CENGAGE Learning®

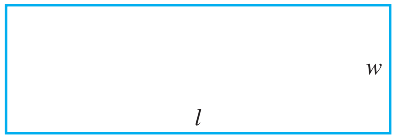
ÁLGEBRA ELEMENTAL

JEROME E. KAUFMANN

KAREN L. SCHWITTERS

1a. edición en español

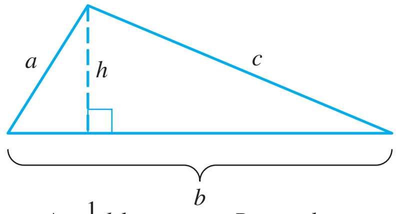
Rectángulo



$A = lw \qquad P = 2l + 2w$

A área
P perímetro
l largo
w ancho

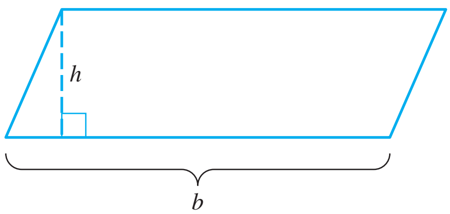
Triángulo



$A = \frac{1}{2}bh \qquad P = a + b + c$

A área
P perímetro
b base
h altura
a, c lados

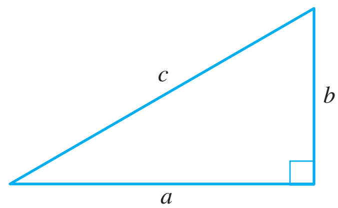
Paralelogramo



$A = bh$

A área
b base
h altura

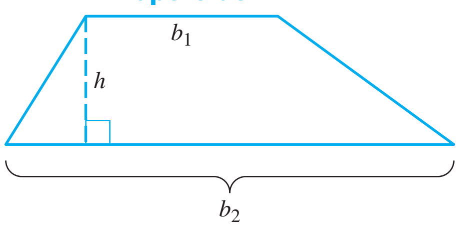
Triángulo rectángulo



Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$

a, b catetos
c hipotenusa

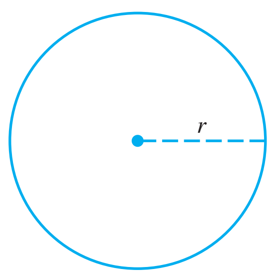
Trapezoide



$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$

A área
b_1, b_2 bases
h altura

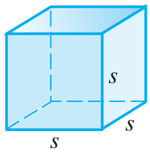
Círculo



$A = \pi r^2 \qquad C = 2\pi r$

A área
C circunferencia
r radio

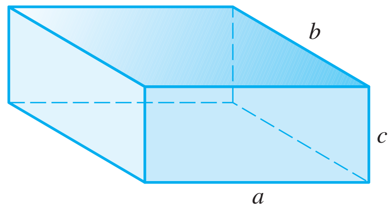
Cubo



$V = s^3 \qquad S = 6s^2$

V	volumen
S	área total de la superficie
s	longitud de un lado

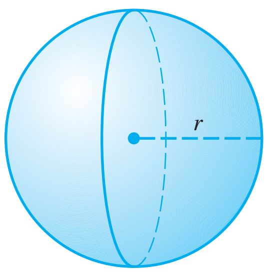
Prisma rectangular



$V = abc \qquad S = 2ac + 2ab + 2bc$

V	volumen
S	área total de la superficie
a	ancho
b	largo
c	altura

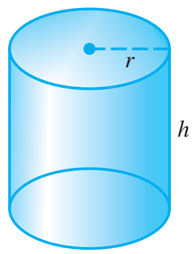
Esfera



$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad S = 4\pi r^2$

V	volumen
S	área total de la superficie
r	radio

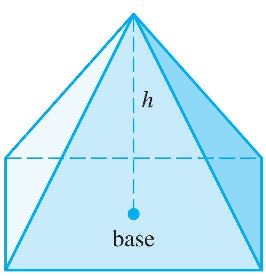
Cilindro rectangular



$V = \pi r^2 h \qquad S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

V	volumen
S	área total de la superficie
r	radio
h	altura

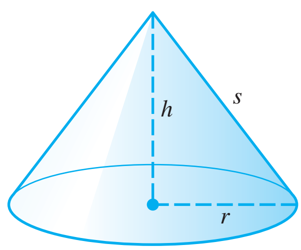
Pirámide



$V = \frac{1}{3}Bh$

V	volumen
B	área de la base
h	altura

Cono recto



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad S = \pi r^2 + \pi r s$

V	volumen
S	área total de la superficie
r	radio
h	altura
s	altura de la pendiente

PRIMERA EDICIÓN EN ESPAÑOL

Álgebra. Elemental

Jerome E. Kaufmann
Karen L. Schwitters
Seminole State College of Florida

Traducción
Valeria Gómez Pourroy

Revisión técnica
Gloria Patricia León Beltrán
Magíster en Docencia de la Matemática
Universidad Pedagógica Nacional

CENGAGE Learning®

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

CENGAGE
Learning

Álgebra. Elemental
Primera edición en español
Jerome E. Kaufmann y Karen L. Schwitters

Director Editorial para Latinoamérica:
Ricardo H. Rodríguez

Editora de Adquisiciones para Latinoamérica:
Claudia C. Garay Castro

Gerente de Manufactura para Latinoamérica:
Antonio Mateos Martínez

Gerente Editorial en Español para Latinoamérica:
Pilar Hernández Santamarina

Gerente de Proyectos Especiales:
Luciana Rabuffetti

Coordinador de Manufactura:
Rafael Pérez González

Editor:
Omegar Martínez

Diseño de portada:
Anneli Daniela Torres

Imagen de portada:
Shutterstock

Composición tipográfica:
José Jaime Gutiérrez Aceves

Traducido de los libros
Elementary Algebra, 10th edition
Jerome E. Kaufmann y Karen L. Schwitters
ISBN: 9781285194059 © 2015
y
Algebra for College Students, 10th Edition
Jerome E. Kaufmann y Karen L. Schwitters
ISBN-13: 9781285195780 © 2015
Publicados en inglés por Cengage Learning

Datos para catalogación bibliográfica:
Kaufmann, Jerome E., y Karen L. Schwitters
Álgebra. Elemental, Primera edición en español
ISBN: 978-607-526-420-2

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 18 17 16 15

Contenido

Prefacio

Esta edición de **Álgebra. Elemental** de Jerome E. Kaufmann y Karen L. Schwitters ha sido ampliada con tres secciones del libro **Algebra for College Students** de los mismos autores para ampliar su espectro y su aceptación en las aulas. Así, sus páginas conservan las características que hicieron de las ediciones pasadas un éxito; al mismo tiempo, hemos incorporado varias mejoras sugeridas por los revisores.

Este texto fue escrito para estudiantes que jamás han tomado un curso de álgebra elemental y para aquellos que necesitan un repaso temas adicionales de matemáticas. Los conceptos básicos de álgebra elemental se presentan de manera simple y directa. Estos conceptos se desarrollan por medio de ejemplos, y se refuerzan continuamente mediante ejemplos adicionales, aplicados a resolución de problemas.

Hay un hilo conector a través del libro: primero, **aprender la habilidad**; después, **practicar la habilidad** para ayudar a resolver ecuaciones, y, finalmente, **aplicar la habilidad** para resolver problemas aplicados. Este hilo conductor determinó algunas de las decisiones que tomamos al preparar el texto.

Las ideas algebraicas se desarrollan en una secuencia lógica y en una forma fácil de leer, sin excesivo formalismo. En la medida de lo posible, los conceptos algebraicos se desarrollan a partir de su contraparte aritmética. Dos ejemplos específicos de este desarrollo son (1) manipulación de fracciones algebraicas simples en las Secciones 2.1 y 2.2, y (2) multiplicar monomios sin el vocabulario formal, presentado en la Sección 2.4 cuando trabajamos con los exponentes.

Novedades de esta edición

- El concepto de la evaluación y resolución de fórmulas se ha sido trasladado a la Sección 3.1. La resolución de fórmulas se presenta al mismo tiempo que la resolución de ecuaciones porque se aplican las mismas propiedades para resolver ambos tipos de problemas; así, se habla de la resolución de fórmulas en las Secciones 3.1, 3.2 y 3.4.
- La resolución de ecuaciones que son contradicciones o identidades se ubica ahora en la Sección 3.4. Esto permite que los estudiantes adquieran la aptitud para resolver ecuaciones –lo cual se presenta en las primeras tres secciones del capítulo– antes de considerar los conceptos de una ecuación que no tiene solución o de todos los números reales como una solución.
- La Sección 4.1 ahora discute sólo los temas de razón y proporción y sus aplicaciones. Para alinearse con los estándares nacionales se ha añadido a esta sección las unidades de medición y precio. El nuevo material consiste de aplicaciones para la converción de unidades de medición a los sistemas inglés y métrico. En esta sección 4.1 también se incluye el cálculo de las unidades de precio con base en el concepto de razón.
- La Sección 4.2 presenta los porcentajes, la converción de una fracción a porcentaje, el empleo de acercamientos algebraicos para resolver problemas porcentuales básicos y la fórmula de interés simple.
- La Sección 4.3 continúa con los porcentajes, presentando las aplicaciones de precios rebajados, descuentos y ganancia. La sección empieza con la resolución de ecuaciones que implican decimales para ayudar a preparar a los estudiantes a resolver las ecuaciones que surgen de los problemas aplicados.
- El Capítulo 4 concluye con dos secciones, la 4.4 y la 4.5, sobre la resolución de desigualdades. Tradicionalmente, este tema se incluye en el capítulo de la resolución de ecuaciones. Decidimos reubicar este tema en el Capítulo 4 para unificar la longitud de los capítulos y para brindar continuidad con el tema de la resolución de ecuaciones y aplicaciones antes de presentar la resolución de desigualdades. Estas secciones también proporcionan a los alumnos un ligero descanso de las secciones con problemas aplicados.

- La sección de problemas es un punto nodal. Algunos usuarios de las ediciones pasadas sugirieron que la “buena” secciones de problemas podrían resultar aún mejores si se añadían algunos problemas en diferentes lugares. Basados en estas sugerencias algunos problemas mejores en varias secciones. Un ejemplo de esto es la sección de Problemas 6.4, resolución de ecuaciones al factorizar trinomios, que se revisó rigurosamente.

Comentarios adicionales sobre algunos de los capítulos

- El Capítulo 3 presenta una introducción a una parte importante del álgebra elemental. La resolución de problemas y la resolución de ecuaciones y desigualdades se presentan tempranamente para que puedan ser usadas como temas unificadores a lo largo del texto. Muchas fórmulas geométricas y relaciones se revisan en un escenario a resolver en el Capítulo 3.
- El Capítulo 6 ilustra la secuencia que antes hemos mencionado (aprender una habilidad $\rightarrow$ usar la habilidad para resolver ecuaciones $\rightarrow$ usar las ecuaciones para resolver problemas). En este capítulo desarrollamos algunas de las técnicas de factorización y habilidades que pueden ser usadas para resolver ecuaciones, luego las ecuaciones se usan para desarrollar aún más la capacidad de resolución de problemas.
- El Capítulo 8 presenta algunos conceptos básicos de geometría coordinada. Se presentan algunas de las ideas de graficación, con un énfasis en la graficación de ecuaciones lineales y de desigualdades de dos variables. Las últimas dos secciones se abocan a la resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales en dos variables.
- El Capítulo 11 es un “extra”; la mayoría de los temas de este capítulo son una continuación de temas estudiados anteriormente. Por ejemplo, la Sección 11.1 (Ecuaciones y desigualdades que implican el valor absoluto) podría estudiarse, como ocurre en nuestro manual de *Álgebra intermedia*, después de la Sección 4.6 (Desigualdades, desigualdades compuestas y resolución de problemas). Este capítulo está pensado para beneficiar a los alumnos que tomarán cursos adicionales de matemáticas.
- A lo largo de este libro se distribuyen aproximadamente 550 problemas verbales, y el Apéndice A contiene otros 150. Se dedicó mucho esfuerzo a la estrategia de iniciar con problemas sencillos para fortalecer gradualmente la confianza de los estudiantes en la resolución de problemas verbales. Ofrecemos varias sugerencias de resolución de problemas verbales con discusiones especiales en varias secciones. Sentimos que la clave para resolver problemas verbales es trabajar con varias técnicas en lugar de estar demasiado preocupados por cubrir todos los tipos tradicionales de problemas.
- Como recomienda la American Mathematical Association of Two Year Colleges, integramos algunos conceptos geométricos a los escenarios de resolución de problemas. Estos muestran las conexiones entre álgebra, geometría y el mundo real. Aproximadamente 25 ejemplos y 180 problemas están diseñados para revisar ideas geométricas básicas. Estos materiales que abordan temas de geometría se ubican principalmente en las siguientes secciones:

  Sección 3.3: Ángulos complementarios y suplementarios; la suma de las medidas de los tres ángulos de un triángulo es igual a 180°
  Sección 3.3: Fórmulas de área y volumen
  Sección 4.1: Conceptos lineales de medición
  Sección 6.3: El teorema de Pitágoras
  Sección 10.1: Más sobre el teorema de Pitágoras, incluyendo el trabajo con triángulos isósceles rectos y triángulos rectos de 30° a 60°

Nuevas características

Conceptos para el estudio

Aparecen al inicio de cada capítulo para sugerir las mejores prácticas de estudio a lo largo del curso. Una pregunta que provoca reflexión y que está relacionada con los Consejos para el estudio presentados alienta a los estudiantes a reflexionar sobre sus actuales hábitos de estudio o en experiencias pasadas con las matemáticas.

2 Números reales

BJI/Blue Jean Images/Getty Images

Consejos para el estudio

Dos factores en extremo importantes para tener un buen resultado en un curso de matemáticas son ir a clase y hacer la tarea.

De ser posible, no falte a ninguna clase. Sin embargo, ubique un compañero de clase a quien pueda contactar en caso de faltar. Investigue los nombres y correos electrónicos de varios compañeros a quienes pueda contactar para obtener los apuntes en caso de faltar a clases.

Jamás debe faltar a la clase previa al examen. Durante esa clase, el instructor suele proporcionar información valiosa sobre el examen y también suele revisar los temas que vendrán en el mismo.

Conozca los recursos a su disposición en caso de necesitar ayuda con sus tareas. Encuentre las respuestas a las siguientes preguntas y anótelas en su cuaderno:

- ¿Su instructor tiene horas de oficina para ayudar a los estudiantes con su tarea?
- ¿Hay algún centro de tutores en su escuela que ofrezca ayuda con la tarea?
- ¿El departamento de matemáticas o el centro de tutores ofrecen sesiones de revisión para estudiantes?
- ¿Hay sitios web que el instructor o sus compañeros crean que son de ayuda para explicar problemas matemáticos?

"El único lugar donde el éxito viene antes que el trabajo es el diccionario"
VIDAL SASSOON

¿Está asistiendo a clases y haciendo su tarea regularmente para tener un buen resultado en su clase de matemáticas?

41

Vista previa del capítulo

Esta visto previa ofrece una breve descripción del material presentado en el capítulo con comentarios sobre qué debe tomarse especialmente en cuenta.

Ejemplos de cómo aplicar tus habilidades

Aquí se presentan aplicaciones en la vida real de los temas estudiados para que los estudiantes puedan ver la relevancia que tienen las matemáticas en la vida diaria.

Tetra Images/Getty Images

Ejemplo de salón de clases

A John le pagan $1\frac{1}{2}$ veces su tarifa normal por hora por cada hora después que trabaja 40 horas en la semana. La semana pasada trabajó 48 horas y ganó \$962. ¿Cuál es su tarifa normal por hora?

EJEMPLO 14 Aplique su habilidad

A Lance le pagan $1\frac{1}{2}$ veces su tarifa normal por hora por cada hora después de que trabaja más de 40 horas en la semana. La semana pasada trabajó 50 horas y ganó \$462. ¿Cuál es su tarifa normal por hora?

Solución

Sea x la tarifa por hora normal de Lance. Entonces $\frac{3}{2}x$ representa $1\frac{1}{2}$ veces su tarifa normal por hora. Se usa la siguiente guía para establecer la ecuación:

Tarifa regular por las primeras 40 horas + Tarifa por 10 horas de tiempo extra = Tarifa total

$$40x \quad + \quad 10\left(\frac{3}{2}x\right) \quad = \quad 462$$

Al resolver la ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} 40x + 15x &= 462 \\ 55x &= 462 \\ x &= 8.40 \end{aligned}$$

La tarifa por hora normal de Lance es de \$8.40.

Ejemplos de problemas

Ubicado en el Resumen del capítulo, se ha añadido un Ejemplo de problema para cada Objetivo con el afán de proporcionar a los estudiantes una oportunidad de probar un problema similar al del ejemplo presentado en la revisión de cada Objetivo.

Capítulo 4 Resumen

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Usar razones para calcular conversiones de unidades. (Sección 4.1/Objetivo 1)	Las razones de unidades de medida equivalentes pueden usarse para cambiar unidades. Las tablas 2.1-2.3 en las páginas 142-143 y en el interior de la cubierta de su libro dan muchas de las equivalencias de unidades más populares.	Rick caminó 352 yardas en una caminata. ¿Qué porción de una milla caminó? Solución: Se necesita multiplicar por el factor de conversión de 1 milla por cada 1760 yardas. $352 \text{ yardas} \cdot \frac{1 \text{ milla}}{1760 \text{ yardas}} = \frac{352}{1760} \text{ milla} = 0.2 \text{ milla}$ Problema de muestra 1: Un campo de fútbol americano mide 100 yardas. ¿Cuántos metros mide el campo?

Características conservadas

Objetivos de aprendizaje

Ubicados al inicio de cada sección, los Objetivos de aprendizaje están conectados con las secciones de Problemas y con el Resumen del capítulo.

Ejemplos

Más de 700 Ejemplos muestran a los estudiantes cómo usar y aplicar conceptos matemáticos. Cada Ejemplo tiene su correspondiente Ejemplo de salón de clases para que lo use maestro.

Ejemplos de salón de clases

Para proporcionar al instructor más recursos, se agrega un Ejemplo de salón de clases por cada ejemplo. Los instructores pueden presentarlos a la clase o usarlos para ejercicios de práctica para los estudiantes.

Prueba de conceptos

Cada sección tiene una Prueba de conceptos que precede inmediatamente al Conjunto de problemas.

Pensamientos en palabras

Cada Conjunto de problemas incluye problemas de Pensamientos en palabras, que da a los estudiantes la oportunidad de expresar por escrito sus pensamientos sobre varias ideas matemáticas.

Más investigación

Muchos Conjuntos de problemas contienen un grupo especial de problemas llamados Más investigación, que permite a los estudiantes buscar ideas más complicadas. Muchas de estas investigaciones se prestan para el trabajo en grupos pequeños.

Problemas

Las secciones de Problemas contienen una amplia variedad de ejercicios para el desarrollo de habilidades. Debido a que estas secciones son un punto focal para cada repaso, en esta edición se han agregado, eliminado o reformulado los problemas con base en las sugerencias de los usuarios.

Respuestas

La sección de respuestas en la parte trasera del texto proporciona las respuestas a los ejercicios impares que se encuentran a lo largo del libro.

Materiales auxiliares

Este libro cuenta con una serie de recursos para el profesor, los cuales están disponibles únicamente en inglés y sólo se proporcionan a los docentes que lo adopten como texto en sus cursos. Para mayor información, póngase en contacto con el área de servicio al cliente en las siguientes direcciones de correo electrónico:

- Cengage Learning México y Centroamérica clientes.mexicoca@cengage.com
- Cengage Learning Caribe clientes.caribe@cengage.com
- Cengage Learning Cono Sur clientes.conosur@cengage.com
- Cengage Learning Pacto Andino clientes.pactoandino@cengage.com

Al igual que los recursos impresos adicionales, las direcciones de los sitios web señaladas a lo largo del texto, y que se incluyen a modo de referencia, no son administradas por Cengage Learning Latinoamerica, por lo que ésta no es responsable de los cambios y actualizaciones de las mismas.

Reconocimientos

Nos gustaría aprovechar esta oportunidad para agradecer a las siguientes personas que fungieron como revisores tanto de esta edición como de las ediciones anteriores de esta serie de Kaufmann-Schwitters:

Yusuf Abdi
Rutgers, the State University of New Jersey

Lynn Beckett-Lemus
El Camino College

David Bernemann
North Iowa Area Community College

Ramendra Bose
University of Texas–Pan American

Lance Boyd
Wallace State Community College

Jackie Bryant
Baton Rouge Community College

Michael Carr
Mott Community College

Gail Carter
St. Petersburg College

Zhixiong Chen
New Jersey City University

Mihran Dabagian
Los Angeles Mission College

William Dabby
Edison State College

Sheryl Dohm
Chaminade University of Honolulu

Michael Engle
Hudson Valley Community College

Stacey Ernstberger
LaGrange College

Joseph Eyles
Morehouse College

Amy Franklin
Jacksonville State University

Jennie Gurley
Wallace State Community College

Kim Gwydir
University of Miami, Florida International University

Janet Hansen
Dixie Junior College

M. Randall Holmes
Boise State University

Carolyn Horseman
Polk Community College, Winter Haven

Betty Larson
South Dakota State University

Greg McClanahan
LaGrange College

Stacey Moore
Wallace State Community College–Hanceville

Nam Nguyen
University of Texas–Pan American

Leticia Oropesa
University of Miami

Jeffrey Osikiewicz
Kent State University

Tammy Ott
Penn State University

Lawrence Pugliese
Lackawanna College

Radha Sankaran
Passaic County Community College

Chris Schultz
Iowa State University

Joan Smeltzer
Penn State University, York Campus

Brandon Smith
Wallace State Community College–Hanceville

Ron Smith
Edison State College

Kathy Spradlin
Liberty University

Fernando Urgelles
Chaminade University of Hawaii

Hien Van Eaton
Liberty University

Patrick Webster
El Camino College

Meredith Williams
Campbell University

James Wood
Tarleton State University

Rebecca Wulf
Ivy Tech Community College, Lafeyette

Brenda Zink
Northeastern Junior College

Ahmed Zayed
DePaul University

Queremos expresar nuestra sincera gratitud al equipo de Cengage Learning, en especial a Marc Bove, por su continua cooperación y asistencia a lo largo de este proyecto, y a Stephanie Beeck y Cheryll Linthicum, quienes llevaron a cabo los muchos detalles de la producción. Finalmente, a Rachel Schwitters le debemos un agradecimiento muy especial.

Jerome E. Kaufmann
Karen L. Schwitters

1 Algunos conceptos básicos de aritmética y álgebra

Bruce Laurance/The Image Bank/Getty Images

Una clave importante para el éxito es la confianza en uno mismo. Una clave importante para la confianza es la preparación.
ARTHUR ASHE

Tip de estudio

Muchos factores afectan el éxito en un curso de matemáticas, como el instructor, el libro de texto, la hora de clase, entre otros. Sin embargo, uno de los factores más importantes para el éxito es estar en el curso adecuado para ti. ¿Puedes imaginarte estudiar Francés II sin haber estudiado Francés I? No hay forma de tener éxito con eso. De la misma manera, para tener éxito en este curso debes tener las habilidades aritméticas básicas y una introducción a los números con signos y, posiblemente, haber tomado un curso propedéutico de álgebra. Si al inicio de este curso piensas que el material es demasiado difícil o demasiado fácil, habla con tu instructor.

¿Estás suficientemente preparado para obtener el éxito en esta clase de álgebra?

Vista previa del capítulo

El primer capítulo abarca las expresiones numéricas y algebraicas. Empezamos con un repaso de la suma, resta, multiplicación y división de números positivos y negativos. El concepto del uso de variables —letras como *x* y *y*— se presenta en este capítulo. Con las variables, hacemos la transición de aritmética a álgebra. Muchos conceptos algebraicos son extensiones de ideas aritméticas; tu conocimiento en aritmética te ayudará con el estudio de álgebra.

1.1 Expresiones numéricas y algebraicas

OBJETIVOS

1. Reconocer el vocabulario y los símbolos básicos asociados con conjuntos
2. Simplificar expresiones numéricas de acuerdo con el orden de las operaciones
3. Evaluar expresiones algebraicas

En aritmética se usan símbolos como 4, 8, 17 y π para representar números. Indicamos las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división con los símbolos $+$, $-$, $\cdot$ y $\div$, respectivamente. Con estos símbolos podemos formar **expresiones numéricas** específicas. Por ejemplo, es posible escribir la suma indicada de ocho y cuatro como $8 + 4$.

En álgebra, las variables nos permiten generalizar. Al usar x y y para representar cualquier número, se utiliza la expresión $x + y$ para representar la suma indicada de dos números cualesquiera. La x y la y en tal expresión se conocen como variables, y la frase $x + y$ se llama **expresión algebraica**. Comúnmente, usamos letras del alfabeto como x, y, z y w como variables; la idea relacionada con la aritmética es que representen números. La revisión de las diversas operaciones y propiedades que conciernen a los números establece las bases de nuestro estudio del álgebra.

Se pueden extender al álgebra muchos de los acuerdos de notación que se hacen en aritmética, con algunas modificaciones. La siguiente tabla resume los acuerdos de notación que pertenecen a las cuatro operaciones básicas. Note la variedad de maneras de escribir un producto incluyendo los paréntesis para indicar multiplicación. De hecho, la forma ab es la más simple y probablemente la más ampliamente usada; expresiones como abc, $6x$ y $7xyz$ indican multiplicación. También ponga atención a las distintas formas que indican división; la expresión fraccionaria $\frac{c}{d}$, suele usarse en álgebra, aunque las otras formas en ocasiones tienen un propósito.

Operación	Aritmética	Álgebra	Vocabulario
Suma	$4 + 6$	$x + y$	La **suma** de x y y
Resta	$7 - 2$	$w - z$	La **diferencia** de w y z
Multiplicación	$9 \cdot 8$	$a \cdot b$, $a(b)$, $(a)b$, $(a)(b)$, o ab	El **producto** de a y b
División	$8 \div 2$, $\frac{8}{2}$, $2\overline{)8}$	$c \div d$, $\frac{c}{d}$, o $d\overline{)c}$	El **cociente** de c y d

En nuestro repaso de las ideas aritméticas y en nuestra presentación de los conceptos algebraicos, es importante incluir parte del vocabulario y la simbología asociados con los conjuntos. Un **conjunto** es una colección de objetos y éstos se llaman **elementos** o **miembros** del conjunto. En aritmética y álgebra, los elementos de un conjunto por lo general son números. Para representar conjuntos, usamos llaves { } para encerrar los elementos (o la descripción de los elementos), y usamos letras mayúsculas para nombrar los conjuntos. Por ejemplo podemos representar el conjunto A, que consiste de las vocales del abecedario, como:

$A = \{\text{vocales del abecedario}\}$ Descripción verbal

$A = \{a, e, i, o, u\}$ Listado o descripción en lista

El enfoque de listas se modifica si el número de elementos es muy grande. Por ejemplo, todas las letras del alfabeto se pueden mencionar como:

$\{a, b, c, \ldots, z\}$

Primero se escriben suficientes elementos para establecer un patrón, luego tres puntos indican que el conjunto continúa en dicho patrón. La entrada final indica el último elemento del patrón. Si escribimos

$\{1, 2, 3, \ldots\}$

el conjunto comienza con el conteo de números 1, 2 y 3. Los tres puntos indican que continúa en forma parecida hasta el infinito; no hay un elemento último.

Un conjunto que consiste de ningún elemento se llama **conjunto vacío** (se escribe $\varnothing$). Se dice que dos conjuntos son *iguales* si contienen exactamente los mismos elementos. Por ejemplo,

$\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\}$

porque ambos conjuntos contienen los mismos elementos; el orden en el que se escriben los elementos no importa. La marca diagonal a través del símbolo de igualdad denota "*no es igual a*". Por tanto, si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$ se puede escribir $A \neq B$, que se lee como "el conjunto A no es igual al conjunto B".

Simplificación de expresiones numéricas

Ahora, simplifiquemos algunas expresiones numéricas que incluyen un conjunto de **números enteros**, es decir, el conjunto $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Cuando se **simplifican expresiones numéricas**, las operaciones se realizan en el siguiente orden:

Orden de operaciones

1. Realice las operaciones dentro de los símbolos de inclusión (paréntesis y corchetes) y arriba y abajo de cada barra de fracción. Inicie con el símbolo de inclusión más interno.
2. Realice todas las multiplicaciones y divisiones en el orden en el que aparecen de izquierda a derecha.
3. Realice todas las sumas y restas en el orden en el que aparecen de izquierda a derecha.

Ejemplo de salón de clases
Simplifique $2 + 6 - 3 + 7 + 11 - 9$.

EJEMPLO 1 Simplifique $8 + 7 - 4 + 12 - 7 + 14$.

Solución

Las sumas y restas deben realizarse de izquierda a derecha en el orden que aparecen. Así $8 + 7 - 4 + 12 - 7 + 14$ se simplifica a 30.

Ejemplo de salón de clases
Simplifique $5(8 + 6)$.

EJEMPLO 2 Simplifique $7(9 + 5)$

Solución

El paréntesis indica el producto de 7 y la cantidad de $9 + 5$. Realice la suma dentro del paréntesis primero, luego multiplique; se simplifica a $7(14)$, que se convierte en 98.

Ejemplo de salón de clases
Simplifique $(5 + 11) \div (8 - 4)$.

EJEMPLO 3 Simplifique $(7 + 8) \div (4 - 1)$

Solución

Primero, realice las operaciones dentro del paréntesis; $(7 + 8) \div (4 - 1)$ se vuelve $15 \div 3$, que es 5.

Frecuentemente, expresamos un problema como el del Ejemplo 3 de la manera $\frac{7+8}{4-1}$. No necesitamos los paréntesis en este caso porque la barra de fracción indica que la suma de 7 y 8 será dividida entre la diferencia, 4 y 1. Un problema, sin embargo, puede contener paréntesis y barras de fracción, como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo de salón de clases

Simplifique $\frac{(6-3)(4+1)}{5} + \frac{8}{13-5}$.

EJEMPLO 4 Simplifique $\frac{(4+2)(7-1)}{9} + \frac{4}{7-3}$.

Solución

Primero, simplifique arriba y abajo de la barra de fracción; después proceda a evaluar como se muestra.

$$\frac{(4+2)(7-1)}{9} + \frac{4}{7-3} = \frac{(6)(6)}{9} + \frac{4}{4}$$
$$= \frac{36}{9} + 1 = 4 + 1 = 5$$

Ejemplo de salón de clases
Simplifique $4 \cdot 7 + 3$.

EJEMPLO 5 Simplifique $7 \cdot 9 + 5$.

Solución

Si no hay paréntesis que indiquen lo contrario, la multiplicación va antes que la suma. Primero resolvemos la multiplicación, después se hace la suma; $7 \cdot 9 + 5$ se simplifica a $63 + 5$, que es 68.

Comentario: Compare el Ejemplo 2 con el Ejemplo 5 y advierta la diferencia en el significado.

Ejemplo de salón de clases
Simplifique $6 - 10 \div 5 + 4 \cdot 5$.

EJEMPLO 6 Simplifique $8 + 4 \cdot 3 - 14 \div 2$.

Solución

La multiplicación y división deben hacerse antes en el orden que aparecen, de izquierda a derecha. Así $8 + 4 \cdot 3 - 14 \div 2$ se simplifica a $8 + 12 - 7$. Se realizan la suma y la resta en el orden que aparecen, lo que simplifica $8 + 12 - 7$ a 13.

Ejemplo de salón de clases
Simplifique $3 \cdot 8 \div 6 + 5 \cdot 2 - 21 \div 3 + 8 \div 4 \cdot 3$.

EJEMPLO 7 Simplifique $8 \cdot 5 \div 4 + 7 \cdot 3 - 32 \div 8 + 9 \div 3 \cdot 2$.

Solución

Cuando se realizan multiplicaciones y divisiones primero en el orden en el que aparecen, y después las sumas y las restas, nuestro trabajo adquiere el siguiente formato.

$$8 \cdot 5 \div 4 + 7 \cdot 3 - 32 \div 8 + 9 \div 3 \cdot 2 = 10 + 21 - 4 + 6 = 33$$

Ejemplo de salón de clases
Simplifique $9 + 3[5(2 + 4)]$.

EJEMPLO 8 Simplifique $5 + 6[2(3 + 9)]$.

Solución

Los corchetes se usan con el mismo propósito que los paréntesis. En cada problema es necesario simplificar de *adentro hacia fuera*; primero se realizan las operaciones en los paréntesis más internos.

$$\begin{aligned} 5 + 6[2(3+9)] &= 5 + 6[2(12)] \\ &= 5 + 6[24] \\ &= 5 + 144 \\ &= 149 \end{aligned}$$

Evaluación de expresiones algebraicas

Se puede usar el concepto de una variable para generalizar de expresiones numéricas a expresiones algebraicas. Cada uno de los siguientes es un ejemplo de expresión algebraica.

$$3x + 2y \qquad 5a - 2b + c \qquad 7(w + z) \qquad \frac{5d + 3e}{2c - d} \qquad 2xy + 5yz \qquad (x + y)(x - y)$$

Una expresión algebraica adquiere un valor numérico cuando cada variable en la expresión es reemplazada por un número específico. Por ejemplo, si x es reemplazada por 9 y z por 4, la expresión algebraica $x - z$ se convierte en la expresión numérica $9 - 4$, que se simplifica a 5. Se dice que $x - z$ "tiene valor de 5" cuando x es igual a 9 y z es igual a 4. El valor de $x - z$, cuando x es igual a 25 y z es igual a 12, es 13. La expresión algebraica general $x - z$ tiene un valor específico cada vez que x y z son reemplazadas por números.

Considere los siguientes ejemplos, que ilustran el proceso de hallar el valor de una expresión algebraica. Llamamos a este proceso **evaluar expresiones algebraicas**.

Ejemplo de salón de clases
Hallar el valor de $5x + 4y$ cuando x es reemplazada por 3 y y por 13.

EJEMPLO 9 Hallar el valor de $3x + 2y$ cuando x es reemplazada por 5 y y por 17.

Solución

El siguiente formato es conveniente para tales problemas.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 3(5) + 2(17) \text{ cuando } x = 5 \text{ y } y = 17 \\ &= 15 + 34 \\ &= 49 \end{aligned}$$

Advierta que, en el Ejemplo 9, para la expresión algebraica $3x + 2y$, las multiplicaciones "3 veces x" y "2 veces y" están implícitas sin necesidad de usar paréntesis. Substituir los números cambia la expresión algebraica a una expresión numérica, y luego se usan paréntesis para indicar multiplicación.

Ejemplo de salón de clases
Hallar el valor de $11m - 5n$, cuando $m = 4$ y $n = 7$.

EJEMPLO 10 Hallar el valor de $12a - 3b$, cuando $a = 5$ y $b = 9$.

Solución

$$\begin{aligned} 12a - 3b &= 12(5) - 3(9) \text{ cuando } a = 5 \text{ y } b = 9 \\ &= 60 - 27 \\ &= 33 \end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Evaluar $6xy - 3xz + 5yz$, cuando $x = 2$, $y = 5$, y $z = 3$.

EJEMPLO 11 Evaluar $4xy + 2xz - 3yz$, cuando $x = 8$, $y = 6$, y $z = 2$.

Solución

$$\begin{aligned} 4xy + 2xz - 3yz &= 4(8)(6) + 2(8)(2) - 3(6)(2) \text{ cuando } x = 8, y = 6 \text{ y } z = 2 \\ &= 192 + 32 - 36 \\ &= 188 \end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Evaluar $\frac{6a + b}{4a - b}$ para $a = 4$ y $b = 6$.

EJEMPLO 12 Evaluar $\frac{5c + d}{3c - d}$ para $c = 12$ y $d = 4$.

Solución

$$\begin{aligned} \frac{5c + d}{3c - d} &= \frac{5(12) + 4}{3(12) - 4} \text{ para } c = 12 \text{ y } d = 4 \\ &= \frac{60 + 4}{36 - 4} = \frac{64}{32} = 2 \end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Evaluar $(4x + y)(7x - 2y)$, cuando $x = 2$ y $y = 5$.

EJEMPLO 13 Evaluar $(2x + 5y)(3x - 2y)$, cuando $x = 6$ y $y = 3$.

Solución

$$\begin{aligned}(2x + 5y)(3x - 2y) &= (2 \cdot 6 + 5 \cdot 3)(3 \cdot 6 - 2 \cdot 3) \text{ cuando } x = 6 \text{ y } y = 3\\ &= (12 + 15)(18 - 6)\\ &= (27)(12)\\ &= 324\end{aligned}$$

Examen de conceptos 1.1

Para los problemas 1-10, responda falso o verdadero

1. La expresión ab indica la suma de a y b.
2. Cualquiera de las siguientes notaciones, $(a)b$, $a \cdot b$, $a(b)$, puede ser usada para indicar el producto de a y b.
3. La frase $2x + y - 4z$ se llama "expresión algebraica".
4. Un conjunto es una colección de objetos y a éstos se les llama "términos".
5. Los conjuntos $\{2, 4, 6, 8\}$ y $\{6, 4, 8, 2\}$ son iguales.
6. El conjunto $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ tiene como último elemento el 99.
7. El conjunto vacío tiene un elemento.
8. Para evaluar $24 \div 6 \cdot 2$, la primera operación a realizar debe ser multiplicar 6 veces 2.
9. Para evaluar $6 + 8 \cdot 3$, la primera operación a realizar debe ser multiplicar 8 veces 3.
10. La expresión algebraica $2(x + y)$ se simplifica a 24 si x es reemplazada por 10 y y es reemplazada por 0.

Conjunto de problemas 1.1

Para los problemas 1-34, simplifique cada expresión numérica. **(Objetivo 2)**

1. $9 + 14 - 7$
2. $32 - 14 + 6$
3. $7(14 - 9)$
4. $8(6 + 12)$
5. $16 + 5 \cdot 7$
6. $18 - 3(5)$
7. $4(12 + 9) - 3(8 - 4)$
8. $7(13 - 4) - 2(19 - 11)$
9. $4(7) + 6(9)$
10. $8(7) - 4(8)$
11. $6 \cdot 7 + 5 \cdot 8 - 3 \cdot 9$
12. $8(13) - 4(9) + 2(7)$
13. $(6 + 9)(8 - 4)$
14. $(15 - 6)(13 - 4)$
15. $6 + 4[3(9 - 4)]$
16. $92 - 3[2(5 - 2)]$
17. $16 \div 8 \cdot 4 + 36 \div 4 \cdot 2$
18. $7 \cdot 8 \div 4 - 72 \div 12$
19. $\dfrac{8 + 12}{4} - \dfrac{9 + 15}{8}$
20. $\dfrac{19 - 7}{6} + \dfrac{38 - 14}{3}$
21. $56 - [3(9 - 6)]$
22. $17 + 2[3(4 - 2)]$
23. $7 \cdot 4 \cdot 2 \div 8 + 14$
24. $14 \div 7 \cdot 8 - 35 \div 7 \cdot 2$
25. $32 \div 8 \cdot 2 + 24 \div 6 - 1$
26. $48 \div 12 + 7 \cdot 2 \div 2 - 1$

27. $4 \cdot 9 \div 12 + 18 \div 2 + 3$

28. $5 \cdot 8 \div 4 - 8 \div 4 \cdot 3 + 6$

29. $\dfrac{6(8-3)}{3} + \dfrac{12(7-4)}{9}$

30. $\dfrac{3(17-9)}{4} + \dfrac{9(16-7)}{3}$

31. $83 - \dfrac{4(12-7)}{5}$ **32.** $78 - \dfrac{6(21-9)}{4}$

33. $\dfrac{4 \cdot 6 + 5 \cdot 3}{7 + 2 \cdot 3} + \dfrac{7 \cdot 9 + 6 \cdot 5}{3 \cdot 5 + 8 \cdot 2}$

34. $\dfrac{7 \cdot 8 + 4}{5 \cdot 8 - 10} + \dfrac{9 \cdot 6 - 4}{6 \cdot 5 - 20}$

Para los problemas 35-54, evaluar cada expresión algebraica para los valores dados de las variables. **(Objetivo 3)**

35. $7x + 4y$ para $x = 6$ y $y = 8$

36. $8x + 6y$ para $x = 9$ y $y = 5$

37. $16a - 9b$ para $a = 3$ y $b = 4$

38. $14a - 5b$ para $a = 7$ y $b = 9$

39. $4x + 7y + 3xy$ para $x = 4$ y $y = 9$

40. $x + 8y + 5xy$ para $x = 12$ y $y = 3$

41. $14xz + 6xy - 4yz$ para $x = 8$, $y = 5$, y $z = 7$

42. $9xy - 4xz + 3yz$ para $x = 7$, $y = 3$, y $z = 2$

43. $\dfrac{54}{n} + \dfrac{n}{3}$ para $n = 9$

44. $\dfrac{n}{4} + \dfrac{60}{n} - \dfrac{n}{6}$ para $n = 12$

45. $\dfrac{y + 16}{6} + \dfrac{50 - y}{3}$ para $y = 8$

46. $\dfrac{w + 57}{9} + \dfrac{90 - w}{7}$ para $w = 6$

47. $(x + y)(x - y)$ para $x = 8$ y $y = 3$

48. $(x + 2y)(2x - y)$ para $x = 7$ y $y = 4$

49. $(5x - 2y)(3x + 4y)$ para $x = 3$ y $y = 6$

50. $(3a + b)(7a - 2b)$ para $a = 5$ y $b = 7$

51. $6 + 3[2(x + 4)]$ para $x = 7$

52. $9 + 4[3(x + 3)]$ para $x = 6$

53. $81 - 2[5(n + 4)]$ para $n = 3$

54. $78 - 3[4(n - 2)]$ para $n = 4$

La fórmula para hallar el área de un triángulo con base b y altura h es $A = \dfrac{bh}{2}$ (Ver Figura 1.1).

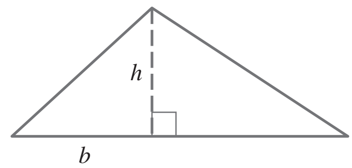


Figura 1.1

Para los problemas 55-60, hallar el valor de $\dfrac{bh}{2}$ para cada conjunto de valores para las variables b y h. **(Objetivo 3)**

55. $b = 8$ y $h = 12$ 56. $b = 6$ y $h = 14$

57. $b = 7$ y $h = 6$ 58. $b = 9$ y $h = 4$

59. $b = 16$ y $h = 5$ 60. $b = 18$ y $h = 13$

La fórmula para hallar el área de un trapezoide con bases b_1 y b_2 y altura h es $A = \dfrac{h(b_1 + b_2)}{2}$. Los suscritos se usan para indicar que b_1 y b_2 son diferentes variables (ver Figura 1.2).

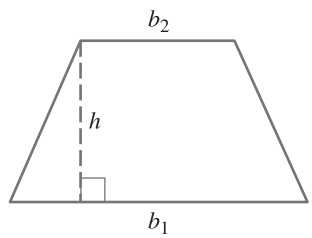


Figura 1.2

Para los problemas 61-66, hallar el valor de $\dfrac{h(b_1 + b_2)}{2}$ para cada conjunto de valores para las variabes h, b_1 y b_2. **(Objetivo 3)**

61. $h = 17$, $b_1 = 14$, y $b_2 = 6$

62. $h = 9$, $b_1 = 12$, y $b_2 = 16$

63. $h = 8$, $b_1 = 17$, y $b_2 = 24$

64. $h = 12$, $b_1 = 14$, y $b_2 = 5$

65. $h = 18$, $b_1 = 6$, y $b_2 = 11$

66. $h = 14$, $b_1 = 9$, y $b_2 = 7$

67. Debe ser capaz de realizar cálculos como los de los problemas 1-34, tanto con calculadora como sin ella. Asegúrese de realizar los problemas 51-74 con *su* calculadora y use el botón de paréntesis cuando sea apropiado

Pensamientos en palabras

68. Explique la diferencia entre una expresión numérica y una expresión algebraica.

69. Su amigo sigue obteniendo una respuesta de 45 cuando simplifica $3 + 2(9)$. ¿Qué error comete y cómo podría ayudarlo?

Más investigación

Agrupar símbolos puede afectar el orden en el que las operaciones aritméticas deben realizarse. Para los siguientes problemas, inserte paréntesis para que la expresión sea igual al valor dado.

70. Inserte paréntesis para que $36 + 12 \div 3 + 3 + 6 \cdot 2$ sea igual a 20.

71. Inserte paréntesis para que $36 + 12 \div 3 + 3 + 6 \cdot 2$ sea igual a 50.

72. Inserte paréntesis para que $36 + 12 \div 3 + 3 + 6 \cdot 2$ sea igual a 38.

73. Inserte paréntesis para que $36 + 12 \div 3 + 3 + 6 \cdot 2$ sea igual a 55.

Respuestas del examen de conceptos

1. Falso **2.** Verdadero **3.** Verdadero **4.** Falso **5.** Verdadero **6.** Falso **7.** Falso
8. Falso **9.** Verdadero **10.** Falso

1.2 Números primos y compuestos

OBJETIVOS

1. Identificar números enteros más grandes que 1 como primos o compuestos
2. Descomponer un número entero en el producto de números primos
3. Hallar el máximo común divisor de dos o más números enteros
4. Hallar el mínimo común múltiplo de dos o más números enteros

Ocasionalmente, se les da un significado especial a ciertos términos matemáticos cuando se discute un tema en particular. Tal es el caso del término “divide” como se usa en esta sección. Decimos que 6 *divide* a 18 porque 6 veces el número entero 3 produce 18; pero 6 *no divide* a 19, porque no hay un número entero que multiplicado por 6 dé como resultado 19. Presentamos la siguiente definición general.

Definición 1.1

Dados a y b números enteros, con a diferente a cero, a *divide* a b si y sólo si existe un número entero k de tal manera que $a \cdot k = b$.

Comentario: Note el uso de variables, a, b y k, en la formulación de una definición general. También advierta que la definición meramente generaliza el concepto de dividir.

Las siguientes frases clarifican aún más la Definición 1.1. Preste especial atención a las palabras en cursivas ya que éstas indican parte de la terminología usada para este tema.

1. 8 *divide* a 56 porque $8 \cdot 7 = 56$.
2. 7 *no divide* a 38 porque no hay un número entero, k, de tal manera que $7 \cdot k = 38$.
3. 3 es un *factor* de 27 porque $3 \cdot 9 = 27$.
4. 4 *no es un factor* de 38 porque no hay un número entero, k, de tal manera que $4 \cdot k = 38$.

5. 35 es un *múltiplo* de 5 porque $5 \cdot 7 = 35$.
6. 29 *no es un múltiplo* de 7 porque no hay un número entero, k, de tal manera que $7 \cdot k = 29$.

Se usa extensamente el término de *factor*. Se dice que 7 y 8 son factores de 56 porque $7 \cdot 8 = 56$; 4 y 14 también son factores de 56 porque $4 \cdot 14 = 56$. Los **factores** de un número también son divisores del número.

Ahora considere dos tipos especiales de números enteros llamados números primos y números compuestos según la siguiente definición.

Definición 1.2

Un número primo es un número entero, mayor a 1, que no tiene más factores (divisores) que sí mismo y 1. Los números enteros mayores que 1 que no son números primos, se llaman **números compuestos**.

Los números primos menores a 50 son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 y 47. Note que cada uno de éstos no tiene más divisores que sí mismo y 1. El conjunto de número primos es infinito; es decir, no existe ningún número primo que sea el más grande.

Podemos expresar cada número compuesto como un producto de números primos, también conocido como la descomposición en **factores primos** de un número. Considere los siguientes ejemplos.

$4 = 2 \cdot 2 \qquad 6 = 2 \cdot 3 \qquad 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \qquad 10 = 2 \cdot 5 \qquad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

En cada caso se expresa un número compuesto como el producto de ciertos números primos.

Hay varios procedimientos para encontrar los factores primos dado un número compuesto. Para nuestro propósito, la técnica más simple es descomponer el número compuesto en dos factores fácilmente reconocibles y después descomponer cada uno de ellos hasta obtener sólo factores primos. Considere estos ejemplos.

$$18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \qquad 27 = 3 \cdot 9 = 3 \cdot 3 \cdot 3$$
$$24 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \qquad 150 = 10 \cdot 15 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5$$

No importa cuáles factores se elijan primero. Por ejemplo, se puede comenzar por escribir a 18 como $3 \cdot 6$ y después descomponer a 6 en $2 \cdot 3$, lo cual produce el resultado final de $18 = 3 \cdot 2 \cdot 3$. De cualquier manera, 18 contiene dos factores primos de 3 y un factor primo de 2. El orden en el que se escriban los factores primos no es relevante.

Máximo común divisor

Podemos usar la descomposición en factores primos de dos números compuestos para hallar su *máximo común divisor*. Considere el siguiente ejemplo.

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$
$$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$$

Note que 2 es el factor de ambos, así como lo es 7. Por ende, 14 (el producto de 2 y 7) es el **máximo común divisor** de 42 y 70. En otras palabras, 14 es el número entero más grande que divide tanto a 42 como a 70. Los siguientes ejemplos ayudarán a aclarar el proceso de hallar el máximo común divisor de dos o más números.

Ejemplo de salón de clases
Hallar el máximo común divisor de 45 y 150

EJEMPLO 1 Hallar el máximo común divisor de 48 y 60.

Expresar cada número como el producto de factores primos:

Solución

$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$
$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Ya que ambos tienen dos 2 y un 3 en común, el máximo común divisor de 48 y 60 es $2 \cdot 2 \cdot 3 = \mathbf{12}$.

Ejemplo de salón de clases
Hallar el máximo común divisor de 50 y 105.

EJEMPLO 2 Hallar el máximo común divisor de 21 y 75.

Solución

$$21 = 3 \cdot 7$$
$$75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$$

Ya que sólo tienen un 3 en común, el máximo común divisor es **3**.

Ejemplo de salón de clases
Hallar el máximo común divisor de 18 y 35.

EJEMPLO 3 Hallar el máximo común divisor de 24 y 35.

Solución

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$
$$35 = 5 \cdot 7$$

Ya que no hay factores primos en común, el máximo común divisor es **1**.

El concepto de *máximo común divisor* puede extenderse a más de dos números, como se demuestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo de salón de clases
Hallar el máximo común divisor de 70, 175 y 245.

EJEMPLO 4 Hallar el máximo común divisor de 24, 56 y 120.

Solución

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$
$$56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$$
$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Ya que tienen en común tres 2, el máximo común divisor de 24, 56 y 120 es $2 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{8}$.

Mínimo común múltiplo

Sabemos que 35 es un *múltiplo* de 5 porque $5 \cdot 7 = 35$. El conjunto de todos los números que son múltiplos de 5 consiste de 0, 5, 10, 15, 20, 25, etc. En otras palabras, 5 veces cada número entero sucesivo ($5 \cdot 0 = \mathbf{0}$, $5 \cdot 1 = \mathbf{5}$, $5 \cdot 2 = \mathbf{10}$, $5 \cdot 3 = \mathbf{15}$, etc.) producen los múltiplos de 5. De igual manera, el conjunto de múltiplos de 4 consiste de 0, 4, 8, 12, 16, etc.

A veces es necesario determinar el mínimo común múltiplo, *que no sea cero*, de dos o más números enteros. Usamos la frase **mínimo común múltiplo** para designar a este número. Por ejemplo, el mínimo común múltiplo de 3 y 4 es 12, lo que significa que 12 es el número más pequeño, que no es cero, que es múltiplo tanto de 3 como de 4. Puesto de otra manera, 12 es el número entero más pequeño que es divisible tanto entre 3 como entre 4. De la misma manera, se dice que el mínimo común múltiplo de 6 y 8 es 24.

Si no podemos determinar el mínimo común múltiplo a primera vista, entonces la descomposición en factores primos de números compuestos puede ser de ayuda.

Si el mínimo común múltiplo no es obvio a primera vista, entonces procedemos de la siguiente manera.

Paso 1 Expresar el número como producto de factores primos.

Paso 2 El mínimo común múltiplo contiene cada factor primo tantas veces como el máximo de veces que aparezca en cualquiera de las descomposiciones del paso 1.

Ejemplo de salón de clases
Hallar el mínimo común múltiplo de 30 y 45.

EJEMPLO 5 Hallar el mínimo común múltiplo de 24 y 36.

Solución

Primero, se debe expresar cada número como el producto de factores primos:

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$
$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

La descomposición contiene los factores primos de 2 y 3.

La máxima cantidad de veces que el factor 2 ocurre en cualquiera de las descomposiciones es tres veces. Así que se necesitan tres factores de 2 para el mínimo común múltiplo.

La máxima cantidad de veces que el factor 3 ocurre en cualquiera de las descomposiciones es dos veces. Así que se necesitan dos factores de 3 para el mínimo común múltiplo.

Es decir, el mínimo común múltiplo es: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$.

Ejemplo de salón de clases
Hallar el mínimo común múltiplo de 36 y 54.

EJEMPLO 6 Hallar el mínimo común múltiplo de 48 y 84.

Solución

$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$
$$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$

Las descomposiciones contienen factores primos de 2, 3 y 7.

La máxima cantidad de veces que el factor 2 ocurre en cualquiera de las descomposiciones es cuatro veces. Así que se necesitan cuatro factores de 2 para el mínimo común múltiplo.

La máxima cantidad de veces que el factor 3 ocurre en cualquiera de las descomposiciones es una vez. Así que se necesita un factor 3 para el mínimo común múltiplo.

La máxima cantidad de veces que el factor 7 ocurre en cualquiera de las descomposiciones es una vez. Así que se necesita un factor de 7 para el mínimo común múltiplo.

Es decir, el mínimo común múltiplo es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 336$.

Ejemplo de salón de clases
Hallar el mínimo común múltiplo de 10, 27 y 30.

EJEMPLO 7 Hallar el mínimo común múltiplo de 12, 18 y 28.

Solución

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$
$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$
$$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$$

Las descomposiciones contienen factores primos de 2, 3 y 7.

La máxima cantidad de veces que el factor 2 ocurre en cualquiera de las descomposiciones es dos veces. Así que se necesitan dos factores de 2 para el mínimo común múltiplo.

La máxima cantidad de veces que el factor 3 ocurre en cualquiera de las descomposiciones es dos veces. Así que se necesitan dos factores de 3 para el mínimo común múltiplo.

La máxima cantidad de veces que el factor 7 ocurre en cualquiera de las descomposiciones es una vez. Así que se necesita un factor de 7 para el mínimo común múltiplo.

Es decir, el mínimo común múltiplo es $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 252$.

Ejemplo de salón de clases
Hallar el mínimo común múltiplo de 16 y 27.

EJEMPLO 8 Hallar el mínimo común múltiplo de 8 y 9.

Solución

$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$

$9 = 3 \cdot 3$

Después de obtener la descomposición en factores primos, podemos determinar que 8 y 9 no tienen factores en común. Por ende, necesitamos de todos los factores $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ para el mínimo común múltiplo. Por lo tanto, el mínimo común múltiplo es 72. Debido a que no hay factores en común, el mínimo común múltiplo es el producto de 8 y 9.

Examen de conceptos 1.2

Para los problemas 1-10, responda falso o cierto.

1. Todo número entero mayor a 2 es un número compuesto.
2. Dos es el único número primo par.
3. Uno es un número primo.
4. La descomposición de 24 es $2 \cdot 2 \cdot 6$.
5. Algunos números enteros son tanto primos como compuestos.
6. El máximo común divisor de 36 y 64 es 4.
7. El máximo común divisor de 24, 54 y 72 es 8.
8. El mínimo común múltiplo de 9 y 12 es 72.
9. El mínimo común múltiplo de 8, 9 y 18 es 72.
10. 161 es un número primo.

Conjunto de problemas 1.2

Para los problemas 1-20, clasifique cada oración como cierta o falsa.

1. 8 divide a 56
2. 9 divide a 54
3. 6 no divide a 54
4. 7 no divide a 42
5. 96 es múltiplo de 8
6. 78 es múltiplo de 6
7. 54 no es múltiplo de 4
8. 64 no es múltiplo de 6
9. 144 es divisible entre 4
10. 261 es divisible entre 9
11. 173 es divisible entre 3
12. 149 es divisible entre 7
13. 11 es un factor de 143
14. 11 es un factor de 187
15. 9 es un factor de 119
16. 8 es un factor de 98
17. 3 es un factor primo de 57
18. 7 es un factor primo de 91
19. 4 es un factor primo de 48
20. 6 es un factor primo de 72

Para los problemas 21-30, llene en el espacio en blanco con el par de números que dan el resultado indicado.
Por ejemplo $\underline{8} \cdot \underline{5} = 40$ y $\underline{8} + \underline{5} = 13$.

21. $\_\_\_ \cdot \_\_\_ = 24$ y $\_\_\_ + \_\_\_ = 11$
22. $\_\_\_ \cdot \_\_\_ = 12$ y $\_\_\_ + \_\_\_ = 7$
23. $\_\_\_ \cdot \_\_\_ = 24$ y $\_\_\_ + \_\_\_ = 14$
24. $\_\_\_ \cdot \_\_\_ = 25$ y $\_\_\_ + \_\_\_ = 26$
25. $\_\_\_ \cdot \_\_\_ = 36$ y $\_\_\_ + \_\_\_ = 13$
26. $\_\_\_ \cdot \_\_\_ = 18$ y $\_\_\_ + \_\_\_ = 11$
27. $\_\_\_ \cdot \_\_\_ = 50$ y $\_\_\_ + \_\_\_ = 15$
28. $\_\_\_ \cdot \_\_\_ = 50$ y $\_\_\_ + \_\_\_ = 27$
29. $\_\_\_ \cdot \_\_\_ = 9$ y $\_\_\_ + \_\_\_ = 10$
30. $\_\_\_ \cdot \_\_\_ = 48$ y $\_\_\_ + \_\_\_ = 16$

Para los problemas 31-40, clasifique cada número como primo o compuesto. (Objetivo 1)

31. 53 **32.** 57

33. 59 **34.** 61

35. 91 **36.** 81

37. 89 **38.** 97

39. 111 **40.** 101

Para los problemas 41-50, será útil familiarizarse con algunas reglas básicas de divisibilidad para poder determinar los factores primos. Las reglas de divisibilidad para los números 2, 3, 5 y 9 son los siguientes:

Regla para el 2

Un número entero es divisible entre dos si y sólo si el dígito de las unidades de su númeral es divisible entre 2. (En otras palabras, el dígito de las unidades debe ser 0, 2, 4, 6 u 8).

Ejemplos

68 es divisible entre 2 porque 8 es divisible entre 2.

57 no es divisible entre 2 porque 7 no es divisible entre 2.

Regla para el 3

Un número entero es divisible entre 3 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible entre 3.

Ejemplos

51 es divisible entre 3 porque $5 + 1 = 6$ y 6 es divisible entre 3.

144 es divisible entre 3 porque $1 + 4 + 4 = 9$ y 9 es divisible entre 3.

133 no es divisible entre 3 porque $1 + 3 + 3 + 7$ y 7 no es divisible entre 3.

Regla para el 5

Un número entero es divisible entre 5 si y sólo si el dígito de las unidades en su numeral es divisible entre 5. (En otras palabras, el dígito de las unidades debe ser 0 o 5).

Ejemplos

115 es divisible entre 5 porque 5 es divisible entre 5.

172 no es divisible entre 5 porque 2 no es divisible entre 5.

Regla para el 9

Un número entero es divisible entre 9 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible entre 9.

Ejemplos

765 es divisible entre 9 porque $7 + 6 + 5 = 18$ y 18 es divisible entre 9.

147 no es divisible entre 9 porque $1 + 4 + 7 = 12$ y 12 no es divisible entre 9.

Use estas reglas de divisibilidad para ayudarle a determinar la descomposición. (Objetivo 2)

41. 118 **42.** 76

43. 201 **44.** 123

45. 85 **46.** 115

47. 117 **48.** 441

49. 129 **50.** 153

Para los problemas 51-62, descomponer cada número compuesto en el producto de números primos. Por ejemplo $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$. (Objetivo 2)

51. 26 **52.** 16

53. 36 **54.** 80

55. 49 **56.** 92

57. 56 **58.** 144

59. 120 **60.** 84

61. 135 **62.** 98

Para los problemas 63-74, encuentra el máximo común divisor de los números dados. (Objetivo 3)

63. 12 y 16 **64.** 30 y 36

65. 56 y 64 **66.** 72 y 96

67. 63 y 81 **68.** 60 y 72

69. 84 y 96 **70.** 48 y 52

71. 36, 72, y 90 **72.** 27, 54, y 63

73. 48, 60, y 84 **74.** 32, 80, y 96

Para los problemas 75-86, hallar el mínimo común múltiplo de los números dados. (Objetivo 4)

75. 6 y 8 **76.** 8 y 12

77. 12 y 16 **78.** 9 y 12

79. 28 y 35 **80.** 42 y 66

81. 49 y 56 **82.** 18 y 24

83. 8, 12, y 28 **84.** 6, 10, y 12

85. 9, 15, y 18 **86.** 8, 14, y 24

Pensamientos en palabras

87. ¿Cómo explicaría los conceptos de máximo común divisor y mínimo común múltiplo a un amigo que no estuvo en clase durante esa explicación?

88. ¿Es siempre cierto que el máximo común divisor de dos números es menor que el mínimo común múltiplo de esos mismos dos números? Explique su respuesta.

Más investigación

89. Los números 0, 2, 4, 6, 8, etc. son múltiplos de 2. También son llamados números pares. ¿Por qué es el 2 el único número primo par?

90. Hallar el menor número entero diferente a cero que sea divisible entre 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

91. Hallar el menor número entero, mayor que 1, que produzca un residuo de 1 cuando se divide entre 2, 3, 4, 5 ó 6.

92. ¿Cuál es el máximo común divisor de x y y si x y y son números primos y x no es igual a y? Explique su respuesta.

93. ¿Cuál es el máximo común divisor de x y y si x y y son números enteros diferentes a cero y y es un múltiplo de x? Explique su respuesta.

94. ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de x y y si ambos son números primos y x no es igual a y? Explique su respuesta.

95. ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de x y y si el máximo común divisor de x y y es 1? Explique su respuesta.

Respuestas del examen de conceptos

1. Falso **2.** Verdadero **3.** Falso **4.** Falso **5.** Falso **6.** Verdadero **7.** Falso **8.** Falso **9.** Verdadero **10.** Falso

1.3 Enteros: Adición y substracción

OBJETIVOS

1. Conocer la terminología asociada con los conjuntos de números reales
2. Adición y substracción de números enteros
3. Evaluar las expresiones algebraicas de valores reales
4. Aplicar los conceptos de adición y substracción de números reales a problemas

"Una temperatura récord de 35° *bajo* cero se registró en la misma fecha que hoy pero en 1904". "La venta de valores cerró 3 puntos *abajo* ayer". "En la primera oportunidad, Moser *perdió* 7 yardas". "The Widget Manufacturing Company reportó *ganancias* de 50 millones de dólares y *pérdidas* de 53 millones de dólares en 2014". Estos ejemplos ilustran la necesidad de números negativos.

La recta numérica es un recurso visual para el trabajo en cuestión. Se puede asociar el conjunto de números enteros con puntos equidistantes en una línea como se indica en la Figura 1.3. Para cada número entero distinto a cero, podemos asociar su equivalente negativo a la izquierda del cero; asociamos 1 con -1, 2 con -2, etc., como se indica en la Figura 1.4. Al conjunto de números enteros no negativos junto con los enteros negativos, se le conoce como **números enteros**.

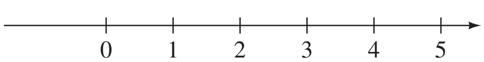


Figura 1.3

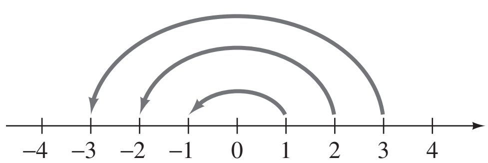


Figura 1.4

La siguiente terminología se usa para referirse a los números reales.

$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$	Enteros
$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$	Enteros positivos
$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$	Enteros no negativos

$\{\ldots, -3, -2, -1\}$ Enteros negativos

$\{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$ Enteros no positivos

El símbolo -1 se puede leer como "uno negativo", "el opuesto de uno" o "el inverso aditivo de uno". La terminología "opuesto de" e "inverso aditivo de" es especialmente significativa cuando se trabaja con variables. El símbolo $-x$, que se lee "el opuesto de x" o "el inverso aditivo de x", enfatiza un tema importante: Puesto que x puede ser cualquier número real, $-x$ (el opuesto de x) puede ser cero, positivo o negativo. Si x es positivo, entonces $-x$ es negativo. Si x es negativo, entonces $-x$ es positivo. Si x es cero, entonces $-x$ es cero. Estas declaraciones se expresan y se ilustran en las rectas numéricas en la Figura 1.5.

Si $x = 3$,
entonces $-x = -(3) = -3$.

Si $x = -3$,
entonces $-x = -(-3) = 3$.

Si $x = 0$,
entonces $-x = -(0) = 0$.

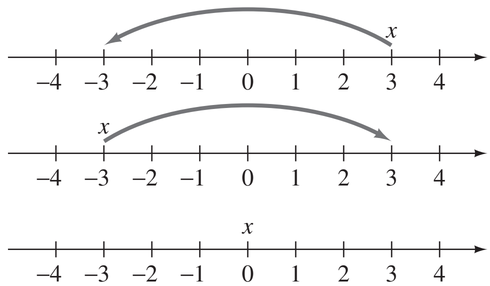


Figura 1.5

De esta discusión, también necesitamos reconocer las siguientes propiedades generales.

Propiedad 1.1

Si a es cualquier número real, entonces

$$-(-a) = a$$

(El opuesto del opuesto de cualquier número real es el número mismo)

Adición de números reales

La recta numérica también es una ayuda visual conveniente para interpretar la suma de números reales. En la Figura 1.6 vemos las interpretaciones en la recta numérica para los siguientes ejemplos.

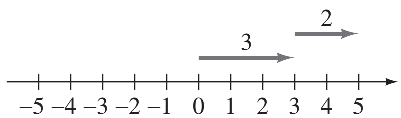
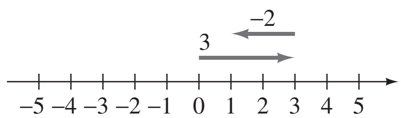
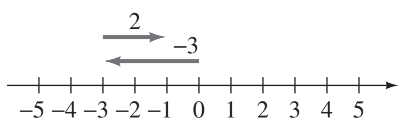
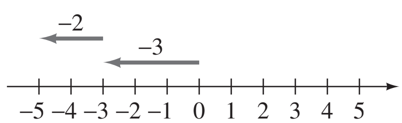
Problema	Interpretación en la recta numérica	Suma
$3 + 2$		$3 + 2 = 5$
$3 + (-2)$		$3 + (-2) = 1$
$-3 + 2$		$-3 + 2 = -1$
$-3 + (-2)$		$-3 + (-2) = -5$

Figura 1.6

Una vez que adquiera interpretación de movimiento en la recta numérica, una imagen mental de este movimiento será suficiente. Considere los siguientes problemas de sumas e imagine la interpretación en la recta numérica. Asegúrese que está de acuerdo con todas nuestras respuestas.

$5 + (-2) = 3$	$-6 + 4 = -2$	$-8 + 11 = 3$
$-7 + (-4) = -11$	$-5 + 9 = 4$	$9 + (-2) = 7$
$14 + (-17) = -3$	$0 + (-4) = -4$	$6 + (-6) = 0$

El último ejemplo ilustra una propiedad general que debe notar: **cualquier número real más su opuesto es igual a cero**.

Comentario: Las ganancias y las pérdidas que derivan de las inversiones financieras también dan un buen modelo físico para interpretar sumas de números reales. Una pérdida de \$25 en una inversión, junto con un rendimiento de \$60 en una segunda inversión, produce una pérdida global de \$35. Esto puede expresarse como $-25 + 60 = 35$. Podría serle útil revisar los ejemplos anteriores usando una interpretación de pérdidas y ganancias.

Aunque todos los problemas que implican adición de números reales podrían resolverse con el uso de la recta numérica, a veces es conveniente tener una descripción más precisa del proceso de adición. Para este propósito, se necesita considerar brevemente el concepto de valor absoluto. El **valor absoluto** de cualquier número es la distancia entre el número y el cero en la recta numérica. Por ejemplo, el valor absoluto de 6 es 6. El valor absoluto de -6 es 6. El valor absoluto de 0 es 0. Simbólicamente, el valor absoluto se representa con barras verticales. Por lo tanto, escribirmos:

$$|6| = 6 \qquad |-6| = 6 \qquad |0| = 0$$

Advierta que el valor absoluto de un número positivo es el número en sí, pero el valor absoluto de un número negativo es su opuesto. Por tanto, el valor absoluto de cualquier número, excepto 0, es positivo, y el valor absoluto de 0 es 0.

Se puede describir de manera precisa la **adición de números reales** usando el concepto del valor absoluto de la siguiente manera:

Dos números positivos

La suma de dos números reales positivos es la suma de sus valores absolutos. (La suma de dos números reales positivos es un número real positivo).

$$43 + 54 = |43| + |54| = 43 + 54 = 97$$

Dos números negativos

La suma de dos números reales negativos es el opuesto de la suma de sus valores absolutos. (La suma de dos números reales negativos es un número real negativo).

$$\begin{aligned}(-67) + (-93) &= -(|-67| + |-93|)\\ &= -(67 + 93)\\ &= -160\end{aligned}$$

Un número positivo y uno negativo

La adición de un número real positivo y un número real negativo se puede encontrar al substraer el menor valor absoluto del mayor valor absoluto y dar al resultado el signo del número original que tiene el valor absoluto más grande. Si los dos números tienen el mismo valor absoluto, entonces su suma es 0.

$$82 + (-40) = |82| - |-40| = 82 - 40 = 42$$
$$74 + (-90) = -(|-90| - |74|)$$
$$= -(90 - 74) = -16$$
$$(-17) + 17 = |-17| - |17|$$
$$= 17 - 17 = 0$$

Cero y otro número

La suma de 0 y cualquier número real es el mismo número real.

$$0 + (-46) = -46$$
$$72 + 0 = 72$$

Los siguientes ejemplos demuestran cómo sumar números reales. Asegúrese de estar de acuerdo con cada uno de los resultados.

$$-18 + (-56) = -(|-18| + |-56|) = -(18 + 56) = -74$$
$$-71 + (-32) = -(|-71| + |-32|) = -(71 + 32) = -103$$
$$64 + (-49) = |64| - |-49| = 64 - 49 = 15$$
$$-56 + 93 = |93| - |-56| = 93 - 56 = 37$$
$$-114 + 48 = -(|-114| - |48|) = -(114 - 48) = -66$$
$$45 + (-73) = -(|-73| - |45|) = -(73 - 45) = -28$$
$$46 + (-46) = 0 \quad -48 + 0 = -48$$
$$(-73) + 73 = 0 \quad 0 + (-81) = -81$$

Es verdad que este enfoque del valor absoluto describe de manera precisa el proceso de sumar números reales, pero no olvide la interpretación en la recta numérica. En la siguiente sección de problemas encontrará otros modelos físicos para interpretar la suma de números reales: tales modelos pueden serle útiles.

Substracción de números reales

Los siguientes ejemplos ilustran la relación entre la suma y la resta de números enteros.

$$7 - 2 = 5 \quad \text{porque} \quad 2 + 5 = 7$$
$$9 - 6 = 3 \quad \text{porque} \quad 6 + 3 = 9$$
$$5 - 1 = 4 \quad \text{porque} \quad 1 + 4 = 5$$

Esta misma relación entre la suma y la resta se aplica a *todos los números reales*.

$$5 - 6 = -1 \quad \text{porque} \quad 6 + (-1) = 5$$
$$-4 - 9 = -13 \quad \text{porque} \quad 9 + (-13) = -4$$
$$-3 - (-7) = 4 \quad \text{porque} \quad -7 + 4 = -3$$
$$8 - (-3) = 11 \quad \text{porque} \quad -3 + 11 = 8$$

Ahora, considere la siguiente observación.

$$5 - 6 = -1 \quad \text{y} \quad 5 + (-6) = -1$$
$$-4 - 9 = -13 \quad \text{y} \quad -4 + (-9) = -13$$
$$-3 - (-7) = 4 \quad \text{y} \quad -3 + 7 = 4$$
$$8 - (-3) = 11 \quad \text{y} \quad 8 + 3 = 11$$

Los ejemplos anteriores ayudan a demostrar que podemos plantear la substracción de números reales en términos de suma de números reales. A continuación, una descripción general de la **substracción de números reales**.

Substracción de números reales

Si a y b son números reales, entonces $a - b = a + (-b)$.

Resulta útil leer $a - b = a + (-b)$ como "a menos b es igual a a más el opuesto de b". Todo problema de substracción se puede cambiar a un problema de adición equivalente. Considere los siguientes ejemplos.

$$6 - 13 = 6 + (-13) = -7$$
$$9 - (-12) = 9 + 12 = 21$$
$$-8 - 13 = -8 + (-13) = -21$$
$$-7 - (-8) = -7 + 8 = 1$$

Resulta evidente que la adición es una operación clave. La habilidad de adición eficazmente números reales es necesaria para todo trabajo algebraico posterior.

Creatas Images/Jupiter Images

Ejemplo de salón de clases
Brittany planeaba gastar \$75 diariamente mientras viajaba por Europa. Dado el registro de la cantidad por encima o por debajo de su presupuesto durante una semana, determinar la cantidad por la cual estuvo por encima o por debajo de su presupuesto esa semana.

Mayo 1	Más \$10
Mayo 2	Menos \$5
Mayo 3	Menos \$7
Mayo 4	Más \$20
Mayo 5	Menos \$8
Mayo 6	Menos \$3
Mayo 7	Más \$5

EJEMPLO 1 Aplique su habilidad

Un instructor de nutrición y acondicionamiento físico pidió a sus clientes que se pesaran y registraran su pérdida o ganancia de peso en libras cada viernes durante un periodo de seis semanas. Basado en los registros de uno de sus clientes (Dominic), determine su ganancia o pérdida total de peso.

	Ago. 12	Ago. 19	Ago. 26	Sep. 2	Sep. 9	Sep. 16
Dominic	pérdida de 3	ganancia de 1	pérdida de 5	pérdida de 2	ganancia de 3	pérdida de 4

Solución

Usemos los números negativos para representar las pérdidas y los números positivos para representar las ganancias. Entonces, los registros semanales de Dominic se representarían como -3, $+1$, -5, -2, $+3$ y -4. Sumar los números le dará la ganancia o pérdida total.

$$-3 + (+1) + (-5) + (-2) + (+3) + (-4) = -10$$

Así que, en seis semanas, Dominic perdió 10 libras.

Evaluar expresiones algebraicas

Cerremos esta sección evaluando algunas expresiones algebraicas usando números negativos y positivos.

Ejemplo de salón de clases
Evaluar cada expresión algebraica con los valores dados a las variables.

(a) $m - n$ para $m = -10$ y $n = 23$
(b) $-x + y$ para $x = -11$ y $y = -2$
(c) $-c - d$ para $c = -57$ y $d = -4$

EJEMPLO 2

Evaluar cada expresión algebraica con los valores dados a las variables.

(a) $x - y$ para $x = -12$ y $y = 20$
(b) $-a + b$ para $a = -8$ y $b = -6$
(c) $-x - y$ para $x = 14$ y $y = -7$

Solución

(a) $x - y = -12 - 20$ cuando $x = -12$ y $y = 20$
$= -12 + (-20)$ Cambiar a suma
$= -32$

(b) $-a + b = -(-8) + (-6)$ cuando $a = -8$ y $b = -6$
$= 8 + (-6)$ Note el uso de paréntesis al sustituir los valores
$= 2$

(c) $-x - y = -(14) - (-7)$ cuando $x = 14$ y $y = -7$
$= -14 + 7$ Cambiar a suma
$= -7$

Examen de conceptos 1.3

Para los problemas 1-4, emparejar la letra de la descripción con el conjunto de números.

1. $\{\ldots, -3, -2, -1\}$ **A.** Enteros positivos
2. $\{1, 2, 3, \ldots\}$ **B.** Enteros negativos
3. $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ **C.** Enteros no negativos
4. $\{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$ **D.** Enteros no positivos

Para los problemas 5-10, responda falso o verdadero.

5. El número cero se considera un entero positivo.
6. El número cero se considera un entero negativo.
7. El valor absoluto de un número es la distancia entre éste y el 1 en la recta numérica.
8. El $|-4|$ es -4.
9. El opuesto de -5 es 5.
10. *a* menos *b* es equivalente a *a* más el opuesto de *b*.

Conjunto de problemas 1.3

Para los problemas 1-10, usar la interpretación de la recta numérica para hallar cada suma. (Objetivo 2)

1. $5 + (-3)$ **2.** $7 + (-4)$
3. $-6 + 2$ **4.** $-9 + 4$
5. $-3 + (-4)$ **6.** $-5 + (-6)$
7. $8 + (-2)$ **8.** $12 + (-7)$
9. $5 + (-11)$ **10.** $4 + (-13)$

Para los problemas 11-30, hallar cada suma. (Objetivo 2)

11. $17 + (-9)$ **12.** $16 + (-5)$
13. $8 + (-19)$ **14.** $9 + (-14)$
15. $-7 + (-8)$ **16.** $-6 + (-9)$
17. $-15 + 8$ **18.** $-22 + 14$
19. $-13 + (-18)$ **20.** $-15 + (-19)$
21. $-27 + 8$ **22.** $-29 + 12$
23. $32 + (-23)$ **24.** $27 + (-14)$
25. $-25 + (-36)$ **26.** $-34 + (-49)$
27. $54 + (-72)$ **28.** $48 + (-76)$
29. $-34 + (-58)$ **30.** $-27 + (-36)$

Para los problemas 31-50, encontrar la resta como se indica. (Objetivo 2)

31. $3 - 8$ **32.** $5 - 11$
33. $-4 - 9$ **34.** $-7 - 8$
35. $5 - (-7)$ **36.** $9 - (-4)$
37. $-6 - (-12)$ **38.** $-7 - (-15)$
39. $-11 - (-10)$ **40.** $-14 - (-19)$
41. $-18 - 27$ **42.** $-16 - 25$
43. $34 - 63$ **44.** $25 - 58$
45. $45 - 18$ **46.** $52 - 38$
47. $-21 - 44$ **48.** $-26 - 54$
49. $-53 - (-24)$ **50.** $-76 - (-39)$

Para los problemas 51-66, encontrar la suma o resta como se indica. (Objetivo 2)

51. $6 - 8 - 9$ **52.** $5 - 9 - 4$
53. $-4 - (-6) + 5 - 8$ **54.** $-3 - 8 + 9 - (-6)$

55. $5 + 7 - 8 - 12$ **56.** $-7 + 9 - 4 - 12$

57. $-6 - 4 - (-2) + (-5)$

58. $-8 - 11 - (-6) + (-4)$

59. $-6 - 5 - 9 - 8 - 7$

60. $-4 - 3 - 7 - 8 - 6$

61. $7 - 12 + 14 - 15 - 9$

62. $8 - 13 + 17 - 15 - 19$

63. $-11 - (-14) + (-17) - 18$

64. $-15 + 20 - 14 - 18 + 9$

65. $16 - 21 + (-15) - (-22)$

66. $17 - 23 - 14 - (-18)$

El formato horizontal se usa con frecuencia en álgebra, pero ocasionalmente el formato vertical también aparece. Por ende, es necesaria la familiarización con el formato vertical. Hallar las siguientes sumas para los problemas 67-78. (Objetivo 2)

67. $\begin{array}{r} 5 \\ \underline{-9} \end{array}$ **68.** $\begin{array}{r} 8 \\ \underline{-13} \end{array}$

69. $\begin{array}{r} -13 \\ \underline{-18} \end{array}$ **70.** $\begin{array}{r} -14 \\ \underline{-28} \end{array}$

71. $\begin{array}{r} -18 \\ \underline{9} \end{array}$ **72.** $\begin{array}{r} -17 \\ \underline{9} \end{array}$

73. $\begin{array}{r} -21 \\ \underline{39} \end{array}$ **74.** $\begin{array}{r} -15 \\ \underline{32} \end{array}$

75. $\begin{array}{r} 27 \\ \underline{-19} \end{array}$ **76.** $\begin{array}{r} 31 \\ \underline{-18} \end{array}$

77. $\begin{array}{r} -53 \\ \underline{24} \end{array}$ **78.** $\begin{array}{r} 47 \\ \underline{-28} \end{array}$

Para los problemas 79-90, haga los problemas en formato vertical. (Objetivo 2)

79. $\begin{array}{r} 5 \\ \underline{12} \end{array}$ **80.** $\begin{array}{r} 8 \\ \underline{19} \end{array}$

81. $\begin{array}{r} 6 \\ \underline{-9} \end{array}$ **82.** $\begin{array}{r} 13 \\ \underline{-7} \end{array}$

83. $\begin{array}{r} -7 \\ \underline{-8} \end{array}$ **84.** $\begin{array}{r} -6 \\ \underline{-5} \end{array}$

85. $\begin{array}{r} 17 \\ \underline{-19} \end{array}$ **86.** $\begin{array}{r} 18 \\ \underline{-14} \end{array}$

87. $\begin{array}{r} -23 \\ \underline{16} \end{array}$ **88.** $\begin{array}{r} -27 \\ \underline{15} \end{array}$

89. $\begin{array}{r} -12 \\ \underline{12} \end{array}$ **90.** $\begin{array}{r} -13 \\ \underline{-13} \end{array}$

Para los problemas 91-100, evaluar cada expresión algebraica para los valores dados a las variables. (Objetivo 3)

91. $x - y$ para $x = -6$ y $y = -13$

92. $-x - y$ para $x = -7$ y $y = -9$

93. $-x + y - z$ para $x = 3$, $y = -4$, y $z = -6$

94. $x - y + z$ para $x = 5$, $y = 6$ y $z = -9$

95. $-x - y - z$ para $x = -2$, $y = 3$ y $z = -11$

96. $-x - y + z$ para $x = -8$, $y = -7$ y $z = -14$

97. $-x + y + z$ para $x = -11$, $y = 7$ y $z = -9$

98. $-x - y - z$ para $x = 12$, $y = -6$ y $z = -14$

99. $x - y - z$ para $x = -15$, $y = 12$ y $z = -10$

100. $x + y - z$ para $x = -18$, $y = 13$ y $z = 8$

Un juego de fútbol americano puede ser usado para interpretar la adición de números reales. Una ganancia de 3 yardas en una de las jugadas seguida de una pérdida de 5 yardas en la siguiente jugada, colocó la pelota 2 yardas atrás de la línea inicial de golpeo; esto podría expresarse como $3 + (-5) = -2$. Use esta interpetación usando el fútbol para hallar las siguientes sumas de los problemas 101-110. (Objetivo 4)

101. $4 + (-7)$ **102.** $3 + (-5)$

103. $-4 + (-6)$ **104.** $-2 + (-5)$

105. $-5 + 2$ **106.** $-10 + 6$

107. $-4 + 15$ **108.** $-3 + 22$

109. $-12 + 17$ **110.** $-9 + 21$

Para los problemas 111-120, tome como referencia el comentario en la página 16 y use la interpretación de pérdida y ganancia para la suma de los números reales. (Objetivo 4)

111. $60 + (-125)$ **112.** $50 + (-85)$

113. $-55 + (-45)$

114. $-120 + (-220)$

115. $-70 + 45$

116. $-125 + 45$

117. $-120 + 250$

118. $-75 + 165$

119. $145 + (-65)$

120. $275 + (-195)$

121. La temperatura a las 5 a.m. era -17°F. Para mediodía, la temperatura había incrementado 14°F. Use la adición de números reales para expresar esta situación y determinar la temperatura al mediodía.

122. La temperatura a las 6 p.m. era -6°F. A las 11 p.m., la temperatura había bajado 5°F. Use la substracción de números reales para expresar esta situación y determinar la temperatura a las 11 p.m.

123. Megan tiró rondas de 3 sobre par, 2 bajo par, 3 bajo par y 5 bajo par en un torneo de golf de cuatro días. Use la suma de números reales para expresar esta situación y determinar cuánto sobre o bajo par tuvo en el torneo de golf (par en golf es 72 rondas).

124. El reporte anual de una compañía contenía las siguientes cifras: una pérdida de \$615,000 para 2011, una pérdida de \$275,000 para 2012, una pérdida de \$70,000 para 2013 y una ganancia de \$115,000 para 2014. Use la suma de números reales para expresar esta situación y determinar la pérdida o ganancia total de la compañía tras el periodo de cuatro años.

125. Imagine que durante un periodo de cinco días, una parte de las acciones de Dell registró las siguientes ganancias y pérdidas:

Lunes	**Martes**	**Miércoles**
perdió \$2	ganó \$1	ganó \$3
Jueves	**Viernes**	
ganó \$1	perdió \$2	

Use la suma de números reales para expresar esta situación y determinar la cantidad de ganancia o pérdida después del periodo de cinco días.

126. El Mar Muerto está a, aproximadamente, trece mil ochenta y cinco pies bajo el nivel del mar. Imagine que está de pie ochocientos pies sobre el Mar Muerto. Use la suma de números reales para expresar esta situación y determinar su elevación.

127. Use su calculadora para verificar sus respuestas para los problemas 51-66.

Pensamientos en palabras

128. El planteamiento $-6 - (-2) = -6 + 2 = -4$ puede leerse como "negativo seis menos negativo dos es igual a negativo seis más dos, lo cual es igual a cuatro". Exprese en palabras los siguiente:

(a) $8 + (-10) = -2$

(b) $-7 - 4 = -7 + (-4) = -11$

(c) $9 - (-12) = 9 + 12 = 21$

(d) $-5 + (-6) = -11$

129. La expresión algebraica $-x - y$ puede leerse como "el opuesto de x menos y". Exprese en palabras lo siguiente:

(a) $-x + y$

(b) $x - y$

(c) $-x - y + z$

Respuestas del examen de conceptos

1. B **2.** A **3.** C **4.** D **5.** Falso **6.** Falso **7.** Falso **8.** Falso **9.** Verdadero **10.** Verdadero

1.4 Multiplicación y división de números reales

OBJETIVOS

1. Multiplicar y dividir números reales
2. Evaluar expresiones algebraicas que implican la multiplicación y la división de números reales
3. Aplicar los conceptos de multiplicación y división de números reales a problemas

La multiplicación de números enteros positivos se puede interpretar como adición repetitiva. Por ejemplo, $3 \cdot 4$ significa la suma de tres veces cuatro; por tanto, $3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 = 12$. Considere los siguientes ejemplos que usan la idea de la adición repetida para encontrar el producto de un positivo y un negativo:

$$3(-2) = -2 + (-2) + (-2) = -6$$

$$2(-4) = -4 + (-4) = -8$$

$$4(-1) = -1 + (-1) + (-1) + (-1) = -4$$

Note el uso de paréntesis para indicar multiplicación. A veces ambos números se escriben entre paréntesis, así que queda $(3)(-2)$.

Cuando se multiplican números enteros positivos, el orden en el que se multiplican dos factores no cambia el producto: $2(3) = 6$ y $3(2) = 6$. Al usar esta idea se puede manejar un número negativo por un número positivo del modo siguiente:

$$(-2)(3) = (3)(-2) = (-2) + (-2) + (-2) = -6$$
$$(-3)(2) = (2)(-3) = (-3) + (-3) = -6$$
$$(-4)(3) = (3)(-4) = (-4) + (-4) + (-4) = -12$$

Finalmente, considere el producto de dos enteros negativos. El siguiente patrón que usa enteros ayuda con el razonamiento.

$$4(-3) = -12$$
$$3(-3) = -9$$
$$2(-3) = -6$$
$$1(-3) = -3$$
$$0(-3) = 0$$ El producto de 0 y cualquier número es 0
$$(-1)(-3) = ?$$

Ciertamente, el producto de -1 y -3 tiene que ser 3. En general, este tipo de razonamiento ayuda a darse cuenta de que el producto de cualesquiera dos números reales negativos es un número real positivo.

Al usar el concepto de valor absoluto, la multiplicación de números reales se puede describir del modo siguiente:

1. El producto de dos números reales positivos o dos negativos es el producto de sus valores absolutos.

2. El producto de un número real positivo y un número real negativo (en cualquier orden) es el opuesto del producto de sus valores absolutos.

3. El producto de cero y cualquier número real es cero.

Los siguientes son ejemplos de multiplicación de números reales:

$$(-5)(-2) = |-5| \cdot |-2| = 5 \cdot 2 = 10$$
$$(7)(-6) = -(|7| \cdot |-6|) = -(7 \cdot 6) = -42$$
$$(-8)(9) = -(|-8| \cdot |9|) = -(8 \cdot 9) = -72$$
$$(-14)(0) = 0$$
$$(0)(-28) = 0$$

Los ejemplos anteriores ilustran un proceso paso a paso para multiplicar números reales. Sin embargo, en la práctica, la clave es recordar que el producto de dos números positivos o dos negativos es positivo y que el producto de un número positivo y un número negativo (en cualquier orden) es negativo. Después se puede evitar el análisis paso a paso y simplemente escribir el resultado de la siguiente manera:

$$(7)(-9) = -63$$
$$(8)(7) = 56$$
$$(-5)(-6) = 30$$
$$(-4)(12) = -48$$

División de números reales

Repasando el conocimiento que tenemos hasta el momento de los números enteros, se puede obtener cierto lineamiento para el trabajo con los números reales. Sabemos, por ejemplo, que $\frac{8}{2} = 4$ porque $2 \cdot 4 = 8$. En otras palabras, se puede encontrar el cociente de dos números enteros tomando como referencia una multiplicación relacionada. En los siguientes ejemplos, se usa este mismo vínculo entre la multiplicación y la división para determinar los cocientes.

$$\frac{8}{-2} = -4 \quad \text{porque } (-2)(-4) = 8$$

$$\frac{-10}{5} = -2 \quad \text{porque } (5)(-2) = -10$$

$$\frac{-12}{-4} = 3 \quad \text{porque } (-4)(3) = -12$$

$$\frac{0}{-6} = 0 \quad \text{porque } (-6)(0) = 0$$

$$\frac{-9}{0} \quad \text{es indefinido porque ningún número multiplicado 0 veces produce } -9$$

$$\frac{0}{0} \quad \text{es indeterminado porque cualquier número multiplicado 0 veces es igual a 0}$$

Las siguientes tres oraciones presentan una descripción precisa para la **división de números reales**.

1. El cociente de dos números reales positivos o dos negativos es el cociente de sus valores absolutos.
2. El cociente de un número real positivo y un número real negativo (de un negativo y un positivo) es el opuesto del cociente de sus valores absolutos.
3. El cociente de cero y cualquier número real distinto de cero (dividido entre cualquier número distinto a cero) es cero.

Los siguientes ejemplos ilustran esta descripción de la división de enteros:

$$\frac{-8}{-4} = \frac{|-8|}{|-4|} = \frac{8}{4} = 2 \qquad \frac{-14}{2} = -\left(\frac{|-14|}{|2|}\right) = -\left(\frac{14}{2}\right) = -7$$

$$\frac{0}{-4} = 0 \qquad \frac{15}{-3} = -\left(\frac{|15|}{|-3|}\right) = -\left(\frac{15}{3}\right) = -5$$

Para propósitos prácticos, la clave es recordar si el cociente es positivo o negativo. Recuerde que el cociente de dos números reales positivos o dos negativos, es positivo; y el cociente de un número real positivo y uno negativo, o uno negativo y uno positivo, es negativo. Se pueden simplemente escribir los cocientes de la siguiente manera mostrando todos los pasos:

$$\frac{-18}{-6} = 3 \qquad \frac{-24}{12} = -2 \qquad \frac{36}{-9} = -4$$

Comentario: Ocasionalmente, las personas usan la frase "dos negativos hacen un positivo". Esperamos que recuerden que esta referencia sólo aplica para multiplicación y división; en la suma, dos negativos dan resultado negativo. Lo mejor, probablemente, es evitar tales declaraciones tan imprecisas.

Simplificación de expresiones numéricas

Ahora podemos simplificar expresiones numéricas que implican cualquiera de las operaciones básicas con números reales (o todas ellas). Mantenga en mente el orden de las operaciones dado en la Sección 1.1.

Ejemplo de salón de clases
Simplifique $4(-5) - 3(-6) - 7(4)$.

EJEMPLO 1 Simplifique $-4(-3) - 7(-8) + 3(-9)$.

Solución

$$\begin{aligned} -4(-3) - 7(-8) + 3(-9) &= 12 - (-56) + (-27) \\ &= 12 + 56 + (-27) \\ &= 41 \end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Simplifique
$\dfrac{-3 + 6(-7)}{-5}$.

EJEMPLO 2 Simplifique $\dfrac{-8 - 4(5)}{-4}$.

Solución

$$\begin{aligned} \frac{-8 - 4(5)}{-4} &= \frac{-8 - 20}{-4} \\ &= \frac{-28}{-4} \\ &= 7 \end{aligned}$$


Comstock Images/Jupiter Images

EJEMPLO 3 **Aplique su habilidad**

En el torneo local de aficionados del póquer, Dwayne perdió \$25 por tres manos, perdió \$14 por dos manos y ganó \$10 por cuatro manos en la primer ronda. Determine la cantidad promedio que Dwayne perdió o ganó en la primera ronda del juego.

Solución

Use números negativos para representar las pérdidas y números positivos para representar las ganancias. La primera ronda de Dwayne se representaría como $3(-25) + 2(-14) + 4(+10)$. Para hallar el promedio, es necesario dividir esta expresión entre 9, el total de manos jugadas.

$$\begin{aligned} \frac{3(-25) + 2(-14) + 4(+10)}{9} &= \frac{-75 - 28 + 40}{9} \\ &= \frac{-63}{9} \\ &= -7 \end{aligned}$$

Así que, en promedio, Dwayne perdió \$7 por mano en la primera ronda.

Ejemplo de salón de clases
Durante dos semanas de intercambio en el mercado de valores, una sección de eBay perdió \$20 por dos días, ganó \$15 por tres días, perdió \$5 por cuatro días y ganó \$5 uno de los días. Determinar la cantidad promedio de ganancia o pérdida que tuvo por día durante este periodo de 10 días.

Evaluar expresiones algebraicas

La evaluación de expresiones algebraicas suele implicar el uso de dos o más operaciones con números reales. Los ejemplos finales de esta sección se usan para representar tales situaciones.

Ejemplo de salón de clases
Hallar el valor de $5m + 4n$, cuando $m = 3$ y $n = -7$.

EJEMPLO 4 Hallar el valor de $3x + 2y$ cuando $x = 5$ y $y = -9$.

Solución

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 3(5) + 2(-9) \quad \text{cuando } x = 5 \text{ y } y = -9 \\ &= 15 + (-18) \\ &= -3 \end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Evaluar $-3x + 11y$ para $x = 5$ y $y = -2$.

EJEMPLO 5 Evaluar $-2a + 9b$ para $a = 4$ y $b = -3$.

Solución

$$\begin{aligned} -2a + 9b &= -2(4) + 9(-3) \quad \text{cuando } a = 4 \text{ y } b = -3 \\ &= -8 + (-27) \\ &= -35 \end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Hallar el valor de $\dfrac{3a - 7b}{5}$ cuando $a = -2$ y $b = -3$.

EJEMPLO 6 Hallar el valor de $\dfrac{x - 2y}{4}$ cuando $x = -6$ y $y = 5$.

Solución

$$\begin{aligned} \frac{x - 2y}{4} &= \frac{-6 - 2(5)}{4} \quad \text{cuando } x = -6 \text{ y } y = 5 \\ &= \frac{-6 - 10}{4} \\ &= \frac{-16}{4} \\ &= -4 \end{aligned}$$

Examen de conceptos 1.4

Para los problemas 1-10, responda falso o verdadero.

1. El producto de dos negativos es un positivo.

2. El producto de un positivo y un negativo es un positivo.

3. Al multiplicar tres negativos, el producto es negativo.

4. Las reglas de suma y las reglas de multiplicación de números reales son las mismas.

5. El cociente de dos negativos es negativo.

6. El cociente de un positivo y cero es un número real positivo.

7. El cociente de un número negativo y cero es cero.

8. El producto de cero y cualquier número real es cero.

9. El valor de $-3x - y$ cuando $x = -4$ y $y = 6$ es 6.

10. El valor de $2x - 5y - xy$ cuando $x = -2$ y $y = -7$ es 17.

Conjunto de problemas 1.4

Para los problemas 1-40, hallar el producto o cociente (multiplicar o dividir) según se indique. (Objetivo 1)

1. $5(-6)$

2. $7(-9)$

3. $\dfrac{-27}{3}$

4. $\dfrac{-35}{5}$

5. $\dfrac{-42}{-6}$

6. $\dfrac{-72}{-8}$

7. $(-7)(8)$

8. $(-6)(9)$

9. $(-5)(-12)$

10. $(-7)(-14)$

11. $\dfrac{96}{-8}$

12. $\dfrac{-91}{7}$

13. $14(-9)$

14. $17(-7)$

15. $(-11)(-14)$

16. $(-13)(-17)$

17. $\dfrac{135}{-15}$

18. $\dfrac{-144}{12}$

19. $\dfrac{-121}{-11}$

20. $\dfrac{-169}{-13}$

21. $(-15)(-15)$

22. $(-18)(-18)$

23. $\dfrac{112}{-8}$

24. $\dfrac{112}{-7}$

25. $\dfrac{0}{-8}$

26. $\dfrac{-8}{0}$

27. $\dfrac{-138}{-6}$

28. $\dfrac{-105}{-5}$

29. $\dfrac{76}{-4}$

30. $\dfrac{-114}{6}$

31. $(-6)(-15)$

32. $\dfrac{0}{-14}$

33. $(-56) \div (-4)$

34. $(-78) \div (-6)$

35. $(-19) \div 0$

36. $(-90) \div 15$

37. $(-72) \div 18$

38. $(-70) \div 5$

39. $(-36)(27)$

40. $(42)(-29)$

Para los problemas 41-60, simplificar cada expresión numérica. (Objetivo 2)

41. $3(-4) + 5(-7)$

42. $6(-3) + 5(-9)$

43. $7(-2) - 4(-8)$

44. $9(-3) - 8(-6)$

45. $(-3)(-8) + (-9)(-5)$

46. $(-7)(-6) + (-4)(-3)$

47. $5(-6) - 4(-7) + 3(2)$

48. $7(-4) - 8(-7) + 5(-8)$

49. $\dfrac{13 + (-25)}{-3}$

50. $\dfrac{15 + (-36)}{-7}$

51. $\dfrac{12 - 48}{6}$

52. $\dfrac{16 - 40}{8}$

53. $\dfrac{-7(10) + 6(-9)}{-4}$

54. $\dfrac{-6(8) + 4(-14)}{-8}$

55. $\dfrac{4(-7) - 8(-9)}{11}$

56. $\dfrac{5(-9) - 6(-7)}{3}$

57. $-2(3) - 3(-4) + 4(-5) - 6(-7)$

58. $2(-4) + 4(-5) - 7(-6) - 3(9)$

59. $-1(-6) - 4 + 6(-2) - 7(-3) - 18$

60. $-9(-2) + 16 - 4(-7) - 12 + 3(-8)$

Para los problemas 61-76, evaluar cada expresión algebraica según los valores dados a las variables. (Objetivo 2)

61. $7x + 5y$ para $x = -5$ y $y = 9$

62. $4a + 6b$ para $a = -6$ y $b = -8$

63. $9a - 2b$ para $a = -5$ y $b = 7$

64. $8a - 3b$ para $a = -7$ y $b = 9$

65. $-6x - 7y$ para $x = -4$ y $y = -6$

66. $-5x - 12y$ para $x = -5$ y $y = -7$

67. $\dfrac{5x - 3y}{-6}$ para $x = -6$ y $y = 4$

68. $\dfrac{-7x + 4y}{-8}$ para $x = 8$ y $y = 6$

69. $3(2a - 5b)$ para $a = -1$ y $b = -5$

70. $4(3a - 7b)$ para $a = -2$ y $b = -4$

71. $-2x + 6y - xy$ para $x = 7$ y $y = -7$

72. $-3x + 7y - 2xy$ para $x = -6$ y $y = 4$

73. $-4ab - b$ para $a = 2$ y $b = -14$

74. $-5ab + b$ para $a = -1$ y $b = -13$

75. $(ab + c)(b - c)$ para $a = -2, b = -3,$ y $c = 4$

76. $(ab - c)(a + c)$ para $a = -3, b = 2,$ y $c = 5$

La fórmula para convertir la temperatura de grados Farenheit a grados Celsius es $C = \frac{5(F - 32)}{9}$ donde C es la temperatura en grados Celsius y F es la temperatura en grados Farenheit. Para los problemas 77-82, hallar cada una de las temperaturas de grados celsius para cada uno de los valores dados a grados farenheit. (Objetivo 2)

77. $F = 59$ **78.** $F = 68$

79. $F = 14$ **80.** $F = -4$

81. $F = -13$ **82.** $F = -22$

La fórmula para convertir la temperatura de grados Celsius a grados Farenheit es $F = \frac{9C}{5} + 32$ donde C es la temperatura en grados Celsius y F es la temperatura en grados Farenheit. Para los problemas 83-88, hallar el valor de $\frac{9C}{5} + 32$ por cada valor dado a C. (Objetivo 2)

83. $C = 25$

84. $C = 35$

85. $C = 40$

86. $C = 0$

87. $C = -10$

88. $C = -30$

Para los problemas 89-92, resolver los problemas aplicando los conceptos de suma y multiplicación de números reales. (Objetivo 3)

89. El lunes por la mañana, Thad compró 800 acciones de una cuenta por \$19 cada acción. Durante esa semana, la acción subió \$2 por acción un día y cayó \$1 por acción por día durante los siguientes cuatro días. Use la multiplicación y suma de números reales para describir esta situación y para determinar el valor de las 800 acciones al momento del cierre el viernes.

90. En una semana, una pequeña compañía tuvo ganancias de \$475 por un día y pérdida de \$65 por cada día durante los siguientes cuatro días. Use la multiplicación y suma de números reales para expresar esta situación y determinar las ganancias o pérdidas de la compañía al final de la semana.

91. A las 6 p.m., la temperatura era de 5ºF. Durante las siguientes cuatro horas, la temperatura bajó 3º por hora. Use la multiplicación y suma de números reales para expresar esta situación y hallar la temperatura a las 10 p.m.

92. Durante cada uno de los tres días de un torneo de golf, Jason se mantuvo dos tiros bajo par. Luego, durante los últimos dos días del torneo, tuvo cuatro tiros sobre par. Use la multiplicación y suma de números reales para expresar esta situación y determinar cómo se mantuvieron los tiros de Jason relativos al par durante el torneo de 5 días.

93. Use una calculadora para verificar sus respuestas para los problemas 41-60.

Pensamientos en palabras

94. Su amiga sigue obteniendo 27 de la simplificación de la expresión $-6 + (-8) \div 2$. ¿Qué error está cometiendo y cómo puede ayudarla?

95. Invente un problema que pueda resolverse usando $6(-4) = -24$.

96. Invente un problema que pueda resolverse usando $(-4)(-3) = 12$.

97. Explique por qué $\frac{0}{4} = 0$ pero $\frac{4}{0}$ es indefinido.

Respuestas del examen de conceptos

1. Verdadero **2.** Falso **3.** Verdadero **4.** Falso **5.** Falso **6.** Falso **7.** Falso **8.** Verdadero **9.** Verdadero **10.** Verdadero

1.5 Uso de propiedades

OBJECTIVOS

1. Reconocer las propiedades de los números reales
2. Aplicar las propiedades de los números reales para simplificar expresiones numéricas
3. Simplificar expresiones algebraicas

Enseguida se mencionan y discuten brevemente algunas de las propiedades básicas de los números reales. Se mostrará cómo estas propiedades facilitan el manejo con números reales y también representan la base para muchos cálculos algebraicos.

Propiedad conmutativa de la adición

Si a y b son números reales, entonces

$$a + b = b + a$$

Propiedad conmutativa de la multiplicación

Si a y b son números reales, entonces

$$ab = ba$$

Se dice que la suma y la multiplicación son operaciones conmutativas. Esto significa que el orden en el que se suman o multiplican dos números no afecta el resultado. Por ejemplo, $3 + 5 = 5 + 3$ y $7(8) = 8(7)$. También es importante darse cuenta que la resta y la división *no son* operaciones conmutativas; el orden sí hace una diferencia. Por ejemplo, $8 - 7 \neq 7 - 8$ y $16 \div 4 \neq 4 \div 16$.

Propiedad asociativa de la adición

Si a, b y c son números reales, entonces

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Propiedad asociativa de la multiplicación

Si a, b y c son números reales, entonces

$$(ab)c = a(bc)$$

La adición y la multiplicación son operaciones binarias. Entonces, cuando necesitamos hacer la operación con tres o más números, estos deben estar agrupados. Las propiedades asociativas pueden pensarse como propiedades de agrupación. Para la adición de tres números, cambiar la agrupación de los números no afecta el producto final. Por ejemplo, $(-8 + 3) + 9 = -8 + (3 + 9)$. Esto también aplica para la multiplicación, como $[(-6)(5)](-4) = (-6)[(5)(-4)]$ ilustra. La adición y la multiplicación son operaciones asociativas. La substracción y la división *no son* operaciones asociativas. Por ejemplo, $(8 - 4) - 7 = -3$, pero $8 - (4 - 7) = 11$ demuestra que la resta no es asociativa. Mientras que $(8 \div 4) \div 2 = 1$, pero $8 \div (4 \div 2) = 4$ muestra que la división no es asociativa.

Propiedad de identidad de la adición

Si a es cualquier número real, entonces

$$a + 0 = 0 + a = a$$

Al cero se le llama elemento identidad para la adición. Esto simplemente significa que la suma de cualquier número real y cero es idénticamente el mismo número real. Por ejemplo,

Propiedad de identidad de la multiplicación

Si a es cualquier número real, entonces

$$a(1) = 1(a) = a$$

Al 1 se le llama elemento identidad para la multiplicación. El producto de cualquier número real y 1 es idénticamente el mismo número real. Por ejemplo, $(-573)(1) = (1)(-573) = -573$.

Propiedad de inverso aditivo

Para todo número real a, existe un número real único $-a$ tal que

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

El número real $-a$ se llama inverso aditivo de a o el opuesto de a. Por ejemplo, 6 y -6 son inversos aditivos y su suma es 0. El inverso aditivo de 0 es 0.

Propiedad de multiplicación de cero

Si a es cualquier número real, entonces

$$(a)(0) = (0)(a) = 0$$

El producto de cualquier número real y cero es cero. Por ejemplo, $(-873)(0) = (0)(-873) = 0$.

Propiedad de multiplicación de uno negativo

Si a es cualquier número real, entonces

$$(a)(-1) = (-1)(a) = -a$$

El producto de cualquier número real y -1 es el opuesto del número real. Por ejemplo, $(-1)(48) = (48)(-1) = -48$.

Propiedad distributiva

Si a, b y c son números reales, entonces

$$a(b + c) = ab + ac$$

La propiedad distributiva liga las operaciones de adición y multiplicación. Se dice que la **multiplicación se distribuye sobre la suma**. Por ejemplo, $3(4 + 7) = 3(7) + 3(7)$. Puesto que $b - c = b + (-c)$, se sigue que **la multiplicación también se distribuye sobre la resta**. Esto se puede expresar simbólicamente como $a(b - c) = ab - ac$. Por ejemplo, $7(8 - 2) = 7(8) - 7(2)$.

Los siguientes ejemplos ilustran el uso de las propiedades de los números reales para facilitar ciertos tipos de operaciones.

Ejemplo de salón de clases
Hallar la suma $(37 + (-18)) + 18$.

EJEMPLO 1 Hallar la suma $(43 + (-24)) + 24$.

Solución

En este problema es mejor agrupar -24 y 24. Así

$$\begin{aligned}(43 + (-24)) + 24 &= 43 + ((-24) + 24) && \text{Propiedad asociativa de la suma}\\ &= 43 + 0\\ &= 43\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Hallar el producto $[(-26)(5)](20)$.

EJEMPLO 2 Hallar el producto $[(-17)(25)](4)$

Solución

En este problema es más fácil agrupar 25 y 4. Así

$$\begin{aligned}[(-17)(25)](4) &= (-17)[(25)(4)] \quad \text{Propiedad asociativa de la multiplicación}\\ &= (-17)(100)\\ &= -1700\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Hallar la suma $(-32) + 11 + (-15) + 16 + 27 + (-23) + 52$.

EJEMPLO 3 Hallar la suma $17 + (-24) + (-31) + 19 + (-14) + 29 + 43$.

Solución

Se podría sumar en el orden en que aparecen los números. Sin embargo, debido a que la suma es *conmutativa* y *asociativa*, podría cambiar el orden y agrupar en cualquier forma conveniente. Por ejemplo, podría sumar todos los enteros positivos y sumar todos los enteros negativos, y luego encontrar la suma de estos dos resultados. Acaso sea conveniente usar el siguiente formato vertical:

$$\begin{array}{rrr} 17 & & \\ 19 & -24 & \\ 29 & -31 & 108 \\ \underline{43} & \underline{-14} & \underline{-69} \\ 108 & -69 & 39 \end{array}$$

Para un problema como el del ejemplo 3, puede ser conveniente primero sumar en el orden en el que los números aparecen, después usar la idea de reorganizar y reagrupar para verificar. No se debe olvidar el vínculo entre la suma y la resta. Un problema como $18 - 43 + 52 - 17 - 23$ puede cambiarse a $18 + (-43) + 52 + (-17) + (-23)$.

Ejemplo de salón de clases
Simplificar $(-25)(-3 + 20)$.

EJEMPLO 4 Simplificar $(-75)(-4 + 100)$.

Solución

Para este problema puede ser más sencillo aplicar primero la propiedad distributiva y luego simplificar.

$$\begin{aligned}(-75)(-4 + 100) &= (-75)(-4) + (-75)(100)\\ &= 300 + (-7500)\\ &= -7200\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Simplificar $24\,(-16 + 18)$.

EJEMPLO 5 Simplificar 19(226 1 25).

Solución

Para este problema sería mejor no aplicar la propiedad distributiva, sino primero sumar los números dentro de los paréntesis y luego encontrar el producto indicado. Así

$$19(-26 + 25) = 19(-1) = -19$$

Ejemplo de salón de clases
Simplificar $33(6) + 33(-106)$.

EJEMPLO 6 Simplificar $27(104) + 27(-4)$.

Solución

Recuerde que la propiedad distributiva permite cambiar de la forma $a(b + c)$ a $ab + ac$ o de la forma $ab + ac$ a $a(b + c)$. En este problema se usa el último cambio. Por tanto

$$\begin{aligned}27(104) + 27(-4) &= 27(104 + (-4))\\ &= 27(100) = 2700\end{aligned}$$

Los ejemplos 4, 5 y 6 ilustran un tema importante. En ocasiones la forma $a(b + c)$ es más conveniente, pero en otros momentos es mejor la forma $ab + ac$. En estos casos, como en los de otras propiedades, debe pensar primero y decidir si las propiedades pueden o no usarse para facilitar las operaciones.

Combinar términos similares

Las expresiones algebraicas como

$3x \quad 5y \quad 7xy \quad -4abc \quad \text{y} \quad z$

se llaman términos. Un **término** es un producto que puede tener cualquier número de factores. Las variables implicadas en un término se llaman **factores literales** y el factor numérico se llama **coeficiente numérico**. Por tanto, en $7xy$, x y y son factores literales y 7 es el coeficiente numérico. El coeficiente numérico del término $-4abc$ es -4. Puesto que $1(z) = z$, el coeficiente numérico del término z se sobreentiende que es 1. Los términos que tienen los mismos factores literales se llaman términos similares o términos semejantes. Algunos ejemplos de términos semejantes son

$3x \quad \text{y} \quad 9x \qquad 14abc \quad \text{y} \quad 29abc$

$7xy \quad \text{y} \quad -15xy \qquad 4z, \quad 9z, \quad \text{y} \quad -14z$

Se pueden simplificar expresiones algebraicas que contengan términos similares usando una forma de propiedad distributiva. Considere los siguientes ejemplos:

$$\begin{aligned} 3x + 5x &= (3 + 5)x \\ &= 8x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -9xy + 7xy &= (-9 + 7)xy \\ &= -2xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18abc - 27abc &= (18 - 27)abc \\ &= (18 + (-27))abc \\ &= -9abc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x + x &= (4 + 1)x \qquad \text{No olvide que } x = 1(x) \\ &= 5x \end{aligned}$$

Expresiones más complejas pueden requerir que primero se reordenen los términos usando la propiedad conmutativa.

$$\begin{aligned} 7x + 3y + 9x + 5y &= 7x + 9x + 3y + 5y \\ &= (7 + 9)x + (3 + 5)y \\ &= 16x + 8y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9a - 4 - 13a + 6 &= 9a + (-4) + (-13a) + 6 \\ &= 9a + (-13a) + (-4) + 6 \\ &= (9 + (-13))a + 2 \\ &= -4a + 2 \end{aligned}$$

Tan pronto como comprenda a profundidad los distintos pasos de simplificación, tal vez quiera realizar los pasos mentalmente e ir directamente de la expresión dada a la forma simplificada, como se muestra:

$$19x - 14y + 12x + 16y = 31x + 2y$$

$$17ab + 13c - 19ab - 30c = -2ab - 17c$$

$$9x + 5 - 11x + 4 + x - 6 = -x + 3$$

Simplificar algunas expresiones algebraicas requiere repetidas aplicaciones de la propiedad distributiva, como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned} 5(x - 2) + 3(x + 4) &= 5(x) - 5(2) + 3(x) + 3(4) \\ &= 5x - 10 + 3x + 12 \\ &= 5x + 3x - 10 + 12 \\ &= 8x + 2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-7(y+1)-4(y-3) &= -7(y)-7(1)-4(y)-4(-3) \\
&= -7y-7-4y+12 \quad \text{Atención a ese signo} \\
&= -7y-4y-7+12 \\
&= -11y+5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
5(x+2)-(x+3) &= 5(x+2)-1(x+3) \quad \text{Recuerde que } -a=-1a \\
&= 5(x)+5(2)-1(x)-1(3) \\
&= 5x+10-x-3 \\
&= 5x-x+10-3 \\
&= 4x+7
\end{aligned}
$$

Después de estar seguro de cada paso, puede usar un formato más simple.

$$
\begin{aligned}
5(a+4)-7(a-2) &= 5a+20-7a+14 \\
&= -2a+34
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
9(z-7)+11(z+6) &= 9z-63+11z+66 \\
&= 20z+3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-(x-2)+(x+6) &= -x+2+x+6 \\
&= 8
\end{aligned}
$$

Evaluación (de nuevo) de las expresiones algebraicas

Simplificar por medio de la agrupación de términos similares ayuda en el proceso de evaluar algunas expresiones algebraicas. Los últimos ejemplos de esta sección ilustran esta idea.

Ejemplo de salón de clases
Evaluar $9s - 4t + 3s + 7t$ para $s = 2$ y $t = -5$.

EJEMPLO 7 Evaluar $8x - 2y + 3x + 5y$ para $x = 3$ y $y = 24$.

Solución

Se debe simplificar la expresión dada.

$$8x - 2y + 3x + 5y = 11x + 3y$$

Ahora se puede evaluar para $x = 3$ y $y = 24$.

$$
\begin{aligned}
11x + 3y &= 11(3) + 3(-4) \\
&= 33 + (-12) = 21
\end{aligned}
$$

Ejemplo de salón de clases
Evaluar $6x + 3yz - 4x - 7yz$ para $x = 4$, $y = 26$ y $z = 3$.

EJEMPLO 8 Evaluar $2ab + 5c - 6ab + 12c$ para $a = 2$, $b = -3$ y $c = 7$.

Solución

$$
\begin{aligned}
2ab + 5c - 6ab + 12c &= -4ab + 17c \\
&= -4(2)(-3) + 17(7) \quad \text{cuando } a = 2, b = -3 \text{ y } c = 7 \\
&= 24 + 119 = 143
\end{aligned}
$$

Ejemplo de salón de clases
Evaluar $4(m + 5) - 9(m - 3)$ para $m = 7$.

EJEMPLO 9 Evaluar $8(x - 4) = 7(x + 3)$ para $x = 6$.

Solución

$$
\begin{aligned}
8(x-4)+7(x+3) &= 8x-32+7x+21 \\
&= 15x-11 \\
&= 15(6)-11 \quad \text{cuando } x = 6 \\
&= 79
\end{aligned}
$$

Examen de conceptos 1.5

Para los problemas 1-10, responda falso o verdadero.

1. La adición es una operación conmutativa.
2. La substracción es una operación conmutativa.
3. $[(2)(-3)](7) = (2)[(-3)(7)]$ es un ejemplo de la propiedad asociativa de la multiplicación.
4. $[(8)(5)](-2) = (-2)[(8)(5)]$ es un ejemplo de la propiedad asociativa de la multiplicación.
5. Cero es el elemento de identidad para la adición.
6. El número real $-a$ es un aditivo inverso de a.
7. El inverso aditivo de 0 es 0
8. El coeficiente numérico del término $-8xy$ es 8.
9. El coeficiente numérico del término ab es 1.
10. $6xy$ y $-2xyz$ son términos similares.

Conjunto de problemas 1.5

Para los problemas 1-12, indique la propiedad que justifica cada planteamiento. Por ejemplo, $3 + (-4) = (-4) + 3$ debido a la propiedad conmutativa de la adición o de la multiplicación. (Objetivo 1)

1. $3(7 + 8) = 3(7) + 3(8)$
2. $(-9)(17) = 17(-9)$
3. $-2 + (5 + 7) = (-2 + 5) + 7$
4. $-19 + 0 = -19$
5. $143(-7) = -7(143)$
6. $5(9 + (-4)) = 5(9) + 5(-4)$
7. $-119 + 119 = 0$
8. $-4 + (6 + 9) = (-4 + 6) + 9$
9. $-56 + 0 = -56$
10. $5 + (-12) = -12 + 5$
11. $[5(-8)]4 = 5[-8(4)]$
12. $[6(-4)]8 = 6[-4(8)]$

Para los problemas 13-30, simplifique cada expresión numérica. No olvide aprovechar las propiedades si pueden ser usadas para simplificar la operación. (Objetivo 2)

13. $(-18 + 56) + 18$
14. $-72 + [72 + (-14)]$
15. $36 - 48 - 22 + 41$
16. $-24 + 18 + 19 - 30$
17. $(25)(-18)(-4)$
18. $(2)(-71)(50)$
19. $(4)(-16)(-9)(-25)$
20. $(-2)(18)(-12)(-5)$
21. $37(-42 - 58)$
22. $-46(-73 - 27)$
23. $59(36)+59(64)$
24. $-49(72) - 49(28)$
25. $15(-14) + 16(-8)$
26. $-9(14) - 7(-16)$
27. $17 + (-18) - 19 - 14 + 13 - 17$
28. $-16 - 14 + 18 + 21 + 14 - 17$
29. $-21 + 22 - 23 + 27 + 21 - 19$
30. $24 - 26 - 29 + 26 + 18 + 29 - 17 - 10$

Para los problemas 31-62, simplifique cada expresión algebraica agrupado términos similares. (Objetivo 3)

31. $9x - 14x$
32. $12x - 14x + x$
33. $4m + m - 8m$
34. $-6m - m + 17m$
35. $-9y + 5y - 7y$
36. $14y - 17y - 19y$
37. $4x - 3y - 7x + y$
38. $9x + 5y - 4x - 8y$
39. $-7a - 7b - 9a + 3b$
40. $-12a + 14b - 3a - 9b$
41. $6xy - x - 13xy + 4x$
42. $-7xy - 2x - xy + x$
43. $5x - 4 + 7x - 2x + 9$
44. $8x + 9 + 14x - 3x - 14$
45. $-2xy + 12 + 8xy - 16$
46. $14xy - 7 - 19xy - 6$
47. $-2a + 3b - 7b - b + 5a - 9a$
48. $-9a - a + 6b - 3a - 4b - b + a$
49. $13ab + 2a - 7a - 9ab + ab - 6a$
50. $-ab - a + 4ab + 7ab - 3a - 11ab$

51. $3(x + 2) + 5(x + 6)$

52. $7(x + 8) + 9(x + 1)$

53. $5(x - 4) + 6(x + 8)$

54. $-3(x + 2) - 4(x - 10)$

55. $9(x + 4) - (x - 8)$

56. $-(x - 6) + 5(x - 9)$

57. $3(a - 1) - 2(a - 6) + 4(a + 5)$

58. $-4(a + 2) + 6(a + 8) - 3(a - 6)$

59. $-2(m + 3) - 3(m - 1) + 8(m + 4)$

60. $5(m - 10) + 6(m - 11) - 9(m - 12)$

61. $(y + 3) - (y - 2) - (y + 6) - 7(y - 1)$

62. $-(y - 2) - (y + 4) - (y + 7) - 2(y + 3)$

Para los problemas 63-80, simplifique cada expresión algebraica y después evalúe la expresión resultante para los valores dados de las variables. **(Objetivo 3)**

63. $3x + 5y + 4x - 2y$ para $x = -2$ y $y = 3$

64. $5x - 7y - 9x - 3y$ para $x = -1$ y $y = -4$

65. $5(x - 2) + 8(x + 6)$ para $x = -6$

66. $4(x - 6) + 9(x + 2)$ para $x = 7$

67. $8(x + 4) - 10(x - 3)$ para $x = -5$

68. $-(n + 2) - 3(n - 6)$ para $n = 10$

69. $(x - 6) - (x + 12)$ para $x = -3$

70. $(x + 12) - (x - 14)$ para $x = -11$

71. $2(x + y) - 3(x - y)$ para $x = -2$ y $y = 7$

72. $5(x - y) - 9(x + y)$ para $x = 4$ y $y = -4$

73. $2xy + 6 + 7xy - 8$ para $x = 2$ y $y = -4$

74. $4xy - 5 - 8xy + 9$ para $x = -3$ y $y = -3$

75. $5x - 9xy + 3x + 2xy$ para $x = 12$ y $y = -1$

76. $-9x + xy - 4xy - x$ para $x = 10$ y $y = -11$

77. $(a - b) - (a + b)$ para $a = 19$ y $b = -17$

78. $(a + b) - (a - b)$ para $a = -16$ y $b = 14$

79. $-3x + 7x + 4x - 2x - x$ para $x = -13$

80. $5x - 6x + x - 7x - x - 2x$ para $x = -15$

81. Use una calculadora para verificar sus respuestas a los problemas 13-30.

Pensamientos en palabras

82. Explique, en sus propias palabras, la propiedad asociativa de la suma de números reales.

83. Explique, en sus propias palabras, la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición.

84. ¿$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 7$ es un número primo o compuesto? Justifique su respuesta.

Más investigación

Para los problemas 85-90, escriba si las expresiones en cada problema son equivalentes y explique por qué o por qué no.

85. $15a(x + y)$ y $5a(3x + 3y)$

86. $(-6a + 7b) + 11c$ y $7b + (11c - 6a)$

87. $2x - 3y + 4z$ y $2x - 4z + 3y$

88. $a + 5(x + y)$ y $(a + 5)x + y$

89. $7x + 6(y - 2z)$ y $6(2z - y) + 7x$

90. $9m + 8(3p - q)$ y $8(3p - q) + 9m$

Respuestas del examen de conceptos

1. Verdadero **2.** Falso **3.** Verdadero **4.** Falso **5.** Verdadero **6.** Verdadero **7.** Verdadero
8. Falso **9.** Verdadero **10.** Falso

Capítulo 1 Resumen

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Enlistar los elementos de un conjunto (Sección 1.1/Objetivo 1)	Los elementos de un conjunto pueden mostrarse en una descripción verbal o una lista.	Enliste el conjunto de números pares mayores a 4. **Solución** $A = \{6, 8, 10, 12, \ldots\}$ **Problema de muestra 1** Enliste el conjunto de números impares entre 4 y 16.
Determinar si los conjuntos son iguales. (Sección 1.1/Objetivo 1)	Los conjuntos iguales tienen los mismos elementos.	Si $A = \{1, 3, 5, 7\}$ igual a $B = \{1, 5\}$ **Solución** $A \neq B$ **Problema de muestra 2** Si $A = \{8, 6, 4, 2, 0\}$ igual a $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$
Usar el orden de operaciones para simplificar expresiones numéricas. (Sección 1.1/Objetivo 2)	**1.** Resolver las operaciones dentro de las agrupaciones arriba y abajo de la barra de fracción. **2.** Resolver todas las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha. **3.** Resolver todas las sumas y restas de izquierda a derecha.	Simplifique $\frac{7+8}{5-2} + 3[2(6+4)]$. **Solución** $= \frac{15}{3} + 3[2(10)]$ $= 5 + 3(20)$ $= 5 + 60$ $= 65$ **Problema de muestra 3** Simplifique $24 \div 6(2) + 12$.
Identificar los números como primos o compuestos. (Sección 1.2/Objetivo 1)	Un número primo es un número entero mayor que 1 que sólo puede dividirse entre sí mismo y entre 1. Un número entero que no es primo es llamado número compuesto.	Enliste los números primos menores a 50. **Solución** 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47
Descomponer un número en elementos primos. (Sección 1.2/Objetivo 2)	Comience seleccionando dos factores del número. Si esos números no son primos, entonces vuelva a seleccionar factores de ese número hasta que todos sean números primos.	Factor primo 36. **Solución** $36 = 6 \cdot 6$ $= 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$ $= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ **Problema de muestra 4** Factor primo 120.
Hallar el máximo común divisor. (Sección 1.2/Objetivo 3)	El máximo común divisor (MCD) de dos números es el divisor más grande entre dos números. Descomponga en números primos cada número y seleccione cada divisor en común el mínimo de veces que aparece en la descomposición.	Hallar el máximo común divisor (MCD) de 60 y 210. **Solución** $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ $\text{MCD} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ **Problema de muestra 5** Hallar el máximo común divisor (MCD) de 45 y 75.

(*continúa*)

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Hallar el mínimo común múltiplo. (Sección 1.2/Objetivo 4)	El mínimo común múltiplo (MCM) es el múltiplo más pequeño, distinto a cero, de cada número. Descomponer en factores primos cada número y seleccionar cada factor la mayor cantidad de veces que aparezca en la descomposición.	Hallar el mínimo común múltiplo (MCM) de 12 y 54. **Solución** $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ $54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ $\text{MCM} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108$ **Problema de muestra 6** Hallar el mínimo común múltiplo (MCM) de 20 y 24.
Adición de números reales (Sección 1.3/Objetivo 2)	La recta numérica es un elemento visual útil para interpretar la adición de números reales. Ver la página 16 para las reglas formales de la adición.	Hallar las sumas: **(a)** $(-36) + (-14)$ **(b)** $36 + (-14)$ **(c)** $-36 - 14$ **Solución** **(a)** $(-36) + (-14) = -50$ **(b)** $36 + (-14) = 22$ **(c)** $-36 + 14 = -22$ **Problema de muestra 7** Hallar la suma $-12 + (-12) + 16$.
Substracción de números reales. (Sección 1.3/Objetivo 2)	La substracción se define en términos de adición. Para restar un número, se puede sumar su opuesto.	Hallar las diferencias: **(a)** $-4 - 6$ **(b)** $5 - (-2)$ **Solución** **(a)** $-4 - 6$ $= -4 + (-6)$ $= -10$ **(b)** $5 - (-2)$ $= 5 + 2$ $= 7$ **Problema de muestra 8** Hallar la diferencia $-10 - 22$.
Multiplicación y división de números reales (Sección 1.4/Objetivo 1)	El producto (o cociente) de dos números positivos o dos negativos es positivo. El producto (o cociente) de un número positivo y uno negativo es negativo.	Realizar la operación indicada: **(a)** $(-3)(-4)$ **(b)** $(3)(-4)$ **(c)** $\dfrac{-12}{-3}$ **(d)** $\dfrac{-12}{3}$ **Solución** **(a)** $(-3)(-4) = 12$ **(b)** $(3)(-4) = -12$ **(c)** $\dfrac{-12}{-3} = 4$ **(d)** $\dfrac{-12}{3} = -4$ **Problema de muestra 9** Hallar el cociente $57 \div (-19)$.

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Resolver los problemas aplicados que implican números reales. (Sección 1.3/Objetivo 4) (Sección 1.4/Objetivo 3)	Los números positivos y negativos pueden ser usados para representar muchos problemas del mundo real.	Unas acciones vendidas por \$38.70 subieron \$3.52 un día y, al siguiente, cayeron \$1.82. ¿Cuál es el valor de estas acciones después de esos dos días? **Solución** $38.70 + 3.52 + (-1.82) = 40.40$ El precio es \$40.40. **Problema de muestra 10** Bob está intentando ganar una competencia de pérdida de peso en su trabajo. Su peso inicial era de 335 libras. Sus cambios de peso durante las primeras cuatro veces que se pesó fueron los siguientes: menos 8 libras, menos 2 libras, más 4 libras y menos 7 libras. ¿Cuál es su peso final?
Conocer las propiedades de los números reales. (Sección 1.5/Objetivo 1)	La propiedad conmutativa trata con el orden de los números. La propiedad asociativa trata con la agrupación de los números. Ver las páginas 28 y 29 para el listado completo de las propiedades.	Escriba la propiedad demostrada por $15 + (-10) + -10 + 15$ **Solución** Propiedad conmutativa de la suma **Problema de muestra 11** Escriba la propiedad demostrada por $6(2 \cdot 5) = (6 \cdot 2) \cdot 5$
Agrupar términos similares. (Sección 1.5/Objetivo 3)	Use la propiedad distributiva para agrupar elementos similares.	Simplifique $3x + 12y - 5x + 8y$. **Solución** $3x + 12y - 5x + 8y$ $= 3x - 5x + 12y + 8y$ $= (3 - 5)x + (12 + 8)y$ $= -2x + 20y$ **Problema de muestra 12** Simplifique $-8a + 5b - 3a - 6b$.
Evaluar expresiones algebraicas. (Sección 1.1/Objetivo 3) (Sección 1.3/Objetivo 3) (Sección 1.4/Objetivo 2)	Primero simplifique la expresión algebraica. Luego debe reemplazar la variable con el valor dado. Es buena práctica usar paréntesis cuando se sustituye el valor. Asegúrese de seguir el orden de operaciones mientras simplifica la expresión numérica resultante	Evaluar $4x - 2y$, cuando $x = 5$ y $y = 6$. **Solución** $4x - 2y$ $= 4(5) - 2(6)$ cuando $x = 5$ y $y = 6$ $= 20 - 12$ $= 8$ **Problema de muestra 13** Evaluar $3a - 5b$, cuando $x = -2$ y $y + -4$.

Capítulo 1 Conjunto de problemas de repaso

En los problemas 1-10, realice las operaciones indicadas.

1. $7 + (-10)$

2. $(-12) + (-13)$

3. $8 - 13$

4. $-6 - 9$

5. $-12 - (-11)$

6. $-17 - (-19)$

7. $(13)(-12)$

8. $(-14)(-18)$

9. $(-72) \div (-12)$

10. $117 \div (-9)$

En los problemas 11-15, clasifique cada número como *primo* o *compuesto*.

11. 73 **12.** 87

13. 63 **14.** 81

15. 91

En los problemas 16-20, exprese cada número como la descomposición de sus factores primos.

16. 24 **17.** 63

18. 57 **19.** 64

20. 84

21. Hallar el máximo común divisor de 36 y 54.

22. Hallar el máximo común divisor de 48, 60 y 84.

23. Hallar el mínimo común múltiplo de 18 y 20.

24. Hallar el mínimo común múltiplo de 15, 27 y 35.

Para los problemas 25-38, simplificar cada una de las expresiones numéricas.

25. $(19 + 56) + (-9)$

26. $43 - 62 + 12$

27. $8 + (-9) + (-16) + (-14) + 17 + 12$

28. $19 - 23 - 14 + 21 + 14 - 13$

29. $3(-4) - 6$

30. $(-5)(-4) - 8$

31. $(5)(-2) + (6)(-4)$

32. $(-6)(8) + (-7)(-3)$

33. $(-6)(3) - (-4)(-5)$

34. $(-7)(9) - (6)(5)$

35. $\dfrac{4(-7) - (3)(-2)}{-11}$

36. $\dfrac{(-4)(9) + (5)(-3)}{1 - 18}$

37. $3 - 2[4(-3 - 1)]$

38. $-6 - [3(-4 - 7)]$

39. El récord por temperatura más alta (12°F) ocurrió en Laughlin, Nevada en junio 29, 1994. Un récord de temperatura más baja (−50°F) ocurrió en San Jacinto, Nevada, en enero 8, 1937. Hallar la diferencia entre la temperatura más alta y la más baja.

40. En Norteamérica, la mayor elevación es el Monte McKinley, Alaska, a 20, 320 pies sobre el nivel del mar. La menor elevación en Norteamérica es Death Valley, California, a 282 bajo el nivel del mar. Hallar el valor absoluto de la diferencia en la elevación entre el Monte McKinley y Death Valley.

41. En un juego de fútbol americano, Marquette llevó la pelota siete veces. En dos jugadas, ganó 6 yardas en cada jugada; en otra jugada, perdió 4 yardas; en las siguientes tres, ganó 8 yardas por jugada; y en la última jugada, perdió una yarda. Escriba una expresión numérica que muestre el yardaje de Marquette en el juego y simplifique la respuesta.

42. Shelley comenzó el mes con $3278 en su cuenta de banco. Durante el mes, depositó $175 cada semana durante cuatro semanas, pero tuvo cargos de $50, $189, $160, $20 y $115. ¿Cuál es su estado de cuenta después de estos depósitos y deudas?

En los problemas 43-54, simplifique cada expresión algebraica combinando términos similares.

43. $12x + 3x - 7x$

44. $9y + 3 - 14y - 12$

45. $8x + 5y - 13x - y$

46. $9a + 11b + 4a - 17b$

47. $3ab - 4ab - 2a$

48. $5xy - 9xy + xy - y$

49. $3(x + 6) + 7(x + 8)$

50. $5(x - 4) - 3(x - 9)$

51. $-3(x - 2) - 4(x + 6)$

52. $-2x - 3(x - 4) + 2x$

53. $2(a - 1) - a - 3(a - 2)$

54. $-(a - 1) + 3(a - 2) - 4a + 1$

En los problemas 55-68, evaluar cada expresión algebraica para los valores dados a las variables.

55. $5x + 8y$ para $x = -7$ y $y = -3$

56. $7x - 9y$ para $x = -3$ y $y = 4$

57. $\dfrac{-5x - 2y}{-2x - 7}$ para $x = 6$ y $y = 4$

58. $\dfrac{-3x + 4y}{3x}$ para $x = -4$ y $y = -6$

59. $-2a + \dfrac{a - b}{a - 2}$ para $a = -5$ y $b = 9$

60. $\dfrac{2a + b}{b + 6} - 3b$ para $a = 3$ y $b = -4$

61. $5a + 6b - 7a - 2b$ para $a = -1$ y $b = 5$

62. $3x + 7y - 5x + y$ para $x = -4$ y $y = 3$

63. $2xy + 6 + 5xy - 8$ para $x = -1$ y $y = 1$

64. $7(x + 6) - 9(x + 1)$ para $x = -2$

65. $-3(x - 4) - 2(x + 8)$ para $x = 7$

66. $2(x - 1) - (x + 2) + 3(x - 4)$ para $x = -4$

67. $(a - b) - (a + b) - b$ para $a = -1$ y $b = -3$

68. $2ab - 3(a - b) + b + a$ para $a = 2$ y $b = -5$

Capítulo 1 Examen

Para los problemas 1-10, simplificar cada expresión numérica.

1. $6 + (-7) - 4 + 12$

2. $7 + 4(9) + 2$

3. $-4(2 - 8) + 14$

4. $5(-7) - (-3)(8)$

5. $8 \div (-4) + (-6)(9) - 2$

6. $(-8)(-7) + (-6) - (9)(12)$

7. $\dfrac{6(-4) - (-8)(-5)}{-16}$

8. $-14 + 23 - 17 - 19 + 26$

9. $(-14)(4) \div 4 + (-6)$

10. $6(-9) - (-8) - (-7)(4) + 11$

11. Se reportó en las noticias de las 5 de la tarde que la temperatura del momento era 7°F. El pronóstico era que la temperatura bajaría 13°F para las 6 a.m. Si el pronóstico es correcto, ¿cuál será la temperatura a las 6 a.m.?

Para los problemas 12-17, evaluar cada una de las expresiones algebraicas para los valores dados a las variables.

12. $7x - 9y$ para $x = -4$ y $y = -6$

13. $-4a - 6b$ para $a = -9$ y $b = 12$

14. $3xy - 8y + 5x$ para $x = 7$ y $y = -2$

15. $5(x - 4) - 6(x + 7)$ para $x = -5$

16. $3x - 2y - 4x - x + 7y$ para $x = 6$ y $y = -7$

17. $3(x - 2) - 5(x - 4) + 6(x - 1)$ para $x = -3$

18. Clasifique 79 como un número primo o compuesto.

19. Expresar 360 como producto de factores primos.

20. Hallar el máximo común divisor de 36, 60 y 84.

21. Hallar el mínimo común múltiplo de 9 y 24.

22. Establezca la propiedad de números reales demostrada por $[-3 + (-4)] + (-6) = -3 + [(-4) + (-6)]$.

23. Establezca la propiedad de números reales demostrada por $8(25 + 37) = 8(25) + 8(37)$.

24. Simplifique $-7x + 9y - y + x - 2y - 7x$ agrupado términos similares.

25. Simplifique $-2(x - 4) - 5(x + 7) - 6(x - 1)$ aplicando la propiedad distributiva y agrupado términos similares.

2 Números reales

BJI/Blue Jean Images/Getty Images

"El único lugar donde el éxito viene antes que el trabajo es el diccionario"
VIDAL SASSOON

Tip de estudio

Dos factores en extremo importantes para tener un buen resultado en un curso de matemáticas son ir a clase y hacer la tarea.

De ser posible, no falte a ninguna clase. Sin embargo, ubique un compañero de clase a quien pueda contactar en caso de faltar. Investigue los nombres y correos electrónicos de varios compañeros a quienes pueda contactar para obtener los apuntes en caso de faltar a clases.

Jamás debe faltar a la clase previa al examen. Durante esa clase, el instructor suele proporcionar información valiosa sobre el examen y también suele revisar los temas que vendrán en el mismo.

Conozca los recursos a su disposición en caso de necesitar ayuda con sus tareas. Encuentre las respuestas a las siguientes preguntas y anótelas en su cuaderno:

- ¿Su instructor tiene horas de oficina para ayudar a los estudiantes con su tarea?
- ¿Hay algún centro de tutores en su escuela que ofrezca ayuda con la tarea?
- ¿El departamento de matemáticas o el centro de tutores ofrecen sesiones de revisión para estudiantes?
- ¿Hay sitios web que el instructor o sus compañeros crean que son de ayuda para explicar problemas matemáticos?

¿Está asistiendo a clases y haciendo su tarea regularmente para tener un buen resultado en su clase de matemáticas?

Vista previa del capítulo

Este capítulo habla sobre las operaciones con números racionales, tanto en expresiones fraccionarias o expresiones decimales. El tema que suele ser más difícil para los estudiantes la suma de fracciones con diferentes denominadores. Puede que quiera escribir los pasos enlistados en la página 52 para que pueda seguir los pasos mientras resuelve los problemas. La habilidad de sumar fracciones será necesaria a lo largo del curso, así que asegúrese de dominarla.

Este capítulo también tiene la sección "Traducción del español al álgebra", que es la base para resolver problemas verbales. La razón primordial por la cual muchos estudiantes no pueden resolver problemas verbales es porque no saben cómo traducir las frases en español a expresiones algebraicas. No se rinda ni piense que resolver problemas verbales es imposible. Si aprende el fundamento en esta sección, tendrá las herramientas para resolver problemas verbales de manera exitosa.

2.1 Multiplicación y división de números racionales

OBJETIVOS

1. Reducir números racionales a su mínima expresión
2. Multiplicar y dividir números racionales
3. Resolver problemas aplicados que implican multiplicación y división de números racionales

Cualquier número que puede escribirse en la forma $\frac{a}{b}$ donde a y b son números reales y b es un número distinto a cero, se llama **número racional**. (Llamamos a la forma $\frac{a}{b}$ una fracción o, a veces, una fracción común). Los siguientes son ejemplos de números racionales.

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{7}{9}, \quad \frac{15}{7}, \quad \frac{-3}{4}, \quad \frac{5}{-7}, \quad \text{y} \quad \frac{-11}{-13}$$

Todos los números enteros son números racionales porque cualquier entero puede expresarse como el cociente de dos enteros. Algunos ejemplos:

$$6 = \frac{6}{1} = \frac{12}{2} = \frac{18}{3}, \text{ etc.}$$

$$27 = \frac{27}{1} = \frac{54}{2} = \frac{81}{3}, \text{ etc.}$$

$$0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3}, \text{ etc.}$$

Nuestro trabajo en el capítulo 1 con la división incluyendo números negativos ayuda con los siguientes tres ejemplos:

$$-4 = \frac{-4}{1} = \frac{-8}{2} = \frac{-12}{3}, \text{ etc.}$$

$$-6 = \frac{6}{-1} = \frac{12}{-2} = \frac{18}{-3}, \text{ etc.}$$

$$10 = \frac{10}{1} = \frac{-10}{-1} = \frac{-20}{-2}, \text{ etc.}$$

Observe las siguientes propiedades generales.

Propiedad 2.1

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \quad \text{y} \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

Por ende, un número racional como $\frac{-2}{3}$ puede también escribirse como $\frac{2}{-3}$ o $-\frac{2}{3}$. (Sin embargo, los números racionales no suelen expresarse con denominadores negativos).

Multiplicación de números racionales

La multiplicación de números racionales en forma de fracción común se define de la siguiente manera:

Definición 2.1

Si a, b, c y d son enteros, y b y d son diferentes a cero, entonces

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Para **multiplicar números racionales** en forma de fracción común, simplemente multiplique numeradores y multiplique denominadores. Además, vemos en la definición que los números racionales son conmutativos y asociativos con respecto a la multiplicación. Se tiene la libertad de reordenar y reagrupar factores como lo hacemos con los números reales. Los siguientes ejemplos ilustran la definición 2:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}$$

$$\frac{-2}{3} \cdot \frac{7}{9} = \frac{-2 \cdot 7}{3 \cdot 9} = \frac{-14}{27} \quad \text{o} \quad -\frac{14}{27}$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{9}{-11} = \frac{1 \cdot 9}{5(-11)} = \frac{9}{-55} \quad \text{o} \quad -\frac{9}{55}$$

$$-\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{13} = \frac{-3}{4} \cdot \frac{7}{13} = \frac{-3 \cdot 7}{4 \cdot 13} = \frac{-21}{52} \quad \text{o} \quad -\frac{21}{52}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 3} = \frac{15}{15} = 1$$

El último ejemplo es un caso muy especial. Si la multiplicación de los numeradores es igual a la multiplicación de los denominadores entonces el producto es 1, se dice que los números son recíprocos.

Reducción de números racionales

Usando la definición 2.1 y aplicando la propiedad de multiplicación de uno, la fracción $\frac{a \cdot k}{b \cdot k}$, donde b y k son números distintos a cero, se simplifica como se muestra:

$$\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a}{b} \cdot \frac{k}{k} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$$

Este resultado se plantea en la propiedad 2.2.

Propiedad 2.2 El principio fundamental de las fracciones

Si b y k son números distintos a cero, y a es cualquier número real, entonces

$$\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a}{b}$$

Solemos usar la propiedad 2.2 cuando trabajamos con números racionales. Se le llama principio fundamental de las fracciones y proporciona la base para las fracciones equivalentes. En los siguientes ejemplos, la propiedad se usará para lo que se suele llamar "reducir fracciones a su mínima expresión" o "expresar fracciones en la forma reducida más simple".

Ejemplo de salón de clases

Reducir $\frac{21}{35}$ a su mínima expresión

EJEMPLO 1 Reducir $\frac{12}{18}$ a su mínima expresión.

Solución

$$\frac{12}{18} = \frac{2 \cdot \cancel{6}}{3 \cdot \cancel{6}} = \frac{2}{3}$$

Un factor común de 6 se eliminó del numerador y del denominador

Ejemplo de salón de clases

Cambiar $\frac{12}{21}$ a su forma más simple

EJEMPLO 2 Cambiar $\frac{14}{35}$ a su forma más simple.

Solución

$$\frac{14}{35} = \frac{2 \cdot \cancel{7}}{5 \cdot \cancel{7}} = \frac{2}{5}$$

Un factor común de 7 se eliminó del numerador y del denominador

Ejemplo de salón de clases

Expresar $\frac{-18}{42}$ en forma reducida

EJEMPLO 3 Expresar $\frac{-24}{32}$ en forma reducida.

Solución

$$\frac{-24}{32} = -\frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 8} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{8} = -\frac{3}{4} \cdot 1 = -\frac{3}{4}$$

Se usa la propiedad de multiplicación de 1

Ejemplo de salón de clases

Reducir $-\frac{63}{105}$.

EJEMPLO 4 Reducir $-\frac{72}{90}$.

Solución

$$-\frac{72}{90} = -\frac{\cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 5} = -\frac{4}{5}$$

La descomposición en números primos del numerador y denominador ayudar a reconocer los factores en común

Puede que las fracciones contengan variables en el numerador o el denominador (o ambos), pero esto no supone una gran dificultad. El proceso mental se mantiene igual, como estos ejemplos ilustran. Las variables que aparecen en los denominadores representan números reales distintos a cero.

Ejemplo de salón de clases

Reducir $\frac{8a}{15a}$.

EJEMPLO 5 Reducir $\frac{9x}{17x}$.

Solución

$$\frac{9x}{17x} = \frac{9 \cdot \cancel{x}}{17 \cdot \cancel{x}} = \frac{9}{17}$$

Ejemplo de salón de clases
Simplificar $\frac{9c}{42d}$.

EJEMPLO 6 Simplificar $\frac{8x}{36y}$.

Solución

$$\frac{8x}{36y} = \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 2\cdot x}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 3\cdot 3\cdot y} = \frac{2x}{9y}$$

Ejemplo de salón de clases
Expresar $\frac{-6ab}{39b}$ en forma reducida.

EJEMPLO 7 Expresar $\frac{-9xy}{30y}$ en forma reducida.

Solución

$$\frac{-9xy}{30y} = -\frac{9xy}{30y} = -\frac{3\cdot\cancel{3}\cdot x\cdot\cancel{y}}{2\cdot\cancel{3}\cdot 5\cdot\cancel{y}} = -\frac{3x}{10}$$

Ejemplo de salón de clases
Reducir $\frac{-3xyz}{-8yz}$.

EJEMPLO 8 Reducir $\frac{-7abc}{-9ac}$.

Solución

$$\frac{-7abc}{-9ac} = \frac{7abc}{9ac} = \frac{7\cancel{a}b\cancel{c}}{9\cancel{a}\cancel{c}} = \frac{7b}{9}$$

Ahora está listo para resolver problemas de multiplicación escribiendo la respuesta final en forma reducida. Estudie los siguientes ejemplos cuidadosamente; se usan distintos métodos para los diferentes problemas.

Ejemplo de salón de clases
Multiplicar $\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{9}$.

EJEMPLO 9 Multiplicar $\frac{7}{9}\cdot\frac{5}{14}$.

Solución

$$\frac{7}{9}\cdot\frac{5}{14} = \frac{7\cdot 5}{9\cdot 14} = \frac{\cancel{7}\cdot 5}{3\cdot 3\cdot 2\cdot\cancel{7}} = \frac{5}{18}$$

Ejemplo de salón de clases
Hallar el producto de $\frac{6}{7}$ y $\frac{21}{30}$.

EJEMPLO 10 Hallar el producto de $\frac{8}{9}$ y $\frac{18}{24}$.

Solución

$$\frac{\overset{1}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{9}}}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{18}}}{\underset{3}{\cancel{24}}} = \frac{2}{3}$$

El factor común de 8 se usó para dividir a 8 y a 24
y el factor común de 9 se usó para dividir a 9 y a 18

Ejemplo de salón de clases
Multiplicar $\left(-\frac{4}{9}\right)\left(\frac{33}{40}\right)$.

EJEMPLO 11 Multiplicar $\left(-\frac{6}{8}\right)\left(\frac{14}{32}\right)$.

Solución

$$\left(-\frac{6}{8}\right)\left(\frac{14}{32}\right) = -\frac{\overset{3}{\cancel{6}}\cdot\overset{7}{\cancel{14}}}{\underset{4}{\cancel{8}}\cdot\underset{16}{\cancel{32}}} = -\frac{21}{64}$$

El factor común de 2 dividó a 6 y a 8,
y el factor común de 2 a 14 y a 32

Ejemplo de salón de clases
Multiplicar $\left(-\frac{10}{3}\right)\left(-\frac{12}{18}\right)$.

EJEMPLO 12 Multiplicar $\left(-\frac{9}{4}\right)\left(-\frac{14}{15}\right)$.

Solución

$$\left(-\frac{9}{4}\right)\left(-\frac{14}{15}\right) = \frac{\cancel{3}\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot 7}{\cancel{2}\cdot 2\cdot \cancel{3}\cdot 5} = \frac{21}{10}$$

Se debe recordar que el producto de dos números negativos es un número positivo

Ejemplo de salón de clases
Multiplicar $\left(\frac{6m}{5n}\right)\left(\frac{15n}{26}\right)$.

EJEMPLO 13 Multiplicar $\frac{9x}{7y}\cdot\frac{14y}{45}$.

Solución

$$\frac{9x}{7y}\cdot\frac{14y}{45} = \frac{\overset{1}{\cancel{9}}\cdot x\cdot \overset{2}{\cancel{14}}\cdot \cancel{y}}{\cancel{7}\cdot \cancel{y}\cdot \underset{5}{\cancel{45}}} = \frac{2x}{5}$$

Ejemplo de salón de clases
Multiplicar $\frac{-3z}{8xy}\cdot\frac{16x}{9z}$.

EJEMPLO 14 Multiplicar $\frac{-6c}{7ab}\cdot\frac{14b}{5c}$.

Solución

$$\frac{-6c}{7ab}\cdot\frac{14b}{5c} = -\frac{2\cdot 3\cdot \cancel{c}\cdot 2\cdot \cancel{7}\cdot \cancel{b}}{\cancel{7}\cdot a\cdot \cancel{b}\cdot 5\cdot \cancel{c}} = -\frac{12}{5a}$$

División de números racionales

El siguiente ejemplo proporciona una definición para la división de números racionales en forma de fracción:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}} = \left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}}\right)\left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{2}\right)}{1} = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{8}$$

↑ Note que ésta es una forma de 1, y $\frac{3}{2}$ es recíproco de $\frac{2}{3}$

En otras palabras, $\frac{3}{4}$ dividido entre $\frac{2}{3}$ es equivalente a $\frac{3}{4}$ veces $\frac{3}{2}$. La siguiente definición para la división debe parecerle razonable:

Definición 2.2

Si b, c y d son números reales distintos a cero y a es cualquier número real, entonces

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

Note que para dividir $\frac{a}{b}$ entre $\frac{c}{d}$, multiplicamos $\frac{a}{b}$ veces el recíproco de $\frac{c}{d}$, que es $\frac{d}{c}$. Los siguientes ejemplos demuestran los pasos importantes en las divisiones.

$$\frac{2}{3} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{1} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{5}{6} \div \frac{3}{4} = \frac{5}{6}\cdot\frac{4}{3} = \frac{5\cdot 4}{6\cdot 3} = \frac{5\cdot \cancel{2}\cdot 2}{\cancel{2}\cdot 3\cdot 3} = \frac{10}{9}$$

$$-\frac{9}{12}\div\frac{3}{6} = -\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{2}{\cancel{12}}}\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = -\frac{3}{2}$$

$$\left(-\frac{27}{56}\right)\div\left(-\frac{33}{72}\right) = \left(-\frac{27}{56}\right)\left(-\frac{72}{33}\right) = \frac{\overset{9}{\cancel{27}}\cdot\overset{9}{\cancel{72}}}{\underset{7}{\cancel{56}}\cdot\underset{11}{\cancel{33}}} = \frac{81}{77}$$

$$\frac{6}{7}\div 2 = \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{7}\cdot\frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{5x}{7y}\div\frac{10}{28y} = \frac{5x}{7y}\cdot\frac{28y}{10} = \frac{\cancel{5}\cdot x\cdot\overset{2}{\cancel{\overset{4}{\cancel{28}}}}\cdot\cancel{y}}{\cancel{7}\cdot\cancel{y}\cdot\underset{2}{\cancel{10}}} = 2x$$


Debra Feinman/istockphoto.com

Ejemplo de salón de clases

Lynn compró 24 yardas de tela para su clase de costura. Si se necesitan $\frac{3}{4}$ de yarda para cada almohada, ¿cuántas almohadas puede hacer?

EJEMPLO 15 Aplique su habilidad

Frank compró 50 barras de dulce para hacer golosinas para la tropa de niños exploradores. Si usa $\frac{2}{3}$ de una barra por cada golosina, ¿cuántas golosinas podrá hacer?

Solución

Para saber cuántas golosinas se pueden hacer, necesitamos dividir 50 entre $\frac{2}{3}$.

$$50\div\frac{2}{3} = 50\cdot\frac{3}{2} = \frac{50}{1}\cdot\frac{3}{2} = \frac{\overset{25}{\cancel{50}}}{1}\cdot\frac{3}{\underset{1}{\cancel{2}}} = \frac{75}{1} = 75$$

Frank puede hacer 75 golosinas.

Examen de conceptos 2.1

Para los problemas 1-10, responda falso o verdadero.

1. 6 es un número racional.

2. $\frac{1}{8}$ es un número racional.

3. $\frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

4. $\frac{-5}{3} = \frac{5}{-3}$

5. El producto de un número racional negativo y un número racional positivo es un número racional positivo.

6. Si el producto de dos números racionales es 1, se dice que dichos números son recíprocos.

7. El recíproco de $\frac{-3}{7}$ es $\frac{7}{3}$.

8. $\frac{10}{25}$ está reducido a su mínima expresión.

9. $\frac{4ab}{7c}$ está reducido a su mínima expresión.

10. Para dividir $\frac{m}{n}$ entre $\frac{p}{q}$, multiplicamos $\frac{m}{n}$ por $\frac{q}{p}$.

Conjunto de problemas 2.1

Para los problemas 1-24, reducir cada fracción a su mínima expresión. (Objetivo 1)

1. $\frac{8}{12}$
2. $\frac{12}{16}$
3. $\frac{16}{24}$
4. $\frac{18}{32}$
5. $\frac{15}{9}$
6. $\frac{48}{36}$
7. $\frac{-8}{48}$
8. $\frac{-3}{15}$
9. $\frac{27}{-36}$
10. $\frac{9}{-51}$
11. $\frac{-54}{-56}$
12. $\frac{-24}{-80}$
13. $\frac{24x}{44x}$
14. $\frac{15y}{25y}$
15. $\frac{9x}{21y}$
16. $\frac{4y}{30x}$
17. $\frac{14xy}{35y}$
18. $\frac{55xy}{77x}$
19. $\frac{-20ab}{52bc}$
20. $\frac{-23ac}{41c}$
21. $\frac{-56yz}{-49xy}$
22. $\frac{-21xy}{-14ab}$
23. $\frac{65abc}{91ac}$
24. $\frac{68xyz}{85yz}$

Para los problemas 25-58, multiplique o divida según se indica, y exprese las respuestas en su forma reducida. (Objetivo 2)

25. $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7}$
26. $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{11}$
27. $\frac{2}{7} \div \frac{3}{5}$
28. $\frac{5}{6} \div \frac{11}{13}$
29. $\frac{3}{8} \cdot \frac{12}{15}$
30. $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2}$
31. $\frac{-6}{13} \cdot \frac{26}{9}$
32. $\frac{3}{4} \cdot \frac{-14}{12}$
33. $\frac{7}{9} \div \frac{5}{9}$
34. $\frac{3}{11} \div \frac{7}{11}$
35. $\frac{1}{4} \div \frac{-5}{6}$
36. $\frac{7}{8} \div \frac{14}{-16}$
37. $\left(-\frac{8}{10}\right)\left(-\frac{10}{32}\right)$
38. $\left(-\frac{6}{7}\right)\left(-\frac{21}{24}\right)$
39. $-9 \div \frac{1}{3}$
40. $-10 \div \frac{1}{4}$
41. $\frac{5x}{9y} \cdot \frac{7y}{3x}$
42. $\frac{4a}{11b} \cdot \frac{6b}{7a}$
43. $\frac{6a}{14b} \cdot \frac{16b}{18a}$
44. $\frac{5y}{8x} \cdot \frac{14z}{15y}$
45. $\frac{10x}{-9y} \cdot \frac{15}{20x}$
46. $\frac{3x}{4y} \cdot \frac{-8w}{9z}$
47. $ab \cdot \frac{2}{b}$
48. $3xy \cdot \frac{4}{x}$
49. $\left(-\frac{7x}{12y}\right)\left(-\frac{24y}{35x}\right)$
50. $\left(-\frac{10a}{15b}\right)\left(-\frac{45b}{65a}\right)$
51. $\frac{3}{x} \div \frac{6}{y}$
52. $\frac{6}{x} \div \frac{14}{y}$
53. $\frac{5x}{9y} \div \frac{13x}{36y}$
54. $\frac{3x}{5y} \div \frac{7x}{10y}$
55. $\frac{-7}{x} \div \frac{9}{x}$
56. $\frac{8}{y} \div \frac{28}{-y}$
57. $\frac{-4}{n} \div \frac{-18}{n}$
58. $\frac{-34}{n} \div \frac{-51}{n}$

Para los problemas 59-74, realice las operaciones como se indica y escriba las respuestas en su mínima expresión. (Objetivo 2)

59. $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{12}{20}$
60. $\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{7}$
61. $\left(-\frac{3}{8}\right)\left(\frac{13}{14}\right)\left(-\frac{12}{9}\right)$
62. $\left(-\frac{7}{9}\right)\left(\frac{5}{11}\right)\left(-\frac{18}{14}\right)$
63. $\left(\frac{3x}{4y}\right)\left(\frac{8}{9x}\right)\left(\frac{12y}{5}\right)$
64. $\left(\frac{2x}{3y}\right)\left(\frac{5y}{x}\right)\left(\frac{9}{4x}\right)$
65. $\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{8}$
66. $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \div \frac{1}{6}$
67. $\frac{5}{7} \div \left(-\frac{5}{6}\right)\left(-\frac{6}{7}\right)$
68. $\left(-\frac{3}{8}\right) \div \left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$
69. $\left(-\frac{6}{7}\right) \div \left(\frac{5}{7}\right)\left(-\frac{5}{6}\right)$
70. $\left(-\frac{4}{3}\right) \div \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$
71. $\left(\frac{4}{9}\right)\left(-\frac{9}{8}\right) \div \left(-\frac{3}{4}\right)$
72. $\left(-\frac{7}{8}\right)\left(\frac{4}{7}\right) \div \left(-\frac{3}{2}\right)$

73. $\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) \div \left(-\frac{1}{4}\right) \div (-3)$

74. $\frac{1}{3} \div \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \div 2$

Para los problemas 75-87, resuelva los problemas verbales. **(Objetivo 3)**

75. El departamento de María lleva $\frac{3}{4}$ de todas las cuentas de la Agencia Publicitaria ABC. María es personalmente responsable de $\frac{1}{3}$ de todas las cuentas de su departamento. ¿De qué porción de todas las cuentas de ABC es responsable María?

76. En la Universidad Thunderbird, el departamento de matemáticas es responsable de asesorar a $\frac{5}{8}$ de los 3200 alumnos. Cada profesor del departamento de matemáticas asesora $\frac{1}{10}$ de los alumnos asignados al departamento de matemáticas. ¿Cuántos estudiantes asesora cada profesor de la facultad de matemáticas?

77. Pablo tiene una tabla que mide $4\frac{1}{2}$ pies y quiere cortarla en tres piezas del mismo largo (ver Figura 2.1). Hallar el largo de cada una de las tres piezas.

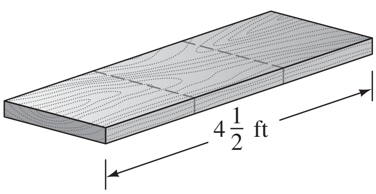


Figura 2.1

78. Mark tiene una línea de combustible para su auto de carreras que mide $5\frac{3}{4}$ pies. Necesita que la línea se corte en dos partes iguales. ¿Cuánto medirá cada parte?

79. Una receta para pastel de cumpleaños pide $\frac{3}{4}$ de taza de azúcar. ¿Cuánta azúcar se necesita para hacer 3 pasteles?

80. La sociedad humanista local usa $\frac{2}{3}$ de taza de comida por cada perro en el albergue. ¿Cuántas tazas se necesitarán para alimentar 18 perros en dicho albergue?

81. Jonás dejó una propiedad de \$750,000. Su testamento indica que tres cuartas partes de la propiedad deben ser divididas equitativamente entre sus tres hijos. ¿Cuánto recibirá cada uno?

82. Ángel dirige y toca en una banda de cuatro personas. La banda juntó \$120,000 en un concierto de beneficencia para el cáncer. La banda ganó $\frac{3}{8}$ del dinero recolectado. Si cada miembro de la banda recibe la misma cantidad, ¿cuánto dinero ganará Ángel?

83. Una de las recetas de Arlene pide $3\frac{1}{2}$ tazas de leche. Si quiere hacer sólo media receta, ¿cuánta leche deberá usar?

84. Una dosis completa de quimioterapia son $4\frac{1}{2}$ onzas. Para su siguiente sesión, Jonás recibirá $\frac{2}{3}$ de la dosis completa. ¿Cuántas onzas recibirá Jonás en su siguiente tratamiento?

85. La longitud total de la suma de cuatro lados de un cuadrado es $\frac{2}{3}$ yardas. ¿Qué tan largo es cada lado del cuadrado?

86. Una canción tarda $2\frac{1}{4}$ segundos en bajarse. ¿Cuánto tomará bajar 16 canciones?

87. Si se requieren $3\frac{1}{4}$ yardas de material para hacer un vestido, ¿cuánto material se necesitará para 20 vestidos?

88. Si su calculadora puede trabajar con números racionales en forma $\frac{a}{b}$, verifique sus respuestas para los problemas 1-12 y 65-74.

Pensamientos en palabras

89. Exprese con sus propias palabras la propiedad

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

90. Explique cómo reduciría $\frac{72}{117}$ a su mínima expresión.

91. ¿Qué error se cometió en el siguiente proceso de simplificación?

$$\frac{1}{2} \div \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right) \div 3 = \frac{1}{2} \div \frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

¿Cómo podría corregir el error?

Más investigación

92. La división 35 ÷ 7 puede ser interpretada como “¿cuántos 7 hay en 35?”. De la misma manera, una división como $3 \div \frac{1}{2}$ puede ser interpretada como “¿cuántos medios hay en 3?”. Use este tipo de interpretación para resolver las siguientes divisiones.

(a) $4 \div \frac{1}{2}$ **(b)** $3 \div \frac{1}{4}$

(c) $5 \div \frac{1}{8}$ **(d)** $6 \div \frac{1}{7}$

(e) $\frac{5}{6} \div \frac{1}{6}$ **(f)** $\frac{7}{8} \div \frac{1}{8}$

93. La estimación es importante en matemáticas. En cada uno de los siguientes incisos, estime si la respuesta es mayor a 1 o menor que 1 usando la idea de “cuántos” en el problema 92.

(a) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ **(b)** $1 \div \frac{7}{8}$

(c) $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$ **(d)** $\frac{8}{7} \div \frac{7}{8}$

(e) $\frac{2}{3} \div \frac{1}{4}$ **(f)** $\frac{3}{5} \div \frac{3}{4}$

94. Reduzca cada uno de los siguientes incisos a su mínima expresión. No olvide que se revisaron algunas reglas de divisibilidad en la sección de problemas 1.2.

(a) $\frac{99}{117}$ **(b)** $\frac{175}{225}$

(c) $\frac{-111}{123}$ **(d)** $\frac{-234}{270}$

(e) $\frac{270}{495}$ **(f)** $\frac{324}{459}$

(g) $\frac{91}{143}$ **(h)** $\frac{187}{221}$

Respuestas del examen de conceptos

1. Verdadero **2.** Verdadero **3.** Verdadero **4.** Verdadero **5.** Falso **6.** Verdadero **7.** Falso
8. Falso **9.** Verdadero **10.** Verdadero

2.2 Adición y substracción de números racionales

OBJETIVOS

1. Adición y substracción números racionales en forma de fracción
2. Combinar términos similares cuyos coeficientes sean números racionales en forma de fracción
3. Resolver problemas aplicados que incluyan adición y substracción de números racionales en forma de fracción

Imagine que hay un quinto de milla entre su dormitorio y el centro estudiantil, y dos quintos de milla entre el centro estudiantil y la biblioteca siguiendo una línea recta como se muestra en la Figura 2.2. La distancia total entre su dormitorio y la biblioteca es tres quintas partes de una milla y se escribe $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

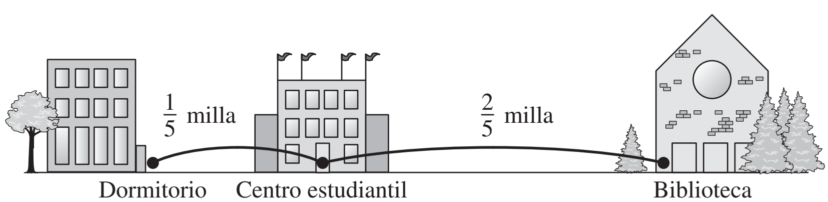


Figura 2.2

Una pizza se corta en siete partes iguales y usted come dos de esas piezas. ¿Cuánta pizza queda (Figura 2.3)? Se representa toda la pizza como $\frac{7}{7}$ y después se concluye que queda $\frac{7}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$ de la pizza.

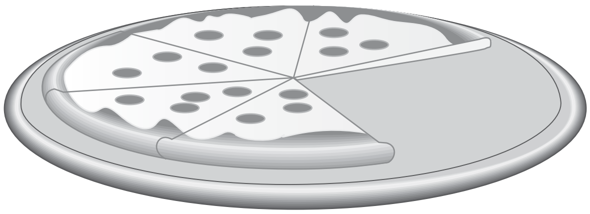


Figura 2.3

Estos ejemplos motivan la siguiente definición para la adición y substracción de números racionales en la forma $\frac{a}{b}$:

Definición 2.3

Si a, b y c son enteros, y b no es cero, entonces

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b} \qquad \text{Adición}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b} \qquad \text{Substracción}$$

Se pueden adición o substracción números racionales con un denominador común, al sumar o restar los numeradores y colocar el resultado sobre el denominador común. Considere los siguientes ejemplos:

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3 + 2}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{7}{8} - \frac{2}{8} = \frac{7 - 2}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2 + 1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad \text{¡No olvide reducir!}$$

$$\frac{3}{11} - \frac{5}{11} = \frac{3 - 5}{11} = \frac{-2}{11} \qquad \text{o} \qquad -\frac{2}{11}$$

$$\frac{5}{x} + \frac{7}{x} = \frac{5 + 7}{x} = \frac{12}{x}$$

$$\frac{9}{y} - \frac{3}{y} = \frac{9 - 3}{y} = \frac{6}{y}$$

En los últimos dos ejemplos, las variables x y y no puden ser igual a cero para excluir la división entre cero. Aunque no enlistemos las reglas en cada problema, siempre es necesario restringir los denominadores a valores distintos a cero.

Adición de fracciones con distinto denominador

¿Cómo sumamos o restamos si las fracciones no tienen el mismo denominador? Usamos el principio fundamental de fracciones $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$ y obtenemos fracciones equivalentes que tienen el mismo denominador. Las fracciones equivalentes son aquellas que nombran al mismo número. Considere el siguiente ejemplo que muestra los detalles.

Los ejemplos 1-10 son muestras de adición de números racionales en forma de fracción o de adición de expresiones racionales. Cuando estudie estos ejemplos, notará que se sigue el mismo proceso básico para resolver cada problema:

Paso 1 Hallar el mínimo común denominador.

Paso 2 Cambiar cada fracción a una fracción equivalente con el MCD como nuevo denominador.

Paso 3 Combinar todos los numeradores sobre el denominador común y sumarlos.

Paso 4 De ser posible, reducir la fracción resultante.

Ejemplo de salón de clases
Sumar $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$.

EJEMPLO 1 Hallar la suma de $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

Solución

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6} \qquad \frac{1}{2} \text{ y } \frac{3}{6} \text{ son fracciones equivalentes que denotan al mismo número}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6} \qquad \frac{1}{3} \text{ y } \frac{2}{6} \text{ son fracciones equivalentes que denotan al mismo número}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3 + 2}{6} = \frac{5}{6}$$

Note que se eligió 6 como el común denominador, y 6 es el mínimo común múltiplo de los denominadores originales 2 y 3. (El mínimo común múltiplo de un conjunto de números enteros positivos es el menor número entero positivo distinto de cero divisible entre cada uno de los números.) En general, el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones a sumar o restar se usa como un mínimo común denominador (MCD).

De la sección 1.2 puede recordar que un mínimo común múltiplo se puede encontrar por inspección o con el uso de las formas factorizadas primas de los números. Considere algunos ejemplos y use cada una de estas técnicas.

Ejemplo de salón de clases
Sumar $\frac{1}{3} + \frac{4}{7}$.

EJEMPLO 2 Hallar la suma de $\frac{1}{4} + \frac{2}{5}$.

Solución

Por inspección, puede ver que el MCD es 20. Por tanto, ambas fracciones pueden cambiar a fracciones equivalentes, cada una con un denominador de 20.

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{5}{20} + \frac{8}{20} = \frac{13}{20}$$

Uso del principio fundamental
de las fracciones

Ejemplo de salón de clases
Restar $\frac{7}{9} - \frac{4}{15}$.

EJEMPLO 3 Hallar la resta de $\frac{5}{8} - \frac{7}{12}$.

Solución

Por inspección, es claro que el MCD es 24.

$$\frac{5}{8} - \frac{7}{12} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} - \frac{7 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{15}{24} - \frac{14}{24} = \frac{1}{24}$$

Si el MCD no es obvio por simple inspección, entonces se puede usar la técnica del Capítulo 1 para hallar el mínimo común múltiplo. Después se procede de la siguiente manera:

Paso 1 Expresar cada denominador como descomposición de factores primos.

Paso 2 El MCD contiene cada factor primo el número de veces que más aparezca en cualquiera de las descomposiciones del paso 1.

Ejemplo de salón de clases
Sumar $\frac{7}{12} + \frac{6}{15}$.

EJEMPLO 4 Hallar la suma de $\frac{5}{18} + \frac{7}{24}$.

Solución

El MCD no es obvio a simple inspección, así que se debe usar la descomposición en factores primos.

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

La descomposición contiene factores primos de 2 y 3.

La máxima cantidad de veces que el factor 2 ocurre en cualquier descomposición es tres veces. Así que se necesitan tres factores de 2 para el mínimo común múltiplo.

La máxima cantidad de veces que el factor 3 ocurre en cualquier descomposición es dos veces. Así que se necesitan dos factores de 3 para el mínimo común múltiplo.

Por ende, el mínimo común múltiplo es: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$.

$$\frac{5}{18} + \frac{7}{24} = \frac{5 \cdot 4}{18 \cdot 4} + \frac{7 \cdot 3}{24 \cdot 3} = \frac{20}{72} + \frac{21}{72} = \frac{41}{72}$$

Cambiar a fracciones equivalentes con un denominador de 72 y después sumar los numeradores

Ejemplo de salón de clases
Restar $\frac{3}{10} - \frac{11}{15}$.

EJEMPLO 5 Hallar la resta de $\frac{3}{14} - \frac{8}{35}$.

Solución

$$\left.\begin{aligned} 14 &= 2 \cdot 7 \\ 35 &= 5 \cdot 7 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{MDC} = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$$

$$\frac{3}{14} - \frac{8}{35} = \frac{3 \cdot 5}{14 \cdot 5} - \frac{8 \cdot 2}{35 \cdot 2} = \frac{15}{70} - \frac{16}{70} = \frac{-1}{70} \quad \text{o} \quad -\frac{1}{70}$$

Ejemplo de salón de clases
Sumar $\frac{-7}{9} + \frac{7}{15}$.

EJEMPLO 6 Hallar la suma de $\frac{-5}{8} + \frac{3}{14}$.

Solución

$$\left.\begin{aligned} 8 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ 14 &= 2 \cdot 7 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{MDC} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 56$$

$$\frac{-5}{8} + \frac{3}{14} = \frac{-5 \cdot 7}{8 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 4}{14 \cdot 4} = \frac{-35}{56} + \frac{12}{56} = \frac{-23}{56} \quad \text{o} \quad -\frac{23}{56}$$

Ejemplo de salón de clases
Sumar $-2 + \frac{4}{9}$.

EJEMPLO 7 Hallar la suma de $-3 + \frac{2}{5}$.

Solución

$$-3 + \frac{2}{5} = \frac{-3 \cdot 5}{1 \cdot 5} + \frac{2}{5} = \frac{-15}{5} + \frac{2}{5} = \frac{-15 + 2}{5} = \frac{-13}{5} \quad \text{o} \quad -\frac{13}{5}$$

Un denominador que contenga variables no crea una dificultad seria, tal como muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplo de salón de clases

Sumar $\frac{4}{m} + \frac{5}{n}$.

EJEMPLO 8 Hallar la suma de $\frac{2}{x} + \frac{3}{y}$.

Solución

Por inspección, el MCD es xy.

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{2 \cdot y}{x \cdot y} + \frac{3 \cdot x}{y \cdot x} = \frac{2y}{xy} + \frac{3x}{xy} = \frac{2y + 3x}{xy}$$

Propiedad conmutativa

Ejemplo de salón de clases

Restar $\frac{3}{4x} - \frac{7}{18y}$.

EJEMPLO 9 Hallar la resta de $\frac{3}{8x} - \frac{5}{12y}$.

Solución

$$\left.\begin{aligned} 8x &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \\ 12y &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot y \end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{MCD} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \cdot y = 24xy$$

$$\frac{3}{8x} - \frac{5}{12y} = \frac{3 \cdot 3y}{8x \cdot 3y} - \frac{5 \cdot 2x}{12y \cdot 2x} = \frac{9y}{24xy} - \frac{10x}{24xy} = \frac{9y - 10x}{24xy}$$

Ejemplo de salón de clases

Sumar $\frac{7}{6x} + \frac{-4}{9yz}$.

EJEMPLO 10 Hallar la suma de $\frac{7}{4a} + \frac{-5}{6bc}$.

Solución

$$\left.\begin{aligned} 4a &= 2 \cdot 2 \cdot a \\ 6bc &= 2 \cdot 3 \cdot b \cdot c \end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{MCD} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b \cdot c = 12abc$$

$$\frac{7}{4a} + \frac{-5}{6ac} = \frac{7 \cdot 3bc}{4a \cdot 3bc} + \frac{-5 \cdot 2a}{6bc \cdot 2a} = \frac{21bc}{12abc} + \frac{-10a}{12abc} = \frac{21bc - 10a}{12abc}$$

Simplificación de expresiones numéricas

Ahora consideremos cómo simplificar expresiones numéricas que contengan números racionales. Como con los números reales, las multiplicaciones y divisiones se hacen primero, después van las adiciones y las substracciones. En los siguientes ejemplos, sólo se muestran los pasos principales para que pueda completar con los detalles faltantes.

Ejemplo de salón de clases

Simplificar $\frac{3}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$.

EJEMPLO 11 Simplificar $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}$.

Solución

Debido a que el problema tiene adición, substracción y multiplicaciones, se necesita considerar el orden de las operaciones. De acuerdo a éste, la multiplicación debe hacerse primero, y después la adición y la substracción en el orden que aparecen de izquierda a derecha.

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{10} \qquad \text{Resuelva las multiplicaciones}$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{4} - \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{2} \qquad \text{Cambie a fracciones equivalentes}$$

$$= \frac{15}{20} + \frac{8}{20} - \frac{2}{20}$$

$$= \frac{15 + 8 - 2}{20} = \frac{21}{20} \qquad \text{Combine numeradores}$$

Ejemplo de salón de clases

Simplificar
$\frac{1}{3} \div \frac{2}{3} + \left(\frac{-3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6}$.

EJEMPLO 12 Simplificar $\frac{3}{5} \div \frac{8}{5} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{5}{12}$.

Solución

Debido a que el problema tiene adiciones, multiplicación y división, se necesita aplicar el orden de operaciones. De acuerdo a éste, la división se realiza primero ya que es la primera que aparece de izquierda a derecha. Después se resuelven las multiplicaciones antes de pasar a la suma.

$$\begin{aligned}
\frac{3}{5} \div \frac{8}{5} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{5}{12} &= \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{5}{12} && \text{Cambie la división a una multiplicación por el recíproco} \\
&= \frac{3}{8} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{5}{12} \\
&= \frac{3}{8} + \frac{-1}{6} + \frac{5}{12} \\
&= \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{3} + \frac{-1}{6} \cdot \frac{4}{4} + \frac{5}{12} \cdot \frac{2}{2} && \text{Cambie a fracciones equivalentes} \\
&= \frac{9}{24} + \frac{-4}{24} + \frac{10}{24} \\
&= \frac{9 + (-4) + 10}{24} \\
&= \frac{15}{24} = \frac{5}{8} && \text{¡No olvide reducir!}
\end{aligned}$$

La propiedad distributiva $a(b + c) = ab + ac$, se mantiene para los números racionales y, como con los números reales, puede usarse para facilitar las operaciones.

Ejemplo de salón de clases

Simplificar $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)$.

EJEMPLO 13 Simplificar $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$.

Solución

Cambiar la forma mediante la aplicación de la propiedad distributiva puede ayudar en esta situación.

$$\begin{aligned}
12\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) &= 12\left(\frac{1}{3}\right) + 12\left(\frac{1}{4}\right) \\
&= 4 + 3 \\
&= 7
\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases

Simplificar $\frac{5}{7}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)$.

EJEMPLO 14 Simplificar $\frac{5}{8}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$.

Solución

En este caso puede ser más fácil no aplicar la propiedad distributiva y trabajar con la expresión como se da.

$$\begin{aligned}
\frac{5}{8}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) &= \frac{5}{8}\left(\frac{3}{6} + \frac{2}{6}\right) \\
&= \frac{5}{8}\left(\frac{5}{6}\right) \\
&= \frac{25}{48}
\end{aligned}$$

Los ejemplos 13 y 14 ejemplifican lo discutido en el Capítulo 1. Primero piense y decida si pueden usarse las propiedades para facilitar el procedimiento. El Ejemplo 15 ilustra cómo combinar términos similares que tienen fracciones por coeficientes.

Ejemplo de salón de clases

Simplificar $\frac{1}{3}m - \frac{2}{5}m + \frac{1}{2}m$ combinando términos similares

EJEMPLO 15 Simplificar $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}x$ agrupar términos similares

Solución

Se puede usar la propiedad distributiva, y lo que ya se sabe para hallar la suma y la restar de números racionales, para resolver este tipo de problema.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}x &= \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right)x \\ &= \left(\frac{6}{12} + \frac{8}{12} - \frac{9}{12}\right)x \\ &= \frac{5}{12}x\end{aligned}$$

Tom Gowanlock/Shutterstock.com

Ejemplo de salón de clases

John compró 5 galones de gasolina para llenar su equipo de jardinería. Se requieren $1\frac{1}{4}$ galones para el cortacésped y $1\frac{1}{2}$ galones para el soplador. ¿Cuánta gasolina sobrará para la podadora?

EJEMPLO 16 **Aplique su habilidad**

Brian llevó 5 tazas de harina a un campamento. Quiere hacer panecillos y pastel para la cena. Se necesita $\frac{3}{4}$ de taza de harina para los panecillos y $2\frac{3}{4}$ tazas de harina para el pastel. ¿Cuánta harina sobrará para el resto del viaje?

Solución

Dividamos el problema en dos pasos. Primero, halle la suma las cantidades de harina que se necesitan para los panecillos y para el pastel.

$$\frac{3}{4} + 2\frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{11}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

Luego, para hallar la cantidad de harina que sobra, reste $\frac{7}{2}$ de 5.

$$5 - \frac{7}{2} = \frac{10}{2} - \frac{7}{2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Así que sobran $1\frac{1}{2}$ tazas de harina.

Examen de conceptos 2.2

Para los problemas 1-10, responda falso o verdadero.

1. Para hallar la suma de números racionales con el mismo denominador, se suman los numeradores y se coloca el resultado sobre el denominador en común.
2. Al sumar $\frac{2}{c} + \frac{6}{c}$, c puede ser igual a cero.
3. Las fracciones que nombran al mismo número se llaman fracciones equivalentes.
4. El mínimo común múltiplo de los denominadores siempre puede ser usado como mínimo común denominador cuando se adicionan o se substraen fracciones.
5. Para substraer $\frac{3}{8}$ y $\frac{1}{5}$ se necesitan encontrar las fracciones equivalentes con un denominador común.

6. Para multiplicar $\frac{5}{7}$ y $\frac{2}{3}$ se necesitan encontrar las fracciones equivalentes con un común denominador.

7. 20, 40 ó 60 pueden ser usados como común denominador cuando se suman $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{5}$, pero 20 es el mínimo común denominador.

8. Al sumar $\frac{2x}{ab}$ y $\frac{3y}{bc}$, el mínimo común denominador es ac.

9. $36\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{9}\right)$ se simplifica a 2.

10. $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}x + \frac{5}{6}x$ se simplifica a $\frac{13}{12}x$.

Conjunto de problemas 2.2

Para los problemas 1-64, halle la suma o la resta según se indique y escriba las respuestas en su mínima expresión. (Objetivo 1)

1. $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$
2. $\frac{3}{11} + \frac{5}{11}$
3. $\frac{7}{9} - \frac{2}{9}$
4. $\frac{11}{13} - \frac{6}{13}$
5. $\frac{3}{4} + \frac{9}{4}$
6. $\frac{5}{6} + \frac{7}{6}$
7. $\frac{11}{12} - \frac{3}{12}$
8. $\frac{13}{16} - \frac{7}{16}$
9. $\frac{1}{8} - \frac{5}{8}$
10. $\frac{2}{9} - \frac{5}{9}$
11. $\frac{5}{24} + \frac{11}{24}$
12. $\frac{7}{36} + \frac{13}{36}$
13. $\frac{8}{x} + \frac{7}{x}$
14. $\frac{17}{y} + \frac{12}{y}$
15. $\frac{5}{3y} + \frac{1}{3y}$
16. $\frac{3}{8x} + \frac{1}{8x}$
17. $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$
18. $\frac{1}{6} + \frac{1}{8}$
19. $\frac{15}{16} - \frac{3}{8}$
20. $\frac{13}{12} - \frac{1}{6}$
21. $\frac{7}{10} + \frac{8}{15}$
22. $\frac{7}{12} + \frac{5}{8}$
23. $\frac{11}{24} + \frac{5}{32}$
24. $\frac{5}{18} + \frac{8}{27}$
25. $\frac{5}{18} - \frac{13}{24}$
26. $\frac{1}{24} - \frac{7}{36}$
27. $\frac{5}{8} - \frac{2}{3}$
28. $\frac{3}{4} - \frac{5}{6}$
29. $-\frac{2}{13} - \frac{7}{39}$
30. $-\frac{3}{11} - \frac{13}{33}$
31. $-\frac{3}{14} + \frac{1}{21}$
32. $-\frac{3}{20} + \frac{14}{25}$
33. $-4 - \frac{3}{7}$
34. $-2 - \frac{5}{6}$
35. $\frac{3}{4} - 6$
36. $\frac{5}{8} - 7$
37. $\frac{3}{x} + \frac{4}{y}$
38. $\frac{5}{x} + \frac{8}{y}$
39. $\frac{7}{a} - \frac{2}{b}$
40. $\frac{13}{a} - \frac{4}{b}$
41. $\frac{2}{x} + \frac{7}{2x}$
42. $\frac{5}{2x} + \frac{7}{x}$
43. $\frac{10}{3x} - \frac{2}{x}$
44. $\frac{13}{4x} - \frac{3}{x}$
45. $\frac{1}{x} - \frac{7}{5x}$
46. $\frac{2}{x} - \frac{17}{6x}$
47. $\frac{3}{2y} + \frac{5}{3y}$
48. $\frac{7}{3y} + \frac{9}{4y}$
49. $\frac{5}{12y} - \frac{3}{8y}$
50. $\frac{9}{4y} - \frac{5}{9y}$
51. $\frac{1}{6n} - \frac{7}{8n}$
52. $\frac{3}{10n} - \frac{11}{15n}$
53. $\frac{5}{3x} + \frac{7}{3y}$
54. $\frac{3}{2x} + \frac{7}{2y}$
55. $\frac{8}{5x} + \frac{3}{4y}$
56. $\frac{1}{5x} + \frac{5}{6y}$
57. $\frac{7}{4x} - \frac{5}{9y}$
58. $\frac{2}{7x} - \frac{11}{14y}$

59. $-\frac{3}{2x} - \frac{5}{4y}$

60. $-\frac{13}{8a} - \frac{11}{10b}$

61. $3 + \frac{2}{x}$

62. $\frac{5}{x} + 4$

63. $2 - \frac{3}{2x}$

64. $-1 - \frac{1}{3x}$

Para los problemas 65-80, simplifique cada expresión numérica y exprese sus respuestas en la forma reducida. **(Objetivo 1)**

65. $\frac{1}{4} - \frac{3}{8} + \frac{5}{12} - \frac{1}{24}$

66. $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} + \frac{5}{12}$

67. $\frac{5}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}$

68. $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$

69. $\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{9} - \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{8}$

70. $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{5}$

71. $4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} - 6$

72. $3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - 2$

73. $\frac{4}{5} - \frac{10}{12} - \frac{5}{6} \div \frac{14}{8} + \frac{10}{21}$

74. $\frac{3}{4} \div \frac{6}{5} + \frac{8}{12} \cdot \frac{6}{9} - \frac{5}{12}$

75. $24\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right)$ ¡No olvide la propiedad distributiva!

76. $18\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{9}\right)$

77. $64\left(\frac{3}{16} + \frac{5}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$

78. $48\left(\frac{5}{12} - \frac{1}{6} + \frac{3}{8}\right)$

79. $\frac{7}{13}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)$

80. $\frac{5}{9}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$

Para los problemas 81-96, simplifique cada expresión algebraica agrupando términos similares. **(Objetivo 2)**

81. $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}x$

82. $\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}x$

83. $\frac{1}{3}a - \frac{1}{8}a$

84. $\frac{2}{5}a - \frac{2}{7}a$

85. $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}x$

86. $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}x + \frac{5}{6}x$

87. $\frac{3}{5}n - \frac{1}{4}n + \frac{3}{10}n$

88. $\frac{2}{5}n - \frac{7}{10}n + \frac{8}{15}n$

89. $n + \frac{4}{3}n - \frac{1}{9}n$

90. $2n - \frac{6}{7}n + \frac{5}{14}n$

91. $-n - \frac{7}{9}n - \frac{5}{12}n$

92. $-\frac{3}{8}n - n - \frac{3}{14}n$

93. $\frac{3}{7}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}x + \frac{7}{8}y$

94. $\frac{5}{6}x + \frac{3}{4}y + \frac{4}{9}x + \frac{7}{10}y$

95. $\frac{2}{9}x + \frac{5}{12}y - \frac{7}{15}x - \frac{13}{15}y$

96. $-\frac{9}{10}x - \frac{3}{14}y + \frac{2}{25}x + \frac{5}{21}y$

Para los problemas 97-106, resuelva usando adición y substracción de números racionales. **(Objetivo 3)**

97. Beth quiere hacer tres cojines para su nuevo sofá. Tras consultar la tabla proporcionada por la tienda de telas, decide hacer un cojín redondo de 12″, uno cuadrado de 18″ y uno rectangular de 12″ × 16″. De acuerdo a la tabla, ¿cuánta tela necesita comprar Beth?

Tabla de la tienda de telas	
10″ redondo	$\frac{3}{8}$ yarda
12″ redondo	$\frac{1}{2}$ yarda
12″ cuadrado	$\frac{5}{8}$ yarda
18″ cuadrado	$\frac{3}{4}$ yarda
12″ × 16″ rectangular	$\frac{7}{8}$ yarda

98. Marcus está decorando su cuarto y planea colgar tres afiches que miden $13\frac{3}{8}$ pulgadas de ancho. Va a colgar los afiches una al lado de la otra con $2\frac{1}{4}$ pulgadas entre ellos. ¿Qué tan ancha debe ser la pared para que pueda colgar los tres afiches?

99. Emma tiene tres moldes para hornear que miden $8\frac{1}{4}$ pulgadas, $12\frac{1}{2}$ pulgadas y $\frac{5}{8}$ pulgadas de ancho. Para que haya buena circulación de aire dentro del horno, quiere dejar $\frac{1}{2}$ pulgada de espacio entre los moldes y $\frac{1}{2}$ pulgada de espacio entre los moldes y las paredes del horno. ¿Cuánto debe medir la repisa del horno para lograr esto?

100. Un farmacéutico necesita mezclar $6\frac{2}{3}$ onzas de agua con $1\frac{1}{4}$ onzas de jarabe para la tos. ¿Cuántas onzas hay en la mezcla?

101. De una tabla que mide $12\frac{1}{2}$ pies de largo, se corta una pieza de $1\frac{3}{4}$ pie de largo. Hallar la longitud de la pieza sobrante.

102. Vinay tiene una tabla que mide $6\frac{1}{2}$ pies de largo. Si corta una pieza de $2\frac{3}{4}$ pies de largo, ¿qué tan larga es la pieza sobrante de tabla?

103. Mindy camina diariamente $2\frac{1}{2}$ millas. Un día, una tormenta eléctrica la obligó a detener su caminata después de $\frac{3}{4}$ de milla. ¿Por cuánto se acortó su caminata ese día?

104. Blake Scott dejó $\frac{1}{4}$ de sus propiedades a los niños exploradores, $\frac{2}{5}$ a la fundación local contra el cáncer y el resto a su iglesia. ¿Qué fracción recibió la iglesia?

105. Un terreno rectangular mide $14\frac{1}{2}$ yardas por $12\frac{1}{3}$ yardas por $9\frac{5}{6}$ yardas. ¿Cuántas yardas de enrejado se necesitan para cercar el terreno?

106. Para su programa de ejercicio, Lian corre $2\frac{1}{2}$ millas, después camina $\frac{3}{4}$ de milla y corre otra $\frac{1}{4}$ milla. Hallar la distancia total que cubre Lian.

107. Si su calculadora maneja números racionales en forma $\frac{a}{b}$, verifique sus respuestas para los problemas 65-80.

Pensamientos en palabras

108. Dé una descripción paso a paso de la mejor manera para hallar la suma de los números racionales $\frac{3}{8}$ y $\frac{5}{18}$.

109. Dé una descripción paso a paso de cómo sumar las fracciones $\frac{5}{4x}$ y $\frac{7}{6x}$.

110. El testamento de un coleccionista de automóviles antiguos especificó que sus carros se entregaran a sus tres hijos. La mitad sería para su hijo mayor, $\frac{1}{3}$ para su hija y $\frac{1}{9}$ para su hijo menor. Para el momento en el que falleció, había 17 carros en la colección. El administrador de sus propiedades pidió prestado uno para tener 18. Así que los autos se distribuyeron de la siguiente manera:

Hijo mayor: $\frac{1}{2}(18) = 9$

Hija: $\frac{1}{3}(18) = 6$

Hijo menor: $\frac{1}{9}(18) = 2$

Esto cubre los 17 carros, así que el administrador devolvió el auto prestado. ¿Dónde está el error en esta solución?

Respuestas del examen de conceptos

1. Verdadero **2.** Falso **3.** Verdadero **4.** Verdadero **5.** Verdadero **6.** Falso **7.** Verdadero **8.** Falso **9.** Verdadero **10.** Falso

2.3 Numeros reales y expresiones algebraicas

OBJETIVOS

1. Clasificar números reales
2. Sumar, restar, multiplicar y dividir números racionales en forma decimal
3. Combinar términos similares cuyos coeficientes sean números racionales en forma decimal
4. Evaluar expresiones algebraicas cuando las variables sean números racionales
5. Resolver problemas aplicados que incluyan operaciones de números racionales en forma decimal

Clasificamos decimales —también llamados fracciones decimales— como terminales, repetitivos y no repetitivos. Aquí hay algunos ejemplos de estas clasificaciones:

Decimales terminales	Decimales repetitivos	Decimales no repetitivos
0.3	0.333333 . . .	0.5918654279 . . .
0.26	0.5466666 . . .	0.26224222722229 . . .
0.347	0.14141414 . . .	0.145117211193111148 . . .
0.9865	0.237237237 . . .	0.645751311 . . .

Técnicamente, un **decimal terminal** puede ser pensado como ceros repetidos después del último dígito. Por ejemplo, $0.3 = 0.30 = 0.300 = 0.3000$ etc.

Un **decimal repetitivo** tiene un bloque de dígitos que se repite infinitamente. Este bloque de dígitos repetidos puede contener cualquier número de dígitos y puede o no comenzar repitiéndose inmediatamente después del punto decimal.

En la Sección 2.1 se definió un número racional como cualquier número que pueda ser escrito en forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números reales y b no es cero. Un número racional también puede definirse como **cualquier número que tenga una representación con decimales terminales o repetitivos**. Entonces, se pueden expresar los números racionales en forma de fracción o en forma de fracción decimal, como lo ilustran los siguientes ejemplos. El decimal repetitivo también puede escribirse usando una barra sobre los dígitos que se repiten, por ejemplo, $0.\overline{14}$.

Decimales terminales	Decimales repetitivos
$\frac{3}{4} = 0.75$	$\frac{1}{3} = 0.3333 \ldots$
$\frac{1}{8} = 0.125$	$\frac{2}{3} = 0.66666 \ldots$
$\frac{5}{16} = 0.3125$	$\frac{1}{6} = 0.166666 \ldots$
$\frac{7}{25} = 0.28$	$\frac{1}{12} = 0.08333 \ldots$
$\frac{2}{5} = 0.4$	$\frac{14}{99} = 0.14141414 \ldots$

Los **decimales no repetitivos** también son llamados "números irracionales" y aparecen en otras formas además de la decimal. Por ejemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y π son números irracionales; a continuación, hay una representación decimal parcial de cada uno:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1.414213562373 \ldots \\ \sqrt{3} &= 1.73205080756887 \ldots \\ \pi &= 3.14159265358979 \ldots\end{aligned}\right\} \quad \text{Decimales no repetitivos}$$

(Se trabajará más con los números irracionales en el Capítulo 9).

Los números racionales, junto con los irracionales, forman el conjunto de números reales. El siguiente diagrama (Figura 2.4) muestra los conjuntos y algunos ejemplos de números que pertenecen a esos conjuntos.

Números reales

Racionales		Irracionales
Enteros	No enteros	$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$
$-2, 8, -1$ $0, 3, 6$	$\frac{1}{2}, \frac{10}{7}, 0.35$ $-\frac{3}{4}, 0.\overline{6}$	

Figura 2.4

Es posible clasificar números como miembros de un conjunto de números racionales (enteros y no enteros) o irracionales. La clasificación de algunos números se muestra en los siguientes ejemplos.

5 es racional y entero

-4 es racional y entero

$\frac{3}{4}$ es racional y no entero

0.23 es racional y no entero

$-0.161616\ldots$ es racional y no entero

$\sqrt{7}$ es irracional

$-\sqrt{2}$ es irracional

En la Sección 1.3 se asoció el conjunto de números enteros con los puntos equidistantes de una línea como la mostrada en la Figura 2.5. Esta idea de asociar números con puntos en una línea puede

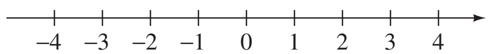


Figura 2.5

extenderse para que haya una correspondencia de uno a uno entre los puntos en la recta recta y el resto del conjunto de números reales (como se muestra en la Figura 2.6). En otras palabras, a cada número real le corresponde uno y sólo un punto sobre la recta, y a cada punto en la recta le corresponde uno y sólo un número real. La línea suele ser llamada **recta de números reales** y el número asociado con cada punto sobre la recta se llama **coordenada** del punto.

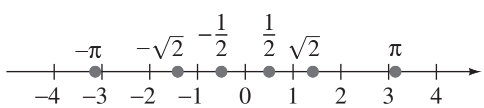


Figura 2.6

Las propiedades de los números enteros discutidas en la Sección 1.5 son igual de ciertas para los números reales; se repetirán para su conveniencia. Se añade la propiedad de inverso multiplicativo a la lista; hay una discusión de tal propiedad a continuación.

Propiedad conmutativa de la adición

Si a y b son números reales, entonces

$$a + b = b + a$$

Propiedad conmutativa de la multiplicación

Si a y b son números reales, entonces

$$ab = ba$$

Propiedad asociativa de la suma

Si a, b y c son números reales, entonces

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Propiedad asociativa de la multiplicación

Si a, b y c son números reales, entonces

$$(ab)c = a(bc)$$

Propiedad de identidad de la suma

Si a es cualquier número real, entonces

$$a + 0 = 0 + a = a$$

Propiedad de identidad de la multiplicación

Si a es cualquier número real, entonces

$$a(1) = 1(a) = a$$

Propiedad de inverso aditivo

Para todo número real a, existe un número real único $-a$ tal que

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Propiedad de multiplicación de cero

Si a es cualquier número real, entonces

$$a(0) = 0(a) = 0$$

Propiedad de multiplicación de uno negativo

Si a es cualquier número real, entonces

$$a(-1) = -1(a) = -a$$

Propiedad de inverso multiplicativo

Para cualquier número real $\frac{a}{b}$ distinto de cero, existe un número real único $\frac{b}{a}$ tal que

$$\frac{a}{b}\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{b}{a}\,\frac{a}{b} = 1$$

Propiedad distributiva

Si a, b y c son números reales, entonces

$$a(b + c) = ab + ac$$

El número $\frac{1}{a}$ se llama **inverso multiplicativo** de a o el **recíproco** de a. Por ejemplo, el recíproco de 2 es $\frac{1}{2}$ y $2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(2) = 1$. Del mismo modo, el recíproco de $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

Por tanto, se dice que 2 y $\frac{1}{2}$ son recíprocos (o inversos multiplicativos) uno de otro. También, $\frac{2}{5}$ y $\frac{5}{2}$ son inversos multiplicativos y $\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = 1$. Puesto que la división por cero es indefinida, cero no tiene un recíproco.

Operaciones básicas con decimales

Las operaciones básicas con decimales pueden estar relacionadas a la operación correspondiente con fracciones comunes. Por ejemplo, $0.3 + 0.4 = 0.7$ porque $\frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10}$ y $0.37 - 0.24 = 0.13$ porque $\frac{37}{100} - \frac{24}{100} = \frac{13}{100}$.

Adición y substracción de números decimales

En general, para adición y substracción de decimales, se suman o restan las centenas, decenas, unidades, etc. Para mantener los valores en su lugar, se alinean los puntos decimales.

Suma

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 2.14 \\ 3.12 \\ \underline{5.16} \\ 10.42 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1\ 1} \\ 5.214 \\ 3.162 \\ 7.218 \\ \underline{8.914} \\ 24.508 \end{array}$$

Resta

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 6\ 16} \\ \cancel{7}.\cancel{6} \\ \underline{4.9} \\ 2.7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 8\ 11\,13} \\ \cancel{9}.\cancel{2}\cancel{3}5 \\ \underline{6.781} \\ 2.454 \end{array}$$

Los siguientes ejemplos pueden ser usados para formular una regla general de multiplicación de decimales.

Porque $\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{21}{100}$, entonces $(0.7)(0.3) = 0.21$

Porque $\frac{9}{10} \cdot \frac{23}{100} = \frac{207}{1000}$, entonces $(0.9)(0.23) = 0.207$

Porque $\frac{11}{100} \cdot \frac{13}{100} = \frac{143}{10{,}000}$, entonces $(0.11)(0.13) = 0.0143$

Multiplicación de números decimales

En general, para multiplicar decimales: (1) se multiplican los números y se ignoran los puntos decimales y después (2) se inserta el punto decimal en el producto de tal forma que el número de dígitos a la derecha del punto en el producto sea igual a la suma del número de dígitos a la derecha del punto en cada factor.

0.7	$\times$	0.3	$=$	0.21
$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$
Un dígito a la derecha	$+$	Un dígito a la derecha	$=$	Dos dígitos a la derecha
0.9	$\times$	0.23	$=$	0.207
$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$
Un dígito a la derecha	$+$	Dos dígitos a la derecha	$=$	Tres dígitos a la derecha
0.11	$\times$	0.13	$=$	0.0143
$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$
Dos dígitos a la derecha	$+$	Dos dígitos a la derecha	$=$	Cuatro dígitos a la derecha

Frecuentemente, se usa el formato vertical para multiplicar decimales.

$$\begin{array}{rl} 41.2 & \text{Un dígito a la derecha} \\ \underline{0.13} & \underline{\text{Dos dígitos a la derecha}} \\ 1236 & \\ \underline{412} & \\ 5.356 & \text{Tres dígitos a la derecha} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 0.021 & \text{Tres dígitos a la derecha} \\ \underline{0.03} & \underline{\text{Dos dígitos a la derecha}} \\ 0.00063 & \text{Cinco dígitos a la derecha} \end{array}$$

Note que, en el último ejemplo, se multiplicó $3 \cdot 21$ y después se insertaron los ceros a la izquierda para que hubiera cinco dígitos a la derecha del punto decimal.

Una vez más, veamos algunas conexiones entre fracciones y decimales:

$$\text{Porque } \frac{6}{10} \div 2 = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{10} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{3}{10}, \text{ entonces } \begin{array}{r} 0.3 \\ 2\overline{)0.6} \end{array}$$

$$\text{Porque } \frac{39}{100} \div 13 = \frac{\overset{3}{\cancel{39}}}{100} \cdot \frac{1}{\cancel{13}} = \frac{3}{100}, \text{ entonces } \begin{array}{r} 0.03 \\ 13\overline{)0.39} \end{array}$$

$$\text{Porque } \frac{85}{100} \div 5 = \frac{\overset{17}{\cancel{85}}}{100} \cdot \frac{1}{\cancel{5}} = \frac{17}{100}, \text{ entonces } \begin{array}{r} 0.17 \\ 5\overline{)0.85} \end{array}$$

División de un número decimal entre un número entero

En general, para dividir un decimal entre un entero distinto a cero se puede (1) colocar el punto decimal en el cociente directamente sobre el punto en el dividendo.

$$\begin{array}{r} \text{Cociente} \\ \text{Divisor}\overline{)\text{Dividendo}} \end{array}$$

y después (2) dividir como se haría con números enteros, excepto que se colocan ceros en el cociente inmediatamente junto del punto decimal para mostrar el orden correcto.

$$\begin{array}{r} 0.121 \\ 4\overline{)0.484} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0.24 \\ 32\overline{)7.68} \\ \underline{6\ 4} \\ 1\ 28 \\ \underline{1\ 28} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0.019 \\ 4\overline{)0.228} \\ \underline{12} \\ 108 \\ \underline{108} \end{array}$$

Cero requerido para mostrar el orden correcto

No olvide que podemos revisar la división puede usando la multiplicación. Por ejemplo, ya que $(12)(0.019) = 0.228$, se sabe que el último ejemplo es correcto.

Los problemas que implican una división con decimal son más fáciles de manejar si se cambia el problema a uno equivalente que tenga un número entero por divisor. Considere los siguientes ejemplos en los cuales el problema original fue cambiado por una forma de fracción para mostrar el razonamiento detrás del procedimiento.

$$0.6\overline{)0.24} \rightarrow \frac{0.24}{0.6} = \left(\frac{0.24}{0.6}\right)\left(\frac{10}{10}\right) = \frac{2.4}{6} \rightarrow \begin{array}{r} 0.4 \\ 6\overline{)2.4} \end{array}$$

$$0.12\overline{)0.156} \rightarrow \frac{0.156}{0.12} = \left(\frac{0.156}{0.12}\right)\left(\frac{100}{100}\right) = \frac{15.6}{12} \rightarrow \begin{array}{r} 1.3 \\ 12\overline{)15.6} \\ \underline{12} \\ 3\,6 \\ \underline{3\,6} \end{array}$$

$$1.3\overline{)0.026} \rightarrow \frac{0.026}{1.3} = \left(\frac{0.026}{1.3}\right)\left(\frac{10}{10}\right) = \frac{0.26}{13} \rightarrow \begin{array}{r} 0.02 \\ 13\overline{)0.26} \\ \underline{26} \end{array}$$

El formato comúnmente usado para problemas similares es el siguiente:

$$0.21\overline{)1.176} \rightarrow \begin{array}{r} 5.6 \\ 0_{x}21.\overline{)1_{x}17.6} \\ \underline{1\,05} \\ 12\,6 \\ \underline{12\,6} \end{array}$$

Las flechas indican que el divisor y el dividendo fueron multiplicados por 100, lo cual cambia el divisor a un número entero

$$3.7\overline{)0.148} \rightarrow \begin{array}{r} 0.04 \\ 3_{x}7.\overline{)0_{x}1.48} \\ \underline{1\,48} \end{array}$$

El divisor y el dividendo fueron multiplicados por 10

División de un número decimal entre un número decimal

En general, para dividir un número entre un número decimal: (1) se multiplica el divisor por una potencia de 10 para cambiarlo a un número entero y (2) se multiplica el dividendo también por la misma potencia de 10.

Lo acordado para operar con números positivos y negativos se extiende a todos los números reales. Por ejemplo, el producto de dos números reales negativo es un número real positivo. Asegúrese de estar de acuerdo con los siguientes resultados. (Puede necesitar hacer algunas operaciones en otra hoja de papel ya que no se muestran los pasos).

$0.24 + (-0.18) = 0.06$	$(-0.4)(0.8) = -0.32$
$-7.2 + 5.1 = -2.1$	$(-0.5)(-0.13) = 0.065$
$-0.6 + (-0.8) = -1.4$	$(1.4) \div (-0.2) = -7$
$2.4 - 6.1 = -3.7$	$(-0.18) \div (0.3) = -0.6$
$0.31 - (-0.52) = 0.83$	$(-0.24) \div (-4) = 0.06$
$(0.2)(-0.3) = -0.06$	

Las expresiones numéricas y algebraicas pueden contener la forma decimal así como la de fracción. Se continuará siguiendo el acuerdo de que las multiplicaciones y divisiones se hacen *primero* y después las sumas y las restas, a menos que un paréntesis indique lo contrario. Los siguientes ejemplos ilustran una variedad de situaciones que implican tanto la forma decimal como la de fracción de números racionales.

Ejemplo de salón de clases
Simplificar $5.6 \div (-8) + 3(4.2) - (0.28) \div (-0.7)$.

EJEMPLO 1 Simplificar $3 \div 7 + (4)(2.1) - (0.24) \div (-0.4)$.

Solución

$$\begin{aligned}6.3 \div 7 + (4)(2.1) - (0.24) \div (-0.4) &= 0.9 + 8.4 - (-0.6)\\ &= 0.9 + 8.4 + 0.6\\ &= 9.9\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Evaluar $\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}y$ para $x = \frac{3}{7}$ y $y = -2$.

EJEMPLO 2 Evaluar $\frac{3}{5}a - \frac{1}{7}b$ para $a = \frac{5}{2}$ y $b = -1$.

Solución

$$\begin{aligned}\frac{3}{5}a - \frac{1}{7}b &= \frac{3}{5}\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{1}{7}(-1) \quad \text{para } a = \frac{5}{2} \text{ y } b = -1\\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{7}\\ &= \frac{21}{14} + \frac{2}{14}\\ &= \frac{23}{14}\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Evaluar $\frac{3}{4}a + \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}a$ para $a = -\frac{5}{14}$.

EJEMPLO 3 Evaluar $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x - \frac{1}{5}x$ para $x = -\frac{3}{4}$.

Solución

Primero, agrupar los términos similares usando la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x - \frac{1}{5}x &= \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right)x\\ &= \left(\frac{15}{30} + \frac{20}{30} - \frac{6}{30}\right)x\\ &= \frac{29}{30}x\end{aligned}$$

Ahora se puede evaluar.

$$\begin{aligned}\frac{29}{30}x &= \frac{29}{30}\left(-\frac{3}{4}\right) \quad \text{cuando } x = -\frac{3}{4}\\ &= \frac{29}{\underset{10}{\cancel{30}}}\left(-\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{4}\right) = -\frac{29}{40}\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Evaluar $4a + 5b$ para $a = 2.3$ y $b = 1.4$.

EJEMPLO 4 Evaluar $2x + 3y$ para $x = 1.6$ y $y = 2.7$.

Solución

$$\begin{aligned}2x + 3y &= 2(1.6) + 3(2.7) \quad \text{cuando } x = 1.6 \text{ y } y = 2.7\\ &= 3.2 + 8.1 = 11.3\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Evaluar $1.5d - 0.8d + 0.5d + 0.2d$ para $d = 0.4$.

EJEMPLO 5 Evaluar $0.9x + 0.7x - 0.4x + 1.3x$ para $x = 0.2$.

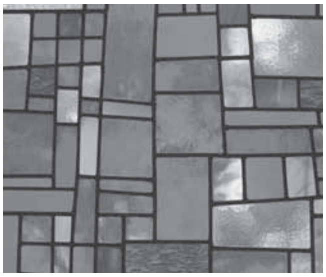
Solución

Primero, combine los términos usando la propiedad distributiva.

$$0.9x + 0.7x - 0.4x + 1.3x = (0.9 + 0.7 - 0.4 + 1.3)x = 2.5x$$

Ahora se puede evaluar.

$$\begin{aligned} 2.5x &= (2.5)(0.2) \quad \text{para } x = 0.2 \\ &= 0.5 \end{aligned}$$



Philip Meyer/Shutterstock.com

Ejemplo de salón de clases
Una artista está juntando un grupo de imágenes. Tiene cuatro imágenes cuyas longitudes son: 1.35 cm, 2.6 cm, 5.45 cm y 3.2 cm. Si las imágenes se ponen lado a lado, ¿cuál será su longitud combinada?

EJEMPLO 6 **Aplique su habilidad**

Una artista de vidrio pintado está armando un diseño. Tiene cinco piezas de vidrio cuyas longitudes son 2.4 cm, 3.26 cm, 1.35 cm, 4.12 cm y 0.7 cm. Si las piezas están puestas lado a lado, ¿cuál será su longitud combinada?

Solución

Para hallar la longitud combinada, se necesita sumar las longitudes.

$$\begin{array}{r} 2.4 \\ 3.26 \\ +\ 1.35 \\ 4.12 \\ \underline{0.7} \\ 11.83 \end{array}$$

La longitud será de 11.83 centímetros.

Examen de conceptos 2.3

Para los problemas 1-10, responda falso o verdadero.

1. Un número racional puede ser definido como cualquier número que tenga representación de decimales terminales o repetitivos.
2. Un decimal repetitivo es un bloque de dígitos que se repiten una sola vez.
3. Todo número irracional se puede clasificar como número real.
4. Los números racionales, junto con los irracionales, forman el conjunto de números naturales.
5. 0.141414 . . . es un número racional
6. $-\sqrt{5}$ es real, irracional y negativo.
7. 0.35 es real, racional, integral y positivo.
8. El recíproco de c, donde $c \neq 0$, también es el inverso multiplicativo de c.
9. Cualquier número multiplicado por su inverso multiplicativo da como resultado 0.
10. Cero no tiene un inverso multiplicativo.

Conjunto de problemas 2.3

Para los problemas 1-8, clasificar los números reales como racionales o irracionales. Clasificar además los números racionales como enteros o no enteros. (Objetivo 1)

1. -2
2. $1/3$
3. $\sqrt{5}$
4. $-0.09090909\ldots$
5. 0.16
6. $-\sqrt{3}$
7. $-8/7$
8. 0.125

Para los problemas 9-40, realizar las operaciones indicadas. (Objetivo 2)

9. $0.37 + 0.25$
10. $7.2 + 4.9$
11. $2.93 - 1.48$
12. $14.36 - 5.89$
13. $(7.6) + (-3.8)$
14. $(6.2) + (-2.4)$
15. $(-4.7) + 1.4$
16. $(-14.1) + 9.5$
17. $-3.8 + 11.3$
18. $-2.5 + 14.8$
19. $6.6 - (-1.2)$
20. $18.3 - (-7.4)$
21. $-11.5 - (-10.6)$
22. $-14.6 - (-8.3)$
23. $-17.2 - (-9.4)$
24. $-21.4 - (-14.2)$
25. $(0.4)(2.9)$
26. $(0.3)(3.6)$
27. $(-0.8)(0.34)$
28. $(-0.7)(0.67)$
29. $(9)(-2.7)$
30. $(8)(-7.6)$
31. $(-0.7)(-64)$
32. $(-0.9)(-56)$
33. $(-0.12)(-0.13)$
34. $(-0.11)(-0.15)$
35. $1.56 \div 1.3$
36. $7.14 \div 2.1$
37. $5.92 \div (-0.8)$
38. $-2.94 \div 0.6$
39. $-0.266 \div (-0.7)$
40. $-0.126 \div (-0.9)$

Para los problemas 41-54, simplificar cada expresión numérica. (Objetivo 2)

41. $16.5 - 18.7 + 9.4$
42. $17.7 + 21.2 - 14.6$
43. $0.34 - 0.21 - 0.74 + 0.19$
44. $-5.2 + 6.8 - 4.7 - 3.9 + 1.3$
45. $0.76(0.2 + 0.8)$
46. $9.8(1.8 - 0.8)$
47. $0.6(4.1) + 0.7(3.2)$
48. $0.5(74) - 0.9(87)$
49. $7(0.6) + 0.9 - 3(0.4) + 0.4$
50. $-5(0.9) - 0.6 + 4.1(6) - 0.9$
51. $(0.96) \div (-0.8) + 6(-1.4) - 5.2$
52. $(-2.98) \div 0.4 - 5(-2.3) + 1.6$
53. $5(2.3) - 1.2 - 7.36 \div 0.8 + 0.2$
54. $0.9(12) \div 0.4 - 1.36 \div 17 + 9.2$

Para los problemas 55-68, simplificar cada expresión algebraica agrupar términos similares. (Objetivo 3)

55. $x - 0.4x - 1.8x$
56. $-2x + 1.7x - 4.6x$
57. $5.4n - 0.8n - 1.6n$
58. $6.2n - 7.8n - 1.3n$
59. $-3t + 4.2t - 0.9t + 0.2t$
60. $7.4t - 3.9t - 0.6t + 4.7t$
61. $3.6x - 7.4y - 9.4x + 10.2y$
62. $5.7x + 9.4y - 6.2x - 4.4y$
63. $0.3(x - 4) + 0.4(x + 6) - 0.6x$
64. $0.7(x + 7) - 0.9(x - 2) + 0.5x$
65. $6(x - 1.1) - 5(x - 2.3) - 4(x + 1.8)$
66. $4(x + 0.7) - 9(x + 0.2) - 3(x - 0.6)$
67. $5(x - 0.5) + 0.3(x - 2) - 0.7(x + 7)$
68. $-8(x - 1.2) + 6(x - 4.6) + 4(x + 1.7)$

Para los problemas 69-82, evaluar cada expresión algebraica para los valores dados de la variable. No olvide que para algunos problemas puede ser de utilidad combinar términos similares antes de evaluar. (Objetivo 4)

69. $x + 2y + 3z$ para $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{1}{3}$, y $z = -\frac{1}{6}$
70. $2x - y - 3z$ para $x = -\frac{2}{5}$, $y = -\frac{3}{4}$, y $z = \frac{1}{2}$
71. $\frac{3}{5}y - \frac{2}{3}y - \frac{7}{15}y$ para $y = -\frac{5}{2}$
72. $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}x$ para $x = \frac{7}{8}$
73. $-x - 2y + 4z$ para $x = 1.7$, $y = -2.3$, y $z = 3.6$

74. $-2x + y - 5z$ para $x = -2.9$, $y = 7.4$, y $z = -6.7$

75. $5x - 7y$ para $x = -7.8$ y $y = 8.4$

76. $8x - 9y$ para $x = -4.3$ y $y = 5.2$

77. $0.7x + 0.6y$ para $x = -2$ y $y = 6$

78. $0.8x + 2.1y$ para $x = 5$ y $y = -9$

79. $1.2x + 2.3x - 1.4x - 7.6x$ para $x = -2.5$

80. $3.4x - 1.9x + 5.2x$ para $x = 0.3$

81. $-3a - 1 + 7a - 2$ para $a = 0.9$

82. $5x - 2 + 6x + 4$ para $x = -1.1$

83. Consulte la siguiente tabla (Figura 2.7) para responder las preguntas:

(a) En millas por hora, ¿qué tanto es más rápido un caballo que un humano?

(b) En millas por hora, ¿qué tanto es más rápido un galgo que una araña?

(c) ¿La velocidad de una araña es cuántas veces más rápida que la velocidad de un caracol?

(d) ¿La velocidad de un humano es cuántas veces más rápida que la velocidad de una araña? (Redondear las respuestas).

Velocidades de animales

Animal	Velocidad máxima en millas por hora
Caballo cuarto de milla	47.5
Galgo	39.35
Humano	27.89
Araña	1.17
Caracol	0.03

Figura 2.7

84. Cierta medicina pediátrica se da en la proporción de 0.15 ml por libra de peso corporal. ¿Cuántos mililitros de medicina debe administrar una enfermera a un bebé que pesa 22 libras?

85. Tanya compró 400 acciones de una cuenta en \$14.78 por acción, y 250 de otra cuenta por \$16.36 por acción. ¿Cuánto pagó por las 650 acciones?

86. En un viaje, Brent compró las siguientes cantidades de gasolina: 9.7 galones, 12.3 galones, 14.6 galones, 12.2 galones, 13.8 galones y 15.5 galones. ¿Cuántos galones de gasolina compró en el viaje?

87. Kathrin tiene una pieza de tubería de cobre con 76.4 cm. de largo. Necesita cortarla en cuatro piezas del mismo largo. Hallar el largo de cada pieza.

88. En un viaje, Biance llenó el tanque de gasolina y notó que el odómetro marcaba 24, 876.2 millas. Después de la siguiente vez que llenó el tanque, el odómetro marcaba 25, 170.5 millas. Fueron necesarios 13.5 galones de gasolina para llenar el tanque. ¿Cuántas millas por galón obtuvo en ese tanque de gasolina?

89. La longitud total de cuatro lados de un cuadrado es de 18.8 cm. ¿Qué tan largo es cada lado?

90. Cuando el mercado de valores abrió el lunes por la mañana, Garth compró acciones de una cuenta a \$13.25 por acción. Los cambios diarios en el mercado para esa acción durante la semana fueron 0.75, -1.50, 2.25, -25 y -50. ¿Cuál fue el valor de una acción de esa cuenta cuando el mercado cerró el viernes por la tarde?

91. Victoria compró dos libras de manzanas Gala por \$1.79 la libra, y tres libras de manzanas Fuji por \$.99 por libra. ¿Cuánto gastó en manzanas?

92. En 2011, el promedio del ganador de Daytona 500 era de 130.326 millas por hora. En 1978, el promedio del ganador era 159.73 millas por hora. ¿Qué tanto fue más rápido el promedio de velocidad del ganador en 1978 comparado con el de 2011?

93. El promedio del tanque del automóvil de Andrea es de 25.4 millas por galón. Con este promedio de rendimiento, ¿qué distancia puede cubrir con 12.7 galones en el tanque?

94. Use una calculadora para revisar sus respuestas a los problemas 41-54.

Pensamientos en palabras

95. En este punto del curso, ¿cómo describiría la diferencia entre aritméticca y álgebra?

96. ¿Cómo se han usado las propiedades de los números reales hasta este punto de su estudio de aritmética y álgebra?

97. ¿Cree que $2\sqrt{2}$ es un número racional o irracional? Justifique su respuesta.

Más investigación

98. Sin hacer la división, justifique la oración "$\frac{1}{7}$ produce un decimal repetitivo". (Pista: Piense en los posibles residuos al dividir entre 7).

99. Exprese cada una de las siguientes fracciones en forma de decimal repetitivo.

(a) $\frac{1}{7}$ **(b)** $\frac{2}{7}$

(c) $\frac{4}{9}$ **(d)** $\frac{5}{6}$

(e) $\frac{3}{11}$ **(f)** $\frac{1}{12}$

100. **(a)** ¿Cómo se sabe que $\frac{5}{16}$ dará como resultado un decimal terminal?

(b) ¿Cómo se sabe que $\frac{7}{15}$ no dará como resultado un decimal terminal?

(c) Determine cuál de los siguientes expreciones decimales producirá un decimal terminal:
$\frac{7}{8}, \frac{11}{16}, \frac{5}{12}, \frac{7}{24}, \frac{11}{75}, \frac{13}{32}, \frac{17}{40}, \frac{11}{30}, \frac{9}{20}, \frac{3}{64}$.

Respuestas del examen de conceptos

1. Verdadero **2.** Falso **3.** Verdadero **4.** Falso **5.** Verdadero **6.** Verdadero **7.** Falso
8. Verdadero **9.** Falso **10.** Verdadero

2.4 Exponentes

OBJETIVOS

1. Saber la definición y terminología de la notación exponencial
2. Simplificar expresiones numéricas que incluyen exponentes
3. Simplificar expresiones numéricas agrupar términos similares
4. Reducir fracciones algebraicas que incluyen exponentes
5. Adicionar, substraer, multiplicar y dividir fracciones algebraicas
6. Evaluar expresiones algebraicas que incluyen exponentes

Los exponentes se utilizan para indicar multiplicación repetida. Por ejemplo, puede escribir $5 \cdot 5 \cdot 5$ como 5^3, donde el "3 elevado" indica que 5 se usa como factor 3 veces. La siguiente definición general es útil.

Definición 2.4

Si n es un entero positivo y b es cualquier número real, entonces

$$b^n = \underbrace{bbb \ldots b}_{n \text{ factores de } b}$$

A b se le conoce como la **base** y a n como el **exponente**. La expresión b^n se puede leer "b a la n-ésima **potencia**". Por lo general los términos al **cuadrado** y al **cubo** se asocian con los exponentes 2 y 3, respectivamente. Por ejemplo, b^2 se lee "b al cuadrado" y b^3 como "b al cubo". Un exponente de 1 usualmente no se escribe, de modo que b^1 se escribe como b. Los siguientes ejemplos aclaran el concepto de un exponente.

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ $\qquad$ $(0.6)^2 = (0.6)(0.6) = 0.36$

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

$(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$ $\qquad$ $-5^2 = -(5 \cdot 5) = -25$

Preste especial atención a los últimos dos ejemplos. Observe que $(-5)^2$ significa que -5 es la base y se usa como factor dos veces. Sin embargo, -5^2 significa que 5 es la base y que, después de elevar al cuadrado, se toma el opuesto de dicho resultado.

Los exponentes proporcionan una manera de escribir expresiones algebraicas de manera compacta. A veces necesitamos cambiar de la forma compacta a la expandida, como estos ejemplos demuestran.

$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$ $\qquad$ $(2x)^3 = (2x)(2x)(2x)$

$2y^3 = 2 \cdot y \cdot y \cdot y$ $\qquad$ $(-2x)^3 = (-2x)(-2x)(-2x)$

$-3x^5 = -3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ $\qquad$ $-x^2 = -(x \cdot x)$

$a^2 + b^2 = a \cdot a + b \cdot b$

En otras ocasiones, se necesita cambiar de la forma expandida a la compacta usando la notación exponencial.

$$3 \cdot x \cdot x = 3x^2$$
$$2 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot x = 10x^3$$
$$3 \cdot 4 \cdot x \cdot x \cdot y = 12x^2y$$
$$7 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b = 7a^3b^2$$
$$(2x)(3y) = 2 \cdot x \cdot 3 \cdot y = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot y = 6xy$$
$$(3a^2)(4a) = 3 \cdot a \cdot a \cdot 4 \cdot a = 3 \cdot 4 \cdot a \cdot a \cdot a = 12a^3$$
$$(-2x)(3x) = -2 \cdot x \cdot 3 \cdot x = -2 \cdot 3 \cdot x \cdot x = -6x^2$$

Las propiedades conmutativas y asociativas de la multiplicación permiten reordenar y reagrupar los factores en los últimos tres ejemplos.

El concepto de exponente puede ser usado para extender nuestro trabajo combinando términos similares, trabajando con fracciones y evaluando expresiones algebraicas. Estudie los siguientes ejemplos de manera cuidadosa; le ayudarán a concretar muchas ideas.

Ejemplo de salón de clases
Simplificar $5y^3 + 4y^3 - 3y^3$ combinando términos similares.

EJEMPLO 1 Simplificar $4x^2 + 7x^2 - 2x^2$ agrupar términos similares.

Solución

Aplicando la propiedad distributiva, se obtiene:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 7x^2 - 2x^2 &= (4 + 7 - 2)x^2 \\ &= 9x^2 \end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Simplificar $6m^2 - 5n^3 + 2m^2 - 12n^3$ combinando términos similares.

EJEMPLO 2

Simplificar $28x^3 + 9y^2 + 4x^3 - 11y^2$ agrupar términos similares.

Solución

Al reordenar los términos y aplicar la propiedad distributiva se obtiene:

$$\begin{aligned} -8x^3 + 9y^2 + 4x^3 - 11y^2 &= -8x^3 + 4x^3 + 9y^2 - 11y^2 \\ &= (-8 + 4)x^3 + (9 - 11)y^2 \\ &= -4x^3 - 2y^2 \end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Simplificar $6a^4 - 7a - 7a^4 + 5a$.

EJEMPLO 3 Simplificar $-7x^2 + 4x + 3x^2 - 9x$.

Solución

$$\begin{aligned} -7x^2 + 4x + 3x^2 - 9x &= -7x^2 + 3x^2 + 4x - 9x \\ &= (-7 + 3)x^2 + (4 - 9)x \\ &= -4x^2 - 5x \end{aligned}$$

Tan pronto como se sienta cómodo con este proceso de agrupación de términos similares, tal vez quiera realizar los pasos mentalmente. Entonces podría ir de modo directo de la expresión dada a la forma simplificada, como se muestra:

$$9a^2 + 6a^2 - 12a^2 = 3a^2$$
$$6x^2 + 7y^2 - 3x^2 - 11y^2 = 3x^2 - 4y^2$$
$$7x^2y + 5xy^2 - 9x^2y + 10xy^2 = -2x^2y + 15xy^2$$
$$2x^3 - 5x^2 - 10x - 7x^3 + 9x^2 - 4x = -5x^3 + 4x^2 - 14x$$

Los siguientes dos ejemplos ilustran el uso de los exponentes para reducir fracciones.

Ejemplo de salón de clases
Reducir $\dfrac{15m^3n}{18m^2n}$.

EJEMPLO 4 Reducir $\dfrac{8x^2y}{12xy}$.

Solución

$$\frac{8x^2y}{12xy} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot \cancel{y}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 3 \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{y}} = \frac{2x}{3}$$

Ejemplo de salón de clases
Reducir $\dfrac{12x^4y}{20x^2y^3}$.

EJEMPLO 5 Reducir $\dfrac{15a^2b^3}{25a^3b}$.

Solución

$$\frac{15a^2b^3}{25a^3b} = \frac{3 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{b} \cdot b \cdot b}{\cancel{5} \cdot 5 \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot \cancel{b}} = \frac{3b^2}{5a}$$

Los siguientes tres ejemplos muestran cómo se pueden usar los exponentes al multiplicar y dividir fracciones.

Ejemplo de salón de clases
Multiplicar $\left(\dfrac{6m^2}{5n^2}\right)\left(\dfrac{8n^3}{9m^3}\right)$ y expresar la respuesta en su forma reducida.

EJEMPLO 6 Multiplicar $\left(\dfrac{4x}{6y}\right)\left(\dfrac{12y^2}{7x^2}\right)$ y expresar la respuesta en su forma reducida.

Solución

$$\left(\frac{4x}{6y}\right)\left(\frac{12y^2}{7x^2}\right) = \frac{4 \cdot \overset{2}{\cancel{12}} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{y} \cdot y}{\cancel{6} \cdot 7 \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{x} \cdot x} = \frac{8y}{7x}$$

Ejemplo de salón de clases
Multiplicar y simplificar $\left(\dfrac{6x^5}{14y^3}\right)\left(\dfrac{10y^4}{12x^3}\right)$.

EJEMPLO 7 Multiplicar y simplificar $\left(\dfrac{8a^3}{9b}\right)\left(\dfrac{12b^2}{16a}\right)$.

Solución

$$\left(\frac{8a^3}{9b}\right)\left(\frac{12b^2}{16a}\right) = \frac{\cancel{8} \cdot \overset{\overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{12}} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a \cdot \cancel{b} \cdot b}{\underset{3}{\cancel{9}} \cdot \underset{\cancel{2}}{\cancel{16}} \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{a}} = \frac{2a^2b}{3}$$

Ejemplo de salón de clases

Dividir y expresar de manera reducida $\frac{-3a^2}{4b^3} \div \frac{7}{12ab}$.

EJEMPLO 8

Dividir y expresar de manera reducida $\frac{-2x^3}{3y^2} \div \frac{4}{9xy}$.

Solución

$$\frac{-2x^3}{3y^2} \div \frac{4}{9xy} = -\frac{2x^3}{3y^2} \cdot \frac{9xy}{4} = -\frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \cancel{y}}{\cancel{3} \cdot \underset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{y} \cdot y} = -\frac{3x^4}{2y}$$

Los siguientes dos ejemplos demuestran el uso de exponentes al hallar la suma y la resta de fracciones.

Ejemplo de salón de clases

Sumar $\frac{3}{y} + \frac{8}{y^2}$.

EJEMPLO 9

Hallar la suma $\frac{4}{x^2} + \frac{7}{x}$.

Solución

El MCD es x^2. Así,

$$\frac{4}{x^2} + \frac{7}{x} = \frac{4}{x^2} + \frac{7 \cdot x}{x \cdot x} = \frac{4}{x^2} + \frac{7x}{x^2} = \frac{4 + 7x}{x^2}$$

Ejemplo de salón de clases

Restar $\frac{2}{mn} - \frac{5}{n^2}$.

EJEMPLO 10

Hallar la resta $\frac{3}{xy} - \frac{4}{y^2}$.

Solución

$$\left.\begin{aligned} xy &= x \cdot y \\ y^2 &= y \cdot y \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad \text{El MDC es } xy^2$$

$$\frac{3}{xy} - \frac{4}{y^2} = \frac{3 \cdot y}{xy \cdot y} - \frac{4 \cdot x}{y^2 \cdot x} = \frac{3y}{xy^2} - \frac{4x}{xy^2}$$

$$= \frac{3y - 4x}{xy^2}$$

Recuerde que los exponentes se usan para indicar multiplicación repetida. Por ende, para simplificar expresiones numéricas conteniendo exponentes, se procede de la siguiente manera:

1. Realizar las operaciones dentro de los símbolos de inclusión (paréntesis y corchetes) y arriba y abajo de cada barra de fracción. Comenzar con el símbolo de inclusión más interno.
2. Computar todos los poderes indicados.
3. Realizar todas las multiplicaciones y divisiones en el orden que aparecen de izquierda a derecha.
4. Realizar las adiciones y substracciones en el orden que aparecen de izquierda a derecha.

Tenga estos pasos en su mente conforme se evalúan algunas expresiones algebraicas que contengan exponentes.

Ejemplo de salón de clases
Evaluar $5a^2 - 3b^2$ para $a = 4$ y $b = -6$.

EJEMPLO 11 Evaluar $3x^2 - 4y^2$ para $x = -2$ y $y = 5$.

Solución

$$\begin{aligned} 3x^2 - 4y^2 &= 3(-2)^2 - 4(5)^2 \quad \text{cuando } x = -2 \text{ y } y = 5 \\ &= 3(-2)(-2) - 4(5)(5) \\ &= 12 - 100 \\ &= -88 \end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Hallar el valor de $x^2 - y^2$ para $x = \frac{1}{4}$ y $y = -\frac{1}{2}$.

EJEMPLO 12 Hallar el valor de $a^2 - b^2$ cuando $a = \frac{1}{2}$ y $b = -\frac{1}{3}$.

Solución

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \quad \text{cuando } a = \frac{1}{2} \text{ y } b = -\frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{9} \\ &= \frac{9}{36} - \frac{4}{36} \\ &= \frac{5}{36} \end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Evaluar $7c^2 + 2cd$ para $c = 0.5$ y $d = -0.2$.

EJEMPLO 13 Evaluar $5x^2 + 4xy$ para $x = 0.4$ y $y = -0.3$

Solución

$$\begin{aligned} 5x^2 + 4xy &= 5(0.4)^2 + 4(0.4)(-0.3) \quad \text{cuando } x = 0.4 \text{ y } y = -0.3 \\ &= 5(0.16) + 4(-0.12) \\ &= 0.80 + (-0.48) \\ &= 0.32 \end{aligned}$$

Examen de conceptos 2.4

Para los problemas 1-10, responda falso o verdadero.

1. Los exponentes se usan para indicar sumas repetidas.
2. En la expresión b^n, b es llamado "la base" y n es llamada "el número".
3. El término "cubo" se asocia con un exponente de tres.
4. Para el término $3x$, el exponente en la x es uno.
5. En la expresión $(-4)^3$, la base es 4.
6. En la expresión -4^3, la base es 4.
7. El cambio de la notación expandida a la exponencial implica: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot a \cdot b \cdot b = 5^3ab$.
8. Cuando se simplifica $2x^3 + 5x^3$, el resultado es $7x^6$.
9. El mínimo común múltiplo de xy^2 es x^2y^3 es x^2y^3.
10. El término "cuadrado" se asocia con un exponente de dos.

Conjunto de problemas 2.4

Para los problemas 1-20, hallar el valor de cada expresión numérica. Por ejemplo, $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. (Objetivo 2)

1. 2^6
2. 2^7
3. 3^4
4. 4^3
5. $(-2)^3$
6. $(-2)^5$
7. -3^2
8. -3^4
9. $(-4)^2$
10. $(-5)^4$
11. $\left(\frac{2}{3}\right)^4$
12. $\left(\frac{3}{4}\right)^3$
13. $-\left(\frac{1}{2}\right)^3$
14. $-\left(\frac{3}{2}\right)^3$
15. $\left(-\frac{3}{2}\right)^2$
16. $\left(-\frac{4}{3}\right)^2$
17. $(0.3)^3$
18. $(0.2)^4$
19. $-(1.2)^2$
20. $-(1.1)^2$

Para los problemas 21-40, simplificar cada expresión numérica. (Objetivo 2)

21. $3^2 + 2^3 - 4^3$
22. $2^4 - 3^3 + 5^2$
23. $(-2)^3 - 2^4 - 3^2$
24. $(-3)^3 - 3^2 - 6^2$
25. $5(2)^2 - 4(2) - 1$
26. $7(-2)^2 - 6(-2) - 8$
27. $-2(3)^3 - 3(3)^2 + 4(3) - 6$
28. $5(-3)^3 - 4(-3)^2 + 6(-3) + 1$
29. $-7^2 - 6^2 + 5^2$
30. $-8^2 + 3^4 - 4^3$
31. $-3(-4)^2 - 2(-3)^3 + (-5)^2$
32. $-4(-3)^3 + 5(-2)^3 - (4)^2$
33. $\frac{-3(2)^4}{12} + \frac{5(-3)^3}{15}$
34. $\frac{4(2)^3}{16} - \frac{2(3)^2}{6}$
35. $\frac{3(4-2)^2}{4} + \frac{2(-1+3)^3}{4}$
36. $\frac{4(-2-3)^2}{5} - \frac{5(-1-5)^2}{6}$
37. $\frac{-5(2-3)^3}{2} - \frac{4(2-4)^3}{3}$
38. $\frac{-4(2-5)^2}{5} + \frac{3(-1-6)}{2}$
39. $\frac{2 - 3[(4-5)^2 + 1]}{(3-1)^2}$
40. $\frac{-3 - 2[(3-5)^2 - 2]}{(-2-1)^2}$

Para los problemas 41-52, usar exponentes para expresar cada expresión algebraica de manera compacta. Por ejemplo, $3 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y = 15x^2y$ y $(3x)(2x^2) = 6x^3$. (Objetivo 3)

41. $9 \cdot x \cdot x$
42. $8 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y$
43. $3 \cdot 4 \cdot x \cdot y \cdot y$
44. $7 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b$
45. $-2 \cdot 9 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y$
46. $-3 \cdot 4 \cdot x \cdot y \cdot z \cdot z$
47. $(5x)(3y)$
48. $(3x^2)(2y)$
49. $(6x^2)(2x^2)$
50. $(-3xy)(6xy)$
51. $(-4a^2)(-2a^3)$
52. $(-7a^3)(-3a)$

Para los problemas 53-64, simplificar cada expresión agrupando términos similares. (Objetivo 3)

53. $3x^2 - 7x^2 - 4x^2$
54. $-2x^3 + 7x^3 - 4x^3$
55. $-12y^3 + 17y^3 - y^3$
56. $-y^3 + 8y^3 - 13y^3$
57. $7x^2 - 2y^2 - 9x^2 + 8y^2$
58. $5x^3 + 9y^3 - 8x^3 - 14y^3$
59. $\frac{2}{3}n^2 - \frac{1}{4}n^2 - \frac{3}{5}n^2$
60. $-\frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{6}n^2 - \frac{4}{9}n^2$
61. $5x^2 - 8x - 7x^2 + 2x$
62. $-10x^2 + 4x + 4x^2 - 8x$
63. $x^2 - 2x - 4 + 6x^2 - x + 12$
64. $-3x^3 - x^2 + 7x - 2x^3 + 7x^2 - 4x$

Para los problemas 65-74, reducir cada fracción a su forma más simple. (Objetivo 4)

65. $\frac{9xy}{15x}$
66. $\frac{8x^2y}{14x}$
67. $\frac{22xy^2}{6xy^3}$
68. $\frac{18x^3y}{12xy^4}$
69. $\frac{7a^2b^3}{17a^3b}$
70. $\frac{9a^3b^3}{22a^4b^2}$

71. $\dfrac{-24abc^2}{32bc}$

72. $\dfrac{4a^2c^3}{-22b^2c^4}$

73. $\dfrac{-5x^4y^3}{-20x^2y}$

74. $\dfrac{-32xy^2z^4}{-48x^3y^3z}$

Para los problemas 75-92, realizar las operaciones indicadas y expresar las respuestas en su forma reducida. **(Objetivo 5)**

75. $\left(\dfrac{7x^2}{9y}\right)\left(\dfrac{12y}{21x}\right)$

76. $\left(\dfrac{3x}{8y^2}\right)\left(\dfrac{14xy}{9y}\right)$

77. $\left(\dfrac{5c}{a^2b^2}\right) \div \left(\dfrac{12c}{ab}\right)$

78. $\left(\dfrac{13ab^2}{12c}\right) \div \left(\dfrac{26b}{14c}\right)$

79. $\dfrac{6}{x} + \dfrac{5}{y^2}$

80. $\dfrac{8}{y} - \dfrac{6}{x^2}$

81. $\dfrac{5}{x^4} - \dfrac{7}{x^2}$

82. $\dfrac{9}{x} - \dfrac{11}{x^3}$

83. $\dfrac{3}{2x^3} + \dfrac{6}{x}$

84. $\dfrac{5}{3x^2} + \dfrac{6}{x}$

85. $\dfrac{-5}{4x^2} + \dfrac{7}{3x^2}$

86. $\dfrac{-8}{5x^3} + \dfrac{10}{3x^3}$

87. $\dfrac{11}{a^2} - \dfrac{14}{b^2}$

88. $\dfrac{9}{x^2} + \dfrac{8}{y^2}$

89. $\dfrac{1}{2x^3} - \dfrac{4}{3x^2}$

90. $\dfrac{2}{3x^3} - \dfrac{5}{4x}$

91. $\dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{y} - \dfrac{5}{xy}$

92. $\dfrac{5}{x} + \dfrac{7}{y} - \dfrac{1}{xy}$

Para los problemas 93-106, evaluar cada expresión algebraica para los valores dados a las variables. **(Objetivo 6)**

93. $4x^2 + 7y^2$ para $x = -2$ y $y = -3$

94. $5x^2 + 2y^3$ para $x = -4$ y $y = -1$

95. $3x^2 - y^2$ para $x = \dfrac{1}{2}$ y $y = -\dfrac{1}{3}$

96. $x^2 - 2y^2$ para $x = -\dfrac{2}{3}$ y $y = \dfrac{3}{2}$

97. $x^2 - 2xy + y^2$ para $x = -\dfrac{1}{2}$ y $y = 2$

98. $x^2 + 2xy + y^2$ para $x = -\dfrac{3}{2}$ y $y = -2$

99. $-x^2$ para $x = -8$

100. $-x^3$ para $x = 5$

101. $-x^2 - y^2$ para $x = -3$ y $y = -4$

102. $-x^2 + y^2$ para $x = -2$ y $y = 6$

103. $-a^2 - 3b^3$ para $a = -6$ y $b = -1$

104. $-a^3 + 3b^2$ para $a = -3$ y $b = -5$

105. $y^2 - 3xy$ para $x = 0.4$ y $y = -0.3$

106. $x^2 + 5xy$ para $x = -0.2$ y $y = -0.6$

107. Usar la calculadora para verificar sus respuestas a los problemas 1-40.

Pensamientos en palabras

108. Su amigo sigue obteniendo 16 al simplificar -2^4. ¿Qué error está cometiendo y cómo podría ayudarlo?

109. Explique cómo simplificaría $\dfrac{12x^2y}{18xy}$.

Respuestas del examen de conceptos

1. Verdadero **2.** Falso **3.** Verdadero **4.** Verdadero **5.** Falso **6.** Verdadero **7.** Falso
8. Falso **9.** Verdadero **10.** Verdadero

2.5 Traducción del español al álgebra

OBJETIVOS

1. Traducir expresiones algebraicas a frases en español
2. Traducir frases en español a expresiones algebraicas
3. Escribir expresiones algebraicas para convertir unidades de medida dentro de un sistema

Para usar las herramientas de álgebra y resolver problemas, debe poder traducir del español al álgebra y viceversa. En esta sección aprenderá a traducir expresiones algebraicas a frases en español y frases en español a expresiones algebraicas. Comencemos traduciendo algunas expresiones algebraicas a frases en español.

