresión del tipo de interés r. Esto es, si r es trimestral, t deben ser trimestres, si r es anual, t deben ser años o fracciones del mismo.

A continuación se proponen una serie de ejemplos:

Ejemplo 5. *Calcular el valor final de una inversión de* $1\,000$ € *al* $5\,\%$ *anual compuesto durante 1 año.*

Aplicando la expresión 2.2 se tiene:

$$C_f = 1000\,(1+0{,}05)^{\,1} = 1\,050\,€$$

Ofrece el mismo resultado que el ejercicio 2

Ejemplo 6. *Calcular el valor final de una inversión de* $1\,000$ € *al* $5\,\%$ *trimestral compuesto durante 1 año.*

En este caso se debe prestar atención a que el tipo es trimestral compuesto, por lo que aplica la fórmula 2.2, pero el plazo no se expresa en los mismos términos, ya que se indica 1 año, que no son trimestres. Para que las unidades cuadren se debe pasar el tiempo de un año a trimestres (x4)

$$1Y \longrightarrow 4T$$

$$C_f = 1000\,(1 + 0{,}05)^4 = 1\,215{,}51\,€$$

Ejemplo 7. *Calcular el valor final de una inversión de* $1\,000\,€$ *al* $5\,\%$ *anual compuesto durante* 1845 *días teniendo en cuenta que los años tienen 360 días.*

En el siguiente apartado se aborda el tema de las bases, por tanto se da por bueno el dato de que un año tiene 360 días y se aplica el mismo mecanismo que antes, se pasa el plazo a una unidad coherente con el modo de expresar el tipo de interés, esto es, a años.

$$\begin{tikzcd}
360d \arrow[r] \arrow[dr] & 1Y \\
1845d \arrow[r] \arrow[ur] & ?Y
\end{tikzcd}$$

$$C_f = 1000\,(1 + 0{,}05)^{\frac{1845}{360}} = 1\,284{,}09\,€$$

2.4. Bases y convenciones de cálculo.

Hasta el momento se ha en las fórmulas de capitalización y descuento se ha hecho la suposición, para el cálculo del C_f, que el tipo de interés y el plazo estaban en unidades coherentes, esto es:

- Si el tipo es anual, el plazo se expresa en años.
- Si el tipo es diario, el plazo se expresa en días.
- Si el tipo es semanal, el plazo son semanas ... y así de forma coherente.

En los mercados financieros el tipo, de forma habitual, se expresa en forma anual, si bien según el producto y la localización geográfica el "Año Financiero" se expresa de diferente forma. En muchos casos, la duración de una inversión es menor a un año, o simplemente tiene una duración que resulta ser una cantidad de "FRACCIONES DE AÑO".

Suponga una inversión cuya duración es de 15 meses, ¿cuantos años financieros son 15 meses? Depende de la base de cálculo que se convenga en la inversión.

Para calcular la facción de año a la que corresponden 15 meses, se podría usar la siguiente expresión:

$$FA = \frac{\Delta T}{Base}$$

Donde:

ΔT: Es el plazo de la inversión medido en días, esto es, los 15 meses pasados a días.

$Base$: Es el número de días de un año.

El primer problema a resolver consiste en ver cuantos días hay en los 15 meses, ¿se contabilizan los meses como 31 días? ¿de 30? ¿se cuentan los días justos?.

El segundo problema consiste en acordar el número de días que hay en un año ¿365? ¿366?.

Para resolver ambos problemas se definen una serie de convenciones que deben especificarse en los contratos de los productos

$FA = {}^{N}/_{D}$	N	D
${}^{Act}/_{360}$	$F_f - F_i$	360
${}^{Act}/_{365}$	$F_f - F_i$	365
${}^{30}/_{360}$	Δ_{30}	360
${}^{Act}/_{Act}$	$F_f - F_i$	$\{366 \leftrightarrow 365\}$

Cuadro 2.1: Convenciones de bases de cálculo.

financieros. Las principales convenciones son las recogidas en el cuadro 2.1.

Es necesario hace una puntualización para el cálculo de meses en la base ${}^{30}/_{360}$, el numerador es el plazo en meses de 30 días, por lo que se puede calcular con la expresión:

$$\Delta_{30}\left(F_f, F_i\right) = 360\left(Y_f - Y_i\right) + 30\left(M_f - M_i\right) + \left(D_f - D_i\right) \tag{2.3}$$

Ejemplo 8. *Calcular la fracción de año para una convención* ${}^{30}/_{360}$ *para una inversión que comienza el 1/1/2010 y termina el 15/12/2016.*

En este caso:

$$\begin{aligned}
\Delta_{30}\left(F_f, F_i\right) &= 360\left(2016 - 2010\right) + 30\left(12 - 1\right) + \left(15 - 1\right) \\
\Delta_{30}\left(F_f, F_i\right) &= 2504
\end{aligned}$$

Luego la fracción de año será:

$$FA_{30/360} = \frac{2504}{360} = 6{,}9556\,\text{años}$$

El uso y correcta determinación de una convención resulta importante, ya que en operaciones con nominales importantes, la diferencia en cantidades finales puede resultar importante.

Ejemplo 9. *Suponga que ha conseguido un préstamo de "A", de* $1\,000\,000$ € *de nominal que comienza el 1/2/2010, y termina el 1/2/2015, a un* $5\,\%$ *anual con pago de nominal e intereses a vencimiento, siendo el convenio* $^{\mathrm{Act}}\!/_{365}$*, suponga que ha conseguido prestar este dinero a "B" durante el mismo plazo y con el mismo tipo. Si pudiera acordar con ésta última contrapartida el convenio que más le beneficia ¿cual elegiría* $^{\mathrm{Act}}\!/_{365}$ *ó* $^{\mathrm{Act}}\!/_{360}$*?*

Para ver qué es mejor, habrá que calcular el valor de lo que se debe reembolsar a "A" al final del periodo. Entre el 1/2/2010 y el 1/2/2015 hay $1\,826$ € *días.*

Como el convenio es $^{\mathrm{Act}}\!/_{365}$*:*

$$FA_A = \frac{1826}{365} = 5{,}0027$$

$$C_f^A = 1\,000\,000\,€\,(1 + 5\,\%)^{5{,}0027} = 1\,276\,452{,}17\,€$$

Para el caso de "B", en caso de $^{\mathrm{Act}}\!/_{365}$ *la cantidad a recibir será la misma, y por tanto esta operación no lleva ningún beneficio:*

$$FA_B = \frac{1826}{365} = 5{,}0027$$

$$C_f^B = 1\,000\,000\,€\,(1 + 5\,\%)^{5{,}0027} = 1\,276\,452{,}17\,€$$

$$\Delta C = C_f^B - C_f^A = 0$$

Si se usa la base $^{Act}/_{360}$*:*

$$FA_B = \frac{1826}{360} = 5{,}0722$$

$$C_f^B = 1\,000\,000\,€\,(1 + 5\,\%)^{5{,}0722} = 1\,280\,786{,}77\,€$$

$$\Delta C = C_f^B - C_f^A = 4\,334{,}6$$

Por tanto el simple hecho de seleccionar una base diferente hace que la operación, que desde el punto de vista de flujos parece ajustada, cuando se calculan los importes finales distan de ser iguales. Por tanto, parece lógico y preferible tomar dinero prestado en base $^{Act}/_{365}$ *y prestarlo en base* $^{Act}/_{360}$*.*

Cuando se requiere hacer conversiones de tipos de interés entre las diferentes convenciones se pueden usar las siguientes expresiones:

$$i_{360} = i_{365}\frac{360}{365} \tag{2.4}$$

$$i_{365} = i_{360}\frac{365}{360} \tag{2.5}$$

$$i_{30/360} = i_{365}\frac{(F_f - F_i)}{\Delta_{30}(F_f, F_i)}\frac{360}{365} \tag{2.6}$$

Cuando se negocian ciertos productos en el mercado, salvo que de forma particular se acuerde otra cosa, existen estándares usados, que dependen del mercado (ligado a la divisa en la que opera), y al producto, así se puede tener la siguiente distinción[3]:

Grupo	Producto	Divisa	Convención
Money Market	Depósito	EUR	$^{Act}/_{360}$
	Letras	EUR	
	Repo	EUR	
Bond Market	Bono	EUR	$^{Act}/_{Act}$
Swap Market	IRS	EUR	Flot.: $^{Act}/_{360}$
			Fija: $^{30}/_{360}$

Cuadro 2.2: Convenciones por producto.

2.5. Tipos de interés nominales y efectivos

En una operación financiera, la frecuencia en la que se acuerda que se realicen los pagos, es fundamental, por ejemplo, se puede acordar un depósito de 100 € a un año al $3\,\%$ de interés nominal con pagos semestrales, esto implica que a lo largo de la operación los momentos de pago son los siguientes:

$$C_{s1} = 100\left(1 + 3\,\%\frac{6}{12}\right) = 101{,}5\,€$$

Al final del segundo periodo:

$$C_{s2} = 101{,}5\left(1 + 3\,\%\frac{6}{12}\right) = 103{,}022\,5\,€$$

Si por otro lado hay una oferta competitiva de otra entidad que paga un $3\,\%$ nominal pero con frecuencia de pagos anual, podría parecer que ambos son equivalentes, y que daría igual invertir en uno que en otro, pero no es así ya que para poder comaprarlos habrái que calcular el interés efectivo anual en base a los capitales finales/iniciales.

Para el primer caso:

$$103{,}022\,5\,€ = 100\,€\,(1 + r_{e1}) \rightarrow r_{e1} = 3{,}0225\,\%$$

Para el segundo caso es el $3\,\%$, por lo que se puede concluir que para un mismo tipo nominal, una mayor frecuencia de pagos de interés generará un mayor tipo de interés efectivo.

2.6. Repaso Álgebra.

A continuación se revisan las siguientes propiedades:

$$\frac{1}{a^b} = a^{-b}$$

$$x^{\frac{a}{b}} = c \leftrightarrow x = c^{\frac{b}{a}}$$

$$\sqrt[a]{x} = x^{\frac{1}{a}}$$

Para Logaritmos.

$$\ln\left(x^a\right) = a \ln\left(x\right) \tag{2.7}$$

$$\ln\left(e\right) = 1 \rightarrow \ln\left(e^x\right) = x \ln\left(e\right) = x \tag{2.8}$$

$$\ln\left(ab\right) = \ln\left(a\right) + \ln\left(b\right) \tag{2.9}$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a\right) - \ln\left(b\right) \tag{2.10}$$

$$\ln\left(a^{x}\right) = x \cdot \ln\left(a\right) \tag{2.11}$$

$$\ln\left(e\right) = 1 \tag{2.12}$$

$$\ln\left(e^{x}\right) = x \cdot \ln\left(e\right) = x \tag{2.13}$$

$$\frac{1}{a^{x}} = a^{-x} \tag{2.14}$$

$$\frac{d}{dx}e^{x} = e^{x} \tag{2.15}$$

$$\int_{-\infty}^{x} e^{t}dt = e^{x} \tag{2.16}$$

2.7. Problemas

Problema 2. *Con un tipo de interés del* $0,5\,\%$ *mensual, calculad el valor final de invertir* $10\,000$ € *euros a un año y medio bajo los dos tipos de capitalización.*

Si el tipo es el 0,5 % mensual, y el periodo es de 1,5 años, entonces $1{,}5 \cdot 12 = 18$ meses. Por tanto:

- Capitalización simple:

$$C_f = 10\,000 \cdot (1 + 0,5\,\% \cdot 18) = 10\,900\,€$$

- Capitlización compuesta:

$$C_f = 10\,000 \cdot (1 + 0,5\,\%)^{18} = 10\,939{,}29\,€$$

Problema 3. *Calcular cuanto tiempo tengo que mantener una inversión de* $10\,000$ € *para doblar a un 0,4 % mensual bajo las dos leyes de capitalización vistas hasta el momento.*

Para doblar la inversión de $C_i = 10\,000$ € hay que llegar a un capital final $C_f = 20\,000$ €.

- Capitalización simple:

$$C_f = C_i\,(1 + r \cdot t) \rightarrow t = \frac{1}{r}\left(\frac{C_f}{C_i} - 1\right)$$

$$t = \frac{1}{0,4\,\%}\left(\frac{20\,000}{10\,000} - 1\right) = 250\,meses \approx 21\,años$$

- Capitalización compuesta:

$$\begin{aligned} C_f &= C_i\,(1+r)^t \\ \frac{C_f}{C_i} &= (1+r)^t \\ \ln\left(\frac{C_f}{C_i}\right) &= t \cdot \ln(1+r) \\ t &= \frac{\ln\left(\frac{C_f}{C_i}\right)}{\ln(1+r)} \end{aligned}$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{20\,000}{10\,000}\right)}{\ln(1 + 0,4\,\%)} = 173,63\,meses \approx 14,5\,años$$

Problema 4. *Buscad las siguientes igualdades en la tabla:*

	Meses	*Trim.*	*Sem.*	*Años*
9_m				
3_q				
5_y				
$2{,}5_y$				
$4{,}5_m$				

Problema 5. *Calcular el tiempo al que se tiene que mantener* $8\,000$ € *al* $5\,\%$ *anual compuesto para ganar* $5\,000$ €*.*

Al obtener $5\,000$ € de beneficio se está recuperando un capital final de $C_f = 8\,000\text{€} + 5\,000\text{€} = 13\,000\text{€}$. El capital inicial es $C_i = 8\,000\text{€}$.

Siendo capitalización compuesta entonces:

$$\begin{aligned}
C_f &= C_i\,(1+r)^t \\
\frac{C_f}{C_i} &= (1+r)^t \\
\ln\left(\frac{C_f}{C_i}\right) &= t \cdot \ln(1+r) \\
t &= \frac{\ln\left(\frac{C_f}{C_i}\right)}{\ln(1+r)}
\end{aligned}$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{13\,000}{8\,000}\right)}{\ln(1+5\,\%)} = 9{,}95\,\textit{años}$$

Problema 6. *Calcular el valor final de* 100 € *invertidos al 4 % anual durante 4 años en tipo simple.*

La expresión a usar será:

$$C_f = C_i\,(1 + r \cdot t) \begin{cases} C_i & 100\,€ \\ r & 4\,\% \\ t & 4 \end{cases}$$

$$C_f = 100\,(1 + 4\,\% \cdot 4) = 116\,€$$

Problema 7. *Calcular el tipo de interés que proporciona 10 euros de intereses sobre 100 de capital inicial con capitalización compuesta de pagos mensuales al final de 2 años (como en una cuenta remunerada mes a mes).*

Se han conseguido $10\,€$ en concepto de intereses, por lo que el $C_f = 110\,€$, $C_i = 100\,€$, el tiempo han sido dos años (24_{meses}) y como se han conseguido de forma mensual:

$$C_f = C_i\,(1 + r_m \cdot t_m)$$

$$r_m = \frac{1}{t_m}\left(\frac{C_f}{C_i} - 1\right)$$

$$110 = 100\,(1 + 24 r_m) \rightarrow r_m = \frac{1}{24}\left(\frac{110}{100} - 1\right) = 0,4167\,\%$$

Problema 8. *Entre las bases Act/360 y Act/365, ¿cuál preferimos para una inversión? ¿y cuál para un préstamo?*

Problema 9. *Calculad el importe de intereses que genera un depósito desde 1 de marzo hasta el 15 de agosto del mismo año, para un importe de 10.000 euros y un tipo anual del 4 %, bajo las bases 30/360, Act/360 y Act/365.*

Primero las Fracciones de Año, teniendo en cuenta que el año es el mismo $y = y_f = y_i$:

- $^{30}/_{360}$: $\Delta d = 360\,(y_f - y_i) + 30\,(8-3) + (15-1) = 164\text{d}$ por lo que la $FA = {}^{164}/_{360} = 0{,}4556\text{y}$
- $^{Act}/_{360}$ y $^{Act}/_{365}$:
  - $\Delta d = 167$
    - $^{Act}/_{360} = {}^{167}/_{360} = 0{,}464\text{y}$
    - $^{Act}/_{365} = {}^{167}/_{365} = 0{,}457\text{y}$

Entonces usando la expresión de capitalización simple (al ser inversiones a menos de una año y que no se dice lo contrario).

- $^{30}/_{360} \to C_f = 10\,000\,(1 + 4\,\% \cdot 0,4556) = 10\,182{,}22\,€$
  - Intereses: $\mathcal{I} = 10\,182{,}22 - 10\,000 = 182{,}22\,€$
- $^{Act}/_{360} \to C_f = 10\,000\,(1 + 4\,\% \cdot 0,464) = 10\,185{,}56\,€$
  - Intereses: $\mathcal{I} = 10\,185{,}56 - 10\,000 = 185{,}56\,€$
- $^{Atc}/_{365} \to C_f = 10\,000\,(1 + 4\,\% \cdot 0,457) = 10\,183{,}01\,€$
  - Intereses: $\mathcal{I} = 10\,183{,}01 - 10\,000 = 183{,}01\,€$

Problema 10. *Calculad el importe de intereses que genera un préstamo de 5.000 euros desde 15 de abril y hasta el 27 de octubre del mismo año, a un tipo anual del 3.2 %, bajo las bases 30/360, Act/360 y Act/365.*

Problema 11. *Calculad el número de años bajo los modelos Act/360, 30/360 y Act/365 de los siguientes conjuntos de días:*

1. 180 días.
2. Del 1 de marzo de 2009 al 5 de abril de 2009.
3. Del 1 de marzo de 2009 a 7 de mayo de 2010.

Capítulo 3

Capitalización Continua y Composición.

3.1. Capitalización Continua.

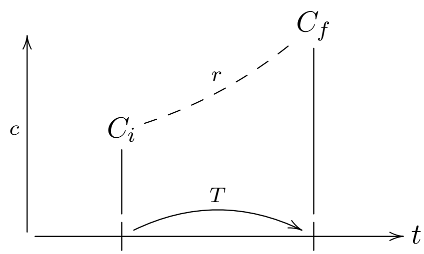


Figura 3.1: Capitalización Continua.

De la expresión de rendimiento logarítmico se puede despejar el capital final en función del inicial:

$$C_2 = C_1 e^i$$

Esta expresión es válida para un tipo de interés continuo que aplica para el periodo de tiempo $\{t_1 \rightarrow t_2\}$. Para un rendimiento r que aplica en un intervalo de tiempo Δt, por ejemplo r anual implica Δt en años, se puede generalizar como:

$$\boxed{C_f = C_i e^{rt}} \tag{3.1}$$

Se basa en la reinversión de los intereses, que una vez pagados pasan a formar parte de la masa de capital invertido para el siguiente periodo pagadero.

Donde:

- C_f: Es es capital a fecha fin.
- C_i: Es el capital inicial.
- r: Es el tipo simple, que suele expresarse en $\%$, y aplica a plazos, como mensual, trimestral, semestral, anual, etc.
- t: Es el plazo adecuado a la expresión del tipo de interés r. Esto es, si r es trimestral, t deben ser trimestres, si r es anual, t deben ser años o fracciones del mismo.

Una de las principales ventajas que tiene el uso de la capitalización continua es la capacidad de sumar directamente las rentabilidades en el tiempo.

Una forma de relacionar la capitalización contínua con el resto se puede razonar como la composición de capitalización periódica, con un periodo de pago que tiende a cero. Por lo tanto:

Suponga un tipo de interés anual r, que se paga M veces al año, en un periodo $t = 1$ de tiempo el tipo de interés será $^r/_M$ y se conseguirá un capital final:

$$C_f = C_0 \left(1 + \frac{r}{1}\right)$$

En un segundo periodo $t = 2$, como r se paga 2 veces:

$$C_f = C_0 \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2$$

Para un periodo genérico $t = M$:

$$C_f = C_0 \left(1 + \frac{r}{M}\right)^M$$

Si M tiemde a ser grande $(M \to \infty)$, que es lo mismo que decir que se paga el tipo de interés de forma continua en el plazo de la inversión, entonces, $M/r \to \infty$:

$$\frac{C_f}{C_0} = \left(1 + \frac{1}{\frac{M}{r}}\right)^M = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{M}{r}}\right)^{\frac{M}{r}}\right]^r$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\frac{M}{r} \to \infty} \left(\frac{C_f}{C_0}\right) &= \lim_{\frac{M}{r} \to \infty} \left(\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{M}{r}}\right)^{\frac{M}{r}}\right]^r\right) \\
&= \left(\lim_{\frac{M}{r} \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{M}{r}}\right)^{\frac{M}{r}}\right]\right)^r
\end{aligned}$$

Por la defición de número e:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Entonces:

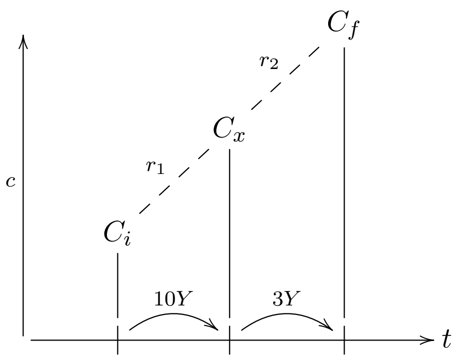
$$\frac{C_f}{C_i} = \left(\underbrace{\lim_{\frac{M}{r} \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{M}{r}} \right)^{\frac{M}{r}} \right]}_{e} \right)^{r} = e^{r}$$

Aunque la formaulación de la capitalización contínua es atractiva por su simplicidad, y propiedades, los tipos de interés que se cotizan y se usan en mercado o en operaciones financieras, son simples, o compuestos, siendo esta capitalización continua una trasnformación artificial del tipo, para expresarlo de esta forma tan conveniente.

Para ilustrar el caso se propone el siguiente ejemplo:

Ejemplo 10. *Se desea calcular la rentabilidad de invertir* 1 € *durante 10 años a un 3 % anual compuesto y reinvertirlo posteriormente durante 3 años a un 5 % anual compuesto.*

Para ello se tiene el siguiente esquema:



Con lo que el 1 € *invertido se convierte en:*

$$C_f = 1 \cdot (1 + 0{,}03)^{10} \cdot (1 + 0{,}05)^{3} = 1{,}56 \text{ €}$$

La rentabilidad en los 13 años de inversión será $r_{13Y} = \frac{C_f}{C_i} - 1 = \frac{1{,}56}{1} - 1 = 56\,\%$ *luego al año se tendría que despejar* r *en la siguiente expresión:*

$$C_f = C_i\,(1+r)^t \rightarrow 1{,}56 = 1 \cdot (1+r)^{13}$$

$$r = \sqrt[13]{1{,}56} - 1 \rightarrow r = 3{,}48\,\%$$

Si se indican rentabilidades continuas, entonces se pueden sumar de forma directa, esto es:

$$C_f = 1 \cdot e^{0{,}03 \cdot 10} \cdot e^{0{,}05 \cdot 3} = e^{0{,}3+0{,}15} = e^{0{,}45}$$

Aplicando el mismo principio que en el caso de capitalización compuesta para obtener la anual:

$$C_f = e^{r_y \cdot t} = e^{r_Y \cdot 13} = e^{0{,}45}$$

$$r_y = \frac{0{,}45}{13} = 3{,}46\,\%$$

De forma resumida, para el caso de continuas se podría simplificar mediante sumas, productos y fracciones (nada de raíces):

$$r_y = \frac{r_1 \cdot t_1 + r_2 \cdot t_2}{t_1 + t_2}$$

Se realizan los ejercicios con capitalización continua:

Ejemplo 11. *Calcular el valor final de una inversión de* $1\,000$ € *al* $5\,\%$ *anual continuo durante 1 año.*

Aplicando la expresión 3.1 se tiene:

$$C_f = 1000e^{0{,}05\cdot 1} = 1\,051{,}27\,€$$

Ejemplo 12. *Calcular el valor final de una inversión de* $1\,000\,€$ *al* $5\,\%$ *trimestral continuo durante 1 año.*

En este caso se debe prestar atención a que el tipo es trimestral compuesto, por lo que aplica la fórmula 3.1, pero el plazo no se expresa en los mismos términos, ya que se indica 1 año, que no son trimestres. Para que las unidades cuadren se debe pasar el tiempo de un año a trimestres (x4)

$$1Y \longrightarrow 4T$$

$$C_f = 1000e^{0{,}05\cdot 4} = 1\,221{,}40\,€$$

Ejemplo 13. *Calcular el valor final de una inversión de* $1\,000\,€$ *al* $5\,\%$ *anual compuesto durante* 1845 *días teniendo en cuenta que los años tienen 360 días.*

En el siguiente apartado se aborda el tema de las bases, por tanto se da por bueno el dato de que un año tiene 360 días y se aplica el mismo mecanismo que antes, se pasa el plazo a una unidad coherente con el modo de expresar el tipo de interés, esto es, a años.

$$\begin{tikzcd}
360d \arrow[r] \arrow[dr] & 1Y \\
1845d \arrow[r] \arrow[ur] & ?Y
\end{tikzcd}$$

$$C_f = 1000e^{0{,}05\cdot \frac{1845}{360}} = 1\,292{,}08\,€$$

Si se comparan los resultados de los ejercicios anteriores para los diferentes tipos de capitalización, se puede observar el comportamiento de las diferentes expresiones, si comparamos de forma continua en el tiempo, como se muestra en la figura 3.2, se puede llegar a las siguientes conclusiones.

- La capitalización continua siempre será mayor que el resto.
- La compuesta da peor resultado para periodos menores al año pero mejores que la simple para periodos superiores al año.
- En el año, simple y compuesta dan el mismo resultado.

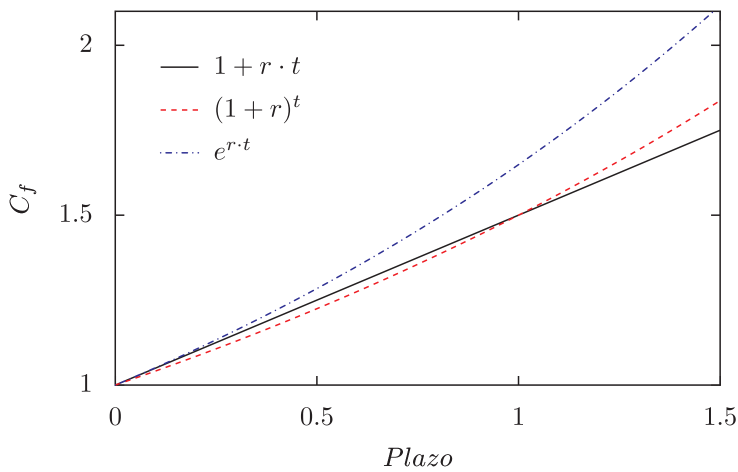
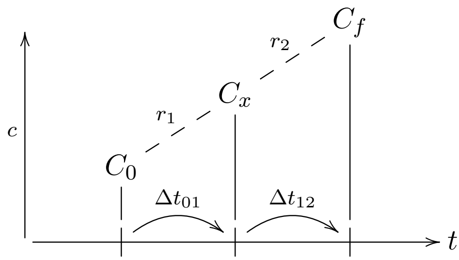


Figura 3.2: Comparación de modos de capitalización.

3.2. Composición de capitalizaciones.

Cuando sobre una inversión se aplican diferentes capitalizaciones en plazos sucesivos, es posible calcular el valor final de la inversión componiendo las capitalizaciones. Suponga que dispone de un capital C_0 y que se invierte durante un periodo Δt_{01} expresado en años, a un tipo simple anual r_1, posteriormente se invierte un periodo Δt_{12} expresado en años, a un tipo de interés compuesto r_2.



Entonces a final del primer periodo se tiene un capital intermedio C_x tal:

$$C_x = C_0 \left(1 + r_1 \Delta t_{01}\right)$$

El capital C_x, se reinvierte de tal manera que el valor final de la inversión será:

$$C_f = C_x \left(1 + r_2\right)^{\Delta t_{12}}$$

Sustituyendo en esta última expresión se tiene:

$$C_f = C_0 \left(1 + r_1 \Delta t_{01}\right) \left(1 + r_2\right)^{\Delta t_{12}}$$

Y así sucesivamente según la reinversión.

3.3. Problemas.

Problema 12. *Calcular el valor final de 300 euros invertidos al 3 % anual durante 4 años en tipo continuo.*

Aplicando la expresión 3.1:

$$C_f = C_i e^{r \cdot t} \begin{cases} C_i & 100\,€ \\ r & 3\,\% \\ t & 4\text{y} \end{cases} \rightarrow C_f = 100e^{3\,\% \cdot 4} = 338{,}25\,€$$

Problema 13. *¿Cuánto tengo que invertir al 4 % continuo anual para obtener dentro de 10 años un importe final de 100 euros?*

De la expresión 3.1 se despeja el capital inicial:

$$C_i = C_f e^{-r \cdot t} \rightarrow C_i = 100e^{-4\,\% \cdot 10} = 67{,}03\,€$$

Problema 14. *Demostrad que un 3 % continuo semestral es equivalente a un 6 % anual. Sacad una propiedad general de los tipos de interés continuos. ¿Hay alguna otra forma de capitalización que cumpla esa misma propiedad?*

Se puede resolver de forma explícita o de froma explícita (para un plazo de 1 año):

$$C_f = C_i e^{3\,\% \cdot 2T_s}$$

$$C_f = C_i e^{6\,\% \cdot T_y}$$

Si han de ser equivalentes:

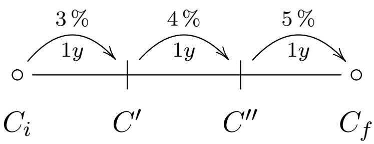
$$C_f = C_i e^{3\,\% \cdot 2T_s} = C_i e^{6\,\% \cdot T_y}$$

$$e^{3\,\% \cdot 2T_s} = e^{6\,\% \cdot T_y}$$

$$3\,\% \cdot 2T_s = 3\,\% \cdot T_y$$

Problema 15. *Si un depósito a tres años me ofrece un 3 %, un 4 % y un 5 % sucesivamente para cada uno de los años, y deposito 1.000 euros, ¿cuánto recibiré al final? Compararlo con uno que ofrezca un 4 % anual para los tres años.*

Suponiendo que por convenio los tipos de interés son compuestos anuales. Se puede componer las capitalizaciones:



$$C' = C_i \left(1 + 3\,\%\right)^1$$

$$C'' = C' \left(1 + 4\,\%\right)^1 = C_i \left(1 + 3\,\%\right)\left(1 + 4\,\%\right)$$

$$C_f = C'' \left(1 + 5\,\%\right) = C_i \left(1 + 3\,\%\right)\left(1 + 4\,\%\right)\left(1 + 5\,\%\right)$$

$$C_f = 1\,124{,}76\,€$$

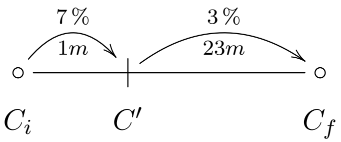
Un depósito al tipo de interés del 4 % para un plazo de 3 años y un capital inicial de 1 000 €:

$$C_f = 1\,000\,(1+4\,\%)^3$$

$$C_f = 1\,124{,}86\,€$$

Problema 16. *Tenemos un producto de dos años que por 10.000 euros, nos ofrece un primer mes al 7 % compuesto anual y después, y hasta terminar los dos años, un tipo del 3 % anual compuesto. ¿Cuánto recibimos al final de estos dos años?*

Es cuestión de componer capitalizaciones:



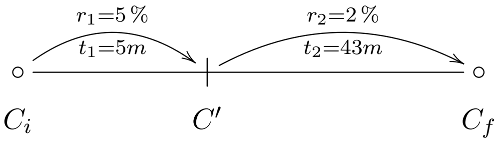
$$C_f = C'\,(1+4\,\%)^{\frac{23}{12}} = C_i\,(1+7\,\%)^{\frac{1}{12}}\,(1+3\,\%)^{\frac{23}{12}}$$

$$C_f = 10\,000\,€ \cdot (1+7\,\%)^{\frac{1}{12}}\,(1+3\,\%)^{\frac{23}{12}}$$

$$C_f = 10\,642{,}70\,€$$

Problema 17. *Una cuenta remunerada nos ofrece un tipo anual compuesto de bienvenida de un 5 %, pero sólo durante los 5 primeros meses. Después, su tipo de remuneración es del 2 % anual compuesto. Si mantenemos 3.000 euros durante 4 años completos, bajo esta remuneración, ¿cuál será el capital final?*

El esquema de la operación es el siguiente:



Con esto aplicando capitalización compuesta:

$$\begin{aligned} C' &= Ci\,(1+r_1)^{T_1} \\ C_f &= C'\,(1+r_2)^{T_2} \\ C_f &= C_i\,(1+r_1)^{T_1}\,(1+r_2)^{T_2} \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$C_f = 3\,000\,€\,(1+5\,\%)^{\frac{5}{12}}\,(1+2\,\%)^{\frac{43}{12}}$$

$$C_f = 3\,286{,}75\,€$$

Capítulo 4

Leyes de Descuento.

4.1. Introducción.

El descuento es la operación contraria a la capitalización, esto es, mueve capitales desde una fecha futura hasta una presente o pasada. Los posibles tipos de descuento existentes son más de los contemplados en este libro. Si se han indicado tres tipos de capitalización, existen tres tipos de descuentos equivalentes:

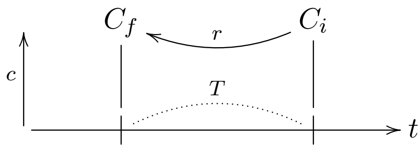


Figura 4.1: Descuento.

1. Descuento Comercial (un clásico).

   a) Simple.

   b) Compuesto.

2. Descuento Racional

   a) Simple: Para operaciones de hasta un año.

   b) Compuesto: Para operaciones de más de un año.

3. Descuento continuo.

4.2. Descuento comercial.

Usa un tipo de descuento d, en lugar de un tipo de interés.

Formulación para descuento comercial simple:

$$C_i = C_f\,(1 - d{\cdot}\Delta t) \tag{4.1}$$

Formulación para descuento comercial compuesto:

$$C_i = C_f\,(1 - d)^{\Delta t} \tag{4.2}$$

4.3. Descuento racional.

4.3.1. Descuento Simple.

Descontar consiste en traer a valor, por ejemplo, presente un capital futuro dado un tipo de interés.

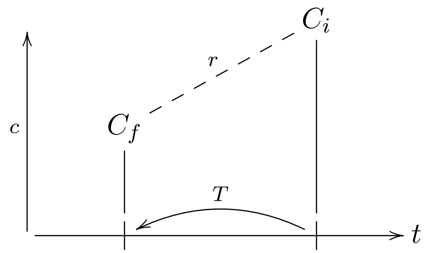
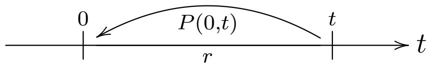


Figura 4.2: Descuento Simple.

Para operaciones de menos de un año se aplica capitalización simple:

$$\boxed{C_f = C_i P\left(0,t\right) = \frac{C_i}{(1+r\cdot t)}} \tag{4.3}$$



Donde:

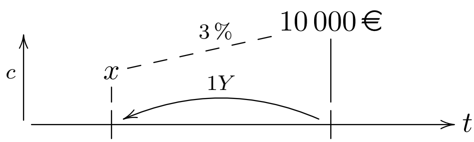
- C_f: Es es capital a fecha inicial.
- C_i: Es el capital inicial en fecha futura.
- $P\left(0,t\right)$: es el "factor de descuento", que en este caso es simple, por tanto $P\left(0,t\right) = \frac{1}{1+r\cdot t}$
- r: Es el tipo simple, que suele expresarse en %, y aplica a plazos, como mensual, trimestral, semestral, anual, etc.

- t: Es el plazo adecuado a la expresión del tipo de interés r. Esto es, si r es trimestral, t deben ser trimestres, si r es anual, t deben ser años o fracciones del mismo.

Para evidenciar la importancia de este concepto se presentan algunos ejercicios:

Ejemplo 14. *Calcular el capital a invertir al 3 % simple anual hoy si se desea disponer de* $10\,000$ € *dentro de 12 meses.*

Para ello se parte del siguiente esquema:



Con lo que $x = \frac{10000}{1+0{,}03\cdot 1} = 9\,708{,}74$ €

Ejemplo 15. *Calcular el valor presente de* $1\,000$ € *dentro de 6 meses, con un tipo del 5 % anual simple.*

El esquema es similar al del ejercicio anterior, si bien aquí se juega con los plazos.

$$x = \frac{1\,000\,€}{1 + 0{,}05 \cdot \frac{6}{12}} = 975{,}61\,€$$

Ejemplo 16. *Calcular el valor actual de las inversiones del esquema 4.3 suponiendo descuento racional simple.*

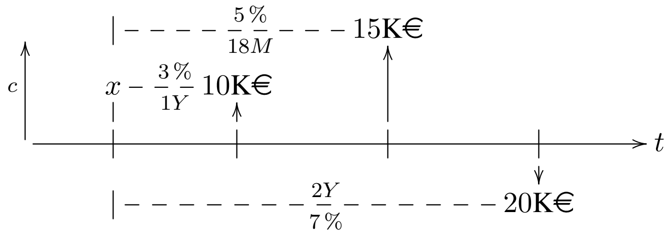


Figura 4.3: Inversiones ejercicio 16

Para poder sumar los importes es necesario llevarlos hasta el momento del tiempo x, para ello se deben descontar los flujos y traerlos a valor presente.

$$K_1 = \frac{10\,000}{1 + 0{,}03 \cdot 1} = 9\,708{,}74\,€$$

$$K_2 = \frac{15\,000}{1 + 0{,}05 \cdot \frac{18}{12}} = 13\,953{,}49\,€$$

$$K_3 = \frac{20\,000}{1 + 0{,}07 \cdot 2} = 17\,543{,}86\,€$$

$$\begin{aligned} K &= K_1 + K_2 - K_3 \\ K &= 9\,708{,}74 + 13\,953{,}49 - 17\,543{,}86 = 6\,118{,}37\,€ \end{aligned}$$

4.3.2. Descuento compuesto.

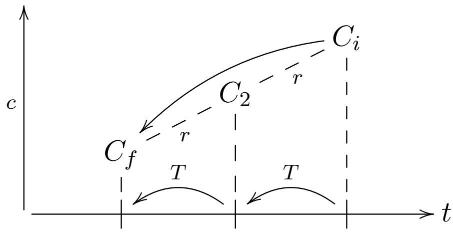
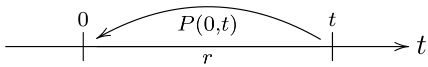


Figura 4.4: Descuento compuesto.

Para operaciones de más de un año se aplica descuento compuesto:

$$\boxed{C_f = C_i P\left(0,t\right) = \frac{C_i}{(1+r)^t}} \tag{4.4}$$



Donde:

- C_f: Es es capital a fecha inicial.
- C_i: Es el capital inicial en fecha futura.
- $P\left(0,t\right)$: es el “factor de descuento”, que en este caso es compuesto, por tanto $P\left(0,t\right) = \frac{1}{(1+r)^t}$

- r: Es el tipo simple, que suele expresarse en %, y aplica a plazos, como mensual, trimestral, semestral, anual, etc.
- t: Es el plazo adecuado a la expresión del tipo de interés r. Esto es, si r es trimestral, t deben ser trimestres, si r es anual, t deben ser años o fracciones del mismo.

Ejemplo 17. *Calcular el valor actual de las inversiones del esquema 4.3 suponiendo descuento racional según plazo, si los tipos se han expresado según convenio (anual simple para operaciones hasta 12M y anual compuesto para operaciones de más de 12M).*

Al igual que en el ejercicio 16, se deben descontar los importes de los flujos, pero ahora se aplican los descuentos según el plazo:

Para el primer flujo se usa descuento simple, ya que la operación es de 12 meses.

$$K_1 = \frac{10\,000}{1 + 0{,}03 \cdot 1} = 9\,708{,}74\,€$$

Para el resto hay que usar descuento compuesto, ya que las operaciones son de más de 12 meses.

$$K_2 = \frac{15\,000}{(1 + 0{,}05)^{\frac{18}{12}}} = 13\,941{,}43\,€$$

$$K_3 = \frac{20\,000}{(1 + 0{,}07)^2} = 17\,468{,}77\,€$$

$$\begin{aligned} K &= K_1 + K_2 - K_3 \\ K &= 9\,708{,}74 + 13\,941{,}43 - 17\,468{,}77 = 6\,181{,}40\,€ \end{aligned}$$

4.4. Descuento continuo.

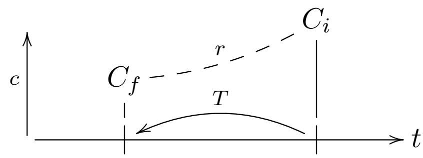
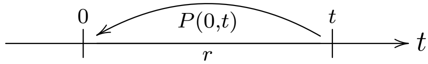


Figura 4.5: Descuento continuo.

De forma similar al resto de descuentos anteriores, este descuento, permite obtener el valor presente de un flujo futuro[1], con el tipo de interés expresado en su forma continua.

$$\boxed{C_f = C_i P\left(0,t\right) = C_i e^{-rt}} \tag{4.5}$$



Donde:

- C_f: Es es capital a fecha fin.
- C_i: Es el capital inicial.
- $P\left(0,t\right)$: es el "factor de descuento", que en este caso es continuo, por tanto $P\left(0,t\right) = e^{-rt}$

[1]En realidad permite calcular el valor a una fecha dada anterior a la del pago o cobro del flujo.

- r: Es el tipo simple, que suele expresarse en %, y aplica a plazos, como mensual, trimestral, semestral, anual, etc.
- t: Es el plazo adecuado a la expresión del tipo de interés r. Esto es, si r es trimestral, t deben ser trimestres, si r es anual, t deben ser años o fracciones del mismo (ya que estamos en operaciones de hasta un año).

4.5. Problemas.

Problema 18. *Calcule:*

a) Descontar sobre 1 000 € una tasa de descuento del 5 % anual durante 6 meses, con descuento comercial (simple)

b) Descontar sobre 1 000 € un tipo de interés del 5 % anual durante 6 meses, con descuento racional simple y compuesto. Comparad los resultados.

Para el primer caso:

$$C_f = 1\,000\left(1 - 5\,\%\frac{6}{12}\right) = 975\,€$$

Para el segundo caso:

$$C_f = 1\,000\left(\frac{1}{1 + 5\,\%\frac{6}{12}}\right) = 975{,}60\,€$$

$$C_f = 1\,000\left(\frac{1}{(1 + 5\,\%)^{\frac{6}{12}}}\right) = 975{,}90\,€$$

Problema 19. *Calcular el tipo de descuento anual compuesto equivalente del problema anterior (caso a)*

Si $C_f = 975\,€$ y $C_0 = 1\,000\,€$, como la ecuación de descuento compuesto (entendemos descuento no racional):

$$975\,€ = 1\,000\,(1-d)^{6/12}$$

$$d = 1 - \left(\frac{975}{1\,000}\right)^{12/6} = 4,9375\,\%$$

Problema 20. *Descontar sobre* $500\,€$ *un tipo de interés del 4 % semestral durante 3 meses, con descuento simple (racional).*

Solución:

$$C_f = 500\frac{1}{\left(1 + 4\,\%\frac{1}{2}\right)} = 490{,}19\,€$$

Problema 21. *Descontar sobre* $700\,€$ *un tipo de interés del 0,40 % mensual durante 6 meses, con descuento (racional) compuesto.*

Solución:

$$C_f = 700\frac{1}{(1 + 0,40\,\%)^6} = 683{,}43\,€$$

Capítulo 5

Equivalencias de tipos y capitales.

5.1. Introducción.

En lecciones anteriores se ha detallado la forma en la que capitalizar o descontar capitales. Se han explicado tres formas de hacerlo, de forma simple, compuesta o continua. Los resultados son diferentes, al capitalizar de diferente forma para un mismo tipo y plazo, esto es, un 5 % anual simple no es lo mismo que un 5 % anual compuesto, y ambos son diferentes de un 5 % anual continuo, para una inversión de, por ejemplo 2 años.

Suponga que va a capitalizar un cierto capital C_i, durante un plazo t, aplicando capitalización simple y compuesta, de tal manera que ambas dan

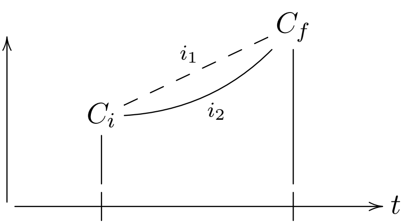


Figura 5.1: Equivalencias

como resultado un capital final, igual C_f. Está claro que los tipos de interés en cada capitalización no serán iguales, sino equivalentes, ya que son tipos equivalentes aquellos que dado un capital C_i, tras un plazo t, llevan a un mismo capital final C_f.

5.2. Tipos equivalentes.

En todas las formulaciones de capitalización o descuento vistas hasta este punto, aparece C_f y C_i por lo que dado un tipo para una forma de capitalizar, y sabiendo que C_f y C_i son constantes, se puede obtener un tipo equivalente en otra forma de capitalizar, o bien en la misma pero en otra base de pagos. En detalle:

1. Existe una forma de obtener tipos equivalentes entre diferentes formas de capitalización.

2. Existe una forma de obtener tipos equivalentes para una misma forma de capitalización pero diferente calendario de pagos.

Para realizar el cambio entre los diferentes tipos de interés se parte de las ecuaciones 2.1, 2.2, 3.1, y se igualan al asumir que se parte y se llega al mismo capital, esto es, que C_f y C_i se mantienen constantes.

Dados C_f y C_i para un tipo r_s simple anual, el equivalente en tipo r_c anual compuesto sería:

$$C_f = C_i\,(1 + r_s t) \longleftrightarrow C_f = C_i\,(1 + r_c)^t$$

$$1 + r_s t = (1 + r_c)^t \rightarrow r_c = \sqrt[t]{1 + r_s t} - 1$$

Dados C_f y C_i para un tipo r_s simple anual, el equivalente en tipo r_e anual continuo sería:

$$C_f = C_i (1 + r_s t) \longleftrightarrow C_f = C_i e^{r_e t}$$

$$1 + r_s t = e^{r_e t} \rightarrow r_e = \frac{\ln (1 + r_s t)}{t}$$

Por último, dados C_f y C_i para un tipo r_c compuesto anual, el equivalente en tipo r_e anual continuo sería:

$$C_f = C_i (1 + r_c)^t \longleftrightarrow C_f = C_i e^{r_e t}$$

$$\begin{aligned} (1 + r_c)^t &= e^{r_e t} \\ r_e t &= t \cdot \ln (1 + r_c) \\ r_e &= \ln (1 + r_c) \end{aligned}$$

Para realizar el cambio entre calendarios de pagos se trata de jugar con el término t de las expresiones 2.1, 2.2, 3.1, asumiendo que C_f y C_i se deben mantener constantes.

Ejemplo 18. *Calcular el tipo mensual simple r_{ms} dado un tipo r_{ys} simple anual.*

$$C_f = C_i (1 + r_{ys} \cdot Años) \longleftrightarrow C_f = C_i (1 + r_{ms} \cdot Meses)$$

$$(1 + r_{ys} \cdot Años) = (1 + r_{ms} \cdot Meses) \rightarrow r_{ms} = r_{ys}\frac{Y}{M}$$

Supongamos una inversión de duración 1 año: $\boxed{r_{ms} = {}^{r_{ys}}/_{12}}$

Ejemplo 19. *Calcular el tipo anual simple equivalente a un 5 % simple trimestral.*

Suponga una inversión C_i durante 1 año, que son 4 trimestres.

Al finalizar el plazo el capital C_i invertido se ha convertido en $C_f = C_i\,(1 + 0{,}05 \cdot t)$

Estos capitales invertidos al tipo simple anual deben ser los mismos, por lo que:

$$C_f = C_i\,(1 + r \cdot 1) \longleftrightarrow C_f = C_i\,(1 + 0{,}05 \cdot 4)$$

$$r = 0{,}2 = 20\,\%$$

Ejemplo 20. *Calcular el tipo diario simple equivalente a un 3 % compuesto semestral.*

Suponga una inversión de un capital C_i durante 1 año (2 semestres).

Para el tipo compuesto:

$$C_f = C_i\,(1 + 0{,}03)^2$$

Para el tipo simple diario:

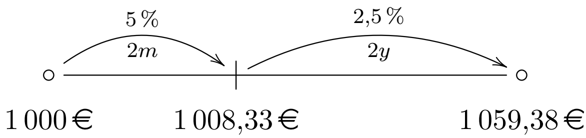
$$C_f = C_i\,(1 + r \cdot 365)$$

$$1 + 365r = 1{,}03^2 \rightarrow r = 0{,}02\,\%$$

Ejemplo 21. *Un depósito que paga el 5 % anual simple durante 2 meses y después un* $2{,}5\,\%$ *durante 2 años, ¿cual es el tipo anual compuesto equivalente de la operación?.*

Suponga que se invierten $1\,000$ € en este producto. Primero se calcula el valor final de la inversión pasados los 2 años y 2 meses. Nótese que la primera parte de la inversión se capitaliza de forma simple por tener 2 meses de duración, mientras que la segunda se capitaliza de forma compuesta al ser una inversión de más de un año.

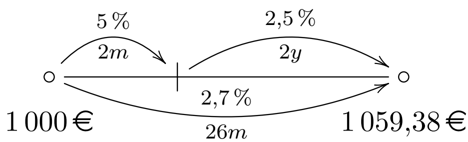
$$C_f = 1\,000\left(1 + 5\,\%\frac{2}{12}\right)(1 + 2{,}5\,\%)^2 = 1\,059{,}38\,€$$



Ahora se dispone de $C_i = 1\,000$ € y de $C_f = 1\,059{,}38$ € siendo el plazo de 2 años y 2 meses, esto es 26 meses, o lo que es lo mismo $^{26}/_{12}$ años.

Con esto aplicando la expresión 2.2, se tiene:

$$1\,059{,}38 = 1\,000\,(1 + r)^{\frac{26}{12}} \rightarrow r = 2{,}70\,\%$$



5.3. TAE y TIN.

A partir del año 1990 el Banco de España, en adelante BdE, obliga a publicar a las entidades de crédito y cajas de ahorro, el índice TAE, junto a los productos que comercialicen. Esto se indica en la norma 8/ 1990 sobre “Transparencia de las operaciones y protección de la clientela”. Y tiene un sentido de ayudar a la clientela a comparar el posible rendimiento/coste de las operaciones que van a contratar, con el fin de poder seleccionar, para un mismo tipo de producto (por ejemplo préstamos personales) entre entidades, o entre productos similares de una misma o diferentes entidades de crédito (por ejemplo depósitos).

Definición 1. Se define TAE como la Tasa Anual Equivalente o Efectiva. Es un tipo anual compuesto, por lo que se rige por la expresión 2.2 para capitalizar y para descontar, por su correspondiente descuento racional compuesto.

Así la TAE ofrece una visión homogénea de tipo anual que abstrae al cliente final de las comisiones, puesto que las incluye dentro del propio cálculo, por ejemplo comisiones de apertura, de cancelación, de amortización anticipada (para préstamos). Pero no incluye los gastos en actos jurídico documentales (notarios, pasantes, corredurías y demás animales de compañía), ni los de seguros o garantías, ni corretajes o impuestos.

Definición 2. Se define TIN, o Tipo de Interés Nominal, como el tipo simple anual equivalente de la operación, por lo que se rige por la expresión 2.1, para capitalizar y para descontar, por su correspondiente descuente racional simple.

Se puede establecer una relación entre ambos, de forma general teniendo en cuenta una frecuencia de pagos anual (Número de veces que se cobra intereses en un año), f.

$$\boxed{1 + \text{TAE} = \left(1 + \frac{\text{TIN}}{f}\right)^f} \tag{5.1}$$

Ejemplo 22. *Suponga un depósito de* $1\,000$ € *a 6 meses con un tipo nominal anual del 5 % y suponga un depósito de* $1\,000$ € *a 6 meses con un 5 % TAE. ¿Qué TIN tiene este último depósito? ¿Que retorno se obtendría de ambos al final del depósito?*

Si se tiene un TAE del $5\,\%$ y un depósito de 6 meses, el TIN correspondiente se obtendría de la expresión 5.1, así:

$$1 + 5\,\% = \left(1 + \frac{\text{TIN}}{2}\right)^2 \rightarrow \text{TIN} = 4{,}94\,\%$$

Para el primer depósito se tendría un $C_f = 1\,000\left(1 + 5\,\%\frac{1}{2}\right) = 1\,025$ € luego el retorno es de 25 €.

Para el primer depósito se tendría un $C_f = 1\,000\,(1 + 5\,\%)^{\frac{1}{2}} = 1\,024{,}7$ € luego el retorno es de $24{,}7$ €.

Ejemplo 23. *Calcular el TIN correspondiente al TAE del 2 %, 3 %, 4 %, 5 %, 6 %, 8 %, 10 %, 12 %, 15 % y 20 %, para frecuencia anual, semestral, trimestral y mensual.*

Aplicando de forma recurrente la expresión 5.1, para los TAE del enunciado, se obtiene el cuadro 5.1 de resultados.

Nótese que el TIN es siempre menor que el TAE cuando aumenta la frecuencia de pagos.

Freq.	Y	S	T	M
TAE	f=1	f=2	f=3	f=4
2,00 %	2,00 %	1,99 %	1,99 %	1,98 %
3,00 %	3,00 %	2,98 %	2,97 %	2,96 %
4,00 %	4,00 %	3,96 %	3,94 %	3,93 %
5,00 %	5,00 %	4,94 %	4,91 %	4,89 %
6,00 %	6,00 %	5,91 %	5,87 %	5,84 %
8,00 %	8,00 %	7,85 %	7,77 %	7,72 %
10,00 %	10,00 %	9,76 %	9,65 %	9,57 %
12,00 %	12,00 %	11,66 %	11,49 %	11,39 %
15,00 %	15,00 %	14,48 %	14,22 %	14,06 %
20,00 %	20,00 %	19,09 %	18,65 %	18,37 %

Cuadro 5.1: Ejercicio 23

5.4. Sustitución de capitales.

Este tipo de operación financiera consiste en tomar una serie de flujos futuros y sustituirlo por otro u otros flujos en un momento del tiempo determinado. Con este tipo de operativa se puede agrupar capitales futuros o desdoblar un capital concreto en otros que devengan en diferentes momentos del tiempo.

En todo momento los capitales calculados deben ser financieramente equivalentes.

De lo anterior se deduce que para poder determinar los capitales, tiempos de devengo, o tipos aplicados, se *valoran todos los flujos en un mismo instante del tiempo* (por ejemplo *Hoy*) y se establece que deben ser iguales.

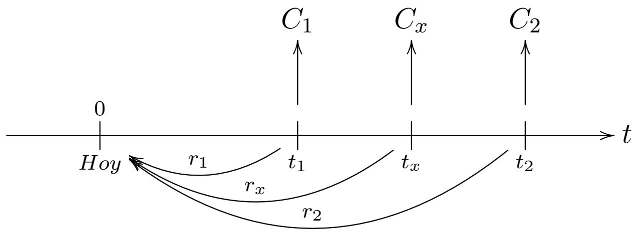


Figura 5.2: Sustitución de capitales

Equivalencia en valor presente (C_1 descontado se denota como $C_1^\star$):

$$C_x^\star = C_1^\star + C_2^\star$$

Si detallamos la expresión anterior se tiene:

$$C_x P\left(0, t_x\right) = C_1 P\left(0, t_1\right) + C_2 P\left(0, t_2\right)$$

Donde $P\left(0, t_n\right)$ es el factor de descuento de t_n a Hoy.

Si se supone convenio de capitalización/descuento simple se tendrá:

$$\frac{C_x}{1 + r_x t_x} = \frac{C_1}{1 + r_1 t_1} + \frac{C_2}{1 + r_2 t_2} \tag{5.2}$$

Si se supone convenio de capitalización/descuento compuesto se tendrá:

$$\frac{C_x}{\left(1 + r_x\right)^{t_x}} = \frac{C_1}{\left(1 + r_1\right)^{t_1}} + \frac{C_2}{\left(1 + r_2\right)^{t_2}} \tag{5.3}$$

Puede darse el caso que uno de los capitales devenga antes de un año, por lo que estos capitales tendrán descuento simple, mientras que si el capital devenga después de un año, se tendrá descuento compuesto.

Suponga que en el esquema 5.2, t_1 es menor que un año, y que t_x, y t_2 son mayores que el año, entonces:

$$\underbrace{\frac{C_x}{(1+r_x)^{t_x}}}_{\text{Compuesto}} = \underbrace{\frac{C_1}{1+r_1 t_1}}_{\text{Simple}} + \underbrace{\frac{C_2}{(1+r_2)^{t_2}}}_{\text{Compuesto}} \tag{5.4}$$

Para un caso más general:

$$C_x P(0,t_x) = C_1 P(0,t_1) + C_2 P(0,t_2) + \ldots + C_n P(0,t_n)$$

$$C_x P(0,t_x) = \sum_{i=1}^{n} C_i P(0,t_i)$$

Donde $P(0,t_x)$ y $P(0,t_i)$, serán factores de descuento simples o compuestos en función de cuando toque su pago. De todas formas según lo explicado en este mismo capítulo, siempre se puede encontrar un tipo compuesto equivalente al simple y dejar la expresión anterior en términos de descuentos compuestos.

En las expresiones 5.2,5.3 y 5.4 se tienen como incógnitas: C_x, t_x, r_x. Así fijados dos de los tres se puede encontrar el restante. Por tanto se pueden distinguir los siguientes casos:

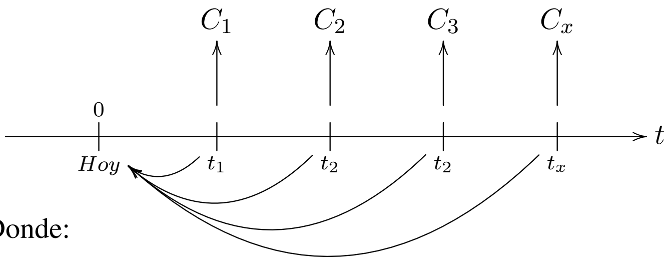
1. Capital equivalente: Dado t_x, r_x, se trata de calcular el capital C_x equivalente.

2. Vencimiento equivalente: Dado C_x, r_x, se trata de encontrar

el tiempo t_x en el que devenga el pago.

3. Tipo de equilibrio: Dado C_x, t_x, se trata de encontrar el tipo de interés r_x de equilibrio.

Ejemplo 24. *Suponga que usted debe abonar las cantidades de* $2\,000$ *€,* $5\,000$ *€, y* $10\,000$ *€, dentro de 2, 4 y 8 meses respectivamente. Acuerde un capital equivalente a abonar dentro de 11 meses si el tipo aplicado a la operación es el 5 % anual simple.*



Donde:

(C_1, t_1, r_1): Son 2 000 € en 2 meses al 5 %

(C_2, t_2, r_2): Son 5 000 € en 4 meses al 5 %

(C_3, t_3, r_3): Son 10 000 € en 8 meses al 5 %

(C_x, t_x, r_x): Son ???€ en 11 meses al 5 %

En todos los casos se tiene un periodo menor a un año, por lo que el convenio es el de descuento simple.