Expresión algebraica	Frase en español
$x + y$	La suma de x y y
$x - y$	La diferencia de x y y
$y - x$	La diferencia de y y x
xy	El producto de x y y
$\frac{x}{y}$	El cociente de x y y
$3x$	El producto de 3 y x
$x^2 + y^2$	La adición de x al cuadrado y y al cuadrado
$2xy$	El producto de 2, x y y
$2(x + y)$	Dos veces la cantidad de x más y
$x - 3$	Tres menos que x

Ahora considere el reverso del proceso: traducir de frases en español a expresiones algebraicas. Parte de la dificultad en traducir del español al álgebra es que diferentes frases pueden traducirse a la misma expresión algebraica. Así que es necesario familiarizarse con diferentes formas de decir lo mismo, especialmente cuando nos referimos a las cuatro operaciones fundamentales. Los siguientes ejemplos pueden servirle para familiarizarlo con algunas de las frases usadas en las operaciones básicas.

$$\begin{bmatrix} \text{La suma de } x \text{ y } 4 \\ x \text{ más } 4 \\ x \text{ incrementado en } 4 \\ 4 \text{ sumado a } x \\ 4 \text{ más que } x \end{bmatrix} \longrightarrow x + 4$$

$$\begin{bmatrix} \text{La diferencia de } n \text{ y } 5 \\ n \text{ menos } 5 \\ n \text{ con } 5 \text{ menos} \\ n \text{ reducido en } 5 \\ 5 \text{ restado de } n \\ 5 \text{ menos que } n \\ \text{Restar } 5 \text{ de } n \end{bmatrix} \longrightarrow n - 5$$

$$\begin{bmatrix} \text{El producto de } 4 \text{ y } y \\ 4 \text{ veces } y \\ y \text{ multiplicado por } 4 \end{bmatrix} \longrightarrow 4y$$

$$\begin{bmatrix} \text{El cociente de } n \text{ y } 6 \\ n \text{ dividido entre } 6 \\ 6 \text{ dividiendo a } n \end{bmatrix} \longrightarrow \frac{n}{6}$$

Una frase puede indicar más de una operación. Es más, el vocabulario básico de suma, diferencia, producto y cociente puede ser reemplazado por otra terminología. Estudie las siguientes traducciones con mucho cuidado. También recuerde que la propiedad conmutativa aplica para la suma y la multiplicación, pero no para la substracción y la división. Por ende, la frase "x más y" puede ser escrita como $x + y$ o $y + x$. Sin embargo, la frase "x menos y" significa que la y debe ser sustraída de x, y la frase se escribe como "$x - y$". Así que tenga mucho cuidado con las frases que implican resta o división.

Frase en español	Expresión algebraica
La adición de dos veces x y tres veces y	$2x + 3y$
La adición de los cuadrados de a y b	$a^2 + b^2$
Cinco veces x dividido entre y	$\frac{5x}{y}$
Dos más que el cuadrado de x	$x^2 + 2$
Tres menos que el cubo de b	$b^3 - 3$
Cinco menos que el producto de x y y	$xy - 5$
Nueve menos el producto de x y y	$9 - xy$
Cuatro veces la suma de x y 2	$4(x + 2)$
Seis veces la cantidad w menos 4	$6(w - 4)$

Imagine que se le dice que la suma de dos números es 12 y que uno de los números es 8. ¿Cuál es el otro número? El otro número es $12 - 8$, lo cual es igual a 4. Ahora suponga que se le dice que el producto de dos números es 56, uno de los números es 7. ¿Cuál es el otro número? El otro número es $56 \div 7$, lo cual es igual a 8. Los siguientes ejemplos ilustran el uso de estas relaciones de suma-resta y multiplicación-división en un escenario más general.

Ejemplo de salón de clases
La suma de dos números es 57, uno de los números es y. ¿Cuál es el otro número?

EJEMPLO 1

La suma de dos números es 83, uno de los números es x. ¿Cuál es el otro número?

Solución

Usando la relación de suma y resta, se puede representar el otro número como $83 - x$.

Ejemplo de salón de clases
La diferencia entre dos números es 9. El número más pequeño es f. ¿Cuál es el número más grande.

EJEMPLO 2

La diferencia de dos números es 14. El número más pequeño es n. ¿Cuál es el número más grande?

Solución

Ya que el número más pequeño más la diferencia debe ser igual al número más grande, se puede representar el número más grande como $n + 14$.

Ejemplo de salón de clases
El producto de dos números es 42, uno de los números es r. Representar el otro número.

EJEMPLO 3

El producto de dos números es 39, uno de los números es y. Representar el otro número.

Solución

Usando la relación de multiplicación y división, se puede representar el otro número como $\frac{39}{y}$.

En un problema verbal, el planteamiento puede no contener las palabras clave como suma, diferencia, producto o cociente; en lugar de eso, el planteamiento puede que describa una situación física, y de esta descripción usted necesita deducir las operaciones involucradas.

Ejemplo de salón de clases
Ejemplo de salón de clases
Sandy puede leer 50 palabras por minuto. ¿Cuántas palabras puede leer en w minutos?

EJEMPLO 4

Arlene puede escribir 70 palabras por minuto. ¿Cuántas palabras puede escribir en m minutos?

Solución

En 10 minutos, escribiría $70(10) = 700$ palabras. En 50 minutos, escribiría $70(50) = 3500$ palabras. Por lo tanto, en m minutos escribiría $70m$ palabras.

Note el uso de ejemplos específicos: $70(10) = 700$ y $70(50) = 3500$, para ayudar a formular la expresión general. Esta técnica de primero formular algunos ejemplos específicos y después generalizar puede ser muy efectiva.

Ejemplo de salón de clases
Jane tiene d monedas de diez centavos y q monedas de veinticinco centavos. Expresar, en centavos, esta cantidad de dinero.

EJEMPLO 5

Lynn tiene n monedas de cinco centavos y d monedas de diez centavos. Expresar, en centavos, esta cantidad de dinero.

Solución

Tres monedas de cinco centavos y 8 de diez centavos son $5(3) + 10(8) = 95$ centavos. Así, n monedas de cinco centavos y d de diez centavos son $(5n + 10d)$ centavos.

Ejemplo de salón de clases
Un auto viaja a k millas por hora. ¿Cuán lejos puede viajar en 6 horas?

EJEMPLO 6

Un tren viaja a r millas por hora. ¿Cuán lejos puede viajar en 8 horas?

Solución

Imagine que un tren viaja a 50 millas por hora. Usando la fórmula *distancia es igual a velocidad por tiempo*, viajaría $50 \cdot 8 = 400$ millas. Por ende, a r millas por hora, viajaría a $r \cdot 8$ millas. Usualmente la expresión $r \cdot 8$ se escribe como $8r$.

Ejemplo de salón de clases
El costo de una caja de tocino de 3 libras es m dólares. ¿Cuál es el costo por libra del tocino?

EJEMPLO 7

El costo de una caja de dulces de 5 libras es d dólares. ¿Cuál es el costo de los dulces por libra?

Solución

El precio por libra se encuentra dividiendo el total del costo entre el número de libras. Por ende, el precio por libra se representa como $\frac{d}{5}$.

Ejemplo de salón de clases
El ancho de un rectángulo es x centímetros, y su largo es 4 centímetros más que tres veces su ancho. ¿Cuál es el ancho del rectángulo? ¿Cuál es el perímetro del rectángulo? ¿Cuál es el área del rectángulo?

EJEMPLO 8 Aplique su habilidad

El ancho de un rectángulo es de w centímetros, y el largo es 5 centímetros menos que dos veces el ancho. ¿Cuál es el largo del rectángulo? ¿Cuál es el perímetro del rectángulo? ¿Cuál es el área del rectángulo?

Solución

Se puede representar el largo del rectángulo como $2w - 5$. Se puede trazar el rectángulo como en la figura 2.8 y registrar la información dada. El perímetro de un rectángulo es la suma de sus cuatro lados. Entonces, el perímetro dado es $2w + 2(2w - 5)$, que se puede escribir como $2w + 4w - 10$ y después simplificarlo a $6w - 10$. El área del rectángulo es el producto del ancho por el largo. Por ende, el área en centímetros cuadrados se da por $w(2w - 5) = w \cdot 2w + w(-5) = 2w^2 - 5w$.

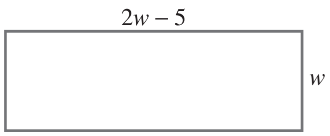


Figura 2.8

Examen de conceptos 2.5

Para los problemas 1-10, relacionar la frase en español con su expresión algebraica.

1. El producto de x y y	**A.** $x - y$
2. Dos menos que x	**B.** $x + y$
3. x restado de 2	**C.** $\dfrac{x}{y}$
4. La diferencia de x y y	**D.** $x - 2$
5. El cociente de x y y	**E.** xy
6. La suma de x y y	**F.** $x^2 - y$
7. Dos veces la suma de x y y	**G.** $2(x + y)$
8. Dos veces x más y	**H.** $2 - x$
9. x al cuadrado menos y	**I.** $x + 2$
10. Dos más que x	**J.** $2x + y$

Conjunto de problemas 2.5

Para los problemas 1-12, escriba una frase en español para cada expresión algebraica. Por ejemplo, lw puede expresarse como "el producto de l y w". (Objetivo 1)

1. $a - b$ **2.** $x + y$

3. $\frac{1}{3}Bh$ **4.** $\frac{1}{2}bh$

5. $2(l + w)$ **6.** πr^2

7. $\dfrac{A}{w}$ **8.** $\dfrac{C}{\pi}$

9. $\dfrac{a + b}{2}$ **10.** $\dfrac{a - b}{4}$

11. $3y + 2$ **12.** $3(x - y)$

Para los problemas 13-36, traducir cada frase en español a una expresión algebraica. Por ejemplo, "la suma de x y 14" se traduce en $x + 14$. (Objetivo 2)

13. La suma de l y w

14. La diferencia de x y y

15. El producto de a y b

16. El producto de $\frac{1}{3}$, B y h

17. El cociente de d y t

18. r dividido entre d

19. El producto de l, w y y

20. El producto de π y el cuadrado de n

21. x restado de y

22. La diferencia "x resta a y"

23. Dos veces más grande que el producto de x y y

24. Seis más el cubo de x

25. Siete menos el cuadrado de y

26. La cantidad, x menos y, al cubo

27. La cantidad, x menos y, dividida entre 4

28. Ocho menos que x

29. Diez menos x

30. Nueve veces la cantidad n menos 4

31. Diez veces la cantidad n más 2

32. La suma de cuatro veces x y cinco veces y

33. Siete restado al producto de x y y

34. Tres veces la suma de n y 2

35. Doce menos que el producto de x y y

36. Doce el producto de x y y

Para los problemas 37-66, responder las preguntas con expresiones algebraicas. **(Objetivos 2 y 3)**

37. La suma de dos números es 35, uno de los números es n. ¿Cuál es el otro número?

38. La suma de dos números es 100, uno de los números es x. ¿Cuál es el otro número?

39. La diferencia de dos números es 45, el número más pequeño es n. ¿Cuál es el otro número?

40. El producto de dos números es 25, uno de los números es x. ¿Cuál es el otro número?

41. Janet tiene y años de edad. ¿Qué tan grande será en 10 años?

42. Hector tiene y años de edad. ¿Qué edad tenía hace 5 años?

43. Debra tiene x años de edad, su madre tiene 3 menos que el doble de la edad de Debra. ¿Qué edad tiene la madre de Debra?

44. Jack tiene x años de edad, Dudley es un año más grande que tres veces la edad de Jack. ¿Qué edad tiene Dudley?

45. Donna tiene d monedas de diez centavos y q monedas de veinticinco centavos. ¿Cuánto tiene en centavos?

46. Andy tiene c centavos, todo en monedas de diez centavos. ¿Cuántas monedas de 10 centavos tiene?

47. Un auto viaja d millas en t horas. ¿Qué tan rápido va el auto por hora (es decir, cuál es la velocidad)?

48. Si g galones de gasolina cuestan d dólares, ¿cuál es el precio por galón?

49. Si p libras de dulce cuestan d dólares, ¿cuál es el precio por libra?

50. Sue puede escribir x palabras por minuto. ¿Cuántas palabras puede escribir en 1 hora?

51. El salario anual de Larry es d dólares. ¿Cuál es su salario mensual?

52. El salario mensual de Nancy es d dólares. ¿Cuál es su salario anual?

53. Si n representa a un número entero, ¿cuál es el siguiente número entero?

54. Si n representa a un número par, ¿cuál es el siguiente número par?

55. Si n representa a un número impar, ¿cuál es el siguiente número impar?

56. María tiene y años de edad, su hermana tiene el doble de años de edad. ¿Cuál es la suma de sus edades?

57. Willie tiene y años de edad, su padre tiene 2 años menos que el doble de la edad de Willie. ¿Cuál es la suma de sus edades?

58. Harriet tiene p monedas de un centavo, n de cinco centavos y d de diez centavos. ¿Cuánto dinero tiene en centavos?

59. El ancho de un rectángulo es w pies y su largo es tres veces el ancho. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo en pies?

60. El ancho de un rectángulo es w pies y su largo es 1 pie más que el doble de su ancho. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo en pies?

61. El largo de un rectángulo es l pulgadas y su ancho es 2 pulgadas menos que la mitad de su largo. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo en pulgadas?

62. El largo de un rectángulo es l pulgadas y su ancho es 3 pulgadas más que un tercio de su largo. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo en pulgadas?

63. El primer lado de un triángulo es f pies. El segundo es 2 pies más largo que el primer lado. El tercer lado es dos veces más grande que el segundo lado. ¿Cuál es el perímetro del triángulo en pies?

64. El primer lado del triángulo es y yardas. El segundo es y yardas menos que el primer lado. El tercer lado es 3 veces más largo que el segundo lado. ¿Cuál es el perímetro del triángulo en yardas?

65. El ancho de un rectángulo es w yardas, el largo es dos veces el ancho. ¿Cuál es el área del rectángulo en yardas cuadradas?

66. El ancho de un rectángulo es w yardas y el largo es 4 yardas más que el ancho. ¿Cuál es el área del rectángulo en yardas cuadradas?

Pensamientos en palabras

67. ¿Qué significa la frase "traducir al español del álgebra" para usted?

68. Su amiga está teniendo algunos problemas para resolver los problemas 37 y 38. Por ejemplo, para el problema 37 no sabe si la respuesta debe ser $n - 35$ o $35 - n$. ¿Qué puede hacer para ayudarla?

Respuestas del examen de conceptos

1. E **2.** D **3.** H **4.** A **5.** C **6.** B **7.** G **8.** J **9.** F **10.** I

Capítulo 2 Resumen

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Clasificar números en el sistema de números reales. (Sección 2.3/Objetivo 1)	Los números racionales, junto con los irracionales, forman el conjunto de números reales. Cualquier número que tenga representación en decimales terminales o repetitivos es un número racional. Además, los números racionales pueden ser enteros o no enteros. Cualquier número que tenga representación decimal no repetitiva o no terminal es un número irracional.	Clasificar -1 y $\sqrt{7}$, $\frac{3}{4}$ como entero racional, no entero racional o irracional. **Solución** -1 es un número racional y entero. $\sqrt{7}$ es un número irracional. $\frac{3}{4}$ es un número racional y no entero. **Problema de muestra 1** Clasificar -0.03 y $\sqrt{5}$ como racional entero, racional no entero o irracional.
Reducir números racionales a su mínima expresión. (Sección 2.1/Objetivo 1)	La propiedad $\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a}{b}$ se usa para expresar fracciones en forma reducida.	Reducir $\frac{6xy}{14x}$. **Solución** $\frac{6xy}{14x} = \frac{2 \cdot 3 \cdot x \cdot y}{2 \cdot 7 \cdot x}$ $= \frac{\cancel{2} \cdot 3 \cdot \cancel{x} \cdot y}{\cancel{2} \cdot 7 \cdot \cancel{x}}$ $= \frac{3y}{7}$ **Problema de muestra 2** Reducir $\frac{36b}{10ab}$.
Multiplicar fracciones. (Sección 2.1/Objetivo 2)	Para multiplicar números racionales en forma de fracción, multiplique los numeradores y multiplique los denominadores. Siempre se debe expresar el resultado en forma reducida.	Multiplicar $\left(\frac{6}{7}\right)\left(\frac{21}{4}\right)$. **Solución** $\left(\frac{6}{7}\right)\left(\frac{21}{4}\right) = \frac{6 \cdot 21}{7 \cdot 4}$ $= \frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7}{7 \cdot 2 \cdot 2}$ $= \frac{\cancel{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cancel{7}}{\cancel{7} \cdot 2 \cdot \cancel{2}}$ $= \frac{9}{2}$ **Problema de muestra 3** Multiplicar $\left(\frac{4}{27}\right)\left(\frac{3}{8}\right)$.

(*continúa*)

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Dividir fracciones. (Sección 2.1/Objetivo 2)	Para dividir números racionales en forma de fracción, debe cambiar el problema a multiplicar por el recíproco del divisor. Siempre exprese el resultado en forma reducida.	Dividir $\frac{5}{7} \div \frac{6}{11}$. **Solución** $\frac{5}{7} \div \frac{6}{11} = \frac{5}{7} \cdot \frac{11}{6}$ $= \frac{55}{42}$ **Problema de muestra 4** Dividir $\frac{6}{5} \div \frac{3}{7}$.
Adición y substracción números racionales en forma de fracción. (Sección 2.2/Objetivo 1)	Cuando las fracciones tienen un común denominador, sumar (o restar) los numeradores y escribir la cantidad sobre el común denominador. Si las fracciones no tienen un común denominador, entonces se debe usar el principio fundamental de las fracciones, $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$ para obtener fracciones equivalentes que tengan un común denominador.	Sumar $\frac{7}{12} + \frac{1}{15}$. **Solución** $\frac{7}{12} + \frac{1}{15} = \frac{7 \cdot 5}{12 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 4}{15 \cdot 4}$ $= \frac{35}{60} + \frac{4}{60}$ $= \frac{39}{60}$ $= \frac{13}{20}$ **Problema de muestra 5** Sumar $\frac{3}{8} + \frac{1}{6}$.
Agrupar términos similares cuyos coeficientes sean números racionales en forma de fracción. (Sección 2.2/Objetivo 2)	Para agrupar términos similares, se debe aplicar la propiedad distributiva y seguir las reglas para sumar números racionales en forma de fracción.	Simplificar $\frac{3}{5}x + \frac{1}{2}x$. **Solución** $\frac{3}{5}x + \frac{1}{2}x = \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right)x$ $= \left(\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5}\right)x$ $= \left(\frac{6}{10} + \frac{5}{10}\right)x$ $= \frac{11}{10}x$ **Problema de muestra 6** Simplificar $\frac{2}{3}y + \frac{1}{4}y$.

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Adición y substracción números racionales en forma decimal. (Sección 2.3/Objetivo 2)	Para sumar o restar decimales, debe escribir los números en una columna para que los puntos decimales queden alineados. Después, debe sumar o restar los números. De ser necesario, insertar ceros para guardar los lugares.	Realizar las operaciones indicadas: (a) $3.21 + 1.42 + 5.61$ (b) $4.76 - 2.14$ **Solución** **(a)** $\begin{array}{r} 3.21 \\ 1.42 \\ +5.61 \\ \hline 10.24 \end{array}$ **(b)** $\begin{array}{r} 4.76 \\ -2.14 \\ \hline 2.62 \end{array}$ **Problema de muestra 7** Perform the indicated operations: (a) $4.56 + 0.02 + 8.1$ (b) $8.32 - 2.07$
Multiplicar números racionales en forma decimal. (Sección 2.3/Objetivo 2)	**1.** Multiplicar los números e ignorar los puntos decimales. **2.** Hallar la suma del número de dígitos hacia la derecha del punto decimal en cada factor. **3.** Insertar el punto decimal en el producto de tal forma que el número de lugares decimales a la derecha del punto sea el mismo que la suma anteriormente hecha. De ser necesario, insertar ceros para guardar los lugares.	Multiplicar (3.12)(0.3). **Solución** $\begin{array}{rl} 3.12 & \text{dos dígitos a la derecha} \\ 0.3 & \text{un dígito a la derecha} \\ \hline 0.936 & \text{tres dígitos a la derecha} \end{array}$ **Problema de muestra 8** Multiplicar (1.43)(2.1).
Dividir un número racional en forma decimal entre un número entero. (Sección 2.3/Objetivo 2)	Para dividir un número decimal entre un número distinto de cero, dividir los números y colocar el punto decimal en el cociente directamente sobre el punto decimal del dividendo. Puede que sea necesario insertar ceros en el cociente junto al punto decimal.	Dividir $13\overline{)0.182}$ **Solución** $\begin{array}{r} 0.014 \\ 13\overline{)0.182} \\ -13 \\ \hline 52 \\ -52 \\ \hline 0 \end{array}$ **Problema de muestra 9** Dividir $6\overline{)15.84}$

(*continúa*)

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Dividir un número racional en forma decimal entre otro número racional en forma decimal. (Sección 2.3/Objetivo 2)	Para dividir entre un número racional, cambiar a un problema equivalente que tenga un número entero como divisor.	Dividir $1.7\overline{)0.34}$ Solución $1.7\overline{)0.34} = \left(\frac{0.34}{1.7}\right)\left(\frac{10}{10}\right) = \frac{3.4}{17} = 17\overline{)3.4}$ con cociente 0.2; -3.4; 0 Problema de muestra 10 Dividir $1.2\overline{)39.12}$
Agrupar términos similares cuyos coeficientes sean números racionales en forma racional. (Sección 2.3/Objetivo 3)	Para agrupar términos similares, aplicar la propiedad distributiva y seguir las reglas para sumar números enteros en forma decimal.	Simplificar $3.87y + 0.4y + y$. Solución $3.87y + 0.4y + y$ $= (3.87 + 0.4 + 1)y$ $= 5.27y$ Problema de muestra 11 Simplificar $2.4m + 0.12m + 3m$.
Evaluar expresiones algebraicas cuando las variables son números racionales. (Sección 2.3/Objetivo 4)	Las expresiones algebraicas pueden ser evaluadas según los valores de la variable que sean números racionales.	Evaluar $-\frac{3}{4}y + \frac{1}{3}y$, cuando $y = -\frac{2}{5}$. Solución $-\frac{3}{4}\left(-\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{3}{10} - \frac{2}{15}$ $= \frac{3 \cdot 3}{10 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 2}{15 \cdot 2}$ $= \frac{9}{30} - \frac{4}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ Problema de muestra 12 Evaluar $\frac{3}{5}x - \frac{1}{3}x$, cuando $x = -\frac{1}{4}$.
Simplificar expresiones numéricas que involucran exponentes. (Sección 2.3/Objetivo 2)	Las expresiones en la forma b^n se leen como "*b* a la *n*-ésima potencia"; *b* es la base y *n* es el exponente. Expresiones en la forma b^n nos dicen que la base, *b*, es usada como factor *n* veces.	Evaluar **(a)** 2^5 **(b)** $(-3)^4$ **(c)** $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ Solución **(a)** $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ **(b)** $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$ **(c)** $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ Problema de muestra 13 Evaluar **(a)** 4^3 **(b)** $(-1)^5$ **(c)** $\left(\frac{5}{4}\right)^2$.

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Evaluar las expresiones algebraicas que involucran exponentes. (Sección 2.3/Objetivo 2)	Las expresiones algebraicas que involucran exponentes pueden ser evaluadas según los valores específicos de la variable.	Evaluar $3x^2y - 5xy^2$ cuando $x + -2$ y $y = 4$. **Solución** $3(-2)^2\,(4) - 5(-2)(4)^2$ $= 3(4)(4) - 5(-2)(16)$ $= 48 + 160$ $= 208$ **Problema de muestra 14** Evaluar $2a^2b - 5ab$, cuando $a = 3$ y $b = -2$.
Simplificar expresiones algebraicas que incluyen exponentes combinando términos similares. (Sección 2.4/Objetivo 3)	Los términos similares que involucran exponentes pueden ser combinados usando la propiedad distributiva.	Simplificar $2x^2 - 3x^2 + 5x^2$. **Solución** $2x^2 - 3x^2 + 5x^2$ $= (2 - 3 + 5)x^2$ $= 4x^2$ **Problema de muestra 15** Simplificar $4y^3 + 8y^3 - 10y^3$.
Resolver problemas aplicados que involucran números en forma de fracción o en forma decimal. (Sección 2.1/Objetivo 3) (Sección 2.2/Objetivo 3) (Sección 2.3/Objetivo 5)	Los números racionales se usan para resolver muchos problemas del mundo real.	Para obtener un color específico de cabello para una clienta, Marti mezcla $\frac{3}{8}$ de medida de color café con $\frac{1}{4}$ de medida de color rubio. ¿Cuántas medidas de color se usaron para obtener color específico que se buscaba? **Solución** Para resolver, sume $\frac{3}{8} + \frac{1}{4}$. $\frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$ Entonces, se usó $\frac{5}{8}$ de medidas de color. **Problema de muestra 16** Javier está mezclando especias para hacer una pomada. Si añade $\frac{2}{3}$ de taza de paprika, $\frac{1}{2}$ de taza de sal y $\frac{3}{4}$ de taza de azúcar morena, ¿cuántas tazas de pomada tendrá?
Traducir frases en español a expresiones algebraicas. (Sección 2.5/Objetivo 2)	Para traducir frases en español a expresiones algebraicas, debe saber el vocabulario algebraico para “suma”, “resta”, “multiplicación” y “división”.	Traducir la frase “cuatro menos que un número” a una expresión algebraica. **Solución** La n representa el número. La expresión algebraica es $n - 4$. **Problema de muestra 17** Traducir la frase “seis restado de un número” a una expresión algebraica.

Capítulo 2 Conjunto de problemas de repaso

Para los problemas 1-14, hallar el valor de cada uno de los incisos.

1. 2^6

2. $(-3)^3$

3. -4^2

4. 5^3

5. $-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

6. $\left(\frac{3}{4}\right)^2$

7. $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)^2$

8. $(0.6)^3$

9. $(0.12)^2$

10. $(0.06)^2$

11. $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$

12. $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$

13. $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)^3$

14. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)^2$

Para los problemas 15-24, realizar las operaciones indicadas y expresar sus respuestas en la manera reducida.

15. $\frac{3}{8}+\frac{5}{12}$

16. $\frac{9}{14}-\frac{3}{35}$

17. $\frac{2}{3}+\frac{-3}{5}$

18. $\frac{7}{x}+\frac{9}{2y}$

19. $\frac{5}{xy}-\frac{8}{x^2}$

20. $\left(\frac{7y}{8x}\right)\left(\frac{14x}{35}\right)$

21. $\left(\frac{6xy}{9y^2}\right)\div\left(\frac{15y}{18x^2}\right)$

22. $\left(\frac{-3x}{12y}\right)\left(\frac{8y}{-7x}\right)$

23. $\left(\frac{-4y}{3x}\right)\left(-\frac{3x}{4y}\right)$

24. $\left(\frac{6n}{7}\right)\left(\frac{9n}{8}\right)$

Para los problemas 25-36, simplificar cada una de las siguientes expresiones numéricas.

25. $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\div\frac{8}{6}$

26. $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}$

27. $\frac{7}{9}\cdot\frac{3}{5}+\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{5}$

28. $\frac{4}{5}\div\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$

29. $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\div\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}$

30. $0.48 + 0.72 - 0.35 - 0.18$

31. $0.81 + (0.6)(0.4) - (0.7)(0.8)$

32. $1.28 \div 0.8 - 0.81 \div 0.9 + 1.7$

33. $(0.3)^2 + (0.4)^2 - (0.6)^2$

34. $(1.76)(0.8) + (1.76)(0.2)$

35. $(2^2 - 2 - 2^3)^2$

36. $1.92(0.9 + 0.1)$

Para los problemas 37-42, simplificar cada una de las siguientes expresiones algebraicas combinando términos similares. Expresar sus respuestas en manera reducida cuando trabaje con fracciones comunes.

37. $\frac{3}{8}x^2-\frac{2}{5}y^2-\frac{2}{7}x^2+\frac{3}{4}y^2$

38. $0.24ab + 0.73bc - 0.82ab - 0.37bc$

39. $\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}x-\frac{5}{6}x+\frac{1}{24}x$

40. $1.4a - 1.9b + 0.8a + 3.6b$

41. $\frac{2}{5}n+\frac{1}{3}n-\frac{5}{6}n$

42. $n-\frac{3}{4}n+2n-\frac{1}{5}n$

Para los problemas 43-48, evaluar las siguientes expresiones algebraicas para los valores dados a las variables.

43. $\frac{1}{4}x-\frac{2}{5}y$ para $x=\frac{2}{3}$ y $y=-\frac{5}{7}$

44. a^3+b^2 para $a=-\frac{1}{2}$ y $b=\frac{1}{3}$

45. $2x^2 - 3y^2$ para $x = 0.6$ y $y = 0.7$

46. $0.7w + 0.9z$ para $w = 0.4$ y $z = -0.7$

47. $\frac{3}{5}x-\frac{1}{3}x+\frac{7}{15}x-\frac{2}{3}x$ para $x=\frac{15}{17}$

48. $\frac{1}{3}n+\frac{2}{7}n-n$ para $n = 21$

Para los problemas 49-54, responder a cada una de las siguientes preguntas con una expresión algebraica.

49. La suma de dos números es 72, uno de los números es n. ¿Cuál es el otro número?

50. Joan tiene p peniques y d monedas de 10 centavos. ¿Cuánto dinero, en centavos, tiene?

51. Ellen escribe x palabras en una hora. ¿Cuánto escribe por minuto?

52. Harry tiene y años de edad. Su hermano tiene tres años menos que el doble de la edad de Harry. ¿Qué edad tiene el hermano de Harry?

53. Larry eligió un número n. Cindy eligió un número es 5 veces más grande que el número de Larry, más tres. ¿Qué número eligió Cindy?

54. Corinne tiene n monedas de veinticinco centavos, d de diez y q de quince. ¿Cuánto dinero tiene en centavos?

Para los problemas 55-64, traducir cada frase verbal a una expresión algebraica.

55. Cinco menos que n

56. Cinco menos n

57. Diez veces la cantidad x menos 2

58. Diez veces x menos 2

59. x menos tres

60. d dividido entre r

61. x al cuadrado más nueve

62. x más nueve, la cantidad al cuadrado

63. La suma de los cubos de x y y

64. Cuatro menos que el producto de x y y

Capítulo 2 Examen

1. Hallar el valor de cada expresión.
   (a) $(-3)^4$ **(b)** -2^6 **(c)** $(0.2)^3$

2. Expresar $\frac{42}{54}$ en su forma reducida.

3. Simplificar $\frac{18xy^2}{32y}$.

Para los problemas 4-7, simplificar cada expresión numérica.

4. $5.7 - 3.8 + 4.6 - 9.1$

5. $0.2(0.4) - 0.6(0.9) + 0.5(7)$

6. $-0.4^2 + 0.3^2 - 0.7^2$

7. $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)^4$

Para los problemas 8-11, realizar las operaciones indicadas y expresar sus respuestas en forma reducida.

8. $\frac{5}{12} \div \frac{15}{8}$

9. $-\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{5}{6}$

10. $3\left(\frac{2}{5}\right) - 4\left(\frac{5}{6}\right) + 6\left(\frac{7}{8}\right)$

11. $4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 9\left(\frac{1}{4}\right)^2$

Para los problemas 12-17, realizar las operaciones indicadas y expresar sus respuestas en la forma reducida.

12. $\frac{8x}{15y} \cdot \frac{9y^2}{6x}$

13. $\frac{6xy}{9} \div \frac{y}{3x}$

14. $\frac{4}{x} - \frac{5}{y^2}$

15. $\frac{3}{2x} + \frac{7}{6x}$

16. $\frac{5}{3y} + \frac{9}{7y^2}$

17. $\left(\frac{15a^2b}{12a}\right)\left(\frac{8ab}{9b}\right)$

Para los problemas 18 y 19, simplificar cada expresión algebraica combinando términos similares.

18. $3x - 2xy - 4x + 7xy$

19. $-2a^2 + 3b^2 - 5b^2 - a^2$

Para los problemas 20-23, evaluar cada expresión algebraica según los valores dados para las variables.

20. $x^2 - xy + y^2$ para $x = \frac{1}{2}$ y $y = -\frac{2}{3}$

21. $0.2x - 0.3y - xy$ para $x = 0.4$ y $y = 0.8$

22. $\frac{3}{4}x - \frac{2}{3}y$ para $x = -\frac{1}{2}$ y $y = \frac{3}{5}$

23. $3x - 2y + xy$ para $x = 0.5$ y $y = -0.9$

24. David tiene n monedas de veinticinco centavos, d de diez y q de quince. ¿Cuánto dinero, en centavos, tiene?

25. Hal eligió un número n. Sheila eligió un número cuatro veces más grande que el que eligió Hal, menos cuatro. Expresar el número de Sheila en términos de n.

Capítulos 1-2 Conjunto de roblemas de repaso acumulados

Para los problemas 1-12, simplificar cada expresión numérica.

1. $16 - 18 - 14 + 21 - 14 + 19$

2. $7(-6) - 8(-6) + 4(-9)$

3. $6 - [3 - (10 - 12)]$

4. $-9 - 2[4 - (-10 + 6)] - 1$

5. $\dfrac{-7(-4) - 5(-6)}{-2}$

6. $\dfrac{5(-3) + (-4)(6) - 3(4)}{-3}$

7. $\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{3} \div \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{2}$

8. $\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(-\dfrac{3}{4}\right) - \left(\dfrac{5}{6}\right)\left(\dfrac{4}{5}\right)$

9. $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3}\right)^2$

10. -4^3

11. $\dfrac{0.0046}{0.000023}$

12. $(0.2)^2 - (0.3)^3 + (0.4)^2$

Para los problemas 13-20, evaluar cada expresión algebraica según los valores dados a las variables.

13. $3xy - 2x - 4y$ para $x = -6$ y $y = 7$

14. $-4x^2y - 2xy^2 + xy$ para $x = -2$ y $y = -4$

15. $\dfrac{5x - 2y}{3x}$ para $x = \dfrac{1}{2}$ y $y = -\dfrac{1}{3}$

16. $0.2x - 0.3y + 2xy$ para $x = 0.1$ y $y = 0.3$

17. $-7x + 4y + 6x - 9y + x - y$ para $x = -0.2$ y $y = 0.4$

18. $\dfrac{2}{3}x - \dfrac{3}{5}y + \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{2}y$ para $x = \dfrac{6}{5}$ y $y = -\dfrac{1}{4}$

19. $\dfrac{1}{5}n - \dfrac{1}{3}n + n - \dfrac{1}{6}n$ para $n = \dfrac{1}{5}$

20. $-ab + \dfrac{1}{5}a - \dfrac{2}{3}b$ para $a = -2$ y $b = \dfrac{3}{4}$

Para los problemas 21-24, expresar cada uno de los números como producto de factores primos.

21. 54

22. 78

23. 91

24. 153

Para los problemas 25-28, hallar el máximo común divisor de los números dados.

25. 42 y 70

26. 63 y 81

27. 28, 36, y 52

28. 48, 66, y 78

Para los problemas 29-32, hallar el mínimo común múltiplo de los números dados.

29. 20 y 28

30. 40 y 100

31. 12, 18, y 27

32. 16, 20, y 80

Para los problemas 33-38, simplificar cada expresión algebraica agrupar términos similares.

33. $\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{4}y - \dfrac{3}{4}x - \dfrac{2}{3}y$

34. $-n - \dfrac{1}{2}n + \dfrac{3}{5}n + \dfrac{5}{6}n$

35. $3.2a - 1.4b - 6.2a + 3.3b$

36. $-(n - 1) + 2(n - 2) - 3(n - 3)$

37. $-x + 4(x - 1) - 3(x + 2) - (x + 5)$

38. $2a - 5(a + 3) - 2(a - 1) - 4a$

Para los problemas 39-46, realizar las operaciones indicadas y expresar sus respuestas en la forma reducida.

39. $\dfrac{5}{12} - \dfrac{3}{16}$

40. $\dfrac{3}{4} - \dfrac{5}{6} - \dfrac{7}{9}$

41. $\dfrac{5}{xy} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y}$

42. $-\dfrac{7}{x^2} + \dfrac{9}{xy}$

43. $\left(\frac{7x}{9y}\right)\left(\frac{12y}{14}\right)$

44. $\left(-\frac{5a}{7b^2}\right)\left(-\frac{8ab}{15}\right)$

45. $\left(\frac{6x^2y}{11}\right) \div \left(\frac{9y^2}{22}\right)$

46. $\left(-\frac{9a}{8b}\right) \div \left(\frac{12a}{18b}\right)$

Para los problemas 47-50, responder a la pregunta con expresiones algebraicas.

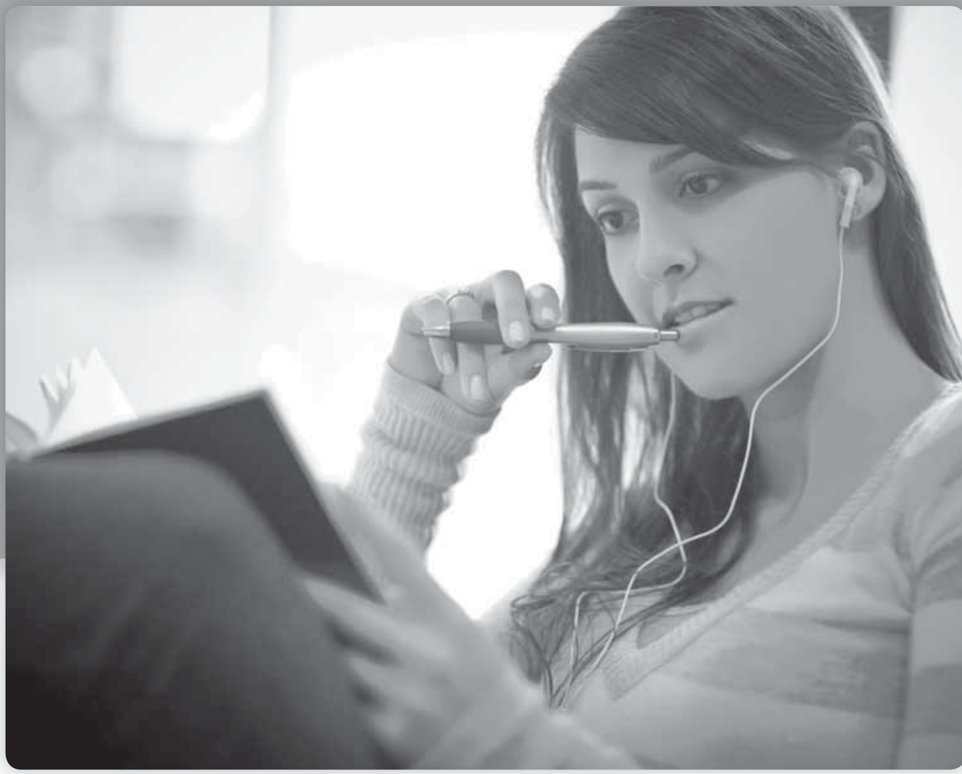
47. Héctor tiene p peniques, n monedas de veinticinco centavos y d de diez centavos. ¿Cuánto dinero tiene en centavos?

48. Ginny eligió un número n. Penny eligió un número cuatro veces más grande que el de Ginny, menos 4. ¿Qué número eligió Penny?

49. Si 3 libras de dulces cuestan d dólares, ¿cuál es el precio por libra?

50. El ancho de un rectángulo es de w pulgadas, su largo es el doble del ancho. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo en pulgadas?

3 Ecuaciones y resolución de problemas



Supri Suharjoto/Shutterstock.com

"Nada es particularmente difícil si lo divide en trabajos pequeños"
HENRY FORD

Tip de estudio

A pesar de que muchos estudiantes tienen dificultades con los cursos de matemáticas, no suelen reflexionar sobre los comportamientos de estudio que se necesitan para alcanzar el éxito en estos cursos. Matemáticas no es una materia en la que puedas aprender todo una noche antes del examen. Probablemente ha hecho esto con otras materias y ha tenido éxito, pero no le funcionará con los cursos de matemáticas: debe planear su estudio de matemáticas diariamente, incluso si sólo estudia por 10 ó 15 minutos.

Si no puede estudiar matemáticas diariamente, entonces su meta debe ser estudiar tantas veces como pueda durante la semana en sesiones de una hora. Es más efectivo estudiar cuatro veces por una hora, que una vez durante cuatro horas. Cada vez que regrese al estudio después de un descanso, debe recordar la información pertinente. Ahí es donde el aprendizaje ocurre. Hacer esto suele ayudarle a retener la información.

Además, debe considerar la hora del día en la que estudia matemáticas. Una habilidad importante en el manejo del tiempo es planear su hora de estudio. Al planearlo, seleccione el momento del día en el que se sienta más fresco para aprender. Esto ayudará a asegurar un tiempo de estudio productivo.

Tanto el hombre que piensa que puede como el que piensa que no puede están en lo correcto. ¿Cuál es usted?

Vista previa del capítulo

En este capítulo usará las habilidades desarrolladas en los primeros dos capítulos para resolver ecuaciones y resolver problemas aplicados, también llamados problemas verbales. Los estudiantes suelen ser bastante capaces de resolver ecuaciones y obtienen un sentido de satisfacción al obtener una respuesta y ser capaces de verificarla.

Contrario a la satisfacción que sienten al resolver ecuaciones, los estudiantes suelen temer a los problemas verbales. Se le alienta a tomarse su tiempo con este capítulo para realmente aprender a resolver los problemas verbales. El material en la sección 2.5 planteó las bases para resolver problemas verbales. Asegúrese de entender el vocabulario para traducir frases en español a planteamientos algebraicos. Los problemas verbales pueden aprenderse como cualquier otra habilidad matemática.

3.1 Resolución de ecuaciones de primer grado

OBJETIVOS

1. Resolver ecuaciones de primer grado utilizando la propiedad aditiva de la igualdad
2. Resolver ecuaciones de primer grado utilizando la propiedad multiplicativa de la igualdad
3. Resolver fórmulas para obtener un valor específico cuando se dan los valores numéricos para las variables restantes
4. Resolver una fórmula para obtener una variable específica

Estos son ejemplos de **enunciados numéricos**:

$$3 + 4 = 7 \qquad 5 - 2 = 3 \qquad 7 + 1 = 12$$

Los primeros dos enunciados son verdaderos y el tercero es falso.

Cuando usamos a x como variable, los enunciados

$$x + 3 = 4, \qquad 2x - 1 = 7, \qquad \text{y} \qquad x^2 = 4$$

son llamados **ecuaciones algebraicas** en x. Al número a se le llama solución o raíz de una ecuación si un enunciado numérico cierto se forma cuando a se sustituye con x. (También se dice que a satisface la ecuación). Por ejemplo, 1 es una solución para $x + 3 = 4$ porque sustituir a x con 1 produce el enunciado numérico verdadero $1 + 3 = 4$. Al conjunto de todas las soluciones de una ecuación se le conoce como **conjunto solución**. Por ende, el conjunto solución de $x + 3 = 4$ es $\{1\}$. De igual forma, el conjunto solución para $2x - 1 = 7$ es $\{4\}$ y el conjunto solución para $x^2 = 4$ es $\{-2, 2\}$. Por **resolución de una ecuación** se entiende el proceso de determinar el conjunto solución. Recuerde que un conjunto que no tiene elementos es llamado vacío o nulo y se escribe como $\varnothing$. Así, se puede decir que el conjunto solución para $x = x + 1$ es $\varnothing$; es decir, no hay números reales que satisfagan la ecuación $x = x + 1$.

En este capítulo se considerarán técnicas para resolver ecuaciones de **primer grado con una variable**. Esto significa que las ecuaciones sólo contienen una variable y que esta variable tiene un exponente de 1. Los siguientes son ejemplos de ecuaciones de primer grado con una variable.

$$3x + 4 = 7 \qquad 8w + 7 = 5w - 4$$

$$\frac{1}{2}y + 2 = 9 \qquad 7x + 2x - 1 = 4x - 1$$

Las **ecuaciones equivalentes** son ecuaciones que tienen el mismo conjunto solución. Las siguientes ecuaciones son equivalentes:

$$5x - 4 = 3x + 8$$
$$2x = 12$$
$$x = 6$$

Puede verificar la equivalencia demostrando que 6 es la solución para las tres ecuaciones.

Para resolver ecuaciones es necesario usar las diversas propiedades de la igualdad.

Propiedad 3.1 Propiedades de la igualdad

Para todos los números reales a, b y c,

1. $a = a$ Propiedad reflexiva
2. Si $a = b$, entonces $b = a$. Propiedad simétrica
3. Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$. Propiedad transitiva
4. Si $a = b$, entonces a puede ser reemplazada por b o b puede ser reemplazada por a, en cualquier enunciado, sin cambiar el significado del mismo. Propiedad de sustitución

El procedimiento general para resolver una ecuación es continuar sustituyendo la ecuación dada con ecuaciones equivalentes, pero más simples, hasta obtener una ecuación de la forma **variable = constante** o **constante = variable**. En consecuencia, en el ejemplo anterior, $5x - 4 = 3x + 8$ se simplificó a $2x = 12$, que se simplificó aún más a $x = 6$, a partir de lo cual es obvio que 6 es la solución. A continuación veremos el procedimiento exacto para simplificar ecuaciones.

Dos propiedades de igualdad juegan un papel importante en el proceso de resolver ecuaciones. La primera de éstas es la **propiedad aditiva de la igualdad**.

Propiedad 3.2 Propiedad aditiva de la igualdad

Para todos los números reales, a, b y c,

1. $a = b$ si y sólo si $a + c = b + c$.
2. $a = b$ si y sólo si $a - c = b - c$.

La propiedad 3.2 afirma que, cuando el mismo número se suma o resta a ambos lados de una ecuación, se produce una ecuación equivalente. Considere usar esta propiedad en los siguientes cuatro ejemplos.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $d - 7 = 11$.

EJEMPLO 1 Resolver $x - 8 = 3$.

Solución

$$x - 8 = 3$$
$$x - 8 + 8 = 3 + 8 \quad \text{Sumar a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de } -8 \text{ que es } 8$$
$$x = 11$$

El conjunto solución es $\{11\}$

Comentario: Es cierto que una ecuación tan simple como la del ejemplo 1 puede ser resuelta *por medio de inspección*; por ejemplo, “algún número menos 8 produce 3” tiene como respuesta obvia al 11. Sin embargo, conforme las ecuaciones se vuelven más complejas, la técnica de resolución por medio de inspección se vuelve poco o nada efectiva. Así que es necesario desarrollar técnicas más formales para resolver ecuaciones. Por ende, comenzaremos a desarrollar tales técnicas con ecuaciones muy simples.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $m + 12 = -4$.

EJEMPLO 2 Resolver $x + 14 = -8$.

Solución

$$x + 14 = -8$$
$$x + 14 - 14 = -8 - 14 \quad \text{Sumar a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de 14 que es } -14$$
$$x = -22$$

El conjunto solución es $\{-22\}$.

Ejemplo de salón de clases

Resolver $a - \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$.

EJEMPLO 3 Resolver $n - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$.

Solución

$$n - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

$$n - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \qquad \text{Sumar el inverso aditivo de } -\frac{1}{3} \text{ que es } \frac{1}{3}$$

$$n = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} \qquad \text{Cambiar a fracciones equivalentes con un denominador de 12}$$

$$n = \frac{7}{12}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{7}{12}\right\}$.

Ejemplo de salón de clases

Resolver $0.63 = n + 0.49$.

EJEMPLO 4 Resolver $0.72 = y + 0.35$.

Solución

$$0.72 = y + 0.35$$

$$0.72 - 0.35 = y + 0.35 - 0.35 \qquad \text{Sumar a ambos lados de a igualdad el inverso aditivo de 0.35 que es } -0.35$$

$$0.37 = y$$

El conjunto solución es $\{0.37\}$.

Note en el ejemplo 4 que la ecuación final es $0.37 = y$ en lugar de $y = 0.37$. Técnicamente, la **propiedad simétrica de igualdad** (si $a = b$, entonces $b = a$) permite que se cambie la forma $0.37 = y$ a $y = 0.37$, pero tal cambio no es necesario para determinar que la solución es 0.37. También debe darse cuenta de que la propiedad de simetría puede ser aplicada a la ecuación original. Así, $0.72 = y + 0.35$ se convierte en $y + 0.35 = 0.72$ y restar 0.35 de ambos lados produce $y = 0.37$.

Debemos añadir aquí otro comentario con respecto a la Propiedad 3.2. Debido a que restar un número es equivalente a sumar su opuesto, se puede plantear la Propiedad 3.2 sólo en términos de suma. Así, para resolver una ecuación como la del ejemplo 4, se suma -0.35 a ambos lados en lugar de restar 0.35 a ambos lados.

Otra propiedad importante para resolver ecuaciones es la **propiedad multiplicativa de la igualdad**.

Propiedad 3.3 Propiedad multiplicativa de la igualdad

Para todos los números reales a, b y c, donde $c \neq 0$

1. $a = b$ si y sólo si $ac = bc$.

2. $a = b$ si y sólo si $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

La propiedad 3.3 afirma que se obtiene una ecuación equivalente siempre que ambos lados de una ecuación se multipliquen o dividan por el mismo número real distinto de cero. Los siguientes ejemplos demuestran el uso de esta propiedad para resolver ecuaciones.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $\frac{4}{7}y = 8$.

EJEMPLO 5 Resolver $\frac{3}{4}x = 6$.

Solución

$$\frac{3}{4}x = 6$$

$$\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}x\right) = \frac{4}{3}(6) \qquad \text{Multiplicar ambos lados por el inverso multiplicativo de } \frac{3}{4} \text{ que es } \frac{4}{3} \text{ porque } \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = 1$$

$$x = 8$$

El conjunto solución es $\{8\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $4c = 33$.

EJEMPLO 6 Resolver $5x = 27$.

Solución

$$5x = 27$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{27}{5} \qquad \text{Multiplicar a ambos lados de la igualdad por el inverso multiplicativo de 5 que es } \frac{1}{5}$$

$$x = \frac{27}{5} \qquad \frac{27}{5} \text{ puede ser expresado como } 5\frac{2}{5} \text{ o como } 5.4$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{27}{5}\right\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $-\frac{4}{5}m = \frac{2}{3}$.

EJEMPLO 7 Resolver $-\frac{2}{3}p = \frac{1}{2}$.

Solución

$$-\frac{2}{3}p = \frac{1}{2}$$

$$\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}p\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \text{Multiplicar ambos lados por } -\frac{3}{2} \text{ porque } \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = 1$$

$$p = -\frac{3}{4}$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{3}{4}\right\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $18 = -8b$.

EJEMPLO 8 Resolver $26 = 26x$.

Solución

$$26 = -6x$$

$$\frac{26}{-6} = \frac{-6x}{-6} \qquad \text{Multiplicar a ambos lados de igualdad por el inverso multiplicativo de } -6 \text{ que es } -\frac{1}{6}$$

$$-\frac{26}{6} = x \qquad \frac{26}{-6} = -\frac{26}{6}$$

$$-\frac{13}{3} = x \qquad \text{¡No olvide reducir!}$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{13}{3}\right\}$.

Si considera de nuevo los ejemplos 5-8, notará que se dividieron ambos lados de la ecuación entre el coeficiente de la variable cuando el coeficiente fue un entero; de lo contrario, se usó la parte multiplicativa de la propiedad 3.3. Técnicamente, debido a que dividir un número es equivalente a multiplicar por su recíproco, la propiedad 3.3 podría ser aplicada sólo en términos de multiplicación. Así, para resolver una ecuación como $5x = 27$, se pueden multiplicar ambos lados por $\frac{1}{5}$ en lugar de dividir ambos lados entre 5.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $0.4t = 28$.

EJEMPLO 9 Resolver $0.2n = 15$.

Solución

$$0.2n = 15$$

$$\frac{0.2n}{0.2} = \frac{15}{0.2} \quad \text{Multiplicar a ambos laos por el inverso multiplicativo de 0.2 que es } \frac{1}{0.2}$$

$$n = 75$$

El conjunto solución es $\{75\}$.

Resolver fórmulas

Las **fórmulas** son reglas simples que se plantean en lenguaje simbólico y que se expresan como ecuaciones. Se puede plantear la regla: *distancia es igual a rapidez por tiempo* como una fórmula: $d = rt$.

Al tratar con fórmulas a menudo se requiere encontrar el valor de una variable específica cuando se conoce el valor de las otras variables o, en otras ocasiones, resolver la fórmula para una variable específica (independientemente de su valor). Para lograr esto se aplican a la fórmula las propiedades básicas de resolución de ecuaciones.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $d = rt$ para r si $d = 210$ y $t = 3$.

EJEMPLO 10 Resolver $d = rt$ para r si $d = 330$ y $t = 6$.

Solución

Sustituir 330 para d y 6 para t en la fórmula dada para obtener

$$330 = r(6)$$

Resolver esta ecuación representa

$$330 = 6r$$

$$55 = r$$

Ejemplo de salón de clases
Resolver $i = Prt$ para i si $P = \$5000$, $r = 0.04$, y $t = 3$.

EJEMPLO 11 Resolver $P = 2L + 2W$ para P si $L = 15$ y $W = 8$.

Solución

Sustituir 15 por L y 8 por W. Note el uso de los paréntesis al sustituir los valores para las variables.

$$P = 2(15) + 2(8)$$

$$P = 30 + 16$$

$$P = 46$$

Así, el valor para P cuando $L = 15$ y $W = 8$ es 46.

A veces es conveniente cambiar la fórmula usando las propiedades de igualdad. Por ejemplo, la fórmula $d = rt$ puede cambiarse de la siguiente manera:

$$d = rt$$

$$\frac{d}{r} = \frac{rt}{r}$$ Multiplicar a ambos lados de la igualdad por el inverso multiplicativo de r que es $\frac{1}{r}$

$$\frac{d}{r} = t$$

Se dice que la fórmula $d = rt$ ha sido *resuelta para la variable t*. La fórmula también se puede *resolver para r* de la siguiente manera.

$$d = rt$$

$$\frac{d}{t} = \frac{rt}{t}$$ Multiplicar a ambos lados por el inverso multiplicativo de r que es $\frac{1}{r}$

$$\frac{d}{t} = r$$

Ejemplo de salón de clases
Resolver $A = lw$ para w.

EJEMPLO 12 Resolver $C = 2\pi r$ para r.

Solución

$$C = 2\pi r$$

$$\frac{C}{2\pi} = \frac{2\pi r}{2\pi}$$ Multiplicar a ambos lados de la igualdad por el inverso multiplicativo de 2π que es $\frac{1}{2\pi}$

$$\frac{C}{2\pi} = r$$

Ejemplo de salón de clases
Resolver $A = \frac{1}{2}bh$ para b.

EJEMPLO 13 Resolver $V = \frac{1}{3}Bh$ para h.

Solución

$$V = \frac{1}{3}Bh$$

$$3(V) = 3\left(\frac{1}{3}Bh\right)$$ Multiplicar ambos lados por 1 inverso multiolicativo de $\frac{1}{3}$ que es $\frac{3}{1}$

$$3V = Bh$$

$$\frac{3V}{B} = \frac{Bh}{B}$$ Multiplicar a ambos lados de la igualdad por el inverso multiplicativo de $\frac{1}{3}$ que es $\frac{3}{1}$

$$\frac{3V}{B} = h$$

Examen de conceptos 3.1

Para los problemas 1-10, responder falso o verdadero.

1. Las ecuaciones equivalentes tienen el mismo conjunto solución.

2. $x^2 = 9$ es una ecuación de primer grado.

3. Al conjunto de todas las soluciones se le llama conjunto solución.

4. Si el conjunto solución es nulo, entonces la ecuación tiene al menos una solución.

5. La propiedad aditiva de las ecuaciones no puede aplicarse a las fórmulas.

6. Si 5 es una solución, entonces un enunciado numérico verdadero se forma cuando se sustituye con 5 la variable en la ecuación.

7. Cualquier número puede ser restado de ambos lados de una ecuación y el resultado es una ecuación equivalente.

8. Cualquier número puede dividir ambos lados de una ecuación para obtener una ecuación equivalente.

9. Según la propiedad reflexiva, si $y = 2$, entonces $2 = y$.

10. Según la propiedad transitiva, si $x = y$ y $y = 4$, entonces $x = 4$.

Conjunto de problemas 3.1

Para los problemas 1-72, usas las propiedades de la igualdad para ayudar a resolver cada ecuación. (Objetivos 1 y 2)

1. $x + 9 = 17$

2. $x + 7 = 21$

3. $x + 11 = 5$

4. $x + 13 = 2$

5. $-7 = x + 2$

6. $-12 = x + 4$

7. $8 = n + 14$

8. $6 = n + 19$

9. $21 + y = 34$

10. $17 + y = 26$

11. $x - 17 = 31$

12. $x - 22 = 14$

13. $14 = x - 9$

14. $17 = x - 28$

15. $-26 = n - 19$

16. $-34 = n - 15$

17. $y - \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$

18. $y - \frac{2}{5} = \frac{1}{6}$

19. $x + \frac{3}{5} = \frac{1}{3}$

20. $x + \frac{5}{8} = \frac{2}{5}$

21. $b + 0.19 = 0.46$

22. $b + 0.27 = 0.74$

23. $n - 1.7 = -5.2$

24. $n - 3.6 = -7.3$

25. $15 - x = 32$

26. $13 - x = 47$

27. $-14 - n = 21$

28. $-9 - n = 61$

29. $7x = -56$

30. $9x = -108$

31. $-6x = 102$

32. $-5x = 90$

33. $5x = 37$

34. $7x = 62$

35. $-18 = 6n$

36. $-52 = 13n$

37. $-26 = -4n$

38. $-56 = -6n$

39. $\frac{t}{9} = 16$

40. $\frac{t}{12} = 8$

41. $\frac{n}{-8} = -3$

42. $\frac{n}{-9} = -5$

43. $-x = 15$

44. $-x = -17$

45. $\frac{3}{4}x = 18$

46. $\frac{2}{3}x = 32$

47. $-\frac{2}{5}n = 14$

48. $-\frac{3}{8}n = 33$

49. $\frac{2}{3}n = \frac{1}{5}$

50. $\frac{3}{4}n = \frac{1}{8}$

51. $\frac{5}{6}n = -\frac{3}{4}$

52. $\frac{6}{7}n = -\frac{3}{8}$

53. $\frac{3x}{10} = \frac{3}{20}$

54. $\frac{5x}{12} = \frac{5}{36}$

55. $\frac{-y}{2} = \frac{1}{6}$

56. $\frac{-y}{4} = \frac{1}{9}$

57. $-\frac{4}{3}x = -\frac{9}{8}$

58. $-\frac{6}{5}x = -\frac{10}{14}$

59. $-\frac{5}{12} = \frac{7}{6}x$

60. $-\frac{7}{24} = \frac{3}{8}x$

61. $-\frac{5}{7}x = 1$

62. $-\frac{11}{12}x = -1$

63. $-4n = \frac{1}{3}$

64. $-6n = \frac{3}{4}$

65. $-8n = \frac{6}{5}$

66. $-12n = \frac{8}{3}$

67. $1.2x = 0.36$

68. $2.5x = 17.5$

69. $30.6 = 3.4n$

70. $2.1 = 4.2n$

71. $-3.4x = 17$

72. $-4.2x = 50.4$

Para los problemas 73-78, resolver la variable usando los valores dados. (Objetivo 3)

73. Resolver $d = rt$ para t si $d = 336$ y $r = 48$.

74. Resolver $d = rt$ para r si $d = 486$ y $t = 9$.

75. Resolver $i = Prt$ para P si $i = 200$, $r = 0.08$, y $t = 5$.

76. Resolver $i = Prt$ para t si $i = 540$, $P = 750$, y $r = 0.09$.

77. Resolver $V = \frac{1}{3}Bh$ para B si $V = 112$ y $h = 7$.

78. Resolver $V = \frac{1}{3}Bh$ para h si $V = 216$ y $B = 54$.

Para los problemas 79-85, resolver cada fórmula para la variable indicada. (Objetivo 4)

79. $V = Bh$ para h

80. $A = lw$ para l

81. $V = \frac{1}{3}Bh$ para B

82. $A = \frac{1}{2}bh$ para h

83. $V = \pi r^2 h$ para h

84. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ para h

85. $i = Prt$ para r

Pensamientos en palabras

86. Describir la diferencia entre un enunciado numérico y una ecuación algebraica.

87. ¿Son equivalentes las ecuaciones $6 = 3x + 1$ y $1 + 3x = 6$? Justifique su respuesta.

Respuestas del examen de conceptos

1. Verdadero **2.** Falso **3.** Verdadero **4.** Falso **5.** Falso **6.** Verdadero **7.** Verdadero
8. Falso **9.** Falso **10.** Verdadero

3.2 Ecuaciones y resolución de problemas

OBJETIVOS

1. Resolver ecuaciones de primer grado usando las propiedades aditiva y multiplicativa de la igualdad
2. Resolver fórmulas para un valor específico cuando se dan los valores numéricos para las variables restantes
3. Resolver una fórmula para un valor específico usando las propiedades aditiva y multiplicativa de la igualdad
4. Declarar variables y escribir ecuaciones para resolver problemas verbales

Se suele necesitar más de una propiedad de la igualdad para hallar la solución de una ecuación. Considere los siguientes ejemplos.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $2n + 5 = 13$.

EJEMPLO 1 Resolver $3x + 1 = 7$.

Solución

$$3x + 1 = 7$$

$$3x + 1 - 1 = 7 - 1$$ Sumar a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de 1

$$3x = 6$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$$ Multiplicar a ambos lados de la igualdad por el inverso multiplicativo de 3 es decir $\frac{1}{3}$

$$x = 2$$

La solución potencial puede ser *verificada* por medio de la sustitución en la ecuación original para revisar si el resultado es un enunciado numérico correcto.

✔ **Verificación**

$$3x + 1 = 7$$

$$3(2) + 1 \stackrel{?}{=} 7$$

$$6 + 1 \stackrel{?}{=} 7$$

$$7 = 7$$

Ahora se sabe que el conjunto solución es $\{2\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $7m - 3 = 11$.

EJEMPLO 2 Resolver $5x - 6 = 14$.

Solución

$$\begin{aligned} 5x - 6 &= 14 \\ 5x - 6 + 6 &= 14 + 6 && \text{Sumar a ambos lados el inverso aditivo de } -6 \text{ es decir } 6 \\ 5x &= 20 \\ \frac{5x}{5} &= \frac{20}{5} && \text{Multiplicar por el inverso multiplicativo de } 5 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

✔ Verificación

$$\begin{aligned} 5x - 6 &= 14 \\ 5(4) - 6 &\stackrel{?}{=} 14 \\ 20 - 6 &\stackrel{?}{=} 14 \\ 14 &= 14 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{4\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $5 - 2c = 13$.

EJEMPLO 3 Resolver $4 - 3a = 22$.

Solución

$$\begin{aligned} 4 - 3a &= 22 \\ 4 - 3a - 4 &= 22 - 4 && \text{Sumar a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de } 4 \\ -3a &= 18 \\ \frac{-3a}{-3} &= \frac{18}{-3} && \text{Multiplicar a ambos lados de la igualdad por el inverso multiplicativo de } -3 \text{ es decir } -\frac{1}{3} \\ a &= -6 \end{aligned}$$

✔ Verificación

$$\begin{aligned} 4 - 3a &= 22 \\ 4 - 3(-6) &\stackrel{?}{=} 22 \\ 4 + 18 &\stackrel{?}{=} 22 \\ 22 &= 22 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{-6\}$.

Note que en los ejemplos 1, 2 y 3, se usó la propiedad aditiva primero, después se usó la multiplicativa. En general, estas secuencias de pasos proporcionan un método más fácil para resolver ecuaciones. Tal vez podría convencerse de lo aquí planteado volviendo a resolver el ejemplo 1, pero esta vez utilice la propiedad multiplicativa primero y después la aditiva.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $21 = 4x + 8$.

EJEMPLO 4 Resolver $19 = 2n + 4$.

Solución

$$\begin{aligned} 19 &= 2n + 4 && \text{Sumar a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de } 4 \\ 19 - 4 &= 2n + 4 - 4 \end{aligned}$$

$$15 = 2n$$

$$\frac{15}{2} = \frac{2n}{2}$$ Multiplicar a ambos lados de la igualdad por el inverso multiplicativo de 2

$$\frac{15}{2} = n$$

✔ **Verificación**

$$19 = 2n + 4$$

$$19 \stackrel{?}{=} 2\left(\frac{15}{2}\right) + 4$$

$$19 \stackrel{?}{=} 15 + 4$$

$$19 = 19$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{15}{2}\right\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ para C si $F = 86$.

EJEMPLO 5

Resolver $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ para C si $F = 68$. (Esta fórmula expresa la relación entre las escalas de temperatura Farenheit y Celsius).

Solución

Sustituir F con 68 para obtener

$$C = \frac{5}{9}(68 - 32)$$

Resolver la ecuación produce:

$$C = \frac{5}{9}(36)$$

$$C = 20$$

Ejemplo de salón de clases
Resolver $A = P + Prt$ para t.

EJEMPLO 6

Resolver $P = 2l + 2w$ para w.

Solución

$$P = 2l + 2w$$

$$P - 2l = 2l + 2w - 2l$$ Sumar a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de $2l$, es decir $-2l$

$$P - 2l = 2w$$

$$\frac{P - 2l}{2} = \frac{2w}{2}$$ Multiplicar a ambos lados de la igualdad por el inverso multiplicativo de 2, es decir $\frac{1}{2}$

$$\frac{P - 2l}{2} = w$$

Problemas verbales

En la última sección del capítulo 2 se tradujeron frases en español a expresiones algebraicas. Ahora está listo para expandir ese concepto y traducir oraciones completas en español a ecuaciones algebraicas. Dichas traducciones permiten usar los conceptos del álgebra para resolver problemas verbales. Considere los siguientes ejemplos:

En el siguiente ejemplo, al enunciado "Sea n el número a encontrar" se le conoce como **declaración de la variable**. Es necesario elegir una letra que se usará como variable e indicar qué representa para un problema específico. Esto puede parecer una idea insignificante, pero conforme los problemas se vuelvan más complejos, el proceso de declarar la variable se vuelve muy importante. El ejemplo 7 podría resolverse sin establecer una ecuación algebraica; sin embargo, conforme los problemas aumentan en dificultad, la traducción del español al álgebra se vuelve un tema central. Por tanto, incluso con estos problemas relativamente sencillos, se le sugiere concentrarse en el proceso de traducción.

Ejemplo de salón de clases
Veintiuno restado de un cierto número da 40. ¿Cuál es el número?

EJEMPLO 7 Aplique su habilidad

Trece restado de cierto número da 86. ¿Cuál es el número?

Solución

Sea n el número a encontrar. El enunciado "Trece restado de cierto número da 86" se traduce en la expresión algebraica $n - 13 = 86$. Recuerde que la substracción no es una operación conmutativa, así que debe ser el 13 el que se reste. Se puede resolver la ecuación de la siguiente manera:

$$n - 13 = 86$$
$$n - 13 + 13 = 86 + 13 \quad \text{Sumar a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de } -13\text{, es decir 13}$$
$$n = 99$$

La solución es 99, que es el número buscado en la pregunta.


Purestock/Jupiter Images

Ejemplo de salón de clases
Dawn trabajó 12 horas en viernes y ganó $111. ¿Cuánto ganó por hora?

EJEMPLO 8 Aplique su habilidad

Betty trabajó 8 horas el sábado y ganó $68. ¿Cuánto ganó por hora?

Solución A

Sea x la cantidad que Betty ganó por hora. El número de horas que trabajó multiplicado por el salario por hora nos da sus ganancias totales. Así:

$$8x = 68$$
$$\frac{8x}{8} = \frac{68}{8}$$
$$x = 8.50$$

Betty ganó $8.50 por hora.

Solución B

Sea y la cantidad que Betty ganó por hora. El salario por hora es igual a la ganancia total dividida entre el número de horas. Así:

$$y = \frac{68}{8}$$
$$y = 8.50$$

Betty ganó $8.50 por hora.

A veces se puede usar más de una ecuación para resolver un problema. En la solución A, se establece la ecuación en términos de multiplicación; mientras que en la solución B, se piensa en términos de división.

Ruth Peterkin/Shutterstock.com

Ejemplo de salón de clases
El costo de un itinerario de diez días en crucero con el "paquete aventura" fue de $1325. Este costo incluyó $950 por la aventura y una cantidad por las tres noches de hospedaje en el campamento previo al inicio de la aventura. Hallar el costo por noche de hospedaje.

EJEMPLO 9 Aplique su habilidad

El costo por unas vacaciones en crucero de cinco días fue de $534. Este costo incluyó $339 para el crucero y una cantidad por las dos noches de hospedaje en la costa. Hallar el costo por noche de hospedaje.

Solución

Sea n el costo de una noche de hospedaje; entonces, $2n$ representa el total del costo de hospedaje. Así, el costo por el crucero y el costo por hospedaje representan el costo total que fue de $534. Se procede de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Costo del crucero} & + & \text{Costo de hospedaje} & = & \$534 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 339 & + & 2n & = & 534 \end{array}$$

Esta ecuación se puede resolver:

$$\begin{aligned} 339 + 2n &= 534 \\ 2n &= 195 \\ \frac{2n}{2} &= \frac{195}{2} \\ n &= 97.50 \end{aligned}$$

El costo del hospedaje por noche es $97.50.

Ejemplo de salón de clases
Ashley pagó $234 por un reproductor de DVD y 4 películas en DVD. El reproductor costó ocho veces más que una película. Hallar el costo del reproductor y el costo de cada película en DVD.

EJEMPLO 10 Aplique su habilidad

Kendall pagó $400 por un pastel de cumpleaños y seis platos de aperitivos. El pastel de cumpleaños costó diez veces más que un plato de aperitivos. Hallar el costo del pastel de cumpleaños y el costo de cada plato de aperitivos.

Solución

Sea d el costo de un plato de aperitivos. Entonces el costo del pastel se representa como $10d$ y el costo de los seis platos se representa como $6d$. El costo total es $400, así que se procede de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Costo del pastel de bodas} & + & \text{Costo de seis platos de aperitivos} & = & \$400 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 10d & + & 6d & = & 400 \end{array}$$

Al resolver esta ecuación, se tiene

$$\begin{aligned} 16d &= 400 \\ d &= 25.00 \end{aligned}$$

El costo de un plato de aperitivos es $25.00 y el costo del pastel de bodas es 10(25.00), o sea: $250.00.

Examen de conceptos 3.2

Para los problemas 1-5, responder falso o verdadero.

1. Sólo se necesita una propiedad de la igualdad para resolver cualquier ecuación.
2. Para verificar las soluciones potenciales, se puede sustituir la solución en la ecuación original para obtener un enunciado numérico verdadero.
3. Al enunciado "sea x el número a encontrar" se le conoce como verificar la variable.
4. A veces pueden existir dos maneras de solucionar un problema verbal.

5. Para resolver la ecuación $\frac{1}{3}x - 2 = 7$, podría comenzar sumando 2 de ambos lados de la ecuación o multiplicando ambos lados por 3.

Para los problemas 6-10, relacionar la oración en español con su ecuación algebraica.

6. Tres sumado al número es 24. **A.** $3x = 24$

7. El producto de 3 y un número es 24. **B.** $3 - x = 24$

8. Tres menos que un número es 24. **C.** $x + 3 = 24$

9. El cociente de un número y tres es 24. **D.** $x - 3 = 24$

10. Un número restado de tres es 24. **E.** $\frac{x}{3} = 24$

Conjunto de problemas 3.2

Para los problemas 1-40, resolver cada ecuación. **(Objetivo 1)**

1. $2x + 5 = 13$ **2.** $3x + 4 = 19$

3. $5x + 2 = 32$ **4.** $7x + 3 = 24$

5. $3x - 1 = 23$ **6.** $2x - 5 = 21$

7. $4n - 3 = 41$ **8.** $5n - 6 = 19$

9. $6y - 1 = 16$ **10.** $4y - 3 = 14$

11. $2x + 3 = 22$ **12.** $3x + 1 = 21$

13. $10 = 3t - 8$ **14.** $17 = 2t + 5$

15. $5x + 14 = 9$ **16.** $4x + 17 = 9$

17. $18 - n = 23$ **18.** $17 - n = 29$

19. $-3x + 2 = 20$ **20.** $-6x + 1 = 43$

21. $7 + 4x = 29$ **22.** $9 + 6x = 23$

23. $16 = -2 - 9a$ **24.** $18 = -10 - 7a$

25. $-7x + 3 = -7$ **26.** $-9x + 5 = -18$

27. $17 - 2x = -19$ **28.** $18 - 3x = -24$

29. $-16 - 4x = 9$ **30.** $-14 - 6x = 7$

31. $-12t + 4 = 88$ **32.** $-16t + 3 = 67$

33. $14y + 15 = -33$ **34.** $12y + 13 = -15$

35. $32 - 16n = -8$ **36.** $-41 = 12n - 19$

37. $17x - 41 = -37$ **38.** $19y - 53 = -47$

39. $29 = -7 - 15x$ **40.** $49 = -5 - 14x$

Para los problemas 41-44, resolver la variable especificada usando los valores dados. **(Objetivo 2)**

41. Resolver $F = \frac{9}{5}C + 32$ para C si $F = 68$.

42. Resolver $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ para F si $C = 15$.

43. Resolver $A = P + Prt$ para t si $A = 652$, $P = 400$, y $r = 0.07$.

44. Resolver $A = P + Prt$ para P si $A = 1032$, $r = 0.06$, y $t = 12$.

Para los problemas 45-50, resolver cada fórmula para la variable indicada. **(Objetivo 3)**

45. $P = 2l + 2w$ para w

46. $F = \frac{9}{5}C + 32$ para C

47. $A = P + Prt$ para t

48. $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ para h

49. $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ para F

50. $A = lw + 2\pi r^2$ para w

Para cada uno de los siguientes problemas, (a) elegir una variable e indicar lo que representa en el problema, (b) establecer una ecuación que represente la situación descrita y (c) resolver la ecuación. **(Objetivo 4)**

51. Doce sumado a cierta cantidad es 21. ¿Cuál es el número?

52. Un cierto número sumado a 14 es 25. Hallar el número.

53. Nueve restado de cierto número es 13. Hallar el número.

54. Un cierto número restado de 32 es 15. ¿Cuál es el número?

55. Si 6 se suma a tres veces cierto número, el resultado es 24. Hallar el número.

56. Si 2 se resta de cinco veces un cierto número, el resultado es 38. Hallar el número.

57. Diecinueve es 4 unidades más grande que tres veces cierto número. Hallar el número.

58. Si a nueve veces cierto número se le resta 7, el resultado es 52. Hallar el número.

59. Si a ocho veces cierto número se le resta 27, el resultado es 3. Hallar el número.

60. Veinte es 22 menos que seis veces cierto número. Hallar el número.

61. Chris compró ocho pizzas por $68. ¿Cuál es el precio por pizza?

62. Chad trabajó 6 horas el sábado por un total de $57. ¿Cuánto ganó por hora?

63. Jill trabajó 8 horas el sábado a $10.50 por hora. ¿Cuánto ganó en total?

64. Imagine que dos objetos cuestan $43. Si uno de los objetos cuesta $25, ¿cuánto cuesta el otro objeto?

65. Un par de calcetines formales cuesta $2.50 más que el par de calcetines deportivos. Randall compró un par de calcetines formales y seis pares de calcetines deportivos por $21.75. Hallar el precio de un par de calcetines formales.

66. Una calculadora y un libro de matemáticas cuestan $285 en la librería de la universidad. El precio del libro es $45 más que el precio de la calculadora. Hallar el precio del libro.

67. La lluvia en junio fue de 11.2 pulgadas. Esto fue una pulgada menos que el doble de la lluvia en julio. Hallar la cantidad de lluvia, en pulgadas, para julio.

68. El almuerzo en el Puesto de Hamburguesas de Joe cuesta $1.75 menos que un almuerzo en el Palacio del Taco de Jodi. Un estudiante gastó su dinero semanal para el almuerzo, que es de $24.50, comiendo cuatro veces en el restaurante de Jodi y una vez en el de Joe. Hallar el costo del almuerzo en el Palacio del Taco de Jodi.

69. Un joyero cobra $550 por un anillo de diamante. Este precio representa $50 menos que el doble del costo del anillo para el joyero. Hallar el costo del anillo para el joyero.

70. Todd sigue una dieta de 1750 calorías por día. Este plan le permite 650 calorías menos que el doble de calorías permitidas en la dieta de Lerae. ¿Cuántas calorías se le permiten a Lerae en su dieta?

71. El largo de un piso rectangular es 18 metros. Este largo es 2 metros menos que cinco veces el ancho del piso. Hallar el ancho del piso.

72. Un ejecutivo gana $145,000 por año. Esto es $15,000 menos que el doble de su salario hace 4 años. Hallar su salario hace cuatro años.

73. En el año 2000, se estimaba que había 874 millones de hablantes de chino mandarín. Esto significaba 149 millones menos que tres veces el número de angloparlantes. Con este estimado, ¿cuántos angloparlantes había en el año 2000?

74. La cuenta de una compañía de limusinas fue $510. Esto incluyó $150 por el servicio y $80 por cada hora de uso. Hallar el número de horas que se usó la limusina.

75. Robin pagó una cuenta de $454 por un sistema de DVD para su auto. Esto incluyó $379 por el reproductor de DVD y $60 por hora de instalación. Hallar el número de horas que tomó instalar el sistema de DVD.

76. Tracy recibió una cuenta de cargos a su celular de $136.74. Ese precio incluía cargos de $69.99 por el plan mensual y un cargo de 267 minutos extra. ¿Cuánto se le cobra a Tracy por minuto extra?

En el Apéndice A podrá encontrar problemas verbales adicionales. Todos los problemas en el Apéndice marcados como (3.2) son apropiados para esta sección.

Pensamientos en palabras

77. Dar una descripción paso a paso de cómo resolver la ecuación $17 = 23x + 2$.

78. ¿Qué significa la frase "declaración de variable" cuando se usa en la resolución de un problema verbal?

79. Imagine que está ayudando a un amigo con su tarea y resuelve la ecuación $19 = 14 - x$ así:

$$19 = 14 - x$$
$$19 + x = 14 - x + x$$
$$19 + x = 14$$
$$19 + x - 19 = 14 - 19$$
$$x = -5$$

El conjunto solución es {-5}.

¿Obtuvo el conjunto solución correcto? ¿Qué podría hacer usted para ayudarlo con su método de resolución de la ecuación?

Respuestas del examen de conceptos

1. Falso **2.** Verdadero **3.** Falso **4.** Verdadero **5.** Verdadero **6.** C **7.** A **8.** D **9.** E **10.** B

3.3 Más acerca de resolución de ecuaciones y problemas

OBJETIVOS

1. Resolver ecuaciones de primer grado simplificando ambos lados y luego aplicando las propiedades de la igualdad
2. Resolver problemas verbales en los que varias cantidades se representen en términos de una misma variable
3. Resolver problemas verbales que involucran relaciones geométricas

Conforme las ecuaciones se vuelven más complejas, se necesitan más herramientas para resolverlas. Necesita organizar su trabajo con cuidado para minimizar sus probabilidades de cometer un error. Esta sección comienza con algunas sugerencias para resolver ecuaciones y después se ilustrará un *formato de solución* que es efectivo.

Se puede resumir el proceso para resolver ecuaciones de primer grado con una variable con los siguientes tres pasos:

Paso 1 Simplifique ambos lados de la ecuación tanto como sea posible.

Paso 2 Use la propiedad aditiva de la igualdad para aislar un término que contenga la variable en un lado de la ecuación y una constante en el otro lado.

Paso 3 Use la propiedad multiplicativa de la igualdad para lograr que el coeficiente de la variable sea igual a 1.

Los siguientes ejemplos ilustran este proceso paso por paso para resolver ecuaciones. Estudie estos ejemplos con cuidado y asegúrese de entender cada paso en el proceso.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $7m + 1 - 3m = 21$.

EJEMPLO 1 Resolver $5y - 4 + 3y = 12$.

Solución

$$5y - 4 + 3y = 12$$

$$8y - 4 = 12 \qquad \text{Agrupar términos similares en el lado izquierdo}$$

$$8y - 4 + 4 = 12 + 4 \qquad \text{Sumar a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de } -4$$

$$8y = 16$$

$$\frac{8y}{8} = \frac{16}{8} \qquad \text{Multiplicar a ambos lados de la igualdad por el inverso multiplicativo de 8, es decir } \frac{1}{8}$$

$$y = 2$$

El conjunto solución es $\{2\}$. Ahora puede verificar esta respuesta por su cuenta.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $8w + 5 = 2w - 3$.

EJEMPLO 2 Resolver $7x - 2 = 3x + 9$.

Solución

Note que ambos lados de la ecuación están simplificados. Entonces, se puede empezar aplicando la propiedad aditiva de la igualdad.

$$7x - 2 = 3x + 9$$

$$7x - 2 - 3x = 3x + 9 - 3x$$ Sumar a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de $3x$

$$4x - 2 = 9$$

$$4x - 2 + 2 = 9 + 2$$ Sumar a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de -2

$$4x = 11$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{11}{4}$$ Multiplicar a ambos lados de la igualdad por el inverso multiplicativo de 4, es decir $\frac{1}{4}$

$$x = \frac{11}{4}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{11}{4}\right\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $3d + 1 = 4d - 3$.

EJEMPLO 3 Resolver $5n + 12 = 9n - 16$.

Solución

$$5n + 12 = 9n - 16$$

$$5n + 12 - 9n = 9n - 16 - 9n$$ Sumar a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de $9n$

$$-4n + 12 = -16$$

$$-4n + 12 - 12 = -16 - 12$$ Sumar a ambos lados de la igualdad l inverso aditivo de 12

$$-4n = -28$$

$$\frac{-4n}{-4} = \frac{-28}{-4}$$ Multiplicar por el inverso multiplicativo de -4, es decir $-\frac{1}{4}$

$$n = 7$$

El conjunto solución es $\{7\}$.

Problemas verbales

Conforme mejore sus habilidades para resolver ecuaciones, también ampliará su capacidad para resolver problemas verbales. No existe un procedimiento definitivo que garantice el éxito en la resolución de problemas verbales, pero las siguientes sugerencias pueden ser útiles.

Sugerencias para resolver problemas verbales

1. Lea cuidadosamente el problema y asegúrese de comprender el significado de todas las palabras. Esté especialmente alerta ante cualquier término técnico que se use en el enunciado del problema.
2. Lea el problema una segunda vez (incluso una tercera ocasión) para obtener un panorama de la situación descrita. Determine los hechos conocidos así como lo que debe encontrar.
3. Bosqueje cualquier figura, diagrama o gráfico que pueda ayudarle a analizar el problema.
4. Elija una variable significativa para representar una cantidad desconocida en el problema (quizá t, si el tiempo es una cantidad desconocida) y represente cualquiera otra incógnita en términos de dicha variable.
5. Busque una **guía** que pueda usar para establecer una ecuación. Una guía puede ser una fórmula, como *distancia igual a rapidez por tiempo*, o un enunciado de una relación, como "la suma de los dos números es 28". Una guía también puede ser indicada por la figura o diagrama que bosqueje para un problema en particular.

(*continúa*)

6. Formule una ecuación que contenga la variable y que traduzca las condiciones de la guía del español al álgebra.
7. Resuelva la ecuación y use la solución para determinar todos los hechos que se solicitan en el problema.
8. **Compruebe todas las respuestas en el enunciado original del problema y verifique que las respuestas obtenidas tengan sentido.**

Si decide no verificar una respuesta, al menos use la idea de una respuesta razonable como verificación parcial. Es decir, hágase la siguiente pregunta: ¿Esta respuesta es razonable? Por ejemplo, si el problema involucra dos inversiones que suman $10,000 en total, entonces la respuesta $12,000 por una de las inversiones ciertamente no es una respuesta razonable.

Ahora considere algunos ejemplos y reflexione sobre estas sugerencias mientras los trabaja.

Problemas de números consecutivos

Algunos problemas incluyen números consecutivos o números pares o impares consecutivos. Por ejemplo, 7, 8, 9 y 10 son números consecutivos. Para resolver estos problemas, debe saber cómo representar números consecutivos con variables. Sea n el primer número. Para números consecutivos, el siguiente número es 1 más y se representa como $n + 1$. Para continuar, sumar 1 a cada expresión, obteniendo las representaciones aquí mostradas:

$$\begin{array}{cccc} 7 & 8 & 9 & 10 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ n & n+1 & n+2 & n+3 \end{array}$$

El patrón es un tanto diferente para los números consecutivos pares o impares. Por ejemplo, 2, 4, 6 y 8 son números pares consecutivos. Sea n el primer número; entonces $n + 2$ representa el siguiente número par. Para continuar, se suma 2 a cada expresión, obteniendo estas representaciones:

$$\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 6 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ n & n+2 & n+4 & n+6 \end{array}$$

Los números impares consecutivos siguen el mismo patrón de sumar 2 a cada expresión porque los número impares consecutivos son números impares con uno y sólo un número entero entre ellos.

Ejemplo de salón de clases
Hallar dos números pares consecutivos cuya suma sea 42.

EJEMPLO 4 Aplique su habilidad

Hallar dos números pares consecutivos cuya suma sea 74.

Solución

Sea n el primer número; entonces $n + 2$ representa el siguiente número par. Debido a que la suma es 74, se puede plantear y resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} n + (n + 2) &= 74 \\ 2n + 2 &= 74 \\ 2n + 2 - 2 &= 74 - 2 \\ 2n &= 72 \\ \frac{2n}{2} &= \frac{72}{2} \\ n &= 36 \end{aligned}$$

Si $n = 36$, entonces $n + 2 = 38$; por ende, los números son 36 y 38.

✔ Verificación

Para verificar sus respuestas para el ejemplo 4, determinar si los números satisfacen las condiciones planteadas en el problema original. Debido a que 36 y 38 son dos números pares consecutivos, y $36 + 38 = 74$ (su suma es 74), sabemos que las respuestas son correctas. ■

El quinto punto en la lista de sugerencias para resolver problemas es buscar una *guía* que pueda usarse para plantear una ecuación. La guía puede no estar explícitamente enunciada en el problema, pero puede que esté implícita en la naturaleza del problema. Considere el siguiente ejemplo:

Ejemplo de salón de clases
Tyron vende utensilios y recibe una comisión de venta además de su salario. Al mes, recibe un salario de $550 y una comisión de $95 por cada utensilio que vende. ¿Cuántos utensilios debe vender en un mes para ganar un salario total de $1,120?

EJEMPLO 5 Aplique su habilidad

Barry vende bicicletas y recibe una comisión de venta además de su salario. Cada semana, recibe un salario de $300 y una comisión de $15 por cada bicicleta que vende. ¿Cuántas bicicletas debe vender en una semana para ganar un total semanal de $750?

Solución

Sea b el número de bicicletas a vender en una semana. Entonces $15b$ representa su comisión por esas bicicletas. La guía “salario fijo más comisión es igual al salario semanal total” genera la siguiente ecuación:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Salario fijo} & + & \text{Comisión} & = & \text{Salario semanal total} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \$300 & + & 15b & = & \$750 \end{array}$$

Al resolver esta ecuación se obtiene:

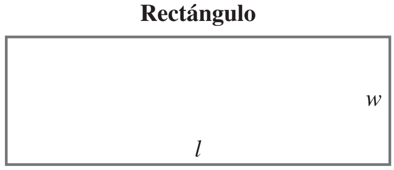
$$\begin{aligned} 300 + 15b - 300 &= 750 - 300 \\ 15b &= 450 \\ \frac{15b}{15} &= \frac{450}{15} \\ b &= 30 \end{aligned}$$

Barry debe vender 30 bicicletas por semana. (¿Este número es razonable?) ■

Fórmulas geométricas

Aquí hay algunas figuras y fórmulas que se usan frecuentemente en la geometría. Estas fórmulas se usarán periódicamente a lo largo del texto. Estas fórmulas (junto con otras) y las figuras 3.1 a 3.6 también aparecen en el interior de la portada de este libro.

Rectángulo

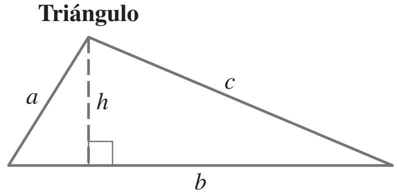


$A = lw \qquad P = 2l + 2w$

A área
P perímetro
l largo
w ancho

Figura 3.1

Triángulo

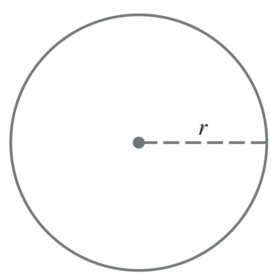


$A = \frac{1}{2}bh \qquad P = a + b + c$

A área
b base
h altitud (altura)

Figura 3.2

Círculo

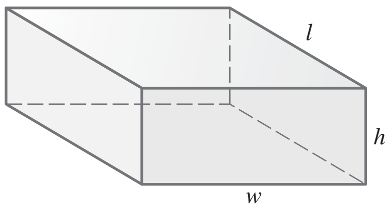


$A = \pi r^2 \qquad C = 2\pi r$

A área
C circunferencia
r radio

Figura 3.3

Prisma rectangular

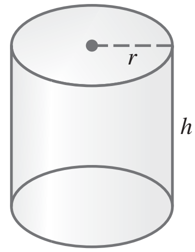


$V = lwh \qquad S = 2hw + 2hl + 2lw$

V volumen
S área total de la superfcie
w ancho
l largo
h altitud (altura)

Figura 3.4

Cilindro rectangular

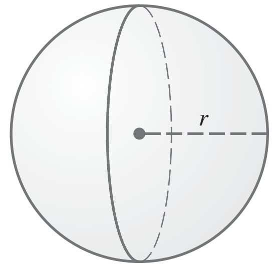


$V = \pi r^2 h \qquad S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

V volumen
S área total de la superficie
r radio
h altitud (altura)

Figura 3.5

Esfera



$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad S = 4\pi r^2$

S área de la superficie
V volumen
r radio

Figura 3.6

Ejemplo de salón de clases
Hallar el área total de la superficie de un prisma rectangular que tiene 3 cm. de ancho, 5 cm. de largo y 8 cm. de altura.

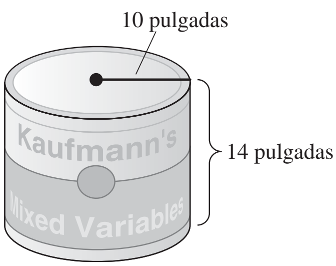


Figura 3.7

EJEMPLO 6 Aplique su habilidad

Hallar el área total de la superficie de un cilindro rectangular que tiene 10 pulgadas de radio y 14 pulgadas de altura.

Solución

Se debe bocetar un cilindro rectangular y registrar la información dada como se muestra en la figura 3.7. Sustituir r con 10 y h con 14 en la fórmula para sacar el área de la superficie de un cilindro rectangular para obtener:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi r^2 + 2\pi rh \\ &= 2\pi(10)^2 + 2\pi(10)(14) \\ &= 200\pi + 280\pi \\ &= 480\pi \end{aligned}$$

El área total de la superficie es 480π pulgadas cuadradas.

En el ejemplo 6 se usó la figura para registrar la información, y también sirvió como recordatorio de la figura geométrica a considerar. Ahora considere un ejemplo en el que la figura ayude a analizar el problema.

Ejemplo de salón de clases
Un edificio de oficinas en construcción tendrá 20 baños. Para cada baño, el constructor necesita ordenar azulejos para el piso rectangular que mide 25 pies por 20 pies. Imagine que los azulejos cuestan \$3.00 por pie cuadrado, ¿cuál será el costo de azulejo por todos los baños en el edificio de oficinas?

EJEMPLO 7 Aplique su habilidad

Un complejo de departamentos en construcción tendrá 150 departamentos. El diseñador necesita ordenar pisos de madera para las entradas rectangulares que miden 8 pies por 4.5 pies. Imagine que el piso cuesta \$2.00 por pie cuadrado, ¿cuánto costará el piso para todas la entradas del complejo de departamentos?

Solución

Primero, determine el área de la entrada sustituyendo el largo por 8 pies y el ancho con 4.5 en la fórmula para el área de un rectángulo.

$$A = lw$$
$$A = (8 \text{ pies})\,(4.5 \text{ pies}) = 36 \text{ pies cuadrados}$$

Entonces, el área de una entrada es 36 pies cuadrados. Multiplicar el resultado por 150 para hallar las medidas de todas las entradas del complejo de departamentos.

$$\text{Área de todas las enrtadas} = \frac{36 \text{ pies cuadrados}}{1 \text{ departamento}} \cdot 150 \text{ departamentos} = 400 \text{ pies cuadrados}$$

Ahora multiplique el total de pies cuadrados por \$2.00 por pie cuadrado para obtener el costo.

Costo = (5400 pies cuadrados)(\$2.00 por pie cuadrado) = \$10,800

Entonces, poner el piso para todas las entradas del complejo costará \$10,800.

Problemas geométricos

A veces la guía para plantear una ecuación para resolver un problema está basada en la relación geométrica. Varias relaciones geométricas básicas pertenecen a medidas angulares. Se plantean algunas de estas relaciones y después se consideran algunos ejemplos.

1. Dos ángulos cuya suma es 90° (el símbolo ° indica grados) son llamados **ángulos complementarios**.
2. Dos ángulos cuya suma es 180° son llamados **ángulos suplementarios**.
3. La suma de las medidas de los tres ángulos de un triángulo es 180°.

Ejemplo de salón de clases
Uno de dos ángulos suplementarios es 26° más chico que el otro. Hallar la medida de cada uno de los ángulos.

EJEMPLO 8 Aplique su habilidad

Uno de dos ángulos complementarios es 14° más grande que el otro. Hallar la medida de cada uno de los ángulos.

Solución

Sea a la medida del ángulo más pequeño, entonces $a + 14$ representa la medida del ángulo más grande. Ya que son ángulos complementarios, su suma es 90° y se puede proceder de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a + (a + 14) &= 90 \\ 2a + 14 &= 90 \\ 2a + 14 - 14 &= 90 - 14 \\ 2a &= 76 \\ \frac{2a}{2} &= \frac{76}{2} \\ a &= 38 \end{aligned}$$

Si $a = 38$, entonces $a + 14 = 52$ y los ángulos miden 38° y 52°.

Ejemplo de salón de clases
Hallar las medidas de los tres ángulos de un triángulo si el segundo ángulo es el doble de grande que el primer ángulo y el tercer ángulo mide la mitad del segundo.

EJEMPLO 9 Aplique su habilidad

Hallar las medidas de los tres ángulos de un triángulo si el segundo es tres veces más grande que el primero y el tercero mide dos veces más que el segundo.

Solución

Sea a la medida del ángulo más pequeño, entonces $3a$ y $2(3a)$ representan las medidas de los otros dos ángulos. Por ende, se puede plantear y resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} a + 3a + 2(3a) &= 180 \\ a + 3a + 6a &= 180 \\ 10a &= 180 \\ \frac{10a}{10} &= \frac{180}{10} \\ a &= 18 \end{aligned}$$

Si $a = 18$, entonces $3a = 54$ y $2(3a) = 108$. Entonces los ángulos tienen las medidas de 18°, 54° y 108°.

Para los problemas 1-8, responder falso o verdadero.

1. Si n representa un número entero, entonces $n + 1$ representa el siguiente número entero consecutivo.
2. Si n representa un número impar, entonces $n + 1$ representa el siguiente número impar consecutivo.
3. Si n representa un número par, entonces $n + 2$ representa el siguiente número par consecutivo.
4. La suma de las medidas de dos ángulos complementarios es 90º.
5. La suma de las medidas de dos ángulos suplementarios es 360º.
6. La suma de las medidas de los tres ángulos de un triángulo es 120º.
7. Para verificar los resultados de un problema verbal, basta con verificar la solución en la ecuación.
8. Para un problema verbal, la sensatez de una respuesta es apropiada como verificación parcial.

Conjunto de problemas 3.3

Para los problemas 1-30, resolver cada ecuación. **(Objetivo 1)**

1. $2x + 7 + 3x = 32$
2. $3x + 9 + 4x = 30$
3. $7x - 4 - 3x = -36$
4. $8x - 3 - 2x = -45$
5. $3y - 1 + 2y - 3 = 4$
6. $y + 3 + 2y - 4 = 6$
7. $5n - 2 - 8n = 31$
8. $6n - 1 - 10n = 51$
9. $-2n + 1 - 3n + n - 4 = 7$
10. $-n + 7 - 2n + 5n - 3 = -6$
11. $3x + 4 = 2x - 5$
12. $5x - 2 = 4x + 6$
13. $5x - 7 = 6x - 9$
14. $7x - 3 = 8x - 13$
15. $6x + 1 = 3x - 8$
16. $4x - 10 = x + 17$
17. $7y - 3 = 5y + 10$
18. $8y + 4 = 5y - 4$
19. $6n - 3 = 2n - 23$
20. $7n - 10 = 9n - 13$
21. $-2x - 7 = -3x + 10$
22. $-4x + 6 = -5x - 9$
23. $-3x + 5 = -5x - 8$
24. $-x + 6 = -2x - 8$
25. $-7 - 6x = 9 - 9x$
26. $-10 - 7x = 14 - 12x$
27. $5n - 4 - n = -3n - 6 + n$
28. $4x - 3 + 2x = 8x - 3 - x$
29. $-7 - 2n - 6n = 7n - 5n + 12$
30. $-3n + 6 + 5n = 7n - 8n - 9$

Para los problemas 31-67, resolver cada problema verbal planteando y resolviendo una ecuación algebraica. Usar las fórmulas geométricas dadas en esta sección para ayudar a resolver los problemas. **(Objetivos 2 y 3)**

31. La suma de un número más cuatro veces el número es 85. ¿Cuál es el número?
32. Un número restado de tres veces el número es 68. Hallar el número.
33. Hallar dos números impares consecutivos cuya suma sea 72.
34. Hallar dos números pares consecutivos cuya suma sea 94.
35. Hallar tres números pares consecutivos cuya suma sea 114.
36. Hallar tres números impares consecutivos cuya suma sea 159.
37. Hallar el perímetro de un rectángulo que tiene 14 cm de largo y 9 cm de ancho.
38. Si el perímetro de un rectángulo es 80 cm y su largo es 24 cm, hallar su ancho.
39. Si el perímetro de un rectángulo es 108 pulgadas y su largo mide $3\frac{1}{4}$ pies, hallar su ancho en pulgadas.

40. ¿Cuántas yardas de reja se necesitan para cercar un terreno rectangular que mide 69 pies de largo y 42 pies de ancho?

41. Imagine que la pintura cuesta \$8.00 por litro y que 1 litro cubre 9 metros cuadrados de superficie. Se van a pintar (sólo de un lado) 50 piezas de madera del mismo tamaño que tienen un largo de 0.6 metros y de ancho 0.3 metros. ¿Cuál será el costo de la pintura?

42. Un jardín tiene forma rectangular con un lado midiendo 130 pies de largo y la altura hacia ese lado mide 60 pies. ¿Una bolsa de fertilizante que cubre 400 pies cuadrados será suficiente para fertilizar todo el jardín?

43. En la figura 3.8 notará que el diámetro de una arandela de metal es 4 centímetros. El diámetro del hoyo es 2 centímetros. ¿Cuántos centímetros cuadrados de metal hay en 50 arandelas? Exprese su respuesta en términos de π.

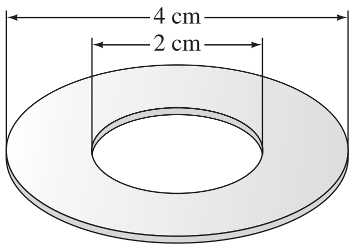


Figura 3.8

44. Hallar el área de un terreno circular que mide 14 metros de radio. Usar $3\frac{1}{7}$ como una aproximación de π.

45. Hallar el área de una región circular que tiene un diámetro de 1 yarda. Expresar la respuesta en términos de π.

46. Hallar el área de una región circular si la circunferencia mide 12π. Expresar la respuesta en términos de π.

47. Hallar el volumen de una esfera que tiene 9 pulgadas de radio. Expresar la respuesta en términos de π.

48. Hallar el volumen de un cilindro rectangular cuyo radio mide 8 pies y tiene una altura de 18 pies. Expresar la respuesta en términos de π.

49. Hallar el área total de la superficie de una esfera que tiene un diámetro de 12 centímetros. Expresar la respuesta en términos de π.

50. Si el volumen de un cono es 324π pulgadas cúbicas, y el radio de la base mide 9 pulgadas, hallar la altura del cono.

51. Hallar el área total de la superficie de una lata de metal si el radio de su base mide 3 centímetros y la altura de la lata es de 10 centímetros. Expresar la respuesta en términos de π.

52. Uno de los ángulos suplementarios es cinco veces más grande que el otro. Hallar la medida de cada ángulo.

53. Uno de los ángulos complementarios es 6° más chico que el doble del otro ángulo. Hallar la medida de cada ángulo.

54. Si dos ángulos son complementarios y la diferencia entre ellos es 62°, hallar la medida de cada ángulo.

55. Si dos ángulos son suplementarios y el ángulo más grande es 20° menos que tres veces el ángulo más chico, hallar la medida de cada ángulo.

56. Hallar las medidas de los tres ángulos de un triángulo si el más grande es 14° más chico que tres veces el más chico y el otro es 4º más grande que el más chico.

57. Uno de los ángulos de un tríangulo tiene una medida de 40°. Hallar las medidas de los otros dos ángulos si la diferencia entre ellos es 10º.

58. Jesstan trabajó como vendedor televisivo con sueldo fijo más comisiones. Le pagaban un salario mensual de \$300 y \$12 de comisión por cada venta. Si sus ganancias de la semana fueron \$960, ¿cuántas ventas hizo?

59. Marci vendió un jarrón antiguo en una subasta en línea por \$69.00. Esto fue \$15 menos que el doble de lo que ella pagó por él. ¿Cuánto pagó ella por el jarrón?

60. Un conjunto de llantas se vendió en una subasta en línea por \$560. Esto fue \$35 más que el triple de la oferta inicial. ¿De cuánto fue la oferta inicial?

61. Imagine que a Bob le pagan el doble de su salario por hora normal después de haber trabajado más de 40 horas en una semana. La semana pasada ganó \$504 por 48 horas de trabajo. ¿Cuánto suele ganar por hora?

62. La semana pasada en un examen de álgebra, la calificación más alta fue 9 puntos menos que el triple de la calificación más baja. La suma de las dos calificaciones fue 135. Hallar la calificación más baja y la más alta del examen.

63. En un concierto patrocinado por una universidad, asistieron tres veces más mujeres que hombres. Un total de 600 personas asistieron al concierto. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres asistieron?

64. Imagine que un terreno triangular está rodeado por 135 yardas de cerca (ver la figura 3.9). El lado más largo del terreno es 5 yardas más grande que el más corto. El otro lado es 10 yardas más grande que el más corto. Hallar las medidas de los tres lados del terreno.

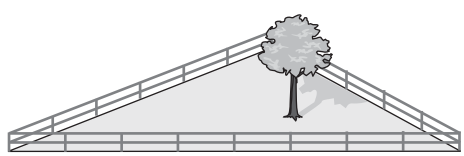


Figura 3.9

65. El libro de texto para una clase de biología cuesta \$15 más que el doble de lo que cuesta un libro de texto de álgebra usado. Si el costo de los dos libros juntos es de \$129, hallar el costo del libro de biología.

66. Un plan de nutrición cuenta gramos de grasa, carbohidratos y fibra. Los gramos de carbohidratos deben ser 15 más que el doble de gramos de grasa. Los gramos de fibra deben ser tres menos que los gramos de grasa. Si los gramos de carbohidratos, grasa y fibra deben sumar 48 gramos para una comida, ¿cuántos gramos de cada uno debe de haber en dicha comida?

67. En un restaurante local, \$275 de propinas debe repartirse entre el mesero, el encargado del bar y el mozo. El mesero recibe \$25 más que el triple de lo que recibe el mozo. El encargado del bar recibe \$50 más de lo que el mozo recibe. ¿Cuánto recibe el mesero?

En el Apéndice A podrá encontrar más problemas verbales. Todos los problemas en el Apéndice marcados como (3.3) son apropiados para esta sección.

Pensamientos en palabras

68. Dar una descripción paso por paso de cómo resolver la ecuación $3x + 4 = 5x - 2$.

69. Imagine que su amiga resolvió el problema "hallar dos números impares consecutivos cuya suma sea 28" de la siguiente manera:

$$x + (x + 1) = 28$$
$$2x = 27$$
$$x = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}$$

Ella dice que $13\frac{1}{2}$ funciona en la ecuación. ¿Dónde se equivocó y cómo puede ayudarla?

Respuestas del examen de conceptos

1. Verdadero **2.** Falso **3.** Verdadero **4.** Verdadero **5.** Falso **6.** Falso **7.** Falso **8.** Verdadero

3.4 Ecuaciones que implican paréntesis y expresiones fraccionarias

OBJETIVOS

1 Resolver ecuaciones de primer grado que involucran el uso de la propiedad distributiva

2 Resolver ecuaciones de primer grado que son contradictorias

3 Resolver ecuaciones de primer grado que son identidades

4 Resolver ecuaciones de primer grado que involucran expresiones fraccionarias

5 Resolver una ecuación para una variable específica

6 Resolver problemas verbales diversos que involucran ecuaciones de primer grado

Se usará la propiedad distributiva frecuentemente en esta sección conforme se sume a nuestras técnicas para resolver ecuaciones. Recuerde que, en símbolos, la propiedad distributiva enuncia que $a(b + c) = ab + ac$. Considere los siguientes ejemplos que ilustran el uso de esta propiedad para remover paréntesis. Ponga especial atención a los últimos dos ejemplos que involucran un número negativo frente al paréntesis.

$$\begin{aligned}
3(x + 2) &= 3 \cdot x + 3 \cdot 2 &&= 3x + 6 \\
5(y - 3) &= 5 \cdot y - 5 \cdot 3 &&= 5y - 15 \qquad a(b - c) = ab - ac \\
2(4x + 7) &= 2(4x) + 2(7) &&= 8x + 14 \\
-1(n + 4) &= (-1)(n) + (-1)(4) &&= -n - 4 \\
-6(x - 2) &= (-6)(x) - (-6)(2) &&= -6x + 12
\end{aligned}$$

¡Haga este paso mentalmente!

Suele ser necesario resolver ecuaciones en las cuales la variable es parte de una expresión dentro del paréntesis. Se usa la propiedad distributiva para remover el paréntesis y después proceder de la manera usual. Considere los siguientes ejemplos. (Note que se muestran sólo los pasos más importantes de la resolución).

Ejemplo de salón de clases
Resolver $2(d - 5) = 5$.

EJEMPLO 1 Resolver $3(x + 2) = 23$.

Solución

$$3(x + 2) = 23$$

$$3x + 6 = 23 \quad \text{Se aplicó la propiedad distributiva en el lado izquierdo}$$

$$3x = 17 \quad \text{Se sumo a ambos lados de la igualdad el inverso multiplicativo de 6}$$

$$x = \frac{17}{3} \quad \text{Se multiplicó a ambos lados de la igualdad por inverso multiplicativo de 3, es decir } \frac{1}{3}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{17}{3}\right\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $3(m - 1) = 6\ (m + 2)$.

EJEMPLO 2 Resolver $4(x + 3) = 2(x - 6)$.

Solución

$$4(x + 3) = 2(x - 6)$$

$$4x + 12 = 2x - 12 \quad \text{Se aplicó la propiedad distributiva en ambos lados}$$

$$2x + 12 = -12 \quad \text{Sumar a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de } 2x$$

$$2x = -24 \quad \text{Sumar a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de 12, es decir } -12$$

$$x = -12 \quad \text{Se multiplicó a ambos lados de la igualdad por el recíproco de 2, es decir } \frac{1}{2}$$

El conjunto solución es

Puede llegar a ser necesario remover más de un conjunto de paréntesis y después usar la propiedad distributiva de nuevo para agrupar términos similares. Considere los siguientes dos ejemplos.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $2(t + 4) + 6(t + 5) = 32$.

EJEMPLO 3 Resolver $5(w + 3) + 3(w + 1) = 14$.

Solución

$$5(w + 3) + 3(w + 1) = 14$$

$$5w + 15 + 3w + 3 = 14 \quad \text{Se aplicó la propiedad distributiva}$$

$$8w + 18 = 14 \quad \text{Se agruparon términos similares}$$

$$8w = -4 \quad \text{Se sumó a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de 18}$$

$$w = -\frac{4}{8} \quad \text{Se multiplicó a ambos lados de la igualdad por el reciproco de 8, es decir } \frac{1}{8}$$

$$w = -\frac{1}{2} \quad \text{Reducido}$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $4(w - 3) - 8(w - 2) = 9$.

EJEMPLO 4 Resolver Solve $6(x - 7) - 2(x - 4) = 13$.

Solución

$$6(x - 7) - 2(x - 4) = 13$$ ¡Tenga cuidado con este signo!

$$6x - 42 - 2x + 8 = 13$$ Propiedad distributiva

$$4x - 34 = 13$$ Se agruparon términos similares

$$4x = 47$$ Se sumó alado y lado de la igualdad el inverso aditivo de -34

$$x = \frac{47}{4}$$ Se multiplicó a lado y lado de la igualdad por el reciproco de 4, es decir $\frac{1}{4}$

El conjunto solución es $\left\{\frac{47}{4}\right\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $2(m + 5) = 2m - 3$.

EJEMPLO 5 Resolver $2(3x + 4) = 6x - 2$.

Solución

$$2(3x + 4) = 6x - 2$$

$$6x + 8 = 6x - 2$$ Se aplicó la propiedad distributiva en el lado izquierdo

$$6x + 8 - 6x = 6x - 2 - 6x$$ Se sumó a lado y lado de la igualdad el inverso aditivo de $6x$, es decir $-6x$

$$8 = -2$$ Enunciado falso

Debido a que se obtuvo una ecuación equivalente que es un enunciado falso, no hay valor para x que vuelva a esta ecuación un enunciado verdadero. Cuando la ecuación no es verdadera bajo ninguna condición, entonces a la ecuación se le llama una **contradicción**. El conjunto solución para una ecuación que es una contradicción es el conjunto vacío o nulo, y se representa con $\varnothing$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $3n + 4 = 4(2n + 1) - 5n$.

EJEMPLO 6 Resolver $2(2x + 3) - x = 3(x + 2)$.

Solución

$$2(2x + 3) - x = 3(x + 2)$$

$$4x + 6 - x = 3x + 6$$ Se aplicó la propiedad distributiva a ambos lados

$$3x + 6 = 3x + 6$$ Agrupar términos similares en el lado izquierdo

$$3x + 6 - 3x = 3x + 6 - 3x$$ Sumar a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de $3x$, es decir $-3x$

$$6 = 6$$ Enunciado verdadero

Ya que se obtuvo una ecuación equivalente que es un enunciado verdadero, cualquier valor de x hará de la ecuación un enunciado verdadero. Cuando la ecuación es verdadera con cualquier valor de la variable, la ecuación es llamada una **identidad**. El conjunto solución de una ecuación que es una identidad es el conjunto de números reales. Se denotará el conjunto de números reales como [todos los reales].

En una sección previa, se resolvían ecuaciones como $x - \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$ sumando a ambos lados de la igualdad el inverso de $-\frac{2}{3}$, es decir $\frac{2}{3}$ en ambos. Si una ecuación contiene varias fracciones, entonces suele ser más fácil eliminar todas las fracciones multiplicando ambos lados por el mínimo común denominador de todos los denominadores. Aclaremos esta idea mediante varios ejemplos.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $\frac{1}{3}y + \frac{3}{4} = \frac{7}{12}$.

EJEMPLO 7 Resolver $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$.

Solución

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

$$6\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}\right) = 6\left(\frac{5}{6}\right) \quad \text{6 es el MCD de 2, 3 y 6}$$

$$6\left(\frac{1}{2}x\right) + 6\left(\frac{2}{3}\right) = 6\left(\frac{5}{6}\right) \quad \text{Propiedad distributiva}$$

$$3x + 4 = 5 \quad \text{Note cómo se han eliminado las fracciones de la ecuación}$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $\frac{5x}{12} - \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

EJEMPLO 8 Resolver $\frac{5n}{6} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$.

Solución

$$\frac{5n}{6} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$$24\left(\frac{5n}{6} - \frac{1}{4}\right) = 24\left(\frac{3}{8}\right) \quad \text{24 es el MCD de 6, 4 y 8}$$

$$24\left(\frac{5n}{6}\right) - 24\left(\frac{1}{4}\right) = 24\left(\frac{3}{8}\right) \quad \text{Propiedad distributiva}$$

$$20n - 6 = 9$$

$$20n = 15$$

$$n = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{3}{4}\right\}$.

Cambiar la forma de las ecuaciones

En el capítulo 8 trabajará con ecuaciones que contienen dos variables. A veces necesitará resolver una variable en términos de otra variable; es decir, cambiar la forma de la ecuación de la misma manera que lo hizo con las fórmulas. Los siguientes ejemplos ilustran de nuevo cómo se pueden usar las propiedades de la igualdad en tales situaciones.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $4x + 3y = 9$ para x.

EJEMPLO 9 Resolver $3x + y = 4$ para x.

Solución

$$3x + y = 4$$

$$3x + y - y = 4 - y \quad \text{Sumar a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de } y\text{, es decir } -y$$

$$3x = 4 - y$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{4 - y}{3} \quad \text{Multiplicar por el reciproco de 3 a ambos lados de la igualdad,es decir por } \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{4 - y}{3}$$

Ejemplo de salón de clases
Resolver $2x - 3y = 10$ para y.

EJEMPLO 10 Resolver $4x - 5y = 7$ para y.

Solución

$$4x - 5y = 7$$

$$4x - 5y - 4x = 7 - 4x$$ Sumar a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de $4x$, es decir $-4x$

$$-5y = 7 - 4x$$

$$\frac{-5y}{-5} = \frac{7 - 4x}{-5}$$ Multiplicar a ambos lados de la igualdad por el inverso multiplicativo de -5, es decir $-\frac{1}{5}$

$$y = \frac{7 - 4x}{-5}\left(\frac{-1}{-1}\right)$$ Multiplicar el numerador y denominador de la fracción a la derecha por -1; suele hacerse esto para que el denominador sea positivo

$$y = \frac{4x - 7}{5}$$

Ejemplo de salón de clases
Resolver $y = mx + b$ para x.

EJEMPLO 11 Resolver $y = mx + b$ para m.

Solución

$$y = mx + b$$

$$y - b = mx + b - b$$ Sumar a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de b, es decir $-b$

$$y - b = mx$$

$$\frac{y - b}{x} = \frac{mx}{x}$$ Multiplicar a ambos lados de la igualdad por el inverso multiplicativo de x, es decir $\frac{1}{x}$

$$\frac{y - b}{x} = m$$

Problemas verbales

Ahora está listo para resolver algunos problemas verbales usando los diferentes tipos de ecuaciones presentados en esta sección. De nuevo, puede serle útil intentar resolverlos por su cuenta antes de estudiar la forma presentada en el libro.

Ejemplo de salón de clases
Ian tiene 23 monedas (de diez y cinco centavos) que suman \$1.45. ¿Cuántas monedas tiene de cada tipo?

EJEMPLO 12 Aplique su habilidad

Loretta tiene 19 monedas (de veinticinco y cinco centavos) que suman \$2.35. ¿Cuántas monedas tiene de cada tipo?

Solución

Sea q el número de monedas de veinticinco centavos a representar. Entonces $19 - q$ representa el número de monedas de cinco centavos. Se puede usar la siguiente guía para plantear la ecuación:

Valor de las monedas en centavos + Valor de las monedas en centavos = Total del valor en centavos

$$25q \quad + \quad 5(19 - q) \quad = \quad 235$$

Al resolver la ecuación, se obtiene

$$25q + 95 - 5q = 235$$
$$20q + 95 = 235$$
$$20q = 140$$
$$q = 7$$

Si $q = 7$, entonces $19 - q = 12$, así que tiene 7 monedas de veinticinco centavos y 12 monedas de cinco centavos.

Ejemplo de salón de clases
Hallar un número tal que 6 más que tres cuartos del número sea igual a dos tercios del número.

EJEMPLO 13 Aplique su habilidad

Hallar un número tal que 4 menos que dos tercios del número sea igual a una sexta parte del número.

Solución

Sea n el número a representar. Entonces $\frac{2}{3}n - 4$ representa 4 menos que dos tercios del número y $\frac{1}{6}n$ representa una sexta parte del número.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}n - 4 &= \frac{1}{6}n \\ 6\left(\frac{2}{3}n - 4\right) &= 6\left(\frac{1}{6}n\right) \\ 4n - 24 &= n \\ 3n - 24 &= 0 \\ 3n &= 24 \\ n &= 8 \end{aligned}$$

El número es 8.


Tetra Images/Getty Images

Ejemplo de salón de clases
A John le pagan $1\frac{1}{2}$ veces su tarifa normal por hora por cada hora después que trabaja 40 horas en la semana. La semana pasada trabajó 48 horas y ganó \$962. ¿Cuál es su tarifa normal por hora?

EJEMPLO 14 Aplique su habilidad

A Lance le pagan $1\frac{1}{2}$ veces su tarifa normal por hora por cada hora después de que trabaja más de 40 horas en la semana. La semana pasada trabajó 50 horas y ganó \$462. ¿Cuál es su tarifa normal por hora?

Solución

Sea x la tarifa por hora normal de Lance. Entonces $\frac{3}{2}x$ representa $1\frac{1}{2}$ veces su tarifa normal por hora. Se usa la siguiente guía para establecer la ecuación:

Tarifa regular por las primeras 40 horas + Tarifa por 10 horas de tiempo extra = Tarifa total

$$40x \quad + \quad 10\left(\frac{3}{2}x\right) \quad = \quad 462$$

Al resolver la ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} 40x + 15x &= 462 \\ 55x &= 462 \\ x &= 8.40 \end{aligned}$$

La tarifa por hora normal de Lance es de \$8.40.

Ejemplo de salón de clases
Ejemplo de salón de clases
Hallar dos números consecutivos de tal manera que la suma del primero más cuatro veces el segundo sea 179.

EJEMPLO 15 Aplique su habilidad

Hallar tres números consecutivos de tal manera que la suma del primero más dos veces el segundo más tres veces el tercero sea 134.

Solución

Sea n el primer número. Entonces $n + 1$ representa el segundo número y $n + 2$ representa el tercer número.

$$
\begin{aligned}
n + 2(n + 1) + 3(n + 2) &= 134 \\
n + 2n + 2 + 3n + 6 &= 134 \\
6n + 8 &= 134 \\
6n &= 126 \\
n &= 21
\end{aligned}
$$

Los números son 21, 22 y 23.

Tenga en mente que las sugerencias para resolver problemas que se mencionaron en la sección 3.3 simplemente dan una idea del enfoque algebraico general para resolver problemas. Agregará elementos a esa lista a lo largo de este curso y en más clases que llegue a cursar. Es más, de su instructor y compañeros podrá aprender más ideas para resolver problemas conforme se discuten los problemas en clase. Siempre esté atento a cualquier idea que pueda ayudarle a convertirse en una persona que pueda resolver mejor los problemas.

Examen de conceptos 3.4

Para los problemas 1-10, responder falso o verdadero.

1. Para resolver una ecuación con la forma $a(x + b) = 14$, la propiedad asociativa podría aplicarse para remover los paréntesis.
2. Multiplicar ambos lados de una ecuación por el denominador común de todas las fracciones en la ecuación elimina las fracciones de la ecuación.
3. Si Jack tiene 15 monedas (de diez y veinticinco centavos) y x representa el número de monedas de diez centavos, entonces $x - 15$ representa el número de monedas de veinticinco centavos.
4. Si n representa el primero de dos números impares consecutivos, entonces $n + 1$ representa el siguiente número.
5. La ecuación $3(x + 1) = 3x + 3$ tiene un número infinito de soluciones.
6. La ecuación $2x = 0$ no tiene solución.
7. La ecuación $4x + 5 = 4x + 3$ no tiene solución.
8. Para una ecuación condicional, el conjunto solución es el conjunto de números reales.
9. El conjunto solución para una ecuación que es una contradicción es el conjunto nulo.
10. La respuesta a un problema verbal debe ser verificada con el planteamiento del problema.

Conjunto de problemas 3.4

Para los problemas 1-52, resolver cada ecuación. **(Objetivos 1-4)**

1. $7(x + 2) = 21$
2. $4(x + 4) = 24$
3. $5(x - 3) = 35$
4. $6(x - 2) = 18$
5. $-3(x + 5) = 12$
6. $-5(x - 6) = -15$
7. $4(n - 6) = 5$
8. $3(n + 4) = 7$
9. $6(n + 7) = 8$
10. $8(n - 3) = 12$
11. $-10 = -5(t - 8)$
12. $-16 = -4(t + 7)$
13. $5(x - 4) = 4(x + 6)$
14. $6(x - 4) = 3(2x + 5)$
15. $8(x + 1) = 9(x - 2)$
16. $4(x - 7) = 5(x + 2)$
17. $8(t + 5) = 4(2t + 10)$
18. $7(t - 5) = 5(t + 3)$
19. $2(6t + 1) = 4(3t - 1)$

20. $6(t + 5) = 2(3t + 15)$

21. $-2(x - 6) = -(x - 9)$

22. $-(x + 7) = -2(x + 10)$

23. $-3(t - 4) - 2(t + 4) = 9$

24. $5(t - 4) - 3(t - 2) = 12$

25. $3(n - 10) - 5(n + 12) = -86$

26. $4(n + 9) - 7(n - 8) = 83$

27. $3(x + 1) + 4(2x - 1) = 5(2x + 3)$

28. $4(x - 1) + 5(x + 2) = 3(x - 8)$

29. $-(x + 2) + 2(x - 3) = -2(x - 7)$

30. $-2(x + 6) + 3(3x - 2) = -3(x - 4)$

31. $5(2x - 1) - (3x + 4) = 4(x + 3) - 27$

32. $3(4x + 1) - 2(2x + 1) = -2(x - 1) - 1$

33. $-(a - 1) - (3a - 2) = 6 + 2(a - 1)$

34. $3(2a - 1) - 2(5a + 1) = 4(3a + 4)$

35. $3(x - 1) + 2(x - 3) = -4(x - 2) + 10(x + 4)$

36. $-2(x - 4) - (3x - 2) = -2 + (-6x + 2)$

37. $3 - 7(x - 1) = 9 - 6(2x + 1)$

38. $8 - 5(2x + 1) = 2 - 6(x - 3)$

39. $\frac{3}{4}x - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

40. $\frac{1}{2}x - \frac{4}{3} = -\frac{5}{6}$

41. $\frac{5}{6}x + \frac{1}{4} = -\frac{9}{4}$

42. $\frac{3}{8}x + \frac{1}{6} = -\frac{7}{12}$

43. $\frac{1}{2}x - \frac{3}{5} = \frac{3}{4}$

44. $\frac{1}{4}x - \frac{2}{5} = \frac{5}{6}$

45. $\frac{n}{3} + \frac{5n}{6} = \frac{1}{8}$

46. $\frac{n}{6} + \frac{3n}{8} = \frac{5}{12}$

47. $\frac{5y}{6} - \frac{3}{5} = \frac{2y}{3}$

48. $\frac{3y}{7} + \frac{1}{2} = \frac{y}{4}$

49. $\frac{h}{6} + \frac{h}{8} = 1$

50. $\frac{h}{4} + \frac{h}{3} = 1$

51. $\frac{x + 2}{3} + \frac{x + 3}{4} = \frac{13}{3}$

52. $\frac{x - 1}{4} + \frac{x + 2}{5} = \frac{39}{20}$

Para los problemas 53-64, resolver cada ecuación para la variable indicada. (Objetivo 5)

53. $3x + 7y = 9$ para x

54. $5x + 2y = 12$ para x

55. $9x - 6y = 13$ para y

56. $3x - 5y = 19$ para y

57. $-2x + 11y = 14$ para x

58. $-x + 14y = 17$ para x

59. $y = -3x - 4$ para x

60. $y = -7x + 10$ para x

61. $\frac{x - 2}{4} = \frac{y - 3}{6}$ para y

62. $\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 5}{2}$ para y

63. $m = \frac{y - b}{x}$ para y

64. $y = mx + b$ para x

Para los problemas 65-90, resuelva cada problema verbal planteando y resolviendo la ecuación algebraica apropiada. (Objetivo 6)

65. Hallar dos números enteros consecutivos de tal manera que el más pequeño más cuatro veces el más grande sea igual a 39.

66. Hallar dos números enteros consecutivos de tal manera que el más pequeño restado a cinco veces el más grande sea igual a 57.

67. Hallar tres números enteros consecutivos de tal manera que el doble de la suma de los dos números más pequeños sea 10 más que tres veces el número más grande.

68. Hallar cuatro números enteros consecutivos de tal manera que la suma de los primeros tres números sea igual al cuarto número.

69. La suma de dos números es 17. Si el doble del número más pequeño es 1 más que el número más grande, hallar los números.

70. La suma de dos números es 53. Si tres veces el número más pequeño es 1 menos que el número más grande, hallar los números.

71. Hallar un número tal que 20 más que un tercio del número sea igual a tres cuartas partes del número.

72. La suma de tres octavos de un número y cinco sextas partes del mismo número es 29. Hallar el número.

73. La señora Nelson tuvo que esperar 4 minutos en la línea del cajero automático de su banco. Esto fue 3 minutos menos que la mitad del tiempo que tuvo que esperar en la línea de la tienda. ¿Cuántos minutos tuvo que esperar en la línea de la tienda?

74. Raoul recibió \$30 de propina por ser mesero en una fiesta. Esto fue \$5 menos que una cuarta parte de la propina que recibió el jefe de meseros. ¿Cuánta propina recibió el jefe de meseros?

75. Imagine que una tabla de 20 pies de largo es cortada en dos piezas. Cuatro veces el largo de la pieza más corta es 4 pies menos que tres veces el largo de la pieza más grande. Hallar el largo de cada pieza.

76. A Ellen le pagan tiempo y medio por cada hora que trabaja después de las 40 horas a la semana. La semana pasada trabajó 44 horas y ganó \$391. ¿Cuál es su tarifa normal por hora?

77. Lucy tiene 35 monedas que consisten de monedas de cinco y veinticinco centavos que suman \$5.75. ¿Cuántas monedas tiene de cada tipo?

78. Imagine que Julián tiene 44 monedas que consisten de monedas de un centavo y monedas de cinco centavos. Si el número de monedas de cinco centavos es dos más que el doble de las monedas de un centavo, hallar el número de monedas de cada tipo.

79. Max tiene una colección de 210 monedas que consiste de monedas de cinco, diez y veinticinco centavos. Tiene el doble de monedas de diez centavos que monedas de cinco centavos, y 10 monedas de veinticinco centavos más que de las monedas que tiene de diez centavos. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene?

80. Ginny tiene una colección de 425 monedas que consiste de monedas de uno, cinco y de diez centavos. Tiene 50 monedas de cinco centavos más que monedas de un centavo y 25 monedas de diez centavos más de las que tiene de cinco centavos. ¿Cuántas monedas tiene de cada tipo?

81. Maida tiene 18 monedas, que consisten en monedas de diez y veinticinco centavos, y que suman \$3.30. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene?

82. Ike tiene algunas monedas de cinco y de diez centavos que suman \$2.90. El número de monedas de diez centavos es una menos que el doble de monedas de cinco centavos. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene?

83. Mario tiene una colección de 22 especímenes en su acuario que consiste de cangrejos, peces y plantas. Hay tres veces más peces que cangrejos. Hay dos plantas más que cangrejos. ¿Cuántos especímenes de cada tipo hay en la colección?

84. Los boletos de un concierto costaron \$8 para estudiantes y \$10 para no estudiantes. Se vendieron 1500 boletos en un total de \$12,500. ¿Cuántos boletos se vendieron al precio de estudiante?

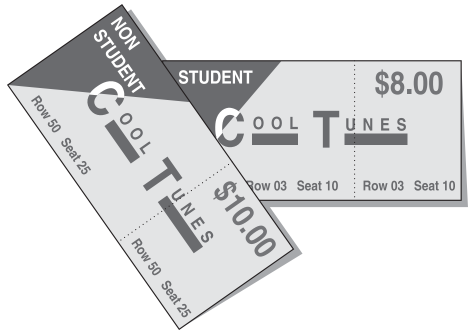


Figura 3.9

85. El suplemento de un ángulo es 30° más grande que el doble de su complemento. Hallar la medida del ángulo.

86. La suma de la medida de un ángulo y tres veces su complemento es 202°. Hallar la medida del ángulo.

87. En un triángulo ABC, la medida del ángulo A es 2° más chico que una quinta parte de la medida del ángulo C. La medida del ángulo B es 5° más chico que la mitad de la medida el ángulo C. Hallar las medidas de los tres ángulos del triángulo.

88. Si una cuarta parte del complemento de un ángulo más una quinta parte del suplemento del ángulo es igual a 36°, hallar la medida del ángulo.

89. El suplemento de un ángulo es 10° más pequeño que tres veces su complemento. Hallar el tamaño del ángulo.

90. En un triángulo ABC, la medida del ángulo C es ocho veces la medida del ángulo A, y la medida del ángulo B es 10° más que la medida del ángulo C. Hallar la medida de cada ángulo del triángulo.

En el Apéndice A podrá encontrar más problemas verbales. Todos los problemas en el Apéndice marcados como (3.4) son apropiados para esta sección.

Pensamientos en palabras

91. Explique cómo resolvería la ecuación

$$3(x - 2) - 5(x + 3) = -4(x + 9).$$

92. ¿Por qué las potenciales respuestas a los problemas verbales deben verificarse en el planteamiento original del problema?

93. Considere estas dos soluciones:

$$\begin{aligned} 3(x + 2) &= 9 \\ \frac{3(x + 2)}{3} &= \frac{9}{3} \\ x + 2 &= 3 \\ x &= 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 3(x - 4) &= 7 \\ 3x - 12 &= 7 \\ 3x &= 19 \\ x &= \frac{19}{3} \end{aligned}$$

¿Son ambas soluciones correctas? Comente sobre la eficacia de ambos enfoques de resolución.

Más investigación

94. Resuelva cada ecuación.

(a) $-2(x - 1) = -2x + 2$

(b) $3(x + 4) = 3x - 4$

(c) $5(x - 1) = -5x - 5$

(d) $\dfrac{x - 3}{3} + 4 = 3$

(e) $\dfrac{x + 2}{3} + 1 = \dfrac{x - 2}{3}$

(f) $\dfrac{x - 1}{5} - 2 = \dfrac{x - 11}{5}$

(g) $4(x - 2) - 2(x + 3) = 2(x + 6)$

(h) $5(x + 3) - 3(x - 5) = 2(x + 15)$

(i) $7(x - 1) + 4(x - 2) = 15(x - 1)$

95. Hallar tres números consecutivos de tal manera que la suma del más pequeño y el más grande sea igual al doble del mediano.

Respuestas del examen de conceptos

1. Falso **2.** Verdadero **3.** Falso **4.** Falso **5.** Verdadero **6.** Falso **7.** Verdadero **8.** Falso **9.** Verdadero **10.** Verdadero

3.5 Resolución de problemas

OBJETIVOS

1. Aplicar técnicas de resolución de problemas como: dibujo de diagramas, esbozo de figuras y uso de guías para resolver problemas verbales
2. Resolver problemas verbales que implican el perímetro de rectángulos, triángulos o círculos
3. Resolver problemas verbales que implican distancia, rapidez y tiempo
4. Resolver problemas verbales que implican mezclas
5. Resolver problemas verbales que implican inversiones financieras

Esta sección inicia planteando de nuevo las sugerencias para resolver problemas verbales que se enunciaron en la sección 3.3.

Sugerencias para resolver problemas verbales

1. Lea cuidadosamente el problema y asegúrese de comprender el significado de todas las palabras. Esté especialmente alerta ante cualquier término técnico que se use en el enunciado del problema.
2. Lea el problema una segunda vez (incluso una tercera ocasión) para obtener un panorama de la situación descrita. Determine los hechos conocidos así como lo que debe encontrar.
3. Bosqueje cualquier figura, diagrama o gráfico que pueda ayudarle a analizar el problema.
4. Elija una variable significativa para representar una cantidad desconocida en el problema (quizá t, si el tiempo es una cantidad desconocida) y represente cualquier otra incógnita en términos de dicha variable.
5. Busque una guía que pueda usar para establecer una ecuación. Una guía puede ser una fórmula, como el *precio de venta es igual al costo más ganancia*, o un enunciado de una relación, como “el interés ganado de una inversión de 9% más el interés ganado de una inversión de 10% es igual a la cantidad total del interés ganado”. Una

(*continúa*)

guía también puede ilustrarse con una figura o diagrama que dibuje para un problema en particular.

6. Formule una ecuación que contenga la variable y que traduzca las condiciones de la guía del español al álgebra.
7. Resuelva la ecuación y use la solución para determinar todos los hechos que se solicitan en el problema.
8. **Compruebe todas las respuestas en el enunciado original del problema.**

Si el problema involucra una fórmula geométrica, entonces un bosquejo de la figura es útil para registrar la información dada y analizar el problema. El siguiente ejemplo ilustra esta idea.

Ejemplo de salón de clases
La longitud de un campo es 15 metros menos que tres veces su ancho y el perímetro del campo es de 450 metros. Hallar el largo y el ancho del campo.

EJEMPLO 1 Aplique su habilidad

El largo de un campo de fútbol es 40 pies más que el doble de su ancho y el perímetro del campo es de 1040 pies. Hallar el largo y el ancho del campo.

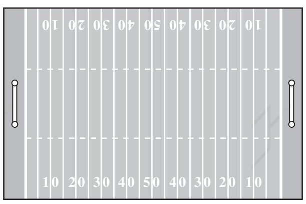
Solución

Ya que el largo está planteado en términos del ancho, w representará el ancho y $2w + 40$ representará el largo, como se muestra en la figura 3.11. Una guía para este problema es la fórmula del perímetro $P = 2l + 2w$. Así, la siguiente ecuación puede plantearse y resolverse.

$$P = 2l + 2w$$

$$\begin{aligned} 1040 &= 2(2w + 40) + 2w \\ 1040 &= 4w + 80 + 2w \\ 1040 &= 6w + 80 \\ 960 &= 6w \\ 160 &= w \end{aligned}$$

Si $w = 160$, entonces $2w + 40 = 2(160) + 40 = 360$. Así, el campo de fútbol mide 360 pies de largo y 160 pies de ancho.



w

$2w + 40$

Figura 3.11

A veces las fórmulas que se usan para analizar el problema son diferentes de las usadas como guía para plantear la ecuación. Por ejemplo, en problemas de movimiento uniforme se usa la fórmula $d = rt$, pero la guía principal para plantear una ecuación para tales problemas suele ser un enunciado sobre *tiempo*, *rapidez* o *distancia*. Considere un ejemplo.

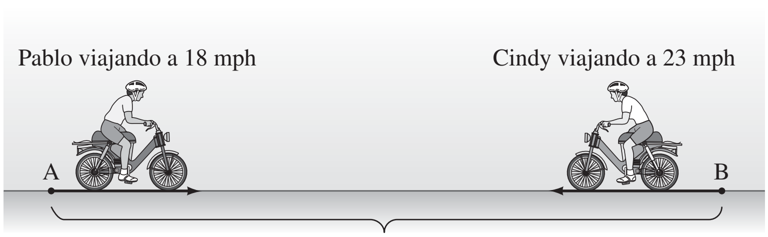
Ejemplo de salón de clases
Chris sale de la ciudad A en un camión que viaja a la ciudad B a 50 millas por hora. Al mismo tiempo, Erin deja la ciudad B en un auto que viaja a la ciudad A a 70 millas por hora. La distancia entre las dos ciudades es de 240 millas. ¿Cuánto tiempo pasará antes de que los vehículos de Chris y Erin se encuentren?

EJEMPLO 2 Aplique su habilidad

Pablo deja la ciudad A en un ciclomotor hacia la ciudad B a 18 millas por hora. Al mismo tiempo, Cindy deja la ciudad B en un ciclomotor hacia la ciudad A a 23 millas por hora. La distancia entre ambas ciudades es de 123 millas. ¿Cuánto tardarán los ciclomotores de Pablo y Cindy en encontrarse?

Solución

Primero, dibuje un diagrama como el de la figura 3.12. Sea t el tiempo que viaja Pablo. Entonces t también representa el tiempo que Cindy viaja.



total de 123 millas

Figura 3.12

$$\underset{18t}{\text{Distancia que Pablo viaja}} + \underset{23t}{\text{Distancia que Cindy viaja}} = \underset{123}{\text{Distancia total}}$$

Resolver esta ecuación da

$$18t + 23t = 123$$
$$41t = 123$$
$$t = 3$$

Ambos viajan por 3 horas.

Algunas personas encuentran útil usar una tabla para organizar los datos conocidos y desconocidos en un problema de movimiento uniforme. Esto se ilustra con un ejemplo.


Stockbyte/Getty Images

Ejemplo de salón de clases
Un auto deja una ciudad a 65 kilómetros por hora. ¿Cuánto tardará un segundo auto que viaja a 85 kilómetros por hora en alcanzar al primer auto si el segundo sale dos horas después?

EJEMPLO 3 Aplique su habilidad

Un automóvil deja un pueblo a 60 kilómetros por hora. ¿Cuánto tardará un segundo automóvil, viajando a 75 kilómetros por hora, en alcanzar al primero si el segundo sale una hora después?

Solución

Sea t el tiempo del segundo automóvil. Entonces, $t + 1$ representa el tiempo del primer automóvil porque viaja durante una hora más. Ahora puede registrar la información del problema en una tabla.

	Rapidez	Tiempo	Distancia
Primer automóvil	60	$t + 1$	$60(t + 1)$
Segundo automóvil	75	t	$75t$

$d = rt$

Debido a que el segundo automóvil debe alcanzar al primer automóvil, las distancias deben ser iguales.

$$\underset{75t}{\text{Distancia del segundo automóvil}} = \underset{60(t + 1)}{\text{Distancia del primer automóvil}}$$

Resolver esta ecuación da

$$75t = 60(t + 1)$$
$$75t = 60t + 60$$
$$15t = 60$$
$$t = 4$$

El segundo automóvil debe alcanzar al primero en 4 horas. (¡Verifique su respuesta!)

Ahora considere tres ejemplos de otros problemas a los que se les suele llamar problemas de mezclas. No hay fórmula básica que se pueda aplicar para todos estos problemas, pero la sugerencia de “pensar en términos de una sustancia pura” suele ser útil para plantear una guía. Por ejemplo, una frase como “30% de solución de ácido” significa que 30% de la solución es un ácido y el resto es 70% agua.

Los porcentajes se discuten con más detalle en el capítulo 4. Para los siguientes ejemplos y problemas, recuerde que el porcentaje necesita ser cambiado a su forma decimal antes de realizar cálculos aritméticos. Planteado de manera simple, para cambiar un porcentaje a su forma decimal debe mover el punto decimal dos lugares a la izquierda y quitar el signo de porcentaje. Por ejemplo, 65% en forma decimal es 0.65.

Ejemplo de salón de clases
¿Cuántas pintas de agua destilada se le deben agregar a 9 pintas de solución de ácido a 30% para obtener una solución a 10%?

EJEMPLO 4 Aplique su habilidad

¿Cuántos mililitros de ácido puro deben agregarse a 150 mililitros de solución a 30% de ácido para obtener una solución de 40% (ver figura 3.13)?

Comentario: Si una guía no es obvia sólo con leer el problema, puede ayudarle intentar adivinar la respuesta y después verificarlo. Imagine que la conjetura es que se deben agregar 30 mililitros de ácido puro. Para verificar, se debe determinar si la solución final es 40% ácido. Ya que se empezó con $0.30(150) = 45$ mililitros de ácido y se suma la conjetura de 30 mililitros, la solución final será de $45 + 30 = 75$ mililitros de ácido. La cantidad final de solución es $150 + 30 = 180$ mililitros. Así, la solución final es $\frac{75}{180} = 41\frac{2}{3}\%$ de ácido.

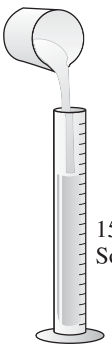


Figura 3.13

Solución

La idea clave para resolver tal problema es reconocer la siguiente guía.

Cantidad de ácido en la solución original	+	Cantidad de ácido por agregar	=	Cantidad de ácido en la solución final

Sea p la cantidad de ácido puro a agregar. Entonces, usando la guía, se traduce en la siguiente ecuación.

$$(30\%)(150) + p = 40\%(150 + p)$$

Ahora resuelva esta ecuación para determinar la cantidad de ácido puro por agregar.

$$\begin{aligned}(0.30)(150) + p &= 0.40(150 + p)\\ 45 + p &= 60 + 0.4p\\ 0.6p &= 15\\ p &= \frac{15}{0.6} = 25\end{aligned}$$

Se deben agregar 25 mililitros de ácido puro. (Tal vez deba verificar esta respuesta).

Ejemplo de salón de clases
Imagine que se tiene una solución de HCl al 20% y una solución al 65%. ¿Cuántos litros de cada uno se debe mezclar para producir una solución de 5 litros que sea 35% HCl?

EJEMPLO 5 Aplique su habilidad

Suponga que tiene un suministro de una solución al 30% de alcohol y una solución de alcohol al 70%. ¿Cuántos cuartos de cada uno debe mezclar para producir 20 cuartos que sean 40% alcohol?

Solución

Se puede usar una guía similar a la sugerida en el ejemplo 4.

Alcohol puro en solución al 30%	+	Alcohol puro en solución al 70%	=	Alcohol puro en solución al 40%

Sea x la cantidad de solución al 30%. Entonces $20 - x$ representa la cantidad de solución al 70%. Ahora, usando la guía, se traduce a:

$$(30\%)(x) + (70\%)(20 - x) = (40\%)(20)$$

Resolviendo esta ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned}0.30x + 0.70(20 - x) &= 8\\ 30x + 70(20 - x) &= 800 \qquad \text{Se multiplicaron ambos lados por 100}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 30x + 1400 - 70x &= 800 \\ -40x &= -600 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Entonces, $20 - x = 5$. Se deben agregar 15 cuartos de solución al 30% con 5 cuartos de solución al 70%.

Ejemplo de salón de clases
Una inversionista invierte cierta cantidad de dinero a 4%. Luego encuentra una mejor oferta e invierte $2000 más que la inversión anterior, ahora a 6%. Su ganancia anual con ambas inversiones es $1020. ¿Cuánto invirtió en cada ocasión?

EJEMPLO 6 Aplique su habilidad

Un inversionista invierte cierta cantidad de dinero a 3%. Después encuentra una mejor oferta e invierta $5000 más que la primera vez, ahora a 5%. Su ganancia anual con ambas inversiones es $650. ¿Cuánto invirtió en cada ocasión?

Solución

Sea x la cantidad invertida a 3%. Entonces $x + 5000$ representa la cantidad invertida a 5%.

$$\begin{aligned} (3\%)(x) + (5\%)(x + 5000) &= 650 \\ 0.03x + 0.05(x + 5000) &= 650 \\ 3x + 5(x + 5000) &= 65{,}000 && \text{Se multiplicaron ambos lados por 100} \\ 3x + 5x + 25{,}000 &= 65{,}000 \\ 8x + 25{,}000 &= 65{,}000 \\ 8x &= 40{,}000 \\ x &= 5000 \\ \text{Entonces, } x + 5000 &= 10{,}000. \end{aligned}$$

Invirtió $5000 a 3% y $10,000 a 5%.

Ejemplo de salón de clases
Un hombre invirtió un total de $12,000; parte de esa cantidad está invertida a 5% y el resto a 3%. Su ganancia total anual es $500. ¿Cuánto invirtió a cada porcentaje?

EJEMPLO 7 Aplique su habilidad

Una mujer invierte un total de $5000. Parte de esta cantidad está invertida a 4% y el resto a 6%. Su ganancia total anual es $260. ¿Cuánto invirtió a cada porcentaje?

Solución

Sea x la cantidad invertida a 6%. Entonces $5000 - x$ representa la cantidad invertida a 4%. Use la siguiente guía:

$$\underset{\downarrow}{\text{Intereses ganados de la inversión a 6\%}} + \underset{\downarrow}{\text{Intereses ganados de la inversión a 4\%}} = \underset{\downarrow}{\text{Intereses ganados totales}}$$

$$(6\%)(x) + (4\%)(\$5000 - x) = \$260$$

Al resolver esta ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} (6\%)(x) + (4\%)(5000 - x) &= 260 \\ 0.06x + 0.04(5000 - x) &= 260 \\ 6x + 4(5000 - x) &= 26{,}000 && \text{Se multiplicaron ambos lados por 100} \\ 6x + 20{,}000 - 4x &= 26{,}000 \\ 2x + 20{,}000 &= 26{,}000 \\ 2x &= 6000 \\ x &= 3000 \\ \text{Entonces, } 5000 - x &= 2000. \end{aligned}$$

Invirtió $3000 a 6% y $2000 a 4%.

Examen de conceptos 3.5

Para los problemas 1-5, responder falso o verdadero.

1. La frase “solución de alcohol al 40%” significa que el 40% de la solución es alcohol.
2. La cantidad de ácido puro en 300 ml de una solución a 30% es 100 ml.
3. Si se quieren producir 10 cuartos mezclando las soluciones A y B, la cantidad de solución A requerida debe ser representada por x, y la cantidad de solución B requerida se representaría como $10 - x$.
4. La fórmula $d = rt$ es equivalente a $r = \frac{d}{t}$.
5. La fórmula $d = rt$ es equivalente a $t = \frac{r}{d}$.

Nos gustaría darle un consejo. No se desanime si resolver problemas verbales le es complicado. La resolución de problemas no es una habilidad que se desarrolle de la noche a la mañana. Toma tiempo, paciencia, trabajo y una mente abierta. Siga dando lo mejor de sí y, gradualmente, adquirirá confianza en su acercamiento a tales problemas. Nos damos cuenta de que algunos (tal vez muchos) de estos problemas pueden no ser “prácticos” para usted. Sin embargo, tenga en mente que la meta real aquí es desarrollar las técnicas de resolución de problemas. Hallar y usar una guía, bosquejar una figura para registrar información y que ayude en el análisis, estimar una respuesta antes de resolver el problema, y usar una tabla para registrar la información son algunas de las herramientas más importantes que se intentan desarrollar.

Conjunto de problemas 3.5

Plantear una ecuación y resolver cada uno de los siguientes problemas. (Objetivos 1–5)

1. El largo de un rectángulo es tres veces su ancho. Si el perímetro del rectángulo es de 112 pulgadas, hallar su largo y ancho.
2. El ancho de un rectángulo mide la mitad de su largo. Si el perímetro del rectángulo mide 54 pies, hallar su largo y ancho.
3. Imagine que el largo de un rectángulo mide 2 centímetros menos que el triple de su ancho. El perímetro del rectángulo es de 92 centímetros. Hallar el largo y el ancho del rectángulo.
4. Imagine que el largo de cierto rectángulo mide 1 metro más que cinco veces su ancho. El perímetro del rectángulo es de 98 metros. Hallar el largo y el ancho del rectángulo.
5. El ancho de un rectángulo mide 3 pulgadas menos que la mitad de su largo. Si el perímetro del rectángulo es de 42 pulgadas, hallar el largo y el ancho del rectángulo. Después encuentre el área del rectángulo.
6. El ancho de un rectángulo mide 1 pie más que un tercio de su largo. Si el perímetro del rectángulo es de 74 pies, hallar el área del rectángulo.
7. El perímetro de un triángulo es de 100 pies. El lado más largo mide 3 pies menos que el doble del lado más corto, y el tercer lado es 7 pies más largo que el lado más corto. Hallar las medidas de los lados del triángulo.
8. Un terreno triangular tiene un perímetro de 54 yardas. El lado más largo mide lo doble que el lado más corto, y el tercer lado mide 2 yardas más que el lado más corto. Hallar las medidas de los lados del triángulo.
9. El segundo lado de un triángulo mide 1 centímetro más que tres veces el primer lado. El tercer lado mide 2 centímetros más que el segundo lado. Si el perímetro mide es de 46 centímetros, hallar el largo de cada lado del triángulo.
10. El segundo lado de un triángulo mide 3 metros menos que el doble del primer lado. El tercer lado mide 4 metros más que el segundo lado. Si el perímetro es de 58 metros, hallar el largo de cada lado del triángulo.

11. El perímetro de un triángulo equilátero es 4 centímetros más grande que el perímetro de un cuadrado, y el largo de un lado del triángulo mide 4 centímetros más que el largo de un lado del cuadrado. Hallar el largo de un lado del triángulo equilátero. (Un triángulo equilátero tiene tres lados del mismo largo).

12. Imagine que un cuadrado y un triángulo equilátero tienen el mismo perímetro. Cada lado del triángulo es 6 centímetros más largo que cada lado del cuadrado. Hallar el largo de cada lado del cuadrado. (Un triángulo equilátero tiene tres lados del mismo largo).

13. El perímetro de un triángulo es de 40 centímetros. El lado más largo es 1 centímetro más largo que el doble del lado más corto. El otro lado es 2 centímetros más corto que el lado más largo. Hallar los largos de los tres lados.

14. Imagine que el perímetro de un cuadrado es igual al perímetro de un rectángulo. El ancho del rectángulo mide 9 pulgadas menos que el doble del lado del cuadrado, y el largo del rectángulo mide 3 pulgadas menos que el doble del lado del cuadrado. Hallar las dimensiones del cuadrado y el rectángulo.

15. Imagine que el radio de un círculo mide lo mismo que el lado de un cuadrado. Si la circunferencia del círculo mide 15.96 centímetros más que el perímetro del cuadrado, hallar el largo del radio del círculo. (Use 3.14 como un aproximado de π).

16. La circunferencia de un círculo mide 2.24 centímetros más que seis veces el largo de un radio. Hallar el radio del círculo. (Use 3.14 como aproximado de π).

17. Sandy deja un pueblo en su carro a una rapidez de 45 millas por hora. Una hora después, Mónica deja el mismo pueblo por la misma ruta a una rapidez de 50 millas por hora. ¿Cuánto tardará Mónica en alcanzar a Sandy?

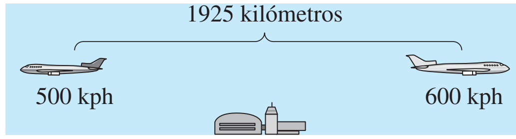
18. Dos carros salen del mismo lugar y viajan en direcciones opuestas. Un carro viaja 4 millas por hora más rápido que el otro. Hallar las velocidades si, después de 5 horas, están a 520 millas de distancia entre ellos.

19. La distancia entre Jacksonville y Miami es de 325 millas. Un tren deja Jacksonville y viaja hacia Miami a 40 millas por hora. Al mismo tiempo, otro tren deja Miami y viaja hacia Jacksonville a 90 millas por hora. ¿Cuánto tardarán en encontrarse ambos trenes?

20. Kirk comienza a correr a 5 millas por hora. Media hora después, Nancy sale a correr en la misma ruta a 7 millas por hora. ¿Cuánto tardará Nancy en alcanzar a Kirk?

21. Un automóvil sale de un pueblo a 40 millas por hora. Dos horas después, un segundo automóvil sale del pueblo y sigue la misma ruta y rebasa al primero en 5 horas y 20 minutos. ¿A qué velocidad iba el segundo automóvil?

22. Dos aviones dejan St. Louis al mismo tiempo y vuelan en direcciones opuestas (ver figura 3.14). Si uno viaja a 500 kilómetros por hora y el otro a 600 kilómetros por hora, ¿cuánto tardarán en estar a 1925 kilómetros de distancia entre sí?



Aeropuerto de St. Louis

Figura 3.14

23. Andy comienza a caminar del punto A a 2 millas por hora. Una hora después, Aaron comienza a caminar del punto A a $3\frac{1}{2}$ millas por hora y sigue la misma ruta. ¿Cuánto tardará Aaron en alcanzar a Andy?

24. Imagine que Karen, en su bicicleta a 15 millas por hora, avanzó 10 millas más que Michelle, quien iba en bicicleta a 14 millas por hora. Karen anduvo 30 minutos más que Michelle. ¿Cuánto anduvieron Michelle y Karen en respectivas bicicletas?

25. ¿Cuántos mililitros de ácido puro se deben agregar a 100 mililitros de una solución al 10% para obtener una solución al 20%?

26. ¿Cuántos litros de alcohol puro se deben agregar a 20 litros de una solución al 40% para obtener una solución al 60%?

27. ¿Cuántos centilitros de agua destilada se deben agregar a 10 centilitros de una solución de ácido al 50% para obtener una solución de ácido al 20%?

28. ¿Cuántos mililitros de agua destilada se deben agregar a 50 mililitros de solución ácida al 40% para reducirla a 10%?

29. Imagine que se quiere mezclar una solución de alcohol al 30% con una solución de alcohol al 50% para obtener 10 cuartos de solución al 35%. ¿Cuántos cuartos de cada una se necesitan?

30. Se tiene una solución de alcohol al 20% y una al 50%. ¿Cuántas pintas se deben usar de cada una para obtener 8 pintas de solución al 30%?

31. ¿Cuántos galones de solución salina al 15% se deben mezclar con 8 galones de una solución salina al 20% para obtener una solución al 17%?

32. ¿Cuántos litros de solución salina al 10% se deben mezclar con 15 litros de solución salina al 40% para obtener una solución al 20%?

33. Treinta onzas de un ponche que contiene 10% de jugo de uva es añadido a 50 onzas de ponche que contiene 20% de jugo de uva. Hallar el porcentaje de jugo de uva que resulta de la mezcla.

34. Imagine que 20 galones de solución salina al 20% se mezclan con 30 galones de solución salina al 25%. ¿Cuál es el porcentaje de sal en la mezcla resultante?

35. Fawn invirtió cierta cantidad de dinero a 3% de intereses e invirtió $1250 más que la primera cantidad al 5%. Su interés anual fue de $134.50. ¿Cuánto invirtió a cada porcentaje?

36. Imagine que Lou invirtió cierta cantidad de dinero a 3% de intereses, e invirtió $750 más que esa cantidad a 5%. Su interés total anual fue de $157.50. ¿Cuánto invirtió en cada porcentaje?

37. Nina recibió una herencia de $12,000 de su abuela. Invirtió parte de esa cantidad a 6% de intereses, e invirtió el resto a 8%. Si sus intereses anuales fueron de $860, ¿cuánto invirtió en cada porcentaje?

38. Udit recibió $1200 de sus padres como regalo de graduación. Invirtió parte de esa cantidad a 4% de intereses, y el resto a 6%. Si los intereses anuales sumaron $62, ¿cuánto invirtió en cada porcentaje?

39. Sally invirtió cierta cantidad de dinero a 4%, el doble de esa cantidad a 5% y tres veces esa cantidad a 6%. Sus intereses totales anuales fueron de $160. ¿Cuánto invirtió en cada uno?

40. Si $2000 son invertidos a 3% de intereses, ¿cuánto dinero debe invertirse a 6% para que el total de intereses de ambas inversiones sea 5%?

41. Si $3000 son invertidos a 4% de intereses, ¿cuánto dinero debe invertirse a 7% para que el total de intereses de ambas inversiones sea de 5%?

42. ¿Cómo pueden invertirse $5400, parte a 4% y el resto a 6%, para que ambas inversiones produzcan la misma cantidad de intereses?

43. Una cantidad de $6000 se invierte, parte a 5% y el resto a 7%. Si los intereses ganados por las inversiones a 5% son $160 menos que los ganados por la inversión a 7%, hallar la cantidad invertida en cada uno.

44. Una cantidad de $2300 se invierte, parte a 4% y el resto a 6%. Si los intereses ganados por las inversiones a 6% son $50 más que los ganados por la inversión a 4%, hallar la cantidad invertida en cada uno.

En el Apéndice A se pueden encontrar más problemas verbales. Todos los problemas en el Apéndice marcados como (3.5) son apropiados para esta sección.

Respuestas del examen de conceptos

1. Verdadero **2.** Falso **3.** Verdadero **4.** Verdadero **5.** Falso

Capítulo 3 Resumen

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Resolver ecuaciones de primer grado.	Las ecuaciones numéricas pueden ser verdaderas o falsas. Las ecuaciones algebraicas (enunciados abiertos) contienen una o más variables. Resolver una ecuación se refiere al proceso de hallar el número (o números) que vuelven a una ecuación algebraica un enunciado verdadero. Una ecuación de primer grado con una variable es una ecuación que contiene sólo una variable y ésta tiene un exponente de uno. Las propiedades halladas en este capítulo proporcionan una base para resolver ecuaciones. Asegúrese de ser capaz de usar estas propiedades para resolver la variedad de ecuaciones presentadas.	
Resolver ecuaciones usando la propiedad aditiva de la igualdad. (Sección 3.1/Objetivo 1)	En una ecuación se puede sumar a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de cualquier termino dado.	Resolver $0.8 = x - 0.3$. **Solución** $0.8 = x - 0.3$ $0.8 + 0.3 = x - 0.3 + 0.3$ $1.1 = x$ El conjunto solución es $\{1.1\}$. **Problema de muestra 1** Resolver $x + 0.9 = 0.3$.
Resolver ecuaciones usando la propiedad multiplicativa de la igualdad. (Sección 3.1/Objetivo 2)	Una ecuación equivalente se obtiene cuando ambos lados de una ecuación son multiplicados por el inverso multiplicativo o reciproco de un termino dado.	Resolver $-\frac{2}{3}x = 8$. **Solución** $-\frac{2}{3}x = 8$ $\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}x\right) = 8\left(-\frac{3}{2}\right)$ $x = -12$ El conjunto solución es $\{-12\}$. **Problema de muestra 2** Resolver $\frac{3}{5}x = -18$.

(continúa)

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Resolver ecuaciones usando tanto la propiedad aditiva de la igualdad como la multiplicativa. (Sección 3.2/Objetivo 1)	Para resolver la mayoría de las ecuaciones, ambas propiedades deben ser aplicadas.	Resolver $5n - 2 = 8$. **Solución** $5n - 2 = 8$ $5n - 2 + 2 = 8 + 2$ $5n = 10$ $\frac{1}{5}(5n) = \frac{1}{5}(10)$ $n = 2$ El conjunto solución es $\{2\}$. **Problema de muestra 3** Resolver $4n + 3 = 27$.
Resolver ecuaciones que involucren el uso de la propiedad distributiva. (Sección 3.4/Objetivo 1)	Para resolver ecuaciones en las que la variable es parte de una expresión dentro de un paréntesis, se usa la propiedad distributiva. La propiedad distributiva remueve el paréntesis y la ecuación resultante se resuelve de la manera usual.	Resolver $3(x - 4) = 2(x + 1)$. **Solución** $3(x - 4) = 2(x + 1)$ $3x - 12 = 2x + 2$ $x - 12 = 2$ $x = 14$ El conjunto solución es $\{14\}$. **Problema de muestra 4** Resolver $5\ (x + 1) = 7(x - 5)$.
Resolver ecuaciones que involucren formas fraccionarias. (Sección 3.4/Objetivo 4)	Cuando una ecuación contiene varias fracciones, lo mejor suele ser eliminarlas primero. Las fracciones se pueden eliminar multiplicando ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador de todos los denominadores.	Resolver $\frac{3n}{4} + \frac{n}{5} = \frac{7}{10}$. **Solución** $\frac{3n}{4} + \frac{n}{5} = \frac{7}{10}$ $20\left(\frac{3n}{4} + \frac{n}{5}\right) = 20\left(\frac{7}{10}\right)$ $20\left(\frac{3n}{4}\right) + 20\left(\frac{n}{5}\right) = 14$ $15n + 4n = 14$ $19n = 14$ $n = \frac{14}{19}$ El conjunto solución es $\left\{\frac{14}{19}\right\}$. **Problema de muestra 5** Resolver $\frac{5n}{6} - \frac{1}{4} = \frac{n}{8}$.

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Resolver ecuaciones que son contradicciones o identidades. (Sección 3.4/Objetivos 2 y 3)	Cuando una ecuación no es verdadera para ningún valor de x, entonces se dice que la ecuación es "una contradicción". Cuando una ecuación es verdadera para todo valor permisible de x, entonces se dice que la ecuación es "una identidad".	Resolver las siguientes ecuaciones: **(a)** $2(x + 4) = 2x + 5$ **(b)** $4x - 8 = 2(2x - 4)$ **Solución** **(a)** $2(x + 4) = 2x + 5$ $2x + 8 = 2x + 5$ $2x - 2x + 8 = 2x - 2x + 5$ $8 = 5$ Este es un enunciado falso porque no tiene solución. La solución es $\varnothing$. **(b)** $4x - 8 = 2(2x - 4)$ $4x - 8 = 4x - 8$ $4x - 4x - 8 = 4x - 4x - 8$ $-8 = -8$ Este es un enunciado verdadero porque cualquier valor de x es una solución. El conjunto solución es [todos los reales]. **Problema de muestra 6** Resolver las siguientes ecuaciones: **(a)** $3x + 21 = 3(x + 7)$ **(b)** $5(x - 2) = 5x + 9$
Aplicar fórmulas geométricas. (Sección 3.3/Objetivo 3)	Las fórmulas geométricas se usan para resolver problemas que implican figuras geométricas. Las fórmulas más usadas se presentan en la sección 3.3.	Hallar el ancho de un rectángulo cuyo largo es 8 pulgadas y su perímetro es de 24 pulgadas. **Solución** Use la fórmula $P = 2l + 2w$. $P = 2l + 2w$ $24 = 2(8) + 2w$ $24 = 16 + 2w$ $8 = 2w$ $4 = w$ Entonces, el ancho mide 4 pulgadas. **Problema de muestra 7** Un triángulo tiene 8 pulgadas de altura y un área de 32 pulgadas cuadradas. ¿Cuál es el largo de la base?
Resolver fórmulas para una variable específica. (Sección 3.1/Objetivo 4; Sección 3.2/Objetivo 3)	Se puede resolver una fórmula como $P = 2l + 2w$ para l o para w aplicando las propiedades de la igualdad.	Resolver $P = 2l + 2w$ para l. **Solución** $P = 2l + 2w$ $P - 2w = 2l$ $\frac{P - 2w}{2} = l$ **Problema de muestra 8** Resolver $i = Prt$ para P.

(*continúa*)

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Resolver una ecuación para una variable específica. (Sección 3.1/Objetivo 4; Sección 3.2/Objetivo 3)	En futuros capítulos, encontrará ecuaciones con dos variables, por ejemplo x y y. A veces necesitará resolver para una variable en términos de otra variable.	Resolver $2x + 3y = 12$ para y. **Solución** $2x + 3y = 12$ $3y = -2x + 12$ $y = \frac{-2x + 12}{3}$ **Problema de muestra 9** Resolver $3l - 2h = 12$ para h.
Resolver problemas verbales. (Sección 3.2/Objetivo 4; Sección 3.3/Objetivos 2 y 3; Sección 3.4/ Objetivo 6; Sección 3.5/ Objetivos 1–5)	Use estas sugerencias para ayudarle a resolver problemas verbales: **1.** Lea el problema cuidadosamente. **2.** Dibuje una figura, diagrama o tabla para organizar los hechos. **3.** Elija una variable significativa. Asegúrese de escribir qué representa la variable. **4.** Busque una guía. Ésta suele ser el componente clave para resolver un problema. Muchas veces se pueden usar fórmulas como guías. **5.** Use la guía para plantear una ecuación. **6.** Resolver la ecuación y responder la pregunta en el problema. **7.** Verificar su respuesta en el planteamiento original del problema.	Mary comienza a correr a 4 millas por hora. Media hora después, Tom comienza a correr en la misma ruta a 6 millas por hora. ¿Cuánto le tomará a Tom alcanzar a Mary? **Solución** Sea x el tiempo de Tom. Entonces, ya que Mary salió media hora antes que Tom, $x + \frac{1}{2}$ representa el tiempo que lleva corriendo. Note que la distancia cruzada por cada persona es la misma. La distancia puede encontrarse aplicando la fórmula $d = rt$. la distancia de Mary = la distancia de Tom $4\left(x + \frac{1}{2}\right) = 6x$ $4x + 2 = 6x$ $2 = 2x$ $1 = x$ Entonces, le toma a Tom 1 hora alcanzar a Mary. **Problema de muestra 10** Cierta cantidad de dinero se invierte a 4% y \$1500 más que esa cantidad a 6%. El total de intereses anual fue de \$190. ¿Cuánto se invirtió en cada porcentaje?

Capítulo 3 Conjunto de problemas de repaso

En los problemas 1-20, resolver cada ecuación.

1. $9x - 2 = -29$
2. $-3 = -4y + 1$
3. $7 - 4x = 10$
4. $6y - 5 = 4y + 13$
5. $4n - 3 = 7n + 9$
6. $7(y - 4) = 4(y + 3)$
7. $2(x + 1) + 5(x - 3) = 11(x - 2)$
8. $-3(x + 6) = 5x - 3$
9. $\frac{2}{5}n - \frac{1}{2}n = \frac{7}{10}$
10. $\frac{3n}{4} + \frac{5n}{7} = \frac{1}{14}$
11. $3(2x + 4) - 5 = 6x + 7$
12. $4x + 10 = 2(2x - 3)$
13. $-2(x - 4) = -3(x + 8)$
14. $3x - 4x - 2 = 7x - 14 - 9x$
15. $5(n - 1) - 4(n + 2) = -3(n - 1) + 3n + 5$
16. $\frac{x - 3}{9} = \frac{x + 4}{8}$
17. $\frac{x - 1}{-3} = \frac{x + 2}{-4}$
18. $-(t - 3) - (2t + 1) = 3(t + 5) - 2(t + 1)$
19. $-2(x + 5) + 4 = -2x + 3$
20. $3(2t - 4) + 2(3t + 1) = -2(4t + 3) - (t - 1)$

En los problemas 21-32, resolver cada ecuación.

21. Resolver $i = Prt$ para i si $P = 4000$, $r = 0.05$, y $t = 2$.
22. Resolver $A = \frac{1}{2}bh$ para A si $b = 14$ y $h = 5$.
23. Resolver $P = 2l + 2w$ para w si $P = 50$ y $l = 19$.
24. Resolver $\mathrm{F} = \frac{9}{5}\mathrm{C} + 32$ para C si $\mathrm{F} = 77$.
25. Resolver $A = P + Prt$ para t.
26. Resolver $C = 2\pi r$ para r.
27. Resolver $y = mx + b$ para m.
28. Resolver $5x + 2y = -6$ para y.
29. Resolver $2x - 3y = 13$ para x.
30. Resolver $x + 3y = 7$ para y.
31. Si el área de un triángulo es de 27 centímetros cuadrados, y el largo de un lado mide 9 centímetros, hallar el largo de la altitud a ese lado.
32. Si la superficie total de un cilindro es $152\,\pi$ pies cuadrados, y el radio de la base mide 4 pies, hallar la altura del cilindro.

Plantear una ecuación para resolver los problemas 33-53.

33. Tres cuartas partes de un número equivalen a 18. Hallar el número.
34. Diecinueve es 2 menos que tres veces cierto número. Hallar el número.
35. La diferencia entre dos números es 21. Si 12 es el número más chico, hallar el otro número.
36. Uno restado de nueve veces cierto número es lo mismo que 15 sumado a 7 veces el número. Hallar el número.
37. Hallar un número tal que 2 menos dos tercios del número sea 1 más que la mitad del número.
38. La suma de dos números es 40. Seis veces el número más pequeño equivale a cuatro veces el número más grande. Hallar los números.
39. Miriam tiene 30 monedas (de cinco y diez centavos) que suman \$2.60. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene?
40. Imagine que Khoa tiene monedas de cinco, diez y veinticinco centavos que suman \$15.40. El número de monedas de diez centavos es una moneda más que tres veces el número de monedas de cinco centavos, y el número de monedas de veinticinco centavos es el doble de la cantidad de monedas de diez centavos. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene?
41. El suplemento de un ángulo es 14° más que tres veces el complemento del ángulo. Hallar la medida del ángulo.
42. Pam rentó un carro de una agencia que cobra \$25 por día y \$0.20 por milla. Se quedó el carro por 3 días y su cuenta fue de \$215. ¿Cuántas millas manejó durante esos 3 días?
43. Imagine que el largo de cierto rectángulo es 3 pies menos que el ancho. El perímetro del rectángulo es de 74 pies. Hallar el largo y el ancho del rectángulo.

44. Suponga que el largo de cierto rectángulo es 5 metros más grande que el doble del ancho. El perímetro del rectángulo es de 46 metros. Hallar el largo y el ancho del rectángulo.

45. Dos aviones dejan Chicago al mismo tiempo y vuelan en direcciones opuestas. Si uno viaja a 350 millas por hora y el otro a 400 millas por hora, ¿cuánto tiempo les tomará estar a 1125 millas de distancia entre sí?

46. ¿Cuántos litros de alcohol se deben agregar a 10 litros de solución al 70% para obtener una solución al 90%?

47. Un cable de cobre de 110 centímetros fue doblado en forma de rectángulo. El largo del rectángulo fue 10 centímetros más largo que el doble del ancho. Hallar las dimensiones del rectángulo.

48. Setenta y ocho yardas de reja fueron compradas para cercar un jardín rectangular. El largo del jardín es 1 yarda más corta que el triple del ancho. Hallar el largo y el ancho del jardín.

49. La cantidad de $2100 se invirtió, parte a 3% de intereses y el resto a 5%. Si el interés ganado por la inversión a 5% es $51 más que la inversión a 3%, hallar la cantidad invertida en cada uno.

50. El ángulo de un triángulo mide 47°. De los otros dos ángulos, uno de ellos mide 3º menos que el triple del otro ángulo. Hallar las medidas de los otros dos ángulos.

51. Connie monta su bicicleta a 10 millas por hora. Una hora después, Zak sale del mismo punta que Connie y monta su bicicleta en la misma ruta a 12 millas por hora. ¿Cuánto le tomará a Zak alcanzar a Connie?

52. ¿Cuántos galones de solución salina al 10% deben mezclarse con 12 galones de solución salina al 15% para obtener solución salina al 12%?

53. Imagine que 20 onzas de ponche con 20% de jugo de naranja se agrega a 30 onzas de ponche con 30% de jugo de naranja. Hallar el porcentaje de jugo de naranja en la mezcla resultante.

Si no lo ha hecho aún, puede que quiera revisar los problemas verbales en el Apéndice A para adquirir más práctica con problemas verbales. Todos los problemas marcados en el Apéndice con referencia al Capítulo 3 son apropiados.

Capítulo 3 Examen

Para los problemas 1-13, resolver las ecuaciones.

1. $7x - 3 = 11$

2. $-7 = -3x + 2$

3. $4n + 3 = 2n - 15$

4. $3n - 5 = 8n + 20$

5. $4(x - 2) = 5(x + 9)$

6. $9(x + 4) = 6(x - 3)$

7. $5(y - 2) + 2(y + 1) = 3(y - 6)$

8. $\frac{3}{5}x - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

9. $\frac{x - 2}{4} = \frac{x + 3}{6}$

10. $-5(n - 2) = -3(n + 7)$

11. Resolver $F = \frac{9C + 160}{5}$ para C.

12. Resolver $y = 2(x - 4)$ para x.

13. Resolver $\frac{x + 3}{4} = \frac{y - 5}{9}$ para y.

Para los problemas 14-16, use las fórmulas geométricas dadas en este capítulo para ayudarle a resolver los problemas.

14. Hallar el área del círculo si la circunferencia mide 16π centímetros. Exprese la respuesta en términos de π.

15. Si el perímetro de un rectángulo mide 100 pulgadas, y su largo mide 32 pulgadas, hallar el área del rectángulo.

16. El área de un terreno triangular mide 133 yardas cuadradas. Si el largo de un lado del terreno mide 19 yardas, hallar el largo de la altitud a ese lado.

Para los problemas 17-25, plantear una ecuación y resolver cada problema.

17. La suma de tres números consecutivos es -168. Hallar los tres números.

18. Dos tercios de un número equivale a 48. Hallar el número.

19. Jean Paul recibió una cuenta de teléfono por \$98.24. En esa cuenta, se incluyó un cargo por el plan mensual de \$29.99 y otro por 195 minutos extras. ¿Cuánto se le cobró a Jean Paul por cada minuto?

20. Suponga que un terreno triangular esta cercado con 70 metros de reja. El lado más largo del terreno mide el doble del lado más corto y el tercer lado mide 10 metros más que el lado más corto. Hallar el largo de cada lado del terreno.

21. Sean tiene 103 monedas que incluyen monedas de cinco, diez y veinticinco centavos. El número de monedas de diez centavos es una moneda menos que el doble del número de monedas de cinco centavos, y el número de monedas de veinticinco centavos es 2 más que tres veces el número de monedas de cinco centavos. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene?

22. En un triángulo *ABC*, la medida del ángulo *C* es la mitad del ángulo *A*, y la medida del ángulo *B* es 30° más que el ángulo *A*. Hallar la medida de cada ángulo del triángulo.

23. Un carro sale de una ciudad a 50 millas por hora. Una hora más tarde, un segundo carro sale de la misma ciudad viajando por la misma ruta a 55 millas por hora. ¿Cuánto tomará al segundo carro alcanzar al primero?

24. ¿Cuántos centilitros de ácido puro deben agregarse a 6 centilitros de solución al 50% para obtener una solución al 70%?

25. Cierta cantidad de dinero se invirtió a 4% de intereses y \$1500 más que esa cantidad se invirtió a 6%. Si el interés de ambas inversiones es de \$340, hallar la cantidad invertida en cada una.

4 Proporciones, porcentajes y resolución de desigualdades

4.1 Razones y proporciones

4.2 Porcentajes y resolución de problemas

4.3 Más acerca de porcentajes y resolución de problemas

4.4 Desigualdades

4.5 Desigualdades, desigualdades compuestas y resolución de problemas

Ashley Gill/OJO Images/Getty Images

"El fracaso es un éxito si aprendemos de él"
MALCOLM FORBES

Tip de estudio

Es muy importante que repase los problemas que resolvió incorrectamente en cualquier examen y determine si fueron errores "simples" o si fueron de "concepto". Un ejemplo de un simple error puede ser un error aritmético o escribir el producto de 24 y 3 como 12 en lugar de -12. Sabe que el producto de un número negativo y uno positivo es negativo, pero olvidó escribir el signo.

Un error de concepto se hace cuando no entendió cómo resolver el problema. Por ejemplo, para resolver la ecuación $3x = 15$, restó 3 de cada lado en la ecuación en lugar de dividir cada lado de la ecuación entre 3.

Es difícil evitar errores simples, pero siempre puede aprender a ir más lento cuando trabaje y aprender a verificar sus respuestas en un examen. Aunque los errores simples afectan su calificación, no afectan su capacidad para tener una buena nota en el siguiente examen.

Los errores de concepto sí afectan su capacidad de tener éxito en el curso. Imagine que no obtuvo 10% en el primer examen debido a errores de concepto. Si no regresa y repasa esos conceptos, de nuevo no obtendrá ese 10% en el siguiente examen, además de otro 10% por el nuevo material, lo cual bajará su calificación 20%. Esto tiene un efecto de bola de nieve y, para el tercer o cuarto examen, se sentirá tentado a rendirse porque ya va muy retrasado.

Así que, después de cada examen, asegúrese de analizar sus errores y repasar cualquier concepto que haya tenido mal en el examen. Hacer esto definitivamente mejorará su calificación.

¿Está aprendiendo de los errores que comete en sus tareas y exámenes?

Vista previa del capítulo

Este capítulo presenta las razones y las aplica para convertir unidades de medida y para calcular unidades de precio. El capítulo continúa resolviendo ecuaciones y resolviendo proporciones y resolviendo ecuaciones que implican decimales. Los porcentajes se presentan y extienden para resolver problemas que implican porcentaje de cambio, margen de ganancia y descuentos.

Las últimas dos secciones del capítulo hablan sobre cómo resolver desigualdades. Las propiedades para resolver desigualdades son similares a las propiedades para resolver ecuaciones, pero difieren cuando la propiedad multiplicativa implica un número negativo.

4.1 Razones y proporciones

OBJETIVOS

1. Usar razones para calcular conversiones de unidad
2. Usar razones para determinar una unidad de precio
3. Resolver proporciones
4. Resolver problemas verbales usando proporciones

Razón

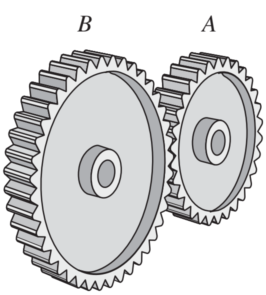


Figura 4.1

En la figura 4.1, en lo que el engrane A gira 4 veces, el engrane B gira 3 veces. Se dice que la razón de A a B es 4 a 3, o la razón del engrane B a A es 3 a 4. Matemáticamente hablando, una **razón** es la comparación de dos números mediante división. Se puede escribir la razón del engrane A a B como

$$4 \text{ a } 3 \qquad \text{o} \qquad 4:3 \qquad \text{o} \qquad \frac{4}{3}$$

Con frecuencia se usa la forma fraccionaria para expresar razones. Por ejemplo, si hay 7500 mujeres y 5000 hombres en cierta universidad, entonces la razón de mujeres a hombres es $\frac{7500}{5000} = \frac{3}{2}$.

Las razones pueden usarse también para convertir medidas de unidad. Para algunos problemas puede llegar a ser necesario cambiar de unidades. Las tablas 4.1 a 4.3 enlistan algunas relaciones básicas entre los sistemas de medida inglés y métrico. Las unidades de equivalencia para conversiones también se enlistan en la parte trasera del libro.

Tabla 4.1 Longitud

Sistema inglés	Sistema métrico	Comparación entre el inglés y el métrico
12 pulgadas 5 1 pie	1 kilómetro 5 1000 metro	1 pulgada < 2.54 centímetro
3 pies 5 1 yarda	1 hectómetro 5 100 metro	1 pie < 30.5 centímetros
5280 pies 5 1 milla	1 decámetro 5 10 metro	1 yarda < 0.9 metro
1760 yardas 5 1 milla	1 decímetro 5 0.1 metro	1 milla < 1.6 kilómetros
	1 centímetro 5 0.01 metro	1 centímetro < 0.4 pulgada
	1 milímetro 5 0.001 metro	1 kilómetro < 1.1 milla
		1 kilometer < 0.62 mile

Tabla 4.2 Volumen

Sistema inglés	Sistema métrico	Comparación entre inglés y métrico
1 taza 5 8 onzas de fluido 1 pinta 5 2 tazas 1 cuarto 5 2 pintas 1 galón 5 4 cuartos	1 litro 5 1000 mililitros	1 litro < 33.8 onzas de fluido 1 litro < 2.1 pintas 1 litro < 1.1 cuartos 1 galón < 3.8 litros

Tabla 4.3 Masa

Sistema inglés	Sistema métrico	Comparación entre inglés y métrico
1 libra 5 16 onzas 1 tonelada corta 5 2000 libras	1 kilogramo 5 1000 gramos 1 gramo 5 0.001 kilogramo 1 miligramo 5 0.001 gramo	1 kilogramo < 2.2 libras 1 libra < 0.45 kilogramo

Para convertir unidades de medida, se multiplican por razones equivalentes a 1. Las siguientes razones son ejemplos de razones que son equivalentes a 1.

$$\frac{1\text{ millae}}{5280\text{ pies}} \qquad \frac{36\text{ pulgadas}}{1\text{ yardas}} \qquad \frac{100\text{ centímetros}}{1\text{ metros}} \qquad \frac{1\text{ pulgada}}{2.54\text{ centímetros}}$$

Los siguientes ejemplos muestran cómo aplicar estas razones.

Ejemplo de salón de clases
Un tren bala puede viajar 1300 millas en 2 horas. ¿A qué velocidad equivale en pies por minuto?

EJEMPLO 1 Aplique su habilidad

El carro a control remoto de Craig puede alcanzar velocidades de hasta 60 pies por segundo. ¿A qué equivale esa velocidad en millas por hora?

Solución

La velocidad se representa como fracción, después se eligen las razones para que las unidades se cancelen y se puedan obtener las unidades deseadas.

$$\frac{60\text{ pies}}{1\text{ segundo}} \cdot \frac{1\text{ milla}}{5280\text{ pies}} \cdot \frac{60\text{ segundos}}{1\text{ minuto}} \cdot \frac{60\text{ minutos}}{1\text{ hora}}$$

Se realizan los cálculos y note cómo se cancelan las unidades. Por eso es importante incluir las unidades en sus razones.

$$\frac{60\,\cancel{\text{pies}}}{1\,\cancel{\text{segundo}}} \cdot \frac{1\text{ milla}}{5280\,\cancel{\text{pies}}} \cdot \frac{60\,\cancel{\text{segundos}}}{1\,\cancel{\text{minuto}}} \cdot \frac{60\,\cancel{\text{minutos}}}{1\text{ hora}} = \frac{216{,}000\text{ millas}}{5280\text{ horas}}$$

Realice el cálculo final y redondee las decenas de la respuesta.

$$\frac{216{,}000\text{ millas}}{5280\text{ horas}} = 40.9\text{ millas por hora, redondeado a decenas}$$

Ejemplo de salón de clases
Un oficial de policía le confiscó 2030.15 kilogramos de mercancia a un sujeto. Necesita registrar el peso en gramos para su reporte. ¿Cuántos gramos de mercancia confiscó?

EJEMPLO 2 Aplique su habilidad

Para un experimento, Sarah tiene 754 miligramos de cloruro de potasio. Sus cálculos para el experimento requieren que exprese esta cantidad en gramos. ¿Cuántos gramos de cloruro de potasio tiene?

Solución

Se necesitan multiplicar 754 miligramos por la razón que convierte miligramos a gramos.

$$754 \text{ miligramos} \cdot \frac{0.001 \text{ gramos}}{1 \text{ miligramos}} = 0.754 \text{ gramos}$$

Entonces, Sarah tiene 0.754 gramos de cloruro de potasio.

Ejemplo de salón de clases
La organización Carrera con Causa patrocinó una carrera de 5 kilómetros para recaudar fondos para la investigación de cáncer de mama. ¿Cuán larga es la carrera en millas redondeado en decenas?

EJEMPLO 3 Aplique su habilidad

Mercedes compró 24 litros de jugo de naranja para una guardería. Debido a que a cada niño se le da su porción en onzas, hallar el número de onzas que hay en 24 litros.

Solución

Esto implica una conversión entre el sistema inglés y el métrico.

$$24 \text{ litros} \cdot \frac{33.8 \text{ onzas}}{1 \text{ litro}} = 811.2 \text{ onzas}$$

Así que Mercedes tiene 811.2 onzas de jugo para la guardería.

Otra aplicación de las razones son las unidades de precio. Una unidad de precio es la razón del costo con el número de unidades. Por ejemplo, si 32 onzas de cereal cuestan \$4.80, la unidad de precio sería la razón $\frac{\$4.80}{32 \text{ onzas}}$. Típicamente, se simplifica esta razón en términos de 1 onza. Se puede hacer esto dividiendo 4.80 entre 32, entonces $\frac{\$4.80}{32 \text{ onzas}} = \$0.15$ por onza.

Como el siguiente ejemplo muestra, las unidades de precio suelen usarse para comparar el costo de productos en tiendas.

Ejemplo de salón de clases
Mientras compraba comida para perro, Marcus notó que podía comprar 14 libras de Happy Pet por \$30.80 y 5 libras de Tastes Great por \$12. ¿Cuál es el precio por libra de cada marca de comida para perro?

EJEMPLO 4 Aplique su habilidad

Marti nota que una botella de 30 onzas de Premier Ketchup cuesta \$1.80 y una de 36 onzas de Henry's Ketchup cuesta \$2.34. ¿Cuál marca debería comprar para obtener el mejor precio?

Solución

Para hallar el mejor precio, calcular la unidad de precio de cada marca de catsup. Después compare las unidades de precio.

$$\text{Unidad de precio de Premier Ketchup } \frac{\$1.80}{30 \text{ onzas}} = \$0.06 \text{ por onza}$$

$$\text{Unidad de precio de Henry's Ketchup } \frac{\$2.34}{36 \text{ onzas}} = \$0.065 \text{ por onza}$$

Ya que Henry's Ketchup cuesta \$0.065 por onza y Premier Ketchup cuesta \$0.06 por onza, Premier Ketchup tiene mejor precio.

Proporciones

Un enunciado de igualdad entre dos razones es llamado una proporción.

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

es una proporción que declara que las razones $\frac{2}{3}$ y $\frac{8}{12}$ son iguales. En la proporción general

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \qquad b \neq 0 \text{ y } d \neq 0$$

si se multiplican ambos lados por el común denominador, *bd*, se obtiene

$$(bd)\left(\frac{a}{b}\right) = (bd)\left(\frac{c}{d}\right)$$
$$ad = bc$$

Estos productos ad y bc son llamados *multiplicación cruzada* y son iguales entre ellos. Esto se plantea como una propiedad de las proporciones.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y sólo si $ad = bc$, donde $b \neq 0$ y $d \neq 0$

Se puede usar esta propiedad para resolver proporciones.

Ejemplo de salón de clases

Resolver $\frac{n}{12} = \frac{2}{3}$.

EJEMPLO 5 Resolver $\frac{x}{20} = \frac{3}{4}$.

Solución

$$\frac{x}{20} = \frac{3}{4}$$

$4x = 60$ Los productos cruzados son iguales

$x = 15$

El conjunto solución es $\{15\}$.

Ejemplo de salón de clases

Resolver $\frac{x+1}{7} = \frac{x-4}{8}$.

EJEMPLO 6 Resolver $\frac{x-3}{5} = \frac{x+2}{4}$.

Solución

$$\frac{x-3}{5} = \frac{x+2}{4}$$

$4(x-3) = 5(x+2)$ Los productos cruzados son iguales

$4x - 12 = 5x + 10$ Propiedad distributiva

$-12 = x + 10$ Se sumó a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de $4x$, es decir $-4x$

$-22 = x$ Se sumó a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de 10, es decir -10

El conjunto solución es $\{-22\}$.

Si una variable aparece en uno o ambos denominadores, entonces se debe hacer una restricción para evitar la divisón entre cero, como el siguiente ejemplo ilustra.

Ejemplo de salón de clases

Resolver $\frac{9}{x+2} = \frac{3}{x-5}$.

EJEMPLO 7 Resolver $\frac{7}{a-2} = \frac{4}{a+3}$.

Solución

$\frac{7}{a-2} = \frac{4}{a+3}$, $a \neq 2$ y $a \neq -3$

$7(a+3) = 4(a-2)$ Los productos cruzados son iguales

$7a + 21 = 4a - 8$ Propiedad distributiva

$3a + 21 = -8$ Se sumó a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de $4a$, es decir $-4a$

$3a = -29$ Se sumó a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de 21, es decir -21

$a = -\frac{29}{3}$ Se multiplicó a ambos lados de la igualdad el reciproco de 3, es decir $\frac{1}{3}$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{29}{3}\right\}$.

Ejemplo de salón de clases

Resolver $\frac{x}{2} + 9 = \frac{x}{3}$.

EJEMPLO 8 Resolver $\frac{x}{4} + 3 = \frac{x}{5}$.

Solución

Esto no es una proporción, así que simplemente se pueden multiplicar ambos lados por 20 para eliminar toda fracción de la ecuación.

$$\frac{x}{4} + 3 = \frac{x}{5}$$

$$20\left(\frac{x}{4} + 3\right) = 20\left(\frac{x}{5}\right) \qquad \text{Multiplicar ambos lados por 20}$$

$$20\left(\frac{x}{4}\right) + 20(3) = 20\left(\frac{x}{5}\right) \qquad \text{Propiedad distributiva}$$

$$5x + 60 = 4x$$

$$x + 60 = 0 \qquad \text{Se sumó a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de } 4x\text{, es decir } -4x$$

$$x = -60 \qquad \text{Se sumó a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de } 60\text{, es decir } -60$$

El conjunto solución es $\{-60\}$.

Comentario: El ejemplo 8 demuestra la importancia de pensar antes de escribir. Ya que la ecuación no estaba en la forma de proporción, fue necesario regresar a una técnica previa para resolver las ecuaciones.

Resolución de problemas usando proporciones

Algunos problemas verbales pueden plantearse y resolverse convenientemente usando los conceptos de razón y proporción. Considere los siguientes ejemplos.

Ejemplo de salón de clases

Se añade etanol a gasolina en una razón de 1.5 galones a 20 galones de gasolina. ¿Cuántos galones de etanol deben agregarse a 70 galones de gasolina?

EJEMPLO 9 **Aplique su habilidad**

Un medicamento pediátrico debe darse en razón de 0.45 onzas por cada 6 libras de peso corporal. ¿Cuántas onzas se le debe dar a un niño que pesa 28 libras?

Solución

Sea x el número de onzas de la dosis para el niño. Ahora, se establece una proporción en la cual la razón compara las onzas de medicina y la otra razón compara los pesos correspondientes.

$$\frac{0.45 \text{ onza}}{x \text{ onzas}} = \frac{6 \text{ libras}}{28 \text{ libras}}$$

Para resolver esta ecuación, se hace la multiplicación cruzada.

$$0.45(28) = x(6)$$

$$12.6 = 6x$$

$$x = \frac{12.6}{6} = 2.1$$

La dosis del niño debe ser de 2.1 onzas.

El ejemplo 8 muestra una manera de plantear una proporción para resolver el problema, pero hay otras proporciones equivalentes que darían el mismo resultado. Por ejemplo, las proporciones

$$\frac{0.45 \text{ onza}}{6 \text{ libras}} = \frac{x \text{ onzas}}{28 \text{ libras}} \quad \text{o} \quad \frac{6 \text{ libras}}{0.45 \text{ onza}} = \frac{28 \text{ libras}}{x \text{ onzas}}$$

podrían usarse para resolver el problema. Note en ambas proporciones que las unidades en los numeradores y los denominadores son consistentes con las razones.

Ejemplo de salón de clases
Los gastos de un viaje de ski se dividen entre Meredith y Robert en razón de 3 a 2. Si los gastos son \$2050, ¿cuánto pagará cada persona?

EJEMPLO 10 Aplique su habilidad

En un restaurante local de pizza, las propinas del sábado en la noche sumaron \$147 y se debe dividir entre el mesero y el mozo en razón de 5 a 2. ¿Cuánto dinero recibirá cada uno?

Solución

Sea y el dinero para el mesero. Entonces $147 - y$ representa el dinero para el mozo. Se plantea la proporción y se resuelve hallando los productos cruzados.

$$\begin{aligned} \frac{y}{147 - y} &= \frac{5}{2} \\ 2y &= 5(147 - y) \\ 2y &= 735 - 5y \\ 7y &= 735 \\ y &= 105 \end{aligned}$$

Si $y = 105$, entonces $147 - y = 147 - 105 = 42$; entonces, el mesero recibe \$105 de las propinas y el mozo recibe \$42 de las propinas.

Ejemplo de salón de clases
La cantidad de \$2600 debe repartirse entre dos personas en razón de 3 a 5. ¿Cuánto recibe cada persona?

EJEMPLO 11 Aplique su habilidad

La cantidad de \$1750 debe repartirse entre dos personas en razón de 3 a 4. ¿Cuánto dinero recibe cada persona?

Solución

Sea d la cantidad de dinero que recibe una persona. Entonces $1750 - d$ representa la cantidad para la otra persona. Cuando se plantea esta proporción:

$$\begin{aligned} \frac{d}{1750 - d} &= \frac{3}{4} \\ 4d &= 3(1750 - d) \\ 4d &= 5250 - 3d \\ 7d &= 5250 \\ d &= 750 \end{aligned}$$

Si $d = 750$, entonces $1750 - d = 1000$; por ende, una persona recibe \$750 y la otra persona recibe \$1000.

Examen de conceptos 4.1

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. Una razón es la comparación de dos números por medio de una división.
2. La razón de 7a 3 puede escribirse como 3:7.
3. Una proporción es un enunciado de igualdad entre dos razones.
4. El enunciado algebraico $\frac{w}{2} = \frac{w}{5} + 1$ es una proporción.
5. Para la proporción $\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$, los productos cruzados serían $5x$ y $3y$.

6. Si los productos cruzados de una proporción son wx y yz, entonces $\frac{x}{z} = \frac{y}{w}$.

7. Para la proporción $\frac{a+1}{a-2} = \frac{5}{7}$, $a \neq -1$ y $a \neq 2$.

8. La proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es equivalente a la proporción $\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$.

9. La proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es equivalente a la proporción $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

10. Hay 5280 pies en una milla.

Conjunto de problemas 4.1

Para los problemas 1-10, responder la pregunta planteando el factor de conversión apropiado. (Objetivo 1)

1. En clase de biología, Martin midió una rana que medía 6.5 centímetros de largo. ¿Cuál es la longitud de la rana en milímetros?

2. Una incisión quirúrgica en un antebrazo medía 76 milímetros. ¿Qué tan larga era la incisión en centímetros?

3. Una mezcla de comida para perro tiene 24 onzas de cordero. ¿Cuántas libras de cordero tiene?

4. Una receta de pudín necesita 7 cuartos de leche. ¿Cuántos galones de leche necesita?

5. Un barniz para muebles se aplica en razón de 500 mililitros por cada pie cuadrado. Si se aplica en esta misma razón, ¿cuántas pintas se necesitan?

6. Tres galones de pintura son necesarios para pintar cierto departamento. ¿Cuántos litros de pintura se necesitan?

7. Un paciente reportó su peso en 76 kilogramos. ¿Cuánto pesa en libras?

8. El diámetro de cierto pino mide 18 pulgadas. ¿Cuánto mide el diámetro en centímetros?

9. Damien corre autos en carreras de un cuarto de milla. Su carro puede recorrer 0.25 millas en 6 segundos. ¿Cómo se representa esta razón en millas por hora?

10. La velocidad máxima de un bote CraigCat es 52 kilómetros por hora. Exprese esta razón en millas por hora.

Para los problemas 11-20, responder la pregunta planteando y evaluando la razón o conversión apropiada para determinar la unidad de precio. (Objetivo 2)

11. Un paquete de queso Wisconsin pesa 12 libras y cuesta \$4.92. Determinar el precio por onza de queso.

12. Una bolsa de cinco libras de patatas cuesta \$4.80. Determinar el precio por libra de patatas.

13. Mientras hacía las compras, Robert notó que la marca de jamón Oscar costaba \$2.80 por 8 onzas y que la marca Goody del mismo tipo de jamón costaba \$3.80 por 10 onzas. ¿Cuál es la unidad de precio de cada marca de jamón?

14. Harry's Grill ofrece 12 alitas por \$7.80, mientras que Margo's Cookery tiene 15 alitas por \$10.50. Determine el precio de una alita en cada restaurante.

15. Kayla está comprando llantas para coche. John's Garage ofrece un especial de \$372 por cuatro llantes al precio de tres. ¿Cuál es el precio por llanta durante la oferta y cuál sería el precio por llanta si las llantas no estuvieran de oferta?

16. Dylan busca comprar llantas para coche. Surefire's Repair Shop vende cuatro llantas por \$416. El siguiente mes, Surefire's va a tener una oferta en estas llantas donde puede comprar cuatro llantas por el precio de tres. ¿Cuál es el precio de un set de cuatro llantas durante la oferta?

17. Una pizza grande con diámetro de 14 pulgadas cuesta \$13.00. Determine el área de la pizza, y después calcule el precio por pulgada cuadrada de la pizza. Redondee el resultado.

18. Un listón decorativo cuesta \$2.16 la yarda. Hallar el precio del listón por pulgada.

19. Un galón de leche cuesta \$4.16. Hallar el precio de la pinta de leche.

20. Una libra de chocolate suizo cuesta \$12.80. Hallar el precio de la onza de chocolate.

Para los problemas 21-54, resolver cada ecuación. (Objetivo 3)

21. $\frac{x}{6} = \frac{3}{2}$

22. $\frac{x}{9} = \frac{5}{3}$

23. $\frac{5}{12} = \frac{n}{24}$

24. $\frac{7}{8} = \frac{n}{16}$

25. $\frac{x}{3} = \frac{5}{2}$

26. $\frac{x}{7} = \frac{4}{3}$

27. $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{x+4}{3}$

28. $\dfrac{x-6}{7} = \dfrac{x+9}{8}$

29. $\dfrac{x+1}{6} = \dfrac{x+2}{4}$

30. $\dfrac{x-2}{6} = \dfrac{x-6}{8}$

31. $\dfrac{h}{2} - \dfrac{h}{3} = 1$

32. $\dfrac{h}{5} + \dfrac{h}{4} = 2$

33. $\dfrac{x+1}{3} - \dfrac{x+2}{2} = 4$

34. $\dfrac{x-2}{5} - \dfrac{x+3}{6} = -4$

35. $\dfrac{-4}{x+2} = \dfrac{-3}{x-7}$

36. $\dfrac{-9}{x+1} = \dfrac{-8}{x+5}$

37. $\dfrac{-1}{x-7} = \dfrac{5}{x-1}$

38. $\dfrac{3}{x-10} = \dfrac{-2}{x+6}$

39. $\dfrac{3}{2x-1} = \dfrac{2}{3x+2}$

40. $\dfrac{1}{4x+3} = \dfrac{2}{5x-3}$

41. $\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{8}{7}$

42. $\dfrac{5}{6} = \dfrac{n}{n+1}$

43. $\dfrac{x-1}{2} - 1 = \dfrac{3}{4}$

44. $-2 + \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{5}{6}$

45. $-3 - \dfrac{x+4}{5} = \dfrac{3}{2}$

46. $\dfrac{x-5}{3} + 2 = \dfrac{5}{9}$

47. $\dfrac{n}{150-n} = \dfrac{1}{2}$

48. $\dfrac{n}{200-n} = \dfrac{3}{5}$

49. $\dfrac{300-n}{n} = \dfrac{3}{2}$

50. $\dfrac{80-n}{n} = \dfrac{7}{9}$

51. $\dfrac{-1}{5x-1} = \dfrac{-2}{3x+7}$

52. $\dfrac{-3}{2x-5} = \dfrac{-4}{x-3}$

53. $\dfrac{2(x-1)}{3} = \dfrac{3(x+2)}{5}$

54. $\dfrac{4(x+3)}{7} = \dfrac{2(x-6)}{5}$

Para los problemas 55-71, resolver cada problema usando una proporción. (Objetivo 4)

55. Imagine que un carro viaja 264 millas usando 12 galones de gasolina. ¿Qué tan lejos llegará con 15 galones?

56. Jesse usó 10 galones de gasolina para recorrer 170 millas. ¿Cuánta gasolina necesita para viajar 238 millas?

57. Si la razón de longitud de un rectángulo con su ancho es $\dfrac{5}{2}$, y el ancho es 24 centímetros, hallar su largo.

58. Si la razón del ancho de un rectángulo con su largo es $\dfrac{4}{5}$, y el largo es 45 centímetros, hallar el ancho.

59. Una solución de agua salada se hace disolviendo 3 libras de sal en 10 galones de agua. Con esta razón, ¿cuántas libras de sal se necesitan para 25 galones de agua? (Ver la figura 4.2)

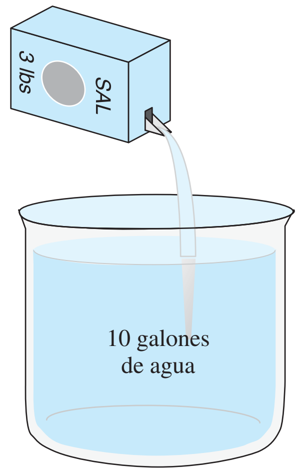


Figura 4.2

60. Si una casa valuada en \$150 000 tiene un gravamen de \$1900 por impuesto predial. Entonces, a la misma tasa, ¿cuánto es el impuesto sobre una casa valuada en \$180,000?

61. Si 20 libras de fertilizante cubren 1500 pies cuadrados de césped, ¿cuántas libras se necesitan para 2500 pies cuadrados?

62. Se reportó una epidemia de gripe que está afectando a seis de cada diez estudiantes de universidad en cierta parte del país. Con esta razón, ¿cuántos estudiantes en esa parte del país se verán afectados si la universidad tiene 15,000 estudiantes?

63. Una encuesta previa a unas elecciones indicó que tres de cada siete votantes iban a votar. Con esta razón, ¿cuánta gente se espera que vote en una ciudad de 210,000 votantes?

64. Una tabla de 28 pies se corta en dos piezas cuyas longitudes en razón son 2 a 5. Hallar la longitud de cada pieza.

65. En un plan de nutrición, la razón de calorías a gramos de carbohidratos es 16 a 1. De acuerdo a esta razón, ¿cuántos gramos de carbohidrados habrá en un plan que tiene 2200 calorías?

66. La razón de estudiantes varones a estudiantes mujeres en cierta universidad es de 5 a 4. Si hay un total de 6975 estudiantes, encuentre el número de estudiantes varones y el número de estudiantes mujeres.

67. Una inversión de \$500 gana \$45 en un año. Con la misma razón, ¿cuánto dinero debe invertirse para tener \$72 por año?

68. La cantidad de $1250 debe dividirse entre dos personas en la razón de 2 a 3. ¿Cuánto recibe cada persona?

69. Una herencia de $180, 000 debe dividirse entre un niño y una fundación local contra el cáncer en razón de 5 a 1. ¿Cuánto dinero recibirá el niño?

70. Si la tasa de cambio es 4 euros por 5 dólares estadounidenses, ¿cuántos euros obtendrá un viajero con $300?

71. Si la tasa de cambio es 160 yenes por 2 dólares estadounidenses, ¿cuánto cuesta un souvenir de $17 en yenes?

Pensamientos en palabras

72. Explique la diferencia entre razón y proporción.

73. ¿Cuál es el error en el siguiente procedimiento? Explique cómo debe de hacerse.

$$\frac{x}{2} + 4 = \frac{x}{6}$$

$$6\left(\frac{x}{2} + 4\right) = 2(x)$$

$$3x + 24 = 2x$$

$$x = -24$$

74. Estimar la respuesta para cada uno de los siguientes problemas. Además, explicar cómo llegó a ese estimado. Después resuelva el problema para verificar qué tan bien estimó.

(a) La razón de estudiantes varones a estudiantes mujeres en cierta universidad es de 5 a 3. Si hay un total de 1096 estudiantes, encuentre el número de estudiantes varones.

(b) Si 5 libras de fertilizante cubren 1200 pies cuadrados de césped, ¿cuántas libras se necesitan para 3000 pies cuadrados?

(c) Una inversión de $5000 gana $300 de interés en un año. Con la misma razón, ¿cuánto dinero se debe invertir para ganar $450?

(d) Si la razón de largo de un rectángulo con su ancho es de 5 a 3, y el largo es de 70 centímetros, hallar el ancho.

Más investigación

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones. No olvide que la división entre cero es indefinida.

75. $\frac{3}{x - 2} = \frac{6}{2x - 4}$

76. $\frac{8}{2x + 1} = \frac{4}{x - 3}$

77. $\frac{5}{x - 3} = \frac{10}{x - 6}$

78. $\frac{6}{x - 1} = \frac{5}{x - 1}$

79. $\frac{x - 2}{2} = \frac{x}{2} - 1$

80. $\frac{x + 3}{x} = 1 + \frac{3}{x}$

Respuestas del examen de conceptos

1. Cierto **2.** Falso **3.** Cierto **4.** Falso **5.** Cierto **6.** Cierto **7.** Falso **8.** Falso **9.** Cierto **10.** Cierto

4.2 Porcentajes y resolución de problemas

OBJETIVOS

1 Usar una proporción para convertir una fracción a porcentaje

2 Resolver problemas porcentuales básicos

3 Calcular el porcentaje de aumento o disminución

4 Aplicar la fórmula de interés simple para resolver problemas

Porcentaje

La palabra porcentaje significa "por cien" y se usa el símbolo % para expresarlo. Por ejemplo, se escribe 7 por ciento como 7%, lo que significa $\frac{7}{100}$ ó 0.07. En otras palabras, por ciento es una especie de razón; de hecho, es una en la que el denominador siempre es 100. Las proporciones dan una base conveniente para cambiar fracciones comunes a porcentajes. Considere los siguientes ejemplos:

Ejemplo de salón de clases
Expresar $\frac{9}{25}$ como porcentaje

EJEMPLO 1 Expresar $\frac{7}{20}$ como porcentaje.

Solución

Se pregunta "¿Qué número se compara con 100 como 7 se compara con 20?" Por ende, si n representa el número, se puede establecer la siguiente proporción.

$$\frac{n}{100} = \frac{7}{20}$$
$$20n = 700$$
$$n = 35$$

Entonces $\frac{7}{20} = \frac{35}{100} = 35\%$.

Ejemplo de salón de clases
Expresar $\frac{4}{9}$ como porcentaje

EJEMPLO 2 Expresar $\frac{5}{6}$ como porcentaje.

Solución

$$\frac{n}{100} = \frac{5}{6}$$
$$6n = 500$$
$$n = \frac{500}{6} = \frac{250}{3} = 83\frac{1}{3}$$

Entonces $\frac{5}{6} = 83\frac{1}{3}\%$.

Algunos problemas porcentuales básicos

¿Cuál es el 8% de 35? ¿Quince por ciento de qué número es 24? ¿Veintiuno es qué porcentaje de 70? Estos son representativos de tres tipos básicos de problemas porcentuales. Se puede resolver cada uno de estos problemas traduciendo y resolviendo una ecuación algebraica simple.

Ejemplo de salón de clases
¿Cuál es el 12% de 80?

EJEMPLO 3 ¿Cuál es el 8% de 35?

Solución

Sea n el número a encontrar. La palabra "es" se refiere a la igualdad, y la palabra "de" significa multiplicación. Así, la pregunta se traduce a

$$n = (8\%)(35)$$

que puede resolverse de la siguiente manera:

$$n = (0.08)(35)$$
$$= 2.8$$

Entonces 2.8 es el 8% de 35.

Ejemplo de salón de clases
¿Seis por ciento de qué número es 9?

EJEMPLO 4 ¿Quince por ciento de qué número es 24?

Solución

Sea n el número a encontrar.

$$\begin{aligned} (15\%)(n) &= 24 \\ 0.15n &= 24 \\ 15n &= 2400 && \text{Se multiplicaron ambos lados por 100} \\ n &= 160 \end{aligned}$$

Entonces, 15% de 160 es 24.

Ejemplo de salón de clases
¿Cuarenta y dos es qué porcentaje de 168?

EJEMPLO 5 ¿Veintiuno es qué porcentaje de 70?

Solución

Sea r el porcentaje a encontrar.

$$\begin{aligned} 21 &= r(70) \\ \frac{21}{70} &= r \\ \frac{3}{10} &= r && \text{¡Reducir!} \\ \frac{30}{100} &= r && \text{Cambiar } \frac{3}{10} \text{ a } \frac{30}{100} \\ 30\% &= r \end{aligned}$$

Por ende, 21 es 30% de 70.

Ejemplo de salón de clases
¿Veintiuno es qué porcentaje de 12?

EJEMPLO 6 ¿Setenta y dos es qué porcentaje de 60?

Solución

Sea r el porcentaje a encontrar.

$$\begin{aligned} 72 &= r(60) \\ \frac{72}{60} &= r \\ \frac{6}{5} &= r \\ \frac{120}{100} &= r && \text{Cambiar } \frac{6}{5} \text{ a } \frac{120}{100} \\ 120\% &= r \end{aligned}$$

Entonces, 72 es 120% de 60.

Es útil tener el hábito de comprobar las respuestas según su sensatez. También se sugiere estar al pendiente de un posible error al computar estimando la respuesta antes de resolver el problema. Por ejemplo, antes de resolver el ejemplo 6, puede estimar lo siguiente: Ya que 72 es más grande que 60, sabe que la respuesta debe ser mayor que 100%. Además, 1.5 (ó 150%) veces 60 es igual a 90. Entonces, puede estimar que la respuesta estará entre 100% y 150%.

Esto puede parecer un estimado muy burdo, pero muchas veces revelará el error al momento de computar.

Porcentaje de cambio

Conforme comienza a pensar en problemas porcentuales, se dará cuenta que los porcentajes se usan en la vida diaria. Uno de los usos más comunes es el del porcentaje de aumento o disminución, que puede generalizarse en porcentaje de cambio. La fórmula pide calcular la diferencia entre cantidades, después dividir entre la cantidad original, es decir, la cantidad antes del cambio. Para convertir a un porcentaje, se multiplica el resultado de la división por 100%.

Porcentaje de cambio = (Nueva cantidad -cantidad original/ cantidad original).100%

Si el porcentaje de cambio es positivo, se le llama un porcentaje de aumento; si es negativo, se le llama de disminución. Los siguientes ejemplos demuestran cómo aplicar la fórmula para el porcentaje de cambio.

Doug Cannell/Magnetcreative/ istockphoto.com

EJEMPLO 7 Aplique su habilidad

El año pasado, el precio de unos zapatos para correr era $120. Este año, el precio del mismo par es $135. ¿Cuál es el porcentaje de cambio en el precio de los zapatos?

Solución

El precio original era de $120. El precio actual es de $135.
Al sustituir los valores en la fórmula, da:

$$\text{Porcentaje de cambio} = = \frac{135 - 120}{120} \cdot 100\% = \frac{15}{120} \cdot 100\% = 0.125 \cdot 100\% = 12.5\%$$

El precio de los zapatos incrementó 12.5%.

Ejemplo de salón de clases
El año pasado, la colegiatura de un semestre costó $2000. Este año, la colegiatura es de $2400. ¿Cuál es el porcentaje de cambio en el costo de la colegiatura?

EJEMPLO 8 Aplique su habilidad

El año pasado en Navidad, una tableta electrónica costaba $200. Después de Navidad, en enero, el precio era $160. ¿Cuál es el porcentaje de cambio en el precio de la tableta?

Solución

El precio original era de $200 en Navidad. El nuevo precio fue de $160 en enero.
Sustituir estos valores en la fórmula da

$$\text{Porcentaje de cambio} = = \frac{160 - 200}{200} \cdot 100\% = \frac{-40}{200} \cdot 100\% = -0.2 \cdot 100\% = -20\%$$

Debido a que el precio bajó, el porcentaje de cambio es un número negativo. Suele eliminarse el signo y se hace mención solamente del porcentaje de disminución. El precio de la tableta electrónica bajó 20%.

Ejemplo de salón de clases
En enero, el precio de un celular android era $400. En junio, el precio era $300. ¿Cuál es el porcentaje de cambio en el precio del celular?

Interés simple

Ciertos tipos de problemas de inversiones pueden traducirse a ecuaciones algebraicas. En algunos de estos problemas, se usa la fórmula de interés simple $i = Prt$, donde i representa la cantidad de interés ganado por invertir P dólares a cierta razón porcentual (r) por (t) años.

Ejemplo de salón de clases
Isabel invirtió \$5600 por 3 años y recibió \$1092 de intereses. Hallar la tasa de interés anual que recibió Isabel por su inversión.

EJEMPLO 9

John invirtió \$9300 por 2 años y recibió \$1395 de interés. Hallar la tasa de interés anual que recibió John por su inversión.

Solución

$$\begin{aligned} i &= Prt \\ 1395 &= 9300r(2) \\ 1395 &= 18600r \\ \frac{1395}{18600} &= r \\ 0.075 &= r \end{aligned}$$

La tasa de interés anual es 7.5%.

Ejemplo de salón de clases
¿Cuánto debe invertirse para recibir \$648 de interés cuando la inversión se hizo por dos años con una tasa de interés anual de 5.4%?

EJEMPLO 10 Aplique su habilidad

¿Cuánto debe invertirse para recibir \$1500 de interés cuando la inversión se hizo por 3 años a una tasa de interés anual de 6.25%?

Solución

$$\begin{aligned} i &= Prt \\ 1500 &= P(0.0625)(3) \\ 1500 &= P(0.1875) \\ \frac{1500}{0.1875} &= P \\ 8000 &= P \end{aligned}$$

Se debe invertir \$8000.

Ejemplo de salón de clases
¿Cuánto interés mensual se le cargará a una tarjeta de crédito con un balance de \$624 si la compañía cobra una tasa de interés anual del 19%?

EJEMPLO 11 Aplique su habilidad

¿Cuánto interés mensual se cargará a una tarjeta con un balance de \$754 si la compañía cobra una tasa de interés anual de 18%?

Solución

$$\begin{aligned} i &= Prt \\ i &= 754(0.18)\left(\frac{1}{12}\right) \qquad \text{Recuerde, un mes es } \frac{1}{12} \text{ de un año} \\ i &= 11.31 \end{aligned}$$

El cargo será de \$11. 31.

Examen de conceptos 4.2

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. La palabra "porcentaje" significa parte por mil.
2. Una fracción puede convertirse a porcentaje usando las proporciones.
3. Un porcentaje nunca puede superar el 100%.

4. Doce es el 30% de 40.
5. Ciento veinte por ciento de 30 es 24.
6. El porcentaje de cambio siempre es un porcentaje de aumento.
7. El porcentaje de aumento siempre es menos que 100%.
8. En la fórmula $i = Prt$, la r representa el interés de vuelta.
9. En la fórmula $i = Prt$, la P representa el dinero invertido.
10. Mil dólares, invertidos a tasa anual del 5% de interés simple, gana $100 de interés en 2 años.

Conjunto de problemas 4.2

Para los problemas 1-12, usar las proporciones para cambiar cada fracción común a un porcentaje. **(Objetivo 1)**

1. $\frac{11}{20}$

2. $\frac{17}{20}$

3. $\frac{3}{5}$

4. $\frac{7}{25}$

5. $\frac{1}{6}$

6. $\frac{5}{7}$

7. $\frac{3}{8}$

8. $\frac{1}{16}$

9. $\frac{3}{2}$

10. $\frac{5}{4}$

11. $\frac{12}{5}$

12. $\frac{13}{6}$

Para los problemas 13-30, responder la pregunta planteando y resolviendo la ecuación apropiada. **(Objetivo 2)**

13. ¿Cuál es el 7% de 38?

14. ¿Cuál es el 35% de 52?

15. ¿15% de qué número es 6.3?

16. ¿55% de qué número es 38.5?

17. ¿76 es qué porcentaje de 95?

18. ¿72 es qué porcentaje de 120?

19. ¿Cuál es el 120% de 50?

20. ¿Cuál es el 160% de 70?

21. ¿46 es qué porcentaje de 40?

22. ¿26 es qué porcentaje de 20?

23. ¿160% de qué número es 144?

24. ¿220% de qué núemero es 66?

25. ¿Cuál es el 5.5% de 80?

26. ¿Cuál es el 1.2% de 540?

27. ¿1.2% de qué número es 4.2?

28. ¿2.1% de qué número es 10.5?

29. ¿16.5 es qué porcentaje de 220?

30. ¿24.6 es qué porcentaje de 600?

Para los problemas 31-54, hallar el porcentaje de cambio y establecer si es porcentaje de aumento o de disminución. **(Objetivo 3)**

31. Un cliente en un programa de pérdida de peso comenzó con 320 libras y, al final de la semana cuatro, pesaba 280 libras. Hallar el porcentaje de cambio en el peso del cliente.

32. Una tienda de celulares vendió 200 celulares en mayo y 248 en junio. Hallar el porcentaje de cambio en el número de celulares vendidos entre mayo y junio.

33. Caleb paga $400 de su parte de renta del departamento. Después de que su compañero se vaya, tendrá que pagar $536. ¿Cuál es el porcentaje de cambio en su parte de la renta?

34. Kari pagaba $84 mensuales por el seguro de su carro hasta que tuvo el accidente. Después del accidente, el costo mensual de su seguro fue de $119.28. ¿Cuál es el porcentaje de cambio en su pago mensual del seguro?

35. Durante un periodo de clase, 32 estudiantes fueron a la clase de álgebra. Para la siguiente clase, 28 estudiantes fueron. ¿Cuál es el porcentaje de cambio entre los dos periodos de clase?

36. El profesor Williams tiene 40 preguntas en cada examen de capítulo, pero 62 preguntas en el examen final. ¿Cuál es el porcentaje de cambio entre el número de preguntas por capítulo y el examen final?

37. Un doctor cambió la dosis de la medicina de un paciente de 500 miligramos diarios a 600 miligramos diarios. Hallar el porcentaje de cambio en la dosis diaria del paciente.

38. Después de realizar pruebas de sangre, el doctor cambió la dosis de medicina de un paciente de 40 miligramos a 30 miligramos. Hallar el porcentaje de cambio en la dosis del paciente.

39. El precio por un galón de leche ahora es $4.10. El mes pasado el precio era de $4.00 por galón. ¿Cuál es el porcentaje de cambio del precio de la leche?

40. Un código de acceso para una clase en línea costaba $60 el año pasado. Este año cuesta $48. ¿Cuál es el porcentaje de cambio en el precio del código de acceso?

41. Una universidad construyó un estacionamiento que cambió el número de lugares de estacionamiento de 8400 a 11, 088 espacios. Hallar el porcentaje de cambio de número de espacios de estacionamiento.

42. Este año, 504 estudiantes solicitaron un lugar en la carrera de enfermería en una universidad comunitaria. El año pasado, el número de solicitantes era 450. Hallar el porcentaje de cambio en el número de solicitantes.

43. El año pasado, se estimaba que un pueblo tenía 200 personas sin hogar. Este año se estima que hay 180 personas sin hogar. ¿Cuál es el porcentaje de cambio en el número estimado de gente sin hogar?

44. En el 2013, un vecindario tenía 120 casas. En el 2012, el mismo vecindario tenía 150 casas. ¿Cuál es el porcentaje de cambio en el número de casas?

45. La tarifa por hora de Davone en su trabajo subió de $10.00 a $10.50. Encontrar el porcentaje de cambio para su aumento de salario.

46. Heather fue despedida de su trabajo que pagaba $12.00 la hora. Otra compañía le ofrece un trabajo similar que paga $10.20 la hora. ¿Cuál sería el porcentaje de cambio en su tarifa por hora?

47. Una maestra de escuela de primaria gana $32, 000 al año. Está considerando aceptar un empleo en otra escuela que pagaría $2, 500 más de lo que gana actualmente. Si decide tomar el nuevo empleo, ¿cuál sería el porcentaje de cambio en su salario?

48. Julio quiere comprar un carro nuevo. Si compra el que quiere, su pago mensual de $300 se convertirá en $345. Si decide comprar un carro nuevo, ¿cuál sería el porcentaje de cambio en su pago mensual?

49. La cuenta de electricidad de Susan por el mes de julio fue de $80.00. Esto fue $16.00 más que la cuenta de junio. Hallar el porcentaje de cambio en su cuenta de electricidad de junio a julio?

50. En agosto, el número de personas empleadas en una reserva en Alaska era 240. Esto son 160 personas menos que las empleadas en Julio. Hallar el porcentaje de cambio en el número de empleados de julio a agosto.

51. Durante un embargo de petróleo, el precio por galón de gasolina cambió de $2.50 por galón a $6.00 por galón. ¿Cuál es el porcentaje de cambio en el precio por galón de gasolina?

52. Después de que un nuevo estadio fue construido, el precio de los mejores asientos cambió de $8.00 a $20.00. ¿Cuál es el porcentaje de cambio en el precio de los asientos?

53. Durante su oferta inicial, el precio de una acción en una compañía subió de $24 por acción a $148.80. ¿Cuál es el porcentaje de cambio en el precio de una acción?

54. Durante una sequía extremadamente dura, el precio de un manojo de grano aumentó a $39.60 de $12.00. ¿Cuál es el porcentaje de cambio en el precio por manojo de grano?

Para los problemas 55-66, usar la fórmula $i = Prt$ para llegar a una solución. **(Objetivo 4)**

55. ¿Cuál será el interés ganado de un depósito certificado de $2500 invertidos a 4% de interés anual por 5 años?

56. ¿Cuál será el interés ganado de un depósito certificado de $1200 invertido a 5% de interés anual por 3 años?

57. Encontrar la tasa de interés anual si se gana $560 de interés por invertir $3500 por 2 años.

58. Encontrar la tasa de interés anual si se gana $1260 de interés por invertir $7000 por 3 años.

59. ¿Cuánto dinero, invertido a 8% de interés anual por 3 años, se necesita para ganar $1000?

60. ¿Cuánto dinero, invertido a 5% de interés anual por 4 años, se necesita para ganar $600?

61. ¿Cuánto tiempo necesitan $2400 estar invertidos a un interés anual de 5.5% para ganar $330?

62. ¿Cuántos años necesitan $2000 estar invertidos a un interés anual de 5.4% para ganar $162?

63. ¿Cuánto interés debe cargarse a un préstamo estudiantil si se otorgaron $8000 por 9 meses a una tasa de 8.5% de interés anual?

64. ¿Cuánto es el interés mensual de una hipoteca de $145, 000 a una tasa de interés anual de 6.5%?

65. Al mes, una compañía de tarjetas de crédito carga $38.15 de interés en un balance de $2725. ¿Cuál es la tasa de interés anual que carga la compañía?

66. El mes pasado, Louis pagó $64.75 de interés en una tarjeta de crédito con balance de $4200. ¿Cuál es la tasa de interés anual que cobra la compañía?

67. Explicar por qué el porcentaje de aumento puede ser mayor a 100%, pero el porcentaje de disminución nunca puede ser mayor a 100%.

68. Dar cinco ejemplos de porcentajes de cambio que puede encontrar en la vida diaria o en el trabajo.

Se pueden encontrar más problemas verbales en el Apéndice A. Todos los problemas en el Apéndice marcados como (4.2) son apropiados para esta sección.

Respuestas del examen de conceptos

1. Falso **2.** Cierto **3.** Falso **4.** Cierto **5.** Falso **6.** Falso **7.** Falso **8.** Falso **9.** Cierto **10.** Cierto

4.3 Más acerca de porcentajes y resolución de problemas

OBJETIVOS

1 Resolver ecuaciones que implican números decimales

2 Resolver problemas verbales que implican porcentajes

Se puede resolver la ecuación $x + 0.35 = 0.72$ sumar el inverso aditivo de 0.35 de ambos lados de la ecuación. Otra técnica para resolver las ecuaciones que contienen decimales es eliminarlos de la ecuación multiplicando ambos lados por el poder apropiado de 10. Los siguientes ejemplos demuestran ambas técnicas en una variedad de situaciones.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $0.3m = 81$.

EJEMPLO 1 Resolver $0.5x = 14$.

Solución

$$0.5x = 14$$
$$5x = 140 \quad \text{Multiplicar ambos lados por 10}$$
$$x = 28 \quad \text{Multiplicar los lados de igualdad por inverso multiplicativo de 5}$$

El conjunto solución es $\{28\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $d - 0.2d = 48$.

EJEMPLO 2 Resolver $x + 0.04x = 5.2$.

Solución

$$x + 0.04x = 5.2$$
$$1.04x = 5.2 \quad \text{Agrupar términos similares}$$
$$x = \frac{5.2}{1.04}$$
$$x = 5$$

El conjunto solución es $\{5\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $0.07x + 0.05x = 7.2$.

EJEMPLO 3 Resolver $0.08y + 0.09y = 3.4$.

Solución

$$\begin{aligned} 0.08y + 0.09y &= 3.4 \\ 0.17y &= 3.4 && \text{Agrupar términos similares} \\ y &= \frac{3.4}{0.17} \\ y &= 20 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{20\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver
$0.09w = 240 - 0.05(w + 600)$.

EJEMPLO 4 Resolver $0.10t = 560 - 0.12(t + 1000)$.

Solución

$$\begin{aligned} 0.10t &= 560 - 0.12(t + 1000) \\ 10t &= 56{,}000 - 12(t + 1000) && \text{Multiplicar ambos lados por 100} \\ 10t &= 56{,}000 - 12t - 12{,}000 && \text{Propiedad distributiva} \\ 22t &= 44{,}000 \\ t &= 2000 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{2000\}$.

Problemas que implican porcentajes

Los porcentajes se encuentran en la vida diaria. Los siguientes ejemplos muestran situaciones cotidianas de porcentajes y también de problemas de consumidor que implican porcentajes.

Ejemplo de salón de clases
Un refugio para animales puede albergar 35 perros. La meta del refugio es incrementar el tamaño del mismo para que pueda albergar 40% más perros. ¿Cuántos perros podrá albergar el refugio después del aumento de tamaño?

EJEMPLO 5 **Aplique su habilidad**

Melinda actualmente gana \$34,000 al año. Su jefe le prometió un aumento de 4% para el siguiente año. ¿Cuál será su salario el siguiente año si su jefe mantiene su palabra?

Solución

Una guía para este problema sería

Nuevo salario = Salario actual + Aumento de salario

El aumento de salario se calcula multiplicando su salario actual por 4%.

$$\begin{aligned} \text{Nuevo salario} &= 34{,}000 + 0.04(34{,}000) \\ &= 34{,}000 + 1360 \\ &= 35{,}360 \end{aligned}$$

Su salario después del aumento sería de \$35,360.

Muchos problemas de consumidor pueden resolverse con una ecuación. Por ejemplo, existe esta guía general para los descuentos:

Precio original de venta − Descuento = Precio de venta con descuento

A continuación, considere algunos ejemplos usando técnicas algebraicas junto con esta guía básica.

Hill Street Studios/Brand X Pictures/ Jupiter Images

Ejemplo de salón de clases

Dan compró una camisa con 25% de descuento por \$45. ¿Cuál era el precio original de la camisa?

EJEMPLO 6 Aplique su habilidad

Amy compró un vestido con 30% por \$35. ¿Cuál era el precio original del vestido?

Solución

Sea p el precio original del vestido. Se puede usar la guía básica de descuento para plantear una ecuación algebraica.

$$\underbrace{(100\%)(p)}_{\text{Precio original de venta}} - \underbrace{(30\%)(p)}_{\text{Descuento}} = \underbrace{\$35}_{\text{Precio de venta con descuento}}$$

Al resolver esta ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} (100\%)(p) - (30\%)(p) &= 35 \\ 1.00p - 0.30p &= 35 \qquad \text{Cambiar porcentajes a decimales} \\ 0.7p &= 35 \\ 7p &= 350 \\ p &= 50 \end{aligned}$$

El precio original del vestido era \$50.

No olvide que, si un elemento tiene descuento de 30%, entonces necesitará pagar 100% − 30% = 70% del precio original. Entonces, con un descuento de 30%, un vestido de \$50 puede ser comprado por (70%)(\$50) = (0.70)(\$50) = \$35. (Note que se acaba de comprobar la respuesta del ejemplo 6).

Ejemplo de salón de clases

Encontrar el costo de un abrigo de \$120 con descuento de 15%.

EJEMPLO 7 Aplique su habilidad

Encontrar el costo de un par de tenis para trotar de \$60 con descuento de 20%. (Ver la figura 4.3).

Figura 4.3

Solución

Sea x el precio de venta con descuento. Ya que los tenis tienen descuento de 20%, se debe pagar el 80% del precio de venta original.

$$\begin{aligned} x &= (80\%)(60) \\ &= (0.8)(60) = 48 \end{aligned}$$

El precio de venta con descuento es \$48.

Aquí hay otra ecuación que puede usarse en problemas de consumidor.

Precio de venta = Costo + Ganancia

La **ganancia** (también llamada rendimiento, beneficio y margen de ganancia) se establece de diferentes formas. Se puede establecer como porcentaje del precio de venta, como porcentaje del costo o simplemente en términos de dólares y centavos. Se considerarán algunos problemas para los cuales la ganancia se calcula o como porcentaje del costo o como porcentaje del precio de venta.

John A. Rizzo/Photodisc/Getty Images

Ejemplo de salón de clases
Una vendedora tiene algunos zapatos que le costaron $55 cada par. Quiere venderlos con una ganancia de 40% del costo. ¿Qué precio de venta debe marcar en los zapatos?

EJEMPLO 8 Aplique su habilidad

Un vendedor tiene algunas camisetas que cuestan $20 cada una. Quiere venderlas con una ganancia de 60% del costo. ¿Qué precio de venta debe marcar en las camisetas?

Solución

Sea s el precio de venta. Use la relación *precio de venta igual a costo más ganancia* como guía.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Precio de venta} & = & \text{Costo} & + & \text{Ganancia (\% de costo)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ s & = & \$20 & + & (60\%)(20) \end{array}$$

Resolver esta ecuación produce

$$s = 20 + (60\%)(20)$$
$$s = 20 + (0.6)(20) \quad \text{Cambiar porcentajes a decimales}$$
$$s = 20 + 12$$
$$s = 32$$

El precio de venta debe ser $32.

Maisna/Shutterstock.com

Ejemplo de salón de clases
Jorge compró una silla antigua por $170 y después decidió venderla. Obtuvo una ganancia de 15% del precio de venta. ¿Cuánto recibió por la silla?

EJEMPLO 9 Aplique su habilidad

Kathrin compró una pintura por $120 y después decidió venderla. Obtuvo una ganancia de 40% del precio de venta. ¿Cuánto recibió por la pintura?

Solución

Se puede usar la misma relación básica como guía, excepto que esta vez la ganancia es un porcentaje del precio de venta. Sea s el precio de venta.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Precio de venta} & = & \text{Costo} & + & \text{Ganancia (\% del precio de venta)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ s & = & 120 & + & (40\%)(s) \end{array}$$

Resolver esta ecuación da

$$s = 120 + (40\%)(s)$$
$$s = 120 + 0.4s$$
$$0.6s = 120 \quad \text{Se sumó a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de 0.4s es decir } -0.4s$$
$$s = \frac{120}{0.6} = 200$$

Recibió $200 por la pintura.

Examen de conceptos 4.3

Para los problemas 1-8, responder cierto o falso.

1. La única manera de resolver una ecuación con decimales es multiplicar ambos lados de la ecuación por la potencia apropiada de 10.
2. Para eliminar los decimales de la ecuación $0.5x + 1.24 = 0.07x + 1.8$, debe multiplicar ambos lados de la ecuación por 10.
3. Si un objeto tiene descuento del 35%, entonces está pagando 65% del precio original.
4. La ganancia siempre es un porcentaje del precio de venta.

5. La ganancia puede expresarse como porcentaje del costo.

6. La relación básica “el precio de venta es igual al costo más la ganancia” puede usarse tanto si la ganancia está basada en el precio de venta o en el costo.

7. Si un objeto tiene 30% de descuento, el precio final de venta debe calcularse multiplicando el precio del objeto por 70%.

8. El costo de un par de zapatos de \$72 con 20% de descuento es \$54.

Conjunto de problemas 4.3

Para los problemas 1-22, resolver cada una de las ecuaciones. (Objetivo 1)

1. $x - 0.36 = 0.75$

2. $x - 0.15 = 0.42$

3. $x + 7.6 = 14.2$

4. $x + 11.8 = 17.1$

5. $0.62 - y = 0.14$

6. $7.4 - y = 2.2$

7. $0.7t = 56$

8. $1.3t = 39$

9. $x = 3.36 - 0.12x$

10. $x = 5.3 - 0.06x$

11. $s = 35 + 0.3s$

12. $s = 40 + 0.5s$

13. $s = 42 + 0.4s$

14. $s = 24 + 0.6s$

15. $0.07x + 0.08(x + 600) = 78$

16. $0.06x + 0.09(x + 200) = 63$

17. $0.09x + 0.1(2x) = 130.5$

18. $0.11x + 0.12(3x) = 188$

19. $0.08x + 0.11(500 - x) = 50.5$

20. $0.07x + 0.09(2000 - x) = 164$

21. $0.09x = 550 - 0.11(5400 - x)$

22. $0.08x = 580 - 0.1(6000 - x)$

Para los problemas 23-48, establecer una ecuación y resolver cada problema. (Objetivo 2)

23. La meta de un vendedor de coches es vender 15% más carros el año siguiente. Si vendió 140 carros este año, ¿Cuántos carros venderá el próximo año?

24. A respiratory therapy program at a university has 250 students enrolled. If the university increases the enrollment in the program by 14%, how many students will be in the program?

25. After the price of a stock drops by 8%, Nathan sells the stock. If he bought stock at \$42.00 a share, at what price would he sell if the price dropped?

26. The doctor has advised Julie that she needs to lose 20% of her weight. If she currently weighs 240 pounds, what will she weigh after she loses the percent of weight the doctor advised?

27. Una cadena de restaurantes ha decidido reducir la cantidad de sodio en sus comidas en un 25%. Si el pollo parmesano actualmente tiene 920 miligramos de sodio, ¿cuál será el número de miligramos de sodio después de la reducción?

28. BetterBuy Office Store quiere incrementar su número de tiendas en Orlando en un 40%. ¿Cuántas tiendas debe haber en Orlando después del aumento si actualmente hay 50 tiendas?

29. En una clase de matemáticas en línea, los estudiantes recibieron un bono de 5% por entregar tareas antes de la fecha límite. Si Chelsea obtuvo 84% en una tarea, pero la entregó temprano, ¿cuál será su calificación con el bono?

30. En una clase de matemáticas en línea, los estudiantes reciben una reducción de 10% por entregar tareas tarde. Si Chelsea obtuvo una calificación de 96% en una tarea, pero la entregó tarde, ¿cuál será su calificación final?

31. El automóvil de Héctor actualmente rinde 24 millas por galón. Superchips garantiza un incremento del 18% en el rendimiento tras la instalación de su chip. ¿Qué rendimiento puede esperar Héctor si instala el chip?

32. Ron y Michele son dueños de una casa de 3200 pies cuadrados. Están listos para algo más chico y quieren comprar una casa que sea 30% más pequeña. ¿Cuántos pies cuadrados están considerando que mida su casa nueva?

33. Tom compró un taladro eléctrico con 30% de descuento a \$35. ¿Cuál era el precio original del taladro?

34. Magda compró un vestido por \$140, que representa el 20% de descuento del precio original. ¿Cuál era el precio original del vestido?

35. Hallar el costo de una pantalla de \$4800 si tiene 25% de descuento.

36. Byron compró un monitor de computadora con 10% de descuento por \$121.50. ¿Cuál era el precio original del monitor?

37. Suponga que Jack compró un palo de golf de \$32 con 35% de descuento. ¿Cuánto pagó por el palo de golf?

38. Swati compró una televisión portátil de 13 pulgadas con 20% de descuento. El precio original era de \$229.95. ¿Cuánto pagó por la televisión?

39. Pierre compró un abrigo por \$126 que costaba \$180. ¿Cuánto descuento recibió?

40. Phoebe pagó \$32 por un par de sandalias que costaban \$40. ¿Cuánto descuento recibió?

41. Un vendedor tiene algunos anillos para dedos del pie que le costaron \$5 cada uno. Quiere venderlos con una ganancia del 70% del costo. ¿A cuánto debería vender cada anillo?

42. Una vendedora tiene algunos videojuegos que le costaron \$25 cada uno. Quiere venderlos con una ganancia del 80% del costo. ¿A cuánto debe vender cada juego?

43. El dueño de un local de pizzas quiere obtener una ganancia del 55% del costo de cada pizza vendida. Si cuesta \$8 hacer una pizza, ¿en cuánto se deben vender las pizzas?

44. Producir en el mercado alimenticio suele tener un alto valor añadido debido a la pérdida causada por el desperdicio. Si una cabeza de lechuga le cuesta \$0.50 a un vendedor, ¿a qué precio deberá venderla para lograr una ganancia de 130% del costo?

45. Las joyas tienen un valor añadido muy alto. Si un anillo le cuesta a un joyero \$400, ¿a qué precio debe venderlo para obtener un 60% de ganancia del precio de venta?

46. Si una caja de dulces le cuesta a un vendedor \$2.50 y quiere obtener una ganancia de 50% basada en el precio de venta, ¿a qué precio debe vender los dulces?

47. Si el costo de un par de zapatos para un vendedor es de \$32 y él los vende por \$44.80, ¿cuál es la tasa de ganancia basada en el costo?

48. Una vendedora tiene algunas faldas que le costaron \$24. Si las vende a \$31.20, hallar la ganancia basada en el costo.

Se pueden encontrar problemas verbales adicionales en el Apéndice A. Todos los problemas en el Apéndice marcados como (4.3) son apropiados para esta sección.

Pensamientos en palabras

49. ¿Cuál es el error en el procedimiento siguiente y cómo puede cambiarlo?

$$\begin{aligned} 1.2x + 2 &= 3.8 \\ 10(1.2x) + 2 &= 10(3.8) \\ 12x + 2 &= 38 \\ 12x &= 36 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

50. Desde el punto de vista de un consumidor, ¿preferiría que un vendedor planeara su ganancia con base en el costo de un artículo o con base en su precio de venta? Explique su respuesta.

Más investigación

51. Cierto vendedor compra un artículo por \$40, lo revende por \$50 y afirma que sólo obtuvo 20% de ganancia. ¿Esta afirmación es correcta?

52. Una tienda tiene un descuento especial de 40% en todos los artículos. También anuncia un 10% adicional en los artículos que se compren por docena o más. ¿Cuánto costará comprar una docena de cierto artículo que suele venderse a \$5 por artículo? (Tenga cuidado, el 40% de descuento, seguido de un 10% adicional, no es igual a 50% de descuento).

53. ¿Un descuento de 10% seguido por un descuento de 40% es lo mismo que un descuento de 40% seguido por un descuento de 10%? Justifique su respuesta.

54. Algunas personas usan la siguiente fórmula para determinar el previo de venta de un artículo cuando la ganancia está basada en un porcentaje del precio de venta:

$$\text{Precio de venta} = \frac{\text{Costo}}{100\% - \text{Porcentaje de ganancia}}$$

Muestre cómo desarrollar esta fórmula.

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones y exprese las soluciones en forma decimal. Su calculadora puede ser de utilidad.

55. $2.4x + 5.7 = 9.6$

56. $-3.2x - 1.6 = 5.8$

57. $0.08x + 0.09(800 - x) = 68.5$

58. $0.10x + 0.12(720 - x) = 80$

59. $7x - 0.39 = 0.03$

60. $9x - 0.37 = 0.35$

61. $0.2(t + 1.6) = 3.4$

62. $0.4(t - 3.8) = 2.2$

Respuestas del examen de conceptos

1. Falso **2.** Falso **3.** Cierto **4.** Falso **5.** Cierto **6.** Cierto **7.** Cierto **8.** Falso

4.4 Desigualdades

OBJETIVOS

1. Resolver desigualdades de primer grado
2. Escribir el conjunto solución de una desigualdad en notación de conjuntos y notación de intervalos
3. Graficar el conjunto solución de una desigualdad

Así como se usa el símbolo = para representar *igual que*, se usan los símbolos < y > para representar *menor que* y *mayor que*, respectivamente. Aquí hay algunos ejemplos de enunciados de desigualdad. Note que los primeros cuatro son enunciados verdaderos y que los últimos dos son falsos.

$6 + 4 > 7$	Verdadero
$8 - 2 < 14$	Verdadero
$4 \cdot 8 > 4 \cdot 6$	Verdadero
$5 \cdot 2 < 5 \cdot 7$	Verdadero
$5 + 8 > 19$	Falso
$9 - 2 < 3$	Falso

Las **desigualdades algebraicas** contienen una o más variables. Los siguientes son ejemplos de desigualdades algebraicas:

$$x + 3 > 4$$
$$2x - 1 < 6$$
$$x^2 + 2x - 1 > 0$$
$$2x + 3y < 7$$
$$7ab < 9$$

Una desigualdad algebraica como $x + 1 > 2$ no es ni cierta ni falsa como se plantea, y se le llama **enunciado abierto**. Para cada valor numérico que toma x, la desigualdad algebraica $x + 1 > 2$ se convierte en un enunciado numérico de desigualdad que es verdadero o falso. Por ejemplo, si $x = 0$, entonces $x + 1 > 2$ se convierte en $0 + 1 > 2$, que es falso. Si $x = 2$, entonces x + 1 > 2 se convierte en 2 + 1 > 2, que es verdadero. **Resolver una desigualdad** es el proceso de encontrar los números que hacen que una desigualdad algebraica sea un enunciado numérico verdadero. A tales números se les llama *soluciones* de la desigualdad; las soluciones satisfacen la desigualdad. El conjunto de todas las soluciones de una desigualdad se llama conjunto solución. Se suele escribir el conjunto solución para las desigualdades con una notación de conjuntos. Por ejemplo, el conjunto solución para $x + 1 > 2$ es el conjunto de todos los números reales mayores que 1, y se expresa como $\{x|x > 1\}$. La notación de conjuntos $\{x|x > 1\}$ se lee como "el conjunto de toda x tal que x es mayor que 1". Los conjuntos de soluciones para desigualdades también se expresan en una recta numérica; la solución para $\{x|x > 1\}$ se ilustra en la figura 4.4.

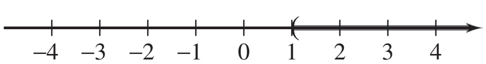


Figura 4.4

El paréntesis a la izquierda del 4 indica que 1 *no* es una solución, y la parte roja de la línea hacia la derecha del 1 indica que todos los números mayores que 1 son soluciones. La parte roja de la línea se conoce como gráfica del conjunto solución $\{x|x > 1\}$.

El conjunto solución para $x + 1 \leq 3$ ($\leq$ se lee "menor o igual que") es el conjunto de números reales menores o iguales que 2, expresado como $\{x|x \leq 2\}$. La gráfica del conjunto solución para $\{x|x \leq 2\}$ se ilustra en la figura 4.5. La llave a la derecha del 2 indica que 2 está incluido en el conjunto solución.

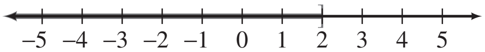


Figura 4.5

También es conveniente expresar los conjuntos solución de desigualdades con notación de intervalos. El conjunto solución $\{x|x > 6\}$ se escribe como (6, `) usando notación de intervalos. En la notación de intervalos, los paréntesis se usan para indicar la exclusión del límite. Los símbolos $>$ y $<$ en las desigualdades también indican la exclusión de un límite. Así que, cuando una desigualdad lleva el símbolo $>$ o $<$, la notación de intervalos usa paréntesis. Esto es consistente con el uso de paréntesis en la recta numérica.

En este mismo ejemplo, $\{x|x > 6\}$, el conjunto solución no tiene un límite superior, así que se usa el símbolo de infinito, `, para indicar que el intervalo continúa indefinidamente. El conjunto solución para $\{x|x < 3\}$ se escribe como (− `, 3) en notación de intervalos. Aquí, el conjunto solución no tiene límite inferior, así que un signo negativo precede al símbolo de infinito porque el intervalo se extiende indefinidamente en la dirección opuesta. El símbolo de infinito siempre lleva paréntesis en la notación de intervalos porque no hay un límite que incluir.

El conjunto solución $\{x|x \geq 5\}$ se escribe como [5, `) usando notación de intervalos. En la notación de intervalos, los corchetes se usan para indicar la inclusión de un límite. Así que, cuando la desigualdad tiene el símbolo $\geq$ o $\leq$, la notación de intervalo usa corchetes. De nuevo, el uso del corchete en la notación de intervalos es consistente con el uso de un corchete en la recta numérica.

Los ejemplos en la tabla contienen algunas desigualdades algebraicas simples, sus conjuntos solución, gráficas de conjunto solución y los conjuntos solución escritos en notación de intervalos. Estúdielos cuidadosamente para asegurarse de entender los símbolos.

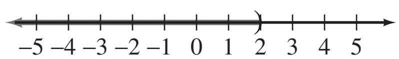
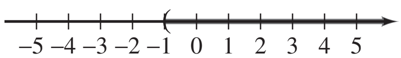
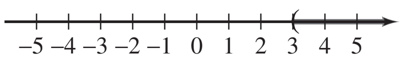
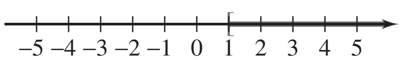
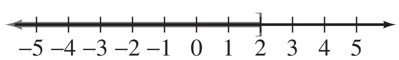
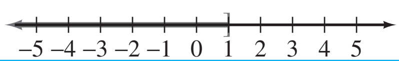
Desigualdad algebraica	Conjunto solución	Gráfica de conjunto solución	Notación de intervalos
$x < 2$	$\{x|x < 2\}$		$(-\infty, 2)$
$x > -1$	$\{x|x > -1\}$		$(-1, \infty)$
$3 < x$	$\{x|x > 3\}$		$(3, \infty)$
$x \geq 1$ ($\geq$ se lee "mayor que o igual a"	$\{x|x \geq 1\}$		$[1, \infty)$
$x \leq 2$ ($\leq$ se lee "menor que o igual a"	$\{x|x \leq 2\}$		$(-\infty, 2]$
$1 \geq x$	$\{x|x \leq 1\}$		$(-\infty, 1]$

Figura 4.6

El proceso general de resolver desigualdades tiene un cercano paralelismo con el proceso para resolver ecuaciones. Se continúa sustituyendo la desigualdad dada con desigualdades equivalentes, aunque más simples. Por ejemplo,

$$2x + 1 > 9 \quad (1)$$
$$2x > 8 \quad (2)$$
$$x > 4 \quad (3)$$

son todas desigualdades equivalentes; esto es: todas tienen las mismas soluciones. Así, para resolver la desigualdad (1), podemos resolver la desigualdad (3), que obviamente son todos los números mayores que 4. El procedimiento exacto para simplificar desigualdades se basa principalmente en dos propiedades. La primera es la **propiedad aditiva de la desigualdad**.

Propiedad 4.1 Propiedad aditiva de la desigualdad

Para todo número real a, b y c.

1. $a > b$ si y sólo si $a + c > b + c$.
2. $a > b$si y sólo si $a - c > b - c$.

La propiedad 4.1 afirma que se puede sumar a ambos lados de una desigualdad el inverso aditivo de un termino para producir una desigualdad equivalente. La propiedad se estableció en términos de $>$, pero existen propiedades análogas para $<$, $\geq$ y $\leq$. Considere el uso de esta propiedad en los siguientes tres ejemplos.

Ejemplo de salón de clases

Resolver $x - 5 < 23$ y graficar las soluciones.

EJEMPLO 1 Resolver $x - 3 > -1$ y graficar las soluciones.

Solución

$$x - 3 > -1$$
$$x - 3 + 3 > -1 + 3 \quad \text{Sumar a ambos lados de la desigualdad el inverso aditivo de } -3$$
$$x > 2$$

El conjunto solución es $\{x|x > 2\}$ y puede graficarse como se muestra en la figura 4.7. La solución escrita en notación de intervalos es (2, `).

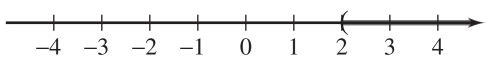


Figura 4.7

Ejemplo de salón de clases

Resolver $x + 7 \geq 10$ y graficar las soluciones.

EJEMPLO 2 Resolver $x + 4 \leq 5$ y graficar las soluciones.

Solución

$$x + 4 \leq 5$$
$$x + 4 - 4 \leq 5 - 4 \quad \text{Sumar a ambos lados de la desigualdad el inverso aditivo de 4}$$
$$x \leq 1$$

El conjunto solución es $\{x|x \leq 1\}$ y puede graficarse como se muestra en la figura 4.8. La solución escrita en notación de intervalos es (– `, 1].

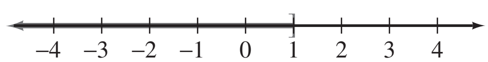
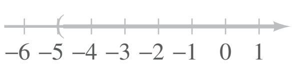


Figura 4.8

Ejemplo de salón de clases

Resolver $3 < 8 + x$ y graficar las soluciones.



EJEMPLO 3 Resolver $5 > 6 + x$ y graficar las soluciones.

Solución

$$5 > 6 + x$$
$$5 - 6 > 6 + x - 6 \quad \text{Sumar a ambos lados de la desigualdad el inverso aditivo de 6}$$
$$-1 > x$$

Ya que $-1 > x$ es equivalente a $x < -1$, el conjunto solución es $\{x|x < -1\}$ y puede graficarse como se muestra en la figura 4.9. La solución, escrita en notación de intervalos, es (− `, −1).

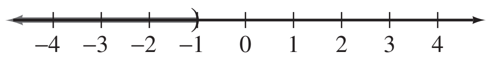


Figura 4.9

Ahora verá algunos ejemplos numéricos para aprender qué pasa cuando ambos lados de una desigualdad se multiplican o dividen por un número.

$$
\begin{array}{ccccc}
4 > 3 & \rightarrow & 5(4) > 5(3) & \rightarrow & 20 > 15 \\
-2 > -3 & \rightarrow & 4(-2) > 4(-3) & \rightarrow & -8 > -12 \\
6 > 4 & \rightarrow & \dfrac{6}{2} > \dfrac{4}{2} & \rightarrow & 3 > 2 \\
8 > -2 & \rightarrow & \dfrac{8}{4} > \dfrac{-2}{4} & \rightarrow & 2 > -\dfrac{1}{2}
\end{array}
$$

Note que multiplicar o dividir ambos lados de una desigualdad por un número positivo produce una desigualdad en el mismo sentido. Esto significa que, si la desigualdad original es *mayor que*, entonces la nueva desigualdad será *mayor que*, y que si la desigualdad original es *menor que*, entonces la desigualdad resultante será *menor que*.

Note qué ocurre cuando se multiplican o dividen ambos lados por un número negativo.

$$
\begin{array}{ccccc}
3 < 5 & \rightarrow & -2(3) > -2(5) & \rightarrow & -6 > -10 \\
-4 < 1 & \rightarrow & -5(-4) > -5(1) & \rightarrow & 20 > -5 \\
14 > 2 & \rightarrow & \dfrac{14}{-2} < \dfrac{2}{-2} & \rightarrow & -7 < -1 \\
-3 > -6 & \rightarrow & \dfrac{-3}{-3} < \dfrac{-6}{-3} & \rightarrow & 1 < 2
\end{array}
$$

Multiplicar o dividir ambos lados de una desigualdad por un número negativo *invierte el sentido de la desigualdad*. La propiedad 4.2 resume estas ideas.

Propiedad 4.2 Propiedad multiplicativa de la desigualdad

(a) Para todo número real a, b y c con $c > 0$,

1. $a > b$ si y sólo si $ac > bc$.

2. $a > b$ si y sólo si $\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$.

(b) Para todo número real a, b y c con c< 0,

1. $a > b$ si y sólo si $ac < bc$.

2. $a > b$ si y sólo si $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$.

Propiedades similares se mantienen si se invierte cada desigualdad o si se sustituye $>$ con $\geq$ y $<$ con $\leq$. Por ejemplo, si $a \leq b$ y $c < 0$, entonces $ac \geq bc$ y $\dfrac{a}{c} \geq \dfrac{b}{c}$.

Observe el uso de la propiedad 4.2 en los siguientes tres ejemplos.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $3x < 9$.

EJEMPLO 4 Resolver $2x > 4$.

Solución

$$2x > 4$$

$$\frac{2x}{2} > \frac{4}{2} \qquad \text{Multiplicar a ambos lados de la desigualdad}$$

$$x > 2 \qquad \text{por el inverso multiplicativo de 2, es decir } \frac{1}{2}$$

El conjunto solución es $\{x \mid x > 2\}$ o $(2, `)$ en notación de intervalos.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $\frac{5}{6}x \geq \frac{2}{3}$.

EJEMPLO 5 Resolver $\frac{3}{4}x \leq \frac{1}{5}$.

Solución

$$\frac{3}{4}x \leq \frac{1}{5}$$

$$\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}x\right) \leq \frac{4}{3}\left(\frac{1}{5}\right) \qquad \text{Multiplicar a ambos lados de la desigualdad}$$

$$x \leq \frac{4}{15} \qquad \text{por el inverso multiplicativo de } \frac{3}{4}\text{, es decir } \frac{4}{3}$$

El conjunto solución es $\left\{x \mid x \leq \frac{4}{15}\right\}$ o $\left(-\infty, \frac{4}{15}\right]$ en notación de intervalos.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $-2x < 4$.

EJEMPLO 6 Resolver $23x > 9$.

Solución

$$-3x > 9$$

$$\frac{-3x}{-3} < \frac{9}{-3} \qquad \text{Multiplicar a ambos lados de la desigualdad por}$$

$$x < -3 \qquad \text{el inverso multiplicativo de } -3\text{, es decir } \frac{1}{-3}.$$

Como el inverso multiplicativo es negativo
la desigualdad se invierte

El conjunto solución es $\{x \mid x < -3\}$ o $(-`, -3)$ en notación de intervalos.

Como se mencionó anteriormente, muchas de las técnicas usadas para resolver ecuaciones pueden usarse para resolver desigualdades. Sin embargo, debe tener sumo cuidado cuando aplique la propiedad 4.2. Estudie los siguientes ejemplos y note las similitudes entre resolver ecuaciones y resolver desigualdades.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $8x - 2 < 14$.

EJEMPLO 7 Resolver $4x - 3 > 9$.

Solución

$$4x - 3 > 9$$

$$4x - 3 + 3 > 9 + 3 \qquad \text{Sumar a ambos lados de la desigualdad}$$

$$4x > 12 \qquad \text{el inverso aditivo de } -3$$

$$\frac{4x}{4} > \frac{12}{4} \qquad \text{Multiplicar a ambos lados de la desigualdad}$$

$$x > 3 \qquad \text{por el inverso multiplicativo de 4, es decir } \frac{1}{4}$$

El conjunto solución es $\{x \mid x < 3\}$ o $(3, `)$ en notación de intervalos.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $-5x + 3 < 18$.

EJEMPLO 8 Resolver $-3n + 5 < 11$.

Solución

$$-3n + 5 < 11$$

$$-3n + 5 - 5 < 11 - 5 \qquad \text{Sumar a ambos lados de la desigualdad el inverso aditivo de 5}$$

$$-3n < 6$$

$$\frac{-3n}{-3} > \frac{6}{-3} \qquad \text{Multiplicar a ambos lados de la desigualdad por el inverso multiplicativo de } -3 \text{, es decir } \frac{1}{-3}\text{. Como el inverso multiplicativo es negativo la desigualdad se invierte}$$

$$n > -2$$

El conjunto solución es $\{n | n > -2\}$ o (−2, `) en notación de intervalos.

Comprobar las soluciones para una desigualdad presenta problemas. Obvio, no es posible comprobar todas las infinitas soluciones para una desigualdad particular. Sin embargo, al comprobar al menos una solución, en especial cuando se usó la propiedad multiplicativa, se aprecia el error común de olvidar cambiar el sentido de una desigualdad. En el ejemplo 8 se afirma que todos los números menores que -2 satisfarán la desigualdad original. Compruebe uno de tales números, por decir -1.

$$-3n + 5 < 11$$

$$-3(-1) + 5 \overset{?}{<} 11$$

$$3 + 5 \overset{?}{<} 11$$

$$8 < 11$$

Por tanto, -1 satisface la desigualdad original. De haber olvidado cambiar el sentido de la desigualdad cuando ambos lados se dividieron entre -3, la respuesta habría sido $n < -2$, y se habría detectado tal error en la comprobación.

Examen de conceptos 4.4

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. Los enunciados numéricos de desigualdad siempre son verdaderos.

2. El enunciado algebraico $x + 4 > 6$ es llamado un enunciado abierto.

3. La desigualdad algebraica $2x > 10$ tiene una solución.

4. La desigualdad algebraica $x < 3$ tiene un número infinito de soluciones.

5. La notación de conjunto $\{x | x < -5\}$ se lee “el conjunto de variables que son particulares a $x < -5$”.

6. Al graficar el conjunto solución de una desigualdad, se usa un corchete para incluir el límite.

7. El conjunto solución de la desigualdad $x \geq 4$ se escribe (4, `).

8. El conjunto solución de la desigualdad $x < -5$ se escribe (− `,− 5).

9. Cuando se multiplican ambos lados de una desigualdad por un número negativo, el sentido de la desigualdad permanece igual.

10. Cuando se suma un número negativo en ambos lados de una desigualdad, el sentido de la desigualdad permanece igual.

Conjunto de problemas 4.4

Para los problemas 1-10, determinar si la desigualdad numérica es verdadera o falsa. (Objetivo 1)

1. $2(3) - 4(5) < 5(3) - 2(-1) + 4$
2. $5 + 6(-3) - 8(-4) > 17$
3. $\frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{6} > \frac{1}{5} + \frac{3}{4} - \frac{7}{10}$
4. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} < \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$
5. $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{9}\right) > \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)$
6. $\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{8}{12}\right) < \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{14}{15}\right)$
7. $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} \div \frac{1}{5} > \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$
8. $1.9 - 2.6 - 3.4 < 2.5 - 1.6 - 4.2$
9. $0.16 + 0.34 > 0.23 + 0.17$
10. $(0.6)(1.4) > (0.9)(1.2)$

Para los problemas 11-22, establecer el conjunto solución y graficarlo en una recta numérica. (Objetivos 2 y 3)

11. $x > -2$
12. $x > -4$
13. $x \leq 3$
14. $x \leq 0$
15. $2 < x$
16. $-3 \leq x$
17. $-2 \geq x$
18. $1 > x$
19. $-x > 1$
20. $-x < 2$
21. $-2 < -x$
22. $-1 > -x$

Para los problemas 23-60, resolver cada desigualdad. (Objetivo 1)

23. $x + 6 < -14$
24. $x + 7 > -15$
25. $x - 4 \geq -13$
26. $x - 3 \leq -12$
27. $4x > 36$
28. $3x < 51$
29. $6x < 20$
30. $8x > 28$
31. $-5x > 40$
32. $-4x < 24$
33. $-7n \leq -56$
34. $-9n \geq -63$
35. $48 > -14n$
36. $36 < -8n$
37. $16 < 9 + n$
38. $19 > 27 + n$
39. $3x + 2 > 17$
40. $2x + 5 < 19$
41. $4x - 3 \leq 21$
42. $5x - 2 \geq 28$
43. $-2x - 1 \geq 41$
44. $-3x - 1 \leq 35$
45. $6x + 2 < 18$
46. $8x + 3 > 25$
47. $3 > 4x - 2$
48. $7 < 6x - 3$
49. $-2 < -3x + 1$
50. $-6 > -2x + 4$
51. $-38 \geq -9t - 2$
52. $36 \geq -7t + 1$
53. $5x - 4 - 3x > 24$
54. $7x - 8 - 5x < 38$
55. $4x + 2 - 6x < -1$
56. $6x + 3 - 8x > -3$
57. $-5 \geq 3t - 4 - 7t$
58. $6 \leq 4t - 7t - 10$
59. $-x - 4 - 3x > 5$
60. $-3 - x - 3x < 10$

Pensamientos en palabras

61. ¿Las relaciones de mayor que y menor que tienen la propiedad de simetría? Explique su respuesta.
62. ¿El conjunto solución para $x < 3$ es el mismo que para $3 > x$? Explique su respuesta.
63. ¿Cómo podría convencer a alguien sobre la necesidad de invertir el símbolo de la desigualdad cuando se multiplican ambos lados de una desigualdad por un número negativo?

Más investigación

Resolver cada desigualdad.

64. $x + 3 < x - 4$
65. $x - 4 < x + 6$
66. $2x + 4 > 2x - 7$
67. $5x + 2 > 5x + 7$
68. $3x - 4 - 3x > 6$

69. $-2x + 7 + 2x > 1$

70. $-5 \leq -4x - 1 + 4x$

71. $-7 \geq 5x - 2 - 5x$

Respuestas del examen de conceptos

1. Falso **2.** Cierto **3.** Falso **4.** Cierto **5.** Falso **6.** Cierto **7.** Falso **8.** Cierto **9.** Falso **10.** Cierto

4.5 Desigualdades, desigualdades compuestas y resolución de problemas

OBJETIVOS

1. Resolver desigualdades que implican el uso de la propiedad distributiva
2. Resolver desigualdades que implican expresiones fraccionarias
3. Determinar el conjunto solución de enunciados de desigualdades compuestas
4. Resolver problemas verbales que se traducen en enunciados de desigualdades

Desigualdades

Esta sección comienza con la resolución de tres desigualdades con los mismos pasos básicos que se usaron para las ecuaciones. De nuevo, tenga cuidado al momento de aplicar la propiedad multiplicativa de desigualdad.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $6x + 9 \geq 2x - 7$.

EJEMPLO 1 Resolver $5x + 8 \leq 3x - 10$.

Solución

$$5x + 8 \leq 3x - 10$$

$$5x + 8 - 3x \leq 3x - 10 - 3x \qquad \text{Sumar a ambos lados de la desigualdad el inverso aditivo de } 3x$$

$$2x + 8 \leq -10$$

$$2x + 8 - 8 \leq -10 - 8 \qquad \text{Sumar a ambos lados de la desigualdad el inverso aditivo de } 8$$

$$2x \leq -18$$

$$\frac{2x}{2} \leq \frac{-18}{2} \qquad \text{Multiplicar a ambos lados de la desigualdad por el inverso multiplicativo de 2, es decir } \frac{1}{2}$$

$$x \leq -9$$

El conjunto solución es $\{x|x \leq -9\}$ o (−`, −9] en notación de intervalos.

Ejemplo de salón de clases
Resolver
$2(x - 5) + 7(x + 1) \leq 3(x - 2)$.

EJEMPLO 2 Resolver $4(x + 3) + 3(x - 4) \geq 2(x - 1)$.

Solución

$$4(x + 3) + 3(x - 4) \geq 2(x - 1)$$

$$4x + 12 + 3x - 12 \geq 2x - 2 \qquad \text{Propiedad distributiva}$$

$$7x \geq 2x - 2 \qquad \text{Agrupar términos similares}$$

$$7x - 2x \geq 2x - 2 - 2x \qquad \text{Sumar a ambos lados de la desigualdad el inverso aditivo de } 2x$$

$$5x \geq -2$$

$$\frac{5x}{5} \geq \frac{-2}{5} \qquad \text{Multiplicar a ambos lados de la desigualdad por el inverso multiplicativo de 5, es decir } \frac{1}{5}$$

$$x \geq -\frac{2}{5}$$

El conjunto solución es $\left\{x \mid x \geq -\frac{2}{5}\right\}$ o $\left[-\frac{2}{5}, \infty\right)$ en notación de intervalos.

Ejemplo de salón de clases

Resolver $\frac{3}{8}n - \frac{1}{2}n > \frac{2}{3}$.

EJEMPLO 3 Resolver $-\frac{3}{2}n + \frac{1}{6}n < \frac{3}{4}$.

Solución

$$-\frac{3}{2}n + \frac{1}{6}n < \frac{3}{4}$$

$$12\left(-\frac{3}{2}n + \frac{1}{6}n\right) < 12\left(\frac{3}{4}\right) \quad \text{Multiplicar ambos lados por 12, el MCD de todos los denominadores}$$

$$12\left(-\frac{3}{2}n\right) + 12\left(\frac{1}{6}n\right) < 12\left(\frac{3}{4}\right) \quad \text{Propiedad distributiva}$$

$$-18n + 2n < 9$$

$$-16n < 9$$

$$\frac{-16n}{-16} > \frac{9}{-16} \quad \text{Multiplicar a ambos lados de la desigualdad por el inverso multiplicativo de } -16\text{, es decir } \frac{1}{-16} \text{ lo cual invierte la desigualdad}$$

$$n > -\frac{9}{16}$$

El conjunto solución es $\left\{n \mid n > -\frac{9}{16}\right\}$ o $\left(-\frac{9}{16}, \infty\right)$ en notación de intervalos.

En el ejemplo 3 se asegura que todos los números mayores que $-\frac{9}{16}$ satisfarán la desigualdad original. Se debe comprobar con un número; se comprobará con 0.

$$-\frac{3}{2}n + \frac{1}{6}n < \frac{3}{4}$$

$$-\frac{3}{2}(0) + \frac{1}{6}(0) \stackrel{?}{<} \frac{3}{4}$$

$$0 < \frac{3}{4}$$

De la verificación resultó un enunciado verdadero, lo que significa que 0 es en el conjunto solución. De haber olvidado invertir el signo de la desigualdad al dividir ambos lados entre -16, entonces el conjunto solución hubiera sido $\left\{n \mid n < -\frac{9}{16}\right\}$. Cero no habría sido parte de ese conjunto solución y se habría detectado el error con la comprobación.

Desigualdades compuestas

En matemáticas las palabras "y" y "o" se usan para formar enunciados compuestos. Se usa "y" y "o" para unir dos desigualdades para formar desigualdades compuestas.

Considere la desigualdad compuesta.

$x > 2 \quad \text{y} \quad x < 5$

Para el conjunto solución, se deben encontrar los valores de x que vuelvan a ambas desigualdades enunciados verdaderos. El conjunto solución de una desigualdad compuesta formada por la palabra "y" es la intersección de conjuntos de dos desigualdades. La intersección de dos conjuntos, denotada por $\cup$, contiene los elementos que ambos conjuntos tienen en común. Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ entonces $A \cap B = \{2, 4, 6\}$. Así que, para encontrar el conjunto solución de la desigualdad compuesta $x > 2$ y $x < 5$, se encuentra el conjunto solución para cada desigualdad y después se determinan las soluciones que son comunes a ambos conjuntos.

Ejemplo de salón de clases
Graficar el conjunto solución para la desigualdad compuesta $x > 3$ y $x < 7$, y escribir el conjunto solución en notación de intervalos.

EJEMPLO 4

Graficar el conjunto solución para la desigualdad compuesta $x > 2$ y $x < 5$, y escribir el conjunto solución en notación de intervalos.

Solución

$x > 2$ **(a)**

$x < 5$ **(b)**

$x > 2$ y $x < 5$ **(c)**

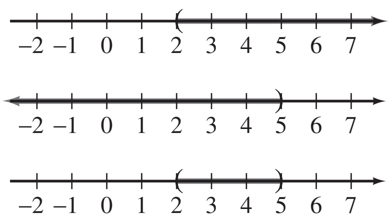


Figura 4.10

Así, todos los números mayores que 2 y menores que 5 se incluyen en el conjunto solución y la gráfica se muestra en la figura 4.10(c). En notación de intervalos, el conjunto solución es (2, 5).

Ejemplo de salón de clases
Graficar el conjunto solución para la desigualdad compuesta $x \geq -1$ y $x \geq -2$, y escribir el conjunto solución en notación de intervalos.

EJEMPLO 5

Graficar el conjunto solución para la desigualdad compuesta $x \leq 1$ y $x \leq 4$, y escribir el conjunto solución en notación de intervalos.

Solución

$x \leq 1$ **(a)**

$x \leq 4$ **(b)**

$x \leq 1$ y $x \leq 4$ **(c)**

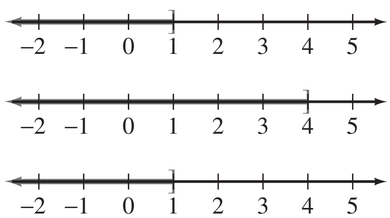


Figura 4.11

La intersección de dos conjuntos solución es $x \leq 1$. El conjunto solución $\{x | x \leq 1\}$ contiene todos los números que son menores o iguales que 1, y la gráfica se muestra en la Figura 4.11 (c). En notación de intervalos, el conjunto solución es (− `, 1].

El conjunto solución de una desigualdad compuesta formada por la palabra "o" es la unión de conjuntos solución de dos desigualdades. La unión de dos conjuntos, denotada por , contiene todos los elementos en ambos conjuntos. Por ejemplo, si $A = \{0, 1, 2\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Note que, incluso cuando 1 y 2 están en el conjunto A y en el B, no hay necesidad de escribirlos dos veces en $A \cup B$.

Para hallar en conjunto solución de la desigualdad compuesta

$$x > 1 \quad \text{o} \quad x > 3$$

se debe encontrar primero el conjunto solución para cada desigualdad y después tomar todos los valores que satisfacen a cualquiera de las desigualdades o a ambas.

Ejemplo de salón de clases
Graficar el conjunto solución para la desigualdad compuesta $x > 0$ o $x > 2$, y escribir el conjunto solución en notación de intervalos.

EJEMPLO 6

Graficar el conjunto solución para la desigualdad compuesta $x > 1$ o $x > 3$, y escribir el conjunto solución en notación de intervalos.

Solución

$x > 1$

$x > 3$

$x > 1$ o $x > 3$

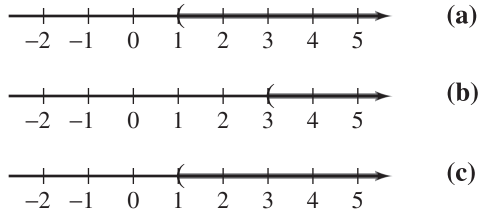


Figura 4.12

Así, todos los números mayores que 1 se incluyen en el conjunto solución y la gráfica se muestra en la figura 4.12(c). El conjunto solución se escribe como (1, `) en notación de intervalos.

Ejemplo de salón de clases
Graficar el conjunto solución para la desigualdad compuesta $x \leq -1$ o $x \geq 3$, y escribir el conjunto solución en notación de intervalos.

EJEMPLO 7

Graficar el conjunto solución para $x \leq 0$ o $x \geq 2$ y escribir la solución en notación de intervalos.

Solución

$x \leq 0$

$x \geq 2$

$x \leq 0$ o $x \geq 2$

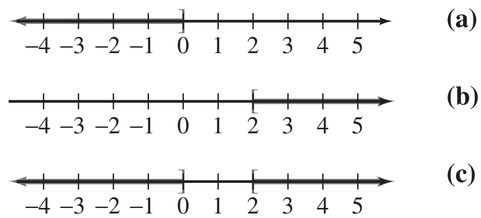


Figura 4.13

Así, todos los números menores que o iguales a 0 y todos los números mayores que o iguales a 2 se incluyen en el conjunto solución y la gráfica se muestra en la figura 4.13 (c). Ya que el conjunto solución contiene dos intervalos que no son continuos, el símbolo ∪ se usa en la notación de intervalos. El conjunto solución se escribe como (− `, 0] ∪ [2, `) en notación de intervalos.

De regreso a la resolución de problemas

Considere algunos problemas verbales que se traducen en enunciados de desigualdades. Se dieron algunas sugerencias para resolver problemas verbales en la sección 3.5; éstas aún aplican, excepto que aquí se describen situaciones en los problemas/ejemplos que se traducirán a desigualdades y no a ecuaciones.

Ejemplo de salón de clases
Sam obtuvo puntuaciones de 82, 93 y 75 en sus primeros tres exámenes del semestre. ¿Qué puntuación debe obtener en el cuarto examen para tener un promedio de 85 o mejor?

EJEMPLO 8 Aplique su habilidad

Ashley obtuvo puntuaciones de 95, 82, 93 y 84 en sus primeros cuatro exámenes del semestre. ¿Qué puntuación debe obtener en su quinto examen para que su promedio en los exámenes sea de 90 o mayor?

Solución

Sea s la puntuación requerida en el quinto examen. Ya que el promedio se obtiene sumando todas las calificaciones y dividiéndolas entre 5 (el número de calificaciones), se tiene la siguiente desigualdad por resolver:

$$\frac{95 + 82 + 93 + 84 + s}{5} \geq 90$$

Resolver esta desigualdad da

$$\frac{354 + s}{5} \geq 90$$ Simplificar el numerador en el lado izquierdo

$$5\left(\frac{354 + s}{5}\right) \geq 5(90)$$ Multiplicar a ambos lados de la desigualdad por el inverso multiplicativo de $\frac{1}{5}$, es decir 5

$$354 + s \geq 450$$

$$354 + s - 354 \geq 450 - 354$$ Sumar a ambos lados de la desigualdad el inverso aditivo de 354

$$s \geq 96$$

Debe obtener una puntuación de 96 o mayor en el quinto examen.

Alison Henley/Shutterstock.com

Ejemplo de salón de clases
Los Cougars han ganado 15 juegos y han perdido 13. Jugarán otros 12 juegos. Para ganar más del 60% de todos sus juegos, ¿cuántos de los juegos restantes deben ganar?

EJEMPLO 9 Aplique su habilidad

Los Cubs han ganado 40 juegos de béisbol y han perdido 62 juegos. Jugarán otros 60. Para ganar más del 50% de todos sus juegos, ¿cuántos de los 60 restantes deberán ganar?

Solución

Sea w el número de juegos que los Cubs deben ganar de los 60 restantes. Ya que jugarán un total de $40 + 62 + 60 = 162$ juegos, para ganar más del 50%, necesitarán ganar más de 81 juegos. Así, se obtiene la desigualdad

$$w + 40 > 81$$

Resolverla da

$$w > 41$$

Los Cubs necesitan ganar al menos 42 de los 60 juegos restantes.

Examen de conceptos 4.5

Para los problemas 1-5, responder cierto o falso.

1. El conjunto solución de una desigualdad compuesta formada por la palabra "y" es una intersección de los conjuntos solución de dos desigualdades.
2. El conjunto solución de una desigualdad compuesta formada por las palabras "y" o "o" es una unión de los conjuntos de dos desigualdades.
3. La intersección de dos conjuntos contiene los elementos en común de ambos conjuntos.
4. La unión de dos conjuntos contiene los elementos en ambos conjuntos.
5. La intersección del conjunto A y el conjunto B se escribe $A \cap B$.

Para los problemas 6-10, unir el enunciado compuesto con la graficación de su conjunto solución (Figura 4.14).

6. $x > 4$ o $x < -1$
7. $x > 4$ y $x > -1$
8. $x > 4$ o $x > -1$
9. $x \leq 4$ y $x \geq -1$
10. $x > 4$ o $x \geq -1$

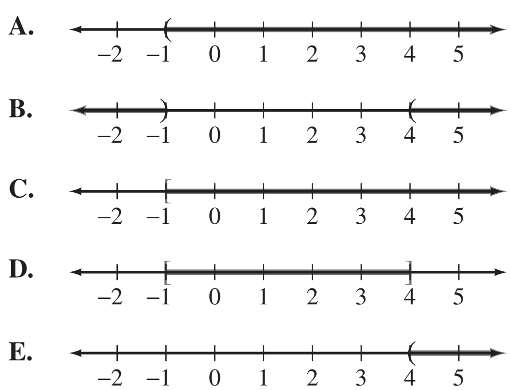


Figura 4.14

Para los problemas 1-50, resolver cada desigualdad. (Objetivos 1 y 2)

1. $3x + 4 > x + 8$

2. $5x + 3 < 3x + 11$

3. $7x - 2 < 3x - 6$

4. $8x - 1 > 4x - 21$

5. $6x + 7 > 3x - 3$

6. $7x + 5 < 4x - 12$

7. $5n - 2 \leq 6n + 9$

8. $4n - 3 \geq 5n + 6$

9. $2t + 9 \geq 4t - 13$

10. $6t + 14 \leq 8t - 16$

11. $-3x - 4 < 2x + 7$

12. $-x - 2 > 3x - 7$

13. $-4x + 6 > -2x + 1$

14. $-6x + 8 < -4x + 5$

15. $5(x - 2) \leq 30$

16. $4(x + 1) \geq 16$

17. $2(n + 3) > 9$

18. $3(n - 2) < 7$

19. $-3(y - 1) < 12$

20. $-2(y + 4) > 18$

21. $-2(x + 6) > -17$

22. $-3(x - 5) < -14$

23. $3(x - 2) < 2(x + 1)$

24. $5(x + 3) > 4(x - 2)$

25. $4(x + 3) > 6(x - 5)$

26. $6(x - 1) < 8(x + 5)$

27. $3(x - 4) + 2(x + 3) < 24$

28. $2(x + 1) + 3(x + 2) > -12$

29. $5(n + 1) - 3(n - 1) > -9$

30. $4(n - 5) - 2(n - 1) < 13$

31. $\frac{1}{2}n - \frac{2}{3}n \geq -7$

32. $\frac{3}{4}n + \frac{1}{6}n \leq 1$

33. $\frac{3}{4}n - \frac{5}{6}n < \frac{3}{8}$

34. $\frac{2}{3}n - \frac{1}{2}n > \frac{1}{4}$

35. $\frac{3x}{5} - \frac{2}{3} > \frac{x}{10}$

36. $\frac{5x}{4} + \frac{3}{8} < \frac{7x}{12}$

37. $n \geq 3.4 + 0.15n$

38. $x \geq 2.1 + 0.3x$

39. $0.09t + 0.1(t + 200) > 77$

40. $0.07t + 0.08(t + 100) > 38$

41. $0.06x + 0.08(250 - x) \geq 19$

42. $0.08x + 0.09(2x) \leq 130$

43. $\frac{x - 1}{2} + \frac{x + 3}{5} > \frac{1}{10}$

44. $\frac{x + 3}{4} + \frac{x - 5}{7} < \frac{1}{28}$

45. $\frac{x + 2}{6} - \frac{x + 1}{5} < -2$

46. $\frac{x - 6}{8} - \frac{x + 2}{7} > -1$

47. $\frac{n + 3}{3} + \frac{n - 7}{2} > 3$

48. $\frac{n - 4}{4} + \frac{n - 2}{3} < 4$

49. $\frac{x - 3}{7} - \frac{x - 2}{4} \leq \frac{9}{14}$

50. $\frac{x - 1}{5} - \frac{x + 2}{6} \geq \frac{7}{15}$

Para los problemas 51-66, graficar el conjunto solución de cada desigualdad compuesta. (Objetivo 3)

51. $x > -1$ y $x < 2$

52. $x > 1$ y $x < 4$

53. $x < -2$ o $x > 1$

54. $x < 0$ o $x > 3$

55. $x > -2$ y $x \leq 2$

56. $x \geq -1$ y $x < 3$

57. $x > -1$ y $x > 2$

58. $x < -2$ y $x < 3$

59. $x > -4$ o $x > 0$

60. $x < 2$ o $x < 4$

61. $x > 3$ y $x < -1$

62. $x < -3$ y $x > 6$

63. $x \leq 0$ o $x \geq 2$

64. $x \leq -2$ o $x \geq 1$

65. $x > -4$ o $x < 3$

66. $x > -1$ o $x < 2$

Para los problemas 67-78, resolver cada problema planteando y resolviendo la desigualdad apropiada. **(Objetivo 4)**

67. Cinco más que tres veces un número es mayor por 26. Hallar todos los números que satisfagan esta relación.

68. Catorce aumentado por el doble de un número es menos que o igual a tres veces este número. Hallar los números que satisfagan la relación.

69. Suponga que el perímetro de un rectángulo no es mayor a 70 pulgadas y el largo del rectángulo debe medir 20 pulgadas. Hallar el máximo valor posible para el ancho del rectángulo.

70. Un lado de un triángulo es tres veces tan largo como otro lado. El tercer lado mide 15 centímetros. Si el perímetro del triángulo no puede medir más de 75 centímetros, hallar las máximas longitudes posibles de los otros dos lados.

71. Sue obtuvo 132 y 160 en sus primeros dos juegos de boliche. ¿Cuánto debe obtener en el tercer juego para tener un promedio de al menos 150 por los tres juegos?

72. Mike obtuvo puntuaciones de 87, 81 y 74 en sus primeros tres exámenes de álgebra. ¿Qué puntuación debe obtener en el cuarto examen para tener un promedio de 85 o mayor en los cuatro exámenes?

73. Este semestre, Lance obtuvo puntuaciones de 96, 90 y 94 en sus primeros tres exámenes de álgebra. ¿Qué promedio debe tener en los últimos dos exámenes para tener un promedio mayor a 92 en los 5 exámenes?

74. Los Mets han ganado 45 juegos de béisbol y han perdido 55 juegos. Les quedan 62 juegos por jugar. Para ganar más del 50% de todos sus juegos, ¿cuántos de los 62 restantes deben ganar?

75. Un negocio en Internet tiene costos de \$4000 más \$32 por venta. El negocio recibe \$48 por venta. ¿Cuáles son los posible valores de ventas que podrían asegurar que lo que reciben por venta exceda los costos?

76. La altura promedio de dos delanteros y un centro de un equipo de baloncesto es 6 pies, 8 pulgadas. ¿Cuál debe ser el promedio de altura de dos guardias para que el promedio de altura del equipo sea de, al menos, 6 pies y 4 pulgadas?

77. Scott tiró rondas de 82, 84, 78 y 79 en los primeros cuatro días de un torneo de golf. ¿Cuánto debe tirar en el quinto día del torneo para que su promedio sea de 80 o menos?

78. Sydney gana \$2300 al mes. Para poder obtener una hipoteca, sus pagos mensuales deben ser menores al 35% de su ingreso mensual. ¿Sus pagos mensuales de hipoteca deben ser menores a qué cantidad para poder tener una hipoteca?

Pueden encontrarse problemas verbales adicionales en el Apéndice A. Todos los problemas en el Apéndice marcados como (4.5) son apropiados para esta sección.

Pensamientos en palabras

79. Dar un ejemplo de un enunciado compuesto usando la palabra “y” fuera del campo de las matemáticas.

80. Dar un ejemplo de un enunciado compuesto usando la palabra “o” fuera del campo de las matemáticas.

81. Dar una descripción paso a paso de cómo resolver la desigualdad $3x - 2 > 4(x + 6)$

Respuestas del examen de conceptos

1. Cierto **2.** Falso **3.** Cierto **4.** Cierto **5.** Cierto **6.** B **7.** E **8.** A **9.** D **10.** C

Capítulo 4 Resumen

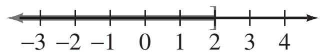
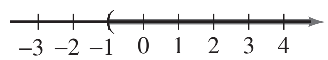
OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Usar razones para calcular conversiones de unidades. (Sección 4.1/Objetivo 1)	Las razones de unidades de medida equivalentes pueden usarse para cambiar unidades. Las tablas 2.1-2.3 en las páginas 142-143 y en el interior de la cubierta de su libro dan muchas de las equivalencias de unidades más populares.	Rick caminó 352 yardas en una caminata. ¿Qué porción de una milla caminó? **Solución** Se necesita multiplicar por el factor de conversión de 1 milla por cada 1760 yardas. $352 \text{ yardas} \cdot \frac{1 \text{ milla}}{1760 \text{ yardas}} = \frac{352}{1760} \text{ milla} = 0.2 \text{ milla}$ **Problema de muestra 1** Un campo de fútbol americano mide 100 yardas. ¿Cuántos metros mide el campo?
Usar una razón para determinar una unidad de precio. (Sección 4.1/Objetivo 2)	Una unidad de precio puede usarse para comparar precios. Muchas tiendas de alimentos proporcionan la unidad de precio en la etiqueta de la tienda.	Miranda pagó \$4.40 por 8 onzas de pavo. ¿Cuál es el precio por onza de pavo? **Solución** Para encontrar la unidad de precio, se debe dividir el precio entre el número de onzas. $\frac{\$4.40}{8 \text{ onzas}} = \$0.55 \text{ por onza}$ La unidad de precio del pavo es \$0.55 por onza. **Problema de muestra 2** Jake pagó \$40.68 por 12 galones de gasolina. ¿Cuál fue el precio por galón de gasolina?
Resolver proporciones. (Sección 4.1/Objetivo 3)	Una razón es la comparación de dos números por medio de una división. Un enunciado de igualdad entre dos razones es una proporción. En una proporción, los productos cruzados son iguales; es decir: Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $ad = bc$, cuando $b \neq 0$ y $d \neq 0$.	Resolver $\frac{5}{x-2} = \frac{6}{x+3}$. **Solución** $\frac{5}{x-2} = \frac{6}{x+3}$ $6(x-2) = 5(x+3)$ $6x - 12 = 5x + 15$ $x - 12 = 15$ $x = 27$ El conjunto solución es $\{27\}$. **Problema de muestra 3** Resolver $\frac{4}{x-4} = \frac{5}{x+7}$.
Resolver problemas verbales usando proporciones. (Sección 4.1/Objetivo 4)	Una variedad de problemas verbales pueden establecerse y resolverse usando proporciones.	La escala en un plano muestra que 1 pulgada representa 8 pies. Si el largo de una casa en el plano es de 4.5 pulgadas, ¿cuál es el largo de la casa realmente?

(continúa)

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
		Solución Plantear la proporción $\frac{1}{8} = \frac{4.5}{x}$ y resolver para x. $x = 4.5(8) = 36$ La casa mide 36 pies de largo. **Problema de muestra 4** Para poner cemento en un sendero, se necesitan piedras molidas y cemento en una razón de 3.25 kg de piedra por 1 kg de cemento. Si se compra una bolsa de 12 kg de cemento, ¿cuántas piedras molidas se necesitan?
Usar una proporción para convertir una fracción a porcentaje. (Sección 4.2/Objetivo 1)	El concepto de porcentaje significa “por cien” y es la razón que un denominador tiene de 100. Para convertir una fracción a porcentaje, debe plantear una proporción y resolverla.	Convertir $\frac{3}{16}$ a porcentaje. **Solución** $\frac{n}{100} = \frac{3}{16}$ $16n = 300$ $n = \frac{300}{16} = 18\frac{3}{4}$ Entonces $\frac{3}{16} = 18\frac{3}{4}\%$. **Problema de muestra 5** Convertir $\frac{5}{8}$ a porcentaje.
Resolver problemas porcentuales básicos. (Sección 4.2/Objetivo 2)	Hay tres tipos básicos de problemas de porcentajes. Cada uno de ellos puede resolverse traduciendo el problema a ecuaciones algebraicas simples y resolviéndolas.	**1.** ¿Cuál es el 35% de 400? **Solución** $n = 0.35(400) = 140$ Entonces, 140 es el 35% de 400. **2.** ¿Doce por ciento de qué número es 30? **Solución** $0.12x = 30$ $x = \frac{30}{0.12} = 250$ Entonces, 12% de 250 es 30. **3.** ¿Quince es qué porcentaje de 80? **Solución** $15 = x(80)$ $x = \frac{15}{80} = 0.1875$ Entonces, 15 es el 18.75% de 80. **Problema de muestra 6** (a) ¿Siete es qué porcentaje de 350? (b) ¿Cuál es el 15% de 160? (c) ¿Cuatro por ciento de qué número es 8?

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Calcular el porcentaje de aumento o disminución. (Sección 4.2/Objetivo 3)	El porcentaje de cambio se calcula usando la siguiente fórmula. Porcentaje de cambio = $\frac{\text{Nueva cantidad} - \text{Cantidad original}}{\text{Cantidad original}} \cdot 100\%$ Note que el denominador es siempre la cantidad original antes del cambio. Si el porcentaje de cambio es positivo, se dice que hubo un porcentaje de aumento; si el porcentaje de cambio es negativo, se llama porcentaje de disminución.	Abbie mejoró su servicio de Internet de 1.5Mbit/s a 2.0 Mbit/s. ¿Cuál es el porcentaje de cambio en la velocidad del Internet? **Solución** Usando la fórmula, se obiene $\frac{2.0 - 1.5}{1.5} \cdot 100\% = \frac{0.5}{1.5} \cdot 100\% = 33.3\%$ El porcentaje de cambio es un aumento del 33.3%. **Problema de muestra 7** Suzanne compró una nueva chaqueta, la cual tenía descuento de \$90. El precio original de la chaqueta era de \$120. ¿Cuál fue el porcentaje de cambio en el precio de esta chaqueta?
Resolver problemas de interés simple. (Sección 4.2/Objetivo 4)	La fórmula de interés simple, $i = Prt$, donde i representa la cantidad de interés ganada al invertir dinero (P) a una tasa de interés anual (r) por cierto tiempo (t), se usa para resolver ciertos tipos de problemas de inversiones.	¿Por cuántos años deben invertirse \$2000 a 8% de interés para ganar \$240? **Solución** $i = Prt$ $240 = 0.08(2000)(t)$ $240 = 160t$ $1.5 = t$ Los \$2000 deben invertirse por 1.5 años a 8% de interés. **Problema de muestra 8** ¿Por cuántos años deben invertirse \$2000 a 3% de interés para ganar \$240?
Resolver ecuaciones que implican números decimales. (Sección 4.3/Objetivo 1)	Para resolver ecuaciones que contienen decimales, puede calcular con los decimales o eliminar todos los decimales de la ecuación multiplicando ambos lados de ésta por la potencia apropiada de 10.	Resolver $0.04x + 0.05x = 1.8$. **Solución** **Método 1** $0.04x + 0.05x = 1.8$ $0.09x = 1.8$ $x = \frac{1.8}{0.09} = 20$ El conjunto solución es {20}. **Método 2** $0.04x + 0.05x = 1.8$ $100(0.04x + 0.05x) = 100(1.8)$ $4x + 5x = 180$ $9x = 180$ $x = 20$ El conjunto solución es {20}. **Problema de muestra 9** Resolver $0.12x + 0.03x = 4.5$.

(*continúa*)

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Resolver problemas verbales que involucran porcentajes. (Sección 4.3/Objetivo 2)	Muchos problemas de consumidor involucrando el concepto de porcentaje pueden resolverse con ecuaciones. Las relaciones básicas “el precio de venta es igual al costo más la ganancia” y “el precio original de venta menos el descuento es igual al precio de venta con descuento” son frecuentemente usados para resolver problemas.	Una tienda de computadoras pagó \$20 por nuevos juegos. ¿Cuál debe ser el precio de cada juego para que la ganancia sea del 80% del costo? **Solución** Sea s el precio de venta. $s = 20 + (80\%)(20)$ $s = 20 + 0.80(20)$ $s = 36$ Entonces, el precio de venta debe ser de \$36. **Problema de muestra 10** Una librería pagó \$120 por un libro de texto. ¿Cuál debe ser el precio de venta para obtener un 22% de ganancia del costo?
Mostrar el conjunto solución de una desigualdad en notación de conjunto y graficando. (Sección 4.4/Objetivos 2 y 3)	El conjunto solución de $x + 2 > 5$ son todos los números mayores que 3. La solución en notación de conjuntos es $\{x \mid x > 3\}$ y se lee “el conjunto de toda x tal que x es mayor que 3”. Una recta numérica se usa para graficar la solución. Un paréntesis en la línea numérica significa que el número no está incluido en el conjunto solución. Un corchete en la recta numérica indica que el número sí está incluido en el conjunto solución.	Escribir el conjunto solución de las desigualdades en notación de conjuntos y graficar las soluciones. **(a)** $x \leq 2$ **(b)** $x > -1$ **Solución** **(a)** $\{x \mid x \leq 2\}$  **(b)** $\{x \mid x > -1\}$  **Problema de muestra 11** Escribir el conjunto solución de la desigualdad en notación de conjuntos y graficar la solución. **(a)** $x \geq -3$ **(b)** $x < 4$
Resolver desigualdades de primer grado. (Sección 4.4/Objetivo 1)	Las propiedades para resolver desigualdades son similares a las propiedades para resolver ecuaciones, excepto por las propiedades que implican multiplicar o dividir por números negativos. Cuando se multiplican o se dividen ambos números por números negativos, se debe invertir el símbolo de la desigualdad.	Resolver $24n - 3 > 7$. **Solución** $-4n - 3 > 7$ $-4n > 10$ $\frac{-4n}{4} < \frac{10}{-4}$ $n < \frac{-5}{2}$ El conjunto solución es $\left\{n \mid n < -\frac{5}{2}\right\}$ o $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$. **Problema de muestra 12** Resolver $23x + 2 \leq 11$.

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Resolver desigualdades que involucren el uso de la propiedad distributiva. **(Sección 4.5/Objetivo 1)**	Para resolver desigualdades donde la variable es parte de una expresión dentro de paréntesis, se debe usar la propiedad distributiva. Ésta remueve los paréntesis y la desigualdad resultante se resuelve de manera usual.	Resolver $15 < -2(x - 1) - 5$. **Solución** $15 < -2x + 2 - 5$ $15 < -2x - 3$ $15 + 3 < -2x - 3 + 3$ $18 < -2x$ $\frac{18}{-2} > \frac{-2x}{-2}$ $-9 > x$ El conjunto solución es $\{x \mid x < -9\}$ o (− `, −9). **Problema de muestra 13** Resolver $13 \geq 23(x + 2) + 7$.
Resolver desigualdades involucran expresiones fraccionarias. **(Sección 4.5/Objetivo 2)**	Cuando la desigualdad contiene varias fracciones, lo mejor suele ser eliminarlas de la ecuación. Las fracciones pueden eliminarse multiplicando ambos lados de la ecuación por el MCD de todos los denominadores.	Resolver $\frac{3}{4}x < \frac{2}{3}$. **Solución** $\frac{3}{4}x < \frac{2}{3}$ $\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}x\right) < \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)$ $x < \frac{8}{9}$ El conjunto solución es $\left\{x \mid x < \frac{8}{9}\right\}$ o $\left(-\infty, \frac{8}{9}\right)$. **Problema de muestra 14** Resolver $\frac{2}{3}x \geq -\frac{3}{5}$.
Resolver desigualdades compuestas formadas por la palabra “y”. **(Sección 4.5/Objetivo 3)**	El conjunto solución de una desigualdad compuesta formada por la palabra “y” es la intersección de los conjuntos solución de las dos desigualdades. Para resolver las desigualdades que involucran “y”, se deben satisfacer todas las condiciones. Así, la desigualdad compuesta $x > 1$ y $x < 3$ se satisface con todos los números entre 1 y 3.	Resolver la desigualdad compuesta $x > 24$ y $x > 2$. **Solución** Todas las condiciones deben satisfacerse. Así, la desigualdad compuesta $x > -4$ y $x > 2$ se satisface con todos los números mayores que 2. El conjunto solución es $\{x \mid x > 2\}$ **Problema de muestra 15** Resolver la desigualdad compuesta $x \leq 2$ y $x \leq -1$.

(*continúa*)

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Resolver desigualdades compuestas formadas por la palabra "o". (Sección 4.5/Objetivo 3)	El conjunto solución de una desigualdad compuesta formada por la palabra "o" es la unión de los conjuntos solución de las dos desigualdades. Para resolver desigualdades que incluyen "o", se deben satisfacer uno o más de las condiciones. Así, la desigualdad compuesta $x < 1$ o $x < 5$ se satisface con todos los números menores que 5.	Resolver la desigualdad compuesta $x > -1$ o $x < 2$. **Solución** Una o más de las condiciones deben satisfacerse. Así, la desigualdad compuesta $x > -1$ o $x < 2$ se satisface con números reales. El conjunto solución es [Todos reales]. **Problema de muestra 16** Resolver la desigualdad compuesta $x > 3$ o $x > 8$.
Resolver problemas verbales que implican desigualdades. (Sección 4.5/Objetivo 4)	Mantenga estas sugerencias en mente mientras resuelve los problemas verbales. **1.** Lea el problema con cuidado. **2.** Dibuje cualquier figura o diagrama que pueda serle útil. **3.** Elija una variable significativa. **4.** Busque una guía. **5.** Formule una desigualdad. **6.** Resuelva la desigualdad. **7.** Compruebe su respuesta.	Martin debe tener un promedio de, al menos, 240 puntos en una serie de tres líneas de boliche para entrar a las eliminatorias. Si ha tenido puntuaciones de 220 y 210, ¿cuántos puntos debe anotar en el tercer juego para entrar a las eliminatorias? **Solución** Sea p el puntaje para el tercer juego. **Guía** Promedio ≥ 240 $\frac{220 + 210 + p}{3} \geq 240$ $430 + p \geq 720$ $p \geq 290$ Martin debe anotar 290 puntos o más. **Problema de muestra 17** Marcia obtuvo las calificaciones 85, 90, 70 y 64 en sus primeros cuatro exámenes. ¿Qué calificación debe obtener en el quinto examen para tener un promedio de 80 o mayor en los cinco exámenes?

Capítulo 4 Conjunto de problemas de repaso

Para los problemas 1-4, responder la pregunta planteando el factor de conversión apropiado.

1. El carro de Curt llega hasta a 160 kilómetros por hora. ¿Cuál es la velocidad expresada en millas por hora?

2. En la tienda World Marketplace, Samir compró un paquete de papas que pesaba 14 onzas. ¿Cuántos gramos pesaba el paquete?

3. Harrison tiene 4 galones de leche. Necesita una taza de leche por cada niño que va al taller de arte. ¿A cuántos niños les puede servir leche con 4 galones de leche?

4. La herida en la pierna de un paciente mide 12 centímetros. ¿Qué tan largo es el corte en pulgadas redondeado a las decenas más cercanas?

Para los problemas 5 y 6, responder la pregunta planteando y evaluando la razón o conversión apropiada para determinar la unidad de precio.

5. El largo de una tubería cuesta \$12 por 30 pulgadas. ¿Cuál será el precio por pulgada?

6. La tienda Market Fresh ofrece 3 manzadas por \$1.35 o 5 manzanas por \$2.00. Hallar la unidad de precio por cada oferta.

Para los problemas 7-14, resolver la ecuación.

7. $\dfrac{x-3}{9}=\dfrac{x+4}{8}$

8. $\dfrac{x+2}{12}=\dfrac{x+1}{10}$

9. $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{x+2}{-4}$

10. $\dfrac{2x-1}{3}=\dfrac{3x+2}{2}$

11. $\dfrac{2n+1}{4}+2=\dfrac{n-3}{4}$

12. $\dfrac{2n-5}{3}=\dfrac{n+1}{3}+5$

13. $\dfrac{4(x+1)}{3}=\dfrac{3x+5}{2}$

14. $\dfrac{4x+5}{5}=\dfrac{3(x-4)}{2}$

Para los problemas 15-20, plantear una ecuación y resolver cada problema.

15. Un carro usa 18 galones de gasolina para un viaje de 369 millas. Con la misma tasa, ¿cuántos galones consumirá para un viaje de 615 millas?

16. La razón de la circunferencia de un círculo al diámetro del mismo es aproximadamente 22 a 7. Usando esta razón, hallar el diámetro de un círculo cuya circunferencia mide 198 centímetros.

17. En un reciente festival en Wisconsin, la razón de cervezas vendidas a sodas vendidas fue de 8 a 5. Si el total de bebidas vendidas fue de 650, hallar el número de cervezas vendidas y el número de sodas vendidas.

18. La razón del complemento de un ángulo con el suplemento del ángulo es 7 a 16. Hallar la medida del ángulo.

19. La razón de hombres a mujeres en una clase de álgebra fue de 1 a 4. Si la clase tenía 40 estudiantes, encontrar el número de varones y el número de mujeres estudiantes.

20. En un restaurante, el mesero y el mozo se dividen las propinas de una mesa en la razón de 1 a 8. Si las propinas del sábado fueron \$225, encontrar la cantidad de propina que el mesero y el mozo recibieron.

Para los problemas 21-26, usar las proporciones para cambiar cada fracción común a un porcentaje.

21. $\dfrac{4}{5}$

22. $\dfrac{9}{25}$

23. $\dfrac{2}{3}$

24. $\dfrac{5}{6}$

25. $\dfrac{9}{4}$

26. $\dfrac{13}{10}$

Para los problemas 27-40, plantear una ecuación y resolver el problema.

27. ¿Treinta y seis es qué porcentaje de 80?

28. ¿Catorce es qué porcentaje de 56?

29. ¿Cuál es el 120% de 72?

30. ¿Cuál es el 180% de 126?

31. ¿30% de qué número es 126?

32. ¿25% de qué número es 240?

33. Hace más de dos meses, el tumor benigno de un paciente creció de 8 a 10 centímetros. ¿Cuál es el porcentaje de cambio?

34. Después de que un paciente recibió una inyección de insulina, sus niveles de glucosa cambiaron de 300 mg/dL a 180 mg/dL. ¿Cuál fue el porcentaje de cambio en sus niveles de glucosa?

35. Una tienda bajó el precio de un mueble de \$500 a \$420. ¿Cuál es el porcentaje de cambio en el precio del mueble?

36. La cuenta eléctrica de Katie en julio fue de \$120. En agosto, la cuenta fue de \$140. ¿Cuál es el porcentaje de cambio en la cuenta eléctrica de julio a agosto?

37. ¿Cuánto interés habrá en un préstamo estudiantil de 2 años si se otorgaron \$3500 con una tasa de interés anual del 5.25%?

38. ¿Cuánto dinero, invertido a 6% de interés anual por 2 años, se necesita para ganar \$540?

39. ¿Cuánto tiempo necesita invertirse \$4000 con una tasa de interés anual del 4.5% para ganar \$540?

40. Hallar la tasa de interés anual si \$1200 de interés se ganan cuando se invirtieron \$7500 por cuatro años.

En los problemas 41-46, resolver cada ecuación.

41. $0.5x + 0.7x = 1.7$

42. $0.07t + 0.12(t - 3) = 0.59$

43. $0.1x + 0.12(1700 - x) = 188$

44. $x - 0.25x = 12$

45. $0.2(x - 3) = 14$

46. $0.40x + .24(20 - x) = 0.36(20)$

Para los problemas 47-54, plantear una ecuación y resolver el problema.

47. El número de estudiantes que reciben un descuento en sus almuerzos en una escuela primaria es 253. Esto es 15% más que el número de estudiantes que recibieron descuentos en sus almuerzos el año pasado. Hallar el número de estudiantes que recibieron descuentos el año pasado.

48. Kareem puede correr medio maratón en 220 minutos. Si puede reducir su tiempo 8%, ¿cuál será su nuevo tiempo para correr medio maratón?

49. Un vendedor tiene algunos suéteres que le costaron \$28 cada uno. ¿A qué precio debe venderlos para obtener una ganancia del 30% del precio de venta?

50. Si un libro le cuesta a un vendedor \$22.00 y quiere obtener una ganancia del 50% basado en el precio de venta, ¿a cuánto deberá vender el libro?

51. Thomas compró un asador eléctrico con 30% de descuento por \$140. ¿Cuál era el precio original del asador?

52. Madeline compró una bolsa de diseñador por \$180, lo cual representa un 20% menos que el precio original. ¿Cuánto costaba originalmente la bolsa?

53. Si el costo de un par de jeans para un vendedor es \$42 y los vende por \$56.00, ¿cuál es la ganancia basada en el costo?

54. Una vendedora tiene algunos teclados de computadora que le costaron \$24. Si los vende por \$43.20, hallar la ganancia basada en el costo.

Para los problemas 55-70, resolver cada desigualdad.

55. $3x - 2 > 10$

56. $-2x - 5 < 3$

57. $2x - 9 \geq x + 4$

58. $3x + 1 \leq 5x - 10$

59. $6(x - 3) > 4(x + 13)$

60. $2(x + 3) + 3(x - 6) < 14$

61. $\frac{2n}{5} - \frac{n}{4} < \frac{3}{10}$

62. $\frac{n + 4}{5} + \frac{n - 3}{6} > \frac{7}{15}$

63. $-16 < 8 + 2y - 3y$

64. $-24 > 5x - 4 - 7x$

65. $-3(n - 4) > 5(n + 2) + 3n$

66. $-4(n - 2) - (n - 1) < -4(n + 6)$

67. $\frac{3}{4}n - 6 \leq \frac{2}{3}n + 4$

68. $\frac{1}{2}n - \frac{1}{3}n - 4 \geq \frac{3}{5}n + 2$

69. $-12 > -4(x - 1) + 2$

70. $36 < -3(x + 2) - 1$

Para los problemas 71-74, graficar el conjunto solución de cada desigualdad compuesta.

71. $x > -3$ y $x < 2$

72. $x < -1$ o $x > 4$

73. $x < 2$ o $x > 0$

74. $x > 1$ y $x > 0$

Plantear una ecuación o una desigualdad para resolver los problemas 75 y 76.

75. Mónica obtiene puntajes de 83, 89, 78 y 86 en sus primeros cuatro exámenes. ¿Qué calificación debe obtener en el quinto examen para que su promedio sea 85 o mayor?

76. El promedio de Ameya en sus primeros tres exámenes de psicología es 84. ¿Cuánto debe sacar en el cuarto examen para que su promedio sea 85 o mayor?

Si aún no lo ha hecho, puede que quiera revisar los problemas verbales en el Apéndice A para adquirir un poco más de práctica con problemas verbales. Todos los problemas en el Apéndice que tienen una referencia al capítulo 4 son apropiados.

Capítulo 4 Examen

Para los problemas 1 y 2, responder la pregunta planteando el factor de conversión apropiado.

1. Víctor compró gasolina por \$2.50 por litro. ¿Cuál sería el precio expresado en dólares por galón?
2. Un listón decorativo cuesta \$8.60 por 24 pulgadas. ¿Cuál será el precio por yarda?

Para los problemas 3-14, resolver cada una de las ecuaciones o desigualdades.

3. $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{x-3}{5}$
4. $\dfrac{-4}{2x-1} = \dfrac{3}{3x+5}$
5. $\dfrac{x-1}{6} - \dfrac{x+2}{5} = 2$
6. $\dfrac{n}{20-n} = \dfrac{7}{3}$
7. $\dfrac{h}{4} + \dfrac{h}{6} = 1$
8. $0.05n + 0.06(400 - n) = 23$
9. $s = 35 + 0.5s$
10. $3x - 2 < 13$
11. $-2x + 5 \geq 3$
12. $3(x - 1) \leq 5(x + 3)$
13. $-4 > 7(x - 1) + 3$
14. $\dfrac{1}{2}n + 2 \leq \dfrac{3}{4}n - 1$

Para los problemas 15 y 16, graficar el conjunto solución de cada desigualdad compuesta.

15. $x \geq -2$ y $x \leq 4$
16. $x < 1$ o $x > 3$

Para los problemas 17-25, plantear una ecuación o desigualdad y resolver cada problema.

17. Expresar $\dfrac{5}{4}$ como porcentaje.
18. ¿Treinta y cinco por ciento de qué número es 24.5?
19. Cora compró una cámara digital por \$245, lo que representa el 30% de descuento del precio original. ¿Cuál era el precio original de la cámara digital?
20. Una vendedora tiene algunas lámparas que le costaron \$40 cada una. Quiere venderlas con una ganancia del 30% del costo. ¿Cuánto debe cobrar por cada lámpara?
21. Hugh pagó \$48 por un par de zapatos de golf que estaban enlistados a \$80. ¿De cuánto fue el descuento que recibió?
22. Los resultados electorales de cierto precinto indicaron que la razón de votantes mujeres con votantes varones fue 7 a 5. Si un total de 1500 personas votaron, ¿cuántas mujeres votaron?
23. Tina obtuvo las calificaciones de 86, 88, 89 y 91 en sus primeros cuatro exámenes de historia. ¿Cuánto debe obtener en su quinto examen para que el promedio sea de 90 o más?
24. Después de que los estudiantes de una clase no entendieron nu concepto, el profesor incrementó el número de problemas de tarea de 60 a 80. ¿Cuál fue el porcentaje de cambio en el número de problemas asignados?
25. ¿Cuánto interés se cobrará de un préstamo estudiantil de 4 años cuando se otorgó la cantidad de \$10, 500 a una tasa de interés anual del 5%?

Capítulos 1-4 Conjunto de problemas de repaso acumulados

Para los problemas 1-10, simplificar cada expresión algebraica combinando términos similares.

1. $7x - 9x - 14x$
2. $-10a - 4 + 13a + a - 2$
3. $5(x - 3) + 7(x + 6)$
4. $3(x - 1) - 4(2x - 1)$
5. $-3n - 2(n - 1) + 5(3n - 2) - n$
6. $6n + 3(4n - 2) - 2(2n - 3) - 5$
7. $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}x$
8. $\frac{1}{3}n - \frac{4}{15}n + \frac{5}{6}n - n$
9. $0.4x - 0.7x - 0.8x + x$
10. $0.5(x - 2) + 0.4(x + 3) - 0.2x$

Para los problemas 11-20, evaluar cada expresión algebraica para los valores dados a las variables.

11. $5x - 7y + 2xy$ para $x = -2$ y $y = 5$
12. $2ab - a + 6b$ para $a = 3$ y $b = -4$
13. $-3(x - 1) + 2(x + 6)$ para $x = -5$
14. $5(n + 3) - (n + 4) - n$ para $n = 7$
15. $\frac{3x - 2y}{2x - 3y}$ para $x = 3$ y $y = -6$
16. $\frac{3}{4}n - \frac{1}{3}n + \frac{5}{6}n$ para $n = -\frac{2}{3}$
17. $2a^2 - 4b^2$ para $a = 0.2$ y $b = -0.3$
18. $x^2 - 3xy - 2y^2$ para $x = \frac{1}{2}$ y $y = \frac{1}{4}$
19. $5x - 7y - 8x + 3y$ para $x = 9$ y $y = -8$
20. $\frac{3a - b - 4a + 3b}{a - 6b - 4b - 3a}$ para $a = -1$ y $b = 3$

Para los problemas 21-26, evaluar cada expresión.

21. 3^4
22. -2^6
23. $\left(\frac{2}{3}\right)^3$
24. $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$
25. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^2$
26. $\left(\frac{3}{4} - \frac{7}{8}\right)^3$

Para los problemas 27-38, resolver cada ecuación.

27. $-5x + 2 = 22$
28. $3x - 4 = 7x + 4$
29. $3(4x - 1) = 6(2x - 1)$
30. $2(x - 1) - 3(x - 2) = 12$
31. $\frac{2}{5}x - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$
32. $\frac{t - 2}{4} + \frac{t + 3}{3} = \frac{1}{6}$
33. $\frac{2n - 1}{5} - \frac{n + 2}{4} = 1$
34. $0.09x + 0.12(500 - x) = 54$
35. $-5(n + 1) - (n - 2) = 3(-2n - 1)$
36. $\frac{-2}{x - 1} = \frac{-3}{x + 4}$
37. $0.2x + 0.1(x - 4) = 0.7x - 1$
38. $-(t - 2) + (t - 4) = 2\left(t - \frac{1}{2}\right) - 3\left(t + \frac{1}{3}\right)$

Para los problemas 39-46, resolver cada desigualdad.

39. $4x - 6 > 3x + 1$
40. $-3x - 6 < 12$
41. $-2(n - 1) \leq 3(n - 2) + 1$
42. $\frac{2}{7}x - \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

43. $0.08t + 0.1(300 - t) > 28$

44. $-4 > 5x - 2 - 3x$

45. $\frac{2}{3}n - 2 \geq \frac{1}{2}n + 1$

46. $-3 < -2(x - 1) - x$

Para los problemas 47-54, plantear una ecuación o una desigualdad y resolver cada problema.

47. El salario de Erin este año es de $32,000. Esto representa $2000 más que el doble de su salario de hace 5 años. Hallar su salario hace 5 años.

48. Uno de dos ángulos suplementarios es 45° más chico que cuatro veces el otro ángulo. Hallar la medida de cada ángulo.

49. Jaamal tiene 25 monedas (de cinco y diez centavos) que suman $2.50. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene?

50. Hana obtuvo un puntaje de 144 y 176 en sus primeras dos líneas de boliche. ¿Cuánto debe obtener en la tercera línea para tener un promedio de, al menos, 150?

51. Una tabla de 30 pies de largo se corta en dos piezas cuyas longitudes están en razón 2 a 3. Hallar el largo de las dos piezas.

52. Un vendedor tiene algunos zapatos que le costaron $32 por par. Quiere venderlos a una ganancia de 20% del precio de venta. ¿Cuál debe ser el precio de los zapatos?

53. Dos carros salen del mismo lugar y viajan en direcciones opuestas. Un carro viaja 5 millas por hora más rápido que el otro. Hallar las velocidades si, después de 6 horas, están a 570 millas el uno del otro.

54. ¿Cuántos litros de alcohol puro deben agregarse a 15 litros de una solución al 20% para obtener una solución al 40%?

5 Exponentes y polinomios

Diego Cervo/Shutterstock.com

"Educación es aprender lo que ni siquiera sabías que no sabías"
DANIEL J. BOORSTIN

Tip de estudio

La mayoría de los estudiantes toman apuntes durante sus clases de matemáticas, pero muchas veces se preguntan cuándo tomar notas y cuándo sólo escuchar. La respuesta a eso depende de cada estudiante, pero las notas de cada quien deben contener ejemplos de problemas, explicaciones que acompañen a los ejemplos y reglas clave y vocabulario para el ejemplo. Puede que quiera adoptar un formato organizado para tomar apuntes. El autor Paul Nolting sugiere un sistema de tres columnas para tomar notas en su libro de trabajo Habilidades de estudio para las matemáticas (Math Study Skills Workbook).

El instructor dará pistas para saber cuándo escribir información. Definitivamente debe tomar notas cuando el instructor enliste (1, 2, 3 o A, B, C), diga que un paso es importante o diga que un problema estará en el examen. Escuchando atentamente aprenderá a reconocer estas claves.

Otra posibilidad es usar una grabadora o una pluma inteligente como livescribe para ayudarle con los apuntes. Estos aparatos pueden permitirle repasar al tener un registro acertado de la clase. Siempre pida permiso a su instructor antes de grabar una clase.

Antes que nada, no importa si toma apuntes o si opta por un aparato electrónico, sus notas deben estar organizadas para que pueda usarlas de manera eficaz para poder repasar el material.

¿Puede enlistar tres conceptos matemáticos que no sabía que existían antes de este curso?

Vista previa del capítulo

Este capítulo presenta a los polinomios. Justo como con la aritmética, querrá aprender todas las operaciones para los polinomios. Este capítulo tiene secciones de Adición, substracción, multiplicación y división con poliniomios. Debido a que la multiplicación y la división con polinomios implican el uso de exponentes, estudiará las propiedades de exponentes. La última sección de este capítulo discute la notación científica que se usa extensamente en cursos de ciencia.

A la mayoría de los estudiantes les va bien aprendiendo las operaciones con polinomios. Los cálculos siguen reglas ordenadas y estructuradas. Sin embargo, su trabajo ahora implica muchos términos, así que apréndalos claramente y asegúrese de hacer su trabajo limpiamente.

5.1 Adición y substracción de polinomios

OBJETIVOS

1. Aprender la definición de monomio, binomio, trinomio y polinomio
2. Determinar el grado de un polinomio
3. Adición polinomios
4. Substraer polinomios usando un formato vertical u horizontal

En capítulos anteriores, expresiones como $4x$, $5y$, $26ab$, $7x^2$, y $29xy^2z^3$ fueron llamadas términos. Recuerde que un término es un producto indicado y puede contener cualquier número de factores. Las variables en un término se llaman **factores literales**, y el factor numérico se llama **coeficiente numérico**. Por tanto, en $-6ab$, a y b son factores literales, -6 es el coeficiente numérico. Los términos que tienen los mismos factores literales se llaman términos “similares” o “semejantes”.

Los términos que contienen variables sólo con números enteros positivos como exponentes se llaman monomios. Todos los términos mencionados, $4x$, $5y$, $-6ab$, $7x^2$, y $29xy^2z^3$, son monomios. (Más adelante se trabajará con algunas expresiones algebraicas como $7x^{-1}y^{-1}$ y $4a^{-2}b^{-3}$, que no son monomios). El grado de un monomio es la suma de los exponentes de los factores literales. Aquí hay algunos ejemplos:

$4xy$ es de grado 2

$5x$ es de grado 1

$14a^2b$ es de grado 3

$-17xy^2z^3$ es de grado 6

$-9y^4$ es de grado 4

Si el monomio contiene sólo una variable, entonces el exponente de la variable es el grado del monomio. Se dice que cualquier término constante distinto de cero es de grado cero.

Un polinomio es un monomio o una suma (o diferencia) finita de monomios. El **grado de un polinomio** es el grado del término con el grado más alto en el polinomio. Algunas clasificaciones especiales de polinomios se hacen de acuerdo al número de términos. A los polinomios de un sólo término se les llama monomios, a los de dos términos, binomios y cuando tienen tres términos, son trinomios. Los siguientes ejemplos ilustran parte de esta terminología.

El polinomio $5x^3y^4$ es un monomio de grado 7

El polinomio $4x^2y - 3xy$ es un binomio de grado 3

El polinomio $5x^2 - 6x + 4$ es un trinomio de grado 2

El polinomio $9x^4 - 7x^3 + 6x^2 + x - 2$ no tiene un nombre especial, pero es de grado 4

Suma de polinomios

En los capítulos anteriores, ha trabajado con muchos problemas que implican adición y substracción de polinomios. Por ejemplo, simplificar $4x^2 + 6x + 7x^2 - 2x$ a $11x^2 + 4x$ agrupar términos similares puede ser considerado como un problema de adición. Ahora simplemente repasará y ampliará algunas de las ideas.

Ejemplo de salón de clases
Sumar $4m^3 - 3m + 5$ y $6m^3 + 7m - 2$.

EJEMPLO 1 Sumar $5x^2 + 7x - 2$ y $9x^2 - 12x + 13$.

Solución

Se suele usar el formato horizontal para un problema como este. Las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva proporcionan las bases para reacomodar, reagrupar y combinar términos similares. Así

$$(5x^2 + 7x - 2) + (9x^2 - 12x + 13) = (5x^2 + 9x^2) + (7x - 12x) + (-2 + 13)$$
$$= 14x^2 - 5x + 11$$

Aunque el formato horizontal es el más típico, un formato vertical donde los términos se forman en columnas puede ser usado.

$$\begin{array}{r} 5x^2 + 7x - 2 \\ +\ 9x^2 - 12x + 13 \\ \hline 14x^2 - 5x + 11 \end{array}$$

Ejemplo de salón de clases
Sumar $2x^2 + 6x - 7$, $x + 4$, y $5x^2 + 4x$.

EJEMPLO 2 Sumar $x^2 + 5x - 1$, $x^{2\ 1}\ 4$, y $3x^2 + 8x$.

Solución

$$(x^2 + 5x - 1) + (x^2 + 4) + (3x^2 + 8x)$$
$$= (x^2 + x^2 + 3x^2) + (5x + 8x) + (-1 + 4)$$
$$= 5x^2 + 13x + 3$$

Ejemplo de salón de clases
$2y^3 - 4y + 1$, $3y^2 + 6y + 7$, y $-10y + 3$.

EJEMPLO 3 Sumar $2^{x2} + 2x - 1$, $2x^3 - x + 4$, and $25x + 6$.

Solución

$$(-x^2 + 2x - 1) + (2x^3 - x + 4) + (-5x + 6)$$
$$= (2x^3) + (-x^2) + (2x - x - 5x) + (-1 + 4 + 6)$$
$$= 2x^3 - x^2 - 4x + 9$$

Substracción de polinomios

Recuerde del capítulo 2 que $a - b = a + (-b)$. Se define la substracción como *sumar el opuesto*. Esta misma idea se extiende a los polinomios en general. El opuesto de un polinomio se forma al tomar el opuesto de cada término. Por ejemplo, el opuesto de $(2x^2 - 7x + 3)$ es $-2x^2 + 7x - 3$. En símbolos, se expresa esto como

$$-(2x^2 - 7x + 3) = -2x^2 + 7x - 3$$

Ahora considere algunos problemas con restas.

Ejemplo de salón de clases
Restar $5d^2 + 2d - 6$ de $9d^2 - 4d + 1$.

EJEMPLO 4 Restar $2x^2 + 9x - 3$ de $5x^2 - 7x - 1$.

Solución

Usar el formato horizontal.

$$\begin{aligned}(5x^2 - 7x - 1) - (2x^2 + 9x - 3) &= (5x^2 - 7x - 1) + (-2x^2 - 9x + 3)\\ &= (5x^2 - 2x^2) + (-7x - 9x) + (-1 + 3)\\ &= 3x^2 - 16x + 2\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Restar $23x^2 + 2x - 4$ de $6x^2 - 3$.

EJEMPLO 5 Restar $28y^2 - y + 5$ de $2y^2 + 9$.

Solución

$$\begin{aligned}(2y^2 + 9) - (-8y^2 - y + 5) &= (2y^2 + 9) + (8y^2 + y - 5)\\ &= (2y^2 + 8y^2) + (y) + (9 - 5)\\ &= 10y^2 + y + 4\end{aligned}$$

Después, para dividir polinomios, necesitará usar el formato vertical para restar polinomios. Considere ahora un par de ejemplos.

Ejemplo de salón de clases
Restar $4n^2 + 9n - 7$ de $12n^2 - 5n + 2$.

EJEMPLO 6 Restar $3^{x2} + 5x - 2$ de $9x^2 - 7x - 1$.

Solución

$$\begin{array}{r} 9x^2 - 7x - 1 \\ \underline{-(3x^2 + 5x - 2)} \end{array}$$

Note cuál de los polinomios va abajo y el alineamiento de los términos similares en las columnas

Ahora se puede formar el opuesto del polinomio inferior y sumar.

$$\begin{array}{r} 9x^2 - 7x - 1 \\ \underline{-3x^2 - 5x + 2} \\ 6x^2 - 12x + 1 \end{array}$$

El opuesto de $x^2 3+ 5x - 2$ es $-3x^2 - 5x + 2$

Ejemplo de salón de clases
Restar $23x^4 + 11x^3 + 2x$ de $15x^3 - 5x^2 + 3x$.

EJEMPLO 7 Restar $15y^3 + 5y^2 + 3$ de $13y^3 + 7y - 1$.

Solución

$$\begin{array}{r} 13y^3 + 7y - 1 \\ \underline{-(15y^3 + 5y^2 + 3)} \\ -2y^3 - 5y^2 + 7y - 4 \end{array}$$

Los términos similares se acomodan en columnas

Se forma mentalmente el opuesto del polinomio inferior y se suma

Se puede usar la propiedad distributiva junto con las propiedades $a = 1(a)$ y $-a = -1(a)$ al sumar y restar polinomios. Los siguientes ejemplos ilustran este enfoque.

Ejemplo de salón de clases
Perform the indicated operations
$(6a + 5) + (2a - 1) - (3a - 9)$

EJEMPLO 8 Perform the indicated operations.

$$(3x - 4) + (2x - 5) - (7x - 1)$$

Solución

$$\begin{aligned}&(3x - 4) + (2x - 5) - (7x - 1)\\ &= 1(3x - 4) + 1(2x - 5) - 1(7x - 1)\end{aligned}$$

$$= 1(3x) - 1(4) + 1(2x) - 1(5) - 1(7x) - 1(-1)$$
$$= 3x - 4 + 2x - 5 - 7x + 1$$
$$= 3x + 2x - 7x - 4 - 5 + 1$$
$$= -2x - 8$$

Ciertamente, se pueden hacer algunos de los pasos mentalmente; el ejemplo 9 da un posible formato.

Ejemplo de salón de clases
Realizar las operaciones indicadas.
$(-3x^2 + 2x - 1) - (7x^2 - 4x + 9) + (4x^2 + 9x - 10)$

EJEMPLO 9 Realizar las operaciones indicadas.

$$(-y^2 + 5y - 2) - (-2y^2 + 8y + 6) + (4y^2 - 2y - 5)$$

Solución

$$(-y^2 + 5y - 2) - (-2y^2 + 8y + 6) + (4y^2 - 2y - 5)$$
$$= -y^2 + 5y - 2 + 2y^2 - 8y - 6 + 4y^2 - 2y - 5$$
$$= -y^2 + 2y^2 + 4y^2 + 5y - 8y - 2y - 2 - 6 - 5$$
$$= 5y^2 - 5y - 13$$

Cuando se usa el formato horizontal, como en los ejemplos 8 y 9, se usan los paréntesis para indicar una cantidad. En el ejemplo 8, las cantidades $(3x - 4)$ y $(2x - 5)$ se deben sumar; de este resultado, se resta la cantidad $(7x - 1)$. Los corchetes [ ] también suelen usarse para agrupar símbolos, especialmente si hay necesidad de indicar cantidades dentro de cantidades. Para remover los símbolos de agrupamiento, debe realizar las operaciones indicadas, comenzando con el conjunto más interno de símbolos. Ahora considere dos ejemplos de este tipo.

Ejemplo de salón de clases
Realizar las operaciones indicadas.
$8q - [3q + (q - 5)]$

EJEMPLO 10 Realizar las operaciones indicadas.

$$3x - [2x + (3x - 1)]$$

Solución

Primero, se necesitan sumar las cantidades 2x y (3x-1).

$$3x - [2x + (3x - 1)] = 3x - (2x + 3x - 1)$$
$$= 3x - (5x - 1)$$

Ahora se necesita restar la cantidad (5x-1) de 3x.

$$3x - (5x - 1) = 3x - 5x + 1$$
$$= -2x + 1$$

Ejemplo de salón de clases
Realizar las operaciones indicadas.
$17 - 56m - [3 - (m + 2)] - 9m^6$

EJEMPLO 11 Realizar las operaciones indicadas.

$$8 - \{7x - [2 + (x - 1)] + 4x\}$$

Solución

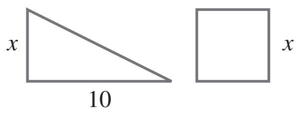
Comenzar con el conjunto de símbolos de agrupamiento más interno (los paréntesis) y proceder de la siguiente manera:

$$8 - \{7x - [2 + (x - 1)] + 4x\} = 8 - [7x - (x + 1) + 4x]$$
$$= 8 - (7x - x - 1 + 4x)$$
$$= 8 - (10x - 1)$$
$$= 8 - 10x + 1$$
$$= -10x + 9$$

Para un ejemplo final en esta sección, vea los polinomios en un caso geométrico.

Ejemplo de salón de clases

Suponga que un triángulo y un cuadrado tienen las dimensiones mostradas abajo:



Hallar un polinomio que represente la suma de las áreas de las dos figuras.

EJEMPLO 12

Suponga que un paralelogramo y un rectángulo tienen las dimensiones indicadas en la figura 5.1. Hallar un polinomio que represente la suma de las áreas de las dos figuras.

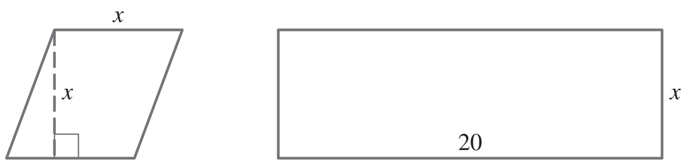


Figura 5.1

Solución

Usando las fórmulas de área $A = bh$ y $A = lw$ para paralelogramos y rectángulos respectivamente, se puede representar la suma de las áreas de dos figuras de la siguiente manera:

Área del paralelogramo $\quad x(x) = x^2$

Área del rectángulo $\quad 20(x) = 20x$

Se puede representar el área total como $x^2 + 20x$.

Examen de conceptos 5.1

Para los problemas 1-5, responder cierto o falso.

1. El grado del monomio $4x^2y$ es 3.

2. El grado del polinomio $2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 4x + 6$ es 10.

3. Un polinomio de tercer término se llama binomio.

4. Un polinomio es un monomio o una suma o resta finita de monomios.

5. Los términos monomiales deben tener números enteros como exponentes para cada variable.

Para los problemas 6-10, emparejar el polinomio con su descripción.

6. $5xy^2$ — **A.** Monomio de grado 5

7. $5xy^2 + 3x^2$ — **B.** Binomio de grado 5

8. $5x^2y + 3xy^4$ — **C.** Monomio de grado 3

9. $3x^5 + 2x^3 + 5x - 1$ — **D.** Binomio de grado 3

10. $3x^2y^3$ — **E.** Polinomio de grado 5

Conjunto de problemas 5.1

Para los problemas 1-14, determinar el grado de cada polinomio. (Objetivo 2)

1. $7x^2y + 6xy$ **2.** $4xy - 7x$

3. $5x^2 - 9$ **4.** $8x^2y^2 - 2xy^2 - x$

5. $5x^3 - x^2 - x + 3$ **6.** $8x^4 - 2x^2 + 6$

7. $5xy$ **8.** $-7x + 4$

9. $3x^2 - 10x - 5$ **10.** $4x^2 - 8x + 2$

11. $-xy^2 - 10xy - 5$ **12.** $4xy^2 + xy - 7$

13. $3x^3y^2 - 10x^2y^2 - 5y^4$ **14.** $3x^3y - 10x^2y^2 - 8y^5$

Para los problemas 15-28, sumar los polinomios. (Objetivo 3)

15. $3x + 4$ y $5x + 7$ **16.** $3x - 5$ y $2x - 9$

17. $-5y - 3$ y $9y + 13$

18. $x^2 - 2x - 1$ y $-2x^2 + x + 4$

19. $-2x^2 + 7x - 9$ y $4x^2 - 9x - 14$

20. $3a^2 + 4a - 7$ y $-3a^2 - 7a + 10$

21. $5x - 2$, $3x - 7$, y $9x - 10$

22. $-x - 4$, $8x + 9$, y $-7x - 6$

23. $2x^2 - x + 4$, $-5x^2 - 7x - 2$, y $9x^2 + 3x - 6$

24. $-3x^2 + 2x - 6$, $6x^2 + 7x + 3$, y $-4x^2 - 9$

25. $-4n^2 - n - 1$ y $4n^2 + 6n - 5$

26. $-5n^2 + 7n - 9$ y $-5n - 4$

27. $2x^2 - 7x - 10$, $-6x - 2$, y $-9x^2 + 5$

28. $7x - 11$, $-x^2 - 5x + 9$, y $-4x + 5$

Para los problemas 29-40, restar los polinomios usando un formato horizontal. (Objetivo 4)

29. $7x + 1$ de $12x + 6$

30. $10x + 3$ de $14x + 13$

31. $5x - 2$ de $3x - 7$

32. $7x - 2$ de $2x + 3$

33. $-x - 1$ de $-4x + 6$

34. $-3x + 2$ de $-x - 9$

35. $x^2 - 7x + 2$ de $3x^2 + 8x - 4$

36. $2x^2 + 6x - 1$ de $8x^2 - 2x + 6$

37. $-2n^2 - 3n + 4$ de $3n^2 - n + 7$

38. $3n^2 - 7n - 9$ de $-4n^2 + 6n + 10$

39. $-4x^3 - x^2 + 6x - 1$ de $-7x^3 + x^2 + 6x - 12$

40. $-4x^2 + 6x - 2$ de $-3x^3 + 2x^2 + 7x - 1$

Para los problemas 41-50, restar los polinomios usando un formato vertical. (Objetivo 4)

41. $3x - 2$ de $12x - 4$

42. $-4x + 6$ de $7x - 3$

43. $-5a - 6$ de $-3a + 9$

44. $7a - 11$ de $-2a - 1$

45. $8x^2 - x + 6$ de $6x^2 - x + 11$

46. $3x^2 - 2$ de $-2x^2 + 6x - 4$

47. $-2x^3 - 6x^2 + 7x - 9$ de $4x^3 + 6x^2 + 7x - 14$

48. $4x^3 + x - 10$ de $3x^2 - 6$

49. $2x^2 - 6x - 14$ de $4x^3 - 6x^2 + 7x - 2$

50. $3x - 7$ de $7x^3 + 6x^2 - 5x - 4$

Para los problemas 51-70, realizar las operaciones indicadas. (Objetivos 3 y 4)

51. $(5x + 3) - (7x - 2) + (3x + 6)$

52. $(3x - 4) + (9x - 1) - (14x - 7)$

53. $(-x - 1) - (-2x + 6) + (-4x - 7)$

54. $(-3x + 6) + (-x - 8) - (-7x + 10)$

55. $(x^2 - 7x - 4) + (2x^2 - 8x - 9) - (4x^2 - 2x - 1)$

56. $(3x^2 + x - 6) - (8x^2 - 9x + 1) - (7x^2 + 2x - 6)$

57. $(-x^2 - 3x + 4) + (-2x^2 - x - 2) - (-4x^2 + 7x + 10)$

58. $(-3x^2 - 2) + (7x^2 - 8) - (9x^2 - 2x - 4)$

59. $(3a - 2b) - (7a + 4b) - (6a - 3b)$

60. $(5a + 7b) + (-8a - 2b) - (5a + 6b)$

61. $(n - 6) - (2n^2 - n + 4) + (n^2 - 7)$

62. $(3n + 4) - (n^2 - 9n + 10) - (-2n + 4)$

63. $7x + [3x - (2x - 1)]$

64. $-6x + [-2x - (5x + 2)]$

65. $-7n - [4n - (6n - 1)]$

66. $9n - [3n - (5n + 4)]$

67. $(5a - 1) - [3a + (4a - 7)]$

68. $(-3a + 4) - [-7a + (9a - 1)]$

69. $13x - \{5x - [4x - (x - 6)]\}$

70. $-10x - \{7x - [3x - (2x - 3)]\}$

71. Restar $5x - 3$ de la suma de $4x - 2$ y $7x + 6$.

72. Restar $7x + 5$ de la suma de $9x - 4$ y $-3x - 2$.

73. Restar la suma de $-2n - 5$ y $-n + 7$ de $-8n + 9$.

74. Restar la suma de $7n - 11$ y $-4n - 3$ de $13n - 4$.

75. Hallar un polinomio que represente el perímetro del rectángulo en la figura 5.2.

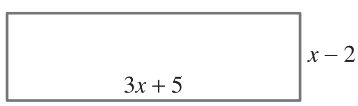


Figura 5.2

76. Hallar un polinomio que representa el área de la región sombreada en la figura 5.3. El radio del círculo más grande mide r unidades y el radio del círculo más pequeño mide 4 unidades.

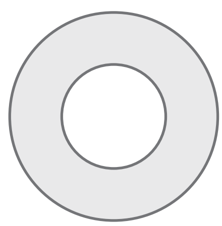


Figura 5.3

77. Encontrar el polinomio que represente la suma de las áreas de los rectángulos y cuadrados en la figura 5.4.

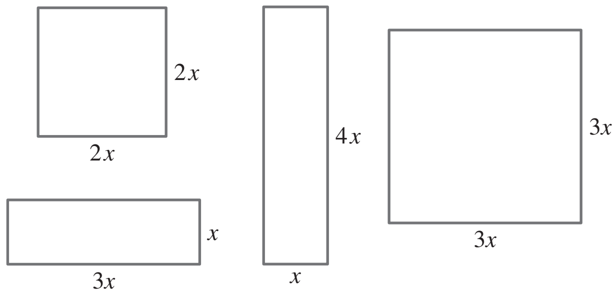


Figura 5.4

78. Encontrar el polinomio que represente el área total de la superficie del sólido rectangular en la figura 5.5.

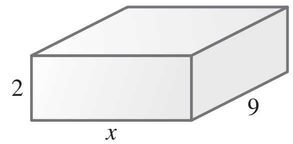


Figura 5.5

Pensamientos en palabras

79. Explicar cómo restar los polinomios.
$3x^2 + 6x - 2$ de $4x^2 + 7$.

80. ¿La suma de dos binomios siempre es otro binomio? Defienda su respuesta.

81. ¿Puede la suma de dos binomios ser un trinomio? Defienda su respuesta.

Respuestas del examen de conceptos

1. Cierto **2.** Falso **3.** Falso **4.** Cierto **5.** Cierto **6.** C **7.** D **8.** B **9.** E **10.** A

5.2 Multiplicación de monomios

OBJETIVOS

1. Aplicar las propiedades de exponentes para multiplicar monomios
2. Multiplicar un polinomio por un monomio
3. Usar productos de monomios para representar el área o volumen de figuras geométricas

En la sección 2.4, se usaron exponentes y algunas propiedades básicas de números reales para simplificar expresiones algebraicas a un formato más compacto; por ejemplo,

$$(3x)(4xy) = 3 \cdot 4 \cdot x \cdot x \cdot y = 12x^2y$$

De hecho, se estaban **multiplicando monomios**, y ese es el tema que se discutirá a continuación. Se puede hacer la multiplicación de monomios más fácil usando algunas propiedades básicas de exponentes. Estas propiedades son el resultado directo de la definición de un exponente. Los siguientes ejemplos llevan a la primera propiedad:

$$x^2 \cdot x^3 = (x \cdot x)(x \cdot x \cdot x) = x^5$$
$$a^3 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a)(a \cdot a \cdot a \cdot a) = a^7$$
$$b \cdot b^2 = (b)(b \cdot b) = b^3$$

En general,

$$\begin{aligned} b^n \cdot b^m &= \underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdot \cdots \cdot b)}_{n \text{ factores de } b}\underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdot \cdots \cdot b)}_{m \text{ factores de } b} \\ &= \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{(n+m) \text{ factores de } b} \\ &= b^{n+m} \end{aligned}$$

Propiedad 5.1

Si b es cualquier número real, y n y m son enteros positivos, entonces

$$b^n \cdot b^m = b^{n+m}$$

La propiedad 5.1 enuncia que cuando se multiplican potencias con la misma base, se suman los exponentes.

Ejemplo de salón de clases
Multiplicar
(a) $m^6 \cdot m^3$ **(b)** $d^5 \cdot d^{11}$

EJEMPLO 1 Multiplicar

(a) $x^4 \cdot x^3$ **(b)** $a^8 \cdot a^7$

Solución

(a) $x^4 \cdot x^3 = x^{4+3} = x^7$ **(b)** $a^8 \cdot a^7 = a^{8+7} = a^{15}$

Otra propiedad de exponentes se demuestra en estos ejemplos.

$$(x^2)^3 = x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 = x^{2+2+2} = x^6$$
$$(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = a^{3+3} = a^6$$
$$(b^3)^4 = b^3 \cdot b^3 \cdot b^3 \cdot b^3 = b^{3+3+3+3} = b^{12}$$

En general,

$$\begin{aligned}(b^n)^m &= \underbrace{b^n \cdot b^n \cdot b^n \cdot \;\cdots\; \cdot b^n}_{m \text{ factores de } b^n} \\ &= b^{\overbrace{n+n+n+\cdots+n}^{m \text{ de estos } ns}} \\ &= b^{mn}\end{aligned}$$

Propiedad 5.2

Si b es cualquier número real, y m y n son enteros positivos, entonces

$$(b^n)^m = b^{mn}$$

La propiedad 5.2 establece que, cuando se eleva a una potencia de una potencia, se multiplican los exponentes.

Ejemplo de salón de clases
Elevar cada uno a la potencia indicada.
(a) $(m^2)^6$ **(b)** $(n^7)^9$

EJEMPLO 2 Elevar cada uno a la potenica indicada:

(a) $(x^4)^3$ **(b)** $(a^5)^6$

Solución

(a) $(x^4)^3 = x^{3\cdot 4} = x^{12}$ **(b)** $(a^5)^6 = a^{6\cdot 5} = a^{30}$

La tercera propiedad de exponentes que se usará en esta sección eleva un monomio a una potencia.

$$(2x)^3 = (2x)(2x)(2x) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x = 2^3 \cdot x^3$$
$$(3a^4)^2 = (3a^4)(3a^4) = 3 \cdot 3 \cdot a^4 \cdot a^4 = (3)^2(a^4)^2$$
$$(-2xy^5)^2 = (-2xy^5)(-2xy^5) = (-2)(-2)(x)(x)(y^5)(y^5) = (-2)^2(x)^2(y^5)^2$$

En general,

$$(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdot \cdots \cdot ab}_{n \text{ factores de } ab}$$
$$= \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{n \text{ factores de } a}\underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdot \cdots \cdot b)}_{n \text{ factores de } b}$$
$$= a^n b^n$$

Propiedad 5.3

Si a y b son números reales, y n es un entero positivo, entonces

$$(ab)^n = a^n b^n$$

La propiedad 5.3 establece que, cuando un monomio se eleva a una potencia, se debe elevar cada factor a esa potencia.

Ejemplo de salón de clases
Elevar cada uno a la potencia indicada.
(a) $(3m^2n)^2$ **(b)** $(-5c^2d^6)^3$

EJEMPLO 3 Elevar cada uno a la potenica indicada:
(a) $(2x^2y^3)^4$ **(b)** $(-3ab^5)^3$

Solución

(a) $(2x^2y^3)^4 = (2)^4(x^2)^4(y^3)^4 = 16x^8y^{12}$

(b) $(-3ab^5)^3 = (-3)^3(a^1)^3(b^5)^3 = -27a^3b^{15}$

Considerar los siguientes ejemplos en los que se usan las propiedades de exponentes para ayudar a simplificar el proceso de la multiplicación de monomios.

1. $(3x^3)(5x^4) = 3 \cdot 5 \cdot x^3 \cdot x^4$
$= 15x^7$ $\qquad x^3 \cdot x^4 = x^{3+4} = x^7$

2. $(-4a^2b^3)(6ab^2) = -4 \cdot 6 \cdot a^2 \cdot a \cdot b^3 \cdot b^2$
$= -24a^3b^5$

3. $(xy)(7xy^5) = 1 \cdot 7 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y^5$ $\qquad$ El coeficiente numérico de xy es 1
$= 7x^2y^6$

4. $\left(\frac{3}{4}x^2y^3\right)\left(\frac{1}{2}x^3y^5\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot y^5$
$= \frac{3}{8}x^5y^8$

Es un proceso simple el elevar un monomio a una potencia cuando se usan las propiedades de exponentes. Estudie los siguientes ejemplos:

5. $(2x^3)^4 = (2)^4(x^3)^4$ usando $(ab)^n = a^nb^n$
$= (2)^4(x^{12})$ usando $(b^n)^m = b^{mn}$
$= 16x^{12}$

6. $(-2a^4)^5 = (-2)^5(a^4)^5$
$= -32a^{20}$

7. $\left(\frac{2}{5}x^2y^3\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3(x^2)^3(y^3)^3$

$= \frac{8}{125}x^6y^9$

8. $(0.2a^6b^7)^2 = (0.2)^2(a^6)^2(b^7)^2$

$= 0.04a^{12}b^{14}$

A veces los problemas implican primero elevar monomios a una potencia y después multiplicar los monomios resultantes, como se muestra en los siguientes ejemplos:

9. $(3x^2)^3(2x^3)^2 = (3)^3(x^2)^3(2)^2(x^3)^2$

$= (27)(x^6)(4)(x^6)$

$= 108x^{12}$

10. $(-x^2y^3)^5(-2x^2y)^2 = (-1)^5(x^2)^5(y^3)^5(-2)^2(x^2)^2(y)^2$

$= (-1)(x^{10})(y^{15})(4)(x^4)(y^2)$

$= -4x^{14}y^{17}$

La propiedad distributiva, junto con las propiedades de exponentes, forman una base para hallar el producto de un monomio y un polinomio. Los siguientes ejemplos ilustran estas ideas.

11. $(3x)(2x^2 + 6x + 1) = (3x)(2x^2) + (3x)(6x) + (3x)(1)$

$= 6x^3 + 18x^2 + 3x$

12. $(5a^2)(a^3 - 2a^2 - 1) = (5a^2)(a^3) - (5a^2)(2a^2) - (5a^2)(1)$

$= 5a^5 - 10a^4 - 5a^2$

13. $(-2xy)(6x^2y - 3xy^2 - 4y^3)$

$= (-2xy)(6x^2y) - (-2xy)(3xy^2) - (-2xy)(4y^3)$

$= -12x^3y^2 + 6x^2y^3 + 8xy^4$

Una vez que se sienta cómodo con este proceso, puede querer realizar la mayoría del trabajo de manera mental y después sólo escribir el resultado final. Asegúrese de entender los siguientes ejemplos.

14. $3x(2x + 3) = 6x^2 + 9x$

15. $-4x(2x^2 - 3x - 1) = -8x^3 + 12x^2 + 4x$

16. $ab(3a^2b - 2ab^2 - b^3) = 3a^3b^2 - 2a^2b^3 - ab^4$

Esta sección concluye con la conexión entre álgebra y geometría.

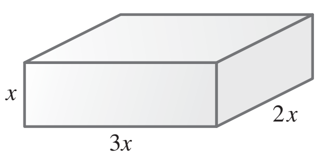


Figura 5.6

Ejemplo de salón de clases

Suponga que las dimensiones de un cilindro rectangular se representan con radio x y altura 4x. Exprese el volumen y el área total de la superficie del cilindro.

EJEMPLO 4

Suponga que las dimensiones de un sólido rectangular se representan con x, $2x$ y $3x$ como se muestra en la figura 5.6. Expresar el volumen y el área total de la superficie.

Solución

Usando la fórmula $V = twh$, se puede expresar el volumen de un sólido rectangular como $(2x)(3x)(x)$, lo cual es igual a $6x^3$. El área total de la superficie puede describirse de la siguiente manera:

Área frontal y trasera de los rectángulos: $2(x)(3x) = 6x^2$

Área lateral izquierda y lateral derecha: $2(2x)(x) = 4x^2$

Área superior e inferior: $2(2x)(3x) = 12x^2$

Se puede representar el área total de la superficie como: $6x^2 + 4x^2 + 12x^2$ o $22x^2$.

Examen de conceptos 5.2

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. Al multiplicar factores con la misma base, se suman los exponentes.
2. $3^2 \cdot 3^2 = 9^4$
3. $2x^2 \cdot 3x^3 = 6x^6$
4. $(x^2)^3 = x^5$
5. $(-4x^3)^2 = -4x^6$
6. Para simplificar $(3x^2y)(2x^3y^2)^4$, usar el orden de operaciones para primero elevar $2x^3y^2$ a la cuarta potencia y después multiplicar los monomios.
7. $(3x^2y)^3 = 27x^6y^3$
8. $(-2xy)(3x^2y^3) = -6x^3y^4$
9. $(-x^2y)(xy^3)(xy) = x^4y^5$
10. $(2x^2y^3)^3(-xy^2) = -8x^7y^{11}$

Conjunto de problemas 5.2

Para los problemas 1-30, multiplicar usando las propiedades de los exponentes para ayudar con la manipulación. (Objetivo 1)

1. $(5x)(9x)$
2. $(7x)(8x)$
3. $(3x^2)(7x)$
4. $(9x)(4x^3)$
5. $(-3xy)(2xy)$
6. $(6xy)(-3xy)$
7. $(-2x^2y)(-7x)$
8. $(-5xy^2)(-4y)$
9. $(4a^2b^2)(-12ab)$
10. $(-3a^3b)(13ab^2)$
11. $(-xy)(-5x^3)$
12. $(-7y^2)(-x^2y)$
13. $(8ab^2c)(13a^2c)$
14. $(9abc^3)(14bc^2)$
15. $(5x^2)(2x)(3x^3)$
16. $(4x)(2x^2)(6x^4)$
17. $(4xy)(-2x)(7y^2)$
18. $(5y^2)(-3xy)(5x^2)$
19. $(-2ab)(-ab)(-3b)$
20. $(-7ab)(-4a)(-ab)$
21. $(6cd)(-3c^2d)(-4d)$
22. $(2c^3d)(-6d^3)(-5cd)$
23. $\left(\frac{2}{3}xy\right)\left(\frac{3}{5}x^2y^4\right)$
24. $\left(-\frac{5}{6}x\right)\left(\frac{8}{3}x^2y\right)$
25. $\left(-\frac{7}{12}a^2b\right)\left(\frac{8}{21}b^4\right)$
26. $\left(-\frac{9}{5}a^3b^4\right)\left(-\frac{15}{6}ab^2\right)$
27. $(0.4x^5)(0.7x^3)$
28. $(-1.2x^4)(0.3x^2)$
29. $(-4ab)(1.6a^3b)$
30. $(-6a^2b)(-1.4a^2b^4)$

Para los problemas 31-46, elevar cada monomio a la potencia indicada. Usar las propiedades de exponentes para ayudar con la manipulación. (Objetivo 1)

31. $(2x^4)^2$
32. $(3x^3)^2$
33. $(-3a^2b^3)^2$
34. $(-8a^4b^5)^2$
35. $(3x^2)^3$
36. $(2x^4)^3$
37. $(-4x^4)^3$
38. $(-3x^3)^3$
39. $(9x^4y^5)^2$
40. $(8x^6y^4)^2$
41. $(2x^2y)^4$
42. $(2x^2y^3)^5$
43. $(-3a^3b^2)^4$
44. $(-2a^4b^2)^4$
45. $(-x^2y)^6$
46. $(-x^2y^3)^7$

Para los problemas 47-60, multiplicar usando la propiedad distributiva. (Objetivo 2)

47. $5x(3x + 2)$
48. $7x(2x + 5)$
49. $3x^2(6x - 2)$
50. $4x^2(7x - 2)$
51. $-4x(7x^2 - 4)$
52. $-6x(9x^2 - 5)$
53. $2x(x^2 - 4x + 6)$
54. $3x(2x^2 - x + 5)$
55. $-6a(3a^2 - 5a - 7)$
56. $-8a(4a^2 - 9a - 6)$
57. $7xy(4x^2 - x + 5)$
58. $5x^2y(3x^2 + 7x - 9)$
59. $-xy(9x^2 - 2x - 6)$
60. $xy^2(6x^2 - x - 1)$

Para los problemas 61-70, remover los paréntesis multiplicando y después simplificar agrupando términos similares; por ejemplo:

$$3(x - y) + 2(x - 3y) = 3x - 3y + 2x - 6y = 5x - 9y$$

(Objetivo 2)

61. $5(x + 2y) + 4(2x + 3y)$

62. $3(2x + 5y) + 2(4x + y)$

63. $4(x - 3y) - 3(2x - y)$

64. $2(5x - 3y) - 5(x + 4y)$

65. $2x(x^2 - 3x - 4) + x(2x^2 + 3x - 6)$

66. $3x(2x^2 - x + 5) - 2x(x^2 + 4x + 7)$

67. $3[2x - (x - 2)] - 4(x - 2)$

68. $2[3x - (2x + 1)] - 2(3x - 4)$

69. $-4(3x + 2) - 5[2x - (3x + 4)]$

70. $-5(2x - 1) - 3[x - (4x - 3)]$

Para los problemas 71-80, realizar las operaciones indicadas y simplificarlas. (Objetivo 1)

71. $(3x)^2(2x^3)$

72. $(-2x)^3(4x^5)$

73. $(-3x)^3(-4x)^2$

74. $(3xy)^2(2x^2y)^4$

75. $(5x^2y)^2(xy^2)^3$

76. $(-x^2y)^3(6xy)^2$

77. $(-a^2bc^3)^3(a^3b)^2$

78. $(ab^2c^3)^4(-a^2b)^3$

79. $(-2x^2y^2)^4(-xy^3)^3$

80. $(-3xy)^3(-x^2y^3)^4$

Para los problemas 81-84, usar los productos de polinomios para representar el área o volumen de la figura geométrica. (Objetivo 3)

81. Expresar en forma simplificada la suma de las áreas de los dos rectángulos mostrados en la figura 5.7.

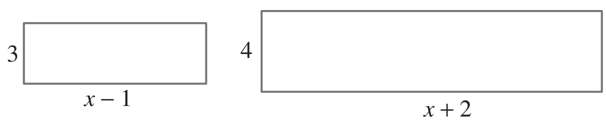


Figura 5.7

82. Expresar en forma simplificada el volumen y el área total de la superficie del sólido rectangular en la figura 5.8.

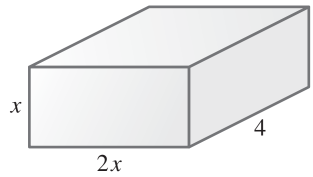


Figura 5.8

83. Representar el área de la región sombreada en la figura 5.9. El largo del radio del círculo más pequeño es x, y el largo del radio del círculo más grande es $2x$.

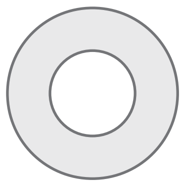


Figura 5.9

84. Representar el área de la región sombreada en la figura 5.10.

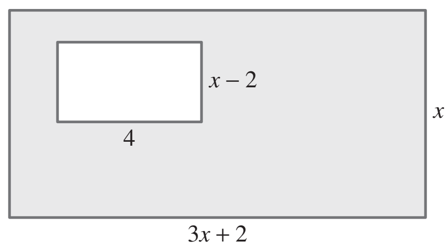


Figura 5.10

Pensamientos en palabras

85. ¿Cómo le explicaría a alguien por qué el producto de x^3 y x^4 es x^7?

86. Suponga que una amiga faltó a clase el día que se discutió esta lección. ¿Cómo podría ayudarla a entender por qué la propiedad $(b^n)^m = b^{mn}$ es verdadera?

87. ¿Cómo puede usarse la figura 5.11 para demostrar geométricamente que $x(x + 2) = x^2 + 2x$?

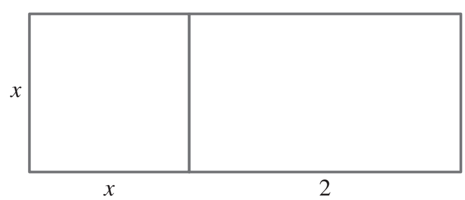


Figura 5.11

Más investigación

Para los problemas 88-97, hallar los productos indicados. Asuma que las variables en los exponentes representan números positivos; por ejemplo.

$$(x^{2n})(x^{4n}) = x^{2n+4n} = x^{6n}$$

88. $(x^{n})(x^{3n})$

89. $(x^{2n})(x^{5n})$

90. $(x^{2n-1})(x^{3n+2})$

91. $(x^{5n+2})(x^{n-1})$

92. $(x^{3})(x^{4n-5})$

93. $(x^{6n-1})(x^{4})$

94. $(2x^{n})(3x^{2n})$

95. $(4x^{3n})(-5x^{7n})$

96. $(-6x^{2n+4})(5x^{3n-4})$

97. $(-3x^{5n-2})(-4x^{2n+2})$

Respuestas del examen de conceptos

1. Cierto **2.** Falso **3.** Falso **4.** Falso **5.** Falso **6.** Cierto **7.** Cierto **8.** Cierto **9.** Falso **10.** Cierto

5.3 Multiplicación de polinomios

OBJETIVOS

1. Usar la propiedad distributiva para encontrar el producto de dos polinomios
2. Usar el patrón abreviado para encontrar el producto de dos binomios
3. Usar el patrón para encontrar el cuadrado de un binomio
4. Usar el patrón para encontrar el producto de $(a + b)(a = b)$

En general, para pasar de multiplicar un monomio por un polinomio a multiplicar dos polinomios, se requiere el uso de la propiedad distributiva. Considere algunos ejemplos:

Ejemplo de salón de clases
Hallar el producto de $(x + 2)$ y $(y + 6)$.

EJEMPLO 1 Hallar el producto de $(x + 3)$ y $(y + 4)$.

Solución

$$\begin{aligned}(x + 3)(y + 4) &= x(y + 4) + 3(y + 4)\\ &= x(y) + x(4) + 3(y) + 3(4)\\ &= xy + 4x + 3y + 12\end{aligned}$$

Notar que cada término del primer polinomio se multiplica por cada término del segundo polinomio.

Ejemplo de salón de clases
Hallar el producto de $(a - 3)$ y $(b - 4)$.

EJEMPLO 2 Hallar el producto de $(x - 2)$ y $(y + 5)$.

Solución

$$\begin{aligned}(x - 2)(y + 5) &= x(y + 5) - 2(y + 5)\\ &= x(y) + x(5) - 2(y) - 2(5)\\ &= xy + 5x - 2y - 10\end{aligned}$$

Usualmente, multiplicar polinomios producirá términos similares que pueden combinarse para simplificar el polinomio resultante.

Ejemplo de salón de clases
Multiplicar $(x + 5)(x + 8)$.

EJEMPLO 3 Multiplicar $(x + 3)(x + 2)$.

Solución

$$\begin{aligned}(x + 3)(x + 2) &= x(x + 2) + 3(x + 2)\\ &= x^2 + 2x + 3x + 6\\ &= x^2 + 5x + 6 \qquad \text{Combinar términos semejantes}\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Multiplicar $(k + 6)(k - 2)$.

EJEMPLO 4 Multiplicar $(x - 4)(x + 9)$.

Solución

$$\begin{aligned}(x - 4)(x + 9) &= x(x + 9) - 4(x + 9)\\ &= x^2 + 9x - 4x - 36\\ &= x^2 + 5x - 36 \qquad \text{Combinar términos semejantes}\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Multiplicar $(a + 1)(2a^2 + a + 5)$.

EJEMPLO 5 Multiplicar $(x + 4)(x^2 + 3x + 2)$.

Solución

$$\begin{aligned}(x + 4)(x^2 + 3x + 2) &= x(x^2 + 3x + 2) + 4(x^2 + 3x + 2)\\ &= x^3 + 3x^2 + 2x + 4x^2 + 12x + 8\\ &= x^3 + 7x^2 + 14x + 8\end{aligned}$$

El producto también puede encontrarse usando un formato vertical similar al de la multiplicación de números enteros. Cuando se use un formato vertical, se deben acomodar los términos con los exponentes en orden descendente.

$$\begin{array}{l} x^2 + 3x + 2\\ \underline{x + 4}\\ \underline{x^3 + 3x^2 + 2x}\\ \underline{ + 4x^2 + 12x + 8}\\ x^3 + 7x^2 + 14x + 8\end{array}$$

Ejemplo de salón de clases
Multiplicar $(3m - n)$
$(2m^2 + 4mn - 3n^2)$.

EJEMPLO 6 Multiplicar $(2x - y)(3x^2 - 2xy + 4y^2)$.

Solución

$$\begin{aligned}(2x - y)(3x^2 - 2xy + 4y^2) &= 2x(3x^2 - 2xy + 4y^2) - y(3x^2 - 2xy + 4y^2)\\ &= 6x^3 - 4x^2y + 8xy^2 - 3x^2y + 2xy^2 - 4y^3\\ &= 6x^3 - 7x^2y + 10xy^2 - 4y^3\end{aligned}$$

He aquí un formato vertical para el mismo problema.

$$\begin{array}{l} 3x^2 - 2xy + 4y^2\\ \underline{2x - y}\\ 6x^3 - 4x^2y + 8xy^2\\ \underline{ - 3x^2y + 2xy^2 - 4y^3}\\ 6x^3 - 7x^2y + 10xy^2 - 4y^3\end{array}$$

Tal vez el tipo de problema de multiplicación más frecuentemente usado es el producto de dos binomios. Será de gran ayuda para después si puede volverse eficiente en la multiplicación de binomios sin tener que mostrar todos los pasos intermedios. Esto es bastante fácil de hacer con el *patrón abreviado de tres pasos*, que se demuestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo de salón de clases
Multiplicar $(x + 9)(x + 2)$.

EJEMPLO 7 Multiplicar $(x + 5)(x + 7)$.

Solución

$(x + 5)(x + 7)$

Paso 1	Paso 2	Paso 3
$(x+5)(x+7)$	$(x+5)(x+7)$	$(x+5)(x+7)$
Multiplicar $x \cdot x$	**Multiplicar** $x \cdot 7$ y $5 \cdot x$	**Multiplicar** $5 \cdot 7$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
x^2	$+7x + 5x$	$+35$

Agrupar los términos semejantes da como resultado el producto $x^2 + 12x + 35$.

Ejemplo de salón de clases
Multiplicar $(h + 4)(3h - 7)$.

EJEMPLO 8 Multiplicar $(x - 8)(2x + 3)$.

Solución

$(x - 8)(2x + 3)$

Paso 1	Paso 2	Paso 3
$(x-8)(2x+3)$	$(x-8)(2x+3)$	$(x-8)(2x+3)$
Multiplicar $x \cdot 2x$	**Multiplicar** $3 \cdot x$ y $-8 \cdot 2x$	**Multiplicar** $-8 \cdot 3$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$2x^2$	$+3x - 16x$	-24

Agrupar los términos semejantes da como resultado el producto $2x^2 - 13x - 24$.

Ejemplo de salón de clases
Multiplicar $(5n + 1)(4n - 3)$.

EJEMPLO 9 Multiplicar $(3x + 2)(2x - 5)$.

Solución

$(3x + 2)(2x - 5)$

Paso 1	Paso 2	Paso 3
$(3x+2)(2x-5)$	$(3x+2)(2x-5)$	$(3x+2)(2x-5)$
Multiplicar $3x \cdot 2x$	**Multiplicar** $3x \cdot (-5)$ y $2 \cdot 2x$	**Multiplicar** $2 \cdot (-5)$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$6x^2$	$-15x + 4x$	-10

Agrupar los términos semejantes da como resultado el producto $6x^2 - 11x - 10$.

El recurso mnemotécnico FOIL (por sus siglas en inglés) suele usarse para recordar el patrón abreviado de tres pasos para multiplicar binomios. Las letras FOIL representan Primero (First), Externo (Outside), Interno (Inside) y Último (Last). Si mira los ejemplos 7 al 9, verá que el paso 1 es hallar el producto de los primeros términos de cada binomio; el paso 2 es hallar el producto de los términos exteriores e interiores; y el paso 3 es encontrar el producto de los últimos términos en cada binomio.

Ahora vea si puede usar el patrón para encontrar estos productos:

$(x + 3)(x + 7)$

$(3x + 1)(2x + 5)$

$(x - 2)(x - 3)$

$(4x + 5)(x - 2)$

Sus respuestas deben ser $x^2 + 10x + 21$; $6x^2 + 17x + 5$; $x^2 - 5x + 6$; y $4x^2 - 3x - 10$.

Tenga en mente que este patrón abreviado sólo se aplica para encontrar el producto de dos binomios. Para otras situaciones, como encontrar el producto de un binomio y un trinomio, se sugiere mostrar los pasos intermedios:

$$\begin{aligned}(x + 3)(x^2 + 6x - 7) &= x(x^2) + x(6x) - x(7) + 3(x^2) + 3(6x) - 3(7)\\ &= x^3 + 6x^2 - 7x + 3x^2 + 18x - 21\\ &= x^3 + 9x^2 + 11x - 21\end{aligned}$$

Tal vez pueda omitir el primer paso y acortar la fórmula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(x - 4)(x^2 - 5x - 6) &= x^3 - 5x^2 - 6x - 4x^2 + 20x + 24\\ &= x^3 - 9x^2 + 14x + 24\end{aligned}$$

Recuerde que está multiplicando cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio y combinando los términos similares.

Es posible usar exponentes para indicar multiplicación repetida de polinomios. Por ejemplo, se puede escribir $(x + 4)(x + 4)$ como $(x + 4)^2$. Para elevar al cuadrado un binomio, simplemente escríbalo como el producto de dos binomios iguales y aplique el patrón abreviado.

$(x + 4)^2 = (x + 4)(x + 4) = x^2 + 8x + 16$

$(x - 5)^2 = (x - 5)(x - 5) = x^2 - 10x + 25$

$(2x + 3)^2 = (2x + 3)(2x + 3) = 4x^2 + 12x + 9$

Cuando eleve binomios al cuadrado, tenga cuidado de no olvidar el término intermedio. Es decir, $(x + 3)^2 \neq x^2 + 3^2$, en lugar de $(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3) = x^2 + 6x + 9$.

El siguiente ejemplo sugiere un formato para cuando un binomio se eleva al cubo.

$$\begin{aligned}(x + 4)^3 &= (x + 4)(x + 4)(x + 4)\\ &= (x + 4)(x^2 + 8x + 16)\\ &= x(x^2 + 8x + 16) + 4(x^2 + 8x + 16)\\ &= x^3 + 8x^2 + 16x + 4x^2 + 32x + 64\\ &= x^3 + 12x^2 + 48x + 64\end{aligned}$$

Patrones especiales de productos

Cuando se multiplican binomios hay algunos patrones especiales que debe reconocer. Puede usar estos patrones para encontrar productos, y más adelante se usarán algunos de ellos cuando se factoricen polinomios. Se planteará cada patrón en términos generales, seguidos de ejemplos para ilustrar el uso de cada patrón.

PATRÓN

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

Cuadrado del primer término del binommio	+	Doble producto de los dos términos del binomio	+	Cuadrado del segundo término del binomio

Ejemplos

$$(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$$
$$(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$$
$$(5a + 7b)^2 = 25a^2 + 70ab + 49b^2$$

PATRÓN

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$

Cuadrado del primer término del binomio	−	Doble del producto de los dos términos del binomio	+	Cuadrado del segundo término del binomio

Ejemplos

$$(x - 8)^2 = x^2 - 16x + 64$$
$$(3x - 4y)^2 = 9x^2 - 24xy + 16y^2$$
$$(4a - 9b)^2 = 16a^2 - 72ab + 81b^2$$

PATRÓN

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Cuadrado del primer término del binomio	−	Cuadrado del segundo término del binomio

Ejemplos

$$(x + 7)(x - 7) = x^2 - 49$$
$$(2x + y)(2x - y) = 4x^2 - y^2$$
$$(3a - 2b)(3a + 2b) = 9a^2 - 4b^2$$

Como podría esperar, hay interpretaciones geométricas para muchos de los conceptos algebraicos presentados en esta sección. Se le dará la oportunidad de hacer algunas de estas conexiones entre álgebra y geometría en el siguiente conjunto de problemas. Esta sección concluirá con un problema que le permite usar algo de álgebra y geometría.

Ejemplo de salón de clases
Una pieza cuadrada de cartón tiene un lado que mide 20 pulgadas. De cada esquina, se recorta una pieza cuadrada de x pulgadas de un lado. Las tapas después se voltean para formar una caja abierta. Encontrar los polinomios que representan el volumen y él área de la superficie exterior de la caja.

EJEMPLO 10

Una pieza rectangular de metal mide 16 pulgadas de largo y 12 de ancho, como se muestra en la figura 5.12. De cada esquina, se recorta una pieza cuadrada de x pulgadas. Las tapas se voltean para formar una caja abierta. Encontrar polinomios que representen el volumen y el área de la superficie exterior de la caja.

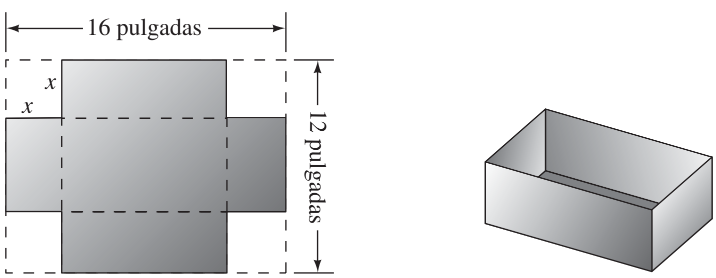


Figura 5.12

Solución

El largo de la caja es $16 - 2x$, el ancho es $12 - 2x$, y la altura es x. De la fórmula de volumen $V = lwh$, el polinomio $(16 - 2x)(12 - 2x)(x)$, el cual se simplifica a $4x^3 - 56x^2 + 192x$, representa el volumen.

El área de la superficie exterior de la caja es el área original de la pieza de metal, menos las cuatro esquinas que se recortaron. Por ende, el polinomio $16(12) - 4x^2$ o $192 - 4x^2$ representa el área exterior de la superficie de la caja.

Examen de conceptos 5.3

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. La expresión algebraica $(x + y)^2$ se llama el cuadrado de un binomio.
2. La expresión algebraica $(x + y)(x + 2xy + y)$ se llama el producto de dos binomios.
3. El recurso mnemotécnico FOIL representa las palabras primero (first), externo (outside), interno (inside) y último (last).
4. $(a + 2)^2 = a^2 + 4$
5. $(y + 3)(y - 3) = y^2 + 9$
6. $(-x + y)(x - y) = -x^2 - y^2$
7. $(4x - 5)(5 - 4x) = -16x^2 + 40x - 25$
8. $(x^2 - x - 1)(x^2 + x + 1) = x^4 - x^2 - 2x - 1$
9. $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$
10. $(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Conjunto de problemas 5.3

Para los problemas 1-10, encontrar los productos indicados aplicando la propiedad distributiva; por ejemplo:

$$\begin{aligned}(x + 1)(y + 5) &= x(y) + x(5) + 1(y) + 1(5)\\ &= xy + 5x + y + 5\end{aligned}$$

(Objetivo 1)

1. $(x + 2)(y + 3)$
2. $(x + 3)(y + 6)$
3. $(x - 4)(y + 1)$
4. $(x - 5)(y + 7)$
5. $(x - 5)(y - 6)$
6. $(x - 7)(y - 9)$
7. $(x + 2)(y + z + 1)$
8. $(x + 4)(y - z + 4)$
9. $(2x + 3)(3y + 1)$
10. $(3x - 2)(2y - 5)$

Para los problemas 11-36, encontrar los productos indicados aplicando la propiedad distributiva y combinando términos similares. Use el siguiente formato para mostrar su trabajo:

$$\begin{aligned}(x + 3)(x + 8) &= x(x) + x(8) + 3(x) + 3(8)\\ &= x^2 + 8x + 3x + 24\\ &= x^2 + 11x + 24\end{aligned}$$

(Objetivo 1)

11. $(x + 3)(x + 7)$
12. $(x + 4)(x + 2)$
13. $(x + 8)(x - 3)$
14. $(x + 9)(x - 6)$
15. $(x - 7)(x + 1)$
16. $(x - 10)(x + 8)$
17. $(n - 4)(n - 6)$
18. $(n - 3)(n - 7)$
19. $(3n + 1)(n + 6)$
20. $(4n + 3)(n + 6)$
21. $(5x - 2)(3x + 7)$
22. $(3x - 4)(7x + 1)$
23. $(x + 3)(x^2 + 4x + 9)$
24. $(x + 2)(x^2 + 6x + 2)$
25. $(x + 4)(x^2 - x - 6)$
26. $(x + 5)(x^2 - 2x - 7)$
27. $(x - 5)(2x^2 + 3x - 7)$
28. $(x - 4)(3x^2 + 4x - 6)$
29. $(2a - 1)(4a^2 - 5a + 9)$
30. $(3a - 2)(2a^2 - 3a - 5)$
31. $(3a + 5)(a^2 - a - 1)$
32. $(5a + 2)(a^2 + a - 3)$
33. $(x^2 + 2x + 3)(x^2 + 5x + 4)$
34. $(x^2 - 3x + 4)(x^2 + 5x - 2)$
35. $(x^2 - 6x - 7)(x^2 + 3x - 9)$
36. $(x^2 - 5x - 4)(x^2 + 7x - 8)$

Para los problemas 37-80, encontrar los productos indicados usando el patrón abreviado de tres pasos para multiplicar binomios. **(Objetivo 2)**

37. $(x + 2)(x + 9)$
38. $(x + 3)(x + 8)$
39. $(x + 6)(x - 2)$
40. $(x + 8)(x - 6)$
41. $(x + 3)(x - 11)$
42. $(x + 4)(x - 10)$
43. $(n - 4)(n - 3)$
44. $(n - 5)(n - 9)$
45. $(n + 6)(n + 12)$
46. $(n + 8)(n + 13)$
47. $(y + 3)(y - 7)$
48. $(y + 2)(y - 12)$
49. $(y - 7)(y - 12)$
50. $(y - 4)(y - 13)$
51. $(x - 5)(x + 7)$
52. $(x - 1)(x + 9)$
53. $(x - 14)(x + 8)$
54. $(x - 15)(x + 6)$
55. $(a + 10)(a - 9)$
56. $(a + 7)(a - 6)$
57. $(2a + 1)(a + 6)$
58. $(3a + 2)(a + 4)$
59. $(5x - 2)(x + 7)$
60. $(2x - 3)(x + 8)$
61. $(3x - 7)(2x + 1)$
62. $(5x - 6)(4x + 3)$
63. $(4a + 3)(3a - 4)$
64. $(5a + 4)(4a - 5)$
65. $(6n - 5)(2n - 3)$
66. $(4n - 3)(6n - 7)$
67. $(7x - 4)(2x + 3)$
68. $(8x - 5)(3x + 7)$
69. $(5 - x)(9 - 2x)$
70. $(4 - 3x)(2 + x)$
71. $(-2x + 3)(4x - 5)$
72. $(-3x + 1)(9x - 2)$
73. $(-3x - 1)(3x - 4)$
74. $(-2x - 5)(4x + 1)$
75. $(8n + 3)(9n - 4)$
76. $(6n + 5)(9n - 7)$
77. $(3 - 2x)(9 - x)$
78. $(5 - 4x)(4 - 5x)$
79. $(-4x + 3)(-5x - 2)$
80. $(-2x + 7)(-7x - 3)$

81. John, quien aún no domina elevar binomios al cuadrado, entrega su tarea como se muestra abajo. Identificar cualquier error en el trabajo de John y después escriba su respuesta para el problema.

(a) $(x + 4)^2 = x^2 + 16$
(b) $(x - 5)^2 = x^2 - 5x + 25$
(c) $(x - 6)^2 = x^2 - 12x - 36$
(d) $(3x + 2)^2 = 3x^2 + 12x + 4$
(e) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 2$
(f) $(x - 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

Para los problemas 82-112, usar uno de los patrones apropiados $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, o $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ para encontrar los productos indicados. **(Objetivos 3 y 4)**

82. $(x + 3)^2$
83. $(x + 7)^2$
84. $(x + 9)^2$
85. $(5x - 2)(5x + 2)$
86. $(6x + 1)(6x - 1)$
87. $(x - 1)^2$
88. $(x - 4)^2$
89. $(3x + 7)^2$
90. $(2x + 9)^2$
91. $(2x - 3)^2$
92. $(4x - 5)^2$
93. $(2x + 3y)(2x - 3y)$
94. $(3a - b)(3a + b)$
95. $(1 - 5n)^2$
96. $(2 - 3n)^2$
97. $(3x + 4y)^2$
98. $(2x + 5y)^2$
99. $(3 + 4y)^2$
100. $(7 + 6y)^2$
101. $(1 + 7n)(1 - 7n)$
102. $(2 + 9n)(2 - 9n)$
103. $(4a - 7b)^2$
104. $(6a - b)^2$
105. $(x + 8y)^2$
106. $(x + 6y)^2$
107. $(5x - 11y)(5x + 11y)$
108. $(7x - 9y)(7x + 9y)$
109. $x(8x + 1)(8x - 1)$
110. $3x(5x + 7)(5x - 7)$
111. $-2x(4x + y)(4x - y)$
112. $-4x(2 - 3x)(2 + 3x)$

Para los problemas 113-120, encontrar los productos indicados. No olvide que $(x + 2)^3$ significa $(x + 2)(x + 2)(x + 2)$.

113. $(x + 2)^3$
114. $(x + 4)^3$
115. $(x - 3)^3$
116. $(x - 1)^3$
117. $(2n + 1)^3$
118. $(3n + 2)^3$
119. $(3n - 2)^3$
120. $(4n - 3)^3$

121. Explicar cómo la figura 5.13 puede usarse para demostrar geométricamente $(x + 3)(x + 5) = x^2 + 8x + 15$.

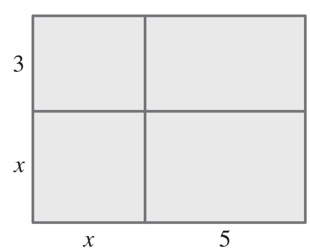


Figura 5.13

122. Explicar cómo la figura 5.14 puede ser usada para demostrar geométricamente que $(x + 5)(x - 3) = x^2 + 2x - 15$.

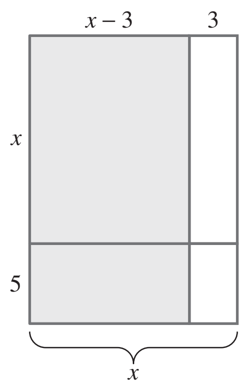


Figura 5.14

123. Una pieza cuadrada de cartón mide 14 pulgadas de cada lado. De cada esquina se recorta una pieza cuadrada de x pulgadas de lado como se muestra en la figura 5.15. Las tapas se voltean para formar una caja abierta. Encontrar los polinomios que representan el volumen y el área de la superficie exterior de la caja.

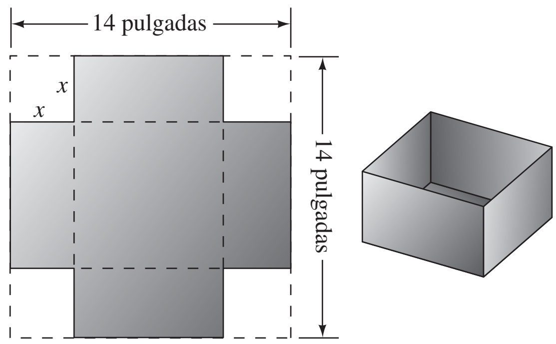


Figura 5.15

Pensamientos en palabras

124. Describir el proceso para multiplicar dos polinomios.

125. Ilustrar tantos usos de la propiedad distributiva como pueda.

126. Determinar el número de términos en el producto de $(x + y + z)$ y $(a + b + c)$ sin hacer la multiplicación. Explique cómo llegó a su respuesta.

Más investigación

127. Los siguientes dos patrones resultan de elevar binomios al cubo:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Use estos patrones para rehacer los problemas 113-120.

128. Encontrar un patrón para la expansión de $(a + b)^4$. Después usar el patrón para expandir $(x + 2)^4$, $(x + 3)^4$ y $(2x + 1)^4$.

129. Se pueden usar algunos de estos patrones de productos para hacer cálculos aritméticos de manera mental. Por ejemplo, use el patrón $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ para calcular mentalmente 31^2. Su proceso mental debería ser $31^2 = (30 + 1)^2 = 30^2 + 2(30)(1) + 1^2 = 961$. Calcule cada uno de los siguientes números mentalmente y después compruebe sus respuestas.

(a) 21^2 **(b)** 41^2 **(c)** 71^2

(d) 32^2 **(e)** 52^2 **(f)** 82^2

130. Usar el patrón $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ para calcular cada uno de los siguientes números mentalmente y después compruebe sus respuestas.

(a) 19^2 **(b)** 29^2 **(c)** 49^2

(d) 79^2 **(e)** 38^2 **(f)** 58^2

131. Todo número entero con 5 en las unidades puede representarse con la expresión $10x + 5$, donde x es un número entero. Por ejemplo, $35 = 10(3) + 5$ y $145 = 10(14) + 5$. Ahora observe el siguiente patrón para elevar al cuadrado tal número.

$$\begin{aligned}(10x + 5)^2 &= 100x^2 + 100x + 25 \\ &= \boxed{100x(x + 1) + 25}\end{aligned}$$

El patrón dentro de la línea punteada puede plantearse como “sume 25 al producto de x, $x + 1$ y 100”. Así, para calcular mentalmente 35^2, puede pensar $35^2 = 3(4)(100) + 25 = 1225$. Calcule cada uno de los siguientes números mentalmente y después compruebe sus respuestas.

(a) 15^2 **(b)** 25^2 **(c)** 45^2

(d) 55^2 **(e)** 65^2 **(f)** 75^2

(g) 85^2 **(h)** 95^2 **(i)** 105^2

Respuestas del examen de conceptos

1. Cierto **2.** Falso **3.** Cierto **4.** Falso **5.** Falso **6.** Falso **7.** Cierto **8.** Cierto **9.** Cierto **10.** Cierto

5.4 División de monomios

OBJETIVOS

1 Aplicar las propiedades de exponentes para dividir monomios

2 Dividir polinomios entre monomios

Para desarrollar un proceso efectivo para dividir entre monomios, debe apoyarse en otra propiedad de los exponentes. Esta propiedad es también la consecuencia directa de la definición de exponente y se ilustra como los siguientes ejemplos.

$$\frac{x^5}{x^2} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot x \cdot x}{\cancel{x} \cdot \cancel{x}} = x^3$$

$$\frac{a^4}{a^3} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a$$

$$\frac{y^7}{y^3} = \frac{\cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y}{\cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y}} = y^4$$

$$\frac{x^4}{x^4} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}} = 1$$

$$\frac{y^3}{y^3} = \frac{\cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y}}{\cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y}} = 1$$

Propiedad 5.4

Si b es cualquier número real distinto a cero, y n y m son positivos, entonces

1. $\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$, cuando $n > m$

2. $\frac{b^n}{b^m} = 1$, cuando $n = m$

(La situación $n < m$ se discutirá en una sección más adelante).

Aplicar la propiedad 5.4 a los ejemplos previos da los siguientes resultados:

$$\frac{x^5}{x^2} = x^{5-2} = x^3$$

$$\frac{a^4}{a^3} = a^{4-3} = a^1$$ Usualmente se escribe como a

$$\frac{y^7}{y^3} = y^{7-3} = y^4$$

$$\frac{x^4}{x^4} = 1$$

$$\frac{y^3}{y^3} = 1$$

La propiedad 5.4, junto con sus conocimientos en la división de números reales, proporciona la base para dividir un monomio entre otro monomio. Considere los siguientes ejemplos.

$$\frac{16x^5}{2x^3} = 8x^{5-3} = 8x^2 \qquad \frac{-81a^{12}}{-9a^4} = 9a^{12-4} = 9a^8$$

$$\frac{-35x^9}{5x^4} = -7x^{9-4} = -7x^5 \qquad \frac{45x^4}{9x^4} = 5 \qquad \frac{x^4}{x^4} = 1$$

$$\frac{56y^6}{-7y^2} = -8y^{6-2} = -8y^4 \qquad \frac{54x^3y^7}{-6xy^5} = -9x^{3-1}y^{7-5} = -9x^2y^2$$

Recuerde que $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$; esta propiedad sirve como base para dividir un polinomio entre un monomio. Considere estos ejemplos.

$$\frac{25x^3 + 10x^2}{5x} = \frac{25x^3}{5x} + \frac{10x^2}{5x} = 5x^2 + 2x$$

$$\frac{-35x^8 - 28x^6}{7x^3} = \frac{-35x^8}{7x^3} - \frac{28x^6}{7x^3} = -5x^5 - 4x^3 \qquad \frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$$

Para dividir un polinomio entre un monomio, simplemente debe dividir cada término del polinomio entre el monomio. Aquí hay algunos ejemplos adicionales.

$$\frac{12x^3y^2 - 14x^2y^5}{-2xy} = \frac{12x^3y^2}{-2xy} - \frac{14x^2y^5}{-2xy} = -6x^2y + 7xy^4$$

$$\frac{48ab^5 + 64a^2b}{-16ab} = \frac{48ab^5}{-16ab} + \frac{64a^2b}{-16ab} = -3b^4 - 4a$$

$$\frac{33x^6 - 24x^5 - 18x^4}{3x} = \frac{33x^6}{3x} - \frac{24x^5}{3x} - \frac{18x^4}{3x}$$

$$= 11x^5 - 8x^4 - 6x^3$$

Como con muchas habilidades, una vez que se sienta cómodo con el proceso, puede querer realizar algunos de los pasos mentalmente. Su trabajo podría verse como el siguiente formato.

$$\frac{24x^4y^5 - 56x^3y^9}{8x^2y^3} = 3x^2y^2 - 7xy^6$$

$$\frac{13a^2b - 12ab^2}{-ab} = -13a + 12b$$

Examen de conceptos 5.4

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. Para dividir factores con la misma base, sume los exponentes.

2. $\frac{10a^6}{2a^2} = 8a^4$

3. $\frac{y^8}{y^4} = y^2$

4. $\frac{6x^5 + 3x}{3x} = 2x^4$

5. $\frac{x^3}{x^3} = 0$

6. $\dfrac{x^4}{-x^4} = -1$

7. $\dfrac{-x^6}{x^6} = -1$

8. $\dfrac{24x^6}{4x^3} = 6x^2$

9. $\dfrac{24x^6 - 18x^4 + 12x^2}{2x^2} = 12x^4 - 9x^2 + 6$

10. $\dfrac{-30x^5 + 20x^4 - 10x^3}{-5x^2} = 6x^3 - 4x^2 + 2x$

Conjunto de problemas 5.4

Para los problemas 1-24, dividir los monomios. **(Objetivo 1)**

1. $\dfrac{x^{10}}{x^2}$
2. $\dfrac{x^{12}}{x^5}$
3. $\dfrac{4x^3}{2x}$
4. $\dfrac{8x^5}{4x^3}$
5. $\dfrac{-16n^6}{2n^2}$
6. $\dfrac{-54n^8}{6n^4}$
7. $\dfrac{72x^3}{-9x^3}$
8. $\dfrac{84x^5}{-7x^5}$
9. $\dfrac{65x^2y^3}{5xy}$
10. $\dfrac{70x^3y^4}{5x^2y}$
11. $\dfrac{-91a^4b^6}{-13a^3b^4}$
12. $\dfrac{-72a^5b^4}{-12ab^2}$
13. $\dfrac{18x^2y^6}{xy^2}$
14. $\dfrac{24x^3y^4}{x^2y^2}$
15. $\dfrac{32x^6y^2}{-x}$
16. $\dfrac{54x^5y^3}{-y^2}$
17. $\dfrac{-96x^5y^7}{12y^3}$
18. $\dfrac{-84x^4y^9}{14x^4}$
19. $\dfrac{-ab}{ab}$
20. $\dfrac{6ab}{-ab}$
21. $\dfrac{56a^2b^3c^5}{4abc}$
22. $\dfrac{60a^3b^2c}{15a^2c}$
23. $\dfrac{-80xy^2z^6}{-5xyz^2}$
24. $\dfrac{-90x^3y^2z^8}{-6xy^2z^4}$

Para los problemas 25-50, realice cada división de polinomios entre monomios. **(Objetivo 2)**

25. $\dfrac{8x^4 + 12x^5}{2x^2}$
26. $\dfrac{12x^3 + 16x^6}{4x}$
27. $\dfrac{9x^6 - 24x^4}{3x^3}$
28. $\dfrac{35x^8 - 45x^6}{5x^4}$
29. $\dfrac{-28n^5 + 36n^2}{4n^2}$
30. $\dfrac{-42n^6 + 54n^4}{6n^4}$
31. $\dfrac{35x^6 - 56x^5 - 84x^3}{7x^2}$
32. $\dfrac{27x^7 - 36x^5 - 45x^3}{3x}$
33. $\dfrac{-24n^8 + 48n^5 - 78n^3}{-6n^3}$
34. $\dfrac{-56n^9 + 84n^6 - 91n^2}{-7n^2}$
35. $\dfrac{-60a^7 - 96a^3}{-12a}$
36. $\dfrac{-65a^8 - 78a^4}{-13a^2}$
37. $\dfrac{27x^2y^4 - 45xy^4}{-9xy^3}$
38. $\dfrac{-40x^4y^7 + 64x^5y^8}{-8x^3y^4}$
39. $\dfrac{48a^2b^2 + 60a^3b^4}{-6ab}$
40. $\dfrac{45a^3b^4 - 63a^2b^6}{-9ab^2}$
41. $\dfrac{12a^2b^2c^2 - 52a^2b^3c^5}{-4a^2bc}$
42. $\dfrac{48a^3b^2c + 72a^2b^4c^5}{-12ab^2c}$
43. $\dfrac{9x^2y^3 - 12x^3y^4}{-xy}$
44. $\dfrac{-15x^3y + 27x^2y^4}{xy}$
45. $\dfrac{-42x^6 - 70x^4 + 98x^2}{14x^2}$
46. $\dfrac{-48x^8 - 80x^6 + 96x^4}{16x^4}$
47. $\dfrac{15a^3b - 35a^2b - 65ab^2}{-5ab}$
48. $\dfrac{-24a^4b^2 + 36a^3b - 48a^2b}{-6ab}$
49. $\dfrac{-xy + 5x^2y^3 - 7x^2y^6}{xy}$
50. $\dfrac{-9x^2y^3 - xy + 14xy^4}{-xy}$

Pensamientos en palabras

51. ¿Cómo le explicaría a alguien por qué el cociente de x^8 y x^2 es x^6 y no x^4?

52. Su amigo está teniendo dificultades con problemas como $\dfrac{12x^2y}{xy}$ y $\dfrac{36x^3y^2}{-xy}$ para los cuales no parece haber un coeficiente numérico en el denominador. ¿Qué puede decirle para ayudarle?

Respuestas del examen de conceptos

1. Falso **2.** Falso **3.** Falso **4.** Falso **5.** Falso **6.** Cierto **7.** Cierto **8.** Falso **9.** Cierto **10.** Cierto

5.5 División de binomios

OBJETIVO **1** Dividir polinomios entre binomios

Tal vez la mejor manera para explicar el proceso de dividir un polinomio entre un binomio es trabajar con algunos ejemplos y describir paso a paso el procedimiento conforme se realiza.

Ejemplo de salón de clases
Dividir $x^2 - x - 20$ entre $x + 4$.

EJEMPLO 1 Dividir $x^2 + 5x + 6$ entre $x + 2$.

Solución

Paso 1 Use el formato de división larga tradicional de la aritmética, y ordene ambos dividendos y el divisor en potencias descendentes de la variable.

$$x + 2\overline{)x^2 + 5x + 6}$$

Paso 2 Hallar el primer término del cociente dividiendo el primer término del dividendo entre el primer término del divisor.

$$\begin{array}{r} x \\ x + 2\overline{)x^2 + 5x + 6} \end{array} \qquad \frac{x^2}{x} = x$$

Paso 3 Multiplicar todo el divisor entre el término del cociente encontrado en el paso 2, y coloque este producto para ser restado del dividendo.

$$\begin{array}{r} x \\ x + 2\overline{)x^2 + 5x + 6} \\ \underline{x^2 + 2x} \end{array} \qquad x(x + 2) = x^2 + 2x$$

Paso 4 Sumar el opuesto de $x^2 + 2x$, es decir sumar $-x^2 - 2x$.

¡Recuerde sumar el opuesto!

$$\begin{array}{r} x \\ x + 2\overline{)x^2 + 5x + 6} \\ \underline{x^2 + 2x} \\ x + 6 \end{array}$$

Paso 5 Repetir el proceso comenzando del paso 2; use el polinomio que resultó de la resta en el paso 4 como nuevo dividendo.

$$\begin{array}{r} x + 3 \\ x + 2\overline{)x^2 + 5x + 6} \\ \underline{x^2 + 2x} \\ x + 6 \\ \underline{x + 6} \end{array} \qquad \frac{3x}{x} = 3 \qquad 3(x + 2) = 3x + 6$$

Así, $(x^2 + 5x + 6) \div (x + 2) = x + 3$, que puede comprobarse multiplicando $(x + 2)$ y $(x + 3)$.

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$$

Una división como $(x^2 + 5x + 6) \div (x + 2)$ también puede escribirse como $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$. Usando este formato, se puede expresar el resultado final del ejemplo 1 como $\dfrac{x^2 + 5\quad + 6}{x + 2} = x + 3$. (Técnicamente, la restricción $x \neq -2$ debe hacerse para evitar la división entre cero).

En general, para comprobar una divisón, se puede multiplicar el divisor por el cociente y sumar el residuo, que puede representarse como

Dividendo = (Divisor) (Cociente) + Residuo

A veces, esl residuo se expresa como una parte fraccionaria del divisor. La relación se vuelve

$$\frac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}} = \text{Cociente} + \frac{\text{Residuo}}{\text{Divisor}}$$

Ejemplo de salón de clases
Dividir $3v^2 - 19v - 14$ entre $v - 7$.

EJEMPLO 2

Dividir $2x^2 - 3x - 20$ entre $x - 4$.

Solución

Paso 1 $x - 4\overline{)2x^2 - 3x - 20}$

Paso 2
$$\begin{array}{r} 2x\phantom{{}-3x-20} \\ x - 4\overline{)2x^2 - 3x - 20} \end{array}$$
$\dfrac{2x^2}{x} = 2x$

Paso 3
$$\begin{array}{r} 2x\phantom{{}-3x-20} \\ x - 4\overline{)2x^2 - 3x - 20} \\ \underline{2x^2 - 8x}\phantom{{}-20} \end{array}$$
$2x(x - 4) = 2x^2 - 8x$

Paso 4
$$\begin{array}{r} 2x\phantom{{}-3x-20} \\ x - 4\overline{)2x^2 - 3x - 20} \\ \underline{2x^2 - 8x}\phantom{{}-20} \\ x - 20 \end{array}$$

Paso 5
$$\begin{array}{r} 2x + 5\phantom{{}-20} \\ x - 4\overline{)2x^2 - 3x - 20} \\ \underline{2x^2 - 8x}\phantom{{}-20} \\ 5x - 20 \\ \underline{5x - 20} \end{array}$$
$\dfrac{5x}{x} = 5$

$5(x - 4) = 5x - 20$

✔ Verificación

$(x - 4)(2x + 5) = 2x^2 - 3x - 20$

Por ende, $\dfrac{2x^2 - 3x - 20}{x - 4} = 2x + 5$.

Ahora, continúe pensando en términos del proceso de división paso a paso, pero organice su trabajo en el formato tradicional de división larga.

Ejemplo de salón de clases
Dividir $10b^2 + 3b - 4$ entre $2b - 1$.

EJEMPLO 3

Dividir $12x^2 + x - 6$ entre $3x - 2$.

Solución

$$\begin{array}{r} 4x + 3\phantom{{}-6} \\ 3x - 2\overline{)12x^2 + x - 6} \\ \underline{12x^2 - 8x}\phantom{{}-6} \\ 9x - 6 \\ \underline{9x - 6} \end{array}$$

✔ **Verificación**

$$(3x - 2)(4x + 3) = 12x^2 + x - 6$$

Por ende, $\dfrac{12x^2 + x - 6}{3x - 2} = 4x + 3.$

Cada uno de los siguientes ejemplos ilustra otro aspecto del proceso de división. Estúdielos cuidadosamente; luego deberá ser capaz de resolver los ejercicios del siguiente conjunto de problemas.

Ejemplo de salón de clases
Realizar la división $(3x^2 - 8x - 25) \div (x - 5)$.

EJEMPLO 4 Realizar la división $(7x^2 - 3x - 4) \div (x - 2)$.

Solución

$$\begin{array}{rl}
 & 7x \;+ 11 \\
x - 2 \,\big) & \overline{7x^2 - \;\; 3x - 4} \\
 & \underline{7x^2 - 14x} \\
 & \qquad\;\; x - \;\;4 \\
 & \qquad\;\; \underline{x - 22} \\
 & \qquad\qquad 18 \quad \longleftarrow \text{El residuo de 18}
\end{array}$$

Por ende, $\dfrac{7x^2 - 3x - 4}{x - 2} = 7x + 11 + \dfrac{18}{x - 2}.$

✔ **Verificación**

Justo como en la aritmética, comprobamos sumando el residuo al producto del divisor y el cociente.

$$\begin{aligned}
(x - 2)(7x + 11) + 18 &\stackrel{?}{=} 7x^2 - 3x - 4 \\
7x^2 - 3x - 22 + 18 &\stackrel{?}{=} 7x^2 - 3x - 4 \\
7x^2 - 3x - 4 &= 7x^2 - 3x - 4
\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Realizar la división $\dfrac{y^3 + 1}{y + 1}$.

EJEMPLO 5 Realizar la división $\dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$.

Solución

$$\begin{array}{rl}
 & x^2 + 2x \;+ 4 \\
x - 2 \,\big) & \overline{x^3 + 0x^2 + 0x - 8} \quad \longleftarrow \text{Note que se insertan términos de } x^2 \text{ y } x \text{ con coeficientes distintos a cero.} \\
 & \underline{x^3 - 2x^2} \\
 & \qquad x^2 + 0x - 8 \\
 & \qquad \underline{x^2 - 4x} \\
 & \qquad\qquad\; x - 8 \\
 & \qquad\qquad\; \underline{x - 8}
\end{array}$$

Por ende, $\dfrac{x^3 - 8}{x - 2} = x^2 + 2x + 4.$

✔ **Verificación**

$$\begin{aligned}
(x - 2)(x^2 + 2x + 4) &\stackrel{?}{=} x^3 - 8 \\
x^3 + 2x^2 + 4x - 2x^2 - 4x - 8 &\stackrel{?}{=} x^3 - 8 \\
x^3 - 8 &= x^3 - 8
\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases

Realizar la división $\dfrac{3x^3 - 2x^2 + 8}{x - 1}$.

EJEMPLO 6

Realizar la división $\dfrac{2x^3 - 5x - 7}{x - 3}$.

Solución

Querrá que los exponentes estén en orden descendente y que cada potencia descendente tenga su lugar. Así, cuando escriba el problema en formato de división larga, asegúrese de insertar un término de x^2 usando un coeficiente de cero.

$$
\begin{array}{r@{}l}
 & \quad 2x^2 + 6x + 13 \\
x - 3 & \overline{)\,2x^3 + 0x^2 - 5x - 7} \\
 & \underline{\;2x^3 - 6x^2\;} \\
 & \qquad\quad x^2 - 5x \\
 & \qquad\quad \underline{x^2 - 18x} \\
 & \qquad\qquad\quad 13x - 7 \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{13x - 39} \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 32
\end{array}
$$

Por ende, $\dfrac{2x^3 - 5x - 7}{x - 3} = 2x^2 + 6x + 13 + \dfrac{32}{x - 3}$.

✔ **Verificación**

$$(x - 3)(2x^2 + 6x + 13) + 32 \stackrel{?}{=} 2x^3 - 5x - 7$$
$$2x^3 + 6x^2 + 13x - 6x^2 - 18x - 39 + 32 \stackrel{?}{=} 2x^3 - 5x - 7$$
$$2x^3 - 5x - 7 = 2x^3 - 5x - 7$$

Ejemplo de salón de clases

Realizar la división $\dfrac{z^3 - 6z^2 - 29z + 6}{z^2 + 3z}$.

EJEMPLO 7

Realizar la división $\dfrac{x^3 + 5x^2 - 3x - 4}{x^2 + 2x}$.

Solución

$$
\begin{array}{r@{}l}
 & \quad x + 3 \\
x^2 + 2x & \overline{)\,x^3 + 5x^2 - 3x - 4} \\
 & \underline{\;x^3 + 2x^2\;} \\
 & \qquad\quad x^2 - 3x - 4 \\
 & \qquad\quad \underline{x^2 + 6x} \\
 & \qquad\qquad -9x - 4 \quad \longleftarrow \text{Un residuo de } -9x - 4
\end{array}
$$

Se detiene el proceso de división cuando el grado del residuo es menor que el grado del divisor.

Por ende, $\dfrac{x^3 + 5x^2 - 3x - 4}{x^2 + 2x} = x + 3 + \dfrac{-9x - 4}{x^2 + 2x}$.

✔ **Verificación**

$$(x^2 + 2x)(x + 3) + (-9x - 4) \stackrel{?}{=} x^3 + 5x^2 - 3x - 4$$
$$x^3 + 3x^2 + 2x^2 + 6x - 9x - 4 \stackrel{?}{=} x^3 + 5x^2 - 3x - 4$$
$$x^3 + 5x^2 - 3x - 4 = x^3 + 5x^2 - 3x - 4$$

Examen de conceptos 5.5

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. Una división escrita como $(x^2 - x - 6) \div (x - 1)$ podría también escribirse como $\dfrac{x^2 - x - 6}{x - 1}$.

2. La división de $\frac{x^2 + 7x + 12}{x + 3} = x +$ podría comprobarse multiplicando $(x + 4)$ por $(x + 3)$.
3. Para la división $(2x^2 + 5x + 9) \div (2x + 1)$ el residuo es 7. El residuo de la división puede expresarse como $\frac{7}{2x + 1}$.
4. En general, para verificar una división, se puede multiplicar el divisor por el cociente y restar el residuo.
5. Si un término se inserta para guardar el lugar, entonces el coeficiente del término debe ser cero.
6. Cuando se realiza una división, el proceso termina cuando el grado del residuo es menor que el grado del divisor.
7. El residuo de 0 cuando $x^3 - 1$ se divide entre $x - 1$.
8. El residuo de 0 cuando $x^3 + 1$ se divide entre $x + 1$.
9. El residuo de 0 cuando $x^3 - 1$ se divide entre $x + 1$.
10. El residuo de 0 cuando $x^3 + 1$ se divide entre $x - 1$.

Conjunto de problemas 5.5

Para los problemas 1-40, realizar las divisiones. (Objetivo 1)

1. $(x^2 + 16x + 48) \div (x + 4)$
2. $(x^2 + 15x + 54) \div (x + 6)$
3. $(x^2 - 5x - 14) \div (x - 7)$
4. $(x^2 + 8x - 65) \div (x - 5)$
5. $(x^2 + 11x + 28) \div (x + 3)$
6. $(x^2 + 11x + 15) \div (x + 2)$
7. $(x^2 - 4x - 39) \div (x - 8)$
8. $(x^2 - 9x - 30) \div (x - 12)$
9. $(5n^2 - n - 4) \div (n - 1)$
10. $(7n^2 - 61n - 90) \div (n - 10)$
11. $(8y^2 + 53y - 19) \div (y + 7)$
12. $(6y^2 + 47y - 72) \div (y + 9)$
13. $(20x^2 - 31x - 7) \div (5x + 1)$
14. $(27x^2 + 21x - 20) \div (3x + 4)$
15. $(6x^2 + 25x + 8) \div (2x + 7)$
16. $(12x^2 + 28x + 27) \div (6x + 5)$
17. $(2x^3 - x^2 - 2x - 8) \div (x - 2)$
18. $(3x^3 - 7x^2 - 26x + 24) \div (x - 4)$
19. $(5n^3 + 11n^2 - 15n - 9) \div (n + 3)$
20. $(6n^3 + 29n^2 - 6n - 5) \div (n + 5)$
21. $(n^3 - 40n + 24) \div (n - 6)$
22. $(n^3 - 67n - 24) \div (n + 8)$
23. $(x^3 - 27) \div (x - 3)$
24. $(x^3 + 8) \div (x + 2)$
25. $\frac{27x^3 - 64}{3x - 4}$
26. $\frac{8x^3 + 27}{2x + 3}$
27. $\frac{1 + 3n^2 - 2n}{n + 2}$
28. $\frac{x + 5 + 12x^2}{3x - 2}$
29. $\frac{9t^2 + 3t + 4}{3t - 1}$
30. $\frac{4n^2 + 6n - 1}{2n + 4}$
31. $\frac{6n^3 - 5n^2 - 7n + 4}{2n - 1}$
32. $\frac{21n^3 + 23n^2 - 9n - 10}{3n + 2}$
33. $\frac{4x^3 + 23x^2 - 30x + 32}{x + 7}$
34. $\frac{5x^3 - 12x^2 + 13x - 14}{x - 1}$
35. $(x^3 + 2x^2 - 3x - 1) \div (x^2 - 2x)$

36. $(x^3 - 6x^2 - 2x + 1) \div (x^2 + 3x)$

37. $(2x^3 - 4x^2 + x - 5) \div (x^2 + 4x)$

38. $(2x^3 - x^2 - 3x + 5) \div (x^2 + x)$

39. $(x^4 - 16) \div (x + 2)$

40. $(x^4 - 81) \div (x - 3)$

Pensamientos en palabras

41. Dar una descripción paso a paso de cómo resolver la división $(2x^3 + 8x^2 - 29x + 30) \div (x + 6)$.

42. ¿Cómo sabe, con pura inspección, que la respuesta a la siguiente división es incorrecta?

$$(3x^3 - 7x^2 - 22x + 8) \div (x - 4) = 3x^2 + 5x + 1$$

5.6 Uso de enteros como exponentes y notación científica

OBJETIVOS

1. Aplicar las propiedades de exponentes incluyendo cero y números negativos
2. Escribir números en notación científica
3. Exribir números expresados en notación científica en notación decimal estándar
4. Usar notación científica para evaluar expresiones numéricas

Hasta el momento, ha usado sólo números positivos como exponentes. Las siguientes definiciones y propiedades sirven como una base para su trabajo con exponentes.

Definición 5.1

Si n es un número positivo y b es cualquier número real, entonces

$$b^n = \underbrace{bbb \cdots b}_{n \text{ factores de } b}$$

Propiedad 5.5

Si m y n son números positivos, y a y b son números reales, excepto $b \neq 0$ cuando aparece en un denominador, entonces

1. $b^n \cdot b^m = b^{n+m}$

2. $(b^n)^m = b^{mn}$

3. $(ab)^n = a^n b^n$

4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ La parte 4 no se había establecido previamente

(continúa)

5. $\dfrac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$ Cuando $n > m$

$\dfrac{b^n}{b^m} = 1$ Cuando $n = m$

La propiedad 5.5 habla del uso de números positivos como exponentes. Cero y los números negativos también pueden ser usados como exponentes. Primero, considere el uso de 0 como exponente. Se debe usar el 0 como exponente de tal manera que las propiedades básicas de los exponentes siga aplicando. Considere el ejemplo $x^4 \cdot x^0$. Si la parte 1 de la propiedad 5.5 se mantiene, entonces

$$x^4 \cdot x^0 = x^{4+0} = x^4$$

Note que x^0 actúa como 1 porque $x^4 \cdot x^0 = x^4$. Esto sugiere la siguiente definición.

Definición 5.2

Si b es un número distinto a cero, entonces

$$b^0 = 1$$

De acuerdo a la definición 5.2, los siguientes enunciados son todos ciertos.

$$4^0 = 1$$
$$(-628)^0 = 1$$
$$\left(\frac{4}{7}\right)^0 = 1$$
$$n^0 = 1, \quad n \neq 0$$
$$(x^2y^5)^0 = 1, \quad x \neq 0 \text{ y } y \neq 0$$

Una línea de pensamiento similar indica cómo deben usarse los números negativos como exponentes. Considere el ejemplo $x^3 \cdot x^{-3}$. Si la parte 1 de la propiedad 5.5 se mantiene, entonces

$$x^3 \cdot x^{-3} = x^{3+(-3)} = x^0 = 1$$

Así, x^{-3} debe ser recíproco de x^3 porque su producto es 1; es decir,

$$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

Este proceso sugiere la siguiente definición.

Definición 5.3

Si n es un número positivo, y b es un número real distinto a cero, entonces

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

De acuerdo a la definición 5.3, todos los enunciados siguientes son ciertos.

$$x^{-6} = \frac{1}{x^6}$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} \quad \text{o} \quad 0.01$$

$$\frac{1}{x^{-4}} = \frac{1}{\frac{1}{x^4}} = x^4$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$$

Comentario: Note en el último ejemplo que $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$. En otras palabras, para elevar una fracción a una potencia negativa, se invierte la fracción y se eleva a la potencia positiva correspondiente.

Se puede comprobar (no se hará en este texto) que todas las partes de la propiedad 5.5 se mantienen para todos los números enteros. De hecho, se puede replantear la parte 5 con este enunciado.

Replanteamiento de la parte 5 de la propiedad 5.5

$$\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m} \quad \text{para todos los números reales } n \text{ y } m$$

Los siguientes ejemplos ilustran el uso de este nuevo concepto. En cada ejemplo, se simplifica la expresión original y se usan sólo los exponentes positivos en el resultado final.

$$\frac{x^2}{x^5} = x^{2-5} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

$$\frac{a^{-3}}{a^{-7}} = a^{-3-(-7)} = a^{-3+7} = a^4$$

$$\frac{y^{-5}}{y^{-2}} = y^{-5-(-2)} = y^{-5+2} = y^{-3} = \frac{1}{y^3}$$

$$\frac{x^{-6}}{x^{-6}} = x^{-6-(-6)} = x^{-6+6} = x^0 = 1$$

Las propiedades de los exponentes proporcionan una base para simplificar ciertos tipos de expresiones numéricas, tal como ilustran los siguientes ejemplos.

$$2^{-4} \cdot 2^6 = 2^{-4+6} = 2^2 = 4$$

$$10^5 \cdot 10^{-6} = 10^{5+(-6)} = 10^{-1} = \frac{1}{10} \quad \text{o} \quad 0.1$$

$$\frac{10^2}{10^{-2}} = 10^{2-(-2)} = 10^{2+2} = 10^4 = 10{,}000$$

$$(2^{-3})^{-2} = 2^{-3(-2)} = 2^6 = 64$$

Poder usar todos los números reales como exponentes también expande el tipo de trabajo que puede hacerse con las expresiones algebraicas. En cada uno de los siguientes ejemplos, se simplifica una expresión y se usan sólo los exponentes positivos en el resultado final.

$$x^8x^{-2} = x^{8+(-2)} = x^6$$

$$a^{-4}a^{-3} = a^{-4+(-3)} = a^{-7} = \frac{1}{a^7}$$

$$(y^{-3})^4 = y^{-3(4)} = y^{-12} = \frac{1}{y^{12}}$$

$$(x^{-2}y^4)^{-3} = (x^{-2})^{-3}(y^4)^{-3} = x^6y^{-12} = \frac{x^6}{y^{12}}$$

$$\left(\frac{x^{-1}}{y^2}\right)^{-2} = \frac{(x^{-1})^{-2}}{(y^2)^{-2}} = \frac{x^2}{y^{-4}} = x^2y^4$$

$$(4x^{-2})(3x^{-1}) = 12x^{-2+(-1)} = 12x^{-3} = \frac{12}{x^3}$$

$$\left(\frac{12x^{-6}}{6x^{-2}}\right)^{-2} = (2x^{-6-(-2)})^{-2} = (2x^{-4})^{-2}$$ Dividir los coeficientes $\frac{12}{6} = 2$

$$= (2)^{-2}(x^{-4})^{-2}$$

$$= \left(\frac{1}{2^2}\right)(x^8) = \frac{x^8}{4}$$

Notación científica

Muchas aplicaciones de matemáticas implican el uso de números o muy grandes o muy pequeños. Por ejemplo:

La rapidez de la luz es aproximadamente 29 979 200 000 centímetros por segundo.

Un año luz, la distancia que la luz recorre en un año, es aproximadamente 5 865 696 000 000 millas.

A gigahertz equals 1,000,000,000 hertz.

The length of a typical virus cell equals 0.000000075 of a meter.

Un milimicrón es igual a 0.000000001 de metro.

Trabajar con números de este tipo en forma decimal estándar es muy complicado. Es mucho más conveniente representar números muy pequeños y muy grandes en notación científica. La expresión $(N)(10^k)$, donde $1 \le N < 10$ es un número mayor que o igual a 1 y menor que 10, escrito en forma decimal, y k es cualquier entero, comúnmente se llama notación científica o forma científica de un número. Por ejemplo, 621 puede escribirse como $(6.21)(10^2)$, y 0.0023 puede escribirse como $(2.3)(10^{-3})$.

Para cambiar de notación ordinaria a notación científica puede usar el siguiente procedimiento.

Escriba el número dado como el producto de un número mayor que o igual a 1 y menor que 10, y una potencia de 10. El exponente de 10 se determina al contar el número de lugares que se movió el punto decimal cuando se pasó del número original al número mayor que o igual a 1 y menor que 10. Este exponente es (a) negativo si el número original es menor que 1, (b) positivo si el número original es mayor que 10 y (c) 0 si el número original está entre 1 y 10.

Por tanto, se puede escribir

$0.000179 = (1.79)(10^{-4})$ De acuerdo a la parte (a) del procedimiento

$8175 = (8.175)(10^3)$ De acuerdo a la parte (b)

$3.14 = (3.14)(10^0)$ De acuerdo a la parte (c)

Es posible expresar las aplicaciones dadas con anterioridad en notación científica, del modo siguiente:

Rapidez de la luz $29\,979\,200\,000 = (2.99792)(10)^{10}$ centímetros por segundo.

Año luz $5\,865\,696\,000\,000 = (5.865696)(10)^{12}$ millas.

Gigahertz: $1{,}000{,}000{,}000 = (1)(10^9)$ hertz

Longitud de una célula de virus $0.000000075 = (7.5)(10^{-8})$ metro

Longitud del diámetro de una molécula de agua: $= 0.0000000003$

$= (3)(10^{-10})$ metro

Para cambiar de notación científica a notación decimal ordinaria puede usar el siguiente procedimiento.

Mueva el punto decimal el número de lugares indicado por el exponente de 10. El punto decimal se mueve hacia la derecha si el exponente es positivo y hacia la izquierda si el exponente es negativo.

Por tanto, se puede escribir

$(4.71)(10^4) = 47{,}100$ Se necesitan dos ceros por propósitos de valor

$(1.78)(10^{-2}) = 0.0178$ Se necesita un cero por propósitos de valor

La notación científica, junto con las propiedades de los exponentes, se usa para simplificar la evaluación de cálculos numéricos. Los siguientes ejemplos ilustran este punto.

Ejemplo de salón de clases
Evaluar (6000)(0.00072).

EJEMPLO 1 Evaluar (4000)(0.000012).

Solución

$$\begin{aligned}(4000)(0.000012) &= (4)(10^3)(1.2)(10^{-5})\\ &= (4)(1.2)(10^3)(10^{-5})\\ &= (4.8)(10^{-2})\\ &= 0.048\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Evaluar $\dfrac{840{,}000}{0.024}$.

EJEMPLO 2 Evaluar $\dfrac{960{,}000}{0.032}$.

Solución

$$\begin{aligned}\frac{960{,}000}{0.032} &= \frac{(9.6)(10^5)}{(3.2)(10^{-2})}\\ &= (3)(10^7) \qquad \frac{10^5}{10^{-2}} = 10^{5-(-2)} = 10^7\\ &= 30{,}000{,}000\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Evaluar $\dfrac{(7000)(0.0000009)}{(0.0012)(30{,}000)}$.

EJEMPLO 3 Evaluar $\dfrac{(6000)(0.00008)}{(40{,}000)(0.006)}$.

Solución

$$\begin{aligned}\frac{(6000)(0.00008)}{(40{,}000)(0.006)} &= \frac{(6)(10^3)(8)(10^{-5})}{(4)(10^4)(6)(10^{-3})}\\ &= \frac{(48)(10^{-2})}{(24)(10^1)}\\ &= (2)(10^{-3}) \qquad \frac{10^{-2}}{10^1} = 10^{-2-1} = 10^{-3}\\ &= 0.002\end{aligned}$$

Examen de conceptos 5.6

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. Cualquier número distinto a cero elevado a una potencia de cero es igual a uno.
2. La expresión algebraica x^{-2} es recíproca de x^2 parax $x \neq 0$

3. Para elevar una fracción a un exponente negativo, se puede invertir la fracción y elevarla al exponente positivo correspondiente.

4. $\dfrac{1}{y^{-3}} = y^{-3}$

5. Un número en notación científica tiene la forma $(N)(10^k)$, donde $1 \leq N < 10$, y k es cualquier número real.

6. Un número es menor que cero si el exponente es negativo cuando el número se escribe en notación científica.

7. $\dfrac{1}{x^{-2}} = x^2$

8. $\dfrac{10^{-2}}{10^{-4}} = 100$

9. $(3.11)(10^{-2}) = 311$

10. $(5.24)(10^{-1}) = 0.524$

Conjunto de problemas 5.6

Para los problemas 1-30, evaluar cada expresión numérica. **(Objetivo 1)**

1. 3^{-2}
2. 2^{-5}
3. 4^{-3}
4. 5^{-2}
5. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1}$
6. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2}$
7. $\dfrac{1}{2^{-4}}$
8. $\dfrac{1}{3^{-1}}$
9. $\left(-\dfrac{4}{3}\right)^{0}$
10. $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$
11. $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$
12. $(-16)^0$
13. $(-2)^{-2}$
14. $(-3)^{-2}$
15. $-(3^{-2})$
16. $-(2^{-2})$
17. $\dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-3}}$
18. $\dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-4}}$
19. $2^6 \cdot 2^{-9}$
20. $3^5 \cdot 3^{-2}$
21. $3^6 \cdot 3^{-3}$
22. $2^{-7} \cdot 2^2$
23. $\dfrac{10^2}{10^{-1}}$
24. $\dfrac{10^1}{10^{-3}}$
25. $\dfrac{10^{-1}}{10^2}$
26. $\dfrac{10^{-2}}{10^{-2}}$
27. $(2^{-1} \cdot 3^{-2})^{-1}$
28. $(3^{-1} \cdot 4^{-2})^{-1}$
29. $\left(\dfrac{4^{-1}}{3}\right)^{-2}$
30. $\left(\dfrac{3}{2^{-1}}\right)^{-3}$

Para los problemas 31-84, simplificar cada expresión algebraica y expresar su respuesta usando sólo exponentes positivos. **(Objetivo 1)**

31. x^6x^{-1}
32. $x^{-2}x^7$
33. $n^{-4}n^2$
34. $n^{-8}n^3$
35. $a^{-2}a^{-3}$
36. $a^{-4}a^{-6}$
37. $(2x^3)(4x^{-2})$
38. $(5x^{-4})(6x^7)$
39. $(3x^{-6})(9x^2)$
40. $(8x^{-8})(4x^2)$
41. $(5y^{-1})(-3y^{-2})$
42. $(-7y^{-3})(9y^{-4})$
43. $(8x^{-4})(12x^4)$
44. $(-3x^{-2})(-6x^2)$
45. $\dfrac{x^7}{x^{-3}}$
46. $\dfrac{x^2}{x^{-4}}$
47. $\dfrac{n^{-1}}{n^3}$
48. $\dfrac{n^{-2}}{n^5}$
49. $\dfrac{4n^{-1}}{2n^{-3}}$
50. $\dfrac{12n^{-2}}{3n^{-5}}$
51. $\dfrac{-24x^{-6}}{8x^{-2}}$
52. $\dfrac{56x^{-5}}{-7x^{-1}}$
53. $\dfrac{-52y^{-2}}{-13y^{-2}}$
54. $\dfrac{-91y^{-3}}{-7y^{-3}}$
55. $(x^{-3})^{-2}$
56. $(x^{-1})^{-5}$
57. $(x^2)^{-2}$
58. $(x^3)^{-1}$
59. $(x^3y^4)^{-1}$
60. $(x^4y^{-2})^{-2}$
61. $(x^{-2}y^{-1})^3$
62. $(x^{-3}y^{-4})^2$
63. $(2n^{-2})^3$
64. $(3n^{-1})^4$
65. $(4n^3)^{-2}$
66. $(2n^2)^{-3}$

67. $(3a^{-2})^4$

68. $(5a^{-1})^2$

69. $(5x^{-1})^{-2}$

70. $(4x^{-2})^{-2}$

71. $(2x^{-2}y^{-1})^{-1}$

72. $(3x^2y^{-3})^{-2}$

73. $\left(\frac{x^2}{y}\right)^{-1}$

74. $\left(\frac{y^2}{x^3}\right)^{-2}$

75. $\left(\frac{a^{-1}}{b^2}\right)^{-4}$

76. $\left(\frac{a^3}{b^{-2}}\right)^{-3}$

77. $\left(\frac{x^{-1}}{y^{-3}}\right)^{-2}$

78. $\left(\frac{x^{-3}}{y^{-4}}\right)^{-1}$

79. $\left(\frac{x^2}{x^3}\right)^{-1}$

80. $\left(\frac{x^4}{x}\right)^{-2}$

81. $\left(\frac{2x^{-1}}{x^{-2}}\right)^{-3}$

82. $\left(\frac{3x^{-2}}{x^{-5}}\right)^{-1}$

83. $\left(\frac{18x^{-1}}{9x}\right)^{-2}$

84. $\left(\frac{35x^2}{7x^{-1}}\right)^{-1}$

85. En el 2012, la Administración de Seguro Social de Estados Unidos pagó aproximadamente \$778,000,000,000 en beneficios a todos los beneficiarios. Escribir este número en notación científica.

86. En 2011, se hicieron aproximadamente 4,939,000,000 peniques. Escribir, en notación científica, el número de peniques hechos.

87. El grosor de un billete es 0.0043 pulgadas. Escribir este número en notación científica.

88. El alcance promedio del virus del ébola es aproximadamente 0.0000002 metros. Escribir este número en notación científica.

89. El diámetro de Júpiter es, aproximadamente, 89,000 millas. Escribir este número en notación científica.

90. El Número de Avogadro, que tiene un valor aproximado de 602,200,000,000,000,000,000,000, se refiere al valor calculado del número de moléculas en un gramo mole de cualquier sustancia química. Escribir el Número de Avogadro en notación científica.

91. El ventilador de una computadora vieja tiene un grosor de 0.025 metros. Escribir este número en notación científica.

92. Una hoja de papel bond tiene un grosor de 20 milímetros. Escribir el grosor en notación científica.

93. En junio del 2011, el sitio web MyLife.com fue visitado por 13,000,000 personas. Escribir el número de visitas en notación científica.

94. Walmart reporta que vendieron 15,000,000 cajas de plátanos en un día. Escribir, en notación científica, el número de cajas vendidas en un día.

Para los problemas 95-106, escribir cada número en forma decimal estándar; por ejemplo, $(1.4)(10^3) = 1400$. **(Objetivo 3)**

95. $(8)(10^3)$

96. $(6)(10^2)$

97. $(5.21)(10^4)$

98. $(7.2)(10^3)$

99. $(1.14)(10^7)$

100. $(5.64)(10^8)$

101. $(7)(10^{-2})$

102. $(8.14)(10^{-1})$

103. $(9.87)(10^{-4})$

104. $(4.37)(10^{-5})$

105. $(8.64)(10^{-6})$

106. $(3.14)(10^{-7})$

Para los problemas 107-118, usar notación científica y las propiedades de los exponentes para evaluar cada expresión numérica. **(Objetivo 4)**

107. $(0.007)(120)$

108. $(0.0004)(13)$

109. $(5{,}000{,}000)(0.00009)$

110. $(800{,}000)(0.0000006)$

111. $\frac{6000}{0.0015}$

112. $\frac{480}{0.012}$

113. $\frac{0.00086}{4300}$

114. $\frac{0.0057}{30{,}000}$

115. $\frac{0.00039}{0.0013}$

116. $\frac{0.0000082}{0.00041}$

117. $\frac{(0.0008)(0.07)}{(20{,}000)(0.0004)}$

118. $\frac{(0.006)(600)}{(0.00004)(30)}$

Para los problemas 119-122, convertir los números a notación científica y calcule la respuesta. **(Objetivos 2 y 4)**

119. En el 2012, la Administración de Seguro Social de Estados Unidos pagó aproximadamente \$778,000,000,000 en beneficios a todos los beneficiarios. Si había 56,000,000 beneficiarios, encontrar el promedio de dólares que cada uno recibió.

120. En 2011, se hicieron aproximadamente 4,939,000,000 peniques. Si la población era de 310,000,000, encontrar el promedio de peniques producidos por persona. Redondear la respuesta al número entero más cercano.

121. El grosor de un billete es 0.0043 pulgadas. ¿Qué tan alta será una pila de 1,000,000 billetes? Expresar la respuesta en pies.

122. El diámetro de Júpiter mide aproximadamente 11 veces más que el de la Tierra. Encontrar el diámetro de la Tierra si el diámetro de Júpiter es, aproximadamente, 89,000 millas. Expresar la respuesta en millas.

Pensamientos en palabras

123. ¿El siguiente proceso de simplificación es correcto?

$$(2^{-2})^{-1} = \left(\frac{1}{2^2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^1} = 4$$

¿Puede sugerir una mejor manera de resolver el problema?

124. Explicar la importancia de la notación científica.

Más investigación

125. Use su calculadora para los problemas 1-16. Asegúrese de que sus respuestas sean equivalentes a las respuestas que obtuvo con la calculadora.

126. Use su calculadora para evaluar $(140{,}000)^2$. Su respuesta debe estar escrita en notación científica; el formato depende de la calculadora. Por ejemplo, puede verse como $\boxed{1.96 \quad 10}$ o $\boxed{1.96E + 10}$. Entonces, en notación ordinaria la respuesta es 19,600,000,000. Use su calculadora para evaluar cada expresión. Exprese las respuestas finales en notación ordinaria.

(a) $(9000)^3$ **(b)** $(4000)^3$

(c) $(150{,}000)^2$ **(d)** $(170{,}000)^2$

(e) $(0.012)^5$ **(f)** $(0.0015)^4$

(g) $(0.006)^3$ **(h)** $(0.02)^6$

127. Use su calculadora para comprobar las respuestas de los problemas 107-118.

Respuestas del examen de conceptos

1. Cierto **2.** Cierto **3.** Cierto **4.** Falso **5.** Falso **6.** Falso **7.** Cierto **8.** Cierto **9.** Falso **10.** Cierto

Capítulo 5 Resumen

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Clasificar polinomios según tamaño y grado. (Sección 5.1/Objetivo 1) (Sección 5.1/Objetivo 2)	Los términos con variables que contienen sólo números enteros como exponentes son llamados **monomios**. Un polinomio es un monomio o una suma finita de monomios. El grado de un monomio es la suma de los exponentes de los factores literales. El grado de un polinomio es el grado del término con mayor valor en el polinomio. Un polinomio de un término es llamado **monomio**; un polinomio de dos términos es llamado binomio; y un polinomio de tres términos es llamado **trinomio**.	El polinomio $6x^2y^3$ es un monomio de grado 5. El polinomio $3x^2y^2 - 7xy^2$ es un binomio de grado 4. El polinomio $8x^2 + 3x - 1$ es un trinomio de grado 2. El polinomio $x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 12x - 2$ es un polinomio de grado 4. **Problema de muestra 1** El polinomio $3xy^2z^3$ es un monomio de grado ___. El polinomio $2xy^2 - 4x^2y^3$ es un binomio de grado ___. El polinomio $3x^2 - 2x + 1$ es un trinomio de grado ___. El polinomio $5x^3 - 2x^2 + 8x + 7$ es un polinomio de grado ___.
Sumar y restar polinomios. (Sección 5.1/Objetivo 3) (Sección 5.1/Objetivo 4)	La adición y substracción de polinomios están basadas en el uso de la propiedad distributiva y en la combinación de términos similares. Un polinomio se resta *sumando el opuesto*. El opuesto de un polinomio se forma tomando el opuesto de cada término.	(a) Sumar $3x^2 - 2x + 1$ y $4x^2 + x - 5$. (b) Realizar la resta $(4x - 3) - (2x + 7)$. **Solución** **(a)** $(3x^2 - 2x + 1) + (4x^2 + x - 5)$ $= (3x^2 + 4x^2) + (-2x + x) + (1 - 5)$ $= (3 + 4)x^2 + (-2 + 1)x + (1 - 5)$ $= 7x^2 - x - 4$ **(b)** $(4x - 3) - (2x + 7)$ $= (4x - 3) + (-2x - 7)$ $= (4x - 2x) + (-3 - 7)$ $= 2x - 10$ **Problema de muestra 2** (a) Sumar $2y^2 - 6y + 1$ y $3y^2 - 9y - 7$. (b) Realizar la resta $(7y + 5) - (4y - 3)$.
Realizar operaciones en polinomios que incluyen sumas y restas. (Sección 5.1/Objetivo 3) (Sección 5.1/Objetivo 4)	Se puede usar la propiedad distributiva junto con las propiedades $a = 1(a)$ y $2a = -1(-2a)$ cuando se sumen y resten polinomios.	Realizar la operación indicada: $3y + 4 - (6y - 5)$ **Solución** $3y + 4 - (6y - 5)$ $= 3y + 4 - 1(6y - 5)$ $= 3y + 4 - 1(6y) - 1(-5)$ $= 3y + 4 - 6y + 5 = -3y + 9$ **Problema de muestra 3** Realizar la operación indicada: $2x - 5 - (3x + 7)$

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Aplicar las propiedades de los exponentes para multiplicar monomios. (Sección 5.2/Objetivo 1)	Cuando se multiplican potencias con la misma base, se suman los exponentes. Cuando se eleva una potencia a una potencia, se multiplican los exponentes.	Encontrar los productos: **(a)** $(3x^2)(4x^3)$ **(b)** $(n^2)^4$ **Solución** **(a)** $(3x^2)(4x^3)$ $= 3 \cdot 4 \cdot x^{2+3}$ $= 12x^5$ **(b)** $(n^2)^4$ $= n^{2\cdot 4}$ $= n^8$ **Problema de muestra 4** Encontrar los productos **(a)** $(5x)(2x^3)$ **(b)** $(y^3)^4$
Aplicar las propiedades de los exponentes para elevar un monomio a una potencia. (Sección 5.2/Objetivo 1)	Cuando se eleva un monomio a una potencia, se eleva cada factor a esa potencia.	Simplificar $(6ab^2)^3$. **Solución** $(6ab^2)^3$ $= 6^3 \cdot a^3 \cdot b^6$ $= 216a^3b^6$ **Problema de muestra 5** Simplificar $(2x^2y)^4$.
Hallar el producto de dos polinomios. (Sección 5.3/Objetivo 1)	La propiedad distributiva, junto con las propiedades de los exponentes, forman una base para multiplicar polinomios.	Multiplicar $(2x + 3)(x^2 - 4x + 5)$. **Solución** $(2x + 3)(x^2 - 4x + 5)$ $= 2x(x^2 - 4x + 5) + 3(x^2 - 4x + 5)$ $= 2x^3 - 8x^2 + 10x + 3x^2 - 12x + 15$ $= 2x^3 - 5x^2 - 2x + 15$ **Problema de muestra 6** Multiplicar $(3x - 4)(x^2 + 2x - 3)$.
Usar el patrón abreviado para encontrar el producto de dos binomios. (Sección 5.3/Objetivo 2)	El producto de dos binomios es, tal vez, el tipo más frecuentemente usado de multiplicación. Un patrón abreviado de tres pasos, llamado FOIL por sus siglas en inglés, suele usarse para encontrar el producto de dos binomios. FOIL se refiere a primero (first), externo (outside), interno (inside) y último (last).	Multiplicar $(2x + 5)(x - 3)$. **Solución** $(2x + 5)(x - 3)$ $= 2x(x) + (2x)(-3) + (5)(x) + (5)(-3)$ $= 2x^2 - 6x + 5x - 15$ $= 2x^2 - x - 15$ **Problema de muestra 7** Multiplicar $(3x - 5)(x + 7)$.

(*continúa*)

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Elevar un binomio a una potencia. (Sección 5.3/Objetivo 1)	Cuando se eleva un binomio a una potencia, se vuelve a escribir el problema como el producto de los binomios. Entonces puede aplicar el atajo FOIL para multiplicar dos binomios. Después aplique la propiedad distributiva para encontrar el producto.	Encontrar el producto $(x + 4)^3$. **Solución** $(x + 4)^3 = (x + 4)(x + 4)(x + 4)$ $= (x + 4)(x^2 + 8x + 16)$ $= x(x^2 + 8x + 16) + 4(x^2 + 8x + 16)$ $= x^3 + 8x^2 + 16x + 4x^2 + 32x + 64$ $= x^3 + 12x^2 + 48x + 64$ **Problema de muestra 8** Encontrar el producto $(x - 3)^3$.
Usar un patrón especial de producto para encontrar productos. (Sección 5.3/Objetivos 3 y 4)	Cuando multiplique binomios, debe poder reconocer los siguientes patrones especiales y usarlos para hallar el producto. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	Encontrar el producto $(5x + 6)^2$. **Solución** $(5x + 6)^2 = (5x)^2 + 2(5x)(6) + (6)^2$ $= 25x^2 + 60x + 36$ **Problema de muestra 9** Encontrar el producto $(3x - 7)^2$.
Aplicar polinomios a problemas geométricos. (Sección 5.2/Objetivo 3)	Los polinomios pueden aplicarse para representar perímetros, áreas y volúmenes de figuras geométricas.	Una pieza de aluminio que mide 15 pulgadas por 20 pulgadas tiene una pieza cuadrada de x pulgadas en un lado recortada en dos esquinas. Encontrar el área de la pieza de aluminio después de que se remueven las esquinas. **Solución** El área antes de retirar las esquinas se encuentra aplicando la fórmula $A = lw$. Por ende, $A = 15(20) = 300$. Cada una de las esquinas retiradas tiene un área de x^2. Por ende, se debe restar $2x^2$ del área de la pieza de aluminio. El área de la pieza de aluminio después de que se remueven las esquinas es $300 - 2x^2$. **Problema de muestra 10** El largo de un rectángulo es dos más que tres veces su ancho. Hallar el perímetro del rectángulo.
Aplicar propiedades de exponentes para dividir monomios. (Sección 5.4/Objetivo 1)	Las siguientes propiedades de exponentes, junto con su conocimiento en división de números reales, sirven como base para la división de monomios. $\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$ cuando $n > m$ $\frac{b^n}{b^m} = 1$ cuando $n = m$	Dividir $\frac{-32a^5b^4}{8a^3b}$. **Solución** $\frac{-32a^5b^4}{8a^3b} = -4a^2b^3$ **Problema de muestra 11** Dividir $\frac{24x^3y^7}{3xy^2}$.

<table>
<tr><th>OBJETIVO</th><th>RESUMEN</th><th>EJEMPLO</th></tr>
<tr>
<td>Dividir polinomios entre monomios.
(Sección 5.4/Objetivo 2)</td>
<td>Dividir un polinomio entre un monomio se basa en la propiedad
$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$</td>
<td>Dividir $\frac{8x^5 - 16x^4 + 4x^3}{4x}$.

Solución
$$\frac{8x^5 - 16x^4 + 4x^3}{4x} = \frac{8x^5}{4x} + \frac{-16x^4}{4x} + \frac{4x^3}{4x}$$ $$= 2x^4 - 4x^3 + x^2$$Problema de muestra 12
Dividir $\frac{10x^4 - 15x^2 + 5x}{5x}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>Dividir polinomios entre binomios.
(Sección 5.5/Objetivo 1)</td>
<td>Use el formato convencional de división larga de la aritmética. Acomode el dividendo y el divisor en potencias descendentes de la variable. Puede necesitar insertar términos con coeficientes de cero si hacen falta términos con alguna potencia.</td>
<td>Dividir $(y^3 - 5y - 2) \div (y + 2)$.

Solución$$\begin{array}{r} y^2 - 2y - 1 \\ y + 2\overline{)y^3 + 0y^2 - 5y - 2} \\ \underline{y^3 + 2y^2} \qquad\qquad \\ -2y^2 - 5y \qquad \\ \underline{-2y^2 - 4y} \qquad \\ -y - 2 \\ \underline{-y - 2} \end{array}$$Problema de muestra 13
Dividir $(x^3 - 2x^2 - 9) \div (x - 3)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>Aplicar las propiedades de exponentes, incluyendo exponentes negativos y cero, para simplificar las expresiones.
(Sección 5.6/Objetivo 1)</td>
<td>Por definición si b es un número real distinto a cero, entonces $b^0 = 1$.
Por definición, si n es un número entero positivo, y b es un número real distinto a cero, entonces
$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$.

Cuando simplifique expresiones, use sólo los exponentes positivos en el resultado final.</td>
<td>Simplificar $\frac{28n^{-6}}{4n^{-2}}$. Exprese la respuesta usando sólo exponentes positivos.

Solución$$\frac{28n^{-6}}{4n^{-2}} = 7n^{-6-(-2)} = 7n^{-6+2} = 7n^{-4} = \frac{7}{n^4}$$Problema de muestra 14
Simplificar $\frac{-27x^{-4}}{9x^{-1}}$. Exprese la respuesta usando sólo exponentes positivos.</td>
</tr>
<tr>
<td>Escribir los números expresados en notación científica en notación decimal estándar.
(Sección 5.6/Objetivo 3)</td>
<td>Para cambiar de notación científica a notación decimal ordinaria, mueva el punto decimal el número de lugares indicado por el exponente de 10. El punto decimal se mueve a la derecha si el exponente es positivo y a la izquierda si es negativo.</td>
<td>Escriba $(3.28)(10^{-4})$ en notación decimal estándar.

Solución
$(3.28)(10^{-4}) = 0.000328$

Problema de muestra 15
Escriba $(2.07)(10^3)$ en notación decimal estándar.</td>
</tr>
</table>

(*continúa*)

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Escribir números en notación científica. (Sección 5.6/Objetivo 2)	Para representar un número en notación científica, expréselo como el producto de un número entre 1 y 10 (incluyendo 1) y una potencia de 10.	Escribir 657,000,000 en notación científica. **Solución** Contar el número de lugares decimales desde el punto decimal hasta el número entre 1 y 10, incluyendo el 1. Para la notación científica, elevar 10 a ese número. $657{,}000{,}000 = (6.57)(10^8)$ **Problema de muestra 16** Escribir 0.0021 en notación científica.
Usar la notación científica para evaluar expresiones numéricas. (Sección 5.6/Objetivo 4)	La notación científica puede ser usada para resolver más fácilmente problemas aritméticos.	Cambiar cada número a notación científica y evaluar la expresión. Expresе la respuesta en notación estándar. $(61{,}000)(0.000005)$ **Solución** $(61{,}000)(0.000005) = (6.1)(10^4)(5)(10^{-6}) = (6.1)(5)(10^4)(10^{-6}) = (30.5)(10^{-2}) = 0.305$ **Problema de muestra 17** Cambiar cada número a notación científica y evaluar la expresión. Exprese la respuesta en notación estándar.

Capítulo 5 Conjunto de problemas de repaso

Para los problemas 1-4, realizar las sumas y restas.

1. $(5x^2 - 6x + 4) + (3x^2 - 7x - 2)$

2. $(7y^2 + 9y - 3) - (4y^2 - 2y + 6)$

3. $(2x^2 + 3x - 4) + (4x^2 - 3x - 6) - (3x^2 - 2x - 1)$

4. $(-3x^2 - 2x + 4) - (x^2 - 5x - 6) - (4x^2 + 3x - 8)$

Para los problemas 5-12, remover paréntesis y agrupar términos semejantes.

5. $5(2x - 1) + 7(x + 3) - 2(3x + 4)$

6. $3(2x^2 - 4x - 5) - 5(3x^2 - 4x + 1)$

7. $6(y^2 - 7y - 3) - 4(y^2 + 3y - 9)$

8. $3(a - 1) - 2(3a - 4) - 5(2a + 7)$

9. $-(a + 4) + 5(-a - 2) - 7(3a - 1)$

10. $-2(3n - 1) - 4(2n + 6) + 5(3n + 4)$

11. $3(n^2 - 2n - 4) - 4(2n^2 - n - 3)$

12. $-5(-n^2 + n - 1) + 3(4n^2 - 3n - 7)$

Para los problemas 13-20, hallar los productos indicados.

13. $(5x^2)(7x^4)$

14. $(-6x^3)(9x^5)$

15. $(-4xy^2)(-6x^2y^3)$

16. $(2a^3b^4)(-3ab^5)$

17. $(2a^2b^3)^3$

18. $(-3xy^2)^2$

19. $5x(7x + 3)$

20. $(-3x^2)(8x - 1)$

Para los problemas 21-40, encontrar los productos indicados. Asegúrese de simplificar su respuesta.

21. $(x + 9)(x + 8)$

22. $(3x + 7)(x + 1)$

23. $(x - 5)(x + 2)$

24. $(y - 4)(y - 9)$

25. $(2x - 1)(7x + 3)$

26. $(4a - 7)(5a + 8)$

27. $(3a - 5)^2$

28. $(x + 6)(2x^2 + 5x - 4)$

29. $(5n - 1)(6n + 5)$

30. $(3n + 4)(4n - 1)$

31. $(2n + 1)(2n - 1)$

32. $(4n - 5)(4n + 5)$

33. $(2a + 7)^2$

34. $(3a + 5)^2$

35. $(x - 2)(x^2 - x + 6)$

36. $(2x - 1)(x^2 + 4x + 7)$

37. $(a + 5)^3$

38. $(a - 6)^3$

39. $(x^2 - x - 1)(x^2 + 2x + 5)$

40. $(n^2 + 2n + 4)(n^2 - 7n - 1)$

Para los problemas 41-48, realizar las divisiones.

41. $\dfrac{36x^4y^5}{-3xy^2}$ **42.** $\dfrac{-56a^5b^7}{-8a^2b^3}$

43. $\dfrac{-18x^4y^3 - 54x^6y^2}{6x^2y^2}$

44. $\dfrac{-30a^5b^{10} + 39a^4b^8}{-3ab}$

45. $\dfrac{56x^4 - 40x^3 - 32x^2}{4x^2}$

46. $(x^2 + 9x - 1) \div (x + 5)$

47. $(21x^2 - 4x - 12) \div (3x + 2)$

48. $(2x^3 - 3x^2 + 2x - 4) \div (x - 2)$

Para los problemas 49-60, evaluar cada expresión.

49. $3^2 + 2^2$ **50.** $(3 + 2)^2$

51. 2^{-4} **52.** $(-5)^0$

53. -5^0 **54.** $\dfrac{1}{3^{-2}}$

55. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2}$ **56.** $\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1}}$

57. $\dfrac{1}{(-2)^{-3}}$ **58.** $2^{-1} + 3^{-2}$

59. $3^0 + 2^{-2}$ **60.** $(2 + 3)^{-2}$

Para los problemas 61-72, simplificar cada uno de los siguientes y expresar su respuesta usando sólo exponentes positivos.

61. x^5x^{-8} **62.** $(3x^5)(4x^{-2})$

63. $\dfrac{x^{-4}}{x^{-6}}$ **64.** $\dfrac{x^{-6}}{x^{-4}}$

65. $\dfrac{24a^5}{3a^{-1}}$ **66.** $\dfrac{48n^{-2}}{12n^{-1}}$

67. $(x^{-2}y)^{-1}$ **68.** $(a^2b^{-3})^{-2}$

69. $(2x)^{-1}$ **70.** $(3n^2)^{-2}$

71. $(2n^{-1})^{-3}$ **72.** $(4ab^{-1})(-3a^{-1}b^2)$

Para los problemas 73-76, escribir cada expresión en notación decimal estándar.

73. $(6.1)(10^2)$ **74.** $(5.6)(10^4)$

75. $(8)(10^{-2})$ **76.** $(9.2)(10^{-4})$

Para los problemas 77-80, escribir cada número en notación científica.

77. 9000 **78.** 47

79. 0.047 **80.** 0.00021

Para los problemas 81-84, usar la notación científica y las propiedades de exponentes para evaluar cada expresión.

81. (0.00004)(12,000) **82.** (0.0021)(2000)

83. $\dfrac{0.0056}{0.0000028}$ **84.** $\dfrac{0.00078}{39{,}000}$

Capítulo 5 Examen

1. Encontrar la suma de $-7x^2 + 6x - 2$ y $5x^2 - 8x + 7$.
2. Restar $2x^2 + 9x - 14$ de $24x^2 + 3x + 6$.
3. Remover los paréntesis y combinar términos semejantes para la expresión $3(2x - 1) - 6(3x - 2) - (x + 7)$.
4. Encontrar el producto $(-4xy^2)(7x^2y^3)$.
5. Encontrar el producto $(2x^2y)^2(3xy^3)$.

Para los problemas 6-12, hallar los productos indicados y expresar las respuestas en su forma más simple.

6. $(x - 9)(x + 2)$
7. $(n + 14)(n - 7)$
8. $(5a + 3)(8a + 7)$
9. $(3x - 7y)^2$
10. $(x + 3)(2x^2 - 4x - 7)$
11. $(9x - 5y)(9x + 5y)$
12. $(3x - 7)(5x - 11)$
13. Hallar el cociente indicado $\dfrac{-96x^4y^5}{-12x^2y}$.
14. Hallar el cociente indicado $\dfrac{56x^2y - 72xy^2}{-8xy}$.
15. Hallar el cociente indicado: $(2x^3 + 5x^2 - 22x + 15) \div (2x - 3)$.
16. Hallar el cociente indicado: $(4x^3 + 23x^2 + 36) \div (x + 6)$.
17. Evaluar $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$.
18. Evaluar $4^{-2} + 4^{-1} + 4^0$.
19. Evaluar $\dfrac{1}{2^{-4}}$.
20. Encontrar el producto $(-6x^{-4})(4x^2)$ y expresar la respuesta usando un exponente positivo.
21. Simplificar $\left(\dfrac{8x^{-1}}{2x^2}\right)^{-1}$ y expresar la respuesta usando un exponente positivo.
22. Simplificar $(x^{-3}y^5)^{-2}$ y expresar la respuesta usando exponentes positivos.
23. Escribir 0.00027 en notación científica.
24. Expresar $(9.2)(10^6)$ en forma decimal estándar.
25. Evaluar $(0.000002)(3000)$.

Capítulos 1-5 Conjunto de problemas de repaso acumulados

Para los problemas 1-10, calcular cada una de las expresiones numéricas.

1. $5 + 3(2 - 7)^2 \div 3 \cdot 5$

2. $8 \div 2 \cdot (-1) + 3$ **3.** $7 - 2^2 \cdot 5 \div (-1)$

4. $4 + (-2) - 3(6)$ **5.** $(-3)^4$

6. -2^5 **7.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ **8.** $\frac{1}{4^{-2}}$

9. $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^{-2}$ **10.** $2^0 + 2^{-1} + 2^{-2}$

Para los problemas 11-16, evaluar cada expresión algebraica para los valores dados a las variables.

11. $\frac{2x + 3y}{x - y}$ para $x = \frac{1}{2}$ y $y = -\frac{1}{3}$

12. $\frac{2}{5}n - \frac{1}{3}n - n + \frac{1}{2}n$ para $n = -\frac{3}{4}$

13. $\frac{3a - 2b - 4a + 7b}{-a - 3a + b - 2b}$ para $a = -1$ y $b = -\frac{1}{3}$

14. $-2(x - 4) + 3(2x - 1) - (3x - 2)$ para $x = -2$

15. $(x^2 + 2x - 4) - (x^2 - x - 2) + (2x^2 - 3x - 1)$ para $x = -1$

16. $2(n^2 - 3n - 1) - (n^2 + n + 4) - 3(2n - 1)$ para $n = 3$

Para los problemas 17-29, encontrar los productos indicados.

17. $(3x^2y^3)(-5xy^4)$

18. $(-6ab^4)(-2b^3)$

19. $(-2x^2y^5)^3$

20. $-3xy(2x - 5y)$

21. $(5x - 2)(3x - 1)$

22. $(7x - 1)(3x + 4)$

23. $(-x - 2)(2x + 3)$

24. $(7 - 2y)(7 + 2y)$

25. $(x - 2)(3x^2 - x - 4)$

26. $(2x - 5)(x^2 + x - 4)$

27. $(2n + 3)^3$

28. $(1 - 2n)^3$

29. $(x^2 - 2x + 6)(2x^2 + 5x - 6)$

Para los problemas 30-34, realizar las divisiones indicadas.

30. $\frac{-52x^3y^4}{13xy^2}$ **31.** $\frac{-126a^3b^5}{-9a^2b^3}$

32. $\frac{56xy^2 - 64x^3y - 72x^4y^4}{8xy}$

33. $(2x^3 + 2x^2 - 19x - 21) \div (x + 3)$

34. $(3x^3 + 17x^2 + 6x - 4) \div (3x - 1)$

Para los problemas 35-38, simplificar cada expresión y expresar sus respuestas usando sólo exponentes positivos.

35. $(-2x^3)(3x^{-4})$ **36.** $\frac{4x^{-2}}{2x^{-1}}$

37. $(3x^{-1}y^{-2})^{-1}$ **38.** $(xy^2z^{-1})^{-2}$

Para los problemas 39-41, usar la notación científica y las propiedades de exponentes para ayudarle a evaluar cada expresión numérica.

39. $(0.00003)(4000)$ **40.** $(0.0002)(0.003)^2$

41. $\frac{0.00034}{0.0000017}$

Para los problemas 42-49, resolver cada ecuación.

42. $5x + 8 = 6x - 3$

43. $-2(4x - 1) = -5x + 3 - 2x$

44. $\frac{y}{2} - \frac{y}{3} = 8$

45. $6x + 8 - 4x = 10(3x + 2)$

46. $1.6 - 2.4x = 5x - 65$

47. $-3(x - 1) + 2(x + 3) = -4$

48. $\dfrac{3n + 1}{5} + \dfrac{n - 2}{3} = \dfrac{2}{15}$

49. $0.06x + 0.08(1500 - x) = 110$

Para los problemas 50-55, resolver cada desigualdad.

50. $2x - 7 \leq -3(x + 4)$

51. $6x + 5 - 3x > 5$

52. $4(x - 5) + 2(3x + 6) < 0$

53. $-5x + 3 > -4x + 5$

54. $\dfrac{3x}{4} - \dfrac{x}{2} \leq \dfrac{5x}{6} - 1$

55. $0.08(700 - x) + 0.11x \geq 65$

Para los problemas 56-62, plantear una ecuación y resolver cada problema.

56. La suma de 4 y tres veces cierto número es el mismo que la suma del número y 10. Hallar el número.

57. Quince por ciento de algún número es 6. Hallar el número.

58. Lou tiene 18 monedas, consistiendo en monedas de diez y quince centavos. Si el valor total de las monedas es $3.30, ¿cuántas monedas de cada tipo tiene?

59. La cantidad de $1500 se invierte, parte a 8% de interés y el resto a 9%. Si el total de ganancia es de $128, encontrar la cantidad invertida en cada tasa.

60. ¿Cuántos galones de agua deben agregarse a 15 galones de una solución salina al 12% para cambiarla a una solución salina al 10%?

61. Dos aviones salen de Atlanta al mismo tiempo y vuelan en direcciones opuestas. Si uno viaja a 400 millas por hora y el otro a 450 millas por hora, ¿cuánto les tomará estar a 2975 millas de distancia entre sí?

62. El largo de un rectángulo es 1 metro más que el doble de su ancho. Si el perímetro del rectángulo es 44 metros, hallar el largo y el ancho.

Se pueden encontrar más problemas verbales en el Apéndice A. Todos los problemas en el Apéndice con referencias los capítulos 3-5 son apropiados.

6 Factorización, resolución de ecuaciones y de problemas

Image Source/Getty Images

"Somos las acciones que repetimos. La excelencia, entonces, no es un acto, esun hábito".
ARISTOTLE

Tip de estudio

En el capítulo 4, muchos problemas incluían fórmulas geométricas que debía memorizar. Definitivamente hay situaciones en matemáticas en las que debe memorizar. Sin embargo, es importante aprender y entender los conceptos involucrados en la resolución del problema porque memorizar lo limita a sólo ser capaz de hacer ese tipo de problemas.

Cursos más avanzados de matemáticas requieren el entendimiento de los conceptos. Los problemas en estos cursos le piden aplicar los conceptos en muchos diferentes tipos de problemas, lo cual implica más de lo que puede memorizar.

Aprender cómo factorizar los polinomios en este capítulo requiere la combinación de la memoria y el entendimiento de los patrones de factorización. Un buen entendimento de la relación entre la multiplicación de polinomios y la factorización de polinomios lleva a comprender por qué funcionan los distintos tipos de patrones de factorización.

¿Ha trabajado repetidamente en su curso de matemáticas para llegar a la excelencia?

Vista previa del capítulo

En el último capítulo aprendió la habilidad de multiplicar binomios. En este capítulo aprenderá a factorizar. Factorizar es la operación opuesta a multiplicar. El problema comienza con un polinomio como x^2 1 6x 1 8 y la forma factorizada termina siendo una multiplicación como (x 1 4)(x 1 2).

Para tener éxito en el resto del curso, es imperativo que sepa factorizar polinomios. Excepto para graficar, probablemente el 80% de los problemas en los siguientes capítulos implican factorizar. No querrá fallar en un problema complicado en el capítulo 8 sólo porque no factorizó apropiadamente.

Por último, factorizar toma mucha práctica de su parte. Factorizar sólo puede aprenderse practicando. Ver a su instructor factorizar sólo vuelve a su instructor mejor factorizando.

6.1 Factorizar usando la propiedad distributiva

OBJETIVOS

1. Encontrar el máximo común divisor
2. Factorizar el máximo común divisor
3. Factorizar agrupando
4. Resolver ecuaciones factorizando

En el capítulo 1 aprendió a encontrar el máximo común divisor de dos o más números enteros por pura inspección o usando la forma de factorización prima de los números. Por ejemplo, por inspección puede ver que el máximo común divisor de 8 y 12 es 4. Esto significa que 4 es el número entero más grande que es un factor tanto de 8 como de 12. Si es difícil determinar el máximo común divisor por inspección, entonces puede usar la técnica de factorización prima de la siguiente manera:

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$
$$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$$

Se ve que $2 \cdot 7 = 14$ es el máximo común divisor de 42 y 70.

Es significativo extender el concepto del máximo común divisor a los monomios. Con “el máximo común divisor de dos o más monomios” nos referimos al monomio con el coeficiente numérico más alto y la potencia más alta de las variables que es uno de los factores de los monomios dados. Considere los siguientes ejemplos:

Ejemplo de salón de clases
Hallar el máximo común divisor de $9m^2$ y $12m^3$.

EJEMPLO 1 Hallar el máximo común divisor de $8x^2$ y $12x^3$.

Solución

Primero, factorizar cada monomio.

$$8x^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x$$
$$12x^3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x$$

De las factorizaciones, se nota que 2 y x son los divisores en común.

Debido a que el factor 2 ocurre al menos dos veces en cada factorización, se necesitarán dos factores de 2 para el máximo común divisor. La variable x ocurre al menos 2 veces en cada factorización, así que se necesitarán dos factores de x para el máximo común divisor. También se pueden ver los exponentes de la variable x. El exponente más pequeño en x en el monomio dado es 2. Así, x^2 es el máximo común divisor para la variable x.

Entonces, el máximo común divisor es $2 \cdot 2 \cdot x \cdot x = 4x^2$.

Ejemplo de salón de clases
Hallar el máximo común divisor de $20m^3n^2$, $30mn^3$ y $45mn$.

EJEMPLO 2 Hallar el máximo común divisor de $16x^2y$, $24x^3y^2$ y $32xy$.

Solución

$$\begin{aligned} 16x^2y &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot y \\ 24x^3y^2 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \\ 32xy &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot y \end{aligned}$$

De las factorizaciones, se nota que 2, x, y y son los divisores en común.

Debido a que el factor 2 ocurre al menos tres veces en cada factorización, se necesitarán tres factores de 2 para el máximo común divisor. La variable x ocurre al menos una vez en cada factorización, así que se necesitará un factor de x para el máximo común divisor. La variable y ocurre al menos una vez en cada factorización, así que se necesitará un factor de y para el máximo común divisor.

Por ende, el máximo común divisor es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot y = 8xy$.

Se ha usado la propiedad distributiva para multiplicar un polinomio por un monomio; por ejemplo,

$$3x(x + 2) = 3x^2 + 6x$$

Suponga que empieza con $3x^2 + 6x$ y quiere expresarlo en forma factorizada. Se usa la propiedad distributiva en la forma $ab + ac = a(b + c)$.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6x &= 3x(x) + 3x(2) && \text{3x es el máximo común divisor de } 3x^2 \text{ y} \\ &= 3x(x + 2) && \text{Usar la propiedad distributiva} \end{aligned}$$

Los siguientes cuatro ejemplos ilustran este proceso de **factorización del factor monomial común más alto**.

Ejemplo de salón de clases
Factorizar $18x^4 - 24x^2$.

EJEMPLO 3 Factorizar $12x^3 - 8x^2$.

Solución

Puede determinar por inspección que 4 es el máximo común divisor de los coeficientes 12 y 8. Además, el exponente más pequeño en la variable x es 2, así que el máximo común divisor para la variable x es x^2. Así, el máximo común divisor de ambos términos es $4x^2$.

$$\begin{aligned} 12x^3 - 8x^2 &= 4x^2(3x) - 4x^2(2) \\ &= 4x^2(3x - 2) && ab - ac = a(b - c) \end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Factorizar $15ab^3 + 27a^2b$.

EJEMPLO 4 Factorizar $12x^2y + 18xy^2$.

Solución

Por inspección puede determinar que 6xy es el máximo común divisor de ambos términos.

$$\begin{aligned} 12x^2y + 18xy^2 &= 6xy(2x) + 6xy(3y) \\ &= 6xy(2x + 3y) \end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Factorizar $12k^2 - 33k^3 + 51k^5$.

EJEMPLO 5 Factorizar $24x^3 + 30x^4 - 42x^5$.

Solución

Use la factorización prima para determinar el máximo común divisor de los coeficientes.

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$
$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$
$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

Para el máximo común divisor de los coeficientes, se necesita un factor de 2 y un factor de 3. Entonces, el máximo común divisor de los coeficientes es $2 \cdot 3 = 6$. El exponente más pequeño de la variable x es 3, así que el máximo común divisor para la variable x es x^3. Entonces, el máximo común divisor de los tres términos es $6x^3$.

$$\begin{aligned} 24x^3 + 30x^4 - 42x^5 &= 6x^3(4) + 6x^3(5x) - 6x^3(7x^2) \\ &= 6x^3(4 + 5x - 7x^2) \end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Factorizar $5y^4 + 5y^3$.

EJEMPLO 6 Factorizar $9x^2 + 9x$.

Solución

Por inspección se puede determinar que $9x$ es el máximo común divisor de ambos términos.

$$\begin{aligned} 9x^2 + 9x &= 9x(x) + 9x(1) \\ &= 9x(x + 1) \end{aligned}$$

Para aplicar la propiedad distributiva, $9x$ se escribe como $9x(1)$.

Preste especial atención en el punto hecho justo antes del ejemplo 3. Es importante darse cuenta que se está factorizando el factor monomial común más alto. Se podría factorizar una expresión como $9x^2 + 9x$ en el ejemplo 6 como

$$9x(x + 1) \quad \text{o} \quad 9(x^2 + x) \quad \text{o} \quad 3(3x^2 + 3x) \quad \text{o}$$
$$3x(3x + 3) \quad \text{o} \quad \frac{1}{2}(18x^2 + 18x)$$

Sin embargo, se está interesado principalmente en la primera de las formas de factorización anteriores, que se conoce como **forma completamente factorizada**. Un polinomio con coeficientes enteros es una forma completamente factorizada si

1. Se expresa como un producto de polinomios con *coeficientes enteros*, y
2. Ningún polinomio, distinto a un monomio, dentro de la forma factorizada se puede factorizar aún más en polinomios con coeficientes enteros.

Entonces, $9(x^2 + x)$, $3(3x^2 + 3x)$ y $3x(3x + 3)$ no están completamente factorizados porque violan la segunda condición. La forma $\frac{1}{2}(18x^2 + 18x)$ viola ambas condiciones.

Ejemplo de salón de clases
Para cada una de las siguientes, determinar si la factorización está en forma completamente factorizada. De no estarlo, establezca qué regla está violando.
(a) $5x^6 + 15x^7 = 5x^5(x + 3x^2)$
(b) $12m^2 + 4m = 4m(3m + 1)$
(c) $12p^7 + 3p^3 = 12p^3(p^4 + 0.25)$
(d) $24a^4 + 12a = 3a(8a^3 + 4)$

EJEMPLO 7

Para cada una de las siguientes, determinar si la factorización está en forma completamente factorizada. De no estarlo, establezca qué regla se está violando.

(a) $4m^3 + 8m^4 = 4m^2(m + 2m^2)$ **(b)** $32p^2 + 8p = 8p(4p + 1)$

(c) $8y^5 + 4y^2 = 8y^2(y^3 + 0.5)$ **(d)** $10b^3 + 20b = 2b(5b^2 + 10)$

Solución

(a) No, no está en forma completamente factorizada. El polinomio dentro del paréntesis puede factorizarse más.

(b) Sí, está completamente factorizada.

(c) No, no está completamente factorizada. El coeficiente de 0.5 no es un entero.

(d) No, no está completamente factorizada. El polinomio dentro del paréntesis puede factorizarse más.

Factorizar el factor binomial común

En ocasiones puede haber un factor binomial común en lugar de un factor monomial común. Por ejemplo, cada uno de los dos términos de la expresión $x(y + 2) + z(y + 2)$ tiene un factor binomial $(y + 2)$. Por ende, se puede factorizar $(y + 2)$ de cada término, y el resultado es

$$x(y + 2) + z(y + 2) = (y + 2)(x + z)$$

Considere algunos ejemplos más que implican un factor binomial común.

Ejemplo de salón de clases
Para cada una de las siguientes, factorizar el factor binomial común.
(a) $n^3(m + 2) + 4(m + 2)$
(b) $a(3b + 4) - b(3b + 4)$
(c) $y(y - 3) + 5(y - 3)$

EJEMPLO 8 Para cada una de las siguientes, factorizar el factor binomial común:

(a) $a^2(b + 1) + 2(b + 1)$ **(b)** $x(2y - 1) - y(2y - 1)$ **(c)** $x(x + 2) + 3(x + 2)$

Solución

(a) $a^2(b + 1) + 2(b + 1) = (b + 1)(a^2 + 2)$

(b) $x(2y - 1) - y(2y - 1) = (2y - 1)(x - y)$

(c) $x(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x + 3)$

Factorización por agrupamiento

Es posible que el polinomio original no muestre factor monomial o binomial evidente, que es el caso con $ab + 3a + bc + 3c$. Sin embargo, al factorizar a de los primeros dos términos y c de los últimos dos términos se obtiene

$$ab + 3a + bc + 3c = a(b + 3) + c(b + 3)$$

Ahora es obvio un factor binomial común de $(b + 3)$ y se procede como antes.

$$a(b + 3) + c(b + 3) = (b + 3)(a + c)$$

A este proceso de factorización se le conoce como factorización por agrupamiento. Considere algunos ejemplos de este tipo.

Ejemplo de salón de clases
Factorizar usando factorización por agrupamiento.
(a) $x^2y + 4x^2 - 3y^2 - 12y$
(b) $x^2 - 5x + 2x - 10$
(c) $m^2 - 2m + 4m - 8$

EJEMPLO 9 Factorizar usando factorización por agrupamiento.

(a) $ab^2 - 4b^2 + 3a - 12$ **(b)** $x^2 - x + 5x - 5$ **(c)** $x^2 + 2x - 3x - 6$

Solución

(a) $ab^2 - 4b^2 + 3a - 12 = b^2(a - 4) + 3(a - 4)$ Factorice b^2 de los dos primeros términos y 3 de los dos últimos términos.

$= (a - 4)(b^2 + 3)$ Factorice los binomios comunes de ambos términos.

(b) $x^2 - x + 5x - 5 = x(x - 1) + 5(x - 1)$ Factorice x de los dos primeros términos y 5 de los dos últimos términos

$= (x - 1)(x + 5)$ Factorice los binomios comunes de ambos términos

(c) $x^2 + 2x - 3x - 6 = x(x + 2) - 3(x + 2)$ — Factorice x de los dos primeros términos y -3 de los dos últimos términos

$= (x + 2)(x - 3)$ — Factorice los binomios comunes de ambos términos

De vuelta a la resolución de ecuaciones

Suponga que se le dice que el producto de dos números es 0. ¿Qué se sabe de los números? ¿Está de acuerdo con la conclusión de que al menos uno de los números debe ser 0? La siguiente propiedad formaliza esta idea.

Propiedad 6.1

Sean a y b números reales. Entonces,

$$ab = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad a = 0 \text{ o } b = 0$$

La propiedad 6.1 proporciona otra técnica para resolver ecuaciones.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $m^2 - 8m = 0$.

EJEMPLO 10 Resolver $x^2 + 6x = 0$.

Solución

Para resolver ecuaciones aplicando la propiedad 6.1, un lado de la ecuación debe ser un producto y el otro lado de la ecuación debe ser cero. Esta ecuación ya tiene un cero a la derecha de la ecuación, pero el lado izquierdo de esta ecuación es una suma. Factorice el lado izquierdo, $x^2 + 6x$, para cambiar la suma a un producto.

$$x^2 + 6x = 0$$
$$x(x + 6) = 0 \qquad \text{Factorizar}$$
$$x = 0 \quad \text{o} \quad x + 6 = 0 \qquad ab = 0 \text{ si y sólo si } a = 0 \text{ o } b = 0$$
$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = -6$$

El conjunto solución es $\{-6, 0\}$. (Asegúrese de comprobar ambos valores en la ecuación original).

Ejemplo de salón de clases
Resolver $x^2 = 17x$.

EJEMPLO 11 Resolver $x^2 = 12x$.

Solución

Para resolver esta ecuación con la propiedad 6.1, se necesita agregar un cero a la derecha de la ecuación sumando $-12x$ a ambos lados. Después factorice la expresión en el lado izquierdo de la ecuación.

$$x^2 = 12x$$
$$x^2 - 12x = 0 \qquad \text{Sume a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de } 12x \text{ a ambos lados}$$
$$x(x - 12) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{o} \quad x - 12 = 0 \qquad ab = 0 \text{ si y sólo si } a = 0 \text{ o } b = 0$$
$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 12$$

El conjunto solución es $\{0, 12\}$.

Comentario: Note que en el ejemplo 11 *no* se dividieron ambos lados de la ecuación entre x. Esto haría que se perdiera la solución de 0.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $5d^2 - 7d = 0$.

EJEMPLO 12 Resolver $4x^2 - 3x = 0$.

Solución

$$
\begin{aligned}
4x^2 - 3x &= 0 \\
x(4x - 3) &= 0 \\
x = 0 \quad \text{o} \quad 4x - 3 &= 0 \qquad ab = 0 \text{ si y sólo si } a = 0 \text{ o } b = 0 \\
x = 0 \quad \text{o} \quad 4x &= 3 \\
x = 0 \quad \text{o} \quad x &= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

El conjunto solución es $\left\{0, \frac{3}{4}\right\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $w(w - 8) + 11(w - 8) = 0$.

EJEMPLO 13 Resolver $x(x + 2) + 3(x + 2) = 0$.

Solución

Para resolver esta ecuación con la propiedad 6.1, se debe factorizar el lado izquierdo de la ecuación. El máximo común divisor de los términos es $(x + 2)$.

$$
\begin{aligned}
x(x + 2) + 3(x + 2) &= 0 \\
(x + 2)(x + 3) &= 0 \\
x + 2 = 0 \quad \text{o} \quad x + 3 &= 0 \qquad ab = 0 \text{ si y sólo si } a = 0 \text{ o } b = 0 \\
x = -2 \quad \text{o} \quad x &= -3
\end{aligned}
$$

El conjunto solución es $\{-3, -2\}$.

Cada vez que expanda su capacidad para resolver ecuaciones, también adquiere más técnicas para resolver problemas. A continuación resolverá un problema geométrico con las ideas aprendidas en esta sección.

Ejemplo de salón de clases
El área de un cuadrado es tres veces su perímetro. Encontrar la longitud de un lado del cuadrado.

EJEMPLO 14 Aplique su habilidad

El área de un cuadrado es dos veces su perímetro. Encontrar la longitud de un lado del cuadrado.

Solución

Dibuje un cuadrado y sea s la longitud de un lado del cuadrado (figura 6.1). El área se representa mediante s^2 y el perímetro por $4s$. Por tanto,

$$
\begin{aligned}
s^2 &= 2(4s) \\
s^2 &= 8s \\
s^2 - 8s &= 0 \\
s(s - 8) &= 0 \\
s = 0 \quad \text{or} \quad s - 8 &= 0 \\
s = 0 \quad \text{or} \quad s &= 8
\end{aligned}
$$

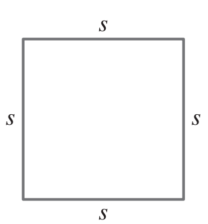


Figura 6.1

Puesto que 0 no es una solución razonable para el problema, la solución es 8. (¡Asegúrese de comprobar esta respuesta en el enunciado original del problema!)

Examen de conceptos 6.1

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. El máximo común divisor de $6x^2y^3 - 12x^3y^2 + 18x^4y$ es $2x^2y$.
2. Si la forma factorizada de un polinomio puede factorizarse aún más, entonces no cumple con las condiciones para ser considerado “completamente factorizado”.
3. Los factores comunes siempre son monomios.
4. Si el producto de x y y es cero, entonces x es cero o y es cero.
5. La forma factorizada $3a(2a^2 + 4)$ está completamente factorizada.
6. Las soluciones para la ecuación $x(x + 2) = 7$ son 7 y 5.
7. El conjunto solución para $x^2 = 7x$ es $\{7\}$.
8. El conjunto solución para $x(x - 2) - 3(x - 2) = 0$ es $\{2, 3\}$.
9. El conjunto solución para $-3x = x^2$ es $\{23, 0\}$.
10. El conjunto solución para $x(x + 6) = 2(x + 6)$ es $\{-6\}$.

Conjunto de problemas 6.1

Para los problemas 1-10, hallar el máximo común divisor para las expresiones dadas. **(Objetivo 1)**

1. $24y$ y $30xy$
2. $32x$ y $40xy$
3. $60x^2y$ y $84xy^2$
4. $72x^3$ y $63x^2$
5. $42ab^3$ y $70a^2b^2$
6. $48a^2b^2$ y $96ab^4$
7. $6x^3$, $8x$, y $24x^2$
8. $72xy$, $36x^2y$, y $84xy^2$
9. $16a^2b^2$, $40a^2b^3$, y $56a^3b^4$
10. $70a^3b^3$, $42a^2b^4$, y $49ab^5$

Para los problemas 11-46, factorizar cada polinomio completamente. **(Objetivo 2)**

11. $8x + 12y$
12. $18x + 24y$
13. $14xy - 21y$
14. $24x - 40xy$
15. $18x^2 + 45x$
16. $12x + 28x^3$
17. $12xy^2 - 30x^2y$
18. $28x^2y^2 - 49x^2y$
19. $36a^2b - 60a^3b^4$
20. $65ab^3 - 45a^2b^2$
21. $16xy^3 + 25x^2y^2$
22. $12x^2y^2 + 29x^2y$
23. $64ab - 72cd$
24. $45xy - 72zw$
25. $9a^2b^4 - 27a^2b$
26. $7a^3b^5 - 42a^2b^6$
27. $52x^4y^2 + 60x^6y$
28. $70x^5y^3 - 42x^8y^2$
29. $40x^2y^2 + 8x^2y$
30. $84x^2y^3 + 12xy^3$
31. $12x + 15xy + 21x^2$
32. $30x^2y + 40xy + 55y$
33. $2x^3 - 3x^2 + 4x$
34. $x^4 + x^3 + x^2$
35. $44y^5 - 24y^3 - 20y^2$
36. $14a - 18a^3 - 26a^5$
37. $14a^2b^3 + 35ab^2 - 49a^3b$
38. $24a^3b^2 + 36a^2b^4 - 60a^4b^3$
39. $x(y + 1) + z(y + 1)$
40. $a(c + d) + 2(c + d)$
41. $a(b - 4) - c(b - 4)$
42. $x(y - 6) - 3(y - 6)$
43. $x(x + 3) + 6(x + 3)$
44. $x(x - 7) + 9(x - 7)$
45. $2x(x + 1) - 3(x + 1)$
46. $4x(x + 8) - 5(x + 8)$

Para los problemas 47-60, factorizar cada polinomio usando factorización por agrupamiento. **(Objetivo 3)**

47. $5x + 5y + bx + by$
48. $7x + 7y + zx + zy$
49. $bx - by - cx + cy$
50. $2x - 2y - ax + ay$
51. $ac + bc + a + b$
52. $x + y + ax + ay$

53. $x^2 + 5x + 12x + 60$

54. $x^2 + 3x + 7x + 21$

55. $x^2 - 2x - 8x + 16$

56. $x^2 - 4x - 9x + 36$

57. $2x^2 + x - 10x - 5$

58. $3x^2 + 2x - 18x - 12$

59. $6n^2 - 3n - 8n + 4$

60. $20n^2 + 8n - 15n - 6$

Para los problemas 61-84, resolver cada ecuación. **(Objetivo 4)**

61. $x^2 - 8x = 0$

62. $x^2 - 12x = 0$

63. $x^2 + x = 0$

64. $x^2 + 7x = 0$

65. $n^2 = 5n$

66. $n^2 = -2n$

67. $2y^2 - 3y = 0$

68. $4y^2 - 7y = 0$

69. $7x^2 = -3x$

70. $5x^2 = -2x$

71. $3n^2 + 15n = 0$

72. $6n^2 - 24n = 0$

73. $4x^2 = 6x$

74. $12x^2 = 8x$

75. $7x - x^2 = 0$

76. $9x - x^2 = 0$

77. $13x = x^2$

78. $15x = -x^2$

79. $5x = -2x^2$

80. $7x = -5x^2$

81. $x(x + 5) - 4(x + 5) = 0$

82. $x(3x - 2) - 7(3x - 2) = 0$

83. $4(x - 6) - x(x - 6) = 0$

84. $x(x + 9) = 2(x + 9)$

Para los problemas 85-91, plantear una ecuación y resolver cada problema. **(Objetivo 4)**

85. El cuadrado de un número es igual a nueve veces ese número. Encontrar el número.

86. Suponga que cuatro veces el cuadrado de un número es igual a 20 veces ese número. ¿Cuál es el número?

87. El área de un cuadrado es igual a cinco veces su perímetro. Hallar el largo de un lado del cuadrado.

88. El área de un cuadrado es igual a 14 el área de un triángulo. Un lado del triángulo mide 7 pulgadas, y la altura de ese lado mide lo mismo que un lado del cuadrado. Encontrar la longitud de un lado del cuadrado. También encuentre las áreas de ambas figuras y asegúrese de comprobar sus respuestas.

89. Suponga que el área de un círculo es igual al perímetro de un cuadrado y que el radio del círculo mide lo mismo que el largo de un lado del cuadrado. Encontrar el largo de un lado del cuadrado. Exprese su respuesta en términos de π.

90. Un lado de un paralelogramo, la altura a ese lado y un lado de un rectángulo miden lo mismo. Si un lado adyacente del rectángulo mide 20 centímetros, y el área del rectángulo mide el doble que el área del paralelogramo, encontrar las áreas de ambas figuras.

91. El área de un rectángulo mide el doble que el área de un cuadrado. Si el rectángulo mide 6 pulgadas de largo y el ancho del rectángulo mide lo mismo que un lado del cuadrado, encontrar las dimensiones del rectángulo y del cuadrado.

Pensamientos en palabras

92. Suponga que su amiga factoriza $24x^2y + 36xy$ del modo siguiente:

$$\begin{aligned} 24x^2y + 36xy &= 4xy(6x + 9) \\ &= (4xy)(3)(2x + 3) \\ &= 12xy(2x + 3) \end{aligned}$$

¿Es esto correcto? ¿Tendría alguna sugerencia para cambiar el método de su amiga?

93. Se da la siguiente solución a la ecuación $x(x - 10) = 0$.

$$\begin{aligned} x(x - 10) &= 0 \\ x^2 - 10x &= 0 \\ x(x - 10) &= 0 \\ x = 0 \quad \text{o} \quad x - 10 &= 0 \\ x = 0 \quad \text{o} \quad x &= 10 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{0, 10\}$. ¿Esta solución es correcta? ¿Sugeriría algún cambio al método?

Más investigación

94. El área total de la superficie de un cilindro circular se encuentra con la fórmula $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, donde r representa el radio de la base y h representa la altura del cilindro. Para propósitos computacionales, puede que sea conveniente cambiar el orden del lado derecho de la fórmula por medio de la factorización.

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$$

Use $A = 2\pi r(r + h)$ para encontrar el área total de la superficie de los siguientes cilindros. Use $\frac{22}{7}$ como un aproximado de π.

(a) $r = 7$ centímetros y $h = 12$ centímetros

(b) $r = 14$ metros y $h = 20$ metros

(c) $r = 3$ pies y $h = 4$ pies

(d) $r = 5$ yardas y $h = 9$ yardas

95. La fórmula $A = P + Prt$ da la cantidad total de dinero acumulado (A) cuando P dólares se invierten a r tasa de interés simple por t años. Para propósitos computacionales, puede que sea conveniente cambiar el lado derecho de la fórmula con factorización.

$A = P + Prt = P(1 + rt)$

Use $A = P(1 + rt)$ para hallar la cantidad total de dinero acumulado para las siguientes inversiones.

(a) \$100 a 8% por 2 años

(b) \$200 a 9% por 3 años

(c) \$500 a 10% por 5 años

(d) \$1000 a 10% por 10 años

Para los problemas 96-99, resolver para la variable indicada.