Por capitales equivalentes:

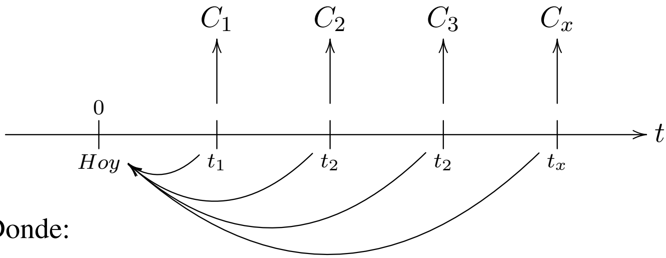
$$\frac{C_x}{1+r_xt_x} = \frac{C_1}{1+r_1t_1} + \frac{C_2}{1+r_2t_2} + \frac{C_3}{1+r_3t_3}$$

$$C_x = (1+r_xt_x)\left(\frac{C_1}{1+r_1t_1} + \frac{C_2}{1+r_2t_2} + \frac{C_3}{1+r_3t_3}\right)$$

$$C_x = \left(1 + 5\,\%\frac{11}{12}\right)\left(\frac{2\,000\,€}{1 + 5\,\%\frac{2}{12}} + \frac{5\,000\,€}{1 + 5\,\%\frac{4}{12}} + \frac{10\,000\,€}{1 + 5\,\%\frac{8}{12}}\right)$$

$$\boxed{C_x = 17\,338{,}79\,€}$$

Ejemplo 25. *Suponga que usted debe abonar las cantidades de* $2\,000\,€$*,* $5\,000\,€$*, y* $10\,000\,€$*, dentro de 2, 4 y 8 meses respectivamente. Acuerde el momento de pago si el tipo aplicado a la operación es el 5 % anual simple y el capital que se desea abonar es de* $17\,000\,€$*.*



Donde:

(C_1, t_1, r_1): Son $2\,000\,€$ en 2 meses al 5 %

(C_2, t_2, r_2): Son $5\,000\,€$ en 4 meses al 5 %

(C_3, t_3, r_3): Son $10\,000\,€$ en 8 meses al 5 %

(C_x, t_x, r_x): Son $17\,000\,€$ en ?? meses al 5 %

$$\frac{C_x}{1 + r_x t_x} = \frac{C_1}{1 + r_1 t_1} + \frac{C_2}{1 + r_2 t_2} + \frac{C_3}{1 + r_3 t_3}$$

$$1 + r_x t_x = \frac{C_x}{\left(\frac{C_1}{1+r_1 t_1} + \frac{C_2}{1+r_2 t_2} + \frac{C_3}{1+r_3 t_3}\right)}$$

$$t_x = \frac{1}{r_x}\left(\frac{C_x}{\left(\frac{C_1}{1+r_1t_1}+\frac{C_2}{1+r_2t_2}+\frac{C_3}{1+r_3t_3}\right)} - 1\right)$$

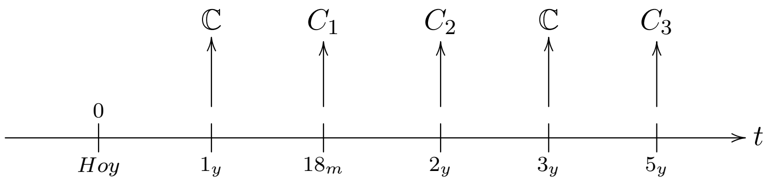
$$t_x = \frac{1}{5\,\%}\left(\frac{17\,000\,€}{\left(\frac{2\,000\,€}{1+5\,\%\frac{2}{12}}+\frac{5\,000\,€}{1+5\,\%\frac{4}{12}}+\frac{10\,000\,€}{1+5\,\%\frac{8}{12}}\right)} - 1\right)$$

$$\boxed{t_x = 0{,}508\,\text{años} = 6{,}1\,\text{meses}}$$

Ejemplo 26. *Suponga que, por motivo de la recepción de material de importación, debe hacer frente a los siguientes pagos:* $500\,000\,€$ *dentro de 18 meses,* $750\,000\,€$ *dentro de 2 años,* $1\,000\,000\,€$ *dentro de 5 años. Debido a que para su tesorería resulta beneficioso, ha acordado cambiar estos pagos por otros dos pagos equivalentes de igual importe C dentro de 1 año y dentro de 3 años. Calcule el importe C de dichos pagos si la curva de tipos es la indicada en la siguiente tabla.*

Plazo	Tipo	Pagos
1y	$2{,}00\,\%$	$\mathbb{C}$
18m	$2{,}25\,\%$	$C_1 = 500\,000\,€$
2y	$3,00\,\%$	$C_2 = 750\,000\,€$
3y	$4,50\,\%$	$\mathbb{C}$
5y	$5{,}50\,\%$	$C_3 = 1\,000\,000\,€$

El esquema de pagos es el siguiente:



La ecuación de equivalencia será el equilibrio en valor presente de los flujos antiguos frente a los nuevos. Por lo tanto lo primero será obtener el valor presente de los flujos.

Para el caso de los flujos antiguos $V_a^\star$:

$$V_a^\star = C_1 P\left(0, t_1\right) + C_2 P\left(0, t_2\right) + C_3 P\left(0, t_3\right)$$

Donde:

C_1, C_2, C_3: Son respectivamente 500 000 €, 750 000 €, 1 000 000 €.

$P\left(0, t_1\right)$: Es el factor de descuento desde $t_1 = 18_m$ hasta hoy, bajo un tipo de $r_{18_m} = 2,25\,\%$. Es descuento racional compuesto puesto que el plazo es mayor a un año.

$P\left(0, t_2\right)$: Es el factor de descuento desde $t_2 = 2_y$ hasta hoy, bajo un tipo de $r_{2_y} = 3,00\,\%$. Es descuento racional compuesto puesto que el plazo es mayor a un año.

$P\left(0, t_3\right)$: Es el factor de descuento desde $t_3 = 5_y$ hasta hoy, bajo un tipo de $r_{5_y} = 5,50\,\%$. Es descuento racional compuesto puesto que el plazo es mayor a un año.

Como todos son descuento racional compuesto la expresión sería:

$$V_a^\star = C_1 \frac{1}{\left(1 + r_{18_m}\right)^{t_1}} + C_2 \frac{1}{\left(1 + r_{2_y}\right)^{t_2}} + C_3 \frac{1}{\left(1 + r_{5_y}\right)^{t_3}}$$

$$V_a^\star = \frac{500\,000\,€}{(1+2,25\,\%)^{18/12}} + \frac{750\,000\,€}{(1+3{,}00\,\%)^2} + \frac{1\,000\,000\,€}{(1+5,50\,\%)^5}$$

$$\boxed{V_a^\star = 483\,587{,}46\,€ + 706\,946{,}93\,€ + 765\,134{,}35\,€}$$

$$\boxed{V_a^\star = 1\,955\,668{,}74\,€}$$

Para el caso de los flujos nuevos $V_n^\star$:

$$V_n^\star = \mathbb{C}{\cdot}P\,(0,t_x) + \mathbb{C}{\cdot}P\,(0,t_y)$$

Donde:

$\mathbb{C}$: Capital que se desea calcular.

$P\,(0,t_x)$: Es el factor de descuento desde $t_x = 1_y$ hasta hoy, bajo un tipo de $r_{1y} = 2{,}00\,\%$. Es descuento racional compuesto puesto que el plazo es a un año.

$P\,(0,t_y)$: Es el factor de descuento desde $t_y = 3_y$ hasta hoy, bajo un tipo de $r_{3_y} = 4,50\,\%$. Es descuento racional compuesto puesto que el plazo es mayor a un año.

Por tanto:

$$V_n^\star = \mathbb{C}\left(\frac{1}{\left(1+r_{1_y}\right)^{t_x}} + \frac{1}{\left(1+r_{3_y}\right)^{t_y}}\right)$$

$$V_n^\star = \mathbb{C}\left(\frac{1}{(1+2,00\,\%)^1} + \frac{1}{(1+4,50\,\%)^3}\right)$$

$$V_n^\star = 1,8566\mathbb{C}$$

Como ambos deben se capitales equivalentes entonces:

$$V_n^\star = V_a^\star$$

$$1,8566\mathbb{C} = 1\,955\,668{,}74\,€$$

Por tanto:

$$\boxed{\mathbb{C} = 1\,053\,309{,}95\,€}$$

5.5. Matemáticas de las Cuentas Corrientes.

Se va a suponer el caso más general, que son las cuentas corrientes bancarias, que son contratos entre una entidad financiera una persona (física o jurídica). Las cuentas corrientes pueden ser de dos tipos:

$$\text{Cuentas Corrientes} \begin{cases} \text{De Depósito} \\ \text{De Crédito} \end{cases}$$

En ambos casos el cliente adquiere un producto bancario en el que se realizan apuntes de ingreso de dinero en cuenta, y apuntes de retirada de fondos de cuenta.

En la cuenta corriente de depósito el cliente ingresa fondos en cuenta y los retira cuando los necesita de forma inmediata. Cabe la posibilidad (y es muy habitual) de que el contrato de cuenta corriente, permita retirar más fondos de los que se dispone, dejando la cuenta en negativo[1], hasta una cierta cantidad que se suele indicar en el contrato.

En la cuenta corriente de crédito, la entidad financiera concede al cliente una cantidad de dinero a crédito que éste va disponiendo (retirando) o reponiendo (ingresando). La cantidad máxima de dinero que se dispone en cuenta (el crédito) se ajusta en el contrato.

En cuanto a los intereses aplicados por el dinero se tienen las siguientes opciones:

$$\text{Tipo de C.C.} \begin{cases} \text{Depósito} & \begin{cases} \text{Fondos} > 0 \quad r_{cc} \\ \text{Fondos} < 0 \quad r_d \end{cases} \\ \text{Crédito} & \begin{cases} \text{Dispuesto} < \text{Límite} \quad r_c \\ \text{Dispuesto} > \text{Límite} \quad r_{cd} \end{cases} \end{cases}$$

En la cuenta corriente de depósito cuando los fondos son mayores que cero, el tipo aplicado será r_{cc}, distinto del tipo aplicado cuando los fondos son menores que cero, que es cuando se aplica el tipo para descubiertos r_d.

En la cuenta corriente de crédito se aplica un tipo r_c cuando la cantidad dispuesta por el cliente es inferior al límite de crédito, y un tipo de interés r_{cd} cuando la cantidad dispuesta por el clientes es superior al límite de crédito de la cuenta.

5.5.1. Liquidación de cuentas corrientes de depósito.

En ciertas fechas durante el año, sobre la cuenta corriente se hacen cierres y se pagan los intereses correspondientes, pero como en la cuenta se ha hecho una serie de entradas y de salidas, el saldo

[1] Dejando la cuenta en *"números rojos"*.

sobre el que calcular los intereses no resulta obvio a primera vista, es por esta razón por la que se utiliza el *método de saldos.*

El tipo de capitalización que se aplica a estas operaciones es claramente simple con base Act/365.

Para aplicar el método de saldos se sigue los siguientes pasos:

1. Se toman los apuntes desde la última fecha de liquidación hasta la siguiente, y se calculan los saldos tras realizar cada uno de los apuntes.

2. Se calculan los días entre apunte y apunte, así como entre el último apunte y la fecha de liquidación.

3. Con estos días y los saldos se puede apuntar la cantidad en intereses devengados.

$$Int = Saldo_{(t_1 \to t_2)} \times r_{cc} \frac{t_2 - t_1}{365}$$

En caso de que la cuenta esté en descubierto los intereses se apuntan en negativo.

Note que es necesario tener en cuenta que a los intereses hay que quitarle la parte de impuestos así como las comisiones si es que existen. Así la diferencia entre los intereses menos los impuestos y menos los gastos, es la liquidación de intereses en la cuenta.

Véase el siguiente ejemplo:

Ejemplo 27. *Se tienen los siguientes movimientos en una cuenta corriente.*

Fecha	Concepto	Cantidad	Sentido
12-May	Nomina	40 000 €	+1
14-May	Cobro Cheque	10 000 €	+1
30-May	Liquidación Tarjeta	60 000 €	−1
11-Jun	Ingreso Efectivo	15 000 €	+1
30-Jun			

Las condiciones de la cuenta corriente son las siguientes:

- Interés anual de la cuenta: 6 %
- Comisión por descubierto: 0,2 % sobre el saldo en descubierto.
- Intereses de descubierto: 12 %
- Comisiones: 12 €
- Impuestos sobre intereses: 15 %
- Fecha de cierre 30/6.

Con estos datos se puede calcular la tabla de saldos correspondiente:

Fecha	Concepto	Cantidad	Saldo	Días	Intereses Acr.	Intereses Descub.	Comis.
12-May	Nomina	40 000 €	40 000 €	2	13,15 €	0,00 €	0,00 €
14-May	Ingr.	10 000 €	50 000 €	16	131,51 €	0,00 €	0,00 €
30-May	Visa	60 000 €	−10 000 €	12	0,00 €	−39,45 €	−20,00 €
11-Jun	Ingr.	15 000 €	5 000 €	19	15,62 €	0,00 €	0,00 €
30-Jun				Total:	160,27 €	−39,45 €	−20,00 €
					Total:	100,82 €	
					Impuestos:	−15,12 €	
					Gastos:	−12,00 €	
					Liquidación:	73,70 €	

Ejemplo 28. *Se tienen los siguientes movimientos en una cuenta corriente.*

Fec. Oper	Fec. Valor	Concepto	Cantidad	Sentido
9-mar	10-mar	Alquiler	3 000 €	-1
19-mar	20-mar	Premio	10 000 €	$+1$
29-mar	30-mar	Nomina	6 000 €	$+1$
09-abr	10-abr	Liq. Tarjeta	150 000 €	-1
17-abr	18-abr	Ing.Cheque	30 000 €	$+1$
30-abr	30-abr			

Las condiciones de la cuenta corriente son las siguientes:

- Interés anual de la cuenta: 1 %
- Comisión por descubierto: 2 % sobre el saldo en descubierto.
- Intereses de descubierto: 12 %
- Comisiones: 0 €
- Impuestos sobre intereses: 15 %
- Fecha de cierre 30/4.

Con estos datos se puede calcular la tabla de saldos correspondiente:

Fecha	Concepto	Cantidad	Saldo	Días	Intereses Acr.	Intereses Descub.	Comis.
10-mar	Alquiler	3 000 €	−3 000 €	10	0,00 €	−9,86 €	−60,00 €
20-mar	Premio	10 000 €	7 000 €	10	1,92 €	0,00 €	0,00 €
30-mar	Nomina	6 000 €	13 000 €	11	3,92 €	0,00 €	0,00 €
10-abr	Visa	150 000 €	−2 000 €	8	0,00 €	−5,26 €	−40,00 €
18-abr	Cheque	30 000 €	28 000 €	12	9,21 €	0,00 €	0,00 €
30-Jun				Total:	15,04 €	−15,12 €	−100,00 €
					Total:	100,08 €	
					Impuestos:	−2,26 €	
					Gastos:	0,00 €	
					Liquidación:	−102,34 €	

5.6. Problemas.

Problema 22. *Buscar el tipo de interés compuesto trimestral que es equivalente a aplicar a un capital de 110 euros un tipo simple anual del 5 % durante un año y medio.*

Solución:

Primero se obtiene el capital final al que se llega por medio de r_s.

$$C_f = C_i\,(1 + r_s T) = 110\,(1 + 5\,\% \cdot 1{,}5) = 118{,}25\,€$$

Con ello se puede despejar el equivalente de la formula de capitalización compuesta (ecuación 2.2). Por tanto:

$$C_f = C_i\,(1 + r_t)^{Trim} \rightarrow 118{,}25 = 110\,(1 + r_t)^{4 \cdot 1{,}5}$$

$$r_t = \left(\frac{118{,}25}{110}\right)^{\frac{1}{6}} - 1 = 1,213\,\%$$

Problema 23. *Calculad la tasa de descuento compuesta (descuento comercial compuesto) que equivale a un tipo de interés del 5 % anual bajo la ley de descuento racional simple, para un periodo de 3 meses.*

Solución:

Por tipos equivalentes siendo la fórmula de descuento comercial compuesto,

$$C_f = C_i\,(1-d)^T$$

Y la del descuento racional simple:

$$C_f = C_i \frac{1}{(1+rT)}$$

Por tanto por tipos equivalentes se tendrá que:

$$(1-d)^T = \frac{1}{(1+rT)}$$

$$d = 1 - \left(\frac{1}{(1+rT)}\right)^{1/T} \begin{cases} T = & 3/12 \\ r = & 5\,\% \end{cases} \rightarrow d = 4,8476\,\%$$

Problema 24. *Un producto nos duplica el capital en tres años. ¿Cuál es su tipo anual equivalente simple? ¿y compuesto? ¿y continuo?*

Solución:

$$C_f = 2C_i$$

Simple:

$$C_f = C_i\,(1 + rT) \rightarrow 2 = (1 + 3r) \rightarrow r = 33\,\%$$

Compuesto:

$$C_F = C_I\,(1 + r_c)^T \rightarrow 2 = (1 + r_c)^3 \rightarrow r_c = 2^{1/3} - 1 = 26\,\%$$

Continuo:

$$C_F = C_I e^{rT} \rightarrow 2 = e^{3r} \rightarrow r = \frac{1}{3}\ln(2) = 23\,\%$$

Problema 25. *Nos ofrecen un producto que paga un 5 % compuesto anual pero durante sólo 6 meses, y después, para una año y medio adicional, nos paga un 2 % compuesto anual. Calculad el tipo simple trimestral equivalente.*

Supongamos que se invierten $C_i = 1\,000$ € entonces:

$$C_f = 1\,000\,(1 + 5\,\%)^{6/12}\,(1 + 2\,\%)^{1{,}5}$$

$$C_f = 1\,055{,}59\,€$$

Para el equivalente el tiempo total de inversión es de 2 años, por tanto:

$$C_f = C_i\,(1 + r_T \cdot 4 \cdot 2) \rightarrow r_T = \left(\frac{1\,055{,}59}{1\,000} - 1\right)\frac{1}{8}$$

$$\boxed{r_T = 0{,}3769\,\%}$$

Problema 26. *Comparad los siguientes productos: un depósito a seis meses que paga un 1 % mensual compuesto, un depósito que dura dos años y por cada 100 euros te paga 125 al final de esos dos años. ¿Cuál de los dos tiene un mayor tipo compuesto mensual equivalente?*

Problema 27. *Calcular el TAE y el Nominal de los problemas anteriores.*

Capítulo 6

Flujos - VA - VF.

6.1. Esquemas de flujos financieros.

Una operación financiera, puede ser una sucesión de pagos y cobros, distribuidos en el tiempo. Resulta muy conveniente representar estos flujos de capital en el tiempo, por medio de esquemas de flujos financieros.

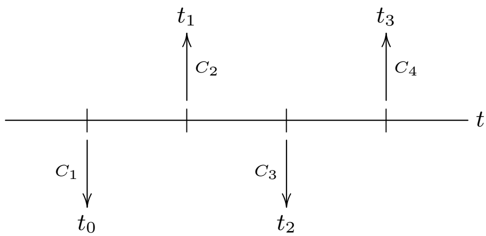
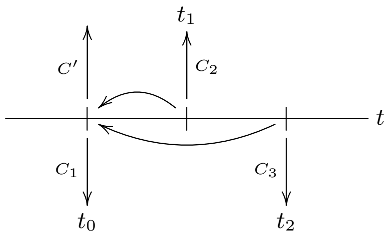


Figura 6.1: Flujos

En estos esquemas, las flechas se distribuyen de derecha a izquierda, según acontezcan en su momento. El sentido de la flecha marca el sentido del flujo, por lo que flechas hacia abajo implican pagos que se realizan (dinero que sale), mientras que las flechas hacia arriba indican cobros (dinero que entra). Esta representación resulta muy útil para representar operaciones sencillas, y esquemas orientativos, si bien resulta de poca utilidad en caso de operaciones con muchos pagos a lo largo del tiempo.

Para operar con los diferentes capitales, como por ejemplo par netear cantidades, es necesario que estén ubicadas en el mismo momento temporal. Para ello se pueden aplicar las leyes de capitalización / descuento.



De esta forma en la figura se puede hacer que:

$$C^* = C' - C_1 = \left(C_2^{des} - C_3^{des}\right) - C_1$$

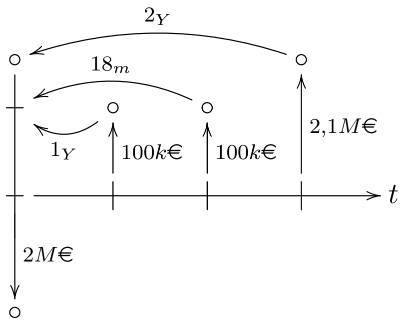
6.2. Valor Presente - VA ↔ PV

VA es acrónimo de valor actual, también conocido como PV (en inglés *"Present Value"*). Es la suma del valor actual de todos los flujos de una inversión o proyecto. Para calcular este valor hay que descontar a fecha de hoy todos los flujos futuros.

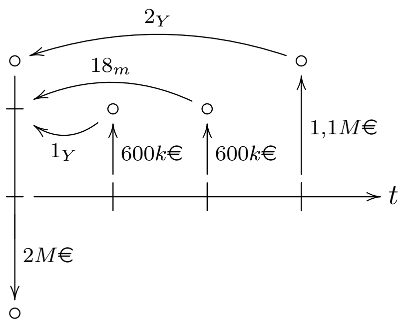
Se suele identificar con el coste o precio equivalente al conjunto de flujos que refleja, valor actual o también MTM.

Uno de los puntos más importantes es la tasa de descuento de los flujos. Aunque de forma habitual se usa la misma en todos los plazos, puede resultar necesario ajustar las tasas al coste de "funding" necesario para mantener la inversión.

Suponga dos proyectos ("A", y "B") en los que hoy hay que invertir 2 000 000 €, a partir de este momento cada uno tiene un flujo diferente de retornos. Para poder comparar ambos, un buen principio puede ser obtener su VA, para determinar qué proyecto interesa más (al menos en cuanto a retorno). Suponga que los flujos se pueden descontar a un 3 % anual.



(a) "A"



(b) "B"

Figura 6.2: Proyectos

En el caso del proyecto "A":

$$VAN_A = -2{\cdot}10^6 + \frac{10^5}{(1+3\,\%)^1} + \frac{10^5}{(1+3\,\%)^{18/12}} + \frac{2{,}1{\cdot}10^6}{(1+3\,\%)^2}$$

$$VAN_A = -2\,000\,000 + 97\,087 + 95\,663 + 1\,979\,451{,}40$$

$$\boxed{VAN_A = 172\,201{,}82\,€}$$

En el caso del proyecto “B”:

$$VAN_B = -2{\cdot}10^6 + \frac{6{\cdot}10^5}{(1+3\,\%)^1} + \frac{6{\cdot}10^5}{(1+3\,\%)^{18/12}} + \frac{1{,}1{\cdot}10^6}{(1+3\,\%)^2}$$

$$VAN_B = -2\,000\,000 + 582\,524{,}27 + 573\,978{,}22 + 1\,036\,855{,}50$$

$$\boxed{VAN_B = 193\,357{,}99\,€}$$

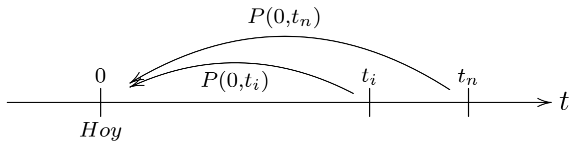
Este resultado indica que el proyecto “B”, es financieramente mejor que el proyecto “A”. Además en el proyecto “B” los flujos de caja hacen que se devuelva el dinero antes en el tiempo en mayor volumen, lo cual es preferible a esperar a recibir el nominal final como ocurren en el proyecto “A”.

Nótese que en la formulación para la obtención del VAN se puede observar una repetición de *sumas de flujos por des-*

cuentos. Esto es (suponiendo uso de tipos compuestos):

$$VAN_i = F_{Hoy} + \frac{F_{t_1}}{(1+r_t)^{t_1}} + \frac{F_{t_2}}{(1+r_t)^{t_2}} + \ldots + \frac{F_{t_n}}{(1+r_t)^{t_n}}$$

Si llamamos Factor de Descuento a $\frac{1}{\left(1+r_{t_i}\right)^{t_i}}$, y lo denotamos por FD_i, o como así se denota en mucha literatura, $P\left(0,t_i\right)$. Este $P\left(0,t_i\right)$ es el fector de descuento desde el tiempo hoy hasta el tiempo t_i.



Entonces se puede escribir el VAN como:

$$\begin{aligned} VAN_j &= F_{Hoy} + F_{t_1}{\cdot}P\left(0,t_1\right) + F_{t_2}{\cdot}P\left(0,t_2\right) + \\ &+ \ldots + F_{t_n}{\cdot}P\left(0,t_n\right) \end{aligned}$$

O bien:

$$\begin{aligned} VAN_j &= F_{Hoy} + F_{t_1}{\cdot}FD_{t_1} + F_{t_2}{\cdot}FD_{t_2} + \\ &+ \ldots + F_{t_n}{\cdot}FD_{t_n} \end{aligned}$$

De forma compacta:

$$VAN_j = \sum_{i=0}^{n} F_i \cdot P\left(0, t_i\right)$$

$$VAN_j = \sum_{i=0}^{n} F_i \cdot FD_i$$

Donde:

F_i: Flujo de dinero en tiempo t_i.

Por tanto si a cada plazo se tuviera diferente tipo de interés, cada uno de los r_i sería diferente, lo cual es normal, puesto que a un año se dará cierto tipo de interés y a dos años otro[1], y así sucesivamente.

Es importante recalcar que dado un factor de descuento (factor $P\left(0, t\right)$ al plazo t), se puede obtener un tipo de interés que se conoce como tipo cupón cero, en caso de plazos superiores a un año, usando capitalización compuesta:

$$P\left(0, t\right) = \frac{1}{\left(1 + r_{ZC}\right)^t} \rightarrow r_{ZC} = \mathfrak{B}_0^t = \left(\frac{1}{P\left(0, t\right)}\right)^{\frac{1}{t}}$$

Estos tipos de interés tienen una gran importancia ya que su aplicación directa es la de obtener el tipo a plazo sin pagos intermedios. Una forma de interpretarlo, es el tipo al que debe descontarse un euro para tener hoy $P\left(0, t\right)$. O bien, representa la cantidad $\mathfrak{B}_0$ a invertir hoy de tal manera que en $t = T$ se tiene 1 €.

El uso de los tipos cupón cero, o factores de descuento (en realidad ambas cosas son lo mismo), en el cálculo del valor actual de flujos futuros simplifica mucho el cálculo (si bien es necesario cierta tecnología adicional para el cálculo de tipos o factores intermedios mediante técnicas de interpolación). Véase el siguiente ejemplo:

Ejemplo 29. *Suponga que tiene un producto que dentro de un año le paga* $10\,000$ €*, dentro de dos años* $15\,000$ € *y dentro de tres años* $20\,000$ €*. Si los tipos cupones cero son a un año el* $4{,}00\,\%$*, a dos años el* $5{,}00\,\%$*, y a tres años el* $6{,}00\,\%$*, el valor del activo se puede calcular a partir de los factores de la tabla 6.1 como suma y productos de factores de descuento y flujos.*

$$VP = \sum_{i=1}^{3} f_i P\left(0, t_i\right)$$

$$\begin{aligned} VP &= 10\,000 \cdot 0,961538462 \\ &\quad +15\,000 \cdot 0,907029478 \\ &\quad +20\,000 \cdot 0,839619283 \\ &= 40\,013{,}21 \text{ €} \end{aligned}$$

T	$\mathfrak{B}$	$P\left(0, T\right)$
1	$4{,}00\,\%$	$0,961538462$
2	$5{,}00\,\%$	$0,907029478$
3	$6{,}00\,\%$	$0,839619283$

Cuadro 6.1: Tipos ZC y FD's Ejemplo 29.

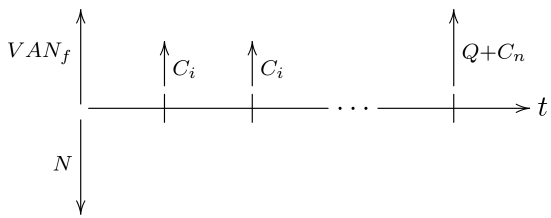
La potencia de los factores de descuento radica en que una vez determinados a la fecha en la que se produce el flujo de dinero, se puede descontar de forma directa. Note el lector que los factores de descuento provienen de curvas de tipos de interés cupón cero, que deben estar en la misma divisa que los flujos a descontar. Por tanto para encontrar valores actuales en €, es necesario usa las curvas de tipos de interés en la misma divisa €.

6.3. TIR

TIR/YTM (Tasa Interna de Retorno/Yield To Maturity) es el tipo de interés con el que se descuentan los flujos de una inversión, tal que el VAN es cero.

Este cálculo hace una presunción bastante dudosa, y es que supone que es posible reinvertir los intereses a la propia TIR. Esto no es del todo cierto, ya que los tipos de interés tienen cierta volatilidad que hace casi imposible esta presunción, si bien los resultados relativos de TIR, permiten comparar inversiones equivalentes, como por ejemplo bonos, proyectos, etc.

Suponiendo una inversión en la que hay que desembolsar un nominal N, que paga una serie de intereses anuales C_i, y que a vencimiento retorna el una cantidad Q:



Como la inversión debe dar neto actual cero:

$$N - VAN_f = 0$$

$$VAN_f = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^i} + \frac{Q}{(1+r)^n}$$

$$N - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^i} + \frac{Q}{(1+r)^n} \right) = 0$$

$$N = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^i} + \frac{Q}{(1+r)^n}$$

En notación compacta usando factores de descuento:

$$N = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot P(0, t_i) + Q \cdot P(0, t_n)$$

Para obtener la tasa r, TIR hay que despejar el valor en la ecuación no lineal, este proceso es complejo cuando hay varios flujos por lo que resulta necesario el uso de herramientas de cálculo numérico como “buscar objetivo” en MS Excel o la búsqueda de ceros en Matlab.

Ejemplo 30. *Suponga una oportunidad de inversión con un plazo de 10 años, por la que hoy debería pagar* $1\,075\,000$ €*, que le paga cupones anuales de* $35\,000$ € $(3{,}5\,\%)$*, finalizado el plazo se le retorna el último cupón y un capital de* $1\,000\,000$ €*. Calcule la TIR/YTM de esta inversión.*

La expresión a resolver sería:

$$N - VAN_f = 0$$

$$N = 1\,075\,000\,€$$

$$VAN_f = \sum_{i=1}^{10} \frac{35\,000}{(1+r)^i} + \frac{1\,000\,000}{(1+r)^{10}}$$

r	VAN_f	$N - VAN_f$
3,5 %	1 000 000 €	75 000 €
3 %	1 042 651 €	32 349 €
2,637 %	1 075 000 €	0 €

Por tanto la TIR de esta inversión es de un 2,637 %.

6.4. Problemas.

Problema 28. *Del siguiente esquema de flujos: pagar 100 a un año, cobrar 400 dentro de 3 años, pagar 220 dentro de 5 años, con un tipo de interés del 2 % anual*

1. Calcule PV, FV
2. Si retrasamos todos los pagos y los cobros un año, ¿cómo se modifica el PV?

Si se tiene un tipo de interés del 2 % anual compuesto (no se indica otra cosa y la operación es para más de un año se considera como compuesto) para todos los plazos, se puede obtener los factores de descuento a esos plazos:

Para el factor de descuento:

$$P(0,T) = \frac{1}{(1+r)^T}$$

T	r	FD	f_i	VP
1	2 %	0,9804	-100	-98,04
3	2 %	0,9423	400	376,93
5	2 %	0,9057	-220	-199,26
Total				79,63

$$PV = 79{,}63\,€$$

El valor futuro viene como $FV = PV \cdot (1 + r)^T$

$$FV = 79{,}63 \cdot (1 + 2\,\%)^5 = 87{,}92\,€$$

Si cambian los años:

T	r	FD	f_i	VP
2	2 %	0,9612	-100	-96,12
4	2 %	0,9238	400	369,54
6	2 %	0,8880	-220	-195,35
Total				78,07

El valor futuro viene como $FV = PV \cdot (1 + r)^T$

$$FV = 78{,}07 \cdot (1 + 2\,\%)^6 = 87{,}92\,€$$

Problema 29. *¿Cuál de las siguientes opciones es mejor, suponiendo un tipo de interés del 2,5 % anual? ¿por qué?*

1. Cobrar 1200 euros dentro de 4 años

2. Cobrar dos pagos de 615 euros a realizarse el año 3 y el año 5

3. Cobrar 200 euros ahora y 1075 dentro de 3 años

4. Cobrar 1250 euros dentro de cinco años y medio

Para el caso 1:

T	r	FD	F	VA(F)	Up-Front	VA(F+U)
4	2,50 %	0,9060	1200	1087,14	0	1087,14

Para el caso 2:

T	r	FD	F	VA(F)	Up-Front	VA(F+U)
3	2,50 %	0,9286	615	571,09	0	571,09
5	2,50 %	0,8839	615	543,57	0	543,57
Total						1114,66

Para el caso 3:

T	r	FD	F	VA(F)	Up-Front	VA(F+U)
3	2,50 %	0,9286	1075	998,24	200	1198,24

Para el caso 4:

T	r	FD	F	VA(F)	Up-Front	VA(F+U)
5,5	2,50 %	0,8730	1250	1091,26	0	1091,26

Problema 30. *Tengo un pago de 1000 euros dentro de 5 años. Si suponemos un tipo de interés del 3 % anual,*

1. ¿de cuánto tienen que ser dos pagos iguales, a producirse en el año 4 y 6, que equivalga al existente?

2. Si fijo un pago en el año 4 de 400 euros, ¿de cuánto tendrá que ser el pago del año 6?

3. Si quiero cancelar la deuda ahora mismo, ¿cuánto tendría que pagar?

Solución:

Un pago $1\,000$ € dentro de 5 años, al $3\,\%$ tiene que tener el mismo valor actual que los pagos iguales C dentro de 4 y 6 años:

$$\frac{1\,000}{(1+3\,\%)^5}=\frac{C}{(1+3\,\%)^4}+\frac{C}{(1+3\,\%)^6}$$

$$862{,}61\,€=1,7259C\rightarrow C=499{,}78\,€$$

Si se fija un pago de 400 euros el año 4 entonces el valor actual de los 1000 euros el 5º año debe ser igual al valor actual de los otros pagos:

$$\frac{1\,000}{(1+3\,\%)^5}=\frac{400}{(1+3\,\%)^4}+\frac{C}{(1+3\,\%)^6}$$

$$862{,}61\,€=355{,}39\,€+0,8374C\rightarrow C=605{,}64\,€$$

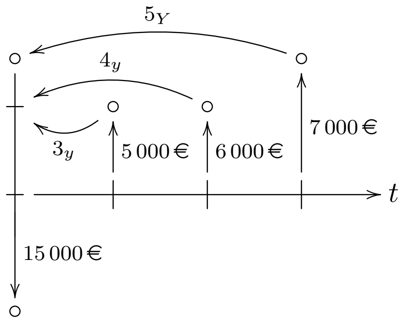
En caso de querer cancelar el pago de 1000 euros dentro de cinclo años ahora mismo, se debería pagar el valor presente de estos 1000 euros que son:

$$VA=\frac{1\,000}{(1+3\,\%)^5}=862{,}61\,€$$

Problema 31. *Un proyecto financiero nos ofrece unos beneficios de 5000 euros dentro de 3 años, 6000 euros dentro de 4 años, y 7000 dentro de 5 años. Para ello, nos piden invertir 15000 euros hoy. Si los tipos de interés están al 3 % anual, ¿Nos interesa el negocio? ¿Si el tipo de interés es mayor, el proyecto nos interesa más que cuando estaban al 3 %?*

Solución:

Calculamos el valor actual de los flujos futuros:



Entonces:

$$VA_{neto} = \frac{-15\,000}{(1+3\,\%)^0} + \frac{5\,000}{(1+3\,\%)^3} + \frac{6\,000}{(1+3\,\%)^4} + \frac{7\,000}{(1+3\,\%)^5}$$

$$VA_{neto} = -15\,000 + 4\,575{,}71 + 5\,330{,}92 + 6\,038{,}26$$

$$VA_{neto} = 944{,}89\,€$$

Problema 32. *Si un producto a 4 años nos ofrece por 1000 euros cobrar cada año una cierta cantidad fija. ¿Cuánto tiene que ser esa cantidad si los tipos están al 3,5 %? ¿Y si están al 4 %?*

Solución:

De forma genérica se tiene que calcular mediante traerlos a valor presente:

$$1\,000 = \sum_{i=1}^{4} \frac{C}{(1+r)^i} = C \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{(1+r)^i}$$

$$C = \frac{1\,000}{\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{(1+r)^i}}$$

$$C_{3,5\,\%} = \frac{100}{3{,}673\,0} = 272{,}25\,€$$

$$C_{4\,\%} = \frac{100}{3{,}629\,8} = 275{,}00\,€$$

Problema 33. *Calculad la TIR del proyecto del problema 28, 31 y de cada opción del problema 29*

$\ltimes$

Parte II

Rentas y Operaciones Simples

$\ltimes$

Capítulo 7

Rentas y Operaciones Simples.

7.1. Compra o Crédito.

Los modos de financiación que tienen las empresas, son (de un modo muy general):

1. Participación en el negocio: Acciones. Representa la forma en la que el público participa en el negocio comprando parte del mismo.

2. Endeudamiento: La empresa puede solicitar dinero en los siguientes formatos.

    a) Bien a una institución de crédito (bancos o cajas). Esto constituye un préstamo.

    b) Bien a particulares por medio de la emisión de instrumentos de renta fija, como pagarés (letras si el emisor es un gobierno), bonos u obligaciones.

En el presente tema se centra la atención al apartado 2 y en concreto al 2.b. Este punto es ciertamente muy amplio y excede el objetivo del presente curioso, si bien fija su atención en los bonos como instrumento conductor para introducir las rentas.

7.2. Bonos.

Un bono es un instrumento financiero de renta fija, es negociable en mercado (en función de su liquidez). Este instrumento hace que el emisor del bono se compromete a devolver el capital a vencimiento más una serie de pagos intermedios, en concepto de intereses, conocido por cupón.

7.2.1. Características de un Bono.

Las principales características de un bono se pueden resumir en:

Emisor: $[Issuser]$, es la entidad que e financia, comprometiendo los pagos de esta deuda tanto en principal como en intereses según plazo y forma de pago/s. Pueden ser entidades privadas (empresas) o pueden ser entidades públicas (gobiernos, CCAA, ayuntamientos, etc.).

Principal: Importe total que se presta al emisor. También se le conoce por Nominal.

Cupón: Pago intermedio, en concepto de intereses que si es fijo, se refiere a un % del nominal y si es variable se refiere a un índice de mercado como puede ser el euribor 3 meses, o algún libor. El pagó de cupones se hace con cierta periodicidad, si bien el cupón se suele expresar en tanto por ciento anualizado.

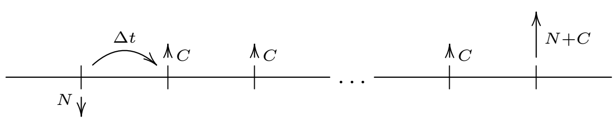
Vencimiento: $[Maturity]$, Es la fecha en la que se termina la operación, se cancela el bono por medio del pago del principal más el último cupón al inversor.

CleanPrice: Precio limpio, es el precio que se cotiza en el mercado, no tiene en cuenta el cupón corrido.

DirtyPrice: Precio que incluye el cupón corrido en el mismo.

CC: Siglas de cupón corrido, es la parte de cupón devengada y no cobrada entre cupones. El modo de cálculo se indica más adelante.

Un bono tiene un esquema de pagos como el que se indica en la siguiente figura:



En el momento de compra del bono, se paga el precio del bono. A lo largo de la vida del bono se pueden tener pagos de cupón intermedios, o bien un único cupón al final, en este caso el bono se conoce como bono cupón cero[1] .

EL precio del bono, esto es, lo que se tiene que pagar para hacerse con un bono, se corresponde con el valor actual de los flujos de caja futuros descontados a fecha actual.

[1] *“Zero-Coupon Bond”*

$$P_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i}{(1 + r_{TIR})^T}$$

$$P_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1 + TIR)^{t_i}} + \frac{N}{(1 + TIR)^{t_n}} \tag{7.1}$$

Usando la notación en modo de factores de descuento:

$$P_x = \sum_{i=1}^{n} C_i{\cdot}P\left(0, t_i\right) + N{\cdot}P\left(0, t_n\right)$$

Donde:

TIR: Expresada en $\%$ al año.

C_i**:** Cupón en pago i. Se suele indicar como cupón anual, pero puede pagarse en otra frecuencia, por ejemplo semenstral, por lo que en cada pago se cobra $\frac{C_i}{2}$, en caso de pagos trimestrales se cobraría en cada pago $\frac{C_i}{4}$, etc.

t_i**:** Se expresa en Fracción de Años.

N**:** Principal en vencimiento.

En caso de que todos los cupones sean iguales $C_i = C$, lo cual es algo muy normal el cupón se puede sacar factor común.

$$\begin{aligned} P_x &= \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1 + TIR)^{t_i}} + \frac{N}{(1 + TIR)^{t_n}} \\ P_x &= C \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1 + TIR)^{t_i}} + \frac{N}{(1 + TIR)^{t_n}} \end{aligned}$$

Suponga un bono con cupón 5 % anual, con una TIR del 3 %, pagos anuales y 4 pagos pendientes. Entonces:

$$P_x = C\left(\frac{1}{(1+r)} + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3} + \frac{1}{(1+r)^4}\right) + N\frac{1}{(1+r)^4}$$

Sustituyendo los valores en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} P_x &= 5\,\%\left(\frac{1}{(1+3\,\%)} + \frac{1}{(1+3\,\%)^2} + \frac{1}{(1+3\,\%)^3} + \frac{1}{(1+3\,\%)^4}\right) \\ &\quad +100\,\%\frac{1}{(1+3\,\%)^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_x &= (4,85\,\% + 4,71\,\% + 4,58\,\% + 4,44\,\%) + 88{,}58\,\% \\ P_x &= 107{,}43\,\% \end{aligned}$$

7.2.2. Cupón Corrido.

Se trata de incluir en el precio a pagar al vendedor el bono (ya en mercado secundario), el efecto del devengo continuo del futuro siguiente cupón.

Por tanto el precio sucio, o $Dirty\ Price$ incluye este apartado que se calcula como:

$$CC = C\frac{\delta D_{C_{i-1}}}{\Delta D_{Cupones}}$$

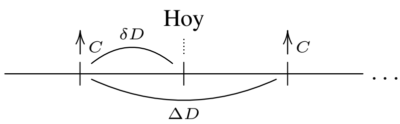
Donde:

$\delta D_{C_{i-1}}$: Son los días que han pasado desde el pago del último cupón hasta hoy.

C: Es el cupón siguiente.

$\Delta D_{Cupones}$: Son los días que hay entre cupones.

Como puede apreciarse, lo que se está haciendo es una pequeña periodificación del siguiente cupón, calculando la parte acumulada desde el pago del cupón anterior.



7.2.3. Elasticidad y Riesgos.

En la fórmula del precio de un bono (expresión 7.1) hay una relación directa con el tipo de interés con el que se descuentan los flujos financieros. Este tipo de interés varía con el mercado, por tanto hay una exposición del valor del bono al mercado de tipos de interés, esto es una fuente de riesgo.

El efecto de los tipos de interés sobre los precios de los bonos es inverso, esto es:

- Si suben los tipos de interés, entonces los bonos pierden valor (baja su precio).
- Si bajan los tipos de interés, entonces los bonos se aprecian (sube su precio).

Existe, una relación del precio del bono con la calidad crediticia del emisor. Por tanto la calidad de la empresa que emite bonos, en cuanto se refiere al pago de las obligaciones contraídas, influye en el precio de los bonos. Un empeoramiento de la calidad del emisor hace que los bonos pierdan valor (por lo que sube su TIR), si se enfoca la TIR como una tasa de interés sesgado por el riesgo, tiene sentido que al perder el pagador calidad, y existir un mayor riesgo de impago, los tipos de interés a los que los inversores ponen dinero, suban.

Dadas estas circunstancias se pueden establecer ciertas cantidades resumen que reflejan el comportamiento de los bonos ante cambios en los tipos de interés. Estas medidas dan una idea de la sensibilidad o respuesta elástica del activo ante un cambio en los tipos.

El grado de sensibilidad entre ambas variables viene determinada por la extensión de la vida del título, el nivel absoluto de los tipos de interés y la estructura de flujos de caja del mismo. Tres principios rigen los aspectos básicos de los activos de renta fija.

Estos son los llamados principios de Malkiel:

- El valor de un bono varía en sentido contrario al de su TIR.

- Si dos bonos dieren únicamente en el cupón, entonces para una determinada variación de la TIR, el bono de menor cupón experimentará mayor cambio de valor.

- Para un bono dado, un incremento de TIR provoca una variación de precio menor que la provocada en sentido inverso por una bajada de TIR de igual magnitud que la anterior. En las próximas páginas se analizarán y probarán cada uno de ellos.

Las medidas que cuantifican la exposición del precio del bono a los cambios en los tipos de interés son:

1. Sensibilidad Absoluta.

2. Duración Modificada.

3. Duración.

Para poder explicar cada una hay que definir antes cómo se miden las diferencias en precio/tipos de interés.

Variación	Absoluta	Relativa
Precio	$P_2 - P_1$	$\frac{P_2-P_1}{P_1}$
Tipos	$TIR_2 - TIR_1$	$\frac{TIR_2-TIR_1}{1+TIR_1}$

Se define:

- Duración: Variación relativa del precio cuando hay una variación relativa en TIR.

$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} \cong -D \cdot \frac{TIR_2 - TIR_1}{1 + TIR_1} \tag{7.2}$$

- Duración Modificada: Variación relativa del precio cuando se produce una variación absoluta de TIR.

$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} \cong -\widetilde{D} \cdot (TIR_2 - TIR_1) \tag{7.3}$$

- Sensibilidad absoluta: Variación absoluta del precio con variación absoluta en TIR.

$$(P_2 - P_1) \cong -SA \cdot (TIR_2 - TIR_1) \tag{7.4}$$

Existen expresiones basadas en los datos característicos del bono, así como en la estructura de pagos del instrumento:

Duración:

$$D = \frac{1}{P_x} \cdot \sum_{1=1}^{n} C_i \cdot P(0, t_i) \cdot t_i \tag{7.5}$$

Nota: t_i, o también FA_i, es el tiempo desde hoy hasta el pago del cupón expresado en fracción de años.

$$\widetilde{D} = \frac{D}{1 + TIR} \tag{7.6}$$

$$SA = \widetilde{D} \cdot P \tag{7.7}$$

Ejemplo 31. *Se analizará un Bono del Tesoro español con cupón 3,9 % anual (ActAct) y vencimiento el 31/10/2012. En este caso, cupones del 3,9 % sobre el nominal de referencia. Se tomará como fecha valor el 20 de Noviembre de 2009 con una cotización de mercado de 105,78. Se calcularan sus medidas de elasticidad de primer order: duración, duración modificada y sensibilidad absoluta.*

Lo primero es obtener los datos que definen el bono:

Fechas	Base	$^{Act}/_{Act}$	TIR	Cpn	
			1,86 %	3,9 %	
	Días	FA		Flujos	VP
31.10.09	Ultimo Cupón				
20.11.09	20	← Hoy			
31.10.10	345	0,95	1,86 %	3,90 %	3,83 %
31.10.11	710	1,95	1,86 %	3,90 %	3,76 %
31.10.12	1076	2,95	1,86 %	103,90 %	98,41 %
		Precio Sucio:			**106,00 %**
		Cupón Corrido:			0,21 %
		Precio Limpio:			**105,79 %**
		Precio Mercado:			105,78 %
		Error:			*0,01 %*

Con estos datos, es posible obtener directamente la duración:

Fechas	Base	Act/Act	TIR	Cpn			
			1,86 %	3,9 %			
	Días	FA		Flujos	VP		VP × FA
31.10.09	Ultimo Cupón						
20.11.09	20	← Hoy					
31.10.10	345	0,95	1,86 %	3,90 %	3,83 %		0,0362
31.10.11	710	1,95	1,86 %	3,90 %	3,76 %		0,0732
31.10.12	1076	2,95	1,86 %	103,90 %	98,41 %		2,8991
		Precio Sucio:			**106,00 %**	Total:	3,0085
		Cupón Corrido:			0,21 %	D:	**2,8381**
		Precio Limpio:			**105,79 %**	D_m:	**2,7862**
		Precio Mercado:			105,78 %	SA:	**2,9536**
		Error:			*0,01 %*		

Se puede realizar la comprobación de que esto es así estresando el precio por medio de la TIR, para ello se obtiene lo que supone un aumento absoluto y relativo en TIR y se obtiene el precio del bono en esta circunstancia con la hoja de cálculo anterior.

	Tipo	Precio		Resultado
TIR	1,86 %	106,00 %	D	2,7830
TIR+1 % Rel.	2,88 %	103,05 %	D_m	2,7322
TIR+1 % Abs.	2,86 %	103,11 %	SA	2,8962

Esto viene de:

$$\frac{103{,}11\,\% - 106{,}00\,\%}{106{,}00\,\%} \cong -D\frac{2{,}86\,\% - 1{,}86\,\%}{1 + 1{,}86\,\%} \rightarrow D \cong 2{,}7830$$

$$\frac{103{,}11\,\% - 106{,}00\,\%}{106{,}00\,\%} \cong -\widetilde{D}\,(2{,}86\,\% - 1{,}86\,\%) \rightarrow \widetilde{D} \cong 2{,}7322$$

$$(103{,}11\,\% - 106{,}00\,\%) \cong -SA\,(2{,}86\,\% - 1{,}86\,\%) \rightarrow SA \cong 2{,}8962$$

7.3. Operaciones Simples a Corto.

La operaciones simples son aquellas que tienen únicamente dos momentos de intercambio de efectivo, al inicio de la operación y al vencimiento de la misma, por lo tanto carecen de pagos intermedios. Este tipo de operación suele ser a corto plazo, ya que en buena lógica operaciones sin pagos intermedios a largo plazo, implican una fuerte confianza en la capacidad de repago de la contraparte con obligación de pago, y por tanto se suele limitar el plazo a 12 o 18 meses como máximo.

El modo de operar sobre este tipo de operaciones es "*al descuento*" por lo tanto si la operación es sobre un importe nominal N este se intercambia a vencimiento en $t = T$, mientras que al inicio, en $t = 0$, se intercambia el capital equivalente, descontado por el tipo de la operación.

Si la operación es a corto plazo, por lo general se suelen usar leyes de descuento simple. En este caso según el tipo de operación financiera se aplicará el descuento comercial o el descuento racional:

Racional:

$$C_i = C_f \cdot \frac{1}{\left(1 + r\frac{n}{365}\right)}$$

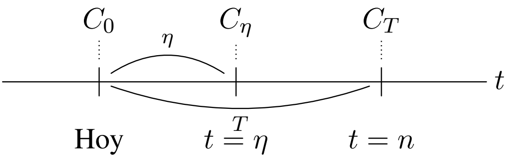
Donde r es el tipo de interés de la operación, y n el número de días de la operación.

Comercial:

$$C_i = C_f \cdot \left(1 - d\frac{n}{365}\right)$$

Donde d es el tipo de descuento comercial, y n el número de días de la operación.

El valor de la operación C_η en un momento $\eta < T$ se puede calcular por capitales equivalentes hoy:



En el caso de descuento comercial:

$$C_0 = C_\eta \left(1 - d\frac{\eta}{365}\right)$$

$$C_0 = C_T \left(1 - d\frac{n}{365}\right)$$

$$C_\eta = C_T \left(\frac{1 - d\frac{n}{365}}{1 - d\frac{\eta}{365}}\right)$$

En el caso del descuento racional:

$$C_0 = C_\eta \left(\frac{1}{1 + r\frac{\eta}{365}}\right)$$

$$C_0 = C_T \left(\frac{1}{1 + r\frac{n}{365}}\right)$$

$$C_\eta = C_T \left(\frac{1 + r\frac{\eta}{365}}{1 + r\frac{n}{365}}\right)$$

7.3.1. Operaciones comunes.

Las operaciones simples, más comunes, quitando de la lista las de cuenta corriente, de ahorro y las cuentas de crédito, son las siguientes:

1. Operación de Compra/Venta aplazada. Son operaciones en las que el vendedor entrega el bien o servicio, demorando un tiempo el cobro por el mencionado bien o servicio.

2. Imposición a Plazo Fijo (IPF). Una de las partes (habitualmente un cliente) entrega a la otra (habitualmente una entidad de crédito), un capital durante un plazo de tiempo. A la finalización se recupera el capital entregado con unos intereses, o si la operación es al descuento, el nominal según contrato. La cancelación anticipada de este tipo de operaciones suele tener algún tipo de penalización sobre el tipo de interés de la operación, pero es normal encontrar que como máximo la penalización no exceda el monto total de los intereses, de tal forma que se puede considerar como operación con capital garantizado. No es una operación canjeable o transmisible, esto es, no se puede vender.

3. Certificados de depósito. Son exactamente igual que una IPF pero si se pueden comprar y vender en el mercado.

4. Deuda a corto plazo: Operaciones de deuda para financiación estatal o empresarial de carácter temporal a corto plazo.

    a) Letras del tesoro.

    b) Pagarés de empresa.

5. Descuento Bancario: Son operaciones en las que el banco asume la posición del cliente entregando ahora cierta cantidad a cambio de los derechos de cobro futuros. La cantidad entregada al cliente es el valor actualizado menos costes de estos cobros futuros.

    a) Descuento de papel comercial.

    b) Descuento financiero.

    c) Crédito financiero.

7.3.2. Descuento Bancario: Papel Comercial.

El objetivo de este tipo de operación es aportar liquidez al cliente desde el punto de vista de la entidad financiera. La operación transforma derechos de cobro futuros en liquidez actual.

Asi, la entidad financiera, por un lado facilita al cliente el valor del nominal (derecho de cobro futuro) descontados, y por otro lado realiza las gestiones de cobro del mencionado nominal futuro, aplicando una comisión de cobro.

El descuento bancario por papel comercial, está sujeto a tributación por Actos Jurídicos Documentados de forma escalada en relación al nominal de la operación por medio de un "*timbre*".

En esta operación se tienen las siguientes variables:

N**:** Nominal de la operación.

E**:** Efectivo que cobra el cliente del banco (descuento del nominal menos gastos e impuestos).

d**:** Descuento comercial aplicado al cliente.

T**:** Duración de la operación.

n: Número de días ACT, de la operación.

g: Comisión de cobranza sobre el nominal N, es la comisión que se aplica al trámite que realiza el banco al cobrar el nominal en fecha T .

g_{min}: Comisión de cobranza mínima directa (es una cantidad mínima en la divisa de la operación).

G: Otros gastos.

I: Timbre.

Bajo estas consideraciones el valor E que percibe el cliente viene:

1. Como el descuento del nominal:

$$E' = N\left(1 - d\frac{n}{360}\right)$$

2. Menos la comisión de cobranza que se aplica al nominal:

$$E'' = E' - \text{máx}\left(N \cdot g, g_{min}\right)$$

3. Menos los gastos generales u otros gastos:

$$E''' = E'' - G$$

4. Menos el timbre aplicado a la operación, recuerde el lector que el timbre es una función del nominal según cierta escala.

$$E = E''' - I$$

Por tanto, el líquido a percibir por el cliente es el siguiente:

$$\boxed{E = N\left(1 - d\frac{n}{360}\right) - \text{máx}\left(N \cdot g, g_{min}\right) - G - I} \qquad (7.8)$$

Ejemplo 32. *Por la venta de una máquina herramienta su empresa cobrará dentro de 90 días una cantidad de* $1\,000\,000$ €*, se plantea girar dicha cantidad por medio de una letra de cambio a descontar en su banco. Las condiciones de su banco para este tipo de productos, contemplan un tipo de descuento del* $8\,\%$*, una comisión de cobro del* $4‰$ *con una comisión mínima de* 10 €*. Calcule el importe líquido que le queda tras aplicar pagos por timbre.*

En este caso aplicado la expresión 7.8:

$$E = \underbrace{1\,000\,000\left(1 - 8\,\%\frac{90}{360}\right)}_{e} - \underbrace{\text{máx}\left(1\,000\,000 \cdot 6‰, 10\right)}_{g} - G - I$$

Donde:

$$\begin{aligned} G &= 0\,€ \\ e &= 980\,000\,€ \\ g &= \text{mín}\left(6\,000\,€, 10\,€\right) = 6\,000\,€ \end{aligned}$$

En el caso del timbre, según la tabla 7.1, el timbre base es de $538{,}51$ € los primeros $192\,323{,}87$ €, el resto, $807\,676{,}13$ € debe grabarse $0{,}018$ € por cada $6{,}01$ €, por tanto se puede calcular una cantidad N_{ex} (nominal exceso al que timbrar) como:

$$\begin{aligned} I_b &= 538{,}51\,€ \\ N_{ex} &= 1\,000\,000\,€ - 192\,323{,}87\,€ \\ &= 807\,676{,}13\,€ \end{aligned}$$

Si se expresa en fracciones de $6{,}01\,€$ y se multiplica por $0{,}018\,€$ se obtiene la cantidad I_{ex}, que es el timbre extra a sumar al timbre base I_b.

$$\begin{aligned} I_{ex} &= 0,018 \cdot \frac{807\,676{,}13}{6,01} \\ &= 0,018 \cdot 134\,388{,}71 \\ &= 2\,419{,}00\,€ \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} E &= 980\,000{,}00\,€ \\ & -6\,000{,}00\,€ \\ & -538{,}51\,€ \\ & -2\,419{,}00\,€ \\ E &= 971\,042{,}49\,€ \end{aligned}$$

7.3.2.1. Tabla con Timbres:

Los timbres a aplicar son los representados en el cuadro 7.1. Además hay que tener en cuenta que para aquello que exceda de los $192\,323{,}87\,€$, hay que añadir $0{,}018\,€$ por cada $6{,}01\,€$ o fracción.

Clase	Desde (€)	Hasta (€)	Timbre
1ª	96 161,95 €	192 323,87 €	538,51 €
2ª	48 080,98 €	96 161,95 €	269,25 €
3ª	24 040,49 €	48 080,98 €	134,63 €
4ª	12 020,25 €	24 040,49 €	67,31 €
5ª	6 010,13 €	12 020,25 €	33,66 €
6ª	3 005,07 €	6 010,13 €	16,83 €
7ª	502,54 €	3 005,07 €	8,41 €
8ª	751,28 €	502,54 €	4,21 €
9ª	360,62 €	751,28 €	1,98 €
10ª	180,31 €	360,62 €	0,96 €
11ª	90,16 €	180,31 €	0,48 €
12ª	48,09 €	90,16 €	0,24 €
13ª	24,05 €	48,09 €	0,12 €
14ª	0,01 €	24,05 €	0,06 €

Cuadro 7.1: Timbres.

7.3.3. Descuento Bancario: Forfait.

Es una modalidad de descuento comercial como el anterior pero que simplifica los conceptos, ya que incluye la comisión de cobro g, y otros gastos G, dentro del tipo de descuento $d^\star$ por lo que el resto de conceptos queda igual.

$$\boxed{E = N\left(1 - d^\star \frac{n}{360}\right) - I} \tag{7.9}$$

Esto simplifica el proceso, la relación con el cliente y evita el efecto negativo que tienen las comisiones y gastos explícitos.

7.3.4. Descuento Financiero.

Este tipo de operación financiera simple, busca conceder al cliente un préstamo documentándolo por medio de una letra. A vencimiento $t = T$, el cliente debe devolver el $100\,\%$ sobre un nominal N, si bien, al inicio $t = 0$, el cliente recibe a modo de financiación una cantidad descontada de este nominal N. En este tipo de operación se debe tener en cuenta la comisión de apertura, así como los gastos notariales, y el correspondiente timbre.

Entonces:

N: Nominal de la operación.

T: Vencimiento de la operación.

n: Días que dura la operación.

d: Descuento aplicado para la obtención del líquido inicial.

g_{aper}: Comisiones de apertura. Se expresa en u $\%$ sobre el nominal N.

g_{not}: Gastos notaría, etc. Se expresa en u $\%$ sobre el nominal N .

I: Timbre según la tabla 7.1.

Con esto la cantidad líquida a percibir en forma de descuento financiero es:

$$\boxed{\mathcal{L} = N \cdot \left(1 - d\frac{n}{360} - g_{aper} - g_{not}\right) - I} \tag{7.10}$$

7.3.5. Letras del Tesoro.

Son títulos de deuda pública emitidos por el Tesoro[2].

[2] www.tesoro.es

La forma de emisión es al descuento por medio de una subasta competitiva donde se fija la rentabiliad/precio de la emisión de letras. Es decir, se compran a un precio por debajo del valor nominal ($< 100\,\%$) y a su vencimiento se obtiene el valor nominal ($= 100\,\%$).

Los plazos de emisión de las letras del tesoro son a 1, 3, 6, 12 y 18 meses, con un nominal $N = 1\,000$ €, y base de cálculo $^{Act}/_{360}$.

La fiscalidad a la que están sujetas las letras del tesoro debe tener en cuenta que "... *La rentabilidad obtenida por las personas físicas residentes en España se considera rendimiento de capital mobiliario, por lo tanto, está sujeta al IRPF, aunque no está sujeta a retención a cuenta.*

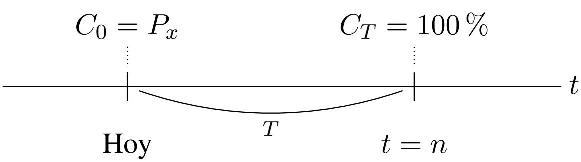
Cualquiera que sea su plazo, en los ejercicios 2012 y 2013, este rendimiento tributa al 21 % hasta los $6\,000$ €, *el tramo de la base liquidable entre* $6\,000$ € *y* $24\,000$ € *tributa al 25 % y el tramo que excede de* $24\,000$ € *tributa al 27 %...*"

[www.tesoro.es].

Las leyes de capitalización/descuento aplicadas en el caso de las letras del tesoro siguen el convenio de mercado por lo que se usará capitalización/descuento simple para las letras hasta un año y para plazos mayores se usará capitalización/descuento compuesto.

7.3.5.1. Rentabilidad en mercado primario.

La rentabilidad de las letras en el mercado primario se mide directamente del tipo usado para descontar.

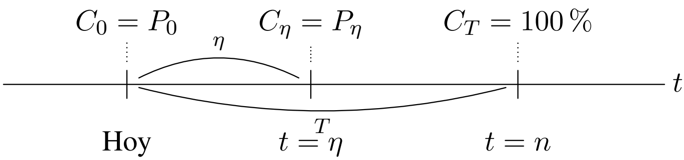


En este caso el precio en emisión al salir de subasta se puede obtener por el tipo r al que se ha resuelto la mencionada subasta de letras.

$$P_x = \begin{cases} P_x = \frac{1\,000\,€}{(1+r)^{\frac{n}{360}}} & Si\, T > 1_y \\ P_x = \frac{1\,000\,€}{\left(1+r\frac{n}{360}\right)} & Si\, T \leq 1_y \end{cases}$$

7.3.5.2. Rentabilidad en mercado secundario.

En caso de que se realice la compra en primario y posterior negociación en mercado secundario, la rentabilidad de las letras se puede calcular por ley de capitalización/descuento.



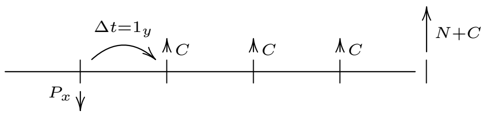
Suponiendo $T \leq 1_y$, entonces debido a que no existen pagos intermedios, y el único pago de $1\,000\,€$ es en vencimiento $t = T$:

$$P_\eta = \frac{1\,000\,€}{\left(1 + r\frac{n-\eta}{360}\right)}$$

7.4. Problemas.

Problema 34. *Un bono privado cuyo principal es de* $50\,000\,€$*, con un cupón del* $5\,\%$*, a 4 años y pagos anuales, ¿qué precio tiene si ofrece un TIR (yield) del* $4{,}3\,\%$*.*

Solución:



Entonces aplicando que el P_x debe ser el valor presente de los flujos futuros:

$$P_x = \sum_{i=1}^{4} \frac{C \cdot \Delta t \cdot N}{(1+TIR)^i} + \frac{N}{(1+TIR)^4}$$

$$P_x = \sum_{i=1}^{4} \frac{5\,\% \cdot 1_y \cdot 50\,000}{(1+4{,}3\,\%)^i} + \frac{50\,000}{(1+4{,}3\,\%)^4}$$

$$\begin{aligned}
P_x &= \frac{50\,000 \cdot 5\,\%}{(1+4{,}3\,\%)^1} + \frac{50\,000 \cdot 5\,\%}{(1+4{,}3\,\%)^2} + \\
&\quad + \frac{50\,000 \cdot 5\,\%}{(1+4{,}3\,\%)^3} + \frac{50\,000 \cdot 5\,\%}{(1+4{,}3\,\%)^4} + \\
&\quad + \frac{50\,000}{(1+4{,}3\,\%)^3} \\
P_x &= 2\,396{,}93 + 2\,298{,}11 + \\
&\quad +2\,203{,}37 + 2\,112{,}53 + \\
&\quad +42\,250{,}59 \\
P_x &= 51\,261{,}53\,€
\end{aligned}$$

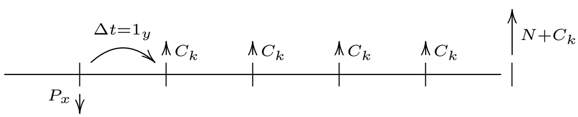
$$P_x = 9\,010{,}94\,€ + 42\,250{,}59\,€ = 51\,261{,}53\,€$$

Problema 35. *Rellenar la siguiente tabla con los datos que faltan.*

Principal	*Cupón*	*Años*	*Precio*	*Yield*
100	*2 %*	*4*		$3\,\%$
100	*5 %*	*3*	$104{,}51\,\%$	
100	*6 %*	*4*		$5\,\%$
100	*3 %*	*5*	$102{,}3\,\%$	
100	*4 %*	*3*		$3{,}5\,\%$

Problema 36. *Tenemos dos bonos de un mismo emisor, de principal* $10\,000$ €*. Uno es a 5 años con un cupón al 5 %, el otro de 5 años con un cupón al 3 %. Si el yield del bono a 5 años es del 4 %. Se pide, calcular el precio de ambos bonos. ¿cuál de los dos bonos es más sensible al cambio de los tipos de interés? Es decir, ante una subida de un 1 % en el yield del bono, ¿cuál de los dos bonos caería más de precio?*

Solución teniendo en cuenta que ambos bonos pagan de forma anual, y durante 5 años tendremos dos bonos $(k = 1,\ k = 2)$:



Entonces aplicando que el P_x debe ser el valor presente de los flujos futuros:

$$P_x = \sum_{i=1}^{5} \frac{C_k \cdot \Delta t \cdot N}{(1+TIR)^i} + \frac{N}{(1+TIR)^5}$$

Bono	Nominal	10 000 €	TIR	4 %	Valor
T	C	C·Dt·N	N	Fac.Desc.	.
1	5 %	500 €		0,961538462	480,77 €
2	5 %	500 €		0,924556213	462,28 €
3	5 %	500 €		0,888996359	444,50 €
4	5 %	500 €		0,854804191	427,40 €
5	5 %	500 €	10 000 €	0,821927107	8 630,23 €
Total:					10 445,18 €

Para el segundo Bono

Bono	Nominal	10 000 €	TIR	4 %	Valor
T	C	C·Dt·N	N	Fac.Desc.	.
1	3 %	300 €		0,961538462	288,46 €
2	3 %	300 €		0,924556213	277,37 €
3	3 %	300 €		0,888996359	266,70 €
4	3 %	300 €		0,854804191	256,44 €
5	3 %	300 €	10 000 €	0,821927107	8 465,85 €
Total:					9 554,82 €

Problema 37. *Ante la siguiente tabla, decid qué bonos compraríais y cuáles venderíais.*

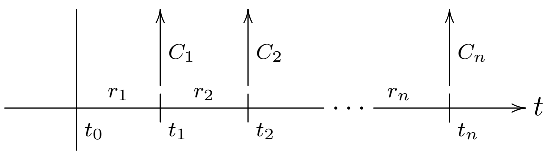
Principal	*Cupón*	*Años*	*Precio*	*Yield*
100	*2 %*	*3*	99,7 %	3,5 %
100	*3 %*	*5*	96,3 %	4,2 %
100	*4 %*	*4*	101,2 %	3,6 %
100	*5 %*	*3*	107,5 %	2,9 %
100	*6 %*	*5*	103,8 %	5,2 %

Capítulo 8

Rentas II.

8.1. Rentas financieras.

Se puede definir una renta como una serie de capitales disponibles en vencimientos futuros determinados. Otra manera de definir una renta es como se indica en[4] cualquier *"distribución de capitales en el tiempo"*.



En función de las características de la renta se pueden hacer la siguiente clasificación de las rentas.

$$
\text{Rentas}\begin{cases}
\text{Capitales} & \begin{cases} \text{Constante} & \Rightarrow \quad \text{R. Constante} \\ \text{Variable} & \Rightarrow \quad \text{R. Variable} \begin{cases}\text{Prog.Arit.}\\ \text{Prog.Geom.}\end{cases}\end{cases} \\
\text{Plazo} & \begin{cases} \text{Plazo Fijo} & \Rightarrow \quad \text{R. Temporal} \\ \text{Sin Plazo} & \Rightarrow \quad \text{R. Perpetua}\end{cases} \\
\text{Liquida} & \begin{cases} \text{Al Inicio} & \Rightarrow \quad \text{R. Prepagable} \\ \text{A Término} & \Rightarrow \quad \text{R. Pospagable}\end{cases} \\
\text{Inicio} & \begin{cases} \text{Hoy} & \Rightarrow \quad \text{R. No diferida} \\ \text{En futuro} & \Rightarrow \quad \text{R. Diferida}\end{cases}
\end{cases}
$$

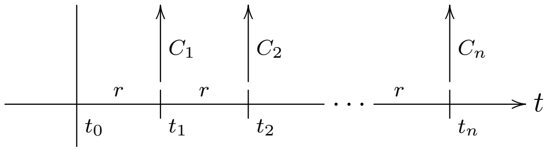
La aritmética financiera de las rentas, se aplica en la obtención del valor actual (VA), o el valor final (VF) en función de las condiciones de los capitales, flujos en tiempo y forma, y el coste de financiación/inversión.

VA: Se define el valor actual de una renta (VA), como la suma de los capitales descontados al inicio de la renta o al momento presente.

VF: Se defina el valor final de una renta (VF), como la suma de los flujos de la renta, capitalizados al final de la misma, o bien como el VA capitalizado (VA^*).

8.2. Caso: Renta Temporal Constante Pospagable.

Suponga una renta constante temporal pospagable, según las definiciones anteriores se puede concretar que el valor actual de una renta de este tipo viene por la suma de los flujos descontados de un esquema de pagos como el de la siguiente figura.



Esto supone que:

$$\text{VA}_{pos} = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^i}$$

Si se define $\nu = {}^{1}/_{(1+r)}$, esto es, $\nu^i = (1+r)^{-i}$, además por ser una renta constante $C_i = C$, entonces:

$$\text{VA}_{pos} = C \sum_{i=1}^{n} \nu^i = C{\cdot}S_n \Leftarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} \nu^i$$

Si se desarrolla la expresión anterior:

$$S_n = \nu + \nu^2 + \nu^3 + \ldots + \nu^n$$

Multiplicando en ambos lados por $-\nu$ se puede expresar como:

$$-\nu S_n = -\nu^2 - \nu^3 - \nu^4 - \ldots - \nu^{n+1}$$

Si se realiza una suma de ecuaciones se puede resolver la serie:

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & \nu + \nu^2 + \nu^3 + \ldots + \nu^{n-1} + \nu^n \\ -\nu S_n & = & \quad -\nu^2 - \nu^3 - \ldots - \nu^{n-1} - \nu^n - \nu^{n+1} \\ \hline (1-\nu)\, S_n & = & \nu - \nu^{n+1} \end{array}$$

Despejando:

$$
\begin{aligned}
(1-\nu)\, S_n &= \nu\,(1-\nu^n) \\
S_n &= \frac{\nu\,(1-\nu^n)}{(1-\nu)} \\
S_n &= \frac{(1-r)^{-1}\left(1-(1+r)^{-n}\right)}{1-(1-r)^{-1}}
\end{aligned}
$$

Se llega a la solución de la serie en función de un tipo de interés y el número de plazos.

$$
\boxed{S_n = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}} \tag{8.1}
$$

Por tanto el valor actual (VA) de la renta estudiada será:

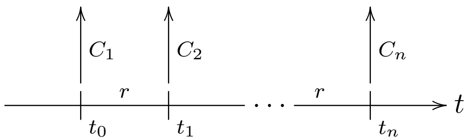
$$
\boxed{\mathrm{VA}_{pos} = C\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right)} \tag{8.2}
$$

Una vez se dispone del valor actual de la renta, el valor final es la capitalización a vencimiento del valor actual, esto es:

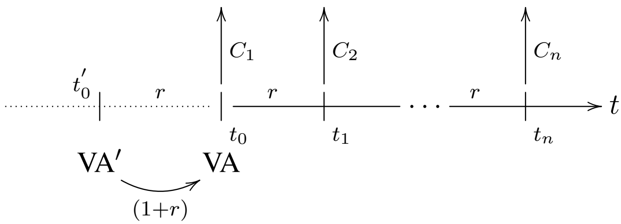
$$
\boxed{\mathrm{VF}_{pos} = \mathrm{VA}_{pos}\,(1+r)^n} \tag{8.3}
$$

8.3. Caso: Renta Temporal Constante Prepagable.

En este caso los pagos se realizan al inicio del periodo como se muestra en la siguiente figura.



Se puede suponer la existencia de un periodo $t_0^{'}$, anterior a t_0, donde calcular el valor actual, de tal forma que se emula una renta pospagable, luego este valor actual calculado para $t_0^{'}$, se capitaliza de $t_0^{'} \to t_0$.



Por tanto se concluye que el Valor actual de una renta temporal constante prepagable viene dado por la expresión:

$$\boxed{\text{VA}_{pre} = \text{VA}_{pos}\,(1+r)} \tag{8.4}$$

Y el valor final se obtiene por capitalización del valor actual, hasta el momento final, por lo que entonces para el caso de una renta prepagable la expresión del VF será:

$$\text{VF}_{pre} = \text{VA}_{pre}\,(1+r)^n$$

$$\boxed{\text{VF}_{pre} = \text{VA}_{pos}\,(1+r)^{n+1}} \tag{8.5}$$

Ejemplo 33. *Calcule la cantidad de dinero que tendría que entregar en una entidad financiera (el valor actual) así como el valor* *final, con objeto de recibir una renta que paga un cupón, al final de cada periodo anual, de $10\,000$ € durante 10 años siendo el tipo de interés pactado con la entidad del 8 %. Replique los cálculos para la misma renta pero si los plazos se realizan al principio de cada año.*

En este caso se puede aplicar la expresión 9.1:

$$\mathrm{VA}_{pos} = C\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right) = 10\,000\left(\frac{1-(1+8\,\%)^{-10}}{8\,\%}\right)$$

$$\mathrm{VA}_{pos} = 67\,100{,}81\,€$$

Para el valor final se usa la expresión 9.2:

$$\begin{aligned}\mathrm{VF}_{pos} &= \mathrm{VA}_{pos}\,(1+r)^{n} = 67\,100{,}81\,(1+8\,\%)^{10}\\ \mathrm{VF}_{pos} &= 144\,865{,}62\,€\end{aligned}$$

En caso de que la renta fuera prepagable:

$$\begin{aligned}\mathrm{VA}_{pre} &= \mathrm{VA}_{pos}\,(1+r) = 67\,100{,}81\,(1+8\,\%)\\ \mathrm{VA}_{pre} &= 72\,468{,}87\,€\\ \mathrm{VF}_{pre} &= \mathrm{VA}_{pos}\,(1+r)^{n+1} = 67\,100{,}81\,(1+8\,\%)^{11}\\ \mathrm{VF}_{pre} &= 156\,454{,}87\,€\end{aligned}$$

8.4. Caso: Renta Perpetua.

En este tipo de rentas no hay una finalización o plazo de vencimiento para la renta por lo que el término “n” no está determinado. Como aproximación se puede entender que n tiende a un número muy grande (infinito), por tanto:

$$(1+r)^{-n} = \frac{1}{(1+r)^{n}} \simeq \left.\frac{1}{k^{n}}\right|_{n\to\infty} = 0$$

Si n crece, entonces $(1/k^n)$ decrece tendiendo a 0, en otras palabras:

$$\mathrm{VA}_{pos} = C\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right)$$

Pasa porque n se hace grande:

$$n\uparrow \Rightarrow \mathrm{VA}_{pos}^{n\to\infty} = \widetilde{\mathrm{VA}}_{pos} = \lim_{n\to\infty}\left(\mathrm{VA}_{pos}\right)$$

$$\widetilde{\mathrm{VA}}_{pos} = \lim_{n\to\infty}\left\{C\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right)\right\} = \frac{C}{r}$$

$$\boxed{\widetilde{\mathrm{VA}}_{pos} = \frac{C}{r}} \tag{8.6}$$

La fórmula anterior responde al valor actual de una renta perpetua pospagable, pero si se quiere saber el valor actual de una renta perpetua prepagable se pueden usar las expresiones 9.3 y 9.5:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{VA}}_{pos} &= \frac{C}{r} \\ \mathrm{VA}_{pre} &= \mathrm{VA}_{pos}\,(1+r) \end{aligned}$$

$$\boxed{\widetilde{\text{VA}}_{pre} = C\frac{1+r}{r}} \tag{8.7}$$

Ejemplo 34. *Calcule la renta perpetua pagadera al final de cada año, que le puede ofrecer a un cliente con quien firma un contrato por el que recibe hoy 30 000 € si los tipos están al 4 %.*

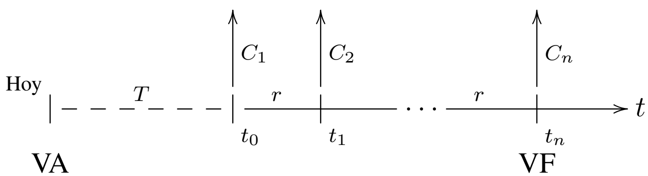
En este caso basta con aplicar la fórmula 9.5, con lo que:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\text{VA}}_{pos} &= 30\,000\,€ \\
r &= 4\,\% \\
30\,000\,€ &= \frac{C}{4\,\%}
\end{aligned}$$

$$C = 1\,200\,€$$

8.5. Caso: Renta Diferida Constante y Pospagable.

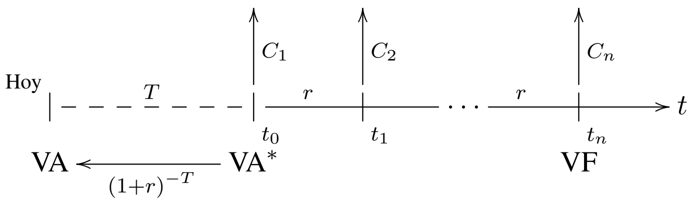
Una renta diferida es aquella que comienza en un momento futuro. Para calcular los valores presente y final de un caso así, tan sólo es necesario jugar con las leyes de capitalización o descuento de capitales en el tiempo, y las expresiones que resuelven los valores de una renta.



El cálculo del valor presente de una renta diferida de tipo constante pospagable, se puede resolver considerando dos problemas separados:

1. Obtención de un VA ficticio (VA^*), en un momento futuro. Este problema consiste en hallar el valor presente de una renta constante pospagable, que se resuelve mediante la expresión 9.1.

2. Descontar VA* al momento presente obteniendo el VA deseado.



Por tanto:

$$\text{VA}_{pos} = \frac{\text{VA}^*_{pos}}{(1+r)^T} = \frac{C\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right)}{(1+r)^T}$$

Ejemplo 35. *Suponga que firma hoy la venta de una propiedad por valor de* $4\,000\,000$ €*, concertando el cobro en ocho semestralidades iguales, la primera semestralidad tendrá lugar a partir de 2 años (renta pospagable). Si concierta con el comprador unos intereses de 10 % anual, calcule el importe de cada una de las mencionadas semestralidades.*

Se debe tener en cuenta que el interés indicado, al ser una operación superior a un año es un tipo anual compuesto, por convenio.

El valor actual (a día de HOY) de la renta es el indicado en el contrato de compraventa, esto es $4\,000\,000 €$. Dicho VA, es el valor <u>descontado</u> de la renta dentro de 2 años que se anotará como VA*:

$$\text{VA} = \frac{\text{VA}^*}{(1+10\,\%)^2} = 4\,000\,000 € \rightarrow \text{VA}^* = 4\,840\,000 €$$

VA*, es el valor actual de una renta temporal pospagable por lo tanto:

$$\text{VA}^* = C\left(\frac{1-(1+r_s)^{-n_s}}{r_s}\right)$$

Donde:

n_s: Es el número de semestres en los que se extiende la renta. $n_s = 8$

r_s: Es el tipo Semestral, equivalente a un $10\,\%$ anual, al realizarse los pagos semestre a semestre.

Para obtener r_s se aplican tipos equivalentes:

$$(1+10\,\%_{anual})^{1_{año}} = (1+r_s)^{2_{sem}}$$

$$r_s = \sqrt{(1+10\,\%)} - 1 = 4{,}88088\,\%$$

Finalmente:

$$\text{VA}^* = 4\,840\,000 = C\left(\frac{1-(1+4{,}88088\,\%)^{-8}}{4{,}88088\,\%}\right)$$

$$6{,}49444C = 4\,840\,000 \rightarrow C = 745\,251{,}90 €$$

8.6. Rentas Crecientes.

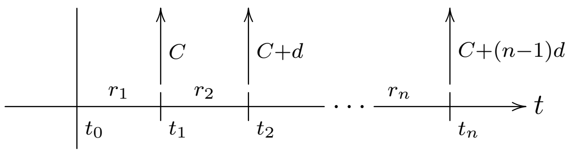
Son rentas en las que el cupón o cuota no es constante a lo largo de la vida de la renta, sino que tiene una variación. Esta variación puede ser de múltiples formas, si bien casi cualquier tipo de variación se puede descomponer en una mezcla de dos tipos:

1. Rentas crecientes en progresión aritmética.

2. Rentas crecientes en progresión geométrica.

8.6.1. Rentas Crecientes en Progresión Aritmética.

Son aquellas en las que el siguiente cupón se ve incrementado en una cantidad d. Por tanto siguen el siguiente esquema:



Para encontrar una expresión para este tipo de renta se toma:

$$\begin{aligned} \text{VA}_{pos} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{C+(j-1)\,d}{(1+r)^{j}} = \frac{C}{(1+r)} + \frac{C+d}{(1+r)^{2}} + \\ &\quad + \ldots + \frac{C+(n-1)\,d}{(1+r)^{n}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{VA}_{pos} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{C+(j-1)\,d}{(1+r)^{j}} = \sum_{j=1}^{n} (C+(j-1)\,d)\,\nu^{j} \\
&= C\nu + (C+d)\,\nu^{2} + \ldots + (C+(n-1)\,d)\,\nu^{n}
\end{aligned}
$$

Despejando se llega a:

$$
\boxed{\mathrm{VA}_{pos} = \left(C+\frac{d}{r}+nd\right)\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} - \frac{nd}{r}} \tag{8.8}
$$

En caso de que la renta fuera perpetua:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{VA}_{pos}^{\infty} &= \lim_{n\to\infty} \left(\left(C+\frac{d}{r}+nd\right)\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} - \frac{nd}{r}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{C+\frac{d}{r}}{r} + \frac{nd}{r} - \frac{nd}{r}\right) \\
&= \boxed{\frac{C+\frac{d}{r}}{r}}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 36. *Calcular el valor actual y final de una renta cuya cuantía en el primer año es de $1\,000\,000$ €, si el crecimiento de dicha renta no es menor del 20 % y el contrato tiene una duración de 10 años si se ha fijado el tipo de referencia para esta operación al 5 % anual.*

Esto es una renta de progresión aritmética con $d = 1\,000\,000 \times 20\,\% = 200\,000$ €, por lo que el lo que se conoce es su valor actual:

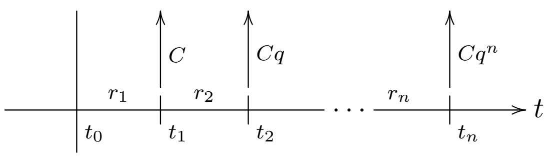
$$
\begin{aligned}
\text{VA}_{pos} &= 1\,000\,000\frac{1-(1+5\,\%)^{-10}}{5\,\%}+\\
&+\frac{200\,000}{5\,\%}\frac{1-(1+5\,\%)^{-10}}{5\,\%}+\\
&+10\times 200\,000\frac{1-(1+5\,\%)^{-10}}{5\,\%}\\
&-\frac{10\times 200\,000}{5\,\%}\\
\text{VA}_{pos} &= 14\,052\,144{,}50\,€
\end{aligned}
$$

El valor final sale de capitalizar este resultado:

$$\text{VF}_{pos} = 14\,052\,144{,}50\,(1+5\,\%)^{10} = 22\,889\,462{,}68\,€$$

Renta Creciente en progresión geométrica:

Son aquellas que incrementan una tasa constante g con $q = 1+g$ en cada plazo:



Para encontrar una expresión para este tipo de renta se toma:

$$\text{VA}_{pos} = \sum_{j=1}^{n}\frac{Cq^j}{(1+r)^j} = \frac{C}{(1+r)} + \frac{Cq}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{Cq^n}{(1+r)^n}$$

Despejando:

$$\text{VA}_{pos} = C\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^n}{r-g} \Leftrightarrow \text{Para } r \neq g$$

$$\text{VA}_{pos} = C\frac{n}{1-r} \Leftrightarrow \text{Para } r = g$$

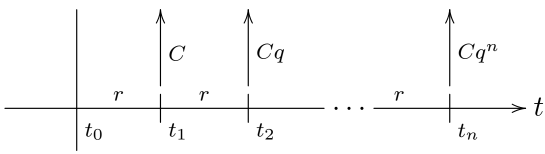
Ejemplo 37. *Calcular el valor actual y final de una renta de* 200 000 € *en el primer año si tiene un crecimiento anual del 10 %, durante seis años con los tipos al 5 % anual.*

Se aplica la fórmula anterior:

$$\text{VA}_{pos} = 200\,000\frac{1-\left(\frac{1+10\,\%}{1+5\,\%}\right)^6}{5\,\%-10\,\%} = 1\,287\,864{,}38\,€$$

8.6.2. Caso: Renta Variable Creciente Geométrica Pospagable.

En este caso la cantidad recibida en cada uno de los pagos crece (o decrece) de forma constante.



El valor actual de este tipo de renta es el siguiente:

$$\text{VA}_{pos} = \begin{cases} C\frac{1-q^n(1+r)^{-n}}{1+r-q} & q \neq 1+r \\ C\frac{n}{1+r} & q = 1+r \end{cases} \tag{8.9}$$

Donde:

g**:** Es la tasa en la que crecen las cuotas en $\%$.

El valor futuro será:

$$\text{VF}_{pos} = (1+r)^n \text{VA}_{pos} \rightarrow \text{VF}_{pos} = C\frac{1-q^n(1+r)^{-n}}{1+r-q}(1+r)^n$$

8.6.3. Caso: Renta Variable Creciente Geométrica Prepagable.

El valor actual y futuro bajo el mismo supuesto hecho en el apartado 8.3, se tiene:

$$\text{VA}_{pre} = \text{VA}_{pos}(1+r) \rightarrow \text{VA}_{pre} = C\frac{1-q^n(1+r)^{-n}}{1+r-q}(1+r)$$

$$\text{VF}_{pre} = (1+r)^n \text{VA}_{pre} \rightarrow \text{VF}_{pre} = C\frac{1-q^n(1+r)^{-n}}{1+r-q}(1+r)^{n+1}$$

Para los casos en los que $q \neq 1+r$.

8.6.4. Caso: Renta Variable Creciente Geométrica Pospagable y perpetua.

Hay que tener en cuenta que $n \rightarrow \infty$:

$$\mathrm{VA}_{pos} = C \left. \frac{1 - q^n (1+r)^{-n}}{1+r-q} \right|_{n\to\infty} = C \frac{1}{1+r-q} \tag{8.10}$$

Para los casos en los que $q \neq 1 + r$.

Ejemplo 38. *Hallar el valor actual y final de los una renta que el primer año va a pagar* $30\,000$ € *y crece un* $5\,\%$ *anual de forma acumulativa para un horizonte temporal de 10 años.*

a) Suponiendo tipo $r = 6\,\%$.

b) Suponiendo tipo $r = 5\,\%$.

Aplicado directamente las ecuaciones de renta con los siguientes datos $q = 1{,}05$, $r = 0{,}06$, $n = 10$, $C = 30\,000$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{VA}_{pos} &= C\frac{1 - q^n (1+r)^{-n}}{1+r-q} \\
\mathrm{VA}_{pos} &= 30\,000\frac{1 - 1{,}05^{10} (1+0{,}06)^{-10}}{1+0{,}06-1{,}05} \\
\mathrm{VA}_{pos} &= 271\,301{,}24\,€
\end{aligned}$$

Aplicado directamente las ecuaciones de renta con $q = 1{,}05$, $r = 0{,}05$, $n = 10$, $C = 30\,000$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{VA}_{pos} &= C\frac{n}{1+r} \\
\mathrm{VA}_{pos} &= 30\,000\frac{10}{1+0{,}05} \\
\mathrm{VA}_{pos} &= 285\,714{,}29\,€
\end{aligned}$$

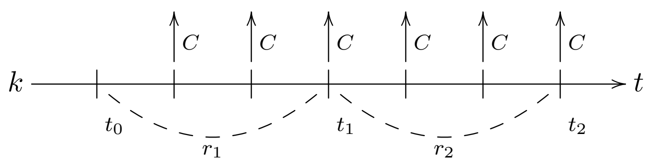
NOTA PRÁCTICA:
Para realizar cálculos, se recuerda al lector la importancia de expresar el tipo de interés en un plazo que coincida con el devengo de los pagos, esto es con los periodos de pago. Así, en caso de disponer de una referencia de tipos de interés anual, pero la renta tiene pagos mensuales, se debe expresar este tipo en su equivalente mensual.
Por tanto:

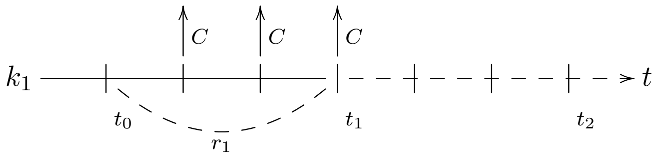
1. Si se dispone de TIN entonces el tipo mensual sería $r_m = {}^{TIN}\!/_{12}$
2. Si se dispone de de TAE entonces el tipo mensual sería $r_m = \sqrt[12]{1 + TAE} - 1$

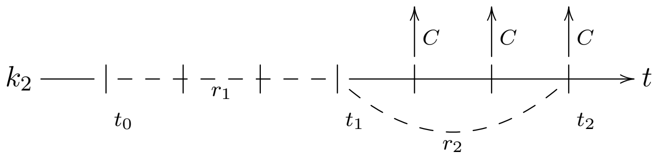
8.7. Rentas a tramos.

Se trata de rentas en las que e tipo de interés es diferente en cada uno de los tramos que la componen.

periodo desde $t = t_0$ hasta $t = t_1$, y r_2 para el periodo desde $t = t_1$ hasta $t = t_2$, se descompone en dos rentas, una inmediata de cuota C a tipo de interés r_1 comprendida entre $[t_0, t_1]$, y otra diferida un tiempo $\Delta t = t_1 - t_0$, de cupón C a tipo de interés r_2 comprendida en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$.







Entonces el valor actual de la renta k a tramos se puede calcular como la suma de valores actuales de la renta inmediata constante pospagable k_1 más la renta diferida constante pospagable k_2:

$$\mathbf{VA}_k = \mathbf{VA}_{k_1} + \mathbf{VA}_{k_2}$$

Donde el valor actual de la renta k_1, $\mathbf{VA}_{k_1}$ si tiene una cuota C, un tipo de interés de la renta r_1, un número de pagos n_1, es:

$$\mathbf{VA}_{k_1} = C \cdot \frac{1-(1+r_1)^{-n_1}}{r_1}$$

Y donde el valor actual de la renta k_2, $\mathbf{VA}_{k_2}$ si tiene una cuota C, un tipo de interés de la renta r_2, un número de pagos n_2, y está diferida un periodo de tiempo $T = t_1 - t_0$ sobre el que se puede reinvertir el capital aun tipo r_1, es:

$$\mathbf{VA}_{k_2} = C \cdot \frac{1}{(1+r_1)^T} \cdot \frac{1-(1+r_2)^{-n_2}}{r_2}$$

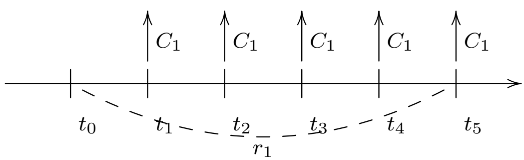
Finalmente:

$$\mathbf{VA}_k = C \cdot \left[\frac{1-(1+r_1)^{-n_1}}{r_1} + \left(\frac{1}{(1+r_1)} \cdot \frac{1-(1+r_2)^{-n_2}}{r_2}\right)\right]$$

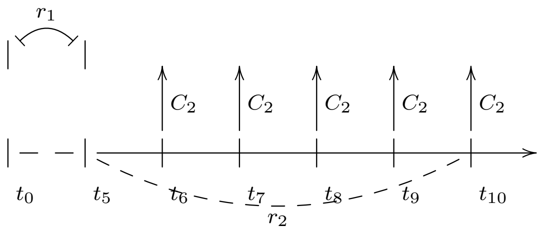
Ejemplo 39. *Calcule el valor de una renta de 15 años a tres tramos de igual duración. Durante el primer tramo que comprende desde hoy hasta el 5º año, se cobran 5 cuotas* $(n = 5)$ *de igual cantidad* $C_1 = 500\,000$ €*, a un tipo de interés* $r_1 = 3\,\%$*. Durante el segundo tramo que comprende desde el 5º año hasta el 10º, se cobran 5 cuotas* $(n = 5)$ *de igual cantidad* $C_2 = 700\,000$ €*, a un tipo de interés* $r_2 = 4\,\%$*. Durante el tercer tramo que comprende desde el 10º año hasta el 15º, se cobran 5 cuotas* $(n = 5)$ *de igual cantidad* $C_3 = 900\,000$ €*, a un tipo de interés* $r_3 = 5\,\%$*.*

En este caso la solución pasa por descomponer la renta por tramos en tres rentas constantes, pospagables, donde la primera será una renta inmediata, la segunda será diferida 5 años y la tercera será diferida 10 años. La suma del valor actual de las tres rentas es la solución al valor actual de la renta por tramos completa.

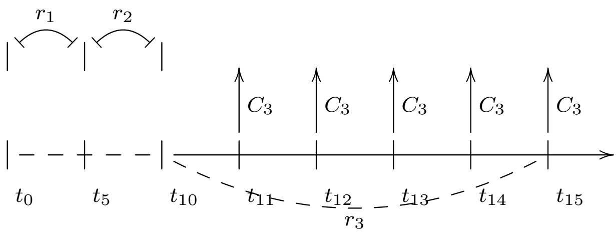
Para la primera renta K_1:



Para la segunda renta K_2, diferida $T_{0\to 5}$:



Para la tercera renta K_3 diferida primero $T_{0\to5}$ y luego otro tiempo $T_{5\to10}$:



Para calcular los tipos de interés de los tramos diferidos, es necesario hacer la suposición de que es posible reinvertir al mismo tipo al que se aplica el tramo, por tanto se puede suponer que para la primera de las rentas diferidas, para el periodo de tipo desde hoy hasta el 5º año $T_{0\to5}$, el tipo de interés es el mismo que para la primera renta inmediata, esto es, $r_{d_{0\to5}} = 3\,\%$. Para el segundo tramo, el comprendido entre los años 5º y 10º, para poder calcular el valor actual de la segunda de las rentas diferidas, es necesario descontar en dos pasos, uno por $T_{0\to5}$ y otro desde $T_{5\to10}$, siendo en este según do tramo el tipo de interés como el aplicado sobre la segunda renta $r_{d_{5\to10}} = 4\,\%$.

Los valores actuales vendrán como:

$$\mathbf{VA}_K = \mathbf{VA}_{K_1} + \mathbf{VA}_{K_2} + \mathbf{VA}_{K_3}$$

Donde:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{VA}_{K_1} &= C_1 \cdot \frac{1-(1+r_1)^{-n_1}}{r_1} \\
&= 500\,000\,€ \cdot \frac{1-(1+3\,\%)^{-5}}{3\,\%} \\
&= 2\,289\,853{,}59\,€ \\
\mathbf{VA}_{K_2} &= C_2 \cdot \frac{1-(1+r_2)^{-n_2}}{r_2} \cdot \frac{1}{(1+r_1)^{T_{0\to 5}}} \\
&= 700\,000\,€ \cdot \frac{1-(1+4\,\%)^{-5}}{4\,\%} \cdot \frac{1}{(1+3\,\%)^{5}} \\
&= 2\,688\,126{,}73\,€ \\
\mathbf{VA}_{K_2} &= C_3 \cdot \frac{1-(1+r_3)^{-n_3}}{r_3} \cdot \frac{1}{(1+r_1)^{T_{0\to 5}}} \cdot \frac{1}{(1+r_2)^{T_{5\to 10}}} \\
&= 900\,000\,€ \cdot \frac{1-(1+5\,\%)^{-5}}{5\,\%} \cdot \frac{1}{(1+3\,\%)^{5}} \cdot \frac{1}{(1+4\,\%)^{5}} \\
&= 2\,762\,645{,}07\,€
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\mathbf{VA}_K = 7\,740\,625{,}40\,€}$$

8.8. Problemas.

Problema 38. *Solicito una hipoteca de 150.000 euros a un tipo anual fijo del 4,5 %.*

1. Calcule:

   a) ¿Cuánto sale una cuota anual si devuelvo el importe en 20 años?

b) ¿Qué pasa con la cuota si pedimos el doble de capital? ¿Es algo que se puede generalizar para cualquier renta?

c) Si quiero pagar como máximo 8000 euros anuales, ¿cuánto tiene que durar la hipoteca?

2. Repetid los cálculos del ejercicio pero:

   a) Mismo caso 1.a pero ahora el tipo es 4,5 % compuesto y con cuotas mensuales.

   b) Mismo caso 1.a pero ahora el tipo es 4,5 % compuesto y con cuotas mensuales.

   c) Mismo caso 1.c pero ahora considerad un máximo de 600 euros al mes.

Solución:

1. Parte:

   a) Cuota suponiendo que es pospagable:

$$VA = C_1 \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = C_1 \frac{1-(1+4{,}5\,\%)^{-20}}{4{,}5\,\%}$$

$$150\,000 = 13,01 C_1 \to C_1 = 11\,531{,}42\,€$$

   b) Cuota:

$$2 \cdot 150\,000 = 13,01 C_2 \to C_2 = 23\,062{,}84\,€ = 2 \cdot C_1$$

   c) Si la cuota anual es de $8\,000\,€$:

$$VA_{max} = 8\,000 \cdot \frac{1-(1+4,5\,\%)^{-20}}{4,5\,\%} = 8\,000 \cdot 13,01$$

$$VA_{max} = 104\,063{,}49\,€$$

2. En este caso el problema viene porque el pago de la cuota es mensual, por tanto el número de cotas es $n = 12 \cdot 20 = 240$, y para el cálculo de la cuota primero es necesario obtener el tipo compuesto mensual equivalente:

$$C_f = C_i\,(1 + r_y) \leftrightarrow C_f = C_i\,(1 + r_m)^{12}$$

$$r_m = (1 + r_y)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,3675\,\%$$

   a) Por tanto:

$$VA = C\frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} = C\frac{1 - (1 + 0,3675\,\%)^{-240}}{0,3675\,\%}$$

$$C = \frac{150\,000\,€}{159,29} = 941{,}68\,€$$

   b) Entonces:

$$C = \frac{2 \cdot 150\,000\,€}{159,29} = 2 \cdot 941{,}68\,€$$

   c) Si la cuota es de 600 €:

$$VA = C\frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} = 600\frac{1 - (1 + 0,3675\,\%)^{-240}}{0,3675\,\%}$$

$$VA = 95\,573{,}47\,€$$

Problema 39. *Con un importe inicial de 500.000 euros, queremos obtener una renta anual durante los próximos 25 años. Si los tipos de interés se mantienen en 3 % TAE,*

¿de cuánto será la cuota mensual?

¿y si hacemos cuotas anuales?

¿qué es mayor: la cuota anual o la cuota mensual multiplicada por doce? ¿por qué?

Solución, primero calcularemos la cuota anual:

$$VA = 500\,000 = C_y \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = C_y \frac{1-(1+3\,\%)^{-25}}{3\,\%}$$

$$C_y = \frac{500\,000}{17,41} = 28\,713{,}94\,€$$

Para la cuota mensual primero el tipo compuesto mensual:

$$(1+r_y) = (1+r_m)^{12} \rightarrow r_m = (1+r_y)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,2466\,\%$$

Con esto y teniendo en cuenta que el número de cuotas es $n = 12 \cdot 25 = 300$:

$$\begin{aligned} VA &= 500\,000 = C_m \frac{1-(1+r_m)^{-n\cdot 12}}{r_m} = \\ &= C_m \frac{1-(1+0,2466\,\%)^{-300}}{0,2466\,\%} \end{aligned}$$

$$C_m = \frac{500\,000}{211,82} = 2\,360{,}54\,€$$

Veamos $12 \cdot C_m = 28\,326{,}52\,€$ mientras que $C_y = 28\,713{,}94\,€$ por tanto $\Delta C = C_y - 12 \cdot C_m = 387{,}41\,€$ anuales de diferencia, debidos a que mensualmente recibimos el dinero antes, y de forma constante a los largo del año, mientras que para la anual esperamos a ver algo de dinero hasta el final del año, por lo que se exigirá un pago mayor en caso del anual que en el caso del mensual.

Problema 40. *Suponed que, sobre el ejercicio anterior, se produce una bajada de los tipos de interés y pasan de 3 % a 2 %.*

¿cuál es el impacto en las cuotas anuales y mensuales?

¿en cuál de los dos casos el impacto de reducción porcentual es mayor? ¿por qué?

Capítulo 9

Rentas y III.

Resumen Rentas financieras (formulación).

Rentas pospagables:

$$\boxed{\text{VA}_{pos} = C\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right)} \tag{9.1}$$

$$\boxed{\text{VF}_{pos} = \text{VA}_{pos}\,(1+r)^{n}} \tag{9.2}$$

Rentas prepagables:

$$\boxed{\text{VA}_{pre} = \text{VA}_{pos}\,(1+r)} \tag{9.3}$$

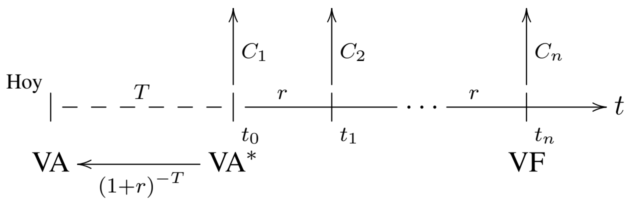
$$\boxed{\text{VF}_{pre} = \text{VA}_{pos}\,(1+r)^{n+1}} \tag{9.4}$$

Renta perpetua:

$$\boxed{\widetilde{\text{VA}}_{pos} = \frac{C}{r}} \tag{9.5}$$

$$\boxed{\widetilde{\text{VA}}_{pre} = C\frac{1+r}{r}} \tag{9.6}$$

Rentas diferidas pospagables:



$$\text{VA}_{pos} = \frac{\text{VA}^{*}_{pos}}{(1+r)^{T}} = \frac{C\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right)}{(1+r)^{T}}$$

9.1. Amortización.

La amortización es un término adecuado a varios conceptos económico, contables y financieros, si bien para el presente curso se aplica al proceso por el que se procede a extinguir una deuda mediante la realización de una serie de pagos periódicos.

Cuando se realiza el pago de una deuda, este pago se suele desglosar en dos partes diferentes, una parte del capital se dedica a la reducción del total de la deuda, es la parte que se amortiza, mientras que el resto se dedica al pago de intereses.

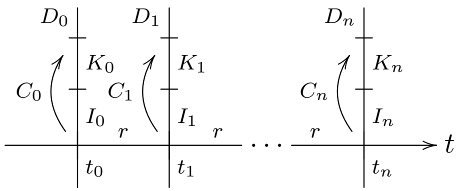
En cada uno de los momentos de pago se tienen las siguientes cantidades:

1. Capital pendiente o deuda: D

2. Intereses devengados por el capital pendiente hasta este momento: I

3. Cantidad de capital que se amortiza de la deuda en el pago del plazo: K

4. Cuota, que es la cantidad total del plazo, esto es la suma de los intereses devengados y el capital que se amortiza: $C = K + I$



Existen tres modelos de amortización principales, a saber:

1. Método Francés: Consiste en definir una cuota igual para todos los pagos, donde los intereses de un pago son los generados por el restante de la deuda en el plazo de devengo, mientras que el capital amortizado es el resto hasta el total de la cuota.

2. Método Alemán: Consiste en definir una cuota constante de amortización del principal, a la que se añaden los intereses generados en el plazo de devengo por la deuda anterior. Este modelo se caracteriza por tener una cuota decreciente.

3. Método Americano: Consiste en el pago de intereses según se convenga, si bien el capital se amortiza de golpe al final del periodo de la operación. Por tanto, los intereses son siempre

los mismos. Es usado en depósitos, y otros productos financieros, de forma institucional, ya que este tipo de préstamos acarrean un mayor riesgo.

De forma independiente al método de amortización, lo habitual es dar los datos anualizados, pero la frecuencia de pago obliga a expresar las cantidades de forma adecuada. Esto es, suponga que tiene un préstamo de $100\,000$ €, a 10 años, pero que PAGA CUOTAS MENSUALES, con un tipo de interés del $r_y = 10\,\%$, como no se indica otra cosa, se supone que este tipo de interés es anual, y como es una operación a más de un año, se considera compuesto. Al ser un préstamo que amortiza mensualmente se debe expresar todo en meses:

- Número de pagos n: Al ser 10 años y un año tiene 12 meses, entonces $n = 120$.
- Tipo de interés r_m: Se debe calcular el tipo de interés mensual compuesto equivalente:

$$\begin{aligned}
(1 + r_m)^{12} &= (1 + r_y) \rightarrow \\
r_m &= (1 + r_y)^{\frac{1}{12}} - 1 \\
r_m &= (1 + 10\,\%)^{\frac{1}{12}} - 1
\end{aligned}$$

$$r_m = 0{,}797\,\%$$

9.1.1. Método Francés:

Recuerde que:

Concepto		Carácter
Cuota	C	Constante
Intereses	I	Variable
Capital	K	Variable

$$\boxed{C = I + K}$$

Por tanto para calcular el cuadro de amortizaciones:

1. Lo primero es calcular la cuota C, que resulta de considerar el préstamo como una renta de duración la del préstamo con un valor actual (D) la deuda del préstamo. Esta cuota C es siempre constante para todos los plazos.

$$\begin{aligned} \text{VA}_{pos} &= C\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = C{\cdot}S_n \\ C &= \frac{D}{S_n} \\ C &= D\frac{r}{1-(1+r)^{-n}} \end{aligned}$$

2. Para calcular la parte del interés I, se multiplica la cantidad del principal que queda pendiente de devolver (deuda ó D) por el tipo de interés al plazo correspondiente.

$$I = r{\cdot}D_{(t-1,t)}$$

3. Finalmente la parte de capital amortizado se puede calcular como diferencia entre cuota e intereses, esto es:

$$K = C - I$$

4. El capital que queda pendiente para el siguiente plazo, de $t \to t+1$, viene disminuida en la cantidad que se amortiza:

$$D_{(t,t+1)} = D_{(t-1,t)} - K$$

n	Pendiente	Intereses	Amortización	Cuota
0	$D_{(0,1)} = D$	$I_0 = r{\cdot}D_{(0,1)}$	$K_0 = C - I_0$	C
1	$D_{(1,2)} = D_{(0,1)} - K_0$	$I_1 = r{\cdot}D_{(1,2)}$	$K_1 = C - I_1$	C
2	$D_{(2,3)} = D_{(1,2)} - K_1$	$I_2 = r{\cdot}D_{(2,3)}$	$K_2 = C - I_2$	C

Con objeto de ilustrar el método Francés, para amortización de pasivo, considérese una operación financiera por la que se toman $100\,000$ € durante un plazo de 10 años, con pagos anuales, aplicando un tipo de interés del 4 %.

El método Francés, obliga a una cuota constante, y la operación tiene "pinta" de una renta constante pospagable, por lo que el cálculo de la cuota parte de despejar el cupón de la expresión 9.1.

Por tanto:

$$\begin{aligned} 100\,000 &= C\frac{1-(1+4\,\%)^{-10}}{4\,\%} \\ C &= 12\,329{,}09\,€ \end{aligned}$$

Con esto la tabla de amortizaciones queda:

	N	Principal	Intereses	Amortización	Cuota
Amortización	0	100 000,00 €	4 000,00 €	8 329,09 €	12 329,09 €
	1	91 670,91 €	3 666,84 €	8 662,26 €	12 329,09 €
	2	83 008,65 €	3 320,35 €	9 008,75 €	12 329,09 €
	3	73 999,90 €	2 960,00 €	9 369,10 €	12 329,09 €
	4	64 630,80 €	2 585,23 €	9 743,86 €	12 329,09 €
	5	54 886,94 €	2 195,48 €	10 133,62 €	12 329,09 €
	6	44 753,32 €	1 790,13 €	10 538,96 €	12 329,09 €
	7	34 214,36 €	1 368,57 €	10 960,52 €	12 329,09 €
	8	23 253,84 €	930,15 €	11 398,94 €	12 329,09 €
	9	11 854,90 €	474,20 €	11 854,90 €	12 329,09 €
	10	– €	– €	– €	– €

9.1.2. Método Alemán:

Recuerde que:

Concepto		Carácter
Cuota	C	Variable
Intereses	I	Variable
Capital	K	Constante

$$\boxed{C = I + K}$$

Por tanto para calcular el cuadro de amortizaciones:

1. Lo primero es calcular el capital que se amortiza en cada pago, si n es el número de pagos y D la deuda total al inicio:

$$K = \frac{D}{n}$$

2. Para calcular la parte del interés I, se multiplica la cantidad del principal que queda pendiente de devolver por el tipo de interés al plazo correspondiente.

$$I = r \cdot D_{(t-1,t)}$$

3. Finalmente la cuota se puede calcular como la suma de intereses y capital amortizado, esto es:

$$C = I + K$$

4. El capital que queda pendiente para el siguiente plazo, de $t \to t+1$, viene disminuida en la cantidad que se amortiza:

$$D_{(t,t+1)} = D_{(t-1,t)} - K$$

n	Pendiente	Intereses	Amort.	Cuota
0	$D_{(0,1)} = D$	$I_0 = r \cdot D_{(0,1)}$	K	$C_0 = I_0 + K$
1	$D_{(1,2)} = D_{(0,1)} - K$	$I_1 = r \cdot D_{(1,2)}$	K	$C_1 = I_1 + K$
2	$D_{(2,3)} = D_{(1,2)} - K$	$I_2 = r \cdot D_{(2,3)}$	K	$C_2 = I_2 + K$

Con objeto de ilustrar el método Alemán, para amortización de pasivo, considérese una operación financiera por la que se toman 100 000 € durante un plazo de 10 años, con pagos anuales, aplicando un tipo de interés del 4 %.

El cálculo de la parte a amortizar en cada pago se obtiene dividiendo el total de la deuda entre el número de pagos (en este caso coincide que los pagos se hacen en años).

Por tanto:

$$C_a = \frac{100\,000}{10} = 10\,000\,€$$

Luego la cuota viene determinada por el interés generado hasta el momento de pago, más el capital de amortización.

	N	Principal	Intereses	Amortización	Cuota
Amortización	0	100 000,00 €	4 000,00 €	10 000,00 €	14 000,00 €
	1	90 000,00 €	3 600,00 €	10 000,00 €	13 600,00 €
	2	80 000,00 €	3 200,00 €	10 000,00 €	13 200,00 €
	3	70 000,00 €	2 800,00 €	10 000,00 €	12 800,00 €
	4	60 000,00 €	2 400,00 €	10 000,00 €	12 400,00 €
	5	50 000,00 €	2 000,00 €	10 000,00 €	12 000,00 €
	6	40 000,00 €	1 600,00 €	10 000,00 €	11 600,00 €
	7	30 000,00 €	1 200,00 €	10 000,00 €	11 200,00 €
	8	20 000,00 €	800,00 €	10 000,00 €	10 800,00 €
	9	10 000,00 €	400,00 €	10 000,00 €	10 400,00 €
	10	– €	– €	– €	– €

9.1.3. Método Americano:

Recuerde que:

Concepto		Carácter
Cuota	C	Constante
Intereses	I	Constante
Capital	K	0

$$\boxed{C = I + K}$$

Por tanto para calcular el cuadro de amortizaciones:

1. Para calcular la parte del interés I, se multiplica la cantidad del principal que queda pendiente de devolver por el tipo de interés al plazo correspondiente.

$$I = r{\cdot}D_{(t-1,t)}$$

2. Finalmente la cuota se puede calcular como la suma de intereses y capital amortizado, esto es:

$$C = I + K$$

3. El capital que queda pendiente para el siguiente plazo, de $t \to t+1$, es la misma porque no se amortiza cantidad alguna hasta finales del préstamo:

$$D_{(t,t+1)} = D_{(t-1,t)}$$

n	Pendiente	Intereses	Amort.	Cuota
0	$D_{(0,1)} = D$	$I = r{\cdot}D$	0	$C = I$
1	$D_{(1,2)} = D$	$I = r{\cdot}D$	0	$C = I$
2	$D_{(2,3)} = D$	$I = r{\cdot}D$	0	$C = I$
...	...	...	...	...
n	$D_{(t,t+1)} = D$	$I = r{\cdot}D$	D	$C = I + D$

En este modelo sólo se pagan intereses en las fechas de liquidación, dejando el principal para el final de la operación.

El cuadro de amortizaciones que resulta sería:

	N	Principal	Intereses	Amortización	Cuota
Amortización	0	100 000,00 €	4 000,00 €	– €	4 000,00 €
	1	100 000,00 €	4 000,00 €	– €	4 000,00 €
	2	100 000,00 €	4 000,00 €	– €	4 000,00 €
	3	100 000,00 €	4 000,00 €	– €	4 000,00 €
	4	100 000,00 €	4 000,00 €	– €	4 000,00 €
	5	100 000,00 €	4 000,00 €	– €	4 000,00 €
	6	100 000,00 €	4 000,00 €	– €	4 000,00 €
	7	100 000,00 €	4 000,00 €	– €	4 000,00 €
	8	100 000,00 €	4 000,00 €	– €	4 000,00 €
	9	100 000,00 €	4 000,00 €	100 000,00 €	104 000,00 €
	10	– €	– €	– €	– €

9.1.4. Método Sinking-Fund:

Este modelo se basa en el modelo americano de amortización. Uno de los problemas que tiene este modo de amortización es la concentración del riesgo en un único pago al final de la operación, y sólo en ese momento se recupera la parte del capital prestado. Esto supone que si la contrapartida quiebra antes de que finalice la operación, entonces se deja de percibir el total de la cantidad prestada[1], para tratar de mitigar este riesgo, se hace un modelo de amortización americano pero con un fondo de depósito asociado.

Por lo tanto, una operación financiera de préstamo con amortización Sinking-Fund esta compuesta de dos operaciones simples, una de préstamo y otra de depósito.

- La parte del préstamo sigue el esquema de amortización normal por el método Americano. Tendrá asignado un calendario

[1] Algo siempre se puede recuperar pero eso pasa por un proceso de concurso de acreedores.

de pagos y un tipo de interés (r_p) del préstamo.

- La parte de depósito busca que se depositen ciertas cantidades que garanticen la devolución del principal a vencimiento. La frecuencia con la que se hacen los ingresos suele ser la misma con la que se pagan las cuotas del préstamo. El tipo de interés del préstamo será diferente del asignado al depósito (r_d) .

Es importante apuntar que el depósito puede hacerse en la misma entidad con la que se mantiene el préstamo o bien en otra, pero bajo estado de pignoración. Lo habitual es que el depósito se haga en la misma entidad que mantiene el préstamo.

Resulta fundamental remarcar que en esta operación financiera, realmente hay dos tipos de interés, uno asociado al préstamo (r_p) y otro asociado al depósito (r_d) y la operación completa se desglosa en dos más simples con las siguientes características:

$$\text{P}_{\text{SFund}} = \begin{cases} \text{Préstamo} & \begin{cases} \text{Tipo} & \text{Americano} \\ \text{Interés} & r_p \\ \text{Nº Pagos} & n \end{cases} \\ \text{Depósito} & \begin{cases} \text{Tipo} & \text{A la vista.} \\ \text{Interés} & r_d \\ \text{Nº Flujos} & n \end{cases} \end{cases}$$

El esquema de capitales y su evolución temporal se pueden ver en la siguiente figura:

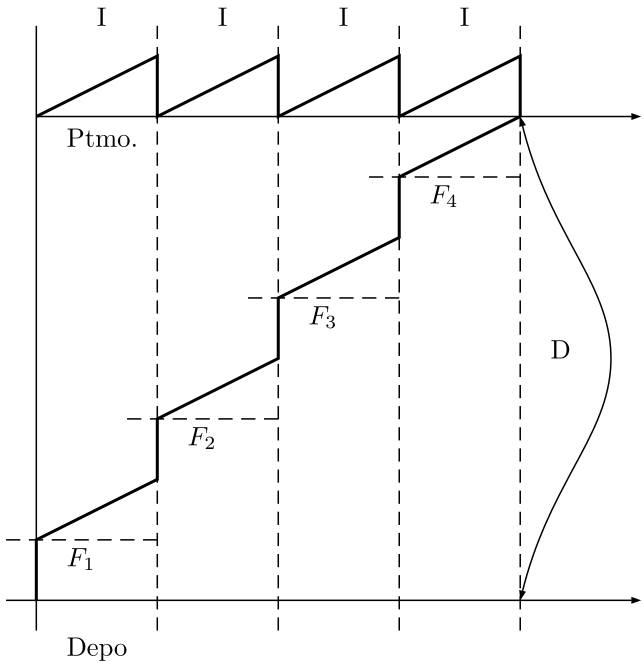


Figura 9.1: Esquema Sinking-Fund

Es esta figura se muestra el efecto de las dos operaciones combinadas, la parte del préstamo americano en la parte superior, en el que se generan intereses sobre la la cantidad de la deuda D, mientras que la parte del depósito muestra que cada vez que se debe hacer un ingreso aumenta la cantidad en reserva en este depósito. Además la cantidad depositada crece por medio de la generación de ciertos intereses (r_d), hasta que finalmente en el depósito se tiene la cantidad D, justo al vencimiento del préstamo americano, y por tanto el principal de la deuda se cierra con el dinero que se tiene en el depósito.

9.1.4.1. Cálculo de los importes del préstamo y del depósito.

Como el préstamo es de tipo americano, el cálculo de los intereses que se pagan es igual que lo indicado en el apartado 9.1.3. En cada uno de los periodos de devengo se debe abonar una cantidad en concepto de intereses según:

$$I = r_p \cdot D_{(t-1,t)}$$

Pero debe tenerse en cuenta que en el método americano sólo se abonan intereses, no se amortiza deuda, por lo que $D_{(t,t+1)} = D_{(t-1,t)}$.

Para las cantidades del depósito se debe partir de la base de que el valor final del depósito (VF_d), debe coincidir con el valor de la deuda final que es la cantidad pendiente de amortizar (D), esto es:

$$VF_d = D$$

$$VF_d = \sum_{i=1}^{n} f_i^{\star}$$

Donde $f_i^{\star}$ son las cantidades aportadas al depósito, pero capitalizadas hasta el momento final T o vencimiento de la operación. Nótese que, en caso de que todas las cantidades aportadas, fueran iguales, este VF_d, es el valor final de una serie de pagos iguales a lo largo del tiempo, que se pagan en periodos iguales, esto es una renta que se puede considerar pos-pagable. Por tanto VF_d se puede calcular por medio de la expresión de una renta pos-apagable según la expresión:

$$VF_d = C \cdot S_n \cdot (1 + r_d)^n \tag{9.7}$$

Donde se puede cambiar el concepto de cuota de la renta C por el de ingreso en el depósito f_i que como para toda fecha de pago i los importes son iguales se puede decir que $f_i \overset{\forall i}{=} F$, por tanto la expresión 9.7 se puede escribir como:

$$D = F\frac{1-(1+r_d)^{-n}}{r_d}(1+r_d)^n \tag{9.8}$$

$$F = D\frac{r_d(1+r_d)^{-n}}{1-(1+r_d)^{-n}} \tag{9.9}$$

Así de la expresión 9.9, se puede calcular la cantidad constante F a aportar al depósito en cada fecha de devengo.

Ejemplo 40. *Calcular el cuadro de amortización de un préstamo con método de amortización Sinking-Fund, calcular la aportación al depósito y el plazo de intereses, así como el pago total si las operaciones devengan en el mismo momento. Tómese un nominal de* $100\,000$ €*, a* 10 *años, con amortización anual y los tipos de interés del préstamo es* $r_p = 4\,\%$*, mientras que el del depósito es* $r_d = 10\,\%$.

Para la parte del depósito a través de la expresión 9.9 se puede calcular la cantidad a ingresar cada año:

$$F = 100\,000\frac{10\,\%(1+10\,\%)^{-10}}{1-(1+10\,\%)^{-10}}$$

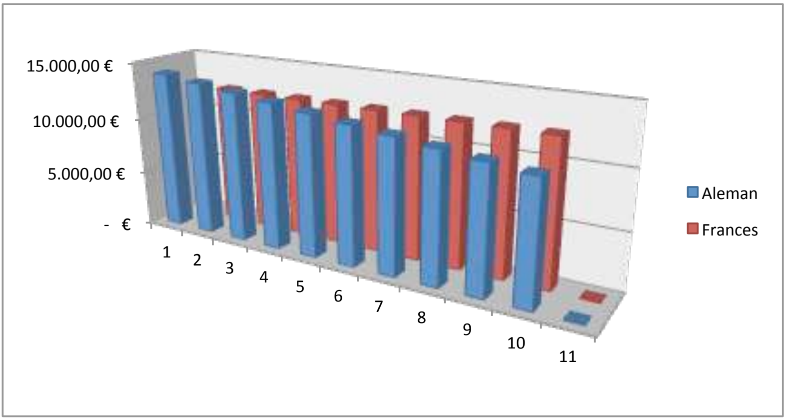
$$F = 6\,274{,}54\,€$$

El cuadro de amortización es el siguiente:

Préstamo (Amortización: Americana)				Depósito		Total
Deuda	Int.	Amort.	Cuota	Aporta	Fondo	Cuota Mes
100 000 €	4 000 €	– €	4 000 €	6 274,54 €	6 274,54 €	10 274,54 €
100 000 €	4 000 €	– €	4 000 €	6 274,54 €	13 176,53 €	10 274,54 €
100 000 €	4 000 €	– €	4 000 €	6 274,54 €	20 768,73 €	10 274,54 €
100 000 €	4 000 €	– €	4 000 €	6 274,54 €	29 120,14 €	10 274,54 €
100 000 €	4 000 €	– €	4 000 €	6 274,54 €	38 306,69 €	10 274,54 €
100 000 €	4 000 €	– €	4 000 €	6 274,54 €	48 411,90 €	10 274,54 €
100 000 €	4 000 €	– €	4 000 €	6 274,54 €	59 527,63 €	10 274,54 €
100 000 €	4 000 €	– €	4 000 €	6 274,54 €	71 754,93 €	10 274,54 €
100 000 €	4 000 €	– €	4 000 €	6 274,54 €	85 204,96 €	10 274,54 €
100 000 €	4 000 €	$\boxed{100\,000\,€}$	104 000 €	6 274,54 €	$\boxed{100\,000\,€}$	10 274,54 €

9.1.5. Comparación de los diferentes métodos.

Según el modelo de amortización se pagan unos intereses u otros, así se tiene que, en el método francés se abona a cantidad total (por diferencias) de $123\,290{,}94 - 100\,000 = 23\,290{,}94$ €, mientras que en el método alemán la cantidad final abonada en concepto de intereses es de $22\,000$ €, finalmente, en el modelo americano el pago de intereses es de $40\,000$ €.