96. $ax + bx = c$ para x

97. $b^2x^2 - cx = 0$ para x

98. $5ay^2 = by$ para y

99. $y + ay - by - c = 0$ para y

Respuestas del examen de conceptos

1. Falso **2.** Cierto **3.** Falso **4.** Cierto **5.** Falso **6.** Falso **7.** Falso **8.** Cierto **9.** Cierto **10.** Falso

6.2 Factorizar la diferencia de dos cuadrados

OBJETIVOS

1 Factorizar la diferencia de dos cuadrados

2 Resolver ecuaciones factorizando la diferencia de dos cuadrados

En la sección 5.3 se examinaron algunos patrones de multiplicación especiales. Uno de estos patrones fue

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Se puede ver este mismo patrón de la siguiente manera:

Diferencia de dos cuadrados

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Aplicar el patrón es bastante sencillo, como lo demuestran los siguientes ejemplos. De nuevo, los pasos en los recuadros con línea discontinua por lo general se realizan mentalmente.

$$\begin{aligned}
x^2 - 36 &= \boxed{(x)^2 - (6)^2} = (x - 6)(x + 6)\\
4x^2 - 25 &= \boxed{(2x)^2 - (5)^2} = (2x - 5)(2x + 5)\\
9x^2 - 16y^2 &= \boxed{(3x)^2 - (4y)^2} = (3x - 4y)(3x + 4y)\\
64 - y^2 &= \boxed{(8)^2 - (y)^2} = (8 - y)(8 + y)
\end{aligned}$$

La multiplicación es conmutativa, de modo que el orden de escritura de los factores no es importante. Por ejemplo, $(x - 6)(x + 6)$ también se puede escribir como $(x + 6)(x - 6)$.

Debe tener cuidado de no suponer un patrón de factorización análogo para la suma de dos cuadrados; no existe. Por ejemplo, $x^2 + 4 \neq (x + 2)(x + 2)$, porque $(x + 2)(x + 2) = x^2 + 4x + 4$. Se dice que la suma de dos cuadrados no es factorizable con el uso de enteros. La frase "con el uso de enteros" es necesaria porque $x^2 + 4$ podría escribirse $\frac{1}{2}(2x^2 + 8)$, pero tal factorización no ayuda. Es más, no se considera $(1)(x^2 + 4)$ como factorización de $x^2 + 4$.

Es posible aplicar al mismo problema tanto la técnica de *factorización de un factor monomial común*, como el patrón de la *diferencia de cuadrados*. En general, es mejor buscar primero un factor monomial común.

Ejemplo de salón de clases
Factorizar $7x^2 - 28$.

EJEMPLO 1 Factorizar $2x^2 - 50$.

Solución

$$2x^2 - 50 = 2(x^2 - 25) \quad \text{Factor común de 2}$$
$$= 2(x - 5)(x + 5) \quad \text{Diferencia de cuadrados}$$

En el ejemplo 1, al expresar $2x^2 - 50$ como $2(x - 5)(x + 5)$, se dice que la expresión algebraica se ha factorizado completamente. Eso significa que los factores 2, $x - 5$ y $x + 5$ no pueden ser factorizados aún más usando enteros.

Ejemplo de salón de clases
Factorizar completamente $32m^3 - 50m$.

EJEMPLO 2 Factorizar completamente $18y^3 - 8y$.

Solución

$$18y^3 - 8y = 2y(9y^2 - 4) \quad \text{Factor común de } 2y$$
$$= 2y(3y - 2)(3y + 2) \quad \text{Diferencia de cuadrados}$$

A veces es posible aplicar el patrón de la diferencia de cuadrados más de una vez. Considere el siguiente ejemplo.

Ejemplo de salón de clases
Factorizar completamente $y^4 - 81$.

EJEMPLO 3 Factorizar completamente $x^4 - 16$.

Solución

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4)$$
$$= (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$$

Los siguientes ejemplos le ayudarán a resumir las ideas de factorización presentadas hasta el momento.

$5x^2 + 20 = 5(x^2 + 4)$

$25 - y^2 = (5 - y)(5 + y)$

$3 - 3x^2 = 3(1 - x^2) = 3(1 + x)(1 - x)$

$36x^2 - 49y^2 = (6x - 7y)(6x + 7y)$

$a^2 + 9$ no es factorizable usando enteros

$9x + 17y$ no es factorizable usando enteros

Resolución de ecuaciones

Cada que aprende una nueva técnica de factorización, también desarrolla más herramientas para resolver ecuaciones. Considere cómo puede usar el patrón de la factorización de diferencia de cuadrados para ayudarle a resolver ciertos tipos de ecuaciones.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $x^2 = 49$.

EJEMPLO 4 Resolver $x^2 = 25$.

Solución

$$\begin{aligned} x^2 &= 25 \\ x^2 - 25 &= 0 \qquad \text{Sumar a ambos lados el inverso aditivo de 25} \\ (x+5)(x-5) &= 0 \\ x+5 = 0 \quad &\text{o} \quad x-5=0 \qquad \text{Recuerde: } ab = 0 \text{ si y sólo si } a = 0 \text{ o } b = 0 \\ x = -5 \quad &\text{o} \quad x = 5 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{-5, 5\}$. ¡Verifique estas respuestas!

Ejemplo de salón de clases
Resolver $64a^2 = 121$.

EJEMPLO 5 Resolver $9x^2 = 25$.

Solución

$$\begin{aligned} 9x^2 &= 25 \\ 9x^2 - 25 &= 0 \\ (3x+5)(3x-5) &= 0 \\ 3x+5=0 \quad &\text{o} \quad 3x-5=0 \\ 3x=-5 \quad &\text{o} \quad 3x=5 \\ x=-\frac{5}{3} \quad &\text{o} \quad x=\frac{5}{3} \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $3x^2 = 27$.

EJEMPLO 6 Resolver $5y^2 = 20$.

Solución

$$\begin{aligned} 5y^2 &= 20 \\ \frac{5y^2}{5} &= \frac{20}{5} \qquad \text{Multiplicar a ambos lados de la igualdad por el inverso multiplicativo de 5, es decir } \frac{1}{5} \\ y^2 &= 4 \\ y^2 - 4 &= 0 \\ (y+2)(y-2) &= 0 \\ y+2=0 \quad &\text{o} \quad y-2=0 \\ y=-2 \quad &\text{o} \quad y=2 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{-2, 2\}$. ¡Verifíquelo!

Ejemplo de salón de clases
Resolver $c^3 - 36c = 0$.

EJEMPLO 7 Resolver $x^3 - 9x = 0$.

Solución

$$\begin{aligned} x^3 - 9x &= 0 \\ x(x^2-9) &= 0 \\ x(x-3)(x+3) &= 0 \\ x=0 \quad \text{o} \quad x-3=0 \quad &\text{o} \quad x+3=0 \\ x=0 \quad \text{o} \quad x=3 \quad &\text{o} \quad x=-3 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{-3, 0, 3\}$.

Mientras más sepa acerca de resolver ecuaciones, mejor podrá resolver problemas verbales.

Ejemplo de salón de clases

El área combinada de dos cuadrados es 360 pulgadas cuadradas. Cada lado de un cuadrado es tres veces el largo de un lado del otro cuadrado. Encontrar las dimensiones de cada uno de los cuadrados.

EJEMPLO 8 Aplique su habilidad

El área combinada de dos cuadrados es 20 centímetros cuadrados. Cada lado de un cuadrado es dos veces el largo de un lado del otro cuadrado. Encuentre las dimensiones de cada uno de los cuadrados.

Solución

Puede dibujar dos cuadrados y etiquetar los lados del cuadrado pequeño como s (ver figura 6.2). Luego los lados del cuadrado más grande como $2s$. Ya que la suma de las áreas de los dos cuadrados es 20 centímetros cuadrados, puede plantear y resolver la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} s^2 + (2s)^2 &= 20 \\ s^2 + 4s^2 &= 20 \\ 5s^2 &= 20 \\ s^2 &= 4 \\ s^2 - 4 &= 0 \\ (s+2)(s-2) &= 0 \\ s + 2 = 0 \quad \text{o} \quad & s - 2 = 0 \\ s = -2 \quad \text{o} \quad & s = 2 \end{aligned}$$

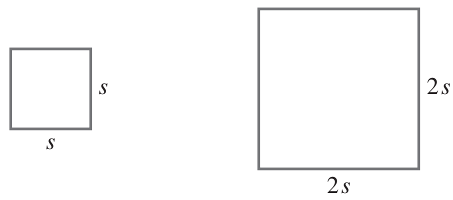


Figura 6.2

Puesto que s representa la longitud de un lado de un cuadrado, la solución -2 tiene que desecharse. Por ende, la longitud de un lado del cuadrado pequeño es 2 centímetros y el cuadrado grande tiene lados de longitud $2(2) = 4$ centímetros.

Examen de conceptos 6.2

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. Un binomio que tiene dos términos cuadrados perfectos que se restan es llamado diferencia de dos cuadrados.
2. La suma de dos cuadrados es factorizable usando enteros.
3. Cuando se factoriza, lo mejor suele ser buscar un factor en común primero.
4. El polinomio $4x^2 + y^2$ se factoriza $(2x + y)(2x + y)$.
5. La forma completamente factorizada de $y^4 - 81$ es $(y^2 + 9)(y^2 - 9)$.
6. El conjunto solución de $x^2 = -16$ es $\{-4\}$.
7. El conjunto solución de $5x^3 - 5x = 0$ es $\{-1, 0, 1\}$.
8. El conjunto solución de $x^4 - 9x^2 = 0$ es $\{-3, 0, 3\}$.
9. La forma completamente factorizada de $x^4 - 1$ es $(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$.
10. La forma completamente factorizada de $2x^3y - 8xy$ es $2xy(x + 2)(x - 2)$.

Conjunto de problemas 6.2

Para los problemas 1-12, factorizar cada polinomio completamente. **(Objetivo 1)**

1. $x^2 - 1$
2. $x^2 - 25$
3. $x^2 - 100$
4. $x^2 - 121$
5. $x^2 - 4y^2$
6. $x^2 - 36y^2$
7. $9x^2 - y^2$
8. $49y^2 - 64x^2$
9. $36a^2 - 25b^2$
10. $4a^2 - 81b^2$
11. $1 - 4n^2$
12. $4 - 9n^2$

Para los problemas 13-44, factorizar por completo cada polinomio. Indicar cualquiera que no sea factorizable usando enteros. No olvide buscar primero un factor monomial común. **(Objetivo 1)**

13. $5x^2 - 20$ **14.** $7x^2 - 7$

15. $8x^2 + 32$ **16.** $12x^2 + 60$

17. $2x^2 - 18y^2$ **18.** $8x^2 - 32y^2$

19. $x^3 - 25x$ **20.** $2x^3 - 2x$

21. $x^2 + 9y^2$ **22.** $18x - 42y$

23. $45x^2 - 36xy$ **24.** $16x^2 + 25y^2$

25. $36 - 4x^2$ **26.** $75 - 3x^2$

27. $4a^4 + 16a^2$ **28.** $9a^4 + 81a^2$

29. $x^4 - 81$ **30.** $16 - x^4$

31. $x^4 + x^2$ **32.** $x^5 + 2x^3$

33. $3x^3 + 48x$ **34.** $6x^3 + 24x$

35. $5x - 20x^3$ **36.** $4x - 36x^3$

37. $4x^2 - 64$ **38.** $9x^2 - 9$

39. $75x^3y - 12xy^3$ **40.** $32x^3y - 18xy^3$

41. $16x^4 - 81y^4$ **42.** $x^4 - 1$

43. $81 - x^4$ **44.** $81x^4 - 16y^4$

Para los problemas 45-68, resolver cada ecuación. **(Objetivo 2)**

45. $x^2 = 9$ **46.** $x^2 = 1$

47. $4 = n^2$ **48.** $144 = n^2$

49. $9x^2 = 16$ **50.** $4x^2 = 9$

51. $n^2 - 121 = 0$ **52.** $n^2 - 81 = 0$

53. $25x^2 = 4$ **54.** $49x^2 = 36$

55. $3x^2 = 75$ **56.** $7x^2 = 28$

57. $3x^3 - 48x = 0$ **58.** $x^3 - x = 0$

59. $n^3 = 16n$ **60.** $2n^3 = 8n$

61. $5 - 45x^2 = 0$ **62.** $3 - 12x^2 = 0$

63. $4x^3 - 400x = 0$ **64.** $2x^3 - 98x = 0$

65. $64x^2 = 81$ **66.** $81x^2 = 25$

67. $36x^3 = 9x$ **68.** $64x^3 = 4x$

Para los problemas 69-80 establezca una ecuación y resuelva cada uno de los siguientes problemas. **(Objetivo 2)**

69. Cuarenta y nueve menos que el cuadrado de un número es igual a cero. Encontrar el número.

70. El cubo de un número es igual a nueve veces el mismo número. Encontrar el número.

71. Suponga que cinco veces el cubo de un número es igual a 80 veces el número. Hallar el número.

72. Diez veces el cuadrado de un número es igual a 40. Hallar el número.

73. La suma de las áreas de dos cuadrados es 234 pulgadas cuadradas. Cada lado del cuadrado más grande es cinco veces el largo de un lado del cuadrado más chico. Encontrar el largo de un lado de cada cuadrado.

74. La diferencia de las áreas de dos cuadrados es 75 pies cuadrados. Cada lado del cuadrado más grande es el doble del largo de un lado del cuadrado más chico. Encontrar el largo de un lado de cada cuadrado.

75. Suponga que el largo de cierto rectángulo es $2\frac{1}{2}$ veces su ancho, y el área del mismo rectángulo es 160 centímetros cuadrados. Encontrar el largo y ancho del rectángulo.

76. Suponga que el ancho de cierto rectángulo es tres cuartas partes de su largo, y el área del mismo rectángulo es 108 metros cuadrados. Hallar el largo y ancho del rectángulo.

77. El área combinada de dos círculos es 80π metros cuadrados. Encuentre la longitud del radio de cada círculo si la longitud del radio de un círculo es el doble de la longitud del radio del otro círculo.

78. El área de un tríangulo es 98 pies cuadrados. Si un lado del triángulo y la altitud a ese lado miden lo mismo, hallar el largo.

79. El área total de la superficie de un cilindro circular es 100π centímetros cuadrados. Si el radio de la base y la altura del cilindro miden lo mismo, hallar la longitud del radio.

80. El área total de la superficie de un cono circular es 192π pies cuadrados. Si la inclinación del cono es igual al diámetro de la base, hallar la longitud del radio.

Pensamientos en palabras

81. ¿Cómo se sabe que la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene una solución en números reales?

82. ¿Por qué está incompleto el siguiente proceso de factorización?

$16x^2 - 64 = (4x + 8)(4x - 8)$

¿Cómo podría hacerse la factorización?

83. Considere la siguiente solución

$$\begin{aligned}
4x^2 - 36 &= 0\\
4(x^2 - 9) &= 0\\
4(x + 3)(x - 3) &= 0\\
4 = 0 \quad \text{o} \quad x + 3 = 0 \quad &\text{o} \quad x - 3 = 0\\
4 = 0 \quad \text{o} \quad x = -3 \quad &\text{o} \quad x = 3
\end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{-3, 3\}$. ¿Es ésta la respuesta correcta? ¿Tiene alguna sugerencia que ofrecerle a la persona que resolvió este problema?

Más investigación

Los siguientes patrones pueden usarse para factorizar la suma y la diferencia de dos cubos.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Considere estos ejemplos.

$$x^3 + 8 = (x)^3 + (2)^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$
$$x^3 - 1 = (x)^3 - (1)^3 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Use el patrón de suma y resta de cubos para factorizar cada polinomio.

84. $x^3 + 1$

85. $x^3 - 8$

86. $n^3 - 27$

87. $n^3 + 64$

88. $8x^3 + 27y^3$

89. $27a^3 - 64b^3$

90. $1 - 8x^3$

91. $1 + 27a^3$

92. $x^3 + 8y^3$

93. $8x^3 - y^3$

94. $a^3b^3 - 1$

95. $27x^3 - 8y^3$

96. $8 + n^3$

97. $125x^3 + 8y^3$

98. $27n^3 - 125$

99. $64 + x^3$

Respuestas del examen de conceptos

1. Cierto **2.** Falso **3.** Cierto **4.** Falso **5.** Falso **6.** Falso **7.** Cierto **8.** Cierto **9.** Cierto **10.** Cierto

6.3 Factorizar trinomios en la forma x^2 1 bx 1 c

OBJETIVOS

1. Factorizar trinomios en la forma $x^2 + bx + c$
2. Usar la factorización de trinomios para resolver ecuaciones
3. Resolver problemas verbales que implican número consecutivos
4. Usar el teorema de Pitágoras para resolver problemas

Uno de los tipos de factorización más comunes utilizados en álgebra es la expresión de un trinomio como producto de dos binomios. En esta sección, se considerarán los trinomios para los cuales el coeficiente del término al cuadrado es 1; es decir, trinomios en la forma $x^2 + bx + c$.

Para desarrollar una técnica de factorización, observe primero algunas ideas de multiplicación. Considere el producto $(x + r)(x + s)$ y use la propiedad distributiva para mostrar cómo se forma cada término del trinomio resultante.

$$(x + r)(x + s) = \underbrace{x(x)}_{x^2} + \underbrace{x(s) + r(x)}_{(s + r)x} + \underbrace{r(s)}_{rs}$$

$$x^2 \quad + \quad (s + r)x \quad + \quad rs$$

Note que el coeficiente del término medio es la suma de r y s y que el último término es el producto de r y s. Estas dos relaciones se usan en los siguientes ejemplos.

Ejemplo de salón de clases
Factorizar $x^2 + 12x + 27$.

EJEMPLO 1 Factorizar $x^2 + 7x + 12$.

Solución

Es necesario completar lo siguiente con dos enteros cuya suma sea 7 y su producto sea 12.

$$x^2 + 7x + 12 = (x + \_\_\_\_\_\_)(x + \_\_\_\_\_\_)$$

Para ayudar a encontrar los números posibles, se puede plantear una tabla de factores de 12.

Producto	Suma
$1(12) = 12$	$1 + 12 = 13$
$2(6) = 12$	$2 + 6 = 8$
$3(4) = 12$	$3 + 4 = 7$

La última línea contiene los números que se requieren. Por ende

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

Ejemplo de salón de clases
Factorizar $b^2 - 11b + 28$.

EJEMPLO 2 Factorizar $x^2 - 11x + 24$.

Solución

Para factorizar $x^2 - 11x + 24$, se necesitan encontrar dos números cuyo producto sea 24 y cuya suma sea -11.

Producto	Suma
$(-1)(-24) = 24$	$-1 + (-24) = -25$
$(-2)(-12) = 24$	$-2 + (-12) = -14$
$(-3)(-8) = 24$	$-3 + (-8) = -11$
$(-4)(-6) = 24$	$-4 + (-6) = -10$

La tercera línea contiene los números que se requieren. Por ende

$$x^2 - 11x + 24 = (x - 3)(x - 8)$$

Ejemplo de salón de clases
Factorizar $x^2 + 2x - 24$.

EJEMPLO 3 Factorizar $x^2 + 3x - 10$.

Solución

Para factorizar $x^2 + 3x - 10$, se necesitan encontrar dos números cuyo producto sea -10 y cuya suma sea 3.

Producto	Suma
$1(-10) = -10$	$1 + (-10) = -9$
$-1(10) = -10$	$-1 + 10 = 9$
$2(-5) = -10$	$2 + (-5) = -3$
$-2(5) = -10$	$-2 + 5 = 3$

La última línea es la clave. Por ende

$$x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$$

Ejemplo de salón de clases
Factorizar $n^2 - 4n - 32$.

EJEMPLO 4 Factorizar $x^2 - 2x - 8$.

Solución

Se buscan dos números cuyo producto sea -8 y cuya suma sea -2.

Producto	Suma
$1(-8) = -8$	$1 + (-8) = -7$
$-1(8) = -8$	$-1 + 8 = 7$
$2(-4) = -8$	$2 + (-4) = -2$
$-2(4) = -8$	$-2 + 4 = 2$

La tercera línea tiene la información que se requiere.

$$x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$$

Las tablas en los últimos cuatro ejemplos se usaron para ilustrar una forma de organizar sus pensamientos para tales problemas. Se muestran tablas completas; es decir, para el ejemplo 4, se incluye la última línea pese a que los números deseados se obtuvieron en la tercera línea. Si usa tales tablas, tenga en mente que no necesita completarlas una vez que obtuvo los números deseados. Es más, puede que sea capaz de encontrar los números sin necesidad de usar una tabla. Las ideas clave son las relaciones producto y suma.

Ejemplo de salón de clases
Factorizar $x^2 + 13x - 14$.

EJEMPLO 5 Factorizar $x^2 - 13x + 12$.

Solución

Producto	Suma
$(-1)(-12) = 12$	$(-1) + (-12) = -13$

No es necesario completar la tabla.

$$x^2 - 13x + 12 = (x - 1)(x - 12)$$

En el siguiente ejemplo, se hace una referencia al valor absoluto. Recuerde que el valor absoluto de un número distinto a cero es positivo. Por ejemplo:

$$|4| = 4 \quad \text{y} \quad |-4| = 4$$

Ejemplo de salón de clases
Factorizar $x^2 - 6x - 7$.

EJEMPLO 6 Factorizar $x^2 - x - 56$.

Solución

Note que el coeficiente del término medio es -1. Por tanto se buscan dos enteros cuyo producto sea -56 y dado que su suma es -1, el valor absoluto del número negativo debe ser uno mayor que el número positivo. Los números son -8 y 7, y se puede completar la factorización.

$$x^2 - x - 56 = (x - 8)(x + 7)$$

Ejemplo de salón de clases
Factorizar $m^2 + m + 3$.

EJEMPLO 7 Factorizar $x^2 + 10x + 12$.

Solución

Producto	Suma
$1(12) = 12$	$1 + 12 = 13$
$2(6) = 12$	$2 + 6 = 8$
$3(4) = 12$	$3 + 4 = 7$

Ya que la tabla está completa y no hay dos factores de 12 que sumados den 10, se concluye que

$$x^2 + 10x + 12$$

no es factorizable usando números enteros.

En un problema como el del ejemplo 7, necesita estar seguro de haber intentado todas las posibilidades antes de concluir que el trinomio no es factorizable.

De vuelta a la resolución de ecuaciones

La propiedad $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$ continúa jugando un rol importante mientras resuelve ecuaciones que incluyen las ideas de factorización de esta sección. Considere los siguientes ejemplos.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $x^2 + 15x + 26 = 0$.

EJEMPLO 8 Resolver $x^2 + 8x + 15 = 0$.

Solución

$$x^2 + 8x + 15 = 0$$

$$(x + 3)(x + 5) = 0 \qquad \text{Factorizar el lado izquierdo}$$

$$x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 5 = 0 \qquad \text{Usar } ab = 0 \text{ si y sólo si } a = 0 \text{ o } b = 0$$

$$x = -3 \quad \text{o} \quad x = -5$$

El conjunto solución es $\{-5, -3\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $x^2 - 8x - 9 = 0$.

EJEMPLO 9 Resolver $x^2 + 5x - 6 + 0$.

Solución

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$(x + 6)(x - 1) = 0$$

$$x + 6 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0$$

$$x = -6 \quad \text{o} \quad x = 1$$

El conjunto solución es $\{-6, 1\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $m^2 - 8m = 33$.

EJEMPLO 10 Resolver $y^2 - 4y = 45$.

Solución

$$y^2 - 4y = 45$$

$$y^2 - 4y - 45 = 0$$

$$
\begin{aligned}
(y - 9)(y + 5) &= 0 \\
y - 9 = 0 \quad &\text{o} \quad y + 5 = 0 \\
y = 9 \quad &\text{o} \quad y = -5
\end{aligned}
$$

El conjunto solución es $\{-5, 9\}$

No olvide que siempre puede comprobar para estar completamente seguro de sus soluciones. Verifique las soluciones para el ejemplo 10. Si $y = 9$ entonces $y^2 - 4y = 45$ se convierte en

$$
\begin{aligned}
9^2 - 4(9) &\stackrel{?}{=} 45 \\
81 - 36 &\stackrel{?}{=} 45 \\
45 &= 45
\end{aligned}
$$

Si $y = 25$ entonces $y^2 - 4y = 45$ se convierte en

$$
\begin{aligned}
(-5)^2 - 4(-5) &\stackrel{?}{=} 45 \\
25 + 20 &\stackrel{?}{=} 45 \\
45 &= 45
\end{aligned}
$$

De vuelta a la resolución de problemas

Entre más sepa sobre la factorización y resolución de ecuaciones, más fácil le será resolver problemas verbales.

Ejemplo de salón de clases
Hallar dos números impares consecutivos cuyo producto sea 35.

EJEMPLO 11 Aplique su habilidad

Hallar dos números consecutivos cuyo producto sea 72.

Solución

Sea n uno de los números. Entonces $n + 1$ representa el siguiente número.

$$
\begin{aligned}
n(n + 1) &= 72 \qquad \text{El producto de los dos números es 72} \\
n^2 + n &= 72 \\
n^2 + n - 72 &= 0 \\
(n + 9)(n - 8) &= 0 \\
n + 9 = 0 \quad &\text{o} \quad n - 8 = 0 \\
n = -9 \quad &\text{o} \quad n = 8
\end{aligned}
$$

Si $n = -9$ entonces $n + 1 = -9 + 1 = -8$. Si $n = 8$ entonces $n + 1 = 8 + 1 = 9$. Por ende, los números consecutivos son -9 y -8 u 8 y 9.

Ejemplo de salón de clases
Un terreno triangular tiene una altura que es 8 yardas más grande que la base. El área del terreno es de 24 yardas cuadradas. Hallar la base y la altura del terreno.

EJEMPLO 12 Aplique su habilidad

Un terreno rectangular mide 6 metros más de largo que de ancho. El área del terreno es 16 metros cuadrados. Hallar el largo y el ancho del terreno.

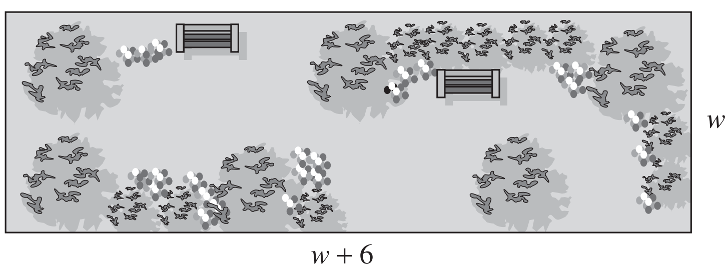


Figura 6.3

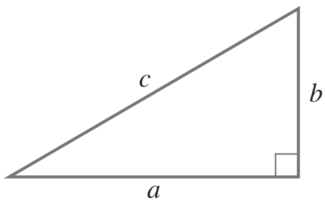
Solución

Sea w el ancho del terreno, entonces $w + 6$ representa el largo (ver figura 6.3). Usando la fórmula de área $A = lw$, se obtiene

$$\begin{aligned} w(w + 6) &= 16 \\ w^2 + 6w &= 16 \\ w^2 + 6w - 16 &= 0 \\ (w + 8)(w - 2) &= 0 \\ w + 8 = 0 \quad &\text{o} \quad w - 2 = 0 \\ w = -8 \quad &\text{o} \quad w = 2 \end{aligned}$$

La solución de -8 no es posible para el ancho de un rectángulo, así que el terreno mide 2 metros de ancho y su largo $(w + 6)$ es de 8 metros.

El teorema de Pitágoras, un importante teorema que pertenece a los triángulos rectángulos, en ocasiones puede servir como una guía para resolver ciertos tipos de problemas. El teorema de Pitágoras afirma que "en cualquier triángulo rectángulo, el cuadrado del lado más largo (llamado hipotenusa) es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados (llamados catetos)"; vea la figura 6.4. Se puede usar este teorema para ayudar a resolver problemas.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Figura 6.4

Ejemplo de salón de clases
Suponga que las longitudes de tres lados de un tríangulo rectángulo son números pares consecutivos. Encontrar las longitudes de los tres lados.

EJEMPLO 13 Aplique su habilidad

Suponga que las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo son números enteros consecutivos. Hallar las longitudes de los tres lados.

Solución

Sea s el largo del cateto más corto. Entonces $s + 1$ representa el largo del otro cateto y $s + 2$ representa el largo de la hipotenusa. Usando el teorema de Pitágoras como guía, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\overbrace{s^2 + (s + 1)^2}^{\text{Suma de los cuadrados de dos catetos}} = \overbrace{(s + 2)^2}^{\text{Cuadrado de la hipotenusa}}$$

Resolver esta ecuación da

$$\begin{aligned} s^2 + s^2 + 2s + 1 &= s^2 + 4s + 4 && \text{Recuerde que } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ 2s^2 + 2s + 1 &= s^2 + 4s + 4 \\ s^2 + 2s + 1 &= 4s + 4 && \text{Sumar a ambos lados de la igualdad} \\ s^2 - 2s + 1 &= 4 && \text{el inverso aditivo de } s^2 \text{ es decir } -s^2 \\ s^2 - 2s - 3 &= 0 \\ (s - 3)(s + 1) &= 0 \\ s - 3 = 0 \quad &\text{o} \quad s + 1 = 0 \\ s = 3 \quad &\text{o} \quad s = -1 \end{aligned}$$

La solución de -1 no es posible para el largo de un lado, así que el lado más corto mide 3. Los otros dos lados ($s + 1$ y $s + 2$) miden 4 y 5.

Examen de conceptos 6.3

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. Cualquier trinomio en la forma $x^2 + bx + c$ puede factorizarse (usando números enteros) en el producto de dos binomios.
2. Para factorizar $x^2 - 4x - 60$ se buscan dos números cuyo producto sea -60 y cuya suma sea -4.
3. Un trinomio en la forma $x^2 + bx + c$ nunca tendrá otro factor común que no sea 1.
4. Si n representa un número impar, entonces $n + 1$ representa el siguiente número impar consecutivo.
5. El teorema de Pitágoras sólo aplica a triángulos rectángulos.
6. En un triángulo rectángulo, el lado más largo es llamado hipotenusa.
7. El polinomio x2 1 25x 1 72 no es factorizable.
8. El polinomio x2 1 27x 1 72 no es factorizable.
9. El conjunto solución de la ecuación $x^2 + 2x - 63 = 0$ es $\{-9, 7\}$.
10. El conjunto solución de la ecuación $x^2 - 5x - 66 = 0$ es $\{-11, -6\}$.

Conjunto de problemas 6.3

Para los problemas 1-30, factorizar cada trinomio completamente. Indicar cualquiera que no sea factorizable usando números enteros. **(Objetivo 1)**

1. $x^2 + 10x + 24$
2. $x^2 + 9x + 14$
3. $x^2 + 13x + 40$
4. $x^2 + 11x + 24$
5. $x^2 - 11x + 18$
6. $x^2 - 5x + 4$
7. $n^2 - 11n + 28$
8. $n^2 - 7n + 10$
9. $n^2 + 6n - 27$
10. $n^2 + 3n - 18$
11. $n^2 - 6n - 40$
12. $n^2 - 4n - 45$
13. $t^2 + 12t + 24$
14. $t^2 + 20t + 96$
15. $x^2 - 18x + 72$
16. $x^2 - 14x + 32$
17. $x^2 + 5xy - 66y^2$
18. $x^2 + 11xy - 42y^2$
19. $y^2 - y - 72$
20. $y^2 - y - 30$
21. $x^2 + 21x + 80$
22. $x^2 + 21x + 90$
23. $x^2 + 6x - 72$
24. $x^2 - 8x - 36$
25. $x^2 - 10x - 48$
26. $x^2 - 12x - 64$
27. $x^2 + 3xy - 10y^2$
28. $x^2 - 4xy - 12y^2$
29. $a^2 - 4ab - 32b^2$
30. $a^2 + 3ab - 54b^2$

Para los problemas 31-50, resolver cada ecuación. **(Objetivo 2)**

31. $x^2 + 10x + 21 = 0$
32. $x^2 + 9x + 20 = 0$
33. $x^2 - 9x + 18 = 0$
34. $x^2 - 9x + 8 = 0$
35. $x^2 - 3x - 10 = 0$
36. $x^2 - x - 12 = 0$
37. $n^2 + 5n - 36 = 0$
38. $n^2 + 3n - 18 = 0$
39. $n^2 - 6n - 40 = 0$
40. $n^2 - 8n - 48 = 0$
41. $t^2 + t - 56 = 0$
42. $t^2 + t - 72 = 0$
43. $x^2 - 16x + 28 = 0$
44. $x^2 - 18x + 45 = 0$
45. $x^2 + 11x = 12$
46. $x^2 + 8x = 20$
47. $x(x - 10) = -16$
48. $x(x - 12) = -35$
49. $-x^2 - 2x + 24 = 0$
50. $-x^2 + 6x + 16 = 0$

Para los problemas 51-68, plantear una ecuación y resolver cada problema. **(Objetivos 3 y 4)**

51. Encontrar dos números consecutivos cuyo producto sea 56.

52. Encontrar dos números impares consecutivos cuyo producto sea 63.

53. Encontrar dos números enteros consecutivos cuyo producto sea 168.

54. Un número es 2 más grande que otro número. La suma de sus cuadrados es 100. Hallar los números.

55. Encontrar cuatro números consecutivos de tal manera que el producto de los dos números más grandes sea 22 menos que el doble del producto de los dos números más pequeños.

56. Encontrar tres números consecutivos de tal manera que el producto de los dos números más pequeños sea 2 más que diez veces el número más grande.

57. Un número es 3 más pequeño que otro número. El cuadrado del número más grande es 9 más grande que diez veces el número más pequeño. Hallar los números.

58. El área del piso de un cuarto rectangular mide 84 pies cuadrados. El largo del cuarto mide 5 pies más que el ancho. Hallar el largo y el ancho del cuarto.

59. Suponga que el ancho de cierto rectángulo mide 3 pulgadas menos que su largo. El área es 6 menos que el doble del perímetro. Hallar el largo y el ancho del rectángulo.

60. La suma de las áreas de un cuadraro y un rectángulo es 64 centímetros cuadrados. El largo del rectángulo mide 4 centímetros más que un lado del cuadrado, y el ancho del rectángulo mide 2 centímetros más que un lado del cuadrado. Encontrar las dimensiones del cuadrado y del rectángulo.

61. El perímetro de un rectángulo es de 30 centímetros, y el área es de 54 centímetros cuadrados. Hallar el largo y el ancho del rectángulo. [*Pista:* sea w el ancho; entonces 15-w representa el largo].

62. El perímetro de un rectángulo es de 44 pulgadas y su área mide 120 pulgadas cuadradas. Hallar el largo y el ancho del rectángulo.

63. Un plantío de manzanas contiene 84 árboles. El número de árboles por fila es cinco más que el número de filas. Hallar el número de filas.

64. Un cuarto contiene 54 sillas. El número de filas es 3 menos que el número de sillas por fila. Hallar el número de filas.

65. Imagine que uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 7 pies menos que el otro. La hipotenusa mide 2 pies más que el cateto más largo. Encontrar el largo de los tres lados del triángulo rectángulo.

66. Suponga que uno de los catetos de un tríangulo rectángulo mide 7 metros más que el otro. La hipotenusa mide 1 metro más que el cateto más largo. Encontrar el largo de los tres lados del triángulo rectángulo.

67. Suponga que el largo de uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 2 pulgadas menos que el otro cateto. Si el largo de la hipotenusa es de 10 pulgadas, encontrar el largo de cada cateto.

68. Uno de los catetos de un triángulo mide 3 centímetros más que el otro cateto. La hipotenusa mide 15 centímetros. Encontrar las medidas de los dos catetos.

Pensamientos en palabras

69. ¿Qué significa la expresión "no factorizable usando enteros" para usted?

70. Discuta el rol que juega la factorización en la resolución de ecuaciones.

71. Explique cómo resolvería la ecuación

$(x - 3)(x + 4) = 0$

y también cómo resolvería

$(x - 3)(x + 4) = 8$.

Más investigación

Para los problemas 72-75, factorizar cada trinomio y asumir que todas las variables que aparecen como exponentes representan posibles enteros.

72. $x^{2a} + 10x^a + 24$

73. $x^{2a} + 13x^a + 40$

74. $x^{2a} - 2x^a - 8$

75. $x^{2a} + 6x^a - 27$

76. Suponga que se quiere factorizar $n^2 + 26n + 168$ para que resuelva la ecuación $n^2 + 26n + 168 = 0$. Se necesitan encontrar dos números positivos cuyo producto sea 168 y cuya suma sea 26. Ya que el término constante, 168, es muy grande, considere su forma factorizada.

$168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$

Ahora puede formar mentalmente dos números usando todos estos factores en diferentes combinaciones. Usar dos 2 y el 3 en un número y el otro 2 y el 7 en el otro número produce $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ y $2 \cdot 7 = 14$. Por ende, también puede resolver la ecuación de la siguiente manera:

$$n^2 + 26n + 168 = 0$$
$$(n + 12)(n + 14) = 0$$
$$n + 12 = 0 \quad \text{o} \quad n + 14 = 0$$
$$n = -12 \quad \text{o} \quad n = -14$$

El conjunto solución es $\{-14, -12\}$.

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones

(a) $n^2 + 30n + 216 = 0$

(b) $n^2 + 35n + 294 = 0$

(c) $n^2 - 40n + 384 = 0$

(d) $n^2 - 40n + 375 = 0$

(e) $n^2 + 6n - 432 = 0$

(f) $n^2 - 16n - 512 = 0$

Respuestas del examen de conceptos

1. Falso **2.** Cierto **3.** Cierto **4.** Falso **5.** Cierto **6.** Cierto **7.** Cierto **8.** Falso **9.** Cierto **10.** Falso

6.4 Factorizar trinomios en la forma ax^2 1 bx 1 c

OBJETIVOS

1 Factorizar trinomios en los que el coeficiente principal no es 1

2 Resolver ecuaciones que involucran factorizar

Ahora considere factorizar trinomios donde el coeficiente del término cuadrado no es 1. Primero se ilustra una técnica de ensayo y error que funciona bastante bien para ciertos tipos de trinomios. Esta técnica se basa en el conocimiento de la multiplicación de binomios.

Ejemplo de salón de clases
Factorizar $3x^2 + 10x + 8$.

EJEMPLO 1 Factorizar $2x^2 + 7x + 3$.

Solución

Al observar el primer término, $2x^2$, y los signos positivos de los otros dos términos, se sabe que los binomios son de la forma

$$(2x + \_\_\_\_\_)(x + \_\_\_\_\_)$$

Puesto que los factores del último término, 3, son 1 y 3, sólo se tienen las siguientes dos posibilidades para intentar.

$$(2x + 3)(x + 1) \quad \text{o} \quad (2x + 1)(x + 3)$$

Al comprobar el término medio formado en cada uno de estos productos, se encuentra que la segunda posibilidad produce el término medio correcto de $7x$. Por tanto,

$$2x^2 + 7x + 3 = (2x + 1)(x + 3)$$

Ejemplo de salón de clases
Factorizar $15y^2 - 13y + 2$.

EJEMPLO 2 Factorizar $6x^2 - 17x + 5$.

Solución

Primero, observe que $6x^2$ se puede escribir como $2x \cdot 3x$ o $6x \cdot x$. Segundo, dado que el término medio del trinomio es negativo y el último término es positivo, se sabe que los binomios son de la forma

$$(2x - \_\_\_\_\_)(3x - \_\_\_\_\_) \quad \text{o} \quad (6x - \_\_\_\_\_)(x - \_\_\_\_\_)$$

Los factores del último término, 5, son 1 y 5, así que existen las siguientes posibilidades.

$(2x - 5)(3x - 1)$ $\quad$ $(2x - 1)(3x - 5)$

$(6x - 5)(x - 1)$ $\quad$ $(6x - 1)(x - 5)$

Al comprobar el término medio formado en cada uno de estos productos se encuentra que el producto $(2x - 5)(3x - 1)$ produce el término medio deseado de $-17x$. En consecuencia,

$$6x^2 - 17x + 5 = (2x - 5)(3x - 1)$$

Ejemplo de salón de clases
Factorizar $18n^2 + 12n - 16$.

EJEMPLO 3 Factorizar $8x^2 - 8x - 30$.

Solución

Primero, note que el polinomio $8x^2 - 8x - 30$ tiene un factor común de 2. Factorizar el factor común da $2(4x^2 - 4x - 15)$. Ahora se necesita factorizar $4x^2 - 4x - 15$.

Note que $4x^2$ puede escribirse como $4x \cdot x$ o $2x \cdot 2x$. El último término, -15, puede escribirse como $(1)(-15)$, $(-1)(15)$, $(3)(-5)$, o $(-3)(5)$. Entonces se pueden generar las posibilidades para los factores binomiales de la siguiente manera:

Usando 1 y −15	Usando −1 y 15
$(4x - 15)(x + 1)$	$(4x - 1)(x + 15)$
$(4x + 1)(x - 15)$	$(4x + 15)(x - 1)$
$(2x + 1)(2x - 15)$	$(2x - 1)(2x + 15)$
Usando 3 y −5	**Usando −3 y 5**
$(4x + 3)(x - 5)$	$(4x - 3)(x + 5)$
$(4x - 5)(x + 3)$	$(4x + 5)(x - 3)$
✔ $(2x - 5)(2x + 3)$	$(2x + 5)(2x - 3)$

Verificando el término medio de cada uno de estos productos, se encuentra que el producto indicado produce el término medio de $-4x$. Por ende,

$$8x^2 - 8x - 30 = 2(4x^2 - 4x - 15) = 2(2x - 5)(2x + 3)$$

Haga una pausa por un momento y revise los ejemplos 1, 2 y 3. Obviamente, el ejemplo 3 fue el más difícil porque había que considerar muchas posibilidades. Se ha sugerido un posible formato para considerar las posibilidades, pero mientras practica tales problemas, querrá desarrollar un formato que funcione mejor para usted. Sin importar el formato que use, la idea clave es organizar su trabajo para que pueda considerar todas las posibilidades. Ahora estudie otro ejemplo.

Ejemplo de salón de clases
Factorizar $9x^2 + 10x + 4$.

EJEMPLO 4 Factorizar $4x^2 + 6x + 9$.

Solución

Primero, note que $4x^2$ puede escribirse como $4x \cdot x$ o $2x \cdot 2x$. Segundo, ya que el término medio es positivo y el último término es positivo, se sabe que los binomios son de la forma

$$(4x + \underline{\qquad})(x + \underline{\qquad}) \quad \text{o} \quad (2x + \underline{\qquad})(2x + \underline{\qquad})$$

Ya que 9 puede escribirse como 9·1 ó 3·3, sólo se tienen las siguientes cinco posibilidades para intentar:

$(4x + 9)(x + 1)$ $\quad$ $(4x + 1)(x + 9)$

$(4x + 3)(x + 3)$ $\quad$ $(2x + 1)(2x + 9)$

$(2x + 3)(2x + 3)$

Cuando haya intentado todas estas posibilidades, encontrará que ninguna de ellas da el término medio de 6x. Entonces, $4x^2 + 6x + 9$ no es factorizable usando números enteros.

Comentario: El ejemplo 4 ilustra la importancia de organizar su trabajo para que pueda intentar todas las posibilidades antes de concluir que un trinomio en particular no es factorizable.

Otro enfoque

Hay otra técnica más sistémica que puede querer usar con algunos trinomios. Es una extensión del método usado en la sección anterior. Recuerde que, al inicio de la sección 6.3, se estudió el siguiente producto:

$$\begin{aligned}(x + r)(x + s) &= x(x) + x(s) + r(x) + r(s)\\ &= x^2 + \underbrace{(s + r)}_{\text{Suma de } r \text{ y } s}x + \underbrace{rs}_{\text{Producto de } r \text{ y } s}\end{aligned}$$

Ahora vea este producto:

$$\begin{aligned}(px + r)(qx + s) &= px(qx) + px(s) + r(qx) + r(s)\\ &= (pq)x^2 + (ps + rq)x + rs\end{aligned}$$

Note que el producto del coeficiente con el término x^2, (pq), y el término constante, (rs), es $pqrs$. De la misma manera, el producto de dos coeficientes de x, $(ps$ y $rq)$, también es $pqrs$. Por ende, los dos coeficientes de x deben tener una suma de $ps + rq$ y un producto de $pqrs$. Para empezar el proceso de factorización, buscará dos factores del producto pqrs cuya suma sea igual al coeficiente del término x. Esto puede parecerle un tanto confuso, pero los siguientes ejemplos le mostrarán lo fácil que es aplicarlo.

Ejemplo de salón de clases
Factorizar $2y^2 + 19y + 24$.

EJEMPLO 5 Factorizar $3x^2 + 14x + 8$.

Solución

$3x^2 + 14x + 8$ Suma se 14

Product of $3 \cdot 8 = 24$

Se necesitan encontrar dos números enteros cuyo producto sea 24 y cuya suma sea 14. Obviamente, 2 y 12 satisfacen estas condiciones. Por ende, se puede expresar el término medio del trinomio, $14x$, como $2x + 12x$ y proceder de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}3x^2 + 14x + 8 &= 3x^2 + 2x + 12x + 8 && \text{Reescribir el problema}\\ &= x(3x + 2) + 4(3x + 2) && \text{Factorizar por agrupamiento}\\ &= (3x + 2)(x + 4)\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Factorizar $18x^2 - 13x + 2$.

EJEMPLO 6 Factorizar $16x^2 - 26x + 3$.

Solución

$16x^2 - 26x + 3$ Suma de -26

Producto de $16(3) = 48$

Se necesitan dos números enteros cuyo producto sea 48 y cuya suma sea -26. Los números -2 y -24 satisfacen estas condiciones y permiten expresar el término medio, $-26x$, como $-2x - 24x$. Entonces, se puede factorizar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}16x^2 - 26x + 3 &= 16x^2 - 2x - 24x + 3 && \text{Reescribir el problema}\\ &= 2x(8x - 1) - 3(8x - 1) && \text{Factorizar por agrupamiento}\\ &= (8x - 1)(2x - 3)\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Factorizar $8p^2 + 22p - 21$.

EJEMPLO 7 Factorizar $6x^2 - 5x - 6$.

Solución

$6x^2 - 5x - 6$ Suma de -5

Producto de $6(-6) = -36$

Se necesitan dos números enteros cuyo producto sea -36 y cuya suma sea -5. Además, ya que la suma es negativa, el valor absoluto del número negativo debe ser mayor que el valor absoluto del número positivo. Un poco de búsqueda determinará que los números son -9 y 4. Por ende, se puede expresar el término medio de $25x$ como $29x + 4x$ y proceder de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 6x^2 - 5x - 6 &= 6x^2 - 9x + 4x - 6 && \text{Reescribir el problema} \\ &= 3x(2x - 3) + 2(2x - 3) && \text{Factorizar por agrupamiento} \\ &= (2x - 3)(3x + 2) \end{aligned}$$

Ahora que tiene dos posibles técnicas para factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, la decisión es suya. Puede que la práctica no lo vuelva el maestro en factorizar, pero ciertamente ayudará. No se promueve una técnica sobre la otra, esa es una elección personal. Muchas personas encuentran la técnica de prueba y error que se presentó primero muy útil si el número de posibilidades para los factores es reducido. Sin embargo, conforme la lista crece, la segunda técnica tiene la ventaja de ser más sistemática. Así que, tal vez, tener ambas técnicas a su alcance sea lo mejor.

Ahora puede resolver ecuaciones

La capacidad de factorizar ciertos trinomios en la forma $ax^2 + bx + c$ le proporciona más habilidades para resolver ecuaciones. Considere los siguientes ejemplos:

Ejemplo de salón de clases
Resolver $2x^2 + 17x + 21 = 0$.

EJEMPLO 8 Resolver $3x^2 + 17x + 10 = 0$.

Solución

$$3x^2 + 17x + 10 = 0$$

$$(x + 5)(3x + 2) = 0$$

Factorizar $3x^2 + 17x + 10$ como $(x + 5)(3x + 2)$ puede requerir un poco de trabajo extra en otra hoja de papel $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$

$$\begin{array}{lcl} x + 5 = 0 & \text{o} & 3x + 2 = 0 \\ x = -5 & \text{o} & 3x = -2 \\ x = -5 & \text{o} & x = -\dfrac{2}{3} \end{array}$$

El conjunto solución es $\left\{-5, -\dfrac{2}{3}\right\}$. ¡Verifíquelo!

Ejemplo de salón de clases
Resolver $40x^2 + 3x - 1 = 0$.

EJEMPLO 9 Resolver $24x^2 + 2x = 15$.

Solución

Primero, sume -15 de cada lado de la ecuación para que la ecuación sea igual a cero.

$$24x^2 + 2x - 15 = 15 - 15$$

$$24x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$(4x - 3)(6x + 5) = 0$$

$$4x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad 6x + 5 = 0$$
$$4x = 3 \quad \text{o} \quad 6x = -5$$
$$x = \frac{3}{4} \quad \text{o} \quad x = -\frac{5}{6}$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{5}{6}, \frac{3}{4}\right\}$.

Examen de conceptos 6.4

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. Cualquier trinomio en la forma $ax^2 + bx + c$ puede factorizarse (usando números enteros) en el producto de dos binomios.
2. Para factorizar $2x^2 - x - 3$ se buscan dos números cuyo producto sea -3 y cuya suma sea -1.
3. Un trinomio en la forma $ax^2 + bx + c$ nunca tendrá un factor común que no sea 1.
4. La forma factorizada $(x + 3)(2x + 4)$ está completamente factorizada.
5. La diferencia de cuadrados polinomiales $9x^2 - 25$ podría escribirse como el trinomio $9x^2 + 0x - 25$.
6. El polinomio $12x^2 + 11x - 12$ no es factorizable.
7. El conjunto solución de $6x^2 + 13x - 5 = 0$ es $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right\}$.
8. El conjunto solución de $18x^2 - 39x + 20 = 0$ es $\left\{\frac{5}{6}, \frac{4}{3}\right\}$.
9. La forma completamente factorizada de $-3x^3y - 3x^2y + 18xy$ es $-3xy(x - 2)(x + 3)$.
10. La forma completamente factorizada de $-x^3 - 7x^2 - 12x$ es $2x(x^2 + 7x + 12)$.

Conjunto de problemas 6.4

Para los problemas 1-50, factorizar cada trinomio completamente. Indicar cualquiera que no sea factorizable usando números enteros. **(Objetivo 1)**

1. $3x^2 + 7x + 2$
2. $2x^2 + 9x + 4$
3. $6x^2 + 19x + 10$
4. $12x^2 + 19x + 4$
5. $4x^2 - 25x + 6$
6. $5x^2 - 22x + 8$
7. $12x^2 - 31x + 20$
8. $8x^2 - 30x + 7$
9. $5y^2 - 33y - 14$
10. $6y^2 - 4y - 16$
11. $4n^2 + 26n - 48$
12. $4n^2 + n - 3$
13. $2x^2 + x + 7$
14. $7x^2 + 19x + 10$
15. $3x^2 + 10x + 7$
16. $10x^2 + x - 5$
17. $7x^2 - 30x + 8$
18. $3x^2 - 8x + 4$
19. $8x^2 + 2x - 21$
20. $9x^2 + 15x - 14$
21. $9t^3 - 15t^2 - 14t$
22. $12t^3 - 20t^2 - 25t$
23. $2x^2 + x - 10$
24. $3y^2 + y - 10$
25. $6n^2 + 2n - 5$
26. $5n^2 + 7n - 6$
27. $2x^2 + 11x + 14$
28. $3x^2 + 16x + 5$
29. $4x^2 + 4x - 15$
30. $8t^2 - 3t - 4$
31. $4n^2 + 7n - 2$
32. $25n^2 - 5n - 2$
33. $6x^2 - 7x - 5$
34. $8x^2 - 6x + 1$
35. $2x^2 + 15x + 27$
36. $2x^2 + x - 21$
37. $21a^2 + a - 2$
38. $5x^2 + 8x - 4$
39. $5a^2 - 11a - 12$
40. $3a^2 - 10a - 8$
41. $12x^2 + 36x + 27$
42. $27x^2 - 36x + 12$
43. $6x^2 - 5xy + y^2$
44. $12x^2 + 13xy + 3y^2$
45. $2x^2 - xy - 6y^2$
46. $6x^2 - 13xy - 5y^2$
47. $5x^2 - 17xy + 6y^2$
48. $3x^2 - 11xy + 10y^2$
49. $8x^2 - 55xy - 7y^2$
50. $6x^2 - 5xy + y^2$

Para los problemas 51-76, resolver cada ecuación. (Objetivo 2)

51. $2x^2 + 13x + 6 = 0$

52. $3x^2 + 16x + 5 = 0$

53. $2x^2 + 5x + 3 = 0$

54. $3x^2 + 5x + 2 = 0$

55. $3x^2 - 25x + 8 = 0$

56. $4x^2 - 31x + 21 = 0$

57. $2x^2 - 9x + 10 = 0$

58. $2x^2 - 11x + 14 = 0$

59. $6x^2 + 7x = -2$

60. $6x^2 + 19x = -10$

61. $2x^2 + x - 3 = 0$

62. $3x^2 + x - 2 = 0$

63. $7x^2 + 17x + 6 = 0$

64. $5x^2 + 12x + 4 = 0$

65. $3x^2 + 13x + 14 = 0$

66. $10x^2 + 9x + 2 = 0$

67. $5x^2 - 7x = 6$

68. $2x^2 - 7x = 4$

69. $5x^2 + 13x + 6 = 0$

70. $5x^2 - 7x + 2 = 0$

71. $3x^2 + 17x + 10 = 0$

72. $2x^2 + 13x + 15 = 0$

73. $3x^2 + x - 10 = 0$

74. $2x^2 - x - 3 = 0$

75. $3x^2 + 2x = 8$

76. $2x^2 - 5x = 18$

Pensamientos en palabras

77. Explicar su proceso mental para factorizar $24x^2 - 17x - 20$.

78. Su amiga factoriza $8x^2 - 32x + 32$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 8x^2 - 32x + 32 &= (4x - 8)(2x - 4) \\ &= 4(x - 2)(2)(x - 2) \\ &= 8(x - 2)(x - 2) \end{aligned}$$

¿Está en lo correcto? ¿Tiene alguna sugerencia para ella?

79. Su amiga resuelve la ecuación $8x^2 - 32x + 32 = 0$ de la siguiente manera

$$8x^2 - 32x + 32 = 0$$
$$(4x - 8)(2x - 4) = 0$$
$$\begin{aligned} 4x - 8 &= 0 \quad \text{o} \quad & 2x - 4 &= 0 \\ 4x &= 8 \quad \text{o} \quad & 2x &= 4 \\ x &= 2 \quad \text{o} \quad & x &= 2 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{2\}$. ¿Está en lo correcto? ¿Tiene alguna sugerencia para ella?

Más investigación

80. Considere el siguiente enfoque para factorizar $20x^2 + 39x + 18$:

$$\underbrace{20x^2 + 39x + 18}_{\text{Producto de } 20(18) = 360} \qquad \text{Suma de 39}$$

Se necesitan dos números cuya suma sea 39 y cuyo producto sea 360. Para ayudar a encontrar estos números, descomponga en factores primos a 360.

$$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

Ahora, agrupando estos factores en varias maneras, se encuentra que $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$, $3 \cdot 5 = 15$ y $24 + 15 = 39$. Así que los números son 15 y 24, y se puede expresar el término medio para el trinomio dado, 39x, como $39x$, como $15x + 24x$. Por ende, se puede completar la factorización de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 20x^2 + 39x + 18 &= 20x^2 + 15x + 24x + 18 \\ &= 5x(4x + 3) + 6(4x + 3) \\ &= (4x + 3)(5x + 6) \end{aligned}$$

Factorizar cada trinomio.

(a) $20x^2 + 41x + 20$

(b) $24x^2 - 79x + 40$

(c) $30x^2 + 23x - 40$

(d) $36x^2 + 65x - 36$

Respuestas del examen de conceptos

1. Falso **2.** Falso **3.** Falso **4.** Falso **5.** Cierto **6.** Cierto **7.** Falso **8.** Cierto **9.** Cierto **10.** Falso

6.5 Factorización, resolución de ecuaciones y de problemas

OBJETIVOS

1. Factorizar trinomios cuadrados perfectos
2. Reconocer los diferentes patrones de factorización
3. Usar la factorización para resolver ecuaciones
4. Resolver problemas verbales que involucran factorización

Factorización

Antes de resumir el trabajo con las técnicas de factorización observe dos patrones de factorización más especiales. Estos patrones surgen de la multiplicación de binomios. Considere los siguientes ejemplos.

$$(x + 5)^2 = (x + 5)(x + 5) = x^2 + 10x + 25$$
$$(2x + 3)^2 = (2x + 3)(2x + 3) = 4x^2 + 12x + 9$$
$$(4x + 7)^2 = (4x + 7)(4x + 7) = 16x^2 + 56x + 49$$

En general, $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$. También.

$$(x - 6)^2 = (x - 6)(x - 6) = x^2 - 12x + 36$$
$$(3x - 4)^2 = (3x - 4)(3x - 4) = 9x^2 - 24x + 16$$
$$(5x - 2)^2 = (5x - 2)(5x - 2) = 25x^2 - 20x + 4$$

En general, $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$. Por ende, se tienen los siguientes patrones.

Trinomios cuadrados perfectos

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Los trinomios en la forma $a^2 + 2ab + b^2$ o $a^2 - 2ab + b^2$ son llamados **trinomios cuadrados perfectos**. Son fáciles de reconocer por la naturaleza de sus términos. Por ejemplo, $9x^2 + 30x + 25$ es un trinomio cuadrado perfecto por estas razones:

1. El primer término es un cuadrado: $(3x)^2$.
2. El último término es un cuadrado: $(5)^2$.
3. El término medio es el doble del producto de las cantidades a elevar al cuadrado en los términos primero y último: $2(3x)(5)$.

De igual manera, $25x^2 - 40xy + 16y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto por estas razones:

1. El primer término es un cuadrado: $(5x)^2$.
2. El último término es un cuadrado: $(4y)^2$.
3. El término medio es el doble del producto de las cantidades a elevar al cuadrado en los términos primero y último: $2(5x)(4y)$.

Una vez que sabe que tiene un trinomio cuadrado perfecto, el proceso de factorización sigue inmediatamente de los dos patrones básicos.

$$9x^2 + 30x + 25 = (3x + 5)^2$$
$$25x^2 - 40xy + 16y^2 = (5x - 4y)^2$$

He aquí algunos ejemplos adicionales de trinomios cuadrados perfectos y sus formas factorizadas.

$$x^2 - 16x + 64 = (x)^2 - 2(x)(8) + (8)^2 = (x - 8)^2$$
$$16x^2 - 56x + 49 = (4x)^2 - 2(4x)(7) + (7)^2 = (4x - 7)^2$$
$$25x^2 + 20xy + 4y^2 = (5x)^2 + 2(5x)(2y) + (2y)^2 = (5x + 2y)^2$$
$$1 + 6y + 9y^2 = (1)^2 + 2(1)(3y) + (3y)^2 = (1 + 3y)^2$$
$$4m^2 - 4mn + n^2 = (2m)^2 - 2(2m)(n) + (n)^2 = (2m - n)^2$$

Querrá hacer este paso mentalmente después de sentirse cómodo con el proceso

Se han considerado algunas técnicas de factorización básicas en este capítulo, una a la vez, pero debe saber aplicarlas conforme se necesiten en una variedad de situaciones. Revise las técnicas y considere una variedad de ejemplos que demuestren su uso.

En este capítulo se estudiaron:

1. La factorización mediante el uso de la propiedad distributiva para factorizar un factor monomial o binomial común.
2. La factorización por agrupamiento.
3. La factorización mediante la aplicación del patrón de diferencia de cuadrados.
4. La factorización mediante la aplicación de diferencia de cubos.
5. La factorización de trinomios en la forma $x^2 + bx + c$ en el producto de dos binomios.
6. La factorización de trinomios en la forma $ax^2 + bx + c$ en el producto de dos binomios.

Como guía general, siempre busque primero un factor monomial común y luego proceda con las otras técnicas.

En cada uno de los siguientes ejemplos, se ha factorizado completamente cuando ha sido posible. Estúdielos cuidadosamente y asegúrese de que concuerdan con los factores indicados.

1. $2x^2 + 12x + 10 = 2(x^2 + 6x + 5) = 2(x + 1)(x + 5)$

2. $4x^2 + 36 = 4(x^2 + 9)$ Recuerde que la suma de dos cuadrados no es factorizable usando números enteros a menos de que haya un factor común.

3. $4t^2 + 20t + 25 = (2t + 5)^2$ Si no puede reconocer un trinomio cuadrado perfecto, no pasa nada; simplemente proceda a factorizar el producto de dos binomios, y después reconocerá que los dos binomios son lo mismo.

4. $x^2 - 3x - 8$,no es factorizable usando números enteros. Esto se vuelve obvio tras ver la tabla.

Producto	Suma
$1(-8) = -8$	$1 + (-8) = -7$
$-1(8) = -8$	$-1 + 8 = 7$
$2(-4) = -8$	$2 + (-4) = -2$
$-2(4) = -8$	$-2 + 4 = 2$

No hay dos factores de -8 cuya suma produzca -3

5. Se encontraron los factores binomiales de la siguiente manera:

	Factores de 28		
$(y + \_\_\_\_\_)(6y - \_\_\_\_\_)$			
o	$1 \cdot 28$	o	$28 \cdot 1$
$(y - \_\_\_\_\_)(6y + \_\_\_\_\_)$	$2 \cdot 14$	o	$14 \cdot 2$
o	$4 \cdot 7$	o	$7 \cdot 4$
$(2y - \_\_\_\_\_)(3y + \_\_\_\_\_)$			
o			
$(2y + \_\_\_\_\_)(3y - \_\_\_\_\_)$			

6. $32x^2 - 50y^2 = 2(16x^2 - 25y^2) = 2(4x + 5y)(4x - 5y)$

Resolver ecuaciones con factorizaciones

Como se estableció en el prefacio, hay un hilo común a través de este texto: *aprender una habilidad*, *usar la habilidad para ayudarle a resolver ecuaciones* y después *usar las ecuaciones para ayudar a resolver problemas aplicados*. Este hilo se vuelve evidente en este capítulo. Después de presentar una técnica de factorización, inmediatamente se resolvían ecuaciones usando esta técnica, y después se consideraron algunas aplicaciones involucrando dichas ecuaciones. Los siguientes pasos resumen el proceso de resolución de ecuaciones en este capítulo.

1. Organizar todos los términos del polinomio en el mismo lado de la ecuación con cero en el lado opuesto.
2. Factorizar el polinomio. Esto involucrará una variedad de técnicas de factorización presentadas en este capítulo.
3. Establecer cada factor igual a cero y resolver para encontrar el término desconocido.
4. Comprobar sus soluciones en la ecuación original.

Considere algunos ejemplos.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $x^2 = 64x$.

EJEMPLO 1 Resolver $x^2 = 25x$.

Solución

$$x^2 = 25x$$
$$x^2 - 25x = 0 \qquad \text{Sumar a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de } 25x \text{ es decir } -25x$$
$$x(x - 25) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{o} \quad x - 25 = 0$$
$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 25$$

El conjunto solución es $\{0, 25\}$. ¡Verifíquelo!

Ejemplo de salón de clases
Resolver $m^3 - 144m = 0$.

EJEMPLO 2 Resolver $x^3 - 36x = 0$.

Solución

$$x^3 - 36x = 0$$
$$x(x^2 - 36) = 0$$
$$x(x + 6)(x - 6) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{o} \quad x + 6 = 0 \quad \text{o} \quad x - 6 = 0 \qquad \text{Si } abc = 0, \text{ entonces } a = 0 \text{ o } b = 0 \text{ o } c = 0$$
$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = -6 \quad \text{o} \quad x = 6$$

El conjunto solución es $\{-6, 0, 6\}$. ¿Es comprobable?

Ejemplo de salón de clases
Resolver $8x^2 + 10x - 7 = 0$.

EJEMPLO 3 Resolver $10x^2 - 13x - 3 = 0$.

Solución

$$10x^2 - 13x - 3 = 0$$
$$(5x + 1)(2x - 3) = 0$$
$$5x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad 2x - 3 = 0$$
$$5x = -1 \quad \text{o} \quad 2x = 3$$
$$x = -\frac{1}{5} \quad \text{o} \quad x = \frac{3}{2}$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{1}{5}, \frac{3}{2}\right\}$. ¿Es comprobable?

Ejemplo de salón de clases
Resolver $9x^2 - 24x + 16 = 0$.

EJEMPLO 4 Resolver $4x^2 - 28x + 49 = 0$.

Solución

$$4x^2 - 28x + 49 = 0$$
$$(2x - 7)^2 = 0$$
$$(2x - 7)(2x - 7) = 0$$
$$2x - 7 = 0 \quad \text{o} \quad 2x - 7 = 0$$
$$2x = 7 \quad \text{o} \quad 2x = 7$$
$$x = \frac{7}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{7}{2}$$

El conjunto de solución es $\left\{\frac{7}{2}\right\}$.

Preste especial atención al siguiente ejemplo. Se necesita cambiar la forma de la ecuación original antes de que se pueda aplicar la propiedad $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$. Una condición necesaria de esta propiedad es que un producto indicado debe ser igual a cero.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $(x + 6)(x + 3) = 4$.

EJEMPLO 5 Resolver $(x + 1)(x + 4) = 40$.

Solución

$$(x + 1)(x + 4) = 40$$
$$x^2 + 5x + 4 = 40$$
$$x^2 + 5x - 36 = 0$$
$$(x + 9)(x - 4) = 0$$
$$x + 9 = 0 \quad \text{o} \quad x - 4 = 0$$
$$x = -9 \quad \text{o} \quad x = 4$$

El conjunto solución es $\{-9, 4\}$. ¡Verifíquelo!

Ejemplo de salón de clases
Resolver $3a^2 - 6a - 45 = 0$.

EJEMPLO 6 Resolver $2n^2 + 16n - 40 = 0$.

Solución

$$2n^2 + 16n - 40 = 0$$
$$2(n^2 + 8n - 20) = 0$$
$$n^2 + 8n - 20 = 0 \qquad \text{Multiplicar ambos lados por el inverso multiplicativo de 2, es decir } \frac{1}{2}$$
$$(n + 10)(n - 2) = 0$$
$$n + 10 = 0 \quad \text{o} \quad n - 2 = 0$$
$$n = -10 \quad \text{o} \quad n = 2$$

El conjunto solución es $\{-10, 2\}$. ¿Es comprobable?

Resolución de problemas

Recordatorio: A lo largo de este libro se resalta la necesidad de *aprender una habilidad*, *usar esa habilidad para ayudarle a resolver ecuaciones*, y después *a usar las ecuaciones para resolver problemas*. Sus nuevas habilidades le han provisto de más maneras para resolver ecuaciones, lo que le da más poder para resolver problemas verbales. Este capítulo concluye con la resolución de algunos problemas.

Ejemplo de salón de clases
Encontrar dos números cuyo producto sea 70 si uno de los números es 1 menos que tres veces el otro número.

EJEMPLO 7 Aplique su habilidad

Encontrar dos números cuyo producto sea 65 si uno de los números es 3 más que el doble del otro número.

Solución

Sea n uno de los números; entonces $2n + 3$ representa al otro número. Ya que su producto es 65, se puede plantear y resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} n(2n+3) &= 65 \\ 2n^2 + 3n - 65 &= 0 \\ (2n+13)(n-5) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcr} 2n + 13 = 0 & \text{o} & n - 5 = 0 \\ 2n = -13 & \text{o} & n = 5 \\ n = -\dfrac{13}{2} & \text{o} & n = 5 \end{array}$$

Si $n = -\dfrac{13}{2}$ entonces $n + 3 = 2\left(-\dfrac{13}{2}\right) + 3 = -10$. Si $n = 5$ entonces $2n + 3 = 2(5) + 3 = 13$. Por ende, los números son $-\dfrac{13}{2}$ y -10 o 5 y 13.

Ejemplo de salón de clases
El área de un afiche rectangular mide 48 centímetros cuadrados. El largo es 8 centímetros más largo que el ancho. Encontrar el largo y el ancho del afiche rectangular.

EJEMPLO 8 Aplique su habilidad

El área de una hoja de papel triangular es de 14 pulgadas cuadradas. Un lado del triángulo mide 3 pulgadas más que la altura a ese lado. Encontrar el largo de uno de los lados y el largo de la altura a ese lado.

Solución

Sea h la altura a un lado. Entonces $h + 3$ representa el lado del triángulo (ver figura 6.5)

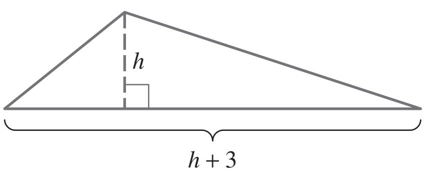


Figura 6.5

Ya que la fórmula para encontrar el área de un triángulo es $A = \dfrac{1}{2}bh$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}h(h+3) &= 14 \\ h(h+3) &= 28 \qquad \text{Multiplicar ambos lados por 2} \\ h^2 + 3h &= 28 \\ h^2 + 3h - 28 &= 0 \\ (h+7)(h-4) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcr} h + 7 = 0 & \text{o} & h - 4 = 0 \\ h = -7 & \text{o} & h = 4 \end{array}$$

La solución de -7 no es posible. Por ende, la altura mide 4 pulgadas y el largo del lado al que la altura se dirige mide 7 pulgadas.

Ejemplo de salón de clases
Una fotografía mide 14 pulgadas de ancho y 19 pulgadas de largo. Una tira de ancho uniforme debe cortarse de ambos lados y ambos extremos y de ambos lados de la fotografía para poder reducir su área a 176 pulgadas cuadradas. Encontrar el ancho de la tira.

EJEMPLO 9 Aplique su habilidad

Una tira de ancho uniforme está sombreada alrededor de un afiche rectangular de 12 pulgadas por 16 pulgadas. ¿Qué tan ancha es la tira si la mitad del área del poster se ve sombreada?

Solución

Sea x el ancho de la tira sombreada del afiche en la figura 6.6. El área de la tira es la mitad del área del afiche; por ende, mide $\frac{1}{2}(12)(16) = 96$ pulgadas cuadradas. Además, se puede representar el área de la tira alrededor del afiche con las palabras "el área del afiche menos el área de la porción sin sombrear".

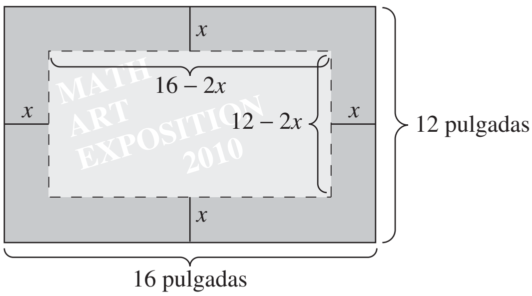


Figura 6.6

Así, se puede plantear y resolver la siguiente ecuación:

$$\underbrace{16(12)}_{\text{Área del afiche}} - \underbrace{(16 - 2x)(12 - 2x)}_{\text{Área del área sin sombrear}} = \underbrace{96}_{\text{Área de la tira}}$$

$$192 - (192 - 56x + 4x^2) = 96$$
$$192 - 192 + 56x - 4x^2 = 96$$
$$-4x^2 + 56x - 96 = 0$$
$$x^2 - 14x + 24 = 0$$
$$(x - 12)(x - 2) = 0$$
$$x - 12 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$
$$x = 12 \quad \text{o} \quad x = 2$$

Obviamente, la tira no puede medir 12 pulgadas de ancho porque el ancho total del afiche mide 12 pulgadas. Así que se debe desechar la solución de 12 y concluir que la tira mide 2 pulgadas de ancho.

Examen de conceptos 6.5

Para los problemas 1-7, emparejar cada factorización con el nombre del tipo de patrón que se usó para factorizar el problema.

1. $x^2 + 2xy + y^2$
2. $x^2 - y^2$
3. $ax + ay + bx + by$
4. $x^2 + bx + c$

A. Trinomio con una x al cuadrado con coeficiente de uno
B. Factor binomial común
C. Diferencia de dos cuadrados
D. Factor común

5. $ax^2 + bx + c$
6. $ax^2 + ax + a$
7. $(a + b)x + (a + b)y$

E. Factorización por agrupamiento
F. Trinomio cuadrado perfecto
G. Trinomio con una x al cuadrado con coeficiente distinto a uno

Conjunto de problemas 6.5

Para los problemas 1-12, factorizar cada trinomio cuadrado perfecto. (Objetivo 1)

1. $x^2 + 4x + 4$
2. $x^2 + 18x + 81$
3. $x^2 - 10x + 25$
4. $x^2 - 24x + 144$
5. $9n^2 + 12n + 4$
6. $25n^2 + 30n + 9$
7. $16a^2 - 8a + 1$
8. $36a^2 - 84a + 49$
9. $4 + 36x + 81x^2$
10. $1 - 4x + 4x^2$
11. $16x^2 - 24xy + 9y^2$
12. $64x^2 + 16xy + y^2$

Para los problemas 13-52, factorizar cada polinomio completamente. Indicar cualquiera que no sea factorizable usando enteros. (Objetivo 2)

13. $2x^2 + 17x + 8$
14. $x^2 + 19x$
15. $2x^3 - 72x$
16. $30x^2 - x - 1$
17. $n^2 - 7n - 60$
18. $4n^3 - 100n$
19. $3a^2 - 7a - 4$
20. $a^2 + 7a - 30$
21. $8x^2 + 72$
22. $3y^3 - 36y^2 + 96y$
23. $9x^2 + 30x + 25$
24. $5x^2 - 5x - 6$
25. $15x^2 + 65x + 70$
26. $4x^2 - 20xy + 25y^2$
27. $4x^2 + 4xy - 3y^2$
28. $9x^2y - 27xy$
29. $xy + 5y - 8x - 40$
30. $xy - 3y + 9x - 27$
31. $2a(b + 7) + 5(b + 7)$
32. $4x(y + 2) + 3(y + 2)$
33. $8p(3m - 4) - 6(3m - 4)$
34. $a(7b + 1) - 4(7b + 1)$
35. $20x^2 + 31xy - 7y^2$
36. $2x^2 - xy - 36y^2$
37. $ab - 3a + 5b - 15$
38. $mn - 7m + 4n - 28$
39. $24x^2 + 18x - 81$
40. $30x^2 + 55x - 50$
41. $12x^2 + 6x + 30$
42. $24x^2 - 8x + 32$
43. $x^3 - 5x^2 + 2x - 10$
44. $x^3 - 3x^2 + 6x - 18$
45. $5x^4 - 80$
46. $3x^5 - 3x$
47. $xy - 4y - 2x + 8$
48. $3ab - 15a - 2b + 10$
49. $x^2 + 2xy + x + 2y$
50. $2ab + 8a + b + 4$
51. $x^2 + 12xy + 36y^2$
52. $4x^2 - 28xy + 49y^2$

Para los problemas 53-82, resolver cada ecuación. (Objetivo 3)

53. $4x^2 - 20x = 0$
54. $-3x^2 - 24x = 0$
55. $x^2 - 9x - 36 = 0$
56. $x^2 + 8x - 20 = 0$
57. $-2x^3 + 8x = 0$
58. $4x^3 - 36x = 0$
59. $6n^2 - 29n - 22 = 0$
60. $30n^2 - n - 1 = 0$
61. $(3n - 1)(4n - 3) = 0$
62. $(2n - 3)(7n + 1) = 0$
63. $(n - 2)(n + 6) = -15$
64. $(n + 3)(n - 7) = -25$
65. $2x^2 = 12x$
66. $3x^2 = -15x$
67. $t^3 - 2t^2 - 24t = 0$
68. $2t^3 - 16t^2 - 18t = 0$
69. $12 + 7x + x^2 = 0$
70. $10 - 7x + x^2 = 0$
71. $x^2 + 4x - 32 = 0$
72. $a^2 + 8a - 9 = 0$
73. $(3n + 1)(n + 2) = 12$
74. $(2n + 5)(n + 4) = -1$
75. $x^3 = 6x^2$
76. $x^3 = -4x^2$
77. $9x^2 - 24x + 16 = 0$
78. $25x^2 + 60x + 36 = 0$
79. $x^3 + 10x^2 + 25x = 0$
80. $x^3 - 18x^2 + 81x = 0$
81. $3x^2 + 2x - 5 = 0$
82. $5x^2 - 2x - 7 = 0$

Para los problemas 83-100, plantear una ecuación y resolver cada problema. **(Objetivo 4)**

83. Encontrar dos números cuyo producto sea 15 de tal manera que uno de los números sea siete más que cuatro veces el otro número.

84. Encontrar dos números cuyo producto sea 12 de tal manera que uno de los números sea cuatro menos que ocho veces el otro número.

85. Encontrar dos números cuyo producto sea -1. Uno de los números es tres más que el doble del otro número.

86. Suponga que la suma de los cuadrados de tres números consecutivos da 110. Hallar los números.

87. Un número es uno más que el doble de otro número. La suma de los cuadrados de los dos números es 97. Hallar los números.

88. Un número es uno menos que tres veces otro número. Si el producto de ambos números es 102, hallar los números.

89. En un edificio de oficinas, un cuarto contiene 54 sillas. El número de sillas por fila es tres menos que el doble de número de filas. Hallar el número de filas y el número de sillas por fila.

90. Un plantío de árboles de manzana contiene 85 árboles. El número de árboles en cada fila es tres menos que cuatro veces el número de filas. Encontrar el número de filas y el número de árboles por fila.

91. Suponga que el área combinada de dos cuadrados es 360 pies cuadrados. Cada lado del cuadrado más grande es tres veces más grande que un lado del cuadrado más pequeño. ¿Qué tan grande es cada cuadrado?

92. El área de una losa rectangular de acera es 45 pies cuadrados. Su largo mide 3 pies más que cuatro veces su ancho. Encontrar el largo y el ancho de la losa.

93. El largo de una hoja de papel rectangular mide 1 centímetro más que el doble de su ancho, y el área del rectángulo es 55 centímetros cuadrados. Encontrar el largo y el ancho del rectángulo.

94. Suponga que el largo de cierto rectángulo es tres veces su ancho. Si el largo incrementa 2 pulgadas, y el ancho incrementa 1 pulgada, el nuevo rectángulo tiene un área de 70 pulgadas cuadradas. Hallar el largo y el ancho del rectángulo original.

95. El área de un triángulo es de 51 pulgadas cuadradas. Un lado del triángulo mide 1 pulgada menos que tres veces la altura a ese lado. Hallar el largo de ese lado y la longitud de la altura a ese lado.

96. Suponga que un cuadrado y un rectángulo tienen áreas iguales. Además, suponga que el largo del rectángulo mide lo doble que un lado del cuadrado y el ancho del rectángulo mide 4 centímetros menos que el largo de un lado del cuadrado. Encontrar las dimensiones de ambas figuras.

97. Una tira de ancho uniforme debe recortarse de los cuatro lados de una hoja de papel de 8 pulgadas por 11 pulgadas para reducir el tamaño del papel a un área de 40 pulgadas cuadradas. Encontrar el ancho de la tira.

98. La suma de las áreas de dos círculos es 100π centímetros cuadrados. El radio del círculo más grande mide 2 centímetros más que el radio del círculo más pequeño. Encontrar la longitud del radio de cada círculo.

99. La suma de las áreas de dos círculos es 180π pulgadas cuadradas. El largo del radio del círculo más pequeño mide 6 pulgadas menos que el radio del círculo más grande. Encontrar la longitud del radio de cada círculo.

100. Una tira de ancho uniforme está sombreada alrededor de un afiche rectangular de 18 pulgadas por 14 pulgadas. ¿Qué tan ancha es la tira si el área de la porción no sombreada del afiche es 165 pulgadas cuadradas?

Pensamientos en palabras

101. Cuando se factorizan polinomios, ¿porqué cree que es mejor buscar el factor monomial más alto en común primero?

102. Explique cómo resolvería $(4x - 3)(8x + 5) = 0$ y también cómo resolvería $(4x - 3)(8x + 5) = 29$.

Respuestas del examen de conceptos

1. F o A **2.** C **3.** E **4.** A **5.** G **6.** D **7.** B

Capítulo 6 Resumen

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Encontrar el máximo común divisor. (Sección 6.1/Objetivo 1)	Por “máximo común divisor de dos o más monomios” se entiende el monomio con el mayor coeficiente numérico y la máxima potencia en las variables que es factor en cada monomio.	Encontrar el máximo común divisor de $12a^3b^3$, $18a^2b^2$ y $54ab^4$. **Solución** El coeficiente numérico más grande que es factor de los tres términos es 6. El exponente más grande para a que es factor en los trés términos es 1. El exponente más grande para b que es factor en los tres términos es 2. Entonces, el máximo común divisor es $6ab^2$. **Problema de muestra 1** Encontrar el máximo común divisor de $14xy^2$, $35xy^3$ y $42xy^4$.
Factorizar el máximo común divisor. (Sección 6.1/Objetivo 2)	La propiedad distributiva en la forma $ab + ac = a(b + c)$ proporciona la base para factorizar el factor monomial o binomial común más alto.	Factorizar $36x^2y + 18x - 27xy$. **Solución** $36x^2y + 18x - 27xy$ $= 9x(4xy) + 9x(2) - 9x(3y)$ $= 9x(4xy + 2 - 3y)$ **Problema de muestra 2** Factorizar $12xy^2 - 18y + 42xy$.
Factorizar por agrupamiento. (Sección 6.1/Objetivo 3)	Reescribir la expresión $ab + 3a + bc + 3c$ como $a(b + 3) + c(b + 3)$ y después factorizar el factor binomial en común de $b + 3$ para que $a(b + 3) + c(b + 3)$ se convierta en $(b + 3)(a + c)$ se llama factorizar por agrupamiento.	Factorizar $15xy + 6x + 10y^2 + 4y$. **Solución** $15xy + 6x + 10y^2 + 4y$ $= 3x(5y + 2) + 2y(5y + 2)$ $= (5y + 2)(3x + 2y)$ **Problema de muestra 3** Factorizar $2xy + 4x - 3y - 6$.
Factorizar la diferencia de dos cuadrados. (Sección 6.2/Objetivo 1)	El patrón de factorización de la diferencia de dos cuadrados es $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Tenga cuidado de no aplicar el patrón a la suma de dos cuadrados como $a^2 + b^2$. No hay patrón de factorización para la suma de dos cuadrados.	Factorizar $4x^2 - 81y^2$. **Solución** $4x^2 - 81y^2 = (2x + 9y)(2x - 9y)$ **Problema de muestra 4** Factorizar $49x^2 - 9y^2$.
Factorizar trinomios de la forma $x^2 + bx + c$. (Sección 6.3/Objetivo 1)	El siguiente patrón de multiplicación proporciona una técnica para factorizar trinomios en la forma $x^2 + bx + c$. $(x + r)(x + s) = x^2 + rx + sx + rs$ $= x^2 + (r + s)x + rs$ Para trinomios en la forma $x^2 + bx + c$, querrá que dos factores de c cuya suma sea igual a b.	Factorizar $x^2 + 2x - 35$. **Solución** Los factores de -35 que suman 2 son 7 y -5 $x^2 + 2x - 35 = (x + 7)(x - 5)$ **Problema de muestra 5** Factorizar $x^2 + 4x - 21$.

(continúa)

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Factorizar trinomios cuando el coeficiente líder no es 1. **(Sección 6.4/Objetivo 1)**	Se presentaron dos diferentes técnicas para factorizar trinomios en la forma $ax^2 + bx + c$. Para repasar estas técnicas, vaya a la sección 6.4 y estudie los ejemplos. Los ejemplos aquí muestran las dos técnicas.	Factorizar **(a)** $3x^2 + 7x + 4$ **(b)** $2x^2 - 5x + 3$ **Solución** (a) Para factorizar $3x^2 + 7x + 4$, se puede ver el primer término y el signo para determinar que estos factores son de la forma $(3x + \_\_\_\_)$ y $(x + \_\_\_\_)$. Por medio de prueba y error se puede llegar a los factores correctos. $3x^2 + 7x + 4 = (3x + 4)(x + 1)$ **(b)** $2x^2 - 5x + 3$ suma de -5 producto de $2(3) = 6$ Así que se necesitan dos números cuya suma sea -5 y cuyo producto sea 6. Los números son -2 y -3. Por ende, se vuelve a escribir el término medio como $-2x - 3x$. $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3$ $= 2x(x - 1) - 3(x - 1)$ $= (x - 1)(2x - 3)$ **Problema de muestra 6** Factorizar: **(a)** $5x^2 - 14x - 3$ **(b)** $3x^2 + 13x + 4$
Factorizar trinomios cuadrados perfectos. **(Sección 6.5/Objetivo 1)**	Los trinomios cuadrados perfectos son fáciles de reconocer debido a la naturaleza de sus términos. El primer término y el último término serán los cuadrados de una cantidad. El término medio, sumado o restado, es el doble del producto de las cantidades al cuadrado en el primer y último término.	Factorizar $16x^2 + 56x + 49$. **Solución** $16x^2 + 56x + 49$ $= (4x)^2 + 2(4x)(7) + (7)^2$ $= (4x + 7)^2$ **Problema de muestra 7** Factorizar $64x^2 - 48x + 9$.
Reconocer los diferentes tipos de factorización. **(Sección 6.5/Objetivo 2)**	Como guía general para factorizar completamente, siempre busque el máximo común divisor *primero* y después proceda con una o más de las siguientes técnicas. **1.** Aplique el patrón de diferencia de cuadrados. **2.** Aplique el patrón de cuadrado perfecto. **3.** Factorice un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ en el producto de dos binomios. **4.** Factorice un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ en el producto de dos binomios.	Factorizar $3x^2 + 12xy + 12y^2$. **Solución** $3x^2 + 12xy + 12y^2$ $= 3(x^2 + 4xy + 4y^2)$ $= 3(x + 2y)^2$ **Problema de muestra 8** Factorizar $5x^2 - 10xy + 5y^2$.

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Usar la factorización para resolver ecuaciones. (Sección 6.1/Objetivo 4; Sección 6.2/Objetivo 2; Sección 6.3/Objetivo 2; Sección 6.4/Objetivo 2; Sección 6.5/Objetivo 3)	La propiedad 6.1 establece que, sean a y b números reales, $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$. Para resolver ecuaciones aplicando esta propiedad, primero debe establecer una ecuación igual a cero. Proceda factorizando el otro lado de la ecuación. Después establezca cada factor igual a 0 y resuelva las ecuaciones.	Resolver $2x^2 = -10x$. **Solución** $2x^2 = -10x$ $2x^2 + 10x = 0$ $2x(x + 5) = 0$ $2x = 0$ o $x + 5 = 0$ $x = 0$ o $x = -5$ El conjunto solución es $\{-5, 0\}$. **Problema de muestra 9** Resolver $3y^2 = 18y$.
Resolver problemas verbales que involucran factorizar. (Sección 6.3/Objetivos 3 y 4; Sección 6.5/Objetivo 4)	El conocimiento en factorización ha expandido las técnicas disponibles para resolver problemas verbales. Este capítulo introdujo el teorema de Pitágoras. El teorema pertenece a los tríangulos rectángulos y declara, que en cualquier triángulo rectángulo, el cuadrado de su lado más largo es igual a la suma de los cuadrados de sus otros lados. La fórmula para el teorema se escribe $a^2 + b^2 = c^2$, donde a y b son los catetos del triángulo y c es la hipotenusa.	El largo de un cateto de un triángulo rectángulo mide 1 pulgada más que el largo del otro cateto. El largo de la hipotenusa es 5 pulgadas. Hallar el largo de los dos catetos. **Solución** Sea x el largo de un cateto del triángulo. Entonces $x + 1$ representará el largo del otro cateto. Se sabe que la hipotenusa es igual a 5. Aplicar el teorema de Pitágoras. $x^2 + (x + 1)^2 = 5^2$ $x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25$ $2x^2 + 2x - 24 = 0$ $2(x^2 + x - 12) = 0$ $x^2 + x - 12 = 0$ $(x + 4)(x - 3) = 0$ $x + 4 = 0$ o $x - 3 = 0$ $x = -4$ o $x = 3$ Ya que el largo de un lado del triángulo no puede ser negativo, la única respuesta posible es 3. Entonces, el largo de un cateto del triángulo es 3 pulgadas y el largo del otro cateto es 4 pulgadas. **Problema de muestra 10** El largo de un cateto de un triángulo rectángulo mide 2 más que el largo del otro cateto. El largo de la hipotenusa es 10 pies. Hallar el largo de los dos catetos.

Capítulo 6 Conjunto de problemas de repaso

Para los problemas 1-24, factorizar completamente. Indicar cualquier polinomio que no sea factorizable usando números enteros.

1. $x^2 - 9x + 14$

2. $3x^2 + 21x$

3. $9x^2 - 4$

4. $4x^2 + 8x - 5$

5. $25x^2 - 60x + 36$

6. $n^3 + 13n^2 + 40n$

7. $y^2 + 11y - 12$

8. $3xy^2 + 6x^2y$

9. $x^4 - 1$

10. $2x^2 + 3x - 9$

11. $x^2 + 7x + 24$

12. $4x^2 - 3x - 7$

13. $3n^2 + 3n - 90$

14. $x^3 - xy^2$

15. $2x^2 + 3xy - 2y^2$

16. $4n^2 - 6n - 40$

17. $5x + 5y + ax + ay$

18. $21t^2 - 5t - 4$

19. $2x^3 - 2x$

20. $3x^3 - 108x$

21. $16x^2 + 40x + 25$

22. $xy - 3x - 2y + 6$

23. $15x^2 - 7xy - 2y^2$

24. $6n^4 - 5n^3 + n^2$

Para los problemas 25-44, resolver cada ecuación.

25. $x^2 + 4x - 12 = 0$

26. $x^2 = 11x$

27. $2x^2 + 3x - 20 = 0$

28. $9x^2 + 12x - 5 = 0$

29. $6n^2 = 24$

30. $16y^2 + 40y + 25 = 0$

31. $t^3 - t = 0$

32. $3x^2 + 8x + 4 = 0$

33. $x^2 + 3x - 28 = 0$

34. $(x - 2)(x + 2) = 21$

35. $5n^2 + 9n - 2 = 0$

36. $4n^2 + 10n = 14$

37. $2x^3 - 8x = 0$

38. $x^2 - 20x + 96 = 0$

39. $4t^2 + 17t - 15 = 0$

40. $3(x + 2) - x(x + 2) = 0$

41. $(2x - 5)(3x + 7) = 0$

42. $(x + 4)(x - 1) = 50$

43. $-7n - 2n^2 = -15$

44. $2x^2 - 9x = -4$

Para los problemas 45-58, plantear una ecuación y resolver cada uno de los siguientes problemas.

45. El número más grande entre dos números es uno menos que el doble del número más chico. La diferencia de sus cuadrados es 33. Encontrar los números.

46. El largo de un rectángulo mide 2 centímetros menos que cinco veces el ancho del rectángulo. El área del rectángulo mide 16 centímetros cuadrados. Encontrar el largo y el ancho del rectángulo.

47. Suponga que el área combinada de dos cuadrados es 104 pulgadas cuadradas. Cada lado del cuadrado más grande es cinco veces más grande que un lado del cuadrado más chico. Hallar el tamaño de cada cuadrado.

48. El cateto más largo de un triángulo es una unidad más corta que el doble del largo que el cateto más corto. La hipotenusa es una unidad más que el doble del cateto más corto. Encontrar las longitudes de los tres lados del triángulo.

49. El producto de dos números es 26 y el otro número es uno más grande que seis veces el otro número. Encontrar los números.

50. Hallar tres números impares consecutivos de tal forma que la suma de los cuadrados de los dos números más pequeños sea nueve más que el cuadrado del número más grande.

51. El número de libros por repisa en un librero es uno menos que nueve veces el número de repisas. Si el librero contiene 140 libros, encontrar el número de repisas.

52. El área combinada de un cuadrado y un rectángulo es 225 yardas cuadradas. El largo del ractángulo es ocho veces el ancho del mismo, y el largo del cuadrado mide lo mismo que el ancho del rectángulo. Hallar las dimensiones del cuadrado y del rectángulo.

53. Imagine que se quieren encontrar dos números consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 613. ¿Cuáles son?

54. Si el volumen de un cubo es igual al área total de la superficie del cubo, hallar el largo de un lado del cubo.

55. El área combinada de dos círculos es 53π metros cuadrados. El largo del radio del círculo más grande es 1 metro más que tres veces el largo del radio del círculo más pequeño. Encontrar el largo del radio de cada círculo.

56. El producto de dos números impares consecutivos es uno menos que cinco veces su suma. Hallar los números.

57. Sandy tiene una fotografía que mide 14 centímetros de largo y 8 centímetros de ancho. Quiere reducir el largo y el ancho por la misma cantidad para que el área disminuya 40 centímetros cuadrados. ¿Cuánto debería disminuir el largo y el ancho?

58. Suppose that a strip of uniform width is plowed along both sides and both ends of a garden that is 120 feet long and 90 feet wide (see Figura 6.7). How wide is the strip if the garden is half plowed?

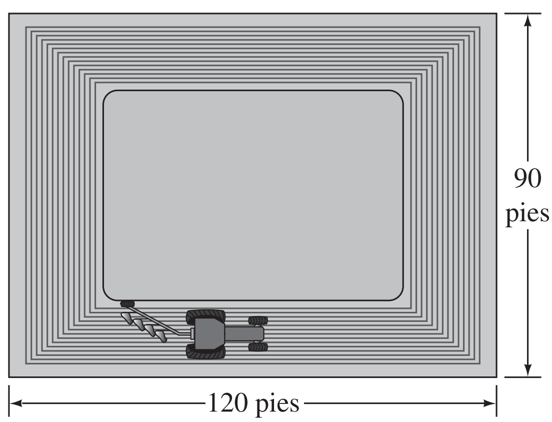


Figura 6.7

Capítulo 6 Examen

Para los problemas 1-10, factorizar cada expresión completamente.

1. $x^2 + 3x - 10$

2. $x^2 - 5x - 24$

3. $2x^3 - 2x$

4. $x^2 + 21x + 108$

5. $6n^2 + 15n + 6$

6. $ax + ay + 2bx + 2by$

7. $4x^2 + 4x - 15$

8. $6x^2 + 24$

9. $2x^3 - 20x^2 + 42x$

10. $12 + 4x - x^2$

Para los problemas 11-21, resolver cada ecuación.

11. $7x^2 = 63$

12. $x^2 + 5x - 6 = 0$

13. $4n^2 = 32n$

14. $(3x - 2)(2x + 5) = 0$

15. $(x - 3)(x + 7) = -9$

16. $x^3 + 16x^2 + 48x = 0$

17. $9(x - 5) - x(x - 5) = 0$

18. $3t^2 + 11t - 4 = 0$

19. $8 - 10x - 3x^2 = 0$

20. $3x^3 = 75x$

21. $25n^2 - 70n + 49 = 0$

Para los problemas 22-25, plantear una ecuación y resolver cada problema.

22. El largo de un rectángulo mide 2 pulgadas menos que el doble de su ancho. Si el área de un rectángulo es 112 pulgadas cuadradas, hallar el largo del rectángulo.

23. El largo de un cateto de un triángulo rectángulo es 4 centímetros más que el largo del otro cateto. El largo de la hipotenusa es 8 centímetros más que el largo del cateto más corto. Encontrar el largo del cateto más corto.

24. Un cuarto contiene 112 sillas. El número de sillas por fila son cinco menos que tres veces el número de filas. Encontrar el número de sillas por fila.

25. Si el volumen de un cubo es igual a dos veces el área total de la superficie, hallar el largo de un lado del cubo.

7 Fracciones algebraicas

Bounce/Cultura/Getty Images

"Existen todo tipo de aprendedores. El lenguaje de señas es para los que aprenden de manera visual; las canciones llegan a los que aprenden escuchando; y las actividades didácticas, en las que se tocan objetos, son para los que aprenden de manera táctil".
DENISE MECHAN

Tip de estudio

Todos tienen un sistema de aprendizaje preferido para aprender matemáticas. Los estudiantes suelen ser clasificados en aprendedores visuales, auditivos o kinestésico. Su estilo depende de su personalidad y ningún estilo es necesariamente mejor que otro para aprender matemáticas. Ayuda conocer su propio estilo y desarrollar estrategias de aprendizaje que vayan con ese estilo. Las siguientes sugerencias pueden serle de utilidad sin importar su estilo de aprendizaje.

Los estudiantes que aprenden matemáticas por medio de la vista son del estilo visual. Este tipo de aprendedores deberían de escribir sus problemas matemáticos y estudiar los materiales. Los aprendedores visuales pueden encontrar útil el uso de diferentes colores para escribir fórmulas, apuntes o tarjetas de estudio. Pida a su tutor que le muestre los pasos para resolver un problema en lugar de sólo hablar de ellos.

Los estudiantes que típicamente aprenden matemáticas *escuchando* son los aprendedores auditivos. Los aprendedores auditivos deben leer sus fórmulas y estudiar los materiales en voz alta porque esto les ayudará a recordar. Puede que quiera usar una grabadora para decir y escuchar las propiedades y reglas matemáticas importantes. Los aprendedores auditivos tal vez quieran decir los números en los problemas en voz alta o mover sus labios mientras leen los problemas.

Los estudiantes que suelen aprender matemáticas tocando y sintiendo son los aprendedores kinestésicos. Los aprendedores kinestésicos deben manipular objetos cuando les sea posible. Un ejercicio táctil para fracciones es cortar un plato o pieza de papel para representar las partes de un entero. Después de graficar las ecuaciones, trácelas con su dedo para sentir la diferencia en las gráficas dependiendo de las diferencias en las ecuaciones.

Basado en su estilo de aprendizaje, ¿qué técnicas de estudio le han servido para aprender matemáticas?

Vista previa del capítulo

El capítulo 7, fracciones algebraicas, tiende a ser difícil para la mayoría de los estudiantes. El capítulo requiere conocimientos de los capítulos previos. Del capítulo dos, tendrá que recordar cómo sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones. Después, de los capítulos 5 y 6, necesitará conocer las operaciones de polinomios y factorización. La mayoría de los problemas en este capítulo comienzan con una factorización de polinomios. Mantenga sus apuntes del capítulo 6 cerca como referencia a cómo factorizar.

7.1 Simplificación de fracciones algebraicas

OBJETIVOS

1. Expresar números racionales en forma reducida
2. Reducir expresiones monomiales racionales
3. Simplificar expresiones racionales usando técnicas de factorización

Si el numerador y el denominador de una fracción son polinomios, entonces se dice que la fracción es una **fracción algebraica** o una **expresión racional**. He aquí algunos ejemplos de fracciones algebraicas:

$$\frac{4}{x-2} \qquad \frac{x^2+2x-4}{x^2-9} \qquad \frac{y+x^2}{xy-3} \qquad \frac{x^3+2x^2-3x-4}{x^2-2x-6}$$

Puesto que se debe evitar la división entre cero, ningún valor que cree un denominador de cero se puede asignar a las variables. Por ende, la expresión racional, $\frac{4}{x-2}$ es significativa para todos los valores de x, excepto $x = 2$. En lugar de realizar restricciones para cada expresión individual, simplemente se supondrá que todos los denominadores representan números reales distintos de cero.

Comentario: Se usarán los términos "fracción algebraica" y "expresión racional" intercaladamente en este capítulo. Sin embargo, hay fracciones algebraicas, como $\frac{\sqrt{x}+1}{4}$, que no son expresiones racionales. Las fracciones algebraicas en este capítulo, sin embargo, son todas expresiones racionales; es decir, el cociente indicado de polinomios.

Recuerde que el principio fundamental de las fracciones $\left(\frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}\right)$ proporciona la base para expresar fracciones en forma reducida (o simplificada), como los siguientes ejemplos demuestran:

$$\frac{18}{24} = \frac{3 \cdot \cancel{6}}{4 \cdot \cancel{6}} = \frac{3}{4} \qquad \frac{-42xy}{77y} = -\frac{2 \cdot 3 \cdot \cancel{7} \cdot x \cdot \cancel{y}}{\cancel{7} \cdot 11 \cdot \cancel{y}} = -\frac{6x}{11}$$

$$\frac{15x}{25x} = \frac{3 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{x}}{5 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{x}} = \frac{3}{5} \qquad \frac{28x^2y^2}{-63x^2y^3} = -\frac{4 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{x^2} \cdot \cancel{y^2}}{9 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{x^2} \cdot \underset{y}{\cancel{y^3}}} = -\frac{4}{9y}$$

Se pueden usar las técnicas de factorización del capítulo 6 para factorizar numeradores y/o denominadores para poder aplicar el principio fundamental de las fracciones. Varios ejemplos deben aclarar este proceso.

Ejemplo de salón de clases
Simplificar $\frac{x^2-4x}{x^2-16}$.

EJEMPLO 1 Simplificar $\frac{x^2+6x}{x^2-36}$.

Solución

$$\frac{x^2+6x}{x^2-36} = \frac{x\cancel{(x+6)}}{(x-6)\cancel{(x+6)}} = \frac{x}{x-6}$$

Ejemplo de salón de clases
Simplificar $\frac{m - 5}{m^2 - 10m + 25}$.

EJEMPLO 2 Simplificar $\frac{a + 2}{a^2 + 4a + 4}$.

Solución

$$\frac{a + 2}{a^2 + 4a + 4} = \frac{1(\cancel{a + 2})}{(a + 2)(\cancel{a + 2})} = \frac{1}{a + 2}$$

Ejemplo de salón de clases
Simplificar $\frac{x^2 - 5x - 14}{2x^2 - 15x + 7}$.

EJEMPLO 3 Simplificar $\frac{x^2 + 4x - 21}{2x^2 + 15x + 7}$.

Solución

$$\frac{x^2 + 4x - 21}{2x^2 + 15x + 7} = \frac{(x - 3)(\cancel{x + 7})}{(2x + 1)(\cancel{x + 7})} = \frac{x - 3}{2x + 1}$$

Ejemplo de salón de clases
Simplificar $\frac{x^3y + x^2y^2}{x^2 + xy}$.

EJEMPLO 4 Simplificar $\frac{a^2b + ab^2}{ab + b^2}$.

Solución

$$\frac{a^2b + ab^2}{ab + b^2} = \frac{a\cancel{b}(\cancel{a + b})}{\cancel{b}(\cancel{a + b})} = a$$

Ejemplo de salón de clases
Simplificar $\frac{9a^3b - 36ab}{3a^2 - 9a - 30}$.

EJEMPLO 5 Simplificar $\frac{4x^3y - 36xy}{2x^2 - 4x - 30}$.

Solución

$$\frac{4x^3y - 36xy}{2x^2 - 4x - 30} = \frac{4xy(x^2 - 9)}{2(x^2 - 2x - 15)}$$

$$= \frac{\overset{2}{\cancel{4}}xy(\cancel{x + 3})(x - 3)}{\cancel{2}(x - 5)(\cancel{x + 3})}$$

$$= \frac{2xy(x - 3)}{x - 5}$$

Note que, en el ejemplo 5, se dejó el numerador en la fracción final en forma factorizada. Se hace esto cuando hay polinomios, y no monomios, involucrados. Tanto $\frac{2xy(x - 3)}{x - 5}$ como $\frac{2x^2y - 6xy}{x - 5}$ son respuestas aceptables.

Recuerde que el cociente de cualquier número real distinto a cero y su opuesto es -1. Por ejemplo, $\frac{7}{-7} = -1$ y $\frac{-9}{9} = -1$. De la misma manera, el cociente indicado de cualquier polinomio y su opuesto es igual a -1.

$\frac{x}{-x} = -1$ porque x y $-x$ son opuestos

$\frac{x - y}{y - x} = -1$ porque $x - y$ y $y - x$ son opuestos

$\frac{a^2 - 9}{9 - a^2} = -1$ porque $a^2 - 9$ y $9 - a^2$ son opuestos

Use esta idea para simplificar fracciones algebraicas en los ejemplos finales de esta sección.

Ejemplo de salón de clases

Simplificar $\dfrac{18 - 3x}{x - 6}$.

EJEMPLO 6

Simplificar $\dfrac{14 - 7n}{n - 2}$.

Solución

$$\frac{14 - 7n}{n - 2} = \frac{7(2 - n)}{n - 2}$$
$$= 7(-1) \qquad \frac{2 - n}{n - 2} = -1$$
$$= -7$$

Ejemplo de salón de clases

Simplificar $\dfrac{n^2 - 4n - 32}{48 + 2n - n^2}$.

EJEMPLO 7

Simplificar $\dfrac{x^2 + 4x - 21}{15 - 2x - x^2}$.

Solución

$$\frac{x^2 + 4x - 21}{15 - 2x - x^2} = \frac{(x + 7)(x - 3)}{(5 + x)(3 - x)}$$
$$= \left(\frac{x + 7}{x + 5}\right)(-1) \qquad \frac{x - 3}{3 - x} = -1$$
$$= -\frac{x + 7}{x + 5} \quad \text{o} \quad \frac{-x - 7}{x + 5}$$

Examen de conceptos 7.1

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. Cuando un número racional se reduce, la forma del numeral cambia, pero no el número que representa.
2. En la expresión racional $\dfrac{x + 2}{x - 3}$ puede tener todos los valores menos x =-2 y $x = 3$.
3. Los binomios $x - y$ y $y - x$ son opuestos.
4. Los binomios $x + 3$ y $x - 3$ son opuestos.
5. La expresión racional $\dfrac{2 - x}{x - 2}$ se reduce a -1.
6. La expresión racional $\dfrac{x - y}{y - x}$ se reduce a -1.
7. 7. $\dfrac{x^2 + 5x - 14}{x^2 - 8x + 12} = \dfrac{x + 7}{x - 6}$.
8. La expresión racional $\dfrac{-2x^2 - 11x - 12}{-3x^2 - 11x + 4}$ se simplifica a $\dfrac{2x + 3}{3x - 1}$.
9. La fracción algebraica $\dfrac{-5x^2y}{10x}$ se simplifica a $-\dfrac{xy}{2}$.
10. La fracción algebraica $\dfrac{12xy^3}{-16y^2}$ se simplifica a $-\dfrac{3xy}{4}$.

Conjunto de problemas 7.1

Para los problemas 1-60, simplificar cada fracción algebraica. (Objetivos 1–3)

1. $\dfrac{6x}{14y}$

2. $\dfrac{8y}{18x}$

3. $\dfrac{9xy}{24x}$

4. $\dfrac{12y}{20xy}$

5. $\dfrac{-15x^2y}{25x}$

6. $\dfrac{16x^3y^2}{-28x^2y}$

7. $\dfrac{-36x^4y^3}{-48x^6y^2}$

8. $\dfrac{-18x^3y}{-36xy^3}$

9. $\dfrac{12a^2b^5}{-54a^2b^3}$

10. $\dfrac{-24a^3b^3}{39a^5b^2}$

11. $\dfrac{32xy^2z^3}{72yz^4}$

12. $\dfrac{27x^2y^3z^4}{45x^3y^3z}$

13. $\dfrac{xy}{x^2-2x}$

14. $\dfrac{x^2+5x}{xy}$

15. $\dfrac{8x+12y}{12}$

16. $\dfrac{8}{12x-16y}$

17. $\dfrac{x^2+2x}{x^2-7x}$

18. $\dfrac{x^2-6x}{2x^2+6x}$

19. $\dfrac{7-x}{x-7}$

20. $\dfrac{x-9}{9-x}$

21. $\dfrac{15-3n}{n-5}$

22. $\dfrac{2n^2-8n}{4-n}$

23. $\dfrac{4x^3-4x}{1-x^2}$

24. $\dfrac{9-x^2}{3x^3-27x}$

25. $\dfrac{x^2-1}{3x^2-3x}$

26. $\dfrac{5x^2+25x}{x^2-25}$

27. $\dfrac{x^2+xy}{x^2}$

28. $\dfrac{x^3}{x^3-x^2y}$

29. $\dfrac{6x^3-15x^2y}{6x^2+24xy}$

30. $\dfrac{6x^2+42xy}{16x^3-8x^2y}$

31. $\dfrac{n^2+2n}{n^2+3n+2}$

32. $\dfrac{n^2+9n+18}{n^2+6n}$

33. $\dfrac{2n^2+5n-3}{n^2-9}$

34. $\dfrac{3n^2-10n-8}{n^2-16}$

35. $\dfrac{2x^2+17x+35}{3x^2+19x+20}$

36. $\dfrac{5x^2-32x+12}{4x^2-27x+18}$

37. $\dfrac{9(x-1)^2}{12(x-1)^3}$

38. $\dfrac{18(x+2)^3}{16(x+2)^2}$

39. $\dfrac{7x^2+61x-18}{7x^2+19x-6}$

40. $\dfrac{8x^2-51x+18}{8x^2+29x-12}$

41. $\dfrac{10a^2+a-3}{15a^2+4a-3}$

42. $\dfrac{6a^2-11a-10}{8a^2-22a+5}$

43. $\dfrac{x^2+2xy-3y^2}{2x^2-xy-y^2}$

44. $\dfrac{x^2-3xy+2y^2}{x^2-4y^2}$

45. $\dfrac{x^2-9}{-x^2-3x}$

46. $\dfrac{-x^2-2x}{x^2-4}$

47. $\dfrac{n^2+14n+49}{8n+56}$

48. $\dfrac{6n-60}{n^2-20n+100}$

49. $\dfrac{4n^2-12n+9}{2n^2-n-3}$

50. $\dfrac{9n^2+30n+25}{3n^2-n-10}$

51. $\dfrac{y^2-6y-72}{y^2-8y-84}$

52. $\dfrac{y^2+20y+96}{y^2+23y+120}$

53. $\dfrac{1-x^2}{x-x^2}$

54. $\dfrac{2x+x^2}{4-x^2}$

55. $\dfrac{6-x-2x^2}{12+7x-10x^2}$

56. $\dfrac{15+x-2x^2}{21-10x+x^2}$

57. $\dfrac{x^2+7x-18}{12-4x-x^2}$

58. $\dfrac{3x-21}{28-4x}$

59. $\dfrac{5x-40}{80-10x}$

60. $\dfrac{x^2-x-12}{8+2x-x^2}$

Pensamientos en palabras

61. Explicar el rol que juegan las factorizaciones en la simplificación de fracciones algebraicas.

62. ¿Cuál de los siguientes procesos de simplificación es el correcto? Explique su respuesta.

$$\frac{2x}{x}=2 \qquad \frac{x+2}{x}=2 \qquad \frac{x(x+2)}{x}=x+2$$

Más investigación

Para los problemas 63-66, simplificar cada fracción. Necesitará usar la factorización por agrupamiento.

63. $\dfrac{xy - 3x + 2y - 6}{xy + 5x + 2y + 10}$ **64.** $\dfrac{xy + 4x - y - 4}{xy + 4x - 4y - 16}$

65. $\dfrac{xy - 6x + y - 6}{xy - 6x + 5y - 30}$ **66.** $\dfrac{xy - 7x - 5y + 35}{xy - 9x - 5y + 45}$

El vínculo entre exponentes positivos y negativos $\left(a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}\right)$ junto con la propiedad $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ también pueden usarse para reducir fracciones. Considere este ejemplo:

$$\frac{x^3}{x^7} = x^{3-7} = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$$

Para los problemas 67-72, use este enfoque para expresar cada fracción en su forma reducida. Dé todas las respuestas con sólo exponentes positivos.

67. $\dfrac{x^3}{x^9}$ **68.** $\dfrac{x^4}{x^8}$ **69.** $\dfrac{x^4y^3}{x^7y^5}$

70. $\dfrac{x^5y^2}{x^6y^3}$ **71.** $\dfrac{28a^2b^3}{-7a^5b^3}$ **72.** $\dfrac{-44a^3b^4}{4a^3b^6}$

Respuestas del examen de conceptos

1. Cierto **2.** Falso **3.** Cierto **4.** Falso **5.** Cierto **6.** Cierto **7.** Cierto **8.** Cierto **9.** Cierto **10.** Cierto

7.2 Multiplicar y dividir fracciones algebraicas

OBJETIVOS

1 Multiplicar expresiones racionales

2 Dividir expresiones racionales

Multiplicar fracciones algebraicas

En el capítulo 2, se definió el producto de dos números racionales como $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$. Esta definición se extiende a las fracciones algebraicas en general.

Definición 7.1

Si $\dfrac{A}{B}$ y $\dfrac{C}{D}$ son expresiones racionales con $B \neq 0$ y $D \neq 0$, entonces

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

En otras palabras, para multiplicar números racionales en forma de fracción común, simplemente multiplique numeradores y multiplique denominadores y exprese el producto en forma simplificada. Los siguientes ejemplos ilustran este concepto:

1. $\dfrac{2x}{3y} \cdot \dfrac{5y}{4x} = \dfrac{2 \cdot 5 \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{y}}{3 \cdot \underset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{y}} = \dfrac{5}{6}$

Note que se usó la propiedad conmutativa de la multiplicación para reordenar los factores en una forma más conveniente para reconocer los factores comunes del numerador y del denominador.

2. $\dfrac{4a}{6b} \cdot \dfrac{8b}{12a^2} = \dfrac{\cancel{4} \cdot \overset{4}{\cancel{8}} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{b}}{\underset{3}{\cancel{6}} \cdot \underset{3}{\cancel{12}} \cdot \underset{a}{\cancel{a^2}} \cdot \cancel{b}} = \dfrac{4}{9a}$

3. $\dfrac{-9x^2}{15xy} \cdot \dfrac{5y^2}{7x^2y^3} = -\dfrac{\overset{3}{\cancel{9}} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{x^2} \cdot \cancel{y^2}}{\underset{5}{\cancel{15}} \cdot 7 \cdot \underset{x}{\cancel{x^3}} \cdot \underset{y^2}{\cancel{y^4}}} = -\dfrac{3}{7xy^2}$

Cuando se multiplican fracciones algebraicas, a veces se necesitan factorizar los numeradores y/o los denominadores para que se puedan reconocer los factores en común. Considere los siguientes ejemplos.

Ejemplo de salón de clases
Multiplicar y simplificar
$\frac{n}{n^2 - 81} \cdot \frac{n - 9}{m}$.

EJEMPLO 1 Multiplicar y simplificar $\frac{x}{x^2 - 9} \cdot \frac{x + 3}{y}$.

Solución

$$\frac{x}{x^2 - 9} \cdot \frac{x + 3}{y} = \frac{x\cancel{(x + 3)}}{\cancel{(x + 3)}(x - 3)(y)} = \frac{x}{y(x - 3)}$$

$\frac{x}{xy - 3y}$ también es una respuesta aceptable.

Recuerde, cuando trabaje con fracciones algebraicas, se asume que todos los denominadores representan números reales distintos a cero. Por ende, en el ejemplo 1, se dice que $\frac{x}{x^2 + 2x} \cdot \frac{x^2 + 10x + 16}{5}$. pueden ser todos los números reales menos -3 y 3 para x, y 0 para y.

Ejemplo de salón de clases
Multiplicar y simplificar
$\frac{d}{d^2 + 7d} \cdot \frac{d^2 + 8d + 7}{3}$.

EJEMPLO 2 Multiplicar y simplificar $\frac{x}{x^2 + 2x} \cdot \frac{x^2 + 10x + 16}{5}$.

Solución

$$\frac{x}{x^2 + 2x} \cdot \frac{x^2 + 10x + 16}{5} = \frac{\cancel{x}\cancel{(x + 2)}(x + 8)}{\cancel{x}\cancel{(x + 2)}(5)} = \frac{x + 8}{5}$$

Ejemplo de salón de clases
Multiplicar y simplificar
$\frac{x^2 - x}{x + 3} \cdot \frac{x^2 - 4x - 21}{x^2 - 8x + 7}$.

EJEMPLO 3 Multiplicar y simplificar $\frac{a^2 - 3a}{a + 5} \cdot \frac{a^2 + 3a - 10}{a^2 - 5a + 6}$.

Solución

$$\frac{a^2 - 3a}{a + 5} \cdot \frac{a^2 + 3a - 10}{a^2 - 5a + 6} = \frac{a\cancel{(a - 3)}\cancel{(a + 5)}\cancel{(a - 2)}}{\cancel{(a + 5)}\cancel{(a - 2)}\cancel{(a - 3)}} = a$$

Ejemplo de salón de clases
Multiplicar y simplificar
$\frac{12x^2 + 13x - 4}{x - 2} \cdot \frac{x^2 - 4}{3x^2 + 4x}$.

EJEMPLO 4 Multiplicar y simplificar $\frac{6n^2 + 7n - 3}{n + 1} \cdot \frac{n^2 - 1}{2n^2 + 3n}$.

Solución

$$\frac{6n^2 + 7n - 3}{n + 1} \cdot \frac{n^2 - 1}{2n^2 + 3n} = \frac{\cancel{(2n + 3)}(3n - 1)\cancel{(n + 1)}(n - 1)}{\cancel{(n + 1)}(n)\cancel{(2n + 3)}} = \frac{(3n - 1)(n - 1)}{n}$$

División de fracciones algebraicas

Recuerde que, para dividir dos números racionales en forma $\frac{a}{b}$, se invierte el divisor y se multiplica. Simbólicamente, esto se expresa como $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$. Además, a los números $\frac{c}{d}$ y $\frac{d}{c}$ se les llama "recíprocos" uno de otro, porque su producto es 1. Por ende, se puede describir la división al decir "para dividir entre una fracción, multiplique por su recíproco". Se define la división de fracciones algebraicas de la misma manera y con el mismo vocabulario.

Definición 7.2

Si $\dfrac{A}{B}$ y $\dfrac{C}{D}$ son expresiones racionales con $B \neq 0$, $D \neq 0$ y $C \neq 0$, entonces

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$

Considere algunos ejemplos:

1. $$\frac{4x}{7y} \div \frac{6x^2}{14y^2} = \frac{4x}{7y} \cdot \frac{14y^2}{6x^2} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot \overset{2}{\cancel{14}} \cdot \cancel{x} \cdot \overset{y}{\cancel{y^2}}}{\cancel{7} \cdot \underset{3}{\cancel{6}} \cdot \underset{x}{\cancel{x^2}} \cdot \cancel{y}} = \frac{4y}{3x}$$

2. $$\frac{-8ab}{9b} \div \frac{18a^3}{15a^2b} = \frac{-8ab}{9b} \cdot \frac{15a^2b}{18a^3} = -\frac{\overset{4}{\cancel{8}} \cdot \overset{5}{\cancel{15}} \cdot \cancel{a^3} \cdot \overset{b}{\cancel{b^2}}}{\underset{3}{\cancel{9}} \cdot \underset{9}{\cancel{18}} \cdot \cancel{a^3} \cdot \cancel{b}} = -\frac{20b}{27}$$

3. $$\frac{x^2y^3}{4ab} \div \frac{5xy^2}{-9a^2b} = \frac{x^2y^3}{4ab} \cdot \frac{-9a^2b}{5xy^2} = -\frac{9 \cdot \overset{x}{\cancel{x^2}} \cdot \overset{y}{\cancel{y^3}} \cdot \overset{a}{\cancel{a^2}} \cdot \cancel{b}}{4 \cdot 5 \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{y^2}} = -\frac{9axy}{20}$$

La idea clave al dividir fracciones es convertir primero a una multiplicación equivalente y después proceder a factorizar el numerador y el denominador completamente y buscar factores comunes.

Ejemplo de salón de clases
Dividir y simplificar
$$\frac{c^3 + c^2}{cd^2} \div \frac{d^2 - 9}{d^2 - 3d}$$

EJEMPLO 5 Dividir y simplificar $\dfrac{x^2 - 4x}{xy} \div \dfrac{x^2 - 16}{y^3 + y^2}$.

Solución

$$\frac{x^2 - 4x}{xy} \div \frac{x^2 - 16}{y^3 + y^2} = \frac{x^2 - 4x}{xy} \cdot \frac{y^3 + y^2}{x^2 - 16}$$
$$= \frac{\cancel{x}\cancel{(x - 4)}(\overset{y}{\cancel{y^2}})(y + 1)}{\cancel{xy}(x + 4)\cancel{(x - 4)}}$$
$$= \frac{y(y + 1)}{x + 4}$$

Ejemplo de salón de clases
Dividir y simplificar
$$\frac{c^3 + c^2}{cd^2} \div \frac{d^2 - 9}{d^2 - 3d}$$

EJEMPLO 6 Dividir y simplificar $\dfrac{a^2 + 3a - 18}{a^2 + 4} \div \dfrac{1}{3a^2 + 12}$.

Solución

$$\frac{a^2 + 3a - 18}{a^2 + 4} \div \frac{1}{3a^2 + 12} = \frac{a^2 + 3a - 18}{a^2 + 4} \cdot \frac{3a^2 + 12}{1}$$
$$= \frac{(a + 6)(a - 3)(3)\cancel{(a^2 + 4)}}{\cancel{a^2 + 4}}$$
$$= 3(a + 6)(a - 3)$$

Ejemplo de salón de clases
Dividir y simplificar
$$\frac{5x^2 - 16x + 3}{10x^2 + 23x - 5} \div (x - 3)$$

EJEMPLO 7 Dividir y simplificar $\dfrac{2n^2 - 7n - 4}{6n^2 + 7n + 2} \div (n - 4)$.

Solución

$$\frac{2n^2 - 7n - 4}{6n^2 + 7n + 2} \div (n - 4) = \frac{2n^2 - 7n - 4}{6n^2 + 7n + 2} \cdot \frac{1}{n - 4}$$

$$= \frac{\cancel{(2n+1)}\cancel{(n-4)}}{\cancel{(2n+1)}(3n+2)\cancel{(n-4)}}$$

$$= \frac{1}{3n+2}$$

En un problema como el del ejemplo 7, puede ser útil escribir el divisor con un denominador de 1. Por ende, $n-4$ se escribe como $\frac{n-4}{1}$; obviamente, su recíproco es $\frac{1}{n-4}$.

Examen de conceptos 7.2

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. Para multiplicar dos números racionales en forma fraccionaria, se necesita cambiar a fracciones equivalentes con un denominador en común.
2. Cuando se multiplican expresiones racionales que contienen polinomios, los polinomios se factorizan para que se puedan cancelar los factores en común.
3. En la división $\frac{2x^2y}{3z} \div \frac{4x^3}{5y^2}$, la fracción $\frac{4x^3}{5y^2}$ es el divisor.
4. Los números $-\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$ son inversos multiplicativos.
5. Para dividir dos números en forma fraccionaria, se invierte el divisor y se multiplica.
6. Si $x \neq 0$, entonces $\left(\frac{4xy}{x}\right)\left(\frac{3y}{2x}\right) = \frac{6y^2}{x}$.
7. $\frac{3}{4} \div \frac{4}{3} = 1$.
8. Si $x \neq 0$ y $y \neq 0$, entonces $\frac{5x^2y}{2y} \div \frac{10x^2}{3y} = \frac{3}{4}$.
9. Si $x \neq y$, entonces $\frac{x-y}{2} \div (x-y) = \frac{1}{2}$.
10. Si $x \neq -2$ y $x \neq 2$, entonces $\frac{x-2}{x+2} \div \frac{x+2}{x-2} = \frac{x^2-4}{x^2+4}$.

Conjunto de problemas 7.2

Para los problemas 1-40, realizar las multiplicaciones y divisiones indicadas, y expresar las respuestas en su forma más simple. **(Objetivos 1 y 2)**

1. $\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{10}$
2. $\frac{7}{8} \cdot \frac{12}{14}$
3. $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{6}{7}\right)$
4. $\left(\frac{5}{6}\right)\left(-\frac{4}{15}\right)$
5. $\left(\frac{17}{9}\right) \div \left(-\frac{19}{9}\right)$
6. $\left(-\frac{15}{7}\right) \div \left(\frac{13}{14}\right)$
7. $\frac{8xy}{12y} \cdot \frac{6x}{14y}$
8. $\frac{9x}{15y} \cdot \frac{20xy}{18x}$
9. $\left(-\frac{5n^2}{18n}\right)\left(\frac{27n}{25}\right)$
10. $\left(\frac{4ab}{10}\right)\left(-\frac{30a}{22b}\right)$
11. $\frac{3a^2}{7} \div \frac{6a}{28}$
12. $\frac{4x}{11y} \div \frac{12x}{33}$
13. $\frac{18a^2b^2}{-27a} \div \frac{-9a}{5b}$
14. $\frac{24ab^2}{25b} \div \frac{-12ab}{15a^2}$
15. $24x^3 \div \frac{16x}{y}$
16. $14xy^2 \div \frac{7y}{9}$
17. $\frac{1}{15ab^3} \div \frac{-1}{12a}$
18. $\frac{-2}{7a^2b^3} \div \frac{1}{9ab^4}$

19. $\dfrac{18rs}{34} \div (9r)$

20. $\dfrac{8rs}{3} \div (6s)$

21. $\dfrac{y}{x+y} \cdot \dfrac{x^2-y^2}{xy}$

22. $\dfrac{x^2-9}{6} \cdot \dfrac{8}{x-3}$

23. $\dfrac{2x^2+xy}{xy} \cdot \dfrac{y}{10x+5y}$

24. $\dfrac{x^2+y^2}{x-y} \cdot \dfrac{x^2-xy}{3}$

25. $\dfrac{6ab}{4ab+4b^2} \div \dfrac{7a-7b}{a^2-b^2}$

26. $\dfrac{4ab}{2a^2-2ab} \div \dfrac{ab+b}{3a-3b}$

27. $\dfrac{x^2+11x+30}{x^2+4} \cdot \dfrac{5x^2+20}{x^2+14x+45}$

28. $\dfrac{x^2+15x+54}{x^2+2} \cdot \dfrac{3x^2+6}{x^2+10x+9}$

29. $\dfrac{2x^2-3xy+y^2}{4x^2y} \div \dfrac{x^2-y^2}{6x^2y^2}$

30. $\dfrac{2x^2+xy-y^2}{x^2y} \div \dfrac{5x^2+4xy-y^2}{y}$

31. $\dfrac{a+a^2}{15a^2+11a+2} \cdot \dfrac{1-a}{1-a^2}$

32. $\dfrac{2a^2-11a-21}{3a^2+a} \cdot \dfrac{3a^2-11a-4}{2a^2-5a-12}$

33. $\dfrac{2x^2-2xy}{x^2+4x-32} \cdot \dfrac{x^2-16}{5xy-5y^2}$

34. $\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+4x+4} \cdot \dfrac{x^2-5x-14}{x^2+3x}$

35. $\dfrac{2x^2-xy-3y^2}{(x+y)^2} \div \dfrac{4x^2-12xy+9y^2}{10x-15y}$

36. $\dfrac{x^2+4xy+4y^2}{x^2} \div \dfrac{x^2-4y^2}{x^2-2xy}$

37. $\dfrac{(3t-1)^2}{45t-15} \div \dfrac{12t^2+5t-3}{20t+5}$

38. $\dfrac{5t^2-3t-2}{(t-1)^2} \div \dfrac{5t^2+32t+12}{4t^2-3t-1}$

39. $\dfrac{n^3-n}{n^2+7n+6} \cdot \dfrac{4n+24}{n^2-n}$

40. $\dfrac{2x^2-6x-36}{x^2+2x-48} \cdot \dfrac{x^2+5x-24}{2x^2-18}$

Para los problemas 41-46, realizar las operaciones indicadas y expresar las respuestas en su forma más simple. Recuerde que las multiplicaciones y divisiones se resuelven en el orden que aparecen de izquierda a derecha. **(Objetivos 1 y 2)**

41. $\dfrac{6}{9y} \div \dfrac{30x}{12y^2} \cdot \dfrac{5xy}{4}$

42. $\dfrac{5xy^2}{12y} \cdot \dfrac{18x^2}{15y} \div \dfrac{3}{2xy}$

43. $\dfrac{8x^2}{xy-xy^2} \cdot \dfrac{x-1}{8x^2-8y^2} \div \dfrac{xy}{x+y}$

44. $\dfrac{5x-20}{x^2-9} \cdot \dfrac{x+3}{x-4} \div \dfrac{15}{x-3}$

45. $\dfrac{x^2+9x+18}{x^2+3x} \cdot \dfrac{x^2+5x}{x^2-25} \div \dfrac{x^2+8x}{x^2+3x-40}$

46. $\dfrac{4x}{3x+6y} \cdot \dfrac{5xy}{x^2-4} \div \dfrac{10}{x^2+4x+4}$

Pensamientos en palabras

47. Dar una descripción paso a paso sobre cómo hacer la siguiente multiplicación.

$$\frac{x^2-x}{x^2-1} \cdot \frac{x^2+x-6}{x^2+4x-12}$$

48. ¿Es $\left(\dfrac{x}{x+1} \div \dfrac{x-1}{x}\right) \div \dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{x+1} \div \left(\dfrac{x-1}{x} \div \dfrac{1}{x}\right)$? Justifique su respuesta.

49. Explicar por qué el cociente $\dfrac{x-2}{x+1} \div \dfrac{x}{x-1}$ no se define con $x = -1$, $x = 1$ y $x = 0$, pero sí con $x = 2$.

Respuestas del examen de conceptos

1. Falso **2.** Cierto **3.** Cierto **4.** Falso **5.** Cierto **6.** Cierto **7.** Falso **8.** Falso **9.** Cierto **10.** Falso

7.3 Adición y substracción fracciones algebraicas

OBJETIVOS

1 Combinar expresiones racionales con denominadores comunes

2 Encontrar el mínimo común denominador

3 Adición y substracción de expresiones racionales con denominadores diferentes

En el capítulo 2, la adición y substracción de números racionales se definieron como $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ y $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$, respectivamente. Estas definiciones se extienden a las fracciones algebraicas en general.

Definición 7.3

Si $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{B}$ son expresiones racionales con $B \neq 0$, entonces

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{B} = \frac{A+C}{B} \qquad \text{y} \qquad \frac{A}{B} - \frac{C}{B} = \frac{A-C}{B}$$

Entonces, si los denominadores de dos fracciones algebraicas son iguales, se pueden sumar o restar las fracciones sumando o restando los numeradores y colocando el resultado sobre el denominador común. He aquí algunos ejemplos:

$$\frac{5}{x} + \frac{7}{x} = \frac{5+7}{x} = \frac{12}{x}$$

$$\frac{8}{xy} - \frac{3}{xy} = \frac{8-3}{xy} = \frac{5}{xy}$$

$$\frac{14}{2x+1} + \frac{15}{2x+1} = \frac{14+15}{2x+1} = \frac{29}{2x+1}$$

$$\frac{3}{a-1} - \frac{4}{a-1} = \frac{3-4}{a-1} = \frac{-1}{a-1} \quad \text{o} \quad -\frac{1}{a-1}$$

En estos mismos ejemplos, note cómo se usa el trabajo previo al simplificar polinomios.

$$\frac{x+3}{4} + \frac{2x-3}{4} = \frac{(x+3)+(2x-3)}{4} = \frac{3x}{4}$$

$$\frac{x+5}{7} - \frac{x+2}{7} = \frac{(x+5)-(x+2)}{7} = \frac{x+5-x-2}{7} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{3x+1}{xy} + \frac{2x+3}{xy} = \frac{(3x+1)+(2x+3)}{xy} = \frac{5x+4}{xy}$$

$$\frac{2(3n+1)}{n} - \frac{3(n-1)}{n} = \frac{2(3n+1)-3(n-1)}{n} = \frac{6n+2-3n+3}{n} = \frac{3n+5}{n}$$

Puede ser necesario simplificar la fracción resultante de la adición o substracción de fracciones.

$$\frac{4x-3}{8} + \frac{2x+3}{8} = \frac{(4x-3)+(2x+3)}{8} = \frac{6x}{8} = \frac{3x}{4}$$

$$\frac{3n-1}{12}-\frac{n-5}{12}=\frac{(3n-1)-(n-5)}{12}=\frac{3n-1-n+5}{12}$$
$$=\frac{2n+4}{12}=\frac{2(n+2)}{12}=\frac{n+2}{6}$$

$$\frac{-2x+3}{x^2-4}+\frac{3x-1}{x^2-4}=\frac{(-2x+3)+(3x-1)}{x^2-4}=\frac{x+2}{x^2-4}$$
$$=\frac{\cancel{x+2}}{(\cancel{x+2})(x-2)}$$
$$=\frac{1}{x-2}$$

Recuerde que, para sumar o restar números racionales con diferentes denominadores, primero se deben cambiar a fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. De hecho, usando el mínimo común denominador (MCD), el trabajo se vuelve más fácil. Repase cuidadosamente el proceso porque también funciona con fracciones algebraicas en general.

Ejemplo de salón de clases

Sumar $\frac{5}{6}+\frac{3}{7}$.

EJEMPLO 1 Sumar $\frac{3}{5}+\frac{1}{4}$.

Solución

Por inspección, se puede ver que el MCD es 20. Así, se pueden cambiar ambas fracciones a fracciones equivalentes cuyo denominador sea 20.

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{4}=\frac{3}{5}\underbrace{\left(\frac{4}{4}\right)}_{\text{Forma de 1}}+\frac{1}{4}\underbrace{\left(\frac{5}{5}\right)}_{\text{Forma de 1}}=\frac{12}{20}+\frac{5}{20}=\frac{17}{20}$$

Ejemplo de salón de clases

Restar $\frac{7}{12}-\frac{2}{15}$.

EJEMPLO 2 Restar $\frac{5}{18}-\frac{7}{24}$.

Solución

Si no se puede encontrar el MCD por pura inspección, entonces se pueden usar las formas de factorización prima.

$$\left.\begin{aligned}18&=2\cdot3\cdot3\\24&=2\cdot2\cdot2\cdot3\end{aligned}\right\}\longrightarrow \text{MCD}=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3=72$$

$$\frac{5}{18}-\frac{7}{24}=\frac{5}{18}\left(\frac{4}{4}\right)-\frac{7}{24}\left(\frac{3}{3}\right)=\frac{20}{72}-\frac{21}{72}=-\frac{1}{72}$$

Ahora considere la adición y substracción de fracciones algebraicas con diferentes denominadores.

Ejemplo de salón de clases

Sumar $\frac{4m+3}{5}+\frac{m+1}{6}$.

EJEMPLO 3 Sumar $\frac{x-2}{4}+\frac{3x+1}{3}$.

Solución

Por inspección, se ve que el MCD es 12.

$$\frac{x-2}{4}+\frac{3x+1}{3}=\left(\frac{x-2}{4}\right)\left(\frac{3}{3}\right)+\left(\frac{3x+1}{3}\right)\left(\frac{4}{4}\right)$$
$$=\frac{3(x-2)}{12}+\frac{4(3x+1)}{12}$$

$$= \frac{3(x-2)+4(3x+1)}{12}$$

$$= \frac{3x-6+12x+4}{12} = \frac{15x-2}{12}$$

Ejemplo de salón de clases

Restar $\frac{x-4}{2} - \frac{x-8}{10}$.

EJEMPLO 4 Restar $\frac{n-2}{2} - \frac{n-6}{6}$.

Solución

Por inspección, se ve que el MCD es 6.

$$\frac{n-2}{2} - \frac{n-6}{6} = \left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{3}{3}\right) - \frac{n-6}{6}$$

$$= \frac{3(n-2)}{6} - \frac{(n-6)}{6}$$

$$= \frac{3(n-2)-(n-6)}{6}$$

$$= \frac{3n-6-n+6}{6}$$

$$= \frac{2n}{6}$$

$$= \frac{n}{3}$$ ¡No olvide simplificar!

No es especialmente difícil cuando los denominadores contienen variables; el enfoque se mantiene básicamente igual.

Ejemplo de salón de clases

Sumar $\frac{2}{5n} + \frac{5}{6n}$.

EJEMPLO 5 Sumar $\frac{3}{4x} + \frac{7}{3x}$.

Solución

Por inspección, se ve que el MCD es $12x$.

$$\frac{3}{4x} + \frac{7}{3x} = \frac{3}{4x}\left(\frac{3}{3}\right) + \frac{7}{3x}\left(\frac{4}{4}\right) = \frac{9}{12x} + \frac{28}{12x} = \frac{9+28}{12x} = \frac{37}{12x}$$

Ejemplo de salón de clases

Restar $\frac{19}{24a} - \frac{15}{32a}$.

EJEMPLO 6 Restar $\frac{11}{12x} - \frac{5}{14x}$.

Solución

$$\left.\begin{aligned} 12x &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \\ 14x &= 2 \cdot 7 \cdot x \end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{MCD} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot x = 84x$$

$$\frac{11}{12x} - \frac{5}{14x} = \frac{11}{12x}\left(\frac{7}{7}\right) - \frac{5}{14x}\left(\frac{6}{6}\right)$$

$$= \frac{77}{84x} - \frac{30}{84x} = \frac{77-30}{84x} = \frac{47}{84x}$$

Ejemplo de salón de clases

Sumar $\frac{8}{x} + \frac{3}{x+5}$.

EJEMPLO 7

Sumar $\frac{2}{y} + \frac{4}{y-2}$.

Solución

Por inspección, se ve que el MCD es $y(y-2)$.

$$\frac{2}{y} + \frac{4}{y-2} = \frac{2}{y}\underbrace{\left(\frac{y-2}{y-2}\right)}_{\text{Forma de 1}} + \frac{4}{y-2}\underbrace{\left(\frac{y}{y}\right)}_{\text{Forma de 1}}$$

$$= \frac{2(y-2)}{y(y-2)} + \frac{4y}{y(y-2)}$$

$$= \frac{2(y-2)+4y}{y(y-2)}$$

$$= \frac{2y-4+4y}{y(y-2)} = \frac{6y-4}{y(y-2)}$$

Note el resultado final del ejemplo 7. El numerador, $6y - 4$, puede factorizarse en $2(3y - 2)$. Sin embargo, debido a que esto no produce factores en común con el denominador, la fracción no puede simplificarse. Entonces la respuesta final se puede dejar como $\frac{6y-4}{y(y-2)}$; también es aceptable expresarla como $\frac{2(3y-2)}{y(y-2)}$.

Ejemplo de salón de clases

Restar $\frac{6}{x+7} - \frac{3}{x-2}$.

EJEMPLO 8

Restar $\frac{4}{x+2} - \frac{7}{x+3}$.

Solución

Por inspección, se ve que el MCD es $(x+2)(x+3)$.

$$\frac{4}{x+2} - \frac{7}{x+3} = \left(\frac{4}{x+2}\right)\left(\frac{x+3}{x+3}\right) - \left(\frac{7}{x+3}\right)\left(\frac{x+2}{x+2}\right)$$

$$= \frac{4(x+3)}{(x+2)(x+3)} - \frac{7(x+2)}{(x+3)(x+2)}$$

$$= \frac{4(x+3)-7(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{4x+12-7x-14}{(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{-3x-2}{(x+2)(x+3)}$$

Examen de conceptos 7.3

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. La suma $\frac{2x}{x+4} + \frac{1}{x+4}$ es igual a $\frac{2x+1}{x+4}$ para todos los valores de x excepto $x = -\frac{1}{2}$ y $x = -4$,
2. Cualquier denominador común puede usarse para sumar expresiones racionales, pero típicamente se usa el mínimo común denominador.

3. Las fracciones $\frac{2x^2}{3y}$ y $\frac{10x^2z}{15yz}$ son fracciones equivalentes.

4. El mínimo común múltiplo de los denominadores siempre es el mínimo común denominador.

5. Para simplificar la expresión $\frac{5}{2x-1}+\frac{3}{1-2x}$ podría usarse $2x-1$ como común denominador.

6. Si $x \neq \frac{1}{2}$, entonces $\frac{5}{2x-1}+\frac{3}{1-2x}=\frac{2}{2x-1}$.

7. $\frac{3}{-4}-\frac{-2}{3}=\frac{17}{12}$

8. $\frac{4x-1}{5}+\frac{2x+1}{6}=\frac{x}{5}$

9. $\frac{x}{4}-\frac{3x}{2}+\frac{5x}{3}=\frac{5x}{12}$

10. Si $x \neq 0$, entonces $\frac{2}{3x}-\frac{3}{2x}-1=\frac{-5-6x}{6x}$.

Conjunto de problemas 7.3

Para los problemas 1-34, sumar o restar según se indique. Asegúrese de expresar las respuestas en su forma más simple. **(Objetivo 1)**

1. $\frac{5}{x}+\frac{12}{x}$

2. $\frac{17}{x}-\frac{13}{x}$

3. $\frac{7}{3x}-\frac{5}{3x}$

4. $\frac{4}{5x}+\frac{3}{5x}$

5. $\frac{7}{2n}+\frac{1}{2n}$

6. $\frac{5}{3n}+\frac{4}{3n}$

7. $\frac{9}{4x^2}-\frac{13}{4x^2}$

8. $\frac{12}{5x^2}-\frac{22}{5x^2}$

9. $\frac{x+1}{x}+\frac{3}{x}$

10. $\frac{x-2}{x}+\frac{4}{x}$

11. $\frac{3}{x-1}-\frac{6}{x-1}$

12. $\frac{8}{x+4}-\frac{10}{x+4}$

13. $\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x}$

14. $\frac{2x+3}{x}-\frac{3}{x}$

15. $\frac{3t-1}{4}+\frac{2t+3}{4}$

16. $\frac{4t-1}{7}+\frac{8t-5}{7}$

17. $\frac{7a+2}{3}-\frac{4a-6}{3}$

18. $\frac{9a-1}{6}-\frac{4a-2}{6}$

19. $\frac{4n+3}{8}+\frac{6n+5}{8}$

20. $\frac{2n-5}{10}+\frac{6n-1}{10}$

21. $\frac{3n-7}{6}-\frac{9n-1}{6}$

22. $\frac{2n-6}{5}-\frac{7n-1}{5}$

23. $\frac{5x-2}{7x}-\frac{8x+3}{7x}$

24. $\frac{4x+1}{3x}-\frac{2x+5}{3x}$

25. $\frac{3(x+2)}{4x}+\frac{6(x-1)}{4x}$

26. $\frac{4(x-3)}{5x}+\frac{2(x+6)}{5x}$

27. $\frac{6(n-1)}{3n}+\frac{3(n+2)}{3n}$

28. $\frac{2(n-4)}{3n}+\frac{4(n+2)}{3n}$

29. $\frac{2(3x-4)}{7x^2}-\frac{7x-8}{7x^2}$

30. $\frac{3(4x-3)}{8x^2}-\frac{11x-9}{8x^2}$

31. $\frac{a^2}{a+2}-\frac{4}{a+2}$

32. $\frac{n^2}{n-4}-\frac{16}{n-4}$

33. $\frac{3x}{(x-6)^2}-\frac{18}{(x-6)^2}$

34. $\frac{x^2+5x}{(x+1)^2}+\frac{4}{(x+1)^2}$

Para los problemas 35-80, sumar o restar según se indice y expresar las respuestas en su forma más simple. **(Objetivo 3)**

35. $\frac{3x}{8}+\frac{5x}{4}$

36. $\frac{5x}{3}+\frac{2x}{9}$

37. $\frac{7n}{12}-\frac{4n}{3}$

38. $\frac{n}{6}-\frac{7n}{12}$

39. $\frac{y}{6}+\frac{3y}{4}$

40. $\frac{3y}{4}+\frac{7y}{5}$

41. $\frac{8x}{3}-\frac{3x}{7}$

42. $\frac{5y}{6}-\frac{3y}{8}$

43. $\frac{2x}{6}+\frac{3x}{5}$

44. $\frac{6x}{9}+\frac{7x}{12}$

45. $\frac{7n}{8} - \frac{3n}{9}$

46. $\frac{8n}{10} - \frac{7n}{15}$

47. $\frac{x+3}{5} + \frac{x-4}{2}$

48. $\frac{x-2}{5} + \frac{x+1}{6}$

49. $\frac{x-6}{9} + \frac{x+2}{3}$

50. $\frac{x-2}{4} + \frac{x+4}{8}$

51. $\frac{3n-1}{3} + \frac{2n+5}{4}$

52. $\frac{2n+3}{4} + \frac{4n-1}{7}$

53. $\frac{4n-3}{6} - \frac{3n+5}{18}$

54. $\frac{5n-2}{12} - \frac{4n+7}{6}$

55. $\frac{3x}{4} + \frac{x}{6} - \frac{5x}{8}$

56. $\frac{5x}{2} - \frac{3x}{4} - \frac{7x}{6}$

57. $\frac{x}{5} - \frac{3}{10} - \frac{7x}{12}$

58. $\frac{4x}{3} + \frac{5}{9} - \frac{11x}{6}$

59. $\frac{5}{8x} + \frac{1}{6x}$

60. $\frac{7}{8x} + \frac{5}{12x}$

61. $\frac{5}{6y} - \frac{7}{9y}$

62. $\frac{11}{9y} - \frac{8}{15y}$

63. $\frac{5}{12x} - \frac{11}{16x^2}$

64. $\frac{4}{9x} - \frac{7}{6x^2}$

65. $\frac{3}{2x} - \frac{2}{3x} + \frac{5}{4x}$

66. $\frac{3}{4x} - \frac{5}{6x} + \frac{10}{9x}$

67. $\frac{3}{x-5} + \frac{7}{x}$

68. $\frac{4}{x-8} + \frac{9}{x}$

69. $\frac{2}{n-1} - \frac{3}{n}$

70. $\frac{5}{n+3} - \frac{7}{n}$

71. $\frac{4}{n} - \frac{6}{n+4}$

72. $\frac{8}{n} - \frac{3}{n-9}$

73. $\frac{6}{x} - \frac{12}{2x+1}$

74. $\frac{2}{x} - \frac{6}{3x-2}$

75. $\frac{4}{x+4} + \frac{6}{x-3}$

76. $\frac{7}{x-2} + \frac{8}{x+1}$

77. $\frac{3}{x-2} - \frac{9}{x+1}$

78. $\frac{5}{x-1} - \frac{4}{x+6}$

79. $\frac{3}{2x-1} - \frac{4}{3x+1}$

80. $\frac{6}{3x-4} - \frac{4}{2x+3}$

Pensamientos en palabras

81. Dar una descripción paso a paso sobre cómo resolver esta suma:

$$\frac{3x-1}{6} + \frac{2x+3}{9}$$

82. ¿Por qué $\frac{3}{x-2}$ y $\frac{3}{2-x}$ son opuestos? ¿Cuál debe ser el resultado de sumar $\frac{3}{x-2}$ y $\frac{3}{2-x}$?

83. Suponga que su amigo resuelve una suma de la siguiente manera:

$$\frac{5}{8} + \frac{7}{12} = \frac{5(12)+8(7)}{8(12)} = \frac{60+56}{96} = \frac{116}{96} = \frac{29}{24}$$

¿Esta respuesta es correcta? ¿Qué consejo le podría ofrecer a su amigo?

Más investigación

Considere la suma $\frac{9}{x-2} + \frac{4}{2-x}$. Note que los denominadores $x-2$ y $2-x$ son opuestos; es decir, $-1(2-x) = (x-2)$. En tales casos, debe sumar las fracciones de la siguiente manera:

$$\frac{9}{x-2} + \frac{4}{2-x} = \frac{9}{x-2} + \frac{4}{2-x}\underbrace{\left(\frac{-1}{-1}\right)}_{\text{Forma de 1}}$$

$$= \frac{9}{x-2} + \frac{-4}{x-2}$$

$$= \frac{9+(-4)}{x-2} = \frac{5}{x-2}$$

Para los problemas 84-89, usar este procedimiento para resolver más fácil las sumas y restas.

84. $\frac{7}{x-1} - \frac{2}{1-x}$

85. $\frac{5}{x-3} + \frac{1}{3-x}$

86. $\frac{x}{x-4} + \frac{4}{4-x}$

87. $\frac{-4}{a-1} + \frac{2}{1-a}$

88. $\frac{1}{x^2-9} + \frac{2}{x+3} - \frac{3}{3-x}$

89. $\frac{n}{2n-1} - \frac{3}{1-2n}$

Respuestas del examen de conceptos

1. Falso **2.** Cierto **3.** Cierto **4.** Cierto **5.** Cierto **6.** Cierto **7.** Falso **8.** Falso **9.** Cierto **10.** Cierto

7.4 Adición y substracción de fracciones algebraicas y simplificar fracciones complejas

OBJETIVOS

1. Adición y substracción de expresiones racionales en los que se pueden factorizar los denominadores
2. Simplificar fracciones complejas
3. Escribir expresiones racionales para expresar relaciones

En esta sección se incrementa el trabajo con adición y substracción de expresiones racionales, y se estudia el proceso de simplificar fracciones complejas. Antes de comenzar, éste parece un momento adecuado para ofrecer un consejo en cuanto a su estudio del álgebra. El éxito en álgebra depende de tener una buena comprensión de los conceptos, así como de poder realizar los diversos cálculos. En cuanto al trabajo de cálculo, debe adoptar un formato cuidadosamente organizado que muestre tantos pasos como necesite con la finalidad de minimizar las oportunidades de cometer errores por descuido. No se impaciente por encontrar atajos para ciertos cálculos antes de tener una comprensión profunda de los pasos implicados en el proceso. Este consejo es especialmente adecuado al comienzo de esta sección.

Estudie con mucho cuidado los ejemplos 1-4. Note que, para resolver cada problema, se sigue el mismo procedimiento básico:

Paso 1 Factorice los denominadores.

Paso 2 Encuentre el MCD.

Paso 3 Cambie cada fracción a una fracción equivalente que tenga el MCD como su denominador.

Paso 4 Combine los numeradores y coloque sobre el MCD.

Paso 5 Simplifique al realizar la suma o resta.

Paso 6 Busque formas de reducir la fracción resultante.

Ejemplo de salón de clases

Sumar $\frac{7}{z^2 + 5z} + \frac{4}{z}$.

EJEMPLO 1 Sumar $\frac{3}{x^2 + 2x} + \frac{5}{x}$.

Solución

$$\left.\begin{array}{ll} \text{1er denominador:} & x^2 + 2x = x(x + 2) \\ \text{2º denominador:} & x \end{array}\right\} \longrightarrow \text{MCD es } x(x + 2)$$

$$\frac{3}{x^2 + 2x} + \frac{5}{x} = \frac{3}{x(x + 2)} + \frac{5}{x}\left(\frac{x + 2}{x + 2}\right)$$

Esta fracción tiene al MCD como su denominador

Forma de 1

$$= \frac{3}{x(x + 2)} + \frac{5(x + 2)}{x(x + 2)} = \frac{3 + 5(x + 2)}{x(x + 2)}$$

$$= \frac{3 + 5x + 10}{x(x + 2)} = \frac{5x + 13}{x(x + 2)}$$

Ejemplo de salón de clases

Restar $\dfrac{8}{x^2-16} - \dfrac{1}{x-4}$.

EJEMPLO 2

Restar $\dfrac{4}{x^2-4} - \dfrac{1}{x-2}$.

Solución

$$\left.\begin{aligned} x^2 - 4 &= (x+2)(x-2) \\ x - 2 &= x - 2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{MCD es } (x+2)(x-2)$$

$$\begin{aligned}
\frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} &= \frac{4}{(x+2)(x-2)} - \left(\frac{1}{x-2}\right)\left(\frac{x+2}{x+2}\right) \\
&= \frac{4}{(x+2)(x-2)} - \frac{1(x+2)}{(x+2)(x-2)} \\
&= \frac{4-1(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{4-x-2}{(x+2)(x-2)} \\
&= \frac{-x+2}{(x+2)(x-2)} \\
&= \frac{-1\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}} \longrightarrow \text{Note el cambio de } -x+2 \text{ a } -1(x-2) \text{ al cancelar } -1 \\
&= -\frac{1}{x+2}
\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases

Sumar $\dfrac{6}{x^2-25} + \dfrac{2}{x^2-6x+5}$.

EJEMPLO 3

Sumar $\dfrac{2}{a^2-9} + \dfrac{3}{a^2+5a+6}$.

Solución

$$\left.\begin{aligned} a^2 - 9 &= (a+3)(a-3) \\ a^2 + 5a + 6 &= (a+3)(a+2) \end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{MCD es } (a+3)(a-3)(a+2)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{a^2-9} + \frac{3}{a^2+5a+6} \\
&\quad = \left(\frac{2}{(a+3)(a-3)}\right)\underbrace{\left(\frac{a+2}{a+2}\right)}_{\text{Forma de 1}} + \left(\frac{3}{(a+3)(a+2)}\right)\underbrace{\left(\frac{a-3}{a-3}\right)}_{\text{Forma de 1}} \\
&\quad = \frac{2(a+2)}{(a+3)(a-3)(a+2)} + \frac{3(a-3)}{(a+3)(a-3)(a+2)} \\
&\quad = \frac{2(a+2)+3(a-3)}{(a+3)(a-3)(a+2)} = \frac{2a+4+3a-9}{(a+3)(a-3)(a+2)} \\
&\quad = \frac{5a-5}{(a+3)(a-3)(a+2)} \quad \text{o} \quad \frac{5(a-1)}{(a+3)(a-3)(a+2)}
\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases

Realizar las operaciones indicadas

$\dfrac{5a}{a^2-b^2} + \dfrac{7}{a-b} - \dfrac{3}{a+b}$

EJEMPLO 4

Realizar las operaciones indicadas

$$\frac{2x}{x^2-y^2} + \frac{3}{x+y} - \frac{2}{x-y}$$

Solución

$$\left.\begin{aligned} x^2 - y^2 &= (x+y)(x-y) \\ x + y &= x + y \\ x - y &= x - y \end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{MCD es } (x+y)(x-y)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{2x}{x^2-y^2}+\frac{3}{x+y}-\frac{2}{x-y}\\
&\qquad=\frac{2x}{(x+y)(x-y)}+\left(\frac{3}{x+y}\right)\left(\frac{x-y}{x-y}\right)-\left(\frac{2}{x-y}\right)\left(\frac{x+y}{x+y}\right)\\
&\qquad=\frac{2x}{(x+y)(x-y)}+\frac{3(x-y)}{(x+y)(x-y)}-\frac{2(x+y)}{(x+y)(x-y)}\\
&\qquad=\frac{2x+3(x-y)-2(x+y)}{(x+y)(x-y)}\\
&\qquad=\frac{2x+3x-3y-2x-2y}{(x+y)(x-y)}\\
&\qquad=\frac{3x-5y}{(x+y)(x-y)}
\end{aligned}$$

Fracciones complejas

Las **fracciones complejas** son formas fraccionarias que contienen números racionales o expresiones racionales en los numeradores y/o denominadores. Los siguientes son ejemplos de fracciones complejas.

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} \qquad \frac{\frac{1}{x}}{\frac{3}{y}} \qquad \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}-\frac{1}{4}} \qquad \frac{\frac{2}{x}+\frac{2}{y}}{\frac{5}{x}-\frac{1}{y^2}}$$

Con frecuencia es necesario *simplificar* una fracción compleja; es decir, expresarla como una fracción simple. Este proceso se ilustra en los siguientes cinco ejemplos.

Ejemplo de salón de clases

Simplificar $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{10}}$.

EJEMPLO 5

Simplificar $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$.

Solución

Este tipo de problema es un simple problema de división. Por ende,

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}=\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}=\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{3}\cdot\frac{5}{\underset{2}{\cancel{4}}}=\frac{5}{6}$$

Ejemplo de salón de clases

Simplificar $\frac{\frac{9}{m}}{\frac{6}{n}}$.

EJEMPLO 6

Simplificar $\frac{\frac{1}{x}}{\frac{3}{y}}$.

Solución

$$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{3}{y}}=\frac{1}{x}\div\frac{3}{y}=\frac{1}{x}\cdot\frac{y}{3}=\frac{y}{3x}$$

Ejemplo de salón de clases

Simplificar $\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}$.

EJEMPLO 7

Simplificar $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}-\frac{1}{4}}$.

Observe dos posibles formas de simplificar tal problema.

Solución A

Primero combine las fracciones en el numerador y el denominador realizando la suma y la resta. Después de eso, simplifique la fracción compleja dividiendo el numerador entre el denominador.

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}}{\frac{10}{12}-\frac{3}{12}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{12}}=\frac{5}{\cancel{6}_{1}}\cdot\frac{\cancel{12}^{2}}{7}=\frac{10}{7}$$

Invertir el divisor y multiplicar

Solución B

El mínimo común múltiplo de los cuatro denominadores (2, 3, 6 y 4) es 12. Se multiplica toda la fracción compleja por la forma de 1, específicamente $\frac{12}{12}$.

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}-\frac{1}{4}}=\left(\frac{12}{12}\right)\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}-\frac{1}{4}}\right)$$

$$=\frac{12\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}{12\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{4}\right)}=\frac{12\left(\frac{1}{2}\right)+12\left(\frac{1}{3}\right)}{12\left(\frac{5}{6}\right)-12\left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$=\frac{6+4}{10-3}=\frac{10}{7}$$

Ejemplo de salón de clases

Simplificar $\dfrac{\frac{8}{x}-\frac{5}{y^2}}{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}}$.

EJEMPLO 8

Simplificar $\dfrac{\frac{2}{x}+\frac{3}{y}}{\frac{5}{x}-\frac{1}{y^2}}$.

Solución A

Primero, combine las fracciones en el numerador y denominador realizando la suma y la resta. Después, simplifique la fracción compleja dividiendo el numerador entre el denominador.

$$\frac{\frac{2}{x}+\frac{3}{y}}{\frac{5}{x}-\frac{1}{y^2}}=\frac{\frac{2}{x}\left(\frac{y}{y}\right)+\frac{3}{y}\left(\frac{x}{x}\right)}{\frac{5}{x}\left(\frac{y^2}{y^2}\right)-\frac{1}{y^2}\left(\frac{x}{x}\right)}=\frac{\frac{2y}{xy}+\frac{3x}{xy}}{\frac{5y^2}{xy^2}-\frac{x}{xy^2}}=\frac{\frac{2y+3x}{xy}}{\frac{5y^2-x}{xy^2}}$$

$$= \frac{2y + 3x}{\cancel{xy}} \cdot \frac{\overset{y}{\cancel{xy^2}}}{5y^2 - x} \qquad \text{Invertir divisor y multiplicar}$$

$$= \frac{y(2y + 3x)}{5y^2 - x}$$

Solución B

El mínimo común múltiplo de los cuatro denominadores (x, y, x y y^2) es xy^2. Se multiplica toda la fracción compleja por una forma de 1, específicamente $\frac{xy^2}{xy^2}$.

$$\frac{\frac{2}{x} + \frac{3}{y}}{\frac{5}{x} - \frac{1}{y^2}} = \left(\frac{xy^2}{xy^2}\right)\left(\frac{\frac{2}{x} + \frac{3}{y}}{\frac{5}{x} - \frac{1}{y^2}}\right)$$

$$= \frac{xy^2\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{y}\right)}{xy^2\left(\frac{5}{x} - \frac{1}{y^2}\right)} = \frac{xy^2\left(\frac{2}{x}\right) + xy^2\left(\frac{3}{y}\right)}{xy^2\left(\frac{5}{x}\right) - xy^2\left(\frac{1}{y^2}\right)}$$

$$= \frac{2y^2 + 3xy}{5y^2 - x} \quad \text{o} \quad \frac{y(2y + 3x)}{5y^2 - x}$$

Ciertamente, cualquier método (solución A o solución B) funcionará con problemas similares a los ejemplos 7 y 8. Examine con cuidado la solución B en ambos ejemplos. Este método funciona de manera efectiva con fracciones complejas donde el MCD de todos los denominadores es fácil de encontrar. Se pueden resumir ambos métodos para simplificar una fracción compleja de la siguiente manera:

1. Simplificar el numerador y el denominador de la fracción por separado. Después dividir el numerador simplificado entre el denominador simplificado.
2. Multiplicar el numerador y denominador de la fracción compleja por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores que aparecen en la fracción compleja.

Ejemplo de salón de clases

Simplificar $\dfrac{\frac{3}{a} - 4}{1 + \frac{6}{b}}$.

EJEMPLO 9

Simplificar $\dfrac{\frac{2}{x} - 3}{4 + \frac{5}{y}}$.

Solución

$$\frac{\frac{2}{x} - 3}{4 + \frac{5}{y}} = \left(\frac{xy}{xy}\right)\left(\frac{\frac{2}{x} - 3}{4 + \frac{5}{y}}\right)$$

$$= \frac{(xy)\left(\frac{2}{x}\right) - (xy)(3)}{(xy)(4) + (xy)\left(\frac{5}{y}\right)}$$

$$= \frac{2y - 3xy}{4xy + 5x} \quad \text{o} \quad \frac{y(2 - 3x)}{x(4y + 5)}$$

Escribir expresiones racionales para expresar relaciones

Puede usar su habilidad para traducir expresiones para expresar relaciones, que son básicamente una comparación entre dos cantidades. El concepto de relaciones se usa todos los días en muchos campos. La siguiente lista muestra algunos ejemplos de relaciones que puede que haya encontrado.

Rapidez a la que viaja un carro	Millas por hora
Velocidad del Internet	Megabites por segundo
Tasa de cambio monetario	Euros por dólar
Precio de plátanos	Centavos por libra
Consumo de gasolina	Millas por galón
Cantidad de problemas resueltos	Problemas por hora
Tasa de pago	Dólares por hora

Para su trabajo en álgebra, necesitará saber cómo escribir expresiones para las relaciones usando variables que representen las cantidades. El ejemplo 10 usa expresiones racionales para expresar relaciones y cantidades en relaciones.

Ejemplo de salón de clases
Escribir una expresión racional para responder a cada pregunta.
(a) Melinda usó a galones de gasolina para un viaje de b millas. ¿Cuál es la relación de millas por galón?
(b) Si a Shawn necesita x horas para pintar una casa, ¿qué fracción de casa habrá pintado en 6 horas?
(c) Si el Food Truck de Pete vendió m comidas a d dólares, ¿cuál es el precio promedio por comida?

EJEMPLO 10 Escribir una expresión racional para responder cada pregunta.

(a) Si Jorge manejó x millas en y horas, ¿cuál es la relación de millas por hora?

(b) Si Megan puede limpiar una casa entera en k horas, ¿qué fracción de la casa limpió después de 3 horas?

(c) Si m libras de chocolate cuestan n dólares, ¿cuál es el precio por libra?

Solución

(a) Para expresar la rapidez de Jorge en millas por hora, se divide el número de millas entre el número de horas. Por ende, la rapidez de Jorge se expresa como $\frac{x}{y}$.

(b) Si le toma a Megan k horas limpiar la casa, entonces en una hora limpia $\frac{1}{k}$. Entonces, si trabaja por 3 horas, habrá realizado el $\frac{3}{k}$ del trabajo.

(c) Si m libras de chocolate cuestan n dólares, entonces el precio por libra puede expresarse dividiendo el precio entre el número de libras. Por ende, el precio de la libra se expresa como $\frac{n}{m}$.

Examen de conceptos 7.4

Para los problemas 1-4, responder cierto o falso.

1. Una fracción compleja puede describirse como una fracción dentro de una fracción.

2. Una división puede simplificar la fracción compleja $\dfrac{\frac{2y}{x}}{\frac{6}{x^2}}$.

3. La fracción compleja $\dfrac{\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x+2}}{\frac{7x}{(x+2)(x-2)}}$ se simplifica en $\dfrac{5x+2}{7x}$ para todos los valores de x excepto $x = 0$.

4. Un método para simplificar una fracción compleja es multiplicar toda la fracción por una forma de 1.

5. Ordenar los siguientes pasos para sumar expresiones racionales.

A. Combine los numeradores y coloque sobre el MCD.

B. Encuentre el MCD.

C. Reduzca.

D. Factorice los denominadores.

E. Simplifique al realizar la suma o resta.

F. Cambie cada fracción a una fracción equivalente que tenga el MCD como su denominador.

Conjunto de problemas 7.4

Para los problemas 1-40, realizar las operaciones indicadas y exprese las respuestas en su forma más simple. (Objetivo 1)

1. $\dfrac{4}{x^2 - 4x} + \dfrac{3}{x}$

2. $\dfrac{3}{x^2 + 2x} + \dfrac{7}{x}$

3. $\dfrac{7}{x^2 + 2x} - \dfrac{5}{x}$

4. $\dfrac{9}{x^2 - 5x} - \dfrac{1}{x}$

5. $\dfrac{8}{n} - \dfrac{2}{n^2 - 6n}$

6. $\dfrac{6}{n} - \dfrac{4}{n^2 + 6n}$

7. $\dfrac{4}{n^2 + n} - \dfrac{4}{n}$

8. $\dfrac{8}{n^2 - 2n} + \dfrac{4}{n}$

9. $\dfrac{7}{2x} - \dfrac{x}{x^2 - x}$

10. $\dfrac{3x}{x^2 + 2x} + \dfrac{4}{5x}$

11. $\dfrac{3}{x^2 - 16} + \dfrac{5}{x + 4}$

12. $\dfrac{6}{x^2 - 9} + \dfrac{9}{x - 3}$

13. $\dfrac{8x}{x^2 - 1} - \dfrac{4}{x - 1}$

14. $\dfrac{6x}{x^2 - 4} - \dfrac{3}{x + 2}$

15. $\dfrac{4}{a^2 - 2a} + \dfrac{7}{a^2 + 2a}$

16. $\dfrac{3}{a^2 + 4a} + \dfrac{5}{a^2 - 4a}$

17. $\dfrac{1}{x^2 - 6x} - \dfrac{1}{x^2 + 6x}$

18. $\dfrac{3}{x^2 + 5x} - \dfrac{4}{x^2 - 5x}$

19. $\dfrac{n}{n^2 - 16} - \dfrac{2}{3n + 12}$

20. $\dfrac{n}{n^2 - 25} - \dfrac{2}{3n - 15}$

21. $\dfrac{5x}{6x + 4} + \dfrac{2x}{9x + 6}$

22. $\dfrac{7x}{3x - 12} + \dfrac{3x}{4x - 16}$

23. $\dfrac{x - 1}{5x + 5} - \dfrac{x - 4}{3x + 3}$

24. $\dfrac{2x + 1}{6x + 12} - \dfrac{3x - 4}{8x + 16}$

25. $\dfrac{2}{x^2 + 7x + 12} + \dfrac{3}{x^2 - 9}$

26. $\dfrac{x}{x^2 - 1} + \dfrac{3}{x^2 + 5x + 4}$

27. $\dfrac{x}{x^2 + 6x + 8} - \dfrac{5}{x^2 - 3x - 10}$

28. $\dfrac{x}{x^2 - x - 30} - \dfrac{7}{x^2 - 7x + 6}$

29. $\dfrac{a}{ab + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + ab}$

30. $\dfrac{2x}{xy + y^2} - \dfrac{2y}{x^2 + xy}$

31. $\dfrac{3}{x - 5} - \dfrac{4}{x^2 - 25} + \dfrac{5}{x + 5}$

32. $\dfrac{2}{x + 1} + \dfrac{3}{x^2 - 1} - \dfrac{5}{x - 1}$

33. $\dfrac{10}{x^2 - 2x} + \dfrac{8}{x^2 + 2x} - \dfrac{3}{x^2 - 4}$

34. $\dfrac{1}{x^2 + 7x} - \dfrac{2}{x^2 - 7x} - \dfrac{5}{x^2 - 49}$

35. $\dfrac{3x}{x^2 + 7x + 10} - \dfrac{2}{x + 2} + \dfrac{3}{x + 5}$

36. $\dfrac{4}{x - 3} - \dfrac{3}{x - 6} + \dfrac{x}{x^2 - 9x + 18}$

37. $\dfrac{5x}{3x^2 + 7x - 20} - \dfrac{1}{3x - 5} - \dfrac{2}{x + 4}$

38. $\dfrac{4x}{6x^2 + 7x + 2} - \dfrac{2}{2x + 1} - \dfrac{4}{3x + 2}$

39. $\dfrac{2}{x + 4} - \dfrac{1}{x - 3} + \dfrac{2x + 1}{x^2 + x - 12}$

40. $\dfrac{3}{x - 5} - \dfrac{4}{x + 7} + \dfrac{3x - 27}{x^2 + 2x - 35}$

Para los problemas 41-60, simplificar cada fracción compleja. **(Objetivo 2)**

41. $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}}$

42. $\dfrac{\frac{3}{8} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{16}}$

43. $\dfrac{\frac{2}{9} + \frac{1}{3}}{\frac{5}{6} - \frac{2}{3}}$

44. $\dfrac{\frac{7}{8} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{6} + \frac{3}{4}}$

45. $\dfrac{3 - \frac{2}{3}}{2 + \frac{1}{4}}$

46. $\dfrac{4 + \frac{3}{5}}{\frac{1}{3} - 2}$

47. $\dfrac{\frac{3}{x}}{\frac{9}{y}}$

48. $\dfrac{\frac{-6}{a}}{\frac{8}{b}}$

49. $\dfrac{\frac{2}{x} + \frac{3}{y}}{\frac{5}{x} - \frac{1}{y}}$

50. $\dfrac{\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x}}{\frac{4}{x} - \frac{7}{x^2}}$

51. $\dfrac{\frac{1}{y} - \frac{4}{x^2}}{\frac{7}{x} - \frac{3}{y}}$

52. $\dfrac{\frac{4}{ab} + \frac{2}{b}}{\frac{8}{a} + \frac{1}{b}}$

53. $\dfrac{\frac{6}{x} + 2}{\frac{3}{x} + 4}$

54. $\dfrac{1 - \frac{6}{y}}{3 - \frac{2}{y}}$

55. $\dfrac{\frac{3}{2x^2} - \frac{4}{x}}{\frac{5}{3x} + \frac{7}{x^2}}$

56. $\dfrac{\frac{4}{3x} + \frac{5}{x^2}}{\frac{7}{4x} - \frac{9}{x}}$

57. $\dfrac{\frac{x + 2}{4}}{\frac{1}{x} + \frac{3}{2}}$

58. $\dfrac{\frac{3}{x + 1} + 2}{-4 + \frac{2}{x + 1}}$

59. $\dfrac{\frac{1}{x - 1} - 2}{\frac{3}{x - 1} + 4}$

60. $\dfrac{\frac{3}{x - 2} + \frac{2}{x + 2}}{\frac{4}{x + 2} - \frac{5}{x - 2}}$

Para los problemas 61-71, responder cada pregunta con una fracción algebraica. **(Objetivo 3)**

61. Si trotando a una velocidad constante, Joan puede completar una carrera en 40 minutos, ¿cuánto del trayecto habrá cubierto en m minutos?

62. Si Kent puede podar todo el césped en m minutos, ¿qué fracción habrá podado después de 20 minutos?

63. Si Sandy manejó k kilómetros a una rapidez de r kilómetros por hora, ¿cuánto le tomó realizar el viaje?

64. Si Roy viajó m millas en h horas, ¿cuál es la relación de millas por hora?

65. Si l litros de gasolina cuestan d dólares, ¿cuáles el precio por litro?

66. Si p libras de dulce cuestan c centavos, ¿cuál es el precio por libra?

67. Suponga que el producto de dos números es 34 y uno de los números es n. ¿Cuál es el otro número?

68. Si una llave de agua fría, al abrirse, puede llenar un tanque en 3 horas, ¿cuánto del tanque se habrá llenado al final de h horas? (Ver la figura 7.1)

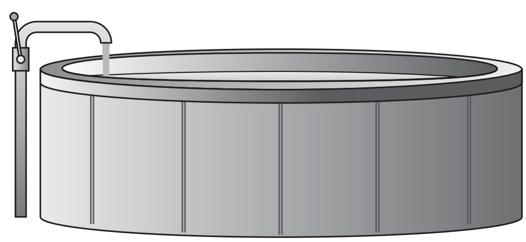


Figura 7.1

69. Si el área de un rectángulo mide 47 pulgadas cuadradas y el largo mide l pulgadas, ¿cuál es el ancho del rectángulo?

70. Si el área de un rectángulo mide 56 centímetros cuadrados y el ancho mide w centímetros, ¿cuál es el largo del rectángulo?

71. Si el área de un triángulo mide 48 pies cuadrados y uno de sus lados mide b pies, ¿cuánto mide la altitud a ese lado?

Pensamientos en palabras

72. ¿Cuál de las dos técnicas presentadas en el texto usaría para simplificar $\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{6}}$? ¿Cuál técnica usaría para simplificar $\dfrac{\frac{3}{8}-\frac{5}{7}}{\frac{7}{9}+\frac{6}{25}}$? Explique su respuesta para cada problema.

Más investigación

Para los problemas 73-76, simplificar cada fracción compleja.

73. $1-\dfrac{n}{1-\frac{1}{n}}$

74. $2-\dfrac{3n}{1+\frac{4}{n}}$

75. $\dfrac{3x}{4-\frac{2}{x}}-1$

76. $\dfrac{5x}{3+\frac{1}{x}}+2$

Respuestas del examen de conceptos

1. Cierto **2.** Cierto **3.** Falso **4.** Cierto **5.** D, B, F, A, E, C

7.5 Ecuaciones fraccionarias y resolución de problemas

OBJETIVOS

1. Resolver proporciones y ecuaciones racionales
2. Resolver problemas verbales que involucran relaciones en el proceso de división

Se considerarán dos tipos básicos de ecuaciones fraccionarias en este texto. Uno sólo tiene constantes como denominadores y el otro contiene variables en los denominadores. En el capítulo 3 se consideraron ecuaciones fraccionarias que implican sólo constantes en los denominadores. Revise de manera breve el método para resolver tales ecuaciones, porque se usará para resolver cualquier tipo de ecuación fraccionaria.

Ejemplo de salón de clases

Resolver $\dfrac{m-2}{6}+\dfrac{m+3}{8}=\dfrac{1}{12}$.

EJEMPLO 1

Resolver $\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{1}{6}$.

Solución

$$\frac{x-2}{3}+\frac{x+1}{4}=\frac{1}{6}$$

$$12\left(\frac{x-2}{3}+\frac{x+1}{4}\right)=12\left(\frac{1}{6}\right)$$ Multiplicar ambos lados por 12, el MCD de todos los denominadores

$$12\left(\frac{x-2}{3}\right)+12\left(\frac{x+1}{4}\right)=12\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$4(x-2)+3(x+1)=2$$

$$4x-8+3x+3=2$$

$$7x-5=2$$

$$7x=7$$

$$x=1$$

El conjunto solución es $\{1\}$. ¡Compruébelo!

Si una ecuación contiene una variable en uno o más denominadores, entonces se procede de la misma forma, excepto que se debe evitar cualquier valor de la variable que haga cero a un denominador. Considere los siguientes ejemplos.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $\frac{2}{y} + \frac{1}{3} = \frac{5}{y}$.

EJEMPLO 2 Resolver $\frac{3}{x} + \frac{1}{2} = \frac{5}{x}$.

Solución

Primero necesita darse cuenta que x no puede ser cero. Entonces se procede en la manera usual.

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{2} = \frac{5}{x}$$

$$2x\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{2}\right) = 2x\left(\frac{5}{x}\right) \qquad \text{Multiplicar ambos lados por } 2x\text{, el MCD de todos los denominadores}$$

$$6 + x = 10$$

$$x = 4$$

✔ **Verificación**

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{2} = \frac{5}{x} \text{ se convierte en } \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} \frac{5}{4} \text{ cuando } x = 4$$

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} \stackrel{?}{=} \frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$

El conjunto solución es $\{4\}$.

En el capítulo 4, se presentó el concepto de proporción y se usó para resolver algunos problemas de consumidor. La propiedad de las proporciones "$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y sólo si $ad = bc$" (los productos cruzados son iguales) se usó para ayudarle a resolver algunas ecuaciones. Aquí, en el ejemplo 3, esa misma propiedad puede usarse para resolver una ecuación racional que está en la forma de una proporción.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $\frac{n-1}{2} = \frac{n+5}{6}$.

EJEMPLO 3 Resolver $\frac{5}{x+2} = \frac{2}{x-1}$.

Solución

Debido a que ningún denominador puede ser cero, se sabe que $x \neq -2$ y $x \neq 1$.

$$\frac{5}{x+2} = \frac{2}{x-1}$$

$$5(x-1) = 2(x+2) \qquad \text{Los productos cruzados son iguales}$$

$$5x - 5 = 2x + 4$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

Debido a que las únicas restricciones son $x \neq -2$ y $x \neq 1$, el conjunto solución es $\{3\}$. (¡Verifíquelo!)

Ejemplo de salón de clases
Resolver $\frac{6}{x-6} + 6 = \frac{x}{x-6}$.

EJEMPLO 4 Resolver $\frac{2}{x-2} + 2 = \frac{x}{x-2}$.

Solución

Ningún denominador puede ser cero, así que $x \neq 2$.

$$\frac{2}{x-2} + 2 = \frac{x}{x-2}$$

$$(x-2)\left(\frac{2}{x-2} + 2\right) = (x-2)\left(\frac{x}{x-2}\right) \qquad \text{Multiplicar por } x - 2\text{, el MCD}$$

$$2 + 2(x-2) = x$$

$$2 + 2x - 4 = x$$

$$2x - 2 = x$$

$$x = 2$$

Dos no puede ser la solución porque produce un denominador de cero. No hay solución para esta ecuación; el conjunto solución es $\varnothing$.

El ejemplo 4 ilustra la importancia de reconocer las restricciones que deben darse a ciertos posibles valores de una variable. Se indicarán tales restricciones al inicio de la solución.

Ejemplo de salón de clases

Resolver $\frac{95-x}{x} = 3 - \frac{1}{x}$.

EJEMPLO 5 Resolver $\frac{125-n}{n} = 4 + \frac{10}{n}$.

Solución

$$\frac{125-n}{n} = 4 + \frac{10}{n}, \quad n \neq 0 \qquad \text{Note la restricción necesaria}$$

$$n\left(\frac{125-n}{n}\right) = n\left(4 + \frac{10}{n}\right) \qquad \text{Multiplicar ambos lados por } n$$

$$125 - n = 4n + 10$$

$$115 = 5n$$

$$23 = n$$

La única restricción es $n \neq 0$, y el conjunto solución es $\{23\}$.

De vuelta a la resolución de problemas

Ahora está listo para resolver más problemas, específicamente los que se traducen en ecuaciones fraccionarias.

Ejemplo de salón de clases

Un número es 8 más grande que otro número. El cociente indicado del número más pequeño dividido entre el número más grande se reduce a $\frac{5}{9}$. Encontrar los números.

EJEMPLO 6 **Aplique su habilidad**

Un número es 10 más grande que otro número. El cociente indicado del número más pequeño dividido entre el número más grande se reduce a $\frac{3}{5}$. Encontrar los números.

Solución

Sea n el número más pequeño. Entonces $n + 10$ representa el número más grande. La segunda frase en el planteamiento del problema se traduce a la siguiente ecuación.

$$\frac{n}{n+10} = \frac{3}{5}, \quad n \neq -10$$

$$5n = 3(n+10) \qquad \text{Los productos cruzados son iguales}$$

$$5n = 3n + 30$$

$$2n = 30$$

$$n = 15$$

Si n es 15, entonces $n + 10$ es 25. Por ende, los números son 15 y 25. Para comprobar, considere el cociente del número más pequeño dividido entre el más grande.

$$\frac{15}{25} = \frac{3 \cdot \cancel{5}}{5 \cdot \cancel{5}} = \frac{3}{5}$$

Ejemplo de salón de clases

Un ángulo de un triángulo mide 60° y las medidas de los otros dos ángulos están en la razón de 5 a 1. Encontrar las medidas de los otros dos ángulos.

EJEMPLO 7 Aplique su habilidad

Un ángulo de un triángulo mide 40° y las medidas de los otros dos ángulos están en una razón de 5 a 2. Encontrar las medidas de los otros dos ángulos.

Solución

La suma de las medidas de los otros dos ángulos es $180° - 40° = 140°$. Sea y la medida de un ángulo. Entonces $140 - y$ representa la medida del otro ángulo.

$$\frac{y}{140 - y} = \frac{5}{2}, \quad y \neq 140$$

$$2y = 5(140 - y) \qquad \text{Los productos cruzados son iguales}$$

$$2y = 700 - 5y$$

$$7y = 700$$

$$y = 100$$

Si $y - 100$, entonces $140 - y = 40$. Por ende, las medidas de los otros dos ángulos del triángulo son 100° y 40°.

En el capítulo 4 se resolvieron algunos problemas de movimiento uniforme en los que la fórmula $d = rt$ jugó un papel importante. Considere uno de esos problemas; tenga en mente que también se puede escribir la fórmula$d = rt$ como $\frac{d}{r} = t$ o $\frac{d}{t} = r$.

Getty Images/Comstock/ Jupiter Images

Ejemplo de salón de clases

Greta maneja su carro 100 millas en el mismo tiempo que a Elizabeth le toma manejar el suyo 120 millas. Si Elizabeth maneja 10 millas por hora más rápido que Greta, hallar la rapidez de cada una.

EJEMPLO 8 Aplique su habilidad

Wendy conduce su bicicleta 30 millas en el mismo tiempo que le toma a Kim conducir su bicicleta 20 millas. Si Wendy avanza 5 millas por hora más rápido que Kim, hallar la rapidez de cada una.

Solución

Sea r la rapidez de Kim. Entonces $r + 5$ representa la rapidez de Wendy. Registre la información de este problema en una tabla.

	Distancia	rapidez	tiempo $= \frac{\text{Distancia}}{\text{Rapidez}}$
Kim	20	r	$\frac{20}{r}$
Wendy	30	$r + 5$	$\frac{30}{r + 5}$

Se puede usar el hecho de que sus tiempos son iguales como guía.

Tiempo de Kim = Tiempo de Wendy

$$\frac{\text{Distancia que Kim conduce}}{\text{Rapidez a la que Kim conduce}} = \frac{\text{Distancia que Wendy conduce}}{\text{Rapidez a la que Wendy conduce}}$$

$$\begin{aligned} \frac{20}{r} &= \frac{30}{r+5}, \quad r \neq 0 \text{ y } r \neq -5 \\ 20(r+5) &= 30r \\ 20r + 100 &= 30r \\ 100 &= 10r \\ 10 &= r \end{aligned}$$

Entonces, Kim conduce a 10 millas por hora y Wendy conduce a $10 + 5 = 15$ millas por hora.

Examen de conceptos 7.5

Para los problemas 1-3, responder cierto o falso.

1. Al resolver ecuaciones racionales, cualquier valor de la variable que vuelva al denominador cero no puede ser la solución de la ecuación.
2. Un método para resolver ecuaciones racionales es multiplicar ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador de las fracciones en la ecuación.
3. Al resolver ecuaciones racionales que son una proporción, los productos cruzados pueden igualarse entre sí.
4. Identificar cada una de las ecuaciones como una proporción o como no proporción.

   A. $\frac{2x}{x+1} + x = \frac{7}{x+1}$ **B.** $\frac{x-8}{2x+5} = \frac{7}{9}$ **C.** $5 + \frac{2x}{x+6} = \frac{x-3}{x+4}$

5. Seleccionar todas las ecuaciones que podrían representar al siguiente problema. John compró 3 botellas de bebida energética por \$5.07. Si el precio se mantiene igual, ¿cuánto le costarán 8 botellas de bebida energética?

   A. $\frac{3}{5.07} = \frac{x}{8}$ **B.** $\frac{5.07}{8} = \frac{x}{3}$ **C.** $\frac{3}{8} = \frac{5.07}{x}$ **D.** $\frac{5.07}{3} = \frac{x}{8}$

Conjunto de problemas 7.5

Para los problemas 1-40, resolver cada una de las ecuaciones. (Objetivo 1)

1. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$

2. $\frac{x}{8} - \frac{x}{6} = -1$

3. $\frac{x}{6} - \frac{4x}{3} = \frac{1}{9}$

4. $\frac{3x}{4} + \frac{x}{5} = \frac{3}{10}$

5. $\frac{n}{2} + \frac{n-1}{6} = \frac{5}{2}$

6. $\frac{n+2}{7} + \frac{n}{3} = \frac{12}{7}$

7. $\frac{t-3}{4} + \frac{t+1}{9} = -1$

8. $\frac{t-2}{4} - \frac{t+3}{7} = 1$

9. $\frac{2x+3}{3} + \frac{3x-4}{4} = \frac{17}{4}$

10. $\frac{3x-1}{4} + \frac{2x-3}{5} = -2$

11. $\frac{x-4}{8} - \frac{x+5}{4} = 3$

12. $\frac{x-1}{9} - \frac{x-3}{5} = \frac{2}{15}$

13. $\frac{x+2}{5} - \frac{x-1}{3} = \frac{7}{15}$

14. $\frac{x+6}{3} - \frac{x+5}{4} = \frac{5}{12}$

15. $\frac{1}{x} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$

16. $\frac{2}{x} + \frac{1}{4} = \frac{13}{20}$

17. $\frac{5}{3n} - \frac{1}{9} = \frac{1}{n}$

18. $\frac{9}{n} - \frac{1}{4} = \frac{7}{n}$

19. $\frac{1}{2x} + 3 = \frac{4}{3x}$

20. $\frac{2}{3x} + 1 = \frac{5}{4x}$

21. $\frac{4}{5t} - 1 = \frac{3}{2t}$

22. $\frac{1}{6t} - 2 = \frac{7}{8t}$

23. $\frac{-5}{4h} + \frac{7}{6h} = \frac{1}{4}$

24. $\frac{3}{h} + \frac{5}{2h} = 1$

25. $\frac{90-n}{n}=10+\frac{2}{n}$

26. $\frac{51-n}{n}=7+\frac{3}{n}$

27. $\frac{n}{49-n}=3+\frac{1}{49-n}$

28. $\frac{n}{57-n}=10+\frac{2}{57-n}$

29. $\frac{x}{x+3}-2=\frac{-3}{x+3}$

30. $\frac{4}{x-2}=\frac{5}{x+6}$

31. $\frac{7}{x+3}=\frac{5}{x-9}$

32. $\frac{x}{x-4}-2=\frac{4}{x-4}$

33. $\frac{x}{x+2}+3=\frac{2}{x+2}$

34. $\frac{x}{x-5}-4=\frac{2}{x-5}$

35. $-1-\frac{5}{x-2}=\frac{3}{x-2}$

36. $\frac{4x-1}{x}-2=\frac{3}{2}$

37. $1+\frac{n+1}{2n}=\frac{3}{4}$

38. $\frac{3}{n-1}+4=\frac{2}{n-1}$

39. $\frac{h}{2}-\frac{h}{4}+\frac{h}{3}=1$

40. $\frac{h}{4}+\frac{h}{5}-\frac{h}{6}=1$

Para los problemas 41-52, plantear una ecuación y resolver cada problema. (Objetivo 2)

41. El numerador de una fracción es 8 menos que el denominador. La fracción en su forma más simple es $\frac{5}{6}$. Encontrar la fracción.

42. Un número es 12 más grande que otro número. El cociente indicado del número más pequeño dividido entre el más grande se reduce a $\frac{2}{3}$. Hallar los números.

43. ¿Qué número se le debe sumar al numerador y denominador de $\frac{2}{5}$ para producir una fracción equivalente a $\frac{4}{5}$?

44. ¿Qué número se le debe restar al numerador y denominador de $\frac{29}{31}$ para producir una fracción equivalente a $\frac{11}{12}$?

45. El ángulo de un triángulo mide 60° y las medidas para los otros dos ángulos están en la razón de 2 a 3. Hallar las medidas de los otros dos ángulos.

46. La medida del ángulo A de un triángulo es 20° más que la medida del ángulo B. Las medidas de los ángulos están en la razón de 3 a 4. Hallar la medida de cada ángulo.

47. La razón de las medidas del complemento de un ángulo a su suplemento es de 1 a 4. Hallar la medida del ángulo.

48. El ángulo de un triángulo mide 45° y las medidas de los otros dos ángulos están en la razón de 2 a 1. Hallar las medidas de los otros dos ángulos.

49. Le tomó a Heidi 3 horas y 20 minutos más conducir su bicicleta 125 millas de lo que le tomó a Abby conducir la suya 75 millas. Si ambas condujeron a la misma rapidez, hallar esta relación.

50. Dos trenes salieron en direcciones opuestas a la misma rapidez. Un tren viajó 338 millas en 2 horas más de lo que le tomó al otro tren viajar 234 millas. Hallar la rapidez de los trenes.

51. Kent maneja su Mazda 270 millas en la misma dirección que Dave maneja su Nissan 250 millas. Si Kent maneja a un promedio de 4 millas por hora más rápido que Dave, hallar sus rapideces.

52. Un avión viaja 2050 en la misma dirección que un carro viaja 260 millas. Si la rapidez del avión es 358 millas por hora más veloz que la del carro, hallar la rapidez de cada uno.

Pensamientos en palabras

53. **(a)** Explicar cómo hacer la suma

$$\frac{3}{x+2}+\frac{5}{x-1}.$$

(b) Explicar cómo resolver la ecuación

$$\frac{3}{x+2}+\frac{5}{x-1}=0.$$

54. ¿Cómo puede decir, por simple inspección, que $\frac{x}{x-4}=\frac{4}{x-4}$ no tiene solución?

55. ¿Cómo podría ayudarle a alguien a resolver la siguiente ecuación $\frac{1}{x}+\frac{2}{x}=\frac{3}{x}$?

Más investigación

Para los problemas 56-59, resolver cada ecuación.

56. $\dfrac{3}{2n} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{5}{3n}$

57. $\dfrac{1}{2n} + \dfrac{4}{n} = \dfrac{9}{2n}$

58. $\dfrac{n+1}{2} + \dfrac{n}{3} = \dfrac{1}{2}$

59. $\dfrac{1}{n+2} + \dfrac{2}{n+3} = \dfrac{3n+7}{(n+2)(n+3)}$

Respuestas del examen de conceptos

1. Cierto **2.** Cierto **3.** Cierto **4A.** No proporción **4B.** Proporción **4C.** No proporción **5.** C, D

7.6 Más ecuaciones fraccionarias y resolución de problemas

OBJETIVOS

1 Resolver ecuaciones racionales

2 Resolver problemas verbales que involucran números racionales y relaciones rapidez-tiempo

Esta sección comienza considerando más ecuaciones fraccionarias. Continuará resolviéndolos con las mismas técnicas básicas de la sección anterior.

Ejemplo de salón de clases

Resolver $\dfrac{8}{a+1} - \dfrac{14}{2a+2} = \dfrac{1}{6}$.

EJEMPLO 1 Resolver $\dfrac{10}{8x-2} - \dfrac{6}{4x-1} = \dfrac{1}{9}$.

Solución

$$\frac{10}{8x-2} - \frac{6}{4x-1} = \frac{1}{9}, \quad x \neq \frac{1}{4}$$

¿Ve por qué x no puede ser igual a $\dfrac{1}{4}$?

$$\frac{10}{2(4x-1)} - \frac{6}{4x-1} = \frac{1}{9}$$

Factorizar el primer denominador

$$18(4x-1)\left(\frac{10}{2(4x-1)} - \frac{6}{4x-1}\right) = 18(4x-1)\left(\frac{1}{9}\right)$$

Multiplicar ambos lados por $18(4x - 1)$, el MCD

$$9(10) - 18(6) = 2(4x-1)$$
$$90 - 108 = 8x - 2$$
$$-18 = 8x - 2$$
$$-16 = 8x$$
$$-2 = x$$

¡Asegúrese de comprobar la solución -2!

El conjunto solución es $\{-2\}$.

Comentario: En el segundo paso de la solución para el ejemplo 1, puede elegir reducir $\dfrac{10}{2(4x-1)}$ a $\dfrac{5}{4x-1}$. Después el lado izquierdo, $\dfrac{5}{4x-1} - \dfrac{6}{4x-1}$, se simplifica a $\dfrac{-1}{4x-1}$. Esto forma la proporción $\dfrac{-1}{4x-1} = \dfrac{1}{9}$, la cual puede resolverse fácilmente usando el método de multiplicación cruzada.

Ejemplo de salón de clases

Resolver $\frac{3x}{x+5} + \frac{10x}{x^2-25} = 3$.

EJEMPLO 2 Resolver $\frac{2n}{n+3} + \frac{5n}{n^2-9} = 2$.

Solución

$$\frac{2n}{n+3} + \frac{5n}{n^2-9} = 2, \quad n \neq -3 \text{ y } \quad n \neq 3$$

$$\frac{2n}{n+3} + \frac{5n}{(n+3)(n-3)} = 2$$

$$(n+3)(n-3)\left(\frac{2n}{n+3} + \frac{5n}{(n+3)(n-3)}\right) = (n+3)(n-3)(2)$$

$$2n(n-3) + 5n = 2(n^2-9)$$

$$2n^2 - 6n + 5n = 2n^2 - 18$$

$$-6n + 5n = -18 \qquad \text{Sumar } -2n^2 \text{ a ambos lados}$$

$$-n = -18$$

$$n = 18$$

El conjunto solución es $\{18\}$.

Ejemplo de salón de clases

Resolver $x + \frac{1}{2x} = \frac{9}{4}$.

EJEMPLO 3 Resolver $n + \frac{1}{n} = \frac{10}{3}$.

Solución

$$n + \frac{1}{n} = \frac{10}{3}, \quad n \neq 0$$

$$3n\left(n + \frac{1}{n}\right) = 3n\left(\frac{10}{3}\right)$$

$$3n^2 + 3 = 10n$$

$$3n^2 - 10n + 3 = 0$$

$$(3n-1)(n-3) = 0$$

$$3n - 1 = 0 \quad \text{o} \quad n - 3 = 0$$

$$3n = 1 \quad \text{o} \quad n = 3$$

$$n = \frac{1}{3} \quad \text{o} \quad n = 3$$

¿Recuerda cuando usó las técnicas de factorización para ayudarle a resolver ecuaciones de este tipo en el capítulo 6?

El conjunto solución es $\left\{\frac{1}{3}, 3\right\}$.

Resolución de problemas

Recuerde que $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$ son llamados inversos multiplicativos o recíprocos del otro porque su producto es 1. En general, el recíproco de cualquier número real distinto a cero n es el número $\frac{1}{n}$. Use esta idea para resolver un problema.

Ejemplo de salón de clases

La suma de un número y su recíproco es $\frac{17}{4}$. Hallar el número.

EJEMPLO 4 **Aplique su habilidad**

La suma de un número y su recíproco es $\frac{26}{5}$. Hallar el número.

Solución

Sea n el número a representar. Entonces $\frac{1}{n}$ representa a su recíproco.

$$\text{Número} + \text{Su recíproco} = \frac{26}{5}$$

$$n + \frac{1}{n} = \frac{26}{5}, \qquad n \neq 0$$

$$5n\left(n + \frac{1}{n}\right) = 5n\left(\frac{26}{5}\right) \qquad \text{Multiplicar ambos lados por } 5n\text{, el MCD}$$

$$5n^2 + 5 = 26n$$

$$5n^2 - 26n + 5 = 0$$

$$(5n - 1)(n - 5) = 0$$

$$5n - 1 = 0 \quad \text{o} \quad n - 5 = 0$$

$$5n = 1 \quad \text{o} \quad n = 5$$

$$n = \frac{1}{5} \quad \text{o} \quad n = 5$$

Si el número es $\frac{1}{5}$, su recíproco es $\dfrac{1}{\frac{1}{5}} = 5$. Si el número es 5, su recíproco es $\frac{1}{5}$.

Ahora considere otro problema de movimiento uniforme con una ligera variación de los estudiados en la sección previa. De nuevo, mantenga en mente que siempre debe usar la relación distancia-rapidez-tiempo en estos problemas.

Ejemplo de salón de clases
Para viajar 280 millas, le toma a Gary una hora menos de lo que le toma a Wayne viajar 250 millas. Gary viaja 20 millas por hora más rápido que Wayne. Hallar los tiempos y rapideces de los viajeros.

EJEMPLO 5 Aplique su habilidad

Para viajar 60 millas en su ciclomotor, le toma a Sue 2 horas menos de lo que le toma a LeAnn viajar 50 millas en bicicleta (ver la figura 7.2). Sue viaja 10 millas por hora más rápido que LeAnn. Hallar los tiempos y rapideces de ambas chicas.

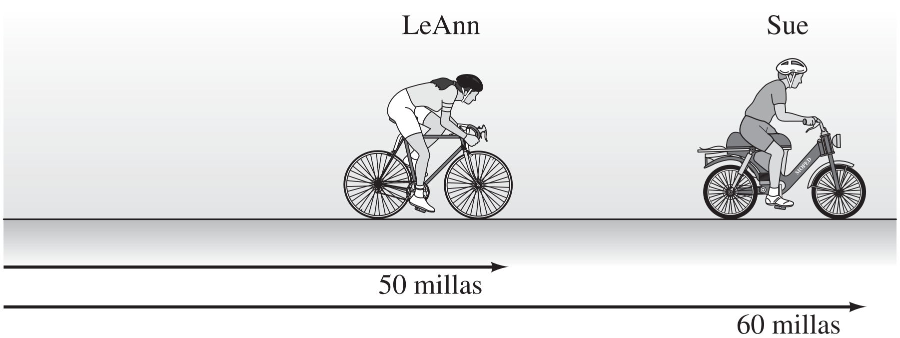


Figura 7.2

Solución

Sea t el tiempo de LeAnn. Entonces, $t - 2$ representa el tiempo de Sue. Se puede registrar la información del ejemplo 5 en la tabla.

	Distancia	Tiempo	Rapidez $\left(r = \frac{d}{t}\right)$
LeAnn	50	t	$\frac{50}{t}$
Sue	60	$t - 2$	$\frac{60}{t-2}$

Se usa el hecho de que Sue viaja 10 millas por hora más rápido que LeAnn como guía para plantear la ecuación.

$$\underset{\downarrow}{\text{Rapidez de Sue}} \quad \underset{\downarrow}{=} \quad \underset{\downarrow}{\text{Rapidez de LeAnn}} \; + 10$$

$$\frac{60}{t-2} = \frac{50}{t} + 10, \qquad t \neq 2 \text{ y } t \neq 0$$

Resolver esta ecuación da

$$\begin{aligned}
\frac{60}{t-2} &= \frac{50}{t} + 10 \\
t(t-2)\left(\frac{60}{t-2}\right) &= t(t-2)\left(\frac{50}{t} + 10\right) \\
60t &= 50(t-2) + 10t(t-2) \\
60t &= 50t - 100 + 10t^2 - 20t \\
0 &= 10t^2 - 30t - 100 \\
0 &= t^2 - 3t - 10 \\
0 &= (t-5)(t+2)
\end{aligned}$$

$$t - 5 = 0 \quad \text{o} \quad t + 2 = 0$$

$$t = 5 \quad \text{o} \quad t = -2$$

Se debe ignorar la solución negativa, así que el tiempo de LeAnn es 5 horas y el de Sue es $5 - 2 = 3$ horas. La rapidez de LeAnn es $\frac{50}{5} = 10$ millas por hora y la de Sue es $\frac{60}{3} = 20$ millas por hora. (Asegúrese de que todos estos resultados son comprobables en el problema original).

Hay otra clase de problemas a los que se les suele llamar problemas de trabajo o problemas de rapidez-tiempo. Por ejemplo, si cierta máquina puede producir 120 artículos en 10 minutos, entonces se dice que $\frac{120}{10} = 12$ la máquina produce a una rapidez de artículos por minuto. Del mismo modo, si una persona puede hacer cierto trabajo en 5 horas, entonces, si supone una rapidez constante de trabajo, se dice que la persona trabaja a una rapidez de $\frac{1}{5}$ del trabajo por hora. En general, si Q es la cantidad de algo realizado en t unidades de tiempo, entonces la rapidez, r, está dada por $r = \frac{Q}{t}$. La rapidez se enuncia en términos de tanta cantidad por unidad de tiempo. En los problemas de movimiento uniforme que se discutieron anteriormente son un tipo especial de problema en los que la “cantidad” es distancia. El uso de tablas para organizar la información, como se ilustró con los problemas de movimiento uniforme, es un elemento conveniente para los problemas de rapidez-tiempo. Considere algunos ejemplos.

James Hardy/PhotoAlto Agency RF Collections/Getty Images

EJEMPLO 6 Aplique su habilidad

La prensa A puede producir 35 folletos por minuto, y la prensa B puede producir 50 folletos por minuto. La prensa A se instala y comienza a trabajar; 15 minutos después, la prensa B comienza a trabajar. Ambas prensas imprimen hasta que se producen 2225 folletos. ¿Cuánto tiempo se usará la prensa B?

Solución

Sea m el número de minutos que se usa la prensa B. Entonces $m + 15$ representa el número de minutos que se usa la prensa A. La información en el problema puede organizarse en una tabla.

	Rapidez	Tiempo	Cantidad = Rapidez × Tiempo
Press A	35	$m + 15$	$35(m + 15)$
Press B	50	m	$50m$

Ejemplo de salón de clases
La prensa A puede producir 30 afiches por minuto, y la prensa B puede producir 20 afiches por minuto. La prensa A se instala y comienza a trabajar; 20 minutos después, la prensa B comienza a trabajar. Ambas prensas imprimen hasta que se producen 2850 afiches. ¿Cuánto tiempo se usará la prensa B?

Ya que la cantidad total (número total de folletos) es 2225 folletos, se puede plantear y resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} 35(m + 15) + 50m &= 2225 \\ 35m + 525 + 50m &= 2225 \\ 85m &= 1700 \\ m &= 20 \end{aligned}$$

Por ende, la prensa B debe usarse por 20 minutos.

Ejemplo de salón de clases
Sandy puede palear la acera en 50 minutos, y Ashley puede palear la misma acera en 75 minutos. ¿Cuánto tiempo les tomará palear la acera si trabajan juntas?

EJEMPLO 7 Aplique su habilidad

Bill puede podar un terreno en 45 minutos, Jennifer puede podar el mismo terreno en 30 minutos. ¿Cuánto tardarán en podar el terreno si trabajan juntos? (Ver figura 7.3)

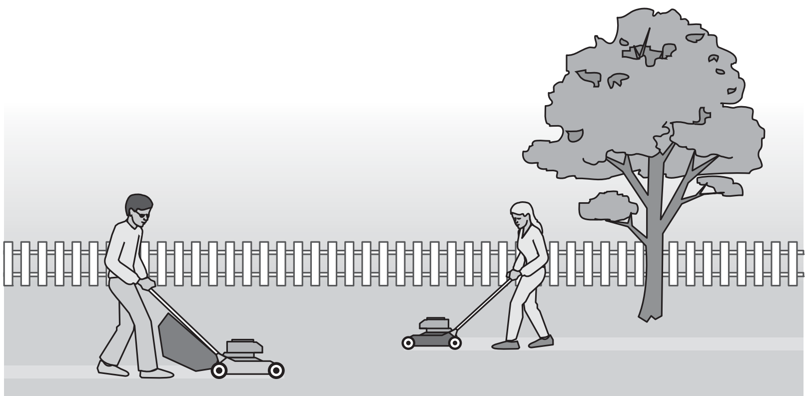


Figura 7.3

Comentario: Antes de buscar la solución para este problema, estime la respuesta. Recuerde que Jennifer puede podar el terreno ella sola en 30 minutos.

Solución

La rapidez de Bill es $\frac{1}{45}$ del terreno por minuto, y la rapidez de Jennifer es $\frac{1}{30}$ del terreno por minuto. Sea m el número de minutos que trabajan juntos, entonces $\frac{1}{m}$ representa la rapidez cuando trabajan juntos. Por ende, ya que la suma de las rapideces individuales deben igualar a la rapidez de trabajar juntos, se puede plantear y resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{45} = \frac{1}{m}, \quad m \neq 0$$

$$90m\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{45}\right) = 90m\left(\frac{1}{m}\right) \qquad \text{Multiplicar ambos lados por 90m, el MCD}$$

$$\begin{aligned} 3m + 2m &= 90 \\ 5m &= 90 \\ m &= 18 \end{aligned}$$

Debería tomarles 18 minutos podar el terreno si trabajan juntos. (¿Qué tan acertado estuvo su estimado?)

PhotoLink/Photodisc/Getty Images

Ejemplo de salón de clases
Le toma a Jake el triple de tiempo podar el césped de lo que le toma a Zack. ¿Cuánto tardaría cada chico por sí solo si juntos pueden podar el césped en 36 minutos?

EJEMPLO 8 Aplique su habilidad

Le toma a Amy el doble de tiempo entregar periódicos de lo que le toma a Nancy. ¿Cuánto le tomaría a cada chica hacerlo por sí sola si juntas pueden entregar periódicos en 40 minutos?

Solución

Sea m el número de minutos que le toma a Nancy sola. Entonces $2m$ representa el tiempo de Amy sola. Por ende, la rapidez de Nancy es $\frac{1}{m}$, y la rapidez de Amy es $\frac{1}{2m}$. Ya que la rapidez combinada es $\frac{1}{40}$, se puede plantear y resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Rapidez de Nancy} & + & \text{Rapidez de Amy} & = & \text{Rapidez combinada} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \frac{1}{m} & + & \frac{1}{2m} & = & \frac{1}{40}, \end{array} \qquad m \neq 0$$

$$40m\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{2m}\right) = 40m\left(\frac{1}{40}\right)$$

$$40 + 20 = m$$

$$60 = m$$

Por ende, Nancy puede entregar los periódicos sola en 60 minutos y Amy puede hacerlo en $2(60) = 120$ minutos.

Un último ejemplo en esta sección muestra otro enfoque que otras personas encuentran útil para resolver problemas de trabajo. Este enfoque representa las partes fraccionarias de un trabajo. Por ejemplo, si una persona puede hacer cierto trabajo en 7 horas, entonces en 3 horas esa persona ha terminado $\frac{3}{7}$ del trabajo. (De nuevo, asuma que es una rapidez constante). Tras 5 horas, $\frac{5}{7}$ del trabajo se habrá completado. En general, tras h horas, $\frac{h}{7}$ del trabajo se habrá completado. Use esta idea para resolver un problema de trabajo.

Jose Luis Pelaez Inc/Blend Images/ Getty Images

Ejemplo de salón de clases
Le toma a Chris 7 horas instalar una barandilla de madera. Después de trabajar por 2 horas, se le une Carlos y juntos terminan la barandilla en 3 horas. ¿Cuánto le hubiera tomado a Carlos instalar la barandilla él solo?

EJEMPLO 9 Aplique su habilidad

A Pat le toma 12 horas completar una tarea. Después de haber trabajado 3 horas, se le une su hermano Mike y juntos terminan la tarea en 5 horas. ¿Cuánto tiempo tardaría Mike en realizar el trabajo?

Solución

Sea h el número de horas que a Mike le tomaría realizar el trabajo.

La parte fraccionaria del trabajo que Pat realiza es igual a su tasa de trabajo por su tiempo. Puesto que a Pat le toma 12 horas realizar todo el trabajo, su tasa de trabajo es $\frac{1}{12}$. Él trabaja durante 8 horas (3 horas antes de Mike y luego 5 horas con Mike). Por tanto, la parte de Pat del trabajo es $\frac{1}{12}(8) = \frac{8}{12}$. La parte fraccionaria del trabajo que Mike realiza es igual a su tasa de trabajo por su tiempo. Puesto que h representa el tiempo de Mike para realizar todo el trabajo, su tasa de trabajo es $\frac{1}{h}$; él trabaja durante 5 horas. Por tanto, la parte de trabajo de Mike es $\frac{1}{h}(5) = \frac{5}{h}$. Sumar las dos partes fraccionarias resulta en 1 trabajo completo realizado. A continuación esta información también se muestra en forma de tabla y se establece una guía. Entonces se puede establecer y resolver la ecuación.

	Tiempo para realizar todo el trabajo	Tasa de trabajo	Tiempo de trabajo	Parte fraccionaria del trabajo realizado
Pat	12	$\frac{1}{12}$	8	$\frac{8}{12}$
Mike	h	$\frac{1}{h}$	5	$\frac{5}{h}$

$$\underbrace{\frac{8}{12}}_{\text{Parte fraccionaria del trabajo que realiza Pat}} + \underbrace{\frac{5}{h}}_{\text{Parte fraccionaria del trabajo que realiza Mike}} = 1$$

$$12h\left(\frac{8}{12} + \frac{5}{h}\right) = 12h(1)$$

$$12h\left(\frac{8}{12}\right) + 12h\left(\frac{5}{h}\right) = 12h$$

$$8h + 60 = 12h$$

$$60 = 4h$$

$$15 = h$$

A Mike le tomaría 15 horas hacer todo el trabajo.

Se enfatiza un punto hecho anteriormente. No se desanime si resolver problemas verbales aún le es difícil. El desarrollo de las habilidades para resolver problemas es un objetivo a largo plazo. Si continúa trabajando duro y realmente lo intenta, gradualmente tendrá más confianza en su forma de resolver problemas. No tenga miedo de intentar algunos enfoques propios. Las sugerencias aquí presentadas simplemente proporcionan un marco de referencia.

Examen de conceptos 7.6

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. Asumiendo que es movimiento uniforme, la rapidez a la cual viaja un carro es igual al tiempo viajado dividido entre la distancia recorrida.

2. Si un trabajador puede colocar 640 pies cuadrados de mosaicos en 8 horas, se puede establecer que su tasa de trabajo es de 80 pies cuadrados por hora.

3. Si una persona puede completar 2 trabajos en 5 horas, entonces su tasa de trabajo es $\frac{5}{2}$ de trabajo por hora.

4. En un problema de tasa de tiempo que involucra a dos trabajadores, la suma de sus tasas individuales debe ser igual a la tasa de trabajo conjunto.

5. Si una persona trabaja a una rapidez de $\frac{2}{15}$ del trabajo por hora, entonces, después de 3 horas, habrá completado $\frac{6}{15}$ del trabajo.

6. El conjunto solución de $x + \frac{1}{x} = 4$ es $\{2, 4\}$.

7. El conjunto solución de $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3} = \frac{5-2x}{x^2-x-6}$ es $\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

8. El conjunto solución de $\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+1} = \frac{-x}{x^2-1}$ es $\varnothing$.

9. Si Kim puede hacer cierto trabajo en 5 horas, entonces al final de h horas habrá completado $\frac{5}{h}$ del trabajo.

10. El conjunto solución de $\frac{x}{3x-6} + \frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{3}$ es $\{-8\}$.

Conjunto de problemas 7.6

Para los problemas 1-32, resolver cada ecuación. (Objetivo 1)

1. $\frac{4}{x} + \frac{7}{6} = \frac{1}{x} + \frac{2}{3x}$

2. $\frac{2}{3x} - \frac{9}{x} = -\frac{25}{9}$

3. $\frac{3}{2x+2} + \frac{4}{x+1} = \frac{11}{12}$

4. $\frac{5}{2x-6} + \frac{1}{x-3} = \frac{7}{2}$

5. $\frac{5}{2n-10} - \frac{3}{n-5} = 1$

6. $\frac{7}{3x+6} - \frac{2}{x+2} = 2$

7. $\frac{3}{2t} - \frac{5}{t} = \frac{7}{5t} + 1$

8. $\frac{2}{3t} + \frac{3}{4t} = 1 - \frac{5}{2t}$

9. $\frac{x}{x-2} + \frac{4}{x+2} = 1$

10. $\frac{2x}{x+1} - \frac{3}{x-1} = 2$

11. $\frac{x}{x-4} - \frac{2x}{x+4} = -1$

12. $\frac{2x}{x+2} + \frac{x}{x-2} = 3$

13. $\frac{3n}{n+3} - \frac{n}{n-3} = 2$

14. $\frac{4n}{n-5} - \frac{2n}{n+5} = 2$

15. $\frac{3}{t^2-4} + \frac{5}{t+2} = \frac{2}{t-2}$

16. $\frac{t}{2t-8} + \frac{16}{t^2-16} = \frac{1}{2}$

17. $\frac{4}{x-1} - \frac{2x-3}{x^2-1} = \frac{6}{x+1}$

18. $\frac{3x-1}{x^2-9} + \frac{4}{x+3} = \frac{5}{x-3}$

19. $8 + \frac{5}{y^2+2y} = \frac{3}{y+2}$

20. $2 + \frac{4}{y-1} = \frac{4}{y^2-y}$

21. $n + \frac{1}{n} = \frac{17}{4}$

22. $n + \frac{3}{n} = 4$

23. $\frac{15}{4n} + \frac{15}{4(n+4)} = 1$

24. $\frac{10}{7x} + \frac{10}{7(x+3)} = 1$

25. $x - \frac{5x}{x-2} = \frac{-10}{x-2}$

26. $\frac{x+1}{x-3} - \frac{3}{x} = \frac{12}{x^2-3x}$

27. $\frac{t}{4t-4} + \frac{5}{t^2-1} = \frac{1}{4}$

28. $\frac{x}{3x-6} + \frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{3}$

29. $\frac{3}{n-5} + \frac{4}{n+7} = \frac{2n+11}{n^2+2n-35}$

30. $\frac{2}{n+3} + \frac{3}{n-4} = \frac{2n-1}{n^2-n-12}$

31. $\frac{a}{a+2} + \frac{3}{a+4} = \frac{14}{a^2+6a+8}$

32. $3 + \frac{6}{t-3} = \frac{6}{t^2-3t}$

Para los problemas 33-50, establecer una ecuación y resolver el problema. (Objetivo 2)

33. La suma de un número y el doble de su recíproco es $\frac{9}{2}$. Hallar el número.

34. La suma de un número y tres veces su recíproco es 4. Hallar el número.

35. Un número es $\frac{21}{10}$ más grande que su recíproco. Hallar el número.

36. Suponga que el recíproco de un número restado del número da $\frac{5}{6}$. Hallar el número.

37. Suponga que Celia recorre 60 millas con su bicicleta en 2 horas menos de lo que le toma a Tom recorrer 85 millas con su bicicleta. Si Celia conduce 3 millas por hora más rápido que Tom, hallar las respectivas rapideces.

38. Para viajar 300 millas, un tren de pasajeros tarda 2 horas más de lo que le toma a un tren rápido viajar 280 millas. El segundo tren va 20 millas por hora más rápido que el tren de pasajeros. Hallar las rapideces de ambos trenes.

39. Un día, Jeff recorre con su bicicleta 40 millas en el campo (ver la figura 7.4). En su camino de regreso, toma una ruta diferente que es 2 millas más larga y le toma una hora más regresar. Si de ida va 4 millas por hora más rápido que de regreso, hallar ambas rapideces.

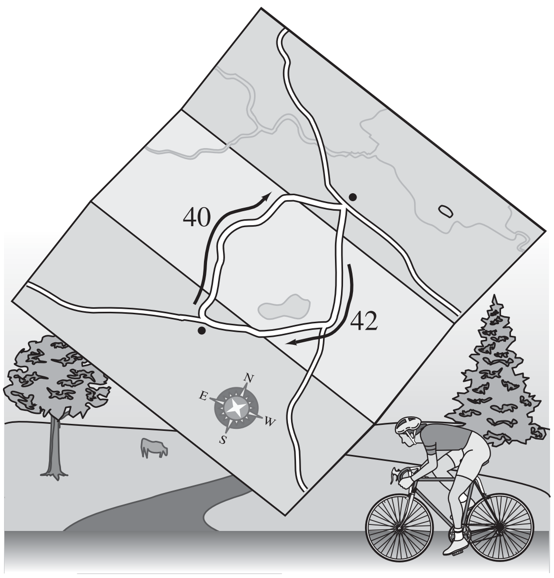


Figura 7.4

40. Rita trota por 8 millas y después camina otras 12 millas. Trota el doble de rápido de lo que camina y cubre la distancia total de 20 millas en 4 horas. Hallar las rapideces de trote y caminata.

41. Un tanque de agua puede llenarse con una tubería de entrada en 5 minutos. Una tubería de desagüe puede vaciar el tanque en 6 minutos. Si por equivocación el desagüe se mantiene abierto mientras el tanque se llena, ¿cuánto tiempo transcurrirá antes de que el tanque se desborde?

42. Betty puede completar un trabajo en 10 minutos. Doug puede completar el mismo trabajo en 15 minutos. Si trabajan juntos, ¿cuánto tiempo les tomará completar el trabajo?

43. Le toma a Barry el doble de tiempo entregar periódicos de lo que le toma a Mike. ¿Cuánto le tomará a cada uno individualmente si juntos pueden repartirlos en 40 minutos?

44. Trabajando juntas, Cindy y Sharon pueden escribir direcciones en sobres en 12 minutos. Cindy podría hacerlo sola en 20. ¿Cuánto le tomaría a Sharon escribir las direcciones sola?

45. Mark puede revisar una máquina en 20 horas y Phil puede hacer el mismo trabajo él solo en 30 horas. Si trabajan juntos por un tiempo y después Mark termina el trabajo solo en 5 horas, ¿cuánto tiempo trabajaron juntos?

46. Trabajando juntas, Pam y Laura pueden completar un trabajo en $1\frac{1}{2}$ horas. Trabajando de manera individual, le toma a Laura 4 horas más de lo que le toma a Pam completar el trabajo. ¿Cuánto le toma a cada una trabajando solas?

47. Un centro de copiado tiene dos copiadoras. La copiadora *A* puede producir copias a una tasa de 40 páginas por minuto, y la copiadora *B* hace 30 páginas por minuto. ¿Cuánto tiempo necesitará trabajar la copiadora *B* si la copiadora *A* lleva trabajando 6 minutos y después se usan ambas copiadoras hasta que se hacen 520 copias?

48. A dos tuberías les toma 3 horas llenar un tanque de agua. La tubería *B* puede llenar el tanque sola en 8 horas más de lo que le toma a la tubería *A* llenar el tanque sola. ¿Cuánto tardaría cada tubería en llenar el tanque por sí sola?

49. En una competencia de sobrevivencia, la tribu Pachena puede abrir 300 ostras en 10 minutos menos de lo que le toma a la tribu Tchaika. Si la tribu Pachena abre ostras a una tasa de 5 ostras por minuto más rápido que la tribu Tchaika, hallar la rapidez de cada tribu.

50. Una máquina puede envolver 600 piezas de dulce en 5 minutos menos de lo que le toma a la máquina B envolver 600 piezas de dulce. Si la máquina A envuelve 20 piezas por minuto más que la máquina B, hallar la rapidez de cada máquina.

Se pueden encontrar problemas adicionales en el Apéndice A. Todos los problemas en el Apéndice marcados como (7.5) y (7.6) son apropiados para su práctica.

Pensamientos en palabras

51. Escriba un párrafo o dos que resuman las nuevas ideas acerca de la resolución de problemas que adquirió hasta el momento en este curso.

Más investigación

Para los problemas 52-54, resolver cada ecuación.

52. $\dfrac{3x-1}{x^2-9}+\dfrac{4}{x+3}=\dfrac{7}{x-3}$

53. $\dfrac{x-2}{x^2-1}+\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{-5}{x-1}$

54. $\dfrac{7x-12}{x^2-16}-\dfrac{5}{x+4}=\dfrac{2}{x-4}$

Respuestas del examen de conceptos

1. Falso **2.** Cierto **3.** Falso **4.** Cierto **5.** Cierto **6.** Falso **7.** Cierto **8.** Cierto **9.** Falso **10.** Cierto

Capítulo 7 Resumen

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Simplificar expresiones racionales usando técnicas de factorización. (Sección 7.1/Objetivo 3)	El principio fundamental de las fracciones $\left(\frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}\right)$ proporciona la base para simplificar expresiones racionales. Para muchos problemas, el numerador y el denominador tendrán que factorizarse antes de que pueda aplicar el principio fundamental de las fracciones.	Simplificar $\frac{3x^2 - 15x}{x^2 - 3x - 10}$. **Solución** $\frac{3x^2 - 15x}{x^2 - 3x - 10} = \frac{3x(x - 5)}{(x + 2)(x - 5)}$ $= \frac{3x}{x + 2}$ **Problema de muestra 1** Simplificar $\frac{x^2 - 3x}{x^2 + x - 12}$.
Multiplicar expresiones racionales. (Sección 7.2/Objetivo 1)	Para multiplicar fracciones algebraicas, multiplique los numeradores, multiplique los denominadores y exprese el producto en forma simplificada.	Multiplicar $\frac{y}{y^2 + 4y + 3} \cdot \frac{3y + 3}{8}$. **Solución** $\frac{y}{y^2 + 4y + 3} \cdot \frac{3y + 3}{8}$ $= \frac{y}{(y + 1)(y + 3)} \cdot \frac{3(y + 1)}{8}$ $= \frac{3y}{8(y + 3)}$ **Problema de muestra 2** Multiplicar $\frac{4y - 8}{12} \cdot \frac{y}{y^2 - 9y + 14}$.
Dividir expresiones racionales. (Sección 7.2/Objetivo 2)	Para dividir fracciones algebraicas, invierta el divisor y multiplique.	Dividir $\frac{a^2 - 36}{a^2 + 8a + 12} \div \frac{6a + 6}{a^2 + 3a + 2}$. **Solución** $\frac{a^2 - 36}{a^2 + 8a + 12} \div \frac{6a + 6}{a^2 + 3a + 2}$ $= \frac{a^2 - 36}{a^2 + 8a + 12} \cdot \frac{a^2 + 3a + 2}{6a + 6}$ $= \frac{(a + 6)(a - 6)}{(a + 6)(a + 2)} \cdot \frac{(a + 2)(a + 1)}{6(a + 1)}$ $= \frac{a - 6}{6}$ **Problema de muestra 3** Dividir $\frac{3x + 3}{2x + 14} \div \frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 - 49}$.

(*continúa*)

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Combinar expresiones racionales con denominadores en común. (Sección 7.3/Objetivo 1)	La adición y substracción de fracciones algebraicas están basadas en las siguientes definiciones. $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ Suma $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$ Resta La respuesta final siempre debe estar en forma simplificada.	Restar $\frac{8n+1}{6}-\frac{5n-8}{6}$. **Solución** $\frac{8n+1}{6}-\frac{5n-8}{6}=\frac{8n+1-(5n-8)}{6}$ $=\frac{8n+1-5n+8}{6}$ $=\frac{3n+9}{6}$ $=\frac{3(n+3)}{6}=\frac{n+3}{2}$ **Problema de muestra 4** Restar $\frac{6x-3}{4}-\frac{4x-9}{4}$.
Adición y substracción de expresiones racionales con diferentes denominadores. (Sección 7.3/Objetivos 2 y 3; Sección 7.4/Objetivo 1)	Use el siguiente procedimiento para sumar y restar fracciones. **1.** Hallar el mínimo común denominador. **2.** Cambiar cada fracción a una equivalente que tenga el MCD como su denominador. **3.** Sumar o restar los numeradores y colocar el resultado sobre el MCD. **4.** Buscar la posibilidad de simplificar la fracción final.	Restar $\frac{x}{x^2-16}-\frac{1}{x-4}$. **Solución** $\frac{x}{x^2-16}-\frac{1}{x-4}$ $=\frac{x}{(x+4)(x-4)}-\frac{1}{x-4}$ $=\frac{x}{(x+4)(x-4)}-\frac{1(x+4)}{(x-4)(x+4)}$ $=\frac{x-1(x+4)}{(x+4)(x-4)}$ $=\frac{x-x-4}{(x+4)(x-4)}=\frac{-4}{(x+4)(x-4)}$ **Problema de muestra 5** Sumar $\frac{3}{x^2-9}+\frac{4}{x+3}$.

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Simplificar fracciones complejas. (Sección 7.4/Objetivo 2)	Las formas fraccionarias que contienen fracciones en el numerador y/o en el denominador son fracciones complejas. Simplificar una fracción compleja significa expresarla como una fracción simple. Un método para simplificar es multiplicar toda la fracción compleja por una forma de 1. Otro método es simplificar el numerador, simplificar el denominador y después proceder como con cualquier división de fracciones.	Simplificar $\dfrac{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}$. **Solución** $\dfrac{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}} = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2}\left(\dfrac{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}\right)$ $= \dfrac{x^2y^2\left(\frac{3}{x}\right)+x^2y^2\left(\frac{2}{y}\right)}{x^2y^2\left(\frac{1}{x^2}\right)+x^2y^2\left(\frac{1}{y^2}\right)}$ $= \dfrac{3xy^2+2x^2y}{y^2+x^2}$ **Problema de muestra 6** Simplificar $\dfrac{\frac{3}{xy}+\frac{2}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$.
Resolver ecuaciones racionales que tienen constantes en el denominador. (Sección 7.5/Objetivo 1)	Para resolver ecuaciones racionales que tienen constantes en el denominador, multiplique ambos lados de la ecuación por el MCD de todos los denominadores en la ecuación.	Resolver $\dfrac{x+3}{2}+\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{21}{10}$. **Solución** $\dfrac{x+3}{2}+\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{21}{10}$ $10\left(\dfrac{x+3}{2}+\dfrac{x-4}{5}\right)=10\left(\dfrac{21}{10}\right)$ $5(x+3)+2(x-4)=21$ $5x+15+2x-8=21$ $7x+7=21$ $7x=14$ $x=2$ El conjunto solución es $\{2\}$. **Problema de muestra 7** Resolver $\dfrac{x-1}{3}-\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{5}{12}$.

(*continúa*)

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Resolver ecuaciones racionales que tienen variables en el denominador. (Sección 7.5/Objetivo 1; Sección 7.6/Objetivo 1)	Si una ecuación contiene una variable en uno o más de los denominadores, se debe evitar cualquier valor para la variable que convierta el denominador a cero.	Resolver $\frac{3}{n} + \frac{5}{2n} = \frac{4}{3}$. **Solución** Primero, debe darse cuenta que n no puede ser igual a cero. $6n\left(\frac{3}{n} + \frac{5}{2n}\right) = 6n\left(\frac{4}{3}\right)$ $6n\left(\frac{3}{n}\right) + 6n\left(\frac{5}{2n}\right) = 6n\left(\frac{4}{3}\right)$ $18 + 15 = 8n$ $33 = 8n$ $\frac{33}{8} = n$ El conjunto solución es $\left\{\frac{33}{8}\right\}$. **Problema de muestra 8** Resolver $\frac{5}{x} - \frac{1}{4} = \frac{3}{x}$.
Resolver ecuaciones racionales que están en la forma de proporción. (Sección 7.5/Objetivo 1)	La propiedad de proporciones, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y sólo si $ad = bc$, donde $b \neq 0$ y $d \neq 0$, puede aplicarse para resolver proporciones. De esta propiedad de las proporciones suele decirse que los productos cruzados son iguales.	Resolver $\frac{6}{x+1} = \frac{3}{x-2}$. **Solución** x diferente de -1 y x diferente de 2. $\frac{6}{x+1} = \frac{3}{x-2}$ $6(x-2) = 3(x+1)$ $6x - 12 = 3x + 3$ $3x = 15$ $x = 5$ El conjunto solución es $\{5\}$. **Problema de muestra 9** Resolver $\frac{5}{x+2} = \frac{8}{x-1}$.

<table>
<tr><th>OBJETIVO</th><th>RESUMEN</th><th>EJEMPLO</th></tr>
<tr><td>Resolver problemas verbales de proporciones.
(Sección 7.5/Objetivo 2)</td><td>Algunos de los problemas verbales en este capítulo se traducen en ecuaciones que son proporciones.</td><td>El numerador de una fracción es 4 menos que el denominador. La fracción en su forma más simple es $\frac{9}{10}$. Hallar la fracción.
Solución
Sea x el denominador. Entonces $x - 4$ representa al numerador.
$\frac{x-4}{x} = \frac{9}{10}$
$10(x - 4) = 9x$
$10x - 40 = 9x$
$x = 40$
La fracción es $\frac{36}{40}$.
Problema de muestra 10
El numerador de una fracción es 3 menos que el denominador. La fracción en su forma más simple es $\frac{4}{5}$. Hallar la fracción.</td></tr>
<tr><td>Resolver problemas verbales que involucran relaciones del proceso de división.
(Sección 7.5/Objetivo 2, Sección 7.6/Objetivo 2)</td><td>Los problemas verbales en este capítulo se traducen en ecuaciones fraccionarias. Muchos de los problemas involucran problemas de trabajo o de rapidez-tiempo.</td><td>Un tanque de agua tiene dos tuberías de entrada. Trabajando sola, la primera tubería puede llenar el tanque en 30 minutos. También trabajando sola, le toma a la segunda tubería 45 minutos llenar el tanque. La primera tubería empieza a llenar el tanque y 10 minutos después, la segunda tubería comienza a ayudar para llenar el tanque. ¿Cuánto tiempo tomará llenar el tanque?
Solución
Use una tabla para organizar los hechos. Sea x el tiempo para llenar el tanque.
<table><tr><th></th><th>Rapidez</th><th>Tiempo</th><th>Trabajo realizado</th></tr><tr><td>Tubería A</td><td>$\frac{1}{30}$</td><td>x</td><td>$\frac{x}{30}$</td></tr><tr><td>Tubería B</td><td>$\frac{1}{45}$</td><td>$x - 10$</td><td>$\frac{x-10}{45}$</td></tr></table>La guía para la ecuación es que el trabajo realizado por la tubería A más el trabajo realizado por la tubería B da como resultado 1 trabajo completo.
$\frac{x}{30} + \frac{x-10}{45} = 1$
Resolver esta ecuación da el resultado de $x = 22$. Por ende, toma 22 minutos llenar el tanque.
Problema de muestra 11
Alex puede deshierbar un jardín en 15 minutos menos de lo que le toma a Chris. Si trabajan juntos, pueden deshierbar el jardín en 10 minutos. ¿Cuánto le tomaría a cada uno trabajando solo?</td></tr>
</table>

Capítulo 7 Conjunto de problemas de repaso

Para los problemas 1-4, simplificar cada fracción.

1. $\dfrac{56x^3y}{72xy^3}$

2. $\dfrac{x^2 - 9x}{x^2 - 6x - 27}$

3. $\dfrac{3n^2 - n - 10}{n^2 - 4}$

4. $\dfrac{16a^2 + 24a + 9}{20a^2 + 7a - 6}$

Para los problemas 5-15, realizar las operaciones indicadas y expresar sus respuestas en la forma más simple.

5. $\dfrac{7x^2y^2}{12y^3} \cdot \dfrac{18y}{28x}$

6. $\dfrac{x^2y}{x^2 + 2x} \cdot \dfrac{x^2 - x - 6}{y}$

7. $\dfrac{n^2 - 2n - 24}{n^2 + 11n + 28} \div \dfrac{n^3 - 6n^2}{n^2 - 49}$

8. $\dfrac{4a^2 + 4a + 1}{(a + 6)^2} \div \dfrac{6a^2 - 5a - 4}{3a^2 + 14a - 24}$

9. $\dfrac{3x + 4}{5} + \dfrac{2x - 7}{4}$

10. $\dfrac{7}{3x} + \dfrac{5}{4x} - \dfrac{2}{8x^2}$

11. $\dfrac{7}{n} + \dfrac{3}{n - 1}$

12. $\dfrac{2}{a - 4} - \dfrac{3}{a - 2}$

13. $\dfrac{2x}{x^2 - 3x} - \dfrac{3}{4x}$

14. $\dfrac{2}{x^2 + 7x + 10} + \dfrac{3}{x^2 - 25}$

15. $\dfrac{5x}{x^2 - 4x - 21} - \dfrac{3}{x - 7} + \dfrac{4}{x + 3}$

Para los problemas 16 y 17, simplificar cada fracción compleja.

16. $\dfrac{\dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{y^2}}{\dfrac{4}{y} + \dfrac{5}{x}}$

17. $\dfrac{\dfrac{2}{x} - 1}{3 + \dfrac{5}{y}}$

Para los problemas 18-29, resolver cada ecuación.

18. $\dfrac{2x + 5}{3} + \dfrac{3x + 7}{4} = \dfrac{7}{12}$

19. $\dfrac{5}{3x} - 2 = \dfrac{7}{2x} + \dfrac{1}{5x}$

20. $\dfrac{67 - x}{x} = 6 + \dfrac{4}{x}$

21. $\dfrac{5}{2n + 2} = \dfrac{10}{5n + 1}$

22. $\dfrac{x}{x - 3} + \dfrac{5}{x + 3} = 1$

23. $n + \dfrac{1}{n} = 2$

24. $\dfrac{n - 1}{n^2 + 8n - 9} - \dfrac{n}{n + 9} = 4$

25. $\dfrac{6}{7x} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6x}$

26. $n + \dfrac{1}{n} = \dfrac{5}{2}$

27. $\dfrac{n}{5} = \dfrac{10}{n - 5}$

28. $\dfrac{-1}{2x - 5} + \dfrac{2x - 4}{4x^2 - 25} = \dfrac{5}{6x + 15}$

29. $1 + \dfrac{1}{n - 1} = \dfrac{1}{n^2 - n}$

Para los problemas 30-35, plantear una ecuación y resolver cada problema.

30. Le toma a Nancy tres veces más completar una tarea de lo que le toma a Becky. ¿Cuánto le toma a cada una completar la tarea si trabajando juntas les toma 2 horas?

31. La suma de un número y el doble de su recíproco es 3. Hallar el número.

32. El denominador de una fracción es el doble del numerador. Si se le suma 4 al numerador y 18 al denominador, se produce una fracción equivalente a $\frac{4}{9}$. Encontrar la fracción original.

33. Lanette puede conducir su ciclomotor 44 millas en el mismo tiempo que le toma a Todd recorrer 30 millas con su bicicleta. Si Lanette viaja 7 millas por hora más rápido que Todd, hallar las rapideces.

34. Jim recorrió 36 millas con su bicicleta en 4 horas. Durante las primeras 20 millas, condujo a una rapidez constante, y por las últimas 16 millas, redujo su rapidez por 2 millas por hora. Encontrar su rapidez por las últimas 16 millas.

35. Una tubería de entrada puede llenar un tanque en 10 minutos. Un desagüe vacía el tanque en 12 minutos. Si el tanque está vacío, y tanto la entrada como el desagüe están abiertos, ¿cuánto tiempo transcurrirá antes de que el tanque se desborde?

Capítulo 7 Examen

Para los problemas 1-4, simplificar cada fracción algebraica.

1. $\dfrac{72x^4y^5}{81x^2y^4}$

2. $\dfrac{x^2 + 6x}{x^2 - 36}$

3. $\dfrac{2n^2 - 7n - 4}{3n^2 - 8n - 16}$

4. $\dfrac{2x^3 + 7x^2 - 15x}{x^3 - 25x}$

Para los problemas 5-14, realizar las operaciones indicadas y expresar las respuestas en su forma más simple.

5. $\left(\dfrac{8x^2y}{7x}\right)\left(\dfrac{21xy^3}{12y^2}\right)$

6. $\dfrac{x^2 - 49}{x^2 + 7x} \div \dfrac{x^2 - 4x - 21}{x^2 - 2x}$

7. $\dfrac{x^2 - 5x - 36}{x^2 - 15x + 54} \cdot \dfrac{x^2 - 2x - 24}{x^2 + 7x}$

8. $\dfrac{3x - 1}{6} - \dfrac{2x - 3}{8}$

9. $\dfrac{n + 2}{3} - \dfrac{n - 1}{5} + \dfrac{n - 6}{6}$

10. $\dfrac{3}{2x} - \dfrac{5}{6} + \dfrac{7}{9x}$

11. $\dfrac{6}{n} - \dfrac{4}{n - 1}$

12. $\dfrac{2x}{x^2 + 6x} - \dfrac{3}{4x}$

13. $\dfrac{9}{x^2 + 4x - 32} + \dfrac{5}{x + 8}$

14. $\dfrac{-3}{6x^2 - 7x - 20} - \dfrac{5}{3x^2 - 14x - 24}$

Para los problemas 15-22, resolver cada ecuación.

15. $\dfrac{x + 3}{5} - \dfrac{x - 2}{6} = \dfrac{23}{30}$

16. $\dfrac{5}{8x} - 2 = \dfrac{3}{x}$

17. $n + \dfrac{4}{n} = \dfrac{13}{3}$

18. $\dfrac{x}{8} = \dfrac{6}{x - 2}$

19. $\dfrac{x}{x - 1} + \dfrac{2}{x + 1} = \dfrac{8}{3}$

20. $\dfrac{3}{2x + 1} = \dfrac{5}{3x - 6}$

21. $\dfrac{4}{n^2 - n} - \dfrac{3}{n - 1} = -1$

22. $\dfrac{3n - 1}{3} + \dfrac{2n + 5}{4} = \dfrac{4n - 6}{9}$

Para los problemas 23-25, plantear una ecuación y resolver el problema.

23. La suma de un número y el doble de su recíproco es $\dfrac{2}{3}$. Encontrar el número.

24. Wendy puede recorrer 42 millas con su bicicleta en el mismo tiempo que le toma a Betty conducir su bicicleta por 36 millas Wendy viaja 2 millas por hora más rápido que Betty. Hallar la rapidez de Wendy.

25. Garth puede podar un terreno en 20 minutos y Alex puede podar el mismo terreno en 30 minutos. ¿Cuánto les tomará podar el terreno si trabajan juntos?

Capítulos 1-7 Conjunto de problemas de repaso acumulados

Para los problemas 1-8, evaluar cada expresión algebraica para los valores dados a las variables. Puede ser que primero quiera simplificar la expresión o cambiar su forma por medio de factorización.

1. $3x - 2xy - 7x + 5xy$ para $x = \frac{1}{2}$ y $y = 3$
2. $7(a - b) - 3(a - b) - (a - b)$ para $a = -3$ y $b = -5$
3. $\frac{xy + yz}{y}$ para $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{5}{6}$, y $z = \frac{3}{4}$
4. $ab + b^2$ para $a = 0.4$ y $b = 0.6$
5. $x^2 - y^2$ para $x = -6$ y $y = 4$
6. $x^2 + 5x - 36$ para $x = -9$
7. $\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 5x + 6}$ para $x = -6$
8. $\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 9x + 14}$ para $x = 4$

Para los problemas 9-16, evaluar cada expresión.

9. 3^{-3}
10. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$
11. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^{0}$
12. $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)^{-1}$
13. -4^{-2}
14. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$
15. $\frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}}$
16. $(-3)^{-3}$

Para los problemas 17-32, realizar las operaciones indicadas y expresar sus respuestas en la forma más simple.

17. $\frac{7}{5x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x}$
18. $\frac{4x}{5y} \div \frac{12x^2}{10y^2}$
19. $\frac{4}{x - 6} + \frac{3}{x + 4}$
20. $\frac{2}{x^2 - 4x} - \frac{3}{x^2}$
21. $\frac{x^2 - 8x}{x^2 - x - 56} \cdot \frac{x^2 - 49}{3xy}$
22. $\frac{5}{x^2 - x - 12} - \frac{3}{x - 4}$
23. $(-5x^2y)(7x^3y^4)$
24. $(9ab^3)^2$
25. $(-3n^2)(5n^2 + 6n - 2)$
26. $(5x - 1)(3x + 4)$
27. $(2x + 5)^2$
28. $(x + 2)(2x^2 - 3x - 1)$
29. $(x^2 - x - 1)(x^2 + 2x - 3)$
30. $(-2x - 1)(3x - 7)$
31. $\frac{24x^2y^3 - 48x^4y^5}{8xy^2}$
32. $(28x^2 - 19x - 20) \div (4x - 5)$

Para los problemas 33-42, factorizar cada polinomio completamente.

33. $3x^3 + 15x^2 + 27x$
34. $x^2 - 100$
35. $5x^2 - 22x + 8$
36. $8x^2 - 22x - 63$
37. $n^2 + 25n + 144$
38. $nx + ny - 2x - 2y$
39. $3x^3 - 3x$
40. $2x^3 - 6x^2 - 108x$
41. $36x^2 - 60x + 25$
42. $3x^2 - 5xy - 2y^2$

Para los problemas 43-57, resolver cada una de las ecuaciones.