Si bien, el modelo alemán puede parecer el más ventajoso, en virtud al menor pago de intereses, obliga al pago de cantidades más alta en concepto de cuota, lo cual puede suponer un esfuerzo extraordinario. En el modelo Francés, se paga una cantidad más alta de intereses, pero se tiene la facilidad de disponer de una cuota estable, lo cual resulta muy cómodo en el caso de que los acreditados sean personas físicas, ya que así es posible adecuar la cuota a los ingresos familiares.

El modelo Americano, exige el pago de unos intereses aún mayores, pero tiene la ventaja de que no es necesario hacer frente al pago del capital hasta el final del préstamo.

9.2. Periodos de carencia.

Son periodos en los que la amortización se reduce de dos posibles formas:

1. Carencia parcial: Durante el periodo de carencia los pagos que se realizan sólo son por los intereses.

2. Carencia total: Durante el periodo de carencia no se abona ninguna cantidad, los intereses que generan la deuda se suman al capital a amortizar al final del periodo de carencia.

Una vez finalizado el periodo de carencia se arranca un préstamo normal, que se amortizará según el método que se acuerde.

Suponga un préstamo en los que los primeros 7 años son de carencia, y los 10 restantes un préstamo normal con amortización francesa, en el caso de una carencia parcial el cuadro de pagos es el siguiente:

	N	Principal	Intereses	Amortización	Cuota
Carencia	0	100 000,00 €	4 000,00 €	– €	4 000,00 €
	1	100 000,00 €	4 000,00 €	– €	4 000,00 €
	2	100 000,00 €	4 000,00 €	– €	4 000,00 €
	3	100 000,00 €	4 000,00 €	– €	4 000,00 €
	4	100 000,00 €	4 000,00 €	– €	4 000,00 €
	5	100 000,00 €	4 000,00 €	– €	4 000,00 €
	6	100 000,00 €	4 000,00 €	– €	4 000,00 €
	N	Principal	Intereses	Amortización	Cuota
Amortización	7	100 000,00 €	4 000,00 €	8 329,09 €	12 329,09 €
	8	91 670,91 €	3 666,84 €	8 662,26 €	12 329,09 €
	9	83 008,65 €	3 320,35 €	9 008,75 €	12 329,09 €
	10	73 999,90 €	2 960,00 €	9 369,10 €	12 329,09 €
	11	64 630,80 €	2 585,23 €	9 743,86 €	12 329,09 €
	12	54 886,94 €	2 195,48 €	10 133,62 €	12 329,09 €
	13	44 753,32 €	1 790,13 €	10 538,96 €	12 329,09 €
	14	34 214,36 €	1 368,57 €	10 960,52 €	12 329,09 €
	15	23 253,84 €	930,15 €	11 398,94 €	12 329,09 €
	16	11 854,90 €	474,20 €	11 854,90 €	12 329,09 €
	17	– €	– €	12 329,09 €	12 329,09 €

En este caso se está pagando durante el periodo de carencia una cuota compuesta enteramente por los intereses. A partir de la finalización del periodo de carencia el préstamo es normal y parte de 100 000 €, por lo que la cuota es idéntica a la del caso original, así el cálculo de la cuota del préstamo será:

$$\begin{aligned} C &= \frac{\text{VA}}{S_n} \\ C &= 100\,000\,€ \times \frac{4\,\%}{\left(1-(1+4\,\%)^{-10}\right)} \\ C &= 12\,329{,}09\,€ \end{aligned}$$

En caso de carencia total, no se paga nada, si bien los intereses que se deberían pagar en cada una de los momentos de pago se acumulan y se capitalizan, de tal manera que el valor de la deuda crece hasta que entra de nuevo el pago de las cuotas, que arranca con una cantidad mayor de la que inicialmente se tenía.

Por lo tanto en el caso de tener el préstamo de $100\,000\,€$, al $4\,\%$, a 10 años con un periodo de carencia total de 7 años, lleva a que en la primera cuota que no se paga se deberían abonar $100\,000\,€ \times 4\,\% = 4\,000\,€$, cantidad que se acumula en la deuda pasando a deber $104\,000\,€$. En la segunda cuota que no se paga, se han tenido $104\,000\,€$ durante un año, por lo que correspondería abonar la cantidad $104\,000\,€ \times 4\,\% = 4\,160\,€$, cantidad que se acumula para el siguiente plazo, pasando a deber $108\,160\,€$, y así hasta el último tramo. De esta forma la deuda que se tiene que amortizar incluye el principal inicial de $100\,000\,€$ más los intereses tramo a tramo, capitalizados.

Con esto se debe amortizar una deuda por valor de $126\,531{,}90\,€$, y entonces la cuota es:

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{\mathrm{VA}}{S_n} \\
C &= 126\,531{,}9\,€ \times \frac{4\,\%}{\left(1-(1+4\,\%)^{-10}\right)} \\
C &= 15\,600{,}24\,€
\end{aligned}
$$

Los flujos siguen el esquema:

	N	Principal	Intereses	Amortización	Cuota
Carencia	0	100 000,00 €	4 000,00 €	– €	– €
	1	104 000,00 €	4 160,00 €	– €	– €
	2	108 160,00 €	4 326,40 €	– €	– €
	3	112 486,40 €	4 499,46 €	– €	– €
	4	116 985,86 €	4 679,43 €	– €	– €
	5	121 665,29 €	4 866,61 €	– €	– €
	6	126 531,90 €	5 061,28 €	– €	– €
	N	Principal	Intereses	Amortización	Cuota
Amortización	7	126 531,90 €	5 061,28 €	10 538,96 €	15 600,24 €
	8	115 992,94 €	4 639,72 €	10 960,52 €	15 600,24 €
	9	105 032,42 €	4 201,30 €	11 398,94 €	15 600,24 €
	10	93 633,48 €	3 745,34 €	11 854,90 €	15 600,24 €
	11	81 778,58 €	3 271,14 €	12 329,09 €	15 600,24 €
	12	69 449,49 €	2 777,98 €	12 822,26 €	15 600,24 €
	13	56 627,23 €	2 265,09 €	13 335,15 €	15 600,24 €
	14	43 292,08 €	1 731,68 €	13 868,55 €	15 600,24 €
	15	29 423,53 €	1 176,94 €	14 423,30 €	15 600,24 €
	16	15 000,23 €	600,01 €	15 000,23 €	15 600,24 €
	17	– €	– €	15 600,24 €	15 600,24 €

Suele ocurrir que para el periodo de carencia se aplica un tipo de interés (r_c) diferente del que se aplica durante el periodo de amortización (r_k).

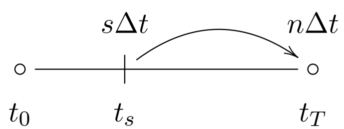
9.3. Valor de un Préstamo.

En una operación de préstamo, cuando se firma la operación se fijan ciertas cantidades, como nominal, plazo, modelo de amortización y el no menos importante, el tipo de interés de la operación. Este tipo de interés suele variar en el tiempo, así si se hace una operación de préstamos a principios de año, el tipo de interés conseguido no tiene porqué se igual al que se conseguiría para una operación de préstamo exactamente igual en términos de nominal, plazos y modelo de amortización. Este tipo de interés varia tanto como lo hace en mercado el tipo al que se tienen que financiar las entidades en el mercado, y varía también por otros motivos, como son el apetito al riesgo que tengan las entidades de financiación.

Por tanto, en caso de que se quiera cancelar una operación de préstamo, el valor de esta operación sería justo si se pudiera vender el préstamo en mercado a ese precio, o lo que es lo mismo, el precio del préstamo será su valor en condiciones de mercado ahora, y no cuando se firmó dicha operación.

Nótese que en una operación de préstamo se tienen dos flujos principales de dinero, un asociado a los intereses que se abonan y otro el capital que se amortiza del principal de deuda. Si se casa estos con la definición de precio de una operación financiera como el total de los flujos ciertos futuros descontados en condiciones de mercado, se tienen tres conceptos derivados.

En adelante suponga que la operación se contrató en un momento $t = 0$, anterior a hoy que es $t = s$, y que vence en un momento $t = T = n\Delta t$, y que se paga cada Δt

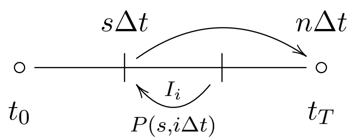


9.3.1. Usufructo.

Se corresponde con la suma de los valores descontados a presente de los intereses que se cobrarán en la operación de préstamo. Por tanto el usufructo de un préstamo es el valor actual de la parte de los intereses que quedan por cobrar.

$$U_p = \sum_{i=s}^{n} I_i \cdot P\left(s, i\Delta t\right) \tag{9.10}$$

Donde $P\left(s, i\Delta t\right)$ es el factor de descuento desde el momento de pago $i\Delta t$, hasta ahora o momento s, pero descontado sobre la curva de mercado, esto es, $P\left(s, i\Delta t\right)$ se ha calculado con los datos de mercado actualizados.

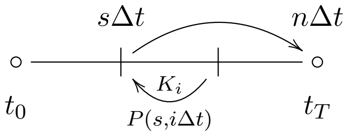


9.3.2. Nuda propiedad.

Se corresponde con la suma de los valores descontados a presente de las cantidades que se amortizarán en la operación de préstamo. Por tanto el valor de nuda propiedad de un préstamo es el valor actual de la parte que se amortiza en cada una de las cuotas que quedan por cobrar.

$$NP_p = \sum_{i=s}^{T} K_i \cdot P\left(s, i\Delta t\right) \tag{9.11}$$

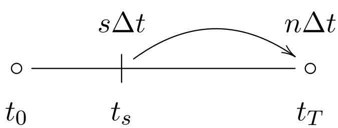
Donde $P\left(s, i\Delta t\right)$ es el factor de descuento desde el momento de pago $i\Delta t$, hasta ahora o momento s, pero descontado sobre la curva de mercado, esto es, $P\,(s, i\Delta t)$ se ha calculado con los datos de mercado actualizados.



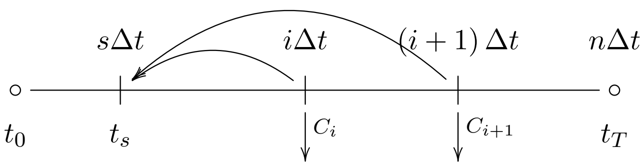
9.3.3. Valor del préstamo.

Como no puede ser de otra manera, el precio o valor de un préstamo es el valor descontado (por medio de la curva de mercado) de los flujos futuros, al tener cada uno de esos flujos futuros (en el caso de un préstamos son las cuotas) una parte de intereses y otra parte de capital que amortiza la deuda, el valor del préstamo es la suma del usufructo y de nuda propiedad.

Se parte de que el valor de un préstamos es la suma de las cuotas C_i pendientes, descontadas por medio de los tipos de mercado en forma de factores de descuento $P\,(s, i\Delta t)$. Además se quiere valorar desde un momento s,



Con esta información se tiene:



$$\mathrm{VA}_p = \sum_{i=s}^{n} C_i{\cdot}P\,(s, i\Delta t)$$

Como $C_i = I_i + K_i$ entonces:

$$\begin{aligned}
\mathrm{VA}_p &= \sum_{i=s}^{n} (I_i + K_i) \cdot P(s, i\Delta t) \\
\mathrm{VA}_p &= \sum_{i=s}^{n} I_i \cdot P(s, i\Delta t) + \sum_{i=s}^{n} K_i \cdot P(s, i\Delta t)
\end{aligned}$$

Con las expresiones 9.10 y 9.11 se concluye que el valor **actual** del préstamo es la suma del Usufructo y de la Nuda Propiedad:

$$\mathrm{VA}_p = \overbrace{\sum_{i=s}^{n} I_i \cdot P(s, i\Delta t)}^{U_p} + \overbrace{\sum_{i=s}^{n} K_i \cdot P(s, i\Delta t)}^{NP_p}$$

$$\boxed{\mathrm{VA}_p = U_p + NP_p}$$

Ejemplo 41. *Suponga que se ha firmado un préstamo (con amortización al estilo francés) de* $100\,000$ € *a devolver durante 10 años con un pago al año, al que se le aplicó un* $4\,\%$ *como tipo de interés a la firma de la operación. Hoy, al principio del 4 año, el banco quiere realizar la venta del préstamo, estando los tipos de interés actualizados al* $2\,\%$*. Con ello calcule el valor de nuda propiedad, el usufructo y el valor del préstamo bajo estas nuevas condiciones.*

Lo primero es calcular el cuadro original de amortización, comenzando por la cuota:

$$\begin{aligned}
C &= 100\,000\,€ \frac{4\,\%}{1 - (1 + 4\,\%)^{-10}} \\
C &= 12\,329{,}09\,€
\end{aligned}$$

A	B	C	D	E
N	Principal	Intereses	Amortización	Cuota
0	100 000 €	4 000,00 €	8 329,09 €	12 329,09 €
1	91 670,91 €	3 666,84 €	8 662,26 €	12 329,09 €
2	83 008,65 €	3 320,35 €	9 008,75 €	12 329,09 €
3	73 999,90 €	2 960,00 €	9 369,10 €	12 329,09 €
4	64 630,80 €			
5				
6				
7				
8				
9				

Hasta el inicio del 4º año se tiene el cuadro de amortización anterior, en el que justo al inicio de ese año se debe una cantidad de 64 630,80 €. Hasta este momento se han abonado todas las cantidades del cuadro y queda pendiente la cantidad indicada en la cela $[B4]$

Se debe completar el cuadro con el resto de flujos a partir del 4º año:

A	B	C	D	E
N	Principal	Intereses	Amortización	Cuota
0	100 000 €	4 000,00 €	8 329,09 €	12 329,09 €
1	91 670,91 €	3 666,84 €	8 662,26 €	12 329,09 €
2	83 008,65 €	3 320,35 €	9 008,75 €	12 329,09 €
3	73 999,90 €	2 960,00 €	9 369,10 €	12 329,09 €
4	64 630,80 €	2 585,23 €	9 743,86 €	12 329,09 €
5	54 886,94 €	2 195,48 €	10 133,62 €	12 329,09 €
6	44 753,32 €	1 790,13 €	10 538,96 €	12 329,09 €
7	34 214,36 €	1 368,57 €	10 960,52 €	12 329,09 €
8	23 253,84 €	930,15 €	11 398,94 €	12 329,09 €
9	11 854,90 €	474,20 €	11 854,90 €	12 329,09 €
		Usufructo	Nuda Prp.	

Con los datos de las columnas centrales, esto es con las cantidades a pagar en un futuro en concepto de intereses y de capital amortizado se pueden calcular tanto el usufructo como el valor de nuda propiedad.

Nótese que el tipo al que deben descontarse estas cantidades es del 2 %.

Con esto se puede calcular el valor del usufructo (nuda propiedad) descontado para el primer pago (recuerde que se hace a final de año) como:

$$\begin{aligned} U_4 &= 2\,585{,}23 \frac{1}{(1+2\,\%)^1} = 2\,534{,}54\,€ \\ NP_4 &= 9\,743{,}86 \frac{1}{(1+2\,\%)^1} = 9\,552{,}81\,€ \end{aligned}$$

Para la cantidad que se recibirá a final del 5 año, quedan dos, el actual año (del 4º al 5º) y desde inicios del 5º año hasta el pago del interés que se hace al final del 5º año, esto es, dos años hasta el cobro de ese flujo contando desde hoy.

$$
\begin{aligned}
U_5 &= 2\,195{,}48\frac{1}{(1+2\,\%)^2} = 2\,110{,}22\,€ \\
NP_5 &= 10\,133{,}62\frac{1}{(1+2\,\%)^2} = 9\,740{,}12\,€
\end{aligned}
$$

Para el resto es seguir la serie contando tiempo con lo que queda el cuadro, siendo la cuota 12 329,09 €:

A	B	C	D	Δt	F	G
N	Principal	Intereses	Amort.		Usufructo	Nuda Prp.
0	100 000 €	4 000,00 €	8 329,09 €			
1	91 670,91 €	3 666,84 €	8 662,26 €			
2	83 008,65 €	3 320,35 €	9 008,75 €			
3	73 999,90 €	2 960,00 €	9 369,10 €			
4	64 630,80 €	2 585,23 €	9 743,86 €	1	2 534,54 €	9 552,81 €
5	54 886,94 €	2 195,48 €	10 133,62 €	2	2 110,22 €	9 740,12 €
6	44 753,32 €	1 790,13 €	10 538,96 €	3	1 686,88 €	9 931,10 €
7	34 214,36 €	1 368,57 €	10 960,52 €	4	1 264,35 €	10 125,83 €
8	23 253,84 €	930,15 €	11 398,94 €	5	842,47 €	10 324,37 €
9	11 854,90 €	474,20 €	11 854,90 €	6	421,07 €	10 526,81 €
					8 859,54 €	60 201,03 €
			Valor del préstamo:		69 060,57 €	

Puede observarse que el valor del préstamo al inicio del 4º año es de 69 060,57 €, mientras que el capital pendiente es de 64 630,80 €, que es una cantidad menor. La razone es sencilla, el préstamo se firmó a un tipo de interés del $4\,\%$, y hoy esa misma operación habría que firmarla al $2\,\%$, por lo que se recibirían menos flujos en concepto de intereses que los que se van a recibir con la operación firmada hace tiempo. Esa diferencia de $69\,060{,}57$ € $-$ $64\,630{,}80$ € $=$ $4\,429{,}77$ € es el valor actual de este exceso de flujo de dinero frente a las condiciones actuales.

9.4. Préstamos a tipo variable.

Hasta este momento se han estudiado aquellos préstamos en los que el tipo de interés es el mismo durante toda la vida de la operación. Si bien en el mercado de préstamos o también conocido como “lending”, existen operaciones con tipo fijo, lo habitual es que el tipo sea bien variable, o bien revisable, o una combinación temporal de ambos, esto es, fijo durante cierto tiempo, al principio de la operación, variable más tarde, e incluso revisable cada cierto tiempo.

Una operación de préstamo a tipo variable, es una operación en la que el tipo de interés se compone de dos partes, una ligada a un tipo de mercado como puede ser un Euribor (para el caso del euro [€]), o un Libor (otras monedas, Yen [¥], Libra [£]), y la otra parte del tipo de interés es un margen o “*spread*”, que se suma al tipo variable:

$$i = \tilde{r} + s$$

Por ejemplo, un préstamo hipotecario en España a tipo variable, tiene un modelo de amortización francés, y se suele ligar al Euribor[2]

[2]Habitualmente hay un Euribor a un año de mercado y un Euribor a un año pero hipotecario, para evitar armonizar algo esta cantidad que afecta mucho a la

a 1 año más un spread que varia entre entidades y clientes, pero si se supone que el $€_{1y} = 2\,\%$ y el spread es $s = 50\,\mathrm{bp}$ el tipo aplicable a esta operación es $i = 2,5\,\%$.

Una operación a tipo variable marca ciertas fechas de revisión de este tipo, en estas se ajusta el tipo $\tilde{r}$ con el que está publicado en mercado, y se rehace el cuadro de amortización, con ello se ha modificado la cuota, debido a este cambio de tipo de interés, un préstamo en el que a priori la cuota es constante, cambia al revisar el tipo con el que se calcula.

El concepto de revisión del tipo de interés de la operación, no sólo se limita a los momentos en los que se actualiza el tipo del préstamo al tipo de mercado, sino que pueden existir ciertos supuestos en el contrato que pueden hacer variar el tipo de interés. Por ejemplo, es habitual cuando el préstamo se hace a una empresa con Rating externo, indicar que un empeoramiento de este Rating, suponga un aumento en el tipo de interés (por medio de un aumento en el spread) que debe pagar la empresa en este préstamo, y que esta revisión se hace de forma directa tras el anuncio.

Elegir entre tomar dinero prestado a tipo fijo o a tipo variable, depende del perfil del tomador, y de su capacidad para negociar, puesto que puede que la entidad de financiación no de otra opción que no sea la de tipo variable. Disponer de un préstamo a tipo fijo hace que se tenga completa seguridad acerca de los pagos que se van a hacer durante toda la vida de la operación, y de forma independiente a que los tipos de mercado, bajen o suban. Esto da lugar a momentos durante la vida del préstamo en los que el mercado aplica tipos más bajos. En estos momentos se está incurriendo en un sobre-coste con respecto al que se tendría que hacer en mercado. En

economía real.

otros momentos los tipos de mercado estarán más altos que los del préstamo por lo que se estarán pagando menos intereses de los que se tendría que estar pagando en el mercado.

En caso de tener un préstamo a tipos variables (o mejor dicho revisable), el préstamo se ajustaría mejor a las condiciones de mercado en cuyo caso cuando el mercado suba, también lo hace la cuota, y cuando el mercado baja, también lo hace la cuota. Por desgracia, los cambios de tipos en mercado ocurren muy rápido, y llegan a las revisiones de los préstamos con cierto retraso, con lo que operaciones de bancos centrales, bajando los tipos de interés para que las cuotas disminuyan y se aumente el gasto y con ello la economía, no se materializan tan rápido como cabría esperar.

Ejemplo 42. *Suponga que se ha firmado un préstamo con amortización estilo francés y frecuencia de pago mensual de* $100\,000$ € *con revisión anual, ligado al* $€_{1y}$ *más un spread de* 50 *bp. Calcule el cuadro de amortización de los 24 primeros meses si el* $€_{1y} = 3,5\,\%$ *a la firma, y en la revisión esta al* $€'_{1y} = 1,5\,\%$.

Para los 12 primeros meses hay que calcular la cuota, partiendo de que el tipo aplicado a la firma es $r_y = €_{1y} + s = 3{,}5\,\% + 50\,\text{bp} = 4\,\%$, pero como el préstamo es pagadero de forma mensual, y el tipo es anual, lo primero es calcular el tipo compuesto mensual, equivalente:

$$\begin{aligned} (1 + r_y) &= (1 + r_m)^{12} \\ r_m &= (1 + r_y)^{1/12} - 1 \\ r_m &= 0,3274\,\% \end{aligned}$$

Con esto se tiene que:

$$\left.\begin{cases} n & n = 10{\cdot}12 = 120 \\ r_m & r_m = 0,3724\,\% \\ VA & VA = 100\,000\,€ \end{cases}\right\rangle C \;=\; VA\frac{r_m}{1-(1+r_m)^{-n}}$$

$$C = 100\,000\,€\frac{0,3724\,\%}{1-(1+0,3724\,\%)^{-120}}$$

$$\boxed{C = 1\,009{,}06\,€}$$

Por tanto el cuadro hasta final del primer año es el siguiente:

N	Principal	Intereses	Amort.	Cuota
1	100 000,00 €	327,37 €	681,68 €	1 009,06 €
2	99 318,32 €	325,14 €	683,91 €	1 009,06 €
3	98 634,40 €	322,90 €	686,15 €	1 009,06 €
4	97 948,25 €	320,66 €	688,40 €	1 009,06 €
5	97 259,85 €	318,40 €	690,65 €	1 009,06 €
6	96 569,20 €	316,14 €	692,91 €	1 009,06 €
7	95 876,29 €	313,87 €	695,18 €	1 009,06 €
8	95 181,10 €	311,60 €	697,46 €	1 009,06 €
9	94 483,65 €	309,31 €	699,74 €	1 009,06 €
10	93 783,90 €	307,02 €	702,03 €	1 009,06 €
11	93 081,87 €	304,73 €	704,33 €	1 009,06 €
12	92 377,54 €	302,42 €	706,64 €	1 009,06 €
13	91 670,91 €			

Al inicio del segundo año, que es cuando se revisa el tipo de referencia, el importe que queda pendiente de pagar es de 91 670,91 €, el nuevo tipo de interés será $r'_y = €'_{1y} + s = 1{,}5\,\% + 50\,\mathrm{bp} = 2\,\%$, se debe tener en cuenta que se ha abonado 12 cuotas por lo que el número de cuotas que quedan pendientes es de $120 - 12 = 108$, el tipo de interés hay que pasarlo a su equivalente mensual compuesto:

$$\begin{aligned} \left(1 + r'_y\right) &= \left(1 + r'_m\right)^{12} \\ r'_m &= \left(1 + r'_y\right)^{1/12} - 1 \\ r'_m &= 0,1652\,\% \end{aligned}$$

Con esto se tiene que la nueva cuota debe ser de:

$$\left\{\begin{array}{ll} n & n = 108 \\ r'_m & r'_m = 0,1652\,\% \\ VA' & VA' = 91\,670{,}91\,€ \end{array}\right\rangle C' = VA\frac{r_m}{1 - (1 + r_m)^{-n}}$$

$$C' = 91\,670{,}91\,€\frac{0,1652\,\%}{1 - (1 + 0,1652\,\%)^{-108}}$$

$$\boxed{C' = 927{,}45\,€}$$

Por lo que el cuadro de amortización que se tiene a partir del primer año y hasta el tercero (donde se volverá a revisar el tipo de referencia) es el siguiente:

N	Principal	Intereses	Amort.	Cuota
1	100 000 €	327,37 €	681,68 €	1 009,06 €
2	99 318,32 €	325,14 €	683,91 €	1 009,06 €
3	98 634,40 €	322,90 €	686,15 €	1 009,06 €
4	97 948,25 €	320,66 €	688,40 €	1 009,06 €
5	97 259,85 €	318,40 €	690,65 €	1 009,06 €
6	96 569,20 €	316,14 €	692,91 €	1 009,06 €
7	95 876,29 €	313,87 €	695,18 €	1 009,06 €
8	95 181,10 €	311,60 €	697,46 €	1 009,06 €
9	94 483,65 €	309,31 €	699,74 €	1 009,06 €
10	93 783,90 €	307,02 €	702,03 €	1 009,06 €
11	93 081,87 €	304,73 €	704,33 €	1 009,06 €
12	92 377,54 €	302,42 €	706,64 €	1 009,06 €
13	91 670,91 €	151,40 €	776,05 €	927,45 €
14	90 894,85 €	150,12 €	777,33 €	927,45 €
15	90 117,52 €	148,84 €	778,62 €	927,45 €
16	89 338,90 €	147,55 €	779,90 €	927,45 €
17	88 559,00 €	146,26 €	781,19 €	927,45 €
18	87 777,81 €	144,97 €	782,48 €	927,45 €
19	86 995,33 €	143,68 €	783,77 €	927,45 €
20	86 211,55 €	142,39 €	785,07 €	927,45 €
21	85 426,48 €	141,09 €	786,37 €	927,45 €
22	84 640,12 €	139,79 €	787,66 €	927,45 €
23	83 852,45 €	138,49 €	788,96 €	927,45 €
24	83 063,49 €	137,19 €	790,27 €	927,45 €

Nótense los siguientes puntos:

1. El tipo de interés ha quedado a la mitad pero la cuota sólo se ha visto modificada en un 8 % aproximadamente

2. Los flujos de intereses si se han reducido sustancialmente, mientras que la parte de la cuota dedicada a amortizar la deuda pendiente ha crecido pero no tanto como se han reducido los intereses.

9.5. Problemas.

Problema 41. *Calcule el esquema de amortización de un préstamo francés de* $100\,000$ € *a devolver en cinco años, con un tipo de interés del 4 %.*

Problema 42. *Del esquema anterior, responda: ¿cómo es la evolución de los intereses, el principal y las cuotas? en el caso de cancelar el préstamo justo después de la segunda cuota, ¿cuánto queda pendiente?*

Problema 43. *Del ejercicio 41. calculad el esquema de amortización con principal constante, y responded las siguientes preguntas: ¿en cuál de los dos esquemas se pagan más intereses? ¿por qué? en el caso de cancelar el préstamo justo después de la segunda cuota, ¿cuánto queda pendiente en cada caso?*

Problema 44. *Recalcule el esquema del ejercicio 41. suponiendo ahora que las cuotas son crecientes a una tasa del 2 %. Compare la suma de intereses, y comente los resultados. ¿En cuál se devuelve antes el préstamo?*

Problema 45. *Calcule cuanto vale hoy cobrar un sueldo mensual de* $1\,000$ € *indefinidamente, si los tipos están al 3 % TAE. Si ahora queremos que ese sueldo crezca a una tasa del 2 % TAE, ¿cuánto vale esa renta?*

Problema 46. *Si tenemos un importe de* $100\,000$ €*, calcule qué renta perpetua nos daría si suponemos tipos al 4 % nominal en los siguientes casos:*

- Renta mensual constante
- Renta anual constante
- Renta mensual con crecimiento del 3 % nominal
- Renta anual con crecimiento del 4 % nominal

Parte III

Estructura Temporal de los Tipos de Interés

⋉

Capítulo 10

E.T.T.I.

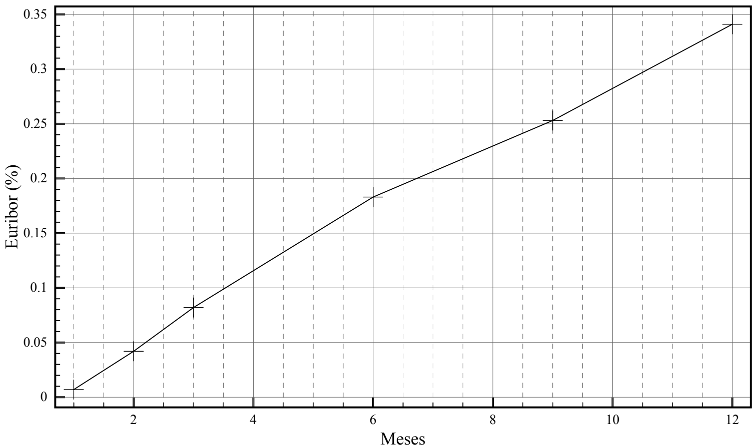
10.1. Tipos de Interés y Plazos.

Se entiende por curva de tipos, la representación gráfica de pares formados por los tipos de interés / rendimientos / TIR / etc, a cada plazo plazo. Básicamente es una representación discreta de niveles de tipos de interés en distintos momentos del tiempo (más concretamente del futuro). El mercado, cotiza esos niveles de tipos de interés para horizontes temporales muy concretos.

Para entender la estructura temporal de tipos de interés (en adelante ETTI), suponga que usted es una entidad con la suficiente solvencia como para llamar a otras entidades financieras con capacidad de tomar o prestar dinero, en este supuesto se pone en contacto con estas entidades con objeto de solicitarles información sobre tipos y plazos, esto es, que le respondan a preguntas como las siguientes:

- ¿A qué tipo de interés me prestaría dinero durante un mes?
- ¿y si fueran tres meses?

Euribor/Plazo	Tipo
1 mes	0,007 %
2 meses	0,042 %
3 meses	0,082 %
6 meses	0,183 %
9 meses	0,253 %
12 meses	0,341 %



Cuadro 10.1: Curva Euribor. Fuente ECB

- ¿y para 6 meses?
- ¿y para 12 meses?
- ...

A cada pregunta le contestarían con diferentes números. De hecho como se verá más adelante en función de la divisa se tendrá una curva que para el caso del Euro quedaría como en la tabla 10.1, en esta tabla se refleja el tipo de interés para oferta de dinero a plazo.

En caso de que quisiera comprar deuda del tesoro, en el mercado

T	i	T	i
1D	0,3260 %	2Y	1,6740 %
1W	0,3470 %	3Y	2,0520 %
1M	0,4250 %	4Y	2,3535 %
2M	0,5260 %	5Y	2,6130 %
3M	0,6650 %	6Y	2,8325 %
4M	0,7630 %	7Y	3,0220 %
5M	0,8520 %	8Y	3,1660 %
6M	0,9660 %	9Y	3,3080 %
7M	1,0020 %	10Y	3,4180 %
8M	1,0490 %	11Y	3,5160 %
9M	1,0970 %	12Y	3,5990 %
10M	1,1370 %	15Y	3,7775 %
11M	1,1800 %	20Y	3,8905 %
1Y	1,2260 %	25Y	3,8835 %
18M	1,4392 %	30Y	3,8130 %

Cuadro 10.2: Curva EURIBOR hasta 1 año

encontraría una serie de productos a diferentes plazo, con diferente rentabilidad, YTM. Lo cual indica que para diferentes plazos a los que se le presta dinero al tesoro por medio de la compra de deuda, el tipo de interés que le exige a este tesoro, es diferente a mayor plazo.

En la tabla 10.3 se puede ver esta situación para diferentes países.

Sin entrar en describir de momento el significado de Euribor, resulta evidente que a diferente plazo el tipo cambia, y al realizar un gráfico de estos puntos no aparece una recta, o una forma definida. Sin embargo lo que parece razonable es que a mayor plazo se exige un mayor tipo de interés. ¿Porqué? ¿Que sustenta este razonamiento?.

En un primer intento por explicar este comportamiento, se pue-

País	1 M	3 M	6 M	1y	2y
ESPAÑA	0,007 %	—	—	0,202 %	0,328 %
ALEMANIA	0,006 %	—	—	-0,067 %	-0,057 %
GRAN BRETAÑA	0,509 %	0,565 %	0,712 %	0,522 %	0,814 %
EEUU	0,154 %	0,233 %	0,330 %	0,323 %	0,691 %
JAPÓN	—	0,118 %	0,168 %	0,032 %	0,060 %
País	3y	5y	10y	15y	20y
ESPAÑA	0,353 %	0,903 %	2,236 %	2,781 %	2,947 %
ALEMANIA	-0,052 %	0,114 %	0,969 %	1,543 %	1,698 %
GRAN BRETAÑA	1,289 %	1,775 %	2,459 %	2,798 %	2,939 %
EEUU	1,291 %	1,823 %	2,473 %	2,830 %	3,022 %
JAPÓN	—	0,161 %	0,511 %	0,885 %	1,395 %

Cuadro 10.3: YTM Deuda Soberana. Fuente www.expansion.com

de razonar que un mayor plazo resulta en una mayor incertidumbre sobre el resultado de la operación, ya que se desconoce con certeza si se recuperará o no el dinero prestado/tomado, esto debe ser compensado por un mayor precio en el producto.

10.1.1. Hipótesis sobre la ETTI.

De forma clásica, se han mantenido ciertas hipótesis para sustentar o explicar la ETTI.

- Hipótesis de las Expectativas.
- Hipótesis del Hábitat Preferido.
    - Hipótesis de la preferencia de la liquidez.
    - Hipótesis de la segmentación.

La hipótesis de las expectativas parte de la suposición de que los diferentes intervinientes en el mercado son neutrales al riesgo, y sólo invierten en función de la rentabilidad esperada, por lo que los tipos de interés del futuro son una expectativa de los actuales. No resulta completamente razonable que los actores del mercado realicen las inversiones sin tener en cuenta el riesgo, ya que es algo natural a la hora de realizar cualquier inversión, evaluar el riesgo que supone (salvando incluso totalmente la rentabilidad que se obtendría), como forma de contraponer finalmente la oportunidad de inversión frente al riesgo de la misma, y ver si una justifica la otra.

La hipótesis del hábitat preferido surge del supuesto de que los actores de mercado son adversos al riesgo, por lo que estarán más dispuestos a invertir en los plazos y productos en los que se sientan cómodos, y sólo invertirán en otros (mayores) si existe una compensación por salir de su zona de confort.

Esta hipótesis engloba la de preferencia de liquidez y la de segmentación.

La hipótesis de la segmentación, tiene como argumento que los actores de mercado son absolutamente adversos al riesgo y sólo invierten en los plazos y productos en los que se sienten cómodos. Esta teoría no explica porqué cualquier inversor con un alta aversión al riesgo es capaz de invertir en un producto que pague la suficiente rentabilidad, dentro de los márgenes de lo razonable.

La hipótesis de la preferencia por la liquidez se sustenta sobre la idea de que los actores en el mercado prefieren liquidez a corto plazo y sólo invierten a plazos más dilatados si ven compensada esta preferencia por medio de una mayor remuneración. Si bien esta hipótesis parece razonable, exige que las curvas de tipos a plazo sean estrictamente crecientes con el plazo, cosa que no siempre se cumple, y que deja a este razonamiento sin capacidad de explicar estas situaciones.

Todas estas hipótesis buscan dar una explicación acerca de la forma que adopta la curva de mercado, si bien los actores en mercado, no se plantean si la forma de la curva es de esta o de aquella manera, ni se inquietan si no encaja alguna de las hipótesis con la forma actual de la curva. Los actores de mercado, se basan en la curva para poder valorar productos u operaciones financieras, y en virtud de los resultados, invierten o no su dinero en estos productos u operaciones, por tanto, los actores de mercado buscarán la forma de disponer de curvas de tipos de interés que reflejen las condiciones de mercado, de hecho, lo ideal resultaría poder inferir la curva de tipos a plazo por medio de productos financieros que sean:

- Accesibles: Que los diferentes actores del mercado puedan comprar y vender estos activos, y que la información acerca de los mismos resulte accesible y veraz.
- Mercados profundos: Con suficiente liquidez como para poder asumir que ningún actor resulta lo suficientemente grande como para modificar el precio a su conveniencia.
- Instrumentos cuya cotización dependa de los tipos de interés.
    - Depo (Euribor, Eonia, etc.).
    - FRA
    - Futuro de tipo de interés.
    - IRS.
    - Bonos.

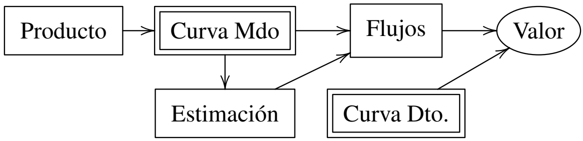
10.1.2. Tipos de curvas.

Dado que para la obtención de una curva, se pueden escoger diferentes instrumentos ligados a los tipos de interés, en función de los instrumentos que se seleccionen se tendrán diferentes tipos de curvas. En caso de tomar instrumentos de mercado utilizados para la financiación interbancaria (Depo, FRA, SWAP), se tendrán curvas interbancarias, o de mercado, estas curvas se caracterizan por representar el funcionamiento del mercado interbancario que resulta en una divisa, y que por tanto en el caso del € va más allá de cada uno de los países que componen unión monetaria.

En caso de tomar exclusivamente las diferentes emisiones (letras, bonos, obligaciones) de un país concreto, o de una empresa que emita en varios plazos, también se puede inferir una curva correspondiente al emisor, esta curva expresa, no sólo el coste que debe pagar el emisor para financiarse a un plazo determinado, sino que, al emanar de unos instrumentos que incluyen riesgo de crédito, incluyen la componente (monetarizada) de este riesgo de crédito.

Es importante reseñar que en el mercado hay ocasiones en las que para obtener el valor de ciertos flujos futuros, será necesario estimarlos en función de la curva de mercado, en su forma de tipos cupón cero, de factores de descuento o de tipos Forward. Para la selección de la curva de mercado que mejor se ajuste a la estimación de flujos que se deba realizar, ha de tomarse aquella curva que se ha construido a partir de productos de mercado con una cadencia de pago similar a la de los flujos a estimar. Por supuesto, huelga decir que la curva seleccionada debe ser de productos nominados en la misma divisa que los flujos a estimar.

De esta manera se tendré el siguiente esquema:



Esto es, dado un producto financiero con cierta frecuencia en los pagos f, pagos que dependen de la fijación futura de ciertos tipos de interés, para obtener estos tipos "futuros" se debe tomar una curva que esté construida precisamente con productos con la misma frecuencia de pago f. Con esta curva de mercado se obtendrán los tipos a futuro, y por tanto se podrá estimar una serie de flujos a partir de la curva a plazo de mercado actual[1], por ejemplo si la curva está en tipos cupón cero, obteniendo los tipos implícitos, o si la curva está expresada en tipos forward, simplemente por medio de interpolación.

Una vez determinado los tipos a futuro se podrán calcular los flujos en su momento de pago y tan sólo con descontarlos, se puede obtener el valor actual de todos ellos y en su suma estaría el valor del producto financiero, sin riesgo (recuerde el lector que el valor de un producto financiero es la suma de los flujos futuros ciertos descontados al momento actual). Para descontar estos flujos, no se puede usar la misma curva que la usada para estimarlos, puesto que esta curva es la de mercado y en teoría (sólo en teoría) sería posible financiarse a cada plazo a los tipos de mercado. La realidad es otra, y a cada plazo "podremos" refinanciar las posiciones a un tipo que

[1]En realidad esto es una fuerte simplificación ya que no considera la curva como un objeto estocástico, que lo es, y por tanto en caso de que se tenga que tener en cuenta esta situación requeriría de una matemática ciertamente fuera del objeto del presente libro.

no será el de mercado, debido a la percepción de riesgo de repago que las contrapartidas (el mercado) tengan hacia “nosotros”. Dicho esto, lo lógico y más plausible es refinanciar las posiciones con tipos a muy corto (OIS \$, EONIA€), o bien con la curva propia de coste de capital.

Por tanto, y a partir de ahora, debe entender que no existe una sola curva, sino múltiples, para el caso de estimar los flujos futuros, y que para descontar existe otra/s curvas, esto es así tras la crisis de 2008, en la que se dejó patente la separación entre las curvas de estimación y financiación/descuento.

10.2. Bases para la obtención de Curvas.

Para la obtención de la curva es necesario usar ciertos instrumentos como se ha comentado antes, para poder entender el modo en el que estos instrumentos entran a forma parte de la curva, primero es fundamental entender su funcionamiento, y en parte una valoración que permita extraer los tipos de interés que subyacen.

Además es necesario manejar alguna herramienta matemática extra que se va a explicar a continuación.

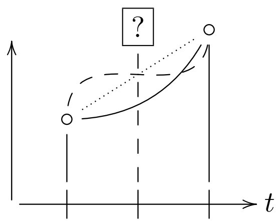
10.2.1. Interpolación.

Se entiende por interpolar, aquel proceso que permite la obtención de puntos (intermedios), partiendo de un conjunto discreto de datos. Cuando se expresan estructuras temporales de tipos de interés, en general denominadas “curvas”, su definición parte de tipos concretos en momentos definidos del tiempo:

- EURIBOR 6M: Tipo (oferta) al que se presta el dinero a 6 meses.

- EURIBOR 1Y: Tipo (oferta) al que se presta el dinero a 1 año.
- Y así los que se definan, o los que dimanan de los diferentes índices de referencia (IRS, FRA, Futuros, Depo, etc...).

En muchas ocasiones se desea obtener información de valores que queden entre los puntos discretos de la estructura temporal, el primer problema consiste en asumir el tipo o forma de unión entre los puntos.



Sirva como ejemplo la curva discreta del Euribor (plazos hasta un año) y Swaps (plazos mayores de un año) indicada en el cuadro 10.2. En el mencionado cuadro se recogen los puntos discretos para momentos del tiempo (plazos) determinados, como se puede apreciar en la figura 10.1, que muestra una parte de la estructura temporal

Para determinar los puntos que quedan entre dos conocidos, se realiza un cálculo de interpolación.

La interpolación asume que los puntos se ajustan a ciertos lugares geométricos, como rectas o curvas. Aunque existen diferentes modelos de interpolación, por su sencillez y aplicación práctica, cabe destacar:

1. Interpolación Lineal.
2. Interpolación Exponencial.

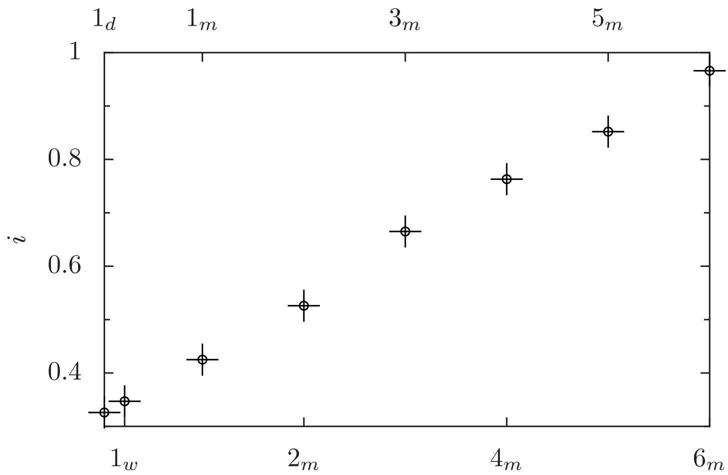
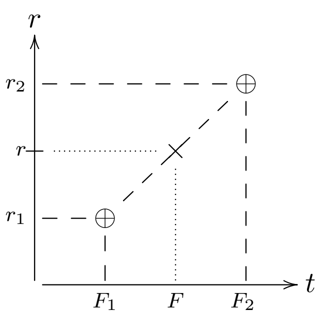


Figura 10.1: Curva EUR-IRS.

La diferencia entre ambos métodos es la forma de unir los puntos, que en el caso lineal, es una recta.

10.2.1.1. Interpolación lineal.



Partiendo de que es una recta la que "une" ambos puntos $X_1 = (r_1, F_1)$ y $X_2 = (r_2, F_2)$, entonces la ecuación de la recta $r = mF + b$ se puede particularizar en:

$$\begin{aligned} r_1 &= mF_1 + b \\ r_2 &= mF_2 + b \end{aligned}$$

Restando ambas expresiones:

$$r_2 - r_1 = m\left(F_2 - F_1\right) \rightarrow m = \frac{r_2 - r_1}{F_2 - F_1}$$

Sustituyendo en una de las anteriores:

$$r_1 = \frac{r_2 - r_1}{F_2 - F_1}F_1 + b \rightarrow b = r_1 - \frac{r_2 - r_1}{F_2 - F_1}F_1$$

$$b = \frac{r_1F_2 - r_1F_1 - r_2F_1 + r_1F_1}{F_2 - F_1} = \frac{r_1F_2 - r_2F_1}{F_2 - F_1}$$

$$r = \frac{r_2 - r_1}{F_2 - F_1}F + \frac{r_1F_2 - r_2F_1}{F_2 - F_1}$$

Operando se llega a la ecuación para interpolar linealmente:

$$\boxed{r = \left(r_2 - r_1\right)\frac{F - F_1}{F_2 - F_1} + r_1} \tag{10.1}$$

Ejemplo 43. *Suponga que tiene la siguiente situación de mercado en pares fechas y tipo de interés (tipo cupón cero):*
Hoy es 27-Julio-2015, el tipo desde hoy hasta el 30-Mayo-2016 es el $2{,}55\,\%$*, y el tipo desde hoy hasta el 15-Agosto-2016 es el* $3{,}15\,\%$*, se quiere calcular el tipo de interés desde hoy hasta el 15-Junio-2016.*

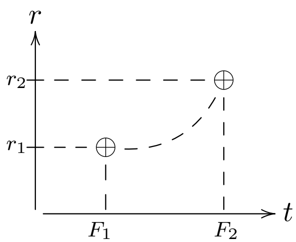
Entonces lo primero es calcular los días para interpolar de forma más cómoda:

Fecha	*Días*	*Tipo*
27/07/15		
30/05/16	*308*	*2,55 %*
15/06/16	324	???
15/08/16	*385*	*3,15 %*

$$r = (3{,}15\,\% - 2{,}55\,\%)\,\frac{324 - 308}{385 - 308} + 2{,}55\,\%$$

$$r = 2,67\,\%$$

10.2.1.2. Interpolación exponencial (logarítmica).



En este caso, la función que "une" ambos puntos $X_1 = (r_1, F_1)$ y $X_2 = (r_2, F_2)$, es del tipo $r = be^{mF}$.

En este caso, para resolverla, se puede asumir que (tomando logaritmos a ambos lados):

$$\begin{aligned} \ln(r) &= \ln\left(be^{mF}\right) = \ln(b) + \ln\left(e^{mF}\right) \\ \ln(r) &= \ln(b) + mF \end{aligned}$$

Si tomamos $a = \ln(b)$ entonces:

$$\ln(r) = a + mF$$

Operando la ecuación para interpolar exponencialmente es:

$$\boxed{r = r_1 \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{F-F_1}{F_2-F_1}}} \tag{10.2}$$

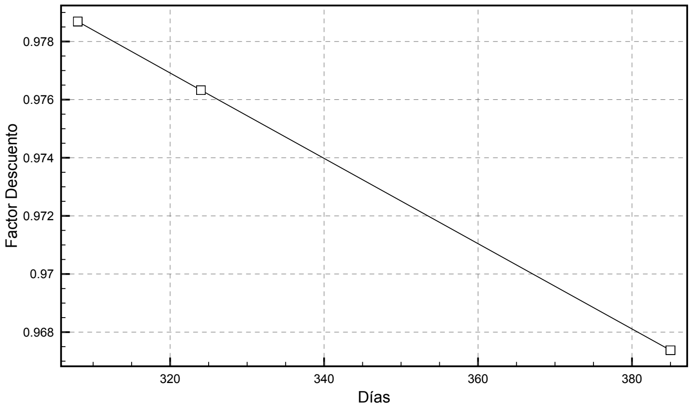
Ejemplo 44. *Suponga que tiene la siguiente situación de mercado en pares fechas y factores de descuento:*
Hoy es 27-Julio-2015, el tipo desde hoy hasta el 30-Mayo-2016 es el $0,978687252$*, y el tipo desde hoy hasta el 15-Agosto-2016 es el* $0,967376213$*, se quiere calcular el tipo de interés desde hoy hasta el 15-Junio-2016.*

Entonces lo primero es calcular los días para interpolar de forma más cómoda:

Fecha	*Días*	*Tipo*
27/07/15		
30/05/16	*308*	*0,978687252*
15/06/16	324	???
15/08/16	*385*	*0,967376213*

$$r = 0,978687252 \left(\frac{0,967376213}{0,978687252}\right)^{\frac{324-308}{385-308}}$$

$$r = 0,976326072$$



Mediante los métodos de interpolación anteriores, se puede llegar a unir por medio de una ruta los puntos de la figura 10.1, con lo que se llega a la obtención de una curva como la de la figura 10.2.

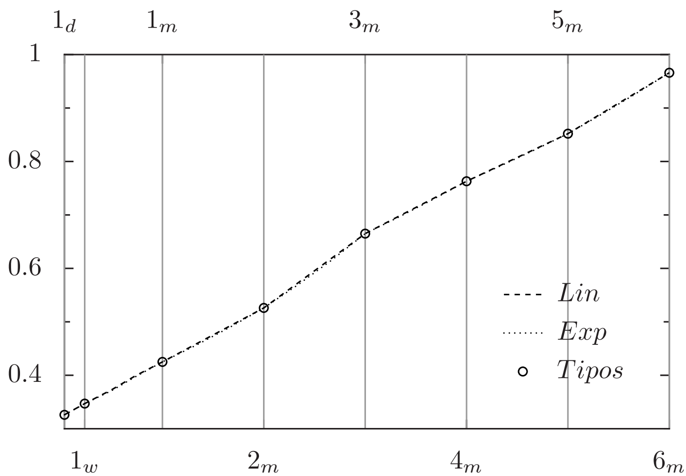


Figura 10.2: Curva con interpolación de tipos.

La diferencia entre ambos tipos de interpolación depende de la distancia y de la posición de los puntos entre los que interpolar.

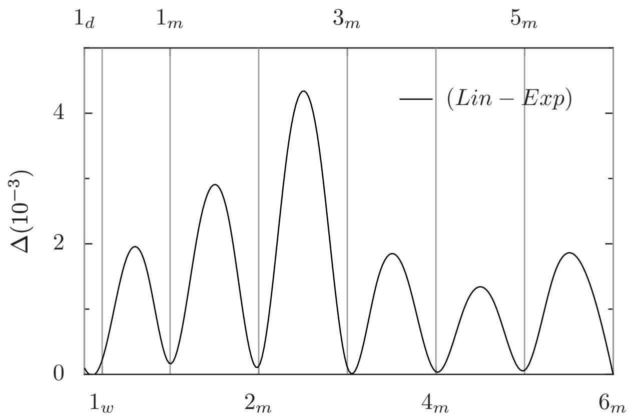


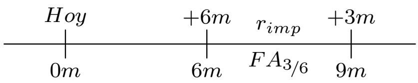
Figura 10.3: Diferencias entre interpolaciones.

10.2.1.3. Nota sobre interpolación y convenio de mercado.

EN MERCADO SE USA LA INTERPOLACIÓN LINEAL CUANDO SE DEBE INTERPOLAR EN LA CURVA DE TIPOS DE INTERÉS, MIENTRAS QUE SE USA INTERPOLACIÓN EXPONENCIAL CUANDO SE DEBE INTERPOLAR EN LA CURVA DE FACTORES DE DESCUENTO.

10.2.2. Tipos implícitos.

Se entiende por tipo implícito aquel que nos indica el tipo a un plazo a partir de un momento en el futuro, por ejemplo el tipo implícito a 3 meses dentro de 6 es aquel que comienza dentro de 6 meses y termina pasados 3 meses, esto es dentro de 9 meses.



Para calcular este tipo implícito se debe cumplir que el flujo financiero de invertir a 9 meses al tipo r_{9m} tiene que resultar equivalente a invertir, durante 6 meses una cantidad a un tipo r_{6m} y luego reinvertirla durante 3 meses al tipo implícito[2]. Generalizando los plazos se atiende al esquema de la figura 10.4.

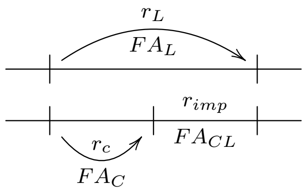


Figura 10.4: Esquema tipos Implícitos

Antes de comenzar se define factor de descuento según capitalización[3]:

$$\text{Capit.} \begin{cases} \text{Simple} & FD = P\left(0,t\right) = \frac{1}{1+r\cdot FA} \\ \text{Compuesta} & FD = P\left(0,t\right) = \frac{1}{\left(1+r\right)^{FA}} \\ \text{Contínua} & FD = P\left(0,t\right) = e^{-rFA} \end{cases}$$

Por tanto, suponiendo capitalización simple:

$$C_f = C_i\left(1 + r_L FA_L\right)$$

La parte que reinvierte en dos tramos:

[2]Esto debe cumplirse, esto es, se aplica el principio de no arbitraje en tipos, de otra forma, existiría una porsibilidad de arbitrar la diferencia a nuestro favor.

[3]Para menos de un año capitalización simple, para más de un año capitalización compuesta.

$$C_f = \underbrace{C_i\,(1 + r_c FA_c)}_{0_m \to 6_m}\underbrace{(1 + r_{imp} FA_{CL})}_{6_m \to 9_m}$$

Igualando y despejando el tipo implícito r_{imp}:

$$r_{imp} = \left(\frac{(1 + r_L FA_L)}{(1 + r_c FA_c)} - 1\right)\frac{1}{FA_{CL}}$$

Expresado en modo de factores de descuento:

$$\boxed{r_{imp} = \left(\frac{FD_C}{FD_L} - 1\right)\frac{1}{FA_{CL}}}$$

Donde:

FD_c: Factor descuento del tramo corto (de 0 a 6 meses en el ejemplo)

FD_L: Factor descuento del tramo largo (de 0 a 9 meses en el ejemplo)

FA: Fracción de año, para de FA_{CL}, son 3 meses $(6_m \to 9_m)$.

En caso de que los tipos fueran compuestos (caso más habitual expresando la curva en factores de descuento de tipos compuestos, o en tipos cupón cero - compuestos):

$$C_f = C_i\,(1 + r_L)^{FA_L}$$

$$C_f = C_i\,(1 + r_C)^{FA_C}\,(1 + r_{imp})^{FA_{CL}}$$

$$(1 + r_C)^{FA_C}\,(1 + r_{imp})^{FA_{CL}} = (1 + r_L)^{FA_L}$$

$$(1 + r_{imp})^{FA_{CL}} = \frac{(1 + r_L)^{FA_L}}{(1 + r_C)^{FA_C}}$$

$$\boxed{r_{imp} = \left(\frac{(1+r_L)^{FA_L}}{(1+r_C)^{FA_C}}\right)^{\frac{1}{FA_{CL}}} - 1 = \left(\frac{FD_C}{FD_L}\right)^{\frac{1}{FA_{CL}}} - 1}$$

10.2.3. Expresión de la curva.

Si la estructura temporal de los tipos de interés, al final resulta en una colección de fechas y tipos de interés, estos se pueden escribir bien:

1. Como tipo cupón cero dando lugar a una curva cupón cero. El tipo de interés cupón cero desde $t = 0$, hasta $t = T$, es aquel tipo de interés que habría que aplicar a una cantidad $\mathfrak{B}_0 = c$ desde $t = 0$ hasta $t = T$, de tal manera que en ese momento T, se tenga $\mathfrak{B}_T = 1$. Como la del cuadro 10.4

   a) Caso simple:

   $$\mathfrak{B}_T = \mathfrak{B}_0 \left(1 - r_{ZC}T\right) \rightarrow \mathfrak{B}_0 = \frac{\mathfrak{B}_T}{\left(1 - r_{ZC}T\right)}$$

   b) Caso compuesto:

   $$\mathfrak{B}_T = \mathfrak{B}_0 \left(1 - r_{ZC}\right)^T \rightarrow \mathfrak{B}_0 = \frac{\mathfrak{B}_T}{\left(1 - r_{ZC}\right)^T}$$

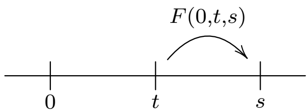
2. Como Factor de descuento $P\left(0, t\right)$, que es el factor a aplicar a una cantidad C en $t = t$, para obtener el valor hoy $(t = 0)$. Ver el apartado 6.2, donde se detalla este mecanismo.

3. Como tipos implícitos (forward) como la del cuadro 10.5,

Días	Descuento	Días	ZC
0	1,0000000	0	-
1	0,999998	1	0,0720 %
7	0,999983	7	0,0875 %
14	0,999966	14	0,0875 %
21	0,999949	21	0,0875 %
30	0,999923	30	0,0924 %
61	0,999839	61	0,0967 %
92	0,999754	92	0,0985 %
120	0,999673	120	0,0982 %
153	0,999575	153	0,1007 %
181	0,999487	181	0,1027 %
273	0,99903	273	0,1295 %
365	0,998158	365	0,1845 %
547	0,994773	547	0,3500 %
733	0,988955	733	0,5553 %
1097	0,971391	1097	0,9713 %

Cuadro 10.4: Curva (OIS) en Factores de Descuento y en Tipo Cupón Cero

$F\left(0,t,s\right)$, siendo el punto o par de la curva $\left(t_i,F_i\right)$,:



a) La curva expresada en tipos Forward, es muy útil en aquellas ocasiones en las que se tiene que determinar el flujo futuro, o forward que se paga o cobra (IRS, CCS, etc...).

Días	Tipo Fwd 6M
0	0,2391 %
181	0,4076 %
365	0,8540 %
547	1,3376 %
733	1,8268 %
912	2,2097 %
1097	2,4604 %
1280	2,6284 %
1461	2,7799 %
1644	2,8958 %
1826	2,9794 %
2008	3,0887 %
2192	3,2112 %
2373	3,2523 %
2557	3,2179 %
2738	3,2377 %

Cuadro 10.5: Curva USD (6M) en tipos Forward

10.2.4. Indices de Mercado - Productos básicos.

Son aquellos productos básicos que cotizan en mercado y que son la materia prima con la que se construyen las curvas.

10.2.4.1. DEPO.

Los depósitos interbancarios son los instrumentos utilizados por los bancos para el préstamo de dinero a corto plazo desde una noche hasta un máximo de 12 meses. La realidad tras la crisis es que los depósitos carecen de liquidez a plazos superiores a 6 meses, y que la liquidez está centrada a corto plazo hasta los 3 meses. Esto es fundamental a la hora de entender los instrumentos que se van a usar a la hora de crear la curva, puesto que esta debe representar de la mejor forma posible la realidad del mercado, ya que va a ser con este artefacto financiero con el que se van a revaluar los productos y con el que se hará "pricing" a la hora de comercializar productos OTC.

Se entiende por tipos Euribor/Libor a aquellos tipos de interés que se aplican en estos depósitos interbancarios (Euribor para los denominados en euros, y Libor para los denominados a dólares, libras, yenes, etc.).