43. $3(x - 2) - 2(x + 6) = -2(x + 1)$
44. $x^2 = -11x$
45. $0.2x - 3(x - 0.4) = 1$
46. $\frac{3n - 1}{4} = \frac{5n + 2}{7}$
47. $5n^2 - 5 = 0$
48. $x^2 + 5x - 6 = 0$
49. $n + \frac{4}{n} = 4$
50. $\frac{2x + 1}{2} + \frac{3x - 4}{3} = 1$
51. $2(x - 1) - x(x - 1) = 0$
52. $\frac{3}{2x} - 1 = \frac{5}{3x} + 2$
53. $6t^2 + 19t - 7 = 0$
54. $(2x - 1)(x - 8) = 0$
55. $(x + 1)(x + 6) = 24$

56. $\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{7}{x+1} = 1$

57. $\dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n-1} = \dfrac{3}{n}$

Para los problemas 58-67, plantear una ecuación o una desigualdad para resolver cada problema.

58. El cateto de un triángulo rectángulo mide 2 pulgadas más que el otro cateto. La hipotenusa mide 4 pulgadas más que el cateto más corto. Hallar el largo de los tres lados del triángulo rectángulo.

59. ¿Veinte por ciento de qué número es 15?

60. ¿Cuántos mililitros de una solución de ácido clorhídrico al 65% se le debe agregar a 40 mililitros de una solución de ácido clorhídrico al 30% para obtener una solución de ácido clorhídrico al 55%?

61. El material para una barda de paisajismo de 28 pies se dobló para formar un rectángulo. El largo del rectángulo medía 2 pies más que el ancho. Encontrar las dimensiones del rectángulo.

62. Dos motociclistas salen de Daytona Beach al mismo tiempo y viajan en direcciones opuestas. Si uno viaja a 55 millas por hora y el otro a 65 millas por hora, ¿cuánto les tomará estar a 300 millas de distancia entre sí?

63. Hallar la longitud de la altura de un trapezoide con bases de 10 y 22 centímetros y un área de 120 centímetros cuadrados.

64. Si un carro utiliza 16 galones de gasolina para un viaje de 352 millas, con la misma tasa de consumo, ¿cuántos galones usará para un viaje de 594 millas?

65. Swati obtuvo calificaciones de 89, 92, 87 y 90 en sus primeros cuatro exámenes de historia. ¿Qué calificación debe obtener en el quinto examen para tener un promedio de 90 o mayor en los cinco exámenes?

66. Dos menos que tres veces cierto número es menor que 10. Encontrar todos los enteros positivos que satisfacen esta relación.

67. Uno más que cuatro veces cierto número es mayor que 15. Hallar todos los números reales que satisfacen esta relación.

68. Hermann preparó 5 galones de cerveza con su kit casero. Va a embotellar la cerveza en pintas. ¿Cuántas pintas obtendrá?

69. Antes de mudarse, Bryce conducía 10 millas al trabajo. Después de mudarse, tiene que conducir 25 millas al trabajo. ¿Cuál es el porcentaje de cambio en el número de millas que debe conducir a su trabajo?

70. Cuando fue de compras. Marcy tenía la opción de comprar 10 onzas de ensalada Great Leaf por \$2.90 u 8 onzas de ensalada Ever Fresh por \$2.00. Hallar la unidad de precio de cada marca de ensalada.

Para problemas verbales adicionales, vea el Apéndice A. Todos los problemas en el apéndice con referencias a los capítulos 3-7 son apropiados.

8 Geometría coordinada y sistemas lineales

Philipp Nemenz/Cultura/Getty Images

"Una imagen vale más que mil palabras"
VARIAS FUENTES

Tip de estudio

¿Tiene problemas para recordar fórmulas? De ser así, las tarjetas de estudio son un recurso útil para recordarlas. Es muy fácil hacer sus propias tarjetas de estudio. Compre un paquete de tarjetas. Al frente de cada una, escriba el nombre de la fórmula, por ejemplo "Pendiente de una recta". En la parte trasera, escriba la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Para una fórmula geométrica como el "Perímetro de un rectángulo", la parte trasera puede llevar la fórmula, P 5 $2L$ 1 $2W$, y un dibujo del rectángulo con el largo y el ancho etiquetados.

Lleve estas tarjetas consigo y repáselas mientras espera a que empiece su clase, mientras recoge a los niños del colegio o en la sala de espera del doctor. Mire primero el frente, recuerde la fórmula, y después gire la tarjeta para revisar si recordó correctamente la fórmula. La exposición repetida por usar las tarjetas muchas veces ayudará a que memorice la fórmula.

¿Alguna vez ha pensado en las gráficas como dibujos y en expresar información de manera visual en lugar de escrita?

Vista previa del capítulo

Este capítulo presenta un nuevo tipo de ecuación con dos variables, típicamente una *x* y una *y*. Un ejemplo de este tipo de ecuación es *x* 1 *y* 5 10. La meta de resolver cualquier ecuación es encontrar los valores de las variables que vuelven a la ecuación un enunciado verdadero. Debido a que sólo hay dos variables, las soluciones son pares de números, un valor para x y un valor para *y*.

¿Puede pensar en algunos valores para *x* y *y* que vuelvan a *x* 1 *y* 5 10 un enunciado verdadero? Tal vez pensó en *x* 5 5 y *y* 5 5, o tal vez *x* 5 1 y *y* 5 9. Estos son sólo dos de los infinitos números posibles.

Ya que hay un número infinito de soluciones, no se puede escribir un conjunto solución. Se vio un ejemplo de esto en el capítulo 3, donde se usó una gráfica para representar el conjunto solución. La figura 8.1 muestra la gráfica de la desigualdad *x* $ 1.

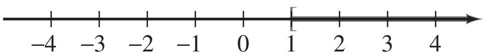


Figura 8.1

Para ecuaciones con dos variables, se puede usar un sistema de coordenadas rectangulares, fijar algunas soluciones y después graficar para representar todos los conjuntos solución. Este capítulo demuestra técnicas de graficación, pero debe siempre recordar que una gráfica es sólo un dibujo del conjunto solución y que su meta debe, como con cualquier ecuación, debe ser hallar los valores para las variables que conviertan la ecuación en un enunciado verdadero.

8.1 Sistema de coordenadas cartesianas

OBJETIVOS

1. Fijar puntos en un sistema de coordenadas rectangulares
2. Resolver ecuaciones para una variable específica
3. Graficar ecuaciones fijando puntos

En la sección 2.3 se presentó la recta numérica (Figura 8.2), la cual es el resultado de plantear una correspondencia uno a uno entre el conjunto de números reales y los puntos en una recta. Recuerde que el número asociado con un punto en la línea es llamado la coordenada de ese punto.

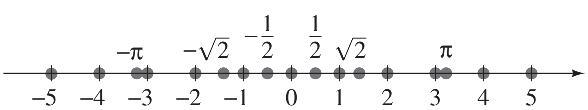


Figura 8.2

Ahora considere dos líneas (una vertical y una horizontal) que son perpendiculares entre sí en el punto que se asocia con cero en ambas rectas (Figura 8.3). A estas rectas numéricas se les conoce como **ejes horizontal y vertical** o, en conjunto, como **ejes coordenados**. Ellos parten el plano en cuatro regiones llamadas **cuadrantes**. Los cuadrantes se numeran contra las manecillas del reloj de I a IV, como se indica en la figura 8.3. El punto de intersección de los dos ejes se llama **origen**.

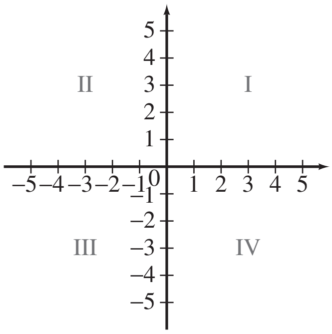


Figura 8.3

Ahora es posible establecer una correspondencia uno a uno entre **pares ordenados** de números reales y los puntos en un plano. A cada par ordenado de números reales corresponde un punto único en el plano, y a cada punto en el plano corresponde un par ordenado único de números reales. Una parte de esta correspondencia se ilustra en la figura 8.4. El par ordenado (3, 1) significa que el punto A se ubica tres unidades a la derecha y una unidad arriba del origen. (El par ordenado (0, 0) se asocia con el origen.) El par ordenado $(-2, 4)$ significa que el punto B se ubica dos unidades a la izquierda y cuatro unidades arriba del origen. Asegúrese de estar de acuerdo con todos los puntos fijados en la figura 8.4.

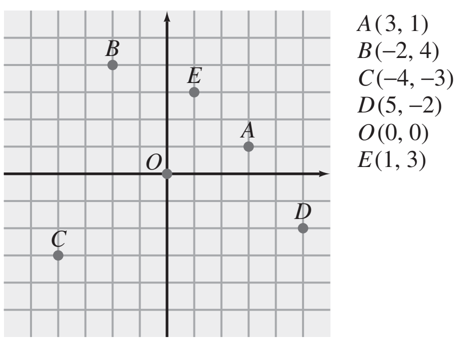
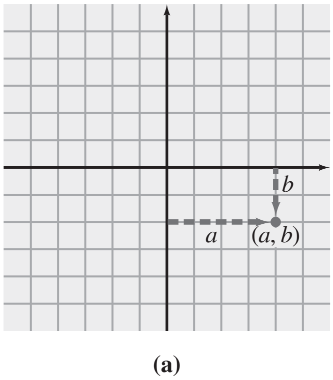


Figura 8.4

Comentarios: La notación $(-2, 4)$ se usó anteriormente en este texto para indicar un intervalo de la recta numérica real. Ahora se usa la misma notación para indicar un par ordenado de números reales. Este doble significado no se debe confundir porque el contexto del material siempre indicará cuál significado de la notación se usa. A lo largo de este capítulo se usará la interpretación del par ordenado.

En general, a los números reales a y b en un par ordenado (a, b) asociados con un punto, se les conoce como las **coordenadas del punto**. El primer número, a, llamado **abscisa**, es la distancia dirigida del punto desde el eje vertical medida paralela al eje horizontal. El segundo número, b, llamado **ordenada**, es la distancia dirigida del punto desde el eje horizontal medida paralela al eje vertical (figura 8.5a). Por ende, en el primer cuadrante, todos los puntos tienen una abscisa positiva y una ordenada positiva. En el segundo cuadrante, todos los puntos tienen una abscisa negativa y una ordenada positiva. Las situaciones del signo para los cuatro cuadrantes se indican en la figura 8.5(b). Este sistema de asociar puntos en un plano con pares de números reales se llama **sistema de coordenadas rectangulares** o **sistema de coordenadas cartesianas**.



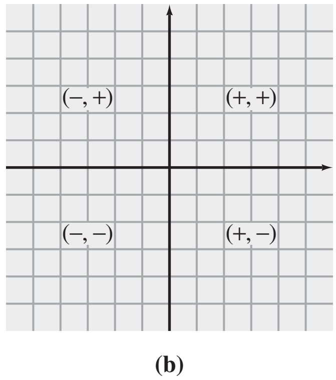


Figura 8.5

Fijar puntos en un sistema de coordenadas rectangulares puede ser de ayuda cuando se analizan datos o se determina una tendencia o relación. El siguiente ejemplo muestra el planteamiento de ciertos datos.

Ejemplo de salón de clases

La tabla muestra los cambios en el valor de cinco acciones en lunes y después en viernes. Sea el valor del lunes el primer número en el par ordenado, y sea el valor del viernes el segundo número en el par ordenado. Enliste los pares ordenados. Grafique la información en un sistema de coordenadas rectangulares.

	A	B	C	D	E
Lunes	+1	−2	−1	+3	+5
Viernes	−3	+1	−4	−2	+3

EJEMPLO 1

La tabla muestra las puntuaciones en viernes y sábado de algunos golfistas en términos de par. Grafique la información en un sistema de coordenadas rectangulares. Para cada golfista, sea la puntuación en viernes el primer número en el par ordenado, y sea la puntuación del sábado el segundo número en el par ordenado.

	Mark	Ty	Vinay	Bill	Herb	Rod
Puntuación del viernes	1	−2	−1	4	−3	0
Puntuación del sábado	3	−2	0	7	−4	1

Solución

Los pares ordenados quedan de la siguiente forma:

Mark (1, 3) Ty (−2, −2)
Vinay (−1, 0) Bill (4, 7)
Herb (−3, −4) Rod (0, 1)

Los puntos se grafican en el sistema de coordenadas rectangulares en la figura 8.6. En el estudio de estadísticas, esta graficación de los datos se llamaría una nube de puntos. Para esta graficación, los puntos parecen crear una línea recta, lo cual sugiere una correlación lineal entre las puntuaciones del viernes y del sábado.

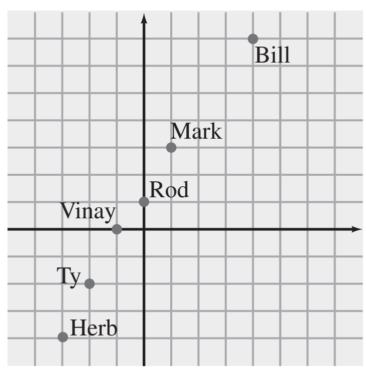


Figura 8.6

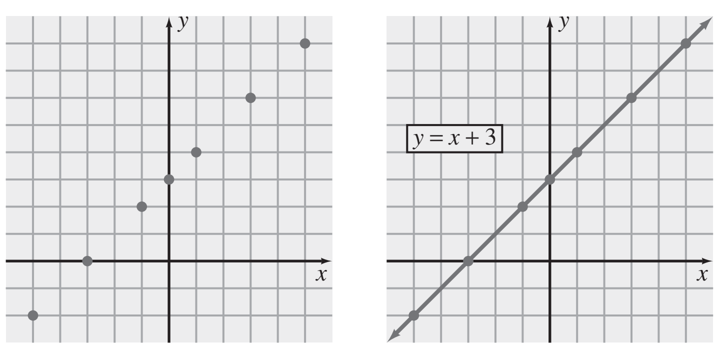
En la sección 3.5, la recta numérica se usó para mostrar el conjunto solución de una desigualdad. Recuerde que el conjunto solución de una desigualdad como $x > 3$ tiene un número infinito de soluciones. Entonces, la recta numérica es una forma efectiva de mostrar el conjunto solución de una desigualdad.

Ahora quiere encontrar los conjuntos solución para ecuaciones con dos variables. Comience considerando las soluciones para la ecuación $y = x + 3$. Una solución para una ecuación con dos variables es un par de números que hace de la ecuación un enunciado verdadero. Para la ecuación $y = x + 3$, el par de números $x = 4$ y $y = 7$ vuelve a la ecuación un enunciado verdadero. Este par de números puede escribirse como el par ordenado (4, 7). Cuando se usan las variables x y y, por convención, el primer número de un par ordenado es un valor de x, y el segundo número es un valor de y. Del mismo modo, (2, 5) es una solución de $y = x + 3$ porque $5 = 2 + 3$. Se pueden encontrar infinitos pares de números reales que satisfagan $y = x + 3$, al elegir de manera arbitraria valores para x, y por cada valor de x que se elija, se puede determinar un valor correspondiente para y. Use una tabla para registrar algunas de las soluciones para $y = x + 3$.

Elija x	Determine y a partir de y = x + 3	Soluciones para y = x + 3
0	3	(0, 3)
1	4	(1, 4)
3	6	(3, 6)
5	8	(5, 8)
−1	2	(−1, 2)
−3	0	(−3, 0)
−5	−2	(−5, −2)

Debido a que el número de soluciones para la ecuación $y = x + 3$ es infinito, no se tiene una manera conveniente de enlistar el conjunto solución. Esto es similar a las desigualdades para las cuales el conjunto solución es infinito. Para las desigualdades, se usó una recta numérica para graficar el conjunto solución. Ahora se usará el sistema de coordenadas rectangulares para mostrar el conjunto solución de una ecuación con dos variables.

En un sistema de coordenadas rectangulares donde se etiqueta el eje horizontal como el eje x y el eje vertical como el eje y, se puede localizar el punto asociado con cada par ordenado de números en la tabla. Estos puntos se muestran en la figura 8.7(a). Estos puntos son sólo una de las infinitas soluciones de la ecuación $y = x + 3$. La línea recta marcada con puntos en la figura 8.7(b) representa todas las soluciones de la ecuación y se llama gráfica de la ecuación $y = x + 3$.

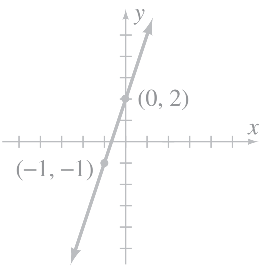


(a) **(b)**

Figura 8.7

Los siguientes ejemplos ilustran el proceso de graficar ecuaciones.

Ejemplo de salón de clases
Graficar $y = 3x + 2$.



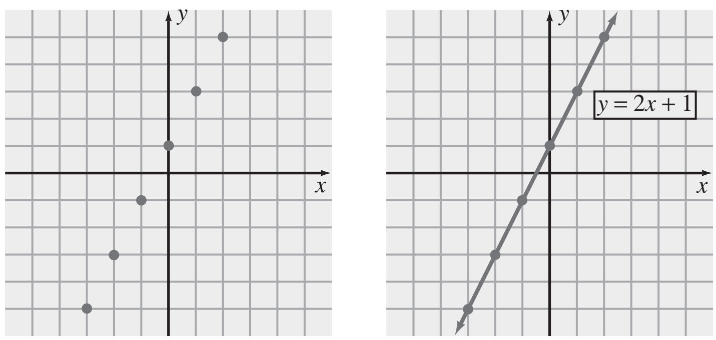
EJEMPLO 2 Graficar $y = 2x + 1$.

Solución

Primero, escriba en una tabla algunas de las soluciones para la ecuación $y = 2x + 1$. Puede elegir cualquier valor para la variable x y encontrar el valor de y correspondiente. Los valores que eligió para x están en la tabla e incluyen números positivos, cero y números negativos.

x	y	Soluciones (x, y)
0	1	(0, 1)
1	3	(1, 3)
2	5	(2, 5)
−1	−1	(−1, −1)
−2	−3	(−2, −3)
−3	−5	(−3, −5)

A partir de la tabla, puede fijar los puntos asociados con los pares ordenados como se muestra en la figura 8.8(a). Al conectar estos puntos con una línea recta, se produce la gráfica de la ecuación $y = 2x + 1$ como se muestra en la figura 8.8(b).



(a) **(b)**

Figura 8.8

Ejemplo de salón de clases
Graficar $y = -\frac{1}{4}x + 1$.

EJEMPLO 3 Graficar $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

Solución

Primero, escriba en una tabla algunas de las soluciones para la ecuación $y = -\frac{1}{2}x + 3$. Puede elegir cualquier valor para la variable x y encontrar el valor de y correspondiente; sin embargo, los valores que se eligieron para x son números divisibles entre 2. Esto no es necesario, pero sí genera números enteros para y.

x	y	Soluciones (x, y)
0	3	(0, 3)
2	2	(2, 2)
4	1	(4, 1)
−2	4	(−2, 4)
−4	5	(−4, 5)

A partir de la tabla se pueden fijar los puntos asociados con pares ordenados, como se muestra en la figura 8.9(a). Conectar estos puntos con una línea recta produce la gráfica de la ecuación $y = -\frac{1}{2}x + 3$ como se muestra en la figura 8.9(b).

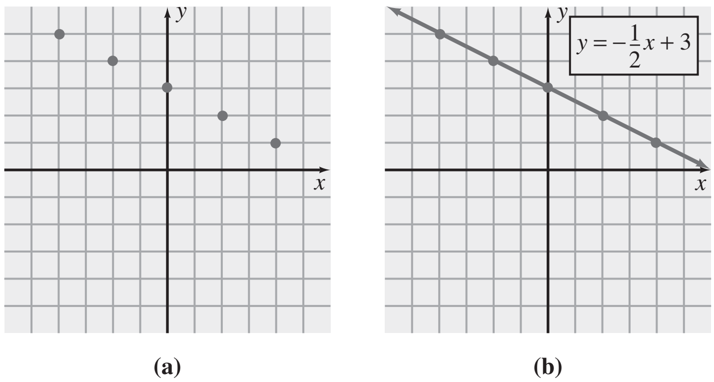


Figura 8.9

Ejemplo de salón de clases
Graficar $2x + 3y = 6$.

EJEMPLO 4 Graficar $6x + 3y = 9$.

Solución

Primero, cambie la forma de la ecuación para que sea más fácil hallar las soluciones de la ecuación $6x + 3y = 9$. Se puede resolver tanto para x en términos de y o para y en términos de x. Típicamente, la ecuación se resuelve para y en términos de x, así que eso es lo que aquí se muestra:

$$6x + 3y = 9$$
$$3y = -6x + 9$$
$$y = \frac{-6x}{3} + \frac{9}{3}$$
$$y = -2x + 3$$

Ahora se puede escribir la tabla con los valores. Fijar estos puntos y conectarlos produce la figura 8-10.

x	y
0	3
1	1
2	−1
−1	5

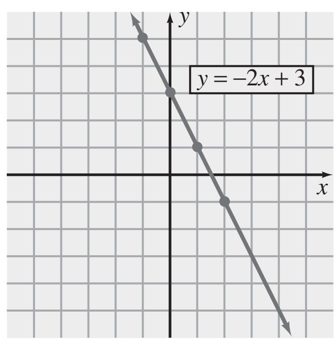


Figura 8.10

Para graficar una ecuación con dos variables, x y y, tenga en mente estos pasos:

1. Resolver la ecuación para y en términos de x o para x en términos de y, si no está ya en esa forma.
2. Plantear una tabla de pares ordenados que satisfaga la ecuación.

3. Fijar los puntos asociados con los pares ordenados.
4. Conectar los puntos.

Se concluye esta sección con otros dos ejemplos que ilustran el paso 1.

Ejemplo de salón de clases

Resolver $3x + 8y = 14$ para y.

EJEMPLO 5 Resolver $4x + 9y = 12$ para y.

Solución

$$4x + 9y = 12$$

$$9y = -4x + 12 \quad \text{Sumar a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de } 4x\text{, es decir } -4x$$

$$y = -\frac{4}{9}x + \frac{12}{9} \quad \text{Multiplicar a ambos lados de la igualdad por el reciproco de 9, es decir por } \frac{1}{9}$$

$$y = -\frac{4}{9}x + \frac{4}{3}$$

Ejemplo de salón de clases

Resolver $5x - 8y = 6$ para y.

EJEMPLO 6 Resolver $2x - 6y = 3$ para y.

Solución

$$2x - 6y = 3$$

$$-6y = -2x + 3 \quad \text{Sumar a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de } 2x\text{, es decir } -2x$$

$$y = \frac{-2}{-6}x + \frac{3}{-6} \quad \text{Multiplicar a ambos lados de la igualdad por el reciproco de } -6\text{, es decir por } -\frac{1}{6}$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2} \quad \text{Reducir las fracciones}$$

Examen de conceptos 8.1

Para los problemas 1-5, responder cierto o falso.

1. En un sistema de coordenadas rectangulares, los ejes coordenados parten el plano en cuatro partes llamadas cuadrantes.
2. Los cuadrantes son numerados con números romanos y en el sentido de las manecillas del reloj.
3. Los números reales en un par ordenado son llamados coordenadas de un punto.
4. La ecuación $y = x + 3$ tiene un número infinito de pares ordenados que satisfacen a la ecuación.
5. El punto de intersección de los ejes coordenados es llamado el origen.

Para los problemas 6-10, emparejar los puntos fijados en la figura 8.11 con sus coordenadas.

6. $(-3, 1)$
7. $(4, 0)$
8. $(3, -1)$
9. $(0, 4)$
10. $(-1, -3)$

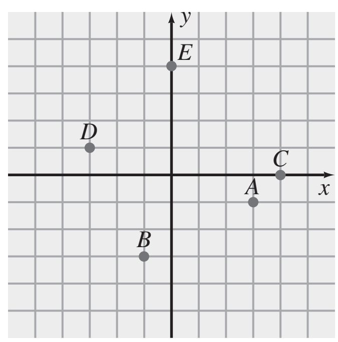


Figura 8.11

Conjunto de problemas 8.1

Para los problemas 1-10, graficar los puntos en un sistema de coordenadas rectangulares y determinar si los puntos crean una línea recta. **(Objetivo 1)**

1. $(1, 4), (-2, 1), (-4, -1), (-3, 0)$
2. $(0, 2), (3, -1), (5, -3), (-3, 5)$
3. $(0, 3), (-2, 7), (3, -6)$
4. $(1, 4), (-1, 6), (6, -3)$
5. $(3, -1), (-3, -3), (0, -2)$
6. $(0, 1), (2, 0), (-2, 2)$
7. $(-4, 0), (-2, -1), (6, -5)$
8. $(1, 3), (-2, -6), (0, 0)$
9. $(-2, 4), (2, -4), (1, 0)$
10. $(2, 2), (-3, -6), (-1, -1)$

11. María, una estudiante de biología, diseñó un experimento para probar los efectos de cambiar la cantidad de luz y la cantidad de agua dada a ciertas plantas. En el experimento, las cantidades de agua y luz dadas a las plantas cambiaron de manera aleatoria. La tabla muestra la cantidad de agua y luz sobre o por debajo de la cantidad normal dada a la planta por seis días. Grafique la información en un sistema de coordenadas rectangulares. Sea el cambio en la luz el primer número en el par ordenado, y sea el cambio en el agua el segundo número en el par ordenado.

	Lun.	Mar.	Mié.	Jue.	Vie.	Sáb.
Cambio en la cantidad de luz	1	−2	−1	4	−3	0
Cambio en la cantidad de agua	−3	4	−1	0	−5	1

12. Chase está estudiando los cambios en los porcentajes mensuales de los precios de las acciones de dos diferentes compañías. Usando los datos en la tabla, fijar los puntos para cada mes. Sea el porcentaje de cambio para XM Inc. el primer número en el par ordenado, y sea el porcentaje de cambio de Icom el segundo número en el par ordenado.

	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May	Jun.
XM Inc.	1	−2	−1	4	−3	0
Icom	−3	4	2	−5	−1	1

Para los problemas 13-20, (a) determinar cuáles pares ordenados satisfacen la ecuación dada, y (b) graficar la ecuación fijando los puntos que satisfagan la ecuación. **(Objetivos 1 y 3)**

13. $y = -x + 4$; $(1, 3), (0, 4), (2, -1), (-2, 6), (-1, 5)$
14. $y = -2x + 3$; $(1, 1), (1.5, 0), (3, -1), (0, 3), (-1, 5)$
15. $y = 2x - 3$; $(1, 2), (-3, 0), (0, -3), (2, 1), (-1, -5)$
16. $y = x + 4$; $(-1, 3), (2, -1), (-2, 2), (-1, 5), (0, 4)$
17. $y = \frac{2}{3}x$; $(1, 2), (-3, -2), (0, 0), (3, 6), (-6, -2)$
18. $y = \frac{1}{2}x$; $(1, 2), (2, 1), \left(0, \frac{1}{2}\right), (-2, -1), \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$
19. $y = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$; $\left(1, \frac{1}{5}\right), \left(-3, \frac{4}{5}\right), \left(-1, -\frac{3}{5}\right), \left(2, \frac{2}{5}\right), (-2, -1)$
20. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$; $\left(1, \frac{1}{3}\right), (0, 1), (5, -3)\ \left(\frac{1}{2}, 0\right), (-1, 0)$

Para los problemas 21-30, resolver la ecuación dada para la variable indicada. **(Objetivo 2)**

21. $3x + 7y = 13$ para y
22. $5x + 9y = 17$ para y
23. $x - 3y = 9$ para x
24. $2x - 7y = 5$ para x
25. $-x + 5y = 14$ para y
26. $-2x - y = 9$ para y
27. $-3x + y = 7$ para x
28. $-x - y = 9$ para x
29. $-2x + 3y = -5$ para y
30. $3x - 4y = -7$ para y

Para los problemas 31-50, graficar cada una de las ecuaciones. **(Objetivo 3)**

31. $y = x + 1$
32. $y = x + 4$
33. $y = x - 2$
34. $y = -x - 1$
35. $y = 3x - 4$
36. $y = -2x - 1$
37. $y = -4x + 4$
38. $y = 2x - 6$
39. $y = \frac{1}{2}x + 3$
40. $y = \frac{1}{2}x - 2$

41. $x + 2y = 4$

42. $x + 3y = 6$

43. $2x - 5y = 10$

44. $5x - 2y = 10$

45. $y = -\frac{1}{3}x + 2$

46. $y = -\frac{2}{3}x - 3$

47. $y = x$

48. $y = -x$

49. $y = -3x + 2$

50. $3x - y = 4$

Pensamientos en palabras

51. ¿Cómo podría convencer a alguien de que hay una infinidad de pares ordenados de números reales que satisfacen la ecuación $x + y = 9$?

52. Explicar por qué ningún punto de la gráfica de la ecuación $y = x$ estará en el segundo cuadrante.

Más investigación

No todas las gráficas son líneas rectas. Algunas ecuaciones producen gráficas que son líneas curvas. Por ejemplo, la gráfica de $y = x^2$ producirá una curva llamada parábola. Para graficar $y = x^2$, proceda como en los problemas anteriores y fije los puntos asociados con las soluciones de la ecuación $y = x^2$ y conecte los puntos con una línea curva.

x	y	Soluciones (x, y)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	4	(2, 4)
3	9	(3, 9)
−1	1	(−1, 1)
−2	4	(−2, 4)
−3	9	(−3, 9)

Después, se fijan los puntos asociados con las soluciones como se muestra en la figura 8.12(a). Finalmente, se conectan los puntos con una línea curva como se muestra en la figura 8.12(b).

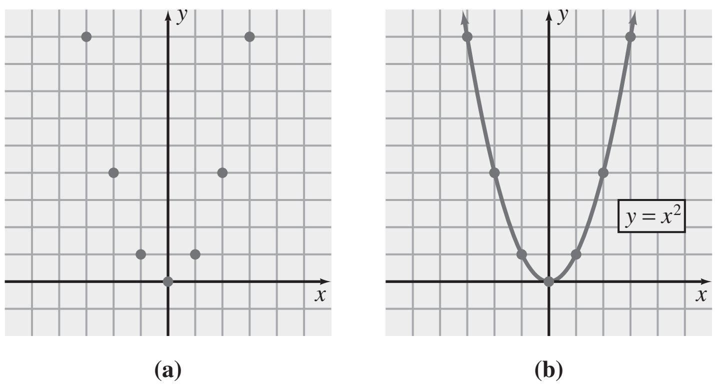


Figura 8.12

Para los problemas 53-62, graficar cada una de las ecuaciones. Asegúrese de encontrar suficientes soluciones para que la gráfica de la ecuación pueda determinarse.

53. $y = x^2 + 2$

54. $y = x^2 - 3$

55. $y = -x^2$

56. $y = (x - 2)^2$

57. $y = x^3$

58. $y = x^3 - 4$

59. $y = (x - 3)^3$

60. $y = -x^3$

61. $y = x^4$

62. $y = -x^4$

Respuestas del examen de conceptos

1. Cierto **2.** Falso **3.** Cierto **4.** Cierto **5.** Cierto **6.** D **7.** C **8.** A **9.** E **10.** B

8.2 Graficación de ecuaciones lineales

OBJETIVOS

1 Encontrar las intersecciones x y y en ecuaciones lineales

2 Graficar ecuaciones lineales

3 Usar ecuaciones lineales para modelar problemas

En la sección anterior se graficaron ecuaciones cuyas gráficas eran líneas rectas. En general, cualquier ecuación de la forma $Ax + By = C$, donde A, B y C son constantes (A y B no son cero) y x y y son variables, es una *ecuación lineal con dos variables*, y su gráfica es una línea recta.

Se deben hacer dos aclaraciones acerca de esta descripción de una ecuación lineal. Primero, la elección de x y y como variables es arbitraria. Podría usar cualquier par de letras para representar las variables. Por ejemplo, una ecuación como $3m + 2n = 7$ se puede considerar como ecuación lineal con dos variables. Sin embargo, dado que no se cambia constantemente el etiquetado de los ejes coordenados cuando se grafican ecuaciones, es mucho más fácil de usar las mismas dos variables en todas las ecuaciones. Por tanto, se continuará con la convención y se usarán x y y como variables. Segundo, la frase "cualquier ecuación de la forma $Ax + By = C$" técnicamente significa "cualquier ecuación de la forma $Ax + By = C$ o *equivalente* a dicha forma". Por ejemplo, la ecuación $y = x + 3$, que se grafica con una línea recta, es equivalente a $-x + y = 3$.

Los siguientes son ejemplos de ecuaciones lineales con dos variables,

$$y = x + 3 \qquad y = -3x + 2 \qquad y = \frac{2}{5}x + 1 \qquad y = 2x$$

$$3x - 2y = 6 \qquad x - 4y = 5 \qquad 5x - y = 10 \qquad y = \frac{2x + 4}{3}$$

El conocimiento de que cualquier ecuación de la forma $Ax + By = C$ produce una gráfica en línea recta, junto con el hecho de que dos puntos determinan una línea recta, hace que la graficación de ecuaciones lineales sea un proceso sencillo. Simplemente se encuentran dos soluciones, se grafican los puntos correspondientes y se conectan los puntos con una línea recta. Por lo general, es aconsejable encontrar un tercer punto que sirva de comprobación. Considere un ejemplo.

Ejemplo de salón de clases
Graficar $8x - 6y = 12$.

EJEMPLO 1 Graficar $2x - 3y = 6$.

Solución

Se reconoce que la ecuación $2x - 3y = 6$ es una ecuación lineal con dos variables y, por ende, su gráfica será una línea recta. Lo único que se necesita es encontrar dos soluciones y conectar los puntos con una línea recta. Sin embargo, en este caso también debe encontrar una tercera solución que sirva de comprobación.

Sea $x = 0$; entonces $2(0) - 3y = 6$

$$-3y = 6$$

$$y = -2$$ Por ende, $(0, -2)$ es una solución

Sea $y = 0$; entonces $2x - 3(0) = 6$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$ Por ende, $(3, 0)$ es una solución

Sea $x = -3$; entonces $2(-3) - 3y = 6$

$$-6 - 3y = 6$$

$$-3y = 12$$

$$y = -4$$ Por ende, $(-3, -4)$ es una solución

Se pueden fijar los puntos asociados con estas tres soluciones y conectarlos con una línea recta que produce la gráfica de $2x - 3y = 6$ en la figura 8.13.

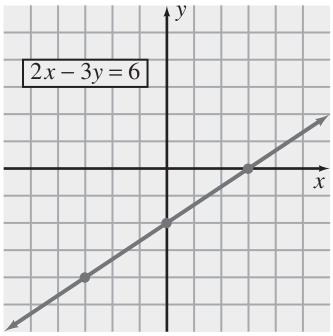


Figura 8.13

Revise el método al ejemplo 1. Note que no se resolvió la ecuación para y en términos de x o para x en términos de y. Puesto que se sabe que la gráfica es una línea recta, no hay necesidad de una tabla extensa de valores. Por tanto, no hay necesidad de cambiar la forma de la ecuación original. Los primeras dos soluciones indican la intersección entre la línea y los ejes coordenados. La ordenada del punto $(0, -2)$ se conoce como la intersección y, y la abscisa del punto $(3, 0)$ es llamada la intersección x de esta gráfica. Es decir, la gráfica de la ecuación $2x - 3y = 6$ tiene una intersección y de -2 y una intersección x de 3. En general, las intersecciones suelen ser fáciles de encontrar. Puede dejar $x = 0$ y resolver para y para encontrar la intersección y, y dejar $y = 0$ y resolver para x para encontrar la intersección x. La tercera solución, $(-3, -4)$, sirve como punto de comprobación. De no haber estado sobre la recta determinada por las dos intersecciones, entonces sabría que cometió un error.

Ejemplo de salón de clases
Graficar $2x + y = 3$.

EJEMPLO 2 Graficar $x + 2y = 4$.

Solución

Sin mostrar todo el procedimiento, se presenta la siguiente tabla indicando las intersecciones y el punto de comprobación.

x	y	
0	2	Intersecciones
4	0	
2	1	Punto de comprobación

Se fijan los puntos (0, 2), (4, 0) y (2, 1) y se conectan con una línea recta para producir la gráfica de la figura 8.14.

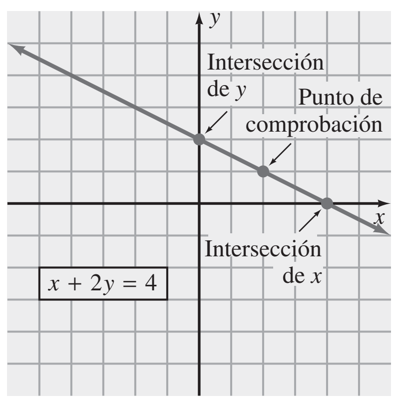


Figura 8.14

Ejemplo de salón de clases
Graficar $4x + 5y = 3$.

EJEMPLO 3

Graficar $2x + 3y = 7$.

Solución

Las intersecciones y el punto de comprobación se dan en esta tabla. Encontrar las intersecciones puede involucrar fracciones, pero los cálculos suelen ser fáciles. Se fijan los puntos de la tabla y se muestra la gráfica de $2x + 3y = 7$ en la figura 8.15.

x	y	
0	$\frac{7}{3}$	Intersecciones
$\frac{7}{2}$	0	
2	1	Punto de comprobación

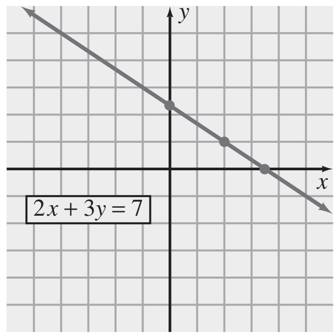


Figura 8.15

Ejemplo de salón de clases
Graficar $y = 3x$.

EJEMPLO 4

Graficar $y = 2x$.

Solución

Note que (0, 0) es una solución; entonces, esta línea cruza ambos ejes y el origen. Ya que tanto la intersección x como la y se determinan por el origen, (0, 0), se necesita otro punto para graficar la recta. Entonces, se debe encontrar un tercer punto que sirva como comprobación. Estos resultados se resumen en la tabla. La gráfica de $y = 2x$ se muestra en la figura 8.16.

x	y	
0	0	Intersección
2	4	Punto adicional
-1	-2	Punto de comprobación

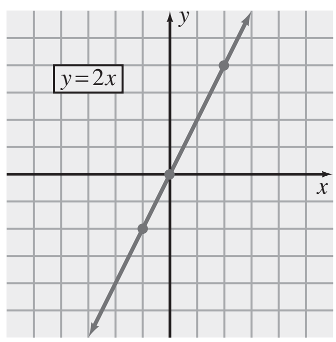


Figura 8.16

Ejemplo de salón de clases
Graficar $y = -2$.

EJEMPLO 5

Graficar $x = 3$.

Solución

Ya que se están considerando ecuaciones lineales con dos variables, la ecuación $x = 3$ es equivalente a $x + 0(y) = 3$. Puede ver que se puede usar cualquier valor para y, pero el valor de x siempre debe ser 3. Por ende, algunas de las soluciones son (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, -1) y (3, -2). La gráfica de todas las soluciones es la recta vertical en la figura 8.17.

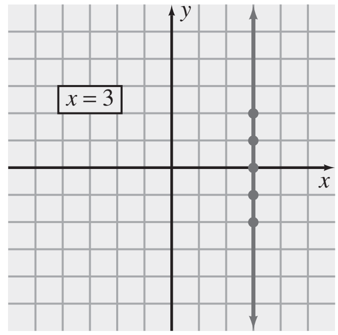


Figura 8.17

Aplicaciones de las ecuaciones lineales

Las ecuaciones lineales con dos variables pueden usarse para modelar muchos tipos de problemas del mundo real. Por ejemplo, suponga que un vendedor tiene algunos artículos que quiere vender con una ganancia de 30% sobre el costo de cada artículo. Si con s se representa el precio de venta y c el costo de cada artículo, entonces se puede usar la ecuación

$$s = c + 0.3c = 1.3c$$

para determinar el precio de venta de cada artículo con base en el costo del artículo. En otras palabras, si el costo de un artículo es \$4.50, entonces se debe vender por $s = (1.3)(4.5) =$ \$5.85.

Encontrando los valores que satisfacen la ecuación $s = 1.3c$, se puede crear esta tabla:

c	1	5	10	15	20
s	1.3	6.5	13	19.5	26

Al leer la tabla se ve que, si el costo de un artículo es \$15, entonces se debe vender por \$19.50 para producir una ganancia de 30% del costo. Más aún, puesto que es una relación lineal, se pueden obtener valores exactos entre valores dados en la tabla. Por ejemplo, un valor c de 12.5 está a la mitad entre los valores c de 10 y 15, de modo que el valor s correspondiente está a la mitad entre los valores s de 13 y 19.5. En consecuencia, un valor c de 12.5 produce

$$s = 13 + \frac{1}{2}(19.5 - 13) = 16.25$$

Por ende, si el costo de un artículo es \$12.50, se debe vender por \$16.25.

Ahora grafique esta relación lineal. Puede marcar el eje horizontal c, marcar el eje vertical s y usar el origen junto con un par ordenado de la tabla para producir la gráfica de línea recta en la figura 8.18. (Debido al tipo de aplicación, sólo se usan valores no negativos para c y s.)

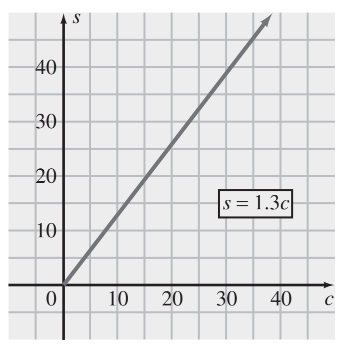


Figura 8.18

A partir de la gráfica se pueden aproximar valores s con base en los valores c dados. Por ejemplo, si $c = 30$, entonces, al leer desde 30 sobre el eje c hasta la línea y luego a través del eje s, se ve que s es un poco menos que 40. (Al usar la ecuación $s = 1.3c$ se obtiene un valor s exacto de 39.)

Muchas fórmulas que se usan en varias aplicaciones son ecuaciones lineales con dos variables. Por ejemplo, la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, que se usa para convertir temperaturas de la escala Fahrenheit a la escala Celsius, es una relación lineal. Al usar esta ecuación, se puede determinar que 14°F es equivalente a

$$C = \frac{5}{9}(14 - 32) = \frac{5}{9}(-18) = -10°C$$

Use la ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ para completar la siguiente tabla.

F	2 22	2 13	5	32	50	68	86
C	2 30	2 25	2 15	0	10	20	30

Al leer la tabla se ve, por ejemplo, que $-13°F = -25°C$ y $68°F = 20°C$.

Para graficar la ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ puede marcar el eje horizontal F, marcar el eje vertical C y graficar dos pares ordenados (F, C) de la tabla. La figura 8.19 muestra la gráfica de la ecuación.

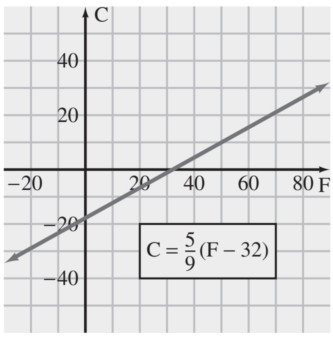


Figura 8.19

A partir de la gráfica se pueden aproximar valores C sobre la base de valores F dados. Por ejemplo, si F = 80°, entonces, al leer desde 80 en el eje F hasta la línea y luego a través del eje C, se ve que C es aproximadamente 25°. Del mismo modo se pueden obtener valores F aproximados sobre la base de valores C dados. Por ejemplo, si $C = -25°$, entonces al leer a través desde -25 sobre el eje C hasta la línea y luego arriba hacia el eje F, se ve que F es aproximadamente $-15°$.

Examen de conceptos 8.2

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. La gráfica de $y = x^2$ es una línea recta.
2. Cualquier ecuación en la forma $Ax + By = C$, donde A, B y C (A y B no siendo cero) son constantes y x y y son variables, tiene una gráfica que es una línea recta.
3. Las ecuaciones $2x + y = 4$ y $y = -2x + 4$ son equivalentes.
4. La intersección y de la gráfica de $3x + 4y = -12$ es -4.
5. La intersección x de la gráfica de $3x + 4y = -12$ es -4.
6. Determinar sólo dos puntos es suficiente para graficar una línea recta.
7. La gráfica de $y = 4$ es una línea vertical.
8. La gráfica de $x = 4$ es una línea recta.

9. La gráfica de $y = -1$ tiene una intersección de y de -1.

10. La gráfica para cualquier ecuación lineal tiene una intersección de y.

Conjunto de problemas 8.2

Para los problemas 1-36, graficar cada ecuación lineal. (Objetivo 2)

1. $x + y = 2$

2. $x + y = 4$

3. $x - y = 3$

4. $x - y = 1$

5. $x - y = -4$

6. $-x + y = 5$

7. $x + 2y = 2$

8. $x + 3y = 5$

9. $3x - y = 6$

10. $2x - y = -4$

11. $3x - 2y = 6$

12. $2x - 3y = 4$

13. $x - y = 0$

14. $x + y = 0$

15. $y = 3x$

16. $y = -2x$

17. $x = -2$

18. $y = 3$

19. $y = 0$

20. $x = 0$

21. $y = -2x - 1$

22. $y = 3x - 4$

23. $y = \frac{1}{2}x + 1$

24. $y = \frac{2}{3}x - 2$

25. $y = -\frac{1}{3}x - 2$

26. $y = -\frac{3}{4}x - 1$

27. $4x + 5y = -10$

28. $3x + 5y = -9$

29. $-2x + y = -4$

30. $-3x + y = -5$

31. $3x - 4y = 7$

32. $4x - 3y = 10$

33. $y + 4x = 0$

34. $y - 5x = 0$

35. $x = 2y$

36. $x = -3y$

37. Suponga que las ganancias diarias de un puesto de helados se da en la ecuación $p = 2n - 4$, donde n representa el número de galones de helado usado diario, y p representa el número de dólares de ganancia. Etiquete el eje horizontal como n y el eje vertical como p, y grafique la ecuación $p = 2n - 4$ con valores no negativos de n.

38. El costo (c) de jugar un juego en línea por cierto tiempo (t) en horas se da por la ecuación $c = 3t + 5$. Etiquete el eje horizontal como t y el vertical como c, y grafique la ecuación con valores no negativos de t.

39. El área de una banqueta cuyo ancho mide 3 pies puede escribirse con la ecuación $A = 3l$, donde A representa el área en pies cuadrados y l representa el ancho en pies. Etiquete el eje horizontal como l y el vertical como A, y grafique la ecuación $A = 3l$ con valores no negativos para l.

40. Una tienda de alimentos en línea tiene un cargo por entrega basado en la ecuación $C = 0.30p$, donde C representa el costo en dólares y p representa el peso de las compras en libras. Etiquete el eje horizontal p y el eje vertical C, y grafique la ecuación $C = 0.30p$ para valores no negativos de p.

41. A $0.06 por kilowatt por hora, la hora $A = 0.06t$ determina la cantidad, A, de una cuenta eléctrica por t horas. Completar esta tabla de valores:

Horas, t	696	720	740	775	782
Dólares y centavos, A					

42. Suponga que un vendedor de utensilios usados determina el precio de venta de sus utensilios usando un valor agregado del 60% sobre el costo. Si s representa el precio de venta y c el costo, esta ecuación aplica:

$$s = c + 0.6c = 1.6c$$

Complete esta tabla usando la ecuación $s = 1.6c$.

Dólares, c	250	325	575	895	1095
Dólares, s					

43. **(a)** La ecuación $F = \frac{9}{5}C + 32$ convierte las temperaturas de grados Celsius a grados Farenheit. Complete esta tabla:

C	0	5	10	15	20	2 5	2 10	2 15	2 20	2 25
F										

(b) Grafique la ecuación $F = \frac{9}{5}C + 32$.

(c) Use su gráfica de la parte (b) para aproximar los valores para F cuando C = 25°, 30°, 230° y 240°.

(d) Compruebe la precisión de su lectura de la gráfica en la parte (c) usando la ecuación $F = \frac{9}{5}C + 32$.

Pensamientos en palabras

44. Su amigo tiene problemas para entender por qué la gráfica para la ecuación $y = 3$ es una línea horizontal que contiene el punto (0, 3). ¿Qué podría hacer para ayudarle?

45. ¿Cómo se sabe que la gráfica para $y = -4x$ es una línea recta que contiene al origen?

46. ¿Todas las gráficas para ecuaciones lineales tienen intersecciones x?

47. How do we know that the graphs of $x - y = 4$ y $-x + y = -4$ are the same line?

Respuestas del examen de conceptos

1. Falso **2.** Cierto **3.** Cierto **4.** Falso **5.** Cierto **6.** Cierto **7.** Falso **8.** Cierto **9.** Cierto **10.** Falso

8.3 Pendiente de una recta

OBJETIVOS

1. Hallar la pendiente de una recta entre dos puntos
2. Dada la ecuación de una recta, hallar dos puntos en la recta y usar esos puntos para determinar la pendiente
3. Graficar rectas dados un punto y la pendiente
4. Resolver problemas verbales que involucran una pendiente

En la figura 8.20, note que la línea asociada con $4x - y = 4$ está más inclinada que la línea asociada con $2x - 3y = 6$. Matemáticamente, el concepto de *pendiente* se usa para describir el "empinamiento" de las rectas. La **pendiente** de una recta es la razón del cambio vertical al cambio horizontal conforme uno se mueve desde un punto sobre una recta hacia otro punto. Esto se ilustra en la figura 8.21, con los puntos P_1 y P_2.

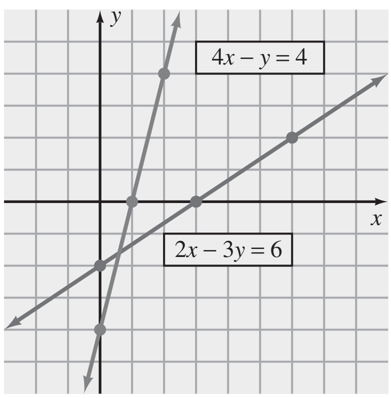


Figura 8.20

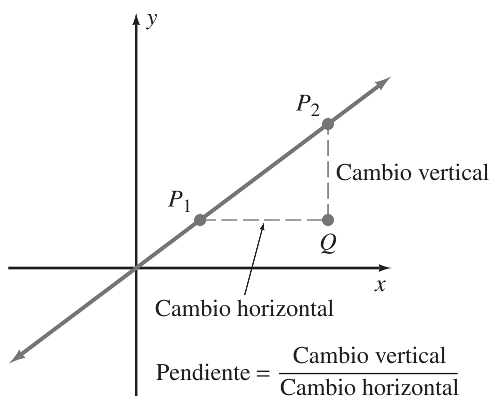


Figura 8.21

Se puede dar una definición precisa de pendiente al considerar las coordenadas de los puntos P_1, P_2 y Q en la figura 8.22. Ya que P_1 y P_2 representan cualesquiera dos puntos en la recta, se asignan las coordinadas (x_1, y_1) para P_1 y (x_2, y_2) para P_2. El punto Q tiene la misma distancia del eje y que P_2 y la misma distancia del eje x que P_1. Entonces, se asignan las coordenadas (x_2, y_1) a Q (ver la figura 8.22).

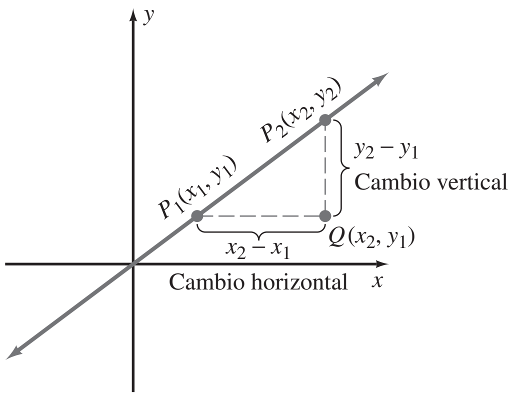


Figura 8.22

Es ahora aparente que el cambio vertical es $y_2 - y_1$ y el cambio horizontal es $x_2 - x_1$. Por ende, se tiene la siguiente definición de pendiente:

Definición 8.1

Si los puntos P_1 y P_2 con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), respectivamente, son cualesquiera dos puntos diferentes sobre una recta, entonces la pendiente de la recta (denotada por m) es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2$$

Usando la definición 8.1, fácilmente se puede determinar la pendiente de una recta si se saben las coordenadas de dos puntos en ésta.

Ejemplo de salón de clases

Hallar la pendiente de la recta determinada por cada uno de los siguientes pares de puntos:

(a) $(3, 3)$ y $(5, 6)$
(b) $(5, 3)$ y $(3, -7)$
(c) $(-6, -1)$ y $(-2, -1)$

EJEMPLO 1

Hallar la pendiente de la recta determinada por cada uno de los siguientes pares de puntos:

(a) $(2, 1)$ y $(4, 6)$ **(b)** $(3, 2)$ y $(-4, 5)$ **(c)** $(-4, -3)$ y $(-1, -3)$

Solución

(a) Sea $(2, 1)$ P_1 y $(4, 6)$ P_2 como en la figura 8.23; entonces se tiene

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 1}{4 - 2} = \frac{5}{2}$$

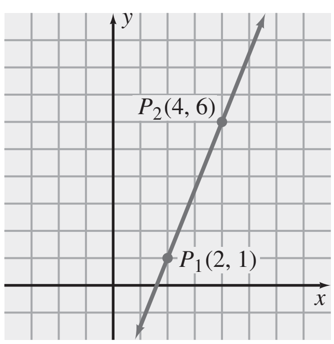


Figura 8.23

(b) Sea (3, 2) be P_1 y $(-4, 5)$ be P_2 como en la figura 8.24.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 2}{-4 - 3} = \frac{3}{-7} = -\frac{3}{7}$$

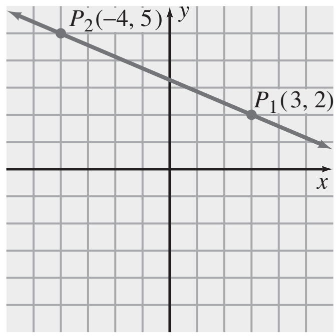


Figura 8.24

(c) Sea $(-4, 23)$ be P_1 y $(-1, -3)$ be P_2 como en la figura 8.25.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - (-3)}{-1 - (-4)} = \frac{0}{3} = 0$$

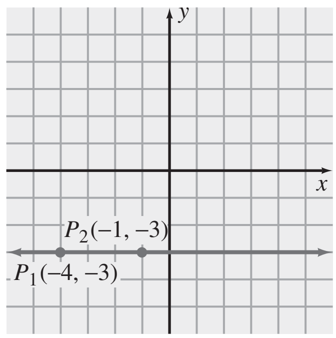


Figura 8.25

La designación de P_1 y P_2 en tales problemas es arbitrario y no afecta al valor de la pendiente. Por ejemplo, en la parte (a) del ejemplo 1, (4,6) será P_1 y (2,1) será P_2. Entonces se obtiene el mismo resultado para la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 6}{2 - 4} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$$

Las partes del ejemplo 1 representan las tres posibilidades básicas para la pendiente; esto es, la pendiente de una recta puede ser *positiva*, *negativa* o *cero*. Una recta que tenga una pendiente positiva se eleva conforme se mueve de izquierda a derecha, como en la parte (a). Una recta que tenga una pendiente negativa cae conforme se mueve de izquierda a derecha, como en la parte (b). Una recta horizontal, como en la parte (c), tiene una pendiente de cero. Finalmente, debe darse cuenta de que el **concepto de pendiente es indefinido para rectas verticales**. Esto se debe al hecho de que, para cualquier recta vertical, el cambio horizontal conforme se mueve de un punto sobre la recta a otro es cero. Por tanto, la razón $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ tendrá un denominador de cero y será indefinida. En concordancia, en la definición 8.1 se impone la restricción $x_1 \neq x_2$.

Ejemplo de salón de clases
Hallar la pendiente de la recta determinada por la ecuación $5x + 8y = 4$.

EJEMPLO 2 Hallar la pendiente de la recta determinada por la ecuación $3x + 4y = 12$.

Solución

Ya que se pueden usar cualesquiera dos puntos en una recta para determinar la pendiente de ésta, encuentre las intersecciones.

$$\text{Si } x = 0, \text{ entonces } 3(0) + 4y = 12$$
$$4y = 12$$
$$y = 3 \qquad \text{Por ende, } (0, 3) \text{ está en la recta}$$
$$\text{Si } y = 0, \text{ entonces } 3x + 4(0) = 12$$
$$3x = 12$$
$$x = 4 \qquad \text{Por ende, } (4, 0) \text{ está en la recta}$$

Usando (0, 3) como P_1 y (4, 0) como P_2 se tiene

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 3}{4 - 0} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$

Es necesario enfatizar una idea final que pertenece al concepto de pendiente. La pendiente de una recta es una **razón**, la razón del cambio vertical al cambio horizontal. Una pendiente de $\frac{3}{4}$ significa que, por cada 3 unidades de cambio vertical, debe haber un correspondiente cambio horizontal de 4 unidades. Por ende, a partir de cierto punto sobre una recta que tenga una pendiente de, podría localizar otros puntos sobre la recta del modo siguiente:

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ al moverse 6 unidades *arriba* y 8 unidades a la *derecha*

$\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$ al moverse 15 unidades *arriba* y 20 unidades a la *derecha*

$\frac{3}{4} = \frac{\frac{3}{2}}{2}$ al moverse $1\frac{1}{2}$ unidades *arriba* y 2 unidades a la *derecha*

$\frac{3}{4} = \frac{-3}{-4}$ al moverse 3 unidades *abajo* y 4 unidades a la *izquierda*

Del mismo modo, si una recta tiene una pendiente de $-\frac{5}{6}$ entonces al partir de cualquier punto sobre la recta se podrían ubicar otros puntos sobre la recta del modo siguiente:

$-\frac{5}{6} = \frac{-5}{6}$ al moverse 5 unidades *abajo* y 6 unidades a la *derecha*

$-\frac{5}{6} = \frac{5}{-6}$ al moverse 5 unidades *arriba* y 6 unidades a la *izquierda*

$-\frac{5}{6} = \frac{-10}{12}$ al moverse 10 unidades *abajo* y 12 unidades a la *derecha*

$-\frac{5}{6} = \frac{15}{-18}$ al moverse 15 unidades *arriba* y 18 unidades a la *izquierda*

Ejemplo de salón de clases
Graficar la recta que pasa a través del punto $(-1, 3)$ y tiene una pendiente de $\frac{1}{4}$.

EJEMPLO 3

Graficar la recta que pasa a través del punto $(0, -2)$ y tiene una pendiente de $\frac{1}{3}$.

Solución

Para empezar, ubique el punto $(0, -2)$. Ya que pendiente $= \dfrac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} = \dfrac{1}{3}$, se puede ubicar otro punto en la recta al comenzar del punto $(0, -2)$ al moverse 1 unidad arriba y 3 unidades a la derecha para obtener el punto $(3, -1)$. Ya que dos puntos determinan una recta, se puede dibujar la línea (figura 8.26).

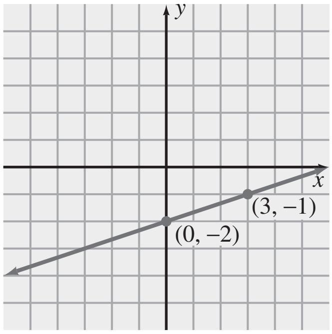


Figura 8.26

Comentario: Dado que $m = \dfrac{1}{3} = \dfrac{-1}{-3}$, puede localizar otro punto al moverse 1 unidad arriba y 3 unidades a la izquierda desde el punto $(0, -2)$.

Ejemplo de salón de clases
Graficar la recta que pasa a través del punto $(3, -2)$ y tiene una pendiente de -3.

EJEMPLO 4

Graficar la recta que pasa a través del punto $(1, 3)$ y tiene una pendiente de -2.

Solución

Para graficar la recta, ubique el punto $(1, 3)$. Se sabe que $m = -2 = \dfrac{-2}{1}$. Además, dado que la pendiente $= \dfrac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} = \dfrac{-2}{1}$, se puede ubicar otro punto en la recta comenzando del punto $(1, 3)$ y al moverse 2 unidades abajo y 1 unidad a la derecha para obtener el punto $(2, 1)$. Dado que dos puntos determinan una recta, se puede dibujar la línea (figura 8.27).

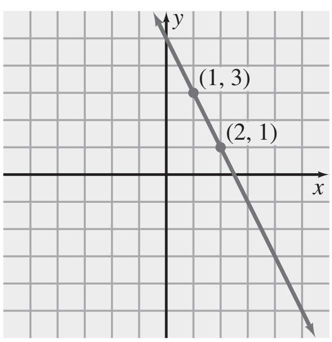


Figura 8.27

Comentario: Dado que $m = -2 = \dfrac{-2}{1} = \dfrac{2}{-1}$ puede localizar otro punto al moverse 2 unidades arriba y una unidad a la izquierda desde el punto $(1, 3)$.

Aplicaciones de la pendiente

El concepto de pendiente tiene muchas aplicaciones en el mundo real, aun cuando la palabra pendiente no se use con frecuencia. Por ejemplo, en la figura 8.28 se dice que la autopista tiene un peralte de 17%. Esto significa que, para cada distancia horizontal de 100 pies, la autopista se eleva o cae 17 pies. En otras palabras, la pendiente de la autopista es $\frac{17}{100}$.

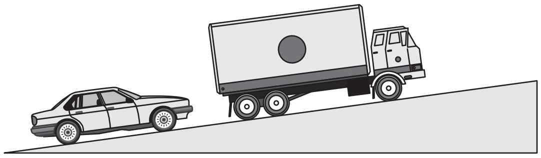


Figura 8.28

EJEMPLO 5 Aplique su habilidad

Cierta autopista tiene un peralte de 3%. ¿Cuántos pies se eleva en una distancia horizontal de 1 milla?

Solución

Un peralte de 3% significa una pendiente de $\frac{3}{100}$. Por tanto, si y representa la distancia vertical desconocida y se usa el hecho de que 1 milla = 5280 pies, se puede establecer y resolver la siguiente proporción.

$$\frac{3}{100} = \frac{y}{5280}$$
$$100y = 3(5280) = 15{,}840$$
$$y = 158.4$$

La autopista se eleva 158.4 pies en una distancia horizontal de 1 milla.

Peter Gridley/Creatas/Jupiter Images

Ejemplo de salón de clases
Cierta autopista tiene un peralte de 4%. ¿Cuántos pies se eleva en una distancia de 1 milla?

Un techador, cuando realiza la estimación para sustituir un techo, se preocupa no sólo por el área total a cubrir, sino también por la caída del techo. (Los contratistas no definen caída como la definición matemática de pendiente, pero ambos conceptos se refieren a "empinamiento".) En la figura 8.29, los dos techos pueden requerir la misma cantidad de tejas, pero el techo de la izquierda tardará más tiempo en completarse porque la caída es tan grande que se requerirá andamiaje.

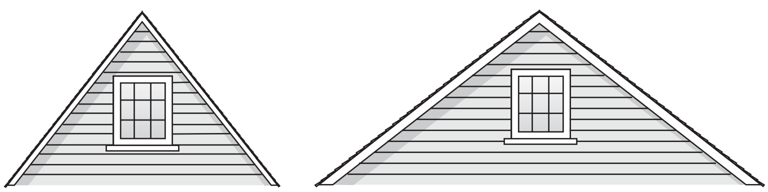


Figura 8.29

El concepto de pendiente también se usa en la construcción de tramos de escaleras. En español usualmente se usan los términos contrahuella y huella, y la inclinación (pendiente) de las escaleras se puede expresar como la razón de contrahuella a huella. En la figura 8.30, las escaleras a la izquierda, donde la razón de contrahuella a carrera es $\frac{10}{11}$, son más inclinadas que las escaleras a la derecha, que tiene una razón de $\frac{7}{11}$.

El concepto de pendiente se usa en la mayoría de las situaciones donde se implica un plano inclinado. Las camas de hospital están articuladas de modo que tanto el extremo de la cabeza como el extremo de los pies se elevan o bajan; esto es, la pendiente de cualquier extremo de la cama se puede cambiar. Del mismo modo, las caminadoras están diseñadas de modo que la inclinación (pendiente) de la plataforma se pueda ajustar.

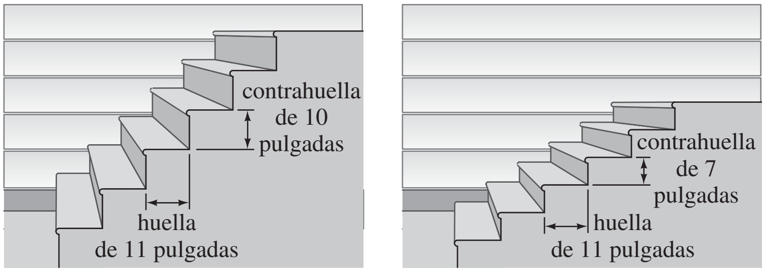


Figura 8.30

Examen de conceptos 8.3

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. El concepto de pendiente de una recta habla de la inclinación de una recta.
2. La pendiente de una recta es la razón entre el cambio horizontal y el cambio vertical al moverse de un punto a otro en la recta.
3. Una recta que tiene una pendiente negativa cae al moverse de izquierda a derecha.
4. La pendiente de una recta vertical es 0.
5. La pendiente de una recta horizontal es 0.
6. Una recta no puede tener una pendiente de 0.
7. Una pendiente de $\frac{-5}{2}$ es lo mismo que una pendiente de $-\frac{5}{-2}$.
8. Una pendiente de 5 significa que, por cada unidad de cambio horizontal, hay 5 unidades correspondientes de cambio vertical.
9. La pendiente de una recta determinada por la ecuación $-x - 2y = 4$ es $-\frac{1}{2}$.
10. La pendiente de una recta determinada por los puntos $(-1, 4)$ y $(2, -1)$ es $\frac{5}{3}$.

Conjunto de problemas 8.3

Para los problemas 1-20, encontrar la pendiente de la recta determinada por cada par de puntos. (Objetivo 1)

1. $(7, 5), (3, 2)$
2. $(9, 10), (6, 2)$
3. $(-1, 3), (-6, -4)$
4. $(-2, 5), (-7, -1)$
5. $(2, 8), (7, 2)$
6. $(3, 9), (8, 4)$
7. $(-2, 5), (1, -5)$
8. $(-3, 4), (2, -6)$
9. $(4, -1), (-4, -7)$
10. $(5, -3), (-5, -9)$
11. $(3, -4), (2, -4)$
12. $(-3, -6), (5, -6)$
13. $(-6, -1), (-2, -7)$
14. $(-8, -3), (-2, -11)$
15. $(-2, 4), (-2, -6)$
16. $(-4, -5), (-4, 9)$
17. $(-1, 10), (-9, 2)$
18. $(-2, 12), (-10, 2)$
19. $(a, b), (c, d)$
20. $(a, 0), (0, b)$

21. Encontrar y si la recta pasa a través de los puntos (7, 8) y (2, y) tiene una pendiente de $\frac{4}{5}$.

22. Encontrar y si la recta pasa a través de los puntos (12, 14) y (3, y) tiene una pendiente de $\frac{4}{3}$.

23. Encontrar x si la recta pasa a través de los puntos $(-2, -4)$ y $(x, 2)$ tiene una pendiente de $-\frac{3}{2}$.

24. Encontrar x si la recta pasa a través de los puntos $(6, -4)$ y $(x, 6)$ tiene una pendiente de $-\frac{5}{4}$.

Para los problemas 25-32, se le da un punto en la recta y la pendiente de la misma. Hallar las coordenadas de otros tres puntos en la recta.

25. $(3, 2)$, $m = \frac{2}{3}$

26. $(4, 1)$, $m = \frac{5}{6}$

27. $(-2, -4)$, $m = \frac{1}{2}$

28. $(-6, -2)$, $m = \frac{2}{5}$

29. $(-3, 4)$, $m = -\frac{3}{4}$

30. $(-2, 6)$, $m = -\frac{3}{7}$

31. $(4, -5)$, $m = -2$

32. $(6, -2)$, $m = 4$

Para los problemas 33-40, dibujar la recta determinada por cada par de puntos y decidir si la pendiente de la recta es positiva, negativa o cero.

33. $(2, 8)$, $(7, 1)$

34. $(1, -2)$, $(7, -8)$

35. $(-1, 3)$, $(-6, -2)$

36. $(7, 3)$, $(4, -6)$

37. $(-2, 4)$, $(6, 4)$

38. $(-3, -4)$, $(5, -4)$

39. $(-3, 5)$, $(2, -7)$

40. $(-1, -1)$, $(1, -9)$

Para los problemas 41-48, graficar la línea que pasa a través del punto dado y tiene la pendiente dada. **(Objetivo 3)**

41. $(3, 1)$, $m = \frac{2}{3}$

42. $(-1, 0)$, $m = \frac{3}{4}$

43. $(-2, 3)$, $m = -1$

44. $(1, -4)$, $m = -3$

45. $(0, 5)$, $m = -\frac{1}{4}$

46. $(-3, 4)$, $m = -\frac{3}{2}$

47. $(2, -2)$, $m = \frac{3}{2}$

48. $(3, -4)$, $m = \frac{5}{2}$

Para los problemas 49-68, hallar las coordenadas de dos puntos en la recta dada, después use esas coordenadas para encontrar la pendiente de la recta. **(Objetivo 2)**

49. $3x + 2y = 6$

50. $4x + 3y = 12$

51. $5x - 4y = 20$

52. $7x - 3y = 21$

53. $x + 5y = 6$

54. $2x + y = 4$

55. $2x - y = -7$

56. $x - 4y = -6$

57. $y = 3$

58. $x = 6$

59. $-2x + 5y = 9$

60. $-3x - 7y = 10$

61. $6x - 5y = -30$

62. $7x - 6y = -42$

63. $y = -3x - 1$

64. $y = -2x + 5$

65. $y = 4x$

66. $y = 6x$

67. $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$

68. $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{5}$

Para los problemas 69-73, resolver los problemas verbales que involucran pendiente. **(Objetivo 4)**

69. Suponga que una autopista se eleva una distancia de 135 pies en una distancia horizontal de 2640 pies. Exprese el peralte de la autopista a la décima de porcentaje más cercana.

70. El peralte de una autopista en una colina es 27%. ¿Cuánto cambio en la distancia horizontal hay si la altura de la colina es 550 pies? Exprese la respuesta en la medida en pies más cercana.

71. Si la razón de contrahuella a huella será $\frac{3}{5}$ para algunos escalones y la contrahuella tiene 19 centímetros, encuentre la huella al centímetro más cercano.

72. Si la razón de contrahuella a huella será $\frac{2}{3}$ para algunos escalones, y la huella es de 28 centímetros, encuentre la contrahuella al centímetro más cercano.

73. Suponga que un mandato municipal requiere una "caída" de $\frac{1}{4}$% para una tubería de desagüe desde la casa hasta la tubería principal en la calle. ¿Cuánta caída vertical debe haber para una distancia horizontal de 45 pies? Exprese la respuesta a la décima de pie más cercana.

Pensamientos en palabras

74. ¿Cómo explicaría el concepto de pendiente a alguien que faltó a clase el día cuando se estudió?

75. Si una recta tiene una pendiente de $\frac{2}{3}$ y otra recta tiene una pendiente de 2, ¿cuál recta es más inclinada? Explique su respuesta.

76. ¿Por qué se dice que la pendiente de la recta de una línea vertical es indefinida?

77. Suponga que una recta tiene una pendiente de $\frac{3}{4}$ y contiene el punto (5, 2). ¿Los puntos $(-3, -4)$ y (14, 9) también están sobre la recta? Explique su respuesta.

Respuestas del examen de conceptos

1. Cierto **2.** Falso **3.** Cierto **4.** Falso **5.** Cierto **6.** Falso **7.** Falso **8.** Cierto **9.** Cierto **10.** Falso

8.4 Escribir la ecuación de rectas

OBJETIVOS

1. Hallar la ecuación de una recta cuando se da
   a. la pendiente y un punto
   b. dos puntos en la recta
   c. un punto en la recta y la ecuación de una línea paralela o perpendicular a ésta
2. Familiarizarse con la forma punto-pendiente y la forma pendiente-ordenada de la ecuación de una línea recta
3. Conocer la relación entre rectas paralelas y perpendiculares

Existen dos tipos de problemas a resolver en geometría coordinada:

1. Dada una ecuación algebraica, encontrar su gráfica geométrica.
2. Dado un conjunto de condiciones que pertenecen a una figura geométrica, encontrar su ecuación algebraica.

Los problemas del tipo 1 fueron la principal preocupación hasta el momento en este capítulo. Ahora se analizarán algunos problemas del tipo 2 que tratan específicamente con líneas rectas. Dados ciertos hechos acerca de una recta es necesario determinar su ecuación algebraica.

Ejemplo de salón de clases
Encontrar la ecuación de la recta que tiene pendiente de $\frac{2}{3}$ y contiene el punto $(-3, 2)$.

EJEMPLO 1

Encontrar la ecuación de la recta que tiene pendiente de $\frac{3}{4}$ y contiene el punto (1, 2).

Solución

Primero dibuje la recta como se indica en la figura 8.31. Ya que la pendiente es $\frac{3}{4}$, se puede encontrar un segundo punto al moverse 3 unidades arriba y 4 unidades a la derecha del punto dado (1, 2). (El punto (5, 5) ayuda a dibujar la recta; no se usará para analizar el problema). Ahora elija un punto (x, y) que represente cualquier punto en la recta distinta al punto dado (1, 2). La pendiente determinada por (1, 2) y (x, y) es $\frac{3}{4}$.

Por ende

$$\frac{y-2}{x-1} = \frac{3}{4}$$
$$3(x-1) = 4(y-2)$$
$$3x - 3 = 4y - 8$$
$$3x - 4y = -5$$

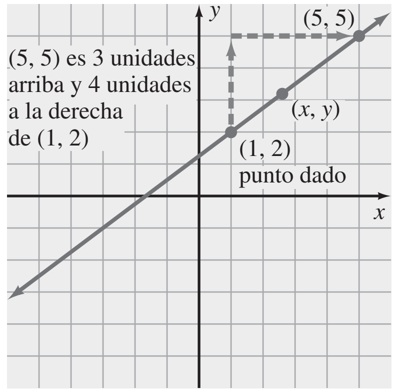


Figura 8.31

Ejemplo de salón de clases
Encontrar la ecuación de la recta que contiene $(-1, 4)$ y $(3, -2)$.

EJEMPLO 2 Encontrar la ecuación de la recta que contiene $(3, 4)$ y $(-2, 5)$.

Solución

Primero dibuje la recta determinada por los puntos dados en la figura 8.32. Ya que conoce dos puntos puede encontrar la pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-4}{-2-3} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$$

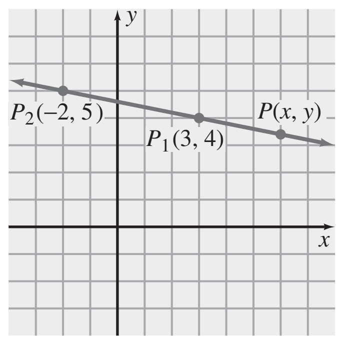


Figura 8.32

Ahora puede usar el mismo procedimiento que en el ejemplo 1. Forme una ecuación mediante un punto variable (x, y), uno de los dos puntos dados (se eligió $P_1(3, 4)$) y la pendiente de $-\frac{1}{5}$.

$$\frac{y-4}{x-3} = \frac{1}{-5} \qquad -\frac{1}{5} = \frac{1}{-5}$$
$$x - 3 = -5y + 20$$
$$x + 5y = 23$$

Ejemplo de salón de clases
Encontrar la ecuación de la línea que tiene una pendiente de $-\frac{2}{5}$ y una intersección y de -3.

EJEMPLO 3

Encontrar la ecuación de la línea que tiene una pendiente de $\frac{1}{4}$ y una intersección de 2.

Solución

Una intersección y de 2 significa que el punto (0, 2) está en la recta. Ya que la pendiente es $\frac{1}{4}$, se puede encontrar otro punto al moverse una unidad arriba y 4 unidades a la derecha de (0, 2). Se obtiene la recta dibujada en la figura 8.33. Se eligió el punto variable (x, y) y se procedió como en ejemplos anteriores.

$$\frac{y-2}{x-0} = \frac{1}{4}$$
$$x = 4y - 8$$
$$x - 4y = -8$$

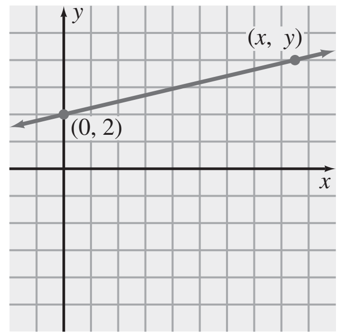


Figura 8.33

Tal vez sería útil detenerse un momento y estudiar nuevamente los ejemplos 1, 2 y 3. Observe que se usó el mismo método básico en las tres situaciones. Se elige un punto variable (x, y) y se le usa para determinar la ecuación que satisfaga las condiciones dadas en el problema. El método que se tomó en los ejemplos anteriores se puede generalizar para producir algunas formas especiales de ecuaciones de líneas rectas.

Forma punto-pendiente

Ejemplo de salón de clases
Encuentre la ecuación de la recta que tiene una pendiente de 2 y contiene el punto $(-3, 2)$. Exprese la ecuación en forma punto-pendiente.

EJEMPLO 4

Encuentre la ecuación de la recta que tiene una pendiente de m y contiene el punto (x_1, y_1).

Solución

Elija (x, y) para representar cualquier otro punto sobre la recta de la figura 8.34. La pendiente de la recta está dada por

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

de donde

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

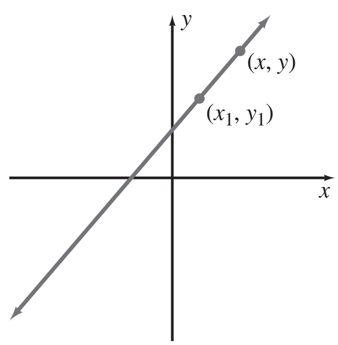


Figura 8.34

A la ecuación

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

se le conoce como **forma punto-pendiente** de la ecuación de una línea recta. En lugar del método que se utilizó en el ejemplo 1 podría usar la forma punto-pendiente para escribir la ecuación de una recta con una pendiente dada que contenga un punto dado, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo de salón de clases
Escribir la ecuación de la recta que tiene la pendiente $\frac{5}{6}$ y contiene el punto $(3, -4)$.

EJEMPLO 5

Escribir la ecuación de la línea que tiene una pendiente de $\frac{3}{5}$ y contiene el punto $(2, -4)$.

Solución

Sustituir $\frac{3}{5}$ por m y $(2, -4)$ por (x_1, y_1) en la forma punto-pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - (-4) = \frac{3}{5}(x - 2)$$
$$y + 4 = \frac{3}{5}(x - 2)$$
$$5(y + 4) = 3(x - 2) \qquad \text{Multiplicar ambos lados por el inverso multiplicativo de } \frac{1}{5}\text{, es decir 5}$$
$$5y + 20 = 3x - 6$$
$$26 = 3x - 5y$$

Forma pendiente-ordenada al origen

Ahora considere la ecuación de una línea que tiene una pendiente de m y una ordenada al origen de b (ver la figura 8.35). Una ordenada al origen de b significa que la recta contiene el punto $(0, b)$; por tanto, puede usar la forma punto-pendiente del modo siguiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - b = m(x - 0) \qquad y_1 = b \text{ y } x_1 = 0$$
$$y - b = mx$$
$$y = mx + b$$

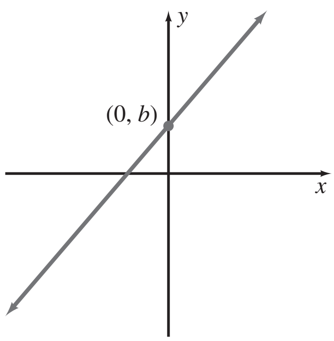


Figura 8.35

A la ecuación

$$y = mx + b$$

se le conoce como **forma pendiente-ordenada** al origen de la ecuación de una línea recta. Se le usa para tres propósitos principales, como ilustran los siguientes tres ejemplos.

Ejemplo de salón de clases
Encontrar la ecuación de la recta que tiene una pendiente de $-\frac{2}{5}$ y una ordenada al origen -3.

EJEMPLO 6

Encontrar la ecuación de la recta que tiene una pendiente de $\frac{1}{4}$ y una ordenada al origen de 2.

Solución

Éste es un nuevo enunciado del ejemplo 3, pero esta vez se usará la forma pendiente-ordenada al origen ($y = mx + b$) de una línea para escribir su ecuación. Del planteamiento del problema se sabe que $m = \frac{1}{4}$ y $b = 2$. Entonces, al sustituir estos valores para m y b en $y = mx + b$, se obtiene:

$$\begin{aligned} y &= mx + b \\ y &= \frac{1}{4}x + 2 \\ 4y &= x + 8 \\ x - 4y &= -8 \end{aligned}$$

Mismo resultado que en el ejemplo 3

Comentario: Es aceptable dejar las respuestas en la forma de pendiente-ordenada. No se hizo eso en el ejemplo 6 porque se quería mostrar que era el mismo resultado que en el ejemplo 3.

Ejemplo de salón de clases
Encontrar la pendiente de la recta con la ecuación $4x - 10y = 5$.

EJEMPLO 7 Encontrar la pendiente de la recta con la ecuación $2x + 3y = 4$.

Solución

Se puede resolver la ecuación para y en términos de x y luego compararla con la forma pendiente-ordenada al origen para determinar su pendiente.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ 3y &= -2x + 4 \\ y &= -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Compare este resultado con $y = mx + b$ y verá que la pendiente de la recta es $-\frac{2}{3}$. Además, la ordenada es $\frac{4}{3}$.

Ejemplo de salón de clases
Graficar recta determinada por la ecuación $y = \frac{3}{4}x + 2$.

EJEMPLO 8 Graficar la recta determinada por la ecuación $y = \frac{2}{3}x - 1$.

Solución

Al comparar la ecuación dada con la forma general pendiente-ordenada al origen, se ve que la pendiente de la recta es $\frac{2}{3}$ y la ordenada al origen es -1. Puesto que la ordenada al origen es -1, puede graficar el punto $(0, -1)$. Entonces, dado que la pendiente es $\frac{2}{3}$, muévase 3 unidades a la derecha y 2 unidades arriba desde $(0, -1)$ para ubicar el punto $(3, 1)$. Los dos puntos $(0, -1)$ y $(3, 1)$ determinan la recta en la figura 8.36.

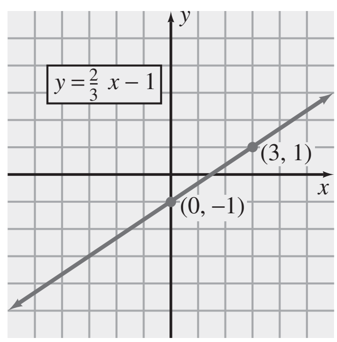


Figura 8.36

En general,

Si la ecuación de una recta no vertical se escribe en forma pendiente-ordenada al origen, el coeficiente de x es la pendiente de la recta, y el término constante es la ordenada al origen.

(Recuerde que el concepto de pendiente no se define para una recta vertical.) Ahora considere algunos ejemplos.

Ejemplo de salón de clases
Encontrar la pendiente y la ordenada al origen de cada una de las siguientes rectas y graficarlas:
(a) $12x + 4y = 8$
(b) $-y = -\frac{1}{5}x + 1$
(c) $x = -3$

EJEMPLO 9

Encontrar la pendiente y la ordenada al origen de cada una de las siguientes rectas y graficarlas:

(a) $5x - 4y = 12$ **(b)** $-y = 3x - 4$ **(c)** $y = 2$

Solución

(a) Se cambia $5x - 4y = 12$ a la forma pendiente-ordenada al origen para obtener

$$5x - 4y = 12$$
$$-4y = -5x + 12$$
$$4y = 5x - 12$$
$$y = \frac{5}{4}x - 3$$

La pendiente de la recta es $\frac{5}{4}$ (el coeficiente de x) y la intersección y es -3 (el término constante). Para graficar la recta, se ubica la ordenada al origen, -3. Luego, debido a que la pendiente es $\frac{5}{4}$, se puede determinar un segundo punto, (4, 2), al moverse 5 unidades arriba y 4 unidades a la derecha de la ordenada al origen. La gráfica se muestra en la figura 8.37.

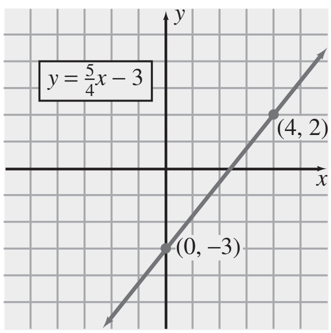


Figura 8.37

(b) Se multiplican ambos lados de la ecuación dada por -1 para cambiarla a forma de pendiente-ordenada al origen:

$$-y = 3x - 4$$
$$y = -3x + 4$$

La pendiente de la recta es -3 y la ordenada al origen es 4. Para graficar la recta, se ubica la ordenada al origen, 4. Luego, debido a que la pendiente es $-3 = \frac{-3}{1}$, se puede encontrar un segundo punto, (1, 1), al moverse 3 unidades abajo 1 unidad a la derecha de la intersección y. La gráfica se muestra en la figura 8.38.

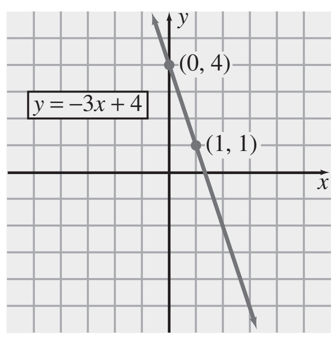


Figura 8.38

(c) Se puede escribir la ecuación $y = 2$ como

$$y = 0(x) + 2$$

La pendiente de una recta es 0, y la ordenada al origen es 2. Para graficar la recta, se ubica la ordenada al origen, 2. Luego, debido a que una recta con pendiente de 0 es horizontal, se dibuja una línea horizontal a través de la intersección y. La gráfica se muestra en la figura 8.39.

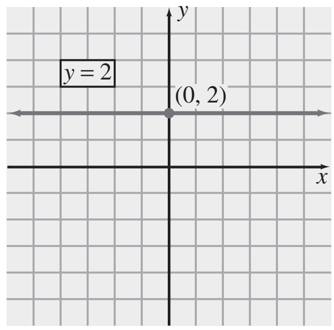


Figura 8.39

Rectas paralelas y perpendiculares

Es posible usar dos importantes relaciones entre rectas y sus pendientes para resolver ciertos tipos de problemas. Se puede demostrar que las rectas paralelas no verticales tienen la misma pendiente y que dos rectas no verticales son perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1. (Los detalles para comprobar estos hechos se dejan para otro curso.) En otras palabras, si dos rectas tienen pendientes m_1 y m_2, respectivamente, entonces

1. Las dos rectas son paralelas si y sólo si $m_1 = m_2$.
2. Las dos rectas son perpendiculares si y sólo si $(m_1)(m_2) = -1$.

Los siguientes ejemplos demuestran el uso de estas propiedades.

Ejemplo de salón de clases

(a) Verificar que las gráficas de $2x - 5y = 7$ y $6x - 15y = 10$ sean rectas paralelas.

(b) Verificar que las gráficas de $3x + 7y = 4$ y $14x - 6y = 19$ sean rectas perpendiculares.

EJEMPLO 10

(a) Verificar que las gráficas de $2x + 3y = 7$ y $4x + 6y = 11$ sean rectas paralelas.

(b) Verificar que las gráficas de $8x - 12y = 3$ y $3x + 2y = 2$ sean rectas perpendiculares.

Solución

(a) Cambie cada ecuación a forma pendiente-ordenada al origen.

$$2x + 3y = 7 \quad \rightarrow \quad 3y = -2x + 7$$
$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$$
$$4x + 6y = 11 \quad \rightarrow \quad 6y = -4x + 11$$
$$y = -\frac{4}{6}x + \frac{11}{6}$$
$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{6}$$

Ambas rectas tienen una pendiente de $-\frac{2}{3}$, pero tienen diferentes ordenadas al origen. Por tanto, las dos rectas son paralelas.

(b) Al resolver cada ecuación para y en términos de x se obtiene

$$8x - 12y = 3 \quad \rightarrow \quad -12y = -8x + 3$$
$$y = \frac{8}{12}x - \frac{3}{12}$$
$$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}$$

$$3x + 2y = 2 \quad \rightarrow \quad 2y = -3x + 2$$
$$y = -\frac{3}{2}x + 1$$

Puesto que $\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = -1$ (el producto de dos pendientes es -1), las rectas son perpendiculares.

Comentario: El enunciado "el producto de dos pendientes es -1" es lo mismo decir que las dos pendientes son recíprocos negativos mutuos; esto es, $m_1 = -\frac{1}{m_2}$.

Ejemplo de salón de clases
Encontrar la ecuación de la recta que contiene el punto $(-2, 2)$ y es paralela a la recta determinada por $3x - y = 9$.

EJEMPLO 11

Encontrar la ecuación de la recta que contiene el punto (1, 4) y es paralela a la recta determinada por $x + 2y = 5$.

Solución

Primero dibuje una figura para auxiliarse en el análisis del problema (figura 8.40). Puesto que la recta a través de (1, 4) será paralela a la recta determinada por $x + 2y = 5$ debe tener la misma pendiente. Encuentre la pendiente al cambiar $x + 2y = 5$ a la forma pendiente-ordenada al origen.

$$x + 2y = 5$$
$$2y = -x + 5$$
$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

La pendiente de ambas rectas es $-\frac{1}{2}$. Ahora puede elegir un punto variable (x, y) sobre la recta a través de (1, 4) y proceder como en ejemplos anteriores.

$$\frac{y - 4}{x - 1} = \frac{1}{-2}$$
$$1(x - 1) = -2(y - 4)$$
$$x - 1 = -2y + 8$$
$$x + 2y = 9$$

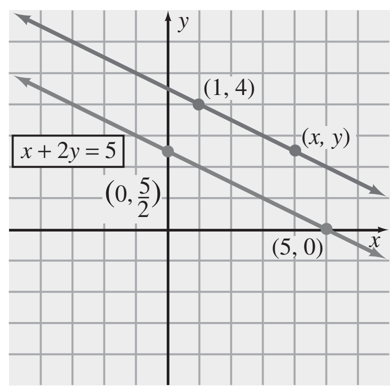


Figura 8.40

Ejemplo de salón de clases
Encontrar la ecuación de la recta que contiene el punto (7, 5) y es perpendicular a la recta determinada por $4x - 3y = 6$.

EJEMPLO 12

Encontrar la ecuación de la recta que contiene el punto $(-1, -2)$ y es perpendicular a la recta determinada por $2x - y = 6$.

Solución

Primero dibuje una figura para auxiliarse en el análisis del problema (figura 8.41). Puesto que la recta a través de $(1, -2)$ será perpendicular a la recta determinada por $2x - y = 6$, su pendiente debe ser el recíproco negativo de la pendiente de $2x - y = 6$. Encuentre la pendiente de $2x - y = 6$ al cambiarla a la forma pendiente-ordenada al origen.

$$2x - y = 6$$

$$-y = -2x + 6$$

$$y = 2x - 6 \qquad \text{La pendiente es 2}$$

La pendiente de la recta deseada es $-\frac{1}{2}$ (el recíproco negativo de 2) y se puede proceder como antes al usar un punto variable (x, y).

$$\frac{y + 2}{x + 1} = \frac{1}{-2}$$

$$1(x + 1) = -2(y + 2)$$

$$x + 1 = -2y - 4$$

$$x + 2y = -5$$

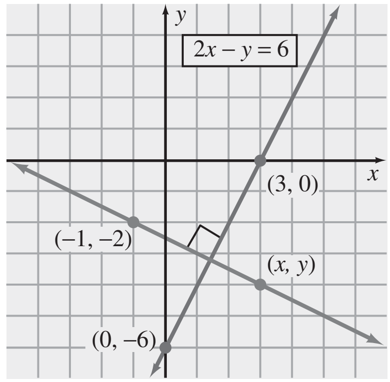


Figura 8.41

Dos formas de ecuaciones de líneas rectas se usan ampliamente. Son la **forma estándar** y la **forma pendiente-ordenada al origen** y se les describe del modo siguiente.

Forma estándar $Ax + By = C$, donde B y C son enteros, y A es un entero no negativo (A y B no son cero).

Forma pendiente-ordenada al origen $y = mx + b$, donde m es un número real que representa la pendiente y b es un número real que representa la ordenada al origen.

Examen de conceptos 8.4

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. Si dos rectas diferentes tienen la misma pendiente, entonces las líneas son paralelas.

2. Si las pendientes de dos rectas son recíprocas, entonces las rectas son perpendiculares.

3. En la forma estándar de la ecuación de una recta $Ax + By = C$, A puede ser un número racional en forma fraccionaria.

4. En la forma pendiente-ordenada al origen de la ecuación de una recta, $y = mx + b$, m es la pendiente de la recta.

5. En la forma estándar de la ecuación de una recta $Ax + By = C$, A es la pendiente.

6. La pendiente de la recta determinada por la ecuación $3x - 2y = -4$ es $\frac{3}{2}$.

7. El concepto de pendiente no se define para la recta $y = 2$.

8. El concepto de pendiente no se define para la recta $x = 2$.

9. Las rectas determinadas por las ecuaciones $x - 3y = 4$ y $2x - 6y = 11$ son rectas paralelas.

10. Las rectas determinadas por las ecuaciones $x - 3y = 4$ y $x + 3y = 4$ son rectas perpendiculares.

Conjunto de problemas 8.4

Para los problemas 1-12, encontrar la ecuación de la recta que contiene el punto dado y tiene la pendiente dada. Expresar las ecuaciones en la forma $Ax + By = C$, donde A, B y C son enteros. **(Objetivo 1a)**

1. $(2, 3)$, $m = \frac{2}{3}$

2. $(5, 2)$, $m = \frac{3}{7}$

3. $(-3, -5)$, $m = \frac{1}{2}$

4. $(5, -6)$, $m = \frac{3}{5}$

5. $(-4, 8)$, $m = -\frac{1}{3}$

6. $(-2, -4)$, $m = -\frac{5}{6}$

7. $(3, -7)$, $m = 0$

8. $(-3, 9)$, $m = 0$

9. $(0, 0)$, $m = -\frac{4}{9}$

10. $(0, 0)$, $m = \frac{5}{11}$

11. $(-6, -2)$, $m = 3$

12. $(2, -10)$, $m = -2$

Para los problemas 13-22, encontrar la ecuación de la recta que contiene los dos puntos dados. Expresar las ecuaciones en la forma $Ax + By = C$, donde A, B y C son enteros. **(Objetivo 1b)**

13. $(2, 3)$ y $(7, 10)$

14. $(1, 4)$ y $(9, 10)$

15. $(3, -2)$ y $(-1, 4)$

16. $(-2, 8)$ y $(4, -2)$

17. $(-1, -2)$ y $(-6, -7)$

18. $(-8, -7)$ y $(-3, -1)$

19. $(0, 0)$ y $(-3, -5)$

20. $(5, -8)$ y $(0, 0)$

21. $(0, 4)$ y $(7, 0)$

22. $(-2, 0)$ y $(0, -9)$

Para los problemas 23-32, encontrar la ecuación de la recta con la pendiente y la ordenada al origen dadas. Dejar las respuestas en la forma pendiente-ordenada al origen. **(Objetivo 1a)**

23. $m = \frac{3}{5}$ y $b = 2$

24. $m = \frac{5}{9}$ y $b = 4$

25. $m = 2$ y $b = -1$

26. $m = 4$ y $b = -3$

27. $m = -\frac{1}{6}$ y $b = -4$

28. $m = -\frac{5}{7}$ y $b = -1$

29. $m = -1$ y $b = \frac{5}{2}$

30. $m = -2$ y $b = \frac{7}{3}$

31. $m = -\frac{5}{9}$ y $b = -\frac{1}{2}$

32. $m = -\frac{7}{12}$ y $b = -\frac{2}{3}$

Para los problemas 33-44, determinar la pendiente y la ordenada al origen de la recta representada por la ecuación dada y graficarla. **(Objetivo 2)**

33. $y = -2x - 5$

34. $y = \frac{2}{3}x + 4$

35. $3x - 5y = 15$

36. $7x + 5y = 35$

37. $-4x + 9y = 18$

38. $-6x + 7y = -14$

39. $-y = -\frac{3}{4}x + 4$

40. $5x - 2y = 0$

41. $-2x - 11y = 11$

42. $-y = \frac{2}{3}x + \frac{11}{2}$

43. $9x + 7y = 0$

44. $-5x - 13y = 26$

Para los problemas 45-60, escribir la ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas. Expresar las ecuaciones finales en forma estándar. **(Objetivos 1a, 1c, y 3)**

45. Abscisa al origen de 2 y ordenada al origen de -4

46. Abscisa al origen de -1 y ordenada al origen de -3.

47. Abscisa al origen de -3 y ordenada al origen de $-\frac{5}{8}$.

48. Abscisa al origen de 5 y pendiente de $-\frac{3}{10}$.

49. Contiene el punto $(2, -4)$ y es paralela al eje y.

50. Contiene el punto $(-3, -7)$ y es paralela al eje x.

51. Contiene el punto $(5, 6)$ y es perpendicular al eje y.

52. Contiene el punto $(-4, 7)$ y es perpendicular al eje x.

53. Contiene el punto $(1, 3)$ y es paralela a la recta $x + 5y = 9$.

54. Contiene el punto $(-1, 4)$ y es paralela a la recta $x - 2y = 6$.

55. Contiene el origen y es paralela a la recta $4x - 7y = 3$.

56. Contiene el origen y es paralela a la recta $-2x - 9y = 4$.

57. Contiene el punto $(-1, 3)$ y es perpendicular a la recta $2x - y = 4$.

58. Contiene el punto $(-2, -3)$ y es perpendicular a la recta $x + 4y = 6$.

59. Contiene el origen y es perpendicular a la recta $-2x + 3y = 8$.

60. Contiene el origen y es perpendicular a la recta $y = -5x$.

Pensamientos en palabras

61. Explicar la importancia de la forma pendiente-ordenada al origen $(y = mx + b)$ de la ecuación de una recta.

62. ¿Qué significa cuando se dice que dos puntos "determinan" una recta?

63. ¿Cómo describiría la geometría coordinada a un grupo de estudiantes de álgebra elemental?

64. ¿Cómo puede determinar, por inspección, que $y = 2x - 4$ y $y = -3x - 1$ no son rectas paralelas?

Respuestas del examen de conceptos

1. Cierto **2.** Falso **3.** Falso **4.** Cierto **5.** Falso **6.** Cierto **7.** Falso **8.** Cierto **9.** Cierto **10.** Falso

8.5 Sistemas de dos ecuaciones lineales

OBJETIVOS

1. Resolver sistemas lineales con dos ecuaciones graficando
2. Resolver sistemas lineales con dos ecuaciones con el método de sustitución
3. Reconocer sistemas consistentes e inconsistentes de ecuaciones
4. Reconocer ecuaciones dependientes
5. Usar un sistema de ecuaciones para resolver problemas verbales

Suponga que se busca graficar $x - 2y = 4$ y $x + 2y = 8$ en el mismo conjunto de ejes, como se muestra en la figura 8.42. El par ordenado $(6, 1)$, el cual está asociado con el punto de intersección de las dos líneas, satisface ambas ecuaciones. Es decir, $(6, 1)$ es la solución para $x - 2y = 4$ y $x + 2y = 8$.
Para comprobar esto, se puede sustituir 6 por x y 1 por y en ambas ecuaciones.

$x - 2y = 4$ se vuelve $6 - 2(1) = 4$ Un enunciado verdadero

$x + 2y = 8$ se vuelve $6 + 2(1) = 8$ Un enunciado verdadero

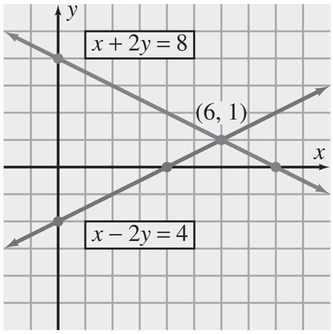


Figura 8.42

Entonces, se dice que $\{(6, 1)\}$ es el conjunto solución del sistema

$$\begin{pmatrix} x - 2y = 4 \\ x + 2y = 8 \end{pmatrix}$$

Dos ecuaciones lineales con dos variables consideradas en conjunto forman un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables**, como se ilustra mediante los siguientes ejemplos:

$$\begin{pmatrix} x - 2y = 4 \\ x + 2y = 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5x - 3y = 9 \\ 3x + 7y = 12 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4x - y = 5 \\ 2x + y = 9 \\ 7x - 2y = 13 \end{pmatrix}$$

Resolver tal sistema significa encontrar todos los pares ordenados que satisfacen simultáneamente ambas ecuaciones en el sistema. Hay varias técnicas para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Se usarán tres en este capítulo: dos métodos se presentarán en esta sección y el tercero se presentará en la sección 8.6.

Para resolver un sistema lineal de ecuaciones por medio de la graficación, se procede como en la discusión inicial de esta sección. Se grafican las ecuaciones en el mismo conjunto de ejes y después los pares ordenados asociados con cualesquiera puntos de intersección serán las soluciones del sistema. Considere otro ejemplo.

Ejemplo de salón de clases

Resolver el sistema $\begin{pmatrix} x + 2y = 5 \\ x - y = -4 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 1 Resolver el sistema $\begin{pmatrix} x + y = 5 \\ x - 2y = -4 \end{pmatrix}$.

Solución

Se pueden hallar las intersecciones y un punto de comprobación para cada una de las rectas.

$x + y = 5$

x	y	
0	5	Intersecciones
5	0	
2	3	Punto de comprobación

$x - 2y = -4$

x	y	
0	2	Intersecciones
−4	0	
−2	1	Punto de comprobación

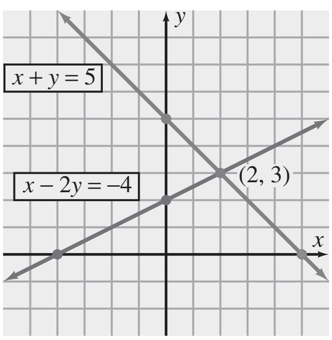


Figura 8.43

La figura 8.43 muestra las gráficas de dos ecuaciones. Parece ser que (2, 3) es la solución del sistema. Para comprobarlo, se sustituye x por 2 y y por 3 en ambas ecuaciones.

$x + y = 5$ se convierte en $2 + 3 = 5$ Un enunciado verdadero

$x - 2y = -4$ se convierte en $2 - 2(3) = -4$ Un enunciado verdadero

Por ende, es el conjunto solución.

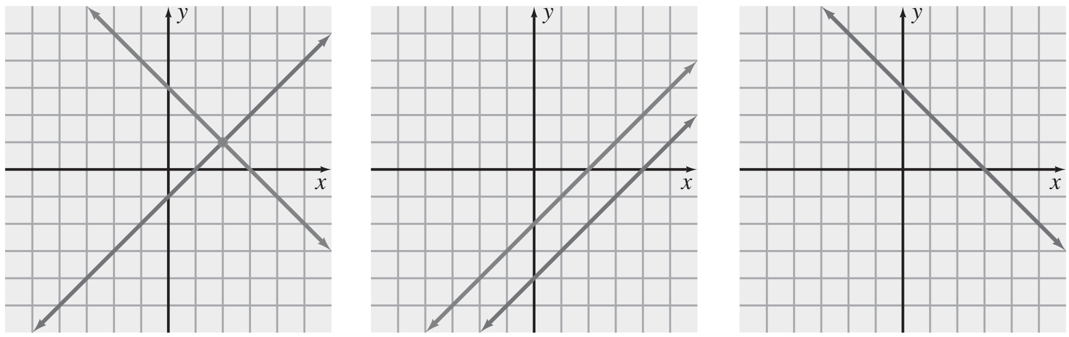
Debería ser evidente que, para resolver los sistemas de ecuaciones por medio de graficación, se requieren gráficas precisas. De hecho, a menos que las soluciones sean números enteros, es muy difícil obtener soluciones exactas. Por esta razón, los sistemas a resolver con graficación en esta sección tienen soluciones en números enteros. Además, comprobar una solución adquiere más importancia cuando se usa el enfoque de graficación. Al comprobar, puede estar totalmente seguro de que está leyendo la solución correcta en la gráfica.

La figura 8.44 muestra los tres casos posibles para la gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables.

Caso I Las gráficas de las dos ecuaciones son dos rectas que se cruzan en un punto. Existe exactamente una solución y el sistema se llama sistema consistente.

Caso II Las gráficas de las dos ecuaciones son rectas paralelas. No hay solución y el sistema se llama sistema inconsistente.

Caso III Las gráficas de las dos ecuaciones son la misma línea y existen infinitas soluciones del sistema. Cualquier par de números reales que satisfaga una de las ecuaciones también satisface la otra ecuación, y se dice que las ecuaciones son dependientes.



Caso I ***Caso II*** ***Caso III***

Figura 8.44

Por tanto, conforme resuelva un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, sabrá qué esperar. El sistema no tendrá soluciones, *un* par ordenado como solución o *infinitos* pares ordenados como soluciones. La mayoría de los sistemas con los que trabajará en este texto tienen una sola solución.

Un ejemplo del caso 1 se dio en el ejemplo 1 (figura 8.43). Los siguientes dos ejemplos ilustran los otros casos.

Ejemplo de salón de clases

Resolver el sistema $\begin{pmatrix} 5x - y = 2 \\ 5x - y = 5 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 2 Resolver el sistema $\begin{pmatrix} 2x + 3y = 6 \\ 2x + 3y = 12 \end{pmatrix}$.

Solución

$2x + 3y = 6$

x	y
0	2
3	0
−3	4

$2x + 3y = 12$

x	y
0	4
6	0
3	2

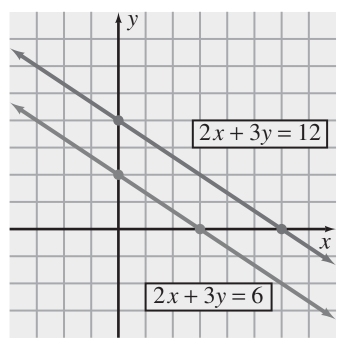


Figura 8.45

La figura 8.45 muestra la gráfica del sistema. Ya que las líneas son paralelas, no hay solución para el sistema. El conjunto solución es $\varnothing$.

Ejemplo de salón de clases

Resolver el sistema $\begin{pmatrix} 3x + y = 4 \\ y = x - 8 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 3

Resolver el sistema $\begin{pmatrix} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{pmatrix}$.

Solución

$x + y = 3$	
x	y
0	3
3	0
1	2

$2x + 2y = 6$	
x	y
0	3
3	0
1	2

La figura 8.46 muestra la gráfica de este sistema. Ya que las gráficas de ambas ecuaciones son la misma línea, hay una infinidad de soluciones para el sistema. Cualquier par ordenado de números reales que satisfaga una ecuación, también satisface la otra ecuación.

Así, el conjunto solución es cualquier par ordenado en la recta $x + y = 3$ y el conjunto solución puede ser escrito como $\{(x, y)/x + y = 3\}$.

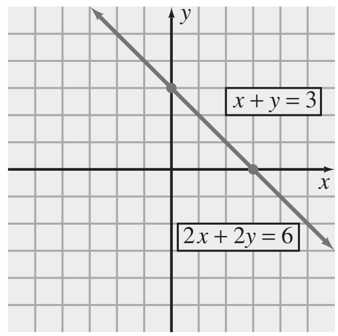


Figura 8.46

Método de sustitución

Como se planteó anteriormente, resolver sistemas específicos de ecuaciones mediante graficación requiere gráficas precisas. Sin embargo, a menos que las soluciones sean enteras, es difícil obtener soluciones exactas a partir de una gráfica. Por tanto, se considerarán algunas otras técnicas para resolver sistemas de ecuaciones.

El método de sustitución, que funciona especialmente bien con sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, se describe del modo siguiente:

Paso 1 Resuelva una de las ecuaciones para una variable en términos de la otra. (Si es posible, elija la que evite fracciones.)

Paso 2 Sustituya la expresión obtenida en el paso 1 en la otra ecuación, lo que produce una ecuación con una variable.

Paso 3 Resuelva la ecuación obtenida en el paso 2.

Paso 4 Use la solución obtenida en el paso 3, junto con la expresión obtenida en el paso 1, para determinar la solución del sistema.

Ahora eche un vistazo a algunos ejemplos que ilustran el método de sustitución.

Ejemplo de salón de clases

Resolver el sistema $\begin{pmatrix} 3x + y = 4 \\ y = x - 8 \end{pmatrix}$ con el método de sustitución.

EJEMPLO 4

Resolver el sistema $\begin{pmatrix} x + y = 16 \\ y = x + 2 \end{pmatrix}$.

Solución

Debido a que la segunda ecuación establece que y es igual a $x + 2$, se puede sustituir y con $x + 2$ en la primera ecuación.

$$x + y = 16 \xrightarrow{\text{Sustituir } x + 2 \text{ por } y} x + (x + 2) = 16$$

Ahora tiene una ecuación con una variable que puede resolver de la manera usual.

$$\begin{aligned} x + (x + 2) &= 16 \\ 2x + 2 &= 16 \\ 2x &= 14 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Sustituir x con 7 en una de las ecuaciones originales (use la segunda) da

$$y = 7 + 2 = 9$$

✔ Verificación

Para verificar, puede sustituir x con 7 y y con 9 en las dos ecuaciones originales.

$$7 + 9 = 16 \qquad \text{Un enunciado verdadero}$$
$$9 = 7 + 2 \qquad \text{Un enunciado verdadero}$$

El conjunto solución es

Ejemplo de salón de clases
Resolver el sistema
$\begin{pmatrix} 2x - 9y = 14 \\ 3x - y = 6 \end{pmatrix}$
con el método de sustitución.

EJEMPLO 5

Resolver el sistema $\begin{pmatrix} 3x - 7y = 2 \\ x + 4y = 1 \end{pmatrix}$.

Solución

Resuelva la segunda ecuación para x en términos de y.

$$\begin{aligned} x + 4y &= 1 \\ x &= 1 - 4y \end{aligned}$$

Ahora puede sustituir x con $1 - 4y$ en la primera ecuación.

$$3x - 7y = 2 \xrightarrow{\text{Sustituir } 1 - 4y \text{ por } x} 3(1 - 4y) - 7y = 2$$

Resuelva esta ecuación para y.

$$\begin{aligned} 3(1 - 4y) - 7y &= 2 \\ 3 - 12y - 7y &= 2 \\ -19y &= -1 \\ y &= \frac{1}{19} \end{aligned}$$

Finalmente, puede sustituir y con $\frac{1}{19}$ en la ecuación $x = 1 - 4y$.

$$\begin{aligned} x &= 1 - 4\left(\frac{1}{19}\right) \\ x &= 1 - \frac{4}{19} \\ x &= \frac{15}{19} \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\left\{\left(\frac{15}{19}, \frac{1}{19}\right)\right\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver el sistema
$\begin{pmatrix} 8x - 3y = 14 \\ 2x + 5y = -8 \end{pmatrix}$
con el método de sustitución.

EJEMPLO 6

Resolver el sistema $\begin{pmatrix} 5x - 6y = -4 \\ 3x + 2y = -8 \end{pmatrix}$.

Solución

Note que resolver cualquier ecuación para cualquier variable producirá una forma fraccioanria. Resuelva la segunda ecuación para y en términos de x.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= -8 \\ 2y &= -8 - 3x \\ y &= \frac{-8 - 3x}{2} \end{aligned}$$

Ahora puede sustituir y con $\frac{-8 - 3x}{2}$ en la primera ecuación.

$$5x - 6y = -4 \xrightarrow{\text{Sustituir } \frac{-8-3x}{2} \text{ por } y} 5x - 6\left(\frac{-8 - 3x}{2}\right) = -4$$

Resolver esta ecuación da

$$\begin{aligned} 5x - 6\left(\frac{-8 - 3x}{2}\right) &= -4 \\ 5x - 3(-8 - 3x) &= -4 \\ 5x + 24 + 9x &= -4 \\ 14x &= -28 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Sustituir -2 con$x$ en $y = \frac{-8 - 3x}{2}$ da

$$\begin{aligned} y &= \frac{-8 - 3(-2)}{2} \\ y &= \frac{-8 + 6}{2} \\ y &= \frac{-2}{2} \\ y &= -1 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{(-2, -1)\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver el sistema
$\begin{pmatrix} x + 3y = 9 \\ 2x + 6y = 11 \end{pmatrix}$
con el método de sustitución

EJEMPLO 7

Resolver el sistema $\begin{pmatrix} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = 7 \end{pmatrix}$.

Solución

Resuelva la primera ecuación para y en términos de x.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ y &= 4 - 2x \end{aligned}$$

Ahora sustituya y con $4 - 2x$ en la segunda ecuación.

$$4x + 2y = 7 \xrightarrow{\text{Sustituir } 4 - 2x \text{ por } y} 4x + 2(4 - 2x) = 7$$

Resuelva esta ecuación para x.

$$4x + 2(4 - 2x) = 7$$
$$4x + 8 - 4x = 7$$
$$8 = 7$$

El enunciado $8 = 7$ es una contradicción, por lo que el sistema original es inconsistente; no tiene solución. El conjunto solución es $\varnothing$.

Ejemplo de salón de clases

Resolver el sistema $\begin{pmatrix} 8x - 2y = 6 \\ 4x = y + 3 \end{pmatrix}$ con el método de sustitución.

EJEMPLO 8 Resolver el sistema $\begin{pmatrix} y = 2x + 1 \\ 4x - 2y = -2 \end{pmatrix}$.

Solución

Dado que la primera ecuación establece que y es igual a $2x + 1$, se puede sustituir y con $2x + 1$ en la segunda ecuación.

$$4x - 2y = -2 \xrightarrow{\text{Sustituir } x + 1 \text{ por } y} 4x - 2(2x + 1) = -2$$

Resuelva la ecuación para x.

$$4x - 2(2x + 1) = -2$$
$$4x - 4x - 2 = -2$$
$$-2 = -2$$

Se obtiene un enunciado verdadero, $-2 = -2$, lo que indica que el sistema tiene un número infinito de soluciones. Cualquier par ordenado que satisfaga una de las ecuaciones, satisface también la otra ecuación. Por ende, el conjunto solución es cualquier par ordenado en la recta $y = 2x + 1$ y el conjunto solución puede escribirse como $\{(x, y)\ 0y = 2x + 1\}$.

Resolución de problemas

Muchos problemas verbales que se resolvieron anteriormente en este texto, con una variable y una ecuación, también se pueden resolver al usar un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables. De hecho, en muchos de estos problemas, resulta más natural usar dos variables y dos ecuaciones. Considere algunos ejemplos.

Ejemplo de salón de clases

Sonora invirtió cierta cantidad de dinero a 5% y \$600 menos que la primera cantidad a 3%. El ingreso anual de ambas inversione fue \$190. ¿Cuánto invirtió Sonora en cada tasa?

EJEMPLO 9 **Aplique su habilidad**

Anita invirtió cierta cantidad de dinero a 8% de interés y \$400 más que la primera cantidad a 9%. Su ingreso anual por las dos inversiones fue \$87. ¿Cuánto invirtió en cada tasa?

Solución

Sea x la cantidad invertida a 8% y sea y la cantidad invertida a 9%. El problema se traduce a este sistema:

La cantidad invertida a 9% fue \$400 más que a 8%
El ingreso anual total fue \$87

$$\begin{pmatrix} y = x + 400 \\ 0.08x + 0.09y = 87 \end{pmatrix}$$

De la primera ecuación, se puede sustituir y por $x + 400$ en la segunda ecuación y resolver para x.

$$0.08x + 0.09(x + 400) = 87$$
$$0.08x + 0.09x + 36 = 87$$
$$0.17x = 51$$
$$x = 300$$

Por ende, Anita invirtió \$300 a 8% y \$300 + \$400 = \$700 a 9%.

Ejemplo de salón de clases
Las ganancias de la venta de boletos en un teatro infantil fueron \$6296. El precio del boleto por niño fue \$12 y el boleto por adulto fue \$20. Si se vendió un total de 430 boletos, tanto de niño como de adulto, ¿cuántos de cada uno se vendieron?

EJEMPLO 10 **Aplique su habilidad**

Las ganancias de un puesto de hamburguesas y hot dogs en un partido de béisbol fueron \$575.50. El precio del hot dog fue \$2.50 y el precio de la hamburguesa fue \$3.00. Si se vendieron un total de 213 hot dogs y hamburguesas, ¿cuántos de cada tipo se vendieron?

Solución

Sea x el número de hot dogs vendidos y sea y el número de hamburguesas vendidas. El problema se traduce a este sistema:

El número vendido
Las ganancias de las ventas

$$\begin{pmatrix} x + y = 213 \\ 2.50x + 3.00y = 575.50 \end{pmatrix}$$

Comience resolviendo la primera ecuación para y.

$$\begin{aligned} x + y &= 213 \\ y &= 213 - x \end{aligned}$$

Ahora sustituya y por $213 - x$ en la segunda ecuación y resuelva para x.

$$\begin{aligned} 2.50x + 3.00(213 - x) &= 575.50 \\ 2.50x + 639.00 - 3.00x &= 575.50 \\ -0.5x + 639.00 &= 575.50 \\ -0.5x &= -63.50 \\ x &= 127 \end{aligned}$$

Por ende, se vendieron 127 hot dogs y $213 - 127 = 86$ hamburguesas.

Examen de conceptos 8.5

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. Resolver un sistema de ecuaciones significa hallar todos los pares ordenados que satisfagan todas las ecuaciones en el sistema.
2. Un sistema consistente de ecuaciones lineales tendrá más de una solución.
3. Si la gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales resulta en dos líneas paralelas, entonces el sistema no tiene solución.
4. Todo sistema de ecuaciones tiene una solución.
5. Si las gráficas de dos ecuaciones en un sistema son la misma línea, entonces las ecuaciones el el sistema son dependientes.
6. Para resolver un sistema de dos ecuaciones con variables x y y, basta con hallar el valor de x.
7. Para el sistema $\begin{pmatrix} 2x + y = 4 \\ x + 5y = 10 \end{pmatrix}$, el par ordenado (1, 2) es una solución.
8. Graficar un sistema de ecuaciones es el método más preciso para encontrar la solución de un sistema.
9. El conjunto solución del sistema $\begin{pmatrix} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 9 \end{pmatrix}$ es un conjunto nulo.
10. El sistema $\begin{pmatrix} 2x + 2y = -4 \\ x = -y - 2 \end{pmatrix}$ tiene infinidad de soluciones.

Conjunto de problemas 8.5

Para los problemas 1-20, usar el método de graficación para resolver cada sistema. (Objetivo 1)

1. $\begin{pmatrix} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} x - y = 2 \\ x + y = -4 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} x + 2y = 4 \\ 2x - y = 3 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2x - y = -8 \\ x + y = 2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} x + 3y = 6 \\ x + 3y = 3 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} y = -2x \\ y - 3x = 0 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 3x - y = 3 \\ 3x - y = -3 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 5y = -3 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 2x + 3y = 1 \\ 4x - 3y = -7 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} y = -2x + 3 \\ 6x + 3y = 9 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} y = 2x + 5 \\ x + 3y = -6 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} y = 5x - 2 \\ 4x + 3y = 13 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} y = x - 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} y = 4 - 2x \\ y = 7 - 3x \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} y = 3x + 4 \\ y = 5x + 8 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} y = 2x \\ 3x - 2y = -2 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} y = 3x \\ 4x - 3y = 5 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 7x - 2y = -8 \\ x = -2 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 3x + 8y = -1 \\ y = -2 \end{pmatrix}$

Para los problemas 21-46, resolver cada sistema usando el método de sustitución. (Objetivos 2, 3 y 4)

21. $\begin{pmatrix} x + y = 20 \\ x = y - 4 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} x + y = 23 \\ y = x - 5 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} y = -3x - 18 \\ 5x - 2y = -8 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 4x - 3y = 33 \\ x = -4y - 25 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} x = -3y \\ 7x - 2y = -69 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 9x - 2y = -38 \\ y = -5x \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} x + 2y = 5 \\ 3x + 6y = -2 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 4x + 2y = 6 \\ y = -2x + 3 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 3x - 4y = 9 \\ x = 4y - 1 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} y = 3x - 5 \\ 2x + 3y = 6 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} y = \frac{2}{5}x - 1 \\ 3x + 5y = 4 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} y = \frac{3}{4}x - 5 \\ 5x - 4y = 9 \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} 7x - 3y = -2 \\ x = \frac{3}{4}y + 1 \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} 5x - y = 9 \\ x = \frac{1}{2}y - 3 \end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix} 2x + y = 12 \\ 3x - y = 13 \end{pmatrix}$

36. $\begin{pmatrix} -x + 4y = -22 \\ x - 7y = 34 \end{pmatrix}$

37. $\begin{pmatrix} 4x + 3y = -40 \\ 5x - y = -12 \end{pmatrix}$

38. $\begin{pmatrix} x - 5y = 33 \\ -4x + 7y = -41 \end{pmatrix}$

39. $\begin{pmatrix} 3x + y = 2 \\ 11x - 3y = 5 \end{pmatrix}$

40. $\begin{pmatrix} 2x - y = 9 \\ 7x + 4y = 1 \end{pmatrix}$

41. $\begin{pmatrix} 4x - 8y = -12 \\ 3x - 6y = -9 \end{pmatrix}$

42. $\begin{pmatrix} 2x - 4y = -6 \\ 3x - 6y = 10 \end{pmatrix}$

43. $\begin{pmatrix} 4x - 5y = 3 \\ 8x + 15y = -24 \end{pmatrix}$

44. $\begin{pmatrix} 2x + 3y = 3 \\ 4x - 9y = -4 \end{pmatrix}$

45. $\begin{pmatrix} 6x - 3y = 4 \\ 5x + 2y = -1 \end{pmatrix}$

46. $\begin{pmatrix} 7x - 2y = 1 \\ 4x + 5y = 2 \end{pmatrix}$

Para los problemas 47-64, resolver cada problema planteando y resolviendo un sistema apropiado de ecuaciones lineales. (Objetivo 5)

47. Doris invirtió cierta cantidad de dinero a 7% de interés y cierta cantidad a 8%. Invirtió \$6000 más a 8% de lo que invirtió a 7%. Su ingreso anual de ambas inversiones fue \$780. ¿Cuánto invirtió Doris a cada tasa?

48. Suponga que Gus invirtió un total de \$8000, parte a 4% y el resto a 6%. Su ingreso anual por las dos inversiones fue \$380. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

49. Javier invirtió un total de \$12,000, parte a 3% y el resto a 5%. Su ingreso anual de ambas inversiones fue \$510. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

50. Marlene invirtió en dos diferentes fondos. Invirtió \$4000 más en el fondo que paga 6% de interés anual que en el fondo que paga 4% de interés anual. Su ingreso total de ambas inversiones es \$1090. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

51. Hallar dos números cuya suma sea 131 de tal manera que un número sea 5 menos que tres veces el otro número.

52. La diferencia de dos números es 75. El número más grande es 3 menos que cuatro veces el número más pequeño. Hallar los números.

53. En una clase de 50 estudiantes, el número de mujeres es más que cinco veces el número de hombres. ¿Cuántas mujeres hay en la clase?

54. En una encuesta reciente, se les preguntó a 1000 votantes registrados sobre sus preferencias políticas. El número de hombres en la encuesta fue 5 menos que la mitad del número de mujeres. Hallar el número de hombres en la encuesta.

55. El perímetro de un rectángulo es 94 pulgadas. El largo del rectángulo mide 7 pulgadas más que el ancho. Encontrar las dimensiones del rectángulo.

56. El perímetro de un rectángulo es 62 centímetros. Encontrar las dimensiones del rectángulo si su largo mide 5 más que su ancho.

57. El perímetro de un jardín rectangular es 100 pies. El ancho del rectángulo mide 10 pies menos que su largo. Hallar las dimensiones del rectángulo.

58. El perímetro de un terreno rectangular para perros mide 22 yardas. El ancho del rectángulo mide 3 yardas menos que el largo. Hallar las dimensiones del rectángulo.

59. Dos ángulos son complementarios y la medida de uno de ellos es 40° más que la medida del otro ángulo. Hallar la medida de cada ángulo.

60. Dos ángulos son suplementarios y la medida de uno de ellos es 20° menos que tres veces la medida del otro ángulo. Hallar la medida de cada ángulo.

61. Un sobre contenía \$700 en efectivo para depositarse. Había 100 billetes, algunos de cinco dólares y el resto de diez dólares. ¿Cuántos billetes de cada denominación se depositaron?

62. Cindy tiene 30 monedas, consistiendo de monedas de diez y veinticinco centavos, que en total suman \$5.10. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene?

63. El ingreso de una producción escolar fue \$27,500. El precio del boleto de estudiante fue \$8 y los boletos para no estudiantes se vendieron a \$15. Tres mil boletos fueron vendidos. ¿Cuántos boletos de cada tipo se vendieron?

64. El ingreso de un juego de lotería fue \$4280. El precio de un boleto sencillo fue \$2 y el precio de un boleto especial fue \$5. Se vendieron mil boletos. ¿Cuántos de cada tipo se vendieron?

Pensamientos en palabras

65. Discuta las ventajas y desventajas de resolver un sistema de ecuaciones lineales graficando.

66. Determine un sistema de dos ecuaciones lineales para el cual el conjunto solución es $\{(5, 7)\}$. ¿Hay otros sistemas que tengan el mismo conjunto solución? De ser así, encuentre al menos uno más.

67. Dé una descripción general de cómo usar el método de sustitución para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables.

68. ¿Es posible que un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables tenga exactamente dos soluciones? Defienda su respuesta.

69. Explique cómo usaría el método de sustitución para resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 2x + 5y = 5 \\ 5x - y = 9 \end{pmatrix}$$

Respuestas del examen de conceptos

1. Cierto **2.** Falso **3.** Cierto **4.** Falso **5.** Cierto **6.** Falso **7.** Falso **8.** Falso **9.** Cierto **10.** Cierto

8.6 Método de eliminación por adición

OBJETIVOS

1. Resolver sistemas lineales de ecuaciones con el método de eliminación por adición
2. Determinar qué método usar para resolver un sistema de ecuaciones
3. Resolver problemas verbales usando un sistema de dos ecuaciones lineales

Aprendió en la sección anterior que el método de sustitución para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos variables funciona bastante bien. Sin embargo, conforme el número de ecuaciones y de variables aumenta, el método de sustitución se vuelve menos útil. En esta sección se presenta otro método llamado el **método de eliminación por adición**. Se presentará aquí usando sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables. Más adelante en el texto, se extenderá su uso a tres ecuaciones lineales con tres variables.

El método requiere sustituir sistemas de ecuaciones con sistemas equivalentes más simples hasta obtener un sistema donde las soluciones sean obvias. **Los sistemas equivalentes de ecuaciones son sistemas que tienen exactamente el mismo conjunto solución**. Las siguientes operaciones o transformaciones se aplican a un sistema de ecuaciones para producir un sistema equivalente:

1. Cualesquiera dos ecuaciones del sistema se pueden intercambiar.
2. Ambos lados de cualquier ecuación del sistema se pueden multiplicar por la suma de dicha ecuación y un múltiplo distinto de cero de otra ecuación.
3. Cualquier ecuación del sistema puede ser remplazada por la suma de la ecuación y un múltiplo distinto de cero de otra ecuación.

Ahora vea cómo aplicar estas operaciones para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables.

Ejemplo de salón de clases
Resolver el sistema
$$\begin{pmatrix} 6x + 9y = 9 \\ 4x - 9y = 21 \end{pmatrix}$$
con el método de eliminación por adición.

EJEMPLO 1 Resolver el sistema $\begin{pmatrix} 3x + 2y = 1 \\ 5x - 2y = 23 \end{pmatrix}$. (1) (2)

Solución

Reemplazar la ecuación (2) con una ecuación que forme de multiplicar la ecuación (1) por 1 y después sumar la ecuación (2).

$$\begin{pmatrix} 3x + 2y = 1 \\ 8x \qquad = 24 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

De la ecuación (4), fácilmente se obtiene el valor de x.

$$8x = 24$$
$$x = 3$$

Ahora puede sustituir x por 3 en la ecuación (3).

$$3x + 2y = 1$$
$$3(3) + 2y = 1$$
$$2y = -8$$
$$y = -4$$

El conjunto solución es $\{(3, 24)\}$. ¡Compruébelo!

Ejemplo de salón de clases
Resolver el sistema
$$\begin{pmatrix} 2x - 5y = 28 \\ 8x + y = 28 \end{pmatrix}$$
usando el método de eliminación por adición.

EJEMPLO 2 Resolver el sistema $\begin{pmatrix} x + 5y = -2 \\ 3x - 4y = -25 \end{pmatrix}$. (1) (2)

Solución

Reemplazar la ecuación (2) con la ecuación que se forma de multiplicar la ecuación (1) por -3 y después sumar ese resultado a la ecuación (2).

$$\begin{pmatrix} x + 5y = -2 \\ -19y = -19 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

De la ecuación (4) se obtiene el valor de y.

$$-19y = -19$$
$$y = 1$$

Ahora puede sustituir y con 1 en la ecuación (3).

$$x + 5y = -2$$
$$x + 5(1) = -2$$
$$x = -7$$

El conjunto solución es {(27, 1)}.

Note que su objetivo ha sido producir un sistema equivalente de ecuaciones de tal manera que una de las variables pueda ser eliminada de una ecuación. Se puede lograr esto al multiplicar una ecuación del sistema por un número apropiado y después sumar ese resultado a la otra ecuación. Por eso el método se llama *eliminación por adición*. Vea otro ejemplo.

Ejemplo de salón de clases

Resolver el sistema $\begin{pmatrix} 3x - 5y = 31 \\ 7x + 2y = 4 \end{pmatrix}$ usando el método de eliminación por adición.

EJEMPLO 3

Resolver el sistema $\begin{pmatrix} 2x + 5y = 4 \\ 5x - 7y = -29 \end{pmatrix}$. (1) (2)

Solución

Formar un sistema equivalente en el que la segunda ecuación no tenga término x. Primero, puede multiplicar la ecuación (2) por -2.

$$\begin{pmatrix} 2x + 5y = 4 \\ -10x + 14y = 58 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

Ahora puede reemplazar la ecuación (4) con la ecuación que se forma de multiplicar la ecuación (3) por 5 y después sumar ese resultado a la ecuación (4).

$$\begin{pmatrix} 2x + 5y = 4 \\ 39y = 78 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (5) \\ (6) \end{matrix}$$

De la ecuación (6) se puede encontrar el valor de y.

$$39y = 78$$
$$y = 2$$

Ahora puede sustituir y con 2 en la ecuación (5).

$$2x + 5y = 4$$
$$2x + 5(2) = 4$$
$$2x = -6$$
$$x = -3$$

El conjunto solución es {(23, 2)}.

Ejemplo de salón de clases

Resolver el sistema $\begin{pmatrix} 5x - 6y = 3 \\ 8x + 4y = 10 \end{pmatrix}$ usando el método de eliminación por adición

EJEMPLO 4

Resolver el sistema $\begin{pmatrix} 3x - 2y = 5 \\ -6x - 21y = -27 \end{pmatrix}$. (1) (2)

Solución

Puede empezar multiplicando la ecuación (2) por -3.

$$\begin{pmatrix} 3x - 2y = 5 \\ -6x - 21y = -27 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

Ahora puede reemplazar la ecuación (4) con la ecuación que se forma de multiplicar la ecuación (3) por 2 y después sumar ese resultado a la ecuación (4).

$$\begin{pmatrix} 3x - 2y = 5 \\ -25y = -17 \end{pmatrix} \begin{matrix} (5) \\ (6) \end{matrix}$$

De la ecuación (6) se puede encontrar el valor de y.

$$-25y = -17$$
$$y = \frac{17}{25}$$

Ahora puede sustituir y con $\frac{17}{25}$ en la ecuación (5).

$$3x - 2y = 5$$
$$3x - 2\left(\frac{17}{25}\right) = 5$$
$$3x - \frac{34}{25} = 5$$
$$3x = 5 + \frac{34}{25}$$
$$3x = \frac{125}{25} + \frac{34}{25}$$
$$3x = \frac{159}{25}$$
$$x = \left(\frac{159}{25}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{53}{25}$$

El conjunto solución es $\left\{\left(\frac{53}{25}, \frac{17}{25}\right)\right\}$. (Tal vez debería comprobar este resultado).

¿Cuál método usar?

Tanto el método de eliminación por adición como el de sustitución se pueden usar para obtener soluciones exactas para cualquier sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. En ocasiones es cuestión de decidir cuál método usar en un sistema particular. Como se ha visto en los ejemplos en esta sección, así como en secciones anteriores, algunos sistemas tienden hacia uno u otro de los métodos en virtud del formato original de las ecuaciones. Se enfatizará este punto con más ejemplos.

Ejemplo de salón de clases
Resolver el sistema
$\begin{pmatrix} 9x - 10y = 4 \\ 8x + 5y = 3 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 5 Resolver el sistema $\begin{pmatrix} 4x - 3y = 4 \\ 10x + 9y = -1 \end{pmatrix}$. $\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Solución

Dado que cambiar la forma de cualquiera de las ecuaciones en preparación para el método de sustitución produce una forma fraccionaria, probablemente sea mejor idea usar el método de eliminación por adición. Reemplace la ecuación (2) con la ecuación que se forma al multiplicar la ecuación (1) por 3 y después sumar ese resultado a la ecuación (2).

$$\begin{pmatrix} 4x - 3y = 4 \\ 22x = 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

De la ecuación (4) se puede determinar el valor de x.

$$22x = 11$$
$$x = \frac{11}{22} = \frac{1}{2}$$

Ahora puede sustituir x con $\frac{1}{2}$ en la ecuación (3).

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 4 \\ 4\left(\frac{1}{2}\right) - 3y &= 4 \\ 2 - 3y &= 4 \\ -3y &= 2 \\ y &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\left\{\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)\right\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver el sistema
$\begin{pmatrix} x = -3y + 4 \\ 5x - 12y = 2 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 6 Resolver el sistema $\begin{pmatrix} 6x + 5y = -3 \\ y = -2x - 7 \end{pmatrix}$. (1) (2)

Solución

Dado que la segunda ecuación está en la forma de y igual a, use el método de sustitución. De la segunda ecuación puede sustituir y con $-2x - 7$ en la primera ecuación.

$$6x + 5y = -3 \xrightarrow{\text{Sustituir } -2x - 7 \text{ por } y} 6x + 5(-2x - 7) = -3$$

Resolver la ecuación da

$$\begin{aligned} 6x + 5(-2x - 7) &= -3 \\ 6x - 10x - 35 &= -3 \\ -4x - 35 &= -3 \\ -4x &= 32 \\ x &= -8 \end{aligned}$$

Sustituir x con -8 en la segunda ecuación para obtener

$$\begin{aligned} y &= -2(-8) - 7 \\ y &= 16 - 7 = 9 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{(-8, 9)\}$.

A veces se necesitan simplificar las ecuaciones de un sistema antes de poder decidir cuál método usar para resolver dicho sistema. Considere un ejemplo de ese tipo.

Ejemplo de salón de clases
Resolver el sistema
$\begin{pmatrix} \frac{x-2}{3} + \frac{y+5}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{x+1}{2} + \frac{y-2}{5} = 2 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 7 Resolver el sistema $\begin{pmatrix} \frac{x-2}{4} + \frac{y+1}{3} = 2 \\ \frac{x+1}{7} + \frac{y-3}{2} = \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. (1) (2)

Solución

Primero, necesita simplificar las dos ecuaciones. Multiplique ambos lados de la ecuación (1) por 12 y simplifique.

$$\begin{aligned} 12\left(\frac{x-2}{4}+\frac{y+1}{3}\right) &= 12(2) \\ 3(x-2)+4(y+1) &= 24 \\ 3x-6+4y+4 &= 24 \\ 3x+4y-2 &= 24 \\ 3x+4y &= 26 \end{aligned}$$

Multiplique ambos lados de la ecuación (2) por 14.

$$\begin{aligned} 14\left(\frac{x+1}{7}+\frac{y-3}{2}\right) &= 14\left(\frac{1}{2}\right) \\ 2(x+1)+7(y-3) &= 7 \\ 2x+2+7y-21 &= 7 \\ 2x+7y-19 &= 7 \\ 2x+7y &= 26 \end{aligned}$$

Ahora tiene el siguiente sistema para resolver.

$$\begin{pmatrix} 3x+4y=26 \\ 2x+7y=26 \end{pmatrix} \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

Probablemente el enfoque más fácil sea usar el método de eliminación por adición. Puede empezar multiplicando la ecuación (4) por -3.

$$\begin{pmatrix} 3x+4y=26 \\ -6x-21y=-78 \end{pmatrix} \begin{matrix} (5) \\ (6) \end{matrix}$$

Ahora puede reemplazar la ecuación (6) con la ecuación que se forma al multiplicar la ecuación (5) por 2 y después sumar ese resultado a la ecuación (6).

$$\begin{pmatrix} 3x+4y=26 \\ -13y=-26 \end{pmatrix} \begin{matrix} (7) \\ (8) \end{matrix}$$

De la ecuación (8) se puede encontrar el valor de y.

$$\begin{aligned} -13y &= -26 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Ahora puede sustituir y con 2 en la ecuación (7).

$$\begin{aligned} 3x+4y &= 26 \\ 3x+4(2) &= 26 \\ 3x &= 18 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{(6, 2)\}$.

Comentario: No olvide que para comprobar un problema como el del ejemplo 7, debe comprobar las posibles soluciones en las ecuaciones originales.

En la sección 8.5 se explicó que puede saber si un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables no tiene solución, tiene una sola solución o una infinidad de soluciones, al graficar las ecuaciones del sistema. Es decir, las dos líneas pueden ser paralelas (sin solución), o pueden cruzarse en un punto (una sola solución) o pueden coincidir (una infinidad de soluciones).

Desde un punto de vista práctico, los sistemas que tienen una sola solución merecen la mayor parte de su atención. Sin embargo, necesita ser capaz de lidiar con las otras situaciones porque ocasionalmente ocurren. Los siguientes dos ejemplos ilustran lo que pasa cuando se encuentra con una situación sin solución o con una infinidad de soluciones cuando usa el método de eliminación por adición.

Ejemplo de salón de clases
Resolver el sistema
$\begin{pmatrix} x - 5y = 4 \\ 2x - 10y = 1 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 8 Resolver el sistema $\begin{pmatrix} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 3 \end{pmatrix}$. (1) (2)

Solución

Use el método de eliminación por adición. Reemplace la ecuación (2) con la ecuación que se forma al multiplicar la ecuación (1) por -2 y después sume ese resultado para formar la ecuación (2).

$$\begin{pmatrix} 2x + y = 1 \\ 0 + 0 = 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

El enunciado numérico falso $0 + 0 = 1$ implica que el sistema no tiene solución. Por ende, el conjunto solución es $\varnothing$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver el sistema
$\begin{pmatrix} 6x + 4y = 10 \\ 3x + 2y = 5 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 9 Resolver el sistema $\begin{pmatrix} 5x + y = 2 \\ 10x + 2y = 4 \end{pmatrix}$. (1) (2)

Solución

Use el método de eliminación por adición. Reemplace la ecuación (2) con la ecuación que se forma al multiplicar la ecuación (1) por -2 y después sumar ese resultado a la ecuación (2).

$$\begin{pmatrix} 5x + y = 2 \\ 0 + 0 = 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

El *enunciado numérico verdadero* $0 + 0 = 0$ implica que el sistema tiene una infinidad de soluciones. Cualquier par ordenado que satisfaga una de las ecuaciones también va a satisfacer la otra ecuación. Por ende, el conjunto solución puede expresarse como

$$\{(x, y) | 5x + y = 2\}$$

Ejemplo de salón de clases
Una solución de alcohol al 30% se debe mezclar con una solución de alcohol al 55% para producir 25 litros de solución de alcohol al 40%. ¿Cuántos litros de cada solución deben mezclarse?

EJEMPLO 10 **Aplique su habilidad**

Una solución de cloro al 25% debe mezclarse con una solución de cloro al 40% para producir 12 galones de una solución de cloro al 35%. ¿Cuántos galones de cada solución se deben mezclar?

Solución

Sea x los galones de solución al 25% y sea y los galones de solución al 40%. Entonces uno de los sistemas de ecuaciones será $x + y = 12$. Para la otra ecuación, se necesita multiplicar el número de galones de cada solución por su porcentaje de cloro. Eso da la ecuación $0.25x + 0.40y = 0.35(12)$. Así que se necesita resolver el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} x + y = 12 \\ 0.25x + 0.40y = 4.2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Use el método de eliminación por adición. Reemplace la ecuación (2) con la ecuación que se forma al multiplicar la ecuación (1) por -0.25. y después sumar el resultado a la ecuación (2).

$$\begin{pmatrix} x + y = 12 \\ 0.15y = 1.2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

De la ecuación (4) se puede encontrar el valor de y.

$$0.15y = 1.2$$
$$y = 8$$

Ahora puede sustituir con 8 en la ecuación (3).

$$x + 8 = 12$$
$$x = 4$$

Por ende, se necesitan 4 galones de solución al 25% y 8 galones de solución al 40%.

Examen de conceptos 8.6

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. Cualquiera de las dos ecuaciones en un sistema puede intercambiarse para obtener un sistema equivalente.
2. Cualquier ecuación de un sistema puede multiplicarse por cero en ambos lados para obtener un sistema equivalente.
3. El objetivo del método de eliminación por adición es producir un sistema equivalente con una ecuación en la cual una de las variables haya sido eliminada.
4. Tanto el método de sustitución como el de eliminación por adición puede usarse para cualquier sistema lineal de ecuaciones.
5. Si un sistema equivalente para un sistema original es $\begin{pmatrix} 3x - 5y = 7 \\ 0 + 0 = 0 \end{pmatrix}$ entonces el sistema original es inconsistente y no tiene solución.
6. El conjunto solución del sistema $\begin{pmatrix} 3x - 2y = -3 \\ 2x + 3y = 11 \end{pmatrix}$ es $\{(1, 3)\}$.
7. El conjunto solución del sistema $\begin{pmatrix} x - 5y = -17 \\ 3x + y = 4 \end{pmatrix}$ es $\{(-2, 3)\}$.
8. El sistema $\begin{pmatrix} 5x - 2y = 3 \\ 5x - 2y = 9 \end{pmatrix}$ tiene una infinidad de soluciones.
9. El sistema $\begin{pmatrix} 2x + 3y = 4 \\ 6x + 9y = 12 \end{pmatrix}$ tiene una infinidad de soluciones.
10. El sistema $\begin{pmatrix} x - 2y = 6 \\ 2x + y = 4 \end{pmatrix}$ tiene sólo una solución.

Conjunto de problemas 8.6

Para los problemas 1-16, usar el método de eliminación por adición para resolver cada sistema. **(Objetivo 1)**

1. $\begin{pmatrix} 2x + 3y = -1 \\ 5x - 3y = 29 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 3x - 4y = -30 \\ 7x + 4y = 10 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 6x - 7y = 15 \\ 6x + 5y = -21 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 5x + 2y = -4 \\ 5x - 3y = 6 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} x - 2y = -12 \\ 2x + 9y = 2 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} x - 4y = 29 \\ 3x + 2y = -11 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 4x + 7y = -16 \\ 6x - y = -24 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 6x + 7y = 17 \\ 3x + y = -4 \end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 5y = -3 \end{pmatrix}$
10. $\begin{pmatrix} 4x + 3y = -4 \\ 3x - 7y = 34 \end{pmatrix}$
11. $\begin{pmatrix} 7x - 2y = 4 \\ 7x - 2y = 9 \end{pmatrix}$
12. $\begin{pmatrix} 5x - y = 6 \\ 10x - 2y = 12 \end{pmatrix}$
13. $\begin{pmatrix} 5x + 4y = 1 \\ 3x - 2y = -1 \end{pmatrix}$
14. $\begin{pmatrix} 2x - 7y = -2 \\ 3x + y = 1 \end{pmatrix}$
15. $\begin{pmatrix} 8x - 3y = 13 \\ 4x + 9y = 3 \end{pmatrix}$
16. $\begin{pmatrix} 10x - 8y = -11 \\ 8x + 4y = -1 \end{pmatrix}$

Para los problemas 17-44, resolver cada sistema usando el método de sustitución o el de eliminación por adición según convenga. **(Objetivos 1 y 2)**

17. $\begin{pmatrix} 5x + 3y = -7 \\ 7x - 3y = 55 \end{pmatrix}$
18. $\begin{pmatrix} 4x - 7y = 21 \\ -4x + 3y = -9 \end{pmatrix}$
19. $\begin{pmatrix} x = 5y + 7 \\ 4x + 9y = 28 \end{pmatrix}$
20. $\begin{pmatrix} 11x - 3y = -60 \\ y = -38 - 6x \end{pmatrix}$
21. $\begin{pmatrix} x = -6y + 79 \\ x = 4y - 41 \end{pmatrix}$
22. $\begin{pmatrix} y = 3x + 34 \\ y = -8x - 54 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 4x - 3y = 2 \\ 5x - y = 3 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 3x - y = 9 \\ 5x + 7y = 1 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 5x - 2y = 1 \\ 10x - 4y = 7 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 4x + 7y = 2 \\ 9x - 2y = 1 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 3x - 2y = 7 \\ 5x + 7y = 1 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 2x - 3y = 4 \\ y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} -2x + 5y = -16 \\ x = \frac{3}{4}y + 1 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} y = \frac{2}{3}x - \frac{3}{4} \\ 2x + 3y = 11 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} y = \frac{2}{3}x - 4 \\ 5x - 3y = 9 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} 5x - 3y = 7 \\ x = \frac{3y}{4} - \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 3 \\ \frac{5x}{2} - \frac{y}{6} = -17 \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} \frac{3x}{4} - \frac{2y}{3} = 31 \\ \frac{7x}{5} + \frac{y}{4} = 22 \end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix} -(x - 6) + 6(y + 1) = 58 \\ 3(x + 1) - 4(y - 2) = -15 \end{pmatrix}$

36. $\begin{pmatrix} -2(x + 2) + 4(y - 3) = -34 \\ 3(x + 4) - 5(y + 2) = 23 \end{pmatrix}$

37. $\begin{pmatrix} 5(x + 1) - (y + 3) = -6 \\ 2(x - 2) + 3(y - 1) = 0 \end{pmatrix}$

38. $\begin{pmatrix} 2(x - 1) - 3(y + 2) = 30 \\ 3(x + 2) + 2(y - 1) = -4 \end{pmatrix}$

39. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 12 \\ \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y = 4 \end{pmatrix}$

40. $\begin{pmatrix} \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}y = 0 \\ \frac{3}{2}x - \frac{3}{10}y = -15 \end{pmatrix}$

41. $\begin{pmatrix} \frac{2x}{3} - \frac{y}{2} = -\frac{5}{4} \\ \frac{x}{4} + \frac{5y}{6} = \frac{17}{16} \end{pmatrix}$

42. $\begin{pmatrix} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{5}{72} \\ \frac{x}{4} + \frac{5y}{2} = -\frac{17}{48} \end{pmatrix}$

43. $\begin{pmatrix} \frac{3x + y}{2} + \frac{x - 2y}{5} = 8 \\ \frac{x - y}{3} - \frac{x + y}{6} = \frac{10}{3} \end{pmatrix}$

44. $\begin{pmatrix} \frac{x - y}{4} - \frac{2x - y}{3} = -\frac{1}{4} \\ \frac{2x + y}{3} + \frac{x + y}{2} = \frac{17}{6} \end{pmatrix}$

Para los problemas 45-54, resolver cada problema planteando y resolviendo un sistema de ecuaciones apropiado. **(Objetivo 3)**

45. Una solución salina al 10% debe mezclarse con una solución salina al 20% para producir 20 galones de solución salina al 17.5%. ¿Cuántos galones de la solución al 10% y cuántos de la solución al 20% serán necesarios?

46. Suponga que una solución contiene 50% de alcohol y una segunda solución contiene 80% de alcohol. ¿Cuántos litros de cada solución se deben mezclar para tener 10 .5 litros que contengan 70% de alcohol?

47. Una pequeña librería local compró 35 libros que costaron $1022. Algunos de los libros costaron $22 cada uno y el resto costó $34 por libro. ¿Cuántos libros de cada precio compró la librería?

48. Para mudarse, los Henderson compraron 25 cajas de cartón por $97.50. Compraron dos tipos de cajas: las cajas grandes costaron $7.50 por caja y las chicas costaron $3 por caja. ¿Cuántas cajas de cada tipo compraron?

49. Un motel en un suburbio de Chicago renta habitaciones sencillas a $62 por día y habitaciones dobles a $82 por día. Si se rentaron un total de 55 habitaciones por $4210, ¿cuántas de cada tipo se rentaron?

50. Suponga que, en un día en particular, el costo de 3 pelotas de tenis y 2 de golf es de $12. El costo de 6 pelotas de tenis y 3 de golf es $21. Encontrar el costo de una pelota de tenis y el costo de una pelota de golf.

51. Un sábado, una fraternidad pidió 12 pizzas de pepperoni y 5 de queso que costaron $126. En domingo, pidieron una orden de 20 pizzas de pepperoni y 9 de queso que costaron $214. Hallar el precio de cada tipo de pizza.

52. Un hombre compró 2 libras de café y 1 libra de mantequilla por un total de $18.75. Un mes después, los precios no habían cambiado (esto lo vuelve un problema ficticio) y compró 3 libras de café y 2 libras de mantequilla por $29.50. Encontrar el precio por libra de café y de mantequilla.

53. Sue compró 3 paquetes de galletas y 2 bolsas de papas por $7.35. Después, compró 2 paquetes de galletas y 5 bolsas de papas por $9.63. Encontrar el precio de un paquete de galletas.

54. Si al numerador de cierta fracción se le suma 5 y al denominador se le resta 1, la fracción resultante es $\frac{8}{3}$. Sin embargo, si el numerador de la fracción original se duplica y el denominador de la fracción original aumenta por 7, la fracción resultante es $\frac{6}{11}$. Hallar la fracción original.

Pensamientos en palabras

55. Explicar cómo usaría el método de eliminación por adición para resolver el sistema
$$\left(\begin{array}{l} 3x - 4y = -1 \\ 2x - 5y = 9 \end{array}\right).$$

56. ¿Cómo decide si resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos variables usando el método de sustitución o el método de eliminación por adición?

Más investigación

57. Hay otra forma de saber si un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables es consistente, inconsistente o dependiente sin tener que graficar cada ecuación. Puede mostrarse que cada sistema en la forma

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array}$$

tiene una y sólo una solución si

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

que no tiene solución si

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

y que tiene infinitas soluciones si

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Determinar si cada uno de los siguientes sistemas es consistente, inconsistente o dependiente.

(a) $\left(\begin{array}{l} 4x - 3y = 7 \\ 9x + 2y = 5 \end{array}\right)$

(b) $\left(\begin{array}{l} 5x - y = 6 \\ 10x - 2y = 19 \end{array}\right)$

(c) $\left(\begin{array}{l} 5x - 4y = 11 \\ 4x + 5y = 12 \end{array}\right)$

(d) $\left(\begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ x - 2y = 9 \end{array}\right)$

(e) $\left(\begin{array}{l} x - 3y = 5 \\ 3x - 9y = 15 \end{array}\right)$

(f) $\left(\begin{array}{l} 4x + 3y = 7 \\ 2x - y = 10 \end{array}\right)$

(g) $\left(\begin{array}{l} 3x + 2y = 4 \\ y = -\frac{3}{2}x - 1 \end{array}\right)$

(h) $\left(\begin{array}{l} y = \frac{4}{3}x - 2 \\ 4x - 3y = 6 \end{array}\right)$

58. Un sistema como

$$\left(\begin{array}{l} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 2 \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

no es un sistema de ecuaciones lineales, pero puede transformarse en un sistema lineal al cambiar variables. Por ejemplo, cuando se sustituye $\frac{1}{x}$ y v por $\frac{1}{y}$ y por en el sistema de arriba, se obtiene

$$\left(\begin{array}{l} 3u + 2v = 2 \\ 2u - 3v = \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Se puede resolver este "nuevo" sistema tanto por eliminación por adición como por sustitución (los detalles se le dejan a usted) para producir $u = \frac{1}{2}$ y $v = \frac{1}{4}$. Por ende, dado que $u = \frac{1}{x}$ y $v = \frac{1}{y}$, se tiene

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$$

Resolver estas ecuaciones da

$x = 2 \qquad$ y $\qquad y = 4$

El conjunto solución del sistema original es $\{(2, 4)\}$.

Resolver cada uno de los siguientes sistemas.

(a) $\left(\begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{7}{12} \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = \frac{5}{12} \end{array}\right)$

(b) $\left(\begin{array}{l} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{19}{15} \\ -\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{7}{15} \end{array}\right)$

(c) $\left(\begin{array}{l} \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = \frac{13}{6} \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 0 \end{array}\right)$

(d) $\begin{pmatrix} \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{y} = 11 \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{5}{y} = -9 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} \dfrac{5}{x} - \dfrac{2}{y} = 23 \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{y} = \dfrac{23}{2} \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} \dfrac{2}{x} - \dfrac{7}{y} = \dfrac{9}{10} \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{y} = -\dfrac{41}{20} \end{pmatrix}$

59. Resolver el siguiente sistema para x y y.

$$\begin{pmatrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{pmatrix}$$

Respuestas del examen de conceptos

1. Cierto **2.** Falso **3.** Cierto **4.** Cierto **5.** Falso **6.** Cierto **7.** Falso **8.** Falso **9.** Cierto **10.** Cierto

8.7 Graficación de desigualdades lineales

OBJETIVOS

1 Graficar desigualdades lineales con dos variables

2 Graficar sistemas de dos desigualdades lineales

Las desigualdades lineales con dos variables son de la forma $Ax + By > C$ o $Ax + By < C$, donde A, B y C son números reales. (Los enunciados combinados de igualdad y desigualdad lineales son de la forma $Ax + By \geq C$ o $Ax + By \leq C$.) La graficación de desigualdades lineales es casi tan sencilla como la graficación de ecuaciones lineales. La siguiente discusión conduce a un simple proceso paso a paso. Considere la siguiente ecuación y desigualdades relacionadas.

$$x - y = 2$$
$$x - y > 2$$
$$x - y < 2$$

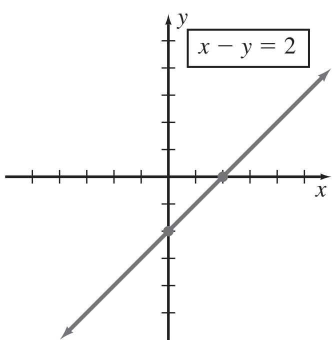
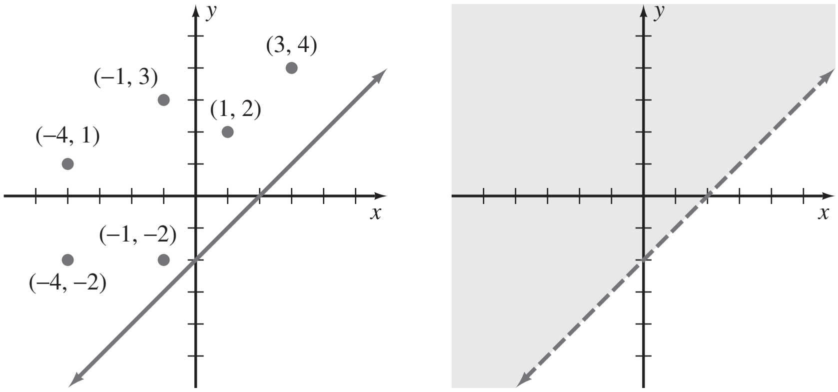


Figura 8.47

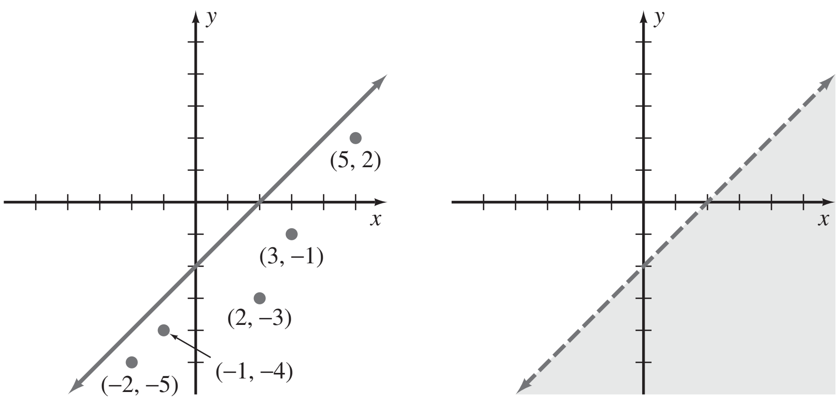
La gráfica de $x - y = 2$ se muestra en la figura 8.47. La recta divide el plano en dos medios planos, uno arriba de la línea y el otro abajo de la recta. En la figura 8.48(a) se indicaron varios puntos en el medio plano arriba de la recta. Note que, para cada punto, el par ordenado de números reales satisface la desigualdad $x - y < 2$. Esto es cierto para *todos* los puntos en el medio plano arriba de la recta. Por tanto, la gráfica de $x - y < 2$ es el medio plano arriba de la recta, como se indica mediante la porción sombreada en la figura 8.48(b). Se usó una recta discontinua para indicar aquellos puntos sobre la recta que no satisfacen $x - y < 2$.



(a) **(b)**

Figura 8.48

En la figura 8.49(a) se indicaron varios puntos en el medio plano abajo de la recta $x - y = 2$. Note que, para cada punto, el par ordenado de números reales satisface la desigualdad $x - y > 2$. Esto es cierto para todos los puntos en el medio plano abajo de la recta. Por ende, la gráfica de $x - y > 2$ es el medio plano abajo de la recta, como se indicó con la parte sombreada en la figura 8.49(b).



(a) **(b)**

Figura 8.49

Con base en esta discusión, se sugieren los siguientes pasos para graficar desigualdades lineales.

Paso 1 Grafique la igualdad correspondiente. Use una recta continua si la igualdad se incluye en el enunciado original. Use una recta discontinua si no se incluye la igualdad.

Paso 2 Elija un "punto de prueba" que no esté sobre la recta y sustituya sus coordenadas en la desigualdad. (El origen es un punto conveniente a usar si no está sobre la línea.)

Paso 3 La gráfica de la desigualdad original es

(a) el medio plano que contiene el punto de prueba si la desigualdad se satisface por dicho punto, o

(b) el medio plano que no contiene el punto de prueba si la desigualdad no se satisface por dicho punto.

Aplique estos pasos a algunos ejemplos.

Ejemplo de salón de clases
Graficar $x + 2y > 6$.

EJEMPLO 1 Graficar $2x + y > 4$.

Solución

Paso 1 Graficar $2x + y = 4$ como una recta discontinua, porque la igualdad no se incluye en $2x + y > 4$.

Paso 2 Elegir el origen como un punto de prueba y sustituya sus coordenadas en la desigualdad.

$2x + y > 4$ se convierte en $2(0) + 0 > 4$
Enunciado verdadero

Paso 3 Puesto que el punto de prueba no satisface la desigualdad dada, la gráfica es el medio plano que no contiene el punto de prueba. Por ende, la gráfica de $2x + y > 4$ es el medio plano abajo de la recta, como se indica en la figura 8.50.

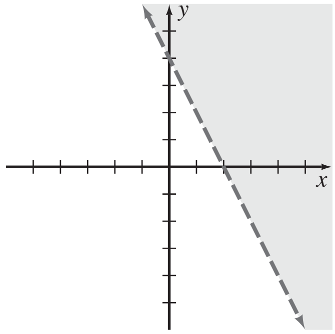


Figura 8.50

Ejemplo de salón de clases
Graficar $y \leq -\frac{2}{3}x$.

EJEMPLO 2 Graficar $y \leq 2x$.

Solución

Paso 1 Graficar $y = 2x$ como una recta continua, porque la igualdad se incluye en el enunciado.

Paso 2 Elegir el origen como un punto de prueba y sustituya sus coordenadas en el enunciado dado (3, 2).

$y \leq 2x$ se convierte en
Enunciado verdadero

Paso 3 Puesto que el punto de prueba satisface el enunciado dado, todos los puntos en el mismo medio plano que el punto de prueba satisfacen el enunciado. Por ende, la gráfica de $y \leq 2x$ consiste de la recta y el medio plano abajo de la recta, como se indica en la figura 8.51.

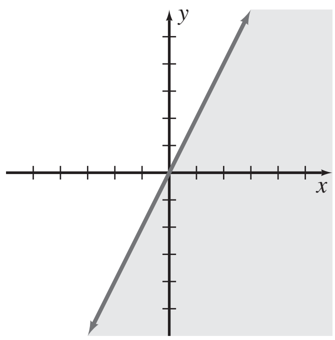


Figura 8.51

Sistemas de desigualdades lineales

Ahora le será fácil usar el enfoque de graficación para resolver un sistema de desigualdades lineales. Por ejemplo, el conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales como

$$\begin{pmatrix} x + y < 1 \\ x - y > 1 \end{pmatrix}$$

es la intersección de los conjuntos solución de las desigualdades individuales. En la figura 8.52(a) se indica el conjunto solución para $x + y < 1$, y en la figura 8.52(b) se indica el conjunto solución para $x - y > 1$. Luego, en la figura 8.52(c), la región sombreada representa la intersección la las dos regiones sombreadas en las partes (a) y (b); por ende, es la solución del sistema dado. La región sombreada en la figura 8.52(c) consiste de todos los puntos que están bajo la recta $x + y = 1$ y también están bajo la recta $x - y = 1$.

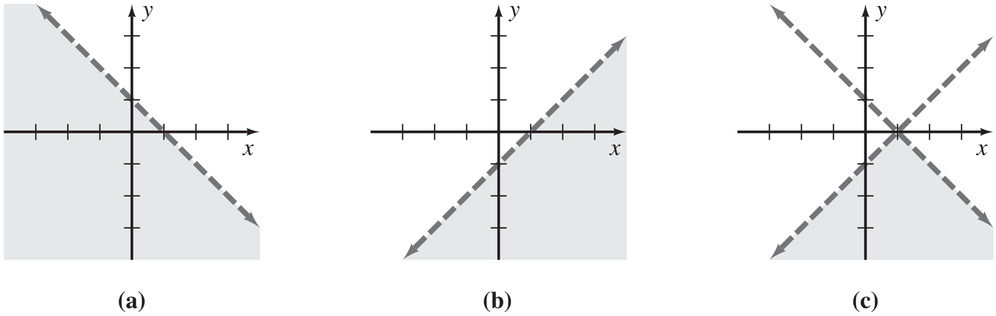


Figura 8.52

Ahora resuelva otro sistema de desigualdades lineales.

Ejemplo de salón de clases
Resolver este sistema graficando
$$\begin{pmatrix} x - 2y < 3 \\ 3x + 4y \geq -8 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 3 Resolver este sistema graficando $\begin{pmatrix} 2x + 3y \leq 6 \\ x - 4y < 4 \end{pmatrix}$.

Solución

Primero grafique las desigualdades individuales. El conjunto solución para $2x + 3y \leq 6$ se muestra en la figura 8.53(a), y el conjunto solución para $x - 4y < 4$ se muestra en la figura 8.53(b). (Note la línea sólida en la parte (a) y la línea punteada en la parte (b)). Luego, en la figura 8.53(c), se sombreó la intersección de las gráficas en las partes (a) y (b). Por ende, se representa el conjunto solución para el sistema dado con la región sombreada en la figura 8.53(c). Esta región consiste en todos los puntos que están debajo de la recta $2x + 3y = 6$ y también sobre la recta $x - 4y = 4$.

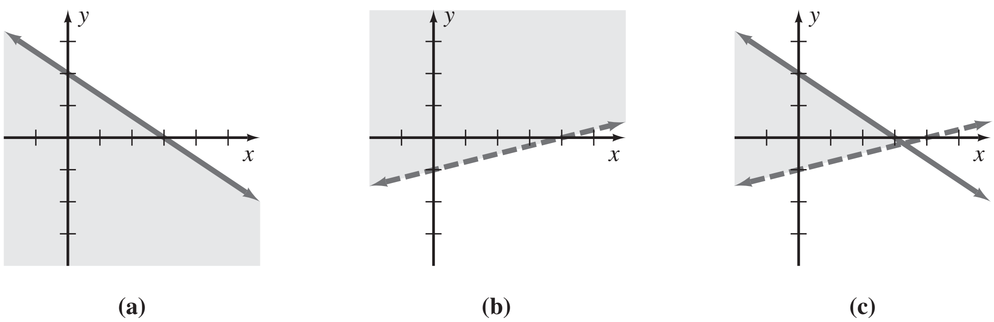


Figura 8.53

Comentario: Recuerde que la región sombreada en la figura 8.53 (c) representa el conjunto solución de los sistemas dados. Las partes (a) y (b) se dibujaron sólo para ayudarle a determinar la región sombreada final. Con algo de práctica, podrá ser capaz de ir directamente a la parte (c) sin tener que dibujar las gráficas para las desigualdades individuales.

Examen de conceptos 8.7

Para los problemas 1-8, responder cierto o falso.

1. El par ordenado $(2, -3)$ satisface la desigualdad lineal $2x + y > 1$.
2. Una línea punteada en la gráfica indica que los puntos en la recta no satisfacen la desigualdad.
3. Cualquier punto puede ser usado como punto de prueba para determinar la mitad del plano que es la solución de la desigualdad.

4. La solución de un sistema de desigualdades es la intersección de los conjuntos solución de las desigualdades individuales.

5. El par ordenado (1, 4) satisface el sistema de desigualdades lineales $\begin{pmatrix} x + y > 2 \\ 2x + y < 3 \end{pmatrix}$.

6. El par ordenado $(3, -2)$ satisface el enunciado $5x - 2y \geq 19$.

7. El par ordenado $(1, -3)$ satisface la desigualdad $-2x - 3y < 4$.

8. El par ordenado $(-4, -1)$ satisface el sistema de desigualdades $\begin{pmatrix} x + y < 5 \\ 2x - 3y > 6 \end{pmatrix}$.

Conjunto de problemas 8.7

Para los problemas 1-20, graficar cada desigualdad. **(Objetivo 1)**

1. $x + y > 1$
2. $2x + y > 4$
3. $3x + 2y < 6$
4. $x + 3y < 3$
5. $2x - y \geq 4$
6. $x - 2y \geq 2$
7. $4x - 3y \leq 12$
8. $3x - 4y \leq 12$
9. $y > -x$
10. $y < x$
11. $2x - y \geq 0$
12. $3x - y \leq 0$
13. $-x + 2y < -2$
14. $-2x + y > -2$
15. $y \leq \frac{1}{2}x - 2$
16. $y \geq -\frac{1}{2}x + 1$
17. $y \geq -x + 4$
18. $y \leq -x - 3$
19. $3x + 4y > -12$
20. $4x + 3y > -12$

Para los problemas 21-30, indicar el conjunto solución para cada sistema de desigualdades lineales sombreando la región apropiada. **(Objetivo 2)**

21. $\begin{pmatrix} 2x + 3y > 6 \\ x - y < 2 \end{pmatrix}$
22. $\begin{pmatrix} x - 2y < 4 \\ 3x + y > 3 \end{pmatrix}$
23. $\begin{pmatrix} x - 3y \geq 3 \\ 3x + y \leq 3 \end{pmatrix}$
24. $\begin{pmatrix} 4x + 3y \leq 12 \\ 4x - y \geq 4 \end{pmatrix}$
25. $\begin{pmatrix} y \geq 2x \\ y < x \end{pmatrix}$
26. $\begin{pmatrix} y \leq -x \\ y > -3x \end{pmatrix}$
27. $\begin{pmatrix} y < -x + 1 \\ y > -x - 1 \end{pmatrix}$
28. $\begin{pmatrix} y > x - 2 \\ y < x + 3 \end{pmatrix}$
29. $\begin{pmatrix} y < \frac{1}{2}x + 2 \\ y < \frac{1}{2}x - 1 \end{pmatrix}$
30. $\begin{pmatrix} y > -\frac{1}{2}x - 2 \\ y > -\frac{1}{2}x + 1 \end{pmatrix}$

Pensamientos en palabras

31. Explique cómo graficaría la desigualdad 2*x* 2 2*y* . 4.

32. ¿Por qué el punto (3, 2 2) no es un buen punto de prueba para usar al graficar la desigualdad 3*x* 2 2*y* # 13?

Más investigación

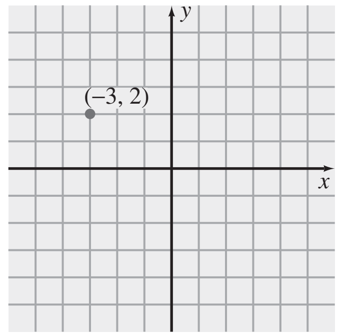
Para los problemas 33-36, indicar el conjunto solución para cada sistema de desigualdades lineales sombreando la región apropiada.

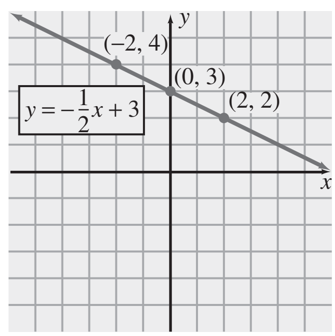
33. $\begin{pmatrix} y > x + 1 \\ y < x - 1 \end{pmatrix}$
34. $\begin{pmatrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 4y \leq 12 \\ 2x + y \leq 4 \end{pmatrix}$
35. $\begin{pmatrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 4 \\ 2x - 3y \leq 6 \end{pmatrix}$
36. $\begin{pmatrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 5y \geq 15 \\ 5x + 3y \geq 15 \end{pmatrix}$

Respuestas del examen de conceptos

1. Falso **2.** Cierto **3.** Falso **4.** Cierto **5.** Falso **6.** Cierto **7.** Falso **8.** Falso

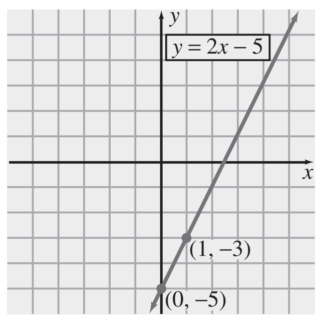
Resumen

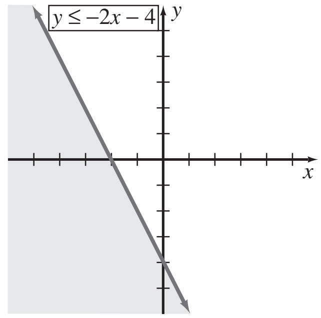
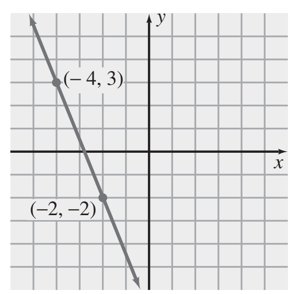
<table>
<tr><th>OBJETIVO</th><th>RESUMEN</th><th>EJEMPLO</th></tr>
<tr>
<td>Fijar los puntos en un sistema de coordenadas rectangulares.
(Sección 8.1/Objetivo 1)</td>
<td>El sistema de coordenadas rectangulares involucra una correspondencia uno a uno entre los pares ordenados de números reales y los puntos en un plano. Para un par ordenado (x, y), x es la distancia entre un punto y el eje vertical medido en paralelo al eje horizontal, y y es la distancia del entre el punto y el eje horizontal medido en paralelo al eje vertical.</td>
<td>Fijar el punto $(-3, 2)$.
Solución
Del origen, moverse 3 unidades a la izquierda en el eje x y después moverse 2 unidades en paralelo al eje y.


Problema de muestra 1
Fijar el punto $(2, -3)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>Dibujar gráficas para ecuaciones fijando puntos.
(Sección 8.1/Objetivo 3)</td>
<td>Para graficar una ecuación con dos variables, x y y, mantenga estos pasos en mente:
1. Resolver la ecuación para y en términos de x de no estar ya en tal forma.
2. Plantear una tabla de pares ordenados que satisfaga la ecuación.
3. Fijar los pares ordenados.
4. Conectar los puntos.</td>
<td>Graficar $x + 2y = 6$.
Solución
Resolver $x + 2y = 6$ para y resulta en la ecuación $y = -\frac{1}{2}x + 3$.
<table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td>y</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr></table>


Problema de muestra 2
Graficar $2x - y = 4$.</td>
</tr>
</table>

(*continúa*)

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Hallar las intersecciones x y y para la gráfica de una ecuación lineal. (Sección 8.2/Objetivo 1)	La intersección x es la coordenada de x del punto donde la gráfica cruza con el eje x. La intersección y es la coordenada de y donde la gráfica cruza el eje y. Para hallar la intersección x, sustituya y con 0 en la ecuación y después resuelva para x. Para hallar la intersección y, sustituya x con 0 en la ecuación y después resuelva para y.	Encontrar las intersecciones x y y para la gráfica de una recta con la ecuación $2x - y = -4$. **Solución** Sea $y = 0$. $2x - 0 = -4$ $2x = -4$ $x = -2$ Así que la intersección x es -2. Sea $x = 0$. $2(0) - y = -4$ $-y = -4$ $y = 4$ Así que la intersección y es 4. **Problema de muestra 3** Encontrar las intersecciones x y y para la gráfica de la recta con la ecuación $3x + 2y = 12$.
Graficar ecuaciones lineales. (Sección 8.2/Objetivo 2)	Para graficar una ecuación lineal, se pueden encontrar dos soluciones, ubicar los puntos correspondientes y conectar los puntos con una línea recta. Si la ecuación está en forma pendiente-ordenada al origen, $y = mx + b$, un método para graficar es usar la intersección y y la pendiente para producir dos soluciones. Si la ecuación está en forma estándar, $Ax + By = C$, un método para graficar es usar la intersección x y y para las dos soluciones. Es aconsejable encontrar una tercer solución y fijar su punto correspondiente para comprobar.	Graficar $y = 2x - 5$. **Solución** De la ecuación $y = 2x - 5$ se sabe que la pendiente es 2 y la intersección y es -5. Ubique el punto $(0, -5)$. Del punto $(0, -5)$, muévase dos unidades arriba y una unidad a la derecha porque la pendiente es 2. Dibuje una recta conectando los puntos.  **Problema de muestra 4** Graficar $y = -x + 4$.
Graficar desigualdades lineales. (Sección 8.7/Objetivo 1)	Para graficar una desigualdad lineal, primero debe graficar la recta de la igualdad correspondiente. Use una línea sólida si la igualdad está incluida en el enunciado dado, o una línea punteada si la igualdad no está incluida. Después use un punto de prueba para determinar qué mitad del plano se incluye en el conjunto solución. Vea la página 381 para los pasos detallados.	Graficar $2x + y \leq -4$. **Solución** Primero grafique $2x + y = -4$. Elija $(0, 0)$ como punto de prueba. Sustituir $(0, 0)$ en la desigualdad da $0 \leq -4$. Debido a que le punto de prueba vuelve a la desigualdad un enunciado falso, la mitad del plano que no contiene el punto $(0, 0)$ está en la solución.

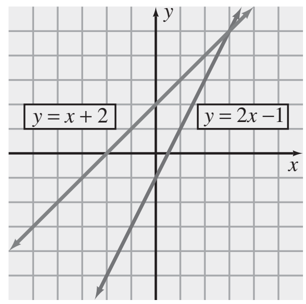
OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
		 **Problema de muestra 5** Graficar $x > 3y$.
Hallar la pendiente de una recta entre dos puntos. **(Sección 8.3/Objetivo 1)**	Si los puntos P_1 y P_2 con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) respectivamente son cualesquiera dos puntos en una recta, entonces la pendiente de la recta (denotada por m) se encuentra con $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_1 \neq x_2$. La pendiente de la recta es la razón entre el cambio vertical y el cambio horizontal. La pendiente puede ser negativa, positiva o cero. El concepto de pendiente no se define para líneas verticales.	Encontrar la pendiente de una recta que pasa a través de los puntos $(1, -4)$ y $(3, 5)$. **Solución** $m = \frac{5 - (-4)}{3 - 1} = \frac{9}{2}$ **Problema de muestra 6** Encontrar la pendiente de una recta que pasa a través de los puntos $(2, 3)$ y $(-1, 5)$.
Graficar rectas dados un punto y la pendiente. **(Sección 8.3/Objetivo 3)**	Para graficar una recta, dados un punto y la pendiente, primero se debe fijar el punto. Después, a partir de ese punto, localice otro punto moviéndose el número de unidades de cambio vertical y cambio horizontal determinados por la pendiente dada.	Graficar la recta que pasa a través del punto $(-4, 3)$ y tiene una pendiente de $-\frac{5}{2}$. **Solución** Ubique el punto $(-4, 3)$. Ya que $m = -\frac{5}{2} = \frac{-5}{2}$, del punto $(-4, 3)$ muévase 5 unidades hacia abajo y 2 unidades a la derecha para localizar otro punto. Dibuje la recta a través de los puntos.  **Problema de muestra 7** Graficar la recta que pasa a través del punto $(-2, -3)$ y tiene una pendiente de $\frac{1}{4}$.

(*continúa*)

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Aplicar la forma pendiente-ordenada al origen de una ecuación. (Sección 8.4/Objetivo 2)	La ecuación $y = mx + b$ es llamada forma pendiente-ordenada al origen de la ecuación de una recta. Si la ecuación de una línea no vertical se escribe en forma pendiente-ordenada al origen, entonces el coeficiente de x es la pendiente de la recta y el término constante es la intersección y.	Determinar la pendiente y la intersección y de la recta con la ecuación $5x - 3y = 12$. **Solución** Resolver para y para tener la ecuación en forma de pendiente-ordenada al origen. $5x - 3y = 12$ $-3y = -5x + 12$ $y = \frac{5}{3}x - 4$ Entonces, la pendiente de la recta es $\frac{5}{3}$ y la intersección y es -4. **Problema de muestra 8** Determinar la pendiente y la intersección de la recta con la ecuación $x + 2y = 8$.
Aplicar el concepto de pendiente. (Sección 8.3/Objetivo 4)	El concepto de pendiente se usa en situaciones que involucran una inclinación. El peralte de una autopista y la inclinación de una caminadora son un par de ejemplos que contienen pendientes.	El jardín de una casa construida en una colina tiene una pendiente de $\frac{3}{2}$. En el jardín, ¿cuánto cambio en distancia vertical hay por 40 pies de cambio de distancia horizontal? **Solución** Sea y el cambio en la distancia vertical. Resuelva la siguiente proporción $\frac{3}{2} = \frac{y}{40}$ $2y = 120$ $y = 60$ El cambio en la distancia vertical sería de 60 pies. **Problema de muestra 9** Si la razón de la contrahuella con la huella de unas escaleras es $\frac{2}{3}$, y la contrahuella mide 8 pulgadas, hallar la medida de la huella.
Hallar la ecuación de una recta dados un punto y la pendiente. (Sección 8.4/Objetivo 1a)	La forma de punto-pendiente de la ecuación de una recta, $y - y_1 = m(x - x_1)$, puede usarse para encontrar la ecuación. Sustituya la pendiente y las coordenadas de un punto en la fórmula. Su respuesta puede quedarse en forma estándar o en forma pendiente-ordenada al origen, dependiendo de las instrucciones.	Encontrar la ecuación de una recta que tiene una pendiente de 3 y pasa a través del punto $(-2, 5)$. Escriba el resultado en forma pendiente-ordenada al origen. **Solución** $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 5 = 3[x - (-2)]$ $y - 5 = 3(x + 2)$ $y - 5 = 3x + 6$ $y = 3x + 11$ **Problema de muestra 10** Encontrar la ecuación de una recta que tiene una pendiente de -2 y pasa a través del punto $(1, -3)$. Escriba el resultado en forma pendiente-ordenada al origen.

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Encontrar la ecuación de una recta dados dos puntos. (Sección 8.4/Objetivo 1b)	Para usar la forma punto-pendiente, primero debe determinar la pendiente. Después debe sustituir la pendiente y las coordenadas de un punto en la forma punto-pendiente y simplificar.	Encontrar la ecuación de una recta que pasa a través de $(-2, 5)$ y $(1, 3)$.. Escriba el resultado en forma estándar. **Solución** $m = \dfrac{3 - 5}{1 - (-2)} = \dfrac{-2}{3}$ Ahora sustituya la pendiente y cualquier punto en la forma punto-pendiente. $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 3 = \dfrac{-2}{3}(x - 1)$ $3(y - 3) = -2(x - 1)$ $3y - 9 = -2x + 2$ $2x + 3y = 11$ **Problema de muestra 1** Encontrar la ecuación de la recta que pasa a través de $(3, -1)$ y $(2, 3)$. Escriba el resultado en forma estándar.
Encontrar la ecuación de una recta dado un punto en ésta y la ecuación de otra recta paralela o perpendicular a esa recta. (Sección 8.4/Objetivo 1c)	Si dos rectas tienen pendientes m_1 y m_2 respectivamente, entonces: **1.** Las dos son paralelas si y sólo si $m_1 = m_2$. **2.** Las rectas son perpendiculares si y sólo si $(m_1)(m_2) = -1$.	Encontrar la ecuación de una recta que pasa a través del punto $(1, 4)$ y es perpendicular a la recta $y = -\dfrac{2}{5}x + 3$. **Solución** La pendiente de la recta dada es $-\dfrac{2}{5}$, así que el recíproco negativo es $\dfrac{5}{2}$. Use el punto $(1, 4)$ y la pendiente $\dfrac{5}{2}$ en la forma punto-pendiente para obtener $y - 4 = \dfrac{5}{2}(x - 1)$. Simplificar da la ecuación $5x - 2y = -3$. **Problema de muestra 12** Encontrar la ecuación de la recta que pasa a través del punto $(4, -1)$ y que es paralela a la recta $y = \dfrac{-2}{3}x - 5$.

(*continúa*)

<table>
<tr><th>OBJETIVO</th><th>RESUMEN</th><th>EJEMPLO</th></tr>
<tr>
<td>Resolver un sistema lineal de dos ecuaciones graficando.
(Sección 8.5/Objetivo 1)</td>
<td>Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales graficando produce una da las siguientes tres posibilidades:
1. Las gráficas de dos ecuaciones son líneas que se cruzan, lo cual indica una sola solución para el sistema, al cual se le llama sistema consistente.
2. Las gráficas de dos ecuaciones son líneas paralelas, lo cual indica que no hay solución para el sistema, al cual se le llama sistema inconsistente.
3. Las gráficas de dos ecuaciones son la misma línea, lo que indica una infinidad de soluciones para el sistema. A estas ecuaciones se les conoce como un conjunto de ecuaciones dependientes.</td>
<td>Resolver $\begin{pmatrix} 2x - y = 1 \\ x - y = -2 \end{pmatrix}$ graficando.
Solución
Graficar ambas líneas en el mismo plano de coordenadas.

Las rectas se cruzan en el punto (3, 5), el cual es la solución para el sistema.
Problema de muestra 13
Resolver $\begin{pmatrix} x + y = 3 \\ x - 3y = -1 \end{pmatrix}$ graficando.</td>
</tr>
<tr>
<td>Usar el método de sustitución para resolver un sistema de ecuaciones.
(Sección 8.5/Objetivo 2)</td>
<td>Aquí están los pasos para el método de sustitución para resolver un sistema de ecuaciones:
Paso 1 Resolver una de las ecuaciones para una variable en términos de la otra variable.
Paso 2 Sustituir con la expresión obtenida en el paso 1 en la otra ecuación para producir una ecuación con una sola variable.
Paso 3 Resolver la ecuación obtenida en el paso 2.
Paso 4 Usar la solución obtenida en el paso 3, junto con la expresión obtenida en el paso 1, para determinar la solución del sistema.</td>
<td>Resolver $\begin{pmatrix} x - 2y = -9 \\ 3x + 2y = 5 \end{pmatrix}$.
Solución
Resolver la primera ecuación para x.
$x = 2y - 9$
Sustituir $2y - 9$ por x en la segunda ecuación y resolver para y.
$3(2y - 9) + 2y = 5$
$6y - 27 + 2y = 5$
$8y = 32$
$y = 4$
Para encontrar a x, sustituir y con 4 en la ecuación ya resuelta para x.
$x = 2(4) - 9$
$x = -1$
El conjunto solución es $\{(-1, 4)\}$.
Problema de muestra 14
Resolver $\begin{pmatrix} x + y = -8 \\ -3x + 2y = 9 \end{pmatrix}$.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>OBJETIVO</th><th>RESUMEN</th><th>EJEMPLO</th></tr>
<tr>
<td>Usar el método de eliminación por adición para resolver un sistema de ecuaciones.
(Sección 8.6/Objetivo 1)</td>
<td>El método de eliminación por adición involucra reemplazar sistemas de ecuaciones con sistemas equivalentes hasta llegar a un sistema en el cual las soluciones puedan determinarse fácilmente. Se pueden realizar las siguientes operaciones:
1. Cualquiera de las dos ecuaciones del sistema puede intercambiarse.
2. Ambos lados de cualquier ecuación del sistema puede multiplicarse por un número real distinto a cero.
3. Cualquier ecuación del sistema puede reemplazarse con la suma de esa ecuación y un múltiplo distinto a cero de otra ecuación.</td>
<td>Resolver $\begin{pmatrix} 2x + 5y = 11 \\ 3x - y = 8 \end{pmatrix}$.
Solución
Reemplace la primera ecuación con la ecuación que se forma de multiplicar la segunda ecuación por 5 y después sumar el resultado a la primera ecuación.
$\begin{pmatrix} 17x = 51 \\ 3x - y = 8 \end{pmatrix}$
De la primera ecuación se puede determinar que $x = 3$. Para hallar y, sustituya x con 3 en la primera ecuación.
$2(3) + 5y = 11$
$6 + 5y = 11$
$5y = 5$
$y = 1$
El conjunto solución es $\{(3, 1)\}$.
Problema de muestra 15
Resolver $\begin{pmatrix} 2x + y = 1 \\ 6x + 5y = 13 \end{pmatrix}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>Determinar cuál método usar para resolver un sistema de ecuaciones.
(Sección 8.6/Objetivo 2)</td>
<td>Se han estudiado tres métodos para resolver sistemas de ecuaciones.
4. El método de graficación funciona bien si quiere una representación visual del problema. Sin embargo, puede que sea imposible obtener una solución exacta con la gráfica.
5. El método de sustitución funciona bien si una de las ecuaciones ya tiene una variable resuelta. Da soluciones exactas.
6. El método de eliminación por adición da soluciones exactas.</td>
<td>Decidir cuál método, eliminación por adición o sustitución, sería más conveniente para resolver los sistemas de ecuaciones dados.
$\begin{pmatrix} 2x + y = 8 \\ y = 3x + 1 \end{pmatrix}$
Solución
El método de sustitución funcionaría para este problema porque la segunda ecuación ya tiene y resuelta. Usando el método de sustitución, se puede determinar que el conjunto solución es $\left\{\left(\frac{7}{5}, \frac{26}{5}\right)\right\}$.
Problema de muestra 16
Decidir cuál método, eliminación por adición o sustitución, sería más conveniente para resolver los sistemas de ecuaciones dados.
$\begin{pmatrix} 3x - 2y = 10 \\ 3x + 2y = 14 \end{pmatrix}$</td>
</tr>
</table>

(*continúa*)

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Resolver problemas verbales usando un sistema de ecuaciones. (Sección 8.5/Objetivo 5; Sección 8.6/Objetivo 3)	Muchos problemas verbales presentados anteriormente pueden resolverse usando un sistema de ecuaciones. Resolver estos problemas se vuelve más sencillo si se usan sistemas de ecuaciones. Tanto el método de eliminación por adición como el de sustitución se pueden usar para resolver el sistema de ecuaciones resultante.	En una encuesta reciente, se les preguntó a 500 estudiantes sobre sus especialidades. El número de mujeres en la encuesta fue 40 menos que el doble de hombres en la encuesta. Encontrar el número de mujeres encuestadas. **Solución** Sea x el número de mujeres en la encuesta y sea y el número de hombres en la encuesta. Después, con la información dada, puede escribir el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{pmatrix} x + y = 500 \\ x = 2y - 40 \end{pmatrix}$ Al resolver este sistema, se puede determinar que el número de mujeres en la encuesta es 320. **Problema de muestra 17** La suma de dos números es 90. El número más grande es tres menos que el doble del número más pequeño. Encontrar los dos números.

Capítulo 8 Conjunto de problemas de repaso

Para los problemas 1-10, graficar cada ecuación.

1. $2x - 5y = 10$

2. $y = -\frac{1}{3}x + 1$

3. $y = -2x$

4. $3x + 4y = 12$

5. $2x - 3y = 0$

6. $2x + y = 2$

7. $x - y = 4$

8. $x + 2y = -2$

9. $y = \frac{2}{3}x - 1$

10. $y = 3x$

Para los problemas 11-16, determinar la pendiente y la ordenada al origen y graficar la recta.

11. $2x - 5y = 10$

12. $y = -\frac{1}{3}x + 1$

13. $x + 2y = 2$

14. $3x + y = -2$

15. $2x - y = 4$

16. $3x - 4y = 12$

17. Hallar la pendiente de la recta determinada por los puntos $(3, -4)$ y $(-2, 5)$.

18. Hallar la pendiente de la recta $5x - 6y = 30$.

19. Escribir la ecuación de la recta que tiene una pendiente de $-\frac{5}{7}$ y contiene el punto $(2, -3)$.

20. Escribir la ecuación de la recta que contiene los puntos $(2, 5)$ y $(-1, -3)$.

21. Escribir la ecuación de la recta que tiene una pendiente de $\frac{2}{9}$ y una ordenada al origen de -1.

22. Escribir la ecuación de la recta que contiene el punto $(2, 4)$ y que es perpendicular al eje x.

23. Resolver el sistema $\begin{pmatrix} 2x + y = 4 \\ x - y = 5 \end{pmatrix}$ usando el método de graficación.

Para los problemas 24-35, resolver cada sistema usando el método de eliminación por adición o el de sustitución.

24. $\begin{pmatrix} 2x - y = 1 \\ 3x - 2y = -5 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 2x + 5y = 7 \\ x = -3y + 1 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 5y = 3 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 9x + 2y = 140 \\ x + 5y = 135 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = -5 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 0 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} x + y = 1000 \\ 0.07x + 0.09y = 82 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} y = 5x + 2 \\ 10x - 2y = 1 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 5x - 7y = 9 \\ y = 3x - 2 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} 10t + u = 6u \\ t + u = 12 \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} t = 2u \\ 10t + u - 36 = 10u + t \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} u = 2t + 1 \\ 10t + u + 10u + t = 110 \end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix} y = -\frac{2}{3}x \\ \frac{1}{3}x - y = -9 \end{pmatrix}$

Para los problemas 36-39, graficar cada desigualdad.

36. $y > \frac{2}{3}x - 1$

37. $x - 2y \leq 4$

38. $y \leq -2x$

39. $3x + 2y > -6$

Para los problemas 40 y 41, graficar el conjunto solución del sistema de desigualdades.

40. $\begin{pmatrix} y > 2x - 4 \\ y \leq -x + 3 \end{pmatrix}$

41. $\begin{pmatrix} 2x + y < 6 \\ x - 3y > 3 \end{pmatrix}$

Resolver cada uno de los siguientes problemas planteando y resolviendo un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables.

42. La suma de dos números es 113. El número más grande es 1 menos que el doble del número más pequeño. Hallar los números.

43. El año pasado, Mark invirtió cierta cantidad de dinero a de interés anual y $500 más que la primera cantidad a 8%. Recibió $390.00. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

44. Cindy tiene 43 monedas consistiendo de monedas de cinco y diez centavos. El valor total de las monedas es $3.40. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene?

45. El largo de un rectángulo mide una pulgada más que tres veces su ancho. Si el perímetro del rectángulo es 50 pulgadas, hallar el largo y el ancho.

46. El ancho de un rectángulo mide 5 pulgadas menos que su largo. Si el perímetro del rectángulo es de 38 pulgadas, hallar el largo y el ancho.

47. Alex tiene 32 monedas consistiendo de monedas de veinticinco y diez centavos. El valor total de las monedas es $4.85. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene?

48. Dos ángulos son complementarios y uno de ellos mide menos que el doble del otro. Hallar la medida de cada ángulo.

49. Dos ángulos son suplementarios y el ángulo más grande mide 20° menos que tres veces el más pequeño. Hallar la medida de cada ángulo.

50. Cuatro hamburguesas y cinco malteadas costaron un total de $25.50. Dos malteadas costaron $1.75 más que una hamburguesa. Encontrar el costo de una hamburguesa y también el costo de una malteada.

51. Tres botellas de jugo de naranja y dos botellas de agua costaron $6.75. Por otra parte, dos botellas de jugo de naranja y tres botellas de agua costaron $6.15. Hallar el costo por botella de cada uno.

Capítulo 8 Examen

Para los problemas 1-4, determinar la pendiente y la ordenada al origen y graficar cada ecuación.

1. $5x + 3y = 15$
2. $-2x + y = -4$
3. $y = -\frac{1}{2}x - 2$
4. $3x + y = 0$
5. Hallar x si la recta que pasa a través de los puntos (4, 7) y (x, 13) tiene una pendiente de $\frac{3}{2}$.
6. Hallar y si la recta que pasa a través de los puntos (1, y) y (6, 5) tiene una pendiente de $-\frac{3}{5}$. .
7. Si una recta tiene una pendiente de $\frac{1}{4}$ y pasa a través del punto (3, 5), hallar las coordenadas de otros dos puntos en la recta.
8. Si una recta tiene una pendiente de -3 y pasa a través del punto (2, 1), hallar las coordenadas de otros dos puntos en la recta.
9. Suponga que una autopista se eleva a una distancia de 85 pies sobre la distancia horizontal de 1850 pies. Exprese el peralte de la autopista en la décima de porcentaje más cercana.
10. Hallar la abscisa al origen de la gráfica de $y = 4x + 8$.

Para los problemas 11-13, expresar cada ecuación en la forma $Ax + By = C$, donde A, B y C son números enteros.

11. Determinar la ecuación de la recta que tiene una pendiente de $-\frac{3}{5}$ y una ordenada al origen de 4.
12. Determinar la ecuación de la recta que contiene el punto y tiene una pendiente de $\frac{4}{9}$.
13. Determinar la ecuación para la recta que contiene los puntos (4, 6) y $(-2, -3)$.
14. Resolver el sistema $\begin{pmatrix} 3x - 2y = -4 \\ 2x + 3y = 19 \end{pmatrix}$ graficando.
15. Resolver el sistema $\begin{pmatrix} x - 3y = -9 \\ 4x + 7y = 40 \end{pmatrix}$ usando el método de eliminación por adición.
16. Resolver el sistema $\begin{pmatrix} 5x + y = -14 \\ 6x - 7y = -66 \end{pmatrix}$ usando el método de sustitución.
17. Resolver el sistema $\begin{pmatrix} 2x - 7y = 26 \\ 3x + 2y = -11 \end{pmatrix}$.
18. Resolver el sistema $\begin{pmatrix} 8x + 5y = -6 \\ 4x - y = 18 \end{pmatrix}$.

Para los problemas 24 y 25, resolver cada problema planteando y resolviendo un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables.

19. $5x + 3y = 15$
20. $y = \frac{2}{3}x$
21. $y = 2x - 3$
22. $y \geq 2x - 4$
23. $x + 3y < -3$
24. Tres paquetes de papel y 4 cuadernos cuestan \$19.63. Cuatro paquetes de papel y 1 cuaderno cuestan \$16.25. Hallar el costo de cada uno.
25. El largo de un rectángulo mide una pulgada menos que el doble de su ancho. Si el perímetro del rectángulo mide 40 pulgadas, hallar el largo del rectángulo.

9 Raíces y radicales

Paul Thomas/The Image Bank/Getty Images

"Piense en un día en el que haya terminado increíblemente satisfecho. No fue un día en el que no hizo nada; fue un día en el que tenía todo por hacer y lo hizo".
MARGARET THATCHER

Tip de estudio

Muchos estudiantes van a clase regularmente y tienen buenos resultados en las tareas, pero su desempeño en los exámenes es muy pobre. Debido a que las calificaciones están basadas sobre todo en los exámenes, obtener buenos resultados en estos es esencial para tener éxito en los cursos de matemáticas universitarios. Exámenes de práctica pueden ayudarle a prepararse para un examen real. Asegúrese de realizar cualquier examen de prueba que entregue su instructor al menos tres día antes del examen. Eso le dará tiempo de hacer preguntas sobre los problemas en el examen de práctica.

Los exámenes de práctica pueden crearse usando tarjetas de estudio. Para cada conjunto de problemas de tarea, seleccione dos o tres y escríbalos en tarjetas de estudio. El problema debe estar escrito al frente de la tarjeta y la respuesta al reverso. Con la respuesta, incluya el número de una página de referencia para el problema. Puede incluso pedirle a un familiar que escriba estas tarjetas por usted.

Una vez que haya creado las tarjetas, barájelas para que los problemas no estén agrupados por tema. Así es más como un examen. Siéntese y resuelva los problemas como si estuviera resolviendo el examen; nada de comida, bebidas, música o uso de su libro o notas. Tal vez incluso quiera programar un cronómetro para tener un control del tiempo del examen. Cuando termine, revise sus respuestas y calcule una calificación para el examen de práctica. Para cualquier problema que haya tenido mal, la página de referencia le permitirá repasar esa sección para estudiar más problemas del mismo tipo.

¿Está satisfecho con sus logros hasta este punto del curso de matemáticas?

Vista previa del capítulo

El capítulo 9 presenta el concepto de obtener la raíz de un número. Esta es una operación opuesta a elevar un número a un exponente. Por ejemplo, se sabe que 6^2 5 36. El proceso de obtener la raíz de 36 significa buscar un número que, elevado al cuadrado, dé el producto de 36. El número es una raíz cuadrada de 36.

Gran parte de este capítulo está dedicado a la simplificación de raíces. Conozca las reglas de lo que se considera una forma simplificada. Debe poder crear una hoja de referencia en la que enliste los cuadrados perfectos, cubos perfectos y cuartas perfectas. Una versión corta de este tipo de hoja de referencia se muestra a continuación:

Número, x	Cuadrado, x^2	Cubo, x^3	Cuarta potencia, x^4
1	1	1	1
2	4	8	16
3	9	27	81
4	16	64	256
5	25	125	625
6	36	216	1296

9.1 Raíces y radicales

OBJETIVOS

1. Evaluar raíces de expresiones numéricas
2. Adición y substracción de expresiones de radicales
3. Use formulas involving radicales

Elevar al cuadrado un número significa elevarlo a la segunda potencia; esto es: usar el número como factor dos veces.

$$4^2 = 4 \cdot 4 = 16$$ Léase "cuatro al cuadrado es igual a dieciséis"

$$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$$

La **raíz cuadrada de un número** es uno de sus dos factores iguales. Por ende, 4 es una raíz cuadrada de 16, porque $4 \cdot 4 = 16$. Del mismo modo, -4 también es una raíz cuadrada de 16 porque $(-4)(-4) = 16$. En general, a es una raíz cuadrada de b si $a^2 = b$. Las siguientes generalizaciones son consecuencia directa del enunciado anterior.

1. Todo número real positivo tiene dos raíces cuadradas; una es positiva y la otra es negativa. Son opuestas una de otra.
2. Los números reales negativos no tienen raíces cuadradas, porque cualquier número real, excepto cero, es positivo cuando se eleva al cuadrado.
3. La raíz cuadrada de 0 es 0.

El símbolo $\sqrt{\ }$, llamado **signo radical**, se usa para designar la raíz cuadrada no negativa. El número bajo el signo radical se llama **radicando**. Toda la expresión, como $\sqrt{16}$, se llama **radical**.

$\sqrt{16} = 4$ — $\sqrt{16}$ indica la raíz cuadrada principal o no negativa de 16.

$-\sqrt{16} = -4$ — $-\sqrt{16}$ indica la raíz cuadrada negativa de 16.

$\sqrt{0} = 0$ — Cero sólo tiene una raíz cuadrada. Técnicamente, se podría escribir $-\sqrt{0} = -0 = 0$

$\sqrt{-4}$ no es un número real.

$-\sqrt{-4}$ no es un número real.

En general, es útil la siguiente definición.

Definición 9.1

Si $a \geq 0$ y $b \geq 0$, entonces $\sqrt{b} = a$ si y sólo si $a^2 = b$; a se llama **raíz cuadrada principal de *b***.

Si a es un número que es el cuadrado de un número entero, entonces $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$ son números racionales. Por ejemplo, $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$ y $\sqrt{25}$ son los números racionales 1, 2 y 5, respectivamente. Los números 1, 4 y 25 son llamados cuadrados perfectos porque cada uno representa el cuadrado de algún número entero. La siguiente tabla contiene los cuadrados de los números del 1 al 10. Debe conocer estos valores para que pueda reconocer inmediatamente raíces cuadradas como $\sqrt{81} = 9$, $\sqrt{144} = 12$, $\sqrt{289} = 17$, etc. Además, los cuadrados perfectos de múltiplos de 10 son fáciles de reconocer. Por ejemplo, ya que $30^2 = 900$, se sabe que $\sqrt{900} = 30$.

$1^2 = 1$	$8^2 = 64$	$15^2 = 225$
$2^2 = 4$	$9^2 = 81$	$16^2 = 256$
$3^2 = 9$	$10^2 = 100$	$17^2 = 289$
$4^2 = 16$	$11^2 = 121$	$18^2 = 324$
$5^2 = 25$	$12^2 = 144$	$19^2 = 361$
$6^2 = 36$	$13^2 = 169$	$20^2 = 400$
$7^2 = 49$	$14^2 = 196$	

Conocer la lista de cuadrados perfectos también puede ayudarle con las raíces cuadradas de algunas fracciones. Considere los siguientes ejemplos:

$$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \quad \text{porque} \quad \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{6}{7} \quad \text{porque} \quad \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{36}{49}$$

$$\sqrt{0.09} = 0.3 \quad \text{porque} \quad (0.3)^2 = 0.09$$

Si a es un número positivo que no es el cuadrado de un entero, entonces $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$ son números irracionales. Por ejemplo, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{23}$, $\sqrt{31}$, $\sqrt{52}$, y $-\sqrt{75}$ son números irracionales. Recuerde que los números irracionales tienen representaciones decimales no repetitivas y no terminales. Por ejemplo, $\sqrt{2} = 1.414213562373\ldots$, donde los decimales nunca repiten un bloque de números.

Por razones prácticas, se suele usar una aproximación racional de un número irracional. La calculadora es una herramienta muy útil para encontrar tales aproximaciones. Asegúrese de poder usar su calculadora para hallar las siguientes aproximaciones de raíces cuadradas. Cada raíz cuadrada aproximada ha sido redondeada a la milésima más cercana.

$$\sqrt{19} = 4.359 \qquad \sqrt{38} = 6.164 \qquad \sqrt{72} = 8.485 \qquad \sqrt{93} = 9.644$$

Elevar al cubo un número significa elevarlo a la tercera potencia; esto es, usar el número como factor tres veces.

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Léase "dos al cubo igual a ocho"

$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$

Una **raíz cúbica de un número** es uno de sus tres factores iguales. Por ende, 2 es una raíz cúbica de 8 porque $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. (De hecho, 2 es el único número real que es una raíz cúbica de 8.) Más aún, -2 es una raíz cúbica de -8 porque $(-2)(-2)(-2) = -8$. (De hecho, -2 es el único número real que es una raíz cúbica de -8.)

En general, a es una raíz cúbica de b si $a^3 = b$. Las siguientes generalizaciones son consecuencia directa del enunciado anterior.

1. Todo número real positivo tiene un número real positivo como raíz cúbica.
2. Todo número real negativo tiene un número real negativo como raíz cúbica.
3. La raíz cúbica de 0 es 0.

Comentario: Técnicamente, todo número real distinto de cero tiene tres raíces cúbicas, pero sólo una de ellas es un número real. Las otras dos raíces se clasifican como números complejos. Esta vez el trabajo se restringe al conjunto de números reales.

El símbolo $\sqrt[3]{\ }$ designa la raíz cúbica de un número. Por ende, puede escribir

$$\sqrt[3]{8} = 2 \qquad \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \qquad \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$$

En general, es útil la siguiente definición.

Definición 9.2

$\sqrt[3]{b} = a$ si y sólo si $a^3 = b$.

En la definición 9.2, si $b \geq 0$ entonces $a \geq 0$, de la misma manera que si $b < 0$ entonces $a < 0$. El número a es llamado **raíz cúbica principal** de b o simplemente **raíz cúbica** de **b**. En el radical $\sqrt[3]{b}$, el 3 es llamado el índice del radical. Cuando se trabaja con raíces cuadradas, se suele omitir el índice; así que se escribe $\sqrt{b}$ en lugar de $\sqrt[2]{b}$. El concepto de raíz se puede extender a raíces cuartas, quintas, sextas y, en general, n-ésimas. Sin embargo, en este texto el trabajo se concentrará en las raíces cuadradas y cúbicas hasta la sección 11.3.

Debe familiarizarse con los siguientes cubos perfectos para que pueda reconocer sus raíces sin necesidad de usar calculadora o una tabla.

$2^3 = 8$	$5^3 = 125$	$8^3 = 512$
$3^3 = 27$	$6^3 = 216$	$9^3 = 729$
$4^3 = 64$	$7^3 = 343$	$10^3 = 1000$

Por ejemplo, debe poder reconocer que $\sqrt[3]{343} = 7$.

Adición y substracción de expresiones radicales

Recuerde el uso de la propiedad distributiva como base para agrupar términos similares. Aquí hay tres ejemplos:

$$3x + 2x = (3 + 2)x = 5x$$
$$7y - 4y = (7 - 4)y = 3y$$
$$9a^2 + 5a^2 = (9 + 5)a^2 = 14a^2$$

De manera similar, se pueden simplificar las expresiones que contienen radicales usando la propiedad distributiva.

$$5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = (5 + 7)\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$
$$8\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = (8 - 2)\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$
$$4\sqrt{7} + 6\sqrt{7} + 3\sqrt{11} - \sqrt{11} = (4 + 6)\sqrt{7} + (3 - 1)\sqrt{11} = 10\sqrt{7} + 2\sqrt{11}$$
$$6\sqrt[3]{7} + 4\sqrt[3]{7} - 2\sqrt[3]{7} = (6 + 4 - 2)\sqrt[3]{7} = 8\sqrt[3]{7}$$

Note que, si se quiere simplificar cuando se suman o restan expresiones radicales, los radicales deben tener el mismo radicando y el mismo índice. También note la forma usada para indicar multiplicación cuando se involucra un radical. Por ejemplo $5 \cdot \sqrt{2}$ se escribe $5\sqrt{2}$.

Ahora suponga que se necesita evaluar $5\sqrt{2} - \sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$ a la décima más cercana. Se puede evaluar la expresión tal cual como está o se puede simplificar primero al combinar radicales y después evaluar ese resultado. Se usará el segundo enfoque. (Probablemente sea una buena idea que lo haga de ambas formas con fines de comprobación).

$$\begin{aligned} 5\sqrt{2} - \sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} &= (5 - 1 + 4 - 2)\sqrt{2} \\ &= 6\sqrt{2} \\ &= 8.5 \quad \text{a la décima más cercana} \end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Encontrar una aproximación racional, a la décima más cercana, para $2\sqrt{2} + 8\sqrt{7} - 5\sqrt{2} + 3\sqrt{7} - 12\sqrt{2}$.

EJEMPLO 1

Encontrar una aproximación racional, a la décima más cercana, para $7\sqrt{3} + 9\sqrt{5} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{5} + 13\sqrt{3}$.

Solución

Primero, se simplifica la expresión dada y después se evalúa el resultado.

$$\begin{aligned} 7\sqrt{3} + 9\sqrt{5} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{5} + 13\sqrt{3} &= (7 + 2 + 13)\sqrt{3} + (9 - 3)\sqrt{5} \\ &= 22\sqrt{3} + 6\sqrt{5} \\ &= 51.5 \quad \text{a la décima más cercana} \end{aligned}$$

Aplicación de radicales

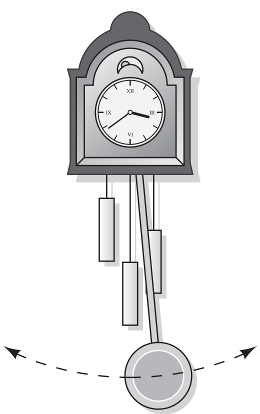


Figura 9.1

Muchas aplicaciones del mundo real involucran expresiones radicales. Por ejemplo, el periodo de un péndulo es el tiempo que tarda en balancearse de un lado al otro y de regreso (ver figura 9.1). La fórmula para el periodo es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$$

donde T representa el tiempo en segundos y L la longitud en pies.

Ejemplo de salón de clases
Encontrar el periodo de un péndulo que mide 1.75 pies de largo, a la décima de segundo más cercana.

EJEMPLO 2 Aplique su habilidad

Encontrar el periodo, a la décima de segundo más cercana, de un péndulo de 2.5 pies de largo.

Solución

Se usa 3.14 como aproximación de π y se sustituye L con 2.5 en la fórmula.

$$
\begin{aligned}
T &= 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}} \\
&= 2(3.14)\sqrt{\frac{2.5}{32}} \\
&= 1.8 \quad \text{a la décima más cercana}
\end{aligned}
$$

El periodo es de aproximadamente 1.8 segundos.

Los policías usan la fórmula $S = \sqrt{30Df}$ para estimar la velocidad de un carro basados en la longitud de las marcas de neumáticos (ver figura 9.2). En esta fórmula, S representa la velocidad del carro en millas por hora, D es la longitud de las marcas en pies y f es un coeficiente de fricción. Para una situación en particular, el coeficiente de fricción es una constante que depende del tipo y condición de la superficie.

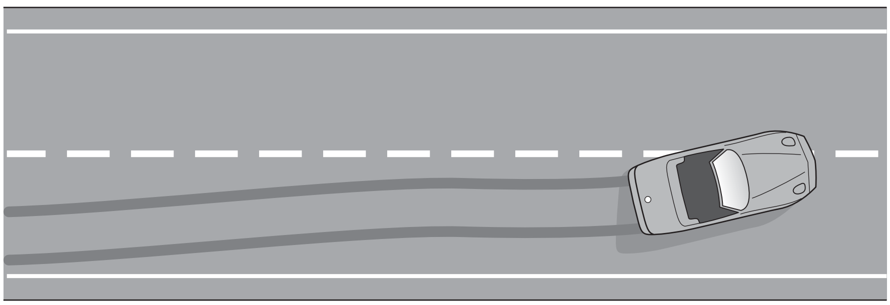


Figura 9.2

Ejemplo de salón de clases
Usando 0.30 como coeficiente de fricción, determinar qué tan rápido iba un automóvil si derrapó 185 pies. Exprese la respuesta en la milla por hora más cercana.

EJEMPLO 3 Aplique su habilidad

Usando 0.40 como coeficiente de fricción, determine cuán rápido viajaba un automóvil si derrapó 225 pies. Exprese su respuesta en la milla por hora más cercana.

Solución

Sustituya 0.40 por f y 225 por D en la fórmula $S = \sqrt{30Df}$.

$$S = \sqrt{30(225)(0.40)} = 52 \quad \text{al número entero más cercano}$$

El automóvil viajaba aproximadamente a 52 millas por hora.

Examen de conceptos 9.1

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. La raíz cúbica de un número es uno de sus tres factores iguales.
2. Cada número real positivo tiene un número real positivo por raíz cuadrada.
3. La raíz cuadrada principal de un número es la raíz cuadrada positiva del número.
4. El símbolo $\sqrt{}$ se llama radical.

5. La raíz cuadrada de 0 no es un número real.

6. El número bajo el signo de radical se llama radicando.

7. Todo número real positivo tiene dos raíces cuadradas.

8. La n en el radical $\sqrt[n]{a}$ es llamado el índice del radical.

9. La expresión radical $3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + \sqrt{2}$ se simplifica a $-\sqrt{2}$.

10. La expresión radical $\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} + \sqrt{\frac{4}{9}}$ se simplifica a $\frac{5}{3}$.

Conjunto de problemas 9.1

Para los problemas 1-26, evaluar cada radical sin usar una calculadora o una tabla. **(Objetivo 1)**

1. $\sqrt{49}$ **2.** $\sqrt{100}$ **3.** $-\sqrt{64}$

4. $-\sqrt{36}$ **5.** $\sqrt{121}$ **6.** $\sqrt{144}$

7. $\sqrt{3600}$ **8.** $\sqrt{2500}$ **9.** $-\sqrt{1600}$

10. $-\sqrt{900}$ **11.** $\sqrt{6400}$ **12.** $\sqrt{400}$

13. $\sqrt{324}$ **14.** $-\sqrt{361}$ **15.** $\sqrt{\frac{25}{9}}$

16. $\sqrt{\frac{1}{225}}$ **17.** $\sqrt{0.16}$ **18.** $\sqrt{0.0121}$

19. $\sqrt[3]{27}$ **20.** $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ **21.** $-\sqrt[3]{-8}$

22. $\sqrt[3]{\frac{125}{8}}$ **23.** $-\sqrt[3]{729}$ **24.** $\sqrt[3]{-125}$

25. $\sqrt[3]{-216}$ **26.** $\sqrt[3]{64}$

Para los problemas 27-40, usar una calculadora para evaluar cada radical. **(Objetivo 1)**

27. $\sqrt{576}$ **28.** $\sqrt{7569}$ **29.** $\sqrt{2304}$

30. $\sqrt{9801}$ **31.** $\sqrt{784}$ **32.** $\sqrt{1849}$

33. $\sqrt{4225}$ **34.** $\sqrt{2704}$ **35.** $\sqrt{3364}$

36. $\sqrt{1444}$ **37.** $\sqrt[3]{3375}$ **38.** $\sqrt[3]{1728}$

39. $\sqrt[3]{9261}$ **40.** $\sqrt[3]{5832}$

Para los problemas 41-48, usar una calculadora para encontrar una aproximación racional de cada raíz cuadrada. Exprese sus respuestas en la centésima más cercana.

41. $\sqrt{19}$ **42.** $\sqrt{34}$ **43.** $\sqrt{50}$ **44.** $\sqrt{66}$

45. $\sqrt{75}$ **46.** $\sqrt{90}$ **47.** $\sqrt{95}$ **48.** $\sqrt{98}$

Para los problemas 49-58, usar una calculadora para encontrar una aproximación, en números enteros, para cada expresión.

49. $\sqrt{4325}$ **50.** $\sqrt{7500}$ **51.** $\sqrt{1175}$

52. $\sqrt{1700}$ **53.** $\sqrt{9501}$ **54.** $\sqrt{8050}$

55. $\sqrt[3]{7814}$ **56.** $\sqrt[3]{1456}$ **57.** $\sqrt{1000}$

58. $\sqrt{3400}$

Para los problemas 59-70, simplificar cada expresión usando la propiedad distributiva. **(Objetivo 2)**

59. $7\sqrt{2} + 14\sqrt{2}$ **60.** $9\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$

61. $17\sqrt{7} - 9\sqrt{7}$ **62.** $19\sqrt{5} - 8\sqrt{5}$

63. $4\sqrt[3]{2} + 7\sqrt[3]{2}$ **64.** $8\sqrt[3]{6} - 10\sqrt[3]{6}$

65. $9\sqrt[3]{7} + 2\sqrt[3]{5} - 6\sqrt[3]{7}$

66. $8\sqrt{7} + 13\sqrt{7} - 9\sqrt{7}$

67. $8\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - 9\sqrt{2} + 6\sqrt{3}$

68. $7\sqrt{5} - 9\sqrt{6} + 14\sqrt{5} - 2\sqrt{6}$

69. $6\sqrt{7} + 5\sqrt{10} - 8\sqrt{10} - 4\sqrt{7} - 11\sqrt{7} + \sqrt{10}$

70. $\sqrt{3} - \sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 3\sqrt{3} - 9\sqrt{5} - 16\sqrt{3}$

Para los problemas 71-84, encontrar una aproximación racional, a la décima más cercana, para cada expresión radical. **(Objetivo 2)**

71. $9\sqrt{3} + \sqrt{3}$ **72.** $6\sqrt{2} + 14\sqrt{2}$

73. $9\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$ **74.** $18\sqrt{6} - 12\sqrt{6}$

75. $14\sqrt{2} - 15\sqrt{2}$ **76.** $7\sqrt{3} - 12\sqrt{3}$

77. $8\sqrt{7} - 4\sqrt{7} + 6\sqrt{7}$

78. $9\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + \sqrt{5}$

79. $4\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$ **80.** $3\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}$

81. $9\sqrt{6} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{6} - 7\sqrt{5} - \sqrt{6}$

82. $8\sqrt{7} - 2\sqrt{10} + 4\sqrt{7} - 3\sqrt{10} - 7\sqrt{7} + 4\sqrt{10}$

83. $4\sqrt{11} - 5\sqrt{11} - 7\sqrt{11} + 2\sqrt{11} - 3\sqrt{11}$

84. $14\sqrt{13} - 17\sqrt{13} + 3\sqrt{13} - 4\sqrt{13} - 5\sqrt{13}$

85. Usar la fórmula del ejemplo 2 para encontrar los periodos de péndulos que miden 2 pies, 3.5 pies y 4 pies. Exprese las respuestas en la décima de segundo más cercana.

86. Usar la fórmula del ejemplo 3, con un coeficiente de fricción de 0.35, para encontrar las velocidades de automóviles que dejan marcas de 150 pies, 200 pies y 275 pies. Exprese las respuestas en la milla por hora más cercana.

87. El tiempo T, medido en segundos, que le toma a un objeto caer de d pies (ignorando la resistencia del aire) se encuentra con la fórmula $T = \sqrt{\frac{d}{16}}$. Encontrar el tiempo que le toma a objetos caer de 75 pies, 125 pies y 5280 pies. Exprese las respuestas en la décima de segundo más cercana.

Pensamientos en palabras

88. ¿Por qué $\sqrt{-4}$ no es un número real?

89. ¿Cómo podría encontrar un número entero que más se aproxime a $\sqrt{1450}$ si no tuviera una calculadora a su disposición?

Respuestas del examen de conceptos

1. Cierto **2.** Cierto **3.** Cierto **4.** Falso **5.** Falso **6.** Cierto **7.** Cierto **8.** Cierto **9.** Cierto **10.** Cierto

9.2 Simplificación de radicales

OBJETIVOS

1. Simplificar radicales en los que el radicando es un número entero
2. Simplificar radicales que contienen variables
3. Usar sumas y restas para combinar radicales

Note los siguientes hechos pertenecientes a las raíces cuadradas:

$$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$$
$$\sqrt{4}\sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$$

Entonces, se observa que $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4}\sqrt{9}$. Esto ilustra una propiedad general.

Propiedad 9.1

Sean a y b números reales no negativos,

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

En otras palabras, se dice que la **raíz cuadrada de un producto es igual al producto de las raíces cuadradas**.

La propiedad 9.1 y la definición de raíz cuadrada proporcionan la base para cambiar radicales a la forma radical más simple. Por ahora, la forma radical más simple significa que el *radicando no contiene alguna potencia perfecta del índice aparte de 1*. Se presentan algunos ejemplos para ilustrar este significado de forma radical más simple.

1. $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

4 es un cuadrado perfecto

$\sqrt{4} = 2$

2. $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9}\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

9 es un cuadrado perfecto $\sqrt{9} = 3$

3. $\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

16 es un cuadrado perfecto $\sqrt{16} = 4$

El primer paso en cada ejemplo es expresar el radicando del radical dado como el producto de dos factores, uno de los cuales debe ser una potencia n-ésima perfecta distinta de 1. Además, observe los radicandos de los radicales finales. En cada caso el radicando no puede tener un factor que sea una potencia *n*-ésima perfecta distinta a 1. Se dice que los radicales finales 2 ! $\overline{2}$, 3 ! $\overline{5}$ y 4 ! $\overline{3}$ están en su forma radical más simple.

Es posible variar un poco los pasos al cambiar a forma radical más simple, pero el resultado final debe ser el mismo. Considere algunos enfoques diferentes para cambiar ! $\overline{48}$ a la forma más simple:

$$\sqrt{48} = \sqrt{4 \cdot 12} = \sqrt{4}\sqrt{12} = 2\sqrt{12} = 2\sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{4}\sqrt{3} = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

4 es un cuadrado perfecto   No está en su forma más simple   4 es un cuadrado perfecto   Mismo resultado que en el ejemplo 3

Otra variación de la técnica para cambiar radicales a la forma más simple es factorizar primero el radicando y luego buscar potencias *n*-ésimas perfectas en forma exponencial. A continuación, se vuelven a resolver los ejemplos previos.

4. $\sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

Factores primos de 8 2^2 es un cuadrado perfecto

5. $\sqrt{45} = \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{3^2}\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

Factores primos de 45 3^2 es un cuadrado perfecto

6. $\sqrt{48} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{2^4 \cdot 3} = \sqrt{2^4}\sqrt{3} = 2^2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

Factores primos de 48 2^4 es un cuadrado perfecto $\sqrt{2^4} = 2^2$ porque $2^2 \cdot 2^2 = 2^4$

Los siguientes ejemplos ilustran el proceso de cambiar a la forma radical más simple. Sólo se muestran los pasos más importantes, asegúrese de poder completar los detalles.

7. $\sqrt{56} = \sqrt{4}\sqrt{14} = 2\sqrt{14}$

8. $\sqrt{75} = \sqrt{25}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

9. $\sqrt{108} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2}\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

10. $5\sqrt{12} = 5\sqrt{4}\sqrt{3} = 5 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

Se extiende la propiedad 9.1 para aplicarse a las raíces cúbicas.

Propiedad 9.2

Sean *a* y *b* números reales,

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$$

Ahora, usando la propiedad 9.2, puede simplificar los radicales que involucran raíces cúbicas. Aquí le será útil reconocer los cubos perfectos enlistados en la sección anterior.

11. $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$

Cubo perfecto

12. $\sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{4} = 3\sqrt[3]{4}$

Cubo perfecto

13. $\sqrt[3]{375} = \sqrt[3]{125}\sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3}$

Cubo perfecto

Radicales que contienen variables

Antes de discutir el proceso de simplificar radicales que contienen variables, hay un detalle que debe notar. Estudie algunos ejemplos para aclarar el punto. Considere el radical $\sqrt{x^2}$.

Sea $x = 3$; entonces $\sqrt{x^2} = \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$
Sea $x = -3$; entonces $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$

Por ende, si $x \geq 0$ entonces $\sqrt{x^2} = x$, pero si $x < 0$ entonces $\sqrt{x^2} = -x$. Usando el concepto de valor absoluto, se puede establecer para todos los números reales que, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Ahora considere el radical $\sqrt{x^3}$. Debido a que x^3 es negativo cuando x es negativa, se necesita restringir x a números reales no negativos cuando se trabaje con $\sqrt{x^3}$. Por ende, se puede escribir: si entonces $\sqrt{x^3} = \sqrt{x^2}\sqrt{x} = x\sqrt{x}$ y ningún signo de valor absoluto es necesario. Finalmente, considere el radical $\sqrt[3]{x^3}$.

Sea $x = 2$; entonces $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{8} = 2$
Sea $x = -2$; entonces $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-8} = -2$

Por ende, es correcto escribir $\sqrt[3]{x^3} = x$ para todos los números reales y, de nuevo, no es necesario ningún signo de valor absoluto.

La discusión previa indica que, técnicamente, cualquier expresión radicar que involucra variables en el radicando necesita analizarse de manera individual para que se hagan las restricciones necesarias en las variables. Sin embargo, para evitar considerar tales restricciones de manera individual, simplemente debe asumir que todas las variables representan números reales positivos.

14. $\sqrt{x^2y} = \sqrt{x^2}\sqrt{y} = x\sqrt{y}$

15. $\sqrt{4x^3} = \sqrt{4x^2}\sqrt{x} = 2x\sqrt{x}$

$4x^2$ es un cuadrado perfecto
porque $(2x)(2x) = 4x^2$

16. $\sqrt{8xy^3} = \sqrt{4y^2}\sqrt{2xy} = 2y\sqrt{2xy}$

17. $\sqrt{27x^5y^3} = \sqrt{9x^4y^2}\sqrt{3xy} = 3x^2y\sqrt{3xy}$

$\sqrt{9x^4y^2} = 3x^2y$

18. $\sqrt[3]{40x^4y^5} = \sqrt[3]{8x^3y^3}\sqrt[3]{5xy^2} = 2xy\sqrt[3]{5xy^2}$

Cubo perfecto

Si el coeficiente numérico del radicando es muy grande, tal vez quiera resolverlo en la forma de factores primos. El siguiente ejemplo demuestra esta idea:

19. $$\begin{aligned}\sqrt{180a^6b^3} &= \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a^6 \cdot b^2 \cdot b}\\ &= \sqrt{36a^6b^2}\sqrt{5b}\\ &= 6a^3b\sqrt{5b}\end{aligned}$$

Cuando simplifique las expresiones que contienen radicales, primero debe cambiar los radicales a la forma más simple y después aplicar la propiedad distributiva.

Ejemplo de salón de clases

Simplificar $7\sqrt{18} + 5\sqrt{2}$.

EJEMPLO 1 Simplificar $5\sqrt{8} + 3\sqrt{2}$.

Solución

$$\begin{aligned}5\sqrt{8} + 3\sqrt{2} &= 5\sqrt{4}\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\\ &= 5 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + 3\sqrt{2}\\ &= 10\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\\ &= (10 + 3)\sqrt{2}\\ &= 13\sqrt{2}\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases

Simplificar $3\sqrt{20} + 6\sqrt{45} - 7\sqrt{5}$.

EJEMPLO 2 Simplificar $2\sqrt{27} - 5\sqrt{48} + 4\sqrt{3}$.

Solución

$$\begin{aligned}2\sqrt{27} - 5\sqrt{48} + 4\sqrt{3} &= 2\sqrt{9}\sqrt{3} - 5\sqrt{16}\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\\ &= 2(3)\sqrt{3} - 5(4)\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\\ &= 6\sqrt{3} - 20\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\\ &= (6 - 20 + 4)\sqrt{3}\\ &= -10\sqrt{3}\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases

Simplificar $\frac{2}{3}\sqrt{32} + \frac{4}{5}\sqrt{8}$.

EJEMPLO 3 Simplificar $\frac{1}{4}\sqrt{45} + \frac{1}{3}\sqrt{20}$.

Solución

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sqrt{45} + \frac{1}{3}\sqrt{20} &= \frac{1}{4}\sqrt{9}\sqrt{5} + \frac{1}{3}\sqrt{4}\sqrt{5}\\ &= \frac{1}{4}(3)\sqrt{5} + \frac{1}{3}(2)\sqrt{5}\\ &= \frac{3}{4}\sqrt{5} + \frac{2}{3}\sqrt{5}\\ &= \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right)\sqrt{5}\\ &= \left(\frac{9}{12} + \frac{8}{12}\right)\sqrt{5}\\ &= \frac{17}{12}\sqrt{5}\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Simplificar $\sqrt[3]{40} + 8\sqrt[3]{135}$.

EJEMPLO 4 Simplificar $5\sqrt[3]{24} + 7\sqrt[3]{375}$.

Solución

$$\begin{aligned} 5\sqrt[3]{24} + 7\sqrt[3]{375} &= 5\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{3} + 7\sqrt[3]{125}\sqrt[3]{3} \\ &= 5(2)\sqrt[3]{3} + 7(5)\sqrt[3]{3} \\ &= 10\sqrt[3]{3} + 35\sqrt[3]{3} \\ &= 45\sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

Examen de conceptos 9.2

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. Para poderse combinar en las sumas, los radicales deben tener el mismo índice y el mismo radicando.
2. Si $x \geq 0$, entonces $\sqrt{x^2} = x$.
3. Para todos los números reales, $\sqrt{x^2} = x$.
4. Para todos los números reales, $\sqrt[3]{x^3} = x$.
5. La forma radical más simple de $\sqrt{54}$ es $3\sqrt{6}$.
6. Si un radical contiene un factor elevado a una potencia que es igual al índice del radical, entonces el radical no está en la forma radical más simple.
7. La expresión $\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}$ está en la forma radical más simple.
8. $3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} = 7\sqrt{5}$
9. $\sqrt{8x^3y^2}$ se simplifica en $2xy\sqrt{8x}$.
10. $\sqrt{121x^2y^4}$ se simplifica en $xy^2\sqrt{121}$.

Conjunto de problemas 9.2

Para los problemas 1-30, cambiar cada radical a la forma radical más simple. **(Objetivo 1)**

1. $\sqrt{24}$
2. $\sqrt{54}$
3. $\sqrt{18}$
4. $\sqrt{50}$
5. $\sqrt{27}$
6. $\sqrt{12}$
7. $\sqrt{40}$
8. $\sqrt{90}$
9. $\sqrt[3]{-54}$
10. $\sqrt[3]{32}$
11. $\sqrt{80}$
12. $\sqrt{125}$
13. $\sqrt{117}$
14. $\sqrt{126}$
15. $4\sqrt{72}$
16. $8\sqrt{98}$
17. $3\sqrt[3]{40}$
18. $4\sqrt[3]{375}$
19. $-5\sqrt{20}$
20. $-6\sqrt{45}$
21. $-8\sqrt{96}$
22. $-4\sqrt{54}$
23. $\dfrac{3}{2}\sqrt{8}$
24. $\dfrac{5}{2}\sqrt{32}$
25. $\dfrac{3}{4}\sqrt{12}$
26. $\dfrac{4}{5}\sqrt{27}$
27. $-\dfrac{2}{3}\sqrt{45}$
28. $-\dfrac{3}{5}\sqrt{125}$
29. $-\dfrac{1}{4}\sqrt[3]{32}$
30. $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{81}$

Para los problemas 31-52, expresar cada radical en la forma radical más simple. Todas las variables representan números reales no negativos. **(Objetivo 2)**

31. $\sqrt{x^2y^3}$
32. $\sqrt{xy^4}$
33. $\sqrt{2x^2y}$
34. $\sqrt{3x^2y^2}$
35. $\sqrt{8x^2}$
36. $\sqrt{24x^3}$
37. $\sqrt{27a^3b}$
38. $\sqrt{45a^2b^4}$
39. $\sqrt[3]{64x^4y^2}$
40. $\sqrt[3]{56x^3y^5}$
41. $\sqrt{63x^4y^2}$
42. $\sqrt{28x^3y}$
43. $3\sqrt{48x^2}$
44. $5\sqrt{12x^2y^2}$
45. $-6\sqrt{72x^7}$
46. $-8\sqrt{80y^9}$
47. $\dfrac{2}{9}\sqrt{54xy}$
48. $\dfrac{4}{3}\sqrt{20xy}$
49. $\dfrac{1}{8}\sqrt[3]{250x^4}$
50. $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{81x^3}$
51. $-\dfrac{2}{3}\sqrt{169a^8}$
52. $-\dfrac{2}{7}\sqrt{196a^{10}}$

Para los problemas 53-66, simplificar cada expresión. (Objetivo 3)

53. $7\sqrt{32} + 5\sqrt{2}$

54. $6\sqrt{48} + 5\sqrt{3}$

55. $4\sqrt{45} - 9\sqrt{5}$

56. $7\sqrt{24} - 12\sqrt{6}$

57. $2\sqrt[3]{54} + 6\sqrt[3]{16}$

58. $2\sqrt[3]{24} - 4\sqrt[3]{81}$

59. $4\sqrt{63} - 7\sqrt{28}$

60. $2\sqrt{40} - 7\sqrt{90}$

61. $5\sqrt{12} + 3\sqrt{27} - 2\sqrt{75}$

62. $4\sqrt{18} - 6\sqrt{50} - 3\sqrt{72}$

63. $\frac{1}{2}\sqrt{20} + \frac{2}{3}\sqrt{45} - \frac{1}{4}\sqrt{80}$

64. $\frac{1}{3}\sqrt{12} - \frac{3}{2}\sqrt{48} + \frac{3}{4}\sqrt{108}$

65. $3\sqrt{8} - 5\sqrt{20} - 7\sqrt{18} - 9\sqrt{125}$

66. $5\sqrt{27} - 3\sqrt{24} + 8\sqrt{54} - 7\sqrt{75}$

Pensamientos en palabras

67. Explique cómo podría ayudarle a alguien a expresar $5\sqrt{72}$ en la forma radical más simple.

68. Explique su proceso mental al expresar $\sqrt{153}$ en la forma radical más simple.

Más investigación

69. Expresar cada uno de los siguientes radicales en la forma radical más simple. Las reglas de divisibilidad dadas en el conjunto de problemas 1.2 deberían serle útiles.

(a) $\sqrt{162}$ **(b)** $\sqrt{279}$

(c) $\sqrt{275}$ **(d)** $\sqrt{212}$

70. Usar una calculadora para evaluar cada expresión en los problemas 53-66. Después evalúe la expresión simplificada que obtuvo mientras resolvía esos problemas. Ambos resultados deberían ser iguales.

71. A veces se puede hacer un buen estimado usando un número entero aproximado. Por ejemplo, $5 \,!\overline{35} + 7 \,!\overline{50}$ es aproximadamente $5(6) + 7(7) = 79$. Usando una calculadora, se encuentra que $5 \,!\overline{35} + 7 \,!\overline{50} = 79.1$ a la décima más cercana. En este caso, ese número entero aproximado fue muy bueno. Para cada uno de los siguientes, primero haga un estimado en números enteros y después use la calculadora para verificar cuán bien estimó.

(a) $3\sqrt{10} - 4\sqrt{24} + 6\sqrt{65}$

(b) $9\sqrt{27} + 5\sqrt{37} - 3\sqrt{80}$

(c) $12\sqrt{5} + 13\sqrt{18} + 9\sqrt{47}$

(d) $3\sqrt{98} - 4\sqrt{83} - 7\sqrt{120}$

(e) $4\sqrt{170} + 2\sqrt{198} + 5\sqrt{227}$

(f) $-3\sqrt{256} - 6\sqrt{287} + 11\sqrt{321}$

72. Evaluar $!\overline{x^2}$ para $x = 5$, $x = 4$, $x = -3$, $x = 9$, $x = -8$, y $x = -11$. ¿Para cuáles valores de x funciona $!\overline{x^2} = x$? ¿Para cuáles valores de x funciona $!\overline{x^2} = x$? ¿Para cuáles valores de x funciona $!\overline{x^2} = |x|$?

Respuestas del examen de conceptos

1. Cierto **2.** Cierto **3.** Falso **4.** Cierto **5.** Cierto **6.** Cierto **7.** Falso **8.** Falso **9.** Falso **10.** Falso

9.3 Más sobre la simplificación de radicales

OBJETIVOS

1 Simplificar radicales en los que el radicando es una fracción

2 Simplificar radicales racionalizando el denominador

3 Usar adiciones y substracciones para combinar radicales

Otra propiedad de las raíces n-ésimas se muestra mediante los siguientes ejemplos.

$$\sqrt{\frac{36}{9}} = \sqrt{4} = 2 \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$$

Entonces, se ve que $\sqrt{\dfrac{36}{9}} = \dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}}$.

$$\sqrt[3]{\frac{64}{8}} = \sqrt[3]{8} = 2 \qquad \text{y} \qquad \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4}{2} = 2$$

Entonces, se ve que $\sqrt[3]{\dfrac{64}{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{8}}$.

Se puede establecer la siguiente propiedad general.

Propiedad 9.3

Sean a y b números reales no negativos a y b, $b \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Sean a y b números reales a y b, $b \neq 0$, $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.

Para evaluar radicales como $\sqrt{\dfrac{25}{4}}$, para el cual el numerador y el denominador del radicando fraccionario son potencias n-ésimas perfectas, puede usar la propiedad 9.3 o simplemente apoyarse en la definición de raíz n-ésima.

$$\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2} \qquad \text{o} \qquad \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} \quad \text{porque} \quad \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{4}$$

A veces es más fácil hacer la división indicada primero y después encontrar la raíz cuadrada, como puede ver en el siguiente ejemplo:

$$\sqrt{\frac{324}{9}} = \sqrt{36} = 6$$

Ahora se puede extender el concepto de forma radical más simple. Se dice que un radical está en su **forma radical más simple** si se satisfacen las siguientes condiciones.

1. Ninguna fracción aparece con un signo radical. $\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\ \text{viola esta condición.}\right)$

2. Ningún radical aparece en el denominador. $\left(\dfrac{5}{\sqrt{8}}\ \text{viola esta condición.}\right)$

3. Ningún radicando, cuando se expresa en forma factorizada prima, contiene un factor elevado a una potencia igual a o mayor que el índice. ($2^3 \cdot 7^3$ viola esta condición)

Los siguientes ejemplos muestran cómo simplificar expresiones que no cumplen con estas condiciones.

Ejemplo de salón de clases

Simplificar $\sqrt{\dfrac{11}{16}}$.

EJEMPLO 1 Simplificar $\sqrt{\dfrac{13}{4}}$.

Solución

$$\sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Ejemplo de salón de clases

Simplificar $\sqrt[3]{\dfrac{54}{125}}$.

EJEMPLO 2

Simplificar $\sqrt[3]{\dfrac{16}{27}}$.

Solución

$$\sqrt[3]{\frac{16}{27}} = \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{27}} = \underset{\uparrow}{\frac{\sqrt[3]{16}}{3}} = \frac{\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{2}}{3} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{3}$$

No se detenga aquí. El radical en el numerador puede simplificarse aún más

Ejemplo de salón de clases

Simplificar $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{9}}$.

EJEMPLO 3

Simplificar $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{16}}$.

Solución A

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{4}\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Solución B

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{16}} = \sqrt{\frac{12}{16}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Reducir la fracción

Los dos métodos en el ejemplo 3 ilustran la necesidad de **pensar primero y después escribir**. Puede que encuentre un método más fácil que el otro.

Ahora considere un ejemplo en el que ni el numerador ni el denominador del radicando son cuadrados perfectos. Tenga en mente que una expresión no está simplificada si hay un radical en el denominador.

Ejemplo de salón de clases

Simplificar $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

EJEMPLO 4

Simplificar $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Solución A

Forma de 1

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Solución B

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Al proceso que se utilizó para simplificar el radical en el ejemplo 4 se le conoce como **racionalización del denominador**. Note que el denominador se convierte en un número racional. El proceso de racionalizar al denominador con frecuencia se puede lograr en más de una forma, como se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo de salón de clases

Simplificar $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$.

EJEMPLO 5

Simplificar $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}$.

Solución A

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{40}}{8} = \frac{\sqrt{4}\sqrt{10}}{8} = \frac{2\sqrt{10}}{8} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

Solución B

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

Solución C

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

Estudie los siguientes ejemplos y compruebe que las respuestas estén en la forma radical más simple de acuerdo a las tres condiciones planteadas en la página 408.

Ejemplo de salón de clases

Simplificar cada una de las expresiones:

(a) $\frac{4}{\sqrt{a}}$ **(b)** $\sqrt{\frac{4x}{5y}}$

(c) $\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ **(d)** $\sqrt{\frac{49a^2}{16b}}$

EJEMPLO 6

Simplificar cada una de las expresiones:

(a) $\frac{3}{\sqrt{x}}$ **(b)** $\sqrt{\frac{2x}{3y}}$ **(c)** $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ **(d)** $\sqrt{\frac{4x^2}{9y}}$

Solución

(a) $\frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{x}$

(b) $\sqrt{\frac{2x}{3y}} = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{3y}} = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{3y}} \cdot \frac{\sqrt{3y}}{\sqrt{3y}} = \frac{\sqrt{6xy}}{3y}$

(c) $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{30}}{6} = \frac{\sqrt{30}}{2}$

(d) $\sqrt{\frac{4x^2}{9y}} = \frac{\sqrt{4x^2}}{\sqrt{9y}} = \frac{2x}{\sqrt{9}\sqrt{y}} = \frac{2x}{3\sqrt{y}} = \frac{2x}{3\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}} = \frac{2x\sqrt{y}}{3y}$

Regrese a la idea de simplificar expresiones que contienen radicales. A veces parece que no se pueden simplificar; sin embargo, después de que los radicales individuales han sido cambiados a su forma más simple, la propiedad distributiva puede aplicar.

Ejemplo de salón de clases

Simplificar $\sqrt{3} + \frac{7}{\sqrt{3}}$.

EJEMPLO 7

Simplificar $5\sqrt{2} + \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Solución

$$\begin{aligned} 5\sqrt{2} + \frac{3}{\sqrt{2}} &= 5\sqrt{2} + \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ &= \left(5 + \frac{3}{2}\right)\sqrt{2} = \left(\frac{10}{2} + \frac{3}{2}\right)\sqrt{2} \\ &= \frac{13}{2}\sqrt{2} \quad \text{o} \quad \frac{13\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases

Simplificar $\frac{\sqrt{10}}{5} + \sqrt{40}$.

EJEMPLO 8

Simplificar $\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{24}$.

Solución

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{24} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \sqrt{24} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \sqrt{4}\sqrt{6} \\
&= \frac{\sqrt{6}}{2} + 2\sqrt{6} \\
&= \left(\frac{1}{2} + 2\right)\sqrt{6} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{2}\right)\sqrt{6} \\
&= \frac{5}{2}\sqrt{6}
\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases

Simplificar

$9\sqrt{\frac{3}{16}} + 12\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{48}$.

EJEMPLO 9

Simplificar $\sqrt{\frac{7}{4}} - 14\sqrt{\frac{1}{7}} + 5\sqrt{28}$.

Solución

$$\begin{aligned}
3\sqrt{\frac{7}{4}} - 14\sqrt{\frac{1}{7}} + 5\sqrt{28} &= \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{4}} - \frac{14\sqrt{1}}{\sqrt{7}} + 5\sqrt{4}\sqrt{7} \\
&= \frac{3\sqrt{7}}{2} - \frac{14}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} + 10\sqrt{7} \\
&= \frac{3\sqrt{7}}{2} - \frac{14\sqrt{7}}{7} + 10\sqrt{7} \\
&= \frac{3\sqrt{7}}{2} - 2\sqrt{7} + 10\sqrt{7} \\
&= \left(\frac{3}{2} - 2 + 10\right)\sqrt{7} \\
&= \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{2} + \frac{20}{2}\right)\sqrt{7} = \frac{19}{2}\sqrt{7}
\end{aligned}$$

Examen de conceptos 9.3

Para los problemas 1-8. responder cierto o falso.

1. $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$

2. $\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

3. En la forma radical más simple $\sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

4. $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}} = 2$

5. $\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}} = \dfrac{3}{2}$

6. $\dfrac{\sqrt{-36}}{\sqrt{9}} = -2$

7. Si el radicando es una fracción, entonces el radical no está en su forma más simple.

8. $\dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{2}$

Conjunto de problemas 9.3

Para los problemas 1-10, evaluar cada radical. (Objetivo 1)

1. $\sqrt{\dfrac{16}{25}}$
2. $\sqrt{\dfrac{4}{49}}$
3. $-\sqrt{\dfrac{81}{9}}$
4. $-\sqrt{\dfrac{64}{16}}$
5. $\sqrt{\dfrac{1}{64}}$
6. $\sqrt{\dfrac{100}{121}}$
7. $\sqrt[3]{\dfrac{125}{64}}$
8. $\sqrt[3]{\dfrac{-27}{8}}$
9. $-\sqrt{\dfrac{25}{256}}$
10. $-\sqrt{\dfrac{289}{225}}$

Para los problemas 11-40, cambiar cada radical a su forma radical más simple. (Objetivo 2)

11. $\sqrt{\dfrac{19}{25}}$
12. $\sqrt{\dfrac{17}{4}}$
13. $\sqrt{\dfrac{8}{49}}$
14. $\sqrt{\dfrac{24}{25}}$
15. $\dfrac{\sqrt[3]{375}}{\sqrt[3]{216}}$
16. $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{54}}$
17. $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{36}}$
18. $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{64}}$
19. $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$
20. $\sqrt{\dfrac{2}{5}}$
21. $\sqrt{\dfrac{5}{8}}$
22. $\sqrt{\dfrac{7}{12}}$
23. $\dfrac{\sqrt{56}}{\sqrt{8}}$
24. $\dfrac{\sqrt{55}}{\sqrt{11}}$
25. $\dfrac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}}$
26. $\dfrac{\sqrt{96}}{\sqrt{6}}$
27. $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{18}}$
28. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{32}}$
29. $\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{27}}$
30. $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{48}}$
31. $\sqrt{\dfrac{1}{24}}$
32. $\sqrt{\dfrac{1}{12}}$
33. $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$
34. $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$
35. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$
36. $\dfrac{2\sqrt{5}}{7\sqrt{8}}$
37. $\dfrac{3\sqrt{7}}{4\sqrt{12}}$
38. $\dfrac{6\sqrt{12}}{5\sqrt{24}}$
39. $\sqrt{4\dfrac{1}{9}}$
40. $\sqrt{3\dfrac{1}{4}}$

Para los problemas 41-60, cambiar cada radical a su forma radical más simple. Todas las variables representan números reales positivos. (Objetivo 2)

41. $\dfrac{3}{\sqrt{x}}$
42. $\dfrac{2}{\sqrt{xy}}$
43. $\dfrac{5}{\sqrt{2x}}$
44. $\dfrac{7}{\sqrt{3y}}$
45. $\sqrt{\dfrac{3}{x}}$
46. $\sqrt{\dfrac{8}{x}}$
47. $\sqrt{\dfrac{12}{x^2}}$
48. $\sqrt{\dfrac{27}{4y^2}}$
49. $\dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{5y}}$
50. $\dfrac{\sqrt{3y}}{\sqrt{32x}}$
51. $\dfrac{\sqrt{5x}}{\sqrt{27y}}$
52. $\dfrac{\sqrt{3x^2}}{\sqrt{5y^2}}$
53. $\dfrac{\sqrt{2x^3}}{\sqrt{8y}}$
54. $\dfrac{\sqrt{5x^2}}{\sqrt{45y^3}}$
55. $\sqrt{\dfrac{9}{x^3}}$
56. $\sqrt{\dfrac{25}{y^5}}$
57. $\dfrac{4}{\sqrt{x^7}}$
58. $\dfrac{14}{\sqrt{x^5}}$
59. $\dfrac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{y^3}}$
60. $\dfrac{5\sqrt{x}}{7\sqrt{xy}}$

Para los problemas 61-72, simplificar cada expresión. (Objetivo 3)

61. $7\sqrt{3} + \sqrt{\dfrac{1}{3}}$
62. $-3\sqrt{2} + \sqrt{\dfrac{1}{2}}$
63. $4\sqrt{10} - \sqrt{\dfrac{2}{5}}$
64. $8\sqrt{5} - 3\sqrt{\dfrac{1}{5}}$

65. $-2\sqrt{5} - 5\sqrt{\dfrac{1}{5}}$ **66.** $6\sqrt{7} + 4\sqrt{\dfrac{1}{7}}$ **69.** $4\sqrt{12} + \dfrac{3}{\sqrt{3}} - 5\sqrt{27}$ **70.** $3\sqrt{8} - 4\sqrt{18} - \dfrac{6}{\sqrt{2}}$

67. $-3\sqrt{6} - \dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ **68.** $4\sqrt{8} - \dfrac{6}{\sqrt{2}}$ **71.** $\dfrac{9\sqrt{5}}{\sqrt{3}} - 6\sqrt{60} + \dfrac{10\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ **72.** $-2\sqrt{3} - 3\sqrt{48} + \dfrac{3}{\sqrt{3}}$

Pensamientos en palabras

73. Su amigo simplifica $\sqrt{\dfrac{6}{8}}$ de la siguiente manera:

$$\sqrt{\frac{6}{8}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{48}}{8} = \frac{\sqrt{16}\sqrt{3}}{8}$$
$$= \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

¿Podría mostrarle una manera más rápida de simplificar esta expresión?

74. ¿La expresión $3\sqrt{2} + \sqrt{50}$ está en su forma radical más simple? ¿Por qué o por qué no?

Más investigación

Para racionalizar el denominador de expresiones algebraicas que tienen raíces cúbicas, debe multiplicar por un factor en la forma de 1 que convierta al radicando en el denominador de un cubo perfecto. Considere el siguiente ejemplo y tome como referencia la lista de cubos perfectos si no los ha memorizado aún.

Simplificar $\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}}$.

$$\sqrt[3]{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}}}_{\text{Forma de 1}} = \frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{20}}{2}$$

Para los problemas 75-80, cambiar cada radical a su forma radical más simple.

75. $\dfrac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{3}}$ **76.** $\dfrac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{4}}$ **77.** $\sqrt[3]{\dfrac{8}{25}}$

78. $\sqrt[3]{\dfrac{2}{9}}$ **79.** $\sqrt[3]{\dfrac{7}{32}}$ **80.** $\sqrt[3]{\dfrac{9}{10}}$

Respuestas del examen de conceptos

1. Falso **2.** Cierto **3.** Falso **4.** Cierto **5.** Cierto **6.** Falso **7.** Cierto **8.** Cierto

9.4 Productos y cocientes que implican radicales

OBJETIVOS

1 Multiplicar expresiones radicales

2 Racionalizar denominadores binomiales

Ejemplo de salón de clases

Multiplicar y simplificar donde sea posible:

(a) $\sqrt{2}\sqrt{14}$
(b) $\sqrt{5}\sqrt{10}$
(c) $\sqrt{2}\sqrt{27}$
(d) $\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{12}$
(e) $5\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{7}$
(f) $3\sqrt[3]{4} \cdot 6\sqrt[3]{12}$

Se usan las propiedades 9.1 $\left(\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}\right)$ y 9.2 $\left(\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\right)$ para multiplicar radicales y, en algunos casos, para simplificar el radical resultante. Los siguientes ejemplos ilustran varios tipos de multiplicaciones que implican radicales.

EJEMPLO 1 Multiplicar y simplificar donde sea posible:

(a) $\sqrt{3}\sqrt{12}$ **(b)** $\sqrt{3}\sqrt{15}$ **(c)** $\sqrt{7}\sqrt{8}$

(d) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{6}$ **(e)** $\left(3\sqrt{2}\right)\left(4\sqrt{3}\right)$ **(f)** $\left(2\sqrt[3]{9}\right)\left(4\sqrt[3]{6}\right)$

Solución

(a) $\sqrt{3}\sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$

(b) $\sqrt{3}\sqrt{15} = \sqrt{45} = \sqrt{9}\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

(c) $\sqrt{7}\sqrt{8} = \sqrt{56} = \sqrt{4}\sqrt{14} = 2\sqrt{14}$

(d) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$

(e) $\left(3\sqrt{2}\right)\left(4\sqrt{3}\right) = 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 12\sqrt{6}$

(f) $$\begin{aligned}\left(2\sqrt[3]{9}\right)\left(4\sqrt[3]{6}\right) &= 2 \cdot 4 \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{6} \\ &= 8\sqrt[3]{54} \\ &= 8\sqrt[3]{27}\sqrt[3]{2} \\ &= 8 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{2} = 24\sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

Recuerde usar la propiedad distributiva cuando encuentre el producto de un monomio y un polinomio. Por ejemplo, $2x(3x + 4) = 2x(3x) + 2x(4) = 6x^2 + 8x$. En forma similar, la propiedad distributiva y la propiedad 9.1 proporcionan la base para encontrar ciertos productos especiales que implican radicales. Los siguientes ejemplos ilustran esta idea.

Ejemplo de salón de clases
Multiplicar y simplificar donde sea posible:
(a) $\sqrt{5}\left(\sqrt{7} + \sqrt{11}\right)$
(b) $\sqrt{2}\left(\sqrt{8} - \sqrt{10}\right)$
(c) $\sqrt{6}\left(\sqrt{6} - 5\right)$
(d) $\sqrt{a}\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)$
(e) $\sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{16}\right)$

EJEMPLO 2

Multiplicar y simplificar donde sea posible:

(a) $\sqrt{2}\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)$ **(b)** $\sqrt{3}\left(\sqrt{12} - \sqrt{6}\right)$ **(c)** $\sqrt{8}\left(\sqrt{2} - 3\right)$

(d) $\sqrt{x}\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$ **(e)** $\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{10}\right)$

Solución

(a) $\sqrt{2}\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right) = \sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{2}\sqrt{5} = \sqrt{6} + \sqrt{10}$

(b) $$\begin{aligned}\sqrt{3}\left(\sqrt{12} - \sqrt{6}\right) &= \sqrt{3}\sqrt{12} - \sqrt{3}\sqrt{6} \\ &= \sqrt{36} - \sqrt{18} \\ &= 6 - \sqrt{9}\sqrt{2} \\ &= 6 - 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned}\sqrt{8}\left(\sqrt{2} - 3\right) &= \sqrt{8}\sqrt{2} - \left(\sqrt{8}\right)(3) \\ &= \sqrt{16} - 3\sqrt{8} \\ &= 4 - 3\sqrt{4}\sqrt{2} \\ &= 4 - 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned}\sqrt{x}\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) &= \sqrt{x}\sqrt{x} + \sqrt{x}\sqrt{y} \\ &= \sqrt{x^2} + \sqrt{xy} \\ &= x + \sqrt{xy}\end{aligned}$$

(e) $\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{10}\right) = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{20} = 2 + \sqrt[3]{20}$

La propiedad distributiva también juega un papel central en la determinación del producto de dos binomios. Por ejemplo, $(x + 2)(x + 3) = x(x + 3) + 2(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$. Encontrar el producto de dos exprsiones binomiales que implican radicales se puede manejar en forma similar.

Ejemplo de salón de clases
Multiplicar y simplificar:
(a) $\left(\sqrt{7} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6} + \sqrt{10}\right)$
(b) $\left(\sqrt{5} - 2\right)\left(\sqrt{5} + 8\right)$

EJEMPLO 3

Multiplicar y simplificar:

(a) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$ **(b)** $\left(\sqrt{7} - 3\right)\left(\sqrt{7} + 6\right)$

Solución

(a) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right) = \sqrt{3}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+\sqrt{5}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$
$= \sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{6}+\sqrt{5}\sqrt{2}+\sqrt{5}\sqrt{6}$
$= \sqrt{6}+\sqrt{18}+\sqrt{10}+\sqrt{30}$
$= \sqrt{6}+3\sqrt{2}+\sqrt{10}+\sqrt{30}$

(b) $\left(\sqrt{7}-3\right)\left(\sqrt{7}+6\right) = \sqrt{7}\left(\sqrt{7}+6\right)-3\left(\sqrt{7}+6\right)$
$= \sqrt{7}\sqrt{7}+6\sqrt{7}-3\sqrt{7}-18$
$= 7+6\sqrt{7}-3\sqrt{7}-18$
$= -11+3\sqrt{7}$

Si los binomios están en la forma $(a + b)(a - b)$, entonces se puede usar el patrón de multiplicación $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Ejemplo de salón de clases
Multiplicar y simplificar:
(a) $\left(\sqrt{12}+5\right)\left(\sqrt{12}-5\right)$
(b) $\left(7-\sqrt{3}\right)\left(7+\sqrt{3}\right)$
(c) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{10}\right)$

EJEMPLO 4

Multiplicar y simplificar:

(a) $\left(\sqrt{6}+2\right)\left(\sqrt{6}-2\right)$ **(b)** $\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)$
(c) $\left(\sqrt{8}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{8}-\sqrt{5}\right)$

Solución

(a) $\left(\sqrt{6}+2\right)\left(\sqrt{6}-2\right) = \left(\sqrt{6}\right)^2 - 2^2 = 6-4=2$
(b) $\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right) = 3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2 = 9-5=4$
(c) $\left(\sqrt{8}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{8}-\sqrt{5}\right) = \left(\sqrt{8}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2 = 8-5=3$

Note que en cada parte del ejemplo 4, el producto final no contiene radicales. Esto ocurre cuando se multiplican expresiones como $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ y $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, donde a y b son números racionales.

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = \left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2 = a-b$$

Expresiones como $!\overline{8} + !\overline{5}$ y $!\overline{8} - !\overline{5}$ se llaman conjugados. De manera similar, $!\overline{6} + 2$ y $!\overline{6} - 2$ son conjugados, así como $3 - !\overline{5}$ y $3 + !\overline{5}$. Ahora vea cómo puede usar los conjugados para racionalizar denominadores.

Ejemplo de salón de clases
Simplificar $\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$.

EJEMPLO 5

Simplificar $\dfrac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$.

Solución

Para simplificar la expresión, el denominador necesita ser un número racional. Multiplique el numerador y el denominador por $\sqrt{5}-\sqrt{2}$, el cual es el conjugado del denominador.

$$\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

$\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ es meramente una forma de 1

$$= \frac{4\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{4\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{5-2}$$

$$= \frac{4\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{3} \quad \text{o} \quad \frac{4\sqrt{5}-4\sqrt{2}}{3}$$

Cualquier respuesta es aceptable

Los siguientes cuatro ejemplos ilustran el proceso de racionalizar y simplificar expresiones que contienen denominadores binomiales.

Ejemplo de salón de clases
Racionalizar el denominador y simplificar $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{14} - 3}$.

EJEMPLO 6

Racionalizar el denominador y simplificar $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6} - 2}$.

Solución

Para simplificar, se requiere multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, que es

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6} - 2} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6} - 2} \cdot \frac{\sqrt{6} + 2}{\sqrt{6} + 2} \\
&= \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{6} + 2\right)}{\left(\sqrt{6} - 2\right)\left(\sqrt{6} + 2\right)} \\
&= \frac{\sqrt{18} + 2\sqrt{3}}{6 - 4} \\
&= \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2} \qquad \sqrt{18} = \sqrt{9}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Racionalizar el denominador y simplificar $\dfrac{20}{2\sqrt{5} + \sqrt{10}}$.

EJEMPLO 7

Racionalizar el denominador y simplificar $\dfrac{14}{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}$.

Solución

Para simplificar, se requiere multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, que es $2\sqrt{3} - \sqrt{5}$.

$$\begin{aligned}
\frac{14}{2\sqrt{3} + \sqrt{5}} &= \frac{14}{2\sqrt{3} + \sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{5}}{2\sqrt{3} - \sqrt{5}} \\
&= \frac{14\left(2\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)}{\left(2\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)} \\
&= \frac{14\left(2\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)}{12 - 5} = \frac{14\left(2\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)}{7} \\
&= 2\left(2\sqrt{3} - \sqrt{5}\right) \quad \text{o} \quad 4\sqrt{3} - 2\sqrt{5}
\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Racionalizar el denominador y simplificar $\dfrac{\sqrt{a} - 4}{\sqrt{a} + 5}$.

EJEMPLO 8

Racionalizar el denominador y simplificar $\dfrac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3}$.

Solución

Para racionalizar el denominador, es necesario multiplicar el numerador y el denominador por ! $\overline{x}$ + 3, que es el conjugado del denominador.

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3} &= \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3} \cdot \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3} \\
&= \frac{\left(\sqrt{x} + 2\right)\left(\sqrt{x} + 3\right)}{\left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 3\right)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{x + 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 6}{x - 9}$$

$$= \frac{x + 5\sqrt{x} + 6}{x - 9}$$

Ejemplo de salón de clases
Racionalizar el denominador y simplificar $\dfrac{6 + \sqrt{7}}{\sqrt{7} - 9}$.

EJEMPLO 9

Racionalizar el denominador y simplificar $\dfrac{3 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 6}$.

Solución

Para cambiar el denominador a un número racional, se multiplican el numerador y el denominador por $\sqrt{2} + 6$, que es el conjugado del denominador.

$$\frac{3 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 6} = \frac{3 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 6} \cdot \frac{\sqrt{2} + 6}{\sqrt{2} + 6}$$

$$= \frac{\left(3 + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} + 6\right)}{\left(\sqrt{2} - 6\right)\left(\sqrt{2} + 6\right)}$$

$$= \frac{3\sqrt{2} + 18 + 2 + 6\sqrt{2}}{2 - 36}$$

$$= \frac{9\sqrt{2} + 20}{-34}$$

$$= -\frac{9\sqrt{2} + 20}{34} \qquad \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

Examen de conceptos 9.4

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. La propiedad $\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$ puede usarse para expresar el producto de dos radicales como un radical.
2. El producto de dos radicales siempre resulta en una expresión que tiene un radical, incluso después de simplificar.
3. El conjugado de $5 + \sqrt{3}$ es $-5 - \sqrt{3}$.
4. El producto de $\left(2 - \sqrt{7}\right)$ y $\left(2 + \sqrt{7}\right)$ es un número racional.
5. Para racionalizar el denominador de la expresión $\dfrac{2\sqrt{5}}{4 - \sqrt{5}}$, se multiplicaría por $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$.
6. $\dfrac{\sqrt{8} + \sqrt{12}}{\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{6}$
7. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8} + \sqrt{12}} = \dfrac{1}{2 + \sqrt{6}}$
8. El producto de $\left(5 + \sqrt{3}\right)$ y $\left(-5 - \sqrt{3}\right)$ es -28.
9. El producto de $\left(2\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)$ y $\left(2\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)$ es 7.
10. $\left(\sqrt[3]{8}\right)\left(\sqrt[3]{3}\right) = 2\sqrt[3]{3}$

Conjunto de problemas 9.4

Para los problemas 1-20, multiplicar y simplificar donde sea posible. (Objetivo 1)

1. $\sqrt{7}\sqrt{5}$
2. $\sqrt{3}\sqrt{10}$
3. $\sqrt{6}\sqrt{8}$
4. $\sqrt{6}\sqrt{12}$
5. $\sqrt{5}\sqrt{10}$
6. $\sqrt{2}\sqrt{12}$
7. $\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{6}$
8. $\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{9}$
9. $\sqrt{8}\sqrt{12}$
10. $\sqrt{12}\sqrt{20}$
11. $(3\sqrt{3})(5\sqrt{7})$
12. $(5\sqrt[3]{10})(7\sqrt[3]{3})$
13. $(-\sqrt[3]{6})(5\sqrt[3]{4})$
14. $(5\sqrt{3})(-6\sqrt{10})$
15. $(3\sqrt{6})(4\sqrt{6})$
16. $(2\sqrt{7})(5\sqrt{7})$
17. $(5\sqrt{2})(4\sqrt{12})$
18. $(3\sqrt{2})(2\sqrt{27})$
19. $(4\sqrt{3})(2\sqrt{15})$
20. $(7\sqrt{7})(2\sqrt{14})$

Para los problemas 21-42, encontrar los productos aplicando la propiedad distributiva. Expresar las respuestas en su forma radical más simple. (Objetivo 1)

21. $\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{5})$
22. $\sqrt{3}(\sqrt{5} + \sqrt{7})$
23. $\sqrt{6}(\sqrt{2} - 5)$
24. $\sqrt{8}(\sqrt{3} - 4)$
25. $\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{10})$
26. $\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{8})$
27. $\sqrt{12}(\sqrt{6} - \sqrt{8})$
28. $\sqrt{15}(\sqrt{3} - \sqrt{5})$
29. $4\sqrt{3}(\sqrt{2} - 2\sqrt{5})$
30. $3\sqrt{2}(3\sqrt{5} - 2\sqrt{7})$
31. $(\sqrt{2} + 6)(\sqrt{2} + 9)$
32. $(\sqrt{3} + 4)(\sqrt{3} + 7)$
33. $(\sqrt{6} - 5)(\sqrt{6} + 3)$
34. $(\sqrt{7} - 6)(\sqrt{7} + 1)$
35. $(\sqrt{3} + \sqrt{6})(\sqrt{6} + \sqrt{8})$
36. $(\sqrt{2} + \sqrt{6})(\sqrt{8} + \sqrt{5})$
37. $(5 + \sqrt{10})(5 - \sqrt{10})$
38. $(\sqrt{11} - 2)(\sqrt{11} + 2)$
39. $(3\sqrt{2} - \sqrt{3})(3\sqrt{2} + \sqrt{3})$
40. $(5\sqrt{6} - \sqrt{2})(5\sqrt{6} + \sqrt{2})$
41. $(5\sqrt{3} + 2\sqrt{6})(5\sqrt{3} - 2\sqrt{6})$
42. $(4\sqrt{5} + 5\sqrt{7})(4\sqrt{5} - 5\sqrt{7})$

Para los problemas 43-54, encontrar cada producto y expresar las respuestas en su forma radical más simple. Todas las variables representan números reales no negativos. (Objetivo 1)

43. $\sqrt{xy}\sqrt{x}$
44. $\sqrt{x^2y}\sqrt{y}$
45. $\sqrt[3]{25x^2}\sqrt[3]{5x}$
46. $\sqrt[3]{9x}\sqrt[3]{3x}$
47. $(4\sqrt{a})(3\sqrt{ab})$
48. $(5\sqrt{a})(6\sqrt{a})$
49. $\sqrt{2x}(\sqrt{3x} - \sqrt{6y})$
50. $\sqrt{6x}(\sqrt{2x} - \sqrt{4y})$
51. $(\sqrt{x} + 5)(\sqrt{x} - 3)$
52. $(3 + \sqrt{x})(7 - \sqrt{x})$
53. $(\sqrt{x} + 7)(\sqrt{x} - 7)$
54. $(\sqrt{x} + 9)(\sqrt{x} - 9)$

Para los problemas 55-70, racionalizar los denominadores y simplificar. Todas las variables representan números reales positivos. (Objetivo 2)

55. $\dfrac{3}{\sqrt{2} + 4}$
56. $\dfrac{5}{\sqrt{3} + 7}$
57. $\dfrac{8}{\sqrt{6} - 2}$
58. $\dfrac{10}{3 - \sqrt{7}}$
59. $\dfrac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$
60. $\dfrac{3}{\sqrt{6} + \sqrt{5}}$
61. $\dfrac{10}{2 - 3\sqrt{3}}$
62. $\dfrac{5}{3\sqrt{2} - 4}$
63. $\dfrac{4}{\sqrt{x} - 2}$
64. $\dfrac{7}{\sqrt{x} + 4}$
65. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3}$
66. $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{y} - 6}$
67. $\dfrac{\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} - 5}$
68. $\dfrac{\sqrt{a} - 3}{\sqrt{a} + 1}$
69. $\dfrac{2 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{2}}$
70. $\dfrac{3 - \sqrt{5}}{4 + \sqrt{8}}$

Pensamientos en palabras

71. Explique cómo se usó la propiedad distributiva en este capítulo.

72. ¿Cómo podría ayudarle a alguien a racionalizar el denominador y simplificar la expresión $\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{12} + \sqrt{8}}$?

Más investigación

73. Regresar a los problemas 55-62 y use la calculadora para evaluar cada expresión. Después evalúe el resultado obtenido al racionalizar el denominador.

Respuestas del examen de conceptos

1. Cierto **2.** Falso **3.** Falso **4.** Cierto **5.** Falso **6.** Cierto **7.** Falso **8.** Falso **9.** Cierto **10.** Cierto

9.5 Resolución de ecuaciones con radicales

OBJETIVOS

1 Encontrar el conjunto solución de ecuaciones radicales

2 Comprobar las soluciones de ecuaciones radicales

3 Resolver fórmulas que involucran radicales

Ecuaciones que contienen radicales con variables en el radicando se llaman ecuaciones radicales. Aquí hay algunos ejemplos de ecuaciones radicales que involucran una variable.

$$\sqrt{x} = 3 \qquad \sqrt{2x+1} = 5 \qquad \sqrt{3x+4} = -4$$
$$\sqrt{5s-2} = \sqrt{2s+19} \qquad \sqrt{2y-4} = y-2 \qquad \sqrt{x}+6 = x$$

Para resolver estas ecuaciones, es necesaria la siguiente propiedad de igualdad.

Propiedad 9.4

Sean a y b números reales, si $a = b$, entonces

$$a^2 = b^2$$

La propiedad 9.4 afirma que es posible **elevar ambos lados de una ecuación a una potencia**. Sin embargo, elevar ambos lados de una ecuación a veces produce resultados que no satisfacen la ecuación original. Considere dos ejemplos para ilustrar el punto.

Ejemplo de salón de clases
Resolver ! $\overline{m} = 5$.

EJEMPLO 1 Resolver ! $\overline{x} = 3$.

Solución

$$\sqrt{x} = 3$$
$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = 3^2 \qquad \text{Elevar ambos lados al cuadrado}$$
$$x = 9$$

Ya que ! $\overline{9} = 3$, el conjunto solución es $\{9\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $\sqrt{m} = -4$.

EJEMPLO 2 Resolver $!\,\overline{x} = -3$.

Solución

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= -3 \\ \left(\sqrt{x}\right)^2 &= (-3)^2 && \text{Elevar ambos lados al cuadrado} \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Ya que $\sqrt{9} \neq -3$, 9, no es una solución y el conjunto solución es $\varnothing$.

En general, elevar ambos lados de una ecuación a una potencia entera positiva produce una ecuación que tiene todas las soluciones de la ecuación original, pero también puede tener algunas soluciones adicionales que no satisfagan la ecuación original. Tales soluciones adicionales se llaman **soluciones extrañas**. Por tanto, cuando use la propiedad 9.4, *debe* comprobar cada solución potencial en la ecuación original.

Considere algunos ejemplos para ilustrar diferentes situaciones que surgen cuando se resuelven ecuaciones radicales.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $\sqrt{7x - 5} = 3$.

EJEMPLO 3 Resolver $\sqrt{2x + 1} = 5$.

Solución

$$\begin{aligned} \sqrt{2x + 1} &= 5 \\ \left(\sqrt{2x + 1}\right)^2 &= 5^2 && \text{Elevar ambos lados al cuadrado} \\ 2x + 1 &= 25 \\ 2x &= 24 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

✔ Verificación

$$\begin{aligned} \sqrt{2x + 1} &= 5 \\ \sqrt{2(12) + 1} &\stackrel{?}{=} 5 \\ \sqrt{24 + 1} &\stackrel{?}{=} 5 \\ \sqrt{25} &\stackrel{?}{=} 5 \\ 5 &= 5 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{12\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $\sqrt{6x + 4} = -8$.

EJEMPLO 4 Resolver $\sqrt{3x + 4} = -4$.

Solución

$$\begin{aligned} \sqrt{3x + 4} &= -4 \\ \left(\sqrt{3x + 4}\right)^2 &= (-4)^2 && \text{Elevar ambos lados al cuadrado} \\ 3x + 4 &= 16 \\ 3x &= 12 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

✔ Verificación

$$\begin{aligned} \sqrt{3x + 4} &= -4 \\ \sqrt{3(4) + 4} &\stackrel{?}{=} -4 \\ \sqrt{16} &\stackrel{?}{=} -4 \\ 4 &\neq -4 \end{aligned}$$

Puesto que 4 no coincide, la ecuación $\sqrt{3x+4} = -4$ no tiene solución en números reales. Por ende, el conjunto solución es $\varnothing$.

Ejemplo de salón de clases

Resolver $3\sqrt{7x+1} = 4$.

EJEMPLO 5 Resolver $\sqrt{2y+1} = 5$.

Solución

$$3\sqrt{2y+1} = 5$$

$$\sqrt{2y+1} = \frac{5}{3} \qquad \text{Dividir ambos lados entre 3}$$

$$\left(\sqrt{2y+1}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$2y + 1 = \frac{25}{9}$$

$$2y = \frac{25}{9} - 1$$

$$2y = \frac{25}{9} - \frac{9}{9}$$

$$2y = \frac{16}{9}$$

$$\frac{1}{2}(2y) = \frac{1}{2}\left(\frac{16}{9}\right) \qquad \text{Multiplicar ambos lados por } \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{8}{9}$$

✔ Verificación

$$3\sqrt{2y+1} = 5$$

$$3\sqrt{2\left(\frac{8}{9}\right)+1} \stackrel{?}{=} 5$$

$$3\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{9}{9}} \stackrel{?}{=} 5$$

$$3\sqrt{\frac{25}{9}} \stackrel{?}{=} 5$$

$$3\left(\frac{5}{3}\right) \stackrel{?}{=} 5$$

$$5 = 5$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{8}{9}\right\}$.

Ejemplo de salón de clases

Resolver $-6\sqrt{2x+3} = 18$.

EJEMPLO 6 Resolver $-4\sqrt{3x+1} = 20$.

Solución

$$-4\sqrt{3x+1} = 20$$

$$\sqrt{3x+1} = -5 \qquad \text{Dividir ambos lados entre } -4$$

$$\left(\sqrt{3x+1}\right)^2 = (-5)^2 \qquad \text{Elevar ambos lados al cuadrado}$$

$$3x + 1 = 25$$
$$3x = 24$$
$$x = 8$$

✔ **Verificación**

$$-4\sqrt{3x + 1} = 20$$
$$-4\sqrt{3(8) + 1} \stackrel{?}{=} 20$$
$$-4\sqrt{25} \stackrel{?}{=} 20$$
$$-4(5) \stackrel{?}{=} 20$$
$$-20 \neq 20$$

Puesto que 8 no coincide (8 es una solución extraña) , la ecuación $-4\sqrt{3x + 1} = 20$ no tiene solución en números reales.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $\sqrt{2x + 11} = \sqrt{7x - 9}$.

EJEMPLO 7 Resolver $\sqrt{5s - 2} = \sqrt{2s + 19}$.

Solución

$$\sqrt{5s - 2} = \sqrt{2s + 19}$$
$$\left(\sqrt{5s - 2}\right)^2 = \left(\sqrt{2s + 19}\right)^2 \quad \text{Elevar ambos lados al cuadrado}$$
$$5s - 2 = 2s + 19$$
$$3s = 21$$
$$s = 7$$

✔ **Verificación**

$$\sqrt{5s - 2} = \sqrt{2s + 19}$$
$$\sqrt{5(7) - 2} \stackrel{?}{=} \sqrt{2(7) + 19}$$
$$\sqrt{33} = \sqrt{33}$$

El conjunto solución es $\{7\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $\sqrt{3x - 14} = x - 4$.

EJEMPLO 8 Resolver $\sqrt{2y - 4} = y - 2$.

Solución

$$\sqrt{2y - 4} = y - 2$$
$$\left(\sqrt{2y - 4}\right)^2 = (y - 2)^2 \quad \text{Elevar ambos lados al cuadrado}$$
$$\cancel{2}y - 4 = y^2 - 4y + 4$$
$$0 = y^2 - 6y + 8$$
$$0 = (y - 4)(y - 2) \quad \text{Factorizar el lado derecho de la ecuación}$$
$$y - 4 = 0 \quad \text{o} \quad y - 2 = 0 \quad \text{Recuerde la propiedad } ab = 0 \text{ si y sólo si } a = 0 \text{ o } b = 0$$
$$y = 4 \quad \text{o} \quad y = 2$$

✔ **Verificación**

si $y = 4$	**si $y = 2$**
$\sqrt{2y - 4} = y - 2$	$\sqrt{2y - 4} = y - 2$
$\sqrt{2(4) - 4} \stackrel{?}{=} 4 - 2$	$\sqrt{2(2) - 4} \stackrel{?}{=} 2 - 2$
$\sqrt{4} \stackrel{?}{=} 2$	$\sqrt{0} \stackrel{?}{=} 0$
$2 = 2$	$0 = 0$

El conjunto solución es $\{2, 4\}$.

Ejemplo de salón de clases

Resolver $\sqrt{2m} + 4 = m$.

EJEMPLO 9 Resolver $\sqrt{x} + 6 = x$.

Solución

$$\sqrt{x} + 6 = x$$
$$\sqrt{x} = x - 6$$ Se sumó -6 a ambos lados para que el término con el radical quede solo a un lado de la ecuación
$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = (x-6)^2$$
$$x = x^2 - 12x + 36$$
$$0 = x^2 - 13x + 36$$
$$0 = (x-4)(x-9)$$
$$x - 4 = 0 \quad \text{o} \quad x - 9 = 0$$ Aplicar $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$
$$x = 4 \quad \text{o} \quad x = 9$$

✔ Verificación

si $x = 4$	**si $x = 9$**
$\sqrt{x} + 6 = x$	$\sqrt{x} + 6 = x$
$\sqrt{4} + 6 \stackrel{?}{=} 4$	$\sqrt{9} + 6 \stackrel{?}{=} 9$
$2 + 6 \stackrel{?}{=} 4$	$3 + 6 \stackrel{?}{=} 9$
$8 \neq 4$	$9 = 9$

El conjunto solución es $\{9\}$.

En el ejemplo 9 advierta que se cambió la forma de la ecuación original $\sqrt{x} + 6 = x$ a $\sqrt{x} = x - 6$ antes de elevar al cuadrado ambos lados. Elevar al cuadrado ambos lados de $\sqrt{x} + 6 = x$ produce $x + 12\sqrt{x} + 36 = x^2$, que es una ecuación mucho más compleja que todavía contiene un radical. Aquí de nuevo es conveniente pensar antes de realizar todos los pasos.

Otro vistazo a las aplicaciones

En la sección 9.1 se usó la fórmula $S = \sqrt{30Df}$ para aproximar cuán rápido viajaba un automóvil a partir de la longitud de las marcas de derrape. (Recuerde que S representa la rapidez del vehículo en millas por hora, D representa la longitud de las marcas de derrape en pies y f representa un coeficiente de fricción.) Esta misma fórmula se puede usar para estimar la longitud de las marcas de derrape que producen los automóviles que viajan con diferentes rapideces en varios tipos de superficies de camino. Para usar la fórmula con este propósito, cambie la forma de la ecuación al resolver para D.

$$\sqrt{30Df} = S$$
$$30Df = S^2$$ El resultado de elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación original.
$$D = \frac{S^2}{30f}$$ D, S y f son números positivos, de modo que esta ecuación final y la original son equivalentes

Holly Cohn/Brand X Pictures/Jupiter Images

EJEMPLO 10 **Aplique su habilidad**

Suponga que, para una superficie de camino particular, el coeficiente de fricción es 0.35. ¿Cuánto derrapará un automóvil cuando se le apliquen los frenos a 60 millas por hora?

Solución

Puede sustituir 0.35 por f y 60 por S en la fórmula $D = \frac{S^2}{30f}$.

$$D = \frac{60^2}{30(0.35)} = 343 \text{ al número entero más cercano}$$

El automóvil derrapará aproximadamente 343 pies.

Comentario: Deténgase por un momento y piense acerca del resultado del ejemplo 10. El coeficiente de fricción 0.35 se refiere a una superficie de concreto mojado. Note que un automóvil que viaje a 60 millas por hora en tal superficie derrapará más que la longitud de un campo de fútbol.

Examen de conceptos 9.5

Para los problemas 1 -10, responder cierto o falso.

1. Para resolver una ecuación radical, se puede elevar cada lado de la ecuación a una potencia entera positiva.
2. Resolver la ecuación que resulta de elevar al cuadrado cada lado de una ecuación original puede no dar todas las soluciones de la ecuación original.
3. La ecuación $\sqrt{x-1} = 2$ tiene un número real por solución.
4. Las posibles soluciones que no satisfacen la ecuación original son llamadas soluciones extrañas.
5. La ecuación $\sqrt{x+1} = -2$ no tiene solución.
6. El conjunto solución de $\sqrt{x} + 2 = x$ es $\{1, 4\}$.
7. El conjunto solución de $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = -3$ es un conjunto nulo.
8. El conjunto solución de $\sqrt{x+2} = -2$ es $\{2\}$.
9. El conjunto solución de $\sqrt{x} = x$ es $\{0\}$.
10. El conjunto solución de $\sqrt{x} = x$ es $\{0, 1\}$.

Conjunto de problemas 9.5

Para los problemas 1-40, resolver cada ecuación. Asegúrese de comprobar todas las posibles soluciones en la ecuación original. **(Objetivos 1 y 2)**

1. $\sqrt{x} = 7$
2. $\sqrt{x} = 12$
3. $\sqrt{2x} = 6$
4. $\sqrt{3x} = 9$
5. $\sqrt{3x} = -6$
6. $\sqrt{2x} = -8$
7. $\sqrt{4x} = 3$
8. $\sqrt{5x} = 4$
9. $3\sqrt{x} = 2$
10. $4\sqrt{x} = 3$
11. $\sqrt{2n-3} = 5$
12. $\sqrt{3n+1} = 7$
13. $\sqrt{5y+2} = -1$
14. $\sqrt{4n-3} - 4 = 0$
15. $\sqrt{6x-5} - 3 = 0$
16. $\sqrt{5x+3} = -4$
17. $5\sqrt{x} = 30$
18. $6\sqrt{x} = 42$
19. $\sqrt{3a-2} = \sqrt{2a+4}$
20. $\sqrt{4a+3} = \sqrt{5a-4}$
21. $\sqrt{7x-3} = \sqrt{4x+3}$
22. $\sqrt{8x-6} = \sqrt{4x+11}$
23. $2\sqrt{y+1} = 5$
24. $3\sqrt{y-2} = 4$
25. $\sqrt{x+3} = x+3$
26. $\sqrt{x+7} = x+7$
27. $\sqrt{-2x+28} = x-2$
28. $\sqrt{-2x} = x+4$
29. $\sqrt{3n-4} = \sqrt{n}$
30. $\sqrt{5n-1} = \sqrt{2n}$
31. $\sqrt{3x} = x-6$
32. $2\sqrt{x} = x-3$
33. $4\sqrt{x} + 5 = x$
34. $\sqrt{-x} - 6 = x$
35. $\sqrt{x^2+27} = x+3$
36. $\sqrt{x^2-35} = x-5$
37. $\sqrt{x^2+2x+3} = x+2$
38. $\sqrt{x^2+x+4} = x+3$
39. $\sqrt{8x} - 2 = x$
40. $\sqrt{2x} - 4 = x - 6$

Resolver los problemas 41-43 usando fórmulas que son ecuaciones radicales. **(Objetivo 3)**

41. Vaya a la fórmula dada en la solución del ejemplo 10; use un coeficiente de fricción de 0.95. ¿Cuán lejos se derrapará un automóvil a 40 millas por hora? ¿A 55 millas por hora? ¿A 65 millas por hora? Exprese las respuestas en pies.

42. Resolver la fórmula $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ para L. (Recuerde que en esta fórmula, presentada en la sección 9.1, T representa el periodo de un péndulo expresado en segundos y L representa la longitud del péndulo en pies.)

43. En el problema 42, debe de haber obtenido la ecuación $L = \frac{8T^2}{\pi^2}$. ¿Cuál es la longitud de un péndulo que tiene periodo de 2 segundos? ¿O de 2.5 segundos? ¿De 3 segundos? Use 3.14 como una aproximación para π y exprese las respuestas en la décima de pie más cercana.

Pensamientos en palabras

44. Explique en sus propias palabras por qué las posibles soluciones de las ecuaciones radicales deben de comprobarse.

45. Su amiga intenta resolver la ecuación

$$3 + 2\sqrt{x} = x$$

de la siguiente manera:

$$\left(3 + 2\sqrt{x}\right)^2 = x^2$$
$$9 + 12\sqrt{x} + 4x = x^2$$

En este paso, se detiene y no sabe cómo proceder. ¿Cómo puede ayudarla?

Más investigación

Para los problemas 46-49, resolver cada ecuación.

46. $\sqrt{x + 1} = 5 - \sqrt{x - 4}$

47. $\sqrt{x - 2} = \sqrt{x + 7} - 1$

48. $\sqrt{2n - 1} + \sqrt{n - 5} = 3$

49. $\sqrt{2n + 1} - \sqrt{n - 3} = 2$

50. Suponga que se resuelve la ecuación $x^2 = a^2$ para x de la siguiente manera:

$$x^2 - a^2 = 0$$
$$(x + a)(x - a) = 0$$
$$x + a = 0 \quad \text{o} \quad x - a = 0$$
$$x = -a \quad \text{o} \quad x = a$$

¿Cuál es el significado de este resultado?

Para resolver una ecuación con raíz cúbica, se eleva cada lado de la ecuación a la tercer potencia. Considere el siguiente ejemplo.

$$\sqrt[3]{x - 4} = 5$$
$$\left(\sqrt[3]{x - 4}\right)^3 = 5^3$$
$$x - 4 = 125$$
$$x = 129$$

Para los problemas 51-55, resolver cada ecuación.

51. $\sqrt[3]{x + 7} = 4$

52. $\sqrt[3]{x - 12} = -2$

53. $\sqrt[3]{2x - 4} = 6$

54. $\sqrt[3]{4x - 5} = 3$

55. $\sqrt[3]{4x - 8} = 10$

Respuestas del examen de conceptos

1. Cierto **2.** Falso **3.** Cierto **4.** Cierto **5.** Cierto **6.** Falso **7.** Cierto **8.** Falso **9.** Falso **10.** Cierto

Capítulo 9 Resumen

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Evaluar las raíces de expresiones numéricas. (Sección 9.1/Objetivo 1)	El número a es una raíz cuadrada de b si $a^2 = b$. El símbolo $\sqrt{\ }$ es llamado signo radical e indica la raíz no negativa o principal. El número debajo del signo radical es llamado radicando. Una expresión entera, como $\sqrt{37}$, es llamada radical. La raíz n-ésima de b se escribe $\sqrt[n]{b}$ y n es llamado índice.	Hallar las siguientes raíces sin usar una calculadora: **(a)** $\sqrt{121}$ **(b)** $\sqrt[3]{-64}$ **Solución** **(a)** $\sqrt{121} = 11$ **(b)** $\sqrt[3]{-64} = -4$ **Problema de muestra 1** Hallar las siguientes raíces sin usar una calculadora. **(a)** $\sqrt{81}$ **(b)** $\sqrt[3]{-27}$
Simplificar radicales en los que el radicando es un número entero. (Sección 9.2/Objetivo 1)	Las propiedades $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ donde $a \geq 0$ y $b \geq 0$ y $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$ proporcionan la base para cambiar radicales a la forma radical más simple. Una condición para que se considere que están en la forma radical más simple es que el radicando no contenga factores además de 1 que sean cuadrados (o cubos) perfectos.	Cambiar cada radical a su forma radical más simple: $\sqrt{240}$ **(b)** $\sqrt[3]{160}$ **Solución** **(a)** $\sqrt{240} = \sqrt{16}\sqrt{15} = 4\sqrt{15}$ **(b)** $\sqrt[3]{160} = \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{20} = 2\sqrt[3]{20}$ **Problema de muestra 2** Cambiar cada radical a su forma radical más simple: **(a)** $\sqrt{96}$ **(b)** $\sqrt[3]{32}$
Simplificar radicales que contienen variables. (Sección 9.2/Objetivo 2)	Aquí se asume que todas las variables representan números reales positivos.	Cambiar el radical a su forma radical más simple: $\sqrt{8x^2y^3}$. **Solución** $\sqrt{8x^2y^3} = \sqrt{4x^2y^2}\sqrt{2y}$ $= 2xy\sqrt{2y}$ **Problema de muestra 3** Cambiar el radical a su forma radical más simple: $\sqrt{24xy^3}$.
Usar adición y substracción para agrupar radicales. (Sección 9.1/Objetivo 2) (Sección 9.2/Objetivo 3)	La propiedad distributiva proporciona la base agrupar términos similares en expresiones radicales. Usando la propiedad distributiva, la expresión $5\sqrt{2} + 7\sqrt{2}$ se simplifica en $(5 + 7)\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$. Recuerde que las expresiones radicales son términos similares cuando tienen el mismo radicando e índice.	Simplificar la expresión: $\sqrt{50} - \sqrt{18} + \sqrt{32}$ **Solución** $\sqrt{50} - \sqrt{18} + \sqrt{32}$ $= \sqrt{25}\sqrt{2} - \sqrt{9}\sqrt{2} + \sqrt{16}\sqrt{2}$ $= 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$ $= (5 - 3 + 4)\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ **Problema de muestra 4** Simplificar la expresión: $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{27}$

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Simplificar radicales en los que el radicando es una fracción. (Sección 9.3/Objetivo 1)	Las propiedades $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ donde $a \geq 0$ y $b > 0$ y $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, donde $b \neq 0$, pueden ser usadas para simplificar algunos cocientes de radicales.	Simplificar el cociente $\sqrt{\frac{7}{25}}$. **Solución** $\sqrt{\frac{7}{25}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{7}}{5}$ **Problema de muestra 5** Simplificar el cociente $\sqrt{\frac{3}{49}}$.
Simplificar radicales racionalizando el denominador. (Sección 9.3/Objetivo 2)	Se dice que una expresión que contiene radicales está en la forma radical más simple si satisface las siguientes condiciones: **1.** No aparece ninguna fracción dentro de un signo radical. $\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\text{ viola esta condición.}\right)$ **2.** En el denominador no aparece un radical. $\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\text{ viola esta condición.}\right)$ **3.** Ningún radical, expresado en factores primos, contiene un factor elevado a una potencia igual o mayor que el índice. ($\sqrt{8} = \sqrt{2^3}$ viola esta condición)	Cambiar $\sqrt{\frac{3}{7}}$ a la forma radical más simple. **Solución** Para racionalizar el denominador, se multiplica la expresión radical por una forma de 1 que resulte en un cuadrado perfecto en el denominador. $\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ $= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$ **Problema de muestra 6** Cambiar $\sqrt{\frac{2}{5}}$ a la forma radical más simple.
Usar adición y subtracción para agrupación de radicales después de haber racionalizado el denominador. (Sección 9.3/Objetivo 3)	Cambiar cada radical a la forma radical más simple. Después usar la propiedad distributiva para combinar radicales.	Simplificar $\frac{2}{\sqrt{5}} + 6\sqrt{45}$. **Solución** $\frac{2}{\sqrt{5}} + 6\sqrt{45}$ $= \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + 6\sqrt{9}\sqrt{5}$ $= \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{25}} + 6(3)\sqrt{5}$ $= \frac{2\sqrt{5}}{5} + 18\sqrt{5}$ $= \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{90\sqrt{5}}{5} = \frac{92\sqrt{5}}{5}$ **Problema de muestra 7** Simplificar $\sqrt{20} - \sqrt{\frac{1}{5}}$.

(*continúa*)

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Multiplicación de radicales. (Sección 9.4/Objetivo 1)	Usar las propiedades $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, donde $a \geq 0$ y $b \geq 0$ y $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$ para multiplicar radicales y para simplificar el radical resultante cuando sea apropiado.	Hallar el producto y expresar la respuesta en la forma radical más simple: **(a)** $\sqrt[3]{4xy^2}\sqrt[3]{4xy}$ **(b)** $\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)$ **Solución** **(a)** $\sqrt[3]{4xy^2}\sqrt[3]{4xy}$ $= \sqrt[3]{16x^2y^3}$ $= \sqrt[3]{8y^3}\sqrt[3]{2x^2} = 2y\sqrt[3]{2x^2}$ **(b)** $\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)$ $= 3\sqrt{25} + \sqrt{10} - 3\sqrt{10} - \sqrt{4}$ $= 3(5) + \sqrt{10} - 3\sqrt{10} - 2$ $= 15 - 2\sqrt{10} - 2$ $= 13 - 2\sqrt{10}$ **Problema de muestra 8** Hallar el producto y expresar la respuesta en la forma radical más simple: **(a)** $\sqrt[3]{9x^2y}\,\sqrt[3]{9xy}$ **(b)** $\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$
Racionalización de denominadores binomiales. (Sección 9.4/Objetivo 2)	Expresiones como $\sqrt{10} + \sqrt{7}$ y $\sqrt{10} - \sqrt{7}$ son llamadas conjugados. De manera similar, $5 + \sqrt{2}$ y $5 - \sqrt{2}$ son conjugados, así como $\sqrt{6} + 3$ y $\sqrt{6} - 3$. Para racionalizar el denominador cuando el denominador de una expresión radical está en forma de binomio, debe multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.	Racionalizar el denominador $\dfrac{8}{\sqrt{5} + 3}$. **Solución** $\dfrac{8}{\sqrt{5} + 3}$ $= \dfrac{8}{\sqrt{5} + 3} \cdot \dfrac{\sqrt{5} - 3}{\sqrt{5} - 3}$ $= \dfrac{8\left(\sqrt{5} - 3\right)}{\left(\sqrt{5} + 3\right)\left(\sqrt{5} - 3\right)}$ $= \dfrac{8\left(\sqrt{5} - 3\right)}{\sqrt{25} - 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 9}$ $= \dfrac{8\left(\sqrt{5} - 3\right)}{5 - 9} = \dfrac{8\left(\sqrt{5} - 3\right)}{-4}$ $= -2\left(\sqrt{5} - 3\right)$ **Problema de muestra 9** Racionalizar el denominador $\dfrac{6}{\sqrt{7} - 2}$.

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Encontrar los conjuntos solución para ecuaciones radicales. (Sección 9.5/Objetivos 1 y 2)	Usar la propiedad de igualdad, si $a = b$, entonces $a^2 = b^2$, para resolver ecuaciones que contienen radicales. En general, elevar ambos lados de una ecuación a una potencia produce una ecuación que tiene todas las soluciones de la ecuación original, pero también puede tener soluciones extra que no satisfacen la ecuación original. Por ende, cuando use la propiedad de "elevación a una potencia", debe comprobar cada posible solución en la ecuación original.	Resolver: **(a)** $\sqrt{2x+1} = \sqrt{3x}$ **(b)** $\sqrt{2y+4} = y - 2$ **Solución** **(a)** $\sqrt{2x+1} = \sqrt{3x}$ $\left(\sqrt{2x+1}\right)^2 = \left(\sqrt{3x}\right)^2$ $2x + 1 = 3x$ $1 = x$ Verificar $\sqrt{2(1)+1} \stackrel{?}{=} \sqrt{3(1)}$ $\sqrt{3} = \sqrt{3}$ Coincide El conjunto solución es $\{1\}$. **(b)** $\sqrt{2y+4} = y - 2$ $\left(\sqrt{2y+4}\right)^2 = (y-2)^2$ $2y + 4 = y^2 - 4y + 4$ $0 = y^2 - 6y$ $0 = y(y-6)$ $y = 0$ o $y = 6$ Verificar cuando $y = 0$: $\sqrt{2(0)+4} \stackrel{?}{=} 0 - 2$ $\sqrt{4} \stackrel{?}{=} -2$ $2 \neq -2$ No coincide Verificar cuando $y = 6$: $\sqrt{2(6)+4} \stackrel{?}{=} 6 - 2$ $\sqrt{16} \stackrel{?}{=} 4$ $= 4$ Coincide El conjunto solución es $\{6\}$. **Problema de muestra 10** Resolver **(a)** $\sqrt{3x-4} = \sqrt{2x-1}$ **(b)** $\sqrt{3x+4} = x$
Resolver fórmulas que implican radicales. (Sección 9.5/Objetivo 3)	La fórmula $S = \sqrt{30Df}$ se usa para aproximar la velocidad de un automóvil usando la longitud de sus marcas de derrape. Esta fórmula puede usarse para determinar la distancia del derrape y el coeficiente de fricción de la superficie.	Resolver $S = \sqrt{30Df}$ para D. **Solución** $S = \sqrt{30Df}$ $S^2 = \left(\sqrt{30Df}\right)^2$ $S^2 = 30Df$ $\frac{S^2}{30f} = D$ **Problema de muestra 11** Resolver $S = \sqrt{30Df}$ para f.

Capítulo 9 Conjunto de problemas de repaso

Para los problemas 1-6, evaluar cada expresión sin usar una tabla o calculadora.

1. $\sqrt{64}$ **2.** $-\sqrt{49}$ **3.** $\sqrt{1600}$

4. $\sqrt{\frac{81}{25}}$ **5.** $-\sqrt{\frac{4}{9}}$ **6.** $\sqrt{\frac{49}{36}}$

Para los problemas 7-20, cambiar cada número a su forma radical más simple.

7. $\sqrt{20}$ **8.** $\sqrt{32}$ **9.** $5\sqrt{8}$

10. $\sqrt{80}$ **11.** $2\sqrt[3]{-125}$ **12.** $\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{8}}$

13. $\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{7}}$ **14.** $\sqrt{\frac{7}{8}}$ **15.** $\sqrt{\frac{8}{24}}$

16. $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ **17.** $\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$ **18.** $\frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

19. $\frac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{27}}$ **20.** $\frac{4\sqrt{6}}{3\sqrt{12}}$

Para los problemas 21-24, usar el hecho $\sqrt{3} = 1.73$, a la centésima más cercana para ayudar a evaluar cada una de las siguientes. Expresar su respuesta final en la décima más cercana.

21. $\sqrt{27}$ **22.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$

23. $3\sqrt{12} + \sqrt{48}$ **24.** $2\sqrt{27} - 2\sqrt{75}$

Para los problemas 25-36, cambiar cada expresión a la forma radical más simple. Todas las variables representan números reales positivos.

25. $\sqrt{12a^2b^3}$ **26.** $\sqrt{50xy^4}$

27. $\sqrt{48x^3y^2}$ **28.** $\sqrt[3]{125a^2b}$

29. $\frac{4}{3}\sqrt{27xy^2}$ **30.** $\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{24x^3}\right)$

31. $\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{5y}}$ **32.** $\frac{\sqrt{72x}}{\sqrt{16y}}$ **33.** $\sqrt{\frac{4}{x}}$

34. $\sqrt{\frac{2x^3}{9}}$ **35.** $\frac{3\sqrt{x}}{4\sqrt{y^3}}$ **36.** $\frac{-2\sqrt{x^2y}}{5\sqrt{xy}}$

Para los problemas 37-46, hallar los productos y expresar las respuestas en la forma radical más simple.

37. $\left(\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{12}\right)$ **38.** $\left(2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{6}\right)$

39. $\left(-5\sqrt{8}\right)\left(2\sqrt{2}\right)$ **40.** $\left(2\sqrt[3]{7}\right)\left(5\sqrt[3]{4}\right)$

41. $\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4}\right)$ **42.** $3\sqrt{5}\left(\sqrt{8} - 2\sqrt{12}\right)$

43. $\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)$

44. $\left(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} - 5\sqrt{2}\right)$

45. $\left(\sqrt{6} + 2\sqrt{7}\right)\left(3\sqrt{6} - \sqrt{7}\right)$

46. $\left(3 + 2\sqrt{5}\right)\left(4 - 3\sqrt{5}\right)$

Para los problemas 47-50, racionalizar los denominadores y simplificar.

47. $\frac{5}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$ **48.** $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

49. $\frac{2}{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}$ **50.** $\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{7} + 2\sqrt{10}}$

Para los problemas 51-56, simplificar cada expresión radical.

51. $2\sqrt{50} + 3\sqrt{72} - 5\sqrt{8}$

52. $\sqrt{8x} - 3\sqrt{18x}$ **53.** $9\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{16}$

54. $3\sqrt{10} + \sqrt{\frac{2}{5}}$ **55.** $4\sqrt{20} - \frac{3}{\sqrt{5}} + \sqrt{45}$

56. $\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{54}$

Para los problemas 57-62, resolver cada una de las ecuaciones.

57. $\sqrt{5x + 6} = 6$

58. $\sqrt{6x + 1} = \sqrt{3x + 13}$

59. $3\sqrt{n} = n$

60. $\sqrt{y + 5} = y + 5$

61. $\sqrt{-3a + 10} = a - 2$

62. $-\sqrt{2x - 1} = 2$

Para los problemas 63-65, usar una calculadora para evaluar cada expresión.

63. $\sqrt{2116}$ **64.** $\sqrt{4356}$

65. $\sqrt{5184}$

Para los problemas 66-68, usar una calculadora para encontrar una aproximación en números enteros para cada expresión.

66. $\sqrt{690}$ **67.** $\sqrt{2185}$

68. $\sqrt{5500}$

Capítulo 9 Examen

1. Evaluar $-\sqrt{\dfrac{64}{49}}$.

2. Evaluar $\sqrt{0.0025}$.

Para los problemas 3-5, usar una aproximación racional a la centésima más cercana y evaluar cada uno de los siguientes a la décima más cercana.

3. $\sqrt{8}$

4. $-\sqrt{32}$

5. $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Para los problemas 6-14, cambiar cada expresión radical a su forma radical más simple. Todas las variables representan números reales positivos.

6. $\sqrt{45}$

7. $-4\sqrt[3]{54}$

8. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}}$

9. $\sqrt{\dfrac{25}{2}}$

10. $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{36}}$

11. $\sqrt{\dfrac{5}{8}}$

12. $\sqrt[3]{-250x^4y^3}$

13. $\dfrac{\sqrt{3x}}{\sqrt{5y}}$

14. $\dfrac{3}{4}\sqrt{48x^3y^2}$

Para los problemas 15-18, hallar los productos indicados y expresar las respuestas en su forma radical más simple.

15. $(\sqrt{8})(\sqrt{12})$

16. $(6\sqrt[3]{5})(4\sqrt[3]{2})$

17. $\sqrt{6}(2\sqrt{12} - 3\sqrt{8})$

18. $(2\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - 3\sqrt{3})$

19. Racionalizar el denominador y simplificar:

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{12} + \sqrt{2}}.$$

20. Simplificar $2\sqrt{24} - 4\sqrt{54} + 3\sqrt{96}$.

21. Hallar una aproximación en números enteros para $\sqrt{500}$.

Para los problemas 22-25, resolver cada ecuación:

22. $\sqrt{3x + 1} = 4$

23. $\sqrt{2x - 5} = -4$

24. $\sqrt{n - 3} = 3 - n$

25. $\sqrt{3x + 6} = x + 2$

Capítulos 1-9 Conjunto de problemas de repaso acumulados

Para los problemas 1-6, evaluar cada expresión numérica.

1. -2^6

2. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$

3. $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^{-2}$

4. $-\sqrt{64}$

5. $\sqrt{\frac{4}{9}}$

6. $3^0 + 3^{-1} + 3^{-2}$

Para los problemas 7-10, evaluar cada expresión algebraica para los valores dados a las variables.

7. $3(2x - 1) - 4(2x + 3) - (x + 6)$ para $x = -4$

8. $(3x^2 - 4x - 6) - (3x^2 + 3x + 1)$ para $x = 6$

9. $2(a - b) - 3(2a + b) + 2(a - 3b)$ para $a = -2$ y $b = 3$

10. $x^2 - 2xy + y^2$ para $x = 5$ y $y = -2$

Para los problemas 11-25, realizar las operaciones indicadas y exprese sus respuestas en la forma más simple.

11. $\frac{3}{4x} + \frac{5}{2x} - \frac{7}{x}$

12. $\frac{3}{x-2} - \frac{4}{x+3}$

13. $\frac{3x}{7y} \div \frac{6x}{35y^2}$

14. $\frac{x-2}{x^2+x-6} \cdot \frac{x^2+6x+9}{x^2-x-12}$

15. $\frac{7}{x^2+3x-18} - \frac{8}{x-3}$

16. $(-3xy)(-4y^2)(5x^3y)$

17. $(-4x^{-5})(2x^3)$

18. $\frac{-12a^{-2}b^3}{4a^{-5}b^4}$

19. $(3n^4)^{-1}$

20. $(9x - 2)(3x + 4)$

21. $(-x - 1)(5x + 7)$

22. $(3x + 1)(2x^2 - x - 4)$

23. $\frac{15x^6y^8 - 20x^3y^5}{5x^3y^2}$

24. $(10x^3 - 8x^2 - 17x - 3) \div (5x + 1)$

25. $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{xy}}$

26. Si 2 galones de pintura cubren 1500 pies cuadrados de pared, ¿cuántos galones se necesitarán para cubrir 3500 pies cuadrados?

27. ¿18 es qué porcentaje de 72?

28. Resolver $V = \frac{1}{3}Bh$ para B si $V = 432$ y $h = 12$.

29. ¿Cuántos pies de cerca se necesitan para rodear un jardín rectangular que mide 25 pies por 40 pies?

30. Hallar el área de superficie total de una esfera cuyo radio mide 5 pulgadas. Usar 3.14 como una aproximación para π.

31. Escribir cada número en notación científica.

(a) 85,000 **(b)** 0.0009

(c) 0.00000104 **(d)** 53,000,000

Para los problemas 32-37, factorizar cada expresión completamente.

32. $12x^3 + 14x^2 - 40x$

33. $12x^2 - 27$

34. $xy + 3x - 2y - 6$

35. $30 + 19x - 5x^2$

36. $4x^4 - 4$

37. $21x^2 + 22x - 8$

Para los problemas 38-43, cambiar cada expresión radical a su forma radical más simple.

38. $4\sqrt{28}$

39. $-\sqrt{45}$

40. $\sqrt{\frac{36}{5}}$

41. $\frac{5\sqrt{8}}{6\sqrt{12}}$

42. $\sqrt{72xy^5}$

43. $\frac{-2\sqrt{ab^2}}{5\sqrt{b}}$

Para los problemas 44-46, hallar cada producto y exprese su respuesta en la forma radical más simple.

44. $\left(3\sqrt{8}\right)\left(4\sqrt{2}\right)$

45. $6\sqrt{2}\left(9\sqrt{8} - 3\sqrt{12}\right)$

46. $\left(3\sqrt{2} - \sqrt{7}\right)\left(3\sqrt{2} + \sqrt{7}\right)$

Para los problemas 47 y 48, racionalizar el denominador y simplificar.

47. $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

48. $\frac{-6}{3\sqrt{5}-\sqrt{6}}$

Para los problemas 49 y 50, simplificar cada expresión radical.

49. $3\sqrt{50} - 7\sqrt{72} + 4\sqrt{98}$

50. $\frac{2}{3}\sqrt{20} - \frac{3}{4}\sqrt{45} + \sqrt{80}$

Para los problemas 51-55, graficar cada ecuación.

51. $3x - 6y = -6$

52. $y = \frac{1}{3}x + 4$

53. $y = -\frac{2}{5}x + 3$

54. $y - 2x = 0$

55. $y = -x$

Para los problemas 56-58, graficar cada desigualdad lineal.

56. $y \geq 2x - 6$

57. $3x - 2y < -6$

58. $-2x - 4y > 8$

Para los problemas 59-64, resolver cada uno de los problemas.

59. Hallar la pendiente de una recta determinada por los puntos $(-3, 6)$ y $(2, -4)$.

60. Hallar la pendiente de una recta determinada por la ecuación $4x - 7y = 12$.

61. Escribir la ecuación de la recta que tiene una pendiente de $\frac{2}{3}$ y contiene el punto $(7, 2)$.

62. Escribir la ecuación de la recta que contiene los puntos $(-4, 1)$ y $(-1, -3)$.

63. Escribir la ecuación de la recta que tiene una pendiente de $-\frac{1}{4}$ y una ordenada al origen de -3.

64. Hallar la pendiente de una recta cuya ecuación es $3x - 2y = 12$.

Para los problemas 65-68, resolver cada sistema usando el método de sustitución o el método de eliminación por adición.

65. $\begin{pmatrix} y = 3x - 5 \\ 3x + 4y = -5 \end{pmatrix}$

66. $\begin{pmatrix} 4x - 3y = -20 \\ 3x + 5y = 14 \end{pmatrix}$

67. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = -11 \\ \frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y = 8 \end{pmatrix}$

68. $\begin{pmatrix} 2x + 7y = 22 \\ 4x - 5y = -13 \end{pmatrix}$

Para los problemas 69-80, resolver cada ecuación.

69. $-2(n - 1) + 4(2n - 3) = 4(n + 6)$

70. $\frac{4}{x - 1} = \frac{-1}{x + 6}$

71. $\frac{t - 1}{3} - \frac{t + 2}{4} = -\frac{5}{12}$

72. $-7 - 2n - 6n = 7n - 5n + 12$

73. $\frac{n - 5}{2} = 3 - \frac{n + 4}{5}$

74. $0.11x + 0.14(x + 400) = 181$

75. $\frac{x}{60 - x} = 7 + \frac{4}{60 - x}$

76. $1 + \frac{x + 1}{2x} = \frac{3}{4}$

77. $x^2 + 4x - 12 = 0$

78. $2x^2 - 8 = 0$

79. $\sqrt{3x - 6} = 9$

80. $\sqrt{3n} - 2 = 7$

Para los problemas 81-86, resolver cada desigualdad.

81. $-3n - 4 \leq 11$

82. $-5 > 3n - 4 - 7n$

83. $2(x - 2) + 3(x + 4) > 6$

84. $\frac{1}{2}n - \frac{2}{3}n < -1$

85. $\frac{x + 1}{2} + \frac{x - 2}{6} < \frac{3}{8}$

86. $\frac{x - 3}{7} - \frac{x - 2}{4} \leq \frac{9}{14}$

Para los problemas 87-97, plantear una ecuación, una desigualdad o un sistema de ecuaciones para ayudar a resolver cada problema.

87. Si dos ángulos son suplementarios y el ángulo más grande mide 15° menos que el doble del más chico, hallar la medida de cada ángulo.

88. La suma de dos números es 50. Si el número más grande mide 2 menos que tres veces el número más chico, hallar los números.

89. La suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 130. Hallar los números.

90. Suponga que Nick tiene 47 monedas consistiendo de monedas de cinco, diez y veinticinco centavos. El número de monedas de diez centavos es 1 más que el doble de monedas de cinco centavos y el número de monedas de veinticinco centavos es 4 más que tres veces el número de monedas de cinco centavos. Hallar el número de monedas de cada denominación.

91. Una casa con valor de $140,000 se evalúa en $2940 en impuestos; con la misma tasa, ¿de cuántos serían los impuestos en una casa con valor de $180,000?

92. Una vendedora tiene algunas faldas que le costaron $30 cada una. Quiere venderlas a una ganancia de 60% del costo. ¿Cuál debe ser el precio de venta de las faldas?

93. Rosa sale del pueblo en su automóvil a una rapidez de millas por hora. Una hora después, Polly sale del mismo pueblo por la misma ruta a una rapidez de 55 millas por hora. ¿Cuánto le tomará a Polly rebasar a Rosa?

94. ¿Cuántos mililitros de ácido puro se debe agregar a 100 mililitros de solución al 10% para obtener una solución al 20%?

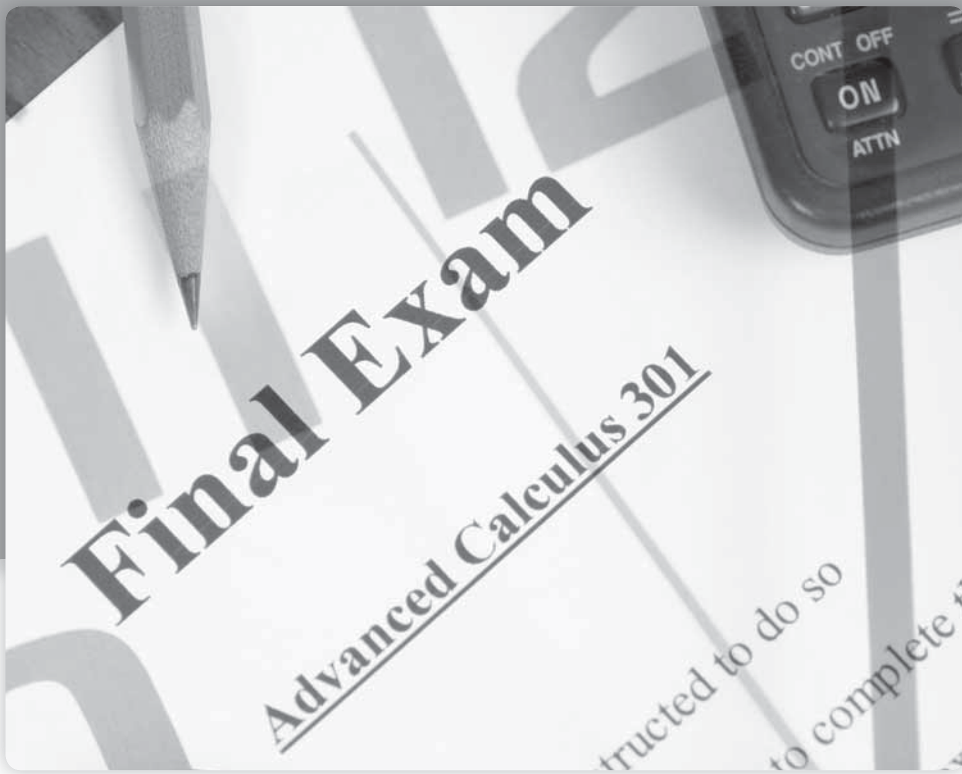
95. Suponga que Andy obtuvo las calificaciones 85, 90 y 86 en sus primeros tres exámenes de álgebra. ¿Qué calificación debe obtener en el cuarto examen para tener un promedio de 88 o mayor en los cuatro exámenes?

96. Los Cubs ganaron 70 juegos y perdieron 72. Tienen 20 más partidos por jugar. Para ganar más del 50% de todos los partidos, ¿cuántos de los 20 juegos restantes deben ganar?

97. Seth puede hacer un trabajo en 20 minutos. Butch puede hacer el mismo trabajo en 30 minutos. Si trabajan juntos, ¿cuánto les tomará completar el trabajo?

Pueden encontrarse más problemas verbales en el apéndice A. Todos los problemas en el apéndice con referencias a los capítulos 3-8 son apropiados.

10 Ecuaciones cuadráticas



© Thomas M Perkins/Shutterstock.com

> *"Prepárate, trabaja duro y espera un poco de buena suerte. Reconoce que entre más duro trabajes y entre más preparado estés, más suerte tendrás".*
>
> ED BRADLEY

Tip de estudio

Idealmente, al inicio de su curso de matemáticas se determinó si habría un examen final. La mayoría de los cursos de matemáticas tienen un examen acumulativo al final. Acumulativo significa que el examen cubre cada tema enseñado en el curso. El examen final puede ser escrito por su instructor o puede ser realizado por el departamento de matemáticas. En cualquier caso, debe asegurarse con su instructor de recibir exámenes de práctica para el examen final. El porcentaje de su calificación determinado por el examen final típicamente varía entre 10% y 30%. Su calificación final del curso tal vez dependa de su calificación en el examen final.

Prepararse para el examen final es similar a prepararse para cualquier examen, excepto que necesita aún más tiempo para estar listo. Comience a prepararse para el examen final alrededor de dos semanas antes del examen. Escriba una lista de los temas que vendrán en el examen. Si tiene acceso a sus exámenes previos, repáselos y corrija cualquier error que haya cometido. Llegue temprano al examen final para evitar llegar tarde. Los exámenes finales suelen aplicarse bajo cierto tiempo y no querrá perder tiempo por haber llegado tarde.

¿Cree que su éxito se debe al trabajo duro y preparación o a la suerte, o a una combinación de ambos?

Vista previa del capítulo

El capítulo 10 se enfoca en resolver ecuaciones cuadráticas. Las ecuaciones cuadráticas son ecuaciones que tienen un término cuya variable está elevada al cuadrado, como es el caso de $2x^2$ 2 $5x$ 1 7 5 0. Estas ecuaciones típicamente tienen dos soluciones. El capítulo presenta tres métodos para resolver ecuaciones cuadráticas: factorizar, completar el cuadrado y la fórmula cuadrática. Aunque la fórmula cuadrática funciona con cualquier ecuación cuadrática, los otros métodos pueden ser más simples de aplicar dependiendo de la forma de la ecuación.

10.1 Ecuaciones cuadráticas

OBJETIVOS

1. Resolver ecuaciones cuadráticas factorizando
2. Resolver ecuaciones cuadráticas en la forma $x^2 = a$
3. Resolver problemas verbales que involucran el teorema de Pitágoras y triángulos rectángulos 30°-60°

Una ecuación de segundo grado con una variable contiene la variable con un exponente de 2, mas no potencias superiores. Tales ecuaciones también se llaman **ecuaciones cuadráticas**. Las siguientes son ejemplos de ecuaciones cuadráticas.

$$x^2 = 25 \qquad y^2 + 6y = 0 \qquad x^2 + 7x - 4 = 0$$
$$4y^2 + 2y - 1 = 0 \qquad 5x^2 + 2x - 1 = 2x^2 + 6x - 5$$

Una ecuación cuadrática en la variable x también se define como cualquier ecuación que se escriba en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. La forma $ax^2 + bx + c = 0$ se llama forma estándar de una ecuación cuadrática.

En el capítulo 6 se resolvieron ecuaciones cuadráticas (en esa ocasión no se utilizó el término cuadrático) al factorizar y aplicar la propiedad, $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$. Revise algunos de tales ejemplos.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $x^2 - 5x = 0$.

EJEMPLO 1 Resolver $x^2 - 13x = 0$.

Solución

$x^2 - 13x = 0$

$x(x - 13) = 0$ — Factorizar el lado izquierdo de la ecuación

$x = 0$ o $x - 13 = 0$ — Aplicar $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$

$x = 0$ o $x = 13$

El conjunto solución es $\{0, 13\}$. ¡No olvide comprobar estas soluciones!

Ejemplo de salón de clases
Resolver $x^2 - 5x - 24 = 0$.

EJEMPLO 2 Resolver $n^2 + 2n - 24 = 0$.

Solución

$n^2 + 2n - 24 = 0$

$(n + 6)(n - 4) = 0$ — Factorizar lado izquierdo

$n + 6 = 0$ o $n - 4 = 0$ — Aplicar $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$

$n = -6$ o $n = 4$

El conjunto solución es $\{-6, 4\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $m^2 + 8m + 16 = 0$.

EJEMPLO 3 Resolver $x^2 + 6x + 9 = 0$.

Solución

$$
\begin{array}{lll}
x^2 + 6x + 9 = 0 & & \\
(x + 3)(x + 3) = 0 & & \text{Factorizar lado izquierdo} \\
x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 3 = 0 & & \text{Aplicar } ab = 0 \text{ si y sólo si } a = 0 \text{ o } b = 0 \\
x = -3 \quad \text{o} \quad x = -3 & &
\end{array}
$$

El conjunto solución es $\{-3\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $b^2 = 25$.

EJEMPLO 4 Resolver $y^2 = 49$.

Solución

$$
\begin{array}{lll}
y^2 = 49 & & \\
y^2 - 49 = 0 & & \\
(y + 7)(y - 7) = 0 & & \text{Factorizar lado izquierdo} \\
y + 7 = 0 \quad \text{o} \quad y - 7 = 0 & & \text{Aplicar } ab = 0 \text{ si y sólo si } a = 0 \text{ o } b = 0 \\
y = -7 \quad \text{o} \quad y = 7 & &
\end{array}
$$

El conjunto solución es $\{-7, 7\}$.

Propiedad de raíces cuadradas

Note el tipo de ecuación que se resolvió en el ejemplo 4. Se puede generalizar de ese ejemplo y considerar la ecuación $x^2 = a$, donde a es cualquier número real no negativo. Se puede resolver esta ecuación de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{lll}
x^2 = a & & \\
x^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 & & \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \\
x^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2 = 0 & & \\
\left(x - \sqrt{a}\right)\left(x + \sqrt{a}\right) = 0 & & \text{Factorizar lado izquierdo} \\
x - \sqrt{a} = 0 \quad \text{o} \quad x + \sqrt{a} = 0 & & \text{Aplicar } ab = 0 \text{ si y sólo si } a = 0 \text{ o } b = 0 \\
x = \sqrt{a} \quad \text{o} \quad x = -\sqrt{a} & &
\end{array}
$$

Las soluciones son $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$. Se debe considerar este resultado como una propiedad general y usarla para resolver ciertos tipos de ecuaciones cuadráticas.

Propiedad 10.1

Para cualquier número real a,

$$x^2 = a \quad \text{si y sólo si} \quad x = \sqrt{a} \text{ o } x = -\sqrt{a}$$

El enunciado $x = \sqrt{a}$ o $x = -\sqrt{a}$ se pueden escribir como $x = \pm\sqrt{a}$.

La propiedad 10.1 suele ser conocida como la propiedad de raíces cuadradas. Esta propiedad, junto con el conocimiento de las raíces cuadradas, facilita mucho la resolución de ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 = a$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $t^2 = 36$.

EJEMPLO 5

Resolver $x^2 = 81$.

Solución

$$x^2 = 81$$
$$x = \pm\sqrt{81} \qquad \text{Aplicar la propiedad 10.1}$$
$$x = \pm 9$$

El conjunto solución es $\{-9, 9\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $y^2 = 20$.

EJEMPLO 6

Resolver $x^2 = 8$.

Solución

$$x^2 = 8$$
$$x = \pm\sqrt{8}$$
$$x = \pm 2\sqrt{2} \qquad \sqrt{8} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

El conjunto solución es $\{-2 ! \overline{2}, 2 ! \overline{2}\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $7x^2 = 18$.

EJEMPLO 7

Resolver $5n^2 = 12$.

Solución

$$5n^2 = 12$$
$$n^2 = \frac{12}{5} \qquad \text{Dividir ambos lados entre 5}$$
$$n = \pm\sqrt{\frac{12}{5}}$$
$$n = \pm\frac{2\sqrt{15}}{5} \qquad \sqrt{\frac{12}{5}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{60}}{5} = \frac{2\sqrt{15}}{5}$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{2\sqrt{15}}{5}, \frac{2\sqrt{15}}{5}\right\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $(a - 4)^2 = 64$.

EJEMPLO 8

Resolver $(x - 2)^2 = 16$.

Solución

$$(x - 2)^2 = 16$$
$$x - 2 = \pm 4$$
$$x - 2 = 4 \quad \text{o} \quad x - 2 = -4$$
$$x = 6 \quad \text{o} \quad x = -2$$

El conjunto solución es $\{-2, 6\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $(m + 3)^2 = 48$.

EJEMPLO 9

Resolver $(x + 5)^2 = 27$.

Solución

$$(x + 5)^2 = 27$$
$$x + 5 = \pm\sqrt{27}$$
$$x + 5 = \pm 3\sqrt{3} \qquad \sqrt{27} = \sqrt{9}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$x + 5 = 3\sqrt{3} \quad \text{o} \quad x + 5 = -3\sqrt{3}$$
$$x = -5 + 3\sqrt{3} \quad \text{o} \quad x = -5 - 3\sqrt{3}$$

El conjunto solución es $\{-5 - 3\sqrt{3}, -5 + 3\sqrt{3}\}$.

Puede que sea necesario cambiar la forma antes de poder aplicar la propiedad 10.1. El siguiente ejemplo ilustra este proceso.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $4(3t + 1)^2 + 3 = 75$.

EJEMPLO 10 Resolver $3(2x - 3)^2 + 8 = 44$.

Solución

$$3(2x - 3)^2 + 8 = 44$$
$$3(2x - 3)^2 = 36$$
$$(2x - 3)^2 = 12$$
$$2x - 3 = \pm\sqrt{12} \qquad \text{Aplicar la propiedad 10.1}$$
$$2x - 3 = \sqrt{12} \quad \text{o} \quad 2x - 3 = -\sqrt{12}$$
$$2x = 3 + \sqrt{12} \quad \text{o} \quad 2x = 3 - \sqrt{12}$$
$$x = \frac{3 + \sqrt{12}}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{3 - \sqrt{12}}{2}$$
$$x = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{2} \qquad \sqrt{12} = \sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{3 - 2\sqrt{3}}{2}, \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Note que las ecuaciones cuadráticas en la forma $x^2 = a$, donde a es un número negativo, no tienen soluciones en números reales. Por ejemplo, $x^2 = -4$ no tiene soluciones en números reales porque cualquier número real elevado al cuadrado es no negativo. De manera similar, una ecuación como $(x + 3)^2 = -14$ no tiene soluciones en números reales.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $-2(3x + 1)^2 + 4 = 12$.

EJEMPLO 11 Resolver $(5x + 3)^2 + 10 = 4$.

Solución

$$(5x + 3)^2 + 10 = 4 \qquad \text{Cambiar la forma de la ecuación}$$
$$(5x + 3)^2 = -6$$

La propiedad 10.1 no puede aplicarse porque la cantidad al cuadrado es igual a un número negativo. Ecuaciones como ésta $(5x + 3)^2 = -6$ no tienen soluciones en números reales.

Usar el teorema de Pitágoras

El trabajo con radicales, la propiedad 10.1 y el teorema de Pitágoras forman una base para resolver varios tipos de problemas que pertenecen a triángulos rectángulos. Primero, recuerde el teorema de Pitágoras.

El teorema de Pitágoras

Si para un triángulo rectángulo, a y b son las medidas de los catetos, y c es la medida de la hipotenusa, entonces

$$a^2 + b^2 = c^2$$

(La hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto y los catetos son los otros dos lados, como se muestra en la figura 10.1)

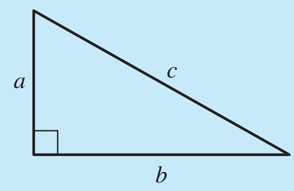


Figura 10.1

Ejemplo de salón de clases
Hallar el largo de la hipotenusa en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 centímetros y 8 centímetros.

EJEMPLO 12 Aplique su habilidad

Encontrar c en la figura 10.2.

Solución

Al aplicar el teorema de Pitágoras, se obtiene

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ c^2 &= 3^2 + 4^2 \\ c^2 &= 9 + 16 \\ c^2 &= 25 \\ c &= 5 \end{aligned}$$

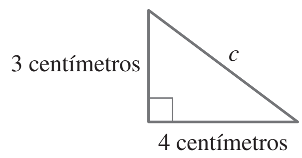


Figura 10.2

El largo de c es 5 centímetros.

Comentario: No olvide que la ecuación $c^2 = 25$ tiene dos soluciones, 5 y -5. Sin embargo, debido a que se están hallando las longitudes de segmentos, se pueden descartar las soluciones negativas.

Ejemplo de salón de clases
Una soga de 69 pies cuelga desde la parte superior de un asta. Cuando se tensa a toda su longitud, la soga llega a un punto en el suelo a 12 pies de la base del asta. Encuentre la altura del asta a la décima más cercana de un pie.

EJEMPLO 13 Aplique su habilidad

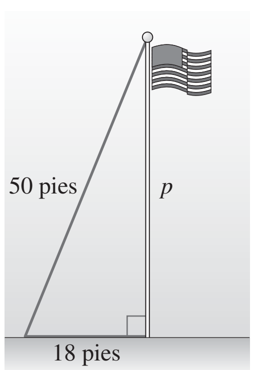
Una soga de 50 pies cuelga desde la parte superior de un asta. Cuando se tensa a toda su longitud, la soga llega a un punto en el suelo a 18 pies de la base del asta. Encuentre la altura del asta a la décima más cercana de un pie.

Solución

Elabore un bosquejo (figura 10.3) y registre la información dada. Use el teorema de Pitágoras para resolver p del modo siguiente:

$$\begin{aligned} p^2 + 18^2 &= 50^2 \\ p^2 + 324 &= 2500 \\ p^2 &= 2176 \\ p &= \sqrt{2176} = 46.6 \quad \text{a la décima más cercana} \end{aligned}$$

La altura del asta es aproximadamente 46.6 pies.



p representa la altura del asta.

Figura 10.3

Hay dos tipos especiales de triángulos rectángulos de amplio uso en cursos de matemáticas superiores. El primero es el **triángulo rectángulos isósceles**, que es un triángulo rectángulo que tiene dos catetos de la misma longitud. Considere un problema que implica un triángulo rectángulo isósceles.

Ejemplo de salón de clases
Encuentre la longitud de cada cateto de un triángulo rectángulo isósceles que tiene una hipotenusa de 12 metros de longitud.

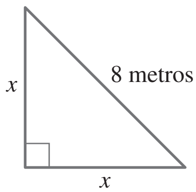


Figura 10.4

EJEMPLO 14 Aplique su habilidad

Encuentre la longitud de cada cateto de un triángulo rectángulo isósceles que tiene una hipotenusa de 8 metros de longitud.

Solución

Bosqueje un triángulo rectángulo isósceles y sea x la longitud de cada cateto (figura 10.4). Entonces se puede aplicar el teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 &= 8^2 \\ 2x^2 &= 64 \\ x^2 &= 32 \\ x &= \sqrt{32} = \sqrt{16}\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Cada cateto mide 4 ! $\overline{2}$ metros.

Observaciones: En el ejemplo 13 no se intentó expresar ! $\overline{2176}$ en forma radical más simple porque la respuesta debía darse como una aproximación racional a la décima más cercana. Sin embargo, en el ejemplo 14, la respuesta final se dejó en forma radical y por tanto se expresó en forma radical más simple.

El segundo tipo especial de triángulo rectángulo que se usa con frecuencia es aquel que contiene ángulos agudos de 30° y 60°. En tal triángulo rectángulo, que se conoce como **triángulo rectángulo 30°-60°**, el lado opuesto al ángulo de 30° es igual en longitud a la mitad de la longitud de la hipotenusa. Esta relación, junto con el teorema de Pitágoras, proporciona otra técnica para resolver problemas.

Ejemplo de salón de clases
Una soga de 40 pies está atada a la punta de una tienda y clavada a la tierra a un ángulo de 60°. ¿Cuál es la altura de la tienda en el punto en el que la soga está atada? Exprese la respuesta a la décima de pie más cercana.

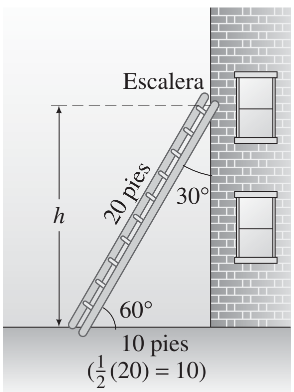


Figura 10.5

EJEMPLO 15 Aplique su habilidad

Suponga que una escalera de 20 pies se recarga contra un edificio y forma un ángulo de 60° con el suelo. ¿Qué tan alto sobre el edificio llega la parte superior de la escalera? Exprese su respuesta a la décima de pie más cercana.

Solución

La figura 10.5 muestra esta situación. El lado opuesto al ángulo de 30° es igual a la mitad de la hipotenusa, de modo que su longitud es $\frac{1}{2}(20) = 10$ pies. Ahora puede aplicar el teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned} h^2 + 10^2 &= 20^2 \\ h^2 + 100 &= 400 \\ h^2 &= 300 \\ h &= \sqrt{300} = 17.3 \quad \text{a la décima más cercana} \end{aligned}$$

La parte superior de la escalera toca el edificio en un punto aproximadamente a 17.3 pies del suelo.

Examen de conceptos 10.1

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. La ecuación cuadrática $4x^2 - 7x - 10 = 0$ está en forma estándar.
2. El conjunto solución de la ecuación $(x - 2)2 = 12$ consiste en dos números irracionales.
3. Un triángulo rectángulo isósceles es un triángulo rectángulo que tiene una hipotenusa del mismo largo que uno de los catetos.
4. En un triángulo rectángulo 30°-60°, la hipotenusa es igual al doble del largo del lado opuesto al ángulo de 30°.

5. La ecuación $2x^2 + x^3 - x + 4 = 0$ es una ecuación cuadrática.
6. El conjunto solución de $4x^2 = 8x$ es $\{2\}$.
7. El conjunto solución de $3x^2 = 8x$ es $\left\{0, \frac{8}{3}\right\}$.
8. El conjunto solución de $x^2 - 8x - 48 = 0$ es $\{-12, 4\}$.
9. El conjunto solución de la ecuación $(3x + 4)^2 = 64$ consiste de dos números racionales.
10. El conjunto solución de la ecuación $(x - 6)^2 = 0$ consiste de dos números enteros.

Conjunto de problemas 10.1

Para los problemas 1-18, resolver cada ecuación cuadrática factorizando y aplicando la propiedad $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$. **(Objetivo 1)**

1. $x^2 + 15x = 0$
2. $x^2 - 11x = 0$
3. $n^2 = 12n$
4. $n^2 = -21n$
5. $3y^2 = 15y$
6. $8y^2 = -56y$
7. $x^2 - 9x + 8 = 0$
8. $x^2 + 16x + 48 = 0$
9. $x^2 - 5x - 14 = 0$
10. $x^2 - 5x - 36 = 0$
11. $n^2 + 5n - 6 = 0$
12. $n^2 + 3n - 28 = 0$
13. $6y^2 + 7y - 5 = 0$
14. $4y^2 - 21y - 18 = 0$
15. $30x^2 - 37x + 10 = 0$
16. $42x^2 + 67x + 21 = 0$
17. $4x^2 - 4x + 1 = 0$
18. $9x^2 + 12x + 4 = 0$

Para los problemas 19-56, usar la propiedad 10.1 para ayudarle a resolver cada ecuación cuadrática. Expresar las soluciones irracionales en la forma radical más simple. **(Objetivo 2)**

19. $x^2 = 64$
20. $x^2 = 169$
21. $x^2 = \frac{25}{9}$
22. $x^2 = \frac{4}{81}$
23. $4x^2 = 64$
24. $5x^2 = 500$
25. $n^2 = 14$
26. $n^2 = 22$
27. $n^2 + 16 = 0$
28. $n^2 = 24$
29. $y^2 = 32$
30. $y^2 + 25 = 0$
31. $3x^2 - 54 = 0$
32. $4x^2 - 108 = 0$
33. $2x^2 = 9$
34. $3x^2 = 16$
35. $8n^2 = 25$
36. $12n^2 = 49$
37. $(x - 1)^2 = 4$
38. $(x - 2)^2 = 9$
39. $(x + 3)^2 = 25$
40. $(x + 5)^2 = 36$
41. $(3x - 2)^2 = 49$
42. $(4x + 3)^2 = 1$
43. $(x + 6)^2 = 5$
44. $(x - 7)^2 = 6$
45. $(n - 1)^2 = 8$
46. $(n + 1)^2 = 12$
47. $(2n + 3)^2 = 20$
48. $(3n - 2)^2 = 28$
49. $(4x - 1)^2 = -2$
50. $(5x + 3)^2 - 32 = 0$
51. $(3x - 5)^2 - 40 = 0$
52. $(2x + 9)^2 + 6 = 0$
53. $2(7x - 1)^2 + 5 = 37$
54. $3(4x - 5)^2 - 50 = 25$
55. $2(x + 8)^2 - 9 = 91$
56. $2(x - 7)^2 - 7 = 101$

Para los problemas 57-62, a y b representan las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo, y c representa la longitud de la hipotenusa. Expresar sus respuestas en la forma radical más simple. **(Objetivo 3)**

57. Hallar c si $a = 1$ pulgada y $b = 7$ pulgadas.

58. Hallar c si $a = 2$ pulgadas y $b = 6$ pulgadas.

59. Hallar a si $c = 8$ metros y $b = 6$ metros.

60. Hallar a si $c = 11$ centímetros y $b = 7$ centímetros.

61. Hallar b si $c = 12$ pies y $a = 10$ pies.

62. Hallar b si $c = 10$ yardas y $a = 4$ yardas.

Para los problemas 63-68, usar la figura 10.6. Expresar sus respuestas en la forma radical más simple. **(Objetivo 3)**

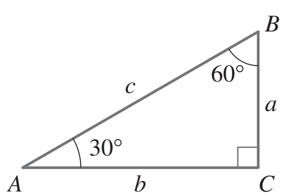


Figura 10.6

63. Si $c = 8$ pulgadas, hallar a y b.

64. Si $c = 6$ pulgadas, hallar a y b.

65. Si $a = 6$ pies, hallar b y c.

66. Si $a = 5$ pies, hallar b y c.

67. Si $b = 12$ metros, hallar a y c.

68. Si $b = 5$ centímetros, hallar a y c.

Para los problemas 69-72, usar el triángulo rectángulo isósceles en la figura 10.7. Expresar las respuestas en la forma radical más simple. **(Objetivo 3)**

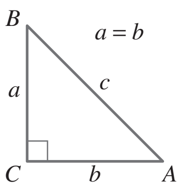


Figura 10.7

69. Si $b = 10$ pulgadas, hallar a y c.

70. Si $a = 7$ pulgadas, hallar b y c.

71. Si $c = 9$ metros, hallas a y b.

72. Si $c = 5$ metros, hallar a y b.

73. Una escalera de 18 pies recargada contra una casa llega a una ventana 16 pies sobre el nivel del suelo. ¿Qué tan lejos queda la base de la escalera de la base de la casa? Expresar la respuesta en la décima de pie más cercana.

74. Un cable de sujeción de 42 pies forma un ángulo de 60° con el suelo y se une a un poste telefónico (vea la figura 10.8). Encuentre la distancia desde la base del poste hasta el punto en el poste donde se une el alambre. Exprese su respuesta a la décima de pie más cercana.

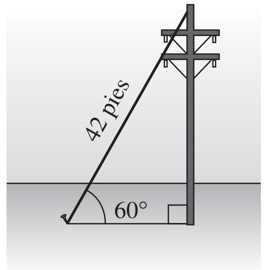


Figura 10.8

75. Un lote rectangular mide 18 por 24 metros. Encuentre, al metro más cercano, la distancia de una esquina del lote a la esquina diagonalmente opuesta.

76. Las bases consecutivas de un diamante de béisbol con forma cuadrada están separadas 90 pies (vea la figura 10.9). Encuentre, a la décima de pie más cercana, la distancia desde la primera base, diagonalmente a través del diamante, hasta la tercera base.

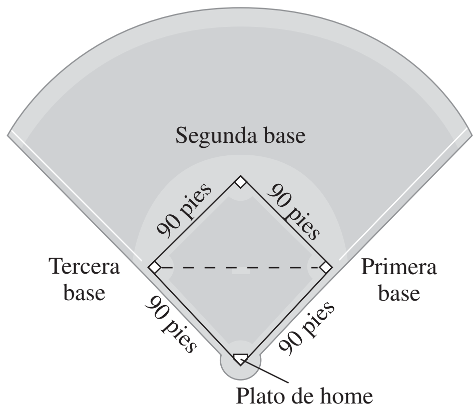


Figura 10.9

77. La diagonal de un lote de estacionamiento cuadrado mide 50 metros. Encuentre, al metro más cercano, la longitud de un lado del lote.

Pensamientos en palabras

78. Explicar por qué la ecuación $(x - 4)^2 + 14 = 2$ no tiene soluciones en números reales.

79. Suponga que su amigo resolvió la ecuación $(x + 3)^2 = 25$ de la siguiente manera:

$$(x + 3)^2 = 25$$
$$x^2 + 6x + 9 = 25$$
$$x^2 + 6x - 16 = 0$$
$$(x + 8)(x - 2) = 0$$
$$x + 8 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$
$$x = -8 \quad \text{o} \quad x = 2$$

¿Este es un buen enfoque para el problema? ¿Puede sugerirle un método más fácil para resolver el problema?

Más investigación

80. A veces simplemente se necesita determinar si una expresión radical en particular es positiva o negativa. Por ejemplo, ¿$-6 + \sqrt{39}$ es positiva o negativa? Se puede determinar aproximando un valor para $\sqrt{39}$. Ya que $6^2 = 36$, se sabe que $\sqrt{39}$ es un poco más grande que 6. Por ende, $-6 + \sqrt{39}$ tiene que ser positivo. Determinar si los siguientes son positivos o negativos.

(a) $-8 + \sqrt{56}$ **(b)** $-7 + \sqrt{47}$

(c) $9 - \sqrt{77}$ **(d)** $12 - \sqrt{130}$

(e) $-6 + 5\sqrt{2}$ **(f)** $-10 + 6\sqrt{3}$

(g) $-13 + \sqrt{150}$ **(h)** $-14 + \sqrt{200}$

81. Hallar la altura de un triángulo equilátero si cada lado del triángulo mide 6 centímetros. Expresar su respuesta en la décima de centímetro más cercana.

82. Suponga que le entregan un cubo con bordes de 12 centímetros de longitud. Encuentre la longitud de una diagonal desde una esquina inferior a la esquina superior diagonalmente opuesta. Exprese su respuesta a la décima de centímetro más cercana.

83. Suponga que se tiene una caja rectangular cuyo largo mide 8 centímetros, su ancho mide 6 centímetros, y la altura es de 4 centímetros. Hallar la longitud de una diagonal de la esquina inferior a la esquina superior diagonalmente opuesta. Expresar su respuesta en la décima de centímetro más cercana.

84. El inverso del teorema de Pitágoras también es verdadero: “si las medidas a, b y c de los lados de un triángulo son tales que $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo con a y b como medidas de los catetos y c como medida de la hipotenusa”. Utilice el inverso del teorema de Pitágoras para determinar cuál de los triángulos con lados de las siguientes medidas son triángulos rectángulos.

(a) 9, 40, 41 **(b)** 20, 48, 52

(c) 19, 21, 26 **(d)** 32, 37, 49

(e) 65, 156, 169 **(f)** 21, 72, 75

Respuestas del examen de conceptos

1. Cierto **2.** Cierto **3.** Falso **4.** Cierto **5.** Falso **6.** Falso **7.** Cierto **8.** Falso **9.** Cierto **10.** Falso

10.2 Completar el cuadrado

OBJETIVO

1 Resolver ecuaciones completando el cuadrado

Hasta el momento las ecuaciones cuadráticas se resolvieron mediante factorización y la aplicación de la propiedad 10.1 (si $x^2 = a$, entonces $x = \sqrt{a}$ o $x = -\sqrt{a}$). En esta sección se examina otro método llamado **completar el cuadrado**, que le dará el poder para resolver cualquier ecuación cuadrática.

Una técnica de factorización que se estudió en el capítulo 6 se sustentó en el reconocimiento de trinomios cuadrados perfectos. En cada una de las siguientes, el **trinomio cuadrado perfecto** en el lado derecho es resultado de elevar al cuadrado el binomio en el lado izquierdo.

$$(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$$
$$(x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49$$
$$(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$$
$$(x - 6)^2 = x^2 - 12x + 36$$

Ponga especial atención a la siguiente relación. En cada uno de los trinomios cuadrados, el término constante es igual al cuadrado de la mitad del coeficiente del término x. Por ejemplo:

$$x^2 + 10x + 25 \qquad \frac{1}{2}(10) = 5 \text{ y } 5^2 = 25$$

$$x^2 - 12x + 36 \qquad \frac{1}{2}(-12) = -6 \text{ y } (-6)^2 = 36$$

Esta relación le permite formar un trinomio cuadrado perfecto al sumar un término constante adecuado. Por ejemplo, suponga que se quiere formar un trinomio cuadrado perfecto a partir de $x^2 + 8x$. Dado que $\frac{1}{2}(8) = 4$ y $4^2 = 16$ se puede formar el trinomio cuadrado perfecto $x^2 + 8x + 16$.

Use las ideas anteriores para ayudarse a resolver algunas ecuaciones cuadráticas.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $m^2 + 12m - 3 = 0$ con el método de completar el cuadrado.

EJEMPLO 1 Resolver $x^2 + 8x - 1 = 0$ con el método de completar el cuadrado.

Solución

$x^2 + 8x - 1 = 0$

$x^2 + 8x = 1$ — Aislar los términos x^2 y x

$\frac{1}{2}(8) = 4$ y $4^2 = 16$ — Tomar $\frac{1}{2}$ del coeficiente del término x y luego elevar el resultado al cuadrado

$x^2 + 8x + 16 = 1 + 16$ — Sumar 16 a ambos lados de la ecuación

$(x + 4)^2 = 17$ — Factorizar el trinomio cuadrado perfecto

Ahora puede proceder como con ecuaciones similares en la lección anterior.

$x + 4 = \pm\sqrt{17}$

$x + 4 = \sqrt{17}$ o $x + 4 = -\sqrt{17}$

$x = -4 + \sqrt{17}$ o $x = -4 - \sqrt{17}$

El conjunto solución es $\{-4 - \sqrt{17}, -4 + \sqrt{17}\}$.

Observe que el método e completar el cuadrado para resolver una ecuación cuadrática simplemente es lo que implica el nombre. Se forma un trinomio cuadrado perfecto, entonces la ecuación se cambia a la forma necesaria para aplicar la propiedad "$x^2 = a$ si y sólo si $x = \sqrt{a}$ o $x = -\sqrt{a}$". Considere otro ejemplo.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $t^2 - 6t - 9 = 0$ con el método de completar el cuadrado.

EJEMPLO 2 Resolver $x^2 - 2x - 11 = 0$ con el método de completar el cuadrado.

Solución

$x^2 - 2x - 11 = 0$

$x^2 - 2x = 11$ — Aislar los términos x^2 y x

$\frac{1}{2}(-2) = -1$ y $(-1)^2 = 1$ — Tomar $\frac{1}{2}$ del coeficiente del término x y luego elevar el resultado al cuadrado

$x^2 - 2x + 1 = 11 + 1$ — Sumar 1 a ambos lados de la ecuación

$(x - 1)^2 = 12$ — Factorizar el trinomio cuadrado perfecto

$x - 1 = \pm\sqrt{12}$

$x - 1 = \pm 2\sqrt{3}$

$x - 1 = 2\sqrt{3}$ o $x - 1 = -2\sqrt{3}$

$x = 1 + 2\sqrt{3}$ o $x = 1 - 2\sqrt{3}$

El conjunto solución es $\{1 - 2\sqrt{3}, 1 + 2\sqrt{3}\}$.

En el siguiente ejemplo, el coeficiente del término x es impar, obliga a ingresar al reino de las fracciones. Usar fracciones comunes en lugar de decimales permite la aplicación del trabajo previo con radicales.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $a^2 - a - 7 = 0$ con el método de completar el cuadrado.

EJEMPLO 3 Resolver $x^2 - 3x + 1 = 0$ con el método de completar el cuadrado.

Solución

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$
$$x^2 - 3x = -1$$
$$\frac{1}{2}(-3) = -\frac{3}{2} \quad \text{y} \quad \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$ Tomar $\frac{1}{2}$ del coeficiente del término x y luego elevar el resultado al cuadrado
$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = -1 + \frac{9}{4}$$ Sumar $\frac{9}{4}$ a ambos lados de la ecuación
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$ Factorizar el trinomio cuadrado perfecto
$$x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{5}{4}}$$
$$x - \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$x - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{o} \quad x - \frac{3}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right\}$.

La relación para un trinomio cuadrado perfecto que afirma que el **término constante es igual al cuadrado de la mitad del coeficiente del término** x, es válida sólo si el coeficiente de x^2 es 1. Por tanto, se debe hacer un ajuste cuando se resuelvan ecuaciones cuadráticas que tengan un coeficiente de x^2 distintos a 1. El siguiente ejemplo muestra cómo hacer este ajuste.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $3w^2 + 18w - 1 = 0$ con el método de cuadrado perfecto.

EJEMPLO 4 Resolver $2x^2 + 12x - 3 = 0$ con el método de cuadrado perfecto.

Solución

$$2x^2 + 12x - 3 = 0$$
$$2x^2 + 12x = 3$$
$$x^2 + 6x = \frac{3}{2}$$ Multiplicar ambos lados por $\frac{1}{2}$
$$x^2 + 6x + 9 = \frac{3}{2} + 9$$ $\left[\frac{1}{2}(6)\right]^2 = 3^2 = 9$; sumar 9 a ambos lados de la ecuación
$$(x + 3)^2 = \frac{21}{2}$$
$$x + 3 = \pm\sqrt{\frac{21}{2}}$$
$$x + 3 = \pm\frac{\sqrt{42}}{2}$$ $\sqrt{\frac{21}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{42}}{2}$
$$x + 3 = \frac{\sqrt{42}}{2} \quad \text{o} \quad x + 3 = -\frac{\sqrt{42}}{2}$$

$$x = -3 + \frac{\sqrt{42}}{2} \qquad \text{o} \qquad x = -3 - \frac{\sqrt{42}}{2}$$
$$x = \frac{-6 + \sqrt{42}}{2} \qquad \text{o} \qquad x = \frac{-6 - \sqrt{42}}{2}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{-6 - \sqrt{42}}{2}, \frac{-6 + \sqrt{42}}{2}\right\}$.

Como se mencionó anteriormente, puede usar el método de completar el cuadrado para resolver *cualquier* ecuación cuadrática. Para ilustrar, úselo para resolver una ecuación que también se pudiera resolver mediante factorización.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $n^2 + 8n + 7 = 0$ con el método de completar el cuadrado.

EJEMPLO 5

Resolver $x^2 + 2x - 8 = 0$ con el método de completar el cuadrado.

Solución A

Completar el cuadrado:

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$x^2 + 2x = 8$$
$$x^2 + 2x + 1 = 8 + 1 \qquad \left[\frac{1}{2}(2)\right]^2 = 1^2 = 1; \text{ sumar 1 a ambos lados de la ecuación}$$
$$(x + 1)^2 = 9$$
$$x + 1 = \pm 3$$
$$x + 1 = 3 \qquad \text{o} \qquad x + 1 = -3$$
$$x = 2 \qquad \text{o} \qquad x = -4$$

El conjunto solución es $\{-4, 2\}$.

Solución B

Factorizando:

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$(x + 4)(x - 2) = 0$$
$$x + 4 = 0 \qquad \text{o} \qquad x - 2 = 0$$
$$x = -4 \qquad \text{o} \qquad x = 2$$

El conjunto solución es $\{-4, 2\}$.

No se pretende asegurar que usar el método de completar el cuadrado con una ecuación como la del ejemplo 5 sea más fácil que la técnica de factorización. Sin embargo, es importante que reconozca que el método de completar el cuadrado funcionará con cualquier ecuación cuadrática.

El ejemplo final de esta sección demuestra que el método de completar el cuadrado ayuda a identificar las ecuaciones cuadráticas que no tienen una solución en números reales.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $y^2 - 4y + 20 = 0$ con el método de completar el cuadrado.

EJEMPLO 6

Resolver $x^2 + 10x + 30 = 0$ con el método de completar el cuadrado.

Solución

$$x^2 + 10x + 30 = 0$$
$$x^2 + 10x = -30$$
$$x^2 + 10x + 25 = -30 + 25$$
$$(x + 5)^2 = -5$$

Puede detenerse aquí y razonar de la siguiente manera: Cualquier valor de x dará un valor no negativo para $(x + 5)^2$; por ende, no puede ser -5. La ecuación original, $x^2 + 10x + 30 = 0$, no tiene un conjunto solución de números reales.

Examen de conceptos 10.2

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. En un trinomio cuadrado perfecto, el término constante es igual a la mitad del cociente del término x.
2. El método de completar el cuadrado resolverá cualquier ecuación cuadrática.
3. Toda ecuación cuadrática resuelta completando el cuadrado tendrá soluciones en números reales.
4. El método de completar el cuadrado no puede usarse si la factorización puede resolver las ecuaciones cuadráticas.
5. Para usar el método de completar el cuadrado para resolver la ecuación $3x^2 + 2x = 5$, primero se deben dividir ambos lados de la ecuación entre 3.
6. La ecuación $x^2 + 2x = 0$ no puede resolverse usando el método de completar el cuadrado.
7. Para resolver la ecuación $x^2 - 5x = 1$ completando el cuadrado, se debe empezar sumando $\frac{25}{4}$ a ambos lados de la ecuación.
8. El conjunto solución de la ecuación $4x^2 - 4x + 1 = 0$ consiste de un número racional.
9. El conjunto solución de la ecuación $x^2 + 14x = -33$ es $\{-11, -3\}$.
10. $9x^2 + 15x + 25$ es un trinomio cuadrado perfecto.

Conjunto de problemas 10.2

Para los problemas 1-32, usar el método de completar el cuadrado para resolver cada ecuación cuadrática.
(Objetivo 1)

1. $x^2 + 8x - 1 = 0$
2. $x^2 - 4x - 1 = 0$
3. $x^2 + 10x + 2 = 0$
4. $x^2 + 8x + 3 = 0$
5. $x^2 - 4x - 4 = 0$
6. $x^2 + 6x - 11 = 0$
7. $x^2 + 6x + 12 = 0$
8. $n^2 - 10n = 7$
9. $n^2 + 2n = 17$
10. $n^2 + 12n + 40 = 0$
11. $x^2 + x - 3 = 0$
12. $x^2 + 3x - 5 = 0$
13. $a^2 - 5a = 2$
14. $a^2 - 7a = 4$
15. $2x^2 + 8x - 3 = 0$
16. $2x^2 - 12x + 1 = 0$
17. $3x^2 + 12x - 2 = 0$
18. $3x^2 - 6x + 2 = 0$
19. $2t^2 - 4t + 1 = 0$
20. $4t^2 + 8t + 5 = 0$
21. $5n^2 + 10n + 6 = 0$
22. $2n^2 + 5n - 1 = 0$
23. $-n^2 + 9n = 4$
24. $-n^2 - 7n = 2$
25. $2x^2 + 3x - 1 = 0$
26. $3x^2 - x - 3 = 0$
27. $3x^2 + 2x - 2 = 0$
28. $9x = 3x^2 - 1$
29. $n(n + 2) = 168$
30. $n(n + 4) = 140$
31. $n(n - 4) = 165$
32. $n(n - 2) = 288$

Para los problemas 33-42, resolver cada ecuación cuadrática usando (a) el método de factorización y (b) el método de completar el cuadrado. (Objetivo 1)

33. $x^2 + 4x - 12 = 0$

34. $x^2 - 6x - 40 = 0$

35. $x^2 + 12x + 27 = 0$

36. $x^2 + 18x + 77 = 0$

37. $n^2 - 3n - 40 = 0$

38. $n^2 + 9n - 36 = 0$

39. $2n^2 - 9n + 4 = 0$

40. $6n^2 - 11n - 10 = 0$

41. $4n^2 + 4n - 15 = 0$

42. $4n^2 + 12n - 7 = 0$

Pensamientos en palabras

43. Dar una descripción paso a paso de cómo resolver la ecuación $3x^2 + 10x - 8 = 0$ completando el cuadrado.

44. Se ha cometido un error en la siguiente solución. Hallarlo y explicar cómo corregirlo.

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$
$$4x^2 - 4x = -1$$
$$4x^2 - 4x + 4 = -1 + 4$$
$$(2x - 2)^2 = 3$$
$$2x - 2 = \pm\sqrt{3}$$
$$2x - 2 = \sqrt{3} \quad \text{o} \quad 2x - 2 = -\sqrt{3}$$
$$2x = 2 + \sqrt{3} \quad \text{o} \quad 2x = 2 - \sqrt{3}$$
$$x = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}, \frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right\}$.

Más investigación

45. Usar el método de completar el cuadrado para resolver $ax^2 + bx + c = 0$ para x, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

46. Suponga que en el ejemplo 4 se pretendía expresar las soluciones a la décima más cercana. Entonces probablemente, del paso $x + 3 = \pm\sqrt{\frac{21}{2}}$, se procedería de la siguiente manera:

$$x + 3 = \pm\sqrt{\frac{21}{2}}$$
$$x = -3 \pm \sqrt{\frac{21}{2}}$$
$$x = -3 + \sqrt{\frac{21}{2}} \quad \text{o} \quad x = -3 - \sqrt{\frac{21}{2}}$$

Ahora use su calculadora para evaluar cada una de estas expresiones a la décima más cercana. El conjunto solución es $\{-6.2, 0.2\}$.

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones y expresar las soluciones a la décima más cercana.

(a) $x^2 - 6x - 4 = 0$

(b) $x^2 - 8x + 4 = 0$

(c) $x^2 + 4x - 4 = 0$

(d) $x^2 + 2x - 5 = 0$

(e) $x^2 - 14x - 2 = 0$

(f) $x^2 + 12x - 1 = 0$

Respuestas del examen de conceptos

1. Falso **2.** Cierto **3.** Falso **4.** Falso **5.** Cierto **6.** Falso **7.** Cierto **8.** Cierto **9.** Cierto **10.** Falso

10.3 Fórmula cuadrática

OBJETIVO **1** Resolver ecuaciones cuadráticas usando la fórmula cuadrática

El método de completar el cuadrado se puede usar para resolver cualquier ecuación cuadrática. La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$, puede representar cualquier ecuación cuadrática. Estas dos ideas se juntan para producir la *fórmula cuadrática*, una fórmula que se puede usar para resolver cualquier ecuación cuadrática. La unión se logra al usar el método de completar el cuadrado para resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ de la siguiente manera:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \qquad \text{Multiplicar ambos lados por } \frac{1}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \qquad \text{Completar el cuadrado sumando } \frac{b^2}{4a^2} \text{ a ambos lados}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad \text{El lado derecho se combina en un solo término con MCD de } 4a^2$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \sqrt{4a^2} = |2a| \text{ pero } 2a \text{ puede usarse por el uso de } \pm$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las soluciones son $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

La fórmula cuadrática por lo general se enuncia del modo siguiente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se puede usar para resolver cualquier ecuación cuadrática al expresar la ecuación en forma estándar y al sustituir los valores de a, b y c en la fórmula. Considere algunos ejemplos.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $x^2 + 8x + 15 = 0$ usando la fórmula cuadrática.

EJEMPLO 1 Resolver $x^2 + 7x + 10 = 0$ usando la fórmula cuadrática.

Solución

La ecuación dada está en forma estándar con $a = 1$, $b = 7$ y $c = 10$. Sustituya estos valores en la fórmula y simplifique.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x = \frac{-7 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{-7 + 3}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{-7 - 3}{2}$$

$$x = -2 \quad \text{o} \quad x = -5$$

El conjunto solución es $\{-5, -2\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $x^2 - 7x = -9$ usando la fórmula cuadrática.

EJEMPLO 2 Resolver $x^2 - 3x = 1$ usando la fórmula cuadrática.

Solución

Primero, necesita cambiar la ecuación a la forma estándar de $ax^2 + bx + c = 0$.

$$x^2 - 3x = 1$$
$$x^2 - 3x - 1 = 0$$

Se necesita pensar en $x^2 - 3x - 1 = 0$ como $x^2 + (-3)x + (-1) = 0$ para determinar los valores $a = 1$, $b = -3$ y $c = -1$. Sustituya estos valores en la fórmula cuadrática y simplifique.

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{3 - \sqrt{13}}{2}, \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $9m^2 - 26m - 3 = 0$ usando la fórmula cuadrática.

EJEMPLO 3 Resolver $15n^2 - n - 2 = 0$ usando la fórmula cuadrática.

Solución

Recuerde que, aunque suele usarse la variable x en el planteamiento de la fórmula cuadrática, cualquier variable puede usarse. Escribir la ecuación como $15n^2 + (-1)n + (-2) = 0$ da la forma estándar de $an^2 + bn + c = 0$ con $a = 15$, $b = -1$ y $c = -2$. Ahora puede resolver la ecuación al sustituir en la fórmula cuadrática y simplificar.

$$n = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(15)(-2)}}{2(15)}$$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 120}}{30}$$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{30}$$

$$n = \frac{1 \pm 11}{30}$$

$$n = \frac{1 + 11}{30} \quad \text{o} \quad n = \frac{1 - 11}{30}$$

$$n = \frac{12}{30} \quad \text{o} \quad n = \frac{-10}{30}$$

$$n = \frac{2}{5} \quad \text{o} \quad n = -\frac{1}{3}$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $r^2 + 16r - 57 = 0$ usando la fórmula cuadrática.

EJEMPLO 4 Resolver $t^2 - 5t - 84 = 0$ usando la fórmula cuadrática.

Solución

Escribir la ecuación como $t^2 + (-5)t + (-84) = 0$ da la forma estándar de $at^2 + bt + c = 0$ con $a = 1$, $b = -5$ y $c = -84$. Ahora puede resolver la ecuación al sustituir en la fórmula cuadrática y simplificar.

$$t = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(-84)}}{2(1)}$$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 336}}{2}$$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{361}}{2}$$

$$t = \frac{5 \pm 19}{2}$$

$$t = \frac{5 + 19}{2} \quad \text{o} \quad t = \frac{5 - 19}{2}$$

$$t = \frac{24}{2} \quad \text{o} \quad t = \frac{-14}{2}$$

$$t = 12 \quad \text{o} \quad t = -7$$

El conjunto solución es $\{-7, 12\}$.

Se pueden identificar fácilmente las ecuaciones cuadráticas que no tienen soluciones en números reales cuando se usa la fórmula cuadrática. El último ejemplo de esta sección ilustra este punto.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $y^2 + 4y + 6 = 0$ usando la fórmula cuadrática.

EJEMPLO 5 Resolver $x^2 - 2x + 8 = 0$ usando la fórmula cuadrática.

Solución

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(8)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 32}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-28}}{2}$$

Dado que $\sqrt{-28}$ no es un número real, se concluye que la ecuación no tiene soluciones con números reales. (Se trabaja más con este tipo de ecuaciones en la sección 11.5).

Examen de conceptos 10.3

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. La fórmula cuadrática puede usarse para resolver cualquier ecuación cuadrática.
2. La fórmula cuadrática no puede usarse si la ecuación cuadrática puede resolverse con factorización.
3. Para usar la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $3x^2 + 2x + 5 = 0$, primero debe dividir ambos lados de la ecuación entre 3.
4. Se puede usar la fórmula cuadrática para resolver $x^2 + 4x = 0$.
5. Se puede usar la fórmula cuadrática para resolver $x^2 = 27$.

6. Se puede usar la fórmula cuadrática para determinar que una ecuación cuadrática no tiene solución en números reales.
7. El conjunto solución de $-x^2 + 3x - 4 = 0$ consiste de dos números racionales.
8. El conjunto solución de $x^2 - 16x + 64 = 0$ consiste de dos enteros diferentes.
9. El conjunto solución de $-2x^2 - 3x - 1 = 0$ consiste de dos números racionales.
10. Para una ecuación específica, si $b^2 - 4ac$ es menor que cero, entonces la ecuación no tiene soluciones en números reales.

Conjunto de problemas 10.3

Usar la fórmula cuadrática para resolver cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas. (Objetivo 1)

1. $x^2 - 5x - 6 = 0$
2. $x^2 + 3x - 4 = 0$
3. $x^2 + 5x = 36$
4. $x^2 - 8x = -12$
5. $n^2 - 2n - 5 = 0$
6. $n^2 - 4n - 1 = 0$
7. $a^2 - 5a - 2 = 0$
8. $a^2 + 3a + 1 = 0$
9. $x^2 - 2x + 6 = 0$
10. $x^2 - 8x + 16 = 0$
11. $y^2 + 4y + 2 = 0$
12. $n^2 + 6n + 11 = 0$
13. $x^2 - 6x = 0$
14. $x^2 + 8x = 0$
15. $2x^2 = 7x$
16. $3x^2 = -10x$
17. $n^2 - 34n + 288 = 0$
18. $n^2 + 27n + 182 = 0$
19. $x^2 + 2x - 80 = 0$
20. $x^2 - 15x + 54 = 0$
21. $t^2 + 4t + 4 = 0$
22. $t^2 + 6t - 5 = 0$
23. $6x^2 + x - 2 = 0$
24. $4x^2 - x - 3 = 0$
25. $5x^2 + 3x - 2 = 0$
26. $6x^2 - x - 2 = 0$
27. $12x^2 + 19x = -5$
28. $2x^2 + 7x - 6 = 0$
29. $2x^2 + 5x - 6 = 0$
30. $2x^2 + 3x - 3 = 0$
31. $3x^2 + 4x - 1 = 0$
32. $3x^2 + 2x - 4 = 0$
33. $16x^2 + 24x + 9 = 0$
34. $9x^2 - 30x + 25 = 0$
35. $4n^2 + 8n - 1 = 0$
36. $4n^2 + 6n - 1 = 0$
37. $6n^2 + 9n + 1 = 0$
38. $5n^2 + 8n + 1 = 0$
39. $2y^2 - y - 4 = 0$
40. $3t^2 + 6t + 5 = 0$
41. $4t^2 + 5t + 3 = 0$
42. $5x^2 + x - 1 = 0$
43. $7x^2 + 5x - 4 = 0$
44. $6x^2 + 2x - 3 = 0$
45. $7 = 3x^2 - x$
46. $-2x^2 + 3x = -4$
47. $n^2 + 23n = -126$
48. $n^2 + 2n = 195$

Pensamientos en palabras

49. Explicar cómo usar la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $x^2 = 2x + 6$.

50. Su amigo plantea que la ecuación $-x^2 - 6x + 16 = 0$ debe cambiarse a $x^2 + 6x - 16 = 0$ (al multiplicar ambos lados por -1) antes de que se pueda aplicar la fórmula cuadrática. ¿Tiene razón y, de no tenerla, cómo podría convencerlo de que está equivocado?

51. Otro de sus amigos asegura que la fórmula cuadrática puede usarse para resolver la ecuación $x^2 - 4 = 0$. ¿Cómo reaccionaría usted ante esta afirmación?

Más investigación

Usar la fórmula cuadrática para resolver cada una de las siguientes ecuaciones. Expresar las soluciones en la centena más cercana.

52. $x^2 - 7x - 13 = 0$
53. $x^2 - 5x - 19 = 0$
54. $x^2 + 9x - 15 = 0$
55. $x^2 + 6x - 17 = 0$
56. $2x^2 + 3x - 7 = 0$
57. $3x^2 + 7x - 13 = 0$
58. $5x^2 - 11x - 14 = 0$
59. $4x^2 - 9x - 19 = 0$

60. $-3x^2 + 2x + 11 = 0$

61. $-5x^2 + x + 21 = 0$

62. Sea x_1 y x_2 las dos soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$ obtenidas con la fórmula cuadrática. Por ende, se tiene

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Hallar la suma $x_1 + x_2$ y el producto $(x_1)(x_2)$. Sus respuestas deben ser

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{y} \quad (x_1)(x_2) = \frac{c}{a}$$

Estas relaciones proporcionan otra manera de comprobar posibles soluciones al resolver ecuaciones cuadráticas.

Por ejemplo, en el ejemplo 3, se resolvió la ecuación $15n^2 - n - 2 = 0$ y se obtuvieron las soluciones de $-\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{5}$. Compruebe estas soluciones usando la relación de suma y producto.

Suma de soluciones $-\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = -\frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{1}{15}$

$$-\frac{b}{a} = -\frac{-1}{15} = \frac{1}{15}$$

Producto de soluciones $\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{15}$

$$\frac{c}{a} = \frac{-2}{15} = -\frac{2}{15}$$

Use las relaciones de suma y producto para comprobar al menos diez de las operaciones en las que trabajó en este conjunto de problemas.

Respuestas del examen de conceptos

1. Cierto **2.** Falso **3.** Falso **4.** Cierto **5.** Cierto **6.** Cierto **7.** Falso **8.** Falso **9.** Cierto **10.** Cierto

10.4 Resolver ecuaciones cuadráticas: ¿Cuál método?

OBJETIVO **1** Elegir el método más apropiado para resolver una ecuación cuadrática

A continuación se resumen los tres métodos básicos para resolver ecuaciones cuadráticas presentados en este capítulo solucionando una ecuación usando cada técnica. considere la ecuación

Método de factorización

$$\begin{aligned} x^2 + 4x - 12 &= 0 \\ (x + 6)(x - 2) &= 0 \\ x + 6 = 0 \quad \text{o} \quad & x - 2 = 0 \\ x = -6 \quad \text{o} \quad & x = 2 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{-6, 2\}$.

Método de completar el cuadrado

$$\begin{aligned} x^2 + 4x - 12 &= 0 \\ x^2 + 4x &= 12 \\ x^2 + 4x + 4 &= 12 + 4 \\ (x + 2)^2 &= 16 \\ x + 2 &= \pm\sqrt{16} \\ x + 2 = 4 \quad \text{o} \quad & x + 2 = -4 \\ x = 2 \quad \text{o} \quad & x = -6 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{-6, 2\}$.

Método de fórmula cuadrática

$x^2 + 4x - 12 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-12)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm 8}{2}$$

$$x = \frac{-4+8}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{-4-8}{2}$$

$$x = 2 \quad \text{o} \quad x = -6$$

El conjunto solución es $\{-6, 2\}$.

También se discutió el uso de la propiedad "$x^2 = a$ *si y sólo si* $x = \pm\sqrt{a}$" para ciertos tipos de ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo, se puede resolver fácilmente al aplicar la propiedad y obtener $x = \sqrt{4}$ o $x = -\sqrt{4}$; así, las soluciones son 2 y -2.

¿Cuál método se debe usar para resolver una ecuación cuadrática particular? Considere algunos ejemplos en los que se usan las diferentes técnicas. Tenga en mente que es una decisión que debe tomar según surja la necesidad. Por esto necesita familiarizarse con las fortalezas y las debilidades de cada método.

Ejemplo de salón de clases

Resolver $3x^2 + 18x - 120 = 0$.

EJEMPLO 1 Resolver $2x^2 + 12x - 54 = 0$.

Solución

Primero, es muy útil reconocer un factor de 2 en cada uno de los términos a la izquierda.

$$2x^2 + 12x - 54 = 0$$

$$x^2 + 6x - 27 = 0 \qquad \text{Multiplicar ambos lados por } \frac{1}{2}$$

Ahora debe reconocer que el lado izquierdo está factorizado. Por ende, se puede proceder de la siguiente manera.

$$(x+9)(x-3) = 0$$

$$x + 9 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$

$$x = -9 \quad \text{o} \quad x = 3$$

El conjunto solución es $\{-9, 3\}$.

Ejemplo de salón de clases

Resolver $(8n - 11)^2 = 49$.

EJEMPLO 2 Resolver $(4x + 3)^2 = 16$.

Solución

La forma de esta ecuación se presta para usar la propiedad $x^2 = a$ *si y sólo si* $x = \pm\sqrt{a}$.

$$(4x+3)^2 = 16$$

$$4x + 3 = \pm\sqrt{16}$$

$$4x + 3 = 4 \quad \text{o} \quad 4x + 3 = -4$$

$$4x = 1 \quad \text{o} \quad 4x = -7$$

$$x = \frac{1}{4} \quad \text{o} \quad x = -\frac{7}{4}$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{7}{4}, \frac{1}{4}\right\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $x + \frac{1}{x} = 3$.

EJEMPLO 3 Resolver $n + \frac{1}{n} = 5$.

Solución

Primero, se necesitan *eliminar las fracciones* al multiplicar ambos lados por n.

$$n + \frac{1}{n} = 5, \qquad n \neq 0$$

$$n\left(n + \frac{1}{n}\right) = 5(n)$$

$$n^2 + 1 = 5n$$

Ahora puede cambiar la ecuación a forma estándar.

$$n^2 - 5n + 1 = 0$$

Debido a que el lado izquierdo no puede factorizarse usando números enteros, se debe resolver la ecuación usando el método de completar el cuadrado o la fórmula cuadrática. Usando la fórmula se obtiene

$$n = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$n = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{5 - \sqrt{21}}{2}, \frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $x^2 = 7x$.

EJEMPLO 4 Resolver $t^2 = 2t$.

Solución

Una ecuación cuadrática sin un término constante puede resolverse fácilmente usando el método de factorización.

$$t^2 = 2t$$

$$t^2 - 2t = 0$$

$$t(t - 2) = 0$$

$$t = 0 \quad \text{o} \quad t - 2 = 0$$

$$t = 0 \quad \text{o} \quad t = 2$$

El conjunto solución es $\{0, 2\}$. (Compruebe cada una de estas soluciones en la ecuación dada).

Ejemplo de salón de clases
Resolver $x^2 + 9x - 162 = 0$.

EJEMPLO 5 Resolver $x^2 - 28x + 192 = 0$.

Solución

Determinar si el lado izquierdo es factorizable o no representa un problema debido al tamaño del término constante. Por ende, no se preocupe tratando de factorizar. Utilice la fórmula cuadrática.

$$x^2 - 28x + 192 = 0$$

$$x = \frac{-(-28) \pm \sqrt{(-28)^2 - 4(1)(192)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{28 \pm \sqrt{784 - 768}}{2}$$

$$x = \frac{28 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x = \frac{28 + 4}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{28 - 4}{2}$$

$$x = 16 \quad \text{o} \quad x = 12$$

El conjunto solución es $\{12, 16\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $d^2 + 16d = 4$.

EJEMPLO 6 Resolver $x^2 + 12x = 17$.

Solución

La forma de esta ecuación, y el hecho de que el coeficiente de x es par, hace del método de completar el cuadrado un enfoque razonable.

$$x^2 + 12x = 17$$
$$x^2 + 12x + 36 = 17 + 36$$
$$(x + 6)^2 = 53$$
$$x + 6 = \pm\sqrt{53}$$
$$x = -6 \pm \sqrt{53}$$

El conjunto solución es $\{-6 - \sqrt{53}, -6 + \sqrt{53}\}$.

Examen de conceptos 10.4

Para los problemas 1-7, elegir el método que crea más apropiado para resolver la ecuación dada.

1. $2x^2 + 6x - 3 = 0$
2. $(x + 1)^2 = 36$
3. $x^2 - 3x + 2 = 0$
4. $x^2 + 6x = 19$
5. $4x^2 + 2x - 5 = 0$
6. $4x^2 = 3$
7. $x^2 - 4x - 12 = 0$

A. Factorizar
B. Propiedad de raíz cuadrada (Propiedad 10.1)
C. Completar el cuadrado
D. Fórmula cuadrática

Conjunto de problemas 10.4

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas usando el método que le parezca más apropiado. (Objetivo 1)

1. $x^2 + 4x = 45$
2. $x^2 + 4x = 60$
3. $(5n + 6)^2 = 49$
4. $(3n - 1)^2 = 25$
5. $t^2 - t - 2 = 0$
6. $t^2 + 2t - 3 = 0$
7. $8x = 3x^2$
8. $5x^2 = 7x$
9. $9x^2 - 6x + 1 = 0$
10. $4x^2 + 36x + 81 = 0$
11. $5n^2 = 8n$
12. $3n = 2n^2$
13. $n^2 - 14n = 19$
14. $n^2 - 10n = 14$
15. $5x^2 - 2x - 7 = 0$
16. $3x^2 - 4x - 2 = 0$
17. $15x^2 + 28x + 5 = 0$
18. $20y^2 - 7y - 6 = 0$
19. $x^2 - 8x - 7 = 0$
20. $x^2 + 5x - 5 = 0$
21. $y^2 + 5y = 84$
22. $y^2 + 7y = 60$
23. $2n = 3 + \frac{3}{n}$
24. $n + \frac{1}{n} = 7$
25. $3x^2 - 9x - 12 = 0$

26. $2x^2 + 10x - 28 = 0$

27. $2x^2 - 3x + 7 = 0$

28. $3x^2 - 2x + 5 = 0$

29. $n(n - 46) = -480$

30. $n(n + 42) = -432$

31. $n - \dfrac{3}{n} = -1$

32. $n - \dfrac{2}{n} = \dfrac{3}{4}$

33. $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{25}{12}$

34. $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{65}{8}$

35. $t^2 + 12t + 36 = 49$

36. $t^2 - 10t + 25 = 16$

37. $x^2 - 28x + 187 = 0$

38. $x^2 - 33x + 266 = 0$

39. $\dfrac{x^2}{3} - x = -\dfrac{1}{2}$

40. $\dfrac{2x - 1}{3} = \dfrac{5}{x + 2}$

41. $\dfrac{2}{x + 2} - \dfrac{1}{x} = 3$

42. $\dfrac{3}{x - 1} + \dfrac{2}{x} = \dfrac{3}{2}$

43. $\dfrac{2}{3n - 1} = \dfrac{n + 2}{6}$

44. $\dfrac{x^2}{2} = x + \dfrac{1}{4}$

45. $(n - 2)(n + 4) = 7$

46. $(n + 3)(n - 8) = -30$

Pensamientos en palabras

47. ¿Cuál método usaría para resolver la ecuación $x^2 + 30x = -216$? Explique sus razones para elegir está opción.

48. Explicar cómo se podría resolver la ecuación $0 = -x^2 - x + 6$.

49. ¿Cómo puede determinar, por simple inspección, que la ecuación $x^2 + x + 4 = 0$ no tiene una solución en números reales?

Respuestas del examen de conceptos

Las respuestas para estas preguntas pueden variar.

1. D **2.** B **3.** A **4.** C **5.** D **6.** B **7.** A

10.5 Resolución de problemas usando ecuaciones cuadráticas

OBJETIVO **1** Usar ecuaciones cuadráticas para resolver una variedad de problemas verbales

El siguiente diagrama indica el enfoque de este texto.

Desarrollar habilidades → Usar las habilidades para resolver problemas → Usar ecuaciones para resolver problemas verbales

Ahora debería ser capaz de usar sus habilidades relacionadas con la resolución de sistemas ecuaciones (Capítulo 8) y de ecuaciones cuadráticas para ayudar con tipos adicionales de problemas verbales. Antes de considerar dichos problemas, se repasarán y se actualizarán las sugerencias para resolver problemas ofrecidas en el capítulo 3.

Sugerencias para resolver problemas verbales

1. Lea el problema cuidadosamente y asegúrese de que entiende el significado de todas las palabras. Esté especialmente alerta a cualquier término técnico utilizado en el enunciado del problema.
2. Lea el problema una segunda vez (quizás incluso una tercera vez) para obtener un panorama de la situación descrita y determinar los hechos conocidos, así como lo que debe encontrar.
3. Bosqueje cualquier figura, diagrama o gráfico que pueda serle útil para analizar el problema.
4. Elija una variable significativa para representar una cantidad desconocida en el problema. Use una o dos variables, lo que le parezca más fácil. El término "significativo" se refiere a la elección de letras para usar como variables. Elegir letras que tengan algún significado con el problema a considerar. Por ejemplo, si el problema trata de la longitud de un rectángulo, entonces l es una elección natural para la variable.
5. Busque una guía que pueda usar para establecer una ecuación. Una guía puede ser una fórmula como "el área de una región rectangular es igual al largo por el ancho" o un enunciado de relación como "el producto de dos números es 98".
6. **(a)** Formule una ecuación que contenga la variable y que traduzca las condiciones de la guía del español al álgebra; o
   (b) Formule una ecuación que contenga ambas variables y que traduzca las guías del español al álgebra.
7. Resuelva la ecuación (o sistema de ecuaciones) y use la solución (o soluciones) para determinar todos los hechos requeridos en el problema.
8. **Compruebe todas las respuestas de vuelta en el enunciado original del problema.**

El asterisco indica que tales sugerencias han sido cambiadas para incluir el uso de sistemas de ecuaciones en la resolución de problemas. Tenga en mente estas sugerencias mientras considera algunos problemas verbales.

Ejemplo de salón de clases
El largo de una región rectangular mide 8 pulgadas más que su ancho. El área de la región es 48 pulgadas cuadradas. Hallar el largo y el ancho del rectángulo.

EJEMPLO 1 Aplique su habilidad

El largo de una región rectangular mide 2 centímetros más que su ancho. El área de la región es 35 centímetros cuadrados. Hallar el largo y el ancho del rectángulo.

Solución

Sea l el largo y w el ancho (ver figura 10.10). Se puede usar la fórmula de área de un rectángulo, $A = lw$, y el enunciado "el largo de una región rectangular mide 2 centímetros más que su ancho" como guías para formar un sistema de ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} lw = 35 \\ l = w + 2 \end{pmatrix}$$

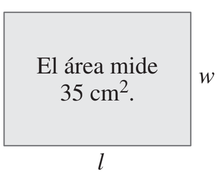


Figura 10.10

La segunda pregunta indica que se puede sustituir $w + 2$ por l. Hacer esta sustitución en la primera ecuación da

$$(w + 2)(w) = 35$$

Al resolver esta ecuación cuadrática factorizando se obtiene

$$\begin{aligned} w^2 + 2w &= 35 \\ w^2 + 2w - 35 &= 0 \\ (w + 7)(w - 5) &= 0 \\ w + 7 = 0 \quad &\text{o} \quad w - 5 = 0 \\ w = -7 \quad &\text{o} \quad w = 5 \end{aligned}$$

El ancho de un rectángulo no puede ser un número negativo, así que se descarta la solución -7. Por ende, el ancho del rectángulo mide 5 centímetros y el largo $(w + 2)$ mide 7 centímetros.

Ejemplo de salón de clases
Hallar dos números enteros consecutivos cuyo producto sea 702.

EJEMPLO 2 Aplique su habilidad

Hallar dos números enteros consecutivos cuyo producto sea 506.

Solución

Sea n el número entero más pequeño. Entonces $n + 1$ representa el siguiente número entero. La frase "cuyo producto sea 506" se traduce en la ecuación

$$n(n + 1) = 506$$

Cambiar esta ecuación cuadrática a forma estándar produce

$$n^2 + n = 506$$
$$n^2 + n - 506 = 0$$

Dado el tamaño del término constante, no intente factorizar. Puede usar la fórmula cuadrática.

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-506)}}{2(1)}$$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{2025}}{2}$$

$$n = \frac{-1 \pm 45}{2} \qquad \sqrt{2025} = 45$$

$$n = \frac{-1 + 45}{2} \quad \text{o} \quad n = \frac{-1 - 45}{2}$$

$$n = 22 \quad \text{o} \quad n = -23$$

Ya que se están buscando números enteros. Por ende, los números enteros son 22 y 23 o puede ser -23 y -22.

Ejemplo de salón de clases
El perímetro de un terreno rectangular mide 122 pies y su área mide 888 pies cuadrados. Hallar el largo y el ancho del terreno.

EJEMPLO 3 Aplique su habilidad

El perímetro de un terreno rectangular mide 100 metros y su área mide 616 metros cuadrados. Hallar el largo y el ancho del terreno.

Solución

Sea l el largo y w el ancho (ver figura 10.11).

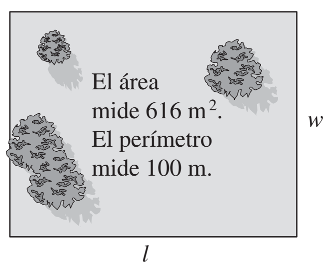


Figura 10.11

Entonces

$$\begin{pmatrix} lw = 616 \\ 2l + 2w = 100 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \longleftarrow \text{El área mide 616 m}^2 \\ \longleftarrow \text{El perímetro mide 100 m} \end{matrix}$$

Multiplicar la segunda ecuación por $\frac{1}{2}$ produce $l + w = 50$, que puede cambiarse a $l = 50 - w$. Sustituir $50 - w$ por l en la primera ecuación produce la ecuación cuadrática:

$$(50 - w)(w) = 616$$
$$50w - w^2 = 616$$
$$w^2 - 50w = -616$$

Al usar el método de completar el cuadrado se obtiene

$$w^2 - 50w + 625 = -616 + 625$$
$$(w - 25)^2 = 9$$
$$w - 25 = \pm 3$$
$$w - 25 = 3 \quad \text{o} \quad w - 25 = -3$$
$$w = 28 \quad \text{o} \quad w = 22$$

Si $w = 28$ entonces $l = 50 - w = 22$. Si $w = 22$ entonces $l = 50 - w = 28$. El rectángulo mide 28 metros por 22 metros o 22 metros por 28 metros.

Ejemplo de salón de clases
Hallar dos números de tal manera que su suma sea 4 y su producto sea 2.

EJEMPLO 4 Aplique su habilidad

Hallar dos números de tal manera que su suma sea 2 y su producto sea -1.

Solución

Sea n uno de los números y sea m el otro número.

$$\begin{pmatrix} n + m = 2 \\ nm = -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \longleftarrow \text{Su suma es 2} \\ \longleftarrow \text{Su producto es } -1 \end{matrix}$$

Se puede cambiar la primera ecuación a $m = 2 - n$; entonces se puede sustituir $2 - n$ por m en la segunda ecuación.

$$n(2 - n) = -1$$
$$2n - n^2 = -1$$
$$-n^2 + 2n + 1 = 0$$
$$n^2 - 2n - 1 = 0 \qquad \text{Multiplicar ambos lados por } -1$$
$$n = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$
$$n = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Si $n = 1 + \sqrt{2}$, entonces $m = 2 - \left(1 + \sqrt{2}\right)$
$= 2 - 1 - \sqrt{2}$
$= 1 - \sqrt{2}$

Si $n = 1 - \sqrt{2}$, entonces $m = 2 - \left(1 - \sqrt{2}\right)$
$= 2 - 1 + \sqrt{2}$
$= 1 + \sqrt{2}$

Los números son $1 + \sqrt{2}$ y $1 - \sqrt{2}$. ¡Tal vez deba verificar estos números en el enunciado original del problema!

Finalmente, considere un problema de movimiento uniforme similar a los que resolvió en el capítulo 7. Ahora se tiene la flexibilidad de usar dos ecuaciones con dos variables.

EJEMPLO 5 Aplique su habilidad

Larry manejó 156 millas en 1 hora más de lo que le tomó a Mike manejar 108 millas. Mike manejó en promedio 2 millas por hora más rápido que Larry. ¿Qué tan rápido viajó cada uno?

Ejemplo de salón de clases
Lynn manejó 201 millas en 1 hora menos de lo que le tomó a Michelle manejar 256 millas. Lynn manejó en promedio 3 millas por hora más rápido que Michelle. ¿Qué tan rápido viajó cada una?

Solución

Se pueden representar las rapideces y tiempos desconocidos de esta forma:

sea r la rapidez de Larry
sea t el tiempo de Larry
entonces $r + 2$ representa la rapidez de Mike
y $t - 1$ representa el tiempo de Mike

Ya que "*distancia es igual a rapidez por tiempo*", se puede plantear el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} rt = 156 \\ (r+2)(t-1) = 108 \end{pmatrix}$$

Resolver la primera ecuación para r produce $r = \frac{156}{t}$. Al sustituir $\frac{156}{t}$ para r en la segunda ecuación y simplificar se obtiene

$$\left(\frac{156}{t} + 2\right)(t - 1) = 108$$
$$156 - \frac{156}{t} + 2t - 2 = 108$$
$$2t - \frac{156}{t} + 154 = 108$$
$$2t - \frac{156}{t} + 46 = 0$$
$$2t^2 - 156 + 46t = 0 \qquad \text{Multiplicar ambos lados por } t,\ t \neq 0$$
$$2t^2 + 46t - 156 = 0$$
$$t^2 + 23t - 78 = 0$$

Se puede resolver esta ecuación cuadrática factorizando

$$(t + 26)(t - 3) = 0$$
$$t + 26 = 0 \quad \text{o} \quad t - 3 = 0$$
$$t = -26 \quad \text{o} \quad t = 3$$

Se puede desechar la solución negativa. Así que el tiempo de Larry es 3 horas y el de Mike es $3 - 1 = 2$ horas. La rapidez de Larry es $\frac{156}{3} = 52$ millas por hora y la de Mike es $52 + 2 = 54$ millas por hora.

Conjunto de problemas 10.5

Resolver cada uno de los siguientes problemas. **(Objetivo 1)**

1. Hallar dos números enteros consecutivos cuyo producto sea 306.
2. Hallar dos números enteros consecutivos cuyo producto sea 702.
3. Suponga que la suma de dos números reales positivos es 44 y su producto es 475. Hallar los números.
4. La diferencia entre dos números es 6. Su producto es 616. Hallar los números.
5. Hallar dos números de tal manera que su suma sea 6 y su producto sea 4.
6. Hallar dos números de tal manera que su suma sea 4 y su producto sea 1.
7. La suma de un número y su recíproco es $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Hallar el número.
8. La suma de un número y su recíproco es $\frac{73}{24}$. Hallar el número.
9. Se eleva al cuadrado cada uno de tres números pares consecutivos. Los tres resultados se suman y el resultado es 596. Hallar los números.
10. Se eleva al cuadrado cada uno de tres números enteros consecutivos. Los tres resultados se suman y el resultado es 245. Hallar los números.

11. La suma del cuadrado de un número y el cuadrado de la mitad del número es 80. Hallar el número.

12. La diferencia entre el cuadrado de un número positivo y el cuadrado de la mitad del número es 243. Hallar el número.

13. Hallar el largo y ancho de un rectángulo si su largo mide 4 metros menos que el doble de su ancho y el área del rectángulo es 96 metros cuadrados.

14. Suponga que el largo de una región rectangular mide 4 centímetros más que su ancho. El área de la región es 45 centímetros cuadrados. Hallar el largo y el ancho del rectángulo.

15. El perímetro de un rectángulo mide 80 centímetros y su área mide 375 centímetros cuadrados. Encontrar el largo y el ancho del rectángulo.

16. El perímetro de un rectángulo mide 132 yardas y su área mide 1080 yardas cuadradas. Encontrar el largo y el ancho del rectángulo.

17. El área de una cancha de tenis mide 2106 pies cuadrados (ver la figura 10.12). El largo de la cancha mide $\frac{26}{9}$ veces su ancho. Encontrar el largo y el ancho de la cancha de tenis.

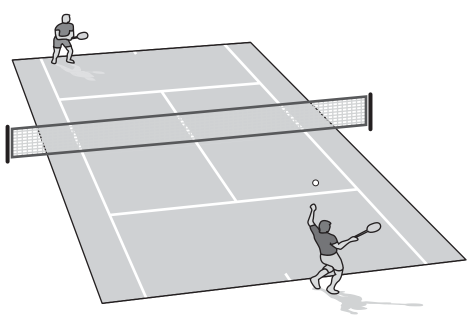


Figura 10.12

18. El área de una cancha de badminton mide 880 pies cuadrados. El largo de la cancha mide 2.2 veces su ancho. Encontrar el largo y el ancho de la cancha.

19. El auditorio de una preparatoria local contiene 300 asientos. Hay 5 filas menos que el número de asientos por fila. Encontrar el número de filas y el número de asientos por fila.

20. Se plantaron trescientos setenta y cinco árboles en filas. El número de árboles por fila fue 10 mayor que el número de filas. ¿Cuántas filas de árboles hay en el plantío?

21. El área de un área rectangular es 63 pies cuadrados. Si el largo y ancho crecen 3 pies, el área aumenta a 57 pies cuadrados. Encontrar el largo y el ancho del rectángulo original.

22. El área de un círculo es igual al doble de la circunferencia del círculo. Encontrar el largo del radio del círculo.

23. La suma de las longitudes de dos catetos de un triángulo rectángulo es 14 pulgadas. Si el largo de la hipotenusa es10 pulgadas, encontrar el largo de cada cateto.

24. Una página de una revista contiene 70 pulgadas cuadradas de texto. La altura de la página mide dos veces su ancho. Si el margen alrededor del texto debe ser de 2 pulgadas, ¿cuáles son las dimensiones de la página?

25. Una fotografía de 5 por 7 pulgadas está rodeada por un marco de ancho uniforme (ver la figura 10.13). El área de la fotografía y el marco juntos es 80 pulgadas cuadradas. Encontrar el ancho del marco.

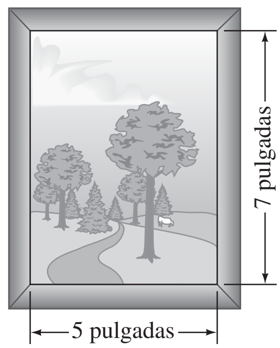


Figura 10.13

26. Un trozo rectangular de cartón es 3 pulgadas más largo que su ancho. De cada una de sus esquinas se recorta un trozo cuadrado de 2 pulgadas por lado. Luego las aletas se doblan para formar una caja abierta que tiene un volumen de 140 pulgadas cúbicas. Encuentre la longitud y el ancho de la pieza original de cartón.

27. Un viaje escolar costó \$3000. Si hubieran ido diez estudiantes más, le habría costado a cada uno \$25 menos. ¿Cuántos estudiantes fueron al viaje?

28. Simon podó algunos jardines y ganó \$40. Le tomó 3 horas más de lo esperado, así que ganó \$3 por hora menos de lo anticipado. ¿Cuánto esperaba tardar?

29. Una pieza de alambre de 56 pulgadas se corta en dos y cada pieza se dobla para formar un cuadrado. Si la suma de las áreas de los dos cuadrados es 100 pulgadas cuadradas, encontrar el largo de cada pieza de alambre.

30. Suponga que al acelerar un automóvil 10 millas por hora, es posible hacer un viaje de 200 millas en 1 hora menos. ¿Cuál era la rapidez original para el viaje?

31. En una excursión ciclistica de 50 millas, Irene promedió millas por hora más rápido durante las primeras 36 millas que durante las últimas 50 millas. Todo el viaje duró 3 horas. Encuentre su rapidez durante las primeras 36 millas.

32. Un lado de un rectángulo mide 1 pie más que el doble del largo de la altitud a ese lado. Si el área del triángulo es 18 pies cuadrados, hallar el largo de un lado y el largo de la altura a ese lado.

Se pueden encontrar problemas verbales adicionales en el apéndice A. Todos los problemas en el apéndice marcados como (10.5) son apropiados para esta sección.

Pensamientos en palabras

33. Regrese al ejemplo 1 de esta sección y explique cómo podría resolverse el problema usando una variable y una ecuación.

Capítulo 10 Resumen

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Resolver ecuaciones cuadráticas factorizando. (Sección 10.1/Objetivo 1)	Una ecuación cuadrática en la variable x es cualquier ecuación que pueda escribirse en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. Se pueden resolver ecuaciones cuadráticas que son factorizables usando números reales al factorizar y aplicar la propiedad $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$.	Resolver $x^2 + 4x = 21$ factorizando. **Solución** Primero debe igualar la ecuación a cero y después debe factorizar. $x^2 + 4x - 21 = 0$ $(x + 7)(x - 3) = 0$ $x + 7 = 0$ o $x - 3 = 0$ $x = -7$ o $x = 3$ El conjunto solución es $\{-7, 3\}$. **Problema de muestra 1** Resolver $x^2 - 35 = 2x$ factorizando.
Resolver ecuaciones cuadráticas de forma $x^2 = a$. (Sección 10.1/Objetivo 2)	La propiedad $x^2 = a$ si y sólo si $x = \pm\sqrt{a}$ puede usarse para resolver ciertos tipos de ecuaciones cuadráticas.	Resolver $(2x + 3)^2 = 15$. **Solución** $(2x + 3)^2 = 15$ Aplicar la propiedad da $2x + 3 = \pm\sqrt{15}$ $2x = -3 \pm \sqrt{15}$ $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{15}}{2}$ El conjunto solución es $\left\{\dfrac{-3 - \sqrt{15}}{2}, \dfrac{-3 + \sqrt{15}}{2}\right\}$. **Problema de muestra 2** Resolver $(3x - 2)^2 = 13$.
Resolver ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado. (Sección 10.2/Objetivo 1)	Debería de ser capaz de resolver ecuaciones cuadráticas con el método de completar el cuadrado. Para repasar este método, regrese a los ejemplos en la sección 10.2.	Resolver $x^2 + 10x - 6 = 0$ completando el cuadrado. **Solución** Primero, sume 6 a ambos lados de la ecuación. $x^2 + 10x = 6$ Ahora tome $\frac{1}{2}$ del coeficiente del término x y eleve al cuadrado el resultado. $\frac{1}{2}(10) = 5$ y $5^2 = 25$. Sume a ambos lados de la ecuación. $x^2 + 10x + 25 = 6 + 25$ $x^2 + 10x + 25 = 31$ Ahora factorice y después aplique la propiedad de raíz cuadrada. $(x + 5)^2 = 31$ $x + 5 = \pm\sqrt{31}$ $x = -5 \pm \sqrt{31}$

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
		El conjunto solución es $\{-5-\sqrt{31}, -5+\sqrt{31}\}$. **Problema de muestra 3** Resolver $x^2 - 12x + 3 = 0$ completando el cuadrado.
Resolver ecuaciones cuadráticas usando la fórmula cuadrática. (Sección 10.3/Objetivo 1)	Se suele plantear la fórmula cuadrática como $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Se puede usar para resolver cualquier ecuación cuadrática que se escriba en la forma $ax^2 + bx + c = 0$. La respuesta final debe reducirse y su radical debe estar en los términos más simples. Tenga cuidado al reducir la respuesta final; se suelen cometer errores en este paso.	Resolver $x^2 + 6x + 2 = 0$ con la fórmula cuadrática. **Solución** Para este problema, $a = 1$, $b = 6$ y $c = 2$. $x = \dfrac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$ $x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36-8}}{2}$ $x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{28}}{2}$ $x = \dfrac{-6 \pm 2\sqrt{7}}{2} = \dfrac{2\left(-3 \pm \sqrt{7}\right)}{2}$ $x = -3 \pm \sqrt{7}$ El conjunto solución es $\{-3-\sqrt{7}, -3+\sqrt{7}\}$. **Problema de muestra 4** Resolver $x^2 - 8x + 1 = 0$ con la fórmula cuadrática.
Elegir el método más apropiado para resolver una ecuación cuadrática. (Sección 10.4/Objetivo 1)	Los tres métodos básicos para resolver ecuaciones cuadráticas son factorización, completar el cuadrado y la fórmula cuadrática. Factorizar sólo funciona si la expresión es factorizable sobre números enteros. Completar el cuadrado puede ser muy eficiente en situaciones donde puede completar el cuadrado sin trabajar con fracciones. La fórmula cuadrática funciona con cualquier ecuación.	Resolver $m^2 + 6m - 8 = 0$ usando el método más apropiado. **Solución** La expresión no se factoriza, así que se puede resolver completando el cuadrado. $m^2 + 6m - 8 = 0$ $m^2 + 6m = 8$ $m^2 + 6m + 9 = 8 + 9$ $(m+3)^2 = 17$ $m + 3 = \pm\sqrt{17}$ $m = -3 \pm \sqrt{17}$ El conjunto solución es $\{-3-\sqrt{17}, -3+\sqrt{17}\}$ **Problema de muestra 5** Resolver $2x^2 - 7x - 15 = 0$ usando el método más apropiado.

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Resolver problemas verbales que involucran el teorema de Pitágoras. **(Sección 10.1/Objetivo 3)**	La propiedad $x^2 = a$ *si y sólo si* $x = \pm\sqrt{a}$ puede usarse cuando se trabaja con el teorema de Pitágoras si la ecuación resultante está en la forma $x^2 = a$. No olvide: **1.** En un triángulo isósceles rectángulo, el largo de los dos catetos son iguales. **2.** En un triángulo rectángulo 30°-60°, el largo del cateto opuesto al ángulo 30º mide la mitad de la hipotenusa.	Un campo rectangular de fútbol mide aproximadamente 50 yardas por 100 yardas. Encontrar el largo de la diagonal de un campo de fútbol a la décima de yarda más cercana. **Solución** La diagonal de un rectángulo lo divide en dos triángulos rectángulos. Use el teorema de Pitágoras para hallar la hipotenusa del triángulo sabiendo que los catetos miden 50 yardas y 100 yardas. $a^2 + b^2 = c^2$ $50^2 + 100^2 = c^2$ $12{,}500 = c^2$ $c = \sqrt{12500} \approx 111.8$ El largo de la diagonal a la décima de yarda más cercana mide 111.8 yardas. **Problema de muestra 6** Dos lados de un triángulo isósceles rectángulo miden 6 pulgadas. ¿Cuánto mide la hipotenusa?
Resolver problemas verbales que involucran ecuaciones cuadráticas. **(Sección. 10.5/Objetivo 1)**	Su conocimiento en sistemas de ecuaciones y ecuaciones cuadráticas le proporciona una base más firme para resolver problemas verbales.	Encontrar dos números de tal manera que sumen 8 y su producto sea 6. **Solución** Sea n un número, entonces el otro número se representará como $8 - n$. Ahora escriba la ecuación mostrando el producto. $n(8 - n) = 6$ $8n - n^2 = 6$ $0 = n^2 - 8n + 6$ Usando la fórmula cuadrática, se encuentra que los números son $4 - \sqrt{10}$ y $4 + \sqrt{10}$. **Problema de muestra 7** El perímetro de un rectángulo mide 28 pulgadas y su área 48 pulgadas cuadradas. Hallar las dimensiones del rectángulo.

Capítulo 10 Conjunto de problemas de repaso

Para los problemas 1-22, resolver cada ecuación cuadrática.

1. $(2x + 7)^2 = 25$

2. $x^2 + 8x = -3$

3. $21x^2 - 13x + 2 = 0$

4. $x^2 = 17x$

5. $n - \dfrac{4}{n} = -3$

6. $n^2 - 26n + 165 = 0$

7. $3a^2 + 7a - 1 = 0$

8. $4x^2 - 4x + 1 = 0$

9. $5x^2 + 6x + 7 = 0$

10. $3x^2 + 18x + 15 = 0$

11. $3(x - 2)^2 - 2 = 4$

12. $x^2 + 4x - 14 = 0$

13. $y^2 = 45$

14. $x(x - 6) = 27$

15. $x^2 = x$

16. $n^2 - 4n - 3 = 6$

17. $n^2 - 44n + 480 = 0$

18. $\dfrac{x^2}{4} = x + 1$

19. $\dfrac{5x - 2}{3} = \dfrac{2}{x + 1}$

20. $\dfrac{-1}{3x - 1} = \dfrac{2x + 1}{-2}$

21. $\dfrac{5}{x-3} + \dfrac{4}{x} = 6$ **22.** $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{2}{x} = 3$

Para los problemas 23-32, plantear una ecuación o un sistema de ecuaciones para ayudar a resolver cada problema.

23. El perímetro de un rectángulo mide 42 pulgadas y su área mide 108 pulgadas cuadradas. Encontrar el largo y el ancho del rectángulo.

24. Encontrar dos números enteros consecutivos cuyo producto sea 342.

25. Cada uno de tres números impares consecutivos se eleva al cuadrado. Los tres resultados se suman y el resultado es 251. Hallar los números.

26. El área combinada de dos cuadrados mide 50 metros cuadrados. Cada lado del cuadrado más grande mide tres veces un lado del cuadrado más pequeño. Hallar el largo de los lados de cada cuadrado.

27. La diferencia en el largo de dos catetos de un triángulo rectángulo es 2 yardas. Si la hipotenusa mide $2\sqrt{13}$ yardas, encontrar el largo de cada cateto.

28. Tony compró algunas acciones por $720. Un mes después el valor de las acciones aumentó en $8 por acción y las vendió, menos 20, y recibió $80. ¿Cuántas acciones vendió y a qué precio por acción?

29. Una compañía tiene un estacionamiento rectangular de 40 metros de ancho por 60 metros de largo. Planean incrementar el área del estacionamiento 1100 metros cuadrados agregando una tira de ancho uniforme a un lado y en un extremo. Encontrar el ancho de la tira por agregar.

30. Jay viajó 225 millas en 2 horas menos de lo que le tomó a Jean viajar 336 millas. Si Jay iba 3 millas por hora más lento que Jean, hallar cada rapidez.

31. La hipotenusa de un triángulo isósceles rectángulo mide 12 pulgadas. Hallar el largo de cada cateto.

32. En un triángulo rectángulo 30°-60°, el lado opuesto al ángulo de 60º mide 8 centímetros. Encontrar el largo de la hipotenusa.

Para más práctica con problemas verbales, consulte el apéndice a. Todos los problemas en el apéndice con referencia al capítulo 10 deberían ser apropiados para su trabajo.

Capítulo 10 Examen

1. Los dos catetos de un triángulo rectángulo miden 4 pulgadas y 6 pulgadas. Encontrar el largo de la hipotenusa. Exprese su respuesta en la forma radical más simple.
2. La diagonal de un terreno rectangular mide 14 metros. Si el ancho del rectángulo mide 5 metros, encontrar el largo en el número entero más cercano.
3. La diagonal de un pedazo cuadrado de papel mide 10 pulgadas. Encontrar, redondeando a la pulgada más cercana, el largo de un lado del cuadrado.
4. En un triángulo rectángulo 30°-60°, el lado opuesto al ángulo de 30° mide 4 centímetros. Encontrar el largo del lado opuesto al ángulo de 60°. Exprese su respuesta en la forma radical más simple.

Para los problemas 5-21, resolver cada ecuación.

5. $(3x + 2)^2 = 49$
6. $4x^2 = 64$
7. $8x^2 - 10x + 3 = 0$
8. $x^2 - 3x - 5 = 0$
9. $n^2 + 2n = 9$
10. $(2x - 1)^2 = -16$
11. $y^2 + 10y = 24$
12. $2x^2 - 3x - 4 = 0$
13. $\dfrac{x - 2}{3} = \dfrac{4}{x + 1}$
14. $\dfrac{2}{x - 1} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2}$
15. $x^2 = 7x$
16. $n(n - 28) = -195$
17. $n + \dfrac{3}{n} = \dfrac{19}{4}$
18. $(2x + 1)(3x - 2) = -2$
19. $(7x + 2)^2 - 4 = 21$
20. $(4x - 1)^2 = 27$
21. $n^2 - 5n + 7 = 0$

Para los problemas 22-25, plantear una ecuación o un sistema de ecuaciones que ayude a resolver cada problema.

22. Una habitación contiene 120 asientos. El número de asientos por fila es 1 menos que el doble del número de filas. Encontrar el número de asientos por fila.
23. Abu condujo su bicicleta 56 millas en 2 horas menos de lo que le tomó a Stan conducir su bicicleta 72 millas. Si Abu iba 2 millas por hora más rápido que Stan, encontrar la rapidez de Abu.
24. Encontrar dos números impares consecutivos cuyo producto sea 255.
25. El área combinada de dos cuadrados es 97 pies cuadrados. Cada lado del cuadrado más grande mide 1 pie más que el doble del largo de un lado del cuadrado más pequeño. Encontrar el largo de un lado del cuadrado más grande.

11 Temas adicionales

PhotoAlto/Alix Minde/The Agency Collection/Getty Images

"Tienes un cerebro en tu cabeza. Tienes pies en tus zapatos. Puedes moverte hacia cualquier dirección que elijas. Eres tú mismo. Y sabes lo que sabes. Eres la persona que decidirá adónde ir".

DR. SEUSS

Tip de estudio

Habiendo llegado al final de su curso, es tiempo de pensar en su siguiente curso de matemáticas. El siguiente curso requerirá que utilice el conocimiento adquirido en este curso. Inscríbase en el siguiente curso enseguida. Sus clases de matemáticas deben tomarse de manera consecutiva y sin pausa entre ellos. Si espera un semestre o un año para tomar la siguiente clase de matemáticas, probablemente habrá olvidado mucho del contenido. En ese siguiente curso, tendrá que repasar viejas habilidades y deberá aprender nuevo material al mismo tiempo. Muchas veces la combinación de ponerse al corriente y aprender nuevo material se vuelve demasiado abrumador y los estudiantes dejan la clase. Si ocurre una pausa entre cursos, repase varias semanas antes de comenzar el siguiente. Existen varios programas que le ayudarán a repasar para un curso.

¿Qué ayuda a hacerlo sentirse confiado sobre su siguiente curso de matemáticas?

Vista previa del capítulo

Se incluye este capítulo para darle la oportunidad de expandir su conocimiento en los temas presentados en los capítulos anteriores. Partiendo de la lista en la sección de títulos, tal vez los temas no parezcan estar relacionados; sin embargo, cada sección es la continuación de un tema presentado en un capítulo anterior.

La sección 11.1 continúa con el desarrollo de técnicas para resolver ecuaciones y desigualdades, que era el punto principal en el capítulo 3. La sección 11.2 usa el método de eliminación por adición de la sección 8.6 para resolver sistemas que contienen tres ecuaciones lineales con tres variables. La sección 11.3 es una extensión del trabajo que se hizo con exponentes en la sección 5.6 y con radicales en el capítulo 9. Las secciones 11.4 y 11.5 incrementan el estudio de ecuaciones cuadráticas del capítulo 10. Las secciones 11.6-11.8 extienden su trabajo en geometría coordinada del capítulo 8.

11.1 Ecuaciones y desigualdades que implican el valor absoluto

OBJETIVOS

1. Resolver ecuaciones de valor absoluto
2. Resolver desigualdades de valor absoluto

En el capítulo 1 se usó el concepto de valor absoluto para explicar la suma y multiplicación de números reales. Se definió el valor absoluto como la distancia entre el número y el cero sobre una recta numérica. Por ejemplo, el valor absoluto de 3 es 3 y el valor absoluto de -3 es 3. El valor absoluto de 0 es 0. Simbólicamente, el valor absoluto se representa con dos líneas verticales.

$$|3| = 3 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0$$

En genera, se puede decir que el valor absoluto de cualquier número, excepto 0, es positivo.

Si se interpreta el valor absoluto como la distancia en una recta numérica, se pueden resolver una variedad de ecuaciones y desigualdades que implican el valor absoluto. Primero se consideran algunas ecuaciones.

Ejemplo de salón de clases
Resolver y graficar las soluciones para $|x| = 5$.

EJEMPLO 1 Resolver y graficar las soluciones para $|x| = 2$.

Solución

Cuando piensa en términos de distancia entre el número y cero, puede ver que x debe ser 2 ó -2. Por ende, $|x| = 2$ implica que

$$x = 2 \quad \text{o} \quad x = -2$$

El conjunto solución es $\{-2, 2\}$ y su gráfica se muestra en la figura 11.1.

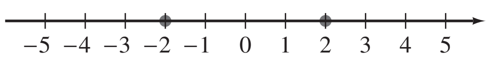


Figura 11.1

Ejemplo de salón de clases
Resolver y graficar las soluciones para $|x - 3| = 4$.

EJEMPLO 2 Resolver y graficar las soluciones para $|x + 4| = 1$.

Solución

El número $x + 4$ debe ser 1 ó -1. Por ende, $|x + 4| = 1$ implica que

$$x + 4 = 1 \quad \text{o} \quad x + 4 = -1$$
$$x = -3 \quad \text{o} \quad x = -5$$

El conjunto solución es $\{-5, -3\}$ y su gráfica se muestra en la figura 11.2.

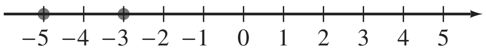


Figura 11.2

Ejemplo de salón de clases
Resolver y graficar las soluciones para $|2x + 3| = 6$.

EJEMPLO 3 Resolver y graficar las soluciones para $|3x - 2| = 4$.

Solución

El número $3x - 2$ debe ser 4 ó -4. Por ende, $|3x - 2| = 4$ implica que

$$\begin{aligned} 3x - 2 &= 4 \quad \text{o} \quad & 3x - 2 &= -4 \\ 3x &= 6 \quad \text{o} \quad & 3x &= -2 \\ x &= 2 \quad \text{o} \quad & x &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{2}{3}, 2\right\}$ y su gráfica se muestra en la figura 11.3.

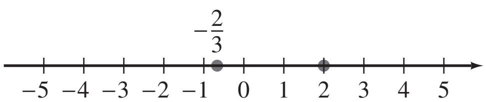


Figura 11.3

La "interpretación de distancia" para el valor absoluto también proporciona una buena base para resolver desigualdades que implican el valor absoluto. Considere los siguientes ejemplos.

Ejemplo de salón de clases
Resolver y graficar las soluciones para $|x| < 5$.

EJEMPLO 4 Resolver y graficar las soluciones para $|x| < 2$.

Solución

El número x debe ser *menor que dos unidades de distancia desde el cero*. Por lo tanto, $|x| < 2$ es equivalente a

$$x > -2 \qquad \text{y} \qquad x < 2$$

El conjunto solución es $\{x|x > -2 \;\; \text{y} < 2\}$ y su gráfica se muestra en la figura 11.4. El conjunto solución es $(-2, 2)$ escrito en notación de intervalos.

Figura 11.4

Ejemplo de salón de clases
Resolver y graficar las soluciones para $|x + 2| < 3$.

EJEMPLO 5 Resolver y graficar las soluciones para $|x - 1| < 2$.

Solución

El número $x - 1$ debe ser menor que dos unidades de distancia desde cero. Por tanto, $|x - 1| < 2$ es equivalente a

$$\begin{aligned} x - 1 &> -2 \qquad \text{y} \qquad & x - 1 &< 2 \\ x &> -1 \qquad \text{y} \qquad & x &< 3 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{x|x > -1 \;\; \text{y} < 3\}$ y su gráfica se muestra en la figura 11.5. El conjunto solución es $(-1, 3)$ escrito en notación de intervalos.

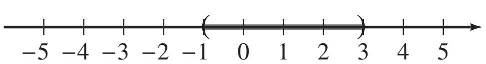


Figura 11.5

Ejemplo de salón de clases
Resolver y graficar las soluciones para $|4x + 2| \leq 10$.

EJEMPLO 6 Resolver y graficar las soluciones para $|2x + 5| \leq 1$.

Solución

El número $2x + 5$ debe ser *igual a o menor que una unidad de distancia desde el cero*. Entonces $|2x + 5| \leq 1$ es equivalente a

$$\begin{aligned} 2x + 5 &\geq -1 \quad && \text{y} \quad & 2x + 5 &\leq 1 \\ 2x &\geq -6 && \text{y} & 2x &\leq -4 \\ x &\geq -3 && \text{y} & x &\leq -2 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{x|x \geq -3 \text{ y } x \leq -2\}$ y su gráfica se muestra en la figura 11.6. El conjunto solución es $[-3, -2]$ escrito en notación de intervalos.

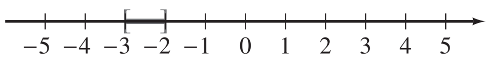


Figura 11.6

Ejemplo de salón de clases
Resolver y graficar las soluciones para $|x| > 4$.

EJEMPLO 7 Resolver y graficar las soluciones para $|x| > 2$.

Solución

El número x debe ser *mayor que dos unidades de distancia desde el cero*. Por ende, $|x| > 2$ implica que

$$x < -2 \quad \text{o} \quad x > 2$$

El conjunto solución es $\{x|x < -2 \text{ o } x > 2\}$ y su gráfica se muestra en la figura 11.7. El conjunto solución es $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ escrito en notación de intervalos.

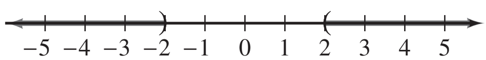


Figura 11.7

Ejemplo de salón de clases
Resolver y graficar las soluciones para $|3x + 4| > 5$.

EJEMPLO 8 Resolver y graficar las soluciones para $|3x - 1| > 4$.

Solución

El número $3x - 1$ debe ser *mayor que cuatro unidades de distancia desde cero*. Entonces $|3x - 1| > 4$ es equivalente a

$$\begin{aligned} 3x - 1 &< -4 \quad && \text{o} \quad & 3x - 1 &> 4 \\ 3x &< -3 && \text{o} & 3x &> 5 \\ x &< -1 && \text{o} & x &> \frac{5}{3} \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\left\{x|x < -1 \text{ o } x > \frac{5}{3}\right\}$ y su gráfica se muestra en la figura 11.8.

El conjunto solución es $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{5}{3}, \infty\right)$ escrito en notación de intervalos.

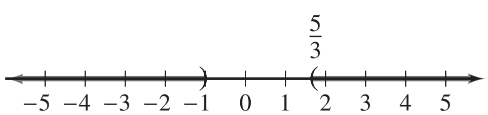


Figura 11.8

Las soluciones para ecuaciones y desigualdades como $|3x - 7| = -4$, $|x + 5| < -3$ y $|2x - 3| > 27$ pueden encontrarse por pura inspección. Note que en cada uno de estos ejemplos el lado derecho es un número negativo. Por ende, usando el hecho de que el valor absoluto de cualquier número es no negativo, se puede razonar lo siguiente:

$|3x - 7| = -4$ no tienes solución porque el valor absoluto de un número no puede ser negativo.

$|x + 5| < -3$ no tiene solución porque no se puede obtener un valor absoluto menor que -3.

$|2x - 3| > -7$ se satisface con cualquier número real porque el valor absoluto de $2x - 3$, sin importar con qué número se sustituya x, siempre será mayor que -7.

Examen de conceptos 11.1

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. El valor absoluto de un número negativo es el opuesto del número.
2. El valor absoluto de un número siempre es positivo o cero.
3. El valor absoluto de un número es igual al valor absoluto de su opuesto.
4. El conjunto solución de $|x - 1| = 4$ es $\{-3, 3\}$.
5. El conjunto solución de $|x + 5| = 0$ es el conjunto nulo $\varnothing$.
6. El conjunto solución de $|x - 2| \geq -6$ son todos los números reales.
7. El conjunto solución de $|x + 1| < -3$ son todos los números reales.
8. El conjunto solución de $|x - 4| \leq 0$ es $\{4\}$.
9. Si una solución en notación de intervalos es $\{-4, -2\}$, entonces, usando la notación de conjuntos, puede expresarse como $\{x|x > -4 \text{ y } x < -2\}$.
10. Si una solución en notación de intervalos es $(-\infty, 22) \cup (4, \infty)$, entonces, usando la notación de conjuntos, puede expresarse como $\{x|x < -2 \text{ o } x > 4\}$.

Conjunto de problemas 11.1

Para los problemas 1-26, resolver la ecuación o la desigualdad. Graficar las soluciones. (Objetivos 1 y 2)

1. $|x| = 4$
2. $|x| = 3$
3. $|x| < 1$
4. $|x| < 4$
5. $|x| \geq 2$
6. $|x| \geq 1$
7. $|x + 2| = 1$
8. $|x + 3| = 2$
9. $|x - 1| = 2$
10. $|x - 2| = 1$
11. $|x - 2| \leq 2$
12. $|x + 1| \leq 3$
13. $|x + 1| > 3$
14. $|x - 3| > 1$
15. $|2x + 1| = 3$
16. $|3x - 1| = 5$
17. $|5x - 2| = 4$
18. $|4x + 3| = 8$
19. $|2x - 3| \geq 1$
20. $|2x + 1| \geq 3$
21. $|4x + 3| < 2$
22. $|5x - 2| < 8$
23. $|3x + 6| = 0$
24. $|4x - 3| = 0$
25. $|3x - 2| > 0$
26. $|2x + 7| < 0$

Para los problemas 27-42, resolver cada una de las siguientes. (Objetivos 1 y 2)

27. $|3x - 1| = 17$
28. $|4x + 3| = 27$
29. $|2x + 1| > 9$
30. $|3x - 4| > 20$
31. $|3x - 5| < 19$
32. $|5x + 3| < 14$
33. $|-3x - 1| = 17$
34. $|-4x + 7| = 26$
35. $|4x - 7| \leq 31$
36. $|5x - 2| \leq 21$
37. $|5x + 3| \geq 18$
38. $|2x - 11| \geq 4$
39. $|-x - 2| < 4$
40. $|-x - 5| < 7$
41. $|-2x + 1| > 6$
42. $|-3x + 2| > 8$

Para los problemas 43-50, resolver cada ecuación o desigualdad por inspección. (Objetivos 1 y 2)

43. $|7x| = 0$
44. $|3x - 1| = -4$
45. $|x - 6| > -4$
46. $|3x + 1| > -3$
47. $|x + 4| < -7$
48. $|5x - 2| < -2$
49. $|x + 6| \leq 0$
50. $|x + 7| > 0$

Pensamientos en palabras

51. Explicar por qué la ecuación $|3x + 2| = -6$ no tiene solución en números reales.

52. Explicar por qué la desigualdad $|x + 6| < -4$ no tiene solución en números reales.

Más investigación

Una conjunción como $x > -2$ y $x < 4$ puede escribirse de manera más compacta $-2 < x < 4$, lo cual se lee como "-2 es menor que x y x es menor que 4". En otras palabras, x se encuentra entre -2 y 4. La forma compacta es muy conveniente para resolver conjunciones de la siguiente manera:

$-3 < 2x - 1 < 5$

$-2 < 2x < 6$ Sumar 1 en el lado izquierdo, en medio y a la derecha

$-1 < x < 3$ Dividir entre 2

Así, el conjunto solución puede expresarse como $\{x|-1 < x < 3\}$.

Para los problemas 53-62, resolver las desigualdades compuestas usando la forma compacta.

53. $-2 < x - 6 < 8$

54. $-1 < x + 3 < 9$

55. $1 \leq 2x + 3 \leq 11$

56. $-2 \leq 3x - 1 \leq 14$

57. $-4 < \dfrac{x - 1}{3} < 2$

58. $2 < \dfrac{x + 1}{4} < 5$

59. $|x + 4| < 3$

[*Pista*: $|x + 4| < 3$ equivale a $-3 < x + 4 < 3$]

60. $|x - 6| < 5$

61. $|2x - 5| < 7$

62. $|3x + 2| < 14$

Respuestas del examen de conceptos

1. Cierto **2.** Cierto **3.** Cierto **4.** Falso **5.** Falso **6.** Cierto **7.** Falso **8.** Cierto **9.** Cierto **10.** Cierto

11.2 Sistemas de ecuaciones 3 3 3

OBJETIVOS

1 Resolver sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables

2 Usar un sistema de tres ecuaciones lineales para resolver problemas verbales

Cuando se busca el conjunto solución de una ecuación con dos variables, como $2x + y = 9$, se encuentran los pares ordenados que vuelven a la ecuación un enunciado verdadero. Planteada en dos dimensiones, la gráfica del conjunto solución es una recta.

Ahora considere una ecuación lineal con tres variables, como puede ser $2x - y + 4z = 8$. Un conjunto solución para esta ecuación es una tripleta ordenada (x, y, z) que hace a la ecuación un enunciado verdadero. Por ejemplo, la tripleta ordenada (3, 2, 1) es una solución de $2x - y + 4z = 8$ porque $2(3) - 2 + 4(1) = 8$. La gráfica de una ecuación lineal con tres variables es un plano, no una recta. De hecho, graficar ecuaciones con tres variables requiere el uso de un sistema coordenado tridimensional.

Un sistema de ecuaciones 3×3 (leído como "3 por 3") es un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables. Para resolver un sistema de 3×3 como

$$\begin{pmatrix} 2x - y + 4z = 5 \\ 3x + 2y + 5z = 4 \\ 4x - 3y - z = 11 \end{pmatrix}$$

significa encontrar todos los pares ordenados que satisfacen las tres ecuaciones. En otras palabras, el conjunto solución del sistema es la intersección de los conjuntos solución de las tres ecuaciones en el sistema. usar un enfoque de graficación para resolver sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables no es del todo práctico. Sin embargo, un análisis gráfico simple sí proporciona algunos indicios de posibles soluciones.

En general, puesto que cada ecuación lineal con tres variables produce un plano, un sistema de tres de tales ecuaciones produce tres planos. Existen varias formas en las que se pueden relacionar tres planos. No obstante, para los propósitos de este momento, necesita darse cuenta de que, desde un punto de vista de un conjunto solución, un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables produce una de las siguientes posibilidades:

1. Existe *una tripleta ordenada* que satisface las tres ecuaciones. Los tres planos tienen un *punto* de intersección común, como se indica en la figura 11.9.

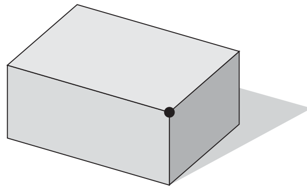
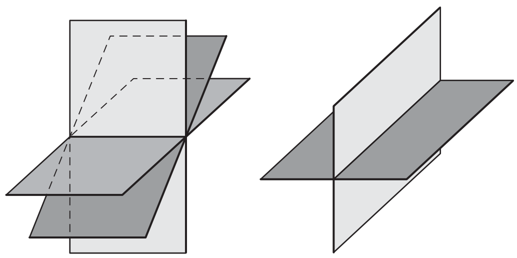


Figura 11.9

2. Existen *infinitas tripletas ordenadas* en el conjunto solución, todas las cuales son coordenadas de puntos sobre una recta común a los tres planos. Esto puede ocurrir si los tres planos tienen una recta de intersección común, como en la figura 11.10(a), o si dos de los planos coinciden y el tercer plano los interseca como en la figura 11.10(b).



(a) **(b)**

Figura 11.10

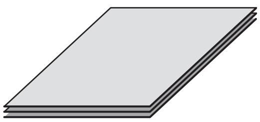
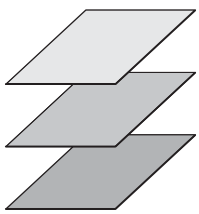


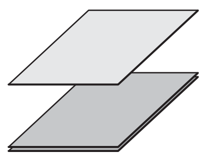
Figura 11.11

3. Existen *infinitas tripletas ordenadas* en el conjunto solución, todas las cuales son coordenadas de puntos sobre un *plano*. Esto puede ocurrir si los tres planos coinciden, como se ilustra en la figura 11.11.

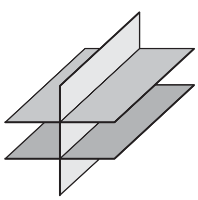
4. El conjunto solución está *vacío*; por tanto, se escribe $\varnothing$. Esto puede ocurrir en varias formas, como se ilustra en la figura 11.12. Note que en cada situación no hay puntos comunes a los tres planos.



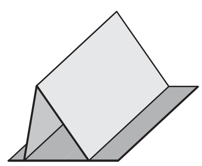
(a) Tres planos paralelos.



(b) Dos planos son paralelos y el tercero los interseca en rectas paralelas.



(c) Dos planos coinciden y el tercero es paralelo a los planos coincidentes.



(d) Ningún par de planos es paralelo, pero dos de ellos intersecan en una recta que es paralela al tercer plano.

Figura 11.12

Ahora que conoce cuáles posibilidades existen, considere encontrar los conjuntos solución para algunos sistemas. El enfoque será el método de eliminación por adición, por medio del cual los sistemas se sustituyen con sistemas equivalentes hasta que se obtiene un sistema donde se puede determinar fácilmente el conjunto solución. Se comenzará con un ejemplo que puede resolverse sin tener que cambiar a otro sistema equivalente.

Ejemplo de salón de clases

Resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2x + 3y + z = 4 \\ 4y + 3z = 5 \\ 3z = 9 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 1 Resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 4x + 2y - z = -5 \\ 3y + z = -1 \\ 2z = 10 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Solución

De la ecuación (3), se puede hallar el valor de z.

$$2z = 10$$
$$z = 5$$

Ahora, puede sustituir 5 por z en la ecuación (2).

$$3y + z = -1$$
$$3y + 5 = -1$$
$$3y = -6$$
$$y = -2$$

Finalmente, puede sustituir -2 por y y 5 por z en la ecuación (1).

$$4x + 2y - z = -5$$
$$4x + 2(-2) - 5 = -5$$
$$4x - 9 = -5$$
$$4x = 4$$
$$x = 1$$

El conjunto solución es $\{(1, -2, 5)\}$.

Note el formato de la ecuación en el sistema del ejemplo 1. La primera ecuación contiene las tres variables, la segunda ecuación tiene sólo dos variables, y la tercer ecuación tiene sólo una variable. Esto permitió resolver la tercer ecuación y después usar la sustitución para hallar los valores de las otras variables. Ahora considere otro ejemplo en el que se reemplaza una ecuación para crear un sistema equivalente.

Ejemplo de salón de clases

Resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} x - 2y + 3z = 5 \\ y - 5z = 3 \\ 3y - 7z = 1 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 2 Resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2x + 4y - 5z = -8 \\ y + 4z = 7 \\ 5y + 3z = 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Solución

Para llegar al mismo formato que en el ejemplo 1, se necesita eliminar el término con la variable y en la ecuación (3). Usando el concepto de eliminación de la sección 8.4, se puede reemplazar la ecuación (3) con una ecuación equivalente que se forma al multiplicar la ecuación (2) por -5 y después sumar ese resultado a la ecuación (3). El sistema equivalente es

$$\begin{pmatrix} 2x + 4y - 5z = -8 \\ y + 4z = 7 \\ -17z = -34 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix}$$

De la ecuación (6) se puede hallar el valor de z.

$$\begin{aligned} -17z &= -34 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

Ahora, puede sustituir 2 por z en la ecuación (5).

$$\begin{aligned} y + 4z &= 7 \\ y + 4(2) &= 7 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Finalmente, se puede sustituir -1 por y y 2 por z en la ecuación (4).

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 5z &= -8 \\ 2x + 4(-1) - 5(2) &= -8 \\ 2x - 4 - 10 &= -8 \\ 2x - 14 &= -8 \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{(3, -1, 2)\}$.

Ahora considere algunos ejemplos en los cuales se reemplaza más de una ecuación para formar un sistema equivalente.

Ejemplo de salón de clases

Resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2x - y + z = 1 \\ x + 3y - 2z = 6 \\ 4x - y + 3z = 7 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 3

Resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + 2z = -13 \\ 2x + 3y - 5z = -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Solución

Se comienza por seleccionar un par de ecuaciones para formar una nueva ecuación eliminando una variable. Se usarán las ecuaciones (1) y (2) para formar una nueva ecuación al tiempo que se elimina la variable x. Se puede reemplazar la ecuación (2) con una ecuación formada al multiplicar la ecuación (1) por -3 y después sumar el resultado a la ecuación (2). El sistema equivalente es

$$\begin{pmatrix} x + 2y - 3z = -1 \\ -7y + 11z = -10 \\ 2x + 3y - 5z = -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix}$$

Ahora se toman la ecuación (4) y la ecuación (6) y se elimina la misma variable, x. Se puede reemplazar la ecuación (6) con una nueva ecuación formada al multiplicar la ecuación (6) por -2 y sumar el resultado a la ecuación (6). El sistema equivalente es

$$\begin{pmatrix} x + 2y - 3z = -1 \\ -7y + 11z = -10 \\ -y + z = -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (7) \\ (8) \\ (9) \end{matrix}$$

Ahora se toman las ecuaciones (8) y (9) y se forma una nueva ecuación eliminando una variable. Tanto y como z pueden eliminarse. Para este ejemplo se eliminó y. Se puede reemplazar la ecuación (8) con una nueva ecuación formada al multiplicar la ecuación (9) por -7 y sumar el resultado a la ecuación (8). El sistema equivalente es

$$\begin{pmatrix} x + 2y - 3z = -1 \\ 4z = 4 \\ -y + z = -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (10) \\ (11) \\ (12) \end{matrix}$$

De la ecuación (11) se puede hallar el valor de z.

$$\begin{aligned} 4z &= 4 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Ahora se sustituye 1 por z en la ecuación (12) y se determina el valor de y.

$$\begin{aligned} -y + z &= -2 \\ -y + 1 &= -2 \\ -y &= -3 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Finalmente, se puede sustituir 3 por y y 1 por z en la ecuación (10).

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -1 \\ x + 2(3) - 3(1) &= -1 \\ x + 6 - 3 &= -1 \\ x + 3 &= -1 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{(-4, 3, 1)\}$.

Ejemplo de salón de clases

Resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x - 4y + 2z = 18 \\ 5x - 6y - 3z = 13 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 4 Resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2x + 3y - z = 8 \\ 5x + 2y - 3z = 21 \\ 3x - 4y + 2z = 5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Solución

Estudiar los coeficientes en el sistema indica que eliminar los términos z de las ecuaciones (2) y (3) es fácil de hacer. Se puede reemplazar la ecuación (2) con la ecuación formada al multiplicar la ecuación (1) por -3 y sumar el resultado a la ecuación (2). El sistema equivalente es

$$\begin{pmatrix} 2x + 3y - z = 8 \\ -x - 7y = -3 \\ 3x - 4y + 2z = 5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix}$$

Ahora se reemplaza la ecuación (6) con una ecuación formada al multiplicar la ecuación (4) por 2 y sumar el resultado a la ecuación (6). El sistema equivalente es

$$\begin{pmatrix} 2x + 3y - z = 8 \\ -x - 7y = -3 \\ 7x + 2y = 21 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (7) \\ (8) \\ (9) \end{matrix}$$

Ahora se puede eliminar el término x de la ecuación (9). Se reemplaza la ecuación (9) con una ecuación formada al multiplicar la ecuación (8) por 7 y sumar el resultado a la ecuación (9). El sistema equivalente es

$$\begin{pmatrix} 2x + 3y - z = 8 \\ -x - 7y = -3 \\ -47y = 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (10) \\ (11) \\ (12) \end{matrix}$$

De la ecuación (12), se puede determinar el valor de y

$$\begin{aligned} -47y &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Ahora se puede sustituir 0 por y en la ecuación (11) y hallar el valor de x.

$$-x - 7y = -3$$
$$-x - 7(0) = -3$$
$$-x = -3$$
$$x = 3$$

Finalmente, se puede sustituir 3 por x y 0 por y en la ecuación (10).

$$2x + 3y - z = 8$$
$$2(3) + 3(0) - z = 8$$
$$6 - z = 8$$
$$-z = 2$$
$$z = -2$$

El conjunto solución es $\{(3, 0, -2)\}$.

Ejemplo de salón de clases

Resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2x - y + 3z = 5 \\ x + 4y + 3z = 3 \\ 6x - 3y + 9z = 11 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 5

Resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} x + 3y - 2z = 3 \\ 3x - 4y - z = 4 \\ 2x + 6y - 4z = 9 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Solución

Estudiar los coeficientes indica que sería fácil eliminar los términos x de las ecuaciones (2) y (3). Se puede reemplazar la ecuación (2) con una ecuación formada al multiplicar la ecuación (1) por -3 y sumar el resultado a la ecuación (2). De manera similar, se puede reemplazar la ecuación (3) con una ecuación formada al multiplicar la ecuación (1) por -2 y sumar el resultado a la ecuación (3). El sistema equivalente es

$$\begin{pmatrix} x + 3y - 2z = 3 \\ -13y + 5z = -5 \\ 0 + 0 + 0 = 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix}$$

El enunciado falso $0 = 3$ en la ecuación (6) indica que el sistema es inconsistente y, por ende, el conjunto solución es $\varnothing$. (Si tuviera que graficar este sistema, las ecuaciones (1) y (3) producirían planos paralelos, que es la solución mostrada en la figura 11.12(c).)

Ejemplo de salón de clases

Resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} x + 2y + z = 4 \\ 2x + y + z = 5 \\ 5x - 2y + z = 8 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 6

Resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} x + y + z = 6 \\ 3x + y - z = 2 \\ 5x + y - 3z = -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Solución

Estudiar los coeficientes indica que sería fácil eliminar los términos y de las ecuaciones (2) y (3). Se puede reemplazar la ecuación (2) con una ecuación formada al multiplicar la ecuación (1) por -1 y sumar el resultado a la ecuación (2). De manera similar, se puede reemplazar la ecuación (3) con una ecuación formada al multiplicar la ecuación (1) por -1 y sumar el resultado a la ecuación (3). El sistema equivalente es

$$\begin{pmatrix} x + y + z = 6 \\ 2x - 2z = -4 \\ 4x - 4z = -8 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix}$$

Ahora se puede reemplazar la ecuación (6) con una ecuación formada al multiplicar la ecuación (5) por -2 y sumar el resultado a la ecuación (6). El sistema equivalente es

$$\begin{pmatrix} x + y + z = 6 \\ 2x - 2z = -4 \\ 0 + 0 = 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (7) \\ (8) \\ (9) \end{matrix}$$

El enunciado numérico verdadero $0 + 0 = 0$ en la ecuación (9) indica que el sistema tiene *infinitas soluciones*.

Ahora usará las técnicas presentadas para resolver problemas geométricos.

Ejemplo de salón de clases
En cierto triángulo, la medida de $\angle A$ es 5° mayor que cuatro veces la medida de $\angle B$. La diferencia en las medidas de $\angle A$ y $\angle C$ es 10° menor que la medida de $\angle B$. Hallar las medidas de los tres ángulos.

EJEMPLO 7 Aplique su habilidad

En cierto triángulo, la medida de $\angle A$ es 5° más que el doble de la medida de $\angle B$. La suma de las medidas de $\angle B$ y $\angle C$ es 10° mayor que la medida de $\angle A$. Hallar las medidas de los tres ángulos.

Solución

Se puede resolver este problema planteando un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables. Sea

$x =$ la medida de $\angle A$
$y =$ la medida de $\angle B$
$z =$ la medida de $\angle C$

Saber que la suma de las medidas de los ángulos en un triángulo es 180° le da la ecuación $x + y + z = 180$. La información "la medida de $\angle A$ es 5° mayor que el doble de la medida de $\angle B$" da la ecuación $x = 2y + 5$ o una forma equivalente $x - 2y = 5$. La información "la suma de las medidas de $\angle B$ y $\angle C$ es 10° mayor que la medida de $\angle A$" da la ecuación $y + z = x + 10$ o una forma equivalente $x - y - z = -10$. Juntar las tres ecuaciones da el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} x + y + z = 180 \\ x - 2y = 5 \\ x - y - z = -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Para resolver el sistema, primero se reemplaza la ecuación (3) con una ecuación formada al sumar la ecuación (1) y la ecuación (3). El sistema equivalente es

$$\begin{pmatrix} x + y + z = 180 \\ x - 2y = 5 \\ 2x = 170 \end{pmatrix} \begin{matrix} (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix}$$

De la ecuación (6), se puede determinar que $x = 85$.

Ahora puede sustituir 85 por x en la ecuación (5) y hallar el valor de y.

$$\begin{aligned} x - 2y &= 5 \\ 85 - 2y &= 5 \\ -2y &= -80 \\ y &= 40 \end{aligned}$$

Finalmente, puede sustituir 40 por y y 85 por x en la ecuación (4) y hallar el valor de z.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 180 \\ 85 + 40 + z &= 180 \\ 125 + z &= 180 \\ z &= 55 \end{aligned}$$

Las medidas de los ángulos son $\angle A = 85°$, $\angle B = 40°$ y $\angle C = 55°$.

Examen de conceptos 11.2

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. La gráfica de una ecuación lineal con tres variables es una recta.
2. Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables produce tres planos cuando se grafica.
3. Tres planos pueden estar relacionados al cruzarse en exactamente dos puntos.
4. Una manera en la que tres planos pueden estar relacionados es si dos de los planos son paralelos y el tercer plano los cruza en líneas paralelas.
5. Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables siempre tiene infinitas soluciones.
6. Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables siempre tiene una tripleta ordenada como solución.
7. El conjunto solución del sistema $\begin{pmatrix} 2x - y + 3z = 4 \\ y - z = 12 \\ 2z = 6 \end{pmatrix}$ es $\{(5, 15, 3)\}$.
8. El conjunto solución del sistema $\begin{pmatrix} x - y + z = 4 \\ x - y - z = 6 \\ 3y - 2z = 9 \end{pmatrix}$ es $\{(3, 1, 2)\}$.
9. El conjunto solución del sistema $\begin{pmatrix} x + y - 2z = -8 \\ 2x - y + z = 7 \\ 3x + y + z = 9 \end{pmatrix}$ es $\{(1, -1, 4)\}$.
10. El conjunto solución del sistema $\begin{pmatrix} x + 2y - z = 0 \\ 3x - y - 2z = -20 \\ 2x + y + z = 12 \end{pmatrix}$ es $\{(0, 4, 8)\}$.

Conjunto de problemas 11.2

Para los problemas 1-16, resolver cada sistema de ecuaciones. **(Objetivo 1)**

1. $\begin{pmatrix} 3x + y + 2z = 6 \\ 6y + 5z = -4 \\ -4z = 8 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2x - 3y + z = -20 \\ 2y - 5z = -8 \\ 3z = 12 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} x + 2y - z = 1 \\ y + 2z = 11 \\ 2y - z = 2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 3x + y - 2z = 0 \\ x + 3z = -5 \\ 2x - 5z = 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 4x + 3y - 2z = 9 \\ 2x + y = 7 \\ 3x - 2y = 21 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 2x - 5y + 3z = 43 \\ 3x - y = 25 \\ x + 3y = -5 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} x + 2y - 3z = -11 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 4x + 3y + z = 6 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} x - 2y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = 15 \\ 2x + 3y - 3z = 19 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 4x - 3y + z = 14 \\ 2x + y - 3z = 16 \\ 3x - 4y + 2z = 9 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 5x + 2y + z = -13 \\ 2x - 3y + 2z = -15 \\ x - y - 3z = -10 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 2x + y + 4z = 5 \\ 5x - 2y + z = -10 \\ 3x + 3y - 2z = 4 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 4x - y + 2z = 1 \\ 3x + 2y - z = 11 \\ 2x + 3y + 4z = -5 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} x + 3y - 4z = 11 \\ 3x - y + 2z = 5 \\ 2x + 5y - z = 8 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} x - 2y + 3z = 13 \\ 4x + y - 2z = -8 \\ 2x + 3y + z = -3 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 3x + y - 2z = 3 \\ 2x - 3y + 4z = -2 \\ 4x + z = 6 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} x + y + 3z = 11 \\ 2x - 2y + 4z = 0 \\ 3x + 2z = 11 \end{pmatrix}$

Para los problemas 17-26, resolver cada problema planteando y resolviendo un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables. (Objetivo 2)

17. Brooks tiene 20 monedas consistiendo en monedas de veinticinco, diez y cinco centavos cuyo valor suma \$3.40. La suma del número de monedas de diez y cinco centavos es igual al número de monedas de veinticinco centavos. ¿Cuántas monedas de cada tipo hay?

18. Una carpeta, 2 paquetes de papel y 5 cuadernos cuestan \$14.82. Tres carpetas, un paquete de papel y 4 cuadernos cuestan \$14.32. Dos carpetas, 3 paquetes de papel y 3 cuadernos cuestan \$19.82. Encontrar el precio de cada artículo.

19. En cierto triángulo, la medida de $\angle A$ es cinco veces la medida de $\angle B$. La suma de las medidas de $\angle B$ y $\angle C$ es 60° menor que la medida de $\angle A$. Hallar la medida de cada ángulo.

20. Shannon compró una falda, una blusa y un suéter por \$72. El costo de la falda y el suéter fue \$2 mayor que seis veces el costo de la blusa. La falda costó el doble de la suma de los costos de la blusa y el suéter. Hallar el precio de cada artículo.

21. Los salarios de un plomero, un aprendiz y un trabajador suman \$80 la hora. El plomero gana \$20 por hora más que la suma de los salarios del aprendiz y el trabajador. El plomero gana cinco veces más que el trabajador. Hallar el salario por hora de cada uno.

22. Martha tiene 24 billetes consistiendo de billetes de \$1, \$5 y \$20 cuyo valor suma \$150. El número de billetes de \$20 es el doble del número de billetes de \$5. ¿Cuántos billetes de cada tipo tiene?

23. Dos libras de duraznos, 1 libra de cerezas y 3 libras de peras cuestan \$5.64. Una libra de duraznos, 2 libras de cerezas y 2 libras de peras cuestan \$4.65. Dos libras de duraznos, 4 libras de cerezas y 1 libra de peras cuestan \$7.23. Hallar el precio por libra de cada artículo.

24. En cierto triángulo, la medida de $\angle C$ es 40° mayor que la suma de las medidas de $\angle A$ y $\angle B$. La medida de $\angle A$ es 20° menor que la medida de $\angle B$. Hallar la medida de cada ángulo.

25. Mike compró un casco motocicleta, una chaqueta y guantes de motocicleta por \$650. La chaqueta cuesta \$100 más que el casco. El costo del casco y los guantes juntos fue \$50 menos que el costo de la chaqueta. ¿Cuánto cuesta cada artículo?

26. Un grupo de catering que consta de un chef, un encargado de ensaladas y un mesero le cuesta al cliente \$70 por hora. El encargado de las ensaladas cuesta \$5 por hora más que el mesero. El chef cuesta lo mismo que el encargado de las ensaladas y el mesero juntos. Hallar el costo por hora de cada uno.

Pensamientos en palabras

27. Dar una descripción paso a paso de cómo resolver este sistema de ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} 2x + 3y - z = 3 \\ 4y + 3z = -2 \\ 6z = -12 \end{pmatrix}$$

28. Describir cómo resolvería este sistema de ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} 2x + 3y - z = 7 \\ x + 2y = 4 \\ 3x - 4y = 2 \end{pmatrix}$$

Más investigación

Para los problemas 29-32, resolver cada sistema de ecuaciones indicando si la solución es $\varnothing$ o si contiene infinitas soluciones.

29. $\begin{pmatrix} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 3x + y - z = 4 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 2x + 3y + z = 7 \\ x - 4y + 2z = -3 \\ 3x - y + 3z = 5 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 3x - y + 2z = -1 \\ 2x + 3y + z = 8 \\ 8x + y + 5z = 4 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} x + 2y - z = 6 \\ 3x - y + 4z = -10 \\ 5x + 3y + 2z = 2 \end{pmatrix}$

Respuestas del examen de conceptos

1. Falso **2.** Cierto **3.** Falso **4.** Cierto **5.** Falso **6.** Cierto **7.** Cierto **8.** Falso **9.** Falso **10.** Cierto

11.3 Exponentes fraccionarios

OBJETIVOS

1. Repasar los conceptos de raíz cuadrada y raíz cúbica
2. Usar la definición de exponentes racionales para simplificar expresiones numéricas
3. Usar exponentes fraccionarios para simplificar expresiones algebraicas

Al inicio del capítulo 9, se definió y discutió el concepto de raíz cuadrada. Para su conveniencia y por el bien de la continuidad, se repetirá parte del material a continuación. To **square a number** means to raise it to the second power—that is, to use the number as a factor twice.

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$
$$7^2 = 7 \cdot 7 = 49$$
$$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$$
$$(-7)^2 = (-7)(-7) = 49$$

La **raíz cuadrada de un número** es uno de sus dos factores iguales. Por ende, 3 es una raíz cuadrada de 9, porque $3 \cdot 3 = 9$. Del mismo modo, -3 también es una raíz cuadrada de 9 porque $(-3)(-3) = 9$. El concepto de raíz cuadrada se define de la siguiente manera:

Definición 11.1

a es una raíz cuadrada de b si $a^2 = b$.

Las siguientes generalizaciones son consecuencia directa de la definición 11.1:

1. Todo número real positivo tiene dos raíces cuadradas; una es positiva y la otra es negativa. Son opuestas una de otra.
2. Los números reales negativos no tienen raíces cuadradas. (Esto sigue la definición 11.1 porque cualquier número real, excepto cero, es positivo cuando se eleva al cuadrado.)
3. La raíz cuadrada de 0 es 0.

El símbolo $\sqrt{\ }$, llamado **signo radical**, se usa para designar la raíz cuadrada no negativa. Considere los siguientes ejemplos.

$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{49}$ indica la raíz cuadrada principal o no negativa de 49
$-\sqrt{49} = -7$	$-\sqrt{49}$ ndica la raíz cuadrada negativa de 49
$\sqrt{0} = 0$	Cero sólo tiene una raíz cuadrada
$\sqrt{-4}$	$\sqrt{-4}$ no es un número real
$-\sqrt{-4}$	$-\sqrt{-4}$ no es un número real

Elevar al cubo un número significa elevarlo a la tercera potencia; esto es, usar el número como factor tres veces.

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

$$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$$

Una **raíz cúbica de un número** es uno de sus tres factores iguales. Por ende, -2 es una raíz cúbica de -8 porque $(-2)(-2)(-2) = -8$. En general, el concepto de raíz cúbica puede definirse de la siguiente manera:

Definición 11.2

a es una raíz cúbica de b si $a^3 = b$.

Las siguientes generalizaciones son consecuencia directa de 11.2:

1. Todo número real positivo tiene un número real positivo como raíz cúbica.
2. Todo número real negativo tiene un número real negativo como raíz cúbica.
3. La raíz cúbica de 0 es 0.

(Técnicamente, todo número real distinto de cero tiene tres raíces cúbicas, pero sólo una de ellas es un número real. Las otras dos raíces se clasifican como números imaginarios.)

El símbolo $\sqrt[3]{\ }$ designa la raíz cúbica de un número. Por ende, puede escribir

$$\sqrt[3]{8} = 2 \qquad \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3} \qquad \sqrt[3]{-8} = -2 \qquad \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$$

Se puede extender el concepto de raíz a raíces cuartas, quintas sextas y, en general, n-ésimas. Se pueden hacer las siguientes generalizaciones: Si n es un entero positivo par, entonces los siguientes enunciados son verdaderos.

1. Todo número real positivo tiene exactamente dos raíces n-ésimas reales: una positiva y una negativa. Por ejemplo, las raíces cuartas reales de 16 son 2 y -2. Se usa el sómbolo $\sqrt[n]{\ }$ para designar una raíz positiva. Por ende, se escribe $\sqrt[4]{16} = 2$.
2. Los números reales negativos no tienen raíces n-ésimas reales. Por ejemplo, no hay raíces cuartas reales de -16.

Si n es un entero positivo impar mayor que 1, entonces los siguientes enunciados son verdaderos.

1. Todo número real tiene exactamente una raíz n-ésima real y se designa esta raíz con el símbolo $\sqrt[n]{\ }$.
2. La raíz n-ésima real de un número positivo es positiva. Por ejemplo, la quinta raíz de 32 es 2 y se escribe $\sqrt[5]{32} = 2$.
3. La raíz n-ésima real de un número negativo es negativa. Por ejemplo, la quinta raíz de -32 es -2 y se escribe $\sqrt[5]{-32} = 2$.

Para completar la terminología, la n en el radical $\sqrt[n]{b}$ se llama índice del radical. Si $n = 2$, comúnmente se escribe $\sqrt{b}$ en lugar de $\sqrt[2]{b}$.

Combinación de exponentes y raíces

En la sección 5.6 se usaron las propiedades básicas de los exponentes enteros positivos para motivar una definición para el uso del cero y de enteros negativos como exponentes. Ahora las propiedades de los exponentes enteros se usan para formar definiciones para el uso de números racionales como exponentes. A este material suele llamársele "exponentes fraccionarios".

Considere las siguientes comparaciones.

A partir del significado de raíz sabe que	Si $(b^n)^m = b^{mn}$ debe ser válida cuando n es igual a un número racional de la forma $\frac{1}{p}$, donde p es un entero positivo mayor que 1, entonces
$\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$	$\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 5^{2\left(\frac{1}{2}\right)} = 5^1 = 5$
$\left(\sqrt[3]{8}\right)^3 = 8$	$\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 8^{3\left(\frac{1}{3}\right)} = 8^1 = 8$
$\left(\sqrt[4]{21}\right)^4 = 21$	$\left(21^{\frac{1}{4}}\right)^4 = 21^{4\left(\frac{1}{4}\right)} = 21^1 = 21$

Parecería razonable la siguiente definición.

Definición 11.3

Si b es un número real, n es un entero positivo mayor que 1 y $\sqrt[n]{b}$ existe, entonces $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$

La definición 11.3 afirma que $b^{\frac{1}{n}}$ significa la raíz n-ésima de b. Los siguientes ejemplos ilustran esta definición.

$$25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5 \qquad 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$$

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2 \qquad \left(\frac{36}{49}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{6}{7}$$

$$(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -3 \qquad (-32)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-32} = -2$$

Ahora, la siguiente definición proporciona la base para el uso de todos los números racionales como exponentes.

Definición 11.4

Si $\frac{m}{n}$ es un número racional, donde n es un entero positivo mayor que 1, y b es un número real tal que existe $\sqrt[n]{b}$ entonces

$$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m} = \left(\sqrt[n]{b}\right)^m \qquad \frac{m}{n} \text{ está en forma reducida}$$

El uso de la forma $\sqrt[n]{b^m}$ o de la forma $\left(\sqrt[n]{b}\right)^m$ para propósitos de cálculo depende un poco de la magnitud del problema. Use ambas formas en dos problemas para ilustrar este punto.

$$\begin{aligned} 8^{\frac{2}{3}} &= \sqrt[3]{8^2} \\ &= \sqrt[3]{64} \\ &= 4 \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} 8^{\frac{2}{3}} &= \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 \\ &= 2^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 27^{\frac{2}{3}} &= \sqrt[3]{27^2} \\ &= \sqrt[3]{729} \\ &= 9 \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} 27^{\frac{2}{3}} &= \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 \\ &= 3^2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Para calcular $8^{\frac{2}{3}}$, cualquier forma parece funcionar tan bien como la otra. Sin embargo, para calcular $27^{\frac{2}{3}}$ debe ser obvio que $(\sqrt[3]{27})$ es mucho más fácil de manejar $\sqrt[3]{27^2}$.

Recuerde que en la sección 5.6 se usó la definición $b^{-n} = \dfrac{1}{b^n}$ como base para el trabajo con exponentes negativos. Esa definición, extendida a todos los números racionales, y la definición 11.4, se usan en los siguientes ejemplos.

$$25^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{25}\right)^3 = 5^3 = 125$$

$$16^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$36^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{36^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{36}} = \frac{1}{6}$$

$$(-8)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{(-8)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-8}} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$-8^{\frac{2}{3}} = -\left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = -(2)^2 = -4$$

Las propiedades básicas de los exponentes discutidas en el capítulo 5 son ciertas para todos los números racionales. Proporcionan la base para simplificar expresiones algebraicas que contienen exponentes racionales, como ilustran los siguientes ejemplos. El objetivo es simplificar y expresar el resultado final usando sólo exponentes positivos.

1. $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = x^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}} = x^{\frac{5}{6}}$

2. $\left(2a^{\frac{3}{4}}\right)\left(3a^{\frac{1}{3}}\right) = 2 \cdot 3 \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = 6a^{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}} = 6a^{\frac{9}{12}+\frac{4}{12}} = 6a^{\frac{13}{12}}$

3.
$$\begin{aligned}\left(3n^{\frac{1}{2}}\right)\left(5n^{-\frac{1}{6}}\right) &= 3 \cdot 5 \cdot n^{\frac{1}{2}} \cdot n^{-\frac{1}{6}}\\ &= 15n^{\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{6}\right)}\\ &= 15n^{\frac{3}{6}-\frac{1}{6}}\\ &= 15n^{\frac{2}{6}} = 15n^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

4. $\left(2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}\right)^2 = (2)^2\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 4xy^{\frac{2}{3}}$ $\quad (b^n)^m = b^{mn}$

5. $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = x^{\frac{2}{6}-\frac{3}{6}} = x^{-\frac{1}{6}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{6}}}$ $\quad \dfrac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$

6. $\dfrac{12x^{\frac{3}{4}}}{2x^{-\frac{1}{4}}} = \dfrac{12}{2}x^{\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)} = 6x^{\frac{4}{4}} = 6x$

7. $\left(\dfrac{2x^{\frac{1}{2}}}{3y^{\frac{2}{3}}}\right)^2 = \dfrac{(2)^2\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2}{(3)^2\left(y^{\frac{2}{3}}\right)^2} = \dfrac{4x}{9y^{\frac{4}{3}}}$

8. $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}} = 3^{\frac{5}{6}}$

9. $\dfrac{2^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}} = 2^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}}$

Examen de conceptos 11.3

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. Asumiendo que la n-ésima raíz de x existe, $\sqrt[n]{x}$ puede escribirse como $x^{\frac{1}{n}}$.

2. Un exponente de $\dfrac{1}{3}$ significa que es necesario encontrar la raíz cúbica del número.

3. Para evaluar $16^{\frac{2}{3}}$ se debe hallar la raíz cuadrada de 16 y después elevar al cubo el resultado.

4. Cuando una expresión con un exponente racional se escribe como una expresión radical, el denominador del exponente racional es el índice del radical.

5. La expresión $\sqrt[n]{x^m}$ es equivalente a $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m$.

6. $-16^{-3} = \dfrac{1}{64}$

7. $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[6]{7}$

8. $(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{4}$

9. $\left(3x^{\frac{1}{6}}\right)\left(2x^{\frac{1}{3}}\right) = 6x^{\frac{1}{2}}$

10. $\left(4x^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = 4x$

Conjunto de problemas 11.3

Para los problemas 1-50, evaluar cada una de las expresiones numéricas. (Objetivos 1 y 2)

1. $\sqrt{81}$
2. $\sqrt{\dfrac{49}{4}}$
3. $-\sqrt{100}$
4. $-\sqrt{121}$
5. $\sqrt[3]{125}$
6. $\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}}$
7. $\sqrt[3]{-64}$
8. $\sqrt[3]{-\dfrac{8}{27}}$
9. $\dfrac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt{49}}$
10. $\dfrac{\sqrt{144}}{\sqrt[3]{8}}$
11. $\sqrt[4]{81}$
12. $\sqrt[4]{-\dfrac{16}{81}}$
13. $\sqrt[5]{-243}$
14. $\sqrt{1}$
15. $64^{\frac{1}{2}}$
16. $64^{\frac{1}{3}}$
17. $64^{\frac{2}{3}}$
18. $(-27)^{\frac{1}{3}}$
19. $(-64)^{\frac{2}{3}}$
20. $16^{\frac{3}{2}}$
21. $4^{\frac{5}{2}}$
22. $16^{\frac{1}{4}}$
23. $32^{-\frac{1}{5}}$
24. $-16^{\frac{1}{2}}$
25. $-27^{\frac{1}{3}}$
26. $8^{-\frac{2}{3}}$
27. $16^{-\frac{3}{4}}$
28. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$
29. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$
30. $\left(-\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$
31. $\left(\dfrac{16}{64}\right)^{-\frac{1}{2}}$
32. $81^{\frac{3}{4}}$
33. $125^{\frac{4}{3}}$
34. $-16^{\frac{5}{2}}$
35. $-16^{\frac{5}{4}}$
36. $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$
37. $\left(\dfrac{1}{32}\right)^{\frac{3}{5}}$
38. $\left(-8\right)^{\frac{4}{3}}$
39. $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$
40. $2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{5}{4}}$
41. $3^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{5}{3}}$
42. $2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}}$
43. $\dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}$
44. $\dfrac{3^{\frac{2}{3}}}{3^{-\frac{1}{3}}}$
45. $\dfrac{3^{-\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}$
46. $\dfrac{2^{\frac{3}{4}}}{2^{-\frac{1}{4}}}$
47. $\dfrac{2^{\frac{9}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}}$
48. $\dfrac{3^{-\frac{1}{3}}}{3^{-\frac{1}{3}}}$
49. $\dfrac{7^{\frac{4}{3}}}{7^{-\frac{2}{3}}}$
50. $\dfrac{5^{\frac{3}{5}}}{5^{-\frac{7}{5}}}$

Para los problemas 51-80, simplificar y expresar los resultados finales usando sólo exponentes positivos. (Objetivo 3) Por ejemplo:

$$\left(2x^{\frac{1}{3}}\right)\left(3x^{\frac{1}{2}}\right) = 6x^{\frac{5}{6}}$$

51. $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}}$
52. $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{4}}$
53. $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}}$
54. $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{4}}$
55. $\left(3x^{\frac{1}{4}}\right)\left(5x^{\frac{1}{3}}\right)$
56. $\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)\left(5x^{\frac{1}{3}}\right)$
57. $\left(4x^{\frac{2}{3}}\right)\left(6x^{\frac{1}{4}}\right)$
58. $\left(3x^{\frac{2}{5}}\right)\left(6x^{\frac{1}{4}}\right)$
59. $\left(2y^{\frac{2}{3}}\right)\left(y^{-\frac{1}{4}}\right)$
60. $\left(y^{-\frac{1}{3}}\right)\left(4y^{\frac{2}{5}}\right)$
61. $\left(5n^{\frac{3}{4}}\right)\left(2n^{-\frac{1}{2}}\right)$
62. $\left(7n^{-\frac{1}{3}}\right)\left(8n^{\frac{5}{6}}\right)$
63. $\left(2x^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$
64. $\left(x^{\frac{2}{5}}\right)\left(3x^{-\frac{1}{2}}\right)$
65. $\left(5x^{\frac{1}{2}}y\right)^2$
66. $\left(2x^{\frac{1}{3}}y^2\right)^3$
67. $\left(4x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}\right)^3$
68. $\left(9x^2y^4\right)^{\frac{1}{2}}$
69. $\left(8x^6y^3\right)^{\frac{1}{3}}$
70. $\dfrac{18x^{\frac{1}{2}}}{9x^{\frac{1}{3}}}$
71. $\dfrac{24x^{\frac{3}{5}}}{6x^{\frac{1}{3}}}$
72. $\dfrac{56a^{\frac{1}{6}}}{7a^{\frac{1}{4}}}$
73. $\dfrac{48b^{\frac{1}{3}}}{12b^{\frac{3}{4}}}$
74. $\dfrac{16n^{\frac{1}{3}}}{8n^{-\frac{2}{3}}}$
75. $\dfrac{27n^{-\frac{1}{3}}}{9n^{-\frac{1}{3}}}$
76. $\dfrac{5x^{\frac{2}{5}}}{3x^{-\frac{1}{3}}}$
77. $\left(\dfrac{3x^{\frac{1}{3}}}{2x^{\frac{1}{2}}}\right)^2$
78. $\left(\dfrac{2a^{\frac{1}{2}}}{3a^{\frac{1}{4}}}\right)^3$
79. $\left(\dfrac{5x^{\frac{1}{2}}}{6y^{\frac{1}{3}}}\right)^3$
80. $\left(\dfrac{4y^{\frac{2}{5}}}{3x^{\frac{1}{3}}}\right)^2$

Pensamientos en palabras

81. ¿Por qué $\sqrt[4]{-16}$ no es un número real?

82. Explicar cómo podría evaluar $-4^{\frac{7}{2}}$.

Más investigación

83. Usar una calculadora para evaluar cada expresión.

(a) $\sqrt[3]{21{,}952}$ **(b)** $\sqrt[3]{42{,}875}$

(c) $\sqrt[4]{83{,}521}$ **(d)** $\sqrt[4]{3{,}111{,}696}$

84. Usar una calculadora para evaluar cada número.

(a) $16^{\frac{5}{2}}$ **(b)** $36^{\frac{3}{2}}$

(c) $16^{\frac{7}{4}}$ **(d)** $27^{\frac{5}{3}}$

(e) $343^{\frac{4}{3}}$ **(f)** $81^{\frac{3}{4}}$

85. Usar una calculadora para estimar cada expresión a la centena más cercana.

(a) $5^{\frac{3}{2}}$ **(b)** $8^{\frac{4}{5}}$

(c) $17^{\frac{2}{5}}$ **(d)** $19^{\frac{5}{2}}$

(e) $12^{\frac{3}{4}}$ **(f)** $14^{\frac{2}{3}}$

Respuestas del examen de conceptos

1. Cierto **2.** Cierto **3.** Falso **4.** Cierto **5.** Cierto **6.** Falso **7.** Cierto **8.** Falso **9.** Cierto **10.** Falso

11.4 Números complejos

OBJETIVOS

1. Definir qué son los números complejos
2. Adición y substracción números complejos
3. Multiplicar números complejos

En el capítulo 10 se presentaron algunas ecuaciones cuadráticas que no tenían solución en números reales. Por ejemplo, la ecuación $x^2 = -4$ no tiene una solución en números reales porque $2^2 = 4$ y $(-2)^2 = 4$. En esta sección se considerará un conjunto de números que contiene algunos números con cuadrados que son números reales negativos. Después, en la siguiente sección, se mostrará que este conjunto de números, lamado **números complejos**, proporciona soluciones no sólo para ecuaciones como $x^2 = -4$, sino también para cualquier ecuación cuadrática con números reales como coeficientes en una variable.

El trabajo con números complejos está basado en la siguiente definición:

Definición 11.5

Un número i es tal que

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{y} \quad i^2 = -1$$

El número i no es un número real y con frecuencia se llama **unidad imaginaria**, pero el número i^2 es el número real -1.

En el capítulo 9 se usó la propiedad $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ para multiplicar radicales y para expresarlos en su forma radical más simple. Esta propiedad también aplica si *sólo uno*, a o b, es negativo. Por ende, se pueden simplificar radicales de raíces cuadradas que contengan números negativos como radicandos, como aquí se muestra:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1}\sqrt{4} = i(2)$$ Usualmente se escribe como $2i$

$$\sqrt{-13} = \sqrt{-1}\sqrt{13} = i\sqrt{13}$$

$$\sqrt{-12} = \sqrt{-1}\sqrt{12} = i\sqrt{12} = i\sqrt{4}\sqrt{3} = 2i\sqrt{3}$$

$$\sqrt{-18} = \sqrt{-1}\sqrt{18} = i\sqrt{18} = i\sqrt{9}\sqrt{2} = 3i\sqrt{2}$$

La unidad imaginaria i se usa para definir un número complejo de la siguiente manera:

Definición 11.6

Un **número complejo** es cualquier número que se expresa en la forma

$$a + bi$$

donde a y b son números reales.

La forma $a + bi$ se llama **forma estándar** de un número complejo. El número real a se llama parte real del número complejo y b se llama **parte imaginaria**. (Note que b es un número real aun cuando se le llame parte imaginaria.) Los siguientes ejemplos demuestran esta terminología.

1. El número $3 + 4i$ es una número complejo en forma estándar que tiene una parte real de 3 y una parte imaginaria de 4.
2. El número $-5 - 2i$ es un número complejo en forma estándar $-5 + (-2i)$ que tiene una parte real de -5 y una parte imaginaria de -2. (Se suele usar la forma $-5 - 2i$, sabiendo que significa $-5 + (-2i)$.)
3. El número $-7i$ se puede escribir en la forma estándar $0 + (-7i)$; por tanto, es un número complejo que tiene una parte real de 0 y una parte imaginaria de -7.
4. Se puede escribir el número 9 en la forma estándar $9 + 0i$; por ende, es un número complejo que tiene una parte real de 9 y una parte imaginaria de 0.

El punto 4 de la lista muestra que todos los números reales pueden ser considerados números complejos.

Las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva se mantienen para todos los números complejos y permiten manipularlos. Los siguientes dos enunciados describen la adición y substracción de números complejos.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$ Suma

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$ Resta

Para sumar números complejos, se suman sus partes reales y se suman sus partes imaginarias. Para restar números complejos, se restan sus partes reales y se restan sus partes imaginarias. Considere estos ejemplos:

1. $(3 + 5i) + (4 + 7i) = (3 + 4) + (5 + 7)i = 7 + 12i$
2. $(-5 + 2i) + (7 - 8i) = (-5 + 7) + [2 + (-8)]i$
   $= 2 + (-6i)$ Usualmente escrito como $2 - 6i$
3. $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}i\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}i\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{5}\right)i$
   $= \left(\frac{3}{6} + \frac{4}{6}\right) + \left(\frac{15}{20} + \frac{4}{20}\right)i$
   $= \frac{7}{6} + \frac{19}{20}i$
4. $(8 + 9i) - (5 + 4i) = (8 - 5) + (9 - 4)i = 3 + 5i$
5. $(2 - 3i) - (5 + 9i) = (2 - 5) + (-3 - 9)i = -3 + (-12i)$
   $= -3 - 12i$
6. $(-1 + 6i) - (-2 - i) = [-1 - (-2)] + [6 - (-1)]i = 1 + 7i$

Multiplicar números complejos

Puesto que los números complejos tienen una *forma binomial*, el producto de dos números complejos se encuentra de la misma manera que se halla el producto de dos binomios. Aquí hay algunos ejemplos.

Ejemplo de salón de clases
Multiplicar $(2 + 5i)(3 + 4i)$.

EJEMPLO 1 Multiplicar $(3 + 2i)(4 + 5i)$.

Solución

Cuando se multiplica cada término del primer número por cada término del segundo número y se simplifica, se obtiene:

$$\begin{aligned}(3 + 2i)(4 + 5i) &= 3(4) + 3(5i) + 2i(4) + 2i(5i)\\ &= 12 + 15i + 8i + 10i^2\\ &= 12 + (15 + 8)i + 10(-1) \qquad i^2 = -1\\ &= 2 + 23i\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Multiplicar $(3 - 7i)(-4 + 5i)$.

EJEMPLO 2 Multiplicar $(6 - 3i)(-5 + 2i)$.

Solución

$$\begin{aligned}(6 - 3i)(-5 + 2i) &= 6(-5) + 6(2i) - (3i)(-5) - (3i)(2i)\\ &= -30 + 12i + 15i - 6i^2\\ &= -30 + 27i - 6(-1) = -24 + 27i\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Multiplicar $(3 - i)^2$.

EJEMPLO 3 Hallar el producto indicado $(5 - i)^2$.

Solución

Recuerde que $(a - b)^2$ significa $(a - b)(a - b)$.

$$\begin{aligned}(5 - i)^2 = (5 - i)(5 - i) &= 5(5) - 5(i) - i(5) - (i)(-i)\\ &= 25 - 5i - 5i + i^2\\ &= 25 - 10i + (-1) = 24 - 10i\end{aligned}$$

Para hallar productos como $(4i)(3i)$ o $2i(4 + 6i)$, se podría cambiar cada número a *forma binomial* estándar y después proceder como en los ejemplos anteriores, pero es más fácil manejarlo de la siguiente manera:

$$(4i)(3i) = 4 \cdot 3 \cdot i \cdot i = 12i^2 = 12(-1) = -12 \qquad \text{o} \qquad -12 + 0i$$

$$\begin{aligned}2i(4 + 6i) &= 2i(4) + 2i(6i)\\ &= 8i + 12i^2\\ &= 8i + 12(-1) = -12 + 8i\end{aligned}$$

Examen de conceptos 11.4

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. El número i es un número real y se llama unidad imaginaria.
2. El número $4 + 2i$ es un número complejo que tiene una parte real de 4.
3. El número $-3 - 5i$ es un número complejo que tiene una parte imaginaria de 5.
4. Los números complejos que tienen una parte real de 0 son llamados números imaginarios puros.
5. El conjunto de números reales es un subconjunto del conjunto de números complejos.

6. Cualquier número real x puede escribirse como el número complejo $x + 0i$.
7. Por definición, i^2 es igual a -1.
8. El producto de $(5 + i)$ y $(5 - i)$ es 24.
9. El producto de dos números complejos nunca es un número real.
10. El producto de $(-2 - i)$ y $(-3 + 2i)$ es $8 - i$.

Conjunto de problemas 11.4

Para los problemas 1-12, escribir cada radical en términos de i y simplificar; por ejemplo $\sqrt{-20} = i\sqrt{20} = i\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2i\sqrt{5}$. (Objetivo 1)

1. $\sqrt{-64}$
2. $\sqrt{-81}$
3. $\sqrt{-\dfrac{25}{9}}$
4. $\sqrt{-\dfrac{49}{16}}$
5. $\sqrt{-11}$
6. $\sqrt{-17}$
7. $\sqrt{-50}$
8. $\sqrt{-32}$
9. $\sqrt{-48}$
10. $\sqrt{-45}$
11. $\sqrt{-54}$
12. $\sqrt{-28}$

Para los problemas 13-34, sumar o restar los números complejos según se indique. (Objetivo 2)

13. $(3 + 8i) + (5 + 9i)$
14. $(7 + 10i) + (2 + 3i)$
15. $(7 - 6i) + (3 - 4i)$
16. $(8 - 2i) + (-7 + 3i)$
17. $(10 + 4i) - (6 + 2i)$
18. $(12 + 7i) - (5 + i)$
19. $(5 + 2i) - (7 + 8i)$
20. $(3 + i) - (7 + 4i)$
21. $(-2 - i) - (3 - 4i)$
22. $(-7 - 3i) - (8 - 9i)$
23. $(-4 - 7i) + (-8 - 9i)$
24. $(-1 - 2i) + (-6 - 6i)$
25. $(0 - 6i) + (-10 + 2i)$
26. $(4 - i) + (4 + i)$
27. $(-9 + 7i) - (-8 - 5i)$
28. $(-12 + 6i) - (-7 + 2i)$
29. $(-10 - 4i) - (10 + 4i)$
30. $(-8 - 2i) - (8 + 2i)$
31. $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3}i\right) + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}i\right)$
32. $\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2}i\right) + \left(\dfrac{1}{2} + i\right)$
33. $\left(\dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{4}i\right) - \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{6}i\right)$
34. $\left(\dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{4}i\right) - \left(-\dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{5}i\right)$

Para los problemas 35-54, hallar cada producto y expresarlo en la forma estándar de un número complejo $(a + bi)$. (Objetivo 3)

35. $(7i)(8i)$
36. $(-6i)(7i)$
37. $2i(6 + 3i)$
38. $3i(-4 + 9i)$
39. $-4i(-5 - 6i)$
40. $-5i(7 - 8i)$
41. $(2 + 3i)(5 + 4i)$
42. $(4 + 2i)(6 + 5i)$
43. $(7 - 3i)(8 + i)$
44. $(9 - 3i)(2 - 5i)$
45. $(-2 - 3i)(6 - 3i)$
46. $(-3 - 8i)(1 - i)$
47. $(-1 - 4i)(-2 - 7i)$
48. $(-3 - 7i)(-6 - 10i)$
49. $(4 + 5i)^2$
50. $(7 - 2i)^2$
51. $(5 - 6i)(5 + 6i)$
52. $(7 - 3i)(7 + 3i)$
53. $(-2 + i)(-2 - i)$
54. $(-5 - 8i)(-5 + 8i)$

Pensamientos en palabras

55. ¿Por que el conjunto de números reales es un subconjunto del conjunto de números complejos?
56. ¿Es posible que el producto de dos números complejos no reales sea un número real? Defienda su respuesta.

Respuestas del examen de conceptos

1. Falso **2.** Cierto **3.** Falso **4.** Cierto **5.** Cierto **6.** Cierto **7.** Cierto **8.** Falso **9.** Falso **10.** Cierto

11.5 Ecuaciones cuadráticas

OBJETIVOS

1. Repasar las técnicas para resolver ecuaciones cuadráticas usando la propiedad de raíz cuadrada, completar el cuadrado y la fórmula cuadrática
2. Resolver ecuaciones cuadráticas que tienen soluciones en números complejos

Como se planteó en la sección anterior, el conjunto de números complejos proporciona soluciones para todas las ecuciones cuadráticas que tienen coeficientes en números reales. En otras palabras, toda ecuación cuadrática en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq b$, tiene una solución (o soluciones) del conjunto de números complejos.

Para hallar las soluciones de ecuaciones cuadráticas, se continúa el uso de las técnicas de factorización, completar el cuadrado, la fórmula cuadrática y la propiedad si $x^2 = a$, entonces $x = \pm\, !\, \overline{a}$. Considere algunos ejemplos:

Ejemplo de salón de clases
Resolver $x^2 = -64$.

EJEMPLO 1

Resolver $x^2 = -4$.

Solución

Usar la propiedad si $x^2 = a$, entonces $x = \pm\, !\, \overline{a}$ y proceder de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x^2 &= -4 \\ x &= \pm\sqrt{-4} \\ x &= \pm 2i \qquad \sqrt{-4} = \sqrt{-1}\sqrt{4} = 2i \end{aligned}$$

✔ Verificación

$$\begin{aligned} x^2 &= -4 & \qquad x^2 &= -4 \\ (2i)^2 &\stackrel{?}{=} -4 & (-2i)^2 &\stackrel{?}{=} -4 \\ 4i^2 &\stackrel{?}{=} -4 & 4i^2 &\stackrel{?}{=} -4 \\ 4(-1) &\stackrel{?}{=} -4 & 4(-1) &\stackrel{?}{=} -4 \\ -4 &= -4 & -4 &= -4 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{-2i, 2i\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $(n + 3)^2 = -5$.

EJEMPLO 2

Resolver $(x - 2)^2 = -7$.

Solución

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 &= -7 \\ x - 2 &= \pm\sqrt{-7} \\ x - 2 &= \pm i\sqrt{7} \qquad \sqrt{-7} = \sqrt{-1}\sqrt{7} = i\sqrt{7} \\ x &= 2 \pm i\sqrt{7} \end{aligned}$$

✔ Verificación

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 &= -7 & \qquad (x - 2)^2 &= -7 \\ \left(2 + i\sqrt{7} - 2\right)^2 &\stackrel{?}{=} -7 & \left(2 - i\sqrt{7} - 2\right)^2 &\stackrel{?}{=} -7 \\ \left(i\sqrt{7}\right)^2 &\stackrel{?}{=} -7 & \left(-i\sqrt{7}\right)^2 &\stackrel{?}{=} -7 \\ 7i^2 &\stackrel{?}{=} -7 & 7i^2 &\stackrel{?}{=} -7 \\ 7(-1) &\stackrel{?}{=} -7 & 7(-1) &\stackrel{?}{=} -7 \\ -7 &= -7 & -7 &= -7 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{2 - i\sqrt{7}, 2 + i\sqrt{7}\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $a^2 + 6a = -15$.

EJEMPLO 3

Resolver $x^2 + 2x = -10$.

Solución

La forma de la ecuación se presta para *completar el cuadrado*, así que se procede de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= -10 \\ x^2 + 2x + 1 &= -10 + 1 \\ (x+1)^2 &= -9 \\ x + 1 &= \pm 3i \\ x &= -1 \pm 3i \end{aligned}$$

✔ Verificación

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= -10 \\ (-1+3i)^2 + 2(-1+3i) &\stackrel{?}{=} -10 \\ 1 - 6i + 9i^2 - 2 + 6i &\stackrel{?}{=} -10 \\ -1 + 9i^2 &\stackrel{?}{=} -10 \\ -1 + 9(-1) &\stackrel{?}{=} -10 \\ -10 &= -10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x^2 + 2x &= -10 \\ (-1-3i)^2 + 2(-1-3i) &\stackrel{?}{=} -10 \\ 1 + 6i + 9i^2 - 2 - 6i &\stackrel{?}{=} -10 \\ -1 + 9i^2 &\stackrel{?}{=} -10 \\ -1 + 9(-1) &\stackrel{?}{=} -10 \\ -10 &= -10 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{-1 - 3i, -1 + 3i\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $x^2 - x + 1 = 0$.

EJEMPLO 4

Resolver $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Solución

Se usa la *fórmula cuadrática* para obtener las soluciones.

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(2)}}{2} \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 2i}{2}$$

$$x = \frac{2(1 \pm i)}{2}$$

$$x = 1 \pm i$$

✔ Verificación

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 2 &= 0 \\ (1+i)^2 - 2(1+i) + 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 1 + 2i + i^2 - 2 - 2i + 2 &= 0 \\ 1 + i^2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 1 - 1 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x^2 - 2x + 2 &= 0 \\ (1-i)^2 - 2(1-i) + 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 1 - 2i + i^2 - 2 + 2i + 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 1 + i^2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 1 - 1 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{1 - i, 1 + i\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $x^2 - 6x - 7 = 0$.

EJEMPLO 5 Resolver $x^2 + 3x - 10 = 0$.

Solución

Se puede factorizar $x^2 + 3x - 10 = 0$ y proceder de la siguiente manera:

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$
$$(x + 5)(x - 2) = 0$$
$$x + 5 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$
$$x = -5 \quad \text{o} \quad x = 2$$

El conjunto solución es $\{-5, 2\}$. (No olvide que todos los números reales son números complejos; es decir, -5 y 2 pueden escribirse como $-5 + 0i$ y $2 + 0i$.)

Para resumir el trabajo con ecuaciones cuadráticas en el capítulo 10 y en esta sección, se sugiere el siguiente enfoque para resolver una ecuación cuadrática.

1. Si la ecuación está en una forma en la que *si* $x^2 = a$, *entonces* $x = \pm\sqrt{a}$ aplique, úsela. (Ver ejemplos 1 y 2)
2. Si la expresión cuadrática puede factorizarse usando números reales, factorícela y aplique la propiedad *si* $ab = 0$, *entonces* $a = 0$ o $b = 0$. (Ver ejemplo 5)
3. Si los números 1 y 2 no aplican, use la fórmula cuadrática o el proceso de completar el cuadrado. (Ver ejemplos 3 y 4)

Examen de conceptos 11.5

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. El conjunto solución de $x^2 = -8$ es $\{-2i\sqrt{2}, 2i\sqrt{2}\}$.
2. El conjunto solución de $(x - 3)^2 = -18$ consiste en dos números reales.
3. La ecuación $x^2 + 16x - 14 = 0$ podría resolverse completando el cuadrado.
4. La ecuación $3x^2 + 2x + 1 = 0$ tiene dos soluciones complejas no reales.
5. La ecuación $5x^2 - x + 4 = 0$ tiene dos soluciones en números reales.
6. La ecuación $12x^2 - 7x - 12 = 0$ puede resolverse factorizando.
7. La fórmula cuadrática siempre da soluciones complejas no reales.
8. La ecuación $4x^2 + 7x = 14$ está en la forma propia para aplicar la fórmula cuadrática.
9. Completar el cuadrado siempre da soluciones en números reales.
10. La ecuación $(3x - 4)^2 + 6 = 4$ tiene dos soluciones complejas no reales.