En todos los casos son tipos simples al estar atados a operaciones con duración inferior a un año. En el caso del Euribor, su publicación se realiza por el BCE, de forma diaria a una hora determinada, mientras que los Libor se publican en Londres por medio del banco de Inglaterra, en ambos casos se corresponde con un tipo medio estadísticamente calculado y obtenido por medio de consulta a una serie de bancos, a los que se les pregunta el tipo de oferta al que estarían dispuestos a realizar la transacción en el mercado al plazo estipulado.

El tipo Euribor de plazo 3 meses, por ejemplo, se refiere al tipo simple que se aplica a un depósito a tres meses (convención Act/360). Si el nominal es N, el interés para un trimestre con la convención Act/360 es:

$$I_{3M} = N \cdot \frac{nd}{360} \cdot \text{€3M}$$

Donde N es el nominal, nd son los días entre inicio y fin del DEPO, y €3M es Euribor 3 Meses que es el tipo fijado al comienzo del periodo, el pago se efectuará al final del periodo.

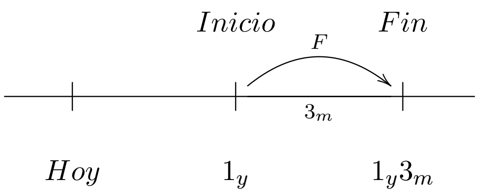
Nota sobre el Euribor: El Euribor se publica todos los días de cierto calendario de mercado, a la misma hora, a las 11:00 de la mañana, en ese momento se realiza el cálculo del nuevo valor del Euribor. Para ello, primero se recolectan los datos de los bancos que contribuyen, y se eliminan los datos extremos el 15 % más alto y el 15 % más bajo de los tipos de interés aportados, se realiza la media aritmética del resto de valores aceptados. El resultado se redondea al número de 3 decimales más próximo al valor del promedio. Una vez calculado el dato se publica y se publican los tipos de interés empleados en el cálculo, para dar transparencia al proceso de cálculo.

Los tipos Euribor publicados en el portal del ECB son los siguientes a fecha 24 de Julio de 2015 son:

Vencimiento	%
1 W	$-0{,}129$
2 W	$-0{,}116$
1 M	$-0{,}074$
2 M	$-0{,}042$
3 M	$-0{,}019$
6 M	$+0{,}048$
9 M	$+0{,}101$
12 M	$+0{,}170$

10.2.4.2. FRA.

Un forward rate agreement (FRA) o forward de tipos de interés es un contrato entre dos partes en el que se fija un periodo Δt, suponga 3 meses, que comenzará en el futuro $t = t_0$, suponga un año, al final de ese periodo de tiempo (1 año y 3 meses) ambas partes del acuerdo pagan interés sobre un nominal N (acordado en el momento de la formalización del contrato), una de las partes paga con el tipo €3M, fijado al comienzo de periodo (dentro de 1 año) y la otra lo hace con un tipo fijo F (forward) predeterminado y firmado el día del establecimiento del contrato.



La parte que paga tipo fijo F y recibe variable €3M (fijado al comienzo del trimestre) percibirá un flujo de cantidad:

$$(\text{€3M} - F) \cdot \Delta t \cdot N = k$$

El contrato, se firma de tal manera que valga cero, por lo que se negocia F. Cuando llega el momento futuro en el que se fija el €3M se intercambia la diferencia, sin esperar a la finalización del contrato, ya que en el momento $Inicio$ se conocen todos los datos necesarios para realizar el pago o el cobro de forma justa, esto es descontada sobre el propio Euribor.

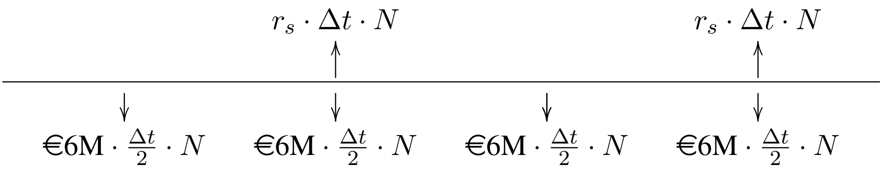
$$k' = \frac{N \cdot \Delta t \cdot (\text{€3M} - F)}{(1 + \text{€3M} \cdot \Delta t)}$$

10.2.4.3. SWAP - IRS.

Un Swap es un contrato OTC del mercado interbancario entre dos partes que intercambian intereses sobre un nominal (nocional) hasta un cierto plazo.

En los Swaps europeos el estándar es que la pata fija se pague con frecuencia anual y la variable con frecuencia semestral, siendo el tipo de referencia el €6M, euribor a 6 meses.

Es decir, al final de cada semestre la rama variable paga intereses ajustados por el fixing del €6M fijado al comienzo del mismo periodo, mientras que la rama fija paga un cierto tipo fijo r_s sobre el nominal al final de cada periodo anual.



El estándar del mercado europeo es utilizar la base de cálculo 30/360 para la pata fija. La base para la pata variable tiene que coincidir con la utilizada en el tipo variable de referencia (en el caso del euribor, Act/360).

Los swap son instrumentos de largo plazo, para más de un año.

10.3. Cálculo de Curvas.

El proceso de cálculo u obtención de las curvas se ha de partir de ciertos instrumentos financieros cuya cotización se puede observar de forma directa en el mercado, a partir de estos instrumentos y mediante un proceso de iteración se calculan los puntos de la curva más representativos. Este proceso tiene como objetivo calcular el cada uno de los puntos de la curva por medio de sus puntos anteriores y el instrumento de mercado correspondiente. Por tanto al ser un proceso iterativo con historia la curva es consistente y permite valorar los productos de mercado con los que se ha construido. Este proceso se denomina BOOTSTRAPING. En caso de curvas de tipos de tipo genérico, para financiación interbancaria, el proceso es directo, mientras que para el caso de tener emisores como gobiernos o institucionales de cierto tamaño se usa un bootstraping iterativo que requiere de la calibración de la curva en cada paso.

10.3.1. Notación.

Para proceder a la construcción de las curvas hay que definir ciertos elementos con los que se va a estar trabajando de forma continua.

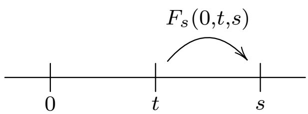
- $P(0,t)$: es el factor de descuento desde hoy $t = 0$, hasta $t = t$.
- $R_s(0,t)$: es el tipo simple que va desde $t = 0$, hasta $t = t$.

$$P(0,t) = \frac{1}{1 + R_s(0,t) \cdot t}$$

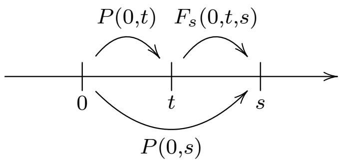
- $R(0,t)$: es el tipo continuo que va desde $t = 0$, hasta $t = t$.

$$P(0,t) = e^{-t \cdot R(0,t)}$$

- $F_s(0,t,s)$: es el tipo forward simple que inicia en t y finaliza en s

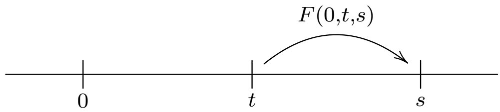


  - Si se conocen los factores de descuento hasta ty hasta s entonces:

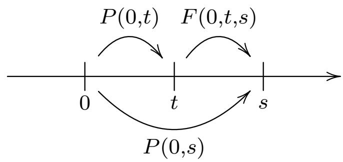


$$1 + F_S(0,t,s) = \frac{P(0,t)}{P(0,s)}$$

- $F(0,t,s)$: es el tipo forward continuo que inicia en t y finaliza en s



  - Si se conocen los factores de descuento hasta ty hasta s entonces:



$$e^{(s-t)\cdot F(0,t,s)} = \frac{P(0,t)}{P(0,s)}$$

- $\mathfrak{R}_s(0,t)$: Tipo cupón cero en su forma Simple.

- $\mathfrak{R}_c(0,t)$: Tipo cupón cero en su forma Compuesta.

- $\mathfrak{R}(0,t)$: Tipo cupón cero en su forma Continua.

10.3.2. Bootstraping (I): Depo + Swap.

Para construir esta curva se va a partir de dos tipos de intrumentos básicos, los depósitos para el tramo corto de la curva (hasta un año) y los IRS para el tramo largo de la curva.

De los depósitos se pueden obtener de forma directa los factores de descuento como:

$$\boxed{P\left(0,t_i\right)=\frac{1}{\left(1+R_s\left(0,t_i\right)\cdot\frac{nd}{360}\right)}}$$

A partir del año se debe usar el dato de los IRS a A años.:

$$\boxed{P\left(0,nA\right)=\frac{1-S_n\cdot\sum_{i=1}^{n-1}P\left(0,iA\right)\cdot\mathrm{FA}_i}{S_n\mathrm{FA}_n+1}}$$

Donde:

S_n: Es el tipo Swap (tipo fijo) a n años.

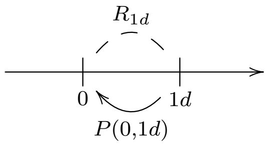
$P\left(0,iA\right)$ $i=\{1,\ldots,n-1\}$: Son los factores de descuento anteriores desde 1 a $n-1$.

FA_i: Es la fracción de año que hay entre cada uno de los i pagos.

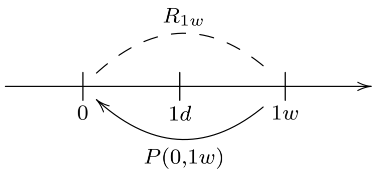
Esto proviene de una equivalencia financiera que se hace sobre cada uno de los tramos de la curva, supongamos que se quiere calcular una curva con DEPO y SWAP a 3 años, se parte de los siguientes datos:

T	Prod.	BASE	Tipo	$P\left(0,t\right)$
1D	DE	ACT/360	R_{1d}	$P\left(0,1d\right)$
1W	DE	ACT/360	R_{1w}	$P\left(0,1w\right)$
1M	DE	ACT/360	R_{1M}	$P\left(0,1m\right)$
3M	DE	ACT/360	R_{3M}	$P\left(0,3m\right)$
6M	DE	ACT/360	R_{6M}	$P\left(0,6m\right)$
12M	DE	ACT/360	R_{1Y}	$P\left(0,1y\right)$
2Y	IRS	30/360	S_{2y}	$P\left(0,2y\right)$
3Y	IRS	30/360	S_{3y}	$P\left(0,3y\right)$

Para la contrucción de la curva se empieza por los tipos a corto que por ser tipo depósito son ya tipos cupón cero.



$$P\left(0,1d\right)=\frac{1}{1+R_{1d}\frac{1}{360}}$$



$$P\left(0,1w\right)=\frac{1}{1+R_{1w}\frac{7}{360}}$$

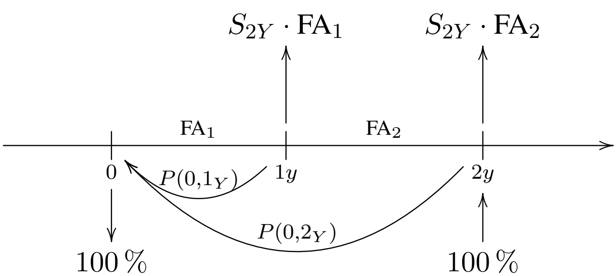
De esta forma se puede generalizar para el resto de depósitos:

$$P\left(0,t_i\right)=\frac{1}{1+R_i\frac{nd_i}{360}}$$

Con esto el cuadro anterior queda como:

T	Tipo	$P(0,t)$	
1D	R_{1d}	$P(0,1d)$	$\dfrac{1}{1+R_{1d}\frac{1}{360}}$
1W	R_{1w}	$P(0,1w)$	$\dfrac{1}{1+R_{1w}\frac{nd_{1w}}{360}}$
1M	R_{1M}	$P(0,1m)$	$\dfrac{1}{1+R_{1M}\frac{nd_{1M}}{360}}$
3M	R_{3M}	$P(0,3m)$	$\dfrac{1}{1+R_{3M}\frac{nd_{3M}}{360}}$
6M	R_{6M}	$P(0,6m)$	$\dfrac{1}{1+R_{6M}\frac{nd_{6M}}{360}}$
12M	R_{1Y}	$P(0,1y)$	$\dfrac{1}{1+R_{1Y}\frac{nd_{12m}}{360}}$
2Y	S_{2y}	$P(0,2y)$	
3Y	S_{3y}	$P(0,3y)$	

Para la parte del SWAP, lo primero es establecer el esquema de pagos de la pata fija, y equilibrarlo por medio de los descuentos, suponiendo que se invierte hoy 100 % del nominal y que se recupera a vencimiento el 100 %, Como el swap es un instrumento que a su firma en condiciones de mercado su valor es cero, ambas patas están equilibradas, y por tanto se puede establecer que:



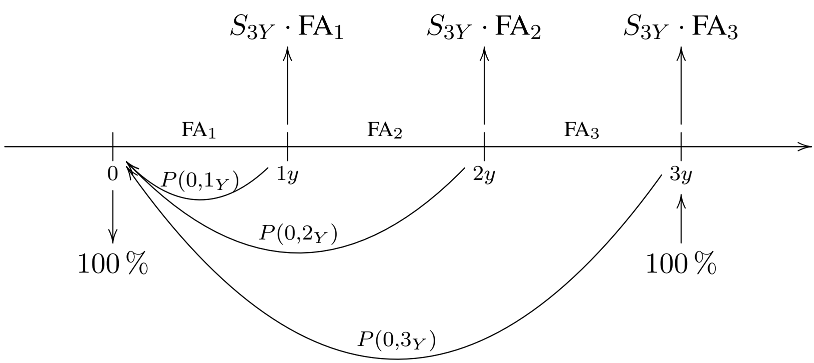
$$100\,\% = P\left(0, 1_Y\right)\left(S_{2Y}\cdot \mathrm{FA}_1\right) + P\left(0, 2_Y\right)\left(100\,\% + S_{2Y}\cdot \mathrm{FA}_2\right)$$

En esta expresión se conoce todo menos el factor de descuento $P\left(0, 2_Y\right)$, que se puede despejar de la siguiente manera (note que $100\,\% = 1$):

$$P\left(0, 2_Y\right) = \frac{1 - P\left(0, 1_Y\right)\left(S_{2Y}\cdot \mathrm{FA}_1\right)}{\left(1 + S_{2Y}\cdot \mathrm{FA}_2\right)}$$

Como puede observarse el valor de $P\left(0, 2_Y\right)$, depende de $P\left(0, 1_Y\right)$, que a su vez se ha calculado en un paso anterior a partir del Depo a 12 meses.

En el caso del cálculo de $P\left(0, 3_Y\right)$, el factor de descuento a 3 años, que se calcula a partir del descuento a dos años y del tipo SWAP a 3.



$$
\begin{aligned}
100\,\% \quad &= \quad P\left(0,1_Y\right)\left(S_{3Y}\cdot \mathrm{FA}_1\right)+\\
&\quad +P\left(0,2_Y\right)\left(S_{3Y}\cdot \mathrm{FA}_2\right)+\\
&\quad +P\left(0,3_Y\right)\left(100\,\%+S_{3Y}\cdot \mathrm{FA}_3\right)
\end{aligned}
$$

Despejando:

$$
P\left(0,3_Y\right)=\frac{1-S_{3\mathrm{Y}}\left[P\left(0,1_Y\right)\cdot \mathrm{FA}_1+P\left(0,2_Y\right)\cdot \mathrm{FA}_2\right]}{1+S_{3Y}\cdot \mathrm{FA}_3}
$$

O de otra manera más compacta:

$$
P\left(0,3_Y\right)=\frac{1-S_{3Y}\cdot \sum\limits_{i=1}^{2}P\left(0,i_Y\right)\cdot \mathrm{FA}_i}{1+S_{3Y}\cdot \mathrm{FA}_3}
$$

Si el plazo de la curva es a n años entonces de forma general:

$$
P\left(0,n_Y\right)=\frac{1-S_{nY}\cdot \sum\limits_{i=1}^{n-1}P\left(0,i_Y\right)\cdot \mathrm{FA}_i}{1+S_{nY}\cdot \mathrm{FA}_n}
$$

Habitualmente se suele sustituir la parte i_Y por iA dejando la expresión como inicialmente se expresó:

$$
P\left(0,nA\right)=\frac{1-S_n\cdot \sum\limits_{i=1}^{n-1}P\left(0,iA\right)\cdot \mathrm{FA}_i}{S_n\mathrm{FA}_n+1}
$$

En el siguiente ejemplo se va a calcular con Excel la curva:

	Fechas	T	Tipos	B	FA_i		$P(0,t_i)$
Depósito	29/07/15	Hoy		$Act/360$			1,0000
	29/08/15	1M	2,295		0,086		0,9980
	29/09/15	2M	2,395		0,172		0,9959
	29/10/15	3M	2,450		0,256		0,9938
	29/01/16	6M	2,545		0,511		0,9872
	29/04/16	9M	2,600		0,764		0,9805
	29/07/16	12M	2,695		1,017	1,000	0,9733
SWAP	29/07/17	2A	2,900	$30/360$		1,000	0,9444
	29/07/18	3A	2,998			1,000	0,9151
	29/07/19	4A	3,100			1,000	0,8848
	29/07/20	5A	3,180			1,000	0,8546
	29/07/21	6A	3,250			1,000	0,8246
	29/07/22	7A	3,350			1,000	0,7927
	29/07/23	8A	3,399			1,000	0,7637
	29/07/24	9A	3,480			1,000	0,7325
	29/07/25	10A	3,550			1,000	0,7022

10.3.2.1. Curva Precios expresada como Curva Cupón Cero

La curva de precios, esto es, expresada en su forma de factores de descuento, tiene ciertas ventajas, si bien para otros usos es más conveniente expresarla en su forma equivalente de tipos cupón cero. Para ello es necesario tener muy en cuenta el hecho de que los descuentos en una zona de la curva se han calculado como descuentos simples y en otro tramo se han calculado como descuento compuesto.

Para ello en la zona corta de la curva de precios se usa la expresión de descuento racional simple:

$$P\left(0,t\right)=\frac{1}{1+\mathfrak{R}_{s}\left(0,t\right)\cdot\mathrm{FA}_{0\to t}}$$

En la zona larga de la curva de precios se usa la expresión de descuento racional compuesto:

$$P\left(0,t\right)=\frac{1}{\left(1+\mathfrak{R}_{c}\left(0,t\right)\right)^{\mathrm{FA}_{0\to t}}}$$

Una de las decisiones que queda pendiente es la base en la que se van a medir los tiempos de las fracciones de año para la obtención de la curva cupón cero, si bien se puede elegir aquella que se ajuste más al tipo de operativa de la entidad o a los productos que se desean revaluar, si no se indica otra cosa, resulta habitual seleccionar la convención de base ${}^{Act}\!/_{365}$

	Fechas	$P(0, t_i)$	$\text{FA}_{H \to t}$
Depósito	29/07/15	1,0000	
	29/08/15	0,9980	0,0849
	29/09/15	0,9959	0,1699
	29/10/15	0,9938	0,2521
	29/01/16	0,9872	0,5041
	29/04/16	0,9805	0,7534
	29/07/16	0,9733	1,0027
SWAP	29/07/17	0,9444	2,0027
	29/07/18	0,9151	3,0027
	29/07/19	0,8848	4,0027
	29/07/20	0,8546	5,0055
	29/07/21	0,8246	6,0055
	29/07/22	0,7927	7,0055
	29/07/23	0,7637	8,0055
	29/07/24	0,7325	9,0082
	29/07/25	0,7022	10,008

Caso Simple:

$$\mathfrak{R}_s(0, t_i) = \frac{1}{\text{FA}_{0\to i}} \left(\frac{1}{P(0, t_i)} - 1 \right)$$

Caso compuesto:

$$\mathfrak{R}_c(0, t_i) = \left[\left(\frac{1}{P(0, t_i)} \right)^{\frac{1}{\text{FA}_{0\to i}}} - 1 \right]$$

Por tanto:

	Fechas	$P(0, t_i)$	$FA_{0\to t}$		$\mathfrak{R}\,(\%)$
Depósito	29/07/15	1,0000		Simple	
	29/08/15	0,9980	0,0849		2,3269
	29/09/15	0,9959	0,1699		2,4283
	29/10/15	0,9938	0,2521		2,4840
	29/01/16	0,9872	0,5041		2,5803
	29/04/16	0,9805	0,7534		2,6361
	29/07/16	0,9733	1,0027		2,7324
SWAP	29/07/17	0,9444	2,0027	Compuesto	2,8983
	29/07/18	0,9151	3,0027		2,9998
	29/07/19	0,8848	4,0027		3,1063
	29/07/20	0,8546	5,0055		3,1886
	29/07/21	0,8246	6,0055		3,2634
	29/07/22	0,7927	7,0055		3,3726
	29/07/23	0,7637	8,0055		3,4254
	29/07/24	0,7325	9,0082		3,5154
	29/07/25	0,7022	10,008		3,5951

La curva expresada como factores de descuento es posible convertirla en otras formas, como tipos cupones cero en modo continuo, o en forma de tipos implícitos o tipos a plazo. Esta forma de expresar la curva de precios resulta especialmente útil cuando se tienen que encontrar los tipos implícitos para el momento de determinación de los tipos que se fijarán para flujos futuros, claro que es necesario tener en cuenta que para cada producto se tendrá que expresar la curva de forma adecuada.

Es importante no perder nunca de vista los productos con los que se creo la curva, ya que de otra manera se podría tener la tentación de usar la curva como instrumento de trabajo en productos con otras frecuencias de pago, incluso otras divisas, es por ello fundamental, contar con la definición o indicación de los productos con los que se ha construido, de modo que se evite este tipo de error, ciertamente común, y fuente de muchos quebraderos de cabeza en algunas operaciones financieras.

10.3.3. Bootstraping (II): Depo + FRA + Swap.

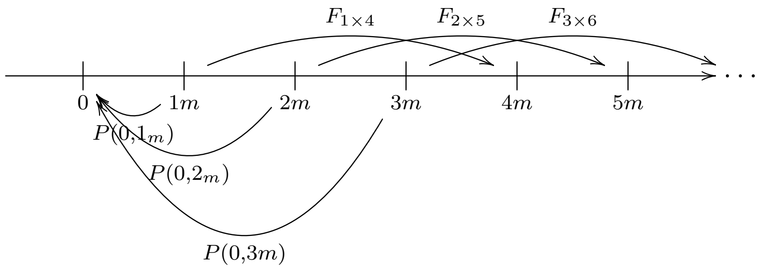
En este caso se van a usar y a solapar los tres tipos de productos, para el ejemplo se van a usar FRA de tres meses de duración, pero al igual que en el caso anterior, en el que los swap son de paso anual, se podrían usar cualquier otro paso, semestral, etc.

P	T	B	Tipo	$P(0,t)$
DEP	1D	ACT/360	R_{1d}	$P(0,1d)$
	1W		R_{1w}	$P(0,1w)$
	1M		R_{1M}	$P(0,1m)$
	2M		R_{2M}	$P(0,2m)$
	3M		R_{3M}	$P(0,3m)$
FRA	1x4	$Act/360$	$F_{1\times4}$	$P(0,4m)$
	2x5		$F_{2\times5}$	$P(0,5m)$
	3x6		$F_{3\times6}$	$P(0,6m)$
	4x7		$F_{4\times7}$	$P(0,7m)$
	5x8		$F_{5\times8}$	$P(0,8m)$
	6x9		$F_{6\times9}$	$P(0,9m)$
	7x10		$F_{7\times10}$	$P(0,10m)$
	8x11		$F_{8\times11}$	$P(0,11m)$
	9x12		$F_{9\times12}$	$P(0,1y)$
IRS	2Y	30/360	S_{2y}	$P(0,2y)$
	3Y		S_{3y}	$P(0,3y)$

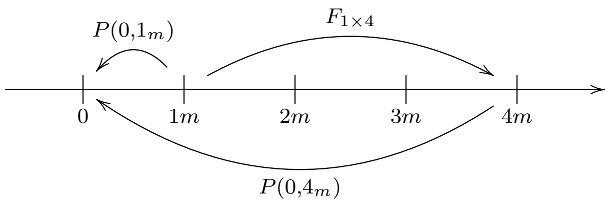
Para el caso de los depósitos el modo de resolverlo es exactamente igual que en el caso anterior:

$$\boxed{P\left(0,t_i\right)=\frac{1}{\left(1+R_s\left(0,t_i\right)\cdot\frac{nd}{360}\right)}}$$

Para el caso de los FRA se debe ir encadenando unos con otros, así para obtener el factor de descuento $P\left(0,5m\right)$, se obtiene a partir del factor de descuento $P\left(0,2m\right)$ y el $FRA_{2\times 5}$.



Para el caso 1×4 esto es, para el descuento $P\left(0,4m\right)$, si suponemos un flujo C en el mes 4, el valor presente de este flujo C debe ser el mismo si se descuenta por medio del factor de descuento $P\left(0,4m\right)$, que si primero se descuente por el tipo $FRA_{1\times 4}$, hasta el mes 1, y luego se vuelve a descontar pero ya al presente por medio del facto de descuento $P\left(0,1m\right)$.



$$C_{3m} = C\frac{1}{1 + FRA_{1\times 4}{}^{90}/_{360}}$$

$$C_0 = C_3 P\left(0, 1m\right) = P\left(0, 1m\right)\frac{1}{1 + FRA_{1\times 4}{}^{90}/_{360}}$$

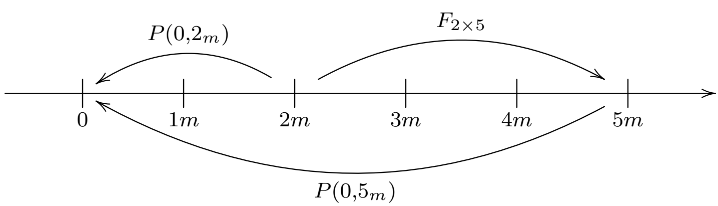
Por otro lado:

$$C_0 = C \cdot P\left(0, 4m\right)$$

Igualando ambos:

$$P\left(0, 4m\right) = P\left(0, 1m\right)\frac{1}{1 + FRA_{1\times 4}{}^{90}/_{360}}$$

Para el caso 2×5, esto es, para el descuento $P\left(0, 5m\right)$ y aplicando la misma lógica que en el caso anterior:



$$P(0,5m) = P(0,2m)\,\frac{1}{1 + FRA_{2\times 5}{}^{90}\!/_{360}}$$

Entonces para toda la serie:

- Tramo de depósitos, hasta el 3 meses y a partir de ahí entran los FRA:

$$P(0,t_i) = \frac{1}{\left(1 + R_s(0,t_i)\cdot \frac{nd}{360}\right)}$$

- Tramo de FRA (desde 3M hasta el año):
    - $P(0,4m)$:

    $$P(0,4m) = P(0,1m)\,\frac{1}{1 + FRA_{1\times 4}{}^{90}\!/_{360}}$$

    - $P(0,5m)$:

    $$P(0,5m) = P(0,2m)\,\frac{1}{1 + FRA_{2\times 5}{}^{90}\!/_{360}}$$

    - $P(0,6m)$:

    $$P(0,6m) = P(0,3m)\,\frac{1}{1 + FRA_{3\times 6}{}^{90}\!/_{360}}$$

    - $P(0,7m)$:

    $$P(0,7m) = P(0,4m)\,\frac{1}{1 + FRA_{4\times 7}{}^{90}\!/_{360}}$$

    - $P(0,8m)$:

    $$P(0,8m) = P(0,5m)\,\frac{1}{1 + FRA_{5\times 8}{}^{90}\!/_{360}}$$

- $P(0, 9m)$:

$$P(0,9m) = P(0,6m)\,\frac{1}{1 + FRA_{6\times 9}{}^{90}\!/_{360}}$$

- $P(0, 10m)$:

$$P(0,10m) = P(0,7m)\,\frac{1}{1 + FRA_{7\times 10}{}^{90}\!/_{360}}$$

- $P(0, 11m)$:

$$P(0,11m) = P(0,8m)\,\frac{1}{1 + FRA_{8\times 11}{}^{90}\!/_{360}}$$

- $P(0, 12m)$:

$$P(0,12m) = P(0,9m)\,\frac{1}{1 + FRA_{9\times 12}{}^{90}\!/_{360}}$$

- Para el tramos de SWAP es el mismo caso que antes:

$$P(0,nA) = \frac{1 - S_n \cdot \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} P(0,iA)\cdot \mathrm{FA}_i}{S_n \mathrm{FA}_n + 1}$$

Sea el siguiente ejemplo de productos cotizados:

	Fechas	T	Tipos	B	FA_i	$P(0,t_i)$
Depósito	01/08/15	Hoy		${}^{Act}\!/_{360}$		1,0000
	01/09/15	1M	2,295		0,086	0,9980
	01/10/15	2M	2,395		0,169	0,9960
	01/11/15	3M	2,450		0,256	0,9938

	Fechas	T	Tipos	B	FA$_i$		$P(0,t_i)$
FRA	01/12/15	1×4	2,545		0,339		0,9916
	01/01/16	2×5	2,600		0,425		0,9894
	01/02/16	3×6	2,646		0,511		0,9871
	01/03/16	4×7	2,691		0,592		0,9849
	01/04/16	5×8	2,737		0,678		0,9826
	01/05/16	6×9	2,783		0,761		0,9803
	01/06/16	7×10	2,829		0,847		0,9779
	01/07/16	8×11	2,874		0,931		0,9755
	01/08/16	9×12	2,920		1,017	1,000	0,9730
SWAP	01/08/17	2A	2,900	$^{30}/_{360}$		1,000	0,9444
	01/08/18	3A	2,998			1,000	0,9151
	01/08/19	4A	3,100			1,000	0,8848
	01/08/20	5A	3,180			1,000	0,8546
	01/08/21	6A	3,250			1,000	0,8246
	01/08/22	7A	3,350			1,000	0,7927
	01/08/23	8A	3,399			1,000	0,7637
	01/08/24	9A	3,480			1,000	0,7325
	01/08/25	10A	3,550			1,000	0,7022

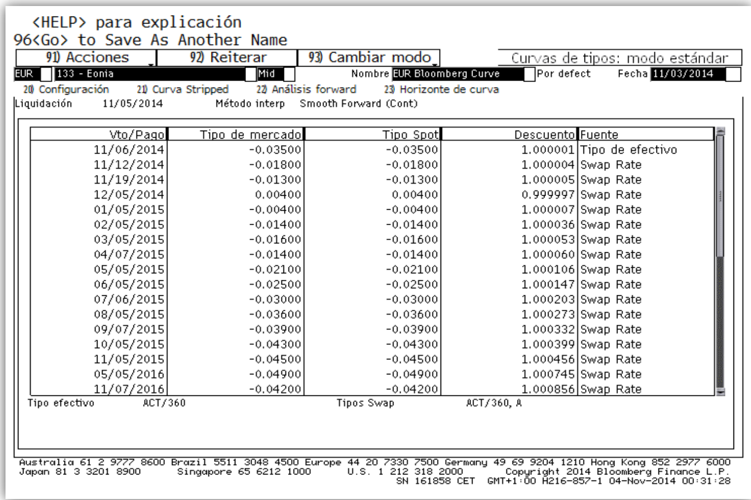
Si la expresamos en forma de curva cupón cero como en el caso anterior:

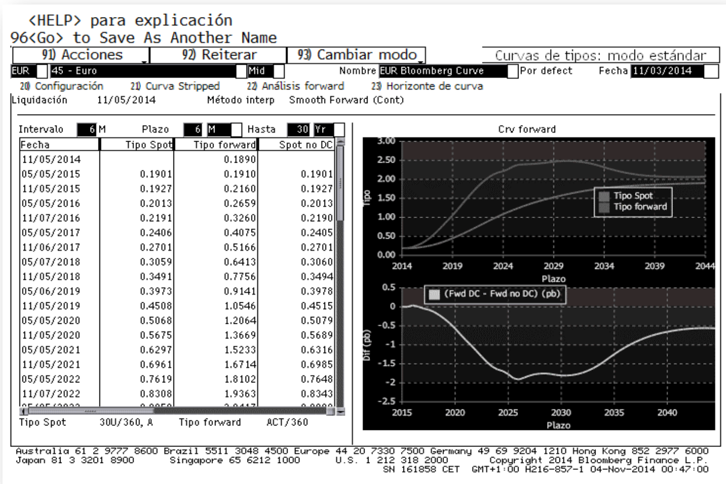
	Fechas	T	FA$_i$	$P(0,t_i)$	$\mathfrak{R}(0,t)$
Depósito	01/08/15	Hoy	-	1,0000	-
	01/09/15	1M	0,0849	0,9980	2,3269
	01/10/15	2M	0,1671	0,9960	2,4283

	Fechas	T	FA_i	$P(0,t_i)$	$\mathfrak{R}(0,t)$
	01/11/15	3M	0,2521	0,9938	2,4840
FRA	01/12/15	1×4	0,3342	0,9916	2,5197
	01/01/16	2×5	0,4192	0,9894	2,5597
	01/02/16	3×6	0,5041	0,9871	2,5918
	01/03/16	4×7	0,5836	0,9849	2,6187
	01/04/16	5×8	0,6685	0,9826	2,6511
	01/05/16	6×9	0,7507	0,9803	2,6794
	01/06/16	7×10	0,8356	0,9779	2,7072
	01/07/16	8×11	0,9178	0,9755	2,7365
	01/08/16	9×12	1,0027	0,9730	2,7650
SWAP	01/08/17	2A	2,0027	0,9444	2,8978
	01/08/18	3A	3,0027	0,9151	2,9995
	01/08/19	4A	4,0027	0,8848	3,1060
	01/08/20	5A	5,0055	0,8546	3,1884
	01/08/21	6A	6,0055	0,8246	3,2632
	01/08/22	7A	7,0055	0,7927	3,3724
	01/08/23	8A	8,0055	0,7637	3,4252
	01/08/24	9A	9,0082	0,7325	3,5153
	01/08/25	10A	10,0082	0,7022	3,5950

10.3.4. Ejemplos de curvas en mercado.

Proveedores de información como Bloomberg suministran datos de curvas de mercado (nunca de entidad, salvo que se configure de forma privada la misma), por ejemplo a continuación se muestra la curva EONIA, y la curva FRA 6M (compuesta por tipos FRA cotizados), la primera vale como curva más o menos aceptable para descontar, mientras que la segunda puede valer para estimar los tipos a plazo de productos cuya cadencia de pago sea justamente cada 6 meses.





En detalle y puesto que se van a usar en los siguientes apartados en los que se muestran los ejemplos de uso de las curvas para la revaluación de productos financieros, se muestran las curvas del euro y del dólar. Para poder realizar estimaciones sobre productos de

Vto/Pago	Descuento	Vto/Pago	Descuento
06/11/14	0,999998	...	...
12/11/14	0,999983	06/11/17	0,971391
19/11/14	0,999966	05/11/18	0,948936
26/11/14	0,999949	05/11/19	0,924606
05/12/14	0,999923	05/11/21	0,872701
05/01/15	0,999839	05/11/24	0,795333
05/02/15	0,999754	05/11/26	0,744885
05/03/15	0,999673	05/11/29	0,674835
07/04/15	0,999575	06/11/34	0,572628
05/05/15	0,999487	07/11/39	0,488908
05/08/15	0,99903	07/11/44	0,418939
05/11/15	0,998158	05/11/54	0,313187
05/05/16	0,994773	05/11/64	0,241230
07/11/16	0,988955		
...	...		

Cuadro 10.8: Curva OIS - ${}^{Act}/_{360}$ - Fecha Curva 05/11/2014

frecuencia de pago de 6 meses, se incluyen las curvas de mercado, también para el euro y el dólar, pero de FRA.

10.3.5. Aplicación de la Curva.

En este apartado se va a usar la curva de tipos Forward a 6M del cuadro 10.9 para estimación, mientras que se va a usar la curva OIS como curva de financiación o descuento del cuadro 10.8.

10.3.5.1. Descripción del producto.

Suponga un bono de cupones semestrales y de cuantía variable, cuantía que paga el Libor sobre el dólar a 6M más un Spread de 45 puntos básicos $(0,45\,\%)$. El nominal del bono son $\$50\,000$. Si

Fecha	FWD	Fecha	FWD
05/11/14	0,2391 %	05/11/29	3,5421 %
05/05/15	0,4076 %	07/05/30	3,5354 %
05/11/15	0,8540 %	05/11/30	3,5277 %
05/05/16	1,3376 %	06/05/31	3,5198 %
07/11/16	1,8268 %	05/11/31	3,5106 %
05/05/17	2,2097 %	05/05/32	3,5012 %
06/11/17	2,4604 %	05/11/32	3,4904 %
08/05/18	2,6284 %	05/05/33	3,4800 %
05/11/18	2,7799 %	07/11/33	3,4674 %
07/05/19	2,8958 %	05/05/34	3,4555 %
05/11/19	2,9794 %	06/11/34	3,4420 %
05/05/20	3,0887 %	08/05/35	3,4294 %
05/11/20	3,2112 %	05/11/35	3,4174 %
05/05/21	3,2523 %	06/05/36	3,4060 %
05/11/21	3,2179 %	05/11/36	3,3948 %
05/05/22	3,2377 %	05/05/37	3,3851 %
07/11/22	3,3207 %	05/11/37	3,3750 %
05/05/23	3,3824 %	05/05/38	3,3665 %
06/11/23	3,4131 %	05/11/38	3,3577 %
07/05/24	3,4591 %	05/05/39	3,3507 %
05/11/24	3,5150 %	07/11/39	3,3429 %
06/05/25	3,5217 %	08/05/40	3,3356 %
05/11/25	3,4806 %	05/11/40	3,3280 %
05/05/26	3,4663 %	07/05/41	3,3202 %
05/11/26	3,4871 %	05/11/41	3,3119 %
05/05/27	3,5115 %	06/05/42	3,3039 %
05/11/27	3,5291 %	05/11/42	3,2949 %
05/05/28	3,5417 %	05/05/43	3,2865 %
06/11/28	3,5473 %	05/11/43	3,2771 %
08/05/29	3,5473 %	05/05/44	3,2684 %

Cuadro 10.9: Curva FRA$^{\$}_{6M}$ - $^{Act}/_{360}$ - Fecha Curva 05/11/2014

Vto/Pago	Descuento	Tipo (CC)
06/11/14	1,000001	-0,0359935 %
12/11/14	1,000003	-0,0154274 %
19/11/14	1,000005	-0,0128563 %
05/12/14	0,999997	0,0036001 %
05/01/15	1,000007	-0,0041999 %
05/02/15	1,000036	-0,0143987 %
05/03/15	1,000053	-0,0158983 %
07/04/15	1,00006	-0,0142091 %
05/05/15	1,000101	-0,0201969 %
05/06/15	1,000135	-0,0231386 %
06/07/15	1,000182	-0,0271806 %
05/08/15	1,000273	-0,0363884 %
07/09/15	1,000332	-0,0395618 %
05/10/15	1,000399	-0,0435091 %
05/11/15	1,000456	-0,0455792 %
05/05/16	1,000745	-0,0496359 %
07/11/16	1,000856	-0,0426541 %
05/05/17	1,000545	-0,0217917 %
06/11/17	1,000213	-0,0070924 %
05/11/18	0,997525	0,0619709 %
05/11/19	0,992837	0,1438790 %
05/11/20	0,98477	0,2561135 %
05/11/21	0,973554	0,3836195 %
07/11/22	0,958907	0,5255269 %
06/11/23	0,942956	0,6545499 %
05/11/24	0,924996	0,7827059 %
05/11/25	0,906879	0,8925620 %
05/11/26	0,886945	1,0047836 %
05/11/29	0,82802	1,2660674 %
06/11/34	0,737424	1,5344026 %

Cuadro 10.10: Curva EONIA - $^{Act}/_{360}$ - Fecha Curva 05/11/2014

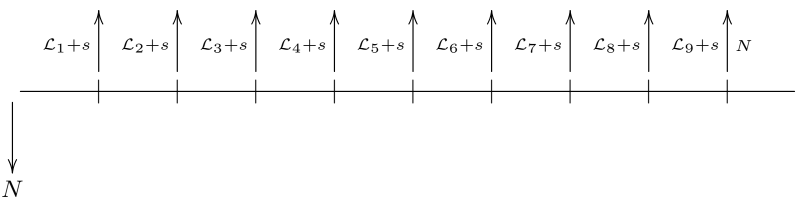
Fecha	FWD	Fecha	FWD
05/11/14	0,1890 %	05/11/29	2,4654 %
05/05/15	0,1910 %	06/05/30	2,4785 %
05/11/15	0,2160 %	05/11/30	2,4849 %
05/05/16	0,2659 %	05/05/31	2,4857 %
07/11/16	0,3260 %	05/11/31	2,4799 %
05/05/17	0,4075 %	05/05/32	2,4682 %
06/11/17	0,5166 %	05/11/32	2,4499 %
07/05/18	0,6413 %	05/05/33	2,4260 %
05/11/18	0,7756 %	07/11/33	2,3950 %
06/05/19	0,9141 %	05/05/34	2,3591 %
05/11/19	1,0546 %	06/11/34	2,3175 %
05/05/20	1,2064 %	07/05/35	2,2784 %
05/11/20	1,3669 %	05/11/35	2,2428 %
05/05/21	1,5233 %	05/05/36	2,2107 %
05/11/21	1,6714 %	05/11/36	2,1818 %
05/05/22	1,8102 %	05/05/37	2,1568 %
07/11/22	1,9363 %	05/11/37	2,1350 %
05/05/23	2,0417 %	05/05/38	2,1171 %
06/11/23	2,1262 %	05/11/38	2,1022 %
06/05/24	2,1809 %	05/05/39	2,0914 %
05/11/24	2,2140 %	07/11/39	2,0831 %
05/05/25	2,2685 %	07/05/40	2,0768 %
05/11/25	2,3419 %	05/11/40	2,0715 %
05/05/26	2,3861 %	06/05/41	2,0675 %
05/11/26	2,3953 %	05/11/41	2,0643 %
05/05/27	2,4003 %	05/05/42	2,0627 %
05/11/27	2,4078 %	05/11/42	2,0618 %
05/05/28	2,4185 %	05/05/43	2,0624 %
06/11/28	2,4317 %	05/11/43	2,0639 %
07/05/29	2,4481 %	05/05/44	2,0669 %

Cuadro 10.11: Curva $\text{FRA}^{€}_{6M}$ - ${}^{Act}/_{360}$ - Fecha Curva 05/11/2014

la fecha de emisión es el día 02 Agosto de 2015 y hoy es 05 de Noviembre de 2014, se quiere calcular el valor del bono hoy. El bono se emite el 02 de Agosto de 2015 y vence el 02 de Febrero de 2020, esto es, dura 4 años y medio. Para el cálculo de tiempos y fracciones de año tome la base $^{Act}/_{360}$.

Las condiciones y datos para el cálculo parten de que se dispone a día de hoy, 05 de Noviembre de 2014 de una curva de tipos Forward (implícitos) a 6M en la tabla 10.9, y para descontar se puede suponer que la posición se fondea en dólares y se refinancia de forma diaria al tipo OIS, por lo que para el descuento se puede usar la curva de factores de descuento en OIS, de la tabla 10.8.

Con esto el bono queda con el siguiente esquema de flujos:



10.3.5.2. Solución al valor.

Se va a suponer que se puede hacer una valoración estática a partir de la estimación de los flujos futuros. Para ello se toma la curva de tipos Forward que llamamos FWD $(0, t)$, esta curva se expresa en las unidades que son necesarias, puesto que para poder estimar cada uno de los flujos se debe resolver la siguiente expresión:

$$f_i = (\mathcal{L}_i + s)\,\mathrm{FA}_{(i-1,i)} N$$

Tanto el spread s, como el nominal N, como el tiempo entre pagos en fracción de año $\text{FA}_{(i-1,i)}$, son datos conocidos o calculables, si bien el tipo Libor a 6M calculado en el momento i, es desconocido pero se puede calcular a partir de la curva FWD $(0, t)$.

Antes de calcular estos tipos $\mathcal{L}_i$ de la curva FWD $(0, t)$, es preciso componer la tabla en la que fijar el resto de datos, en el que lo primero es calcular las fechas de pago:

	Fecha	Dias	Act/360
Nº	02/08/15		FA
1	02/02/16	184	0,51
2	02/08/16	182	0,51
3	02/02/17	184	0,51
4	02/08/17	181	0,50
5	02/02/18	184	0,51
6	02/08/18	181	0,50
7	02/02/19	184	0,51
8	02/08/19	181	0,50
9	02/02/20	184	0,51

Para generar las fechas se ha usado la función de excel FECHA.MES, añadiendo a la fecha de hoy seis meses, en principio habría que ajustar aquellos días que cae en fin de semana o en festivo, pero para este ejemplo, no se tendrá en cuenta.

Con este calendario se puede obtener la diferencia de días y puesto que se ha indicado en el producto que la base es ${}^{Act}/_{360}$, se divide por 360. También se podría usar la función de Excel FRAC.AÑO con la opción para ${}^{Act}/_{360}$.

Para la parte de interpolación se toma la curva del cuadro 10.9 y se aplica para cada fecha, esto es, para el caso de la fecha 02/02/16 se busca el intervalo en la curva, se pueden calcular los días hasta cada una de las fechas para simplificar el proceso de interpolación:

Fecha	Tipo	Días
05/11/15	0,8540 %	365
02/02/16	???	454
05/05/16	1,3376 %	547

Con estos datos se pasa a interpolar:

$$\begin{aligned} r &= (r_2 - r_1)\,\frac{F - F_1}{F_2 - F_1} + r_1 \\ &= (1,3376\,\% - 0,8540\,\%)\,\frac{454 - 365}{547 - 454} + 0,8540\,\% \\ &= 1,0905\,\% \end{aligned}$$

Cuando esto se realiza sobre cada uno de los puntos[4] la tabla de datos puede incluir los campos de tipo implícito a partir de la curva:

	Fecha	Dias	$^{Act}/_{360}$	FWD	F+S
Nº	02/08/15		FA		
1	02/02/16	184	0,51	1,0905 %	1,5405 %
2	02/08/16	182	0,51	1,5717 %	2,0217 %
3	02/02/17	184	0,51	2,0129 %	2,4629 %
4	02/08/17	181	0,50	2,3303 %	2,7803 %
5	02/02/18	184	0,51	2,5412 %	2,9912 %
6	02/08/18	181	0,50	2,7004 %	3,1504 %
7	02/02/19	184	0,51	2,8363 %	3,2863 %
8	02/08/19	181	0,50	2,9358 %	3,3858 %
9	02/02/20	184	0,51	3,0328 %	3,4828 %

[4]Hay macros gratuitas que permiten automatizar este tipo de operaciones en Excel. No hay que hacerlo a mano, la parte de programación en Excel permite justo automatizar estos procesos.

Con estos datos se puede calcular el flujo en cada uno de las fechas:

	Fecha	Días	$Act/360$	FWD	F+S	f_i	N
Nº	02/08/15		FA				-50.000
1	02/02/16	184	0,51	1,0905 %	1,5405 %	394	0
2	02/08/16	182	0,51	1,5717 %	2,0217 %	511	0
3	02/02/17	184	0,51	2,0129 %	2,4629 %	629	0
4	02/08/17	181	0,50	2,3303 %	2,7803 %	699	0
5	02/02/18	184	0,51	2,5412 %	2,9912 %	764	0
6	02/08/18	181	0,50	2,7004 %	3,1504 %	792	0
7	02/02/19	184	0,51	2,8363 %	3,2863 %	840	0
8	02/08/19	181	0,50	2,9358 %	3,3858 %	851	0
9	02/02/20	184	0,51	3,0328 %	3,4828 %	890	50.000

Simplificando el cuadro:

	Fecha	f_i
Nº	02/08/15	-50.000
1	02/02/16	394
2	02/08/16	511
3	02/02/17	629
4	02/08/17	699
5	02/02/18	764
6	02/08/18	792
7	02/02/19	840
8	02/08/19	851
9	02/02/20	50.890

Queda traer estos flujos a valor presente para ello es necesario interpolar las fechas en la curva de factores de descuento del cuadro 10.8. Como la curva está expresada en forma de factores de descuento es necesario aplicar interpolación exponencial.

Para el caso de la fecha 02/02/16 se busca el intervalo en la curva, se pueden calcular los días hasta cada una de las fechas para simplificar el proceso de interpolación:

Fecha	$P(0,t)$	Días
05/11/15	0,998158	365
02/02/16	???	454
05/05/16	0,994773	547

Con estos datos se pasa a interpolar:

$$\begin{aligned} r &= r_1 \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{F-F_1}{F_2-F_1}} \\ &= 0,998158 \left(\frac{0,994773}{0,998158}\right)^{\frac{454-365}{547-365}} \\ &= 0,996501261 \end{aligned}$$

Aplicando esto mismo al resto de las fechas y multiplicando el flujo f_i, por el correspondiente factor de descuento, se obtiene el flujo en valor presente, y queda el cuadro:

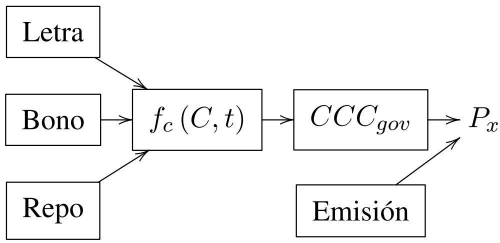
	Fecha	f_i	$P(0,t)$	$(+)\, f_i^{\text{VA}}$	$(-)\, f_i^{\text{VA}}$
Nº	02/08/15	-50.000	1,000000		-50.000
1	02/02/16	394	0,996501	392	
2	02/08/16	511	0,991985	507	
3	02/02/17	629	0,984728	620	
4	02/08/17	699	0,975993	682	
5	02/02/18	764	0,965914	738	
6	02/08/18	792	0,954746	756	
7	02/02/19	840	0,942945	792	
8	02/08/19	851	0,930878	792	
9	02/02/20	50.890	0,918125	46.723	
Totales:				52.003	-50.000

Por ello el valor hoy es de $\$2\,003$, o en tanto por ciento $^{52\,003}/_{50\,000} = 104,01\,\%$.

10.3.6. Bootstraping (III): Caso CCC Gobierno.

En ciertos casos, es necesario disponer de curvas cupones cero, provenientes de una serie de instrumentos de renta fija como bonos de estados soberanos, o bonos de compañías. Para poder obtener este tipo de curvas, primero se debe evaluar si el emisor dispone de instrumentos líquidos, y estos están distribuidos de forma lógica según vencimiento. Esta situación es a la que tienden los estados soberanos y las grandes empresas, ya que una distribución coherente de las emisiones en vencimientos diferentes, refleja una cierta estrategia de financiación y escala las liquidaciones sin ofrecer concentración, lo que redunda en una mayor capacidad de hacer frente a los pagos que conlleva dicha financiación.

El problema de disponer de una curva que contemple el riesgo de una economía local (País) o de una gran empresa privada (Entidades Financieras generalmente supranacionales), se puede resolver mediante la construcción sintética de una curva cupón cero, o en su forma de factores de descuento. Como materia prima de construcción de esta curva, es necesario considerar los instrumentos afectos a riesgo (crédito), emitidos por el país o por la empresa, esto es, aquellas obligaciones en curso, y los instrumentos financieros - de corto plazo - cuyo subyacente sea una de las obligaciones en curso, por ejemplo, REPOS.



Por tanto se puede definir un proceso por medio del cual obtener una curva de tipos implícita, que ajuste el precio de los instrumentos emitidos por el país/empresa bajo estudio. Esto es, con los instrumentos en curso se calibra una curva que podrá usarse para calcular el precio de otra emisión, y que valora exactamente aquellas que se usan para componer la curva. Esto hace que la curva no resulte arbitrable frente a mercado, y permite evaluar si el precio de cierta emisión del mismo emisor difiere del teórico, con os que se puede tratar de explicar esta diferencia en base al descuento de riesgo extra que se incluya en el riesgo, como riesgo de liquidez de la emisión, sobre-demanda, etc.

El proceso a seguir para obtener la curva se basa en:

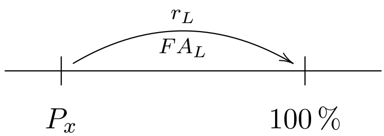
1. Seleccionar aquellas emisiones representativas, esto es, con cierta liquidez en el mercado que garantiza un precio no ses-

gado. Cuantas más mejor, ya que así se contemplarán un mayor número de escenarios posibles y la curva resultante los recogerá.

2. Buscar emisiones de cupones fijos para evitar la necesidad de obtención de tipos implícitos con los que valorar la emisión.

3. Con las emisiones seleccionadas se tratará de identificar de forma directa un factor de descuento:

    a) Para el caso de los Repos o de Letras: El factor de descuento es directo.



$$FD_L = \frac{P_x}{100\,\%}$$

    a) Para el caso de Bonos:

        1) De cupones Fijos: No es directamente posible debido a la existencia de pagos intermedios (cupones).

        2) Bonos Cupones Cero: Aplica el caso de las letras para un plazo superior (Capitalización Compuesta).

Para ver el proceso de cálculo tómese en consideración las siguientes emisiones para cierto país:

Tipo	Vto.	Cupón	Precio
Letra	3_m	–	$98{,}78\,\%$
Letra	9_m	–	$96,09\,\%$
Letra	12_m	–	$94,50\,\%$
Bono	32_m	$7\,\%$	$103,08\,\%$

El cupón del bono a 32_m se cobra dentro de 8_m, 20_m, y el último, junto con el nominal dentro de 32_m.

Una vez se dispone de toda esta información, se descartan aquellas emisiones con cupones intermedios, cuyo vencimiento es inferior a un año, y con el resto se anotan los flujos en un calendario a lo largo del tiempo con lo que se puede identificar aquellas emisiones, como letras y repos. Estas emisiones "al tirón", reflejan un precio cierto de descuento, por lo que es posible determinar un factor de descuento directo, dato que anotamos.

Por tanto se tiene la siguiente tabla de liquidaciones.

	Plazo	3 m	6 m	8 m	9 m	12 m	20 m	32 m
	FA	0,25 y	0,50 y	0,67 y	0,75 y	1,00 y	1,67 y	2,67 y
	Px Hoy	Flujo Financiero						
Letra 1	98,78%	100,00%						
Letra 2	96,09%				100,00%			
Letra 3	94,50%					100,00%		
Bono 1	103,08%			7,00%			7,00%	107,00%
Factor Descuento:		0,987800			0,960900	0,945000		

Donde se han obtenido de forma directa los valores de los factores de descuento en las fechas de pago de las letras de la expresión $FD_L = \frac{P_x}{100\,\%}$.

Una vez obenidos los factores de descuento se puede expresar el dato en forma de tipo de interés (cupón cero) por medio de la expresión:

$$Z = \left(\frac{1}{FD}\right)^{\frac{1}{FA}} - 1$$

Con los factores de descuento es posible obtener los tipos cupón zero:

	Plazo	3 m	6 m	8 m	9 m	12 m	20 m	32 m
	FA	0,25 y	0,50 y	0,67 y	0,75 y	1,00 y	1,67 y	2,67 y
	Px Hoy	Flujo Financiero						
Letra 1	98,78%	100,00%						
Letra 2	96,09%				100,00%			
Letra 3	94,50%					100,00%		
Bono 1	103,08%			7,00%			7,00%	107,00%
Factor Descuento:		0,987800			0,960900	0,945000		
Tipo CCC:		5,03%			5,46%	5,82%		

Al realizar el cálculo de los tipos cupones cero, aparecen plazos intermedios que se pueden calcular, ya que al existir datos en los extremos se puede usar la expresión de interpolación lineal en tipos para llegar a los mismos[5]:

$$r_x = (r_2 - r_1)\,\frac{(FA_x - FA_2)}{(FA_2 - FA_1)} + r_1$$

Con los tipos cupón cero interpolados, es posible obtener su factor de descuento de forma directa:

$$FD = \frac{1}{(1+Z)^{FA}}$$

[5]Recuerde el lector que se debe interpolar de forma lineal en tipos y de forma exponencial en factores de descuento.

Se interpola para obtener los tipos intermedios:

		3 m	6 m	8 m	9 m	12 m	20 m	32 m
	Plazo	3 m	6 m	8 m	9 m	12 m	20 m	32 m
	FA	0,25 y	0,50 y	0,67 y	0,75 y	1,00 y	1,67 y	2,67 y
	Px Hoy	Flujo Financiero						
Letra 1	98,78%	100,00%						
Letra 2	96,09%				100,00%			
Letra 3	94,50%					100,00%		
Bono 1	103,08%			7,00%			7,00%	107,00%
Factor Descuento:		0,987800			0,960900	0,945000		
Tipo CCC:		5,03%	5,25%	5,39%	5,46%	5,82%		

Con los tipos cupón cero se extraen los factores de descuento:

		3 m	6 m	8 m	9 m	12 m	20 m	32 m
	Plazo	3 m	6 m	8 m	9 m	12 m	20 m	32 m
	FA	0,25 y	0,50 y	0,67 y	0,75 y	1,00 y	1,67 y	2,67 y
	Px Hoy	Flujo Financiero						
Letra 1	98,78%	100,00%						
Letra 2	96,09%				100,00%			
Letra 3	94,50%					100,00%		
Bono 1	103,08%			7,00%			7,00%	107,00%
Factor Descuento:		0,987800	0,974753	0,965605	0,960900	0,945000		
Tipo CCC:		5,03%	5,25%	5,39%	5,46%	5,82%		

Ahora queda determinar el tramo de curva desde los 12 meses a los 32, pero como no existen intrumentos tipo cupón cero para estos plazos, se debe calibrar la curva de tal manera que el factor de descuento a 20 meses (FD_{20m}) y el de 32 meses (FD_{32m}), sean aquellos que valoren el precio del bono según mercado, esto es que den un precio de 103,08 %, para ello se debe tener en cuenta que el valor del bono es la suma del valor presente de sus flujos de caja:

$$P_{B3} = \sum_{i=1}^{n-1} C_i FD_i + FD_n \left(100\,\% + C_n\right)$$

Donde:

FD_n: Es desconocido.

C_i: Es conocido 7 %.

P_{B3}: Es conocido 103,8 %.

FD_i: Son conocidos, menos FD_{n-1}, que debe ser estimado.

Por tanto se puede despejar FD_n de la expresión anterior como:

$$FD_n = \frac{P_{B3} - \sum_{i=1}^{n-1} C_i FD_i}{(100\,\% + C_i)} \tag{10.3}$$

Para explicar el la estimación de FD_{n-1}, se parte de que este factor de descuento es necesario para descontar el cupón intermedio del bono, y para ello lo que se supone es que la curva es plana, por lo que para 20_m, se asume (de momento) que el tipo cupón cero es el mismo que con 12_m. Esto es un punto de partida (semilla) para poder llegar a calibrar la curva.

Asumiendo que en 20 meses el tipo es el mismo que a los 12 meses, y fijando que el FD_n viene de la expresión 10.3, se puede llegar a obtener el tipo a 32 meses:

	Plazo	3 m	6 m	8 m	9 m	12 m	20 m	32 m
	FA	0,25 y	0,50 y	0,67 y	0,75 y	1,00 y	1,67 y	2,67 y
	Px Hoy	Flujo Financiero						
Letra 1	98,78%	100,00%						
Letra 2	96,09%				100,00%			
Letra 3	94,50%					100,00%		
Bono 1	103,08%			7,00%			7,00%	107,00%

Factor Descuento:	0,987800	0,974753	0,965605	0,960900	0,945000	0,910024	0,850033
Tipo CCC:	5,03%	5,25%	5,39%	5,46%	5,82%	5,82%	6,28%

$$FD_n = \frac{P_{B3} - \sum_{i=1}^{n-1} C_i FD_i}{(100\% + C_i)}$$

Aplicando que al tener el tipo a 12_m y el tipo a 32_m (este último pendiente de calibrar), el tipo a 20_m se podría calcular por medio de interpolación lineal. Si se realiza este cálculo, el resultado no coincide con el tipo estimado. Es en este momento cuando comienza la parte iterativa del Bootstraping. Se debe cambiar el dato para el tipo a 20_m, hasta que coincida con el dato interpolado.

Interpolando para 20_m, con los datos de 12_m y de 32_m, se itera hasta que coincide el tipo a calibrar (en rojo) con el tipo interpolado (en verde):

	Plazo	3 m	6 m	8 m	9 m	12 m	20 m	32 m
	FA	0,25 y	0,50 y	0,67 y	0,75 y	1,00 y	1,67 y	2,67 y
	Px Hoy	Flujo Financiero						
Letra 1	98,78%	100,00%						
Letra 2	96,09%				100,00%			
Letra 3	94,50%					100,00%		
Bono 1	103,08%			7,00%			7,00%	107,00%
Factor Descuento:		0,987800	0,974753	0,965605	0,960900	0,945000	0,906976	0,848525
Tipo CCC:		5,03%	5,25%	5,39%	5,46%	5,82%	6,033%	6,35%
							6,033%	

Pruebas				
CCC	5.82%	6,00%	6,10%	6,03%
Interp.	6.01%	6,03%	6,04%	6,03%

Con este valor para el dato a 20_m, también se ha calibrado el tipo a 32_m, de tal manera que este último tipo cupón cero, y todos los anteriores de la curva, valoran acertadamente cada uno de las letras y el bono propuesto para todos sus flujos. Extendiendo esta metodología de forma sistemática, según se van incluyendo diferentes instrumentos, la curva cupón cero ajustará de forma más acertada y precisa el riesgo del emisor, bien sea un gobierno, bien sea un emisor privado.

Parte IV

Introducción a la estadística

$\ltimes$

Capítulo 11

Estadística Descriptiva.

11.1. Variables y Distribución de Frecuencias.

El primer problema que aborda la estadística descriptiva, consiste en la descripción de los datos a partir de su información relevante, esto es, la obtención de resúmenes de la información que contienen los datos. Por otro se busca explicar el comportamiento que relaciona dos o más conjuntos de datos, también llamados muestras.

11.2. El modelo estadístico.

El modelo estadístico más frecuente es aquel que descompone los valores de la muestra como suma de dos valores, uno sistemático y otro puramente aleatorio.

$$Y = u + \mu$$

Donde u es la parte sistemática, determinista y previsible, y μ

es la parte estocástica no determinista, que recoge todos los factores y variables no contemplados en el modelo. Este modelo representa un modelo estático, ya que supone que u está completamente determinado. Lo habitual es que u sea variable con el tiempo, por tanto sea función de otro número indeterminado de variables tanto observables como no observables. Por tanto el modelo estadístico busca ser una aproximación a la realidad.

El proceso estadístico, parte de una recopilación de muestras, cálculo de resúmenes de la muestra y subsiguientes análisis.

11.3. Variable estadística.

La estadística descriptiva busca estudiar los datos, a través de una serie de resúmenes que sintetizan la información de la muestra.

Se pueden distinguir ciertos tipos de variables:

$$\text{Variables}\begin{cases}\text{Cualitativas} & \text{Describen atributos o cualidades}\\ \text{Cuantitativas} & \begin{cases}\text{Discretas} & \text{Valores enteros}\\ \text{Continuas} & \text{Valores en un intervalo}\end{cases}\end{cases}$$

La presentación de datos cualitativos, viene asociada con sus frecuencias de aparición

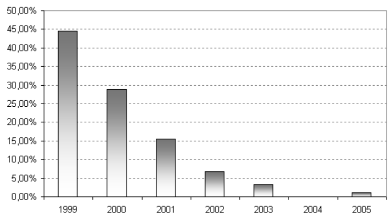
Precio de un Bono en un año		
Cualidad	Nº Repeticiones	Frec. relativa
Días de Subida de precio	200	54,8 %
Días de Bajada de precio	100	27,4 %
Días que repite el precio	65	17,8 %
	365	100,0 %

Cuadro 11.1: Datos Cualitativos

Una forma muy usada de representar estas frecuencias son los histogramas. Este tipo de gráfico muestra en formato de barras verticales, los intervalos o clases (eje de abscisas), y en el eje de ordenadas la altura de la barra indica la frecuencia relativa.

Impagos préstamos por año de concesión		
Año	Impagos	Frecuencia relativa
1999	40	44.44 %
2000	26	28.89 %
2001	14	15.56 %
2002	6	6.67 %
2003	3	3.33 %
2004	0	0.00 %
2005	1	1.11 %

Cuadro 11.2: Datos Histograma



Cuadro 11.3: Histograma

La representación en modo de histograma permite obtener mucha información de la muestra por simple observación, como se muestra en la figura 11.3.

11.4. Medidas de tendencia central.

11.4.1. Media.

$$\mathbf{E}\left(X\right)$$

Dado un conjunto de datos $\{x_1 \dots x_n\}$, se define como media aritmética como:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} \tag{11.1}$$

En caso de que se tengan valores por categorías, o agrupados en intervalos, la media se debe redefinir como:

$$\boxed{\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i} \tag{11.2}$$

Donde:

x_i: Es el punto medio del intervalo.

f_i: Es la frecuencia relativa de las ocurrencias que incluye el intervalo.

Ejemplo 45. *Dado el siguiente esquema de valores obtenga su media aritmética.*

{7,55 4,34 5,53 5,79 4,37 5,54 5,6 1,87 6,92 2,34}

La media viene de aplicar su fórmula:

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{10}(7,55+4,34+5,53+5,79+4,37+\\ &\quad +5,54+5,6+1,87+6,92+2,34) =\\ &= 4,985\end{aligned}$$

11.4.1.1. Anualizar rentabilidades:

Si se toman las rentabilidades logarítmicas, se puede anulaizar la rentabilidad media diaria, multiplicando esta por el número de días que tiene un año en bolsa (250 - 252).

$$R_y = N_{sesiones} \cdot \mathrm{E}\left[R_d\right] = 252 \cdot \overline{R}_d$$

Es sencillo ver la razón a partir de la definición de rendimiento logarítmico para un año es:

$$R_y = \ln\left(\frac{P_n}{P_0}\right)$$

El rendimiento medio diario es:

$$\begin{aligned}\overline{R}_d &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{P_i}{P_{i-1}}\right)\\ &= \frac{1}{n}\left[\ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right)+\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)+\cdots\right.\\ &\quad \left.\cdots+\ln\left(\frac{P_{n-1}}{P_{n-2}}\right)+\ln\left(\frac{P_n}{P_{n-1}}\right)\right]\end{aligned}$$

Desarrollando los logaritmos:

$$
\begin{aligned}
n\overline{R}_d &= \ln(P_1) - \ln(P_0) + \ln(P_2) - \ln(P_1) + \cdots \\
&\quad \cdots + \ln(P_{n-1}) + \ln(P_n) - \ln(P_{n-1})
\end{aligned}
$$

Los términos se eliminan y entonces:

$$
\begin{aligned}
n\overline{R}_d &= \ln(P_n) - \ln(P_0) \\
n\overline{R}_d &= \ln\left(\frac{P_n}{P_0}\right) = R_y
\end{aligned}
$$

Por tanto:

$$R_y = n\overline{R}_d$$

Si hay 252 sesiones en un año entonces $n = 252$.

11.4.2. Media ponderada.

La media ponderada usa ciertos pesos para dar más o menos importancia a los datos de la muestra. Dados unos dato $\{x_1 \ldots x_n\}$ con unos pesos $\{\omega_1 \ldots \omega_n\}$:

$$\boxed{\overline{x}_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \omega_i}{\sum_{i=1}^{n} \omega_i}} \tag{11.3}$$

Un ejemplo es el precio medio de cotización VWAP[1] es el precio medio de las operaciones en mercado, ponderado por el volumen transado.

[1] Volumen-Weighted Average Price

Ejemplo 46. *Dada la siguiente tabla de transacciones obtenga el precio VWAP.*

En este caso la el precio medio que se obtiene es 9.86, mientras que el medio ponderado 9.58.

Px	Volumen
10	1000
10.2	500
9.5	5000
10.1	200
9.5	5000

11.4.3. Media geométrica.

Dados unos datos $\{x_1 \ldots x_n\}$ se define media geométrica como:

$$\boxed{\overline{x}_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}} \tag{11.4}$$

Es interesante una de las propiedades de la media geométrica, relativa a que el logaritmo de la media geométrica es la media aritmética de los logaritmos de los valores de la variable, esto es:

$$\ln\left(\overline{x}_g\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(x_i\right)$$

11.4.4. Mediana y Moda.

La mediana es el valor x_j de la muestra $X = \{x_1 \ldots x_n\}$ tal que, ordenados los $\{x_1 \ldots x_n\}$, el 50 % de los datos es mayor que

x_j y el 50 % es menor que x_j, esto hace que la mediana sea el valor central de la muestra.

La moda es el valor más frecuente de la muestra.

11.4.5. Relación entre las medidas de medias.

La información que recoge cada una de las medias tiene un carácter diferente, así la media resulta muy sensible a valores extremos, o a observaciones atípicas, pero la mediana no se ve afectada por este tipo de datos, al usar menos información de la muestra. En el caso de la versión geométrica de la media, sólo tiene sentido en el caso de que todos los valores sean positivos, ya que si existe un número impar de elementos negativos, el resultado sería un número complejo, y si existe al menos un cero la media geométrica da cero.

11.5. Medidas de Localización: Cuantiles.

Existen ciertos valores de una muestra de datos que tienen cierta información relativa a la localización de todo el conjunto de datos, estos son los *cuantiles*.

Si se ordena una muestra de datos, se pueden extraer ciertos valores que dividen el conjunto de observaciones en partes iguales, así los cuantiles son los valores que dividen la muestra en intervalos que contienen el mismo número de observaciones.

Cuando el tamaño de la muestra es suficiente, se pueden obtener los siguientes cuantiles:

- Cuartiles: Son aquellos tres valores que dividen la muestra en cuatro partes.

- Deciles: Son los nueve valores que dividen la muestra en diez partes.
- Percentiles: Son los noventa y nueve valores que dividen la muestra en cien conjuntos de datos.

La idea para obtener estos cuantiles de cierta muestra de datos es la misma idea que para obtener la mediana, ya que esta misma medida, es a su vez el cuantil de menor orden, aquel que divide la muestra en dos.

1. Caso de datos no agrupados o en clases:

   a) Obtención de los cuartiles:

      1) Se ordena la muestra de los datos.
      2) Se localizan aquellos los cuartiles que son los valores que ocupan las posiciones determinadas por: $Q_n = {}^{kn}/_{4}$ con $k = 1, 2, 3$

   b) Obtención de deciles:

      1) Se ordena la muestra de datos.
      2) Se localizan aquellos los cuartiles que son los valores que ocupan las posiciones determinadas por: $Q_n = {}^{kn}/_{10}$ con $k = 1, \dots, 9$

   c) Obtención de los percentiles:

      1) Se ordena la muestra de datos.
      2) Se localizan aquellos los cuartiles que son los valores que ocupan las posiciones determinadas por: $Q_n = {}^{kn}/_{100}$ con $k = 1, \dots, 99$

2. Caso de datos agrupados en clases o intervalos.

a) Cuartiles:

1) Se localiza la clase i donde se encuentra el valor más cercano a $F_n = {}^{kn}\!/_4$ con $k = 1, 2, 3$, en la tabla de frecuencias acumuladas.

2) Se obtiene el cuartil de la expresión:

$$Q_j = L_i + \frac{\frac{kn}{4} - F_{i-1}}{f_i} a_i \begin{cases} L_i & \text{Límite Inferior intervalo.} \\ F_{i-1} & \text{Freq. Acumulada.} \\ f_i & \text{Frecuencia de clase.} \\ a_i & \text{Rango del intervalo.} \end{cases}$$

b) Deciles:

1) Se localiza la clase i donde se encuentra el valor más cercano a $F_n = {}^{kn}\!/_{10}$ con $k = 1, \ldots, 9$, en la tabla de frecuencias acumuladas.

2) Se obtiene el decil de la expresión:

$$Q_j = L_i + \frac{\frac{kn}{10} - F_{i-1}}{f_i} a_i \begin{cases} L_i & \text{Límite Inferior intervalo.} \\ F_{i-1} & \text{Freq. Acumulada.} \\ f_i & \text{Frecuencia de clase.} \\ a_i & \text{Rango del intervalo.} \end{cases}$$

c) Percentiles:

1) Se localiza la clase i donde se encuentra el valor más cercano a $F_n = {}^{kn}\!/_{100}$ con $k = 1, \ldots, 99$, en la tabla de frecuencias acumuladas.

2) Se obtiene el percentil de la expresión:

$$Q_j = L_i + \frac{\frac{kn}{100} - F_{i-1}}{f_i} a_i \begin{cases} L_i & \text{Límite Inferior intervalo.} \\ F_{i-1} & \text{Freq. Acumulada.} \\ f_i & \text{Frecuencia de clase.} \\ a_i & \text{Rango del intervalo.} \end{cases}$$

Ejemplo.

Clase	f_i	F_i
$(50, 60)$	8	8
$(60, 70)$	10	18
$(70, 80)$	16	34
$(80, 90)$	14	48
$(90, 100)$	10	58
$(100, 110)$	5	63
$(110, 120)$	2	65
N	65	

Con estos datos se pueden calcular unos cuantos cuantiles:

1. Primer Cuartil $F_1 = \frac{1 \times 65}{4} = 16{,}25$ por tanto $Q_1 = 60 + \frac{16{,}25 - 8}{10} 10 = 68{,}25$
2. Primer decil: $F_1 = \frac{1 \times 65}{10} = 6{,}5$ por tanto $D_1 = 50 + \frac{6{,}5 - 0}{8} 10 = 58{,}12$.
3. Percentil 35: $F_{35} = \frac{35 \times 65}{100} = 22{,}75$ por tanto $P_{35} = 70 + \frac{22{,}75 - 18}{16} 10 = 72{,}97$.

11.6. Medidas de dispersión.

11.6.1. Rango.

Se define rango como la diferencia entre el valor máximo y mínimo de la muestra. Da cierta idea inicial a la hora de comparar dos muestras de datos de un mismo experimento. Por ejemplo los rango de los datos del IBEX35 para cierto día dado el máximo 10758,1 y el mínimo 10632,0 sería de 126,1 puntos de índice. Comparar rangos de muestras homogéneas, por ejemplo, comparar los rangos del Ibex 35 entre sesiones puede dar una idea del recorrido que hay en los datos. El problema del rango es que se ve muy afectado por valores demasiado altos o bajos, por lo que el rango de la muestra es una medida muy poco robusta.

11.6.2. Varianza.

La varianza es un promedio de las distancias a la media de la muestra, para que estas distancias no se anulen, se elevan al cuadrado obteniendo un valor positivo.

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X)^2$$

$$\boxed{V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \tag{11.5}$$

Su versión en el caso de disponer de una muestra agrupada en clases junto con sus respectivas frecuencias sería:

$$\boxed{V(x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 f_i} \tag{11.6}$$

11.6.2.1. Desviación típica.

Debido a que las unidades de la varianza son el cuadrado de la unidad en la que se expresan los elementos de la muestra, resulta más conveniente expresar la muestra, su media y una medida de dispersión sobre esta media, en las mismas unidades.

Por ello se define desviación típica como la raíz cuadrada de la varianza:

$$s = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \tag{11.7}$$

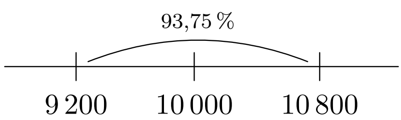
La información que aporta a desviación típica resume lo dispersos que están los valores de la muestra con respecto a la media. Además, si se toman de forma conjunta la media y la desviación típica, se puede precisar que entre la media y $\pm m$ veces la desviación típica se tienen un porcentaje de observaciones que viene dado por la desigualdad de $Tchebychev$:

$$100\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)\,\%$$

Por lo tanto, si una muestra tiene como media 10 000 y una desviación típica de 200, para un intervalo de 4 desviaciones típicas se tendrá un número de observaciones no inferior a:

$$100\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\,\% = 93{,}75\,\%$$

Siendo el rango de datos:



11.6.2.2. Volatilidad

Es la desviación estándar de las rentabilidades de un activo financiero. Es necesario disponer de las rentabilidades diarias, y luego obtener su media y su desviación típica.

Si los rendimientos se calculan bajo su forma logarítmica la distribución de los mismos es Normal (sigue una distribución Normal).

La volatilidad es la primera medición del riesgo de una inversión.

Si se parte de rendimientos diarios, se obtiene volatilidad diaria, para obtener volatilidad a otros plazos, y asumiendo Normalidad en los rendimientos se puede llegar a que:

$$\mathrm{Vol}_n = \mathrm{Vol}_{1d}\sqrt{N}$$

Note el lector que en un mes hay 20 sesiones de bolsa, y en un año (según sea el convenio) hay 250, 252, 255, etc., si bien se suele tomar 252 como días de un año bursátil para anualizar la volatilidad diaria.

11.6.3. Coeficiente de variación.

Se define coeficiente de variación como:

$$CV = \frac{s}{\overline{x}} \tag{11.8}$$

Es un promedio de la dispersión relativo al valor $\overline{x}$, que indica el error promedio con respecto a la cantidad medida.

11.6.4. Ratio de Sharpe

Se trata del cociente de la rentabilidad a la que se le ha restado el tipo libre de riesgo y la volatilidad de un activo financiero. Sirve para poder comparar activos con distintos perfiles de riesgo.

Indica el diferencial de rentabilidad obtenido sobre el activo libre de riesgo por unidad de riesgo asumido. Otra forma de interpretarlo, es la cantidad de riesgo que hay que asumir para incrementar la rentabilidad.

$$r_{Sharpe} = \frac{\mathrm{E}\left[R\right] - R_f}{\sigma} \tag{11.9}$$

Donde:

$\mathrm{E}\left[R\right]$: Es la esperanza de los rendimientos del activo, po ejemplo rendimiento anualizado.

R_f: Es el rendimiento del activo libre de riesgo.

σ: Es la volatilidad al horizonte de los rendimientos.

En caso de tener dos inversiones, teniendo cada una de ellas un rendimiento $\mathrm{E}\left[R_i\right]$ y disponiendo de un activo libre de reisgo de referencia R_f, la inversión con el ratio de Sharpe más alto proporciona mayor retorno para un mismo nivel de riesgo.

Si se pinta rentabilidad ajustada por la tasa libre de riesgo frente a volatilidad, entonces el ratio de Sharpe es la pendiente entre el punto y el origen. Así, a mayor pendiente (Ratio de Sharpe más alto) se obtiene una mayor rentabilidad asumiendo el mismo riesgo que para una inversión con menor ratio de Sharpe.

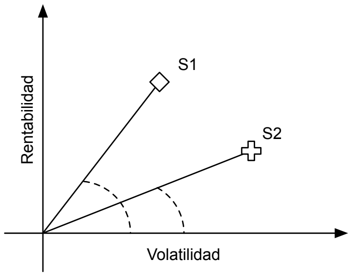


Figura 11.1: Sharp Como Pendiente.

11.7. Momentos de orden superior.

11.7.1. Asimetría y curtosis

La varianza es un momento de segundo orden que mide la dispersión con respecto a la media. Se pueden definir momentos de orden superior (tercer y cuarto orden) que resumen otras características de los datos de la muestra.

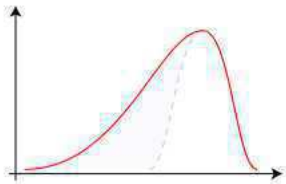


Figura 11.2: Asimetría

El momento de tercer orden es la asimetría, que indica el grado de asimetría que tiene la distribución de frecuencias en la muestra (lo asimétrico que resulta su histograma).

El valor del coeficiente de asimetría puede ser positivo, negativo o cero, en virtud a que está elevado el numerador, a una potencia impar que conserva el signo de la resta interna. Por tanto se pueden distinguir tres posibles simetrías:

- Asimetría Negativa: hay un peso mayor de observaciones en valores bajos, por lo que la cola de la izquierda de la distribución de frecuencias es más alta.

- Asimetría Positiva: hay un peso mayor de observaciones en valores altos, por lo que la cola de la derecha de la distribución de frecuencias es más alta.

- Asimetría Cero: La distribución de los valores de la muestra resulta igual de probable a ambos lados de la media.

El momento de tercer orden es se define como:

$$\mu_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^3$$

Como este momento no está en las mismas unidades que los datos de la muestra se divide por s^3 para dar un número comparable en unidades. A este número se le conoce como coeficiente de asimetría:

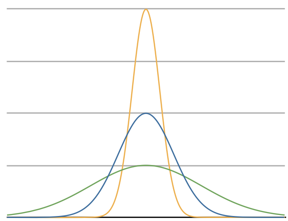


Figura 11.3: Curtosis

$$As = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^3}{ns^3} \tag{11.10}$$

El momento de cuarto orden o curtosis, mide el apuntamiento de la distribución de frecuencias de los valores de la muestra, esto es, el grado de concentración de los valores en cuanto a posibilidad de ocurrencia.

El momento de cuarto orden se define como:

$$\mu_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^4$$

Como este momento no está en las mismas unidades que los datos de la muestra se divide por s^4 para dar un número comparable en unidades. A este número se le conoce como coeficiente de curtosis:

$$Cu = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^4}{ns^4} - 3 \tag{11.11}$$

La cutosis de la distribución de los datos de diferentes muestras, sirve para comparar dos distribuciones con la misma varianza o desviación típica, y mide la concentración de valores extremos, o el apuntamiento, de la serie.

Véase el siguiente ejemplo:

Dada la siguiente tabla con los valores de cierta muestra. Se pide que calcule los momentos de segundo orden (Varianza/Desviación típica), el momento de tercer orden (coeficiente de asimetría), y el momento de cuarto orden (curtosis).

X_i	$(x_i - \overline{x})^2$	$(x_i - \overline{x})^3$	$(x_i - \overline{x})^4$
2	4	-8	16
4	0	0	0
8	16	64	256
2	4	-8	16
$\overline{x} = 4$	$s = 2{,}45$	$As = 0{,}82$	$Cu = -1$
$S^2 = 6$			

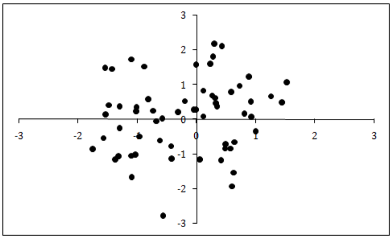
11.8. Varias variables.

Cuando se dispone de conjuntos de datos de varias variables, como por ejemplo, las cotizaciones del oro y de la plata, se dispone de resúmenes que permiten entender si existe relación entre dichas variables, y el grado de la misma.

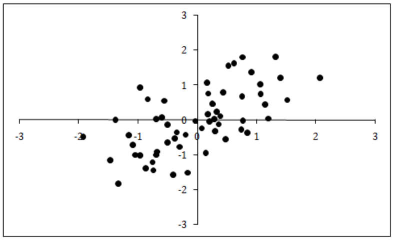
De esta manera se entenderá que dos variables están relacionadas si varian de forma conjunta. La forma de variación puede ser de forma directa, esto es si una crece la otra también, o de forma inversa, si una crece, la otra decrece.

Se entiende covarianza y correlación, como medidas de o coeficientes que indican el grado de relación entre las variaciones de las variables. Cuantifican el grado en el que ambas variables varian de *forma lineal* conjuntamente.

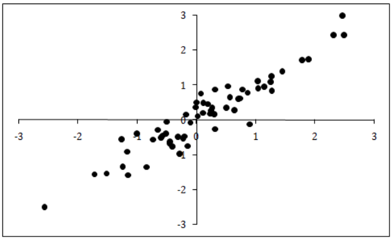
Para medir de forma gráfica esta posible relación se pintan los datos en diagramas de dispersión.



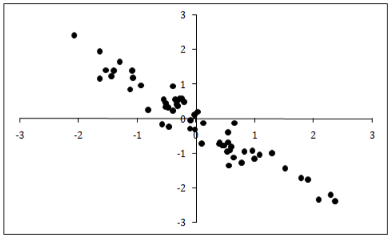
(a) Incorrelado



(b) Poca Relación



(c) Relación Positiva



(d) Relación Negativa

Figura 11.4: Tipos de co-relación.

Se define covarianza como:

$$\text{Cov}\left(X,Y\right) = \mathbf{E}\left(XY\right) - \mathbf{E}\left(X\right)\mathbf{E}\left(Y\right)$$

$$\text{Cov}\left(X,Y\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right) \tag{11.12}$$

Se define correlación como:

$$\text{r} = \frac{\text{Cov}\left(X,Y\right)}{\sigma_x \sigma_y} \tag{11.13}$$

Este coeficiente de correlación o de Pearson, es un valor acotado en el intervalo $[-1,+1]$.

Nótese que existen ciertas apreciaciones que deben tenerse muy en cuenta:

- La correlación no es una medida de proporción, esto es, $r = 75\,\%$ no indica que haya un 75 % de varianza común.

- No es necesario que las variables x e y estén en las mismas unidades, esto es, puede ser PIB frente a producción de CO_2, o rendimiento del petróleo frente a número de fletes de barcos, etc.

- No indica medida de fuerza, esto es, un coeficiente de correlación del $70\,\%$ no indica que se tenga el doble de relación que si se tiene una correlación del 35 %.

- La correlación pone de manifiesto la posibilidad de cierta relación entre dos variables, si bien, no debe interpretarse como demostración de la existencia de causalidad entre ambas variables, esto es, no demuestra que una variable sea causa de la otra.

Por otro lado, resulta ventajoso disponer de una medida que indique, de forma simple cuantas variaciones en una muestra explican las variaciones en la otra, esto se obtiene por medio del *coeficiente de determinación*.

Así, se define coeficiente de determinación como:

$$\text{Coef. de Determinación} = r^2 \tag{11.14}$$

Así si para un par de muestras (x, y), se dispone de un $r = 60\,\%$, entonces $r^2 = 36\,\%$, esto indica que sólo 36 de cada 100 variaciones entre los datos de x se expican por variaciones en y.

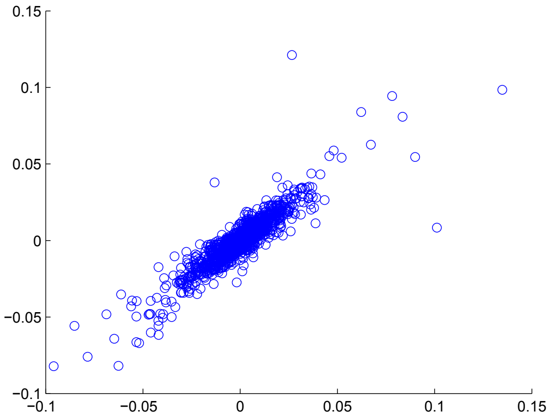


Figura 11.5: Ejemplo Relación Log-rendimientos Ibex35 y EuroStoxx 50

11.9. Riesgo y Cartera.

Dados los estadísticos anterires siempre se pueden aplicar a un instrumento financiero, como puede ser una acción, de tal manera que podamos ecrar cual es su log-rendimiento medio anualizado, el riesgo asociado por medio de la desviación típica o volatilidad anualizada, pero el problema surge cuando se tiene más de una acción.

Como el objeto de este manual es servir de introducción a las matemáticas financieras, se acota el problema a tener únicamente dos acciones en cartera, puesto que la versión más general complica con rudimentos matemáticos una idea muy simple:

LA INTRODUCCIÓN DE NUEVOS INSTRUMENTOS EN CARTERA HACE QUE SE REDUZCA EL RIESGO: DIVERSIFICAR ES BUENO.

Veamos el porqué.

Para ello es necesario definir el problema, así pues, se tendrá una cartera formada por unas cantidades N_A y N_B a precios de mercado S_A y S_B de dos acciones A y B. Por tanto se tiene unEfectivo total de $S_C = S_A{\cdot}N_A + S_B{\cdot}N_B$.

Los pesos de las acciones serán:

$$\text{Pesos}\begin{cases}\omega_A; & \omega_A = \frac{S_A N_A}{S_A N_A + S_B N_B}\\ \omega_B; & \omega_B = \frac{S_B N_B}{S_A N_A + S_B N_B}\end{cases}$$

Por otro lado conocemos el rendimiento medio anualizado de cada activo:

$$\text{Rendimiento}\left\{\begin{matrix}\overline{x}_A\\ \\ \overline{x}_B\end{matrix}\right\rangle \text{Cartera: } \bar{x}_C = \omega_A \overline{x}_A + \omega_B \overline{x}_B$$

Y conocemos su volatilidad anualizada

$$\text{Volatilidad}\begin{cases}\sigma_A\\ \\ \sigma_B\end{cases}$$

Por tanto interesa conocer el rendimiento medio anualizado de la cartera:

$$\begin{aligned}\overline{X}_C &= \mathbf{E}\left(\omega_A x_A + \omega_B x_B\right)\\ &= \mathbf{E}\left(\omega_\mathbf{A} \mathbf{x_A}\right) + \mathbf{E}\left(\omega_B x_B\right)\\ &= \omega_A \mathbf{E}\left(\mathbf{x_A}\right) + \omega_B \mathbf{E}\left(x_B\right)\\ &= \omega_A \overline{x}_A + \omega_B \overline{x}_B\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{X}_C = \omega_A \overline{x}_A + \omega_B \overline{x}_B} \tag{11.15}$$

La varianza (volatilidad al cuadrado) de la cartera vendrá como:

$$\boxed{\sigma_C^2 = \omega_A^2\sigma_A^2 + \omega_B^2\sigma_B^2 + 2\left[\omega_A\omega_B\right]\left[\sigma_A\sigma_B\right]\left[\rho_{AB}\right]} \qquad (11.16)$$

La ecuación anterior tiene la siguiente demostración:

Varianza de una cartera de dos intrumentos: Se debe tener en cuenta la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(X+Y) &= \mathbf{E}\left[(X+Y)^2\right] - \left(\mathbf{E}\left[(X+Y)\right]\right)^2 \\
&= \mathbf{E}\left[X^2+Y^2+2XY\right] - \left[\mathbf{E}(X)+\mathbf{E}(Y)\right]^2 \\
&= \mathbf{E}\left(X^2\right) + \mathbf{E}\left(Y^2\right) + 2\mathbf{E}(XY) + \\
&\quad -\mathbf{E}(X)^2 - \mathbf{E}(Y)^2 - 2\mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y) \\
&= \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)
\end{aligned}$$

.

Por tanto como ρ_{AB} es un número acotado, se puede elegir el conjunto de activos de tal manera que la inclusión del nuevo activo disminuye la volatilidad de la cartera.

En clase discutiremos las razones más tangibles de porqué ocurre esto.

Ejemplo 47. *Suponga una cartera compuesta por dos instrumentos de los que se tiene unos pesos de* $\omega_A = 20\,\%$, $\omega_B = 80\,\%$, *rendimientos anualizados de* $\overline{x}_A = 12\,\%$, $\overline{x}_B = 23\,\%$, *volatilidad anualizada de* $\sigma_A = 20\,\%$, $\sigma_B = 40\,\%$ *y finalmente una correlación de* $\rho_{AB} = 50\,\%$, *el rendimiento de la cartera y su riesgo es:*

Rendimiento según la expresión 11.15:

$$\overline{x}_C = 20\,\% \times 12\,\% + 80\,\% \times 23\,\%$$

$$\boxed{\overline{x}_C = 20,80\,\%}$$

Volatilidad de la cartera según la expresión 11.16:

$$\begin{aligned}\sigma_C^2 &= \overbrace{(20\,\% \times 20\,\%)^2}^{(\omega_A\sigma_A)^2} + \overbrace{(80\,\% \times 40\,\%)^2}^{(\omega_B\sigma_B)^2} + \\ &+ 2 \times \underbrace{50\,\%}_{\rho_{AB}} \times \underbrace{20\,\%}_{\omega_A} \times \underbrace{80\,\%}_{\omega_B} \times \underbrace{20\,\%}_{\sigma_A} \times \underbrace{40\,\%}_{\sigma_B}\end{aligned}$$

$$\boxed{\sigma_C = 34,18\,\%}$$

Según la cantidad de activo A y de activo B, para un mismo valor de correlación ρ_{AB}, se tienen diferentes puntos de rentabilidad y riesgo, esto es, si se varia la cantidad ω_A, como $\omega_B = 100\,\% - \omega_A$, se tienen pares $(\overline{x}_C, \sigma_C)$ que se pueden pintar.

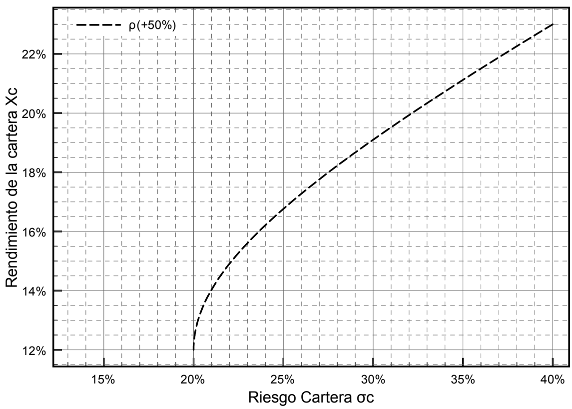


Figura 11.6: Rentabilidad y Riesgo para una cartera.

Si se varía la correlación, por ejemplo para tres valores ($\rho = -50\,\%$, $\rho = 0\,\%$, ρ
se obtienen diferentes curvas.

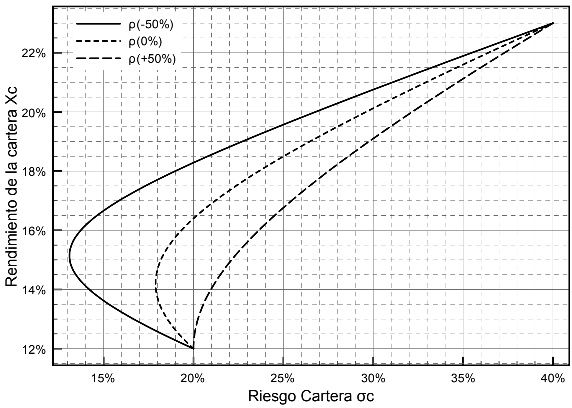


Figura 11.7: Rentabilidad y Riesgo para una cartera diferente correlación.

Con una correlación menor se puede obtener una cartera con menos riesgo que con una misma proporción de activos con una mayor correlación, por ello se trata de buscar activos que bajo una rentabilidad parecida, tengan una correlación baja o negativa, que asegura carteras con rendimiento similar pero con riesgo menor.

Entonces, dada una correlación calculada (suponga que con suficientes datos históricos) entre dos activos, aparece la cuestión natural de calcular la proporción óptima entre los diferentes elementos de la cartera que ofrecen una máxima rentabilidad, asumiendo el menor riesgo posible.

Anteriormente se ha relacionado la rentabilidad y el riesgo de la cartera por medio del ratio de Sharpe (expresión 11.9), y aquella invesión que tenga un mayor ratio de Sharpe será la mejor en relación a la rentabilidad y el riesgo. Además se indicó que el ratio se Sharpe es una pendiente, por tanto se debe buscar aquella relación de ratio de Sharpe máxima, o lo que es lo mismo la máxima pendiente. Este concepto traducido a las figuras 11.6 y 11.7, consiste en encontrar la línea tangente de máxima pendiente desde el origen.

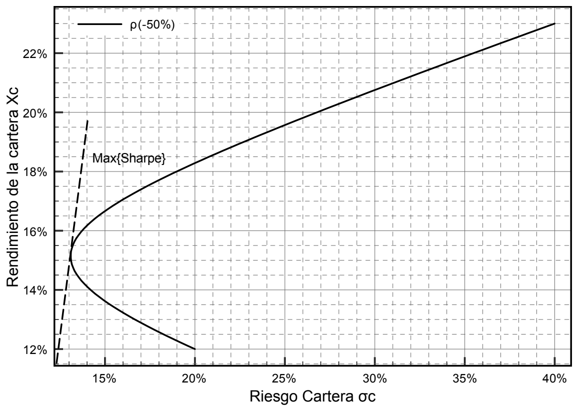


Figura 11.8: Tangente a la curva de Ratio de Sharpe.

Decir lo anterior es lo mismo que decir que se debe maximizar el ratio de Sharpe de la inversión:

$$\text{máx}\left\{r_{Sp}\right\} = \text{máx}\left\{\frac{\overline{x}_C - R_{tlr}}{\sigma_C}\right\}$$

Para ello se debe encontrar el punto de mínimo riesgo, esto es minimizar el denominador. Al minimizar el denominador se tendrá un valor para el peso de uno de los activos que nos lleva al punto de mínimo riesgo, en este caso y con la relación con el otro peso, se obtiene la cartera óptima.

$$
\begin{aligned}
\text{mín}\{\sigma_C\} \quad &\rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_C}{\partial \omega_A} = 0 \\
\text{mín}\{\sigma_C\} \quad &\rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_C}{\partial \omega_B} = 0
\end{aligned}
$$

Además se debe recordar que:

$$\omega_B = 1 - \omega_A$$

Derivando y operando se llega a que:

$$\boxed{\omega_A = \frac{\sigma_B^2 - \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B}} \tag{11.17}$$

$$\boxed{\omega_B = \frac{\sigma_A^2 - \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B}} \tag{11.18}$$

Este mismo concepto es extensible a múltiples activos. El problema de encontrar al cartera óptima en casi de múltiples activos, es sin duda un problema de dimensión superior, al entrar en juego las matrices de correlación entre los activos de la cartera, además de que el problema crece en dificultad según crece el numero de activos. Para resolver este problema, se usan métodos numéricos por medio de selección de pesos de forma aleatoria y calcular el ratio de Sharpe para estos valores, y repetir el proceso muchas veces hasta dar con unas proporciones cuyo ratio de Sharpe sea suficientemente alto. Existen otros métodos de reducción de dimensiones del problema, pero exceden el ámbito y objetivo del presente escrito.

11.10. Problemas.

Problema 47. *Seleccione dos activos de los que pueda obtener al menos dos años de datos históricos sobre precios y calcule los estadísticos estudiados en este tema, sobre sus log-rentabilidades diárias.*

Por otro lado, obtenga rendimiento anualizado medio y volatilidad anualizada de cada muestra.

Problema 48. *Dado el Excel con los datos históricos de ciertas acciones, calcule los rendimientos diarios de cada uno de los valores, y sobre estos datos, obtenga el rendimiento diario, la volatilidad diaria, la anual, y el resto de medidas como asimetría y apuntamiento.*

Problema 49. *Con los datos del archivo excel adjunto, y los datos de los valores de volatilidad haced un gráfico donde se compare rentabilidad diaria y volatilidad. ¿Qué activos se comportan mejor? ¿Cuáles escogerías?*

Problema 50. *Un fondo de inversión da las siguientes rentabilidades contínuas durante cinco meses consecutivos: -2 %, 3 %, 4 % ,1 %, 2 %. Calculad rentabilidad media y volatilidad del fondo, en base a estos datos. Calculad las otras medidas de valor central y riesgo que hemos estudiado.*

Problema 51. *Con los datos suministrados en Excel, calculad los ratios de sharpe basados en los datos históricos, y representad gráficamente los ctivos en base a su riesgo y rentabilidad. ¿Cuáles* *escogerías? (suponed que el tipo libre de riesgo es 1 % contínuo anual)*

Problema 52. *La rentabilidad media diaria de un activo es de 0.02 %. Calculad la rentabilidad mensual y anualizada, suponiendo que esa rentabilidad media es contínua y no-contínua. Si invertimos 100 euros durante un año, ¿cuál es nuestra revalorización media?*

Problema 53. *Tenemos una cartera de 100 acciones de Acciona compradas en 85 euros y de 800 acciones de BBVA compradas a 10,1 euros. La tabla siguiente nos da los valores que tenían estas dos cotizaciones al final de cada uno de los nueve meses siguientes. Aplicad base 100 para poder realizar una comparativa de la evolución. ¿Qué valor ha subido (o caído) más?*

Acciona	*BBVA*
85,00	*10,10*
57,38	*9,81*
83,10	*9,62*
87,09	*9,86*
87,00	*9,92*
95,61	*10,20*
83,64	*10,10*
83,81	*10,02*
83,47	*10,05*

Parte V

Probabilidad y Distribuciones

Capítulo 12

Probabilidad, Variable Aleatoria y Distribuciones de Probabilidad.

12.1. Introducción a la probabilidad.

En primer lugar, sería necesario argumentar porqué es necesario el uso de la probabilidad como herramienta de modelización, soporte, etc, dentro del entorno financiero si los participantes del mismo, como actores racionales, tendrán motivaciones y en virtud de estas realizarán acciones basadas en dos racionales financieros, o ganar o no perder (codicia y pánico). Al ser un elemento asumido, que de forma natural subyace al entendimiento de los mercados financieros, no se suele argumentar que un activo en bolsa, cambia su valor de forma aleatoria, si bien esta aleatoriedad viene como resultado de la acción conjunta de los participantes del mercado, que toman sus decisiones racionales (o en menor número de veces, irracionales) en virtud de su comprensión de la información (asimétrica) que reciben, y en momentos distintos del tiempo. Este tipo de comportamiento, no es predecible, pues no lo son las decisiones humanas según el entendimiento de la información y la motivación de cada cual. Por todo esto el comportamiento de los niveles de los instrumentos financieros queda dentro del mundo estocástico, siendo esta la razón más natural complementar con la teoría de probabilidad y de modelos el estudio de las matemáticas financieras.

Una forma de entender el término probabilidad es mediante la asimilación como el límite de la frecuencia de aparición de cierto suceso. Cuando el experimento tiene la posibilidad de repetirse muchas veces la ocurrencia de los sucesos del experimento irá convergiendo a algo, un valor, una curva, etc. Suponga que tenemos una moneda con cara y con cruz, si el experimento consiste en tirar la moneda y apuntar el resultado, se puede ir llevando el censo de las veces que aparece la cara o la cruz. La frecuencia de aparición de "cara" se calcula como el número de veces que aparece cara dividido por el número de veces que se ha repetido el experimento, y la frecuencia de aparición de "cruz" se calcula como el número de veces que aparece cruz dividido por el número de veces que se ha repetido el experimento.

$$\begin{aligned} f_{cara} &= \left(\frac{n_{cara}}{n_{total}}\right) \\ f_{cruz} &= \left(\frac{n_{cruz}}{n_{total}}\right) \\ n_{total} &= n_{cara} + n_{cruz} \end{aligned}$$

Al principio, cuando el número de veces que se repite el ex-

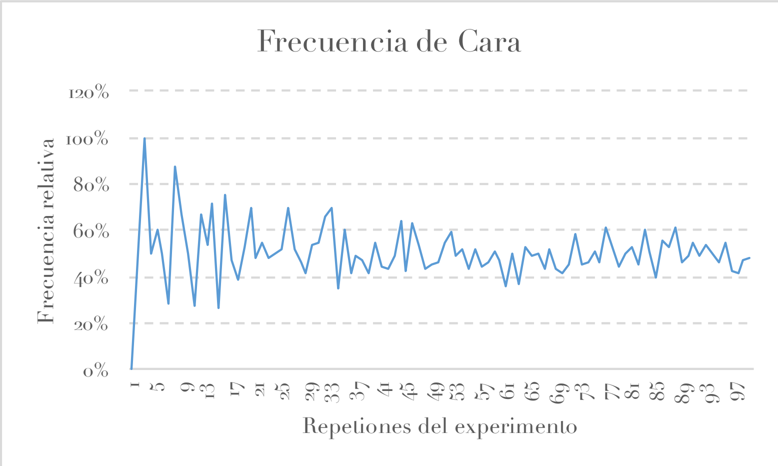


Figura 12.1: Experimento de la moneda: Cara y Cruz

perimento es bajo, no queda claro ver el valor al que tienden las frecuencias relativas. Según aumenta el número de observaciones $n \to \infty$, las frecuencias relativas van tendiendo a valor límite en torno al 0,5 (50 %). Esto lleva a pensar que la aparición del evento "cara" o "cruz" tiende a ocurrir con una probabilidad del 50 % en ambos casos. De esta manera se está asumiendo que la probabilidad se puede definir como el valor límite de la frecuencia relativa de cierto suceso siempre que el experimento se pueda repetir un número suficiente de veces.

Observe ahora para el caso de sucesos dentro del ámbito financiero. Un suceso posible puede ser, "rentabilidad diaria de al menos 10 %", se puede analizar este suceso para darle una frecuencia relativa y por tanto, en el límite una probabilidad.

Esta forma de definir la probabilidad tiene problemas asociados, si bien resulta intuitiva, y permite explicar ciertas exigencias que debería cumplir el concepto de "probabilidad". Algunos de los problemas que tiene la definición de probabilidad como límite de frecuencia relativa podrían ser:

1. El sistema, todos los sistemas a estudio (piense en la bolsa) cambia con el paso del tiempo, la velocidad de cambio depende del sistema y de la información relevante, que es capaz de absorber. Al cambiar el sistema lo hacen las frecuencias relativas, y por tanto las probabilidades, haciendo que las mediciones anteriores carezcan de la misma validez.

2. No es posible hacer tantas repeticiones como resulta necesario, para asegurar que las frecuencias relativa llegan a converger a un valor cercano y estable a la probabilidad. Imagine que se quiere calcular la probabilidad de que explote una central nuclear. No parece razonable "probar o repetir" muchas veces (o ninguna) el experimento para determinar esta frecuencia relativa.

Por ello es más conveniente definir la probabilidad como una suerte de incertidumbre, con un valor que vendrá determinado por la frecuencia relativa, en el caso de que el experimento se pueda repetir tantas veces como sea necesario, y por otro tipo de información, cuando no sea posible repetir el experimento el número de veces deseado. Por otro lado, las propiedades que tiene que tener la probabilidad vienen explicadas de considerar la probabilidad como un límite de la frecuencia relativa de ocurrencia de cierto suceso.

12.1.1. Propiedades de la Probabilidad.

- La probabilidad de que ocurra un suceso C resulta en un valor entre 0 y 1, al igual que la frecuencia relativa de un suceso sólo puede estar entre 0 y 1.

$$0 \leq P(C) \leq 1 \tag{12.1}$$

- Cuando se tiene absoluta certeza en la ocurrencia de un suceso K, la probabilidad de que ocurra K será 1. $P(K) = 1$

- Si dos sucesos son excluyentes, como en el caso del experimento de la moneda, que ocurra el suceso de CARA $[C]$ excluye totalmente la ocurrencia de CRUZ $[X]$, la probabilidad de que ocurra uno u otro, esto es la suma de las probabilidades. Si se asemeja al caso de la frecuencia relativa de caras y cruces, al ser excluyentes, si del experimento se concluye que la probabilidad de cara es del 40 %, es natural adelantar que la probabilidad de cruz es del 60 %, porque la probabilidad de cara o de cruz es el 100 %, siempre se obtendrá o uno u otro de los resultados.

$$P(C + X) = P(C) + P(X)$$

- Si dos sucesos no son totalmente excluyentes, esto es que puede ocurrir el suceso A y no el suceso B, o puede ocurrir el suceso B pero no el suceso A, o puede ocurrir A y B a la vez. La probabilidad de A o B vendría como:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

  - Razonamiento a partir de las frecuencias relativas: Si el número de ocurrencias las entendemos como:
    - $n_{A\overline{B}}$: Número de veces que ocurre el suceso A pero

no el B.

- ◇ $n_{\overline{A}B}$: Número de veces que ocurre el suceso B pero no el A.
- ◇ n_{AB}: Número de veces que ocurre el suceso A y el B.
- ◇ Entonces:
  - ▷ n_A: Número de veces que ocurre el suceso A se puede calcular como las veces que ha ocurrido A y B más las veces que ha ocurrido A pero no B. $n_A = n_{AB} + n_{A\overline{B}}$
  - ▷ n_B: Número de veces que ocurre el suceso B se puede calcular como las veces que ha ocurrido A y B más las veces que ha ocurrido B pero no A. $n_A = n_{AB} + n_{\overline{A}B}$
  - ▷ n_{A+B}: Número de veces que ha ocurrido A o B se puede calcular como las veces que ha ocurrido A y B más las veces que ha ocurrido A pero no B más las veces que ha ocurrido B pero no A, esto es: $n_{A+B} = n_{AB} + n_{A\overline{B}} + n_{\overline{A}B}$, que operando con las expresiones anteriores se puede expresar n_{A+B} en función de n_A, n_B y n_{AB}:

$$n_{A+B} = n_A + n_B - n_{AB}$$

Dividiendo por el número total de ocurrencias en ambos lados llegamos frecuencias relativas:

$$f_{A+B} = f_A + f_B - f_{AB}$$

Que llevado a las probabilidades queda como:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{12.2}$$

Ejemplo 48. *¿Cuál es la probabilidad de sacar en la baraja española un oros o un caballo sacando una carta?*

La baraja española consta de 40 cartas, de las cuales 10 son oros, y hay 4 caballos, uno de ellos de oros. Por tanto:

$$\begin{aligned} P(oro\,ó\,caballo) &= P(oro + caballo) \\ &= P(oro) + P(caballo) - P(oro\,y\,caballo) \end{aligned}$$

$$= 25\,\% + 10\,\% - (25\,\% \times 10\,\%) = 32{,}5\,\%$$

12.1.2. Probabilidad y Condicionamiento.

Cuando los sucesos ocurren en diferentes momentos del tiempo, pueden darse situaciones en las que la información del resultado del sorteo anterior aporte información para los siguientes experimentos. Suponga que un experimento consiste en un juego por el que se presentan tres puertas y se le propone seleccionar una de ellas, en todo momento usted sabe que sólo una de ellas esconde el premio y el resto no tienen nada. Si se abre una de las puertas que usted no ha elegido y resulta que detrás de esta puerta no hay nada ¿cree que esta información es relevante para usted en este contexto? Ciertamente es totalmente natural concluir afirmativamente, ya que en la primera vez que usted eligió la probabilidad de acertar era de $^1/_3$, esto es $33\,\%$, mientras que cuando se abre la puerta que no ha elegido y resulta que no hay premio, parece que ahora la posibilidad de ganar pasa a un 50 %.

Otro ejemplo de esto, son los juegos de cartas. Queda claro que saber las cartas que va recibiendo varia la probabilidad al aportar más información relevante al proceso. La probabilidad condicionada se marca en cuestiones como ¿qué probabilidad hay de que me den un rey, en una baraja española, si ya han salido 2 y se han repartido 10 cartas?, toda la información de la pregunta es relevante para determinar la probabilidad con la que se repartiría uno de los dos reyes que quedan por salir en la baraja.

Desde un punto de vista de frecuencia relativa, considere un experimento que puede dar lugar a dos resultados A, B, se puede modelar la frecuencia relativa de A condicionada a la ocurrencia de B, contando aquellas ocasiones en las que que habiendo ocurrido B y apuntando en aquellos casos en los que ocurre A. Esto resulta de ver las veces que ha ocurrido tanto A, como B, en relación a las veces que ha ocurrido B, esto es,

$$f(A|B) = \frac{n_{AB}}{n_B}$$

Si bien se puede expresar esta frecuencia condicionada en relación a otras frecuencias relativas, ya que:

$$\begin{aligned} f(A) &= \frac{n_A}{n} \\ f(B) &= \frac{n_B}{n} \\ f(AB) &= \frac{n_{AB}}{n} \end{aligned}$$

Por tanto la frecuencia condicional en relación a las frecuencias relativas del experimento vendrá como:

$$f(A|B) = \frac{f(AB)}{f(B)}$$

Finalmente extrapolando como se está haciendo hasta ahora, en términos de probabilidad, la *probabilidad de que ocurra el suceso A condicionado a otro suceso B,* se puede escribir como:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{12.3}$$

Note el lector que se puede expresar la probabilidad de que suceda A y B, como $P(AB)$, o bien como $P(A \cap B)$.

Ejemplo 49. *La Paradoja del Falso Positivo[8].*

Suponga una muestra de personas a las que tras haber hecho las suficientes pruebas, se puede tener la certeza de que de cada 100 personas estudiadas 1 de ellas tiene cierta enfermedad y 99 no la tiene. Se propone cierta prueba rápida para identificar la enfermedad y se pretende verificar si esta prueba rápida es suficientemente exigente como para aceptarla. En concreto, esto supone que con una alta probabilidad, cuando al practicar la prueba rápida sobre un paciente y siendo el resultado de la prueba positivos, este paciente esté realmente enfermo. En otras palabras, se quiere entender cual es la probabilidad de que un individuo esté realmente enfermo SI el resultado de la prueba es positivo.

En este escenario queda claro que la probabilidad de que al seleccionar uno de los individuos de la muestra, este individuo esté enfermo será de un 1 % ($P_{enfermo} = 1\,\%$), mientras que la probabilidad de que esté sano será del 99 % ($P_{sano} = 99\,\%$).

Suponga que del estudio de la aplicación de la prueba se con-

cluye que hay un 1 % de probabilidad de que sea un falso positivo, esto es, que la prueba ha dado positivo sabiendo (condición) que el paciente está sano.

$$\begin{aligned} P\left(positivo|sano\right) &= 1\,\% \\ P\left(negativo|sano\right) &= 99\,\% \end{aligned}$$

Este mismo estudio aporta más información, así se puede observar que la prueba ha dado negativo sabiendo que (condición) el paciente está enfermo en 1 % de las veces.

$$\begin{aligned} P\left(negativo|enfermo\right) &= 1\,\% \\ P\left(positivo|enfermo\right) &= 99\,\% \end{aligned}$$

De esta manera se puede llegar a calcular la probabilidad de que el paciente esté realmente enfermo SI el resultado de la prueba es positivo.

Partiendo de que este resultado se puede expresar la probabilidad de que el paciente esté realmente enfermo SI el resultado de la prueba es positivo, por medio de la probabilidad condicionada:

$$P\left(enfermo|positivo\right) = \frac{P\left(enfermo \cap positivo\right)}{P\left(positivo\right)}$$

EL problema está lejos de ser resuelto puesto que no se tiene ni el numerador ni el denominador. Empecemos por el denominador, la probabilidad de que salga un positivo será la suma de la probabilidad de que salga un positivo y que el paciente esté sano, y la probabilidad de que el paciente esté enfermo y la prueba sea positiva.:

$$P\left(positivo\right) = P\left(sano \cap positivo\right) + P\left(enfermo \cap positivo\right)$$

Donde:

$$\begin{aligned} P\left(positivo|sano\right) &= \frac{P\left(positivo \cap sano\right)}{P\left(sano\right)} \\ &= \frac{P\left(sano \cap positivo\right)}{P\left(sano\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left(sano \cap positivo\right) &= P\left(positivo|sano\right) P\left(sano\right) \\ &= 1\,\% \cdot 99\,\% \\ &= 0,99\,\% \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} P\left(positivo|enfermo\right) &= \frac{P\left(positivo \cap enfermo\right)}{P\left(enfermo\right)} \\ &= \frac{P\left(enfermo \cap positivo\right)}{P\left(enfermo\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left(enfermo \cap positivo\right) &= P\left(positivo|enfermo\right) P\left(enfermo\right) \\ &= 99\,\% \cdot 1\,\% \\ &= 0{,}99\,\% \end{aligned}$$

Con ambos se tiene el denominador:

$$\boxed{P\left(positivo\right) = 0,99\,\% + 0,99\,\% = 1{,}98\,\%}$$

En el caso del numerador, ya se ha calculado:

$$\boxed{P\left(enfermo \cap positivo\right) = 0{,}99\,\%}$$

Siendo entonces $P\left(enfermo|positivo\right)$ como:

$$\begin{aligned} P\left(enfermo|positivo\right) &= \frac{P\left(enfermo \cap positivo\right)}{P\left(positivo\right)} \\ &= \frac{0,99\,\%}{1{,}98\,\%} \\ &= 50\,\% \end{aligned}$$

El test o prueba sólo aporta la seguridad de el paciente está enfermo siendo (condición) la prueba positiva en la mitad de las veces... como test o prueba no parece nada efectivo. En contraposición la $P\left(positivo|enfermo\right)$, esto es, la probabilidad de que el test fuera positivo estando (condición) el paciente enfermo, era del 99 %.

12.1.3. Independencia de sucesos.

Dos sucesos ocurren de forma independiente cuando el conocimiento o información aportada al saber que a ocurrido uno de los sucesos, no afecta a la frecuencia o probabilidad de ocurrencia del otro. Por tanto condicionar no modifica la probabilidad siendo:

$$\begin{aligned} P\left(A|B\right) &= P\left(A\right) \\ P\left(B|A\right) &= P\left(B\right) \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación de definición de probabilidad condicionada 12.3, se tiene:

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \\ P(A) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \end{aligned}$$

Entonces en caso de independencia de los sucesos se puede escribir que la probabilidad de que ocurra A y B, es el producto de la probabilidad de A por ls probabilidad de B.

$$P(A\cap B) = P(A)\,P(B) \tag{12.4}$$

Ejemplo 50. *Suponga que hace un experimento por el que selecciona una carta de una baraja española y a la vez tira un dado. ¿Cual es la probabilidad de sacar el as de bastos si ha salido un seis en el dado?.*

Está claro que el sorteo de la carta de la baraja no afecta en nada al resultado del sorteo del dado, y viceversa, siendo ambos independientes. De esta manera la probabilidad de sacar un 6 es $16{,}667\,\%$*, la probabilidad de sacar el as de bastos de la baraja española es de un* $2,5\,\%$*, la de que ocurran ambas cosas vendrá por el producto, siendo de* $0,4167\,\%$.

12.1.4. Teorema de Bayes.

El teorema de Bayes[1] permite la determinación de la probabilidad de las causas a partir de los efectos que han podido ser observa-

[1]En el año 1763 se publicó una memoria de Thomas Bayes (1702-1761) en la que se describe la determinación de la probabilidad de las causas a partir de los efectos observados.

dos.

Dados los sucesos $A_1, \ldots, A_n$ (todos ellos mutuamente excluyentes), con probabilidades conocidas $P(A_1), \ldots, P(A_n)$, tales que la suma de todas ellas es 1, $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$, considere el experimento en el que en una primera etapa acontece el suceso A_i, en una segunda etapa, acontece el suceso B_j, que depende del suceso A_i, de la etapa anterior, y se conocen las probabilidades de la ocurrencia del suceso B_j, condicionado a la ocurrencia del suceso A_i, que se denotan por $P(B_j|A_i)$.

El teorema de Bayes permite conocer la probabilidad de ocurrencia de los sucesos de la primera etapa A_i, condicionando a que acontece el suceso B_j, esto es $P(A_i|B_j)$.

$$\boxed{P(A_i|B_j) = \frac{P(B_j|A_i)\,P(A_i)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(B_j|A_i)\,P(A_i)}} \tag{12.5}$$

Demostración. Partiendo de la definición de probabilidad condicionada:

$$P(A_i|B_j) = \frac{P(A_iB_j)}{P(B_j)}$$

$$P(B_j|A_i) = \frac{P(B_jA_i)}{P(A_i)} \tag{12.6}$$

Como $P(A_iB_j) = P(B_jA_i)$ entonces,

$$P(A_i|B_j) = \frac{P(B_j|A_i)\,P(A_i)}{P(B_j)} \tag{12.7}$$

Por otro lado se puede deducir la probabilidad de B_j como la suma de las probabilidades de los sucesos en los que se observa B_j, esto es,

$$P(B_j) = P(B_jA_1) + P(B_jA_2) + \cdots + P(B_jA_{n-1}) + P(B_jA_n)$$

$$P(B_j) = \sum_{i=1}^{n} P(B_jA_i)$$

Con la ecuación 12.6, se puede expresar $P(B_jA_i) = P(B_j|A_i)\,P(A_i)$,

$$P(B_j) = \sum_{i=1}^{n} P(B_j|A_i)\,P(A_i)$$

Finalmente con la expresión 12.7 se llega al teorema de Bayes:

$$P(A_i|B_j) = \frac{P(B_j|A_i)\,P(A_i)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left[P(B_j|A_i)\,P(A_i)\right]}$$

□

Ejemplo 51. *Suponga que le dan los siguientes datos: cuando el DJ sube (P=30 %), entonces el Ibex* ***sube*** *el 50 % de las veces. Cuando el DJ se mantiene (39 %), el Ibex* ***sube*** *el 28 % de las veces, y cuando el DJ baja (31 %), el Ibex* ***sube*** *el 26 % de las veces. Suponga que el suceso "B" es "Ibex sube". ¿Cuál es la probabilidad de que sabiendo que el Ibex ha subido, el DJ también haya subido?*

Tenga en cuenta que la información facilitada se puede expresar de la siguiente manera:

(a) Probabilidad de que el DJ Suba:

$$P(DJ\uparrow) = 30\,\%$$

(b) Probabilidad de que el DJ se mantenga:

$$P\left(DJ\leftrightarrow\right)=39\,\%$$

(c) Probabilidad de que el DJ baje:

$$P\left(DJ\downarrow\right)=31\,\%$$

(d) Probabilidad de que el Ibex suba si sube el DJ:

$$P\left(Ib\uparrow|DJ\uparrow\right)=50\,\%$$

(e) Probabilidad de que el Ibex suba si se mantiene el DJ:

$$P\left(Ib\uparrow|DJ\leftrightarrow\right)=28\,\%$$

(f) Probabilidad de que el Ibex suba si baja el DJ:

$$P\left(Ib\uparrow|DJ\downarrow\right)=26\,\%$$

(g) Se pide encontrar la probabilidad de que suba el DJ condicionada a que suba el Ibex:

$$P\left(DJ\uparrow|Ib\uparrow\right)=???$$

Aplicando Bayes:

$$P\left(DJ\uparrow|Ib\uparrow\right)=\frac{P\left(Ib\uparrow|DJ\uparrow\right)P\left(DJ\uparrow\right)}{\mathcal{D}}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= P\left(Ib\uparrow|DJ\uparrow\right)P\left(DJ\uparrow\right)+\\&+P\left(Ib\uparrow|DJ\leftrightarrow\right)P\left(DJ\leftrightarrow\right)+\\&+P\left(Ib\uparrow|DJ\downarrow\right)P\left(DJ\downarrow\right)\end{aligned}$$

$$P\left(DJ\uparrow|Ib\uparrow\right)=\frac{50\,\%{\cdot}30\,\%}{50\,\%{\cdot}30\,\%+28\,\%{\cdot}39\,\%+26\,\%{\cdot}31\,\%}$$

$$P\left(DJ\uparrow|Ib\uparrow\right)=44,14\,\%$$

12.2. Variable Aleatoria.

Se entiende por Variable Aleatoria, en adelante **VA**, aquella que puede adoptar un valor determinado por el azar, de forma aleatoria o estocástica. Cada uno de los valores que puede adoptar la **VA** ocurrirá con cierta frecuencia relativa o dicho de otra manera, la **VA X** puede tomar un valor x_0, con una probabilidad $\mathbf{P}$.