Conjunto de problemas 11.5

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas y comprobar sus soluciones. **(Objetivo 2)**

1. $x^2 = -64$
2. $x^2 = -49$
3. $(x - 2)^2 = -1$
4. $(x + 3)^2 = -16$
5. $(x + 5)^2 = -13$
6. $(x - 7)^2 = -21$
7. $(x - 3)^2 = -18$
8. $(x + 4)^2 = -28$
9. $(5x - 1)^2 = 9$
10. $(7x + 3)^2 = 1$
11. $a^2 - 3a - 4 = 0$
12. $a^2 + 2a - 35 = 0$
13. $t^2 + 6t = -12$
14. $t^2 - 4t = -9$
15. $n^2 - 6n + 13 = 0$
16. $n^2 - 4n + 5 = 0$
17. $x^2 - 4x + 20 = 0$
18. $x^2 + 2x + 5 = 0$
19. $3x^2 - 2x + 1 = 0$
20. $2x^2 + x + 1 = 0$

21. $2x^2 - 3x - 5 = 0$

22. $3x^2 - 5x - 2 = 0$

23. $y^2 - 2y = -19$

24. $y^2 + 8y = -24$

25. $x^2 - 4x + 7 = 0$

26. $x^2 - 2x + 3 = 0$

27. $4x^2 - x + 2 = 0$

28. $5x^2 + 2x + 1 = 0$

29. $6x^2 + 2x + 1 = 0$

30. $7x^2 + 3x + 3 = 0$

Pensamientos en palabras

31. ¿Qué método usaría para resolver la ecuación $x^2 + 4x = -5$? Explique sus razones para tomar esa decisión.

32. Explique por qué la expresión $b^2 - 4ac$ de la fórmula cuadrática determinará si las soluciones de una ecuación cuadrática en particular son imaginarias o no.

Respuestas del examen de conceptos

1. Cierto **2.** Falso **3.** Cierto **4.** Cierto **5.** Falso **6.** Cierto **7.** Falso **8.** Falso **9.** Falso **10.** Cierto

11.6 Gráficas de pastel, de barras y de líneas

OBJETIVOS

1. Construir gráficas de pastel, de barras y de líneas
2. Interpretar gráficas de pastel, de barras y de líneas
3. Aprender las fortalezas y debilidades de las gráficas de pastel, de barras y de líneas

El dicho "una imagen vale más que mil palabras" también aplica en matemáticas. En matemáticas, una gráfica suele usarse para presentar información. En esta sección, verá varios tipos de gráficas y cómo se usan.

Gráfica de pastel

Una gráfica de pastel o gráfica circular se usa para ilustrar las partes de un entero. El pastel o círculo representa el entero y los sectores del pastel o círculo representan las partes del entero. Las partes suelen expresarse en porcentajes. Por ejemplo, un grupo de estudiantes está planeando un viaje para esquiar y sabe que los gastos, por persona, son los siguientes:

Gastos del viaje, por persona

Categoría	Gasto	Porcentaje
Comida	\$155	15.5%
Transporte	360	36%
Renta de equipo	200	20%
Boletos del teleférico	85	8.5%
Alojamiento	200	20%
Total	\$1000	

La gráfica de pastel en la figura 11.13 es útil para mostrarle al club de esquí cómo se van a distribuir los gastos del viaje.

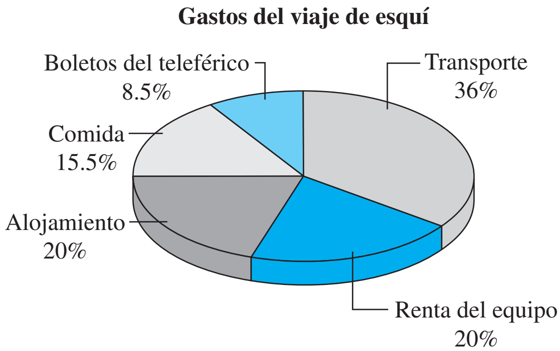


Figura 11.13

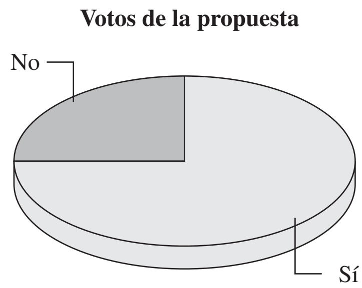


Figura 11.14

Un vistazo a la gráfica de pastel puede resumir la historia y eliminar la necesidad de comparar números. Considere la gráfica en la figura 11.14. Sin que se presenten valores numéricos, la gráfica da la información de que la mayoría de los votos fueron a favor de la propuesta porque más de la mitad del círculo está sombreado para "sí".

Ejemplo de salón de clases
Usar la gráfica de pastel mostrada en la figura 11.15 para responder las siguientes preguntas.
(a) ¿Qué porcentaje de los bagels vendidos fueron de ajo, cebolla o moras?
(b) ¿Qué porcentaje de los bagels vendidos no fueron de semilla de amapola o de semilla de sésamo?
(c) ¿Menos de un cuarto de los bagels vendidos eran de moras o canela?

EJEMPLO 1 Usar la gráfica de pastel en la figura 11.15 para responder las preguntas.

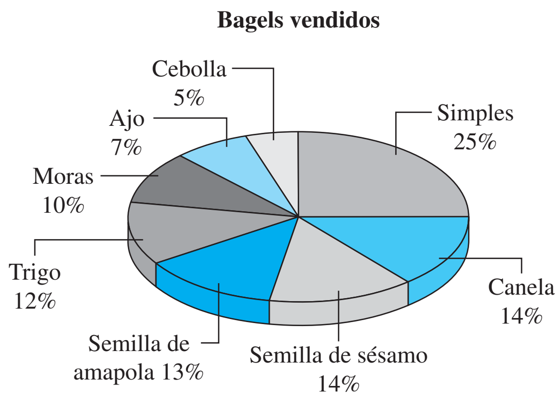


Figura 11.15

(a) ¿Qué porcentaje de los bagels vendidos eran simples, de semilla de sésamo o de semilla de amapola?

(b) ¿Qué porcentaje de los bagels vendidos no eran de cebolla o de ajo?

(c) ¿Más de la mitad de los bagels vendidos eran simples o de trigo?

Solución

(a) De los bagels vendidos, 25% eran simples, 14% eran de semilla de sésamo y 13% eran de semilla de amapola. Juntos suman 52% de los bagels vendidos.

(b) Cinco por ciento fueron bagels de cebolla y 7% fueron bagels de ajo. Por ende, los bagels de ajo junto con los de cebolla conformaron el 12% de las ventas. Ya que la gráfica de pastel representa el entero, o 100%, de los bagels vendidos, el porcentaje de bagels vendidos que no eran de ajo o de cebolla es 100% − 12% o 88%.

(c) Por inspección se ve que los sectores de bagels simples y los de trigo no conforman más de la mitad del círculo. Matemáticamente, los bagels simples fueron el 25% de las ventas y los de trigo fueron el 12% de las ventas. Juntos, bagels simples y de trigo conformaron el 37% de las ventas, que es menos de la mitad.

Gráfica de barras

Otro tipo de gráfica es la de barras. Las barras se dibujan vertical u horizontalmente para mostrar cantidades. Las gráficas de barras son muy útiles para las comparaciones.

Considere esta información sobre el número de estudiantes en ciertas especialidades en una universidad.

Especialidades	Número de estudiantes
Negocios	2400
Ciencias de la computación	850
Ciencias naturales	700
Inglés	1800
Artes	400
Educación	1000

La información se presenta en gráfica de barras en la figura 11.16. La gráfica tiene un título, un eje vertical que da los números de estudiantes y un eje horizontal que muestra las especialidades. Se dibujaron barras verticales para cada especialidad, la altura de la barra se determina con el número de estudiantes (por la escala en el eje vertical). Las barras también podrían mostrarse de manera horizontal.

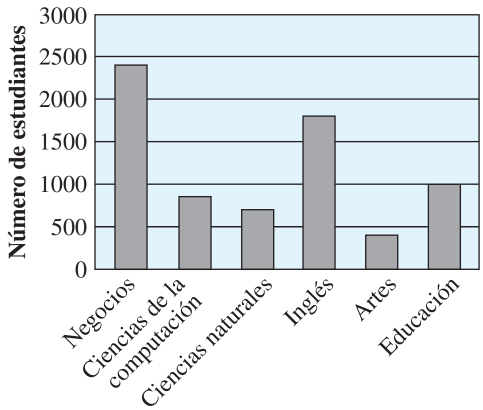


Figura 11.16

Las gráficas de barras muestran múltiples barras y pueden usarse para comparar información sobre dos o más grupos. Imagine que está intentando decidir si hay una diferencia entre el número de videos comprados por hombres y los comprados por mujeres en varios grupos de edades. La siguiente tabla contiene la información y la gráfica de barras en la figura 11.17 muestra esta información.

Edades	Hombres	Mujeres
18-21	35	31
22-35	28	12
36-50	8	14

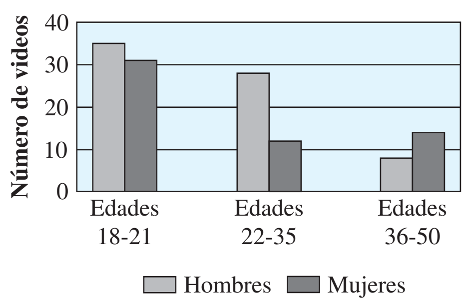


Figura 11.17

Gráfica de líneas

Las **gráficas de líneas** se usan para mostrar la relación entre dos variables. Cada gráfica tiene dos ejes perpendiculares con una variable asignada a cada uno. Las gráficas de líneas son útiles para indicar tendencias. Considere la siguiente información concerniente a las ganancias de una corporación del 2009 al 2014. Las ganancias se muestran en millones de dólares.

Año	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Ganancia	258	110	165	205	224	185

Una gráfica de líneas para esta información se muestra en la figura 11.18. De la gráfica, puede ver las tendencias en las ganancias. Hubo una gran disminución de ganancias entre el año 2009 y 2010. Después de eso, las ganancias se elevaron del 2010 al 2013. Después hubo otra disminución en ganancias del 2013 al 2014.

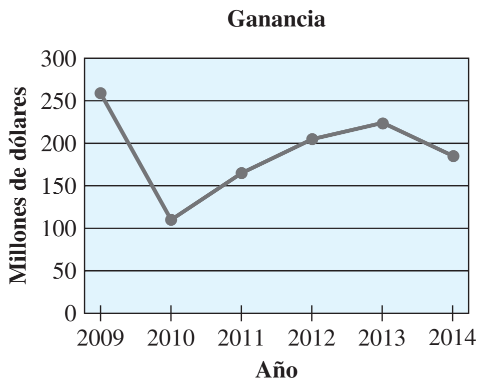


Figura 11.18

Ejemplo de salón de clases
Usar la figura 11.19 para responder estas preguntas.
(a) El incremento más grande en la tasa de intereses fue entre cuáles dos meses?
(b) ¿Cuál fue el cambio de intereses entre octubre y noviembre?
(c) ¿Qué mes tuvo la tasa de intereses más alta?

EJEMPLO 2

La gráfica en la figura 11.19 muestra información sobre los intereses cobrados por un banco por un préstamo en los últimos 7 meses. Use la gráfica para responder las preguntas.

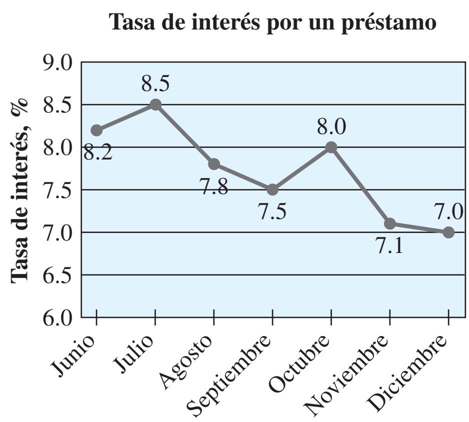


Figura 11.19

(a) ¿La mayor disminución en intereses fue entre cuáles dos meses?

(b) ¿Cuál fue el cambio en tasa de intereses entre julio y agosto?

(c) Si quisiera la tasa de intereses más baja, ¿en qué mes debería de haber pedido el préstamo?

Solución

(a) La mayor disminución fue entre octubre y noviembre.

(b) El cambio entre julio y agosto fue $7.8 - 8.5$ o -0.7. Así que la tasa de intereses cayó 0.7 puntos.

(c) La tasa de intereses más baja fue la de diciembre.

Uno de los aspectos más difíciles de crear gráficas es decidir qué tipo de gráfica usar. La información en la siguiente tabla sobre un presupuesto se muestra en gráfica de pastel (figura 11.20) y en gráfica de barras (figura 11.21). Cada gráfica muestra la información en un formato diferente; la decisión de cuál usar depende de usted.

Gastos del presupuesto

Artículo	Porcentaje del dinero
Automóvil	26
Renta	33
Comida	12
Utilidades	10
Teléfonos	5
Entretenimiento	6
Ropa	8

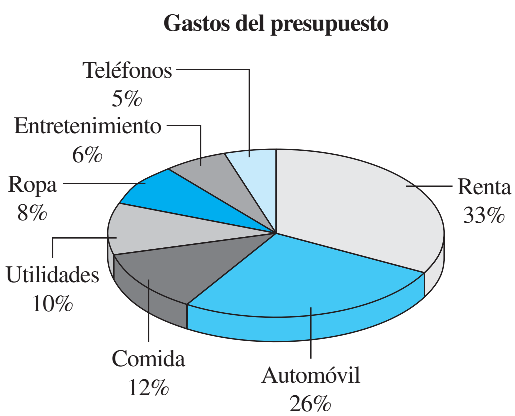


Figura 11.20

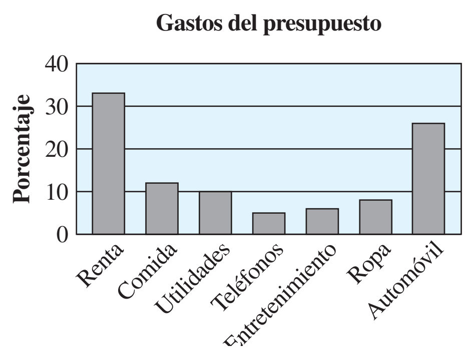


Figura 11.21

Examen de conceptos 11.6

Para los problemas 1-7, responder cierto o falso.

1. Las gráficas de pastel también son conocidas como gráficas circulares.
2. Las gráficas circulares y las de líneas son básicamente lo mismo.
3. Una gráfica de líneas puede mostrar de manera eficaz una comparación entre dos variables.
4. Construir una gráfica de pastel requiere de encontrar las partes fraccionarias de 360°.
5. Construir una gráfica de barras requiere de encontrar las partes fraccionarias de 180°.
6. Las barras en una gráfica de barras pueden mostrarse de manera vertical u horizontal.
7. A veces la elección de cuál tipo de gráfica usar para mostrar cierta información está basada simplemente en la preferencia personal.

Conjunto de problemas 11.6

Para los problemas 1-5, usar la gráfica de pastel en la figura 11.22. (Objetivo 2)

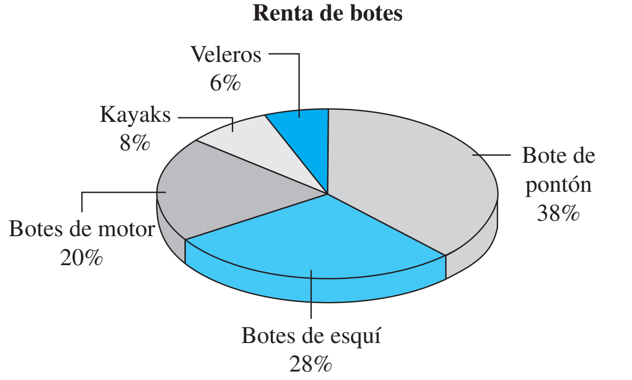


Figura 11.22

1. ¿Qué porcentaje de las rentas de botes fueron por kayaks o veleros?
2. ¿Más de la mitad de las rentas fueron de botes de pontón o de esquí?
3. Si en total fueron 2400 rentas, ¿cuántas veces se rentaron botes de motor?
4. ¿La razón de rentas de veleros y kayaks es la misma razón de rentas de botes de esquí y botes de pontón? (Justifique su respuesta)
5. ¿Qué porcentaje de las rentas no fueron veleros o botes de esquí?

Para los problemas 6-11, usar la gráfica de pastel en la figura 11.23. (Objetivo 2)

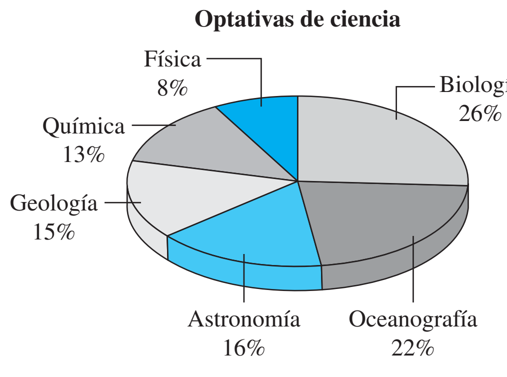


Figura 11.23

6. ¿Cuál es la optativa más popular?
7. ¿Cuál es la optativa menos popular?
8. ¿Qué porcentaje de estudiantes eligieron biología o geología?
9. ¿Qué porcentaje de estudiantes eligieron química o física?
10. ¿Qué porcentaje de estudiantes no eligió biología u oceanografía?
11. ¿Qué porcentaje de estudiantes no eligió oceanografía o astronomía?

Para los problemas 12-15, usar la gráfica de barras en la figura 11.24. (Objetivo 2)

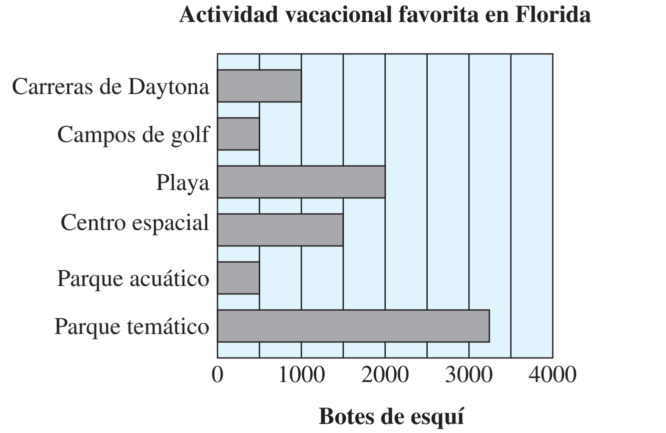


Figura 11.24

12. ¿Aproximadamente cuántas personas más prefieren el parque temático en lugar de la playa?
13. ¿Cuántas personas más prefieren el centro espacial en lugar del parque acuático?
14. ¿Cuál es el orden de actividades desde la más popular hasta la menos popular?
15. ¿Cuál es la diferencia en el número de personas que eligieron la playa en lugar del campo de golf?

Para los problemas 16-22, usar la gráfica de barras en la figura 11.25. (Objetivo 2)

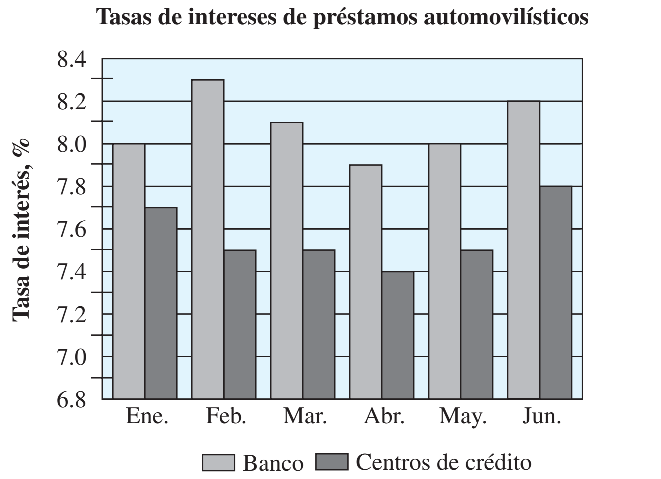


Figura 11.25

16. ¿En qué mes ocurre la mayor diferencia de tasas entre los bancos y los centros de crédito?
17. ¿Entre cuáles dos meses suben las tasas en los bancos mientras que en los centros de crédito bajan?

18. ¿Entre cuáles dos meses el banco eleva su tasa 0.2%?

19. ¿Entre cuáles dos meses el centro de crédito mantiene su tasa de interés constante?

20. ¿En qué mes y en qué tipo de institución se encuentra la tasa más baja?

21. ¿En junio, cuál es la diferencia de tasas entre el banco y el centro de crédito?

22. ¿Cuál fue el cambio de tasas de interés para el banco entre mayo y junio?

Para los problemas 23-28, usar la gráfica en la figura 11.26. **(Objetivo 2)**

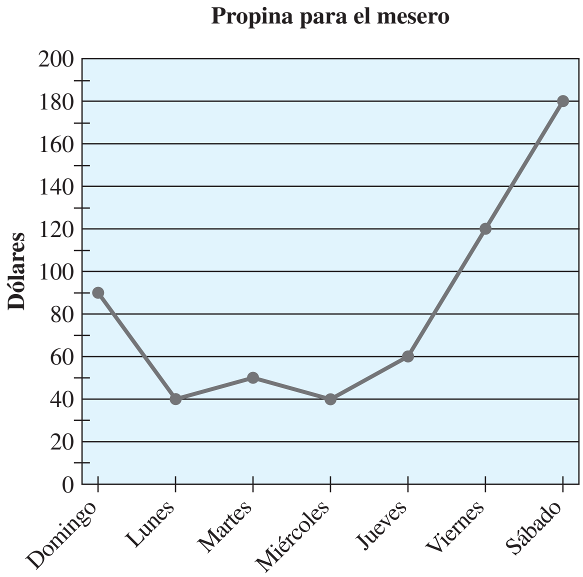


Figura 11.26

23. ¿Cuál es la cantidad total que ganó el mesero, en propinas, en viernes, sábado y domingo?

24. ¿Cuál es la cantidad total que ganó el mesero, en propinas, de lunes a jueves?

25. Para evitar pérdidas de ingresos, ¿cuál sería el mejor día en el que podría faltar el mesero a su trabajo(de acuerdo a la información en la gráfica)?

26. ¿Cuál fue la diferencia de propinas entre sábado y miércoles?

27. ¿Cuánto ganó el mesero, en propinas, en la semana?

28. ¿Cuál fue el promedio diario de propinas?

Para los problemas 29-35, usar la gráfica en la figura 11.27. **(Objetivo 2)**

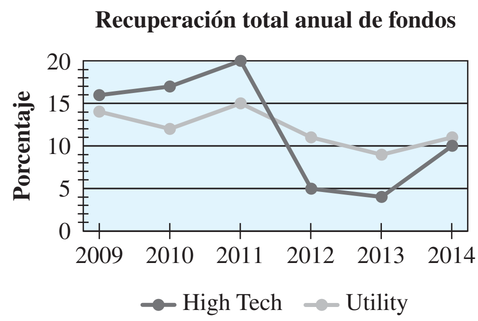


Figura 11.27

29. ¿Cuál es la diferencia en la recuperación total anual entre Utility Fund y High Tech Fund en el 2009?

30. ¿Cuál es la diferencia en la recuperación total anual entre Utility Fund y High Tech Fund en el 2011?

31. ¿Cuál fue el cambio en la recuperación total anual en Utility Fund entre 2010 y 2011?

32. ¿Cuál fue el cambio en la recuperación total anual en High Tech Fund entre 2013 y 2014?

33. ¿El cambio anual más grande en la recuperación total anual para High Tech Fund ocurrió entre cuáles dos años?

34. ¿El cambio anual más grande en la recuperación total anual para Utility Fund ocurrió entre cuáles dos años?

35. **(a)** ¿Cuál es el promedio de recuperación total anual en High Tech fund en los 6 años mostrados?
(b) ¿Cuál es el promedio de recuperación total anual en Utility Fund en los 6 años mostrados?
(c) ¿Cuál fondo tiene el mayor promedio anual total de recuperación?

Pensamientos en palabras

36. La señora Guenther dice que cada uno de sus grupos mostró un desempeño muy diferente en el examen final de acuerdo a la gráfica mostrada en la figura 11.28. ¿Está de acuerdo con esta declaración?

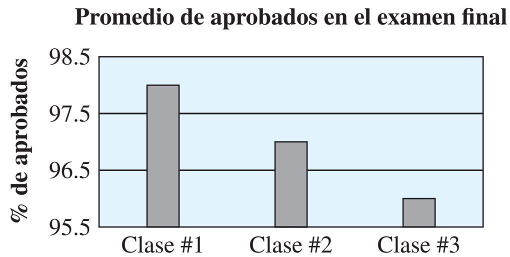


Figura 11.28

37. El jefe de Lauren dice que sus ventas en los últimos 5 años han caído significativa y constantemente y le muestra la gráfica en la figura 11.29. Lauren le muestra a su jefe la gráfica en la figura 11.30 y asegura que ha sido sólo una disminución muy ligera. Si usted fuera su jefe, ¿aceptaría la manera en la que Lauren muestra sus ventas en la gráfica?

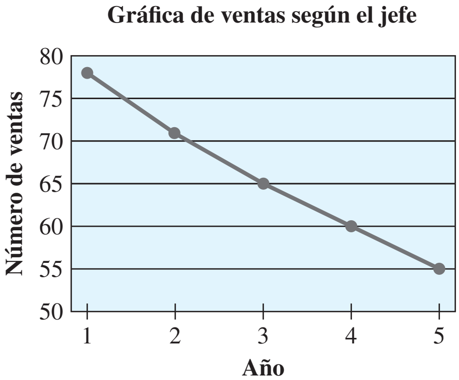


Figura 11.29

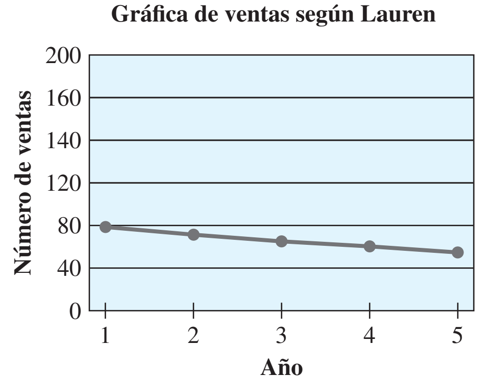


Figura 11.30

Más investigación

El primer paso para construir una gráfica de pastel es usar un compás y un transportador para hallar el grado de cada sector. Recuerde, se están dividiendo los 360º de todo el círculo. Considere la información en la tabla.

Ventas de pizza del sábado

Tipo	Número de pizzas vendidas
Pepperoni	60
Salchicha	45
Suprema	40
Vegetariana	15
Queso	20
Total	180

$$\text{Grados para cualquier tipo} = \frac{\text{número vendido de ese tipo}}{\text{número total de ventas}} \times 360°$$

$$\text{Grados para pepperoni} = \frac{60}{180} \times 360° = 120°$$

$$\text{Grados para salchicha} = \frac{45}{180} \times 360° = 90°$$

$$\text{Grados para suprema} = \frac{40}{180} \times 360° = 80°$$

$$\text{Grados para vegetariana} = \frac{15}{180} \times 360° = 30°$$

$$\text{Grados para queso} = \frac{20}{180} \times 360° = 40°$$

Usando un compás, dibuje un círculo con un diámetro de su elección. Desde el centro del círculo, dibuje un radio. Con el transportador ubicado en el centro del círculo y el radio como un lado del ángulo, dibuje el ángulo para el número de grados deseado en el primer sector. Continúe hasta que se muestren todos los sectores. Asegúrese de etiquetar la gráfica de pastel y los sectores como en la figura 11.31.

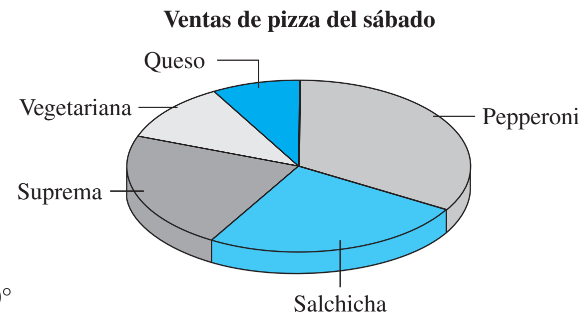


Figura 11.31

38. Construir una gráfica de pastel para los datos siguientes:

Membresía de Marching Rams

Categoría	Número de estudiantes
Banda	105
Abanderados	42
Batonista	33

39. Construir una gráfica de pastel para estos datos:

Inversiones del Sr. Jordan

Categoría	Dólares invertidos
Acciones	$ 8,000
Fondos mancomunados	14,000
Bonos	6,000
Anualidades	5,000
Oro	3,000

40. Si tiene acceso a una computadora con una aplicación de hoja de cuentas, intente producir las gráficas de pastel en los problemas 38 y 39 usando el programa.

Respuestas del examen de conceptos

1. Cierto **2.** Falso **3.** Cierto **4.** Cierto **5.** Falso **6.** Cierto **7.** Cierto

11.7 Relaciones y funciones

OBJETIVOS

1. Entender las definiciones de función y relación
2. Usar la notación de funciones
3. Especificar el dominio y el rango

En las siguientes dos secciones de este capítulo se trabajará con un concepto que tiene un rol importante en las matemáticas: el concepto de *función*. Las funciones se usan para unificar las matemáticas y también para servir como una manera significativa de aplicar las matemáticas a muchos problemas del mundo real. Proporcionan una manera de estudiar cantidades que varían entre sí; es decir, cuando un cambio en una cantidad causa un cambio correspondiente en otra. Se considerará el concepto general de una función en esta sección y después se lidiará con la aplicación de funciones en la siguiente sección.

Matemáticamente, una función es una forma especial de relación, así que se comenzará la discusión con una definición simple de lo que es una relación.

Ejemplo de salón de clases

Determinar el domino y el rango de cada relación:

(a) El mes y la piedra correspondiente: [(Enero, granete), (Febrero, amatista), (Marzo, aguamarina), (Abril, diamante), (Mayo, esmeralda)]

(b) Las temperaturas más altas en enero en las ciudades del mundo: [(Berlin, 30°F), (Dublín, 46°F), (Londres, 43°F), (Ciudad de México, 72°F)]

(c) Un número real entre -4 y 3 y su valor absoluto $\{(-3, 3), (-2, 2), (-1, 1)\ (0, 0)\ (1, 1)\ (2, 2)\}$

(d) Un número y su cubo: $\{(-3, -27), (-2, -8), (-1, -1), (2, 8), (4, 64)\}$

Definición 11.7

Una **relación** es un conjunto de pares ordenados.

Así, un conjunto de pares ordeados como $\{(1, 2), (3, 7), (8, 14)\}$ es una relación. El **dominio** de una relación es el conjunto de todos los primeros componentes del par ordenado. El **rango** de una relación es el conjunto de todos los segundos componentes del par ordenado. La relación $\{(1, 2), (3, 7), (8, 14)\}$ tiene un dominio de $\{1, 3, 8\}$ y un rango de $\{2, 7, 14\}$.

EJEMPLO 1

Aquí hay cuatro ejemplos de relaciones. Establezca el dominio y el rango para cada relación:

(a) El año de elección presidencial y quién ganó la elección: {(1928, Hoover), (1960, Kennedy), (1964, Johnson), (1976, Carter), (1992, Clinton), (1996, Clinton)}

(b) Un elemento radioactivo y su vida media en horas: [(Yodo-133, 20.9), (Bario-135, 28.7), (Tecnecio-99m, 6)]

(c) Un número natural menor que 5 y su opuesto: $\{(1, -1), (2, -2), (3, -3), (4, -4)\}$

(d) Un número y su cuadrado: $\{(-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$

Solución

(a) Dominio = {1928, 1960, 1964, 1976, 1992, 1996}; Rango = {Hoover, Kennedy, Johnson, Carter, Clinton}

(b) Dominio = {Yodo-133, Bario-135, Tecnecio-99m}; Rango = {6, 20.9, 28.7}

(c) Dominio = $\{1, 2, 3, 4\}$; Rango = $\{-1, -2, -3, -4\}$

(d) Dominio = $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$; Rango = $\{0, 1, 4, 9\}$

Los pares ordenados referidos en la definición 11.7 pueden generarse de varias maneras, tal como una gráfica o una descripción de la relación. Sin embargo, una de las maneras más comúnes de generar pares ordenados es a partir de ecuaciones. Dado que el conjunto solución de una ecuación con dos variables es un conjunto de pares ordenados, tal ecuación describe una relación. Cada una de las siguientes ecuaciones describe una relación entre las variables x y y. Se enlistan algunos de los infinitos pares ordenados (x, y) posibles para cada relación.

1. $x^2 + y^2 = 4$: $(0, 2), (0, -2), (2, 0), (-2, 0)$
2. $x = y^2$: $(16, 4), (16, -4), (25, 5), (25, -5)$
3. $2x - y = -3$: $(-2, -1), (-1, 1), (0, 3), (1, 5), (2, 7)$
4. $y = \dfrac{1}{x-2}$: $\left(-2, -\dfrac{1}{4}\right), \left(-1, -\dfrac{1}{3}\right), \left(0, -\dfrac{1}{2}\right), (1, -1), (3, 1)$
5. $y = x^2$: $(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)$

Ahora dirija su atención a los pares ordenados de las últimas tres relaciones. Estas relaciones son un tipo especial llamado funciones.

Definición 11.8

Una función es una relación en la que cada miembro del dominio tiene asignado un y sólo un miembro del rango. Una función es una relación en la que no hay dos pares ordenados diferentes que tengan el mismo primer componente.

Note que la relación descrita por la ecuación 1 no es una función porque dos pares ordenados diferentes, $(0, 2)$ y $(0, -2)$, tienen el mismo primer componente. De manera similar, la relación descrita por la ecuación 2 no es una función porque $(16, 4)$ y $(16, -4)$ tienen el mismo primer componente.

Ejemplo de salón de clases

Especificar el dominio y el rango de cada relación y establecer si es o no una función:

(a) $\{(3, 7), (2, 8), (1, 7), (0, 8), (-1, 9)\}$

(b) $\{(2, 3), (1, 4), (-2, 5), (2, 6)\}$

(c) $\{(94, A), (96, A), (99, A)\}$

(d) $\{(B, 82), (B, 85), (B, 87), (B, 89)\}$

EJEMPLO 2

Especificar el dominio y el rango de cada relación y establecer si es o no una función:

(a) $\{(-3, 3), (-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

(b) $\{(1, 73), (2, 73), (3, 73)\}$

(c) $\{(5, 10), (6, 20), (5, -10), (6, -20)\}$

(d) {(Brett Favre, Packers), (Brett Favre, Vikings), (Brett Favre, Jets)}

Solución

(a) Dominio = $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$; Rango = $\{0, 1, 2, 3\}$. Es una función.

(b) Dominio = $\{1, 2, 3\}$; Rango = $\{73\}$. Es una función.

(c) Dominio = $\{5, 6\}$; Rango = $\{-20, -10, 10, 20\}$. No es una función porque $(5, 10)$ y $(5, -10)$ tienen el mismo primer componente.

(d) Dominio = {Brett Favre}; Rango = {Packers, Vikings, Jets}. No es una función porque (Brett Favre, Packers), (Brett Favre, Vikings) y (Brett Favre, Jets) tienen el mismo primer componente.

El dominio de una función suele importar más que el rango. Debe tener presentes las restricciones necesarias de x. Considere los siguientes ejemplos:

Ejemplo de salón de clases
Especificar el dominio de cada relación

(a) $y = \frac{1}{2}x - 4$

(b) $y = \frac{1}{x + 4}$

(c) $y = \frac{3x}{4x - 7}$

EJEMPLO 3 Especificar el dominio de cada relación:

(a) $y = 2x + 3$ **(b)** $y = \frac{1}{x - 3}$ **(c)** $y = \frac{5x}{3x - 4}$

Solución

(a) El dominio de la relación descrita por $y = 2x + 3$ es el conjunto de todos los números reales porque se puede sustituir x con cualquier número real.

(b) Se puede reemplazar x con cualquier número real, excepto 3 porque 3 vuelve al denominador cero. Así, el dominio es todos los números reales menos 3.

(c) Se necesita encontrar el valor de x que vuelva al denominador igual a cero. Para hacer eso, se establece el denominador igual a cero y se resuelve para x.

$$3x - 4 = 0$$
$$3x = 4$$
$$x = \frac{4}{3}$$

Ya que $\frac{4}{3}$ vuelve al denominador cero, el dominio es todos los números reales excepto $\frac{4}{3}$.

Notación de funciones

Hasta ahora se ha usado la notación regular para escribir ecuaciones que describen funciones; es decir, se han usado ecuaciones como $y = x^2$ y $y = \frac{1}{x - 2}$, donde y se expresa en términos de x, para especificar ciertas funciones. Hay una **notación de funciones** especial que es muy conveniente de usar cuando se trabaja con el concepto de función.

La notación $f(x)$ se lee "f de x" y se define como el valor de la función f en x. (No interprete $f(x)$ como f veces x). En lugar de escribir $y = x^2$, se puede escribir $f(x) = x^2$. Por ende, $f(2)$ significa el valor de la función f en 2, que es $2^2 = 4$. Así que se escribe $f(2) = 4$. Esta es una manera conveniente de expresar varios valores de la función. Se ilustra esta idea en otro ejemplo.

Ejemplo de salón de clases
Si $f(x) = x^3 + 2$, hallar $f(-1)$, $f(2)$, $f(-3)$, $f(0)$ y $f(h)$.

EJEMPLO 4 Si $f(x) = x^2 - 6$, hallar $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(-1)$ y $f(h)$.

Solución

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 6}$$
$$f(0) = 0^2 - 6 = -6$$
$$f(1) = 1^2 - 6 = -5$$
$$f(2) = 2^2 - 6 = -2$$
$$f(3) = 3^2 - 6 = 3$$
$$f(-1) = (-1)^2 - 6 = -5$$
$$f(h) = h^2 - 6$$

Cuando se trabaja con más de una función en el mismo problema, se usan diferentes letras para designar diferentes funciones, tal como el siguiente ejemplo demuestra.

Ejemplo de salón de clases

Si $f(x) = 4x - 3$ y $g(x) = 2x^2 + x - 3$, hallar $f(-1)$, $f(3)$, $g(1)$ y $g(-3)$.

EJEMPLO 5

Si $f(x) = 2x + 5$ y $g(x) = x^2 - 2x + 1$, hallar $f(2), f(-3), g(-1)$ y $g(4)$.

Solución

$\boldsymbol{f(x) = 2x + 5}$ $\qquad$ $\boldsymbol{g(x) = x^2 - 2x + 1}$

$f(2) = 2(2) + 5 = 9$ $\qquad$ $g(-1) = (-1)^2 - 2(-1) + 1 = 4$

$f(-3) = 2(-3) + 5 = -1$ $\qquad$ $g(4) = 4^2 - 2(4) + 1 = 9$

Examen de conceptos 11.7

Para los problemas 1-8, responder cierto o falso.

1. Una función es un tipo especial de relación.
2. La relación [(John, Mary), (Mike, Ada), (Kyle, Jenn), (Mike, Sydney)] es una función.
3. Dado $f(x) = 3x + 4$, la notación $f(7)$ significa hallar el valor de f cuando $x = 7$.
4. El conjunto de todos los primeros componentes de los pares ordenados de una relación es llamado un rango.
5. El dominio de una función nunca puede ser un conjunto de todos los números reales.
6. El dominio de la función $f(x) = \dfrac{x}{x - 3}$ es el conjunto de todos los números reales.
7. El rango de la función $f(x) = x + 1$ es el conjunto de todos los números reales.
8. Si $f(x) = -x^2 - 1$, entonces $f(2) = -5$.

Conjunto de problemas 11.7

Para los problemas 1-14, especificar el dominio y el rango de cada relación. También debe establecer si la relación es una función o no. **(Objetivos 1 y 3)**

1. $\{(4, 7), (6, 11), (8, 20), (10, 28)\}$
2. $\{(3, 6), (5, 7), (7, 8)\}$
3. $\{(-2, 4), (-1, 3), (0, 2), (1, 1)\}$
4. $\{(10, -1), (8, -2), (6, -3), (4, -2)\}$
5. $\{(9, -3), (9, 3), (4, 2), (4, -2)\}$
6. $\{(0, 2), (1, 5), (0, -2), (3, 7)\}$
7. $\{(3, 15), (4, 15), (5, 15), (6, 15)\}$
8. {(1995, Clinton), (1996, Clinton), (1997, Clinton)}
9. {(Carol, 22400), (Carol, 23700), (Carol, 25200)}
10. $\{(4, 6), (4, 8), (4, 10), (4, 12)\}$
11. $\{(-6, 1), (-6, 2), (-6, 3), (-6, 4)\}$
12. $\{(-7, -1), (-5, 0), (-2, 2), (0, 3)\}$
13. $\{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$
14. $\{(-1, 7), (-2, 4), (0, 0), (1, 7), (2, 4)\}$

Para los problemas 15-30, especificar el dominio de cada función. **(Objetivo 3)**

15. $y = 3x - 2$
16. $y = -4x + 1$
17. $y = \dfrac{1}{x + 8}$
18. $y = \dfrac{1}{x - 6}$
19. $y = x^2 + 4x - 7$
20. $y = 3x^2 - 2x - 5$
21. $y = \dfrac{3}{2x - 10}$
22. $y = \dfrac{4}{7 - x}$
23. $y = \dfrac{3x}{5x - 8}$
24. $y = \dfrac{6x}{7x + 3}$
25. $y = \dfrac{2x - 6}{5}$
26. $y = \dfrac{6x - 12}{7}$
27. $y = \dfrac{2x + 3}{x}$
28. $y = \dfrac{x - 4}{2x}$
29. $y = x^3$
30. $y = -2x^4$

Para los problemas 31-44, evaluar la función de los valores dados. (Objetivo 2)

31. Si $f(x) = 3x + 4$, hallar $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, y $f(6)$.

32. Si $f(x) = -2x + 5$, hallar $f(2)$, $f(-2)$, $f(-3)$, y $f(5)$.

33. Si $f(x) = -5x - 1$, hallar $f(3)$, $f(-4)$, $f(-5)$, y $f(t)$.

34. Si $f(x) = 7x - 3$, hallar $f(-1)$, $f(0)$, $f(4)$, y $f(a)$.

35. Si $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}$, hallar $g(3)$, $g\left(\frac{1}{2}\right)$, $g\left(-\frac{1}{3}\right)$, y $g(-2)$.

36. Si $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{6}$, hallar $g(1)$, $g(-1)$, $g\left(\frac{2}{3}\right)$, y $g\left(-\frac{1}{3}\right)$.

37. Si $f(x) = x^2 - 4$, hallar $f(2)$, $f(-2)$, $f(7)$, y $f(0)$.

38. Si $f(x) = 2x^2 + x - 1$, hallar $f(2)$, $f(-3)$, $f(4)$, y $f(-1)$.

39. Si $f(x) = -x^2 + 1$, hallar $f(-1)$, $f(2)$, $f(-2)$, y $f(-3)$.

40. Si $f(x) = -2x^2 - 3x - 1$, hallar $f(1)$, $f(0)$, $f(-1)$, y $f(-2)$.

41. Si $f(x) = 4x + 3$ y $g(x) = x^2 - 2x$, hallar $f(5)$, $f(-6)$, $g(-1)$, y $g(4)$.

42. Si $f(x) = -2x - 7$ y $g(x) = 2x^2 + 1$, hallar $f(-2)$, $f(4)$, $g(-2)$, y $g(4)$.

43. Si $f(x) = 3x^2 - x + 4$ y $g(x) = -3x + 5$, hallar $f(-1)$, $f(4)$, $g(-1)$, y $g(4)$.

44. Si $f(x) = -2x^2 + 3x + 1$ y $g(x) = -6x$, hallar $f(3)$, $f(-5)$, $g(2)$, y $g(-4)$.

Pensamientos en palabras

45. ¿Todas las funciones son también relaciones? ¿Todas las relaciones son también funciones?

46. Dar dos ejemplos de una función que describa una situación del mundo real en el que el dominio esté restringido.

47. ¿Qué significados se le suele dar a la palabra "función" en las actividades diarias? ¿Alguno de esos significados se relaciona con el uso de función en matemáticas?

Respuestas del examen de conceptos

1. Cierto **2.** Falso **3.** Cierto **4.** Falso **5.** Falso **6.** Falso **7.** Cierto **8.** Cierto

11.8 Aplicaciones de funciones

OBJETIVO **1** Aplicar funciones para resolver problemas verbales

En la sección anterior, se presentaron las funciones y su dominio y rango. En esta sección, se considerarán algunas aplicaciones que usan el concepto de función para conectar las matemáticas con el mundo real.

Las funciones son la manera ideal de estudiar cantidades que varían entre ellas. Ya conoce muchas relaciones que son funciones, pero nunca pensó en ellas en términos matemáticos. Por ejemplo, el área de un círculo varía con el radio del círculo y puede escribirse como una función, $f(r) = \pi r^2$. La distancia que un automóvil recorre a una rapidez constante, 50 millas por hora, puede expresarse como la función de tiempo t como $f(t) = 50t$.

Ejemplo de salón de clases
Una agencia de renta de automóviles cobra una cuota fija por día más una cantidad por milla al rentar un automóvil. Los cargos diarios pueden expresarse como la función $f(x) = 0.58x + 35$, donde x es el número de millas manejadas. Hallar los cargos si el carro fue conducido por 302 millas.

EJEMPLO 1 Aplique su habilidad

Una agencia de renta de automóviles cobra una cuota fija por día más una cantidad por milla al rentar un automóvil. Los cargos diarios pueden expresarse como la función $f(x) = 0.20x + 25$, donde x es el número de millas manejadas. Hallar los cargos si el carro fue conducido por 158 millas.

Solución

Hallar el valor de la función cuando $x = 158$.

$$f(x) = 0.20x + 25$$
$$f(158) = 0.20(158) + 25$$
$$= 56.60$$

Los cargos son \$56.60 cuando el carro fue conducido por 158 millas.

Ejemplo de salón de clases

Un vendedor tiene algunos artículos que quiere vender con 15% de descuento. El precio de venta con descuento puede representarse como una función del precio de venta original $f(p) = 0.85p$ donde p es el precio de venta original de un artículo. Debe crear una tabla mostrando el precio de venta original y el precio de venta con descuento de artículos que cuestan \$16, \$29, \$32, \$45 y \$63.

EJEMPLO 2 Aplique su habilidad

Una vendedora tiene algunos artículos que quiere vender con una ganancia del 40% del costo de cada artículo. El precio de venta puede representarse como una función del costo $f(c) = 1.4c$, donde c es el costo de un artículo. Debe crear una tabla que muestre el precio de venta de artículos que cuestan \$8, \$12, \$15, \$22 y \$30.

Solución

Hallar los valores de $f(c) = 1.4c$ cuando c es \$8, \$12, \$15, \$22 y \$30.

$$f(8) = 1.4(8) = 11.20$$
$$f(12) = 1.4(12) = 16.80$$
$$f(15) = 1.4(15) = 21.00$$
$$f(22) = 1.4(22) = 30.80$$
$$f(30) = 1.4(30) = 42.00$$

Costo	\$8	\$12	\$15	\$2	\$30
Precio de venta	\$11.20	\$16.80	\$21.00	\$30.80	\$42.00

La función del ejemplo 2, $f(c) = 1.4c$, es una relación lineal. Para graficar esta relación lineal, se puede etiquetar el eje horizontal como c y el eje vertical como $f(c)$. El dominio se restringe a valores no negativos para el costo. Si el costo es 0, entonces el precio de venta es 0, así que la gráfica inicia en el origen. Después se usa otro punto en la tabla en el ejemplo 2 para dibujar la recta en la figura 11.32.

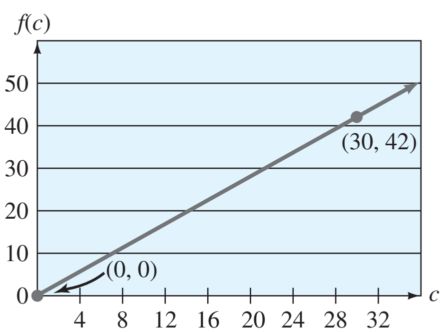


Figura 11.32

De la gráfica, se puede aproximar el precio de venta basado en el costo dado. Por ejemplo, si $c = 25$, entonces leyendo hacia arriba desde el 25 en el eje c a la recta, y después a través al eje $f(c)$, se ve que el precio de venta es aproximadamente \$35.

Ejemplo de salón de clases

El costo de quemar una bombilla de 40 watts se da por la función $c(h) = 0.0027h$, donde h representa el número de horas que la bombilla está encendida.

(a) ¿Cuánto cuesta quemar una bombilla de 40 watts durante 30 días cuando ésta está encendida 3 horas por día?

(b) Graficar la función lineal $c(h) = 0.0027h$.

(c) Suponga que una bombilla de 40 watts se deja encendida en un armario por una semana antes de ser descubierta y apagada. Use la gráfica de la parte (b) para aproximar el costo de dejar la bombilla encendida durante una semana. Después use la función para hallar el costo exacto.

EJEMPLO 3 Aplique su habilidad

El costo de quemar una bombilla de 60 watts se da con la función $c(h) = 0.0036h$, donde h representa el número de horas que la bombilla permanece encendida.

(a) ¿Cuánto costará quemar una bombilla de 60 watts por 30 días cuando la bombilla permanece encendida 3 horas por día?

(b) Graficar la función lineal $c(h) = 0.0036h$.

(c) Suponga que una bombilla de 60 watts permanece encendida en un armario durante una semana antes de ser descubierta y apagada. Use la gráfica de la parte (b) para aproximar el costo de dejar la bombilla encendida durante una semana. Después use la función para hallar el costo exacto.

Solución

(a)
$$\begin{aligned} c(h) &= 0.0036h \\ c(90) &= 0.0036(90) \\ &= 0.324 \end{aligned}$$

El costo, a la centena más cercana, es 32 centavos.

(b) Se puede dibujar una gráfica con eje horizontal h y eje fertical $c(h)$. El dominio está en números no negativos. Ya que $c(0) = 0$ y $c(100) = 0.36$, se pueden usar los puntos (0, 0) y (100, 0.36) para graficar la función lineal $c(h) = 0.0036h$. La gráfica se muestra en la figura 11.33.

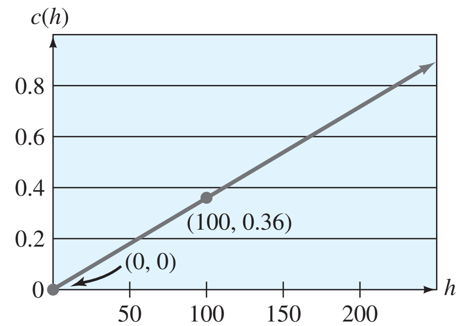


Figura 11.33

(c) Si la bombilla se enciende durante 24 horas por día durante una semana, está encendida durante $24(7) = 168$ horas. Al leer la gráfica en la figura 11.33, puede aproximar 168 sobre el eje horizontal, y luego trazar a través del eje vertical. Parece que costará aproximadamente 60 centavos. Al usar $c(h) = 0.0036h$, se obtiene exactamente $c(168) = 0.0036(168) = 0.6048$.

Conjunto de problemas 11.8

1. La función $A(s) = s^2$ expresa el área de un cuadrado como una función del largo de un lado s del cuadrado. Calcular $A(3)$, $A(17)$, $A(8.5)$, $A(20.75)$, y $A(11.25)$.

2. Una agencia de renta de botes cobra \$50 más \$35 por hora por rentar un bote de pesca. Por ende, el cargo por rentar un bote es una función del número de horas h que se renta el bote y puede expresarse como $f(h) = 50 + 35h$. Calcular $f(5)$, $f(10)$, $f(1)$ y $f(3)$.

3. El costo, en dólares, de fabricar relojes es una función del número de relojes n producidos y puede expresarse como $C(n) = 12n + 44{,}500$. Hallar el costo de producir 35,000 relojes.

4. La función $A(r) = \pi r^2$ expresa el área de un círculo como una función del radio del círculo. Calcular $A(5)$, $A(7.5)$, $A(10)$ y $A(12)$. (Usar 3.14 como una aproximación de π)

5. Un minorista tiene algunos artículos que quiere vender y obtener una ganancia de 50% sobre el costo de cada artículo. La función $s(c) = 1.5c$, donde c representa el costo de un artículo, se puede usar para determinar el precio de venta. Encuentre el precio de venta de los artículos que cuestan \$4.50, \$6.75, \$9.00 y \$16.40.

6. "Todas las mercancías tienen 20% de descuento sobre el precio marcado" es una señal en una tienda de ropa local. La función $f(p) = 0.80p$, donde p es el precio marcado, puede usarse para determinar el precio de venta con descuento. Hallar el precio de venta con descuento de una playera de \$22, un par de jeans de \$38, un suéter de \$45 y un par de calcetines de \$5.50.

7. Mike tiene un trabajo entregando pizzas para Pizza City. Le pagan \$15 por tarde, más \$0.75 por cada pizza que entrega. Su paga, en dólares, puede expresarse como la función $f(n) = 0.75n + 15$ donde n es el número de pizzas que entrega. Encontrar su paga por entregar 20 pizzas, 0 pizzas y 16 pizzas.

8. ABC Car Rental usa la función $f(x) = 26$ para cualquier uso diario de un automóvil hasta e incluidas 200 millas. Para conducir más de 200 millas por día, use la función $g(x) = 26 + 0.15(x - 200)$ para determinar los cargos. ¿Cuánto cobraría la compañía por conducir diariamente 150 millas? ¿230 millas? ¿360 millas? ¿430 millas?

9. Para cobrar, en dólares, comidas infantiles, un restaurante usa la función $f(x) = 0$ cuando el niño tiene menos de dos años de edad, y la función $g(x) = 0.50x$ cuando el niño tiene 2 o más años, donde x es la edad del niño. ¿Cuánto cuesta una comida infantil para un niño de 8 años, de 3 años, de un año y de 12 años de edad?

10. El volumen, en pulgadas cúbicas, de un cilindro con una base fija puede expresarse como la función $V(h) = 201h$, donde h es la altura del cilindro en pulgadas. Determinar el volumen de un cilindro que mide 12 pulgadas de altura.

11. La paga de Mario, en dólares, puede expresarse como la función del número de horas que trabajó. La función $f(h) = 10.50h$ representa su paga si h, horas trabajadas, es menor que o igual a 40. La función $g(h) = 15.75h - 210$ representa su paga si h es mayor que 40. ¿Cuánto ganará Mario si trabaja 35, 40, 50 y 20 horas?

12. Los descuentos de una tienda dependen de la cantidad total de compras realizadas p. La tabla muestra las funciones usadas para calcular el costo basado en la cantidad de compras realizadas. Hallar el costo cuando la cantidad es \$75, cuando la cantidad es \$530, cuando la cantidad es \$270 y cuando la cantidad es \$156.

Compras realizadas	Función por costo
$p \leq 100$	$f(p) = 0.98p$
$100 < p \leq 200$	$f(p) = 0.96p$
$200 < p \leq 300$	$f(p) = 0.94p$
$300 < p \leq 400$	$f(p) = 0.92p$
$p > 400$	$f(p) = 0.90p$

13. En hotel cobra \$98.50 por un cuarto con una sola persona. Si hay más de una persona, entonces el cargo por cuarto se expresa con la función $f(n) = 98.50 + 20(n - 1)$, donde n es el número de personas. ¿Cuál es cargo cuando hay 2, 3, 1 y 4 personas?

14. Wesley tiene 1000 acciones. Está considerando vender algunas y sabe que su ganancia puede representarse con la función $f(x) = 28x - 150$, donde x es el número de acciones vendidas. Crear una tabla mostrando las ganancias por vender 100, 200, 400, 500 ó 600 acciones.

15. La posibilidad de que un evento ocurra puede determinarse con la función $f(x) = \dfrac{x}{10}$, donde $x = 0, 1, 2, 3, 4$. Crear una tabla mostrando todos los valores de x y $f(x)$.

16. El costo anual, en dólares, de \$100,000 de seguro de vida es una función de la edad de una persona x y puede expresarse como $c(x) = 354 + 10(x - 30)$. Crear una tabla mostrando el costo de asegurar a una persona de 20 años, de 30 años, de 35 años, de 40 años, de 50 años y de 55 años de edad.

17. Un servicio de albercas agrega neutralizador a las albercas cada mes. El número de libras de neutralizador que se usa puede expresarse como $f(n) = 0.0003n$, donde n es el número de galones de agua en la alberca. Crear una tabla mostrando el número de libras de neutralizador usadas para albercas con 10,000; 15,000; 20,000; 25,000 y 30,000 galones de agua.

18. La ecuación $I(r) = 750r$ expresa la cantidad de intereses simples ganados por una inversión de \$750 en un año como la función del interés r. Calcular $I(0.075)$, $I(0.0825)$, $I(0.0875)$ y $I(0.095)$.

19. La función $P(s) = 4s$ expresa el perímetro de un cuadrado como una función del largo de un lado s del cuadrado.
   (a) Hallar el perímetro de un cuadrado cuyos lados miden 3 pies.
   (b) Hallar el perímetro de un cuadrado cuyos lados miden 5 pies.
   (c) Graficar la función lineal $P(s) = 4s$.
   (d) Usar la gráfica de la parte (c) para aproximar el perímetro de un cuadrado cuyos lados miden 4.25 pies. Después use la función para hallar el perímetro exacto.

20. Un vendedor de antigüedades asume que el precio de un artículo aumenta de manera constante cada año. Suponga que una antigüedad cuesta \$200 y aumenta cada año por t años. Entonces puede expresar el valor de la antigüedad después de t años con la función $V(t) = 2500 + 200t$.
   (a) Hallar el valor de la antigüedad después de 5 años.
   (b) Hallar el valor de la antigüedad después de 8 años.
   (c) Graficar la función lineal $V(t) = 2500 + 200t$.
   (d) Usar la gráfica de la parte (c) para aproximar el valor de una antigüedad después de 10 años. Después use la función para hallar el valor exacto.
   (e) Usar la gráfica para aproximar cuántos años tomará para que el valor de la antigüedad llegue a los \$3750.
   (f) Usar la función para determinar exactamente cuánto tiempo tomará para que el valor de la antigüedad llegue a los \$3750.

21. El método de depreciación lineal supone que un artículo se deprecia la misma cantidad cada año. Suponga que una nueva pieza de maquinaria cuesta \$32,500 y se deprecia \$1950 cada año durante t años. Entonces se puede expresar el valor de la maquinaria después de t años con la función $V(t) = 32{,}500 - 1950t$.

(a) Encuentre el valor de la maquinaria después de 6 años.

(b) Encuentre el valor de la maquinaria después de 9 años.

(c) Grafique la función $V(t) = 32{,}500 - 1950t$.

(d) Use la gráfica de la parte (c) para aproximar el valor de la maquinaria después de 10 años. Después use la función para hallar el valor exacto.

(e) Use la gráfica para determinar cuánto tiempo transcurre para que el valor de la maquinaria se vuelva cero.

(f) Use la función para determinar cuánto tiempo transcurre para que el valor de la maquinaria se vuelva cero.

22. La función $f(\text{C}) = \frac{9}{5}\text{C} + 32$ expresa la temperatura en grados Fahrenheit como una función de la temperatura en grados Celsius.

(a) Use la función para completar la tabla.

C	0	10	15	−5	−10	−15	−25
$f(\text{C})$							

(b) Graficar la función $f(\text{C}) = \frac{9}{5}\text{C} + 32$.

(c) Use la gráfica de la parte (b) para aproximar la temperatura en grados Fahrenheit cuando la temperatura es 20°C. Después use la función para hallar el valor exacto.

23. La función $f(t) = \frac{5}{9}(t - 32)$ expresa la temperatura en grados Celsius como una función de la temperatura en grados Fahrenheit.

(a) Usar la función para completar la tabla

t	50	41	−4	212	95	77	59
$f(t)$							

(b) Graficar la función $f(t) = \frac{5}{9}(t - 32)$.

(c) Usar la gráfica de la parte (b) para aproximar la temperatura en grados Celsius cuando la temperatura es 20°F. Después use la función para hallar el valor exacto.

Pensamientos en palabras

24. Describa una situación que ocurre en su vida en la que podría usarse una función. Escriba la ecuación para la función y evalúe con tres valores en el dominio.

25. Suponga que está conduciendo a una velocidad constante de 60 millas por hora. Explique cómo es que la distancia que conduce es una función lineal del tiempo que conduce.

Más investigación

26. La mayoría de las aplicaciones de hojas de cálculo para computadora le permiten entrar a función, y cuando marca una lista de valores, el programa evalúa la función para esos valores. Si tiene acceso a un programa de hojas de cálculo, intente evaluar la función $f(x) = 10x + 20$ para $x = 10, 25, 30, 40$ y 50.

Capítulo 11 Resumen

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Resolver ecuaciones que involucran el valor absoluto. (Sección 11.1/Objetivo 1)	Interpretar el valor absoluto significa “la distancia entre un número y cero en una recta numérica” y permite resolver una variedad de ecuaciones que involucran el valor absoluto.	Resolver $\lvert 2x - 1\rvert = 4$. **Solución** $\lvert 2x - 1\rvert = 4$ $2x - 1 = -4$ o $2x - 1 = 4$ $2x = -3$ o $2x = 5$ $x = -\frac{3}{2}$ o $x = \frac{5}{2}$ El conjunto solución es $\left\{-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$. **Problema de muestra 1** Resolver $\lvert 3x + 5\rvert = 8$.
Resolver desigualdades que involucran el valor absoluto. (Sección 11.1/Objetivo 2)	La interpretación de distancia para el valor absoluto también proporciona la base para resolver desigualdades que involucran al valor absoluto.	Resolver lo siguiente: **(a)** $\lvert x + 4\rvert \leq 6$ **(b)** $\lvert x - 1\rvert > 7$ **Solución** **(a)** $\lvert x + 4\rvert \leq 6$ $x + 4 \geq -6$ y $x + 4 \leq 6$ $x \geq -10$ y $x \leq 2$ El conjunto solución es $[-10, 2]$. **(b)** $\lvert x - 1\rvert > 7$ $x - 1 < -7$ o $x - 1 > 7$ $x < -6$ o $x > 8$ El conjunto solución es $(-\infty, -6) \cup (8, \infty)$. **Problema de muestra 2** Resolver: **(a)** $\lvert x + 2\rvert \geq 7$. **(b)** $\lvert x - 5\rvert < 8$.
Resolver sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables. (Sección 11.2/Objetivo 1)	Resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables produce uno de los siguientes 4 resultados. **1.** Hay una tripleta ordenada que satisface las tres ecuaciones. **2.** Hay una infinidad de tripletas ordenadas en el conjunto solución, de las cuales todas son coordenadas de puntos en una recta en común entre los tres planos. **3.** Hay una infinidad de tripletas ordenadas en el conjunto solución, de las cuales todas son coordenadas de puntos en un plano. **4.** El conjunto solución está vacío, es decir $\varnothing$.	Para repasar este material, debe regresar a la sección 11.2 y estudiar los ejemplos.

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Simplificar expresiones numéricas que implican exponentes fraccionarios. (Sección 11.3/Objetivo 2)	Las siguientes definiciones unen los conceptos de raíz y exponentes fraccionarios. **1.** a es raíz cuadrada de b si $a^2 = b$. **2.** a es raíz cúbica de b si $a^3 = b$. **3.** a es raíz n-ésima de b si $a^n = b$. **4.** b^n significa $\sqrt[n]{b}$. **5.** $b^{\frac{m}{n}}$ significa $\sqrt[n]{b^m}$, que es equivalente a $\left(\sqrt[n]{b}\right)^m$.	Aquí hay algunos ejemplos de simplificación de expresiones numéricas que implican exponentes fraccionarios: **(a)** $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$ **(b)** $9^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{9}\right)^3 = 3^3 = 27$ **(c)** $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$ **(d)** $-9^{\frac{5}{2}} = -\left(\sqrt{9}\right)^5 = -(3)^5 = -243$ **(e)** $9^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{3}{2}} = 9^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 9^2 = 81$ **(f)** $\frac{9^{\frac{3}{2}}}{9^{\frac{1}{2}}} = 9^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = 9^1 = 9$ **Problema de muestra 3** Simplificar estas expresiones numéricas que implican exponentes fraccionarios: **(a)** $16^{\frac{1}{2}}$ **(b)** $16^{\frac{3}{2}}$ **(c)** $16^{\frac{-1}{2}}$ **(d)** $-16^{\frac{3}{2}}$ **(e)** $16^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{3}{2}}$ **(f)** $\frac{16^{\frac{3}{2}}}{16^{\frac{1}{2}}}$
Simplificar expresiones algebraicas que implican exponentes fraccionarios. (Sección 11.3/Objetivo 3)	Las mismas propiedades básicas que se aplicaron a las expresiones numéricas aplican para las expresiones algebraicas.	Aquí hay algunos ejemplos de simplificación de expresiones algebraicas que implican exponentes fraccionarios: **(a)** $x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}} = x^{\frac{4}{6}} = x^{\frac{2}{3}}$ **(b)** $\left(2x^{\frac{1}{4}}\right)\left(3x^{\frac{1}{3}}\right) = 6x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} = 6x^{\frac{7}{12}}$ **(c)** $\left(3x^{-\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = 3x^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 3x^{-\frac{1}{6}} = \frac{3}{x^{\frac{1}{6}}}$ **(d)** $\frac{12x^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{1}{4}}} = 4x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}} = 4x^{\frac{5}{12}}$ **Problema de muestra 4** Simplificar estas expresiones algebraicas que implican exponentes fraccionarios. **(a)** $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{2}}$ **(b)** $\left(2x^{\frac{1}{3}}\right)\left(3x^{\frac{1}{2}}\right)$ **(c)** $\left(3x^{\frac{-1}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$ **(d)** $\frac{8x^{\frac{2}{3}}}{2x^{\frac{1}{4}}}$
Simplificar números complejos. (Sección 11.4/Objetivo 1)	Un número complejo es cualquier número que se pueda expresar en la forma $a + bi$ donde a y b son números reales y $i = \sqrt{-1}$. La propiedad $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ se mantiene si sólo a o b es negativo; por ende, se usa como base para simplificar radicales que contienen radicandos negativos.	Simplificar $\sqrt{-24}$. **Solución** $\sqrt{-24} = \sqrt{-1}\sqrt{24}$ $= i\sqrt{4}\sqrt{6} = 2i\sqrt{6}$ **Problema de muestra 5** Simplificar $\sqrt{-20}$.

(*continúa*)

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Sumar números complejos. (Sección 11.4/Objetivo 2)	La suma de números complejos se describe de la siguiente manera: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$	Sumar $(7 + 4i)$ y $(6 + 2i)$. **Solución** $(7 + 4i) + (6 + 2i) = (7 + 6) + (4 + 2)i$ $= 13 + 6i$ **Problema de muestra 6** Sumar $(6 + 3i)$ y $(4 - 2i)$.
Restar números complejos. (Sección 11.4/Objetivo 2)	La resta de números complejos se describe de la siguiente manera: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$	Restar $(6 + 2i)$ de $(7 + 4i)$. **Solución** $(7 + 4i) - (6 + 2i) = (7 - 6) + (4 - 2)i$ $= 1 + 2i$ **Problema de muestra 7** Restar $(5 + 2i)$ de $(7 - i)$.
Multiplicar números complejos. (Sección 11.4/Objetivo 3)	Se encuentra el producto de dos números complejos de la misma manera que se encuentra el producto de dos binomios.	Multiplicar $(5 + 2i)$ veces $(3 - 4i)$. **Solución** $(5 + 2i)(3 - 4i) = 5(3) - 5(4i) + 2i(3) - 2i(4i)$ $= 15 - 20i + 6i - 8i^2$ $= 15 - 14i - 8(-1)$ $= 15 - 14i + 8$ $= 23 - 14i$ **Problema de muestra 8** Multiplicar $(7 + i)$ veces $(3 - 2i)$.
Resolver ecuaciones cuadráticas que involucran números complejos. (Sección 11.5/Objetivo 2)	La propiedad "$x^2 = a$ si y sólo si $x = \pm ! \overline{a}$" puede usarse aquí.	Resolver $(x + 1)^2 = -8$. **Solución** $(x + 1)^2 = -8$ $x + 1 = \pm\sqrt{-8}$ $x + 1 = \pm i\sqrt{8}$ $x + 1 = \pm 2i\sqrt{2}$ $x = -1 \pm 2i\sqrt{2}$ El conjunto solución es $\{-1 - 2i\sqrt{2}, -1 + 2i\sqrt{2}\}$. **Problema de muestra 9** Resolver $(x - 3)^2 = -24$.

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Resolver ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado. (Sección 11.5/Objetivo 1)	El mismo enfoque usado para completar el cuadrado en el capítulo 10 es aplicable aquí.	Resolver $x^2 + 2x + 8 = 0$ completando el cuadrado. **Solución** $x^2 + 2x + 8 = 0$ $x^2 + 2x = -8$ $x^2 + 2x + 1 = -8 + 1$ $(x + 1)^2 = -7$ $x + 1 = \pm\sqrt{-7} = \pm i\sqrt{7}$ $x = -1 \pm i\sqrt{7}$ El conjunto solución es $\{-1 - i\sqrt{7}, -1 + i\sqrt{7}\}$. **Problema de muestra 10** Resolver $x^2 + 4x + 7 = 0$ completando el cuadrado.
Resolver ecuaciones cuadráticas usando la fórmula cuadrática. (Sección 11.5/Objetivo 1)	Se usa la fórmula cuadrática aquí de la misma manera que se usó en el capítulo 10.	Resolver $x^2 + 5x + 9 = 0$ usando la fórmula cuadrática. **Solución** $x^2 + 5x + 9 = 0$ $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(9)}}{2(1)}$ $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 - 36}}{2}$ $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{-11}}{2}$ $x = \dfrac{-5 \pm i\sqrt{11}}{2}$ El conjunto solución es $\left\{\dfrac{-5 - i\sqrt{11}}{2}, \dfrac{-5 + i\sqrt{11}}{2}\right\}$. **Problema de muestra 11** Resolver $x^2 - 3x + 5 = 0$ usando la fórmula cuadrática.
Usar gráficas de pastel, de barras y de líneas para mostrar y analizar datos. (Sección 11.6/Objetivo 2)	Una gráfica de pastel claramente ilustra las partes de un todo. Una gráfica de barras se usa para comparar varias categorías. Una gráfica de líneas es útil para indicar tendencias.	Para ejemplos de este material, regrese a la sección 11.6 y repase los ejemplos.

(*continúa*)

OBJETIVO	RESUMEN	EJEMPLO
Saber la definición de una relación. (Sección 11.7/Objetivo 1)	Una relación es un conjunto de pares ordenados. El dominio es el conjunto de todos los primeros componentes de los pares ordenados. El rango es el conjunto de todos los segundos componentes de los pares ordenados.	El conjunto de pares ordenados $\{(1, 2), (3, 6), (5, 7)\}$ es una relación con dominio de $\{1, 3, 5\}$ y rango de $\{2, 6, 7\}$. **Problema de muestra 12** El conjunto de pares ordenados $\{(1, 2), (3, 4), (5, 4)\}$ es una relación. Establecer el dominio y el rango.
Saber la definición de una función. (Sección 11.7/Objetivo 1)	Una función es una relación en la que no hay dos pares ordenados que tengan el mismo primer componente.	La relación $\{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9)\}$ es una función porque no hay dos pares ordenados que tengan el mismo primer componente. La relación $\{(0, 2), (0, -2), (1, 1), (-1, 3), (-1, -3)\}$ no es una función porque algunos de los pares ordenados contienen el mismo primer componente. **Problema de muestra 13** (a) ¿La relación $\{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$ es una función? (b) ¿La relación $\{(a, b), (c, d), (a, e)\}$ es una función?
Usar la notación de funciones. (Sección 11.7/Objetivo 2)	En la notación de funciones $f(x)$ se lee como “f de x” y se define como el valor de la función f en x.	Evalua $f(x) = 2x + 3$ en $x = 1$. **Solución** $f(x) = 2x + 3$ $f(1) = 2(1) + 3$ $f(1) = 5$ **Problema de muestra 14** Evaluat $f(x) = 3x - 7$ en $x = 6$.
Aplicar las funciones a problemas del mundo real. (Sección 11.8/Objetivo 1)	Las funciones pueden usarse para describir problemas del mundo real. Se pueden evaluar funciones con varios valores en el dominio para producir una tabla de pares ordenados. A partir de la tabla, se puede dibujar una gráfica de la función. Las gráficas de funciones lineales pueden usarse para aproximar el valor de la función para un valor específico en el dominio.	Para repasar este material, regrese a la sección 11.8 y estudie los ejemplos.

Capítulo 11 Conjunto de problemas de repaso

Para los problemas 1-3, usar la gráfica en la figura 11.34.

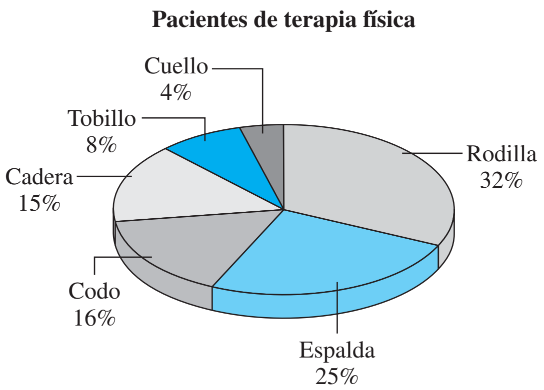


Figura 11.34

1. ¿Qué porcentaje de pacientes recibieron terapia de tobillo, cadera o rodilla?
2. ¿Qué porcentaje de pacientes recibieron terapia de cadera, cuello o espalda?
3. ¿Qué porcentaje de pacientes no recibieron consulta de rodilla o codo?

Para los problemas 4-6, usar la gráfica en la figura 11.35.

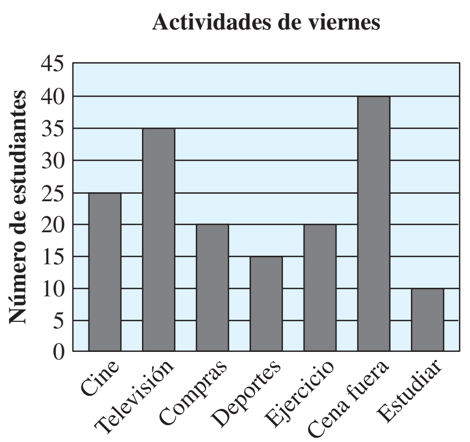


Figura 11.35

4. ¿Cuántos estudiantes más pasan las tardes de viernes viendo televisión y no estudiando?
5. ¿Cuáles dos actividades son igual de populares?
6. Ordene las actividades en orden de la más popular a la menos popular.

Para los problemas 7-10, usar la gráfica en la figura 11.36.

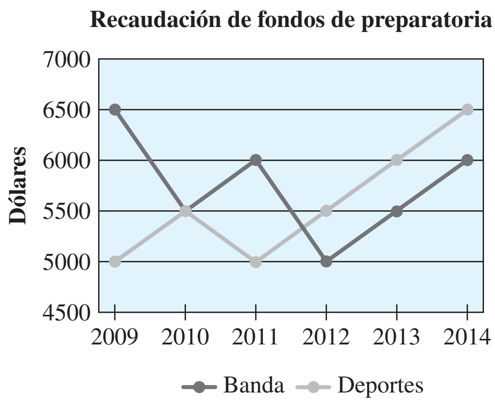


Figura 11.36

7. ¿En qué año la recaudación de fondos para la banda fue igual que para deportes?
8. ¿Cuál es la diferencia entre los fondos recaudados para la banda y para deportes en un solo año?
9. ¿Cuál es la cantidad promedio de fondos recaudados para la banda durante los 6 años?
10. ¿Cuál es la cantidad promedio de fondos recaudados para los deportes durante los 6 años?

Para los problemas 11-16, resolver y graficar las soluciones de cada problema.

11. $|3x - 5| = 7$ **12.** $|x - 4| < 1$

13. $|2x - 1| \geq 3$ **14.** $|3x - 2| \leq 4$

15. $|2x - 1| = 9$ **16.** $|5x - 2| \geq 6$

Para los problemas 17-31, evaluar cada expresión numérica.

17. $\sqrt{\dfrac{64}{36}}$ **18.** $-\sqrt{1}$ **19.** $\sqrt[3]{\dfrac{27}{64}}$

20. $\sqrt[3]{-125}$ **21.** $\sqrt[4]{\dfrac{81}{16}}$ **22.** $25^{\frac{3}{2}}$

23. $8^{\frac{5}{3}}$ **24.** $(-8)^{\frac{5}{3}}$ **25.** 4^{-2}

26. $4^{-\frac{1}{2}}$ **27.** $(32)^{-\frac{2}{5}}$ **28.** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}$

29. $2^{\frac{7}{4}} \cdot 2^{\frac{5}{4}}$ **30.** $3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{5}{3}}$ **31.** $\dfrac{3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{4}{3}}}$

Para los problemas 32-39, simplificar y expresar el resultado final sólo con exponentes positivos.

32. $x^{\frac{5}{6}} \cdot x^{\frac{5}{6}}$ **33.** $\left(3x^{\frac{1}{4}}\right)\left(2x^{\frac{3}{5}}\right)$

34. $\left(9a^{\frac{1}{2}}\right)\left(4a^{-\frac{1}{3}}\right)$ **35.** $\left(3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)^3$

36. $\left(25x^4y^6\right)^{\frac{1}{2}}$ **37.** $\dfrac{39n^{\frac{3}{5}}}{3n^{\frac{1}{4}}}$

38. $\dfrac{64n^{\frac{5}{8}}}{16n^{\frac{7}{8}}}$ **39.** $\left(\dfrac{6x^{\frac{2}{7}}}{3x^{-\frac{5}{7}}}\right)^3$

40. Resolver el sistema de ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} x + 3y - z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 12 \end{pmatrix}.$$

41. Resolver el sistema de ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} 2x + 3y - z = 4 \\ x + 2y + z = 7 \\ 3x + y + 2z = 13 \end{pmatrix}.$$

Para los problemas 42-55, realizar las operaciones indicadas con los números complejos.

42. $(5 - 7i) + (-4 + 9i)$

43. $(-3 + 2i) + (-4 - 7i)$

44. $(6 - 9i) - (4 - 5i)$

45. $(-5 + 3i) - (-8 + 7i)$

46. $(7 - 2i) - (6 - 4i) + (-2 + i)$

47. $(-4 + i) - (-4 - i) - (6 - 8i)$

48. $(2 + 5i)(3 + 8i)$ **49.** $(4 - 3i)(1 - 2i)$

50. $(-1 + i)(-2 + 6i)$ **51.** $(-3 - 3i)(7 + 8i)$

52. $(2 + 9i)(2 - 9i)$ **53.** $(-3 + 7i)(-3 - 7i)$

54. $(-3 - 8i)(3 + 8i)$ **55.** $(6 + 9i)(-1 - i)$

Para los problemas 56-65, resolver cada ecuación cuadrática.

56. $(x - 6)^2 = -25$ **57.** $n^2 + 2n = -7$

58. $x^2 - 2x + 17 = 0$ **59.** $x^2 - x + 7 = 0$

60. $2x^2 - x + 3 = 0$ **61.** $6x^2 - 11x + 3 = 0$

62. $-x^2 + 5x - 7 = 0$ **63.** $-2x^2 - 3x - 6 = 0$

64. $3x^2 + x + 5 = 0$ **65.** $x(4x + 1) = -3$

Para los problemas 66-71, establecer el dominio y el rango de la relación, y especificar si es una función.

66. $\left\{\left(\text{rojo}, \dfrac{1}{4}\right), \left(\text{azul}, \dfrac{1}{8}\right), \left(\text{verde}, \dfrac{5}{8}\right)\right\}$

67. $\{(3, 5), (4, 7), (5, 9)\}$

68. $\{(1, 8), (1, -8), (2, 16), (2, -16)\}$

69. $\{(2, 10), (3, 10), (4, 10), (5, 10)\}$

70. $\{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$

71. $\{(1, 4), (2, 8), (3, 15), (2, 10)\}$

Para los problemas 72, 81, determinar el dominio.

72. $f(x) = \dfrac{1}{x - 6}$ **73.** $f(x) = x^2 + 4$

74. $f(x) = 5x - 7$ **75.** $f(x) = \dfrac{3}{x + 4}$

76. $f(x) = \dfrac{5}{2x - 1}$ **77.** $f(x) = \dfrac{2}{3x + 1}$

78. Si $f(x) = 3x - 2$, hallar $f(-4), f(0), f(5)$ y $f(a)$.

79. Si $f(x) = \dfrac{6}{x - 4}$, hallar $f(-4), f(0), f(1)$ y $f(2)$.

80. Si $f(x) = \dfrac{x}{2x + 1}$, hallar $f(-3)$, $f(0)$, $f(2)$ y $f(3)$.

81. Si $f(x) = x^2 + 4x - 3$, hallar $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ y $f(2)$.

82. Un centro de correo cobra, en dólares, de acuerdo a la función $f(x) = 0.20 + 0.30x$ donde x es el peso de la carta en onzas.

(a) Hallar el cargo por mandar una carta de 2 onzas.
(b) Hallar el cargo por mandar una carta de 5 onzas.
(c) Graficar la función $f(x) = 0.20 + 0.30x$.
(d) Usando la gráfica de la parte (c), aproximar el cargo por 4 onzas, y después usar la función para hallar el cargo exacto.

83. Para determinar cuántos galones de aceite de cocina se necesitan, la compañía Fast Fry usa la función $f(x) = 12 + 0.2x$, donde x son las libras de comida a freír.

(a) Hallar el número de galones de aceite de cocina necesarios para freír 50 libras de comida.
(b) Hallar el número de galones de aceite de cocina necesarios para freír 100 libras de comida.
(c) Graficar la función $f(x) = 12 + 0.2x$.
(d) Usar la gráfica de la parte (c) para aproximar el número de galones de aceite de cocina necesarios para freír 80 libras de comida, y después usar la función para hallar la cantidad exacta.

Capítulo 11 Examen

Para los problemas 1-4, usar la gráfica en la figura 11.37.

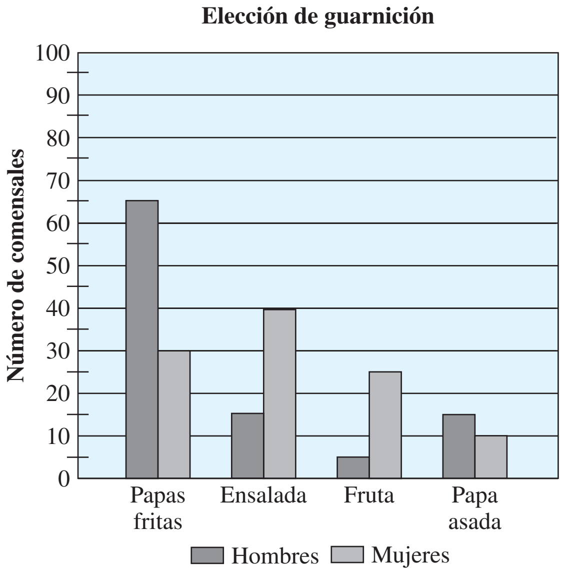


Figura 11.37

1. ¿Cuál guarnición eligieron más los hombres? ¿las mujeres?

2. ¿Cuántas más mujeres eligieron la ensalada en lugar de la papa asada?

3. ¿Cuántos más hombres eligieron las papas fritas en lugar de la fruta?

4. ¿Cuántos más hombres que mujeres eligieron las papas fritas como su guarnición?

5. Multiplicar y simplificar $(3 + i)(2 - 5i)$.

6. Expresar $\sqrt{-75}$ en términos de i y simplificar

7. Evaluar $36^{\frac{3}{2}}$.

8. Evaluar $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$.

9. Simplificar $\left(2x^{\frac{1}{4}}\right)\left(5x^{\frac{2}{3}}\right)$.

10. Simplificar $\dfrac{30n^{\frac{1}{2}}}{6n^{\frac{2}{5}}}$.

Para los problemas 11-19, resolver cada ecuación.

11. $(x - 2)^2 = -16$

12. $x^2 - 2x + 3 = 0$

13. $x^2 + 6x = -21$

14. $x^2 - 3x + 5 = 0$

15. $|x - 2| = 6$

16. $|4x + 5| = 2$

17. $|3x - 1| = -4$

18. $2x^2 - x + 1 = 0$

19. $3x^2 + 5x - 28 = 0$

20. Resolver la desigualdad $|x + 3| \geq 2$.

21. Resolver la desigualdad $|2x - 1| < 7$.

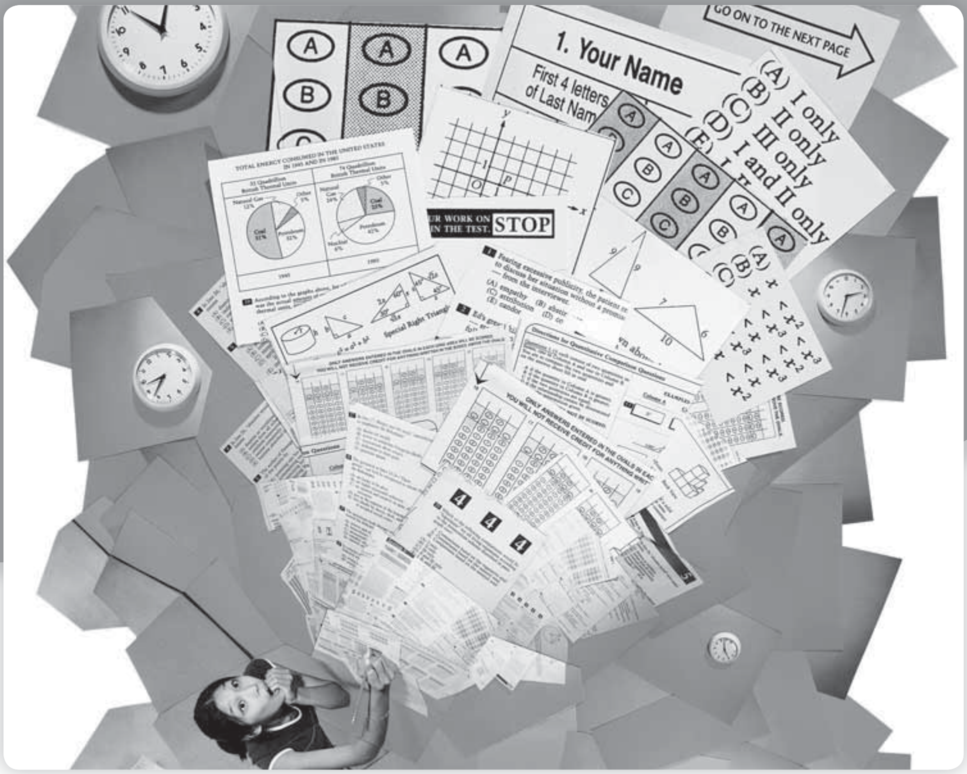
22. Determinar el dominio $f(x) = \dfrac{5}{2x - 7}$.

23. Si $f(x) = 5x - 6$, hallar $f(2), f(0), f(-3)$ y $f(4)$.

24. La ecuación $P(x) = 20 + 0.10x$ se usa para determinar el pago por concesión de vendedores, donde x es el número de ventas. Hallar la paga cuando las ventas alcanzan los \$4270.

25. Un vendedor de bienes raíces usa la función $f(x) = 0.07x$ para encontrar la comisión cuando x, el precio de venta de la casa, es \$200,000 o menor. Si el precio de venta de la casa es \$200,000, el vendedor usa la función $g(x) = 0.05x + 4000$. ¿Cuál será la comisión por una casa cuyo precio de venta es \$165,000? ¿Y por una casa que se vende a \$245,000?

12 Funciones



David McGlynn/The Image Bank/Getty Images

"Ni la comprensión ni el aprendizaje se puede llevar a cabo en una atmosfera de ansiedad"
ROSE KENNEDY

Tip de estudio

La ansiedad matemática es una reacción emocional o física extrema que algunos estudiantes padecen cuando se les pide que resuelvan problemas matemáticos. La ansiedad matemática puede causar un estado de pánico que vuelve a un estudiante incapaz de pensar racionalmente sobre las matemáticas. La ansiedad matemática es real, pero hay técnicas que pueden ayudar a superar este tipo de ansiedad.

La ansiedad matemática puede afectar en la forma en que resuelve la tarea o participa en clase. Los estudiantes que lidian con este trastorno tienen dificultad para empezar y terminar su tarea de matemáticas. La ansiedad puede incluso causar que se evite la tarea por completo. Hay algunas sugerencias para los estudiantes que sufren de ansiedad matemática:

- Hablar con el instructor desde el principio de cursos. Esto puede facilitar que participe en clase.
- Llegue temprano a clase para que pueda hacer preguntas mediante la escritura de las mismas en el pizarrón.
- Escriba un mail a su instructor con las preguntas que tenga, y pida que se respondan o en clase o por mail.

Hay muchos materiales disponibles para los alumnos que creen que la ansiedad matemática está interfiriendo en su aprendizaje. Revisar si el departamento de psicología de su escuela ofrece cursos o ayuda con la ansiedad matemática.

¿Puede pensar en una experiencia positiva asociada a las matemáticas?

Vista previa del capítulo

Uno de los conceptos fundamentales en las matemáticas es la función. Las funciones unen distintas áreas de las matemáticas, y ayudan a plantear matemáticamente una amplia variedad de problemas. Nos dan herramientas útiles para estudiar cantidad que podrían variar, es decir, cambiar una función producirá un cambio en otra. En este capítulo lo (1) introduciremos a ideas básicas pertenecientes a las funciones, (2) cómo el concepto de función se relaciona con conceptos de capítulos pasados, y (3) discutir las aplicaciones que se le dan a las funciones.

12.1 Funciones lineales y aplicaciones

OBJETIVOS

1. Graficar funciones lineales
2. Determinar una función lineal para condiciones específicas
3. Resolver problemas de aplicación que implican funciones lineales

Conforme use el concepto de función en el estudio de las matemáticas, le será útil clasificar ciertos tipos de funciones y familiarizarse con sus ecuaciones, características y gráficas. Esto mejorará las capacidades para resolución de problemas.

Cualquier función que se pueda escribir en la forma

$f(x)$ 5 ax 1 b

donde a y b son números reales, se llama **función lineal**. Las siguientes ecuaciones son ejemplos de funciones lineales.

$$f(x) = -2x + 4 \qquad f(x) = 3x - 6 \qquad f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{5}{6}$$

La ecuación $f(x)$ 5 ax 1 b también se puede escribir como y 5 ax 1 b. A partir de su trabajo en secciones anteriores, sabe que y 5 ax 1 b es la ecuación de una línea recta que tiene una pendiente de a y una ordenada al origen de b. Esta información se puede usar para graficar funciones lineales, como se ilustra mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo de salón de clases
Graficar $f(x) = -x - 2$.

EJEMPLO 1 Graficar $f(x)$ 5 2$2x$ 1 4.

Solución

Puesto que la ordenada al origen es 4, el punto (0, 4) está sobre la recta. Más aún, dado que la pendiente es 22 se puede mover dos unidades abajo y una unidad a la derecha de (0, 4) para determinar el punto (1, 2). En la figura 12.1 se dibuja la recta determinada por (0, 4) y (1, 2).

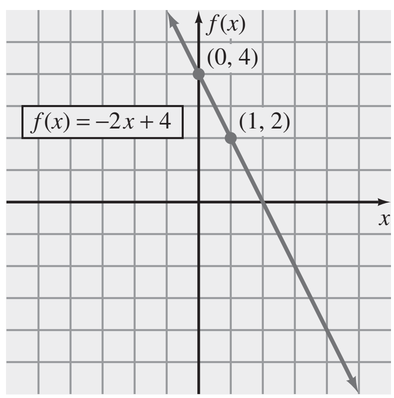


Figura 12.1

Note que en la figura 12.1, el eje vertical se marcó $f(x)$. También se le podría marcar y, porque y 5 $f(x)$. Se usará el marcaje $f(x)$ para la mayoría del trabajo con funciones; sin embargo, se continuará haciendo referencia a simetría en torno al eje y en lugar de simetría en torno al eje $f(x)$.

Recuerde de secciones anteriores que también se pueden graficar ecuaciones lineales al encontrar las dos intersecciones con los ejes. Este mismo método se puede usar con funciones lineales, como se ilustra con los siguientes dos ejemplos.

Ejemplo de salón de clases
Graficar $f(x) = 2x + 3$.

EJEMPLO 2 Graficar $f(x)$ 5 $3x$ 2 6.

Solución

Primero, se ve que $f(0)$ 5 26; por tanto, el punto (0, 26) está sobre la gráfica. Segundo, al hacer $3x$ 2 6 igual a cero y resolver para x, se obtiene

$$3x - 6 = 0$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$

Por tanto, $f(2)$ 5 3(2) 2 6 5 0 y el punto (2, 0) está sobre la gráfica. En la figura 12.2 se dibuja la recta determinada por (0, 26) y (2, 0).

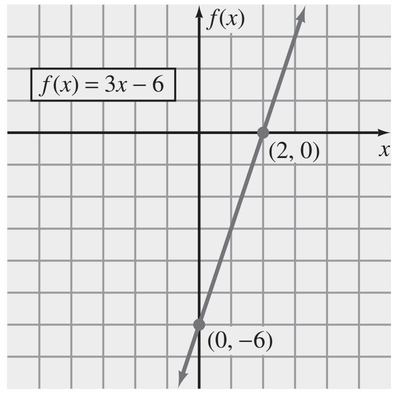


Figura 12.2

Ejemplo de salón de clases
Graficar $f(x) = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$.

EJEMPLO 3 Graficar la función $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{5}{6}$.

Solución

Puesto que $f(0) = \frac{5}{6}$, el punto $\left(0, \frac{5}{6}\right)$ está sobre la gráfica. Al hacer $\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}$ igual a cero y resolver para x, se obtiene

$$\frac{2}{3}x + \frac{5}{6} = 0$$
$$\frac{2}{3}x = -\frac{5}{6}$$
$$x = -\frac{5}{4}$$

Por tanto $f\left(-\frac{5}{4}\right) = 0$, y el punto $\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$ está sobre la gráfica. En la figura 12.3 se muestra la recta determinada por los dos puntos $\left(0, \frac{5}{6}\right)$ y $\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$.

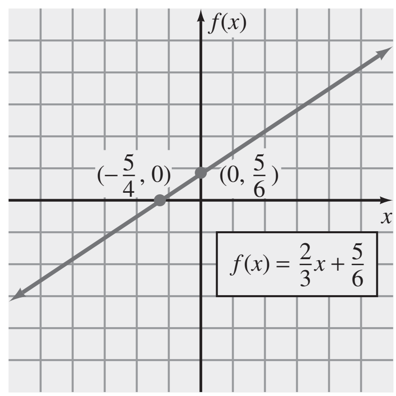


Figura 12.3

Conforme grafique funciones con notación de función, suele ser útil pensar en la ordenada de cada punto sobre la gráfica como el valor de la función en un valor específico de x. Geométricamente, el valor funcional es la distancia dirigida del punto desde el eje x. Esta idea se ilustra en la figura 12.4 para la función $f(x)$ 5 x y en la figura 12.5 para la función $f(x)$ 5 2. La función lineal $f(x)$ 5 x suele llamarse **función identidad**. Cualquier función lineal de la forma $f(x)$ 5 ax 1 b, donde a 5 0, se llama **función constante**.

A partir del trabajo previo con ecuaciones lineales, se sabe que las rectas paralelas tienen pendientes iguales y que dos rectas perpendiculares tienen pendientes que son recíprocos negativos

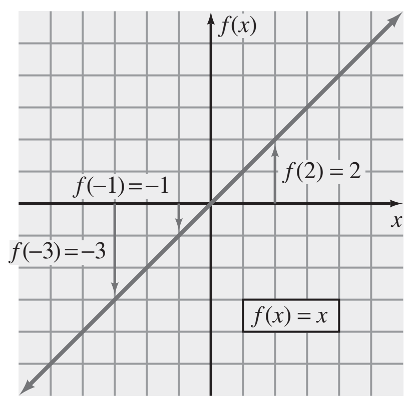


Figura 12.4

mutuos. Por ende, cuando se trabaja con funciones lineales de la forma $f(x)$ 5 ax 1 b, es fácil reconocer rectas paralelas y perpendiculares. Por ejemplo, las rectas determinadas por $f(x)$ 5 $0.21x$ 1 4 y $g(x)$ 5 $0.21x$ 2 3 son rectas paralelas porque ambas rectas tienen una pendiente de 0.21 y diferentes ordenadas al origen. Use una calculadora graficadora para dibujar estas dos funciones junto con $h(x)$ 5 $0.21x$ 1 2 y $p(x)$ 5 $0.21x$ 2 7 (figura 12.6).

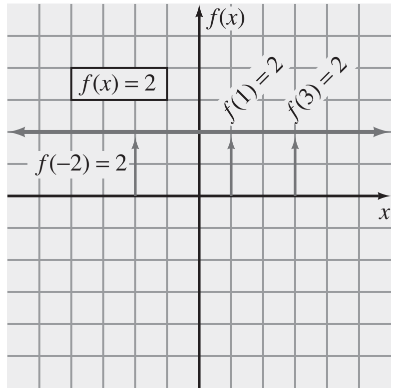


Figura 12.5

Las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{2}{5}x + 8$ y $g(x) = -\frac{5}{2}x - 4$ son líneas perpendiculares porque las pendientes $\frac{2}{5}$ y $-\frac{5}{2}$ de las dos rectas son recíprocos negativos mutuos. De nuevo, con la calculadora graficadora, dibuje estas dos funciones junto con $h(x) = -\frac{5}{2}x + 2$ y $p(x) = -\frac{5}{2}x - 6$ (figura 12.7). Si las rectas no parecen ser perpendiculares, tal vez quiera cambiar la ventana con una opción de aproximación (*zoom*).

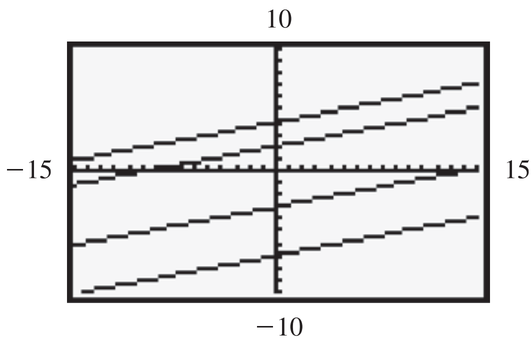


Figura 12.6

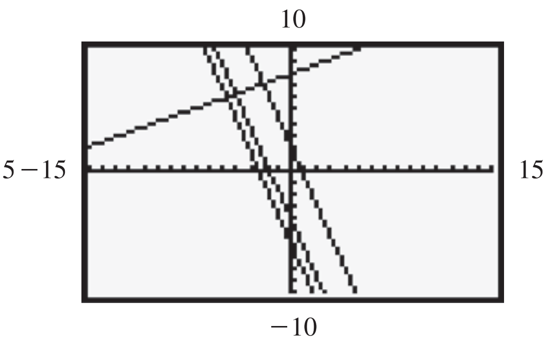


Figura 12.7

Observaciones: Una propiedad de la geometría plana afirma que, si dos o más rectas son perpendiculares a la misma recta, entonces son rectas paralelas. La figura 12.7 es una buena ilustración de dicha propiedad.

La notación de función también se puede usar para determinar funciones lineales que satisfagan ciertas condiciones. Vea cómo funciona.

Ejemplo de salón de clases
Determine la función lineal cuya gráfica sea una recta con una pendiente de $-\frac{2}{3}$ que contiene el punto $(-3, 4)$.

EJEMPLO 4

Determine la función lineal cuya gráfica sea una recta con una pendiente de $\frac{1}{4}$ que contiene el punto (2, 5).

Solución

Puede sustituir $\frac{1}{4}$ por a en la ecuación $f(x)$ 5 ax 1 b para obtener $f(x)$ 5 $\frac{1}{4}x$ 1 b. El hecho de que la recta contenga al punto (2, 5) significa que $f(2)$ 5 5. Por tanto,

$$f(2) = \frac{1}{4}(2) + b = 5$$

$$b = \frac{9}{2}$$

y la función es $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$.

Aplicaciones de funciones lineales

En la sección 7.2 se trabajó con algunas aplicaciones de las ecuaciones lineales. Ahora considere algunas aplicaciones adicionales que usan el concepto de función lineal para conectar las matemáticas con el mundo real.

Ejemplo de salón de clases

El costo de encender una bombilla de 75 watts está dado por la función $c(h)$ 0.0046h, donde h representa el número de horas que está encendida la bombilla.

(a) ¿Cuánto cuesta encender una bombilla de 75 watts durante 4 horas por noche, durante dos semanas?

(b) Graficar la función $c(h)$ 0.0045h.

(c) ¿Cuál es el costo aproximado de dejar una bombilla encendida durante dos semanas?

EJEMPLO 5 Aplique su habilidad

El costo de encender una bombilla de 60 watts está dado por la función $c(h)$ 0.0036h, donde h representa el número de horas que está encendida la bombilla.

(a) ¿Cuánto cuesta encender una bombilla de 60 watts durante 3 horas por noche, durante un mes de 30 días?

(b) Grafique la función $c(h)$ 5 0.0036h.

(c) Suponga que en un clóset deja encendida una bombilla de 60 watts durante una semana antes de que se percate y la apague. Use la gráfica del inciso (b) para aproximar el costo de dejar encendida la bombilla durante una semana. Luego use la función para encontrar el costo exacto.

Soluciones

(a) $c(90)$ 5 0.0036(90) 5 0.324. El costo, al centavo más cercano, es $0.32.

(b) Dado que $c(0)$ 5 0 y $c(100)$ 5 0.36, puede usar los puntos (0, 0) y (100, 0.36) para graficar la función lineal $c(h)$ 5 0.0036h (figura 12.8).

(c) Si la bombilla se enciende durante 24 horas por día durante una semana, está encendida durante 24(7) 5 168 horas. Al trazar la gráfica puede aproximar 168 sobre el eje horizontal, y luego trazar a través del eje vertical. Parece que costará aproximadamente 60 centavos. Al usar $c(h)$ 5 0.0036h, se obtiene exactamente $c(168)$ 5 0.0036(168) 5 0.6048.

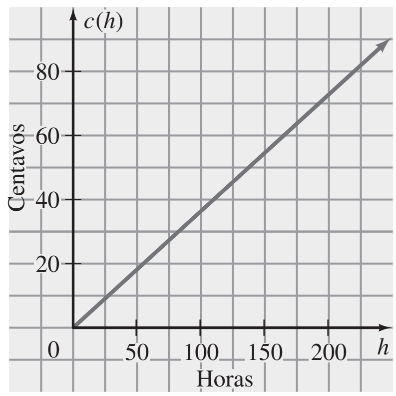


Figura 12.8

Ejemplo de salón de clases

La compañía Great Internet Services cobra una tarifa mensual fija por cada hora de uso. En dos meses diferentes, los cargos fueron $49.20 por 36 horas de uso y $64.40 por 52 horas de uso. Determinar la función lineal que Great Internet Services usa para determinar el cobro mensual.

EJEMPLO 6 Aplique su habilidad

La compañía telefónica Clear Call Cellular tiene una tarifa mensual fija, más cierta cantidad por minuto de tiempo aire. En mayo, Anna usó 720 minutos de tiempo aire y su cuenta fue de $54.80. En el mes de junio, usó 510 minutos de tiempo aire y su cuenta fue de $46.40. Determinar la función lineal que Clear Call Cellular usa para determinar sus cuentas mensuales.

Solución

La función lineal $f(x)$ 5 ax 1 b, donde x representa el número de minutos de tiempo aire, modela esta situación. Las cuentas de Anna pueden representarse con los pares ordenados

(720, 54.80) y (510, 46.40). Con estos dos pares ordenados se puede determinar a, que es la pendiente de la recta.

$$a = \frac{46.40 - 54.80}{510 - 720} = \frac{-8.4}{-210} = 0.04$$

Así, $f(x)$ 5 ax 1 b se vuelve $f(x)$ 5 0.04x 1 b. Ahora se puede usar cualquier par para determinar el valor de b. Usando (510, 46.40), se obtiene $f(510)$ 5 46.40, así que

$$f(510) = 0.04(510) + b = 46.40$$
$$b = 26$$

La función lineal es $f(x)$ 5 0.04x 1 26. En otras palabras, Clear Call Cellular cobra una tarifa mensual de \$26.00 más \$0.04 por minuto de tiempo aire.

Ejemplo de salón de clases
Suponga que Janet está considerando cambiarse a la compañía Super Internet Services, la cual cobra una tarifa mensual de \$39 y 0.40 por hora de uso. Comparada con la compañía de Internet en el ejemplo anterior, ¿cuál de los dos servicios cobra menos por sus servicios?

Use Super Internet Services si se usarán más de 44 horas cada mes. Si serán 43 horas o menos, use Great Internet Services.

EJEMPLO 7 Aplique su habilidad

Suponga que Anna (del ejemplo 6) está pensando en cambiarse a la compañía telefónica Simple Cellular, la cual cobra una tarifa mensual de \$14 más \$0.06 por minuto de tiempo aire. ¿Debería Anna usar Clear Call Cellular del ejemplo 6 o Simple Cellular?

Solución

La función lineal $f(x)$ 5 0.06x 1 14, donde x representa el número de minutos de tiempo aire, se puede usar para determinar los cargos mensuales de Simple Cellular. Grafique esta función y $f(x)$ 5 0.04x 1 26 del ejemplo 6 sobre el mismo conjunto de ejes (vea la figura 12.9).

Ahora note que ambas funciones tienen el mismo valor en el punto de intersección de las dos rectas. Para encontrar las coordenadas de este punto, se puede establecer 0.06x 1 14 igual a 0.04x 1 26 y resolver para x:

$$0.06x + 14 = 0.04x + 26$$
$$0.02x = 12$$
$$x = 600$$

Si x 5 600, entonces 0.06(600) 1 14 5 50, y el punto de intersección es (600, 50). De nuevo, de las rectas en la figura 12.9, se ve que Anna debería cambiar a Simple Cellular si usa menos de 600 minutos de tiempo aire, pero debería quedarse con Clear Call Cellular si planea usar más de 600 minutos de tiempo aire.

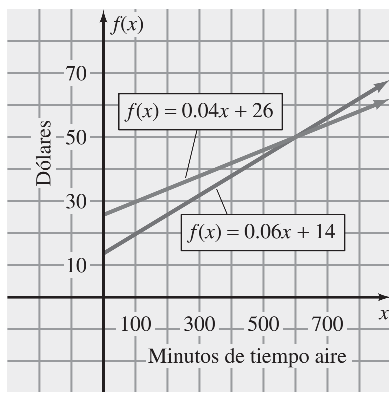


Figura 12.9

Examen de conceptos 12.1

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. Cualquier función en la forma $f(x)$ 5 ax^n 1 b, donde a, b y c son números reales, es una función lineal.
2. Geométricamente, el valor funcional es la distancia dirigida del eje y.
3. La gráfica de una recta horizontal representa una función.
4. La función lineal $f(x)$ 5 1 es llamada función identidad.
5. Las gráficas de $f(x)$ 5 mx 1 b y $f(x)$ 5 2mx 1 b son rectas perpendiculares.
6. Cada gráfica de rectas representa una función.
7. Si una ciudad tiene un impuesto del 7% en los dólares gastados en habitaciones de hotel, entonces el impuesto es una función lineal de los dólares gastados en habitaciones de hotel.

8. Si el sueldo de una persona varía directamente con el número de horas trabajadas, entonces el sueldo es una función lineal de las horas trabajadas.

9. La ecuación $f(x)$ 5 ax 1 b también puede escribirse como y 5 ax 1 b.

10. La gráfica de la función lineal $f(x)$ 5 24x 1 5 es una recta con una pendiente de 24.

Conjunto de problemas 12.1

Para los problemas 1-16 graficar cada una de las funciones lineales. **(Objectivo 1)** Ver la sección de respuestas.

1. $f(x) = 2x - 4$

2. $f(x) = 3x + 3$

3. $f(x) = -x + 3$

4. $f(x) = -2x + 6$

5. $f(x) = 3x + 9$

6. $f(x) = 2x - 6$

7. $f(x) = -4x - 4$

8. $f(x) = -x - 5$

9. $f(x) = -3x$

10. $f(\mathrm{x}) = -4x$

11. $f(x) = -3$

12. $f(x) = -1$

13. $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

14. $f(x) = \frac{2}{3}x + 4$

15. $f(x) = -\frac{3}{4}x - 6$

16. $f(x) = -\frac{1}{2}x - 1$

Para los problemas 17-22, determinar la ecuación lineal para las condiciones establecidas. **(Objectivo 2)**

17. Determinar la función lineal cuya gráfica es una recta con una pendiente de $\frac{2}{3}$ y contiene el punto (21, 3).

18. Determinar la función lineal cuya gráfica es una recta con una pendiente de $-\frac{3}{5}$ y contiene el punto (4, 25).

19. Determinar la función lineal cuya gráfica es una recta que contiene los puntos (23, 21) y (2, 26).

20. Si una gráfica es una recta que contiene los puntos (22, 23) y (4, 3), determinar la función lineal.

21. Si una gráfica es una recta que es perpendicular a la línea $g(x)$ 5 5x 2 2 y contiene el punto (6, 3), determinar la función lineal.

22. Si una gráfica es una recta que es paralela a la línea $g(x)$ 5 23x 2 4 y contiene el punto (2, 7), determinar la función lineal.

Para los problemas 23-30, aplicar los conceptos de funciones lineales para responder las preguntas. **(Objectivo 3)**

23. El costo por dejar encendida una bombilla de 75 watts está dado por la función $c(h)$ 5 0.0045h, donde h representa el número de horas que la bombilla está encendida.

(a) ¿Cuánto cuesta encender una bombilla de 75 watts durante 3 horas por noche durante un mes de 31 días? Exprese su respuesta al centavo más cercano.

(b) Grafique la función $c(h)$ 5 0.0045h.

(c) Use la gráfica de la parte (b) para aproximar el costo de encender una bombilla de 75 watts durante 225 horas.

(d) Use $c(h)$ 5 0.0045h para encontrar el costo exacto, al centavo más cercano, de encender una bombilla de 75 watts durante 225 horas.

24. Rent-Me Car Rental cobra \$15 por día más \$0.22 por milla para rentar un automóvil. Determine una función lineal que se pueda usar para calcular las rentas de automóviles diarias. Luego, use dicha función para determinar el costo de rentar un automóvil durante un día y conducir 175 millas; 220 millas; 300 millas; 460 millas.

25. Suponga que la agencia ABC Car Rental cobra una tarifa fija por día más una cantidad por milla al rentar un automóvil. Heidi rentó un automóvil un día y pagó \$80 por 200 millas. Otro día, rentó un automóvil de la misma agencia y pagó \$117.50 por 350 millas. Determine la función lineal que usa la agencia para calcular sus tarifas por día.

26. Suponga que Heidi (del problema 25) también también tiene acceso a Speedy Rental Car, la cual cobra una tarifa mensual de \$15.00 más \$0.31 por milla. ¿Heidi debería usar ABC Car Rental del problema 25 o Speedy Rental Car? ABC para viajes de más de 250 millas y Speedy para viajes de menos de 250 millas.

27. La agencia Hybrid Only Car Rental usa la función $f(x)$ 5 26 para cualquier uso diario de un automóvil hasta e incluidas 200 millas. Para conducir más de 200 millas por día, use la función $g(x)$ 5 26 1 0.15(x 2 200) para determinar los cargos. ¿Cuánto cobraría la compañía por conducir diariamente 150 millas? ¿230 millas? ¿360 millas? ¿430 millas?

28. Zack quiere vender cinco artículos que le costaron \$1.20, \$2.30, \$6.50, \$12 y \$15.60. Quiere obtener una ganancia de 60% del costo. Cree una función que pueda usar para determinar el precio de venta de cada artículo y luego use la función para calcular cada precio de venta.

29. “Todas las mercancías tienen 20% de descuento sobre el precio marcado” es una señal en un campo de golf local. Cree una función y luego úsela para determinar cuánto tiene que pagar por cada uno de los artículos marcados: un sombrero de \$9.50, una sombrilla de \$15, un par de zapatos de golf de \$75, unos guantes de golf de \$12.50, un juego de palos de golf de \$750.

30. El método de depreciación lineal supone que un artículo se deprecia la misma cantidad cada año. Suponga que una nueva pieza de maquinaria cuesta \$32 500 y se deprecia \$1950 cada año durante t años.

(a) Establecer una función lineal que produzca el valor de la maquinaria después de t años.

(b) Encontrar el valor de la maquinaria después de 5 años.

(c) Encontrar el valor de la maquinaria después de 8 años.

(d) Graficar la función de la parte (a).

(e) Usar la gráfica de la parte (d) para aproximar cuántos años tarda en volverse cero el valor de la maquinaria.

(f) Usar la función para determinar cuánto tiempo debe transcurir para que el valor de la maquinaria se vuelva cero.

31. El número de días de quimioterapia requeridos para cierto cáncer depende del tamaño del tumor en milímetros. La función $D(m)$ 5 $4m$ 1 5, donde m es el tamaño del tumor en milímetros, puede usarse para determinar el número de días de quimioterapia. Hallar el número de días requeridos de quimioterapia para tumores que miden 4 milímetros, 6 milímetros y 10 milímetros. 21 días, 29 días, 45 días.

32. Angela tiene tres acuarios con volumen de 10 galones, 20 galones y 50 galones. Usa la función $F(v) = \frac{1}{2}v + 4$ para determinar el número de peces que pueden vivir cómodamente en un acuario, donde v es el volumen del acuario en galones. Use la función para determinar el número de peces para cada acuario. 9 peces, 14 peces y 29 peces.

Pensamientos en palabras

33. $f(x)$ 5 $(3x$ 2 $2)$ 2 $(2x$ 1 $1)$ es una función lineal? Explique su respuesta.

34. Suponga que Bianca camina a un ritmo constante de 3 millas por hora. Explique qué significa que la distancia que Bianca camina es una función lineal del tiempo que ella camina.

Más investigación

Para los problemas 35-39 graficar cada una de las funciones.

35. $f(x) = |x|$ **36.** $f(x) = x + |x|$ **37.** $f(x) = x - |x|$ **38.** $f(x) = |x| - x$ **39.** $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

Actividades con calculadora graficadora

40. Usar una calculadora graficadora para comprobar sus respuestas para los problemas 1-16.

41. Usar una calculadora graficadora para resolver las partes(b) y (c) del ejemplo 5.

42. Usar una calculadora graficadora para comprobar su solución al ejemplo 7.

43. Usar una calculadora graficadora para resolver las partes(b) y (c) del problema 23.

44. Usar una calculadora graficadora para resolver las partes (d) y (e) del problema 30.

45. Usar una calculadora graficadora para comprobar sus gráficas para los problemas 35-39.

46. **(a)** Graficar $f(x)$ 5 $|x|$, $f(x)$ 5 $2|x|$, $f(x)$ 5 $4|x|$ y $f(x) = \frac{1}{2}|x|$ sobre el mismo conjunto de ejes.

(b) Graficar $f(x)$ 5 $|x|$, $f(x)$ 5 2$|x|$, $f(x)$ 5 23$|x|$ y $f(x) = -\frac{1}{2}|x|$ sobre el mismo conjunto de ejes.

(c) Usar los resultados de los incisos (a) y (b) para hacer una conjetura acerca de las gráficas de $f(x)$ 5 $a|x|$, donde a es un número real distinto de cero.

(d) Grafcar $f(x)$ 5 $|x|$, $f(x)$ 5 $|x|$ 1 3, $f(x)$ 5 $|x|$ 2 4 y $f(x)$ 5 $|x|$ 1 1 sobre el mismo conjunto de ejes. Haga una conjetura acerca de las gráficas de $f(x)$ 5 $|x|$ 1 k, donde k es un número real distinto de cero.

(e) Graficar $f(x)$ 5 $|x|$, $f(x)$ 5 $|x$ 2 $3|$, $f(x)$ 5 $|x$ 2 $1|$ y $f(x)$ 5 $|x$ 1 $4|$ sobre el mismo conjunto de ejes. Haga una conjetura acerca de las gráficas de $f(x)$ 5 $|x$ 2 $h|$, donde h es un número real distinto de cero.

(f) Sobre la base de los resultados de los incisos (a) a (e), bosqueje cada una de las siguientes gráficas. Luego use una calculadora graficadora para comprobarlos.

(1) $f(x) = |x - 2| + 3$

(2) $f(x) = |x + 1| - 4$

(3) $f(x) = 2|x - 4| - 1$

(4) $f(x) = -3|x + 2| + 4$

(5) $f(x) = -\frac{1}{2}|x - 3| - 2$

Respuestas al examen de conceptos

1. Falso **2.** Falso **3.** Cierto **4.** Falso **5.** Falso **6.** Falso **7.** Cierto **8.** Cierto **9.** Cierto **10.** Cierto

12.2 Funciones cuadráticas

OBJETIVOS

1. Graficar funciones cuadráticas de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$
2. Graficar funciones cuadráticas al cambiar de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ a la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$
3. Graficar una función definida en partes

Cualquier función que se pueda escribir en la forma

$$f(x)\ 5\ ax^2\ 1\ bx\ 1\ c$$

donde a, b y c son números reales con a Z 0, se llama **función cuadrática**. La gráfica de cualquier función cuadrática es una **parábola**. Mientras trabaje con parábolas se usará el vocabulario indicado en la figura 12.10.

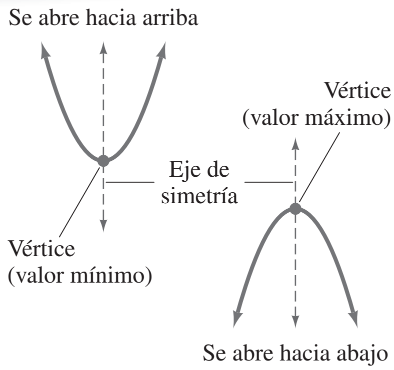


Figura 12.10

La graficación de una parábola depende de:

1. Determinar las coordenadas del vértice.
2. Determinar si la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo.
3. Localizar al menos dos puntos en puntos opuestos del eje de simetría.

También se tiene interés en comparar parábolas producidas por ecuaciones como $f(x)$ 5 x^2 1 k, $f(x)$ 5 ax^2, $f(x)$ 5 $(x$ 2 $h)^2$ y $f(x)$ 5 $a(x$ 2 $h)^2$ 1 k con la parábola básica producida por la ecuación $f(x)$ 5 x^2. En la figura 12.11 se muestra la gráfica de $f(x)$ 5 x^2. Note que el vértice de la parábola está en el origen, (0, 0), y la gráfica es simétrica con el eje y, o $f(x)$. Recuerde que una ecuación muestra simetría con respecto al eje y si al sustituir x con 2x se produce una ecuación equivalente. Por tanto, dado que $f($2$x)$ 5 $($2$x)^2$ 5 x^2, la ecuación muestra simetría con respecto al eje y.

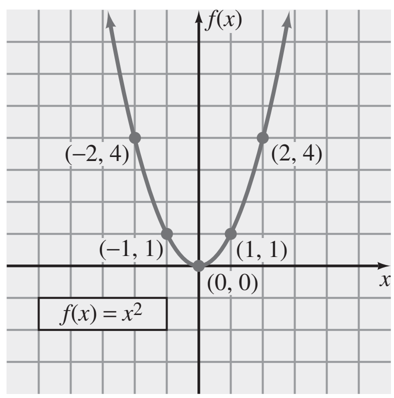


Figura 12.11

Ahora considere una ecuación de la forma $f(x)$ 5 x^2 1 k, donde k es una constante. (Tenga en mente que todas las ecuaciones de este tipo tienen simetría al eje y).

Ejemplo de salón de clases
Graficar $y = x^2 - 1$.

EJEMPLO 1 Graficar $f(x)$ 5 x^2 2 2.

Solución

Elabore una tabla para realizar algunas comparaciones de valores de función. Puesto que la gráfica muestra simetría con respecto al eje y, sólo se calcularán valores positivos y luego se reflejarán los puntos a través del eje y.

x	$f(x) = x^2$	$f(x) = x^2 - 2$
0	0	22
1	1	21
2	4	2
3	9	7

Note que los valores funcionales para $f(x)$ 5 x^2 2 2 son 2 menos que los correspondientes valores funcionales para $f(x)$ 5 x^2. Por ende, la gráfica de $f(x)$ 5 x^2 2 2 es la misma que la parábola de $f(x)$ 5 x^2 excepto que se movió hacia abajo dos unidades (figura 12.12).

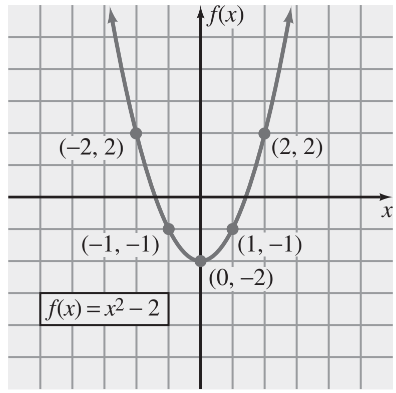


Figura 12.12

En general, la gráfica de una función cuadrática de la forma $f(x)$ 5 x^2 1 k es la misma de la gráfica de $f(x)$ 5 x^2, excepto que se movió arriba o abajo $|k|$ unidades, dependiendo de si k es positiva o negativa. Se dice que la gráfica de $f(x)$ 5 x^2 1 k es una **traslación vertical** de la gráfica de $f(x)$ 5 x^2.

Ahora considere algunas funciones cuadráticas de la forma $f(x)$ 5 ax^2, donde a es una constante distinta de cero. (Las gráficas de estas ecuaciones también tienen simetría con respecto al eje y.)

Ejemplo de salón de clases

Graficar $y = 4x^2$.

EJEMPLO 2 Graficar $f(x)$ 5 $2x^2$.

Solución

Elabore una tabla para hacer algunas comparaciones de valores funcionales. Note que, en la tabla, los valores funcionales para $f(x)$ 5 $2x^2$ son *el doble* de los valores funcionales correspondientes para $f(x)$ 5 x^2. Por tanto, la parábola asociada con $f(x)$ 5 $2x^2$ tiene el mismo vértice (el origen) que la gráfica de $f(x)$ 5 x^2, pero es *más estrecha*, como se muestra en la figura 12.13.

x	$f(x) = x^2$	$f(x) = 2x^2$
0	0	0
1	1	2
2	4	8
3	9	18

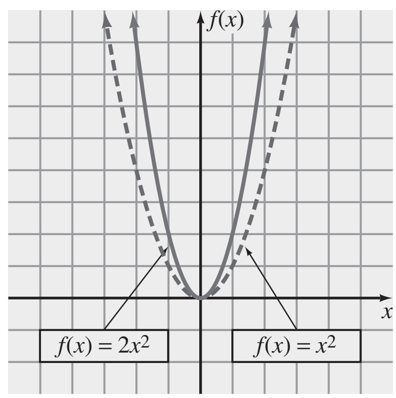


Figura 12.13

Ejemplo de salón de clases

Graficar $y = \frac{1}{3}x^2$.

EJEMPLO 3 Graficar $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$.

Solución

Como se ve en la tabla, los valores funcionales para $f(x)$ 5 $\frac{1}{2}x^2$ son *la mitad* de los valores funcionales correspondientes para $f(x)$ 5 x^2. Por lo tanto, la parábola asociada con $f(x)$ 5 $\frac{1}{2}$ x^2 es *más ancha* que la parábola básica, como se muestra en la figura 12.14.

x	$f(x) = x^2$	$f(x) = \frac{1}{2}x^2$
0	0	0
1	1	$\frac{1}{2}$
2	4	2
3	9	$\frac{9}{2}$
4	16	8

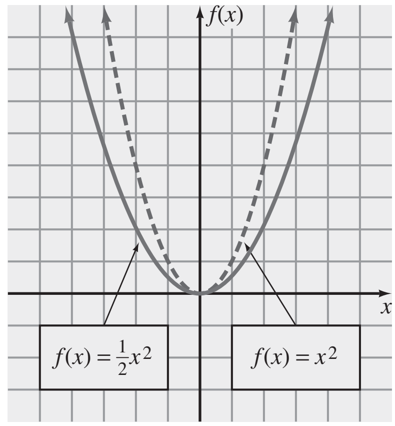


Figura 12.14

EJEMPLO 4 Graficar $f(x)$ 5 $2x^2$.

Solución

Debe ser evidente que los valores funcionales para $f(x)$ 5 $2x^2$ son los opuestos de los valores funcionales correspondientes para $f(x)$ 5 x^2. En consecuencia, la gráfica de $f(x)$ 5 $2x^2$ es una reflexión a través del eje x de la parábola básica (figura 12.15).

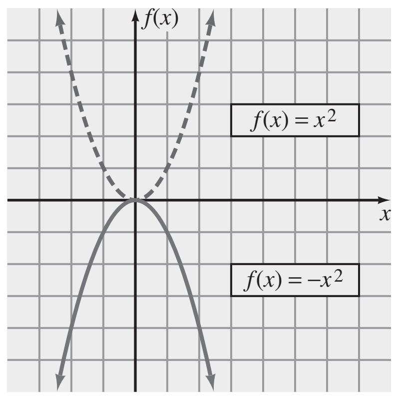


Figura 12.15

> En general, la gráfica de la función cuadrática de la forma $f(x)$ 5 ax^2 tiene su vértice en el origen y se abre hacia arriba si a es positiva y hacia abajo si a es negativa. La parábola es más estrecha que la parábola básica si $|a| > 1$ y más ancha si $|a| < 1$.

La investigación de las funciones cuadráticas continúa con la consideración de aquellas con la forma $f(x)$ 5 $(x$ 2 $h)^2$ donde h es una constante distinta de cero.

Ejemplo de salón de clases
Graficar $y = (x - 1)^2$.

EJEMPLO 5 Graficar $f(x)$ 5 $(x$ 2 $3)^2$.

Solución

Una tabla de valores muy extensa ilustra un patrón. Note que $f(x)$ 5 $(x$ 2 $3)^2$ y $f(x)$ 5 x^2 toman los mismos valores funcionales pero para diferentes valores de x. Más específicamente, si $f(x)$ 5 x^2 logra cierto valor funcional en un valor específico de x, entonces $f(x)$ 5 $(x$ 2 $3)^2$ logra el mismo valor funcional en x 1 3. En otras palabras, la gráfica de $f(x)$ 5 $(x$ 2 $3)^2$ es la gráfica de $f(x)$ 5 x^2 movida *tres unidades hacia la derecha* (figura 12.16).

x	$f(x) = x^2$	$f(x) = (x - 3)^2$
-1	1	16
0	0	9
1	1	4
2	4	1
3	9	0
4	16	1
5	25	4
6	36	9
7	49	16

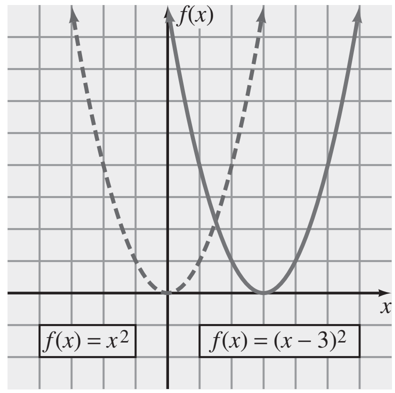


Figura 12.16

En general, la gráfica de una función cuadrática de la forma $f(x)$ 5 $(x$ 2 $h)^2$ es la misma que la gráfica de $f(x)$ 5 x^2, excepto que se movió hacia la derecha h unidades si h es positiva o se movió a la izquierda $|h|$ unidades si h es negativa. Se dice que la gráfica de $f(x)$ 5 $(x$ 2 $h)^2$ es una **traslación horizontal** de la gráfica de $f(x) = x^2$.

El siguiente diagrama resume el trabajo realizado hasta el momento para graficar funciones cuadráticas.

$f(x) = x^2$ — Parábola básica

$f(x) = x^2 + k$ — Mueve la parábola hacia arriba o hacia abajo

$f(x) = ax^2$ — Afecta el ancho y la forma en que se abre la parábola

$f(x) = (x - h)^2$ — Mueve la parábola a la derecha o izquierda

Se han estudiado, por separado, los efectos que a, h y k tienen sobre la gráfica de una función cuadrática. Sin embargo, es necesario considerar la forma general de una función cuadrática cuando todos estos efectos están presentes.

En general, la gráfica de una función cuadrática de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$ tiene su vértice en (h, k) y se abre hacia arriba si a es positiva y hacia abajo si a es negativa. La parábola es más estrecha que la parábola básica si $|a| > 1$ y más ancha si $|a| < 1$.

Ejemplo de salón de clases
Graficar $y = 3(x + 2)^2 - 2$.

EJEMPLO 6 Graficar $f(x)$ 5 $3(x$ 2 $2)^2$ 1 1.

Solución

$$f(x) = 3(x - 2)^2 + 1$$

Estrecha la parábola y la abre hacia arriba (3); Mueve la parábola 2 unidades hacia la derecha (− 2); Mueve la parábola una unidad hacia arriba (+ 1)

El vértice es (2, 1) y la línea x 5 2 es el eje de simetría. Si x 5 1, entonces $f(1)$ 5 $3(1$ 2 $2)^2$ 1 1 5 4. Por lo tanto, el punto (1, 4) está sobre la gráfica y también su reflejo, (3, 4), a través de la recta de simetría. La parábola se muestra en la figura 12.17.

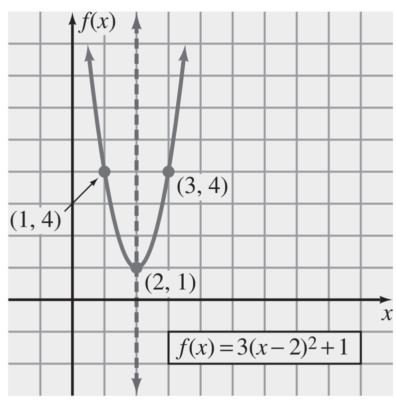


Figura 12.17

Ejemplo de salón de clases

Graficar $y = -\frac{1}{3}(x - 1)^2 + 3$.

EJEMPLO 7 Graficar $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 - 3$.

Solución

$$f(x) = -\frac{1}{2}[x - (-1)]^2 - 3$$

Ensancha la parábola y la abre hacia abajo

Mueve la parábola una unidad hacia la izquierda

Mueve la parábola 3 unidades hacia abajo

El vértice está en (21, 23) y la recta x 5 21 es el eje de simetría. Si x 5 0, entonces $f(x)$ 5 $-\frac{1}{2}(0 + 1)^2 - 3 = -\frac{7}{2}$. Por tanto, el punto $\left(0, -\frac{7}{2}\right)$ está sobre la gráfica, al igual que su reflejo, $\left(-2, -\frac{7}{2}\right)$, a través de la línea de simetría. La parábola se muestra en la figura 12.18.

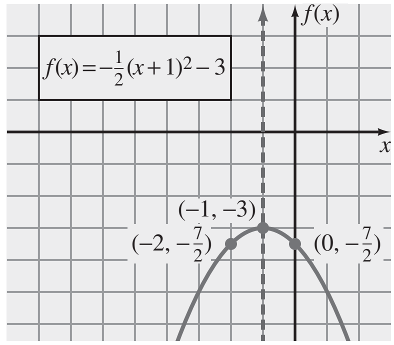


Figura 12.18

Funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$

Ahora está listo para graficar funciones cuadráticas de la forma $f(x)$ 5 ax^2 1 bx 1 c. El método general es cambiar de la forma $f(x)$ 5 ax^2 1 bx 1 c a la forma $f(x)$ 5 $a(x$ 2 $h)^2$ 1 k y luego proceder como se hizo en los ejemplos 6 y 7. El proceso de *completar el cuadrado* sirve como base para hacer el cambio en la forma. Considere dos ejemplos para ilustrar los detalles.

Ejemplo de salón de clases

Graficar $y = x^2 + 4x + 5$.

EJEMPLO 8 Graficar $f(x)$ 5 x^2 2 4x 1 3.

Solución

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 3 \\ &= (x^2 - 4x) + 3 \\ &= (x^2 - 4x + 4) + 3 - 4 \\ &= (x - 2)^2 - 1 \end{aligned}$$

Sumar 4, que es el cuadrado de la mitad del coeficiente de x

Restar 4 para compensar el 4 agregado

La gráfica de $f(x)$ 5 $(x$ 2 $2)^2$ 2 1 es la parábola básica movida dos unidades a la derecha y una unidad hacia abajo (figura 12.19).

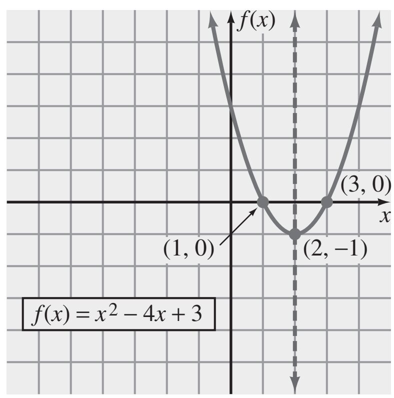


Figura 12.19

Ejemplo de salón de clases
Graficar $y = -3x^2 + 6x - 1$.

EJEMPLO 9 Graficar $f(x)$ 5 22x^2 2 4x 1 1.

Solución

Para graficar la función comparándola con la parábola básica $f(x)$ 5 2x^2, se cambiará la forma de la ecuación completando el cuadrado.

$$f(x) = -2x^2 - 4x + 1$$
$$f(x) = -2(x^2 + 2x + \_\_\_\_) + 1 \qquad \text{Factorizar } -2 \text{ para eliminarlo de los términos de } x$$

Para completar el cuadrado de $(x^2 + 2x + \_\_\_\_)$, se debe tomar la mitad del coeficiente del término x, $\frac{1}{2}(2) = 1$, y el cuadrado del resultado. Por ende, $1^2 = 1$, y se necesita sumar 1 para completar el cuadrado.

$$f(x) = -2(x^2 + 2x + 1) - (1)(-2) + 1 \qquad \text{Restar 1, pero también se debe multiplicar por un factor de } -2$$
$$= -2(x^2 + 2x + 1) + 2 + 1$$
$$= -2(x + 1)^2 + 3$$

La gráfica de $f(x)$ 5 22(x 1 1)^2 1 3 se muestra en la figura 12.20.

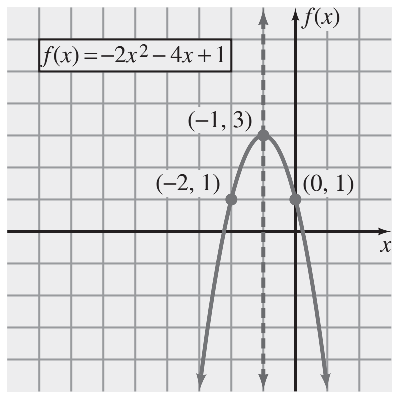


Figura 12.20

Graficar una función definida en partes

Ahora graficará una función definida en partes que implica tanto las reglas lineales como las cuadráticas.

Ejemplo de salón de clases
Graficar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{para } x \geq 0 \\ x^2 - 2 & \text{para } x < 0 \end{cases}.$$

EJEMPLO 10 Graficar $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{para } x \geq 0 \\ x^2 + 1 & \text{para } x < 0 \end{cases}$.

Solución

Si x \$ 0, entonces $f(x)$ 5 2x. Entonces, para los valores no negativos de x, se graficará la función lineal $f(x)$ 5 2x. Si x , 0, entonces $f(x)$ 5 x^2 1 1. Así, para los valores negativos de x, se graficará la función $f(x)$ 5 x^2 1 1. La gráfica completa se muestra en la figura 12.21.

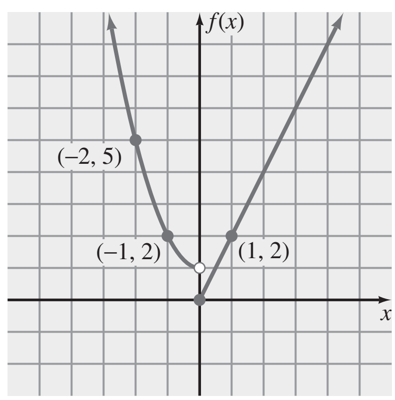


Figura 12.21

Lo que ha aprendido sobre parábolas y el proceso de completar el cuadrado puede serle útil cuando use una herramienta de graficación para graficar una función cuadrática. Considere el siguiente ejemplo.

Ejemplo de salón de clases
Use una herramienta de graficación para obtener la gráfica de la función cuadrática $f(x) = -x^2 - 13x - 41$.

EJEMPLO 11

Use una herramienta de graficación para obtener la gráfica de la función cuadrática $f(x)$ 5 2x^2 1 37x 2 311.

Solución

Primero, se sabe que la parábola abre hacia abajo y su ancho es el mismo que el de la parábola básica $f(x)$ 5 x^2. Entonces puede comenzar el proceso de completar el cuadrado para determinar una ubicación aproximada del vértice.

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 37x - 311 \\ &= -(x^2 - 37x) - 311 \\ &= -\left(x^2 - 37x + \left(\frac{37}{2}\right)^2\right) - 311 + \left(\frac{37}{2}\right)^2 \\ &= -(x^2 - 37x + (18.5)^2) - 311 + 342.25 \\ &= -(x - 18.5)^2 + 31.25 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el vértice está cerca de x 5 18 y y 5 31. Al establecer las fronteras del rectángulo de visualización de modo que 22 # x # 25 y 210 # y # 35, se obtiene la gráfica mostrada en la figura 12.22.

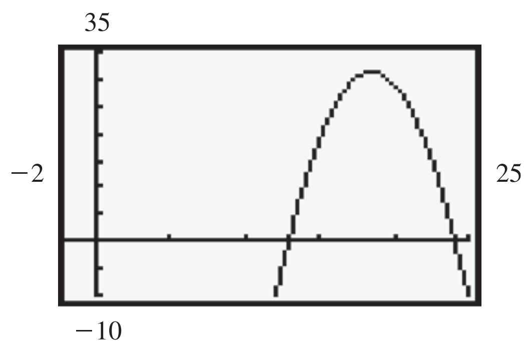


Figura 12.22

Comentario: La gráfica en la figura 12.22 es suficiente para la mayoría de los propósitos porque muestra el vértice y la abscisa al origen de la parábola. Ciertamente podría usar otras fronteras que también dieran esta información.

Examen de conceptos 12.2

Para los problemas 1-7, responder cierto o falso.

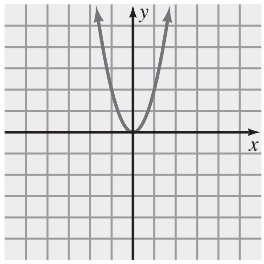
1. La gráfica de cualquier función cuadrática es una parábola.
2. Para la función cuadrática $f(x)$ 5 ax^2 1 bx 1 c, el vértice de la parábola siempre es el valor mínimo de la función.
3. La gráfica de y 5 $\frac{1}{2}x^2$ es una parábola que abre hacia abajo.
4. Si el vértice de una parábola que abre hacia arriba se localiza en el punto (a, b), entonces el eje de simetría es x 5 a.
5. Si el punto (1, 4) está en la gráfica de una parábola, entonces el punto (21, 4) está también en la parábola.
6. Toda parábola tiene un eje de simetría que pasa a través del vértice.

7. El proceso de cambiar de la forma $f(x)$ 5 ax^2 1 bx 1 c a la forma equivalente $f(x)$ 5 $a(x$ 2 $h)^2$ 1 k se llama factorizar el cuadrado.

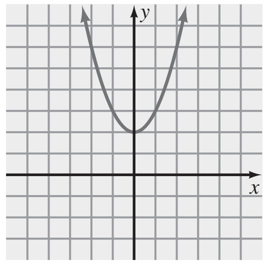
Para los problemas 8-10, unir la función cuadrática con su gráfica.

8. $y = x^2 + 2$ **9.** $y = (x - 2)^2$ **10.** $y = 2x^2$

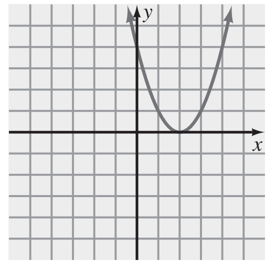
A.



B.



C.



Conjunto de problemas 12.2

Para los problemas 1-14, graficar cada función cuadrática. (Objectivo 1)

1. $f(x) = x^2 + 1$
2. $f(x) = x^2 - 3$
3. $f(x) = 3x^2$
4. $f(x) = -2x^2$
5. $f(x) = -x^2 + 2$
6. $f(x) = -3x^2 - 1$
7. $f(x) = (x + 2)^2$
8. $f(x) = (x - 1)^2$
9. $f(x) = -2(x + 1)^2$
10. $f(x) = 3(x - 2)^2$
11. $f(x) = (x - 1)^2 + 2$
12. $f(x) = -(x + 2)^2 + 3$
13. $f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 3$
14. $f(x) = 2(x - 3)^2 - 1$

Para los problemas 15-26, complete el cuadrado para cambiar la forma de la función y después grafique cada función cuadrática. (Objectivo 2)

15. $f(x) = x^2 + 2x + 4$
16. $f(x) = x^2 - 4x + 2$
17. $f(x) = x^2 - 3x + 1$
18. $f(x) = x^2 + 5x + 5$
19. $f(x) = 2x^2 + 12x + 17$
20. $f(x) = 3x^2 - 6x$
21. $f(x) = -x^2 - 2x + 1$
22. $f(x) = -2x^2 + 12x - 16$
23. $f(x) = 2x^2 - 2x + 3$
24. $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$
25. $f(x) = -2x^2 - 5x + 1$
26. $f(x) = -3x^2 + x - 2$

Para los problemas 27-44, graficar cada función definida en partes. (Objectivo 3)

27. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } x < 0 \\ x^2 + 3 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } x < 0 \\ -x^2 + 2 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$

29. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{para } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$

30. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{para } x < 0 \\ x^2 - 3 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$

31. $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{para } x < 0 \\ 2 & \text{para } 0 \leq x < 3 \\ x^2 - 7 & \text{para } x \geq 3 \end{cases}$

32. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{para } x < 0 \\ 1 & \text{para } 0 \leq x < 3 \\ -x^2 + 10 & \text{para } x \geq 3 \end{cases}$

33. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{para } x < -1 \\ x & \text{para } -1 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{para } x \geq 1 \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } x < -2 \\ \frac{1}{2}x + 5 & \text{para } -2 \leq x < 2 \\ x^2 + 2 & \text{para } x \geq 2 \end{cases}$

35. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{para } x < 0 \\ x + 2 & \text{para } 0 \leq x < 4 \\ 2x & \text{para } x \geq 4 \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{para } x < 0 \\ x^2 & \text{para } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{para } x \geq 2 \end{cases}$

37. $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{para } x < 0 \\ x & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} -4x & \text{para } x < 0 \\ -x & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{para } x < 0 \\ -x^2 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$

41. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } x < 0 \\ 2 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } x < 0 \\ 1 & \text{para } 0 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{para } x > 2 \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{para } 1 \leq x < 2 \\ 3 & \text{para } 2 \leq x < 3 \\ 4 & \text{para } 3 \leq x < 4 \end{cases}$

44. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{para } x < 0 \\ \frac{3}{2}x & \text{para } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{para } x \geq 2 \end{cases}$

45. La **función mayor entero** se define mediante la ecuación $f(x)$ 5 $[x]$, donde $[x]$ se refiere al entero más grande menor que o igual a x. Por ejemplo, [2.6] 5 2, [! $\overline{2}$] 5 1, [4] 5 4 y [21.4] 5 22. Graficar $f(x)$ 5 $[x]$ para 24 # x , 4.

Pensamientos en palabras

46. Explicar el concepto de una función definida en partes.

47. ¿Es $f(x)$ 5 (3x^2 2 2) 2 (2x 1 1) una función cuadrática? Explique su respuesta.

48. Dé una descripción paso a paso de cómo usaría las ideas presentadas en esta sección para graficar $f(x)$ 5 5x^2 1 10x 1 4.

Actividades con calculadora graficadora

49. Este problema se diseñó para reforzar las ideas presentadas en la sección. Para cada parte, prediga primero las formas y ubicaciones de las parábolas, y luego use su calculadora graficadora para graficarlas sobre el mismo conjunto de ejes.

(a) $f(x) = x^2$, $f(x) = x^2 - 4$, $f(x) = x^2 + 1$, $f(x) = x^2 + 5$

(b) $f(x) = x^2$, $f(x) = (x - 5)^2$, $f(x) = (x + 5)^2$, $f(x) = (x - 3)^2$

(c) $f(x) = x^2$, $f(x) = 5x^2$, $f(x) = \frac{1}{3}x^2$, $f(x) = -2x^2$

(d) $f(x) = x^2$, $f(x) = (x - 7)^2 - 3$, $f(x) = -(x + 8)^2 + 4$, $f(x) = -3x^2 - 4$

(e) $f(x) = x^2 - 4x - 2$, $f(x) = -x^2 + 4x + 2$, $f(x) = -x^2 - 16x - 58$, $f(x) = x^2 + 16x + 58$

50. **(a)** Grafique tanto $f(x)$ 5 x^2 2 14x 1 51 y $f(x)$ 5 x^2 1 14x 1 51 como sobre el mismo conjunto de ejes. ¿Qué relación parece existir entre las dos gráficas?

(b) Graficar tanto como $f(x)$ 5 x^2 1 12x 1 34 y $f(x)$ 5 x^2 2 12x 1 34 sobre el mismo conjunto de ejes. ¿Qué relación parece existir entre las dos gráficas?

(c) Graficar tanto como $f(x)$ 5 2x^2 1 8x 2 20 y $f(x)$ 5 2x^2 2 8x 2 20 sobre el mismo conjunto de ejes. ¿Qué relación parece existir entre las dos gráficas?

(d) Plantee un enunciado que generalice sus hallazgos en los incisos (a) a (c).

51. Use su calculadora graficadora para graficar las funciones definidas en partes en los problemas 27-44. Tal vez necesite consultar su manual del usuario para instrucciones acerca de la graficación de estas funcione.

Respuestas al examen de conceptos

1. Cierto **2.** Falso **3.** Falso **4.** Cierto **5.** Falso **6.** Cierto **7.** Falso **8.** B **9.** C **10.** A

12.3 Más acerca de las funciones cuadráticas y aplicaciones

OBJETIVOS

1 Graficar parábolas usando una fórmula para localizar el vértice

2 Determinar las intersecciones x y y para una parábola

3 Resolver problemas de aplicación que implican funciones cuadráticas

En la sección anterior se usó el proceso de completar el cuadrado para cambiar una función cuadrática como $f(x)$ 5 x^2 2 $4x$ 1 3 a la forma $f(x)$ 5 $(x$ 2 $2)^2$ 2 1. A partir de la forma $f(x)$ 5 $(x$ 2 $2)^2$ 2 1, es fácil identificar el vértice (2, 2 1) y el eje de simetría x 5 2 de la parábola. En general, si completa el cuadrado en

$f(x)$ 5 ax^2 1 bx 1 c

obtiene

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

Por tanto, la parábola asociada con la función $f(x)$ 5 ax^2 1 bx 1 c tiene su vértice en

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

y la ecuación de su eje de simetría es x 5 2$\frac{b}{2a}$. Estos hechos se ilustran en la figura 12.23.

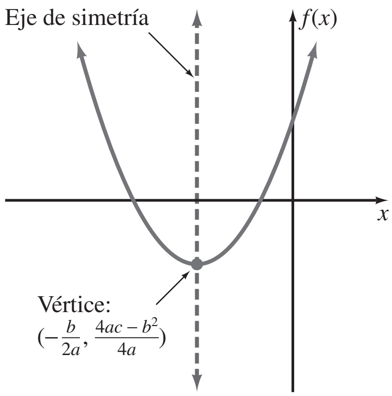


Figura 12.23

Al usar la información de la figura 12.23, ahora se tiene otra forma de graficar funciones cuadráticas de la forma $f(x)$ 5 ax^2 1 bx 1 c, como se indica mediante los siguientes pasos:

Paso 1 Determine si la parábola se abre hacia arriba (si a . 0) o hacia abajo (si a , 0).

Paso 2 Encuentre 2$\frac{b}{2a}$, que es la coordenada x del vértice.

Paso 3 Encuentre $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$, que es la coordenada y del vértice, o encuentre la coordenada y al evaluar

$$\frac{4ac - b^2}{4a}$$

Paso 4 Ubique otro punto sobre la parábola, y también su imagen a través del eje de simetría, que es la recta con ecuación x 5 2$\frac{b}{2a}$.

Los tres puntos encontrados en los pasos 2, 3 y 4 determinan la forma general de la parábola. Este procedimiento se ilustra con dos ejemplos.

Ejemplo de salón de clases
Graficar $f(x) = 2x^2 - 8x + 9$.

EJEMPLO 1 Graficar $f(x)$ 5 $3x^2$ 2 $6x$ 1 5.

Solución

Paso 1 Dado que a . 0, la parábola se abre hacia arriba.

Paso 2 $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{(-6)}{2(3)} = -\dfrac{(-6)}{6} = 1$

Paso 3 $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = f(1) = 3(1)^2 - 6(1) + 5 = 2.$

Por lo tanto, el vértice está en (1, 2).

Paso 4 Al hacer x 5 2, se obtiene $f(2)$ 5 12 2 12 1 5 5 5. Por tanto, (2, 5) está sobre la gráfica, y también su reflejo, (0, 5), a través de la recta de simetría, x 5 1.

Los tres puntos (1, 2), (2, 5) y (0, 5) se usan para graficar la parábola de la figura 12.24.

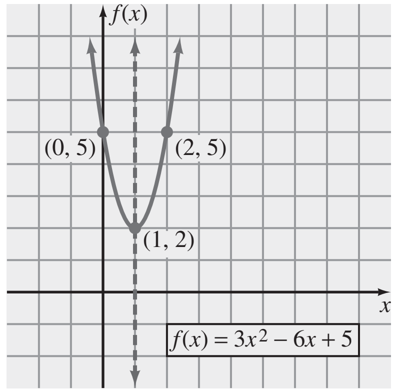


Figura 12.24

Ejemplo de salón de clases
Graficar $f(x) = -2x^2 - 8x - 5$.

EJEMPLO 2 Graficar $f(x)$ 5 2x^2 2 $4x$ 2 7.

Solución

Paso 1 Puesto que a , 0, la parábola se abre hacia abajo.

Paso 2 $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{(-4)}{2(-1)} = -\dfrac{(-4)}{(-2)} = -2$

Paso 3 $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = f(-2) =$

2(22)^2 2 4(22) 2 7 5 23. Por lo tanto, el vértice está en (22, 23).

Paso 4 Al hacer x 5 0, se obtiene $f(0)$ 5 27. Por lo tanto (0, 27) está sobre la gráfica y también su reflejo, (24, 27), a través de la recta de simetría x 5 22.

Los tres puntos (22, 23), (0, 27) y (24, 27) se usan para dibujar la parábola de la figura 12.25.

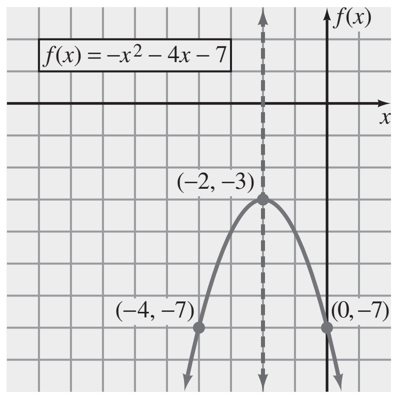


Figura 12.25

En resumen, se tienen dos métodos para graficar una función cuadrática:

1. Se puede expresar la función en la forma $f(x)$ 5 $a(x$ 2 $h)^2$ 1 k y usar los valores de a, h y k para determinar la parábola.
2. Puede expresar la función en la forma $f(x)$ 5 ax^2 1 bx 1 c, debe localizar el vértice $\left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$ y usar el método que se demostró en los ejemplos 1 y 2.

Las parábolas poseen varias propiedades que las hacen muy útiles. Por ejemplo, si una parábola rota en torno a su eje, se forma una superficie parabólica, y tales superficies se usan para reflectores de luz y sonido. Un proyectil disparado hacia el aire sigue la curvatura de una parábola. La línea de tendencia de las funciones de ganancia y costo en ocasiones siguen una curva parabólica. En la mayoría de las aplicaciones de la parábola, el interés principal está en las abscisas al origen y el vértice. Considere algunos ejemplos de encontrar las abscisas al origen y el vértice.

Ejemplo de salón de clases

Encontrar las abscisas al origen y el vértice de cada una de las siguientes parábolas.

(a) $f(x) = -x^2 + 2x + 15$
(b) $f(x) = x^2 + 6x - 10$
(c) $f(x) = 5x^2 - 2x + 6$

EJEMPLO 3

Encontrar las abscisas al origen y el vértice de cada una de las siguientes parábolas.

(a) $f(x) = -x^2 + 11x - 18$ **(b)** $f(x) = x^2 - 8x - 3$ **(c)** $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$

Soluciones

(a) Para encontrar las abscisas al origen de $f(x)$ 5 2x^2 1 11x 2 18, sea $f(x)$ 5 0 y resuelva la ecuación resultante:

$$\begin{aligned} -x^2 + 11x - 18 &= 0 \\ x^2 - 11x + 18 &= 0 \\ (x-2)(x-9) &= 0 \end{aligned}$$

$$x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 9 = 0$$
$$x = 2 \qquad\qquad x = 9$$

Por ende, las abscisas al origen son 2 y 9. Para encontrar el vértice, determine el punto $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 11x - 18 \\ -\frac{b}{2a} &= -\frac{11}{2(-1)} = -\frac{11}{-2} = \frac{11}{2} \\ f\left(\frac{11}{2}\right) &= -\left(\frac{11}{2}\right)^2 + 11\left(\frac{11}{2}\right) - 18 \\ &= -\frac{121}{4} + \frac{121}{2} - 18 \\ &= \frac{-121 + 242 - 72}{4} \\ &= \frac{49}{4} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el vértice es $\left(\frac{11}{2}, \frac{49}{4}\right)$.

(b) Para encontrar las abscisas al origen de $f(x)$ 5 x^2 2 8x 2 3, sea $f(x)$ 5 0 y resuelva la ecuación resultante:

$$\begin{aligned} x^2 - 8x - 3 &= 0 \\ x &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{76}}{2} \\ &= \frac{8 \pm 2\sqrt{19}}{2} \\ &= 4 \pm \sqrt{19} \end{aligned}$$

Por tanto, las abscisas al origen son 4 1 ! $\overline{10}$ y 4 2 ! $\overline{19}$. Esta vez, para encontrar el vértice, complete el cuadrado en x:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 8x - 3 \\ &= x^2 - 8x + 16 - 3 - 16 \qquad \text{Sumar y restar 16} \\ &= (x-4)^2 - 19 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el vértice está en (4, 2 19).

(c) Para encontrar las abscisas al origen de $f(x)$ 5 x^2 2 12x 1 23, sea $f(x)$ 5 0 y resuelva la ecuación resultante:

$$2x^2 - 12x + 23 = 0$$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(2)(23)}}{2(2)}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{-40}}{4}$$

Puesto que estas soluciones son números complejos no reales, no hay abscisas al origen. Para encontrar el vértice, determine el punto $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$:

$$f(x) = 2x^2 - 12x + 23$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2(2)} = 3$$

$$f(3) = 2(3)^2 - 12(3) + 23$$

$$= 18 - 36 + 23$$

$$= 5$$

Por lo tanto, el vértice está en (3, 5).

Comentario: Note que, en las partes (a) y (c), se usó el punto general.

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

para encontrar los vértices. Sin embargo, en la parte (b) se completó el cuadrado y se usó dicha forma para determinar el vértice. Queda a su elección cuál enfoque usar. Aquí se eligió completar el cuadrado en la parte (b) porque el álgebra requerida era muy sencilla.

En el inciso (a) del ejemplo 3 se resolvió la ecuación 2x^2 1 11x 2 18 5 0 para determinar que 2 y 9 son las abscisas al origen de la gráfica de la función $f(x)$ 5 2x^2 1 11x 2 18. Los números 2 y 9 también se llaman **raíces numéricas reales** de la función. Es decir, $f(2)$ 5 0 y $f(9)$ 5 0. En el inciso (b) del ejemplo 3, los números reales 4 1 !$\overline{19}$ y 4 2 !$\overline{19}$ son las abscisas al origen de la gráfica de la función $f(x)$ 5 x^2 2 8x 2 3 y son las raíces numéricas reales de la función. De nuevo, esto significa que f(4 1 !$\overline{19}$) y f(4 2 !$\overline{19}$). En el inciso (c) del ejemplo 3, los números complejos no reales $\frac{12 \pm \sqrt{-40}}{4}$, que se simplifican a $\frac{6 \pm i\sqrt{10}}{2}$, indican que la gráfica de la función $f(x)$ 5 2x^2 2 12x 1 23 no tiene puntos sobre el eje x. Los números complejos son ceros de la función, pero no tienen otro significado físico para la gráfica que el indicar que la gráfica no tiene puntos sobre el eje x.

La figura 12.26 muestra el resultado que se obtiene cuando se usa una calculadora graficadora para bosquejar las tres funciones del ejemplo 3 sobre el mismo conjunto de ejes. Esto brinda una interpretación visual de las conclusiones extraídas en cuanto a las abscisas al origen y los vértices.

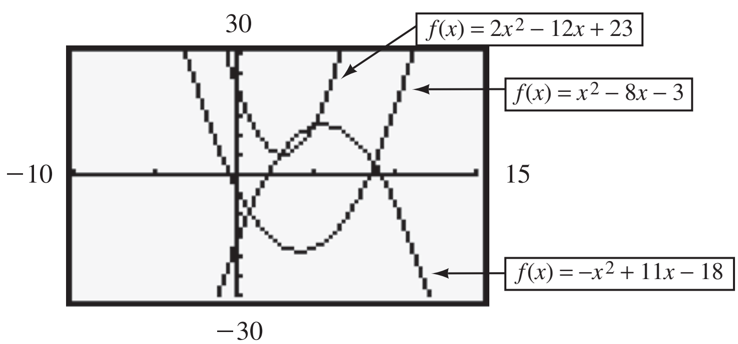


Figura 12.26

De vuelta a la resolución de problemas

Como ya se vio, el vértice de la gráfica de una función cuadrática es o el punto más bajo o el más alto sobre la gráfica. Por ende, con frecuencia se habla sobre el valor mínimo o el valor máximo de una función cuando se discuten aplicaciones de la parábola. El valor x del vértice indica dónde ocurre el mínimo o el máximo, y $f(x)$ produce el valor mínimo o máximo de la función. Considere algunos ejemplos que ilustran estas ideas.

Ejemplo de salón de clases
Un granjero tiene 560 pies de cerca y quiere encerrar un terreno rectangular que requiere barda sólo en tres lados, porque en un lado tiene como frontera un río. Encontrar la longitud y el ancho del terreno que maximizará el área.

EJEMPLO 4 Aplique su habilidad

Un granjero tiene 120 barras de cerca y quiere encerrar un terreno rectangular que requiere barda sólo en tres lados, porque en un lado tiene como frontera un río. Encuentre la longitud y el ancho del terreno que maximizará el área.

Solución

Sea x el ancho; entonces 120 2 $2x$ representa la longitud, como se indica en la figura 12.27.

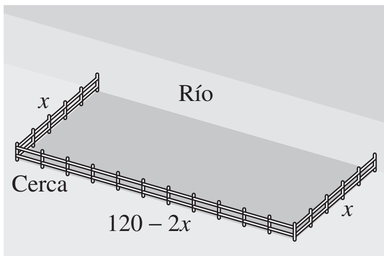


Figura 12.27

La función $A(x)$ 5 $x(120$ 2 $2x)$ representa el área del terreno en términos de ancho x. Porque

$$\begin{aligned} A(x) &= x(120 - 2x) \\ &= 120x - 2x^2 \\ &= -2x^2 + 120x \end{aligned}$$

se tiene una función cuadrática con a 5 22, b 5 120 y c 5 0. Por ende, el *valor máximo* (a , 0 así que la parábola abre hacia abajo) de la función se obtiene donde el valor x es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{120}{2(-2)} = 30$$

Si x 5 30, entonces 120 2 $2x$ 5 120 2 2(30) 5 60. Así, el granjero debe hacer la cerca con 30 barras al ancho y 60 barras al largo para maximizar el área (30)(60) 5 1800.

Ejemplo de salón de clases
Hallar dos números cuya suma sea 20, de tal manera que la suma de sus cuadrados sea un mínimo.

EJEMPLO 5 Aplique su habilidad

Hallar dos números cuya suma sea 30, de tal manera que la suma de sus cuadrados sea un mínimo.

Solución

Sea x uno de los números; entonces 30 2 x representa al otro número. Al expresar la suma de sus cuadrados como función de x, se obtiene

$$f(x) = x^2 + (30 - x)^2$$

que se puede simplificar a

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 900 - 60x + x^2 \\ &= 2x^2 - 60x + 900 \end{aligned}$$

Ésta es una función cuadrática con a 5 2, b 5 260 y c 5 900. Por lo tanto, el valor x donde ocurre el *mínimo* es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-60}{4} = 15$$

Si x 5 15, entonces 30 2 x 5 30 2 15 5 15. Por lo tanto, los dos números deben ser 15.

Ejemplo de salón de clases
Un agente de viajes puede vender 42 boletos para un crucero de 3 días a $450 cada uno. Por cada $20, baja el precio, el número de boletos vendidos aumenta por cuatro. ¿A qué precio debe vender los boletos para maximizar el ingreso bruto?

EJEMPLO 6 Aplique su habilidad

Un vendedor de artículos para golf se da cuenta de que puede vender 30 juegos de palos de golf a $500 por juego en un año. Más aún, predice que, por cada $25 de reducción en el precio, podría vender tres juegos más de palos de golf. ¿A qué precio debe vender los palos para maximizar el ingreso bruto?

Solución

Al analizar tal problema, en ocasiones es útil comenzar por elaborar una tabla. Se usa el hecho de que se pueden vender tres juegos adicionales por cada $25 de reducción en el precio.

Número de juegos	3	Precio por juego	5	Ingreso
30	×	$500	=	$15,000
33	×	$475	=	$15,675
36	×	$450	=	$16,200

Sea x el número de reducciones de $25 en el precio. Entonces el ingreso se puede expresar como función de x.

$$f(x) = (\underbrace{30 + 3x}_{\text{Número de juegos}})(\underbrace{500 - 25x}_{\text{Precio por juego}})$$

Al simplificar esto se obtiene

$$\begin{aligned} f(x) &= 15{,}000 - 750x + 1500x - 75x^2 \\ &= -75x^2 + 750x + 15{,}000 \end{aligned}$$

Debe completar el cuadrado con la finalidad de analizar la parábola.

$$\begin{aligned} f(x) &= -75x^2 + 750x + 15{,}000 \\ &= -75(x^2 - 10x) + 15{,}000 \\ &= -75(x^2 - 10x + 25) + 15{,}000 + 1875 \\ &= -75(x - 5)^2 + 16{,}875 \end{aligned}$$

A partir de esta forma, se sabe que el vértice de la parábola está en (5, 16,875) y dado que a 5 275, se sabe que en el vértice ocurre un *máximo*. Por ende, cinco reducciones de $25 (es decir, una reducción de $125 en el precio) dará un ingreso máximo de $16.875. Los palos de golf deben venderse a $375 por juego.

Se determinó que el vértice de una parábola asociada con $f(x)$ 5 ax^2 1 bx 1 c se ubica en $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ y que las abscisas al origen de la gráfica se pueden encontrar al resolver la ecuación cuadrática ax^2 1 bx 1 c 5 0. Por lo tanto, una herramienta de graficación no proporcionará mucho poder adicional cuando se trabaje con funciones cuadráticas. Sin embargo, conforme las funciones se vuelven más complejas, una herramienta de graficación se vuelve más útil. Continúe usando su herramienta de graficación por el momento, mientras obtiene una forma de comprobar sus resultados.

Ejemplo de salón de clases
Use una herramienta de graficación para graficar $f(x) = x^2 + 6x - 10$ y hallar las abscisas al origen de la gráfica.

EJEMPLO 7

Use una herramienta de graficación para graficar $f(x)$ 5 x^2 2 $8x$ 2 3 y encuentra las abscisas al origen de la gráfica. (Esta es la parábola del inciso (b) del ejemplo 3).

Solución

Se muestra una gráfica de la parábola en la figura 12.28. Una abcisa al origen parece estar entre 0 y 21 y la otra entre 8 y 9. Haga un acercamiento a la abscisa al origen entre 8 y 9. Esto produce una gráfica como la de la figura 12.29.

Ahora puede usar la función TRACE para determinar que esta abscisa al origen está aproximadamente en 8.4. (Esto concuerda con la respuesta de 4 1 !$\overline{19}$ del ejemplo 3). De manera similar, puede determinar que la otra abscisa al origen está aproximadamente en 20.4.

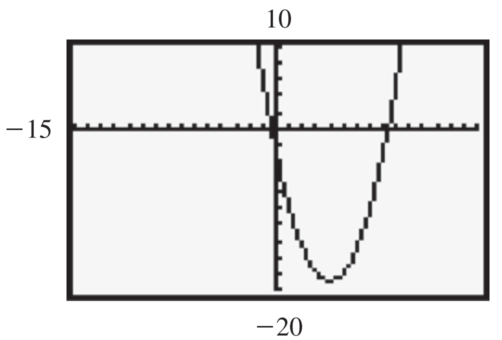


Figura 12.28

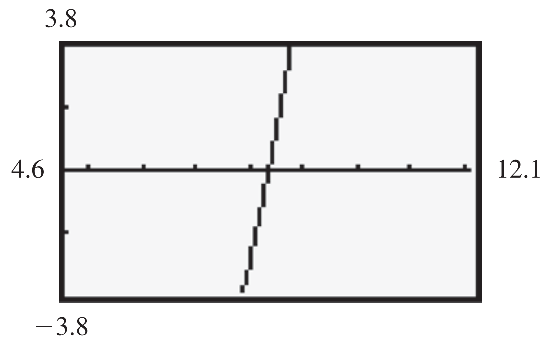


Figura 12.29

Examen de conceptos 12.3

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. La coordenada y del vértice de la parábola asociada con $f(x)$ 5 ax^2 1 bx 1 c es igual a $\frac{b}{2a}$.

2. La coordenada x del vértice de la parábola asociada con $f(x)$ 5 ax^2 1 bx 1 c es igual a $-\frac{b}{2}$.

3. Para la parábola asociada con $f(x)$ 5 ax^2 1 bx 1 c, la parábola siempre se abrirá hacia arriba si b es positiva.

4. Para la función cuadrática $f(x)$ 5 2$4x^2$ 1 $3x$ 1 1, el vértice de su parábola será el punto más alto en la gráfica.

5. El valor mínimo de la función $f(x)$ 5 $2x^2$ 1 $5x$ 1 8 es igual a $f\left(\frac{-5}{4}\right)$.

6. La abscisa al origen de la parábola asociada con $f(x)$ 5 ax^2 1 bx 1 c puede encontrarse usando la fórmula cuadrática $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

7. Toda gráfica de una función cuadrática tiene abscisas al origen.

8. Toda gráfica de una función cuadrática tiene ordenadas al origen.

9. Para la parábola asociada con $f(x)$ 5 ax^2 1 bx 1 c, el eje de simetría es x 5 2$\frac{b}{2a}$.

10. Es posible que el vértice y la abscisa al origen de una parábola coincidan (en otras palabras, que el vértice y la abscisa al origen sean el mismo punto).

Conjunto de problemas 12.3

Para los problemas 1-12 use el método de los ejemplos 1 y 2 de esta sección para graficar cada función cuadrática. (Objectivo 1)

1. $f(x) = x^2 - 8x + 15$ **2.** $f(x) = x^2 + 6x + 11$

3. $f(x) = 2x^2 + 20x + 52$ **4.** $f(x) = 3x^2 - 6x - 1$

5. $f(x) = -x^2 + 4x - 7$ **6.** $f(x) = -x^2 - 6x - 5$

7. $f(x) = -3x^2 + 6x - 5$ **8.** $f(x) = -2x^2 - 4x + 2$

9. $f(x) = x^2 + 3x - 1$ **10.** $f(x) = x^2 + 5x + 2$

11. $f(x) = -2x^2 + 5x + 1$ **12.** $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$

Para los problemas 13-20, use el enfoque que considere más apropiado para graficar cada función cuadrática. Ver la sección de respuestas.

13. $f(x) = -x^2 + 3$ **14.** $f(x) = (x + 1)^2 + 1$

15. $f(x) = x^2 + x - 1$ **16.** $f(x) = -x^2 + 3x - 4$

17. $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$ **18.** $f(x) = 4x^2 - 8x + 5$

19. $f(x) = -\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$ **20.** $f(x) = x^2 - 4x$

Para los problemas 21-36, hallar las abscisas al origen y el vértice de cada parábola. (Objectivo 2)

21. $f(x) = 3x^2 - 12$

22. $f(x) = 6x^2 - 4$

23. $f(x) = 5x^2 - 10x$

24. $f(x) = 3x^2 + 9x$

25. $f(x) = x^2 - 8x + 15$ **26.** $f(x) = x^2 - 16x + 63$

27. $f(x) = 2x^2 - 28x + 96$ **28.** $f(x) = 3x^2 - 60x + 297$

29. $f(x) = -x^2 + 10x - 24$

30. $f(x) = -2x^2 + 36x - 160$

31. $f(x) = x^2 - 14x + 44$

32. $f(x) = x^2 - 18x + 68$

33. $f(x) = -x^2 + 9x - 21$

34. $f(x) = 2x^2 + 3x + 3$

35. $f(x) = -4x^2 + 4x + 4$

36. $f(x) = -2x^2 + 3x + 7$

Para los problemas 37-42, find the zeros of each function.

37. $f(x) = x^2 + 3x - 88$ **38.** $f(x) = 6x^2 - 5x - 4$

39. $f(x) = 4x^2 - 48x + 108$ **40.** $f(x) = x^2 - 6x - 6$

41. $f(x) = x^2 - 4x + 11$

42. $f(x) = x^2 - 23x + 126$

Para los problemas43-54, resolver cada uno. (Objectivo 3)

43. Suponga que la ecuación $p(x)$ 5 22x^2 1 280x 2 1000, donde x representa el número de artículos vendidos, describa la función ganancia para cierto negocio. ¿Cuántos artículos debe vender para maximizar la ganancia?

44. Suponga que la función costo para la producción de un artículo particular está dada por la ecuación $C(x)$ 5 2x^2 2 320x 1 12,920, donde x representa el número de artículos. ¿Cuántos artículos se deben producir para maximizar el costo?

45. Si se ignora la resistencia del aire, la altura de un proyectir disparado verticalemente al aire, a una velocidad inicial de 96 pies por segundo, es una función del tiempo x y es dada por la ecuación $f(x)$ 5 96x 2 16x^2. Encuentre el punto más alto que alcanza el proyectil.

46. Encuentre dos números cuya suma sea 30, de tal manera que la suma del cuadrado de un número más diez veces el otro número sea un mínimo.

47. Encuentre dos números cuya suma sea 50 y cuyo producto sea un máximo.

48. Encuentre dos números cuya diferencia sea 40 y cuyo producto sea un mínimo.

49. Los diseñadores de un parque para perros quieren encerrar un terreno rectangular que colinda con un lago y, por lo mismo, sólo necesita cerca en tres lados. Si tienen disponibles 160 yardas de cerca, determinar el largo y el ancho del terreno encerrado que maximizarán el área.

50. Una fábrica de bicicletas especializadas ha determinado que el costo función por fabricar se da por $C(x)$ 5 3x^2 2 840x 1 78,000, donde x representa el número de bicicletas producidas. ¿Cuántas bicicletas se deben producir para minimizar el costo?

51. Están disponibles doscientos cuarenta metros de barda para cubrir un patio rectangular. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del patio para maximizar el área?

52. Una compañía de aventuras al aire libre anuncia que darán un paseo guiado de bicicleta de montaña y un día de campo por $50 por persona. Deben tener un mínimo de 30 personas para hacer el viaje. Además, acuerdan que, por cada persona que supere las 30, reducirán el precio por persona por $0.50 para todas las personas. ¿Cuántas personas se requerirán para maximizar los ingresos de la compañía?

53. Un servicio de renta de videos tiene 1000 suscriptores, cada uno de los cuales paga \$15 al mes. Basados en una encuesta, la compañía cree que, por cada reducción de \$0.25 en la tasa mensual, podría obtener 20 suscriptores adicionales. ¿A qué tasa se obtendrán los ingresos máximos y cuántos suscriptores habrá con esta tasa?

54. Un fabricante descubre que, para las primeras 500 unidades de su producto, que fabrica y vende, la ganancia es de \$50 por unidad. La ganancia por cada una de las unidades más allá de 500 se reduce en \$0.10 por el número de unidades adicionales vendidas. ¿Qué nivel de producción maximizará la ganancia?

Pensamientos en palabras

55. Suponga que su amiga se ausentó el día que se estudió esta sección. ¿Cómo le explicaría los temas de las abscisas al origen de la gráfica de una función, las raíces de la función y las soluciones de la ecuación $f(x)$ 5 0?

56. Dé una explicación paso a paso de cómo encontrar las abscisas al origen de la gráfica de la función $f(x)$ 5 $2x^2$ 1 $7x$ 2 4.

57. Dé una explicación paso a paso de cómo encontrar el vértice de la parábola determinada por la ecuación $f(x)$ 5 2x^2 2 $6x$ 2 5.

Actividades con calculadora graficadora

58. Suponga que la ventana de visualización en su calculadora graficadora se establece de modo que 215 # x # 15 y 210 # y # 10. Ahora intente graficar la función $f(x)$ 5 x^2 2 $8x$ 1 28. Nada aparece en la pantalla, de modo que la parábola debe estar afuera de la ventana de visualización. Podría expandir arbitrariamente la ventana hasta que la parábola aparezca. Sin embargo, sea un poco más sistemático y use $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ para encontrar el vértice. El vértice se encuentra en (4, 12), así que se cambian los valores y de la ventana de modo que 0 # y # 25. Ahora obtiene una buena imagen de la parábola.

Grafique cada una de las siguientes parábolas y tenga en mente que tal vez necesite cambiar las dimensiones de la ventana de visualización para obtener una buena imagen.

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 12$
(b) $f(x) = -x^2 - 4x - 16$
(c) $f(x) = x^2 + 12x + 44$
(d) $f(x) = x^2 - 30x + 229$
(e) $f(x) = -2x^2 + 8x - 19$

59. Use una calculadora graficadora para dibujar cada una de las siguientes parábolas y luego use la función TRACE para auxiliarse a estimar las abscisas al origen y el vértice. Finalmente, use el abordaje del ejemplo 3 para encontrar las abscisas al origen y el vértice.

(a) $f(x) = x^2 - 6x + 3$
(b) $f(x) = x^2 - 18x + 66$
(c) $f(x) = -x^2 + 8x - 3$
(d) $f(x) = -x^2 + 24x - 129$
(e) $f(x) = 14x^2 - 7x + 1$
(f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{17}{2}$

60. En los problemas 21-36 se le pidió encontrar las abscisas al origen y el vértice de algunas parábolas. Ahora use una calculadora graficadora para graficar cada parábola y justificar visualmente sus respuestas.

61. En cada una de las siguientes funciones cuadráticas, use el discriminante para determinar el número de raíces numéricas reales y luego grafique la función con una calculadora graficadora para comprobar su respuesta

(a) $f(x) = 3x^2 - 15x - 42$
(b) $f(x) = 2x^2 - 36x + 162$
(c) $f(x) = -4x^2 - 48x - 144$
(d) $f(x) = 2x^2 + 2x + 5$
(e) $f(x) = 4x^2 - 4x - 120$
(f) $f(x) = 5x^2 - x + 4$

Respuestas al examen de conceptos

1. Falso **2.** Falso **3.** Falso **4.** Cierto **5.** Cierto **6.** Cierto **7.** Falso **8.** Cierto **9.** Cierto **10.** Cierto

12.4 Transformación de algunas curvas básicas

OBJECTIVO **1** Graficar funciones aplicando traslaciones horizontales y verticales, estiramiento y encogimiento verticales, o reflejos de las gráficas básicas de $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$, $f(x) = \sqrt{x}$ y $f(x) = |x|$

A partir del trabajo en la sección 12.3, sabe que la gráfica de $f(x)\ 5\ (x\ 2\ 5)^2$ es la parábola básica $f(x)\ 5\ x^2$ trasladada cinco unidades a la derecha. Del mismo modo, sabe que la gráfica de $f(x)\ 5\ \ 2x^2\ 2\ 2$ es la parábola básica reflejada a través del eje x y trasladada hacia abajo dos unidades. Las traslaciones y las reflexiones no sólo se aplican a parábolas, sino también a curvas. Por lo tanto, si se conocen las formas de algunas curvas básicas, es sencillo bosquejar numerosas variaciones de dichas curvas usando los conceptos de traslación y reflexión.

Esta sección comienza por establecer las gráficas de cuatro curvas básicas y luego aplica algunas transformaciones a dichas curvas. Primero reformule, en términos de vocabulario de funciones, las sugerencias de graficación ofrecidas en capítulos anteriores. Ponga especial atención a las sugerencias 2 y 3, en las que se reformulan los conceptos de intersecciones con los ejes y simetría usando notación de funciones.

1. Determine el dominio de la función.
2. Encuentre la ordenada al origen [el eje y se etiqueta como $f(x)$] al evaluar $f(0)$. Encuentre la abscisa al origen al encontrar el valor(es) de x tal que $f(x)\ 5\ 0$.
3. Determine cualquier tipo de simetría que posea la ecuación. Si $f(\ 2x)\ 5\ f(x)$, entonces la función muestra simetría con respecto al eje y. Si $f(\ 2x)\ 5\ \ 2f(x)$, entonces la función muestra simetría en torno al origen. (Note que la definición de una función regula la posibilidad de que la gráfica de una función tenga simetría con respecto al eje x.)
4. Elabore una tabla de pares ordenados que satisfagan la ecuación. El tipo de simetría y el dominio afectarán su elección de valores de x en la tabla.
5. Grafique los puntos asociados con los pares ordenados y conéctelos con una curva continua. Luego, si es adecuado, refleje esta parte de la curva de acuerdo con cualquier simetría que posea la gráfica.

EJEMPLO 1 Graficar $f(x) = x^3$.

Solución

El dominio es el conjunto de los números reales. Puesto que $f(0)\ 5\ 0$, el origen está sobre la gráfica. Ya que $f(\ 2x)\ 5\ (\ 2x)^3\ 5\ \ 2x^3\ 5\ \ 2f(x)$, la gráfica es simétrica con respecto al origen. Por lo tanto, se puede concentrar la tabla en los valores positivos de x. Al conectar los puntos asociados con los pares ordenados de la tabla con una curva suave y luego reflejarla a través del origen, se obtiene la gráfica de la figura 12.30.

x	$f(x) = x^3$
0	0
1	1
2	8
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

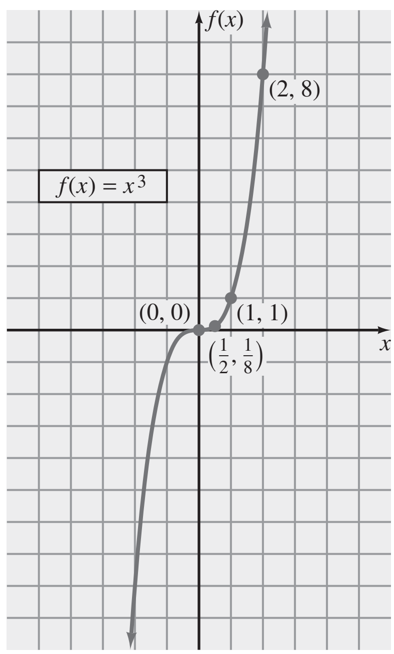


Figura 12.30

EJEMPLO 2 Graficar $f(x)$ 5 x^4.

Solución

El dominio es el conjunto de los números reales. Puesto que $f(0)$ 5 0, el origen está sobre la gráfica. Dado que $f(2x)$ 5 $(2x)^4$ 5 x^4 5 $f(x)$, la gráfica tiene simetría con respecto al eje y, y puede concentrar la tabla de valores en los valores positivos de x. Si conecta los puntos asociados con los pares ordenados de la tabla con una curva continua y luego refleja a través del eje vertical, se obtiene la gráfica de la figura 12.31.

x	$f(x) = x^4$
0	0
1	1
2	16
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$

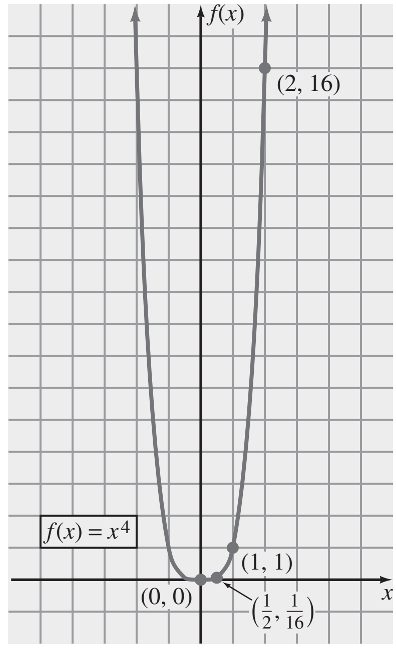


Figura 12.31

Comentario: La curva en la figura 12.31 no es una parábola, aun cuando se parezca a una; esta curva es más plana en el fondo y más inclinada de lo que sería una parábola.

EJEMPLO 3 Graficar $f(x)$ 5 !$\overline{x}$.

Solución

El dominio de la función es el conjunto de los números reales no negativos. Puesto que $f(0)$ 5 0, el origen está sobre la gráfica. Dado que $f(2x) \neq f(x)$ and $f(2x) \neq 2f(x)$, no hay simetría, así que se elabora una tabla de valores usando valores no negativos para x. Al graficar los puntos determinados por la tabla y conectarlos con una curva suave, se produce la figura 12.32.

x	$f(x) = \sqrt{x}$
0	0
1	1
4	2
9	3

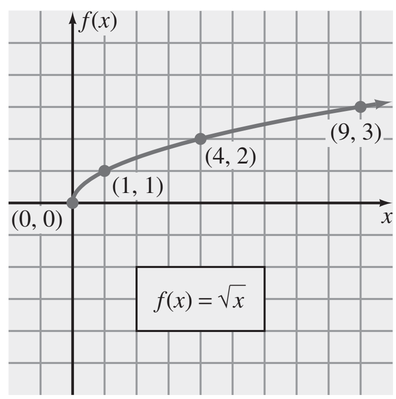


Figura 12.32

A veces, una nueva función se define en términos de funciones anteriores. En tales casos, la definición juega un importante papel en el estudio de la nueva función. Considere el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Graficar $f(x)$ 5 $|x|$.

Solución

El concepto de valor absoluto se define para todos los números reales mediante

$$|x| = x \qquad \text{si } x \geq 0$$
$$|x| = -x \qquad \text{si } x < 0$$

Por lo tanto, la función valor absoluto se puede expresar como

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La gráfica de $f(x)$ 5 x para x \$ 0 es el rayo en el primer cuadrante, y la gráfica de $f(x)$ 5 2x para x , 0 es la media línea (no incluido en el origen) en el segundo cuadrante, como se indica en la figura 12.33. Note que la gráfica tiene simetría con respecto al eje y.

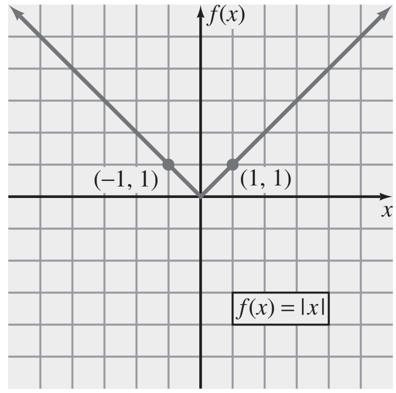


Figura 12.33

Traslaciones de las curvas básicas

A partir del trabajo en la sección 12.3, sabe que

1. La gráfica de $f(x)$ 5 x^2 1 3 es la gráfica de $f(x)$ 5 x^2 movida hacia arriba tres unidades.
2. La gráfica de $f(x)$ 5 x^2 2 2 es la gráfica de $f(x)$ 5 x^2 movida hacia abajo por dos unidades.

Ahora se describe el concepto general de una traslación vertical.

Traslación vertical

La gráfica de y 5 $f(x)$ 1 k es la gráfica de y 5 $f(x)$ corrida k unidades hacia arriba si k . 0 o corrida unidades hacia abajo, si k , 0.

En la figura 12.34, la gráfica de $f(x)$ 5 $|x|$ 1 2 se obtiene al correr la gráfica de $f(x)$ 5 $|x|$ hacia arriba dos unidades, y la gráfica de $f(x)$ 5 $|x|$ 2 3 se obtiene al correr la gráfica de $f(x)$ 5 $|x|$ hacia abajo tres unidades. Recuerde que $f(x)$ 5 $|x|$ 2 3 se puede escribir como $f(x)$ 5 $|x|$ 1 (23).

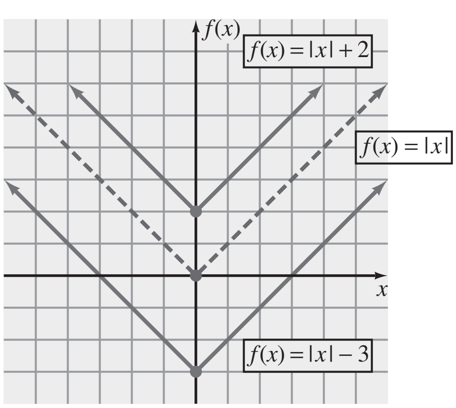


Figura 12.34

En la sección 12.3 también se graficaron traslaciones horizontales de la parábola básica. Por ejemplo:

1. La gráfica de $f(x)$ 5 $(x$ 2 $4)^2$ es la gráfica de $f(x)$ 5 x^2 movida cuatro unidades hacia la derecha.
2. La gráfica de $f(x)$ 5 $(x$ 1 $5)^2$ es la gráfica de $f(x)$ 5 x^2 movida cinco unidades hacia la izquierda.

El concepto general de una traslación horizontal se puede describir de la siguiente manera.

Traslación horizontal

La gráfica de y 5 $f(x$ 2 $h)$ es la gráfica de y 5 $f(x)$ corrida h unidades hacia la derecha si h . 0 o movida $|h|$ unidades a la izquierda si h , 0.

En la figura 12.35, la gráfica de $f(x)$ 5 $(x$ 2 $3)^3$ se obtiene al mover la gráfica de $f(x)$ 5 x^3 tres unidades a la derecha. Del mismo modo, la gráfica de $f(x)$ 5 $(x$ 1 $2)^3$ se obtiene al mover la gráfica de $f(x)$5 x^3 dos unidades a la izquierda.

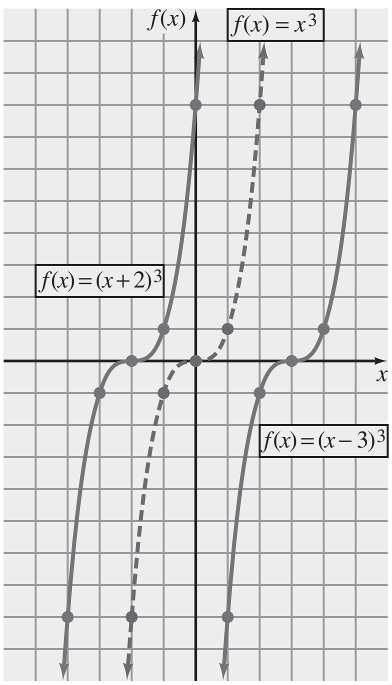


Figura 12.35

Reflexiones de las curvas básicas

A partir del trabajo en la sección 12.3 se sabe que la gráfica de $f(x)$ 5 2x^2 es la gráfica de $f(x)$ 5 x^2 reflejada a través del eje x. El concepto general de una reflexión con respecto al eje x se puede describir del modo siguiente:

Reflexión con respecto al eje x

La gráfica de y 5 2$f(x)$ es la gráfica de y 5 $f(x)$ reflejada a través del eje x.

En la figura 12.36, la gráfica de $f(x) = -\sqrt{x}$ se obtiene al reflejar la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ a través del eje x. En ocasiones, a las reflexiones se les conoce como **imágenes especulares**. Por ende, si el eje x de la figura 12.36 se considera como un espejo, entonces las gráficas de $f(x) = \sqrt{x}$ y $f(x) = -\sqrt{x}$ son imágenes especulares una de la otra.

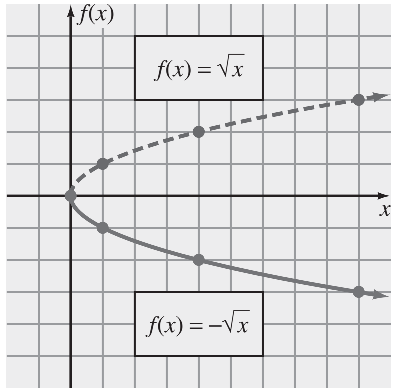


Figura 12.36

En la sección 12.3 no se consideró una reflexión en torno al eje y de la parábola básica $f(x) = x^2$ porque es simétrica con respecto al eje y. En otras palabras, una reflexión sobre el eje de $f(x) = x^2$ produce la misma figura. Sin embargo, en este momento, se describe el concepto general de una reflexión con respecto al eje y.

Reflexión con respecto al eje y

La gráfica de $y = f(-x)$ es la gráfica de $y = f(x)$ reflejada a través del eje y.

Ahora suponga que se quiere hacer una reflexión con respecto al eje y de $f(x) = \sqrt{x}$. Puesto que $f(x) = \sqrt{x}$ se define por x, la reflexión con respecto al eje y $x \geq 0$ se define por $-x \geq 0$, que es -1 equivalente a $x \leq 0$. La figura 12.37 muestra la reflexión con respecto al eje y de $f(x) = \sqrt{x}$.

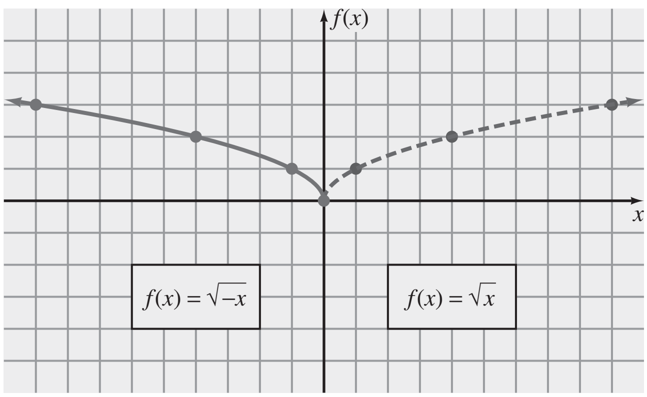


Figura 12.37

Estiramiento y encogimiento verticales

Las traslaciones y las reflexiones se llaman transformaciones rígidas porque la forma básica de la curva a transformar no cambia. En otras palabras, sólo lo hacen las posiciones de las gráficas. Ahora se quieren considerar algunas transformaciones que distorsionan un poco la forma de la figura original.

En la sección 12.3 se graficó la función $f(x) = 2x^2$ al doblar los valores $f(x)$ de los pares ordenados que satisfacen la función $f(x) = x^2$. Se obtuvo una parábola con su vértice en el origen, simétrica al eje y, pero más estrecha que la parábola básica. Del mismo modo, se graficó la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ al reducir a la mitad $f(x)$ los valores de los pares ordenados que satisfacen $f(x) = x^2$. En este caso se obtuvo una parábola con su vértice en el origen, simétrica al eje y, pero más ancha que la parábola básica.

Los conceptos de *más estrecha* y *más ancha* se pueden usar para describir parábolas, pero no se pueden usar para describir algunas otras curvas con precisión. En vez de ello, se usan los conceptos más generales de estiramiento y encogimiento verticales.

Estiramiento y encogimiento verticales

La gráfica de y 5 $cf(x)$ se obtiene a partir de la gráfica de y 5 $f(x)$ al multiplicar por c las coordenadas y para y 5 $f(x)$ por c. Si $|c|$. 1, se dice que la gráfica se *estira* por un factor de $|c|$ y si 0 , $|c|$, 1, se dice que la gráfica se encoge por un factor de $|c|$.

En la figura 12.38, la gráfica de $f(x)$ 5 2 ! $\overline{x}$ se obtuvo al duplicar las coordenadas y de los puntos en la gráfica de $f(x)$ 5 ! $\overline{x}$. Del mismo modo, la gráfica $f(x)$ 5 $\frac{1}{2}$! $\overline{x}$ se obtuvo al reducir a la mitad las coordenadas y de los puntos en la gráfica de $f(x)$ 5 ! $\overline{x}$.

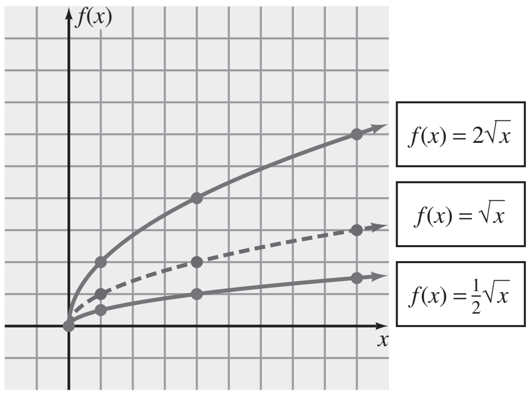


Figura 12.38

Transformaciones sucesivas

Algunas curvas son el resultado de realizar más de una transformación sobre una curva básica. Considere la gráfica de una función que implica un estiramiento, una reflexión, una traslación horizontal y una traslación vertival de la función valor absoluto básica.

Ejemplo de salón de clases

Graficar $f(x) = -\frac{1}{2}$! $\overline{x + 1}$ + 2.

EJEMPLO 5 Graficar $f(x)$ 5 2 2$|x$ 2 3$|$ 1 1.

Solución

Ésta es la curva valor absoluto básica estirada por un factor de 2, reflejada a través del eje x, movida tres unidades a la derecha y una unidad hacia arriba. Para graficar, debe ubicar el punto (3, 1) y luego determinar un punto sobre cada uno de los rayos. La gráfica se muestra en la figura 12.39.

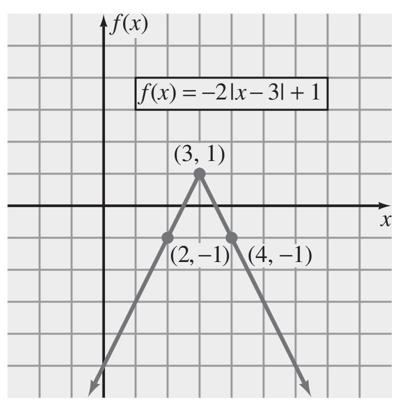


Figura 12.39

Comentario: Note que, en el ejemplo 5, no se dibujó la curva básica original $f(x)$ 5 $|x|$ o alguna de las transformaciones intermedias. Sin embargo, es útil dibujar mentalmente cada transformación. Esto ubica el punto (3, 1) y establece el hecho de que los dos rayos apuntan hacia abajo. Entonces, un punto sobre cada rayo determina la gráfica final.

Es necesario darse cuenta de que cambiar el orden en la realización de las transformaciones puede producir una gráfica incorrecta. En el ejemplo 5, realizar primero las transformaciones y luego realizar el estiramiento y la reflexión en torno al eje x ubicaría el vértice de la gráfica en (3, 21) en lugar de (3, 1). *A menos de que los paréntesis indiquen otra cosa, los estiramientos, encogimientos y reflexiones se deben realizar antes que las traslaciones.*

Ejemplo de salón de clases
Graficar $f(x) = \sqrt{-4 - x}$.

EJEMPLO 6 Graficar $f(x) = \sqrt{-3 - x}$.

Solución

Parece que esta función es un reflejo del eje y y una traslación horizontal de la función básica $f(x)$ 5 ! $\overline{x}$. Primero, debe reescribir la expresión bajo el radical.

$$f(x) = \sqrt{-3 - x} = \sqrt{-(3 + x)} = \sqrt{-(x + 3)}$$

Ahora, para graficar $f(x) = \sqrt{-(x + 3)}$, primero se debe reflejar la gráfica de $f(x)$ 5 ! $\overline{x}$ a través del eje y, después se debe mover la gráfica 3 unidades hacia la izquierda. La gráfica se muestra en la figura 12.40. Puesto que siempre es buena idea comprobar su gráfica al ubicar algunos puntos, se han añadido los puntos (27, 2) y (24, 1) a la gráfica.

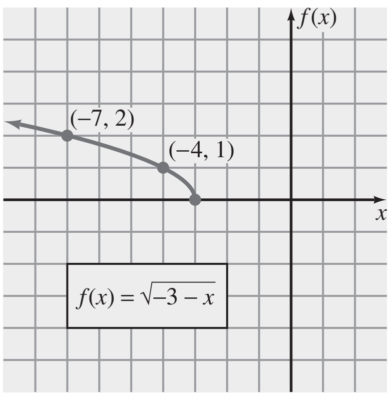


Figura 12.40

Ahora suponga que quiere graficar la siguiente función.

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 4}$$

Puesto que no es una función básica reconocida ni una transformación de una función básica, debe invertir las experiencias de graficación anteriores. En otras palabras, necesita encontrar el dominio, hallar las intersecciones con los ejes, verificar la simetría, comprobar cualquier restricción, elaborar una tabla de valores, graficar los puntos y bosquejar la curva. (Si quiere hacer esto ahora, puede comprobar su resultado en la página 503.) Más aún, si la nueva función se define en términos de una función anterior, puede aplicar la definición de la función anterior y, en consecuencia, simplificar la nueva función para propósitos de graficación. Suponga que se le pide graficar la función $f(x)$ 5 $|x|$ 1 x. Esta función se puede simplificar al aplicar la definición de valor absoluto. Esto se dejará para su resolución en el siguiente conjunto de problemas.

Finalmente, use una herramienta de graficación para dar otra ilustración del concepto de estiramiento y encogimiento de una curva.

Ejemplo de salón de clases

Si $f(x) = \sqrt{36 - x^2}$, dibuje una gráfica de $y = 3f(x)$ y $y = \frac{1}{3}f(x)$.

EJEMPLO 7

Si $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ dibuje una gráfica de $y = 2(f(x))$ y $y = \frac{1}{2}(f(x))$.

Solución

Si $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, entonces

$$y = 2(f(x)) = 2\sqrt{25 - x^2} \text{ y } y = \frac{1}{2}(f(x)) = \frac{1}{2}\sqrt{25 - x^2}$$

Graficar estas tres funciones en el mismo conjunto de ejes produce la figura 12.41.

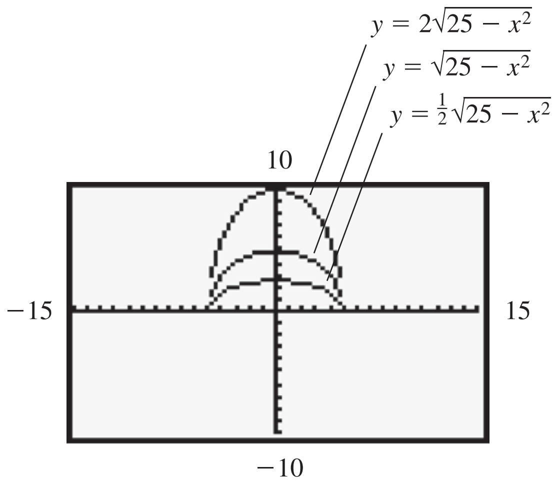


Figura 12.41

Examen de conceptos 12.4

1. ¿Cuál es el dominio de $f(x)$ 5 ! $\overline{x}$?
   a. $x > 0$ b. $x \geq 0$ c. Todos los números reales
2. ¿Cuál es el dominio de $f(x)$ 5 $|x|$?
   a. $x > 0$ b. $x \geq 0$ c. Todos los números reales
3. Si una gráfica es simétrica respecto al eje y, ¿entonces cuál de las siguientes opciones es igual a $f(2)$?
   a. 2$f(2)$ b. $f($22$)$ c. 2$f($22$)$
4. ¿Cuál de las siguientes describe la gráfica de $f(x)$ 5 x^4 1 3?
   a. La gráfica de $f(x)$ 5 x^4 corrida hacia arriba 3 unidades
   b. La gráfica de $f(x)$ 5 x^4 corrida hacia la izquierda 3 unidades
   c. La gráfica de $f(x)$ 5 x^4 corrida hacia la derecha 3 unidades.
5. Para la gráfica de la función $f(x)$ 5 22$|x$ 1 1$|$ 2 3, ¿cuáles son las coordenadas del vértice?
   a. (21, 3) b. (1, 23) c. (21, 23) d. (0, 5)

Para los problemas 6-10, responder cierto o falso.

6. Cuando la gráfica de una parábola se estira, se dice que es más angosta que la parábola básica.
7. Una traslación horizontal es una transformación rígida, y la forma de la gráfica no cambia.
8. Cuando se aplican transformaciones sucesivas a una gráfica, a menos que los paréntesis indiquen lo contrario, los estiramientos, encogimientos o reflejos se deben llevar a cabo antes de las traslaciones.
9. Las gráficas de $f(x)$ 5 x^4 y $f(x)$ 5 x^2 son parábolas.
10. La gráfica de y 5 $f($2$x)$ es la gráfica de y 5 $f(x)$ reflejada a través del eje x.

Conjunto de problemas 12.4

Para los problemas 1-30, graficar cada función. **(Objectivo 1)**

1. $f(x) = x^4 + 2$ **2.** $f(x) = -x^4 - 1$

3. $f(x) = (x - 2)^4$ **4.** $f(x) = (x + 3)^4 + 1$

5. $f(x) = -x^3$ **6.** $f(x) = x^3 - 2$

7. $f(x) = (x + 2)^3$ **8.** $f(x) = (x - 3)^3 - 1$

9. $f(x) = |x - 1| + 2$ **10.** $f(x) = -|x + 2|$

11. $f(x) = |x + 1| - 3$ **12.** $f(x) = 2|x|$

13. $f(x) = x + |x|$ **14.** $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

15. $f(x) = -|x - 2| - 1$ **16.** $f(x) = 2|x + 1| - 4$

17. $f(x) = x - |x|$ **18.** $f(x) = |x| - x$

19. $f(x) = -2\sqrt{x}$ **20.** $f(x) = 2\sqrt{x - 1}$

21. $f(x) = \sqrt{x + 2} - 3$ **22.** $f(x) = -\sqrt{x + 2} + 2$

23. $f(x) = \sqrt{2 - x}$ **24.** $f(x) = \sqrt{-1 - x}$

25. $f(x) = -2x^4 + 1$ **26.** $f(x) = 2(x - 2)^4 - 4$

27. $f(x) = -2x^3$ **28.** $f(x) = 2x^3 + 3$

29. $f(x) = 3(x - 2)^3 - 1$ **30.** $f(x) = -2(x + 1)^3 + 2$

31. Suponga que la gráfica de y 5 $f(x)$ con un dominio de 22 # x # 2 se muestra en la figura 12.42.

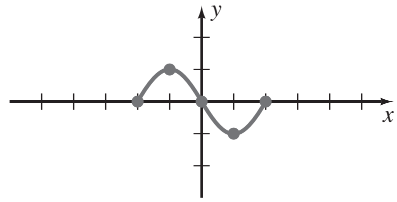


Figura 12.42

Bosqueje la gráfica de cada una de las siguientes transformaciones de y 5 $f(x)$.

(a) $y = f(x) + 3$ **(b)** $y = f(x - 2)$
(c) $y = -f(x)$ **(d)** $y = f(x + 3) - 4$

Pensamientos en palabras

32. ¿Las gráficas de las dos funciones, $f(x)$ 5 ! $\overline{x - 2}$ y $g(x)$ 5 ! $\overline{2 - x}$, son reflejos mutuos sobre el eje y? Defienda su respuesta.

33. ¿Las gráficas de $f(x)$ 5 2 ! $\overline{x}$ y $g(x)$ 5 ! $\overline{2x}$ son idénticas? Defienda su respuesta.

34. ¿Las gráficas de $f(x)$ 5 ! $\overline{x + 4}$ y $g(x)$ 5 ! $\overline{-x + 4}$ son reflejos mutuos sobre el eje y? Defienda su respuesta.

Actividades con calculadora graficadora

35. Use su calculadora graficadora para comprobar sus gráficas para los problemas 13-30.

36. Grafique $f(x)$ 5 ! $\overline{x^2 + 8}$, $f(x)$ 5 ! $\overline{x^2 + 4}$ y $f(x)$ 5 ! $\overline{x^2 + 1}$ sobre el mismo conjunto de ejes. Observe las gráficas y prediga la gráfica de $f(x)$ 5 ! $\overline{x^2 - 4}$. Ahora grafíquela con la calculadora para poner a prueba su predicción.

37. Para cada una de las siguientes expresiones, prediga la forma general y ubicación de la gráfica, y luego use su calculadora para graficar la función y comprobar su predicción.

(a) $f(x) = \sqrt{x^2}$ **(b)** $f(x) = \sqrt{x^3}$
(c) $f(x) = |x^2|$ **(d)** $f(x) = |x^3|$

38. Grafique $f(x)$ 5 x^4 1 x^3. Ahora prediga la gráfica para cada una de las siguientes expresiones y compruebe cada predicción con su calculadora graficadora.

(a) $f(x) = x^4 + x^3 - 4$
(b) $f(x) = (x - 3)^4 + (x - 3)^3$
(c) $f(x) = -x^4 - x^3$
(d) $f(x) = x^4 - x^3$

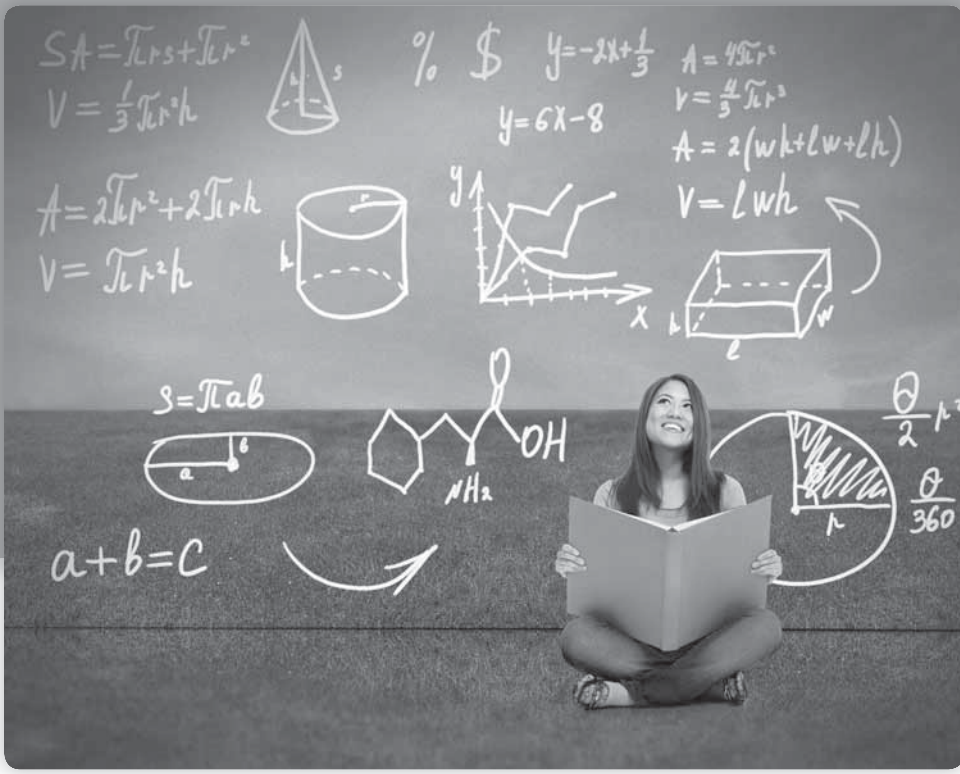
39. Grafique $f(x)$ 5 $\overset{3}{!}\,\overline{x}$. Ahora prediga la gráfica para cada una de las siguientes expresiones y compruebe cada predicción con su calculadora graficadora.

(a) $f(x) = 5 + \sqrt[3]{x}$ **(b)** $f(x) = \sqrt[3]{x + 4}$
(c) $f(x) = -\sqrt[3]{x}$ **(d)** $f(x) = \sqrt[3]{x - 3} - 5$
$f(x) = \sqrt[3]{-x}$

Respuestas al examen de conceptos

1. b **2.** c **3.** b **4.** a **5.** c **6.** Cierto **7.** Cierto **8.** Cierto **9.** Falso **10.** Falso

13 Funciones polinómicas y racionales



© Kurhan/Shutterstock.com

"Cambia tu forma de ver las cosas y las cosas cambiarán"
WAYNE DYER

Tip de estudio

En los cursos de matemáticas rara vez se abordan temas para mejorar la memoria. Sin embargo existen técnicas que pueden ayudar a mejorar el almacenamiento de información en la memoria de largo plazo.

Una técnica es usar ayudas visuales o crear imágenes mentales para facilitar el aprendizaje del material de estudio. Las gráficas en este capítulo podrían ser fáciles de recordar si las imagina como una montaña rusa, o un paisaje montañoso con la misma forma. Para la propiedad asociativa de la suma se podría imaginar a tres niños jugando en un patio-dos de ellos jugando juntos y el tercero jugando solo. Si es un alumno visual este tipo de imágenes mentales le ayudarán a aprender matemáticas.

Otra técnica es hacer asociaciones. Puede pensar la propiedad asociativa de la suma con transportarse al trabajo. El número de millas que conduzca es siempre el mismo ya sea que vaya de la oficina a su casa o viceversa.

Usar distintos recursos nemotécnicos y acrónimos puede ayudar a que recuerde leyes y reglas matemáticas. Un juego nemotécnico popular para ordenar las operaciones es "Please Excuse My Dear Aunt Sally", donde la primera letra de cada palabra quiere decir paréntesis, exponentes, multiplicación, división, adición, y substracción. El acrónimo FOIL indica la forma correcta de multiplicar dos binomios: primero se multiplican las primeras variables, luego las variables externas, seguido las internas y por último las finales.

¿Qué concepto matemático se volvió más fácil de recordar usando las técnicas visuales?

Vista previa del capítulo

Este capítulo comienza con dos secciones que lo introducirán a algunos teoremas que nos permitirán sentar las bases de las ecuaciones con polinomios. Estas bases son las intersecciones de X al graficar funciones. Muchas de las técnicas para graficar que se usaron anteriormente como intersecciones, simetrías, traslados, y reflejos son usadas en este capítulo para gráficas polinomios y funciones racionales.

13.1 Graficación de funciones polinomiales

OBJETIVOS

1. Conocer los patrones para las gráficas de $f(x) = ax^n$
2. Graficar funciones polinomiales
3. Identificar los intervalos en los cuales una función polinomial es positiva o negativa

Los términos con los que se clasifican las funciones son análogos a los que describen las ecuaciones lineales, las cuadráticas y las polinomiales. En capítulos anteriores se definió una función lineal en términos de la ecuación

$f(x)$ 5 ax 1 b

y una función cuadrática en términos de la ecuación

$f(x)$ 5 ax^2 1 bx 1 c

Ambas son casos especiales de una clase general de funciones llamada funciones polinomiales. Cualquier función de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

se llama **función polinomial de grado *n***, donde a_n es un número real distinto de cero, a_{n-1}, . . . , a_1, a_0 son números reales y n es un entero no negativo. Los siguientes son ejemplos de funciones polinomiales:

$f(x) = 5x^3 - 2x^2 + x - 4$ Grado 3

$f(x) = -2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 1$ Grado 4

$f(x) = 3x^5 + 2x^2 - 3$ Grado 5

Comentario: El trabajo previo con ecuaciones polinomiales en ocasiones se presentó como "encontrar las raíces de las funciones polinomiales". Las **soluciones**, o **raíces**, de una ecuación polinomial también se llaman los **ceros** de la función polinomial. Por ejemplo, -2 y 2 son soluciones de $x^2 - 4 = 0$ y son ceros de $f(x) = x^2 - 4$. Esto es, $f(-2) = 0$ y $f(2) = 0$.

Para un análisis completo de la graficación de funciones polinomiales, necesitaría algunas herramientas de cálculo. Sin embargo, las técnicas de graficación que se analicen en este texto le permitirán graficar ciertos tipos de funciones polinomiales. Por ejemplo, las funciones polinomiales de la forma $f(x) = ax^n$ se grafican con facilidad. A partir del trabajo previo se sabe que, si $n = 1$, entonces funciones como $f(x) = 2x$, $f(x) = -3x$ y $f(x)$ 5 $\frac{1}{2}x$ son rectas a través del origen que tienen pendientes de 2, -3 y $\frac{1}{2}$, respectivamente.

Más aún, si $n = 2$, se sabe que las gráficas de las funciones de la forma $f(x) = ax^2$ son parábolas que son simétricas con respecto al eje y y tienen sus vértices en el origen.

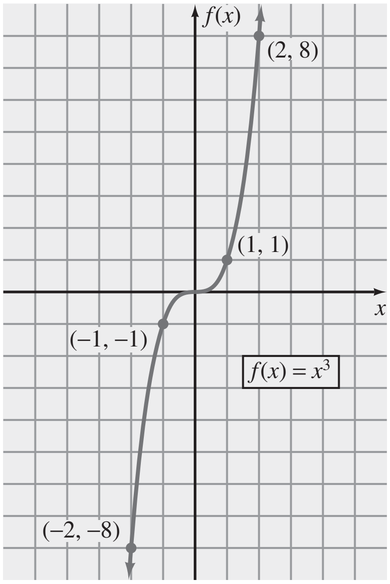
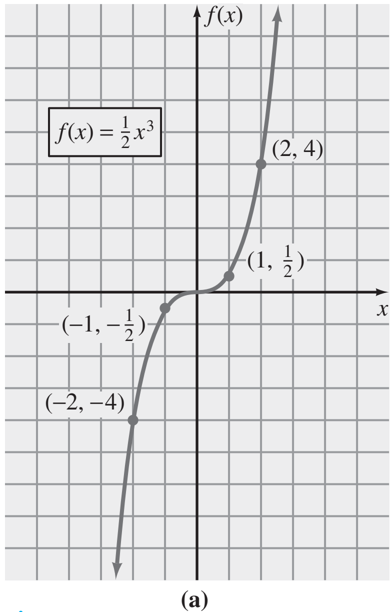


Figura 13.1



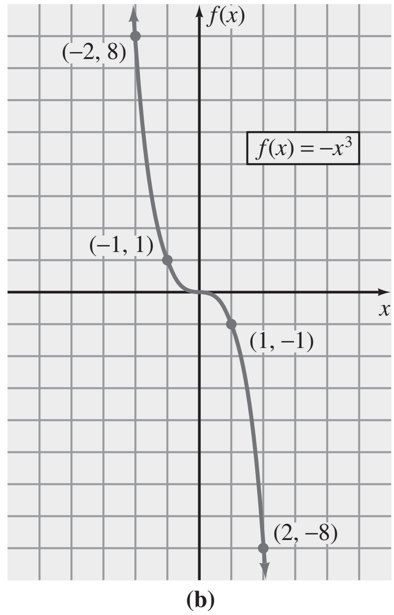


Figura 13.2

Anteriormente también se graficó el caso especial de $f(x) = ax^n$, donde $a = 1$ y $n = 3$; a saber, la función $f(x) = x^3$. Esta gráfica se muestra en la figura 13.1.

Las gráficas de las funciones de la forma $f(x) = ax^3$, donde $a \neq 1$, son ligeras variaciones de $f(x) = x^3$ y se pueden determinar fácilmente al graficar algunos puntos. Las gráficas de $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3$ y $f(x) = -x^3$ aparecen en la figura 13.2 (a) y 13.2 (b)

Dos patrones generales surgen del estudio de las funciones de la forma $f(x) = x^n$. Si n es impar y mayor que 3, las gráficas recuerdan mucho a la figura 13.1. La gráfica de $f(x) = x^5$ se muestra en la figura 13.3. Note que la curva se "aplana" un poco más en torno al origen que la gráfica de $f(x) = x^3$; que aumenta y disminuye más rápidamente debido al exponente más grande. Si n es par y mayor que 2, las gráficas de $f(x) = x^n$ no son parábolas. Recuerdan a la parábola básica, pero son más planas en el fondo y más inclinadas en los lados. La figura 13.4 muestra la gráfica de $f(x) = x^4$.

Las gráficas de las funciones de la forma $f(x) = ax^n$, donde n es un entero mayor que 2 y $a \neq 1$, son variaciones de las que se muestran en las figuras 13.1 y 13.4. Si n es impar, la curva es simétrica en torno al origen. Si n es impar, la gráfica es simétrica en torno al eje y.

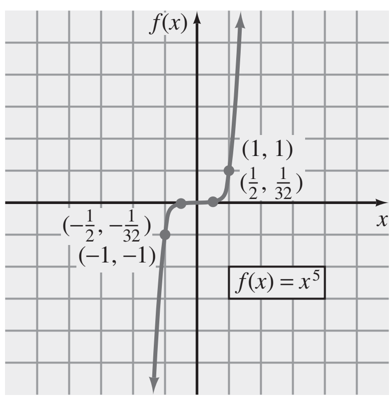


Figura 13.3

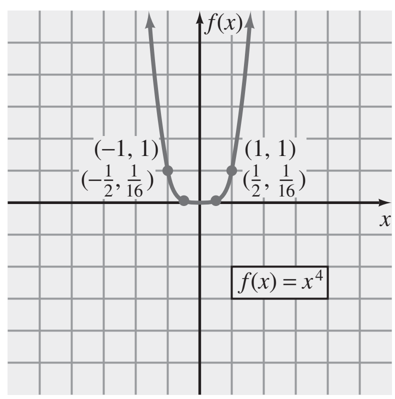


Figura 13.4

Recuerde de su trabajo en capítulos anteriores que las transformaciones de las curvas básicas son fáciles de bosquejar. Por ejemplo, en la figura 13.5, la gráfica de $f(x) = x^3$ se trasladó hacia arriba dos unidades para producir la gráfica de $f(x) = x^3 + 2$. La figura 13.6 muestra la gráfica de $f(x) = (x - 1)^5$, que se obtuvo al trasladar la gráfica de $f(x) = x^5$ una unidad a la derecha. En la figura 13.7 se bosquejó la gráfica de $f(x) = -x^4$ como el reflejo en $f(x) = x^4$.

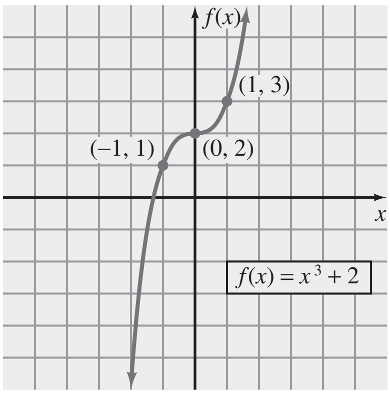


Figura 13.5

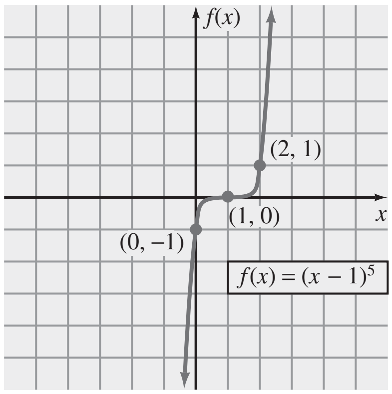


Figura 13.6

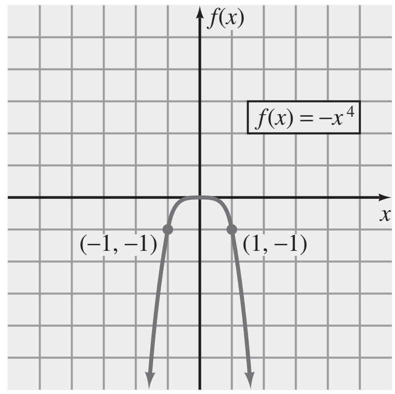


Figura 13.7

Graficación de funciones polinomiales en forma factorizada

Conforme aumenta el grado del polinomio, las gráficas con frecuencia se vuelven más complicadas. Sin embargo, se sabe que las funciones polinomiales producen curvas continuas con algunos puntos de retorno, como se ilustra en las figuras 13.8 y 13.9. En la figura 13.8 se muestran algunas gráficas típicas de funciones polinomiales de grado impar. Como sugieren las gráficas, toda función polinomial de grado impar tiene al menos un *cero real*; es decir: al menos un número real c tal que $f(c) = 0$. Geométricamente, los ceros de la función son abscisas al origen de la gráfica. La figura 13.9 ilustra algunas posibles gráficas de las funciones polinomiales de grado par.

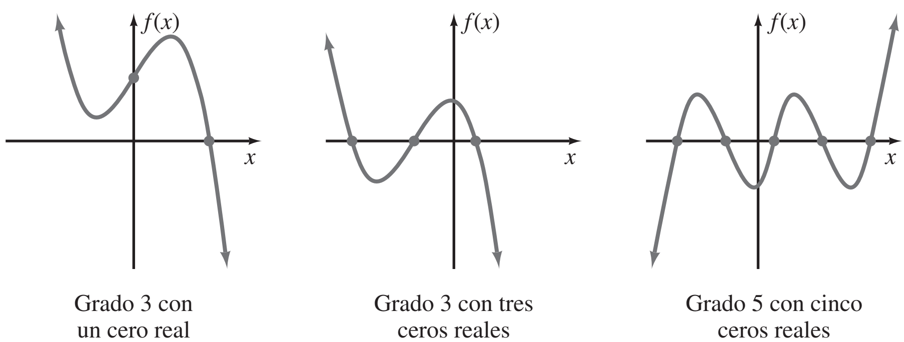
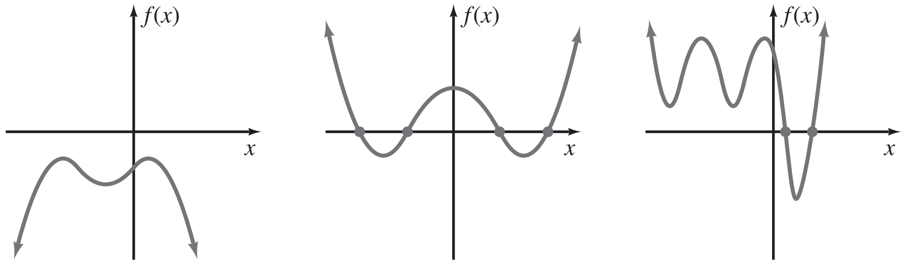


Figura 13.8



Grado 4 sin ceros reales

Grado 4 con cuatro ceros reales

Grado 6 con dos ceros reales

Figura 13.9

Los **puntos de retorno** son los lugares donde la función cambia, de aumentar a disminuir o de disminuir a aumentar. Mediante el cálculo se verifica que una función polinomial de grado n tiene cuanto mucho $n - 1$ puntos de retorno. Ahora se ilustra la forma de usar esta información, junto con algunas otras técnicas, para graficar funciones polinomiales que se expresan en forma factorizada.

Ejemplo de salón de clases
Graficar $f(x) = (x + 1) \cdot (x - 4)(x - 2)$.

EJEMPLO 1 Graficar $f(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$.

Solución

Primero, encuentre las abscisas al origen (ceros de la función) al igualar a cero cada factor y resolver para x:

$$x + 2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$
$$x = -2 \qquad\qquad x = 1 \qquad\qquad x = 3$$

Por lo tanto, los puntos $(-2, 0)$, $(1, 0)$ y $(3, 0)$ están sobre la gráfica. Segundo, los puntos asociados con las abscisas al origen dividen el eje x en cuatro intervalos, como se muestra en la figura 13.10.

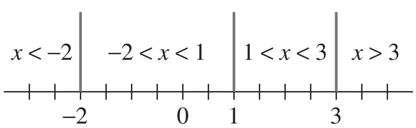


Figura 13.10

En cada uno de estos intervalos, $f(x)$ es siempre positiva o siempre negativa. Es decir, la gráfica está arriba o abajo del eje x. Seleccionar un valor de prueba para x en cada uno de los intervalos determinará si x es $f(x)$ positiva o negativa. Cualesquiera puntos adicionales que se obtengan con facilidad mejoran la exactitud de la gráfica. La tabla resume estos resultados.

Intervalo	Valor de prueba	Signo de $f(x)$	Ubicación de la gráfica
$x < -2$	$f(-3) = -24$	Negativo	Bajo el eje x
$-2 < x < 1$	$f(0) = 6$	Positivo	Sobre el eje x
$1 < x < 3$	$f(2) = -4$	Negativo	Bajo el eje x
$x > 3$	$f(4) = 18$	Positivo	Sobre el eje x
Valores adicionales: $f(-1) = 8$			

Al usar las abscisas al origen y la información en la tabla, se puede bosquejar la gráfica de la figura 13.11. Los puntos $(-3, -24)$ y $(4, 18)$ no se muestran, pero se usan para indicar una rápida disminución y un aumento de la curva en dichas regiones.

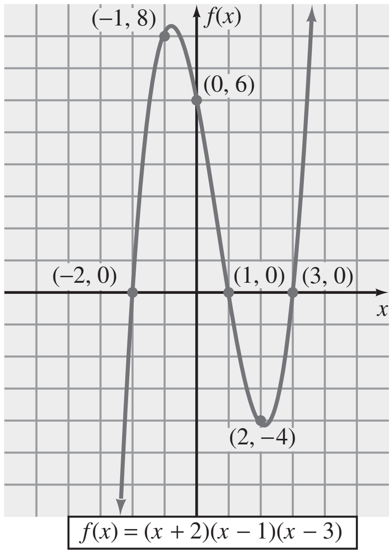


Figura 13.11

Comentario: En la figura 13.11 los puntos de retorno aproximados de la gráfica se indican en $(2, -4)$ y $(-1, 8)$. Tenga en mente que éstos sólo son aproximaciones enteras. Con las características ZOOM y TRACE de una calculadora graficadora, se encuentra que los puntos $(-0.8, 8.2)$ y $(2.1, -4.1)$ son aproximaciones a la décima más cercana. De nuevo, son necesarias herramientas de cálculo para encontrar los puntos de retorno exactos.

Ejemplo de salón de clases
Graficar $f(x) = -x^4 + 2x^3 + 3x^2$.

EJEMPLO 2 Graficar $f(x) = -x^4 + 3x^3 - 2x^2$.

Solución

El polinomio se factoriza del modo siguiente:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^4 + 3x^3 - 2x^2 \\ &= -x^2(x^2 - 3x + 2) \\ &= -x^2(x - 1)(x - 2) \end{aligned}$$

Ahora puede encontrar las abscisas al origen.

$$\begin{array}{ccccc} -x^2 = 0 & \text{o} & x - 1 = 0 & \text{o} & x - 2 = 0 \\ x = 0 & \text{o} & x = 1 & \text{o} & x = 2 \end{array}$$

Los puntos $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(2, 0)$ están sobre la gráfica y dividen el eje x en cuanto intervalos, como se muestra en la figura 13.12.

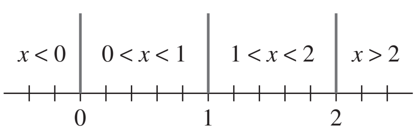


Figura 13.12

En la siguiente tabla se determinan algunos puntos y se resume el comportamiento de los signos de $f(x)$.

Intervalo	Valor de prueba	Signo de $f(x)$	Ubicación de la gráfica
$x < 0$	$f(-1) = -6$	Negativo	Bajo el eje x
$0 < x < 1$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{16}$	Negativo	Bajo el eje x
$1 < x < 2$	$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{16}$	Positivo	Sobre el eje x
$x > 2$	$f(3) = -18$	Negativo	Bajo el eje x

Al usar la tabla y las abscisas al origen se dibuja la gráfica, como se ilustra en la figura 13.13.

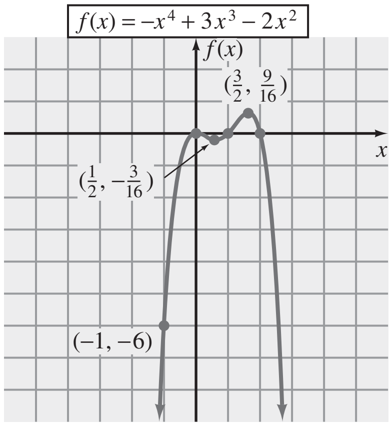


Figura 13.13

Ejemplo de salón de clases
Graficar $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

EJEMPLO 3 Graficar $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$.

Solución

Use el teorema de raíz racional, la división sintética y el teorema del factor para factorizar el polinomio dado del modo siguiente.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 3x^2 - 4 \\ &= (x - 1)(x^2 + 4x + 4) \\ &= (x - 1)(x + 2)^2 \end{aligned}$$

Ahora puede encontrar las abscisas al origen.

$$\begin{aligned} x - 1 &= 0 \quad \text{o} \quad (x + 2)^2 = 0 \\ x &= 1 \quad \text{o} \quad x = -2 \end{aligned}$$

Los puntos $(-2, 0)$ y $(1, 0)$ están sobre la gráfica y dividen el eje x en tres intervalos, como se muestra en la figura 13.14.

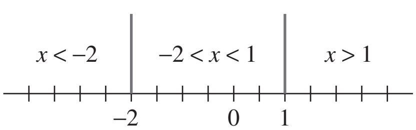


Figura 13.14

En la siguiente tabla se determinan algunos puntos y se resume el comportamiento de los signos de $f(x)$.

Intervalo	Valor de prueba	Signo de $f(x)$	Ubicación de la gráfica
$x < -2$	$f(-3) = -4$	Negativo	Bajo el eje x
$-2 < x < 1$	$f(0) = -4$	Negativo	Bajo el eje x
$x > 1$	$f(2) = 16$	Postivo	Sobre el eje x
Valores adicionales:	$f(-1) = -2$		
	$f(-4) = -20$		

Como resultado de la tabla y las abscisas al origen, puede trazar la gráfica mostrada en la figura 13.15.

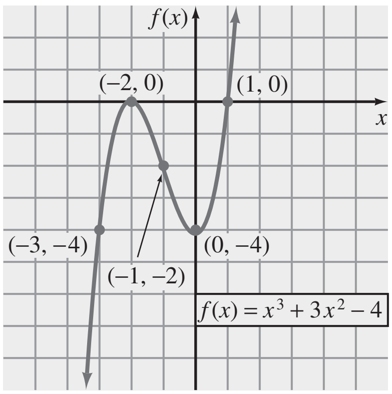


Figura 13.15

Finalmente, use un método gráfico para resolver un problema que implique una función polinomial.

Ejemplo de salón de clases
Suponga que tiene un trozo rectangular de cartón que mide 24 centímetros por 16 centímetros. De cada esquina se corta un trozo cuadrado y luego las cejas se doblan para formar una caja abierta (ver figura 13.16). Determine la longitud de un lado de las piezas cuadradas a cortar de modo que el volumen de la caja sea lo más grande posible.

EJEMPLO 4 Aplique su habilidad

Suponga que tiene un trozo rectangular de cartón que mide 20 por 14 pulgadas. De cada esquina se corta un trozo cuadrado y luego las cejas se doblan para formar una caja abierta (vea la figura 13.16). Determine la longitud de un lado de las piezas cuadradas a cortar, de modo que el volumen de la caja sea lo más grande posible.

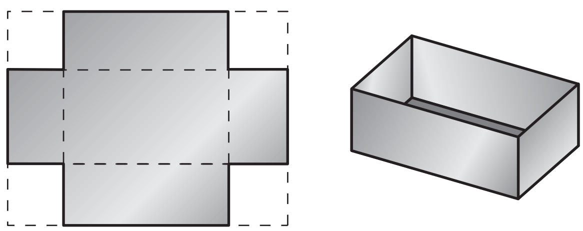


Figura 13.16

Solución

Sea x la longitud de un lado de los cuadrados a cortar de cada esquina. Entonces $20 - 2x$ representa la longitud de la caja abierta, y $14 - 2x$ representa el ancho. El volumen de una caja rectangular está dado por la fórmula $V = lwh$, de modo que el volumen de esta caja se puede representar mediante $V = x(20 - 2x)(14 - 2x)$. Ahora, sea $y = V$, y grafique la función $y = x(20 - 2x)(14 - 2x)$ como se muestra en la figura 13.17. Para este problema, sólo se tiene interés en la parte de la gráfica entre $x = 0$ y $x = 7$ porque la longitud de un lado de los cuadrados tiene que ser menor que 7 pulgadas para que se forme una caja. La figura 13.18 brinda una visión de dicha parte de la gráfica. Ahora puede usar las características ZOOM y TRACE para determinar que, cuando x es igual a aproximadamente 2.7, el valor de y es un máximo de aproximadamente 339.0. Por lo tanto, de cada esquina de la pieza rectangular de cartón se deben cortar trozos cuadrados de aproximadamente 2.7 pulgadas de largo. La caja abierta formada tendrá un volumen de aproximadamente 339.0 pulgadas cúbicas.

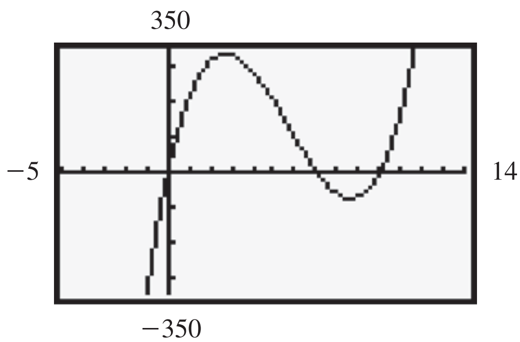


Figura 13.17

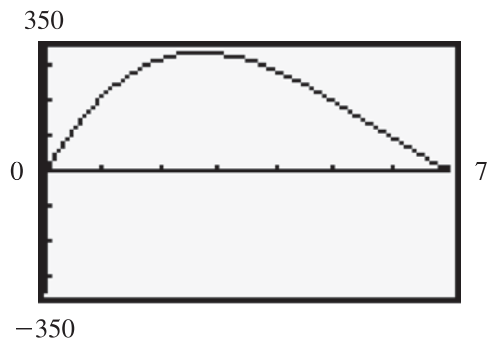
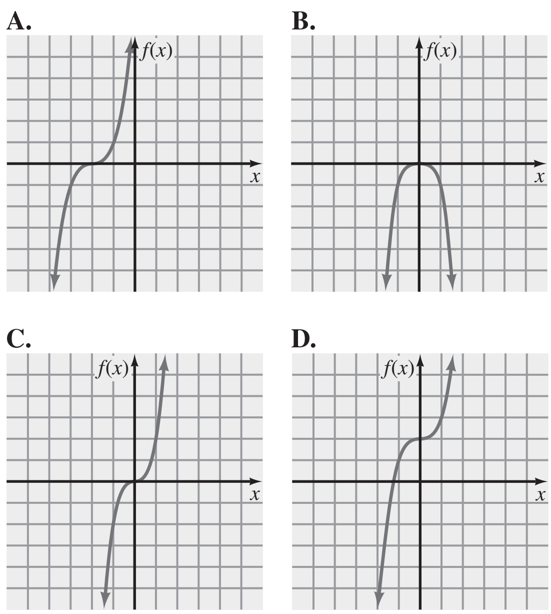


Figura 13.18

Examen de conceptos 13.1

Para los problemas 1-4, unir la función con su gráfica.

1. $f(x) = -x^4$ **2.** $f(x) = 2x^3$ **3.** $f(x) = (x + 2)^3$ **4.** $f(x) = x^3 + 2$



Para los problemas 5-8, responder cierto o falso.

5. Las soluciones de una ecuación polinomial son llamadas los ceros de la función polinomial.

6. Las gráficas de $f(x) = x^4$ y $f(x) = x^6$ son parábolas.

7. Toda función polinomial de grado impar debe tener al menos un número real cero.

8. Los puntos de retorno de las funciones polinomiales son donde la función cruza el eje x.

Conjunto de problemas 13.1

Para los problemas 1-22, graficar cada una de las funciones polinomiales. (Objectivo 2)

1. $f(x) = -(x - 3)^3$
2. $f(x) = (x - 2)^3 + 1$
3. $f(x) = (x + 1)^3$
4. $f(x) = x^3 - 3$
5. $f(x) = (x + 3)^4$
6. $f(x) = x^4 - 2$
7. $f(x) = -(x - 2)^4$
8. $f(x) = (x - 1)^5 + 2$
9. $f(x) = (x + 1)^4 + 3$
10. $f(x) = -x^5$
11. $f(x) = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$
12. $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)$
13. $f(x) = x(x + 2)(2 - x)$
14. $f(x) = (x + 4)(x + 1)(1 - x)$
15. $f(x) = -x^2(x - 1)(x + 1)$
16. $f(x) = -x(x + 3)(x - 2)$
17. $f(x) = (2x - 1)(x - 2)(x - 3)$
18. $f(x) = x(x - 2)^2(x - 1)$
19. $f(x) = (x - 2)(x - 1)(x + 1)(x + 2)$
20. $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$
21. $f(x) = x(x - 2)^2(x + 1)$
22. $f(x) = (x + 1)^2(x - 1)^2$

Para los problemas 23-34 grafique cada función polinomial al primer factor del polinomio dado. Tal vez necesite usar algunas técnicas de factorización vistas en capítulos anteriores, así como el teorema de raíz racional y el teorema del factor. (Objectivo 2)

23. $f(x) = -x^3 - x^2 + 6x$
24. $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$
25. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$
26. $f(x) = -x^4 - 3x^3 - 2x^2$
27. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$
28. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$
29. $f(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$
30. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
31. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$
32. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$
33. $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
34. $f(x) = -x^4 + 5x^2 - 4$

Para los problemas 35-42, (a) encuentre las ordenadas al origen, (b) las abscisas al origen y (c) los intervalos de x donde $f(x) > 0$ y aquellos donde $f(x) < 0$. *No* bosqueje las gráficas. (Objectivo 3)

35. $f(x) = (x + 3)(x - 6)(8 - x)$
36. $f(x) = (x - 5)(x + 4)(x - 3)$
37. $f(x) = (x + 3)^4(x - 1)^3$
38. $f(x) = (x - 4)^2(x + 3)^3$
39. $f(x) = x(x - 6)^2(x + 4)$
40. $f(x) = (x + 2)^2(x - 1)^3(x - 2)$
41. $f(x) = x^2(2 - x)(x + 3)$
42. $f(x) = (x + 2)^5(x - 4)^2$

43. Un trozo rectangular de cartón que mide 13 pulgadas de largo por 9 de ancho. De cada esquina se corta un trozo cuadrado y luego las cejas se doblan para formar una caja abierta. Usando una herramienta de graficación, determine la longitud (a la décima más cercana) de un lado de las piezas cuadradas a cortar de modo que el volumen de la caja sea lo más grande posible.