Es posible considerar completamente definida una **VA X**, cuando se especifican todos los valores x_i, que puede adoptar la **VA X** y las respectivas probabilidades $\mathbf{P}_i$ para cada x_i.

Hay dos tipos de **VA**:

1. **VA** Discretas.

   a) Son aquellas **VA**, que pueden tomar tan solo un número determinado de valores (finitos valores o infinitos pero numerables).

   b) Un ejemplo pueden ser los experimentos en los que se cuentan las veces que ocurre cierto suceso, número de caras, piezas defectuosas, veces que sube un activo de bolsa, etc.

2. **VA** Continuas.

a) Son aquellas **VA** que pueden tomar cualquier valor de un intervalo (en un intervalo de valores en el que hay infinitos valores - infinitos no numerables). No se puede saber el valor exacto que adopta la **VA**, y se define el valor como dentro de un intervalo.

b) Un ejemplo puede ser la temperatura del cuerpo, si tiene un termómetro que marca grado (21ºC, 22ºC, etc.) y la medición indica que usted tiene 37ºC ¿es la temperatura exacta?, parece que no, puesto que todo lo que se sabe es que la temperatura está entre 36ºC y 38ºC, ya que el instrumento de medida es todo lo que nos puede indicar. Si ahora dispone de un instrumento capaz de medir décimas de grado y la medición indica 36.5º, no es posible asegurar que la temperatura es exactamente esa, se vuelve a tener la incertidumbre de si es exactamente este valor u otro, dentro de un intervalo comprendido ahora desde 36.4º y 36.6º.

12.2.1. Variable Aleatoria Discreta.

La **VA** de tipo discreta, como se ha indicado anteriormente, es aquella que toma como valores un conjunto finito (manejable) o muy grande (complicado de manejar) pero numerable (que con mucho trabajo y paciencia se podría conocer), indicando los diferentes valores que puede tomar y las probabilidades asociadas.

En este caso la función de distribución de probabilidad, resulta la forma en la que se resume exactamente esta información, valores y probabilidades. De esta manera se suele representar como una función en la que se indica qué probabilidad hay de que la **VA** adopte un valor igual o menor que x.

$$F(x_0) = P(x \leq x_0)$$

La función de distribución debe cumplir ciertas características:

- Acotada entre 0 y 1:

$$F(x) \begin{cases} F(-\infty) = 0 \\ F(+\infty) = 1 \end{cases}$$

- Acumulada y creciente:

$$\sum P(x_i) = 1$$

$$x_1 \leq x_2 \rightarrow \begin{cases} F(x_1) = P(x \leq x_1) & F(x_1) = P(x_1) \\ F(x_2) = P(z \leq x_2) & F(x_2) = P(x_1) + P(x_2) \end{cases}$$

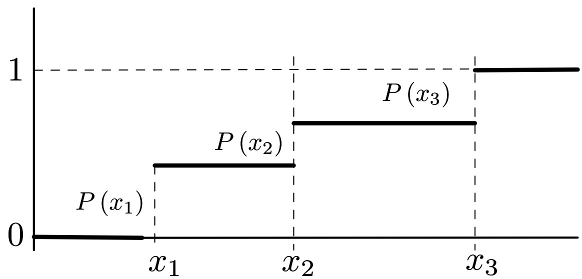


Figura 12.2: Función Distribución **VA** Discreta.

12.2.2. Variable Aleatoria Continua.

Recuerde que en el caso de las **VA** continuas, resulta imposible determinar el valor exacto o real de la medida o suceso, en este caso todo lo más que se puede llegar a inferir o a entender, resulta de comprender el valor de la medida dentro de cierto intervalo o margen. Desde este punto de vista, en el que es imposible conocer todos los valores que la **VA** puede tener, resulta como es obvio, imposible asignar un conjunto de probabilidades a cada valor de forma individualizada. Por tanto hay que buscar algún instrumento intermedio que represente el comportamiento de la **VA**.

Este instrumento es la Función de Densidad. Posteriormente y a través de la función de densidad, se llegará hasta la función de distribución.

12.2.2.1. Función de Densidad.

Para poder entenderlo, suponga que se va a seguir el siguiente procedimiento experimental. Primero se van a realizar una serie de medidas sobre cierta población, por ejemplo la longitud de 1.000 cabellos de cada persona (por cada persona se harán 1.000 medidas), posteriormente, estas medidas se clasifican dentro de ciertos intervalos o clases y se representa su frecuencia relativa en un gráfico de barras, esto es, se hace un histograma con los datos de las medidas realizadas.

Según se van realizando más y más medidas, se pueden ir creando clases más estrechas, y se puede continuar el proceso. Poco a poco, llegando a cierto límite de medidas del experimento, la forma de este histograma no cambia por más medidas que se aporten, ¿qué significa esto?, esto implica que aportar más información al experimento por medio de la realización de más medidas, no aporta más conocimiento al mismo, no vale para nada o para muy poco, puesto que en realidad se tiene la suficiente información como para asumir que se conoce, con la necesaria exactitud, el comportamiento de la **VA**, se conocen tanto los valores que puede tomar como las probabilidades en cada intervalo (las frecuencias relativas). En el límite el histograma describe cierta curva suave que es precisamente la función de densidad.

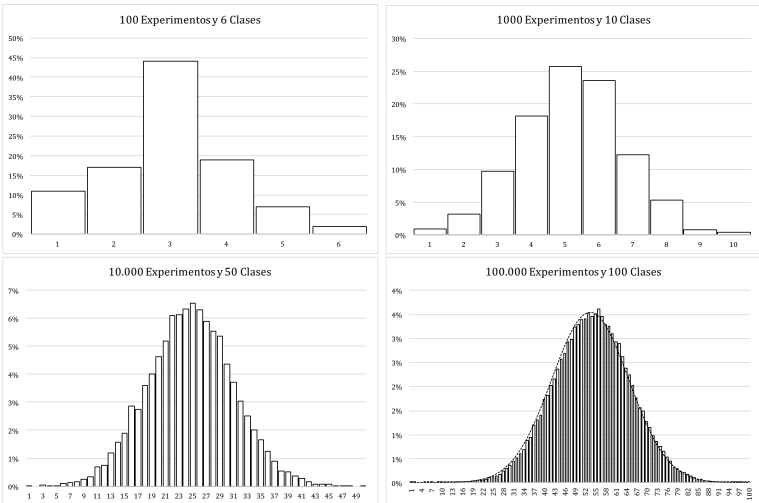


Figura 12.3: Función de densidad - Histograma

La función de densidad se denota por $f(x)$ y debe cumplir ciertas condiciones para poder ser considerada como una función de densidad.

- Si $f(x)$ es función de densidad, entonces el área bajo la curva (su integral) debe valer 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

- Conocida la forma de $f(x)$, se puede calcular la probabilidad de que la **VA** tome un un valor menor o igual que x_0, como la suma de las probabilidades (frecuencias relativas) de las clases que contienen valores menores o iguales a x_0. En el caso continuo esta suma se convierte en una integral.

$$P(x \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\,dx$$

- Conocida la forma de $f(x)$, se puede calcular la probabilidad de que la **VA** tome un un valor en cierto intervalo (x_0, x_1), como la suma de las probabilidades (frecuencias relativas) de las clases que contienen valores entre x_0 y x_1. En el caso continuo esta suma se convierte en una integral.

$$P(x_0 \leq x \leq x_1) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \qquad (12.8)$$

12.2.2.2. Función de Distribución.

Se define, para el caso de variable aleatoria continua, como función de distribución de probabilidad, conocida la función de densidad $f(x)$, aquella que verifica que:

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

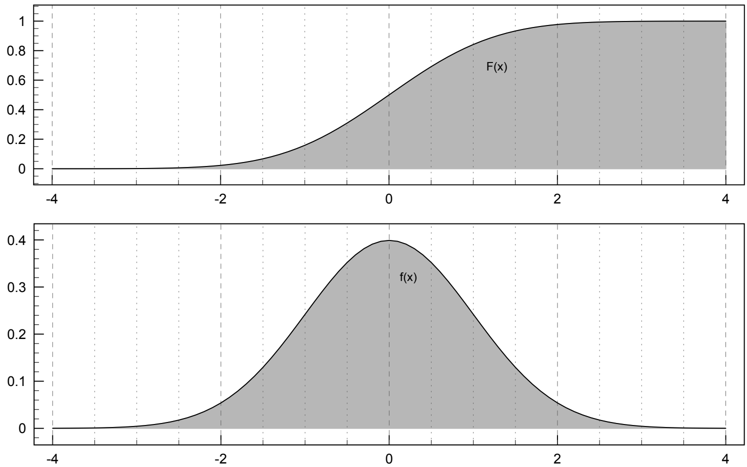


Figura 12.4: Función de densidad $f(x)$ y distribución $F(x)$

En este caso, la función de distribución debe cumplir ciertas condiciones como son:

1. Acotada:

$$F(-\infty) = 0 \to \int_{-\infty}^{-\infty} f(x)\,dx = 0$$

$$F(+\infty) = 1 \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

2. Creciente.

12.3. Distribuciones de Probabilidad. Modelos Univariantes.

Los modelos univariantes, son modelos en los que se observa o sólo es de interés un comportamiento y sobre una única variable.

12.3.1. Proceso Bernoulli.

El proceso de Bernoulli es aquel en el que se estudia la ocurrencia de un suceso o la contraria (ambas mútuamente excluyentes), por ejemplo cara o cruz, par o impar, correcto o defectuoso, en bolsa, subida o bajada del precio, etc.

Una vez definidos los valores que puede adoptar la $\mathbf{VA}$ queda indicar las probabilidades con las que se adoptan estos valores, en caso de Bernoulli al ser valores excluyentes, la probabilidad de correcto (subida, cara, etc.) será p, mientras que la probabilidad de defetuoso (bajada, cruz, etc.) será $q = (1 - p)$.

Se debe cumplir que las sucesiva observaciones son independientes unas de las otras, y que no aporta información relevante de cara al siguiente resultado, lo observado con anterioridad.

Este modelo o proceso, se aplica sobre poblaciones finitas o bien infinitas pero siempre y cuando el proceso carezca de memoria, siendo el resultado actual independiente de lo ocurrido anteriormente.

Bajo estos supuestos y en función de la variable medida (como se verá en cada caso) se pueden definir diferentes $\mathbf{VA}$:

1. Distribución Binomial.

2. Distribución Geométrica.

3. Distribución Binomial Negativa.

12.3.1.1. Distribución Binomial.

La $\mathbf{VA}$ binomial se define cuando en cierta muestra se cuentan aquellos sucesos de un tipo frente a otro, por ejemplo cuando en un número n de piezas, se cuenta cuantas de estas son defectuosas. Otro ejemplo puede ser cuando se cuentan las veces que ha subido de un día para el siguiente un activo en bolsa, de entre n medidas. Tómese como r el número de veces que ocurre el suceso "defectuosa" o "subida", en adelante el suceso A, entonces y teniendo en cuenta que se han realizado n medidas, se tendrán por exclusión $n - r$ "aceptables", o $n - r$ "bajadas", en adelante el suceso B.

A y B son excluyentes e independientes.

Por tanto la $\mathbf{VA}_{Bin}$ será

$$\mathbf{Y} = \text{número de elementos } y \text{ al observar } n$$

Y entonces se puede concluir que para llegar a calcular la probabilidad p de que se observen r veces el suceso A, será la suma de todas aquellas veces en las que se puede observar este suceso, y esto viene de permutar de todas las formas posibles n elementos con r y $n - r$ elementos repetidos, este número se puede calcular como:

$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

Por otro lado debido a que los sucesos A y B son independientes, la probabilidad de que ocurran r sucesos A y $n - r$ sucesos B viene como:

$$\left(\underbrace{A \ldots A}_{r}\right)\left(\underbrace{B \ldots B}_{n-r}\right)$$

Si el suceso A ocurre con una probabilidad p entonces B ocurrirá con una probabilidad $q = (1-p)$:

$$\begin{aligned}\left(\underbrace{p \ldots p}_{r}\right)\left(\underbrace{(1-p) \ldots (1-p)}_{n-r}\right) &= p^r (1-p)^{n-r} \\ &= p^r q^{n-r}\end{aligned}$$

"Sumando" todas las posibilidades que se pueden tener se llega finalmente a que

$$\boxed{\mathbf{P}(y=r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}} \quad r = 0, 1, 2 \ldots, n \tag{12.9}$$

Los parámetros que más interesan son la esperanza y la varianza:

$$E[y] = np \tag{12.10}$$

$$Var[y] = n(1-p)p \tag{12.11}$$

Ejemplo 52. *Suponga que tiene firmado un contrato por medio del cual usted gana* $100\,000$ € *en caso de que se cumpla cierta condición y no gana nada en caso contrario. La condición es que de una cesta de nueve activos subyacentes (imagine 9 acciones de bolsa) cuya evolución (subida o bajada) es para todas y entre todas, totalmente independientes (sin correlación), usted gana si al menos 6 de ellos suben. Sabiendo que la probabilidad de que cada uno de ellos suba es del 95 %, calcularemos la probabilidad de ganar y si el precio del dinero es de un* $r = 5\,\%$ *continuo, y el contrato es a 1 año, se calculará el precio por el que se debería negociar este contrato.*

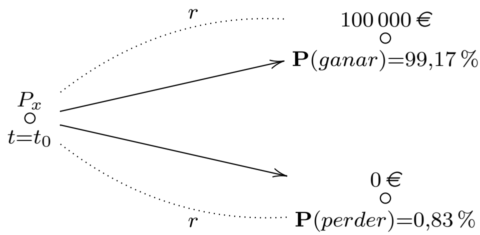
La probabilidad de ganar es una combinación de todas la posibles posibilidades en las que se gana, esto es, la probabilidad *de que suban 6 o de que suban 7, o de que suban 8, o de que suban 9, por tanto la probabilidad de ganar debe ser la suma de todas ellas. La probabilidad de que se den* i *subidas es sigue una* $\mathbf{VA}_{Bin}\left(p = 95\,\%, q = 5\,\%, r = i\right)$*, por lo tanto:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(y = 6\right) &= \binom{9}{6}\left(95\,\%\right)^{6}\left(5\,\%\right)^{3} \\
\mathbf{P}\left(y = 7\right) &= \binom{9}{7}\left(95\,\%\right)^{7}\left(5\,\%\right)^{2} \\
\mathbf{P}\left(y = 8\right) &= \binom{9}{8}\left(95\,\%\right)^{8}\left(5\,\%\right)^{1} \\
\mathbf{P}\left(y = 9\right) &= \binom{9}{9}\left(95\,\%\right)^{9}\left(5\,\%\right)^{0}
\end{aligned}$$

La probabilidad de que se de cualquiera de estos, es su suma por los que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(ganar\right) &= \sum_{i=6}^{n}\mathbf{P}\left(y = i\right) \\
\mathbf{P}\left(ganar\right) &= \sum_{i=}^{n}\binom{9}{i}\left(95\,\%\right)^{i}\left(5\,\%\right)^{n-i} \\
\mathbf{P}\left(ganar\right) &= 99,17\,\%
\end{aligned}$$

El precio debería ser[2] *el valor descontado de todos los caminos:*



$$P_x = (100\,000 \times 99,17\,\%)\, e^{-5\,\% \times 1} + (0 \times 0,83\,\%)\, e^{-5\,\% \times 1}$$

$$P_x = 94\,333{,}42\,€$$

En el siguiente ejemplo se puede usar este tipo de aproximación para responder a una pregunta clásica, de una bolsa de activos, o cartera homogénea en cuanto a producto, cuantos elementos debo analizar para aceptar la cartera completa o rechazarla con cierta seguridad.

Ejemplo 53. *Suponga que usted es un gestor que se dedica a la compra de carteras de tarjetas de crédito solventes, esto es usted acude a un banco y le ofrece una cantidad a cambio de quedarse con el negocio de un gran número de tarjetas de crédito, tarjetas que usan ciertos clientes. A usted, como es normal, le interesa comprar en grandes cantidades, y con un cierto nivel de seguridad, sólo aquellas carteras que tienen como máximo un 10 % de impagos, suponiendo que una tarjeta de crédito, es "performing" (está al corriente) o es "non performing", debe cuota/s, de forma excluyente, en el momento de la compra. Para determinar si un contrato de la*

[2]Supongamos que es martingala (punto necesario para poder descontar con seguridad).

cartera es "performing" o "non performnig" debe solicitar un certificado a la entidad que le certifique que está al corriente de pagos, esto llega bastante tiempo. Como el tiempo de decisión a la hora de la compra es ciertamente pequeño, a usted le gustaría saber cuantos contratos debería revisar para estar seguro de que compra una cartera con un máximo de un 10 % de "non performing".

De esta manera usted está forzando a que la proporción de "non performnig" de la muestra sea el 10 %. Si se parte de verificar 10 muestras hasta 20, por ejemplo, se tendrá para el caso de 10 muestras que el máximo de non perfmorming aceptable será un 10 % de estas, esto es, se aceptará la cartera siempre que se encuentren 0 o 1 non performing (se denota por proporción máxima aceptada k*), por tanto la probabilidad de aceptar será la suma de la probabilidad de encontrar ningún non performing, más la probabilidad de encontrar un non performing, para el caso de 11 muestras igual puesto que no hay fracciones de non performing.*

$$n = 10\,(k = 1) \rightarrow \mathbf{P}\,(aceptar) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

$$n = 10\,(k = 1) \rightarrow \mathbf{P}\,(aceptar) = \sum_{i=0}^{1} \binom{10}{i} p^i q^{10-i}$$

$$n = 12\,(k = 1) \rightarrow \mathbf{P}\,(aceptar) = \sum_{i=0}^{1} \binom{12}{i} p^i q^{12-i}$$

$$n = 20\,(k = 2) \rightarrow \mathbf{P}\,(aceptar) = \sum_{i=0}^{2} \binom{20}{i} p^i q^{20-i}$$

n	k	k	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$\mathbf{P}\,(aceptar)$
	10 %	*Aceptados*	*0*	*1*	*2*	*Suma*
10	*1*	*1*	*34.8678 %*	*38.7420 %*		*73.6099 %*
11	*1.1*	*1*	*31.3811 %*	*38.3546 %*		*69.7357 %*
12	*1.2*	*1*	*28.2430 %*	*37.6573 %*		*65.9002 %*
13	*1.3*	*1*	*25.4187 %*	*36.7158 %*		*62.1345 %*
14	*1.4*	*1*	*22.8768 %*	*35.5861 %*		*58.4629 %*
15	*1.5*	*1*	*20.5891 %*	*34.3152 %*		*54.9043 %*
16	*1.6*	*1*	*18.5302 %*	*32.9426 %*		*51.4728 %*
17	*1.7*	*1*	*16.6772 %*	*31.5013 %*		*48.1785 %*
18	*1.8*	*1*	*15.0095 %*	*30.0189 %*		*45.0284 %*
19	*1.9*	*1*	*13.5085 %*	*28.5180 %*		*42.0265 %*
20	*2*	*2*	*12.1577 %*	*27.0170 %*	*57.0360 %*	*96.2107 %*

Parece obvio que con 10 muestras la probabilidad de rechazar una cartera con menos de un 10 % de impagados es de un 27 %, un número un poco alto tanto para el que lo vende como para el que la compra, por lo que se debe buscar un mayor nivel de seguridad en la aceptación, y con 20 parece razonable que sólo 4 de cada 100 carteras se aceptarán con más de este 10 %.

12.3.1.2. Distribución Geométrica.

Suponga el mismo enfoque de creación de muestras que en el modelo binomial, entonces si en lugar de contar el número de eventos de una clase dentro del total, lo que se cuenta es el número de eventos de una clase ANTES de que ocurra un evento de otra clase, por ejemplo:

- Número de días - seguidos - que hay subida en bolsa, hasta una bajada.

- Número de veces que se saca cara antes de una cruz.
- Número de piezas correctas antes de una pieza defectuosa.
- ...

Para calcular la función de probabilidad, recuerde la independencia entre sucesos, y si el suceso X ocurre con una probabilidad $1-p$ entonces, su contrario ocurrirá con una probabilidad $q=(p)$:

$$\left(\underbrace{(1-p)\ldots(1-p)}_{r}\right)(p) \quad = \quad p\,(1-p)^r$$

"Sumando" todas las posibilidades que se pueden tener se llega finalmente a que

$$\boxed{\mathbf{P}\,(X=r)=p\,(1-p)^r}\; r=0,1,2\ldots,n$$

Los parámetros que más interesan son la esperanza y la varianza:

$$\begin{aligned} E\,[X] &= \frac{1}{p} \\ Var\,[X] &= \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$

12.3.2. Proceso Poisson.

El proceso de Poisson es aquel que observa la aparición de ciertos sucesos sobre un soporte continuo, por ejemplo el tiempo. Suponga quiebras de empresas en el tiempo, averías de máquinas en el tiempo. Pero al ser un soporte tal, no queda circunscrito al tiempo, ya que podría ser número de defectos por metro de plancha de metal...

Si bien el proceso tiene como características principales:

- Estabilidad, de tal manera que a largo plazo, produce un número de sucesos constante λ por unidad de tiempo. Queda claro que es lo mismo que decir que se espera una cantidad λ de sucesos por unidad e tiempo, por lo que se está prefijando la esperanza de este proceso.
- La aparición de sucesos es independiente unos de los otros, el proceso carece de memoria, y por tanto conocer la historia no ayuda en absoluto para poder determinar o predecir el suceso siguiente.

A partir de este proceso se tendrán las siguientes distribuciones:

- Distribución de Poisson.
- Distribución exponencial.

12.3.2.1. Distribución de Poisson.

La **VA** Poisson se define, bajo las premisas anteriores, pero busca:

$$x = \text{número de sucesos en un intervalo}$$

Esta distribución es una generalización de a binomial cuando n es grande ($n \to \infty$), si bien la esperanza de esta debe mantenerse constante, por lo que para que $\mathbf{E}[x] = \lambda = np$, si $n \to \infty$, entonces $p \to 0$, de tal manera que np se mantenga constante (uno crece y el otro decrece).

Si $\lambda = np$, entonces $p = {}^{\lambda}\!/_{n}$, y partiendo de la distribución

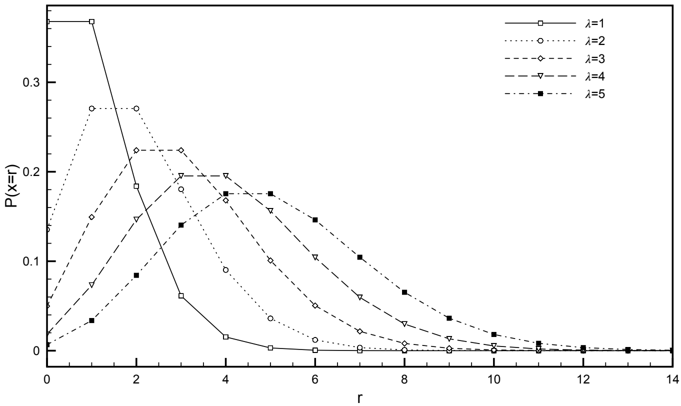


Figura 12.5: Poisson (varias λ)

Binomial, se puede tomar límites para $n \to \infty$, de tal manera que:

$$\mathbf{P}\left(y=r\right)=\binom{n}{r}p^{r}q^{n-r}=\binom{n}{r}p^{r}\left(1-p\right)^{n-r}$$

$$\mathbf{P}\left(y=r\right)=\binom{n}{r}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{r}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-r}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\mathbf{P}\left(y=r\right)\right]=\frac{\lambda^{r}}{r!}e^{-\lambda}$$

De forma simplificada:

$$\boxed{\mathbf{P}\left(y=r\right)=\frac{\lambda^{r}}{r!}e^{-\lambda}}\, r=0,1,2,\ldots$$

Resulta que para la esperanza y para la varianza se puede calcular como:

$$\mathbf{E}\left[x\right]=\lambda$$

$$\mathbf{Var}\left[x\right]=\lambda$$

Ejemplo 54. *Suponga que ciertas hipotecas de una añada y tipo de cliente determinados, tienen un comportamiento de impago (fallido), que sigue una distribución de Poisson con media 2 (fallidos al año). Calcule la probabilidad de:*

Que no se de ningún fallido al año.

Que se den menos de cinco fallidos en un año.

Menos de seis en 4 años.

Para el caso de ningún fallido se tiene:

$$\mathbf{P}\left(x=0\right)=\frac{2^0}{0!}e^{-2}=13{,}5335\,\%$$

Para el caso de menos de 5 fallidos, es calcular la probabilidad de que ocurran 4 o menos, esto es, la probabilidad de que ocurran 4, más la de que ocurran 3, más la de que ocurran 2, más la de que ocurra 1, más la de que no ocurra ninguno.

$$\mathbf{P}\left(x<5\right)=\mathbf{P}\left(x=4\right)+\mathbf{P}\left(x=3\right)+\mathbf{P}\left(x=2\right)+\mathbf{P}\left(x=1\right)+\mathbf{P}\left(x=0\right)$$

$$\mathbf{P}\left(x<5\right)=e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!}+\frac{2^1}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}\right)$$

$$\mathbf{P}\left(x<5\right)=94{,}7347\,\%$$

Para el caso de que se quiera calcular para 4 años, contando que en media al año ocurren 2, esto implica que en 4 años, que es el intervalo de medida, se tendrán 8 fallidos cada 4 años, $\lambda=8$. Y es un caso similar al anterior.

$$\mathbf{P}\left(x<6\right)=e^{-8}\left(\frac{8^0}{0!}+\frac{8^1}{1!}+\frac{8^2}{2!}+\frac{8^3}{3!}+\frac{8^4}{4!}+\frac{8^5}{4!}\right)$$

$$\mathbf{P}\left(x<6\right)=19{,}1236\,\%$$

12.3.2.2. Distribución Exponencial.

La **VA** Exponencial viene de querer considerar la variable tiempo del proceso de Poisson. De forma resumida lo que interesa es conocer el tiempo que pasa entre dos sucesos consecutivos, por ejemplo, tiempo que pasa hasta la quiebra de empresas de cierto sector.

La función de densidad será:

$$f\left(t\right)=\frac{dF\left(t\right)}{dt}=\lambda e^{-\lambda t}$$

Por tanto:

$$F\left(t\right)=1-e^{-\lambda t}$$

$$\mathbf{E}\left[x\right]=\frac{1}{\lambda}$$
$$\mathbf{Var}\left[x\right]=\frac{1}{\lambda^2}$$

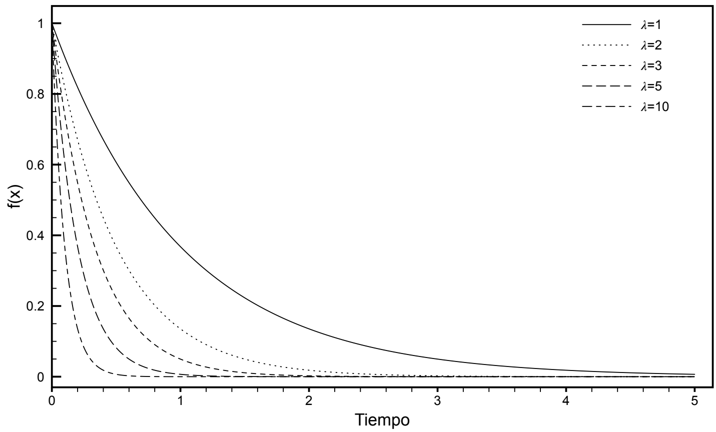


Figura 12.6: Distribución Exponencial múltiples λ

Ejemplo 55. *Los clientes que han adquirido el producto financiero de su entidad, conocido como "préstamo personal, para tus proyectos", tras muchas concesiones, se observa que el comportamiento de impago se parece a una distribución exponencial, en la que la media de tiempo hasta el impago es de 8 meses. Se le ha consultado lo siguiente:*

(a) Calcular la probabilidad de que un cliente haga impago entre 3 y 12 meses.

(b) Percentíl 95 de la distribución.

(c) Sabiendo que los préstamos se han concedido a un vencimiento de 32 meses, hay mucho interés por conocer aquella probabilidad de que si el cliente ha llegado a pagar los 10 primeros meses, siga pagando 15 meses más.

Dado que se indica que la media es de 8 meses y la media de una distribución exponencial es $\frac{1}{\lambda}$ entonces, $\lambda = 1/8$.

Para responder al primer apartado se puede abordar por dos caminos, primero a partir de la expresión 12.8, por lo que

$$\mathbf{P}\left(3 \leq t \leq 12\right) = \int_{3}^{12} f\left(t\right) dt = \int_{3}^{12} \lambda e^{-\lambda t}$$

$$\mathbf{P}\left(3 \leq t \leq 12\right) = \left. -e^{-\lambda t}\right|_{t_0=3}^{t_f=12} = 68\,\% - 22\,\% = 46\,\%$$

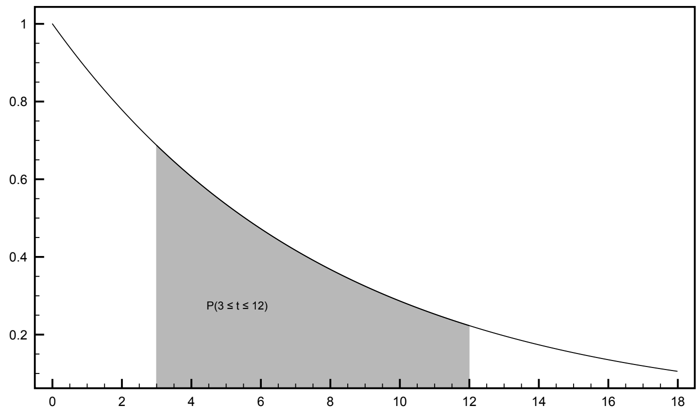


Figura 12.7: Probabilidad de evento entre 3 y 12 meses.

La segunda aproximación a obtener esta probabilidad viene como la resta entre la probabilidad de que el evento se produzca antes de 12 meses, y la probabilidad de que el evento ocurra antes de 3 meses.

$$q = \mathbf{P}\left(t \leq 12\right) - \mathbf{P}\left(t \leq 3\right)$$

$$q = \left(1 - e^{-\frac{12}{8}}\right) - \left(1 - e^{-\frac{3}{8}}\right) = 78\,\% - 32\,\% = 46\,\%$$

De forma gráfica:

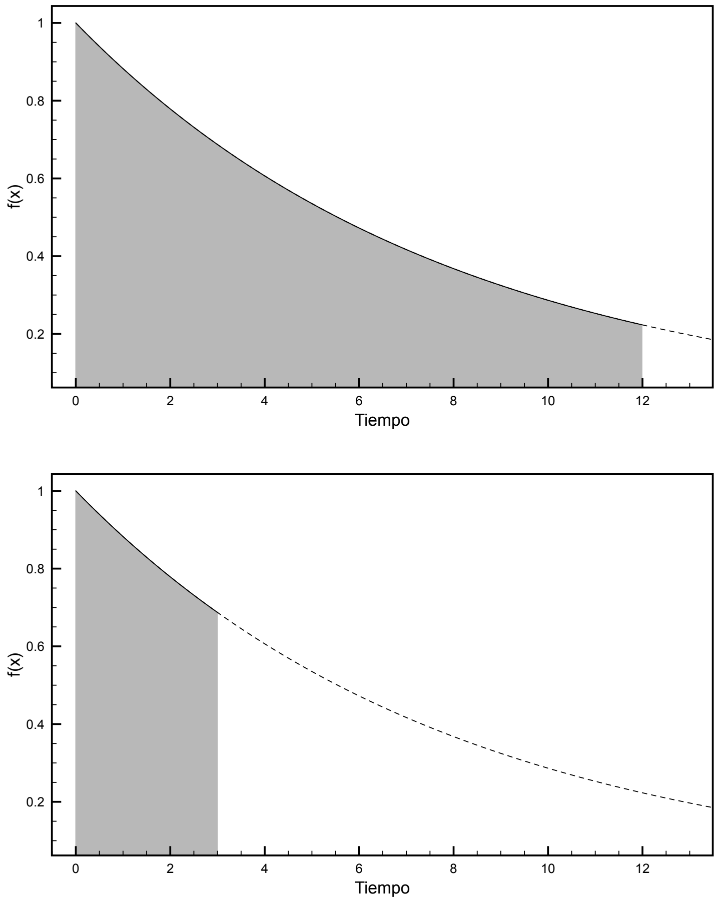


Figura 12.8: Diferencia de probabilidades

Para el percentil 95 %, se debe buscar el tiempo en la distribución que acumula esta probabilidad, el punto de corte en el tiempo en el que la probabilidad es del 95 %, esto es:

$$95\,\% = \int_0^T f\left(t\right) dt = \left. -e^{-\lambda t}\right|_0^T = 1 - e^{\frac{1}{8}T} = 95\,\%$$

$$T = 23{,}96 \text{ meses}$$

La probabilidad de que pague 15 meses más habiendo pagado 10 meses, es probabilidad condicionada, que según la expresión 12.3 se puede escribir:

$$\mathbf{P}\left(x \geq 25 | \, x > 10\right) = \frac{\mathbf{P}\left(x > 25\right)}{\mathbf{P}\left(x > 10\right)}$$

$$\mathbf{P}\left(x > 25\right) = 1 - \mathbf{P}\left(x \leq 25\right) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t_{25}}\right)$$

$$\mathbf{P}\left(x > 10\right) = 1 - \mathbf{P}\left(x \leq 10\right) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t_{10}}\right)$$

$$\mathbf{P}\left(x \geq 25 | \, x > 10\right) = \frac{1 - \left(1 - e^{-\frac{25}{8}}\right)}{1 - \left(1 - e^{-\frac{10}{8}}\right)} = 15{,}34\,\%$$

12.3.3. Distribución Normal.

Es una de las variables aleatorias más importantes, puesto que está presente en casi todos los eventos en los que el resultado depende de un conjunto muy grande de causas independientes (patícipes de un mercado, por ejemplo) que actúan de forma aditiva, siendo el resultado la suma de los efectos, y siendo cada uno de estos efectos, pequeño en relación al conjunto, y poco relevante.

Su función de densidad es la siguiente:

$$f\left(x\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x - \mu\right)^2\right] \tag{12.12}$$

Nótese que por convenio se denomina $\Phi_{\mu,\sigma}\left(\cdot\right)$ función de distribución de la Normal, de media μ y desviación estándar σ, y $\Phi\left(\cdot\right)$ la función de distribución de la Normal Estándar. Esta última será muy utilizada en modelos de valoración, riesgos, y demás mediciones en finanzas.

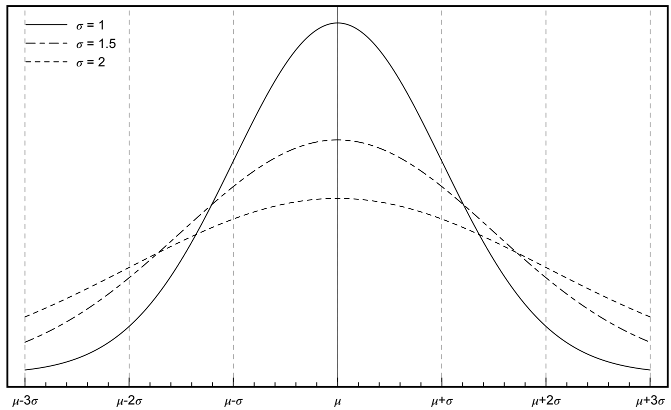


Figura 12.9: Distribución Normal

La variale norma $\mathcal{N}\left(\mu,\sigma\right)$ se puede expresar en función de una variable normal estándar según:

$$\mathcal{N}\left(\mu,\sigma\right)=\mu+\sigma\mathcal{N}\left(0,1\right)$$

12.3.3.1. Teorema Central del Límite.

El teorema central del límite es uno de los más relevantes y de mayor aplicación en las métricas estadísticas, aplicadas en finanzas. Establece que si $x_{1},\ldots,x_n$ son variables aleatorias independientes con media μ_i y varianza σ_i, y distribución cualquiera, incluso diferente entre ellas, la variable de los efectos combinados, esto es la variable aleatoria suma de $X_1,\ldots,X_n$ cuando n es grande tiene a una distribución normal con media μ_T y desviación σ_T:

$$Y=X_1+\cdots+X_n$$

$$Y \sim \mathcal{N}\left(\mu_t, \sigma_T\right) \begin{cases} \text{Media} & \mu_T = \sum \mu_i \\ \text{Desviación} & \sigma_T = \sqrt{\sum \sigma_i^2} \end{cases}$$

Parte VI

Problemas y Exámenes

Apéndice A

Problemas y Cuestiones con su Solución.

Los problemas siguientes han sido seleccionados de los exámenes realizados a diferentes grupos de alumnos de esta materia.

Problema 54. *Calcular el número de años necesarios para doblar el capital si se invierte al 5 % anual compuesto.*

Si se tiene una cantidad inicial C_i y se quiere llegar a $C_f = 2C_i$ con capitalización compuesta $C_f = C_i\left(1+r\right)^t$, entonces:

$$2C_i = C_i\left(1 + 5\,\%\right)^{A\tilde{n}os}$$

$$\ln\left(2\right) = A\tilde{n}os \cdot \ln\left(1{,}05\right)$$

$$\boxed{A\tilde{n}os = 14{,}207}$$

Problema 55. *Calcular el tipo de interés (anual compuesto) que retorna 10€ si el capital inicial es de 100€ con una inversión a 2* *años, cuyo tipo de interés es compuesto y los intereses son pagaderos mes a mes.*

De la expresión capitalización compuesta, se puede particularizar para meses: $C_f = C_i \left(1 + r_{mensual}\right)^{Meses}$, y luego obtener el tipo anual compuesto equivalente. Por tanto:

$$110 = 100 \left(1 + r_m\right)^{24}$$

$$r_m = 0{,}39792\,\%$$

Ahora se calcula el equivalente anual, igualando la expresión capitalización compuesta, para años y para meses:

$$\left(1 + 0{,}39792\,\%\right)^{24} = \left(1 + r_y\right)^2$$

$\boxed{r_y = 4{,}8809\,\%}$

Problema 56. *Calcular el la inversión inicial que se debe hacer para comprar un coche de 10000€, dentro de 10 años, si el banco ofrece un 4 % continuo.*

Se indica el capital final y se desea encontrar el inicial, por lo que se busca el valor actual de un flujo futuro, esto es, hay que descontar de forma continua.

$$C = 10000e^{-4\,\%\cdot 10}$$

$\boxed{C = 6\,703{,}2}$

Problema 57. *Calcular el la inversión inicial que se debe hacer para comprar un coche de 10000€, dentro de 10 años, si el banco ofrece un 4 % anual compuesto con pagos mensuales.*

Se busca encontrar el descuento racional compuesto, a un tipo mensual compuesto (con pagos mensuales), por lo que se puede usar la expresión $C_f = \frac{C_i}{(1+r_{mensual})^{Meses}}$.

$$C = \frac{10000}{(1 + r_m)^{120}}$$

Primero es necesario obtener r_m dado el 4 % anual compuesto (suponiendo una inversión a un año), se calculan los tipos equivalentes:

$$(1 + 4\,\%)^1 = (1 + r_m)^{12}$$

$$r_m = 0{,}32737\,\%$$

Con este dato intermedio se puede volver sobre la expresión inicial:

$$C = \frac{10000}{(1 + 0{,}32737\,\%)^{120}}$$

$\boxed{C = 6\,755{,}6}$

Problema 58. *Qué valor tendrán 1000€ dentro de 5 años si se invierten al 2 % trimestral. Obtenga el TAE de la operación si hay que pagar un 18 % de impuestos sobre el beneficio financiero. Finalmente obtenga el TIN (semestral).*

Se aplica capitalización compuesta al ser el plazo superior al año:

$$C_f = C_i\,(1 + r_t)^{Trimestres}$$

$$C_f = 1000\,(1 + 2\,\%)^{5\cdot 4}$$

$\boxed{C = 1\,485{,}9}$

Para calcular el TAE, al ser el tipo efectivo anual se aplicaría la expresión:

$$C_f = C_i\,(1 + \text{TAE})^{Años}$$

Como el retorno es de $1485{,}9 - 1000 = 485{,}9$€, hay que quitar el $18\,\%$, que son $87{,}471$€ por lo que el retorno final es de $485{,}9 - 87{,}471 = 398{,}48$€.

Con esto se puede asumir que:

$$1398{,}48 = 1000\,(1 + \text{TAE})^5$$

$$\text{TAE} = \sqrt[5]{\frac{1398{,}48}{1000}} - 1$$

$\boxed{\text{TAE} = 6{,}9378\,\%}$

Para el cálculo del TIN se usa la expresión que relaciona TAE y TIN:

$$1 + 6{,}9378\,\% = \left(1 + \frac{\text{TIN}}{2}\right)^2$$

$$\text{TIN} = 2\left(\sqrt{1{,}069} - 1\right)$$

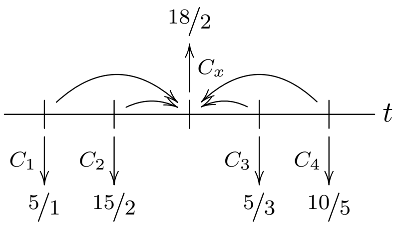
$\boxed{\text{TIN} = 6{,}8215\,\%}$

Problema 59. *Si se tiene el siguiente calendario de liquidaciones:*

Fecha	*Importe*
1-ENE	100 000
15-FEB	50 000
5-MAR	60 000
10-MAY	90 000

Suponga que el día 10-NOV del año anterior quiere cerrar una operación en mercado que le permita cancelar los pagos de la tabla anterior por medio de un único pago el 18-FEB. El coste de financiación es del 12 %, y la base de las operaciones es $^{Act}/_{360}$*. Calcule el pago a realizar el 18-FEB*

Para calcular el pago a realizar se deben calcular el valor de los capitales a abonar en la fecha indicada (18-FEB):



Por tanto C_x se puede calcular como:

$$C_x = C_1^* + C_2^* + C_3^* + C_4^*$$

Hay que calcular los días entre los pagos C_i y C_x:

$^{5}/_{1} \to {}^{18}/_{2}$	44
$^{15}/_{2} \to {}^{18}/_{2}$	3
$^{18}/_{2} \to {}^{5}/_{3}$	15
$^{18}/_{2} \to {}^{10}/_{5}$	81

Donde:

$$C_i^* = C_i\left(1 + r\frac{d_i}{360}\right)\begin{cases} i = \{1, 2, 3, 4\} \\ r = 12\,\% \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
C_1^* &= 100\,000\left(1 + 12\,\%\frac{44}{360}\right) \\
C_2^* &= 50\,000\left(1 + 12\,\%\frac{3}{360}\right) \\
C_3^* &= 60\,000\left(1 + 12\,\%\frac{15}{360}\right)^{-1} \\
C_4^* &= 90\,000\left(1 + 12\,\%\frac{81}{360}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

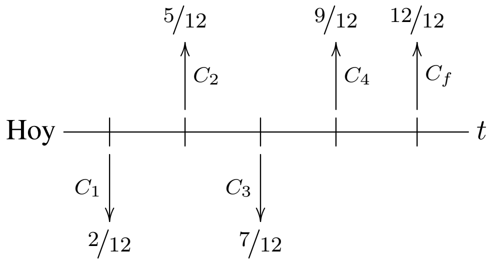
$$\begin{aligned}
C_1^* &= 101\,466{,}66 \\
C_2^* &= 50\,005{,}00 \\
C_3^* &= 59\,701{,}49 \\
C_4^* &= 87\,633{,}88
\end{aligned}$$

Sumando adecuadamente:

$\boxed{C = 298\,807{,}04}$

Problema 60. *Suponga que se deben liquidar* $100\,000$ *dentro de 2 meses, y* $200\,000$ *dentro de 7 meses. Conviene con su contrapartida en hacer tres pagos para cancelar las cantidades anteriores, uno dentro de 5 meses de* $90\,000$*, otro dentro de 9 meses de* $50\,000$ *y uno final dentro de 12 meses. Calcule el importe que debería tener dentro de 12 meses para cerrar los pagos anteriores si acuerda unos intereses para financiación del 12 %.*

Para calcular el pago a realizar se deben celular el valor de los capitales descontando los mismos a hoy, para ajustar el equilibrio financiero. Finalmente se puede obtener C_f capitalizando.



Si se descuentan a hoy los flujos se cumple que:

$$C_f^* + C_2^* + C_4^* = C_1^* + C_3^*$$

Si se calculan cada uno de los valores:

$$\begin{aligned}
C_1^* &= 100\,000\left(1 + 12\,\%\frac{2}{12}\right)^{-1} \\
C_2^* &= 90\,000\left(1 + 12\,\%\frac{5}{12}\right)^{-1} \\
C_3^* &= 200\,000\left(1 + 12\,\%\frac{7}{12}\right)^{-1} \\
C_4^* &= 50\,000\left(1 + 12\,\%\frac{9}{12}\right)^{-1} \\
C_f^* &= C_f\left(1 + 12\,\%\frac{12}{12}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

Con lo que:

$$
\begin{aligned}
C_1^* &= 98\,039{,}21 \\
C_2^* &= 85\,714{,}28 \\
C_3^* &= 186\,915{,}88 \\
C_4^* &= 45\,871{,}55 \\
C_f^* &= C_1^* + C_3^* - C_2^* - C_4^*
\end{aligned}
$$

Finalmente:

$$C_f^* = 153\,369{,}25$$

$\boxed{C_f = 171\,773{,}56}$

Problema 61. *Calcular el valor final y actual de una renta pospagable de* 100 *anuales durante 5 años al 4 % anual.*

El valor actual de una renta pospagable viene por:

$$\text{VA}_{pos} = 100 \frac{1 - (1 + 4\,\%)^{-5}}{4\,\%}$$

$$\text{VA}_{pos} = 445{,}18$$

$$\text{VF}_{pos} = 445{,}18\,(1 + 4\,\%)^5$$

$$\text{VF}_{pos} = 541{,}63$$

Problema 62. *Si un cliente le dispone de* $100\,000$ *para ponerlos en modo renta, indique el valor de la renta anual si el plazo es por 15 años y se puede invertir al 3 % anual.*

Se trata de encontrar el cupón anual de la renta, se supone pospagable al no indicarse otra cosa. De la expresión para VA$_{pos}$ se puede despejar el cupón de la renta:

$$100\,000 = C\frac{1-(1+3\,\%)^{-5}}{3\,\%}$$

$\boxed{C = 8\,376{,}65}$

Problema 63. *Si quedan 10 años para la jubilación de un cliente, y puede invertir en el mercado al* $3{,}5\,\%$*. Indique la cantidad que tiene que aportar el cliente para disponer de un capital de* $200\,000$ *cuando llegue el momento de jubilarse.*

En este caso se indica el valor final de la renta, que se supone pospagable por tanto:

$$\text{FV}_{pos} = 200\,000 = \text{VA}_{pos}\,(1+3{,}5\,\%)^{10}$$

$$\text{VA}_{pos} = \frac{200\,000}{(1+3{,}5\,\%)^{10}} = 141\,783{,}76$$

De la expresión del valor actual de una renta pospagable se tiene:

$$\text{VA}_{pos} = 141\,783{,}76 = C{\cdot}S_n$$

$$S_n = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = 8{,}31660$$

$$141\,783{,}76 = 8{,}31660{\cdot}C$$

$\boxed{C = 17\,048{,}27}$ al año.

Problema 64. *Calcular el pago anual de una hipoteca de* 200 000 *al 3 % anual durante 10 años, con pagos realizados al principio de cada año.*

Este tipo de pagos se corresponden con una renta prepagable con pagos anuales (liquidaciones). Con lo que se puede obtener el cupón jugando con las expresiones de las rentas se tiene:

$$\begin{aligned} S_n &= C\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right) \\ \mathrm{VA}_{pos} &= C{\cdot}S_n \\ \mathrm{VA}_{pre} &= \mathrm{VA}_{pos}\,(1+r) \end{aligned}$$

$$\text{Donde:}\begin{cases} r = 3\,\% \\ n = 10 \\ \mathrm{VA}_{pre} = 200\,000 \end{cases}$$

$$\mathrm{VA}_{pos} = 194\,174{,}76$$

$$S_n = 8{,}53$$

$\boxed{C = 22\,763{,}21}$ al año.

Problema 65. *Calcular el valor actual de una renta de* 100 *mensuales a un 3 % TAE.*

Estos flujos financieros, conforman una renta perpetua, si bien los pagos se realizan de forma mensual, y el tipo de la operación es denominado en años. Por tanto el primer paso consiste en encontrar el tipo mensual equivalente. Se buscará un tipo compuesto, al ser con este tipo con el que se ha resuelto el VA de una renta.

Recordando la definición de TAE, es un tipo anual compuesto, por tanto el tipo mensual compuesto equivalente.

$$C_f = C_i\left(1 + r_c^m\right)^{meses}$$

$$C_f = C_i\left(1 + r_c^y\right)^{años}$$

Suponiendo un año, los importes iniciales y finales deben ser los mismos, para que los tipos sean equivalentes:

$$(1 + 3\,\%)^1 = \left(1 + r_c^m\right)^{12}$$

$$r_c^m = 0{,}25\,\%$$

Como es una renta perpetua, se puede suponer pospagable al no indicarse otra cosa:

$$\widetilde{\mathrm{VA}}_{pos} = \frac{C^m}{r_c^m} = \frac{100}{0{,}25\,\%}$$

$\boxed{\widetilde{\mathrm{VA}}_{pos} = 40\,547{,}06}$

Problema 66. *Calcular el pago mensual de una hipoteca de* $200\,000$*, a 10 años, con un 3 % TAE, si los pagos son al inicio de cada periodo.*

Buscar el tipo mensual equivalente.

$\boxed{C = 1\,922{,}73}$

Problema 67. *[5]Su empresa ha decidido vender maquinaria con un coste de* $100\,000$*, sobre la que se aplica un 20 % de beneficio. Para hacer más atractiva la oferta a posibles clientes, se quiere dar* *una facilidad de pago consistente en: Pago "UP-FRONT" del 40 %, y el 60 % restante en 8 letras anuales, después de cargar un 10 % la parte aplazada. Obtenga el importe de cada letra si su empresa consigue financiarse al 4.5 %. Calcule el coste final de la mercancía desde el punto de vista de un cliente.*

Para calcular el importe de la letra se tendrá en cuenta la distribución de capitales:

	Coste	100 000
20 %	Beneficio:	+20 000
	Total:	120 000
40 %	Contado:	48 000
60 %	Plazo:	72 000
10 %	Recargo:	+7 200
	Total Plazo:	79 200

Por tanto hay que encontrar el cupón de una renta de 8 pagos, cuyo valor actual es de 79 200.

$$\begin{aligned} S_n &= C\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right) \\ \mathrm{VA}_{pos} &= C\cdot S_n \end{aligned}$$

$$S_n = 6{,}6$$

$\boxed{C = 12\,007{,}48}$

Problema 68. *Calcular el tipo de interés nominal anual con pagos trimestrales que equivale a un tipo continuo del 3 % para 2 años.*

Se pueden usar las expresiones de capitalización para obtener los tipos por medio de importes equivalentes, donde T son trimenstres:

$$\begin{aligned} C_f &= C_i e^{rt} \\ C_f &= C_i \left(1 + r_t T\right) \end{aligned}$$

Igualando:

$$e^{3\,\% \cdot 2} = 1 + 8 r_t$$

$$r_t = 0{,}7730\,\%\, trimestral$$

Luego por importes equivalentes se puede obtener el tipo anual equivalente:

$$(1y) \cdot r_y = r_t \cdot 4_{trimestres} = 3{,}09\,\%$$

$\boxed{r_y = 3{,}09\,\%}$

Problema 69. *Un activo que comineza el año en* $12{,}34$*, tiene una log-rentabilidad media mensual de* $0{,}78\,\%$*, ¿A qué precio cierra el año?.*

Las log-rentabilidades se pueden sumar de forma directa, por lo que 12 veces la log-rentabilidad mensual equivale a la log-rentabilidad anual:

$$12 \cdot 0{,}78\,\% = 9{,}36\,\%$$

Por la definición de log-rentabilidad:

$$r_{log} = \ln\left(\frac{C_f}{C_i}\right) \to 9{,}36\,\% = \ln\left(\frac{C_f}{12{,}34}\right)$$

Despejando:

$\boxed{C_f = 13{,}55}$

Problema 70. *Si usted recibe un pago dentro de 1 mes de* $1\,000$*, ¿qué valor actual tienen estos* $1\,000$*, si usted pudiera invertir a un 3 % anual?*

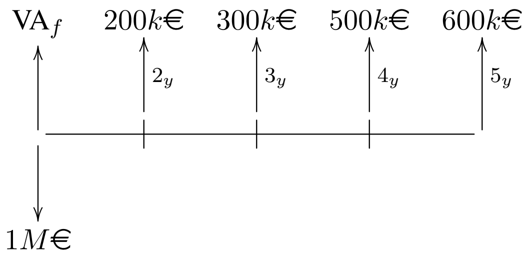
De forma directa por medio del factor de descuento:

$$\text{VA} = \frac{1000}{(1+3\,\%)^{1/12}}$$

$\boxed{\text{VA} = 997{,}539}$

Problema 71. *Un proyecto requiere de una inversión inicial de* $1\,000\,000$*, y se espera recibir* $200\,000$ *en 2 años,* $300\,000$ *en 3 años,* $500\,000$ *en 4 años, y* $600\,000$ *en 5 años. Teniendo en cuenta que puede invertir al 3 %, cual es el valor actual de esta inversión.*

El esquema de flujos del proyecto es el siguiente:



El valor actual de los flujos de entrada VA$_f$ ser´a:

$$\begin{aligned}
\mathrm{VA}_f &= \frac{200k€}{(1+3\,\%)^2} + \frac{300k€}{(1+3\,\%)^3} + \\
&+ \frac{500k€}{(1+3\,\%)^4} + \frac{600k€}{(1+3\,\%)^5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{VA}_f &= 188\,519{,}18 + 274\,542{,}49 + \\
&= 444\,243{,}52 + 517\,565{,}27
\end{aligned}$$

Como se debe tener en cuenta el pago de $1\,000\,000$ a día de hoy, el valor actual de la inversión será:

$$\mathrm{VA} = \mathrm{VA}_f - 1\,000\,000$$

$\boxed{\text{VA} = 424\,870{,}42}$

Problema 72. *Un fondo de inversión cuya participación, costó hace un año y tres meses,* $1\,237$*, hoy cuesta* $1\,824$*, ¿Cual es la TAE de esta operación?*

Un año y tres meses con 15 meses, por lo que considerando que la TAE es un tipo anual compuesto, se puede despejar de la ecuación de capitalización compuesta:

$$C_f = C_i\,(1+r)^t$$

$$\text{Donde:}\begin{cases} t = {}^{15}\!/_{12} \\ C_f = 1\,824 \\ C_i = 1\,237 \end{cases}$$

$$\frac{1\,824}{1\,237} = (1+r)^{15/12}$$

$\boxed{r_y = TAE = 36,43\,\%}$

Problema 73. *Calcule el tipo de interés nominal de un producto que paga de forma mensual, una TAE de* $4{,}25\,\%$*.*

Directamente de la ecuación que relaciona TAE y TIN:

$$1 + 4{,}25\,\% = \left(1 + \frac{TIN}{12}\right)^{12}$$

$\boxed{TIN = 4{,}17\,\%}$

Problema 74. *Si su fondo de inversión acumula las siguientes rentabilidades mensuales: 3 %, -2 %, 4 %, 5 %, -2 %. Calcule la TAE de esta inversión.*

Se puede obtener el siguiente cuadro de revalorización:

C_0	–	100,00
C_1	$3\,\%$	103,00
C_2	$-2\,\%$	100,94
C_3	$4\,\%$	104,97
C_4	$5\,\%$	110,22
C_5	$-2\,\%$	108,01

Luego: $\begin{cases} t = {}^{5}/_{12} \\ C_f = 108{,}01 \\ C_i = 100{,}00 \end{cases}$

Por tanto, contando con que TAE, es el tipo anual compuesto equivalente de la operación:

$$C_f = C_i\,(1 + TAE)^t$$

$$TAE = \left(\sqrt[5/12]{\frac{108{,}01}{100{,}00}}\right) - 1$$

$\boxed{TAE = 20{,}31\,\%}$

Apéndice B

Problemas propuestos de Examen.

B.1. Curso 2010-2011.

B.1.1. Febrero 2011.

Problema 75. *Se quiere estudiar un producto financiero denominado Apple Garantizado.*

Productos garantizados son aquellos que aseguran a vencimiento, que el cliente recibe, el 100 % de la inversión inicial, en el peor de los casos.

Para conseguir esto, la inversión del cliente, se invierte (una parte) en la compra de un instrumento cupón cero (renta fija), otra parte se destina la compra de acciones de Apple, y lo restante se deja en depósito.

En adelante:

$$\begin{cases} I & \textit{Inversión inicial del cliente} \\ B & \textit{Parte Invertida en Renta Fija} \\ I_{ac} & \textit{Parte Invertida en Acciones} \\ C_{depo} & \textit{Parte en depósito} \end{cases} \rightarrow I = B + I_{ac} + C_{depo}$$

El producto se comercializa bajo las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \textit{Inversión Mínima:} & I = 50\,000 \,€ \\ \textit{Cancelación:} & \textit{No se permite cancelación anticipada} \\ \textit{Plazo de inversión} & T = 3\,\text{años} \end{cases}$$

Se pide:

a) Si al instrumento de renta fija se aplica un tipo $r_B = 6\,\%$ *para los 3 años de la inversión, calcular la cantidad* B *que hay que comprar hoy de tal manera que a vencimiento se asegure la inversión* $I = 50\,000\,€$ *del cliente.*

b) Calcule la cantidad D *disponible para la compra de acciones, una vez comprada la cantidad* B *de renta fija.*

c) Con la cantidad de dinero D *se compra cierto número de acciones de Apple. Si el precio de las acciones de Apple es* $P_{ini}^{(acc)} = 300\,€$ *por acción, y sólo se puede comprar un número entero de acciones en mercado, ¿Cuántas acciones* N_{ac} *se pueden comprar con la cantidad* D*?*

d) Este Nacc (número de acciones compradas de Apple) según su precio de adquisición da la cantidad I_{ac}*, del disponible* D *que se ha invertido efectivamente en las acciones de Apple. Calcule* I_{ac}*.*

e) El resto es la cantidad C_{depo} que se invierte en un depósito. Obtenga C_{depo}.

f) Si C_{depo} se invierte en un depósito al $r_{depo} = 4\,\%$ anual compuesto, calcule el valor a vencimiento I_{depo} de este capital.

g) A vencimiento cada acción de Apple está a 330 €, se venden N_{ac} acciones en mercado, compradas al inicio con lo que se obtiene cierta cantidad de dinero V_{ac}, calcule V_{ac}.

h) El valor de la estructura al final de la inversión, será la suma de los valores a vencimiento del instrumento cupón cero ($50\,000$ €), más lo por las acciones V_{ac}, más la cantidad en depósito I_{depo}. Calcule este valor final V_f.

i) Obtenga la rentabilidad logarítmica anualizada y la rentabilidad compuesta anualizada de la inversión.

j) Si el precio de la acción de Apple estuviera en $231{,}14$ € vuelva a calcular la rentabilidad compuesta anual y compárela con el tipo libre de riesgo que ofrece el depósito (4 %). Ante esta eventual situación ¿Dónde hubiera sido preferible invertir, todo en Depo o en estructura?

Problema 76. *Una letra del tesoro a la que le quedan 159 días con nominal $1\,003$ € descontada al $5{,}24\,\%$ hoy vale.*

a) $1\,025{,}88$ €

b) $1\,026{,}21$ €

c) $980{,}63$ €

d) $980{,}31$ €

Problema 77. *Obtenga el valor final de invertir $1\,349$ € en un depósito a 3y, que paga el primer año $4{,}84\,\%$, el segundo año $3{,}96\,\%$, y el tercero un $3{,}62\,\%$.*

a) $1\,516{,}55$ €

b) $1\,194{,}47$ €

c) $1\,523{,}52$ €

d) No hay datos para responder.

Problema 78. *Si un depósito que dura* $2{,}8$ *años ofrece un* $3{,}12\,\%$ *TAE, ¿en cuanto se convierten* $1\,348$ €*?*

a) $1\,236{,}89$ €

b) $1\,465{,}76$ €

c) $1\,239{,}70$ €

d) $1\,469{,}10$ €

Problema 79. *Un fondo de inversión se ha revalorizado un* $0{,}49\,\%$ *mensual. Si el fondo arrancó en un valor liquidatvo de* 230 € *¿Cuál es el valor liquidativo final del fondo al final de 4 meses? (Utilice capitalización compuesta).*

a) $234{,}541\,2$ €

b) $225{,}546\,7$ €

c) $234{,}508\,0$ €

d) $225{,}578\,7$ €

Problema 80. *Si compra un activo por* $1\,400$ € *y lo vende por* $1\,504$ €*, tras 20 meses. ¿Qué tipo anual compuesto tiene la operación?*

a) $5,640784\,\%$

b) No hay datos para responder

c) $4,393121\,\%$

d) $5,746193\,\%$

Problema 81. *Se van a invertir* $1\,000$ €*, a seis meses en dos depósitos encadenados, de 3 meses cada uno. Dado el euribor a 3 meses (€3M* $= 1{,}72\,\%$*) y el euribor a 6 meses (€6M* $= 2{,}75\,\%$*), ¿a qué tipo se tendría que invertir el dinero durante el segundo depósito para que no exista arbitraje de tipos hoy?*

a) $0,685289\,\%$

b) $2,235000\,\%$

c) $3,763816\,\%$

d) $1,030000\,\%$

Problema 82. *Un depósito ofrece un TAE del 5 %, durante un trimestre ¿Qué tipo nominal tiene?*

a) No hay datos para responder

b) $5,094534\,\%$

c) $4,908894\,\%$

d) $4,8282\,\%$

Problema 83. *Calcule el valor actual de una inversión en la que se ingresan* $1\,000$ € *el primer año,* $2\,000$ € *el segundo año,* 500 € *el cuarto año, y un abono de* $3\,500$ € *el tercer año. Los tipos están a:*

$[1_y \to (2{,}19\,\%)]$

$[2_y \to (2{,}71\,\%)]$

$[3_y \to (3{,}19\,\%)]$

$[4_y \to (3{,}37\,\%)]$

-

a) $-143{,}10$ €

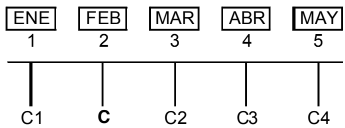
b) $-137{,}25$ €

c) $122{,}04$ €

d) $127{,}00$ €

B.1.2. Junio 2011.

Problema 84. *Si tiene el calendario de pagos de la tabla siguiente y sabiendo que ha conseguido negociar con su acreedor una reestructuración de la deuda consistente en cambiar todos esos pagos por un único pago a realizar en FEBRERO. Se pide calcular el pago equivalente a realizar en FEBRERO, si los tipos están al 12 % simple anual y la base de cálculo es 30/360 (todos los meses son iguales).*

Fecha	*Pagos*		
Enero	100 000 €	C_1	
Febrero	*¿?*	C	
Marzo	50 000 €	C_2	
Abril	60 000 €	C_3	
Mayo	90 000 €	C_4	

Problema 85. *Suponga una letra (de 12 meses) que hoy vale en mercado 92.00 %, a la que le quedan 180 días para vencer. Esta letra estaba en mercado el día de emisión a un precio de 90.70 %. Suponiendo que se mantiene constante la rentabilidad inicial de la letra. Bajo estos supuestos, usted:*

a) La compro porque hoy está infravalorada por el mercado.

b) La vendo, porque hoy está sobrevalorada por el mercado.

c) Me quedo igual, ya que el precio de la letra hoy es igual al de mercado.

d) No tengo datos suficientes para resolver el problema.

Problema 86. *Si se invierte en un depósito a 3 años una cantidad inicial de* 1 350 € *y al final se obtienen* 1 600 €*. ¿Cuál es el tipo de* *interés del tercer año, si durante el primer año se aplica un 5 % de interés y el segundo un 6 % de interés?*

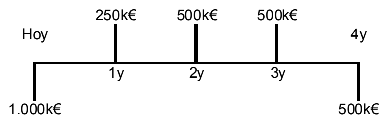
a) 10.5478 %

b) 6.4856 %

c) No tengo datos suficientes para resolver el problema.

d) 5.6578 %

Problema 87. *Dada la siguiente curva de tipos anuales compuestos, indique si el proyecto es ventajoso o no de cara al banco.*

Plazo	*Tipo*	*Operación*
1_y	2,19 %	
2_y	2,41 %	
3_y	2,65 %	
4_y	2,92 %	

a) SI renta porque ganamos como banco aproximadamente 40 000 €.

b) NO renta porque perdemos como banco aproximadamente 40 000 €.

c) Da lo mismo porque ni se gana ni se pierde.

d) No tengo datos suficientes para resolver el problema.

Problema 88. *Si un fondo acumula las siguientes rentabilidades mensuales simples: 3 %, -2 %, 4 %, 5 %, -2 %. Se puede decir que tiene una TAE equivalente de:*

a) No tengo datos suficientes para resolver el problema.

b) Aproximadamente $-10{,}55\,\%$.

c) Aproximadamente $18{,}68\,\%$.

d) Aproximadamente $20{,}35\,\%$.

Problema 89. *Calcular el tipo anual compuesto equivalente, que se tiene al invertir durante 2 años, la cantidad inicial de* 100 € *si se aplica un interés compuesto mensual de* $0{,}3979\,\%$.

a) $7{,}59\,\%$

b) No tengo datos suficientes para resolver el problema.

c) $4{,}88\,\%$

d) $2{,}58\,\%$

Problema 90. *Vamos a preparar un plan de ahorro con el fin de comprar un inmueble valorado en* $250\,000$ €.

Para ello se van a ahorrar durante los próximos 4 años ciertas cantidades y luego se comprará el inmueble por el precio mencionado antes.

De forma paralela:

1) Se ingresa en una cuenta ahorro vivienda (CAV), la cantidad de $10\,000$ € *al final de cada año (durante los próximos 4 años). Este tipo de cuentas funciona como una renta al 4.00 % anual.*

2) Como de lo ingresado en la CAV cada anualidad, nos desgravamos un 15 %, esta cantidad la ingresamos en una libreta de ahorro (LA) al 2.50 % anual. También funciona como una renta.

Tras los cuatro años se recupera el dinero de la CAV y de la LA, y se pide el resto hasta el coste total de compra del inmueble, en modelo de hipoteca.

El inmueble está valorado en $250\,000$ €, *si bien hay un 7 % sobre esta cantidad en concepto de impuestos (IVA), otro 2 % sobre el precio de compra en concepto de actos jurídico- documentales. (AJD) y un 1 % sobre el precio de adquisición en otros conceptos o gastos (pasantes, tasación, etc.).*

El objetivo del problema es calcular la cuota de una hipoteca a tipo fijo del 2.50 % anual compuesto, a 25 años, sobre la cantidad a pedir al banco. El pago de la hipoteca es por el método francés, y la frecuencia de pagos es mensual.

Se pide:

a) Obtenga el valor final de las cuentas de ahorro.

b) Cálculo del coste total de la operación de compra (incluyendo impuestos y gastos).

c) Calcular el importe a pedir al banco en la hipoteca si la cantidad obtenida en 2 se usa totalmente en la compra de la vivienda.

d) Calcular la letra (cuota) de la hipoteca en modo de amortización francés a un tipo fijo del 2.50 % anual compuesto, a 25 años, con frecuencia de cuotas mensual.

e) Según normativa no se puede conceder la hipoteca si la cuota neta mensual supera el 40 % del sueldo neto del solicitante. Con este dato y el importe de cuota calculado en (d) calcule el sueldo mínimo neto que debe ganar para que le concedan la hipoteca.

Problema 91. *Enhorabuena!!! Acaba de ser premiado con el "sueldo Nescafé" consistente en una renta anual de* 12 000 € *durante los próximos 10 años. Calculada al 2 % anual. El premio lo puede recibir en formato de renta o su equivalente en valor actual. Si usted descuenta que los tipos de interés van a subir los próximos años, Razone en términos financieros si es mejor recibir la renta o su valor actual.*

Problema 92. *Si tiene dos bonos con igual frecuencia de pago de cupones fijos, y con el mismo vencimiento, indique cual de las siguientes afirmaciones es cierta en cuanto al precio:*

a) El bono con cupones más grandes es más sensible a cambios de TIR.

b) El bono con cupones más pequeños es más sensible a cambios de TIR.

c) El precio de los bonos depende sólo de los cupones y del vencimiento.

d) El precio de los bonos se mueve en el mismo sentido que la TIR.

Problema 93. *Indique cual de las siguientes respuestas es verdadera:*

a) El método de amortización francés tiene cuotas iguales.

b) El método de amortización alemán tiene cuotas iguales.

c) El método de amortización americano en toda cuota se paga intereses y capital.

d) En hipotecas con referencia a Euribor, con pago francés, la cuota es siempre constante.

Problema 94. *Dada una rentabilidad media mensual de 0.30 % y una volatilidad diaria del 5 % indique cual es cierta si el año hay 12 meses o 252 sesiones de bolsa.*

a) La volatilidad anual es del 79.37 % y la rentabilidad anual es del 3.60 %.

b) La volatilidad anual es del 79.37 % y la rentabilidad anual es del 75.60 %.

c) La volatilidad anual es del 126 % y la rentabilidad anual es del 75.60 %.

d) No hay datos suficientes para calcular datos anualizados.

B.1.3. Septiembre 2011.

Problema 95. *Un inmueble produce unos alquileres de* $2\,000\,000$ € *pagaderos al principio de cada mes. Sabiendo que se han de abonar* $250\,000$ € *al final de cada trimestre en concepto de gastos de mantenimiento y* $400\,000$ € *al finalizar cada semestre por impuestos, determinar el valor actual de las rentas si se aplica un tipo del 5 % anual.*

Problema 96. *Una persona tiene derecho a recibir una renta pospagable de* $100\,000$ € *semestrales durante 10 años y desea sustituirla por un único capital "C" a percibir dentro de 5 años. Obtenga ese capital, sabiendo que se utiliza un tipo del 9 % anual compuesto.*

Problema 97. *Un capital ha estado colocado durante 2 años al 9 % anual; la cantidad obtenida al final de estos dos años se colocó al 5 % semestral durante los 3 años siguientes, y se han obtenido al final* $796\,084$ €*. ¿Cuál es la cuantía inicial invertida?*

Problema 98. *Un proyecto hoy requiere 1.000.000 € y se propone el siguiente plan de retorno:* $250\,000$ € *al final del primer año.* $500\,000$ € *al final del segundo año y* $350\,000$ € *al final del tercer año. Calcule el beneficio esperado del proyecto si los tipos a plazo son los del siguiente cuadro.*

	Tipo	$P(0,t)$
r_1	$2,50\,\%$	0,97561
r_2	3,00 %	0,94260
r_3	3,50 %	0,90194

Problema 99. *Si un fondo de inversión tiene un 5 %, 7 %, -3 %, 2 %, -5 % de rentabilidad mensual, calcule el valor final si se invirtieron* 1 000 €*, y la rentabilidad anual compuesta equivalente.*

B.2. Curso 2011-2012.

B.2.1. Febrero 2012.

Problema 100. *Calcular el tipo TAE de un depósito que paga un 0.0115622 % compuesto diario si un año tiene 360 días.*

a) 4.25 %

b) 4.17 %

c) 3.46 %

d) Ninguna de las anteriores.

Problema 101. *Calcular el TIN de un producto cuyo TAE es el 5.25 %, si el producto paga mensualmente.*

a) 5.12 %

b) 5.38 %

c) 2.32 %

d) 3.54 %

Problema 102. *Un proyecto requiere de una inversión inicial de* 1 000 000 €*. Se van a cobrar* 200 000 € *dentro de 10 años,* 250 000 € *dentro de 15 años y* 650 000 € *dentro de 30 años, y los tipos están al 5 %. El banco:*

a) Acepta la operación porque la inversión tiene 100 000 € *de beneficio.*

b) Rechaza la operación porque la inversión tiene 600 000 € *de pérdidas.*

c) Acepta la operación porque la inversión tiene $393\,000$ € *de beneficio.*

d) Ninguna de las anteriores.

Problema 103. *Calcular el tipo de interés nominal anual (simple) con pagos trimestrales que equivale a un tipo continuo del 6 %, para una inversión de un año.*

a) 3.5498 %

b) 2.3247 %

c) 1.5459 %

d) Ninguna de las anteriores.

Problema 104. *Si su empresa tiene que hacer frente a un pago de* $100\,000$ € *dentro de 2 meses, a* $100\,000$ € *dentro de 7 meses, pero por un alquiler va a ingresar* $100\,000$ € *dentro de 5 meses y* $75\,000$ € *dentro de 9 meses. Suponga que llega a un acuerdo con su banco para cambiar estos flujos por un único pago/cobro dentro de 12 meses. Calcule este flujo si los tipos son del 10 % para todos los plazos de la operación.*

a) $15\,437$ € *aprox.*

b) $29\,789$ € *aprox.*

c) $32\,544$ € *aprox.*

d) $44\,359$ € *aprox.*

Problema 105. *Si el "Depósito Cuenta Morada" ofrece un 7 % compuesto anual los 4 primeros meses y un 1.25 % anual compuesto el resto del año. ¿Qué tipo TAE tiene la operación?*

a) 3.1861 %

b) 3.1315 %

c) 3.0205 %

d) 3.3526 %

Problema 106. *Si una inversión de* $1\,000$ € *al inicio, acumula las siguientes rentabilidades mensuales, 2 %, -3 %, 5 %, 7 %, -5 %, 1 %. Calcules el capital final de la inversión.*

a) $1\,066{,}57$ € *apx.*

b) $989{,}32$ € *apx.*

c) $1\,253{,}37$ € *apx.*

d) $1\,100{,}02$ € *apx.*

Problema 107. *Si un activo empieza el año en* 25€/acc*, y su log-rentabilidad anual es del 7.5 %, el precio del activo al final del año será:*

a) $26,995$€/acc.

b) $25,326$€/acc.

c) $26,875$€/acc.

d) $26,94$€/acc.

Problema 108. *Si el "Depósito Gris" a 30 meses de* $10\,000$ € *nos regala un iPad valorado en* 500 € *como remuneración, y el "Depósito Magenta" a 30 meses de* $10\,000$ € *nos paga el 3.70 % TAE, a la vista de comparar financieramente ambos, nos quedamos con:*

a) El depósito Magenta, porque el beneficio es de 950 €*, que es mayor que el valor del iPad.*

b) El depósito Gris,porque el valor del iPad es mayor que el beneficio del depósito Magenta.

c) No se puede comparar un bien físico con un beneficio financiero.

d) El depósito Gris que me dan el iPad hoy y eso tiene más valor.

B.2.2. Junio 2012.

Problema 109. *Si hoy se emite una letra de nominal* 1 000 € *a 18 meses (540 días), a un tipo del 3 % anual simple. ¿Qué precio tiene esta letra hoy?*

Problema 110. *Si tiene que pagar* 100 000 € *dentro de 3 meses, y otros* 100 000 € *dentro de 9 meses, pero tendrá un ingreso de* 200 000 € *dentro de 6 meses. Si acuerda con su banco el cambio de estos flujos por uno equivalente dentro de 12 meses, calcule este flujo si los tipos están al 10 %.*

Problema 111. *Un proyecto requiere de una inversión inicial de* 1 000 000 €*. Se van a cobrar* 300 000 € *dentro de 2 años,* 300 000 € *dentro de 4 años y* 1 300 000 € *dentro de 4 años, y los tipos a 2, 4 y 10 años son (respectivamente) 3 %, 5 %, 8 %. Calcule el VA del proyecto.*

Problema 112. *Si un fondo acumula las siguientes rentabilidades mensuales (+3 %, -2 %, +4 %, -2 %) Calcule la TAE de una inversión de* 100 €*.*

Problema 113. *Si le quedan 20 años para jubilarse indique cuanto debe poner cada año en una renta para tener al final* 300 000 € *si negocia un tipo del 4 % TAE (Suponer pospagable).*

Problema 114. *Suponga que tiene un préstamo hipotecario con pago de cuota mensual a 10 años, de* $120\,000$ € *y a un tipo fijo del 3 % TAE. Amortización método FRANCES. Especifique el esquema de reparto de amortización para las primeras 3 cuotas.*

Problema 115. *Suponga que tiene un préstamo hipotecario con pago de cuota mensual a 10 años, de* $120\,000$ € *y a un tipo fijo del 3 % TAE. Amortización método ALEMAN. Especifique el esquema de reparto de amortización para las primeras 3 cuotas.*

Problema 116. *Calcule el coeficiente de determinación de dos activos con covarianza de* $0{,}0736$*, y desviaciones típicas de 0.2 y 0.4*

Problema 117. *Si la Varianza diaria de los rendimientos de u activo es* $0{,}00064$*, calcule la volatilidad anual.*

Problema 118. *Calcule el ratio de Sharpe de una cartera de dos activos* A*,* B*, cuyos pesos son* $\omega_A = 40\,\%$ *y* $\omega_B = 60\,\%$*. Las rentabilidades mensuales son* $x_A = 1{,}25\,\%$ *y* $X_B = 2{,}25\,\%$*. La volatilidad diaria de los activos es* $\sigma_A = 2{,}53\,\%$ *y* $\sigma_B = 1{,}265\,\%$*. La correlación entre* A *y* B *es de* $\rho = -0{,}2$ *y el tipo libre de riesgo es* $r_{TLR} = 4\,\%$*.*

B.2.3. Septiembre 2012.

Problema 119. *Usted hoy invierte en la compra de* $1\,017$ *títulos de un activo que vale hoy* $S_0 = 100$ €*, inversión que mantiene durante 3 años. Al final de estos tres años el activo valdrá según la siguiente expresión:*

$$S_T = S_0 e^{\left(-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma\sqrt{T}\right)}$$

Donde σ es la volatilidad anual y T está expresado en años.

La varianza diaria histórica de activo es $V = 0{,}00064$ y usted debe suponer que será la aplicable.

a) Calcule el valor INICIAL de la inversión en euros, tenga en cuenta que tiene $1\,017$ títulos.

b) Calcule el valor FINAL de la inversión en euros, tenga en cuenta que tiene $1\,017$ títulos.

c) Calcule el rendimiento logarítmico de la operación.

d) Calcule la TAE equivalente de esta operación.

El dinero obtenido tras estos tres primeros años se usa para pagar parte de una propiedad valorada en $300\,000$ €, el resto del dinero hasta los $300\,000$ € se pide en una hipoteca a 10 años, de amortización francesa, pagadera mensualmente, al tipo de interés del 3 %.

e) Calcule las tres primeras filas del cuadro de amortización.

Problema 120. *Calcule el ratio de Sharpe de una cartera de dos activos A, B, cuyos pesos son $\omega_A = 20\,\%$ y $\omega_B = 80\,\%$. Las rentabilidades mensuales son $x_A = 2{,}00\,\%$ y $X_B = 3{,}00\,\%$. La volatilidad diaria de los activos es $\sigma_A = 3{,}00\,\%$ y $\sigma_B = 4{,}00\,\%$. La correlación entre A y B es de $\rho = -0{,}5$ y el tipo libre de riesgo es $r_{TLR} = 4\,\%$.*

B.3. Curso 2012-2013.

B.3.1. Febrero 2013.

Problema 121. *Calcule el capital equivalente C que hay que abonar dentro de dos y cuatro años a partir de hoy, que sustituye un pago de $100\,000$ € dentro de un año, de $200\,000$ € dentro de tres años, y de $300\,000$ € dentro de cinco años, teniendo en cuenta que los tipos a plazo son:*

Pazo	*Tipo*
$1y$	$1{,}5\,\%$
$2y$	$2{,}0\,\%$
$3y$	$2{,}5\,\%$
$4y$	$3{,}0\,\%$
$5y$	$3{,}5\,\%$

Problema 122. *Si las rentabilidades mensuales simples de un producto financiero son $+3\,\%$, $-3\,\%$, $+5\,\%$, $-5\,\%$, $+6\,\%$, $-6\,\%$, $+7\,\%$, y deshace la posición tras ese séptimo mes, calcule la TAE equivalente teniendo en cuenta que la comisión de salida del producto es de un $10\,\%$ sobre intereses generados, o cero en caso de pérdidas.*

Problema 123. *Una inversión de $10\,000$ € empieza el 15/05/2013 y termina el 20/07/2017 (USE BASE 30/360):*

1. Calcule el beneficio que queda tras impuestos ($21\,\%$ sobre beneficio) si el tipo aplicado es del $4\,\%$ desde el inicio de la inversión hasta el 18/06/2015, y del $6\,\%$ desde esta fecha hasta el vencimiento.

2. Calcule el tipo equivalente compuesto trimestral con la misma base.

Problema 124. *Teniendo en cuenta la curva de tipos dada en la siguiente tabla, ¿cuál es el tipo mínimo que debería pedir para aceptar una inversión compuesta de dos depósitos encadenados desde hoy hasta dentro de un año y desde dentro de un año hasta el siguiente?*

Plazo	*Tipo*
1y	*2 %*
2y	*4 %*
3y	*6 %*

Problema 125. *Calcule la inversión inicial que debe hacer en un proyecto en el que la TIR es del 10 %, si el proyecto debe pagar 20.000 Euros dentro de 2, 4 y 6 meses, y que tiene un único ingreso de 60.000 Euros dentro de1 año.*

B.3.2. Junio 2013.

Problema 126. *Calcular el tipo de interés simple trimestral que equivale a un tipo continuo anual del 4 %, para una operación a 2 años.*

Problema 127. *Calcule la inversión inicial que se debe hacer para comprar un bien de* 10 000 € *dentro de 10 años, si el banco le ofrece un 4 % anual compuesto con pago de intereses mensuales*

Problema 128. *Calcule el valor actual de una inversión en la que se reciben* 1 000 € *dentro de 1 año,* 2 000 € *dentro de 2 años,* 500 € *dentro de 4 años, pero se debe pagar en concepto de impuestos* 3 500 € *dentro de 3 años, si la curva de tipos es la siguiente:*

Plazo	*Tipo*
1y	*2.19 %*
2y	*2.71 %*
3y	*3.19 %*
4y	*3.37 %*

Problema 129. *Si tiene que pagar 100$ dentro de 1 año, luego recibe 400$ dentro de 3 años y finalmente tiene que pagar 220$ dentro de 5 años, Calcule el Valor actual de y el valor futuro (el del quinto año) de estos flujos si el tipo de interés es del 2 % anual.*

Problema 130. *Por una propiedad de valor 1.000.000$ hay que pagar un 1 % de impuestos dentro de 5 años, pero quiere poder pagarlo en dos cantidades iguales C el año 4 y el año 6. Calcule esta cantidad C si el tipo de la operación es del 3 % anual.*

Problema 131. *Calcule el dinero que se ha pedido en una hipoteca de amortización estilo francés, si le dicen que dura 10 años, que es de pagos anuales, que el tipo de interés es del 3 % anual, y que se paga una cuota de 23.446,10$*

Problema 132. *Calcular la cuota de amortización estilo americano, y la cantidad a depositar, en una operación tipo Sinking Fund, para un nominal de 1.000.000$ a devolver anualmente durante 20 años. Los tipos de préstamos y depósito son 4 % y 2 % respectivamente.*

Problema 133. *Si el activo A tiene un rendimiento diario de 0.01 %, y una volatilidad diaria del 2 %, y otro activo B tiene una rentabilidad diaria de 0.1 % y una volatilidad diaria de 4 %. Calcule sus ratios de Sharpe con una tasa libre de riesgo del 1 % anual e indique que activo debería comprar*

Problema 134. *Calcule las tres primeras cuotas (intereses y amortización) de un préstamo de amortización estilo francés, si se piden 250.000$, a 30 años, con pagos TRIMESTRALES, el tipo de interés es del 3 % ANUAL COMPUESTO.*

Problema 135. *Se quiere vender una hipoteca a la que le quedan 4 cuotas por pagar. Calcule el valor del usufructo, de nuda propiedad y de venta de la hipoteca si el tipo de interés anual está al 4.5 % Datos de la Hipoteca:*

- Nominal: 1.000.000$ y método de amortización francés a 20 años.
- Pagos anuales y tipo de interés fijo anual compuesto del 7 %.
- Cuadro de amortización:

N	I	K	C
16→17	22.381$	72.011$	94.392$
17→18	17.340$	77.052$	94.392$
18→19	11.946$	82.446$	94.392$
19→20	6.175$	88.217$	94.392$

B.4. Curso 2013-2014.

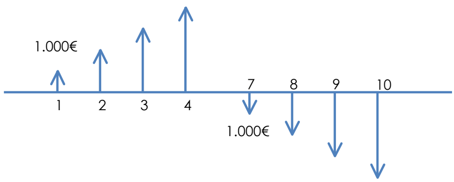
B.4.1. Febrero 2014.

Problema 136. *Hoy dispone de* $100\,000$ € *con los que debe realizar un pago de* $50\,000$ € *dentro de tres años y otro pago de* $75\,000$ € *dentro de cinco años. Para ello ha negociado con su banco y le ofrecen dos depósitos, uno a tres años al 5 % y otro a cinco años al 6.5 % (tipos compuestos). Se pide calcular la cantidad a invertir en cada uno de los depósitos para hacer frente a los pagos en su momento, e indicar la cantidad de dinero que hoy le falta o le sobra.*

Problema 137. *Calcule el tipo de interés compuesto en base Act/360 equivalente a un tipo de interés simple en base Act/365 del 10 % para una inversión inicial del* $1\,000\,000$ € *durante 720 días.*

Problema 138. *Tiene dos productos financieros que se inician hoy y terminan el mismo día. Uno es un depósito de 1.000€ a un tipo de interés del 2 % anual compuesto para un plazo de 6 años. El otro producto es un depósito de 1.000€ con interés variable en el que durante los dos primeros años le paga el 3 % compuesto anual, el siguiente año le paga el 3 % anual simple, y los últimos 3 años le paga el 3 % de interés continuo. Calcule el rendimiento logarítmico de la operación completa y el tipo compuesto equivalente de la operación completa.*

Problema 139. *Calcule el valor actual de una operación en a que el primer año cobra 1.000€, el segundo, tercero, y cuarto un 20 % más cada año con respecto al anterior. Posteriormente, en el año* *séptimo, debe pagar 1.000€, en el octavo, noveno y décimo año debe pagar un 30 % más que el año anterior. Los tipos de interés de la operación son para todos los plazos del 5 %.*



Problema 140. *Tiene previsto recibir 10.000€ dentro de un año, 20.000€ dentro de 2 años a partir de hoy, 30.000€ dentro de 3 años a partir de hoy, y 40.000€ dentro de 4 años a partir de hoy, pero prefiere cambiar estos flujos por otros equivalentes, así acuerda que sean dos flujos de 50.000€ cada uno. Calcule cuantos años tarda (a partir de hoy) en recibir el segundo de estos dos flujos si el primero lo recibe dentro de 1.5 años. El tipo acordado para la operación financiera es del 5 % para todos los plazos.*

B.4.2. Junio 2014.

Problema 141. *Usted trabaja como analista de control de gestión y planificación financiera de AFS (Abstergo Financial Services).*

La Corporación Abstergo quiere comenzar a fabricar una nueva serie de teléfonos de última generación. Para ello en la división de fabricación API (Abstergo Productive Industries) se solicita al departamento de planificación financiera AFS (Abstergo Financial Services) el estudio de viabilidad económica de un plan de negocio con las siguientes características.

El plan de fabricación de los teléfonos es por tres años, una vez cumplido el plazo de la fabricación se termina con la iniciativa. La fabricación va a necesitar de financiación inicial por lo que para encontrar una forma de rentabilizar la inversión, AFS va a estudiar los flujos financieros, y debe proponer un plan por el que rentabilizar el plan de negocio.

La financiación inicial conseguida se articula por medio de la concesión de un préstamo a API de 10.000.000 € por tres años, al 6 %, en formato Bullet (americano) con pago de cuota anual.

Para ello API facilita a AFS los siguientes datos relacionados con el coste de fabricación, y evolución estimada de las ventas.

Coste de material (por unidad)CUM	*CUM*	500 €
Coste Mano de obra y equipos (% del CUM)	*CMO*	*20 %*
Impuestos, Royalties, Aranceles (% del CUM)	*IRA*	*10 %*
Transporte y Comercialización (% del CUM)	*TyC*	*5 %*

Como ya se ha dicho, el plan de negocio es a tres años, y se estima el primer año se venderán 10.000 unidades, con un crecimiento anual de las ventas del 10 %, y un crecimiento del 5 % del coste de material (CUM).

n primer lugar, como analista debe calcular el valor de cada uno de los costes a lo largo de cada uno de los años que dura el plan de negocio, el valor del coste bruto de venta. Además como se desea conseguir un 10 % de margen sobre el coste de venta bruto, debe calcular la cantidad final (total unitario pvp) por la que se pondrá a la venta en escaparate de tienda (teléfono comercializado).

Rellene el cuadro con los valores correspondientes teniendo en cuenta el efecto de crecimiento de costes a lo largo del tiempo que dura el plan de negocio.

Concepto	Valor	Año 1	Año 2	Año 3
CUM	500€	500 €	€	€
CMO	20%	€	€	€
IRA	10%	€	€	€
TyC	5%	€	€	€
Coste Venta Bruto		€	€	€
Margen		€	€	€
Total Unitario Pvp		€	€	€

Como se debe estimar la cantidad de financiación necesaria, es imprescindible calcular el coste de fabricar las unidades estimadas cada año del plan de negocio, que entenderemos como cantidad a invertir para fabricar los teléfonos:

Concepto	Año 1	Año 2	Año 3
Unidades a fabricar	10.000		
Coste Venta Bruto	€	€	€
Necesidad de inversión	€	€	€

Ya conoce la cantidad de dinero mínima necesaria para fabricar los teléfonos, ahora es oportuno calcular la cantidad de dinero ingresado por la venta de lo fabricado.

Concepto	Año 1	Año 2	Año 3
Unidades a fabricar	10.000		
Pvp	€	€	€
Ingresos	€	€	€

Con esto, se puede calcular el resultado del año teniendo en cuenta que de los ingresos hay que pagar, por un lado los costes financieros del préstamo, que es pago anual, y hay que quitar la cantidad de dinero necesario como inversión.

Concepto	Año 1	Año 2	Año 3
Ingresos	€	€	€
(-) I Ptmo	€	€	€
(-) K Ptmo	€	€	€
(-) Necesidad de inversión	€	€	€
Resultado Estimado.	€	€	€

Ahora calcule el valor actual de estos flujos estimados si la curva de mercado es la siguiente:

Plazo	Tipo	Factor Descuento
1y	3%	0.970873786
2y	4,5%	0.915729951
3y	6%	0.839619283

Valores actuales de os flujos			
VA - Hoy	VA - Año 1	VA - Año 2	VA - Año 3
10.000.000 €	€	€	€
VA total:			

Estos flujos no interesan por lo que quieren cambiar por otros tres de igual cantidad C, financieramente equivalentes. Este servicio nos lo ofrece otro banco con el que se ha negociado un tipo constante del 7 %. Calcule el valor de estos flujos C, si sabe que se cobran al final de cada año.

Problema 142. *PROPUESTA DE ANÁLISIS DE RECUPERACIÓN POR VENTA O REESTRUCTURACIÓN DE PRÉSTAMO. ANTECEDENTES:*

Un promotor pidió al inicio de 2009 un préstamo para la compra y desarrollo de un suelo en Illán de Vacas (Toledo).

El préstamo era de 1.000.000€ de nominal al 7,5 % anual compuesto, a devolver en 8 años, con pagos anuales al final del periodo y método de amortización francés.

Hoy (2014), cinco años después, el cliente nos comunica que va a tener muchas dificultades para seguir pagando el préstamo y por lo tanto, nos solicita encontrar alguna solución para poder devolver el resto de la deuda los próximos 3 años (2014/2015/2016).

Solicitando un certificado de la deuda pendiente del cliente a inicios de (2014) se verifica que quedan por devolver 443.980,02€.

PROPUESTAS A ANALIZAR Y COMPARAR:

Se solicita la presentación de al menos dos formas de recuperar el dinero restante una por medio de la venta en mercado del préstamo, y otra por reestructuración del préstamo, cerrando el actual y abriendo otro en modo de amortización Bullet (americano) al 5,5 %.

Para calcular los valores actuales, suponga que el tipo es constante en mercado del 4 % de forma independiente al plazo. En primer lugar debe calcular el cuadro de amortización restante del préstamo.

Por ello calcule la Cuota del préstamo, y con ella el resto del cuadro de amortización.

Cuota anual:

Cuadro:

	Deuda	I	K	C
2014	443.980 €	€	€	€
2015	€	€	€	€
2016	€	€	€	€

Para calcular el valor del préstamo hoy calcule el valor de Usufructo y de Nuda Propiedad según condiciones de mercado:

	I	K	Usufructo	Nuda Prop.
2014	€	€	€	€
2015	€	€	€	€
2016	€	€	€	€
		Totales	€	€
			Valor de venta del Préstamo	€

Para poder comparar, será necesario calcular el valor de ven-

ta de la operación de reestructuración, para ello primero calcule el cuadro de amortización del préstamo en modo de amortización bullet (americano) con pagos anuales de interés y principal a vencimiento.

	Deuda	I	K	C
2014	443.980 €	€	€	€
2015	€	€	€	€
2016	€	€	443.980 €	€

Para calcular el valor del préstamo bullet hoy calcule el valor de Usufructo y de Nuda Propiedad según condiciones de mercado:

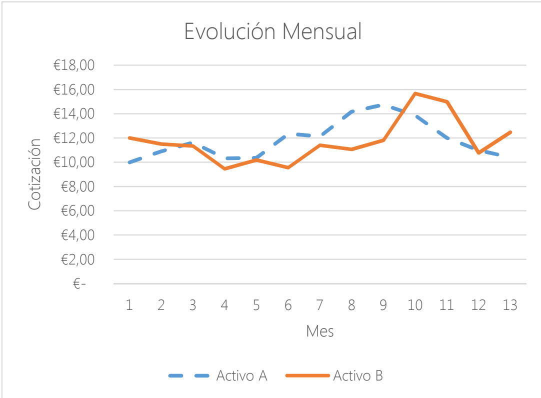
	I	K	Usufructo	Nuda Prop.
2014	€	€	€	€
2015	€	€	€	€
2016	€	€	€	€
		Totales	€	€
			Valor de venta de la reestructuración:	€

Si se le quisiera pedir en modo sinking fund, calcule la aportación al depósito si los tipos del depósito es el 2,5 %.

B.4.3. Septiembre 2014.

Problema 143. *Un familiar le pregunta su opinión como experto, sobre cuál de los dos siguientes activos hubiera sido la mejor inversión a la vista de sus cotizaciones de cierre mensual. Razone su decisión de inversión exclusivamente en función de criterios de matemáticas financieras.*

Mes	Activo A	Activo B
Inicio	10,00 €	12,00 €
1	10,91 €	11,49 €
2	11,64 €	11,33 €
3	10,32 €	9,46 €
4	10,37 €	10,19 €
5	12,35 €	9,55 €
6	12,14 €	11,40 €
7	14,18 €	11,06 €
8	14,75 €	11,82 €
9	13,86 €	15,67 €
10	12,01 €	14,99 €
11	10,98 €	10,76 €
12	10,40 €	12,48 €



Problema 144. *Calcule la cuota C que debe aportar de forma anual a una renta temporal post- pagable a tipo de interés r_i si le quedan D años para jubilarse y si quiere rescatar esta jubilación en forma de renta de cuota J, de duración perpetua a un tipo de interés r_p Particularice la expresión anterior si D es 20y, J son 2.000€, r_i es el 7 %, r_p es el 5 %.*

Problema 145. *Calcule las cuatro primeras cuotas de un préstamo a tipo variable (Euribor + spread de 1,75 %), de amortización francesa de nominal 100.000€, que tiene un vencimiento de 5 años, si los pagos son semestrales, la revisión de tipos es anual, y los tipos de referencia son: hoy el tipo de referencia es del 2.00 %, y el de dentro de un año 3.00 %.*

Problema 146. *Dado un producto financiero a 4 años, en el que se le indica que la primera mitad del tiempo, el dinero está invertido en activos que ofrecen un tipo del 5 % compuesto, mientras que el resto están invertidos en productos que dan un tipo continuo del X %. Calcule X sabiendo que la TAE del producto es del 10 %.*

B.5. Curso 2014-2015.

B.5.1. Febrero 2015.

Problema 147. *Calcule el importe a recibir por una operación de descuento de papel comercial a 180 días, en la que se firma sobre un nominal de 1.250.000€, bajo un descuento del 5 %, con una comisión del 3‰ (o comisión mínima de 4.000€) y gastos de llevanza de 300€. (Nota: Timbre para una operación de nominal hasta 192.323,87€ de 538,51€, el exceso hasta el tope de nominal se paga a 0,018€ por cada 6,01€ de exceso).*

Problema 148. *Si hay que invertir en cierto proyecto la cantidad de 10.000.000€ a cambio de recibir los próximos tres años una cantidad C al final de cada año. Calcule esta cantidad C si se desea tener una TIR en la inversión del 7 %.*

Problema 149. *Una inversión acordada en base 30/360 arranca el 2 de febrero de 2015 hasta el 3 de junio de 2016 bajo un tipo de interés del 5 % anual compuesto. A partir del 3 de junio de 2016 y hasta el 5 de septiembre de 2020, la inversión está bajo un tipo de interés del 1,5 % trimestral compuesto. Calcule el capital a recibir al final de la inversión si se invierten 10.000€.*

Problema 150. *Calcule la TAE y el TIN de la operación completa del problema anterior si el producto tiene una comisión de apertura de 1.500€ (a descontar sólo de los beneficios finales de la operación) y está sujeta a un impuesto sobre actividades especiales del 18 %. Use la misma base 30/360*

Problema 151. *Si una letra a un año a la que le quedan 250 días para su vencimiento, hoy cotiza en mercado al 96,5 % (sobre un nominal de emisión estándar para este tipo de productos), calcule el tipo de emisión de la letra mencionada.*

B.5.2. Junio 2015.

Problema 152. *Si usted quiere comprar hoy un coche de 35.000€ obteniendo el dinero para la compra de un producto en el que invirtió 18.000€ y que le rentó (inicialmente) un 7 % y que posteriormente, el dinero de ese producto se reinvirtió en su totalidad (capital e intereses) en otro producto financiero a tres años que vence hoy (¡qué casualidad!). Ese producto paga el 100 % de la inversión inicial a un 1.5 % trimestral simple más el 20 % de la rentabilidad del Ibex35 en ese periodo por el nominal invertido al inicio. ¿Cuánto dinero debe pedir al banco si quiere comprar ese coche contando con el dinero de la inversión descrita en el enunciado?*

Ibex35 (Inicio): 7178 puntos

Ibex35 (fin): 11.317 puntos

Problema 153. *Suponga una operación de importación en la que se compromete a pagar 1.000.000€ dentro de un año, 1.500.000€ dentro de tres años, y 1.750.000€ dentro de cinco años. Como esta distribución de pagos no le viene bien acuerda con su banco convertirlos en dos pagos de cantidades C dentro de 2 años y $2C$ dentro de 4 años. Calcule C si los tipos a plazo son los de la tabla.*

T	R
1_y	$1{,}5\,\%$
2_y	$2{,}0\,\%$
3_y	$2{,}5\,\%$
4_y	$3{,}0\,\%$
5_y	$3{,}5\,\%$

Problema 154. *Si le quedan diez años apara su jubilación y le ofrecen firmar una renta cte. postpagable mensual al 4 % ¿Cuánto dinero hay que aportar cada mes para llegar a tener 300.000€ el día que se jubile?*

Problema 155. *Una persona física tiene el derecho de recibir una renta postpagable de 100.000€ trimestralmente durante un lustro (cinco años). Pero prefiere recibir a cambio un único pago K dentro de dos años y medio. Calcule el valor de K en su momento de pago si el tipo de la operación es el $5\,\%$ semestral simple*

Problema 156. *Suponga que hoy firma una hipoteca a veinte años por la que recibe 250.000€ a un tipo variable referenciado al Euribor anual más 75 puntos básicos (0,75 %) con revisión anual y método de amortización francés con pagos trimestrales. Calcule las tres primeras cuotas de la hipoteca si el Euribor anual se ha fijado al 1,75 %*

B.5.3. Julio 2015.

Problema 157. *La empresa Notinganprisas S.L. presentó hace dos años concurso de acreedores voluntario, y tras estos dos años, la* *administración concursal ha terminado con la fase de concurso pero no se ha conseguido convenio, por ello se procede a la fase de liquidación.*

En la fase de liquidación una de las tareas necesarias es disponer de un liquidador que pueda valorar los activos de la compañía.

Debido a su CV, usted es contratado por un Juez de lo mercantil como liquidador de Nontinganprisas S.L.

Su primera tarea será calcular el valor total de los activos a día de hoy (25.06.2015), por tanto se pide que calcule el valor de la siguiente lista de activos:

1. Depósito Bienvenida de Oficina Directa del Grupo banco Popular, duración 3 años que paga el 4.5 % TAE con liquidación trimestral y base 30/360, siendo el producto contratado el 26.06.2013. Aquí se invirtieron 2.500.000€.

    a) Calcule el valor actual del depósito.

2. Producto de Allianz Renta Tres, consistente en una renta postpagable a tramos, de cuota anual C que tiene una duración de treinta años, en los primeros 10 años se estaba al 5 % anual compuesto, en los 10 siguientes está al 7.5 %, y en los 10 últimos al 15 %. La renta se firmó hace exactamente 15 años y los tipos actuales están al 7.5 % anual compuesto. En el producto se invirtió al inicio una cantidad de 2.750.000€.

    a) Calcule la cuota C (es la misma en todos los tramos) y con las pendientes de percibir, calcule el valor del producto.

3. Préstamo a favor de otra empresa del grupo, consistente en un préstamo de 30.000.000€, a 10 años con pagos semestrales

y amortización francesa al 4.5 % anual compuesto, al que le quedan 4 cuotas por pagar según el cuadro siguiente. Tenga en cuenta que los tipos hoy están para esta operación al 7.5 % anual compuesto.

a) Calcule el valor actual (usufructo y nuda propiedad) del préstamo.

N	D	K	I	C
1	30.000.000,00 €	956.284,33 €	1.350.000,00 €	2.306.284,33 €
2	29.043.715,67 €	999.317,12 €	1.306.967,21 €	2.306.284,33 €
3	28.044.398,55 €	1.044.286,40 €	1.261.997,93 €	2.306.284,33 €
4	27.000.112,15 €	1.091.279,28 €	1.215.005,05 €	2.306.284,33 €
5	25.908.832,87 €	1.140.386,85 €	1.165.897,48 €	2.306.284,33 €
6	24.768.446,02 €	1.191.704,26 €	1.114.580,07 €	2.306.284,33 €
7	23.576.741,76 €	1.245.330,95 €	1.060.953,38 €	2.306.284,33 €
8	22.331.410,81 €	1.301.370,84 €	1.004.913,49 €	2.306.284,33 €
9	21.030.039,96 €	1.359.932,53 €	946.351,80 €	2.306.284,33 €
10	19.670.107,43 €	1.421.129,50 €	885.154,83 €	2.306.284,33 €
11	18.248.977,94 €	1.485.080,32 €	821.204,01 €	2.306.284,33 €
12	16.763.897,61 €	1.551.908,94 €	754.375,39 €	2.306.284,33 €
13	15.211.988,68 €	1.621.744,84 €	684.539,49 €	2.306.284,33 €
14	13.590.243,84 €	1.694.723,36 €	611.560,97 €	2.306.284,33 €
15	11.895.520,48 €	1.770.985,91 €	535.298,42 €	2.306.284,33 €
16	10.124.534,57 €	1.850.680,27 €	455.604,06 €	2.306.284,33 €
17	8.273.854,30 €	1.933.960,89 €	372.323,44 €	2.306.284,33 €
18	6.339.893,41 €	2.020.989,13 €	285.295,20 €	2.306.284,33 €
19	4.318.904,29 €	2.111.933,64 €	194.350,69 €	2.306.284,33 €
20	2.206.970,65 €	2.206.970,65 €	99.313,68 €	2.306.284,33 €

4. Una inversión de 2.500.000€ iniciales en Bankinter Ahorro Activos Euro FI hace 5 años exactamente. Para el cálculo del valor no tenga en cuenta las comisiones. Calcule el valor actual de la inversión inicial.

5. Una inversión de 5.000.000€ iniciales el 25.06.2005 en Bankinter Eurozona Garantizado FI que vence justo hoy, si las cotizaciones de los días 13 del Eurostoxx 50 son las siguientes. Calcule el valor actual de la inversión inicial.

Fecha	*Último*	*Datos*	
13/06/2015	3.502,77		
13/05/2015	3.553,42	Maximo	3.828,78
13/04/2015	3.828,78	Promedio	3.307,95
13/03/2015	3.656,21	Minimo	2.998,32
13/02/2015	3.445,92	Des.Estándar	264,76
13/01/2015	3.133,86		
13/12/2014	3.067,32		
13/11/2014	3.056,80		
13/10/2014	2.998,32		
13/09/2014	3.235,07		
13/08/2014	3.056,17		
13/07/2014	3.185,86		
13/06/2014	3.282,84		
Dato Inicial	Valor inicial Eurostoxx 50		
25/06/2005	3.161,00		

bankinter.

Bankinter Ahorro Activos Euro FI

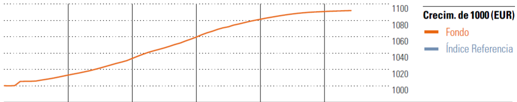
Datos del Fondo

Rating Morningstar™	–
Categoría Morningstar™	Mercado Monetario Estable EUR
Fecha Creación	23 dic 1997
V. Liquidativo	EUR 864,15
ISIN	ES0114821038
Dis/Acu	Acu
Patrimonio (Mill)	845,67

Estrategia de inversión

La gestión toma como referencia la rentabilidad del índice Euribor 3 meses y tendrá como objetivo mantener el principal y obtener una rentabilidad acorde con los tipos del mercado monetario. Se invertirá en activos de renta fija pública y privada (incluyendo instrumentos del mercado monetario no cotizados, que sean líquidos), de emisores y mercados de la OCDE/UE, invirtiéndose, si las condiciones de mercado lo permiten, más del 50% de la exposición total en valores de emisores privados. Podrá tener el 100% de la exposición total en depósitos.

Rentabilidad del fondo



2010	2011	2012	2013	2014	05/15	Rentabilidad
						Fondo
-	-	-	-	-	-	+/- Índice
4	6	11	4	5	15	Percentil

Indice Referencia: Not Benchmarked

Rentabilidad

Rentabilidad Acumulada	Rent. %	+/-Ind
3 meses	0,06	-
6 meses	0,14	-
1 año	0,46	-
3 años	4,55	-
5 años	8,61	-
10 años	20,89	-

Medidas de riesgo

Volatilidad	0,26
Beta 3a	-
Alfa 3a	-
Tracking Error	-
Sharpe 3a	5,43
Rátio de Inf.	-

bankinter.

Bankinter Eurozona Garantizado FI

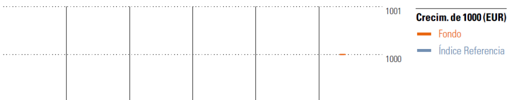
Datos del Fondo

Rating Morningstar™	–
Categoría Morningstar™	Garantizados
Fecha Creación	11 abr 2003
V. Liquidativo	EUR 790,68
ISIN	ES0125632036
Dis/Acu	Acu
Patrimonio (Mill)	32,83

Estrategia de inversión

Bankinter garantiza al fondo a vencimiento (25.06.2015) el 100% del valor liquidativo a 25.06.2005 incrementado, de ser positiva, en el 60% de la revalorización del Eurostoxx 50 PRICE tomando de referencia inicial el precio oficial de cierre del 25.06.2005 y como valor final la media aritmética de los precios de cierre de los días 13 de cada mes desde el 13.06.2014 hasta el 13.06.15 (número de observaciones 12), TAE mínima 0%, para suscripciones a mantenidas a vencimiento. La TAE dependerá del momento en el que se suscriba.

Rentabilidad del fondo



2010	2011	2012	2013	2014	05/15	Rentabilidad
-	-	-	-	-	-	Fondo
-	-	-	-	-	-	+/- Índice
-	-	-	-	-	-	Percentil

Indice Referencia: Not Benchmarked

Rentabilidad

Rentabilidad Acumulada	Rent. %	+/-Ind
3 meses	-	-
6 meses	-	-
1 año	-	-
3 años	-	-
5 años	-	-
10 años	-	-

Medidas de riesgo

Volatilidad	-
Beta 3a	-
Alfa 3a	-
Tracking Error	-
Sharpe 3a	-
Rátio de Inf.	-

La comisión de reembolso será el 0% los días 8 de cada mes o día hábil posterior, empezando el 08.07.2015 y hasta el 08.05.2024, ambos inclusive, (ventanas de liquidez mensuales).

B.6. Curso 2015-2016

B.6.1. Febrero 2016.

Problema 158. *Como financiero de unos astilleros que han recibido el encargo de construir un barco, debe estudiar el plan de ne-*

gocio en varios pasos, el primer paso es indicar al cliente el precio del barco, que se intercambiará en la botadura (entrega) del barco.

Para ello le han facilitado el siguiente plan de negocio:

.	*Fechas*	*Cantidades*	*Eventos*
HOY	$24/12/15$		*Inicio construcción*
T_A	$05/11/17$	$2\,500\,000$ €	*Pago* C_1
T_B	$17/05/19$	$1\,500\,000$ €	*Pago* C_2
T_C	$20/01/20$	$2\,000\,000$ €	*Pago* C_3
T_D	$24/07/20$	$1\,500\,000$ €	*Pago* C_4
T_E	$31/08/21$	$3\,000\,000$ €	*Pago* C_5
T_F	$07/09/22$		*Entrega Barco*

El barco se empieza hoy y se termina el $07/09/22$ *que es cuando el cliente paga.*

Suponga que con el banco tiene la facilidad de negociar la siguiente curva de tipos de interés (plana en cada periodo):

Plazo Ptmo	*Tipo anual*
Desde 0 hasta 1 años	$1,50\,\%$
Desde 0 hasta 2 años	$2,00\,\%$
Desde 0 hasta 3 años	$2,50\,\%$
Desde 0 hasta 4 años	$3,00\,\%$
Desde 0 hasta 5 años	$3,50\,\%$
Desde 0 hasta 6 años	$4,00\,\%$

Calcule el valor actual del barco, si toda la operación está bajo base 30/360.

En primer lugar es necesario tener un esquema claro de pagos y cobros. Hay 5 momentos de pago y un valor actual V_A, y un valor futuro V_F.

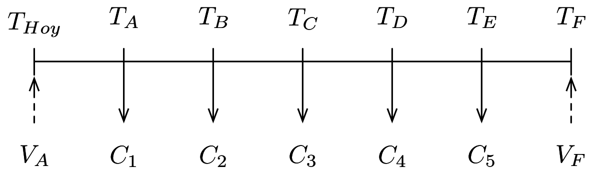


Figura B.1: Esquema de flujos para el barco.

Al pedirse el V_A del barco, se deben descontar todos los flujos a valor presente y sumar:

$$V_A = C_A^\star + C_B^\star + C_C^\star + C_D^\star + C_E^\star$$

Donde:

$$\begin{aligned}
C_A^\star &= \frac{C_A}{(1+r_A)^{T_A}} \\
C_B^\star &= \frac{C_B}{(1+r_B)^{T_B}} \\
C_C^\star &= \frac{C_C}{(1+r_C)^{T_C}} \\
C_D^\star &= \frac{C_D}{(1+r_D)^{T_D}} \\
C_E^\star &= \frac{C_E}{(1+r_E)^{T_E}}
\end{aligned}$$

Dado que la base es $^{30}/_{360}$, es necesario calcular las fracciones de año en la base correspondiente para T_A, T_B, T_C, T_D, T_E, por medio de la fórmula 2.3 del capítulo 2.

$$\begin{aligned}
T_A &= \frac{1}{360}\left[360\,(17-15)+30\,(11-12)+(5-24)\right]\\
T_B &= \frac{1}{360}\left[360\,(19-15)+30\,(5-12)+(17-24)\right]\\
T_C &= \frac{1}{360}\left[360\,(20-15)+30\,(1-12)+(20-24)\right]\\
T_D &= \frac{1}{360}\left[360\,(20-15)+30\,(7-12)+(24-24)\right]\\
T_E &= \frac{1}{360}\left[360\,(21-15)+30\,(8-12)+(31-24)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_A &= \frac{671}{360}=1,8638_Y\\
T_B &= \frac{1223}{360}=3,397_Y\\
T_C &= \frac{1466}{360}=4,0722_y\\
T_D &= \frac{1650}{360}=4,583_Y\\
T_E &= \frac{2047}{360}=5,686_Y
\end{aligned}$$

Por tanto se puede obtener el valor descontado de cada flujo como:

$$\begin{aligned}
C_A^\star &= \frac{2\,500\,000\,€}{(1+2\,\%)^{1{,}8638}} = 2\,409\,411{,}66\,€ \\
C_B^\star &= \frac{1\,500\,000\,€}{(1+3\,\%)^{3{,}397}} = 1\,356\,698{,}06\,€ \\
C_C^\star &= \frac{2\,000\,000\,€}{(1+3{,}5\,\%)^{4{,}0722}} = 1\,738\,560{,}88\,€ \\
C_D^\star &= \frac{1\,500\,000\,€}{(1+3{,}5\,\%)^{4{,}583}} = 1\,281\,207{,}98\,€ \\
C_E^\star &= \frac{3\,000\,000\,€}{(1+4\,\%)^{5{,}686}} = 2\,400\,323{,}00\,€
\end{aligned}$$

Finalmente la suma de todas estas cantidades lleva al V_A:

$$\boxed{V_A = 9\,186\,201{,}60\,€}$$

Problema 159. *Si el valor actual del barco se pudiera capitalizar a un tipo fijo del 5 %, calcule cual seria el valor bruto final del barco (esto es lo mismo que decir el precio que tendría el día de la entrega).*

Si a este valor bruto se le quiere obtener un 20 % de beneficio ¿cuál sería el PVP final del barco?

Capitalizando de forma directa, como la operación es a más de un año y asumiendo que la base sigue siendo $^{30}/_{360}$, se llega al valor capitalizado como:

$$V_F = V_A\,(1+r_K)^{T_F}$$

Donde queda pendiente encontrar T_F como:

$$T_F = \frac{1}{360}\left[360\,(22-15)+30\,(9-12)+(7-24)\right] = 6{,}7027_Y$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} V_F &= 9\,186\,201{,}60\,(1+5\,\%)^{6{,}7027} \\ &= 12\,739\,815{,}40\,€ \end{aligned}$$

Si se incrementa un $20\,\%$ para sacarle este beneficio al barco:

$$\begin{aligned} V_{F(PVP)} &= V_F{\cdot}1{,}20 \\ &= 15\,287\,778{,}48\,€ \end{aligned}$$

Problema 160. *Para hacer más atractivo el barco al cliente, decide poder negociar un descuento por concepto "pronto pago", que consiste en que si le paga hoy, usted le aplica un 5 % de descuento comercial simple anual. Calcule la cantidad que se cobraría realizado el descuento comercial y calcule el beneficio en % de la operación tras el descuento.*

El valora desde el que descontar será lo que se asimila en el punto anterior por PVP, ya que se indica al cliente un descuento no desde precio de coste sino desde precio de venta.

La expresión de descuento comercial, fórmula 4.1 que se encuentra en el punto 4 de este texto, lleva a la siguiente cantidad:

$$\begin{aligned} V_{A(d)} &= V_{F(PVP)}\,(1-d{\cdot}T_F) \\ &= 15\,287\,778{,}48\,(1-5\,\%{\cdot}6{,}7027) \\ &= 10\,164\,308{,}84\,€ \end{aligned}$$

En cuanto al beneficio realizado contando con que para cobrar estos $10\,164\,308{,}84$ €, hace falta $V_A = 9\,186\,201{,}60$ €, se llega a:

$$\begin{aligned} B^{o}\,(\%) &= \frac{V_{A(d)} - V_A}{V_A} \\ &= \frac{10\,164\,308{,}84 - 9\,186\,201{,}84}{9\,186\,201{,}84} \\ &= 10{,}64\,\% \end{aligned}$$

Problema 161. *Entre la fecha inicio (hoy) 24/12/15 y la de entrega 7/9/22, han pasado $2\,449$ días. Como no ha llegado a un acuerdo por pronto pago, y el cliente ha accedido a pagarle el día de entrega 15.000.000 €. Para poder financiar la operación, usted llama al banco de cara a negociar un descuento bancario tipo forfait. Para ello usted cuenta con que el nominal de la operación es de $15\,000\,000$ €. Aún sabiendo que la operación es a más de un año, se la pueden conceder en el banco. Calcule el tipo de descuento Forfait máximo que admitiría si hoy pretende obtener al menos un 15 % más del valor actual del barco. Timbre:*

	Desde	*Hasta*	*Timbre*
1ª	96 161,95 €	192 323,87 €	538,51 €
0,018 € *por cada* 6,01 € *de exceso.*			

De la expresión de descuento Forfait, se identifican casi todos los datos necesarios:

$$E = N\left(1 - d\frac{n}{360}\right) - I$$

Donde:

N**:** Es la cantidad nominal $15\,000\,000$ €.

n**:** Días de duración $n = 2\,449$.

I: Timbre más recargo por exceso,

$$I = 538{,}51 + (15\,000\,000 - 192\,323{,}87)\,\frac{0{,}018}{6{,}01}$$

$$I = 538{,}51\,€ + 44\,349{,}11\,€$$

E: Valor mínimo a aceptar hoy, que debe ser un 15 % más del V_A del barco, esto es $E = 10\,564\,131{,}84\,€$

Por tanto se puede despejar d:

$$E + I = N\left(1 - d\frac{n}{360}\right)$$

$$\frac{E+I}{N} = 1 - d\frac{n}{360}$$

$$d\frac{n}{360} = 1 - \frac{E+I}{N}$$

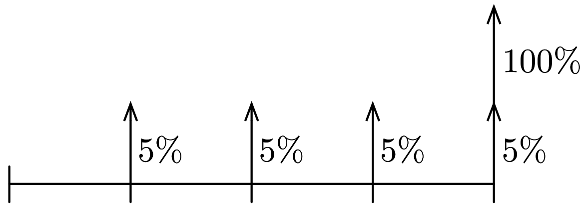
$$d = \frac{360}{n}\left(1 - \frac{E+I}{N}\right)$$

$$d = \frac{360}{2449}\left(1 - \frac{10\,564\,131{,}84\,€ + 538{,}51\,€ + 44\,349{,}11\,€}{15\,000\,000\,€}\right)$$

$$\boxed{d = 4{,}303\,\%}$$

Problema 162. *Calcule el valor actual de una inversión con la que se cobra un 5 % del valor invertido cada año durante los próximos 4 años, si al final se nos devuelve el 100 % de la inversión y la TIR de la operación es del 5 %.*

El esquema de flujos financieros es el siguiente:



De esta manera y teniendo en cuenta que la TIR de la inversión es del 5 % se puede calcular el valor actual como:

$$V_A = \sum_{i=1}^{4} \frac{5\,\%}{(1+TIR)^i} + \frac{100\,\%}{(1+TIR)^4}$$

$$\begin{aligned} V_A &= \frac{5\,\%}{(1+5\,\%)^1} + \frac{5\,\%}{(1+5\,\%)^2} + \frac{5\,\%}{(1+5\,\%)^3} + \\ &\quad + \frac{5\,\%}{(1+5\,\%)^4} + \frac{100\,\%}{(1+5\,\%)^4} \\ &= 100\,\% \end{aligned}$$

$$\boxed{V_A = 100\,\%}$$

$\ltimes$

Bibliografía

[1] Andrés de Pablo López. *Matemática de las operaciones financieras*. UNED, Madrid, 2002.

[2] Jhon C. Hull. *Introducción a los mercados de futuros y opciones*. Prentice Hall, 2002.

[3] ISDA. *ISDA International Swaps and Derivatives Association, Inc.* ISDA, 1998.

[4] Juan Pablo Jimeno Moreno. *Los Mercados Financieros y sus Matemáticas*. Ariel Economía, 2004.

[5] Ubaldo Nieto de Alba. *Matemática Financiera y Cálculo Bancario*. Centro de formación del Banco de España, 1 edition, 1985.

[6] Daniel Peña. *Estadística: Modelos y Métodos*, volume 1. Alianza Editorial, 1987.

[7] Jesús María Ruíz Amestoy. *Matemática Financiera*. Centro de formación del Banco de España, 1 edition, 1986.

[8] Wikipedia. Probabilidad condicionada.

$\ltimes$