44. Una compañía determina que sus ganancias semanales de fabricar y vender x unidades de cierto artículo se encuentran con $P(x) = -x^3 + 3x^2 + 2880x - 500$. Use una herramienta de graficación para hallar la tasa de producción semanal que maximizará las ganancias.

Pensamientos en palabras

45. ¿Cómo defendería el enunciado de que la ecuación $2x^4 + 3x^3 + x^2 + 5 = 0$ no tiene soluciones positivas? ¿Tiene alguna solución negativa? Defienda su respuesta.

46. ¿Cómo sabe por inspección que la gráfica de $f(x) = (x + 1)^2(x - 2)^2$ en la figura 13.19 es incorrecta?

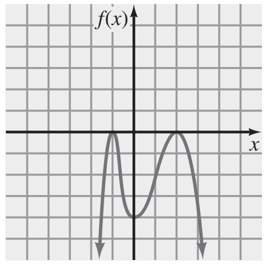


Figura 13.19

Más investigación

47. Una función polinomial con coeficientes reales es continua en todas partes; esto es: su gráfica no tiene hoyos ni rompimientos. Ésta es la base para la siguiente propiedad: si $f(x)$ es un polinomio con coeficientes reales, y si $f(a)$ y $f(b)$ son de signo opuesto, entonces hay al menos un cero real entre a y b. Esta propiedad, junto con el conocimiento de las funciones polinomiales, proporciona la base para ubicar y aproximar soluciones irracionales de una ecuación polinomial.

Considere la ecuación $x^3 + 2x - 4 = 0$. Al aplicar la regla de los signos de Descartes puede determinar que esta ecuación tiene una solución real positiva y dos soluciones complejas no reales. (¡Tal vez quiera confirmar esto!) El teorema de raíz racional indica que las únicas soluciones racionales posibles son 1, 2 y 4. Al usar una forma un poco más compacta para la división sintética, se obtienen los siguientes resultados cuando se ponen a prueba 1 y 2 como posibles soluciones:

	1	0	2	−4
1	1	1	3	−1
2	1	2	6	8

Puesto que $f(1) = -1$ y $f(2) = 8$, debe haber una solución irracional entre 1 y 2. Más aún, −1 está más cerca de 0 que 8, así que la suposición es que la solución está más cerca de 1 que de 2. Comience por observar en 1.0, 1.1, 1.2, etc., hasta colocar la solución entre dos números.

	1	0	2	−4
1.0	1	1	3	−1
1.1	1	1.1	3.21	−0.469
1.2	1	1.2	3.44	0.128

Una calculadora es muy útil en estos momentos

Puesto que $f(1.1) = -0.469$ y $f(1.2) = 0.128$, la solución irracional debe estar entre 1.1 y 1.2. Más aún, puesto que 0.128 está mas cerca de 0 que −0.469, la suposición es que la solución está más cerca de 1.2 que de 1.1. Comience por observar en 1.15, 1.16, etcétera.

	1	0	2	−4
1.15	1	1.15	3.3225	−0.179
1.16	1	1.16	3.3456	−0.119
1.17	1	1.17	3.3689	−0.058
1.18	1	1.18	3.3924	0.003

Puesto que $f(1.17) = -0.058$ y $f(1.18) = 0.003$, la solución irracional debe estar entre 1.17 y 1.18. Por tanto, puede usar 1.2 como una aproximación racional a la décima más cercana.

Para cada una de las siguientes ecuaciones, (a) verifique que la ecuación tiene exactamente una solución irracional, y (b) encuentre una aproximación, a la décima más cercana, de dicha solución.

(a) $x^3 + x - 6 = 0$

(b) $x^3 - 6x - 6 = 0$

(c) $x^3 - 27x - 60 = 0$

(d) $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$

(e) $x^3 - 2x - 10 = 0$

(f) $x^3 - 5x^2 - 1 = 0$

Actividades con calculadora graficadora

48. Grafique $f(x) = x^3$. Ahora prediga las gráficas para $f(x) = x^3 + 2$, $f(x) = -x^3 + 2$ y $f(x) = -x^3 - 2$. Grafique estas tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes con la gráfica de $f(x) = x^3$.

49. Haga un bosquejo de las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - x^2$, $f(x) = -x^3 + x^2$ y $f(x) = -x^3 - x^2$. Ahora grafique estas tres funciones para comprobar sus bosquejos.

50. Grafique $f(x) = x^4 + x^3 + x^2$. ¿Cómo deben ser las gráficas de $f(x) = x^4 - x^3 + x^2$ y $f(x) = -x^4 - x^3 - x^2$? Grafíquelas para revisar si está en lo correcto.

51. ¿Cómo se comparan las gráficas de $f(x) = x^3$, $f(x) = x^5$ y $f(x) = x^7$? Grafique estas tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes.

52. ¿Cómo se comparan las gráficas de $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4$ y $f(x) = x^6$? Grafique estas tres funciones en el mismo conjunto de ejes.

53. Para cada una de las siguientes funciones, encuentre las abscisas al origen y encuentre los intervalos donde $f(x) > 0$ y aquellos donde $f(x) < 0$.

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

(b) $f(x) = x^3 - 8x^2 - x + 8$

(c) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$

(d) $f(x) = x^3 - 19x^2 + 90x - 72$

(e) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$

(f) $f(x) = x^4 + 12x^2 - 64$

54. Encuentre las coordenadas de los puntos de retorno de cada una de las siguientes gráficas. Exprese los valores x y y al entero más cercano.

(a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 40$

(b) $f(x) = 2x^3 - 33x^2 + 60x + 1050$

(c) $f(x) = -2x^3 - 9x^2 + 24x + 100$

(d) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 3$

(e) $f(x) = x^3 - 30x^2 + 288x - 900$

(f) $f(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + x - 1$

55. Para cada una de las siguientes funciones, encuentre las abscisas al origen y los puntos de retorno. Exprese sus respuestas a la décima más cercana.

(a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$

(b) $f(x) = 42x^3 - x^2 - 246x - 35$

(c) $f(x) = x^4 - 4x^2 - 4$

Respuestas al examen de conceptos

1. B **2.** C **3.** A **4.** D **5.** Cierto **6.** Falso **7.** Cierto **8.** Falso

13.2 Graficación de funciones racionales

OBJETIVOS

1. Hallar la(s) asíntota(s) para una función racional
2. Hallar la asíntota horizontal para una función racional
3. Graficar funciones racionales

Esta sección comienza con el uso de una calculadora graficadora para bosquejar la función $f(x)$ 5 $\dfrac{x^2}{x^2 - x - 2}$ dos veces usando diferentes fronteras, como se indica en las figuras 13.20 y 13.21. Debe ser evidente de las dos figuras que realmente no se puede decir cómo se ven las gráficas. Esto ocurre frecuentemente al graficar funciones racionales con una calculadora

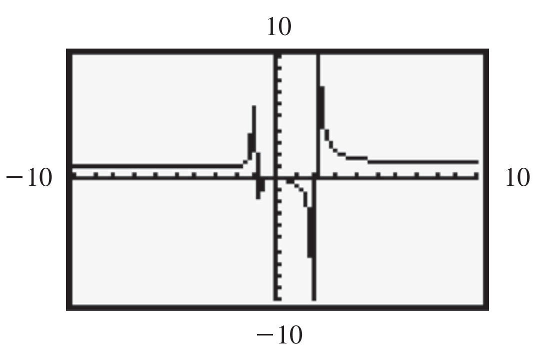


Figura 13.20

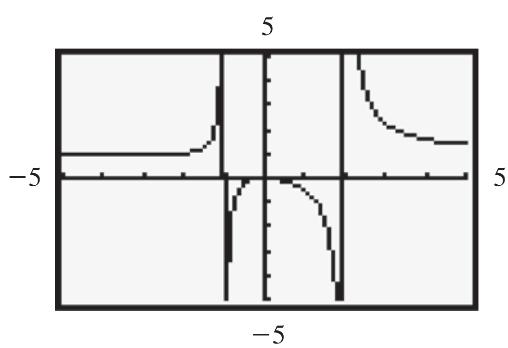


Figura 13.21

graficadora. Por ende, es necesario hacer un análisis cuidadoso de las funciones racionales, y enfatizar el uso de las gráficas a mano. (Por cierto, si está interesado en ver la gráfica completa de esta función, diríjase al primer ejemplo de la siguiente sección.)

Una función de la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad q(x) \neq 0$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios, se llama **función racional**.

Los siguientes son ejemplos de funciones racionales:

$$f(x) = \frac{2}{x-1} \qquad f(x) = \frac{x}{x-2}$$
$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-x-6} \qquad f(x) = \frac{x^3-8}{x+4}$$

En cada uno de estos ejemplos, el dominio de la función racional es el conjunto de todos los números reales, excepto aquellos que hacen al denominador cero. Por ejemplo, el dominio de $f(x)$ 5 $\frac{2}{x-1}$ es el conjunto de todos los números reales, excepto 1. Como verá pronto, estas exclusiones del dominio son importantes números desde un punto de vista de graficación; representan rompimientos en curvas de otro modo continuas.

El escenario para graficar funciones racionales se establecerá al considerar en detalle la función $f(x)$ 5 $\frac{1}{x}$. Primero note que, en $x = 0$ la función es indefinida. Segundo, considere una tabla de valores más bien extensa para encontrar alguna tendencia numérica y construir una base para definir el concepto de asíntota.

x	$f(x) = \frac{1}{x}$	
1	1	
2	0.5	Estos valores indican que el valor de $f(x)$ es positiva y tiende a cero desde arriba conforme x se vuelve cada vez más grande
10	0.1	
100	0.01	
1000	0.001	
0.5	2	
0.1	10	Estos valores indican que $f(x)$ es positiva y se hace cada vez más grande conforme x tiende a cero desde la derecha
0.01	100	
0.001	1000	
0.0001	10,000	
−0.5	−2	
−0.1	−10	Estos valores indican que $f(x)$ es negativa y se hace más pequeña conforme x tiende a cero desde la izquierda.
−0.01	−100	
−0.001	−1000	
−0.0001	−10,000	
−1	−1	
−2	−0.5	Estos valores indican que $f(x)$ es negativa y tiende a cero desde abajo conforme x se hace más pequeña sin cota
−10	−0.1	
−100	−0.01	
−1000	−0.001	

La fi gura 13.22 muestra un bosquejo de $f(x)\ 5\ \frac{1}{x}$ que se dibuja usando algunos puntos de esta tabla y los patrones analizados. Note que la gráfica se aproxima, mas no toca alguno de los ejes. Se dice que el eje y [o el eje $f(x)$] es una asíntota vertical y que el eje x es una **asíntota horizontal**.

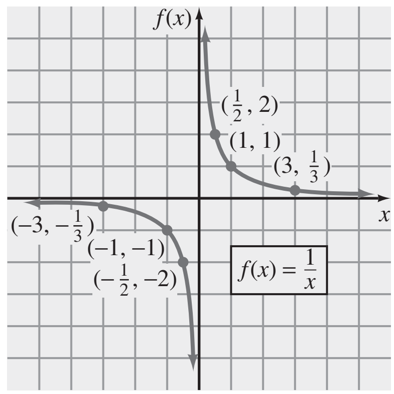


Figura 13.22

Comentario: Se sabe que la ecuación $f(x)\ 5\ \frac{1}{x}$ muestra simetría en torno al origen porque $f(-x) = -f(x)$. Por tanto, la gráfica en la figura 13.22 podría dibujarse tras determinar la parte de la curva en el primer cuadrante y luego reflejar dicha curva a través del origen.

Ahora se definirán los conceptos de asíntotas vertical y horizontal.

Asíntota vertical

Una recta $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de una función f si:

1. $f(x)$ aumenta o disminuye sin cota conforme x tienda a a desde la izquierda, como en la figura 13.23.

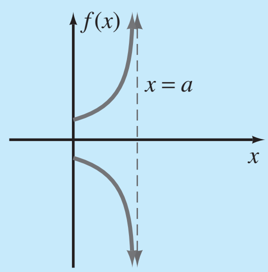


Figura 13.23

o

2. $f(x)$ aumenta o disminuye sin cota conforme x tienda a a desde la derecha, como en la figura 13.24.

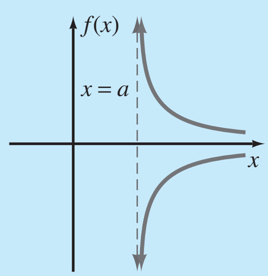


Figura 13.24

Asíntota horizontal

Una recta $y = b$ (o $f(x) = b$) es una asíntota horizontal para la gráfica de una función f si:

1. $f(x)$ tiende a b desde arriba o abajo conforme x se hace infinitamente pequeña, como en la figura 13.25,

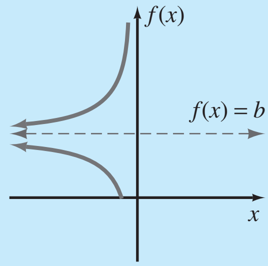


Figura 13.25

o

2. $f(x)$ tiende a b desde arriba o abajo conforme x se hace infinitamente grande, como en la figura 13.26.

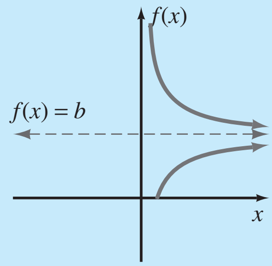


Figura 13.26

A continuación se presentan algunas sugerencias para graficar funciones racionales del tipo que se considera en esta sección.

1. Compruebe para simetría en torno al eje y y el origen.
2. Encuentre alguna asíntota vertical al igualar el denominador a cero y resolver para x.
3. Encuentre alguna asíntota horizontal al estudiar el comportamiento de $f(x)$ conforme x se vuelve infinitamente grande o conforme x se hace infinitamente pequeña.
4. Estudie el comportamiento de la gráfica cuando se acerca a las asíntotas.
5. Grafique tantos puntos como sea necesario para determinar la forma de la gráfica. El número necesario se puede afectar si la gráfica tiene o no algún tipo de simetría.

Tenga en mente estas sugerencias conforme estudia los siguientes ejemplos.

Ejemplo de salón de clases

Graficar $f(x) = \dfrac{3}{x - 2}$.

EJEMPLO 1 Graficar $f(x) = \dfrac{-2}{x - 1}$.

Solución

Dado que $x = 1$ hace al denominador cero, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical. Esto se indicó con una línea rayada en la figura 13.27. Ahora busque una asíntota horizontal al comprobar algunos valores grandes y pequeños de x.

x	$f(x)$
10	$-\dfrac{2}{9}$
100	$-\dfrac{2}{99}$
1000	$-\dfrac{2}{999}$

Esta tabla muestra que, conforme x se vuelve muy grande, el valor de $f(x)$ tiende a cero desde abajo

x	$f(x)$
-10	$\dfrac{2}{11}$
-100	$\dfrac{2}{101}$
-1000	$\dfrac{2}{1001}$

Esta tabla muestra que, conforme x se vuelve muy pequeño, el valor de $f(x)$ tiende a cero desde arriba

Por lo tanto, el eje x es una asíntota horizontal.

Finalmente, compruebe el comportamiento de la gráfica cerca de la asíntota vertical.

x	$f(x)$
2	-2
1.5	-4
1.1	-20
1.01	-200
1.001	-2000

Conforme x tiende a 1 desde la derecha, el valor de $f(x)$ se vuelve cada vez más pequeño

x	$f(x)$
0	2
0.5	4
0.9	20
0.99	200
0.999	2000

Conforme x tiende a 1 desde la izquierda, el valor de $f(x)$ se vuelve cada vez más grande

La gráfica de $f(x) = \dfrac{-2}{x-1}$ se muestra en la figura 13.27.

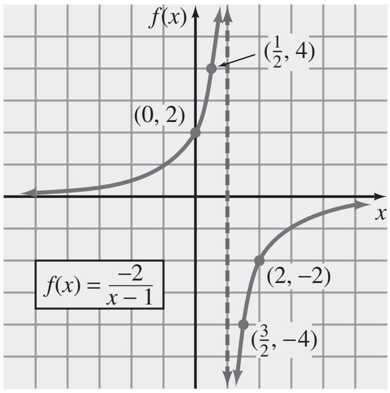


Figura 13.27

Ejemplo de salón de clases

Graficar $f(x) = \dfrac{x}{x+4}$.

EJEMPLO 2

Graficar $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$.

Solución

Dado que $x = -2$ hace al denominador cero, la recta $x = -2$ es una asíntota vertical. Para estudiar el comportamiento de $f(x)$ conforme x se hace muy grande o muy pequeño, cambie la forma de la expresión racional al dividir numerador y denominador entre x:

$$f(x) = \frac{x}{x+2} = \frac{\dfrac{x}{x}}{\dfrac{x+2}{x}} = \frac{1}{\dfrac{x}{x} + \dfrac{2}{x}} = \frac{1}{1 + \dfrac{2}{x}}$$

Ahora puede ver que, conforme x se hace cada vez más grande, el valor de $f(x)$ tiende a 1 desde abajo; conforme x se hace cada vez más pequeño, el valor de $f(x)$ tiende a 1 desde arriba. (Quizá deba verificar estas afirmaciones al colocar algunos valores de x.) Por tanto, la recta $f(x) = 1$ es una asíntota horizontal. Al dibujar las asíntotas (recta discontinua) y graficar algunos puntos, se completa la gráfica en la figura 13.28.

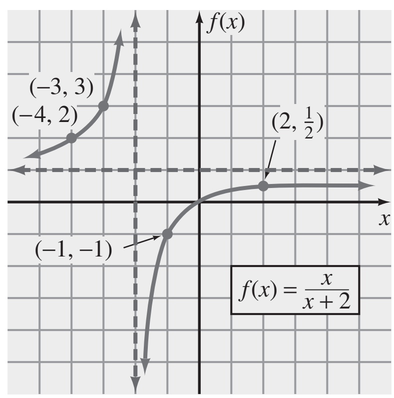


Figura 13.28

En los siguientes dos ejemplos, ponga especial atención al papel de la simetría, así dirigirá sus esfuerzos hacia los cuadrantes I y IV y luego reflejar dichas partes de la curva a través del eje vertical para completar la gráfica.

Ejemplo de salón de clases

Graficar $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 + 9}$.

EJEMPLO 3 Graficar $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + 4}$.

Solución

Primero note que $f(-x) = f(x)$; por tanto, esta gráfica es simétrica con respecto al eje vertical. Segundo, el denominador $x^2 + 4$ no puede ser igual a cero para cualquier valor real de x; por tanto, no hay asíntota vertical. Tercero, al dividir tanto el numerador como el denominador de la expresión racional entre x^2 se obtiene

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 4} = \frac{\dfrac{2x^2}{x^2}}{\dfrac{x^2 + 4}{x^2}} = \frac{2}{\dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{4}{x^2}} = \frac{2}{1 + \dfrac{4}{x^2}}$$

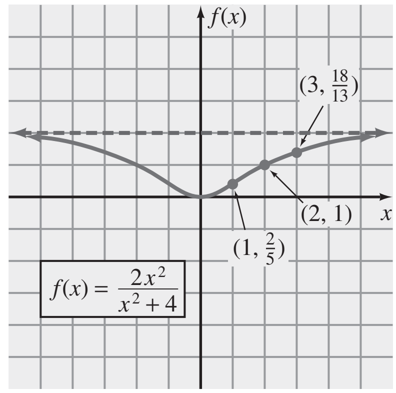


Figura 13.29

Ahora puede ver que, conforme x se hace cada vez más grande, el valor de $f(x)$ tiende a 2 desde abajo. Por tanto, la recta $f(x) = 2$ es una asíntota horizontal. Puede graficar algunos puntos usando valores positivos de x, bosqueje esta parte de la curva y luego refleje a través del eje $f(x)$ para obtener la gráfica completa, como se muestra en la figura 13.29.

Ejemplo de salón de clases

Graficar $f(x) = \dfrac{-2}{x^2 - 16}$.

EJEMPLO 4 Graficar $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4}$.

Solución

Primero note que $f(-x) = f(x)$; por tanto, esta gráfica es simétrica en torno al eje y. Por tanto, al igualar a cero el denominador y resolver para x, se obtiene

$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$

Las rectas $x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas verticales. A continuación puede ver que $\dfrac{3}{x^2 - 4}$ tiende a cero desde arriba conforme x se hace más grande. Finalmente, puede graficar algunos puntos usando valores positivos de x (distintos de 2), bosquejar esta parte de la curva y luego reflejarla a través del eje $f(x)$ para obtener la gráfica completa que se muestra en la figura 13.30.

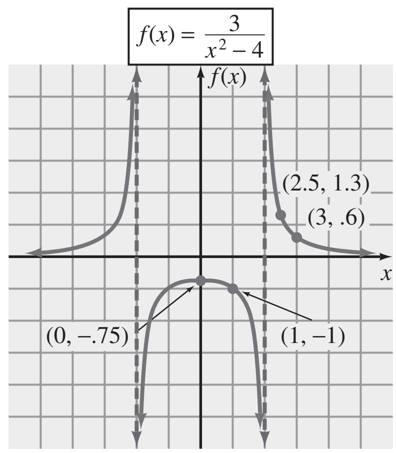


Figura 13.30

Ahora suponga que usará una herramienta de graficación para obtener una gráfica de la función $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^4 - 16}$. Antes de ingresar esta función en una herramienta de graficación, analice lo que sabe acerca de la gráfica.

1. Dado que $f(0) = 0$, el origen es un punto sobre la gráfica.
2. Puesto que $f(-x) = f(x)$, la gráfica es simétrica con respecto al eje y.

3. Al igualar a cero el denominador y resolver para x, puede determinar las asíntotas verticales.

$$
\begin{aligned}
x^4 - 16 &= 0\\
(x^2 + 4)(x^2 - 4) &= 0\\
x^2 + 4 = 0 \qquad &\text{o} \qquad x^2 - 4 = 0\\
x^2 = -4 \qquad &\qquad\quad x^2 = 4\\
x = \pm 2i \qquad &\qquad\quad x = \pm 2
\end{aligned}
$$

Recuerde que trabaja con pares ordenados de números reales. Por tanto, las rectas $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

4. Divida tanto el numerador como el denominador de la expresión racional entre para producir

$$\frac{4x^2}{x^4 - 16} = \frac{\dfrac{4x^2}{x^4}}{\dfrac{x^4 - 16}{x^4}} = \frac{\dfrac{4}{x^2}}{1 - \dfrac{16}{x^4}}$$

A partir de la última expresión se ve que, conforme $|x|$ se vuelve cada vez más grande, el valor de $f(x)$ tiende a cero desde arriba. Por tanto, el eje horizontal es una asíntota horizontal.

Ahora ingrese la función en una calculadora graficadora y establezca las fronteras de modo que muestren el comportamiento de la función cerca de las asíntotas. Note que la gráfica que se muestra en la figura 13.31 es consistente con toda la información que se determinó antes usando la calculadora graficadora. En otras palabras, el conocimiento de las técnicas de graficación mejora el uso de una herramienta de graficación.

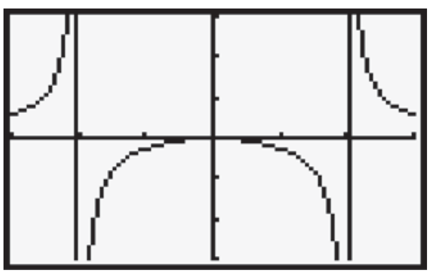


Figura 13.31

En secciones anteriores se resolvieron problemas del siguiente tipo: ¿cuánto alcohol puro se debe agregar a 6 litros de una solución de alcohol al 40% para elevarla a una solución de alcohol al 60%? La respuesta de 3 litros se puede encontrar al resolver la siguiente ecuación, donde x representa la cantidad de alcohol puro a agregar:

Alcohol puro para comenzar	+	Alcohol puro por agregar	=	Alcohol puro en la solución final
↓		↓		↓
$0.40(6)$	+	x	=	$0.60(6 + x)$

Ahora considere este problema en un escenario más general al escribir una función donde x represente la cantidad de alcohol puro a agregar y y represente la concentración de alcohol puro en la solución final.

$$
\begin{aligned}
0.40(6) + x &= y(6 + x)\\
2.4 + x &= y(6 + x)\\
\frac{2.4 + x}{6 + x} &= y
\end{aligned}
$$

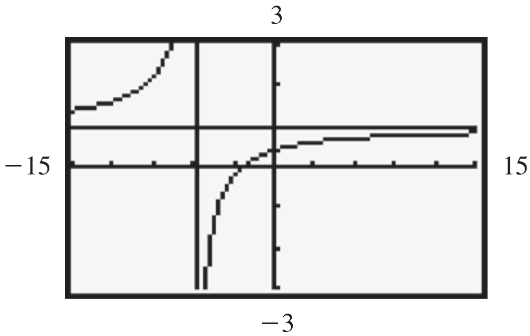


Figura 13.32

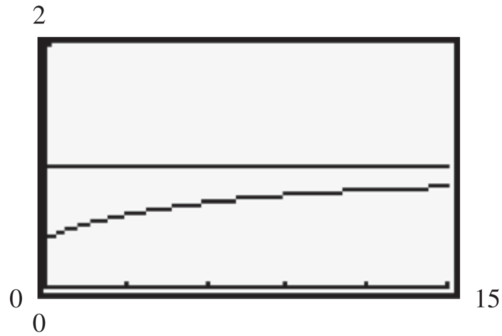


Figura 13.33

Puede graficar la función racional $y = \dfrac{2.4 + x}{6 + x}$ como se muestra en la figura 13.32. Para este problema particular, x no es negativo, de modo que sólo se tiene interés en la parte de la gráfica que está en el primer cuadrante. Cambie las fronteras del rectángulo de visualización de modo que $0 \leq x \leq 15$ y $0 \leq y \leq 2$ para obtener la figura 13.33. Ahora está listo para responder preguntas acerca de esta situación.

1. ¿Cuánto alcohol puro necesita agregar para elevar la solución al 40% a una solución al 60%? [*Sugerencia:* Se busca el valor de x cuando y es 0.60. (*Respuesta:* Al usar la característica TRACE de la herramienta de graficación, se encuentra que, cuando $y = 0.60$, $x = 3$. Por tanto, necesita agregar 3 litros de alcohol puro).]

2. ¿Cuánto alcohol puro necesita agregar para elevar la solución al 40% a una solución al 70%? (*Respuesta:* Al usar la característica TRACE de la herramienta de graficación, se encuentra que, cuando $y = 0.70$, $x = 6$. Por tanto, necesita agregar 6 litros de alcohol puro.)

3. ¿Qué concentración porcentual de alcohol se obtiene si agrega 9 litros de alcohol puro a 6 litros de una solución al 40%? (Respuesta: Al usar la característica TRACE de la herramienta de graficación, se encuentra que, cuando $x = 9$, $y = 0.76$. Por tanto, agregar 9 litros de alcohol puro producirá una solución de alcohol al 76%.)

Examen de conceptos 13.2

Para los problemas 1-6, responder cierto o falso.

1. El dominio de $f(x)$ 5 $\dfrac{x - 4}{2x + 1}$ es todo número real excepto 4 y 2$\dfrac{1}{2}$.

2. Si la gráfica de una función racional tiene una asíntota en x 2 -3 entonces -3 no es el dominio de la función.

3. Las asíntotas verticales pueden encontrarse estableciendo el dominador de la función igual a 0.

4. Las asíntotas horizontales pueden encontrarse estableciendo el numerador de la función igual a 0.

5. Si el numerador de una función racional es una constante, entonces la asíntota horizontal de la gráfica de la función siempre será la recta $f(x)$ 5 0.

6. La gráfica de una función racional siempre tendrá una asíntota vertical.

Conjunto de problemas 13.2

Para los problemas 1-10, hallar las asíntotas verticales y horizontales para las gráficas de las funciones racionales. (Objetivos 2, 3)

1. $f(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x - 4}$

3. $f(x) = \dfrac{4x}{x - 1}$

4. $f(x) = \dfrac{-2x}{x + 5}$

5. $f(x) = \dfrac{2}{(x + 3)(x - 4)}$

6. $f(x) = \dfrac{6}{x(x - 1)}$

7. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$

8. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - x - 2}$

9. $f(x) = \dfrac{5x^2}{x^2 + 4}$

10. $f(x) = \dfrac{-2x^2}{x^2 + 1}$

Para los problemas 11-32, grafique cada una de las siguientes funciones racionales. (Objectivo 3)

11. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

12. $f(x) = \dfrac{-1}{x}$

13. $f(x) = \dfrac{-1}{x - 3}$

14. $f(x) = \dfrac{3}{x + 1}$

15. $f(x) = \dfrac{-3}{(x + 2)^2}$

16. $f(x) = \dfrac{2}{(x - 1)^2}$

17. $f(x) = \dfrac{2x}{x - 1}$

18. $f(x) = \dfrac{x}{x - 3}$

19. $f(x) = \dfrac{-x}{x + 1}$

20. $f(x) = \dfrac{-3x}{x + 2}$

21. $f(x) = \dfrac{-2}{x^2 - 4}$

22. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

23. $f(x) = \dfrac{3}{(x + 2)(x - 4)}$

24. $f(x) = \dfrac{-2}{(x + 1)(x - 2)}$

25. $f(x) = \dfrac{-1}{x^2 + x - 6}$

26. $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + x - 2}$

27. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x}$

28. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x}$

29. $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 + 1}$

30. $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + 2}$

31. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$

32. $f(x) = \dfrac{2x^4}{x^4 + 1}$

Pensamientos en palabras

33. ¿Cómo explicaría el concepto de asíntota a un estudiante de álgebra elemental?

34. Proporcione una descripción paso a paso de cómo graficaría $f(x) = \dfrac{-2}{x^2 - 9}$.

Más investigación

35. La función racional $f(x) = \dfrac{(x - 2)(x + 3)}{x - 2}$ tiene un dominio de todos los números reales excepto 2 y se puede simplificar a $f(x) = x + 3$. Por tanto, su gráfica es una línea recta con un hoyo en (2, 5). Grafique cada una de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \dfrac{(x + 4)(x - 1)}{x + 4}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

(c) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$

(d) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 + 6x + 8}$

36. Grafique la función $f(x) = x + 2 + \dfrac{3}{x - 2}$. Tal vez necesite graficar un número más bien grande de puntos. Además, defienda la afirmación de que $f(x) = x + 2$ es una **asíntota oblicua**.

Actividades con calculadora graficadora

37. Use una calculadora graficadora para comprobar sus gráficas para el problema 35. ¿Qué cáracterística de las gráficas no se muestra en la calculadora?

38. Cada una de las siguientes gráficas es una transformación de $f(x)$ 5 $\dfrac{1}{x}$. Primero prediga la forma general y la ubicación de la gráfica, y luego compruebe su predicción con una calculadora graficadora.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x} - 2$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

(c) $f(x) = -\dfrac{1}{x}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x - 2} + 3$

(e) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x}$

39. Grafique $f(x)$ 5 $\dfrac{1}{x^2}$. ¿Cómo se compararían las gráficas de $f(x) = \dfrac{1}{(x - 4)^2}$, $f(x)$ 5 $\dfrac{+ 3x^2}{x^2}$ y $f(x)$ 5 $\dfrac{1}{x^2}$ con la gráfica de $f(x)$ 5 $\dfrac{1}{x^2}$? Grafique las tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes con la gráfica de $f(x)$ 5 $\dfrac{1}{x^2}$.

40. Grafique $f(x)$ 5 $\dfrac{1}{x^3}$. ¿Cómo se compararían las gráficas de $f(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{x^3}$, $f(x)$ 5 $\dfrac{1}{(x + 2)^3}$ y $f(x)$ 5 $\dfrac{-1}{x^3}$ con la gráfica de $f(x)$ 5 $\dfrac{1}{x^3}$? Grafique las tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes con la gráfica de $f(x)$ 5 $\dfrac{1}{x^3}$.

41. Use una calculadora graficadora para comprobar sus gráficas para los problemas 29-32.

42. Suponga que x onzas de ácido puro se agregaron a 14 onzas de solución de ácido al 15%.

(a) Establezca la expresión racional que representa la concentración de ácido puro en la solución final.

(b) Grafique la función racional que muestre la concentración.

(c) ¿Cuántas onzas de ácido puro debe agregar a 14 onzas de una solución al 15% para elevarla a una solución al 40.5%? Verifique su respuesta.

(d) ¿Cuántas onzas de ácido puro debe agregar a 14 onzas de una solución al 15% para elevarla a una solución al 50%? Verifique su respuesta.

(e) ¿Qué concentración de ácido se obtiene si agrega 12 onzas de ácido puro a 14 onzas de una solución al 15%? Verifique su respuesta.

43. Resuelva el siguiente problema tanto algebraica como gráficamente: una solución contiene alcohol al 50% y otra solución contiene alcohol al 80%. ¿Cuántos litros de cada solución debe mezclar para producir 10.5 litros de una solución de alcohol al 70%? Verifique su respuesta.

44. Grafique cada una de las siguientes funciones. Asegúrese de que obtiene una gráfica completa para cada una. Bosqueje cada gráfica en una hoja de papel y téngalas todas a mano mientras estudia la siguiente sección.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - x - 2}$ **(b)** $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

(c) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$ **(d)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$

Respuestas al examen de conceptos

1. Falso **2.** Cierto **3.** Cierto **4.** Falso **5.** Cierto **6.** Falso

13.3 Más acerca de la graficación de funciones racionales

OBJETIVOS

1 Hallar la ecuación para una asíntota oblicua de una función racional

2 Graficar funciones racionales con asíntotas verticales, horizontales u oblicuas

Las funciones racionales que se estudiaron en la sección anterior “se comportaban más bien de manera adecuada”. De hecho, una vez que se establecen las asíntotas vertical y horizontal, el trazo de algunos puntos por lo general determina la gráfica con bastante facilidad. Esto no siempre es el caso con las funciones racionales. En esta sección investigará algunas funciones racionales que se comportan de manera un poco diferente.

Las asíntotas verticales ocurren a valores de x donde el denominador es cero, de modo que ningún punto de una gráfica puede estar sobre una asíntota vertical. Sin embargo, recuerde que las asíntotas horizontales se crean por el comportamiento de $f(x)$ conforme x se vuelve infinitamente grande o infinitamente pequeña. Esto no restringe la posibilidad de que, para algunos valores de x, los puntos de la gráfica estén sobre la asíntota horizontal. Considere algunos ejemplos.

Ejemplo de salón de clases

Graficar $f(x) = \dfrac{-x^2}{x^2 + x - 6}$.

EJEMPLO 1 Graficar $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - x - 2}$.

Solución

Primero identifique las asíntotas verticales al igualar a cero el denominador y resolver para x:

$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x - 2)(x + 1) = 0$$
$$x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$
$$x = 2 \qquad\qquad x = -1$$

Por lo tanto, las reclas $x = 2$ y $x = -1$ son asíntotas verticales. A continuación puede dividir tanto el numerador como el denominador de la expresión racional entre x^2.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} = \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2 - x - 2}{x^2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}$$

Ahora puede ver que, conforme x se vuelve cada vez más grande, el valor de $f(x)$ tiende a 1 desde arriba. Por lo tanto, la recta $f(x) = 1$ es una asíntota horizontal. Para determinar si algún punto de la gráfica está sobre la asíntota horizontal, puede ver si la ecuación

$$\frac{x^2}{x^2 - x - 2} = 1$$

tiene alguna solución.

$$\frac{x^2}{x^2 - x - 2} = 1$$
$$x^2 = x^2 - x - 2$$
$$0 = -x - 2$$
$$x = -2$$

Por lo tanto, el punto $(-2, 1)$ está sobre la gráfica. Ahora, para dibujar las asíntotas, al graficar algunos puntos [incluidos $(-2, 1)$] y estudiar el comportamiento de la función cerca de las asíntotas, puede dibujar la curva mostrada en la figura 13.34.

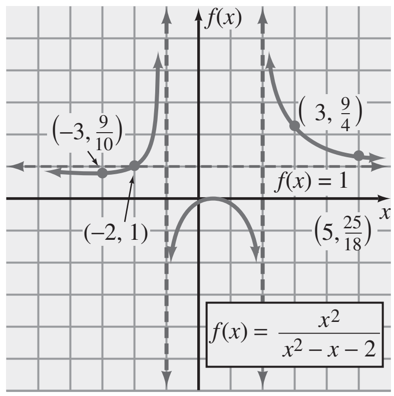


Figura 13.34

Ejemplo de salón de clases

Graficar $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 9}$.

EJEMPLO 2

Graficar $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$.

Solución

Primero, note que $f(-x) = -f(x)$; por lo tanto, esta gráfica es simétrica con respecto al origen. Segundo, identifique las asíntotas verticales:

$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$

Por lo tanto, las rectas $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales. A continuación, al dividir el numerador y el denominador de la expresión racional entre x^2, se obtiene

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2 - 4}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}}$$

A partir de esta forma puede ver que, conforme x se vuelve más grande, el valor de $f(x)$ tiende a cero desde arriba. Por tanto, el eje x es una asíntota horizontal. Puesto que $f(0) = 0$, se sabe que el origen es un punto de la gráfica. Finalmente, al concentrar el punto a graficar en valores positivos de x, puede bosquejar la parte de la curva a la derecha del eje vertical, y luego usar el hecho de que la gráfica es simétrica con respecto al origen para completar la gráfica. La figura 13.35 muestra la gráfica completa.

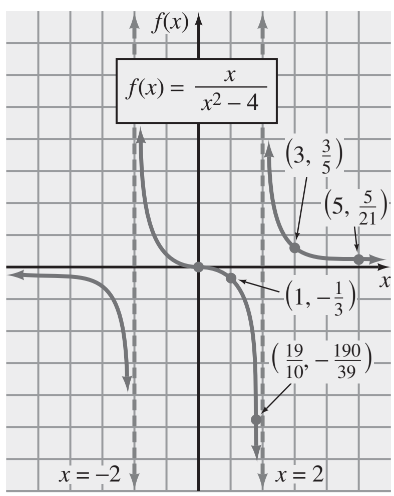


Figura 13.35

Ejemplo de salón de clases

Graficar $f(x) = \dfrac{-3x}{x^2 + 1}$.

EJEMPLO 3 Graficar $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$.

Solución

Primero observe que $f(-x) = -f(x)$; por tanto, esta gráfica es simétrica con respecto al origen. Segundo, puesto que $x^2 + 1$ es un número positivo para todo valor real de x, no hay asíntotas verticales para esta gráfica. A continuación, al dividir el numerador y el denominador de la expresión racional entre x^2, se obtiene

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1} = \frac{\dfrac{3x}{x^2}}{\dfrac{x^2 + 1}{x^2}} = \frac{\dfrac{3}{x}}{1 + \dfrac{1}{x^2}}$$

A partir de esta forma se ve que, conforme x se vuelve cada vez más grande, el valor de $f(x)$ tiende a cero desde arriba. Por tanto, el eje x es una asíntota horizontal. Puesto que $f(0) = 0$, el origen es un punto de la gráfica. Finalmente, al concentrarse sobre valores positivos de x, puede bosquejar la parte de la curva a la derecha del eje vertical, y luego usar simetría en el origen para completar la gráfica, como se muestra en la figura 13.36.

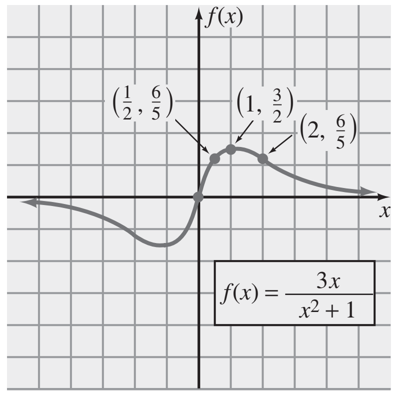


Figura 13.36

Asíntotas oblicuas

Hasta el momento, el estudio de las funciones racionales se ha restringido a aquellas en las que el grado del numerador es menor que o igual al grado del denominador. Como ejemplos finales de graficación de funciones racionales, se considerarán funciones en las cuales el grado del numerador es uno mayor que el grado del denominador.

Ejemplo de salón de clases

Graficar $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$.

EJEMPLO 4 Graficar $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$.

Solución

Primero observe que $x = 2$ es una asíntota vertical. Segundo, dado que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, puede cambiar la forma de la expresión racional por división. Use división sintética.

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 1 & 0 & -1 \\ & & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Por lo tanto, la función original se puede reescribir como

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2} = x + 2 + \frac{3}{x - 2}$$

Ahora, para valores muy grandes de $|x|$, la fracción $\dfrac{3}{x - 2}$ está cerca de cero. Por tanto, según $|x|$ se vuelve cada vez más grande, la gráfica de $f(x) = x + 2 + \dfrac{3}{x - 2}$ se acerca cada vez más a la recta $f(x) = x + 2$. A esta recta se le llama **asíntota oblicua** y se le indica con una recta rayada en la figura 13.37. Finalmente, puesto que se trata de una situación nueva, quizá necesite graficar un gran número de puntos a ambos lados de la asíntota vertical, así que se elabora una extensa tabla de valores. La gráfica de la función se muestra en la figura 13.37.

x	$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$
4	7.5
3	8
2.8	8.55
2.5	10.5
2.3	14.3
2.2	19.2
2.1	34.1

Estos valores indican el comportamiento de $f(x)$ a la derecha de la asíntota vertical $x = 2$

x	$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$
-2	-0.75
0	0.5
1	0
1.5	-2.5
1.7	-6.3
1.8	-11.2
1.9	-26.1

Estos valores indican el comportamiento de $f(x)$ a la izquierda de la asíntota vertical $x = 2$

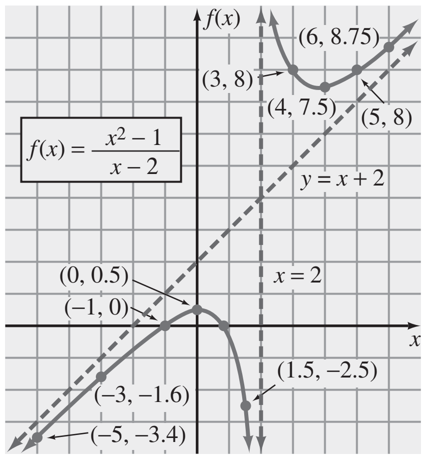


Figura 13.37

Si el grado del numerador de una función racional es *exactamente uno más* que el grado de su denominador, entonces la gráfica de la función tiene una asíntota oblicua. [Si la gráfica es una línea, como es el caso con $f(x)$ 5 $\dfrac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2}$ entonces se le considera como su propia asíntota.] Como en el ejemplo 4, se encuentra la ecuación de la asíntota oblicua al cambiar la forma de la función usando división larga. Considere otro ejemplo.

Ejemplo de salón de clases

Graficar $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x - 6}{x + 2}$.

EJEMPLO 5 Graficar $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 1}$.

Solución

A partir de la forma dada de la función se ve que $x = 1$ es una asíntota vertical. Entonces, al factorizar el numerador, se puede cambiar la forma a

$$f(x) = \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 1}$$

que indica la abscisa al origen de 2 y -1. Entonces, mediante división larga, puede cambiar la forma original de la función a

$$f(x) = x - \frac{2}{x - 1}$$

lo que indica una asíntota oblicua $f(x)$ 5 x. Finalmente, al graficar algunos puntos adicionales, puede determinar la gráfica como se muestra en la figura 13.38.

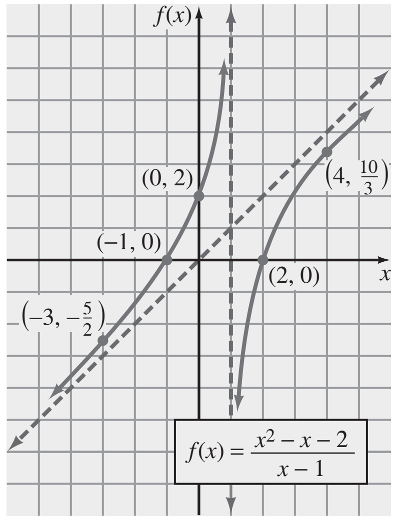


Figura 13.38

Finalmente, combine el conocimiento de las funciones racionales con el uso de una herramienta de graficación para obtener la gráfica de una función racional bastante compleja.

Ejemplo de salón de clases
Graficar
$f(x) = \dfrac{2x^3 - 11x^2 + 12x + 9}{x^2 - 4}$.

EJEMPLO 6

Graficar la función racional $f(x)$ 5 $\dfrac{x^3 - 2x^2 - x - 1}{x^2 - 36}$ usando una herramienta de graficación.

Solución

Antes de ingresar esta función en una herramienta de graficación, analice lo que se sabe acerca de la gráfica.

1. Puesto que $f(0) = \dfrac{1}{36}$, el punto $\left(0, \dfrac{1}{36}\right)$ está sobre la gráfica.
2. Puesto que $f(2x) \neq f(x)$ y $f(x) \neq 2f(x)$, no hay simetría con respecto al origen o el eje y.
3. El denominador es cero en $x = \pm 6$. Por tanto, las rectas $x = 6$ y $x = -6$ son asíntotas verticales.
4. Cambie la forma de la expresión racional mediante división.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 2 \\
\hline
x^2 - 36 & x^3 - 2x^2 - x - 1 \\
 & x^3 \qquad\quad - 36x \\
\hline
 & -2x^2 + 35x - 1 \\
 & -2x^2 \qquad\quad +72 \\
\hline
 & \qquad 35x - 73
\end{array}
$$

Por lo tanto, la función original se puede reescribir como

$$f(x) = x - 2 + \frac{35x - 73}{x^2 - 36}$$

Así, la recta $y = x - 2$ es una asíntota oblicua. Ahora, sea $Y_1 = x - 2$ y $Y_2 = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x - 1}{x^2 - 36}$ y use un rectángulo de visualización donde $-15 \leq x \leq 15$ y $-30 \leq y \leq 30$ (Figura 13.39)

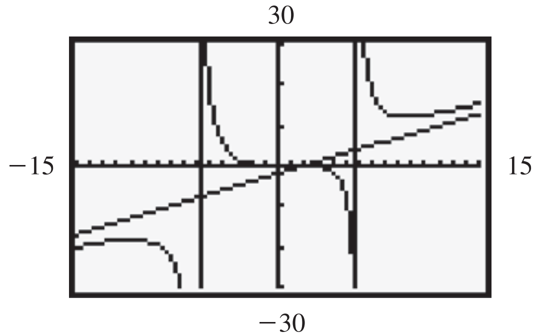


Figura 13.39

Note que la gráfica en la figura 13.39 es consistente con la información que se tenía antes de usar la calculadora graficadora. Tenga en mente que la recta oblicua y las dos rectas verticales son asíntotas y no parte de la gráfica. Más aún, la gráfica puede parecer simétrica en torno al origen, pero recuerde que la prueba para simetría en torno al origen fracasó. Por ejemplo, el punto $\left(0, \frac{1}{36}\right)$ está en la gráfica pero el punto $\left(0, -\frac{1}{36}\right)$ no está en la gráfica. Advierta también que la curva sí interseca la asíntota oblicua. Puede usar las características ZOOM y TRACE de la calculadora graficadora para aproximar este punto de intersección, o puede usar un enfoque algebraico del siguiente modo. Puesto que $y = \frac{x^3 - 2x^2 - x - 1}{x^2 - 36}$ y $y = x - 2$, puede igualar las dos expresiones para y y resolver la ecuación resultante para x.

$$\frac{x^3 - 2x^2 - x - 1}{x^2 - 36} = x - 2$$

$$x^3 - 2x^2 - x - 1 = (x - 2)(x^2 - 36)$$

$$x^3 - 2x^2 - x - 1 = x^3 - 2x^2 - 36x + 72$$

$$35x = 73$$

$$x = \frac{73}{35}$$

Si $x = \frac{73}{35}$, entonces $y = x - 2 = \frac{73}{35} - 2 = \frac{3}{35}$ El punto de intersección de la curva y la asíntota oblicua es $\left(\frac{73}{35}, \frac{3}{35}\right)$.

Examen de conceptos 13.3

Para los problemas 1-6, responder cierto o falso.

1. Toda gráfica de una función racional tiene una asíntota horizontal.
2. Para funciones racionales en las que el grado del numerador es uno más que el grado del denominador, la gráfica de la función tendrá una asíntota oblicua.
3. La gráfica de una función racional puede intersecar una asíntota horizontal.
4. La gráfica de una función racional puede intersecar una asíntota vertical.
5. Si la gráfica de una función racional es simétrica con respecto al origen, entonces la recta $f(x) = 0$ es una asíntota vertical.
6. Para las funciones racionales en las que el grado del numerador es menor que o igual al grado del denominador, la gráfica de la función tendrá una asíntota horizontal.

Conjunto de problemas 13.3

Para los problemas 1-6, escribir la ecuación para la asíntota oblicua para las gráficas de las siguientes funciones racionales. (Objectivo 1)

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x + 1}$ **2.** $f(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x - 3}$

3. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 6}{x + 2}$ **4.** $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 5}{x - 3}$

5. $f(x) = \dfrac{3x^2 + x + 2}{x + 2}$ **6.** $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 1}{x}$

Para los problemas 7-26, graficar cada función racional. Compruebe primero para la simetría e identifique las asíntotas. (Objectivo 2)

7. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + x - 2}$ **8.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 2x - 3}$

9. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 2x - 8}$ **10.** $f(x) = \dfrac{-x^2}{x^2 + 3x - 4}$

11. $f(x) = \dfrac{-x}{x^2 - 1}$ **12.** $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 9}$

13. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x - 6}$ **14.** $f(x) = \dfrac{-x}{x^2 - 2x - 8}$

15. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$ **16.** $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + x^2 - 6x}$

17. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$ **18.** $f(x) = \dfrac{6x}{x^2 + 1}$

19. $f(x) = \dfrac{-4x}{x^2 + 1}$ **20.** $f(x) = \dfrac{-5x}{x^2 + 2}$

21. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x - 1}$ **22.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x + 1}$

23. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x + 1}$ **24.** $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x + 2}$

25. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{1 - x}$ **26.** $f(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x^2}$

Pensamientos en palabras

27. Explique el concepto de asíntota oblicua.

28. Explique por qué es posible que las curvas intersequen las asíntotas horizontal y oblicua, más no las asíntotas verticales.

29. Dé una descripción paso a paso de cómo graficaría $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x - 2}$.

30. Su amigo tiene dificultad para encontrar el punto de intersección de una curva y la asíntota oblicua. ¿Cómo le ayudaría?

Actividades con calculadora graficadora

31. Primero verifique la simetría e identifique las asíntotas para las gráficas de las siguientes funciones racionales. Luego use su herramienta de graficación para bosquejar cada función.

(a) $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 + x - 2}$ **(b)** $f(x) = \dfrac{-2x}{x^2 - 5x - 6}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$ **(d)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$ **(f)** $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 5x + 6}$

32. Para cada una de las siguientes funciones racionales, primero determine y grafique cualquier asíntota oblicua. Luego, sobre el mismo conjunto de ejes, grafique la función.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$ **(b)** $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 2}$

(c) $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x + 1}$ **(d)** $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x - 3}$

(e) $f(x) = \dfrac{3x^2 - x - 2}{x - 2}$ **(f)** $f(x) = \dfrac{4x^2 + x + 1}{x + 1}$

(g) $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 + 2x + 3}$

(h) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x - 3}{x^2 - 4}$

Respuestas al examen de conceptos

1. Falso **2.** Cierto **3.** Cierto **4.** Falso **5.** Falso **6.** Cierto

14 Funciones exponenciales y logarítmicas

> *"No es que sea muy inteligente. Simplemente pienso más tiempo los problemas"*
> Albert Einstein

Tip de estudio

Un buen hábito de estudio al resolver problemas pragmáticos es pensar en una respuesta aproximada o considerar qué tan viable es una respuesta. Al resolver problemas que piden encontrar la cantidad de tiempo que requiere que una cantidad de dinero se duplique lo más seguro es que su intuición matemática indique un error si tiene un solo decimal. Es más probable que la respuesta sea un número de dos cifras. De la misma manera, en un problema de crecimiento poblacional, la respuesta no puede ser menos que la cantidad original de población.

Muchos problemas en este capítulo presentan la oportunidad de poder aproximar una respuesta antes de hacer cálculos. Para la ecuación $3^x = 12$, puede intuirse fácilmente que la respuesta está entre 2 y 3 pues $3^2 = 9$ y $3^3 = 27$. Intuir una respuesta antes de hacer cálculos a menudo puede alertar sobre respuestas incorrectas.

¿Qué técnica de estudio en este curso ha incrementado su tenacidad para pensar problemas?

Vista previa del capítulo

Los logaritmos fueron inventados en 1614 por un escoces llamado Jon Napier. Su meta era hacer operaciones aritméticas complicadas de multiplicación y división tan sencillas de resolver como sumas y restas. Hoy en día con la invención de la calculadora no hay ninguna razón para usar logaritmos en cálculos aritméticos. No obstante los logaritmos tienen aplicaciones tanto en la ciencia como en los negocios. El número Richter para medir la intensidad de un terremoto es el exponente o potencia a la que un número, llamado base, se necesita elevar. Una habilidad crucial es poder convertir notaciones logarítmicas a notaciones exponenciales:

$\log_2 8 = 3$ es equivalente a $2^3 = 8$

Conforme estudia este capítulo tenga en mente que un logaritmo es un exponente.

14.1 Exponentes y funciones exponenciales

OBJETIVOS

1. Resolver ecuaciones exponenciales
2. Graficar funciones exponenciales

En capítulos anteriores, se definió la expresión b^n para representar n factores de b, donde n es cualquier entero positivo y b b es cualquier número real. Por ejemplo,

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{81}$$

$$(-4)^2 = (-4)(-4) = 16 \qquad -(0.5)^3 = -[(0.5)(0.5)(0.5)] = -0.125$$

Luego, en otro capítulo, al definir $b^0 = 1$ y $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$ donde n es cualquier entero positivo y b es cualquier número real distinto de cero, se amplió el concepto de exponente para abarcar a todos los enteros. Los ejemplos incluyen

$$(0.76)^0 = 1 \qquad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4} \qquad (0.4)^{-1} = \frac{1}{(0.4)^1} = \frac{1}{0.4} = 2.5$$

En ese capítulo también se proporcionó el uso de todos los números racionales como exponentes al definir

$$b^{m/n} = \sqrt[n]{b^m} = \left(\sqrt[n]{b}\right)^m$$

donde n es un número entero positivo mayor de 1 y b es un número real tal que existe . Algunos ejemplos son

$$27^{2/3} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 9 \qquad 16^{1/4} = \sqrt[4]{16^1} = 2$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \qquad 32^{-1/5} = \frac{1}{32^{1/5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{32}} = \frac{1}{2}$$

La ampliación formal del concepto de exponente, para incluir el uso de los números irracionales, requiere de algunas ideas de cálculo y, por lo mismo, está más allá de lo cubierto en este texto. Sin embargo, se dará un vistazo breve para tener una idea general. Considere el número $2^{!\overline{3}}$ 3. Al usar la representación decimal interminable y no repetitiva 1.73205 . . . para $!\overline{3}$ puede formar la secuencia de números $2^1, 2^{1.7}, 2^{1.73}, 2^{1.732}, 2^{1.7320}, 2^{1.73205}, \ldots$. Parece razonable que cada potencia sucesiva se acerque más a $2^{!\overline{3}}$. Esto es precisamente lo que ocurre si b^n, donde n es irracional, se define de manera adecuada usando el concepto de límite. Más aún, esto garantizará que una expresión como producirá exactamente un valor para cada valor de x. 2^x

A partir de ahora, entonces, puede usar cualquier número real como exponente, y así ampliar las propiedades básicas enunciadas capítulos anteriores para incluir todos los números reales como exponentes. A continuación, se replantearán dichas propiedades con la restricción de que las bases a y b deben ser números positivos, con el fin de evitar expresiones como $(-4)^{1/2}$, que no representan números reales.

Propiedad 14.1

Si a y b son números reales positivos, y m y n son cualesquiera números reales, entonces

1. $b^n \cdot b^m = b^{n+m}$ Producto de dos potencias
2. $(b^n)^m = b^{mn}$ Potencia de una potencia
3. $(ab)^n = a^n b^n$ Potencia de un producto
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ Potencia de un cociente
5. $\dfrac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$ Cociente de dos potencias

Otra propiedad a usar para resolver ciertos tipos de ecuaciones con exponentes se puede enunciar de la siguiente manera:

Propiedad 14.2

Si $b > 0$, $b \neq 1$, y m y n son números reales, entonces $b^n = b^m$ si y sólo si $n = m$.

Los siguientes ejemplos ilustran el uso de la propiedad 14.2. Para usar esta propiedad para resolver ecuaciones, ambos lados de la ecuación deberán tener el mismo número base.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $5^x = 125$.

EJEMPLO 1 Resolver $2^x = 32$.

Solución

$2^x = 32$

$2^x = 2^5$ Expresar 32 como 2^5

$x = 5$ Propiedad 14.2

El conjunto solución es $\{5\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $5^{2x} = \frac{1}{25}$.

EJEMPLO 2 Resolver ${}^{2x} = \dfrac{1}{9}$.

Solución

$3^{2x} = \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{3^2}$ Expresar 9 como 3^2

$3^{2x} = 3^{-2}$

$$2x = -2 \qquad \text{Propiedad 14.2}$$
$$x = -1$$

El conjunto solución es $\{-1\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \frac{1}{32}$.

EJEMPLO 3 Resolver $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-4} = \frac{1}{125}$.

Solución

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-4} = \frac{1}{125}$$
$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{3}$$
$$x - 4 = 3 \qquad \text{Propiedad 14.2}$$
$$x = 7$$

El conjunto solución es $\{7\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $16^x = 64$.

EJEMPLO 4 Resolver $8^x = 32$.

Solución

$$8^x = 32$$
$$(2^3)^x = 2^5 \qquad \text{Expresar 8 como } 2^3$$
$$2^{3x} = 2^5$$
$$3x = 5 \qquad \text{Propiedad 14.2}$$
$$x = \frac{5}{3}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{5}{3}\right\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $(5x^{+1})(25x^{-3}) = 5$.

EJEMPLO 5 Resolver $(3^{x+1})(9^{x-2}) = 27$.

Solución

$$(3^{x+1})(9^{x-2}) = 27$$
$$(3^{x+1})(3^2)^{x-2} = 3^3 \qquad \text{Expresar 9 como } 3^2$$
$$(3^{x+1})(3^{2x-4}) = 3^3$$
$$3^{3x-3} = 3^3$$
$$3x - 3 = 3 \qquad \text{Propiedad 14.2}$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$

El conjunto solución es $\{2\}$.

Funciones exponenciales

Si b es cualquier número positivo, entonces la expresión b^x designa exactamente un número real para todo valor real de x. Por tanto, la ecuación $f(x) = b^x$ define una función cuyo dominio es el conjunto de los números reales. Más aún, si se incluye la restricción adicional $b \neq 1$, entonces cualquier ecuación de la forma $f(x) = b^x$ describe lo que se más tarde se llamará una función uno a uno y se conoce como una **función exponencial**. Esto conduce a la siguiente definición:

Definición 14.1

Si $b > 0$ y $b \neq 1$, entonces la función f definida por

$$f(x) = b^x$$

donde x es cualquier número real, se llama **función exponencial con base *b***.

Ahora considere la graficación de algunas funciones exponenciales.

Ejemplo de salón de clases
Graficar la función $f(x) = 5x$.

EJEMPLO 6 Graficar la función $f(x) = 2^x$.

Solución

Elabore una tabla de valores; tenga en mente que el dominio es el conjunto de los números reales y que la ecuación $f(x) = 2^x$ no muestra simetría. Grafique estos puntos y conéctelos con una curva continua para producir la figura 14.1.

x	2^x
22	$\frac{1}{4}$
21	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

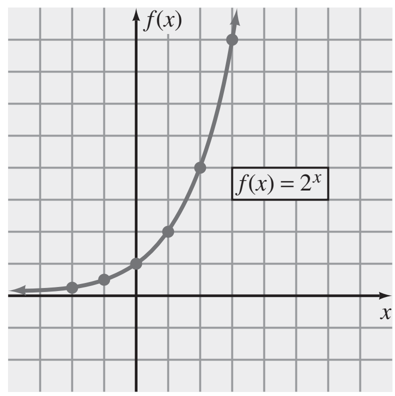


Figura 14.1

En la tabla para el ejemplo 6 se eligieron valores enteros de x para mantener el cálculo simple. Sin embargo, con el uso de una calculadora, fácilmente podría adquirir valores funcionales al usar exponentes no enteros. Considere los siguientes valores adicionales para $f(x) = 2^x$:

$f(0.5) \approx 1.41$ $\quad$ $f(1.7) \approx 3.25$

$f(-0.5) \approx 0.71$ $\quad$ $f(-2.6) \approx 0.16$

Use su calculadora para comprobar estos resultados. Note también que los puntos generados por estos valores sí encajan en la gráfica de la figura 14.1.

EJEMPLO 7 Graficar $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Solución

De nuevo elabore una tabla de valores, grafique los puntos y conéctelos con una curva continua. La gráfica se muestra en la figura 14.2.

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

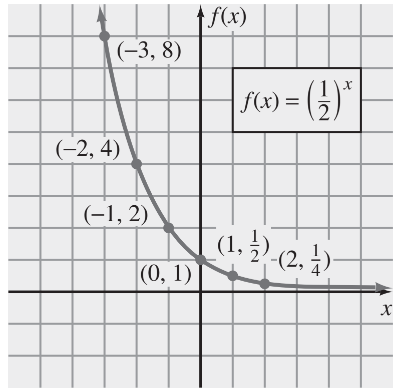


Figura 14.2

Comentario: Dado que $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$, las gráficas de $f(x) = 2^x$ y $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ son reflejos mutuos a través del eje y. Por lo tanto, la figura 14.2 podría dibujarse al reflejar la figura 14.1 a través del eje y.

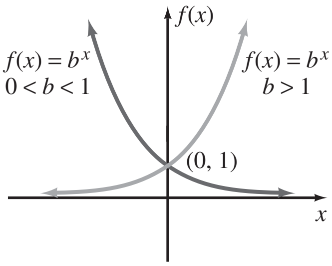


Figura 14.3

Las gráficas en la figura 14.3 ilustran un patrón de comportamiento de las funciones exponenciales.

- Si b . 1, entonces la gráfica de $f(x) = b^x$ *baja a la derecha*, y la función se llama **función decreciente**.
- Si 0 , b , 1, entonces la gráfica de $f(x) = b^x$ *baja a la derecha*, y a función se llama **función decreciente**.
- Todas las gráficas de $f(x) = b^x$ contienen el punto (0, 1) porque b^0 5 1 por cualquier b . 0.

Conforme grafique funciones exponenciales, no olvide sus experiencias de graficación previas.

1. La gráfica de $f(x) = 2^x - 4$ es la gráfica de $f(x) = 2^x$ *movida hacia abajo cuatro unidades*.
2. La gráfica de $f(x) = 2^{x+3}$ es la gráfica de $f(x) = 2^x$ *movida tres unidades a la izquierda*.
3. La gráfica de $f(x) = -2^x$ es la gráfica de $f(x) = 2^x$ *reflejada a través del eje x*.

Se utilizó una calculadora graficadora para dibujar estas cuatro funciones sobre el mismo conjunto de ejes, como se muestra en la figura 14.4.

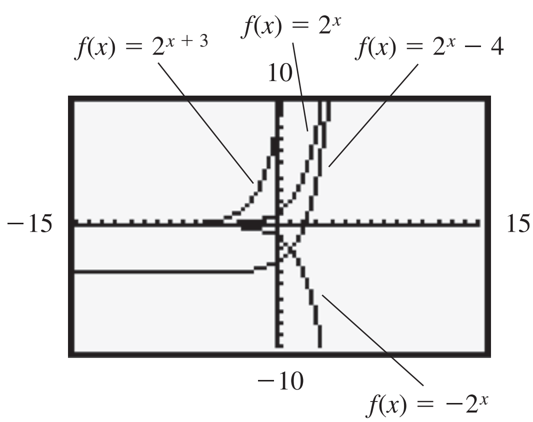


Figura 14.4

Si se enfrenta con una función exponencial que no es de la forma básica $f(x) = b^x$ o una variación de ella, no olvide las sugerencias de graficación que se ofrecen en capítulos anteriores. Considere uno de tales ejemplos.

Ejemplo de salón de clases

Graficar la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+1}$.

EJEMPLO 8

Graficar $f(x)$ 5 2^{2x^2}.

Solución

Puesto que $f(2x)$ 5 $2^{2(2x)^2}$ 5 2^{2x^2} 5 $f(x)$, se sabe que esta curva es simétrica con respecto al eje y. Por lo tanto, elabore una tabla de valores usando valores no negativos para x. Grafique estos puntos, conéctelos con una curva continua y refleje esta parte de la curva a través del eje y para producir la gráfica en la figura 14.5.

x	2^{-x^2}
0	1
$\frac{1}{2}$	0.84
1	0.5
$\frac{3}{2}$	0.21
2	0.06

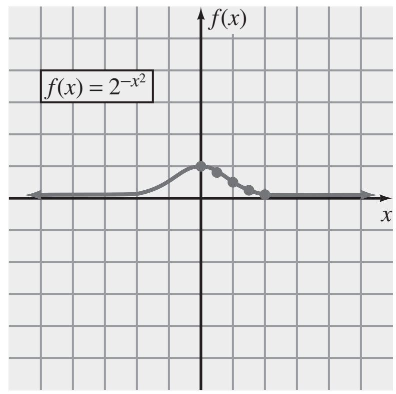


Figura 14.5

Finalmente, considere un problema en el que una herramienta de graficación ofrece una solución aproximada.

Ejemplo de salón de clases

Use una herramienta de graficación para obtener la gráfica de $f(x) = 200\left(\frac{1}{2}\right)^x$ y encuentre un valor aproximado para x cuando $f(x) = 54$.

EJEMPLO 9

Use una herramienta de graficación para obtener una gráfica de $f(x) = 50(2^x)$ y encuentre un valor aproximado para x cuando $f(x) = 15{,}000$.

Solución

Primero debe encontrar un rectángulo de visualización apropiado. Puesto que $50(2^{10}) = 51\,200$, establezca las fronteras de modo que $0 \leq x \leq 10$ y $0 \leq y \leq 50\,000$ con una escala de 10 000 sobre el eje y. (Ciertamente, podría usar otras fronteras, pero éstas darán una gráfica que funciona para este problema.) La gráfica de $f(x) = 50(2^x)$ se muestra en la figura 14.6. Ahora puede usar las características TRACE y ZOOM de la herramienta de graficación para encontrar que $x \approx 8.2$ en $y = 15\,000$.

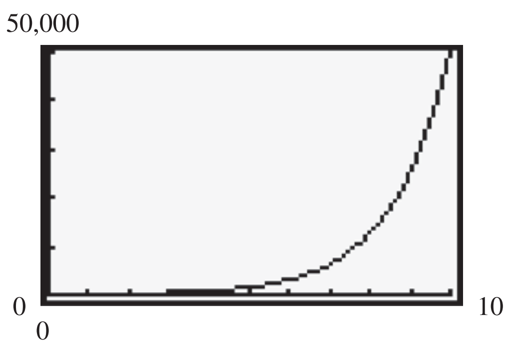


Figura 14.6

Comentario: En el ejemplo 9, se usó un enfoque gráfico para resolver la ecuación $50(2^x) = 15{,}000$. En la sección 14.6, se usará un enfoque algebraico para resolver este tipo de ecuación.

Examen de conceptos 14.1

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. $2^2 \cdot 2^3 = 4^5$

2. $2^2 \cdot 2^3 = 2^6$

3. $2^{-3} = -8$

4. $-2^{-3} = 8$

5. $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$

6. **La función** $f(x)$ 5 1^x es una función exponencial.

7. La base, b, de una función exponencial, $f(x)$ 5 b^x, puede ser cualquier número.

8. La función exponencial $f(x)$ 5 b^x donde b . 1 y $b \neq 1$ es una función creciente.

9. Todas las funciones exponenciales son funciones crecientes.

10. Todas las gráficas de $f(x)$ 5 b^x cuando b . 0 y $b \neq 1$ contienen el punto (0, 1).

Conjunto de problemas 14.1

Para los problemas 1-26, resolver cada ecuación. (Objectivo 1)

1. $2^x = 64$

2. $3^x = 81$

3. $3^{2x} = 27$

4. $2^{2x} = 16$

5. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{128}$

6. $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{256}$

7. $3^{-x} = \frac{1}{243}$

8. $3^{x+1} = 9$

9. $6^{3x-1} = 36$

10. $2^{2x+3} = 32$

11. $\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{64}{27}$

12. $\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{9}{4}$

13. $16^x = 64$

14. $4^x = 8$

15. $27^{4x} = 9^{x+1}$

16. $32^x = 16^{1-x}$

17. $9^{4x-2} = \frac{1}{81}$

18. $8^{3x+2} = \frac{1}{16}$

19. $10^x = 0.1$

20. $10^x = 0.0001$

21. $(2^{x+1})(2^x) = 64$

22. $(2^{2x-1})(2^{x+2}) = 32$

23. $(27)(3^x) = 9^x$

24. $(3^x)(3^{5x}) = 81$

25. $(4^x)(16^{3x-1}) = 8$

26. $(8^{2x})(4^{2x-1}) = 16$

Para los problemas 27-46, graficar cada función exponencial. (Objectivo 2)

27. $f(x) = 3^x$

28. $f(x) = 4^x$

29. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

30. $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

31. $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

32. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

33. $f(x) = 2^x - 3$

34. $f(x) = 2^x + 1$

35. $f(x) = 2^{x+2}$

36. $f(x) = 2^{x-1}$

37. $f(x) = -2^x$

38. $f(x) = -3^x$

39. $f(x) = 2^{-x-2}$

40. $f(x) = 2^{-x+1}$

41. $f(x) = 2^{x^2}$

42. $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

43. $f(x) = 2^{|x|}$

44. $f(x) = 3^{1-x^2}$

45. $f(x) = 2^x - 2^{-x}$

46. $f(x) = 2^{-|x|}$

Pensamientos en palabras

47. Explique cómo resolvería la ecuación $(2^{x+1})(8^{2x-3}) = 64$.

48. ¿Por qué la base de una función exponencial se restringe a números positivos, sin incluir al 1?

49. Explique cómo graficaría la función $f(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Actividades con calculadora graficadora

50. Use una calculadora graficadora para comprobar sus gráficas para los problemas 27-46.

51. Grafique $f(x) = 2^x$. ¿Dónde se deben ubicar las gráficas de $f(x) = 2^{x-5}$, $f(x) = 2^{x-7}$ y $f(x) = 2^{x+5}$? Grafique las tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes con $f(x) = 2^x$.

52. Grafique $f(x) = 3^x$. ¿Dónde deben ubicarse las gráficas de $f(x) = 3^x + 2$, $f(x) = 3^x - 3$ y $f(x) = 3^x - 7$? Grafique las tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes con $f(x) = 3^x$.

53. Grafique $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. ¿Dónde se deben ubicar las gráficas de las siguientes funciones?

$$f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} \quad \text{y} \quad f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$$

Grafique las tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes con $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

54. Grafique $f(x) = (1.5)^x$, $f(x) = (5.5)^x$, $f(x) = (0.3)^x$ y $f(x) = (0.7)^x$ sobre el mismo conjunto de ejes. ¿Estas gráficas son consistentes con la figura 14.3?

55. ¿Cuál es la solución para $3^x = 5$? ¿Está de acuerdo en que está entre 1 y 2, porque $3^1 = 3$ y $3^2 = 9$? Ahora grafique $f(x) = 3^x - 5$ y use las características ZOOM y TRACE de su calculadora graficadora para encontrar una aproximación, a la centésima más cercana, para la abscisa al origen. Debe obtener una respuesta de 1.46. ¿Ésta es una aproximación para la solución de $3^x = 5$? Intente elevar 3 a la potencia 1.46.

Encuentre una solución aproximada, a la centésima más cercana, para cada una de las siguientes ecuaciones al graficar la función adecuada y encontrar la abscisa al origen.

(a) $2^x = 19$ **(b)** $3^x = 50$ **(c)** $4^x = 47$

(d) $5^x = 120$ **(e)** $2^x = 1500$ **(f)** $3^{x-1} = 34$

Respuestas al examen de conceptos

1. Falso **2.** Falso **3.** Falso **4.** Falso **5.** Cierto **6.** Falso **7.** Falso **8.** Cierto **9.** Falso **10.** Cierto

14.2 Aplicaciones de las funciones exponenciales

OBJETIVOS

1. Resolver problemas de crecimiento y decaimiento exponenciales
2. Resolver problemas de interés compuesto
3. Resolver problemas de vida media
4. Resolver problemas de crecimiento que implican al número *e*
5. Graficar funciones exponenciales que involucran la base de *e*

Puede representar muchas situaciones del mundo real que muestren crecimiento o decaimiento con ecuaciones que describan funciones exponenciales. Por ejemplo, suponga que un economista predice una tasa de inflación anual de 5% anual durante los próximos 10 años. Esto significa que un artículo, con un precio actual de \$8, costará $8(105\%) = 8(1.05) =$ \$8.40 dentro de un año. El mismo artículo costará $[8(105\%)](105\%) = 8(1.05)^2 =$ \$8.82 en 2 años. En general, con la ecuación

$$P = P_0(1.05)^t$$

se obtiene el precio predicho P de un artículo en t años, si el costo actual es P_0 y la tasa de inflación anual es de 5%. Con esta ecuación es posible buscar algún precio futuro con base en la predicción de una tasa de inflación de 5%.

Un frasco de mostaza de \$0.79 costará $\$0.79(1.05)^3 = \$0.91$ en tres años.

Una bolsa de papas fritas de \$2.69 costará $\$2.69(1.05)^5 = \$3.43$ en 5 años.

Una lata de café de \$6.69 costará $\$6.69(1.05)^7 = \$9.41$ en 7 años.

Interés compuesto

El interés compuesto proporciona otro ejemplo del crecimiento exponencial. Suponga que \$500, llamado el **capital inicial o principal**, se invierten a una tasa de interés de 4% compuesto anual. El interés ganado el primer año es \$500(0.04) = \$20 y esta cantidad se suma a los \$500 originales para formar un nuevo principal de \$520 para el segundo año. El interés ganado durante el segundo año es \$520(0.04) = \$20.80 y esta cantidad se suma a \$540 para formar un nuevo principal de \$540.80 para el tercer año. Cada año se forma un nuevo principal al reinvertir el interés ganado durante dicho año.

En general, suponga que una suma de dinero P (el capital inicial o principal) se invierte a una tasa de interés compuesto anual de r por ciento. El interés ganado el primer año es Pr, y el nuevo principal para el segundo año es $P + Pr$, or $P(1 + r)$. Note que el nuevo principal para el segundo año se puede encontrar al multiplicar el principal original P por $(1 + r)$. En forma parecida, el nuevo principal para el tercer año se puede encontrar al multiplicar el principal anterior $P(1 + r)$ por $1 + r$ y, por ende, se obtiene $P(1 + r)^2$. Si continúa este proceso, después de t años la cantidad de dinero total acumulada, (A), está dada por

$$A = P(1 + r)^t$$

Considere los siguientes ejemplos de inversiones realizados a cierta tasa de interés compuesto anual:

1. \$750 invertidos durante 5 años a 4% de interés compuesto anual produce
   $A = \$750(1.04)^5 = \$912.49$
2. \$1000 invertidos durante 10 años a 7% de interés compuesto anual produce
   $A = \$1000(1.07)^{10} = \$1967.15$
3. \$5000 invertidos durante 20 años a 6% de interés compuesto anual produce
   $A = \$5000(1.06)^{20} = \$16{,}035.68$

Puede usar la fórmula de interés compuesto para determinar qué tasa de interés se necesita para acumular cierta cantidad de dinero con base en una inversión inicial dada. El siguiente ejemplo ilustra esta idea.

Ejemplo de salón de clases
¿Qué tasa de interés se necesita para que una inversión de \$2500 produzca \$7500 en 20 años si el interés se compone anualmente?

EJEMPLO 1 Aplique su habilidad

¿Qué tasa de interés se necesita para que una inversión de \$1000 produzca \$4000 en 10 años si el interés se compone anualmente?

Solución

Sustituya \$1000 por P, \$4000 por A y t por 10 años en la fórmula de interés compuesto y resuelva para r.

$$\begin{aligned}
A &= P(1 + r)^t \\
4000 &= 1000(1 + r)^{10} \\
4 &= (1 + r)^{10} \\
4^{0.1} &= [(1 + r)^{10}]^{0.1} && \text{Elevar ambos lados a la potencia 0.1} \\
1.148698355 &\approx 1 + r \\
0.148698355 &\approx r \\
r &= 14.9\% && \text{a la décima porcentual más cercana}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se necesita una tasa de interés de aproximadamente 14.9%. (Tal vez deba comprobar esta respuesta.)

Si el dinero que se invierte a cierta tasa de interés se compone más de una vez al año, entonces la fórmula básica $A = P(1 + r)^t$ puede ajustarse de acuerdo al número de periodos compuestos en un año. Por ejemplo, para un compuesto semanal, la fórmula se convierte en

$A = P\left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2t}$ para un compuesto trimestral, la fórmula se vuelve $A = P\left(1 + \frac{r}{4}\right)^{4t}$. En general, si n representa el número de periodos compuestos en un año, la fórmula se convierte en

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Los siguientes ejemplos ilustran el uso de la fórmula:

1. \$750 invertidos durante 5 años a 4% de interés semestral produce

$$A = \$750\left(1 + \frac{0.04}{2}\right)^{2(5)} = \$750(1.02)^{10} = \$914.25$$

2. \$1000 invertidos durante 10 años a 7% de interés compuesto cada cuatro meses produce

$$A = \$1000\left(1 + \frac{0.07}{4}\right)^{4(10)} = \$1000(1.0175)^{40} = \$2001.60$$

3. \$5000 invertidos durante 20 años a 6% mensual produce

$$A = \$5000\left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{12(20)} = \$5000(1.005)^{240} = \$16,551.02$$

Puede resultarle interesante comparar estos resultados con los obtenidos anteriormente para un compuesto anual.

Decaimiento exponencial

Suponga que el valor de un automóvil se deprecia 15% por año durante los primeros 5 años. Por lo tanto, un automóvil que cuesta \$9500 valdrá \$9500(100% − 15%) = \$9500(85%) = \$9500(0.85) = \$8075 en 1 año. En 2 años, el valor del automóvil se habrá depreciado $\$9500(0.85)^2 = \$6864$ (al dólar más cercano). La ecuación

$$V = V_0(0.85)^t$$

produce el valor V de un automóvil en t años, si el costo inicial es V_0 y el valor se deprecia 15% por año. Por lo tanto, puede estimar algunos valores del automóvil al dólar más cercano de la siguiente forma:

Un automóvil de \$13,000 valdrá $\$13,000(0.85)^3 = \$7984$ en 3 años.
Un automóvil de \$17,000 valdrá $\$17,000(0.85)^5 = \$7543$ en 5 años.
Un automóvil de \$25,000 valdrá $\$25,000(0.85)^4 = \$13,050$ en 4 años.

Otro ejemplo de decaimiento exponencial se asocia con las sustancias radiactivas. La tasa de decaimiento se describe exponencialmente y se basa en la vida media de una sustancia. La vida media de una sustancia radiactiva es la cantidad de tiempo que tarda en desaparecer la mitad de una cantidad inicial de la sustancia como resultado del decaimiento. Por ejemplo, suponga que se tienen 200 gramos de cierta sustancia que tiene una vida media de 5 días. Tras 5 días, permanecen $200\left(\frac{1}{2}\right) = 100$ gramos. Después de 10, permanecen $200\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 50$ gramos. Después de 15, quedan $200\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 25$ gamos. En general, tras t días, permanecen $200\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$ gramos.

La discusión previa conduce a la siguiente fórmula de vida media. Suponga que hay una cantidad inicial (Q_0) de una sustancia radiactiva con una vida media de h. La cantidad de sustancia restante (Q) después de un periodo t está dada por la fórmula

$$Q = Q_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$$

Las unidades de medida para t y h deben ser las mismas.

Ejemplo de salón de clases
Una sustancia radiactiva tiene una vida media de 4 años. Si inicialmente hay 600 miligramos de la sustancia, ¿cuántos miligramos quedarán después de 1 año? ¿Después de 20 años?

EJEMPLO 2 Aplique su habilidad

El bario 140 tiene una vida media de 13 días. Si inicialmente hay 500 miligramos de bario, ¿cuántos miligramos permanecen después de 26 días? ¿Después de 100 días?

Solución

Cuando se usa $Q_0 = 500$ y $h = 13$, la fórmula para la vida media se convierte en

$$Q = 500\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{13}}$$

Si $t = 26$, entonces

$$\begin{aligned} Q &= 500\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{26}{13}} \\ &= 500\left(\frac{1}{2}\right)^{2} \\ &= 500\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= 125 \end{aligned}$$

Por lo tanto, después de 26 días, permanecen 125 miligramos. Si $t = 100$, entonces

$$\begin{aligned} Q &= 500\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100}{13}} \\ &= 500(0.5)^{\frac{100}{13}} \\ &= 2.4 \qquad \text{a la décima de miligramos más cercana} \end{aligned}$$

Después de 100 días, quedan aproximadamente 2.4 miligramos.

Comentario: El ejemplo 2 ilustra claramente que una calculadora es útil en ocasiones, pero no siempre es necesaria. La primera parte del problema se resolvió muy fácilmente sin calculadora, pero en realidad fue útil para la segunda parte del problema.

Número *e*

Ocurre una situación interesante si considera la fórmula de interés compuesto para $P = \$1$, $r = 100\%$ y $t = 1$ año. La fórmula se vuelve $A = 1\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. La siguiente tabla muestra algunos valores, redondeados a ocho lugares decimales, de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para diferentes valores de n.

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000000
10	2.59374246
100	2.70481383
1000	2.71692393
10,000	2.71814593
100,000	2.71826824
1,000,000	2.71828047
10,000,000	2.71828169
100,000,000	2.71828181
1,000,000,000	2.71828183

La tabla sugiere que, conforme n aumenta, el valor de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se acerca cada vez más a cierto número fijo. Esto ocurre y el número fijo se llama e. A cinco lugares decimales, $e = 2.71828$.

La función definida por la ecuación $f(x) = e^x$ es la **función exponencial natural**. Tiene muchas aplicaciones en el mundo real, algunas de las cuales se apreciarán en un momento. Sin embargo, primero obtenga una imagen de la función exponencial natural. Puesto que $2 < e < 3$, la gráfica de $f(x) = e^x$ debe caer entre las gráficas de $f(x) = 2^x$ y $f(x) = 3^x$. Para ser más específicos use la calculadora para determinar una tabla de valores. Use la tecla $\boxed{e^x}$ y redondee los resultados a la décima más cercana para obtener la tabla siguiente. Grafique los puntos determinados por esta tabla, y conéctelos con una curva continua para producir la figura 14.7.

x	$f(x)$ 5 e^x
0	1.0
1	2.7
2	7.4
−1	0.4
−2	0.1

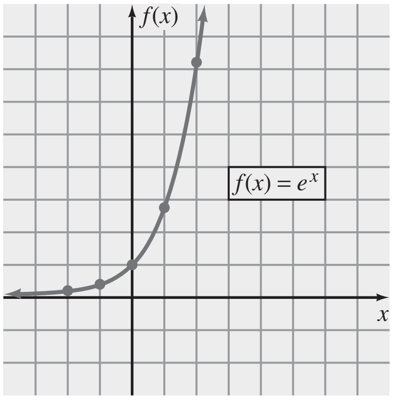


Figura 14.7

De vuelta al interés compuesto

Regrese al concepto de interés compuesto. Si el número de periodos compuestos en un año aumenta de manera indefinida, se llega al concepto de **compuesto continuo**. En matemáticas, esto se logra al aplicar el concepto límite a la expresión $P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$. No se mostrarán los detalles aquí, pero se obtiene el siguiente resultado. La fórmula

$$A = Pe^{rt}$$

produce el valor acumulado (A) de una suma de dinero (P) que se invirtió durante t años a una tasa r por ciento de interés compuesto continuo. Los siguientes ejemplos ilustran el uso de la fórmula.

1. \$750 invertidos durante 5 años a 4% de interés compuesto continuo produce

   $$A = \$750e^{(0.04)(5)} = 750e^{0.20} = \$916.05$$

2. \$1000 invertidos durante 10 años a 7% de interés compuesto continuo produce

   $$A = \$1000e^{(0.07)(10)} = 1000e^{0.7} = \$2013.75$$

3. \$5000 invertidos durante 20 años a 6% de interés compuesto continuo produce

   $$A = \$5000e^{(0.06)(20)} = 5000e^{1.2} = \$16,600.58$$

De nuevo, es interesante comparar estos resultados con los obtenidos antes, cuando usaba el número diferente de periodos compuestos.

¿Es mejor invertir a 6% de interés compuesto trimestral o a 5.75% de interés compuesto continuo? Para responder a esta pregunta, puede usar el concepto de *producción efectiva* (a veces llamada tasa de interés anual efectiva). La **producción efectiva** de una inversión es la tasa de interés simple que produciría la misma cantidad en un año. Por lo tanto, para la inversión a 6% de interés compuesto trimestral, puede calcular la producción efectiva del modo siguiente:

$$P(1+r) = P\left(1+\frac{0.06}{4}\right)^4$$

$$1+r = \left(1+\frac{0.06}{4}\right)^4 \qquad \text{Debe dividir ambos lados entre } P$$

$$1+r = (1.015)^4$$

$$r = (1.015)^4 - 1$$

$$r \approx 0.0613635506$$

$$r = 6.14\% \qquad \text{a la centésima porcentual más cercana}$$

Del mismo modo, para la inversión a 5.75% de interés compuesto continuo, se calcula la producción efectiva del modo siguiente:

$$P(1+r) = Pe^{0.0575}$$

$$1+r = e^{0.0575}$$

$$r = e^{0.0575} - 1$$

$$r \approx 0.0591852707$$

$$r = 5.92\% \qquad \text{a la centésima porcentual más cercana}$$

Por lo tanto, al comparar las dos producciones efectivas, se ve que es mejor invertir a 6% de interés compuesto trimestral que invertir a 5.75% de interés compuesto continuo.

Ley de crecimiento exponencial

Las ideas detrás de "compuesto continuo" se trasladan a otras situaciones de crecimiento. Se usa la ley de crecimiento exponencial,

$$\boxed{Q(t) = Q_0 e^{kt}}$$

como modelo matemático para numerosas aplicaciones de crecimiento y decaimiento. En esta ecuación $Q(t)$ representa la cantidad de una sustancia dada en algún tiempo t, Q_0 es la cantidad inicial de la sustancia (cuando $t = 0$) y k es una constante que depende de la aplicación particular. Si $k < 0$, entonces $Q(t)$ disminuye conforme t aumenta, y al modelo se le conoce como **ley de decaimiento**.

Considere algunas aplicaciones de crecimiento y decaimiento.

Ejemplo de salón de clases

Suponga que, en cierto cultivo, la ecuación $Q(t) = 2100e^{0.25}$ expresa el número de bacterias presentes como función del tiempo t, donde t expresa los días. Hallar (a) el número inicial de bacterias y (b) el número de bacterias después de 16 días.

EJEMPLO 3 Aplique su habilidad

Suponga que, en cierto cultivo, la ecuación $Q(t) = 15{,}000e^{0.3t}$ expresa el número de bacterias presentes como función del tiempo t, donde t se expresa en horas. Hallar (a) el número inicial de bacterias y (b) el número de bacterias después de 3 horas.

Solución

(a) El número inicial de bacterias se produce cuando $t = 0$.

$$Q(0) = 15{,}000e^{0.3(0)}$$

$$= 15{,}000e^{0}$$

$$= 15{,}000 \qquad e^0 = 1$$

(b) $$Q(3) = 15{,}000e^{0.3(3)}$$

$$= 15{,}000e^{0.9}$$

$$= 36{,}894 \qquad \text{al entero más cercano}$$

Por lo tanto, aproximadamente 36, 894 de bacterias deben estar presentes tras 3 horas.

Ejemplo de salón de clases
Suponga que el número de bacterias presentes en cierto cultivo tras 4 horas se da con la ecuación $Q(t) = Q_0{}^{e0.04t}$, si Q_0 representa el número inicial de bacteria. Si 9000 bacterias están presentes después de 25 horas, ¿cuántas bacterias había inicialmente?

EJEMPLO 4 Aplique su habilidad

Suponga que el número de bacterias presentes en cierto cultivo tras cierto número de minutos, t se da con la ecuación $Q(t) = Q_0e^{0.05t}$, donde Q_0 representa el número inicial de bacterias. Si 5000 bacterias están presentes tras 20 minutos, ¿cuántas bacterias había inicialmente?

Solución

Si 5000 bacterias están presentes después de 20 minutos, entonces $Q(20) = 5000$.

$$5000 = Q_0e^{0.05(20)}$$

$$5000 = Q_0e^1$$

$$\frac{5000}{e} = Q_0$$

$$1839 = Q_0 \quad \text{al entero positivo más cercano}$$

Por lo tanto, había aproximadamente 1839 bacterias.

Ejemplo de salón de clases
El número de gramos Q de cierta sustancia radiactiva presente después de t minutos se da por $Q(t) = 500^{e-0.2t}$. ¿Cuántos gramos permanecen después de 20 segundos?

EJEMPLO 5 Aplique su habilidad

El número de gramos de cierta sustancia radiactiva presente después de t segundos está dado por la ecuación $Q(t) = 200e^{-0.3t}$. ¿Cuántos gramos quedan después de 7 segundos?

Solución

$$\begin{aligned} \text{Use} \quad Q(t) &= 200e^{-0.3t} \qquad \text{para obtener} \\ Q(7) &= 200e^{(-0.3)(7)} \\ &= 200e^{-2.1} \\ &= 24.5 \quad \text{a la décima más cercana} \end{aligned}$$

Por lo tanto, hay aproximadamente 24.5 gramos después de 7 segundos.

Finalmente, considere dos ejemplos en los que se usa una herramienta de graficación para producir la gráfica.

Ejemplo de salón de clases
Suponga que $800 se invierten al 2% de interés compuesto continuo. ¿Cuánto tardará el dinero en duplicarse?

EJEMPLO 6 Aplique su habilidad

Suponga que $1000 se invierten a 6.5% de interés compuesto continuo. ¿Cuánto tardará el dinero en duplicarse?

Solución

Sustituya P por $1000 y 0.065 por r en la fórmula $A = Pe^{rt}$ para producir $A = 1000e^{0.065t}$. Si se hace $y = A$ y $x = t$, puede graficar la ecuación $y = 1000e^{0.065x}$. Al hacer $x = 20$, se obtiene $y = 1000e^{0.065(20)} = 1000e^{1.3} \approx 3670$. Por tanto, establezca las fronteras del rectángulo de visualización de modo que $0 \le x \le 20$ y $0 \le y \le 3700$ con una escala y de 1000. Entonces, se obtiene la gráfica de la figura 14.8. Ahora se quiere encontrar el valor de x de manera que $y = 2000$. (El dinero se duplica.) Al usar las características ZOOM y TRACE de la herramienta de graficación, determina que un valor x de aproximadamente 10.7 producirá un valor y de 2000. Por lo tanto, tomará aproximadamente 10.7 años duplicar la inversión de $1000.

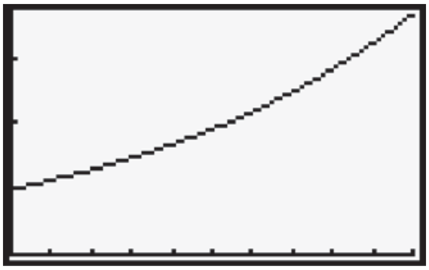


Figura 14.8

EJEMPLO 7

Graficar la función $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ y encontrar su valor máximo.

Solución

Si $x = 0$, entonces $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.4$ de modo que las fronteras del rectángulo de visualización se establecen en $-5 \leq x \leq 5$ y $0 \leq y \leq 1$, con una escala y de 0.1; la gráfica de la función se muestra en la figura 14.9. A partir de la gráfica, se ve que el valor máximo de la función ocurre en $x = 0$, que ya se determinó en aproximadamente 0.4.

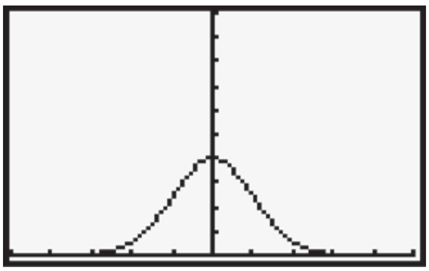


Figura 14.9

Comentario: La curva en la figura 14.9 se llama **curva de distribución normal**. Probablemente quiera pedirle a su profesor que explique lo que significa asignar calificaciones con base en la curva de distribución normal.

Examen de conceptos 14.2

Para los problemas 1-5, emparejar cada tipo de problema con su fórmula:

1. Compuesto continuo

2. Crecimiento o decaimiento exponencial

3. Interés compuesto anual

4. Interés compuesto

5. Vida media

A. $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ **B.** $Q = Q_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$ **C.** $A = P(1 + r)^t$

D. $Q(t) = Q_0e^{kt}$ **E.** $A = Pe^{rt}$

Para los problemas 6-10, responder cierto o falso.

6. \$500 invertidos por 2 años al 7% de compuesto semestral produce \$573.76.

7. \$500 invertidos por 2 años al 7% de compuesto continuo produce \$571.14.

8. La gráfica de $f(x) = e^{x-5}$ es la gráfica de $f(x) = e^x$ corrida 5 unidades hacia la derecha.

9. La gráfica de $f(x) = e^x - 5$ es la gráfica de $f(x) = e^x$ corrida 5 unidades hacia abajo.

10. La gráfica de $f(x) = -e^x$ es la gráfica de $f(x) = e^x$ reflejada a través del eje x.

Conjunto de problemas 14.2

Para los problemas 1 y 2, resolver los problemas de crecimiento o decaimiento exponencial. (Objectivo 1)

1. Asumiendo que la tasa de inflación es de 4% anual, la ecuación $P = P_0(1.04)^t$ produce el precio predicho (P) de un artículo en t años que en la actualidad cuesta P_0. Encontrar el precio predicho de cada uno de los siguientes artículos para los años indicados:
(a) lata de sopa de \$1.38 en 3 años
(b) contenedor de mezcla de cocoa de \$3.43 en 5 años
(c) frasco de crema para café de \$1.99 en 4 años
(d) lata de frijoles y tocino de \$1.54 en 10 años
(e) automóvil de \$18 000 en 5 años (dólar más cercano)
(f) casa de \$180 000 en 8 años (dólar más cercano)
(g) televisor de \$500 en 7 años (dólar más cercano)

2. Suponga que se estima que el valor de un automóvil se deprecia 30% por año durante los primeros 5 años. La ecuación $A = P_0(0.7)^t$ produce el valor (A) de un automóvil después de t años si el precio original es P_0. Encontrar el valor (al dólar más cercano) de cada uno de los siguientes automóviles después del tiempo indicado:
(a) automóvil de \$22 000 después de 2 años
(b) automóvil de \$27 000 después de 5 años
(c) automóvil de \$40 000 después de 3 años

Para los problemas 3-14, usar la fórmula $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ para encontrar la cantidad total de dinero acumulado al final del periodo indicado para cada una de las siguientes inversiones: (Objectivo 2)

3. \$200 durantes 6 años a 6% de interés compuesto anual

4. \$250 durante 5 años a 7% de interés compuesto anual

5. \$500 durante 7 años a 4% de interés compuesto semestral

6. \$750 durante 8 años a 4% de interés compuesto semestral

7. \$800 durante 9 años a 5% de interés compuesto trimestral

8. \$1200 durante 10 años a 4% de interés compuesto trimestral

9. \$1500 durante 5 años a 8% de interés compuesto mensual

10. \$2000 durante 10 años a 3% de interés compuesto mensual

11. \$5000 durante 15 años a 4.5% de interés compuesto anual

12. \$7500 por 20 años a 6.5% de interés compuesto semestral

13. \$8000 por 10 años a 5.5% de interés compuesto trimestral

14. \$10,000 por 25 años a 4.25% de interés compuesto mensual

Para los problemas 15-23, usar la fórmula $A = Pe^{rt}$ para encontrar la cantidad total de dinero acumulado al final del periodo indicado al interés compuesto continuo. (Objectivo 4)

15. \$400 durante 5 años a 7%

16. \$500 durante 7 años a 6%

17. \$750 durante 8 años a 8%

18. \$1000 durante 10 años a 5%

19. \$2000 durante 15 años a 7%

20. \$5000 durante 20 años a 8%

21. \$7500 durante 10 años a 6.5%

22. \$10,000 durante 25 años a 4.25%

23. \$15,000 durante 10 años a 5.75%

24. ¿Qué tasa de interés compuesto anual, a la décima porcentual más cercana, se necesita para que una inversión de \$200 crezca a \$350 en 5 años?

25. ¿Qué tasa de interés compuesto trimestral, a la décima porcentual más cercana, se necesita para que una inversión de \$1500 crezca a \$2700 en 10 años?

26. Encuentre la producción efectiva, a la décima porcentual más cercana, de una inversión a 7.5% de interés compuesto mensual.

27. Encuentre la producción efectiva, a la centésima porcentual más cercana, de una inversión a 7.75% de interés compuesto continuo.

28. ¿Qué inversión produce el mayor rendimiento: 7% de interés compuesto mensual u 6.85% de interés compuesto continuo?

29. ¿Qué inversión produce el mayor rendimiento: 8.25% de interés compuesto trimestral u 8.3% de interés compuesto semestral?

Para los problemas 30-32, resolver los problemas de vida media. (Objectivo 3)

30. Suponga que cierta sustancia radiactiva tiene una vida media de 20 años. Si en la actualidad hay 2500 miligramos de la sustancia, ¿cuánto, al miligramo más cercano, permanece después de 40 años? ¿Después de 50 años?

31. El estroncio-90 tiene una vida media de 29 años. Si se tienen 400 gramos de estroncio-90 inicialmente, ¿cuánto, al gramo más cercano, permanecerá después de 87 años? ¿Después de 100 años?

32. La vida media del radio es aproximadamente de 1600 años. Si la cantidad actual de radio en cierta ubicación es de 500 gramos, ¿cuánto permanecerá después de 800 años? Exprese su respuesta al gramo más cercano.

Para los problemas 33-38, resolver los problemas de crecimiento exponencial. (Objectivo 4)

33. Suponga, que en cierto cultivo, la ecuación $Q(t) = 1000e^{0.4t}$ expresa el número de bacterias presentes como función del tiempo t, donde t se expresa en horas. ¿Cuántas bacterias hay al final de 2 horas?,¿3 horas?, ¿5 horas?

34. El número de bacterias presentes en cierto momento, bajo ciertas condiciones, está dado por la ecuación $Q = 5000e^{0.05t}$, donde t se expresa en minutos. ¿Cuántas bacterias hay al final de 10 minutos?, ¿30 minutos?, ¿una hora?

35. El número de bacterias presentes en cierto cultivo después de t horas está dado por la ecuación $Q = Q_0e^{0.3t}$, donde Q_0 representa el número inicial de bacterias. Si después de 4 horas hay 6640 bacterias, ¿cuántas bacterias había inicialmente?

36. El número de gramos Q de cierta sustancia radiactiva presente después de t segundos está dado por la ecuación $Q = 1500e^{-0.4t}$. ¿Cuántos gramos permanecen después de 5 segundos?, ¿de 10 segundos?, ¿de 20 segundos?

37. La presión atmosférica, medida en libras por pulgada cuadrada es una función de la altitud sobre el nivel del mar. La ecuación $P(a) = 14.7e^{-0.21a}$, donde a en la cual a es la altitud medida en millas, se puede usar para aproximar la presión atmosférica. Encuentre la presión atmosférica en cada una de las siguientes ubicaciones:
(a) Monte McKinley en Alaska: altitud de 3.85 millas
(b) Denver, Colorado: la ciudad de una “milla de alto”
(c) Asheville, Carolina del Norte: altitud de 1985 pies
(d) Phoenix, Arizona: altitud de 1090 pies

38. Suponga que la población actual de una ciudad es de 75 000. Con la ecuación $P(t) = 75{,}000e^{0.01t}$ para calcular el crecimiento futuro, estime la población (a) dentro de 10 años, (b) dentro de 15 años y (c) dentro de 25 años.

Para los problemas 39-44, graficar cada una de las funciones exponenciales. (Objectivo 5)

39. $f(x) = e^x + 1$

40. $f(x) = e^x - 2$

41. $f(x) = 2e^x$

42. $f(x) = -e^x$

43. $f(x) = e^{2x}$

44. $f(x) = e^{-x}$

Pensamientos en palabras

45. Explique la diferencia entre interés simple e interés compuesto.

46. ¿Sería mejor invertir \$5000 a 6.25% de interés compuesto anual durante 5 años, o invertir \$5000 a 6.25% de interés compuesto continuo durante 5 años? Explique su respuesta.

47. ¿Cómo le explicaría el concepto de producción efectiva a alguien que faltó a clase cuando se estudió?

48. ¿Cómo le explicaría la fórmula de vida media a alguien que faltó a clase cuando se estudió?

Más investigación

49. Complete la siguiente tabla, que ilustra lo que ocurre a \$1000 invertidos a varias tasas de interés durante diferentes periodos, pero siempre a interés compuesto continuo. Debe redondear su respuesta al dólar más cercano.

\$1000 de interés compuesto continuo

	4%	5%	6%	7%
5 años				
10 años				
15 años				
20 años				
25 años				

50. Complete la siguiente tabla, que ilustra lo que ocurre a \$1000 invertidos a 6% durante diferentes intervalos y distintos periodos compuestos. Debe redondear todas sus respuestas al dólar más cercano.

\$1000 a 6%

	1 años	5 años	10 años	20 años
Compuesto anual				
Compuesto semestral				
Compuesto trimestral				
Compuesto mensual				
Compuesto continuo				

51. Complete la siguiente tabla, que ilustra lo que ocurre a \$1000 en 10 años, con base en diferentes tasas de interés y diferentes periodos compuestos. Debe redondear todas sus respuestas al dólar más cercano.

\$1000 por 10 años

	4%	5%	6%	7%
Compuesto anual				
Compuesto semestral				
Compuesto trimestral				
Compuesto mensual				
Compuesto continuo				

Para los problemas 52-56, graficar cada una de las funciones.

52. $f(x) = x(2^x)$

53. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

54. $f(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

55. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

56. $f(x) = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

Actividades con calculadora graficadora

57. Use una calculadora graficadora para comprobar sus gráficas para los problemas 52-56.

58. Grafique $f(x) = 2^x$, $f(x) = e^x$ y $f(x) = 3^x$ sobre el mismo conjunto de ejes. ¿Estas gráficas son consistentes con el análisis previo a la figura 14.7?

59. Grafique $f(x) = e^x$. ¿Dónde se deben ubicar las gráficas de $f(x) = e^{x-4}$, $f(x) = e^{x-6}$ y $f(x) = e^{x+5}$? Grafique las tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes con $f(x) = e^x$.

60. Grafique $f(x) = e^x$. Ahora prediga las gráficas para $f(x) = -e^x$, $f(x) = e^{-x}$ y $f(x) = -e^{-x}$. Grafique las tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes, con $f(x) = e^x$.

61. ¿Cómo cree que se compararán las gráficas de $f(x) = e^x$, $f(x) = e^{2x}$ y $f(x) = 2e^x$? Grafíquelas sobre el mismo conjunto de ejes para ver si estuvo en lo correcto.

62. Encuentre una solución aproximada, a la centésima más cercana, para cada una de las siguientes ecuaciones, al graficar la función adecuada y encontrar la abscisa al origen.

(a) $e^x = 7$ **(b)** $e^x = 21$ **(c)** $e^x = 53$

(d) $2e^x = 60$ **(e)** $e^{x+1} = 150$ **(f)** $e^{x-2} = 300$

63. Use un enfoque de graficación para argumentar que es mejor invertir dinero a 6% de interés compuesto trimestral que a 5.75% de interés compuesto continuo.

64. ¿Cuánto tardarán \$500 en valer \$1500, si se invierten a 7.5% de interés compuesto semestral?

65. ¿Cuánto tardarán \$5000 en triplicarse, si se invierten a 6.75% de interés compuesto trimestral?

Respuestas al examen de conceptos

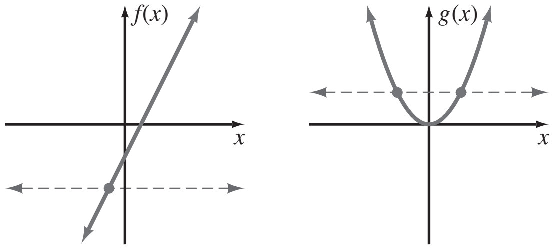
1. E **2.** D **3.** C **4.** A **5.** B **6.** Cierto **7.** Falso **8.** Cierto **9.** Cierto **10.** Cierto

14.3 Funciones inversas

OBJETIVOS

1. Determinar si una función es uno a uno
2. Comprobar si dos funciones son inversas una de la otra
3. Encontrar la función inversa en términos de pares ordenados
4. Hallar la inversa de una función
5. Graficar una función y su inversa
6. Determinar los intervalos en los que una función crece (o decrece)

Recuerde la prueba de recta vertical: si cada recta vertical interseca una gráfica en no más de un punto, entonces la gráfica representa una función. También existe una distinción útil entre dos tipos básicos de funciones. Considere las gráficas de las dos funciones en la figura 14.10: $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = x^2$. En la figura 14.10(a), cualquier *recta horizontal* intersecará la gráfica en no más de un punto. Por tanto, cada valor de $f(x)$ tiene sólo un valor de x Cualquier función que tenga esta propiedad de tener exactamente un valor de x asociado con cada valor de $f(x)$ se llama **función uno a uno**. Por lo tanto, $g(x) = x^2$ no es una función uno a uno, porque la recta horizontal en la figura 14.10(b) interseca la parábola en dos puntos.



(a) $f(x) = 2x - 1$ **(b)** $g(x) = x^2$

Figura 14.10

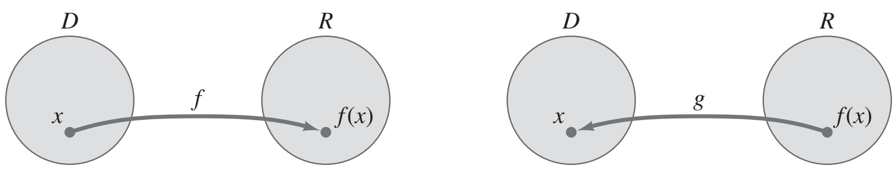
La afirmación de que, para que una función f sea una función uno a uno, cada valor de $f(x)$ tiene sólo un valor x asociado, se puede enunciar de manera equivalente: si $f(x_1) = f(x_2)$ para x_1 y x_2 en el dominio de f, entonces $x_1 = x_2$. Use este último enunciado si-entonces para verificar que $f(x) = 2x - 1$ sea una función uno a uno. Comience con la suposición de que $f(x_1) = f(x_2)$:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 1 &= 2x_2 - 1 \\ 2x_1 &= 2x_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x) = 2x - 1$ es una función uno a uno.

Para demostrar que $g(x) = x^2$ no es una función uno a uno, simplemente necesita encontrar dos números reales distintos en el dominio de f que produzcan el mismo valor funcional. Por ejemplo, $g(-2) = (-2)^2 = 4$ y $g(2) = 2^2 = 4$. Por tanto, $g(x) = x^2$ no es una función uno a uno.

Ahora considere una función uno a uno f que asigne a cada x en su dominio D el valor $f(x)$ en su rango R (figura 14.11(a)). Es posible definir una nueva función f que vaya de R a D; ella asigna $f(x)$ en R de vuelta a x en D, como se indica en la figura 14.11(b). Las funciones f y g se llaman **funciones inversas** una de otra. La siguiente definición enuncia con precisión este concepto.



(a) **(b)**

Figura 14.11

Definición 14.2

Sea f una función uno a uno con un dominio de X y un rango de Y. Una función g con dominio de Y y un rango de X se llama **función inversa** de f si

$$(f \circ g)(x) = x \quad \text{para toda } x \text{ en } Y$$

y

$$(g \circ f)(x) = x \quad \text{para toda } x \text{ en } X$$

En la definición 14.2, observe que, para que f y g sean inversas mutuas, el dominio de f debe ser igual al rango de g y el rango de f debe ser igual al dominio de g. Más aún, g debe invertir las correspondencias dadas por f y f debe invertir las correspondencias dadas por g. En otras palabras, las funciones inversas se *deshacen* mutuamente. Use la definición 14.2 para verificar que dos funciones específicas son inversas una de la otra.

Ejemplo de salón de clases
Verifique que $f(x) = 7x + 1$ y $g(x) = \dfrac{x-1}{7}$ son funciones inversas.

EJEMPLO 1

Verifique que $f(x) = 4x - 5$ y $g(x) = \dfrac{x+5}{4}$ son funciones inversas.

Solución

Puesto que el conjunto de números reales es el dominio y el rango de ambas funciones, se sabe que el dominio de f es igual al rango de g y que el rango de f es igual al dominio de g. Además,

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f\left(\frac{x+5}{4}\right)\\ &= 4\left(\frac{x+5}{4}\right) - 5 = x\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= g(4x-5)\\ &= \frac{4x-5+5}{4} = x\end{aligned}$$

Por lo tanto, f y g son inversas una de otra.

Ejemplo de salón de clases
Verifique que $f(x) = x^2 - 5$ para $x \geq 0$ y $g(x) = \sqrt{x+5}$ para $x \geq 25$, son funciones inversas.

EJEMPLO 2

Verifique que $f(x) = x^2 + 1$ para $x \geq 0$ y $g(x) = \sqrt{x-1}$ para $x \geq 1$ son funciones inversas.

Solución

Primero, note que el dominio de f es igual al rango de g; es decir, el conjunto de los números reales no negativos. Además, el rango de f es igual al dominio de g; es decir, el conjunto de números reales mayores que o iguales a 1. Además,

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f\left(\sqrt{x-1}\right)\\ &= \left(\sqrt{x-1}\right)^2 + 1\\ &= x - 1 + 1 = x\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= g(x^2+1)\\ &= \sqrt{x^2+1-1} = \sqrt{x^2} = x \qquad \sqrt{x^2} = x \text{ porque } x \geq 1\end{aligned}$$

Consecuentemente, f y g son inversas una de la otra.

El inverso de una función f comúnmente se denota mediante f^{-1} (léase "f inversa" o "el inverso de f"). No confunda el -1 en f^{-1} con un exponente negativo. El símbolo f^{-1} *no* significa $1/f^1$ sino que más bien se refiere a la función inversa de la función f.

Recuerde que una función también se puede considerar como un conjunto de pares ordenados sin que dos de ellos tengan el mismo primer elemento. En comparación, una función uno a uno requiere que dos de los pares ordenados tengan el mismo segundo elemento. Entonces, si se intercambian los componentes de cada par ordenado de una función uno a uno dada, la función resultante y la función dada son inversos mutuos. Por ende, si

$$f = \{(1, 4), (2, 7), (5, 9)\}$$

entonces

$$f^{-1} = \{(4, 1), (7, 2), (9, 5)\}$$

Gráficamente, dos funciones que son inversas mutuas son **imágenes especulares con referencia a la recta** $y = x$. Esto se debe a que los pares ordenados (a, b) y (b, a) son reflexiones uno de otro con respecto a la recta $y = x$, como se ilustra en la figura 14.12. (Usted verificará esto en el siguiente conjunto de ejercicios.) Por lo tanto, si se conoce la gráfica de una función f, como en la figura 14.13(a), entonces la gráfica de f^{-1} se puede determinar al reflejar f a través de la recta $y = x$, como en la figura 14.13(b).

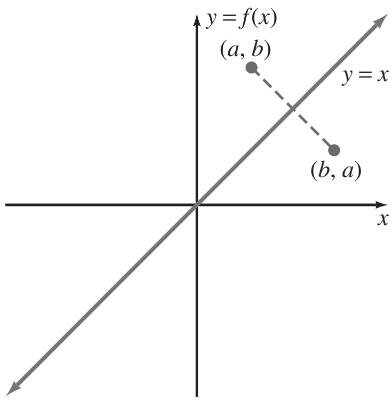
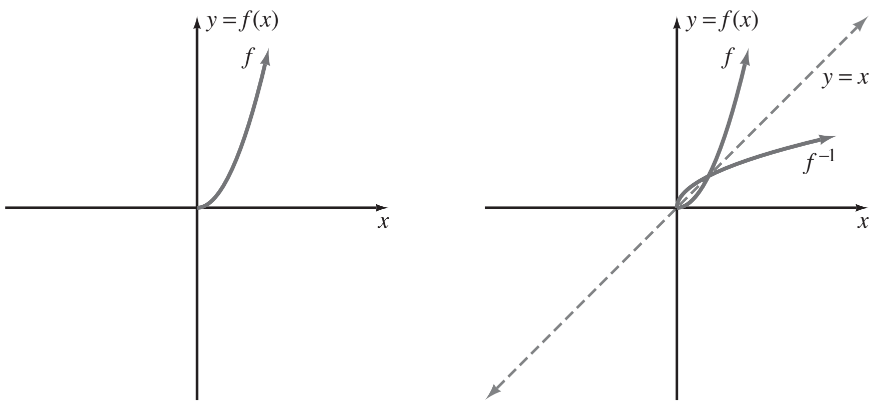


Figura 14.12



(a) (b)

Figura 14.13

Encontrar funciones inversas

La idea de las funciones inversas *que se deshacen mutuamente* proporciona la base para un método informal para encontrar el inverso de una función. Considere la función

$f(x)$ 5 $2x + 1$

Para cada x, esta función asigna el doble de x más 1. Para deshacer esta función, debe restar 1 y dividir entre 2. En consecuencia, la inversa es

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

Ahora verifique que f y f^{-1} sean en realidad inversas una de otra:

$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})(x) &= f(f^{-1}(x)) \\ &= f\left(\frac{x-1}{2}\right) \\ &= 2\left(\frac{x-1}{2}\right) + 1 \\ &= x - 1 + 1 \\ &= x\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(f^{-1} \circ f)(x) &= f^{-1}(f(x)) \\ &= f^{-1}(2x+1) \\ &= \frac{2x+1-1}{2} \\ &= \frac{2x}{2} \\ &= x\end{aligned}$$

Por lo tanto, la inversa de $f(x) = 2x + 1$ es $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$.

Este método informal puede no funcionar muy bien con funciones más complejas, pero sí enfatiza cómo se relacionan mutuamente las funciones inversas. Una técnica más formal y sistemática para encontrar la inversa de una función se describe del modo siguiente:

1. Sustituir el símbolo $f(x)$ con y.

2. Intercambiar x y y.

3. Resolver la ecuación para y en términos de x.

4. Sustituir y con el símbolo $f^{21}(x)$.

Los siguientes ejemplos ilustran esta técnica.

Ejemplo de salón de clases

Hallar la inversa de $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{3}{5}$.

EJEMPLO 3 Hallar la inversa de $f(x)$ 5 $\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}$.

Solución

Cuando se sustituye $f(x)$ con y, la ecuación se convierte en y 5 $\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}$. Al intercambiar x y y

se produce $x = \frac{2}{3}y + \frac{3}{5}$. Ahora, al resolver para y, se obtiene

$$\begin{aligned}x &= \frac{2}{3}y + \frac{3}{5} \\ 15(x) &= 15\left(\frac{2}{3}y + \frac{3}{5}\right) && \text{Multiplicar cada lado por 15} \\ 15x &= 10y + 9 \\ 15x - 9 &= 10y \\ \frac{15x-9}{10} &= y\end{aligned}$$

Finalmente, al sustituir y con $f^{-1}(x)$, se puede expresar la función inversa como

$$f^{-1}(x) = \frac{15x-9}{10}$$

El dominio de f es igual al rango de f^{-1} (ambos son el conjunto de los números reales) y el rango de f es igual al dominio de f^{-1} (ambos son el conjunto de los números reales). Además, puede demostrar que $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$. Esto se le deja para que usted lo complete.

¿La función $f(x) = x^2 - 2$ tiene una inversa? En ocasiones una gráfica de la función ayuda a responder tal pregunta. En la figura 14.14(a), debe ser evidente que f no es una función uno a uno y, por lo tanto, no puede tener una inversa. Sin embargo, también debe ser evidente a partir de la gráfica que, si el dominio de f se restringe a los números reales no negativos, figura 14.14(b), entonces es una función uno a uno y debe tener una función inversa. El siguiente ejemplo ilustra cómo encontrar la función inversa.

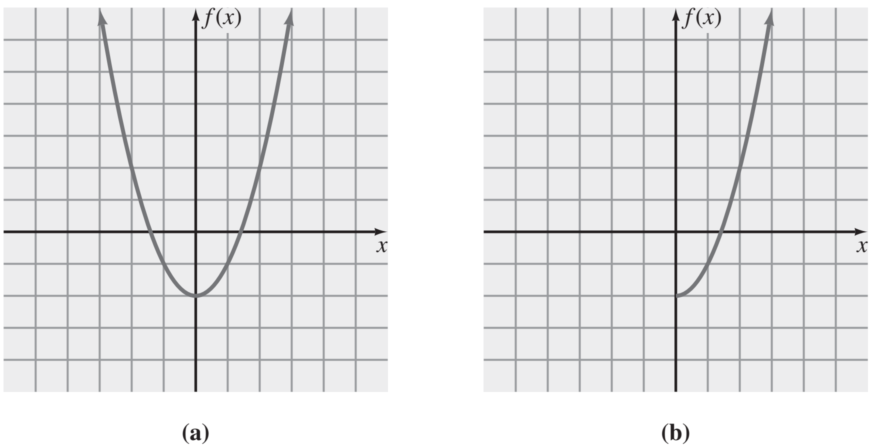


Figura 14.14

Ejemplo de salón de clases
Hallar la inversa de $f(x) = x^2 + 6$, donde $x \geq 0$.

EJEMPLO 4 Hallar la inversa de $f(x) = x^2 - 2$, donde $x \geq 0$.

Solución

Cuando sustituye $f(x)$ con y, la ecuación se vuelve

$$y = x^2 - 2, \quad x \geq 0$$

Al intercambiar x y y se produce

$$x = y^2 - 2, \quad y \geq 0$$

Ahora, resuelva para y; tenga en mente que y debe ser no negativa.

$$\begin{aligned} x &= y^2 - 2 \\ x + 2 &= y^2 \\ \sqrt{x + 2} &= y, \quad x \geq -2 \end{aligned}$$

Finalmente, al sustituir con $f^{-1}(x)$, se puede expresar la función inversa como

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x + 2}, \quad x \geq -2$$

El dominio de f es igual al rango de f^{-1} (ambos son los números reales no negativos) y el rango de f es igual al dominio de f^{-1} (ambos son los números reales mayores que o iguales a -2). También se puede demostrar que $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$. De nuevo, esto se le deja a usted como ejercicio.

Funciones crecientes y decrecientes

En la sección 14.1, se usaron funciones exponenciales como ejemplos de funciones crecientes y decrecientes. En realidad, una función puede ser tanto creciente como decreciente sobre ciertos intervalos. Por ejemplo, en la figura 14.15, se dice que la función f es *creciente* en los intervalos $(-\infty, x_1]$ y $[x_2, \infty)$ y se dice que f es decreciente en el intervalo $[x_1, x_2]$. Más específicamente, las funciones crecientes y decrecientes suelen definirse de la siguiente manera:

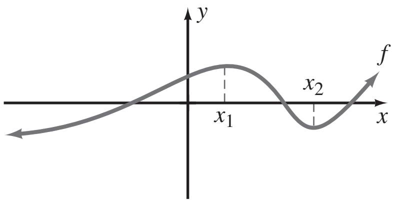


Figura 14.15

Definición 14.3

Sea f una función, con el intervalo I como subconjunto del dominio de f. Sea x_1 y x_2 en I. Entonces:

1. f es *creciente* en I si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$.

2. f es *decreciente* en I si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$.

3. f es *constante* en I si $f(x_1) = f(x_2)$ para toda x_1 y x_2.

Aplique la definición 14.3 y verá que la función cuadrática $f(x) = x^2$ mostrada en la figura 14.16 es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, \infty)$. De la misma manera, la función lineal $f(x) = 2x$ en la figura 14.17 es creciente a través de su domino de los números reales, así que se dice que es creciente sobre $(-\infty, \infty)$. La función $f(x) = -2x$ en la figura 14.18 es decreciente sobre $(-\infty, \infty)$. Para los propósitos de este texto, se debe apoyar en sus conocimientos de las gráficas de funciones para determinar dónde es que las funciones son crecientes y decrecientes. En cálculo desarrollará técnicas más formales para determinar dónde es que las funciones son crecientes y decrecientes.

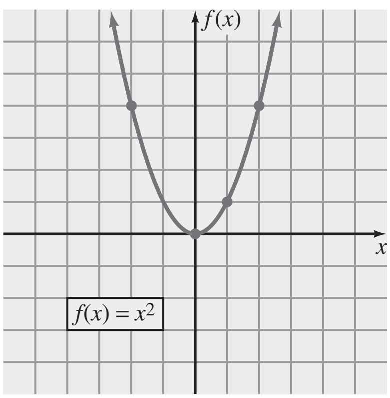


Figura 14.16

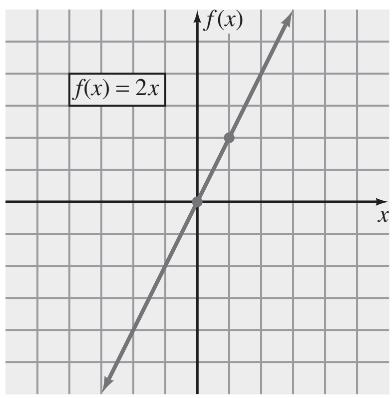


Figura 14.17

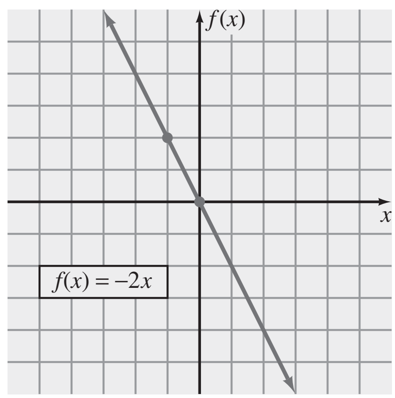


Figura 14.18

Una función que siempre es creciente (o siempre es decreciente) sobre todo su dominio es una función uno a uno y por tanto tiene una función inversa. Más aún, como se ilustra en el ejemplo 4, incluso si una función no es uno a uno sobre todo su dominio, puede serlo sobre algún subconjunto del dominio. Entonces tiene una función inversa sobre este dominio restringido. Conforme las funciones se vuelven más complejas, puede usar una herramienta de graficación para auxiliarse con problemas como los estudiados en esta sección. Por ejemplo, suponga que se quiere conocer si la función $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x - 4}$ es una función uno a uno y, por lo tanto tiene una función inversa. Usando una herramienta de graficación puede obtener rápidamente un bosquejo de la gráfica (figura 14.19). Entonces, si aplica la prueba de la recta horizontal a la gráfica, estará bastante seguro de que la función es uno a uno.

Puede usar una herramienta de graficación para determinar los intervalos sobre los cuales una función es creciente o decreciente. Por ejemplo, para determinar tales intervalos para la función $f(x)$ 5 ! $\overline{x^2 + 4}$ use una herramienta de graficación para obtener un bosquejo de la curva (figura 14.20). A partir de esta gráfica se ve que la función es decreciente sobre el intervalo $(-\infty, 0]$ y es creciente sobre el intervalo $[0, \infty)$.

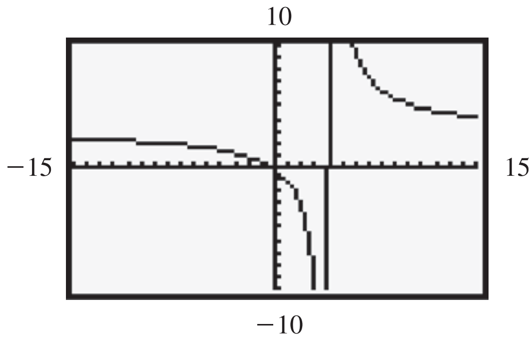


Figura 14.19

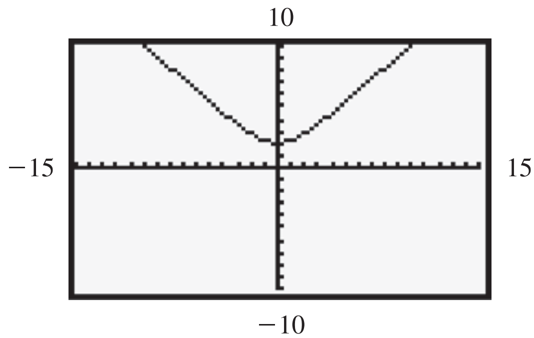


Figura 14.20

Examen de conceptos 14.3

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. Sobre el dominio de todos los números reales, una función cuadrática nunca es uno a uno.
2. La notación f^{-1} se refiere a la inversa de la función f.
3. Si f y g son funciones inversas, entonces el rango de f es el dominio de g.
4. Si una recta horizontal interseca la gráfica de una función en más de un punto, entonces la función es uno a uno.
5. Si $f(1) = 4$ y $f(-3) = 4$, entonces f no es una función uno a uno.
6. La única condición para que f y g sean funciones inversas es que g debe invertir la correspondencia dada por f.
7. Dado que f tiene una función inversa y $f(2) = -8$ entonces $f^{-1}(-8) = 2$.
8. Las gráficas de dos funciones que son inversas una de la otra son imágenes en espejo con respecto a la línea y 5 2x.
9. La función cuadrática $f(x)$ 5 $(x$ 2 $3)^2$ decrece en el intervalo $(-\infty, 0)$.
10. Cualquier función que incrementa sobre su dominio entero es una función uno a uno.

Conjunto de problemas 14.3

Para los problemas 1-6, determinar si la gráfica representa una función uno a uno. (Objectivo 1)

1.

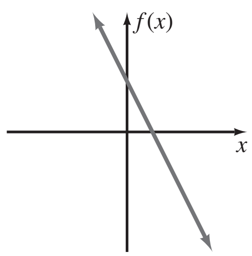


Figura 14.21

2.

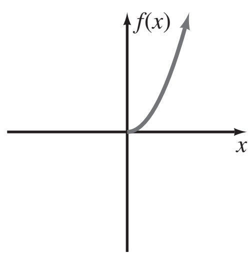


Figura 14.22

3.

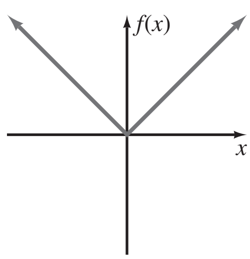


Figura 14.23

4.

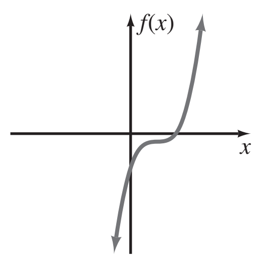


Figura 14.24

5.

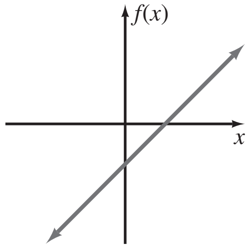


Figura 14.25

6.

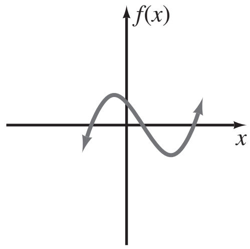


Figura 14.26

Para los problemas 7-14, determinar si la función f es uno a uno. (Objectivo 1)

7. $f(x) = 5x + 4$

8. $f(x) = -3x + 4$

9. $f(x) = x^3$

10. $f(x) = x^5 + 1$

11. $f(x) = |x| + 1$

12. $f(x) = -|x| - 2$

13. $f(x) = -x^4$

14. $f(x) = x^4 + 1$

Para los problemas 15-18, (a) mencionar el dominio y el rango de la función, (b) formar la función inversa f^{-1} y (c) mencionar el dominio y el rango de f^{-1}. (Objectivo 3)

15. $f = \{(1, 5), (2, 9), (5, 21)\}$

16. $f = \{(1, 1), (4, 2), (9, 3), (16, 4)\}$

17. $f = \{(0, 0), (2, 8), (-1, -1), (-2, -8)\}$

18. $f = \{(-1, 1), (-2, 4), (-3, 9), (-4, 16)\}$

Para los problemas 19-26, verificar que ambas funciones dadas sean inversas una de la otra. (Objectivo 2)

19. $f(x) = 5x - 9$ y $g(x) = \dfrac{x + 9}{5}$

20. $f(x) = -3x + 4$ y $g(x) = \dfrac{4 - x}{3}$

21. $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{6}$ y $g(x) = -2x + \dfrac{5}{3}$

22. $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

23. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ para $x > 1$, y
$g(x) = \dfrac{x + 1}{x}$ para $x > 0$

24. $f(x) = x^2 + 2$ para $x \geq 0$, y
$g(x) = \sqrt{x - 2}$ para $x \geq 2$

25. $f(x) = \sqrt{2x - 4}$ para $x \geq 2$, y
$g(x) = \dfrac{x^2 + 4}{2}$ para $x \geq 0$

26. $f(x) = x^2 - 4$ para $x \geq 0$, y
$g(x) = \sqrt{x + 4}$ para $x \geq -4$

Para los problemas 27-36, determinar si f y g son funciones inversas. (Objectivo 2)

27. $f(x) = 3x$ y $g(x) = -\dfrac{1}{3}x$

28. $f(x) = \dfrac{3}{4}x - 2$ y $g(x) = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{8}{3}$

29. $f(x) = x^3$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$

30. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ y $g(x) = \dfrac{1 - x}{x}$

31. $f(x) = x$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$

32. $f(x) = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{1}{3}$ y $g(x) = \dfrac{5}{3}x - 3$

33. $f(x) = x^2 - 3$ para $x \geq 0$ y
$g(x) = \sqrt{x + 3}$ para $x \geq -3$

34. $f(x) = |x - 1|$ para $x \geq 1$ y
$g(x) = |x + 1|$ para $x \geq 0$

35. $f(x) = \sqrt{x + 1}$ y $g(x) = x^2 - 1$ para $x \geq 0$

36. $f(x) = \sqrt{2x - 2}$ y $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 1$

Para los problemas 37-50, (a) encontrar f^{-1} y (b) verificar que $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$. (Objectivo 4)

37. $f(x) = x - 4$

38. $f(x) = 2x - 1$

39. $f(x) = -3x - 4$

40. $f(x) = -5x + 6$

41. $f(x) = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{5}{6}$

42. $f(x) = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{4}$

43. $f(x) = -\dfrac{2}{3}x$

44. $f(x) = \dfrac{4}{3}x$

45. $f(x) = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$

46. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ para $x \neq 0$

47. $f(x) = x^2 + 4$ para $x \geq 0$

48. $f(x) = x^2 + 1$ para $x \leq 0$

49. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ para $x > 0$

50. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$ para $x > -1$

Para los problemas 51-58, (a) hallar f^{-1} y (b) graficar f y f^{-1} con el mismo conjunto de ejes. (Objectivo 5)

51. $f(x) = 3x$

52. $f(x) = -x$

53. $f(x) = 2x + 1$

54. $f(x) = -3x - 3$

55. $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$ para $x > 1$

56. $f(x) = \dfrac{-1}{x - 2}$ para $x > 2$

57. $f(x) = x^2 - 4$ para $x \geq 0$

58. $f(x) = \sqrt{x - 3}$ para $x \geq 3$

Para los problemas 59-66, encontrar los intervalos sobre los cuales la función dada es creciente y los intervalos sobre los cuales es decreciente. (Objectivo 6)

59. $f(x) = x^2 + 1$

60. $f(x) = x^3$

61. $f(x) = -3x + 1$

62. $f(x) = (x - 3)^2 + 1$

63. $f(x) = -(x + 2)^2 - 1$

64. $f(x) = x^2 - 2x + 6$

65. $f(x) = -2x^2 - 16x - 35$

66. $f(x) = x^2 + 3x - 1$

Pensamientos en palabras

67. ¿La función $f(x) = 4$ tiene inversa? Explique su respuesta.

68. Explique por qué toda función lineal no constante tiene una inversa.

69. ¿Las funciones $f(x) = x^4$ y $g(x) = \sqrt[4]{x}$ son inversas una de la otra? Explique su respuesta.

70. ¿Qué quiere decir que 2 y -2 son inversos aditivos uno de otro? ¿Qué quiere decir que 2 y $\dfrac{1}{2}$ son inversos multiplicativos uno de otro? ¿Qué quiere decir que las funciones $f(x) = x - 2$ y $f(x) = x + 2$ son inversas una de otra? ¿Cree que el concepto de "inverso" se usa en forma consistente? Explique su respuesta.

Más investigación

71. La notación de función y la operación de composición pueden usarse para encontrar inversos del siguiente modo: Para encontrar la inversa de $f(x) = 5x + 3$, se sabe que $f(f^{-1}(x))$ debe producir x. Por lo tanto

$$f(f^{-1}(x)) = 5[f^{-1}(x)] + 3 = x$$
$$5[f^{-1}(x)] = x - 3$$
$$f^{-1}(x) = \frac{x - 3}{5}$$

Use este enfoque para encontrar la inversa de cada una de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = 3x - 9$ **(b)** $f(x) = -2x + 6$

(c) $f(x) = -x + 1$ **(d)** $f(x) = 2x$

(e) $f(x) = -5x$ **(f)** $f(x) = x^2 + 6$ para $x \geq 0$

72. Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = 3x - 5$, encuentre

(a) $(f \circ g)^{-1}(x)$ **(b)** $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

(c) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

Actividades con calculadora graficadora

73. Para los problemas 37-44 grafique la función dada, la función inversa que encontró y $f(x) = x$ sobre el mismo conjunto de ejes. En cada caso, la función dada y su inversa deben producir gráficas que sean reflexiones una de otra a través de la recta $f(x) = x$.

74. Hay otra forma en la que puede usar la calculadora graficadora para demostrar que dos funciones son inversas mutuas. Suponga que quiere demostrar que $f(x) = x^2 - 2$ para $x \geq 0$ y $\sqrt{x + 2}$ para $x \geq -2$ son mutuamente inversas. Haga las siguientes asignaciones para la calculadora graficadora.

$$f\colon\ Y_1 = x^2 - 2$$
$$g\colon\ Y_2 = \sqrt{x + 2}$$
$$f \circ g\colon\ Y_3 = (Y_2)^2 - 2$$
$$g \circ f\colon\ Y_4 = \sqrt{Y_1 + 2}$$

Ahora puede proceder de la siguiente manera:

a. Grafique $Y_1 = x^2 - 2$ y note que, para $x > 0$, el rango es mayor que o igual a -2.

b. Grafique $Y_2 = \sqrt{x + 2}$ y note que, para $x \geq -2$, el rango es mayor que o igual a 0.

c. Grafique $Y_3 = (Y_2)^2 - 2$ para $x \geq -2$ y observe la recta $y = x$ para $x \geq -2$.

d. Grafique $Y_4 = \sqrt{Y_1 + 2}$ para $x \geq 0$ y observe la recta $y = x$ para $x \geq 0$.

Use este método para comprobar sus respuestas para los problemas 45-50.

75. Use la técnica demostrada en el problema 74 para demostrar que

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

y

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{para } -1 < x < 1$$

son inversas una de la otra.

Respuestas al examen de conceptos

1. Cierto **2.** Cierto **3.** Cierto **4.** Falso **5.** Cierto **6.** Falso **7.** Cierto **8.** Falso **9.** Cierto **10.** Cierto

14.4 Logaritmos

OBJETIVOS

1. Cambiar ecuaciones entre las formas exponencial y logarítmica
2. Evaluar una expresión logarítmica
3. Aplicar las propiedades de los logaritmos
4. Resolver ecuaciones logarítmicas

En las secciones 14.1 y 14.2 se estudiaron expresiones exponenciales de la forma b^n, donde b es cualquier número real positivo y n es cualquier número real; se usaron expresiones exponenciales de la forma b^n para definir funciones exponenciales y se usaron funciones exponenciales para ayudar a resolver problemas. En las siguientes tres secciones se seguirá el mismo patrón básico con respecto a un nuevo concepto: los logaritmos. Comience con la siguiente definición:

Definición 14.4

Si r es cualquier número real positivo, entonces el único exponente t tal que $b^t = r$ se llama **logaritmo de *r* con base *b*** y se denota como $\log_b r = t$.

De acuerdo a la definición 14.4, el logaritmo de 16 base 2 es el exponente t tal que $2^t = 16$; por lo tanto, puede escribir $\log_2 16 = 4$. Del mismo modo, se puede escribir $\log_{10} 1000 = 3$ porque $10^3 = 1000$. En general, puede recordar la definición 14.4 mediante el enunciado

$$\log_b r = t \quad \text{es equivalente a } b^t = r$$

Por lo tanto, puede cambiar fácilmente de ida y de vuelta entre formas de ecuaciones exponenciales y logarítmicas, como ilustran los siguientes ejemplos.

$$\begin{aligned}
\log_2 8 &= 3 && \text{es equivalente a } 2^3 = 8\\
\log_{10} 100 &= 2 && \text{es equivalente a } 10^2 = 100\\
\log_3 81 &= 4 && \text{es equivalente a } 3^4 = 81\\
\log_{10} 0.001 &= -3 && \text{es equivalente a } 10^{-3} = 0.001\\
\log_m n &= p && \text{es equivalente a } m^p = n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2^7 &= 128 && \text{es equivalente a } \log_2 128 = 7\\
5^3 &= 125 && \text{es equivalente a } \log_5 125 = 3\\
\left(\frac{1}{2}\right)^4 &= \frac{1}{16} && \text{es equivalente a } \log_{1/2}\left(\frac{1}{16}\right) = 4\\
10^{-2} &= 0.01 && \text{es equivalente a } \log_{10} 0.01 = -2\\
a^b &= c && \text{es equivalente a } \log_a c = b
\end{aligned}$$

Algunos logaritmos pueden determinarse al cambiar a forma exponencial y usar las propiedades de los exponentes, como ilustran los siguientes ejemplos.

Ejemplo de salón de clases
Evaluar $\log_{10} 0.01$.

EJEMPLO 1

Evaluar $\log_{10} 0.0001$.

Solución

Sea $\log_{10} 0.0001 = x$. Entonces, al cambiar a forma exponencial, se tiene $10^x = 0.0001$, que se puede resolver de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
10^x &= 0.0001 \\
10^x &= 10^{-4} \qquad 0.0001 = \frac{1}{10{,}000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4} \\
x &= -4
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se tiene $\log_{10} 0.0001 = -4$.

Ejemplo de salón de clases
Evaluar $\log_{10} \sqrt[4]{27}$.

EJEMPLO 2

Evaluar $\log_7 \sqrt[3]{49}$.

Solución

Sea $\log_7 \sqrt[3]{49} = x$. Entonces, al cambiar a la forma exponencial, se tiene $7^x = \sqrt[3]{49}$, que puede resolverse de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
7^x &= \sqrt[3]{49} \\
7^x &= (49)^{\frac{1}{3}} \\
7^x &= (7^2)^{\frac{1}{3}} \\
7^x &= 7^{\frac{2}{3}} \\
x &= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se tiene $\log_7 \sqrt[3]{49} = \frac{2}{3}$.

Algunas ecuaciones que implican logaritmos también pueden resolverse al cambiar a forma exponencial y usando sus conocimientos de los exponentes.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $\log_5 x = \frac{3}{2}$.

EJEMPLO 3

Resolver $\log_8 x = \frac{2}{3}$.

Solución

Cambiar $\log_8 x = \frac{2}{3}$ a la forma exponencial, se obtiene

$$8^{2/3} = x$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
x &= \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 \\
&= 2^2 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

El conjunto solución es $\{4\}$.

Ejemplo de salón de clases

Resolver $\log_b \dfrac{36}{121} = 2$.

EJEMPLO 4 Resolver $\log_b\left(\dfrac{27}{64}\right) = 3$.

Solución

Cambiar $\log_b\left(\dfrac{27}{64}\right) = 3$ a forma exponencial para obtener

$$b^3 = \frac{27}{64}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} b &= \sqrt[3]{\frac{27}{64}} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$.

Propiedades de los logaritmos

Existen algunas propiedades de los logaritmos que son consecuencia directa de la definición 14.2 y de las propiedades de los exponentes. Por ejemplo, la siguiente propiedad se obtiene al escribir las ecuaciones exponenciales $b^1 = b$ y $b^0 = 1$ en forma logarítmica.

Propiedad 14.3

Para $b > 0$ y $b \neq 1$,

$$\log_b b = 1 \quad \text{y} \quad \log_b 1 = 0$$

Por lo tanto, de acuerdo con la propiedad 14.3, se puede escribir

$$\begin{aligned} \log_{10} 10 &= 1 \qquad & \log_4 4 &= 1 \\ \log_{10} 1 &= 0 \qquad & \log_5 1 &= 0 \end{aligned}$$

También, de la definición 14.2, se sabe que $\log_b r$ es el exponente t tal que $b^t = r$. Por lo tanto, elevar b a la potencia $\log_b r$ debe producir r. Este hecho se plantea en la propiedad 14.4.

Propiedad 14.4

Para $b > 0$, $b \neq 1$ y $r > 0$,

$$b^{\log_b r} = r$$

Por lo tanto, de acuerdo con la propiedad 14.4, se puede escribir

$$10^{\log_{10} 72} = 72 \qquad 3^{\log_3 85} = 85 \qquad e^{\log_e 7} = 7$$

Puesto que un logaritmo es, por definición, un exponente, parece razonable predecir que algunas propiedades de los logaritmos corresponden a las propiedades exponenciales básicas. Es una predicción precisa; dichas propiedades sirven como base para el trabajo de cálculo con logaritmos. A continuación se establece la primera de estas propiedades y se muestra cómo puede usar su conocimiento de los exponentes para verificarla.

Propiedad 14.5

Para los números positivos b, r y s, donde $b \neq 1$,

$$\log_b rs = \log_b r + \log_b s$$

Para verificar la propiedad 14.5, puede proceder de la siguiente manera. Sean $m = \log_b r$ y $n = \log_b s$. Cambie cada una de estas ecuaciones a forma exponencial:

$m = \log_b r$ se vuelve $r = b^m$

$n = \log_b s$ se vuelve $s = b^n$

Por lo tanto, el producto rs se vuelve

$$rs = b^m \cdot b^n = b^{m+n}$$

Ahora, cambiando $rs = b^{m+n}$ de nuevo a la forma logarítmica, se obtiene

$$\log_b rs = m + n$$

Reemplace m con $\log_b r$ y reemplace n con $\log_b s$ para producir

$$\log_b rs = \log_b r + \log_b s$$

Los siguientes dos ejemplos ilustran el uso de la propiedad 14.5.

Ejemplo de salón de clases
Si $\log_3 6 = 1.6309$ y $\log_3 2 = 0.6309$, evaluar $\log_3 12$.

EJEMPLO 5 Si $\log_2 5 = 2.3219$ y $\log_2 3 = 1.5850$, evaluar $\log_2 15$.

Solución

Puesto que $15 = 5 \cdot 3$, puede aplicar la propiedad 14.5 del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\log_2 15 &= \log_2(5 \cdot 3)\\ &= \log_2 5 + \log_2 3\\ &= 2.3219 + 1.5850\\ &= 3.9069\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Si $\log_{10} 232 = 2.3655$ y $\log_{10} 73 = 1.8633$, evaluar $\log_{10}(232 \cdot 73)$.

EJEMPLO 6

Dado que $\log_{10} 178 = 2.2504$ y $\log_{10} 89 = 1.9494$, evaluar $\log_{10}(178 \cdot 89)$.

Solución

$$\begin{aligned}\log_{10}(178 \cdot 89) &= \log_{10} 178 + \log_{10} 89\\ &= 2.2504 + 1.9494\\ &= 4.1998\end{aligned}$$

Puesto que $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$, se esperaría una propiedad correspondiente que pertenezca a los logaritmos. La propiedad 14.6 es dicha propiedad. Puede verificarla con un método similar al utilizado para revisar la propiedad 14.5. Esta verificación se deja como ejercicio en el siguiente conjunto de problemas.

Propiedad 14.6

Para los números positivos b, r y s, donde $b \neq 1$,

$$\log_b\left(\frac{r}{s}\right) = \log_b r - \log_b s$$

Se puede usar la propiedad 14.6 para cambiar un problema de división en un problema equivalente de resta, como ilustran los siguientes dos ejemplos.

Ejemplo de salón de clases
Si $\log_5 39 = 2.2763$ y $\log_5 13 = 1.5937$, evaluar $\log_5 3$.

EJEMPLO 7 Si $\log_5 36 = 2.2266$ y $\log_5 4 = 0.8614$, evaluar $\log_5 9$.

Solución

Puesto que $9 = \dfrac{36}{4}$ se puede usar la propiedad 14.6 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\log_5 9 &= \log_5\left(\frac{36}{4}\right)\\ &= \log_5 36 - \log_5 4\\ &= 2.2266 - 0.8614\\ &= 1.3652\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Evaluar $\log_{10}\left(\dfrac{416}{57}\right)$ dado que $\log_{10} 416 = 2.6191$ y $\log_{10} 57 = 1.7559$.

EJEMPLO 8

Evaluar $\log_{10}\left(\dfrac{379}{86}\right)$ dado que $\log_{10} 379 = 2.5786$ y $\log_{10} 86 = 1.9345$.

Solución

$$\begin{aligned}\log_{10}\left(\frac{379}{86}\right) &= \log_{10} 379 - \log_{10} 86 \qquad \text{Propiedad 14.6}\\ &= 2.5786 - 1.9345\\ &= 0.6441\end{aligned}$$

Otra propiedad de los exponentes afirma que $(b^n)^m = b^{mn}$. La propiedad correspondiente de los logaritmos se enuncia en la propiedad 14.7. De nuevo, la verificación de esta propiedad se deja como ejercicio en el siguiente conjunto de problemas.

> **Propiedad 14.7**
>
> Si r es un número real positivo, b es un número real positivo distinto a 1, y p es cualquier número real, entonces
>
> $$\log_b r^p = p(\log_b r)$$

Utilizaremos la propiedad 14.7 en los siguientes dos ejemplos.

Ejemplo de salón de clases
Evaluar $\log_3 34^{1/4}$ dado que $\log_3 34 = 3.2098$.

EJEMPLO 9 Evaluar $\log_2 22^{1/3}$ dado que $\log_2 22 = 4.4594$.

Solución

$$\begin{aligned}\log_2 22^{1/3} &= \frac{1}{3}\log_2 22 \qquad \text{Propiedad 14.7}\\ &= \frac{1}{3}(4.4594)\\ &= 1.4865\end{aligned}$$

Ejemplo de salón de clases
Evaluar $\log_{10}(2057)^{5/6}$ dado que $\log_{10} 2057 = 3.3132$.

EJEMPLO 10 Evaluar $\log_{10}(8540)^{3/5}$ dado que $\log_{10} 8540 = 3.9315$.

Solución

$$\log_{10}(8540)^{3/5} = \frac{3}{5}\log_{10} 8540$$

$$= \frac{3}{5}(3.9315)$$
$$= 2.3589$$

En conjunto, las propiedades de los logaritmos permiten cambiar las formas de varias expresiones logarítmicas. Por ejemplo, puede escribir una expresión como $\log_b \sqrt{\frac{xy}{z}}$ en términos de sumas y diferencias de cantidades logarítmicas más simples, de la siguiente manera:

$$\log_b \sqrt{\frac{xy}{z}} = \log_b \left(\frac{xy}{z}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\log_b\left(\frac{xy}{z}\right) \quad \text{Propiedad 14.7}$$
$$= \frac{1}{2}(\log_b xy - \log_b z) \quad \text{Propiedad 14.6}$$
$$= \frac{1}{2}(\log_b x + \log_b y - \log_b z) \quad \text{Propiedad 14.5}$$

Ejemplo de salón de clases
Escribir cada expresión como la suma o la diferencia de cantidades logarítmicas más simples. Asuma que todas las variables representan números reales:

(a) $\log_b m^2\sqrt{n}$

(b) $\log_b \frac{\sqrt[5]{x}}{y^3}$

(c) $\log_b \frac{x^5}{yz^2}$

EJEMPLO 11

Escribir cada expresión como la suma o la diferencia de cantidades logarítmicas más simples. Asuma que todas las variables representan números reales:

(a) $\log_b xy^2$ **(b)** $\log_b \frac{\sqrt{x}}{y}$ **(c)** $\log_b \frac{x^3}{yz}$

Solución

(a) $\log_b xy^2 = \log_b x + \log_b y^2 = \log_b x + 2\log_b y$

(b) $\log_b \frac{\sqrt{x}}{y} = \log_b \sqrt{x} - \log_b y = \frac{1}{2}\log_b x - \log_b y$

(c) $\log_b \frac{x^3}{yz} = \log_b x^3 - \log_b yz = 3\log_b x - (\log_b y + \log_b z)$

$$= 3\log_b x - \log_b y - \log_b z$$

En ocasiones es necesario cambiar de una suma o diferencia indicada de cantidades logarítmicas, a un producto o cociente indicado. Esto es especialmente útil cuando se resuelven ciertos tipos de ecuaciones que involucran logaritmos. Note en los dos ejemplos siguientes, cómo puede usar las propiedades, junto con el proceso de cambiar de forma logarítmica a modo exponencial, para resolver algunas ecuaciones.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $\log_{10} x + \log_{10}(x - 3) = 1$.

EJEMPLO 12

Resolver $\log_{10} x + \log_{10}(x + 9) = 1$.

Solución

$$\log_{10} x + \log_{10}(x + 9) = 1$$
$$\log_{10}[x(x + 9)] = 1 \quad \text{Propiedad 14.5}$$
$$10^1 = x(x + 9) \quad \text{Cambiar a la forma exponencial}$$
$$10 = x^2 + 9x$$
$$0 = x^2 + 9x - 10$$
$$0 = (x + 10)(x - 1)$$
$$x + 10 = 0 \quad \text{or} \quad x - 1 = 0$$
$$x = -10 \quad \text{or} \quad x = 1$$

Los logaritmos se definen sólo para números positivos, de modo que x y $x + 9$ tienen que ser positivos. Por lo tanto, debe descartar la solución de -10. El conjunto solución es $\{1\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $\log_2 (x + 5) - \log_2 x = 4$.

EJEMPLO 13 Resolver $\log_5(x + 4) - \log_5 x = 2$.

Solución

$$\log_5(x + 4) - \log_5 x = 2$$

$$\log_5\left(\frac{x + 4}{x}\right) = 2 \qquad \text{Propiedad 14.6}$$

$$5^2 = \frac{x + 4}{x} \qquad \text{Cambiar a la forma exponencial}$$

$$25 = \frac{x + 4}{x}$$

$$25x = x + 4$$

$$24x = 4$$

$$x = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{1}{6}\right\}$.

Puesto que los logaritmos sólo se definen para números positivos debe darse cuenta de que algunas ecuaciones logarítmicas pueden no tener solución alguna. (En estos casos, el conjunto solución es el conjunto vacío.) También es posible que una ecuación logarítmica tenga una solución negativa, como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $\log_4 6 + \log_4 (x + 7) = 2$.

EJEMPLO 14 Resolver $\log_2 3 + \log_2 (x + 4) = 3$.

Solución

$$\log_2 3 + \log_2(x + 4) = 3$$

$$\log_2 3(x + 4) = 3 \qquad \text{Propiedad 14.5}$$

$$3(x + 4) = 2^3 \qquad \text{Cambiar a la forma exponencial}$$

$$3x + 12 = 8$$

$$3x = -4$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

La única restricción es que $x + 4 > 0$ o $x > -4$. Por lo tanto, el conjunto solución es $\left\{-\frac{4}{3}\right\}$.

Quizá deba verificar esta respuesta.

Examen de conceptos 14.4

Para los problemas 1-7, responder cierto o falso:

1. Para $m > 0$, el $\log_m n = q$ es equivalente a $m^q = n$.
2. El $\log_7 7$ es igual a cero.
3. Un logaritmo, por definición, es un exponente.
4. El $\log_5 9^2$ es equivalente a $2 \log_5 9$.
5. La expresión $\log_2 x - \log_2 y + \log_2 z$ es equivalente a $\log_2 xyz$.
6. $\log_4 4 + \log_4 1 = 1$.
7. Para la ecuación $\log_2(x + 3) + \log_2(x + 5) = 1$, las soluciones se restringen a los valores de x que son mayores a -3.

Para los problemas 8-10, unir cada expresión con su forma equivalente.

8. $\log_3(2x)$ **A.** $\log_3\frac{1}{2} + \log_3 x$

9. $\log_3\left(\frac{1}{2}x\right)$ **B.** $\frac{1}{2}\log_3 x$

10. $\log_3\sqrt{x}$ **C.** $\log_3 2 + \log_3 x$

Conjunto de problemas 14.4

Para los problemas 1-10, escribir cada enunciado exponencial en forma logarítmica. Por ejemplo, $2^5 = 32$ se convierte en $\log_2 32 = 5$ en forma logarítmica. (Objectivo 1)

1. $2^7 = 128$ **2.** $3^3 = 27$

3. $5^3 = 125$ **4.** $2^6 = 64$

5. $10^3 = 1000$ **6.** $10^1 = 10$

7. $2^{-2} = \frac{1}{4}$ **8.** $3^{-4} = \frac{1}{81}$

9. $10^{-1} = 0.1$ **10.** $10^{-2} = 0.01$

Para los problemas 11-20, escribir cada enunciado logarítmico en forma exponencial. Por ejemplo, $\log_2 8 = 3$ se vuelve $2^3 = 8$ en forma exponencial. (Objectivo 1)

11. $\log_3 81 = 4$ **12.** $\log_2 256 = 8$

13. $\log_4 64 = 3$ **14.** $\log_5 25 = 2$

15. $\log_{10} 10{,}000 = 4$ **16.** $\log_{10} 100{,}000 = 5$

17. $\log_2\left(\frac{1}{16}\right) = -4$ **18.** $\log_5\left(\frac{1}{125}\right) = -3$

19. $\log_{10} 0.001 = -3$ **20.** $\log_{10} 0.000001 = -6$

Para los problemas 21-40, evaluar cada expresión logarítmica. (Objectivo 2)

21. $\log_2 16$ **22.** $\log_3 9$

23. $\log_3 81$ **24.** $\log_2 512$

25. $\log_6 216$ **26.** $\log_4 256$

27. $\log_7\sqrt{7}$ **28.** $\log_2\sqrt[3]{2}$

29. $\log_{10} 1$ **30.** $\log_{10} 10$

31. $\log_{10} 0.1$ **32.** $\log_{10} 0.0001$

33. $10^{\log_{10} 5}$ **34.** $10^{\log_{10} 14}$

35. $\log_2\left(\frac{1}{32}\right)$ **36.** $\log_5\left(\frac{1}{25}\right)$

37. $\log_5(\log_2 32)$ **38.** $\log_2(\log_4 16)$

39. $\log_{10}(\log_7 7)$ **40.** $\log_2(\log_5 5)$

Para los problemas 41-50, resolver cada ecuación. (Objectivo 4)

41. $\log_7 x = 2$ **42.** $\log_2 x = 5$

43. $\log_8 x = \frac{4}{3}$ **44.** $\log_{16} x = \frac{3}{2}$

45. $\log_9 x = \frac{3}{2}$ **46.** $\log_8 x = -\frac{2}{3}$

47. $\log_4 x = -\frac{3}{2}$ **48.** $\log_9 x = -\frac{5}{2}$

49. $\log_x 2 = \frac{1}{2}$ **50.** $\log_x 3 = \frac{1}{2}$

Para los problemas 51-59, dado que $\log_2 5 = 2.3219$ y $\log_2 7 = 2.8074$, evaluar cada expresión usando las propiedades 14.5-10.7. (Objectivo 3)

51. $\log_2 35$ **52.** $\log_2\left(\frac{7}{5}\right)$

53. $\log_2 125$ **54.** $\log_2 49$

55. $\log_2\sqrt{7}$ **56.** $\log_2\sqrt[3]{5}$

57. $\log_2 175$ **58.** $\log_2 56$

59. $\log_2 80$

Para los problemas 60-68, dado que $\log_8 5 = 0.7740$ y $\log_8 11 = 1.1531$, evaluar cada expresión usando las propiedades 14.5-10.7. (Objectivo 3)

60. $\log_8 55$ **61.** $\log_8\left(\frac{5}{11}\right)$

62. $\log_8 25$ **63.** $\log_8\sqrt{11}$

64. $\log_8(5)^{2/3}$ **65.** $\log_8 88$

66. $\log_8 320$ **67.** $\log_8\left(\frac{25}{11}\right)$

68. $\log_8\left(\frac{121}{25}\right)$

Para los problemas 69-80, expresar cada una de las siguientes expresiones como suma o diferencia de cantidades logarítmicas más simples. Suponga que todas las variables representan números reales positivos. (Objectivo 3) Por ejemplo,

$$\log_b \frac{x^3}{y^2} = \log_b x^3 - \log_b y^2$$
$$= 3\log_b x - 2\log_b y$$

69. $\log_b xyz$

70. $\log_b 5x$

71. $\log_b \left(\frac{y}{z}\right)$

72. $\log_b \left(\frac{x^2}{y}\right)$

73. $\log_b y^3 z^4$

74. $\log_b x^2 y^3$

75. $\log_b \left(\frac{x^{1/2} y^{1/3}}{z^4}\right)$

76. $\log_b x^{2/3} y^{3/4}$

77. $\log_b \sqrt[3]{x^2 z}$

78. $\log_b \sqrt{xy}$

79. $\log_b \left(x\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$

80. $\log_b \sqrt{\frac{x}{y}}$

Para los problemas 81-88, expresar cada una de las siguientes como un solo logaritmo. (Suponga que todas las variables representan números reales positivos.) (Objectivo 3) Por ejemplo,

$$3\log_b x + 5\log_b y = \log_b x^3 y^5$$

81. $2\log_b x - 4\log_b y$

82. $\log_b x + \log_b y - \log_b z$

83. $\log_b x - (\log_b y - \log_b z)$

84. $(\log_b x - \log_b y) - \log_b z$

85. $2\log_b x + 4\log_b y - 3\log_b z$

86. $\log_b x + \frac{1}{2}\log_b y$

87. $\frac{1}{2} - \log_b x + 4\log_b y$

88. $2\log_b x + \frac{1}{2}\log_b(x - 1) - 4\log_b(2x + 5)$

Para los problemas 89-106, resolver cada ecuación. (Objectivo 4)

89. $\log_3 x + \log_3 4 = 2$

90. $\log_7 5 + \log_7 x = 1$

91. $\log_{10} x + \log_{10}(x - 21) = 2$

92. $\log_{10} x + \log_{10}(x - 3) = 1$

93. $\log_2 x + \log_2(x - 3) = 2$

94. $\log_3 x + \log_3(x - 2) = 1$

95. $\log_3(x + 3) + \log_3(x + 5) = 1$

96. $\log_2(x + 2) = 1 - \log_2(x + 3)$

97. $\log_2 3 + \log_2(x + 4) = 3$

98. $\log_4 7 + \log_4(x + 3) = 2$

99. $\log_{10}(2x - 1) - \log_{10}(x - 2) = 1$

100. $\log_{10}(9x - 2) = 1 + \log_{10}(x - 4)$

101. $\log_5(3x - 2) = 1 + \log_5(x - 4)$

102. $\log_6 x + \log_6(x + 5) = 2$

103. $\log_2(x - 1) - \log_2(x + 3) = 2$

104. $\log_5 x = \log_5(x + 2) + 1$

105. $\log_8(x + 7) + \log_8 x = 1$

106. $\log_6(x + 1) + \log_6(x - 4) = 2$

107. Verificar la propiedad 14.6.

108. Verificar la propiedad 14.7.

Pensamientos en palabras

109. Explique, sin usar la propiedad 14.4, por qué $4^{\log_4 9}$ es igual a 9.

110. ¿Cómo explicaría el concepto de logaritmo a alguien que acaba de completar un curso de álgebra elemental?

111. En la siguiente sección se demostrará que la función logarítmica $f(x) = \log_2 x$ es la inversa de la función exponencial $f(x) = 2^x$. A partir de esta información, ¿cómo podría bosquejar una gráfica de $f(x) = \log_2 x$?

Respuestas al examen de conceptos

1. Cierto **2.** Falso **3.** Cierto **4.** Cierto **5.** Falso **6.** Cierto **7.** Cierto **8.** C **9.** A **10.** B

14.5 Funciones logarítmicas

OBJETIVOS

1. Graficar funciones logarítmicas
2. Evaluar logaritmos comunes y logaritmos naturales
3. Resolver ecuaciones para logaritmos comunes y logaritmos naturales

Ahora se puede usar el concepto de logaritmo para definir una función logarítmica de la siguiente manera:

> **Definición 14.5**
>
> Si $b > 0$ y $b \neq 1$, entonces la función definida por
>
> $f(x)$ 5 $\log_b x$
>
> donde x es cualquier número real positivo, se llama **función logarítmica con base b**.

Es posible obtener la gráfica de una función logarítmica específica de varias formas. Por ejemplo, la ecuación $y = \log_2 x$ se puede cambiar a la ecuación exponencialn $2^y = x$, con lo que se determina una tabla de valores. El siguiente conjunto de ejercicios le pide usar este enfoque para graficar algunas funciones logarítmicas. Elabore una tabla de valores directamente a partir de la ecuación logarítmica y bosqueje la gráfica a partir de la tabla. El ejemplo 1 ilustra este enfoque.

Ejemplo de salón de clases
Graficar $f(x) = \log_3 x$.

EJEMPLO 1 Graficar $f(x)$ 5 $\log_2 x$.

Solución

Elija algunos valores para x con los que determine fácilmente los correspondientes valores para $\log_2 x$. (Recuerde que los logaritmos se definen solamente para los números reales positivos.)

x	$f(x)$	
$\frac{1}{8}$	-3	$\log_2 \frac{1}{8} = -3$ porque $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
$\frac{1}{4}$	-2	
$\frac{1}{2}$	-1	
1	0	$\log_2 1 = 0$ porque $2^0 = 1$
2	1	
4	2	
8	3	

Fije estos puntos y conéctelos con una curva para producir la figura 14.27.

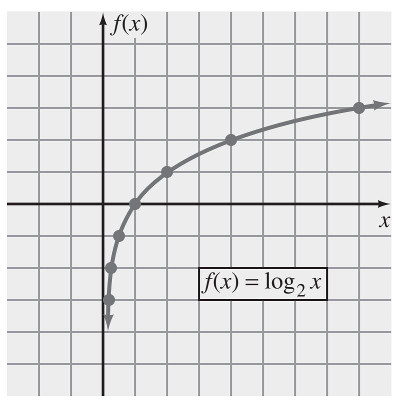


Figura 14.27

Ahora suponga que considera dos funciones f y g de la siguiente manera:

$f(x)$ 5 b^x	Dominio: todos los números reales Rango: números reales positivos
$g(x)$ 5 $\log_b x$	Dominio: números reales positivos Rango: todos los números reales

Además, suponga que considera la composición de f y g y la composición de g y f.

$$(f \circ g)(x) \text{ 5 } f(g(x) \text{ 5 } f(\log_b x) \text{ 5 } \text{blo}^{g_b x} \text{ 5 } x$$

$$(g \circ f)(x) \text{ 5 } g(f(x)) \text{ 5 } g(b^x) \text{ 5 } \log_b b^x \text{ 5 } x \log_b b \text{ 5 } x(1) \text{ 5 } x$$

Puesto que el dominio de f es el rango de g, el rango de f es el dominio de g, $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$, las dos funciones f y g son *inversas* una de otra.

Recuerde que la gráfica de una función y la gráfica de su inversa son reflexiones mutuas a través de la recta $y = x$. Por lo tanto, puede determinar la gráfica de una función logarítmica al reflejar la gráfica de su función exponencial inversa a través de la recta $y = x$. Esta idea se demuestra en la figura 14.28, donde la gráfica de $y = 2^x$ reflejó a través de la recta $y = x$ para producir la gráfica de $y = \log_2 x$.

Los patrones generales de comportamiento de las funciones exponenciales se ilustraron en la figura 14.3. Ahora puede reflejar cada una de estas gráficas a través de la recta $y = x$ y observar los patrones de comportamiento de las funciones logarítmicas, que se muestran en la figura 14.29.

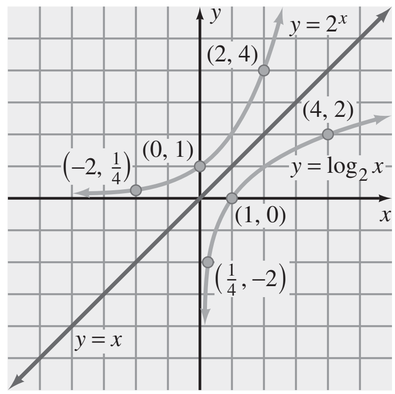


Figura 14.28

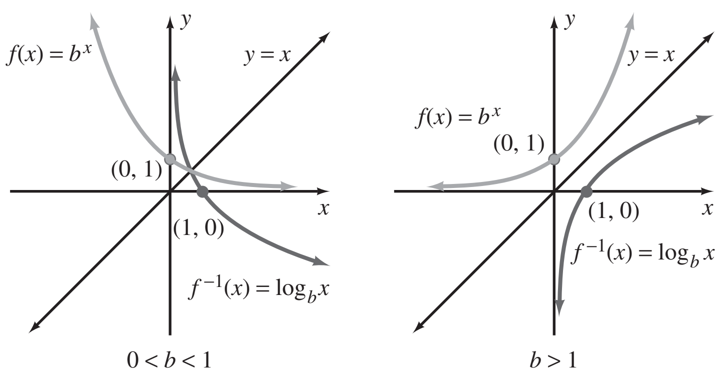


Figura 14.29

Conforme grafique funciones logarítmicas, no olvide las transformaciones de las curvas básicas.

1. La gráfica de $f(x) = 3 + \log_2 x$ es la gráfica de $f(x) = \log_2 x$ movida hacia arriba tres unidades. (Dado que $\log_2 x + 3$ se puede confundir con $\log_2(x + 3)$, se suele escribir $3 + \log_2 x$.)
2. La gráfica de $f(x) = \log_2(x - 4)$ es la gráfica de $f(x) = \log_2 x$ movida cuatro unidades hacia la derecha.
3. La gráfica de $f(x) = -\log_2 x$ es la gráfica de $f(x) = \log_2 x$ reflejada a través del eje x.

Logaritmos comunes: base 10

Las propiedades de los logaritmos que discutimos en la Sección 14.4 son Ciertas para cualquier base válida. Sin embargo, debido a que el sistema de numeración hindú-árabe que utilizamos es un sistema base-10, históricamente se han utilizado los logaritmos de base 10 con propósitos de cálculo. Los logaritmos de base 10 se conocen como logaritmos comunes.

Originalmente, los logaritmos comunes se desarrollaron para auxiliarse en cálculos numéricos complicados que implican productos, cocientes y potencias de números reales. Hoy en día, rara vez se usan para dicho propósito, pues las calculadoras y las computadoras pueden manejar de manera mucho más efectiva los complicados problemas computacionales. Sin embargo, los logaritmos comunes todavía se usan en aplicaciones, así que merecen su atención.

Como sabe, a partir del trabajo anterior, la definición de un logaritmo proporciona la base para evaluar $\log_{10}x$ para valores de x que son potencias enteras de 10. Considere los siguientes ejemplos:

$$\log_{10}1000 = 3 \text{ ya que } 10^3 = 1000$$
$$\log_{10}100 = 2 \text{ ya que } 10^2 = 100$$
$$\log_{10}10 = 1 \text{ ya que } 10^1 = 10$$
$$\log_{10}1 = 0 \text{ ya que } 10^0 = 1$$
$$\log_{10}0.1 = -1 \text{ ya que } 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$$
$$\log_{10}0.01 = -2 \text{ ya que } 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0.01$$
$$\log_{10}0.001 = -3 \text{ ya que } 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0.001$$

Cuando se trabaja casi exclusivamente con logaritmos base 10, se acostumbra omitir la escritura del numeral 10 para designar la base. Por ende, la expresión $\log_{10}x$ se escribe como $\log x$, y un enunciado como $\log_{10}1000 = 3$ se convierte en $\log 1000 = 3$. A partir de ahora, en este capítulo se seguirá esta práctica, pero no olvide que se sobreentiende que la base es 10.

$$\log_{10}x = \log x$$

Para encontrar el logaritmo común de un número positivo que no es una potencia entera de 10, puede usar una calculadora equipada de manera adecuada. Una calculadora que tenga una función de logaritmo común (usualmente se usa una tecla marcada $\boxed{\text{log}}$) le da los siguientes resultados redondeados a cuatro lugares decimales:

$$\log 1.75 = 0.2430$$
$$\log 23.8 = 1.3766 \qquad \text{Asegúrese de poder usar una calculadora y obtener estos resultados}$$
$$\log 134 = 2.1271$$
$$\log 0.192 = -0.7167$$
$$\log 0.0246 = -1.6091$$

Con la finalidad de usar logaritmos para resolver problemas, en ocasiones se requiere determinar un número cuando se conoce el logaritmo del número. Es decir: tal vez necesite determinar x si conoce $\log x$. Considere un ejemplo.

Ejemplo de salón de clases
Hallar x si $\log x = 0.6805$.

EJEMPLO 2 Hallar x si $\log x = 0.2430$.

Solución

Si $\log x = 0.2430$, entonces, al cambiar a forma exponencial, se tiene $10^{0.2430} = x$. Use la tecla $\boxed{10^x}$ para encontrar x:

$$x = 10^{0.2430} \approx 1.749846689$$

Por lo tanto, $x = 1.7498$ redondeado a cinco dígitos significativos.

Asegúrese de poder usar su calculadora y obtener los siguientes resultados. Los valores de x se redondearon a cinco dígitos significativos.

Si $\log x = 0.7629$, entonces $x = 10^{0.7629} = 5.7930$.

Si $\log x = 1.4825$, entonces $x = 10^{1.4825} = 30.374$.

Si $\log x = 4.0214$, entonces $x = 10^{4.0214} = 10{,}505$.

Si $\log x = -1.5162$, entonces $x = 10^{-1.5162} = 0.030465$.

Si $\log x = -3.8921$, entonces $x = 10^{-3.8921} = 0.00012820$.

La **función logarítmica común** se define con la ecuación $f(x) = \log x$. Ahora debe ser asunto simple elaborar una tabla de valores y bosquejar la función. Hará esto en el siguiente conjunto de ejercicios. Recuerde que $f(x) = 10^x$ y $g(x) = \log x$ son mutuamente inversas. En consecuencia, también podría obtener la gráfica de $g(x) = \log x$ mediante reflejo de la curva exponencial $f(x) = 10^x$ a través de la recta $y = x$.

Logaritmos naturales: base *e*

En muchas aplicaciones prácticas de los logaritmos, el número e (recuerde que $e \approx 2.71828$) se usa como base. Los logaritmos con base e se llaman **logaritmos naturales**, y usualmente se usa el símbolo $\ln x$ en lugar de $\log_e x$.

$$\log_e x = \ln x$$

Los logaritmos naturales se pueden encontrar con una calculadora equipada adecuadamente. Una calculadora que tenga una función logaritmo natural (por lo general, una tecla marcada $\boxed{\ln}$) proporciona los siguientes resultados redondeados a cuatro lugares decimales:

$\ln 3.21 = 1.663$

$\ln 47.28 = 3.8561$

$\ln 842 = 6.7358$

$\ln 0.21 = -1.5606$

$\ln 0.0046 = -5.3817$

$\ln 10 = 2.3026$

Asegúrese que puede usar su calculadora para obtener estos resultados. Tenga en mente el significado de un enunciado como $\ln 3.21 = 1.1663$. Al cambiar a forma exponencial, se afirma que e elevado a la potencia 1.1663 es aproximadamente 3.21. Al usar una calculadora, se obtiene $e^{1.1663} = 3.210093293$.

Resuelva algunos problemas para encontrar x cuando se proporciona $\ln x$. Asegúrese de estar de acuerdo con estos resultados.

Si $\ln x = 2.4156$, entonces $x = e^{2.4156} = 11.196$.

Si $\ln x = 0.9847$, entonces $x = e^{0.9847} = 2.6770$.

Si $\ln x = 4.1482$, entonces $x = e^{4.1482} = 63.320$.

Si $\ln x = -1.7654$, entonces $x = e^{-1.7654} = 0.17112$.

La **función logarítmica natural** se define con la ecuación $f(x) = \ln x$. Es la inversa de la función exponencial natural $f(x) = e^x$. Por lo tanto, una forma de graficar $f(x) = \ln x$ es reflejar la gráfica de $f(x) = e^x$ a través de la recta $y = x$. Se le pedirá hacerlo en el siguiente conjunto de problemas.

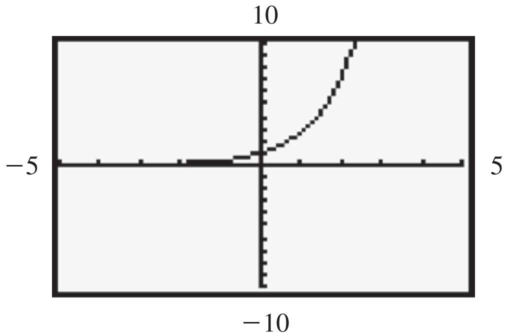


Figura 14.30

En la figura 14.30 se usó una herramienta de graficación para bosquejar la gráfica de $f(x) = e^x$. Ahora, sobre la base del trabajo previo con transformaciones, debe establecer los siguientes enunciados:

1. La gráfica de $f(x) = -e^x$ es la gráfica de $f(x) = e^x$ reflejada a través del eje x.
2. La gráfica de $f(x) = e^{-x}$ es la gráfica de $f(x) = e^x$ reflejada a través del eje y.
3. La gráfica de $f(x) = e^x + 4$ es la gráfica de $f(x) = e^x$ movida hacia arriba cuatro unidades.
4. La gráfica de $f(x) = e^{x+2}$ es la gráfica de $f(x) = e^x$ movida dos unidades hacia la izquierda.

Estos enunciados se verifican en la figura 14.31, que muestra el resultado de graficar estas cuatro funciones sobre el mismo conjunto de ejes, al usar una herramienta de graficación.

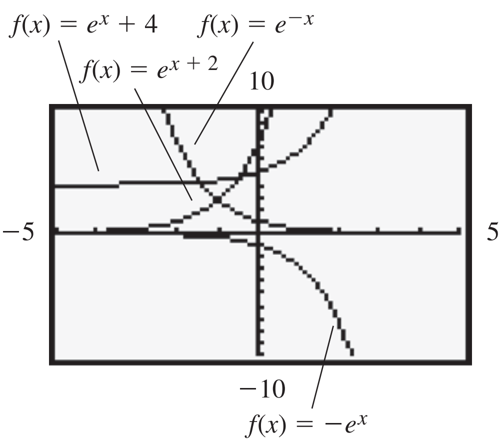


Figura 14.31

Comentario: Hasta el momento se usó una herramienta de graficación para bosquejar solamente funciones logarítmicas comunes y naturales. En la siguiente sección se verá cómo los logaritmos con bases distintas a 10 o e se relacionan con los logaritmos comunes y naturales. Esto le proporcionará una forma de usar una herramienta de graficación para ilustrar una función logarítmica con cualquier base válida.

Examen de conceptos 14.5

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. Para $f(x) = \log_b x$, el dominio de f es $[0, \infty)$.
2. El eje x es una asíntota de la gráfica de $f(x) = \log_b x$.
3. Para toda $b > 0$ y $b \neq 1$, la gráfica de $f(x) = \log_b x$ pasa a través del punto (1, 0).
4. La función $f(x) = \log_2 x$ y $f(x) = \log_{1/2} x^{-1}$ son funciones inversas.
5. La inversa de la función $f(x) = \ln x$ es la función $f(x) = e^x$.

6. La base para $\log x$ es 10.

7. La base para $\ln x$ es 2.

8. Si $\ln x = 1$, entonces $x = e$.

9. La gráfica de $f(x) = \ln(x + 2)$ es la gráfica de $f(x) = \ln x$ movida dos unidades hacia arriba.

10. La gráfica de $f(x) = \log_4 x$ es el reflejo con respecto a la línea $y = x$ de la gráfica de $f(x) = 4^x$.

Conjunto de problemas 14.5

Para los problemas 1-10, usar una calculadora para hallar cada logaritmo común. Exprese las respuestas a cuatro lugares decimales. (Objective 2)

1. $\log 7.24$ **2.** $\log 2.05$

3. $\log 52.23$ **4.** $\log 825.8$

5. $\log 3214.1$ **6.** $\log 14{,}189$

7. $\log 0.729$ **8.** $\log 0.04376$

9. $\log 0.00034$ **10.** $\log 0.000069$

Para los problemas 11-20, usar la calculadora para encontrar x cuando se proporcione $\log x$. Exprese las respuestas a cinco dígitos significativos. (Objective 3)

11. $\log x = 2.6143$ **12.** $\log x = 1.5263$

13. $\log x = 4.9547$ **14.** $\log x = 3.9335$

15. $\log x = 1.9006$ **16.** $\log x = 0.5517$

17. $\log x = -1.3148$ **18.** $\log x = -0.1452$

19. $\log x = -2.1928$ **20.** $\log x = -2.6542$

Para los problemas 21-30, usar la calculadora para hallar cada algoritmo natural. Exprese las respuestas a cuatro lugares decimales. (Objective 2)

21. $\ln 5$ **22.** $\ln 18$

23. $\ln 32.6$ **24.** $\ln 79.5$

25. $\ln 430$ **26.** $\ln 371.8$

27. $\ln 0.46$ **28.** $\ln 0.524$

29. $\ln 0.0314$ **30.** $\ln 0.008142$

Para los problemas 31-40, usar la calculadora para hallar x cuando se proporcione $\ln x$. Exprese las respuestas a cinco dígitos significativos. (Objective 3)

31. $\ln x = 0.4721$ **32.** $\ln x = 0.9413$

33. $\ln x = 1.1425$ **34.** $\ln x = 2.7619$

35. $\ln x = 4.6873$ **36.** $\ln x = 3.0259$

37. $\ln x = -0.7284$ **38.** $\ln x = -1.6246$

39. $\ln x = -3.3244$ **40.** $\ln x = -2.3745$

41. **(a)** Complete la siguiente tabla y después grafique $f(x) = \log x$. Exprese los valores para $\log x$ a la décima más cercana.

x	0.1	0.5	1	2	4	8	10
$\log x$							

(b) Complete la siguiente tabla, exprese los valores para 10^x a la décima más cercana.

x	−1	−0.3	0	0.3	0.6	0.9	1
10^x							

Después grafique $f(x) = 10^x$ y refléjela a través de la recta $y = x$ para producir la gráfica para $f(x) = \log x$.

42. **(a)** Complete la siguiente tabla y luego grafique $f(x) = \ln x$. Exprese los valores para $\ln x$ a la décima más cercana.

x	0.1	0.5	1	2	4	8	10
$\ln^x$							

(b) Complete la siguiente tabla y exprese los valores para e^x a la décima más cercana.

x	−2.3	−0.7	0	0.7	1.4	2.1	2.3
e^x							

Después grafique $f(x) = e^x$ y refléjela a través de la recta $y = x$ para producir la gráfica para $f(x) = \ln x$.

43. Graficar $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ al graficar $\left(\frac{1}{2}\right)^y = x$.

44. Graficar $y = \log_2 x$ al graficar $2^y = x$.

45. Graficar $f(x) = \log_3 x$ al reflejar la gráfica de $g(x) = 3^x$ a través de la recta $y = x$.

46. Graficar $f(x) = \log_4 x$ al reflejar la gráfica de $g(x) = 4^x$ a través de la recta $y = x$.

Para los problemas 47-53, graficar cada una de las funciones. Recuerde que la gráfica de $f(x) = \log_2 2x$ se da en la figura 14.27. (Objectivo 1)

47. $f(x) = 3 + \log_2 x$
48. $f(x) = -2 + \log_2 x$
49. $f(x) = \log_2(x + 3)$
50. $f(x) = \log_2(x - 2)$
51. $f(x) = \log_2 2x$
52. $f(x) = -\log_2 x$
53. $f(x) = 2 \log_2 x$

Para los problemas 54-61, realice los cálculos siguientes y exprese las respuestas a la centésima más cercana. (Estos cálculos son de preparación para su trabajo en la siguiente sección.)

54. $\dfrac{\log 7}{\log 3}$
55. $\dfrac{\ln 2}{\ln 7}$
56. $\dfrac{2\ln 3}{\ln 8}$
57. $\dfrac{\ln 5}{2\ln 3}$
58. $\dfrac{\ln 3}{0.04}$
59. $\dfrac{\ln 2}{0.03}$
60. $\dfrac{\log 2}{5\log 1.02}$
61. $\dfrac{\log 5}{3\log 1.07}$

Pensamientos en palabras

62. ¿Por qué el número 1 se excluye de ser base de un logaritmo?

63. ¿Cómo sabe que $\log_2 6$ está entre 2 y 3?

Actividades con calculadora graficadora

64. Grafique $f(x) = x$, $f(x) = e^x$ y $f(x) = \ln x$ sobre el mismo conjunto de ejes.

65. Grafique $f(x) = x$, $f(x) = 10^x$ y $f(x) = \log x$ sobre el mismo conjunto de ejes.

66. Grafique $f(x) = \ln x$. ¿Cómo se compararían las gráficas de $f(x) = 2\ln x$, $f(x) = 4\ln x$ y $f(x) = 6\ln x$ con la gráfica de $f(x) = \ln x$? Grafique las tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes con $f(x) = \ln x$.

67. Grafique $f(x) = \log x$. Ahora prediga las gráficas para $f(x) = 2 + \log x$, $f(x) = -2 + \log x$ y $f(x) = -6 + \log x$. Grafique las tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes con $f(x) = \log x$.

68. Grafique $\ln x$. Ahora prediga las gráficas para $f(x) = \ln(x - 2)$, $f(x) = \ln(x - 6)$ y $f(x) = \ln(x + 4)$. Grafique las tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes con $f(x) = \ln x$.

69. Para cada una de las expresiones siguientes, (a) prediga la forma y ubicación general de la gráfica, y (b) use su calculadora graficadora para bosquejar la función para comprobar sus predicciones.

(a) $f(x) = \log x + \ln x$ **(b)** $f(x) = \log x - \ln x$
(c) $f(x) = \ln x - \log x$ **(d)** $f(x) = \ln x^2$

Respuestas al examen de conceptos

1. Falso **2.** Falso **3.** Cierto **4.** Falso **5.** Cierto **6.** Cierto **7.** Falso **8.** Cierto **9.** Falso **10.** Cierto

14.6 Ecuaciones exponenciales, ecuaciones logarítmicas y resolución de problemas

OBJETIVOS

1 Resolver ecuaciones exponenciales
2 Resolver ecuaciones logarítmicas
3 Usar logaritmos para resolver problemas
4 Resolver problemas que implican los números de Richter
5 Evaluar logaritmos usando la fórmula de cambio de base

En la sección 14.1 se resolvieron ecuaciones exponenciales como $3^x = 81$ al expresar ambos lados de la ecuación como una potencia de 3 y luego aplicar la propiedad: si $b^n = b^m$, entonces $n = m$. Sin embargo, si intenta este mismo método con una ecuación como $3^x = 5$, enfrenta la dificultad de expresar 5 como potencia de 3. Este tipo de problemas se resuelven con las propiedades de los logaritmos y la siguiente propiedad de igualdad:

Propiedad 14.8

Si $x > 0$, $y > 0$, $b > 0$ y $b \neq 1$, entonces $x = y$ si y sólo si $\log_b x = \log_b y$.

La propiedad 14.8 se enuncia en términos de cualquier base válida b; sin embargo, para la mayoría de las aplicaciones se usan logaritmos comunes o logaritmos naturales. Considere algunos ejemplos.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $5^x = 12$ a la centésima más cercana.

EJEMPLO 1 Resolver $3^x = 5$ a la centésima más cercana.

Solución

Usando logaritmos comunes se puede proceder de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 3^x &= 5 \\ \log 3^x &= \log 5 && \text{Propiedad 14.8} \\ x\log 3 &= \log 5 && \log r^p = p\log r \\ x &= \frac{\log 5}{\log 3} \\ x &= 1.46 && \text{a la centésima más cercana} \end{aligned}$$

✔ Verificación

Puesto que $3^{1.46} \approx 4.972754647$, se dice que, a la centésima más cercana, el conjunto solución para $3^x = 5$ is $\{1.46\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $e^{x-3} = 6$ a la centésima más cercana.

EJEMPLO 2 Resolver $e^{x+1} = 5$ a la centésima más cercana.

Solución

Puesto que la base e se usa en la expresión exponencial, use logaritmos naturales para resolver esta ecuación.

$$\begin{aligned} e^{x+1} &= 5 \\ \ln e^{x+1} &= \ln 5 && \text{Propiedad 14.8} \\ (x+1)\ln e &= \ln 5 && \ln r^p = p\ln r \\ (x+1)(1) &= \ln 5 && \ln e = 1 \\ x &= \ln 5 - 1 \\ x &= 0.61 && \text{a la centésima más cercana} \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{0.61\}$. ¡Compruébelo!

Ejemplo de salón de clases
Resolver $3^{4x+3} = 4^{5x-1}$ a la centésima más cercana.

EJEMPLO 3 Resolver $2^{3x-2} = 3^{2x+1}$ a la centésima más cercana.

Solución

$$\begin{aligned} 2^{3x-2} &= 3^{2x+1} \\ \log 2^{3x-2} &= \log 3^{2x+1} \\ (3x-2)\log 2 &= (2x+1)\log 3 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
3x\log 2 - 2\log 2 &= 2x\log 3 + \log 3 \\
3x\log 2 - 2x\log 3 &= \log 3 + 2\log 2 \\
x(3\log 2 - 2\log 3) &= \log 3 + 2\log 2 \\
x &= \frac{\log 3 + 2\log 2}{3\log 2 - 2\log 3} \\
x &= -21.10 \quad \text{a la centésima más cercana}
\end{aligned}
$$

El conjunto solución es $\{-21.10\}$. ¡Compruébelo!

Ecuaciones logarítmicas

En el ejemplo 12 de la sección 14.4 se resolvió la ecuación logarítmica

$$\log_{10} x + \log_{10}(x + 9) = 1$$

al simplificar el lado izquierdo de la ecuación a $\log_{10}[x(x + 9)]$ y luego cambiar la ecuación a forma exponencial para completar la solución. Ahora, con la propiedad 14.8, puede resolver tal ecuación logarítmica de otra forma y también ampliar sus capacidades de resolución de ecuaciones. Considere algunos ejemplos.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $\log x + \log(x - 21) = 2$.

EJEMPLO 4 Resolver $\log x + \log(x - 15) = 2$.

Solución

Puesto que $\log 100 = 2$, la ecuación dada se vuelve

$$\log x + \log(x - 15) = \log 100$$

Ahora, simplifique el lado izquierdo, aplique la propiedad 14.8 y proceda de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\log(x)(x - 15) &= \log 100 \\
x(x - 15) &= 100 \\
x^2 - 15x - 100 &= 0 \\
(x - 20)(x + 5) &= 0 \\
x - 20 = 0 \quad &\text{o} \quad x + 5 = 0 \\
x = 20 \quad &\text{o} \quad x = -5
\end{aligned}
$$

El dominio de una función logarítmica debe contener sólo números positivos, de modo que x y $x - 15$ deben ser positivas en este problema. Por lo tanto, se descarta la solución -5; el conjunto solución es $\{20\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $\ln(x + 17) = \ln(x - 3) + \ln 5$.

EJEMPLO 5 Resolver $\ln(x + 2) = \ln(x - 4) + \ln 3$.

Solución

$$
\begin{aligned}
\ln(x + 2) &= \ln(x - 4) + \ln 3 \\
\ln(x + 2) &= \ln[3(x - 4)] \\
x + 2 &= 3(x - 4) \\
x + 2 &= 3x - 12 \\
14 &= 2x \\
7 &= x
\end{aligned}
$$

El conjunto solución es $\{7\}$.

Ejemplo de salón de clases
Resolver $\log_b(x - 1) + \log b(5x + 2) = \log_b x$.

EJEMPLO 6 Resolver $\log_b(x + 2) + \log_b(2x - 1) = \log_b x$.

Solución

$$\begin{aligned}
\log_b(x + 2) + \log_b(2x - 1) &= \log_b x \\
\log_b[(x + 2)(2x - 1)] &= \log_b x \\
(x + 2)(2x - 1) &= x \\
2x^2 + 3x - 2 &= x \\
2x^2 + 2x - 2 &= 0 \\
x^2 + x - 1 &= 0
\end{aligned}$$

Usando la fórmula cuadrática, obtiene

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} \\
&= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Puesto que $x + 2$, $2x - 1$ y x tiene que ser positivo, se debe descartar la solución $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$, el conjunto solución es $\left\{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right\}$.

Usar logaritmos para resolver problemas

En la sección 14.2, se usó la fórmula de interés compuesto

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

para determinar la cantidad de dinero (A) acumulado al final de t años si P dólares se invierten a una tasa de interés r compuesta n veces al año. Ahora use esta fórmula para resolver otros tipos de problemas que tratan con interés compuesto.

Ejemplo de salón de clases
¿Cuánto tiempo transcurrirá para duplicar \$6000 si se invierten a 3% de interés compuesto mensual?

EJEMPLO 7 **Aplique su habilidad**

¿Cuánto tiempo transcurrirá para duplicar \$500 si se invierten a 8% de interés compuesto trimestral?

Solución

"Duplicar" significa que los \$500 deben crecer a \$1000. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
1000 &= 500\left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^{4t} \\
&= 500(1 + 0.02)^{4t} \\
&= 500(1.02)^{4t}
\end{aligned}$$

Al multiplicar ambos lados de $1000 = 500(1.02)^{4t}$ por $\frac{1}{500}$ produce

$$2 = (1.02)^{4t}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\log 2 &= \log(1.02)^{4t} && \text{propiedad 14.8} \\
&= 4t \log 1.02 && \log r^p = p \log r
\end{aligned}$$

Ahora resuelva para t.

$$4t\log 1.02 = \log 2$$
$$t = \frac{\log 2}{4\log 1.02}$$
$$t = 8.75 \quad \text{a la centésima más cercana}$$

En consecuencia, se afirma que \$500 invertidos a 8% de interés compuesto trimestral se duplicarán en aproximadamente 8.75 años.

✔ Verificación

\$500 invertidos a 8% de interés compuesto trimestral por 8.75 años producirá

$$A = \$500\left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^{4(8.75)}$$
$$= \$500(1.02)^{35}$$
$$= \$999.94$$

Ejemplo de salón de clases

Para cierto virus, la ecuación $Q(t) = Q_0e^{-0.2t}$, cuando t es el tiempo en horas y Q_0 es el número inicial de partículas del virus, da el número de partículas de virus como una función de tiempo. ¿Cuánto transcurrirá para que 5000 partículas se reduzcan a 500 partículas?

EJEMPLO 8 Aplique su habilidad

Suponga que el número de bacterias presentes en cierto cultivo después de t minutos está dado por la ecuación $Q(t) = Q_0e^{0.04t}$, donde Q_0 representa el número inicial de bacterias. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que el conteo de bacterias crezca de 500 a 2000?

Solución

Al sustituir en $Q(t) = Q_0e^{0.04t}$ y resolver para t, se obtiene lo siguiente.

$$2000 = 500e^{0.04t}$$
$$4 = e^{0.04t}$$
$$\ln 4 = \ln e^{0.04t}$$
$$\ln 4 = 0.04t \ln e$$
$$\ln 4 = 0.04t \qquad \ln e = 1$$
$$\frac{\ln 4}{0.04} = t$$
$$34.7 = t \quad \text{a la décima más cercana}$$

Deben transcurrir aproximadamente 34.7 minutos.

Números Richter

Los sismólogos usan la escala Richter para medir e informar la magnitud de los terremotos. La ecuación

$$\boxed{R = \log\frac{I}{I_0}} \qquad R \text{ se llama número de Richter}$$

compara la intensidad I de un terremoto con una intensidad mínima o de referencia I_0. La intensidad de referencia es el movimiento terrestre más pequeño que se puede registrar en un sismógrafo. Suponga que la intensidad de un terremoto se determina en 50 000 veces la intensidad de referencia. En este caso, $I = 50{,}000\ I_0$ y el número Richter se calcula del modo siguiente:

$$R = \log\frac{50{,}000\ I_0}{I_0}$$

$$= \log 50{,}000$$
$$\approx 4.698970004$$

Por lo tanto, se obtendría un número Richter de 4.7. Considere dos ejemplos más que implican números Richter.

Ejemplo de salón de clases
Un terremoto tiene un número Richter de 7.3. ¿Cómo se compara su intensidad con la intensidad de referencia?

EJEMPLO 9 Aplique su habilidad

Se reportó terremoto en el área de San Francisco en 1989 que alcanzó un número Richter de 6.9. ¿Cómo se compara su intensidad con la intensidad de referencia?

Solución

$$6.9 = \log\frac{I}{I_0}$$
$$10^{6.9} = \frac{I}{I_0}$$
$$I = (10^{6.9})(I_0)$$
$$I \approx 7{,}943{,}282\, I_0$$

Su intensidad fue un poco menor que 8 millones de veces la intensidad de referencia.

Ejemplo de salón de clases
Otro terremoto tiene el número Richter de 6.7. Compare el nivel de intensidad de este terremoto con un terremoto con número Richter de 7.3.

EJEMPLO 10 Aplique su habilidad

En 1990, un terremoto en Irán alcanzó un número Richter de 7.7. Compare la intensidad de este terremoto con el que tuvo lugar en San Francisco, mencionado en el ejemplo 9.

Solución

A partir del ejemplo 9, se tiene $I = (10^{6.9})(I_0)$ para el terremoto en San Francisco. Entonces, al usar el número Richter de 7.7, se obtiene $I = (10^{7.7})(I_0)$ para el terremoto en Irán. Por lo tanto, al comparar,

$$\frac{(10^{7.7})(I_0)}{(10^{6.9})(I_0)} = 10^{7.7-6.9} = 10^{0.8} \approx 6.3$$

El terremoto en Irán fue aproximadamente 6 veces tan intenso como el de San Francisco.

La fórmula de cambio de base para logaritmos con una base distinta a 10 o *e*

El método básico mediante el cual se aplica la propiedad 14.8 y el uso de logaritmos comunes o naturales también se puede usar para evaluar un logaritmo con alguna base distinta de 10 o *e*. Considere el siguiente ejemplo.

Ejemplo de salón de clases
Evaluar log 36.

EJEMPLO 11 Evaluar $\log_3 41$.

Solución

Sea $x = \log_3 41$. Cambie a forma exponencial para obtener

$$3^x = 41$$

Ahora puede aplicar la propiedad 14.8 y proceder de la siguiente manera

$$\log 3^x = \log 41$$
$$x \log 3 = \log 41$$

$$x = \frac{\log 41}{\log 3}$$

$$x = 3.3802 \quad \text{redondear a cuatro lugares decimales}$$

Por lo tanto, se afirma que 3 elevado a la potencia 3.3802 producirá aproximadamente 41. ¡Compruébelo!

El método del ejemplo 11 para evaluar $\log_a r$ produce la siguiente fórmula, que suele ser conocida como **fórmula de cambio de base para logaritmos**.

Propiedad 14.9

Si a, b y r son números positivos, con $a \neq 1$ y $b \neq 1$, entonces

$$\log_a r = \frac{\log_b r}{\log_b a}$$

Al usar la propiedad 14.9 puede determinar fácilmente una relación entre logaritmos de diferentes bases. Por ejemplo, suponga que en la propiedad 14.9 se hace $a = 10$ y $b = e$. Entonces,

$$\log_a r = \frac{\log_b r}{\log_b a}$$

se vuelve

$$\log_{10} r = \frac{\log_e r}{\log_e 10}$$

$$\log_e r = (\log_e 10)(\log_{10} r)$$

$$\log_e r = (2.3026)(\log_{10} r)$$

Por lo tanto, el logaritmo natural de cualquier número positivo es aproximadamente igual al logaritmo común del número por 2.3026.

Ahora puede usar una herramienta de graficación para graficar funciones logarítmicas tales como $f(x) = \log_2 x$. Al usar la fórmula de cambio de base, puede expresar esta función como $f(x) = \frac{\log x}{\log 2}$ o como $f(x) = \frac{\ln x}{\ln 2}$. La gráfica de $f(x) = \log_2 x$ se muestra en la figura 14.32.

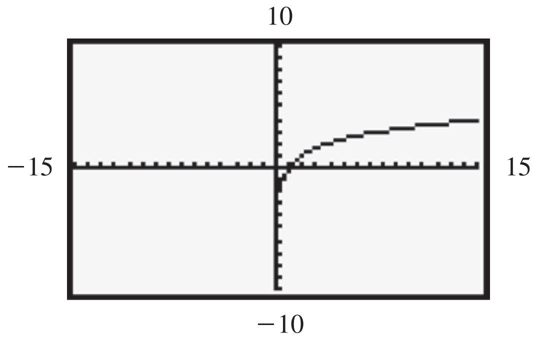


Figura 14.32

Finalmente, use un método gráfico para resolver una ecuación difícil de resolver con un método algebraico.

Ejemplo de salón de clases
Resolver la ecuación $(3x + 3^{-x})/4 = 2$.

EJEMPLO 12 Resolver la ecuación $(5^x - 5^{-x})/2 = 3$.

Solución

Primero, es necesario reconocer que las soluciones para la ecuación $(5^x - 5^{-x})/2 = 3$ son las abscisas al origen de la gráfica de la ecuación $y = (5^x - 5^{-x})/2 - 3$. Se puede usar una herramienta de graficación para obtener la gráfica de esta ecuación, como se muestra en la figura 14.33. Use las características ZOOM y TRACE para determinar que la gráfica cruza el eje x en aproximadamente 1.13. Por lo tanto, el conjunto solución de la expresión original es $\{1.13\}$.

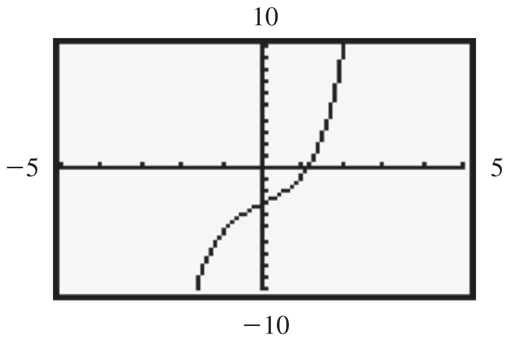


Figura 14.33

Examen de conceptos 14.6

Para los problemas 1-10, responder cierto o falso.

1. Para $x > 0$ y $y > 0$, si $\log_2 x = \log_2 y$, entonces $x = y$.
2. Para $x > 0$ y $y > 0$, si $x = y$, entonces $\ln x = \log y$.
3. La fórmula $Q = Q_0 e^{at}$ representa el decaimiento exponencial de una sustancia si $0 < a < 1$.
4. La fórmula $Q = Q_0 e^{at}$ representa el crecimiento exponencial de una sustancia si $a > 0$.
5. Un terremoto con número Richter de 7.0 es 10 veces más intenso que un terremoto con número Richter de 6.0.
6. $\log_3 7 = \dfrac{\ln 7}{\ln 3}$
7. La función $f(x) = \log_4 x$ puede expresarse como $f(x) = \dfrac{\log x}{\log 4}$.
8. La solución de una ecuación logarítmica no puede ser un número irracional.
9. Todas las soluciones de la ecuación $\log_b x + \log_b(x + 2) = 3$ deben ser números positivos.
10. El conjunto solución para $\ln(3x - 4) - \ln(x + 1) = \ln 2$ es $\{8\}$.

Conjunto de problemas 14.6

Para los problemas 1-20, resolver cada ecuación exponencial y expresar soluciones aproximadas a la centésima más cercana. (Objectivo 1)

1. $3^x = 13$
2. $2^x = 21$
3. $4^n = 35$
4. $5^n = 75$
5. $2^x + 7 = 50$
6. $3^x - 6 = 25$
7. $3^{x-2} = 11$
8. $2^{x+1} = 7$
9. $5^{3t+1} = 9$
10. $7^{2t-1} = 35$
11. $e^x = 27$
12. $e^x = 86$
13. $e^{x-2} = 13.1$
14. $e^{x-1} = 8.2$
15. $3e^x - 1 = 17$
16. $2e^x = 12.4$

17. $5^{2x+1} = 7^{x+3}$

18. $3^{x-1} = 2^{x+3}$

19. $3^{2x+1} = 2^{3x+2}$

20. $5^{x-1} = 2^{2x+1}$

Para los problemas 21-32, resolver cada ecuación logarítmica y expresar soluciones irracionales en la forma radical más baja. **(Objectivo 2)**

21. $\log x + \log(x + 21) = 2$

22. $\log x + \log(x + 3) = 1$

23. $\log(3x - 1) = 1 + \log(5x - 2)$

24. $\log(2x - 1) - \log(x - 3) = 1$

25. $\log(x + 1) = \log 3 - \log(2x - 1)$

26. $\log(x - 2) = 1 - \log(x + 3)$

27. $\log(x + 2) - \log(2x + 1) = \log x$

28. $\log(x + 1) - \log(x + 2) = \log \dfrac{1}{x}$

29. $\ln(2t + 5) = \ln 3 + \ln(t - 1)$

30. $\ln(3t - 4) - \ln(t + 1) = \ln 2$

31. log ! $\overline{x}$ 5 ! $\overline{\log x}$

32. $\log x^2 = (\log x)^2$

Para los problemas 33-42, aproximar cada logaritmo a tres lugares decimales. (El ejemplo 11 y/o la propiedad 14.9 deben serle de utilidad.) **(Objectivo 5)**

33. $\log_2 40$

34. $\log_2 93$

35. $\log_3 16$

36. $\log_3 37$

37. $\log_4 1.6$

38. $\log_4 3.2$

39. $\log_5 0.26$

40. $\log_5 0.047$

41. $\log_7 500$

42. $\log_8 750$

Para los problemas 43-55, resolver cada problema y exprese las respuestas a la décima más cercana a menos que se indique de otro modo. **(Objetivos 3, 4)**

43. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que \$750 se conviertan en \$1000 si se invierten a 6% de interés compuesto trimestral?

44. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que \$1000 se dupliquen, si se invierten a 6% de interés compuesto semestral?

45. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que \$2000 se dupliquen, si se invierten a 4% de interés compuesto continuo?

46. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que \$500 se tripliquen, si se invierten a 9% de interés compuesto continuo?

47. ¿Qué tasa de interés compuesto continuo se necesita para que una inversión de \$500 crezca a \$900 en 10 años?

48. ¿Qué tasa de interés compuesto continuo se necesita para que una inversión de \$2500 crezca a \$10 000 en 20 años?

49. Para cierta cepa de bacterias, el número de bacterias presente después de t horas está dada por la ecuación $Q = Q_0 e^{0.34t}$, donde Q_0 representa el número inicial de bacterias. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que 400 bacterias crezcan a 4000 bacterias?

50. Una pieza de maquinaria, valuada en \$30 000, se deprecia a una tasa de 10% anual. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que alance un valor de \$15 000?

51. La ecuación $P(a) = 14.7e^{-0.21a}$, donde a es la altitud sobre el nivel del mar medida en millas produce la presión atmosférica en libras por pulgada cuadrada. Si la presión atmosférica en Cheyenne, Wyoming, es aproximadamente 11.53 libras por pulgada cuadrada, encuentre la altitud de la ciudad sobre el nivel del mar. Exprese su respuesta a la centena de pie más cercana.

52. El número de gramos de cierta sustancia radiactiva presente después de t horas está dada por la ecuación $Q = Q_0 e^{-0.45t}$, donde Q_0 representa el número inicial de gramos. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que 2500 gramos se reduzcan a 1250 gramos?

53. Para cierto cultivo, la ecuación $Q(t) = Q_0 e^{0.4t}$, donde Q_0 es un número inicial de bacterias y t es el tiempo medido en horas, produce el número de bacterias como función del tiempo. ¿Cuánto tardarán 500 bacterias en aumentar a 2000?

54. Suponga que la ecuación $P(t) = P_0 e^{0.02t}$, donde P_0 representa una población inicial y t es el tiempo en años, se usa para predecir el crecimiento poblacional. ¿Cuánto tardará una ciudad de 50 000 en duplicar su población?

55. En 1971, un terremoto en Los Ángeles tuvo una intensidad de aproximadamente 5 millones de veces la intensidad de referencia. ¿Cuál fue el número Richter asociado con el terremoto?

56. En 1906, un terremoto en San Francisco alcanzó un número Richter de 8.3. ¿Cómo se compara su intensidad con la intensidad de referencia?

57. Calcule cuántas veces es más intenso un terremoto con un número Richter de 7.3, que un terremoto con un número Richter de 6.4.

58. Calcule cuántas veces es más intenso un terremoto con un número Richter de 8.9, que un terremoto con un número Richter de 6.2.

Pensamientos en palabras

59. Explique cómo determinar $\log_4 76$ sin usar la propiedad 14.9.

60. Explique el concepto de número Richter.

61. Explique cómo resolvería la ecuación $2^x = 64$ y también cómo resolvería la ecuación $2^x = 53$.

62. ¿De qué modo se comparan los logaritmos con base 9 con los logaritmos con base 3? Explique cómo llegó a esta conclusión.

Más investigación

63. Use el abordaje del ejemplo 11 para desarrollar la propiedad 14.9.

64. Sea $r = b$ en la propiedad 14.9 y verifique que $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

65. Resuelva la ecuación $\dfrac{5^x - 5^{-x}}{2} = 3$. Exprese su respuesta a la centésima más cercana.

66. Resuelva la ecuación $y = \dfrac{10^x + 10^{-x}}{2}$ para x en términos de y.

67. Resuelva la ecuación $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ para x en términos de y.

Actividades con calculadora graficadora

68. Compruebe sus respuestas a los problemas 17-20 al graficar la función adecuada y encontrar la abscisa al origen.

69. Grafique $f(x) = x$, $f(x) = 2^x$ y $f(x) = \log_2 x$ sobre el mismo conjunto de ejes.

70. Grafique $f(x) = x$, $f(x) = (0.5)^x$ y $f(x) = \log_{0.5} x$ sobre el mismo conjunto de ejes.

71. Grafique $f(x) = \log_2 x$. Ahora prediga las gráficas para $f(x) = \log_3 x$, $f(x) = \log_4 x$ y $f(x) = \log_8 x$. Grafique estas tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes con $f(x) = \log_2 x$.

72. Grafique $f(x) = \log_5 x$. Ahora prediga las gráficas para $f(x) = 2\log_5 x$, $f(x) = -4\log_5 x$ y $f(x) = \log_5(x + 4)$. Grafique estas tres funciones sobre el mismo conjunto de ejes con $f(x) = \log_5 x$.

73. Use los métodos gráfico y algebraico para resolver la ecuación $\dfrac{2^x - 2^{-x}}{3} = 4$.

Respuestas al examen de conceptos

1. Cierto **2.** Falso **3.** Falso **4.** Cierto **5.** Cierto **6.** Cierto **7.** Cierto **8.** Falso **9.** Cierto **10.** Falso

Apéndice

A Problemas verbales adicionales

Estos problemas están catalogados y hacen referencia a los números de secciones para que los estudiantes tengan las herramientas adecuadas para resolverlos. Por ejemplo, el primer problema es un "problema de números" y puede resolverse mejor después de que se ha estudiado la sección 3.2.

Problemas de números

1. (3.2) Diecisiete sumado a cierta cantidad da 33. Hallar el número.

2. (3.2) Seis restado de cierta cantidad produce 19. Hallar el número.

3. (3.2) Si se suma 3 a cuatro veces cierto número, el resultado es 23. Hallar el número.

4. (3.2) Si se resta 2 de cinco veces cierto número, el resultado es 4. ¿Cuál es el número?

5. (3.2) Si seis veces cierto número es restado de 15, el resultado es 3. Halar el número.

6. (3.3) Encontrar dos números enteros consecutivos cuya suma sea 67.

7. (3.3) Encontrar dos números reales consecutivos cuya suma sea -83.

8. (3.3) Encontrar tres números pares consecutivos cuya suma sea 72.

9. (3.3) Encontrar tres números impares consecutivos cuya suma sea 147.

10. (3.3) Uno más que dos veces cierto número es cinco veces menos que cuatro veces el número. Hallar el número.

11. (3.3) Dos menos que tres veces cierto número es uno más que cuatro veces el número. Hallar el número.

12. (3.3) Encontrar dos números enteros consecutivos de tal forma que tres veces el número más pequeño más cuatro veces el número más grande dé un total 137.

13. (3.4) Encontrar tres números enteros consecutivos de tal forma que si se resta el número más grande de la suma de los otros dos números, el resultado sea 48.

14. (3.4) La suma de un número y dos tercios del número es 15. Hallar el número.

15. (3.4) La suma de la mitad de un número y tres cuartas partes del número es 40. Hallar el número.

16. (3.4) Si tres octavos de un número es restado de cinco sextos del número, el resultado es 22. Hallar el número.

17. (3.4) Si la suma de un octavo de un número y un sexto del número es restado de tres cuartos del número, el resultado es 33. Hallar el número.

18. (6.5) Encontrar dos números cuyo producto sea 28, y uno de los números es uno menos que el doble del otro número.

19. (6.5) Encontrar dos números cuyo producto sea 24, y uno de los números es dos menos que cinco veces el otro número.

20. (6.5) Suponga que la suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 61. Hallar los números.

21. (6.5) Suponga que la suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 34. Hallar los números.

22. (7.5) La suma de dos números es 57. Si el número más grande se divide entre el número más pequeño, el cociente es 2 y el residuo es 3. Hallar los números.

23. (7.5) La diferencia de dos números es 47. Si el número más grande se divide entre el número más pequeño, el cociente es 6 y el residuo es 2. Hallar los números.

24. (7.5) El denominador de una fracción es uno más que el numerador. Si se duplica el numerador y se le suma 4 al denominador, la fracción resultante es equivalente a 1. Hallar la fracción original.

25. (7.5) ¿Qué número debe restarse del numerador y el denominador de $\frac{28}{37}$ para producir una fracción equivalente a $\frac{8}{11}$?

26. (7.6) Si el recíproco de un número restado del número da $\frac{4}{5}$, hallar el número.

27. (7.6) Suponga que el recíproco d un número restado del número da $-\frac{7}{12}$. Hallar el número.

28. (7.6) La suma de un número y tres veces su recíproco es $\frac{1}{2}$. Hallar el número.

29. (7.6) El recíproco de un número es $\frac{5}{6}$ mayor que el número. Hallar el número.

30. (8.7) La suma de dos números es 78, y si se resta el número más pequeño al número más grande produce 6. Hallar los números.

31. (8.7) La diferencia entre dos números es 27. Si tres veces el número más pequeño es restado del número más grande, el resultado des -1. Hallar los números.

32. (8.7) La suma de dos números es 102. Si el número más grande es restado de 6 veces el número más pequeño, el resultado es igual al número más pequeño. Hallar los números.

33. (8.7) La suma de dos números es 99 y la diferencia de los números es 35. Hallar los números.

34. (8.7) Encontrar dos números de tal manera que 4 veces el número más pequeño menos el número más grande sea 64, y el doble del número más pequeño más el número más grande sea 176.

35. (10.5) Encontrar dos números de tal manera que su suma sea 10 y su producto sea 22.

36. (10.5) Encontrar dos números enteros consecutivos de tal manera que la suma de sus cuadrados sea 145.

37. (10.5) Suponga que la suma de dos números enteros es 9 y la suma de sus recíprocos es $\frac{1}{2}$. Hallar los números.

Problemas de desigualdades

38. (4.5) Cuatro menos que tres veces un número es mayor que 9. Hallar todos los números que satisfacen esta relación.

39. (4.5) Cinco más que dos veces un número es menor que o igual a 21. Hallar los números que satisfacen esta relación.

40. (4.5) Uno menos que seis veces un número es menor que el doble del número más 11. Hallar los números que satisfacen esta relación.

41. (4.5) Jose obtuvo 87, 89 y 92 en sus primeros tres exámenes de álgebra. ¿Qué calificación debe obtener en el cuarto examen para obtener un promedio de 90 o mayor?

42. (4.5) Ola obtuvo 89, 92, 96 y 98 en sus primeros cuatro exámenes de biología. ¿Qué calificación debe obtener en el quinto examen para tener un promedio de 95 o mayor?

43. (4.5) Justin tiró rondas de 81 y 82 en los primeros dos días de un torneo de golf. ¿Cuánto debe tirar en el tercer día para promediar 80 o menor en los tres días?

44. (4.5) Gabrielle obtuvo 148 y 166 en sus primeros dos juegos de bolos. ¿Cuánto debe obtener en el tercer juego para promediar al menos 160 entre los tres juegos?

Problemas geométricos

45. (3.2) El largo de una caja rectangular mide 34 centímetros. El largo mide 4 centímetros más que tres veces su ancho. Hallar el ancho de la caja.

46. (3.3) El ancho de una hoja de papel rectangular mide 8 pulgadas. Su ancho mide una pulgada más que la mitad del ancho. Hallar el largo de la hoja de papel.

47. (3.3) Un ángulo de un triángulo mide 75°. Encontrar las medidas de los otros dos ángulos si uno de ellos mide el doble del otro.

48. (3.3) Si dos ángulos son suplementarios y la diferencia entre sus medidas es 56°, hallar la medida de cada ángulo.

49. (3.3) Uno de dos ángulos complementarios mide 6° menos que tres veces el otro ángulo. Hallar la medida de cada ángulo.

50. (3.4) La suma del complemento de un ángulo y la mitad del suplemento de ese ángulo es 90°. Hallar la medida del ángulo.

51. (3.4) En un triángulo ABC, la medida del ángulo C es 6° menos que tres veces la medida del ángulo A, y la medida del ángulo B es 26° más que la medida del ángulo A. Encontrar la medida de cada ángulo del triángulo.

52. (3.5) El suplemento de un ángulo es 15° menos que cuatro veces su complemento. Encontrar la medida del ángulo.

53. (3.5) El largo de un rectángulo mide 1 pulgada más que el doble de su ancho. Si el perímetro del rectángulo es 44 pulgadas, hallar el largo y el ancho.

54. (3.5) El ancho de un rectángulo mide 7 centímetros menos que su largo. Si el perímetro del rectángulo es 70 centímetros, hallar el largo y el ancho.

55. (3.5) Un terreno triangular está delimitado por 34 yardas de cerca. El lado más largo del triángulo mide 1 yarda más que el doble del lado más corto. El otro lado mide 5 yardas más que el lado más corto. Encontrar la longitud de cada lado del terreno triangular.

56. (3.5) Suponga que un cuadrado y un triángulo equilátero tienen el mismo perímetro. Si cada lado del triángulo mide 4 pulgadas más que cada lado del cuadrado, encontrar la longitud de cada lado del cuadrado.

57. (3.5) Suponga que el perímetro de un cuadrado mide 17 centímetros más que el perímetro de un tríangulo equilátero. Si cada lado del triángulo mide 3 centímetros menos que cada lado del cuadrado, encontrar la longitud de cada lado del triángulo.

58. (6.5) El área de un jardín rectangular mide 40 metros cuadrados. El largo del jardín mide 3 metros más que su ancho. Encontrar el largo y ancho del jardín.

59. (6.5) El área de una hoja triangular de papel mide 18 pulgadas cuadradas. El largo de un lado del triángulo mide 1 pulgada más que el doble de su altura a ese lado. Encontrar la longitud de ese lado y la longitud de la altura a ese lado.

60. (10.5) La suma de los dos catetos de un triángulo es 21 pulgadas. Si la longitud de la hipotenusa es 15 pulgadas, hallar la longitud de cada cateto.

61. (10.5) El largo de un piso rectangular mide 1 metro menos que el doble de su ancho. Si una diagonal del rectángulo mide 17 metros, hallar el largo y el ancho del piso.

62. (10.5) Un terreno rectangular mide 12 metros por 20 metros y está rodeado por una banqueta de ancho uniforme. El área de la banqueta es 68 metros cuadrados. Hallar el ancho de la banqueta.

63. (10.5) El perímetro de un rectángulo es 44 pulgadas y su área es 112 pulgadas cuadradas. Encontrar el largo y el ancho del rectángulo.

64. (10.5) Una pieza rectangular de cartón mide 2 unidades más de largo que de ancho. De cada una de las esquinas, se recorta un cuadrado de dos unidades por lado. Las solapas se voltean para formar una caja abierta cuyo volumen es 70 unidades cúbicas. Hallar el largo y el ancho de la pieza original de cartón.

Problemas de inversiones

65. (3.5) Eva invirtió cierta cantidad de dinero al 5% de interés y $1500 más que esa cantidad al 6%. Su ingreso total anual fue de $420. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

66. (3.5) Se invirtió un total de $4000, parte a 8% y el resto a 9%. Si el total de ingreso fue de $350, ¿cuánto se invirtió a cada tasa?

67. (3.5) Si se invirtieron $500 al 6% de intereses, ¿cuánto más dinero se debe invertir al 9% para que el ingreso total por ambas inversiones promedie 8%?

68. (3.5) La suma de $2000 se divide entre dos inversiones, una que paga el 7% de intereses y la otra 8%. Si el ingreso de la inversión al 8% excede la de 7% por $40 al año, ¿cuánto se invirtió en cada tasa?

69. (10.5) Tony compró cierta cantidad de acciones por $720. Un mes después, el valor de las acciones incrementó un 8% por acción y vendió todas, menos 20, y recuperó su inversión original más una ganancia de $80. ¿Cuántas acciones vendió y a cuánto vendió cada una?

70. (10.5) Barry compró un número de acciones por $600. Una semana después, el valor incrementó $3 por acción y vendió todas, menos 10, y recuperó su inversión de $600. ¿Cuántas acciones vendió y a cuánto vendió cada una?

71. (10.5) Una mujer de negocios compró un terreno a $120, 000. Dividió la tierra en lotes y, cuando hubo vendido todos menos 18 lotes a una ganancia de $6000 por lote, recuperó el costo total de la tierra. ¿Cuántos lotes vendió y cuál era el precio de cada uno?

Problemas de razón y proporción

72. (4.1) Un plano tiene una escala en la cual 1 pulgada representa 4 pies. Encontrar las dimensiones de un cuarto rectangular que mide 3.5 pulgadas por 4.25 pulgadas en el plano.

73. (4.1) En cierto mapa, 1 pulgada representa 20 millas. Si dos ciudades están a 6.5 pulgadas de distancia en el mapa, hallar el número de millas entre las ciudades.

74. (4.1) Si un automóvil viaja 200 millas usando 10 galones de gasolina, ¿qué tan lejos viajará con 15 galones de gasolina?

75. (4.1) Una casa valuada en $150,000 se evalúa por $3000 en impuestos de predial. Con la misma tasa, ¿cuánto costarán los impuestos de una casa con valor de $200,000?

76. (4.1) Si 20 libras de un fertilizante cubren 1400 pies cuadrados de césped, ¿cuántas libras se necesitarán para 1750 pies cuadrados?

77. (4.1) Una tabla de 24 pies de largo es cortada en dos piezas cuyas longitudes están en la razón 2 a 3. Hallar las longitudes de las dos piezas.

78. (4.1) En cierto mapa, $1\frac{1}{2}$ pulgadas representan 25 millas. Si dos ciudades están a $5\frac{1}{4}$ pulgadas de distancia en el mapa, hallar el número de millas entre las ciudades.

79. (4.1) La suma de $750 debe dividirse entre dos personas en la razón tres a dos. ¿Cuánto recibirá cada persona?

80. (4.1) La razón de estudiantes mujeres con estudiantes hombres en cierta universidad es de cinco a tres. Si hay un total de 4400 estudiantes, hallar el número de estudiantes mujeres y el número de estudiantes hombres.

Problemas de porcentajes

81. (4.2) ¿Veintiuno es qué porcentaje de 70?

82. (4.2) ¿Cuarenta y seis es qué porcentaje de 40?

83. (4.2) ¿Ochenta por ciento de qué número es 60?

84. (4.2) ¿Ciento diez por ciento de qué número es 60.5?

85. (4.2) ¿Doscientos veinte por ciento de qué número es 198?

86. (4.3) Louise compró un vestido por \$36.40, lo que representa un descuento del \$30 del precio original. Hallar el precio original del vestido.

87. (4.3) Hallar el costo de una camisa de \$75 que tiene un descuento del 20%.

88. (4.3) Ely compró un putter por \$72 cuyo precio original era de \$120. ¿Qué tasa de descuento recibió?

89. (4.3) Dominic compró un traje por \$162.50 cuyo precio original era de \$250. ¿Qué tasa de descuento recibió?

90. (4.3) Un vendedor tiene algunos guantes de gold que le costaron \$5 cada uno. Quiere venderlos con una ganancia del 60% del costo. ¿Cuál debe ser el precio de venta de los guantes de golf?

91. (4.3) Una vendedora tiene algunas faldas que le costaron \$25 cada una. Quiere venderlas con una ganancia del 45% del costo. ¿Cuál debe ser el precio de venta de las faldas?

92. (4.3) El gerente de una librería compra algunos libros por \$22 cada uno. Quiere venderlos con una ganancia del 20% basado en el precio de venta. ¿Cuál debe ser el precio de venta de los libros?

93. (4.3) El gerente de un supermercado compra algunas manzanas por \$0.80 por libra. Quiere venderlas con una ganancia del 50% basado en el precio de venta. ¿Cuál debe ser el precio de venta de las manzanas?

Problemas de movimiento uniforme

94. (3.5) Dos automóviles salen del mismo lugar y viajan en direcciones opuestas. Un automóvil viaja 7 millas por hora más rápido que el otro automóvil. Si tras 3 horas están a 369 millas de distancia, hallar la rapidez de cada automóvil.

95. (3.5) Dos ciudades, A y B, están a 406 millas de distancia. Billie sale de la ciudad A en su automóvil hacia la ciudad B a 52 millas por hora. Al mismo tiempo, usando la misma ruta, Zorka sale en su automóvil de la ciudad B viajando hacia la ciudad A a 64 millas por hora. ¿Cuánto tiempo les tomará encontrarse?

96. (3.5) Marcina comienza a correr a 4 millas por hora. Media hora después, Gordon comienza a correr por la misma ruya a 6 millas por hora. ¿Cuánto le tomará a Gordon alcanzar a Marcina?

97. (3.5) En $\frac{1}{4}$ de una hora, Jack, manejando su bicicleta a 12 millas por hora, condujo 6 millas más lejos que Nikki, quien conducía su bicicleta a 10 millas por hora. ¿Cuánto tiempo condujo Jack?

98. (7.5) Kent conduce su bicicleta 36 millas en el mismo tiempo que le toma a Kaitlin conducir su bicicleta 27 millas. Si Kent conduce 3 millas por hora más rápido que Kaitlin, hallar la rapidez de cada uno.

99. (7.5) Para caminar 7 millas, le toma a Dave $1\frac{1}{2}$ horas más de lo que le toma a Simon caminar 6 millas. Si Simone camina a una rapidez de 1 milla por hora más rápido que Dave, hallar los tiempos y las rapideces de ambos.

100. (7.6) Debbie condujo su bicicleta en el campo por 24 millas. De regreso, tomó una ruta de 12 millas y regresó en media hora menos de lo que le tomó el camino de ida. Si de ida fue a 4 millas por hora más rápido que de regreso, hallar ambas rapideces.

101. (7.6) Felipe trota por 10 millas y después camina otras 10 millas. Trota $2\frac{1}{2}$ millas por hora más rápido de lo que camina, y la distancia total de 20 millas le toma 6 horas. Hallar la rapidez a la que camina y la rapidez a la que trota.

102. (10.5) En un viaje de 570 millas, Andy promedió 5 millas por hora más rápido por las últimas 240 millas que lo que hizo las primeras 330 millas. Todo el viaje tomó 10 horas. ¿Cuán rápido viajó durante las primeras 330 millas?

103. (10.5) En una excursión de 135 millas, Maria promedió 5 millas por hora más rápido durante las primeras 60 millas de lo que hizo durante las últimas 75 millas. Todo el viaje tomó 8 horas. Hallar su rapidez durante las primeras 60 millas.

104. (10.5) Charlotte viajó 250 millas en 1 hora más de lo que le tomó a Lorraine viajar 180 millas. Charlotte manejó 5 millas por hora más rápido que Lorraine. ¿Cuán rápido viajó cada una?

Problemas de mezclas

105. (3.5) ¿Cuántos litros de alcohol puro deben agregarse a 10 litros de una solución al 30% para obtener una solución al 50%?

106. (3.5) ¿Cuántas tazas de jugo de toronja se le deben agregar a 40 tazas de ponche que contienen 5% de jugo de toronja para obtener un ponche que sea 10% jugo de toronja?

107. (3.5) ¿Cuántos mililitros de ácido puro se le deben agregar a 150 mililitros al 30% de solución de ácido para obtener una solución al 40%?

108. (3.5) ¿Cuántos galones de una solución salina al 12% deben mezclarse con 6 galones de solución salina al 20% para obtener una solución salina al 15%?

109. (3.5) Suponga que 10 galones de solución salina al 10% se mezclan con 20 galones de solución salina al 50%. ¿Cuál es el porcentaje de sal en la solución final?

110. (3.5) Suponga que tiene una solución de alcohol al 30% y otra al 70%. ¿Cuántos cuartos de cada una deben mezclarse para producir 20 cuartos que sean 40% alcohol?

Problemas de trabajo

111. (7.6) Susan puede hacer un trabajo en 20 minutos y Ellen puede hacer el mismo trabajo en 30 minutos. Si trabajan juntas, ¿cuánto les tomará completar el trabajo?

112. (7.6) Trabajando juntos, Ramon y Sean pueden podar un jardín en 15 minutos. Ramon puede podarlo en 25 minutos. ¿Cuánto le tomaría a Sean podar el jardín él solo?

113. (7.6) Se requieren dos tuberías para llenar un tanque de agua en $1\frac{1}{5}$ horas. La tubería B puede llenar el tanque sola en 1 hora menos de lo que le toma a la tubería A llenar el tanque sola. ¿Cuánto le tomaría a cada tubería llenar el tanque?

114. (7.6) Una tubería de entrada puede llenar un tanque en 10 minutos. Un desagüe puede vaciar el tanque en 12 minutos. Si el tanque está vacío y ambas tuberías están abiertas, ¿cuánto tiempo pasará antes de que el tanque se desborde?

115. (10.5) Le toma a Terry 2 horas más hacer cierto trabajo de lo que le toma a Tom. Trabajaron juntos por 3 horas; después Tom se fue y Terry terminó el trabajo en 1 hora. ¿Cuánto les tomaría hacer el trabajo solos?

116. (10.5) Suponga que Arlene puede podar el césped en 40 minutos menos con la podadora eléctrica de lo que tarda con la podadora manual. Un día, la podadora eléctrica se rompe tras 30 minutos de trabajo. Terminó de podar el césped con la podadora manual en 20 minutos. ¿Cuánto le toma a Arlene podar el césped con la podadora eléctrica?

Problemas con monedas

117. (3.4) Simon tiene 40 monedas consistiendo en monedas de 1, 5 y 10 centavos. Tiene tres veces más monedas de cinco centavos que de uno, y cuatro veces más monedas de diez centavos que de uno. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene?

118. (3.4) Carson tiene 30 monedas consistiendo en monedas de 5 y 10 centavos, que suman \$2.30. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene Carson?

119. (3.4) Karl tiene 104 monedas consistiendo en monedas 1, 5 y 10 centavos. El número de monedas de diez centavos es dos tercios el número de monedas de un centavo, y el número de monedas de 5 centavos es la mitad del número de monedas de un centavo. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene Karl?

120. (3.4) Amanda tiene \$12.50 en monedas de cinco, diez y veinticinco centavos. Tiene la mitad de monedas de diez centavos que de monedas de veinticinco centavos, y el número de monedas de cinco centavos es un cuarto del número de monedas de veinticinco centavos. Hallar el número de monedas de cada tipo.

121. (3.4) Pierre tiene 95 monedas consistiendo en monedas de 1, 5 y 10 centavos. El número de monedas de cinco centavos es 10 menos que el número de monedas de un centavo, y el número de monedas de diez centavos es 15 menos que el doble del número de monedas de un centavo. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene Pierre?

122. (3.4) Mona tiene 23 monedas consistiendo en monedas de 10 y 25 centavos que suman \$4.55. El número de monedas de veinticinco centavos es una menos que el doble del número de monedas de diez centavos. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene?

123. (3.4) Chen tiene algunas monedas de 5, 10 y 25 centavos en su bolsillo que suman \$11.85. El número de monedas de diez centavos es una más que el doble del número de monedas de cinco centavos, y hay 10 monedas de veinticinco centavos más que monedas de diez centavos. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene en su bolsillo?

Problemas diversos

124. (3.2) Cheryl trabajó 7 horas en sábado y ganó \$66.50. ¿Cuánto ganó por hora?

125. (3.2) Un libro de matemáticas cuesta \$85. Esto es \$5 más que cuatro veces el precio del cuaderno de trabajo. Hallar el precio del cuaderno de trabajo.

126. (3.2) La cuenta por reparar una podadora, sin impuesto, fue de \$75. Esto incluyó \$15 por las partes y por 2 horas de trabajo. Hallar el precio por hora de trabajo.

127. (3.2) En unas promociones de supermercado, uno podía comprar cuatro paquetes de 12 sodas por \$10. Esto representaba un ahorro de \$4.76 del precio regular por cuatro paquetes de 12 sodas. Hallar el precio regular por paquete.

128. (3.3) Una calculadora y un libro de matemáticas costaban \$85 en la librería de la universidad. El precio del libro de texto era \$5 más que tres veces el precio de la calculadora. Hallar el precio del libro de texto.

129. (3.3) En una elección local reciente, votaron 80 demócratas más que republicanos. Juntos, votaron 1380 republicanos y demócratas. ¿Cuántos demócratas votaron?

130. (3.3) En una primaria local, hay 40 niñas más que niños. El número total de estudiantes es 680. ¿Cuántas niñas hay en esa escuela?

131. (3.3) Zorka vendió algunas acciones a $37 cada una. Esto fue $9 por acción menos que el doble de lo que pagó ella. ¿Cuánto pagó ella?

132. (3.3) A Michael se le paga el doble de su tarifa por hora normal por cada hora que trabaja después de 40 horas en una semana. La semana pasada ganó $552 por 43 horas de trabajo. ¿Cuál es su tarifa normal por hora?

133. (3.4) A Nicole se le paga tiempo y medio por cada hora de trabajo después de las 40 horas en una semana. La semana pasada trabajó 45 horas y le pagaron $484.50. Hallar la tarifa por hora normal de Nicole.

134. (6.5) Nate planta 65 árboles de manzanas en un plantío rectangular de tal manera que el número de árboles por fila es dos menos que tres veces el número de filas. Hallar el número de filas y el número de árboles por fila.

135. (6.5) En un salón de 48 bancas, el número de bancas por fila es dos más que el número de filas. Hallar el número de filas y el número de bancas por fila.

136. (8.7) En un puesto de frutas, dos libras de manzanas Gala y 3 libras de manzanas Fiji cuestan $6.55. Una libra de manzanas Gala y 4 libras de manzanas Fiji cuestan $5.75. Hallar el precio por libra de cada tipo de manzana.

137. (8.7) Seis rollos de cinta y un paquete de sobres cuestan $12.03. Cuatro rollos de cinta y 3 paquetes de sobres cuestan $12.43. Hallar el precio del rollo de cinta.

138. (8.7) La tienda tiene una promoción en los cereales. Dos cajas de hojuelas de maíz y 3 cajas de hojuelas de trigo cuestan $13.25. Tres cajas de hojuelas de maíz y dos cajas de hojuelas de trigo cuestan $12.65. Hallar el precio por caja de hojuelas de maíz y el precio por caja de hojuelas de trigo.

139. (10.5) Un hombre hizo un trabajo por $360. Le tomó 6 horas más de lo esperado, por lo que ganó $2 por hora menos de lo que había anticipado. ¿En cuánto tiempo esperaba terminar el trabajo?

140. (10.5) Un grupo de estudiantes accedió que cada quien contribuiría con la misma cantidad para pagar una fiesta que costaría $100. Después encontraron 5 estudiantes más que estaban interesados en la fiesta y en compartir los gastos. Esto disminuyó la cantidad que cada uno debía pagar por $1. ¿Cuántos estudiantes estaban involucrados en la fiesta y cuánto tuvo que pagar cada uno?

141. (10.5) Un grupo de comensales accedió a que cada uno contribuiría con la misma cantidad para comprarle a su mesera favorita un regalo de cumpleaños de $100. Al último momento, dos comensales decidieron no pagar su parte. Esto aumentó la cantidad que el resto de los comensales tuvo que pagar por $2.50 cada uno. ¿Cuántas personas sí contribuyeron para comprar el regalo?

142. (10.5) Una vendedora compró cierto número de tazas especiales por $48. Dos de las tazas se rompieron en la tienda, pero al vender las otras tazas a $3 sobre el costo original por taza, logró conseguir una ganancia de $22. ¿Cuántas tazas compró y a cuánto vendió cada una?

143. (10.5) A cierto punto a 16 yardas de la base de una torre, la distancia a la punta de la torre mide 4 yardas más que la altura de la torre. Hallar la altura de la torre.

Sección de respuestas

Capítulo 1

Conjunto de problemas 1.1 (página 6)

1. 16 **3.** 35 **5.** 51 **7.** 72 **9.** 82 **11.** 55 **13.** 60 **15.** 66 **17.** 26 **19.** 2 **21.** 47 **23.** 21 **25.** 11 **27.** 15 **29.** 14 **31.** 79 **33.** 6 **35.** 74 **37.** 12 **39.** 187 **41.** 884 **43.** 9 **45.** 18 **47.** 55 **49.** 99 **51.** 72 **53.** 11 **55.** 48 **57.** 21 **59.** 40 **61.** 170 **63.** 164 **65.** 153 **71.** $36 + 12 \div (3 + 3) + 6 \cdot 2$ **73.** $36 + (12 \div 3 + 3) + 6 \cdot 2$

Conjunto de problemas 1.2 (página 12)

1. Cierto **3.** Falso **5.** Cierto **7.** Cierto **9.** Cierto **11.** Falso **13.** Cierto **15.** Falso **17.** Cierto **19.** Falso **21.** 3 y 8 **23.** 2 y 12 **25.** 4 y 9 **27.** 5 y 10 **29.** 1 y 9 **31.** Primo **33.** Primo **35.** Compuesto **37.** Primo **39.** Compuesto **41.** $2 \cdot 59$ **43.** $3 \cdot 67$ **45.** $5 \cdot 17$ **47.** $3 \cdot 3 \cdot 13$ **49.** $3 \cdot 43$ **51.** $2 \cdot 13$ **53.** $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ **55.** $7 \cdot 7$ **57.** $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$ **59.** $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ **61.** $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ **63.** 4 **65.** 8 **67.** 9 **69.** 12 **71.** 18 **73.** 12 **75.** 24 **77.** 48 **79.** 140 **81.** 392 **83.** 168 **85.** 90 **89.** Todos los números pares son divisibles entre 2 **91.** 61 **93.** x **95.** xy

Conjunto de problemas 1.3 (página 19)

1. 2 **3.** −4 **5.** −7 **7.** 6 **9.** −6 **11.** 8 **13.** −11 **15.** −15 **17.** −7 **19.** −31 **21.** −19 **23.** 9 **25.** −61 **27.** −18 **29.** −92 **31.** −5 **33.** −13 **35.** 12 **37.** 6 **39.** −1 **41.** −45 **43.** −29 **45.** 27 **47.** −65 **49.** −29 **51.** −11 **53.** −1 **55.** −8 **57.** −13 **59.** −35 **61.** −15 **63.** −32 **65.** 2 **67.** −4 **69.** −31 **71.** −9 **73.** 18 **75.** 8 **77.** −29 **79.** −7 **81.** 15 **83.** 1 **85.** 36 **87.** −39 **89.** −24 **91.** 7 **93.** −1 **95.** 10 **97.** 9 **99.** −17 **101.** −3 **103.** −10 **105.** −3 **107.** 11 **109.** 5 **111.** −65 **113.** −100 **115.** −25 **117.** 130 **119.** 80 **121.** $-17 + 14 = -3$ **123.** $3 + (-2) + (-3) + (-5) = -7$ **125.** $-2 + 1 + 3 + 1 + (-2) = 1$

Conjunto de problemas 1.4 (página 26)

1. −30 **3.** −9 **5.** 7 **7.** −56 **9.** 60 **11.** −12 **13.** −126 **15.** 154 **17.** −9 **19.** 11 **21.** 225 **23.** −14 **25.** 0 **27.** 23 **29.** −19 **31.** 90 **33.** 14 **35.** Indefinido **37.** −4 **39.** −972 **41.** −47 **43.** 18 **45.** 69 **47.** 4 **49.** 4 **51.** −6 **53.** 31 **55.** 4 **57.** 28 **59.** −7 **61.** 10 **63.** −59 **65.** 66 **67.** 7 **69.** 69 **71.** −7 **73.** 126 **75.** −70 **77.** 15 **79.** −10 **81.** −25 **83.** 77 **85.** 104 **87.** 14 **89.** $800(19) + 800(2) + 800(4)(-1) = 13{,}600$ **91.** $5 + 4(-3) = -7$

Conjunto de problemas 1.5 (página 33)

1. Propiedad distributiva
3. Propiedad asociativa de la adición
5. Propiedad conmutativa de la multiplicación
7. Propiedad del inverso aditivo
9. Propiedad de identidad de la suma
11. Propiedad asociativa de la multiplicación **13.** 56 **15.** 7 **17.** 1800 **19.** −14,400 **21.** −3700 **23.** 5900 **25.** −338 **27.** −38 **29.** 7 **31.** $-5x$ **33.** $-3m$ **35.** $-11y$ **37.** $-3x - 2y$ **39.** $-16a - 4b$ **41.** $-7xy + 3x$ **43.** $10x + 5$ **45.** $6xy - 4$ **47.** $-6a - 5b$ **49.** $5ab - 11a$ **51.** $8x + 36$ **53.** $11x + 28$ **55.** $8x + 44$ **57.** $5a + 29$ **59.** $3m + 29$ **61.** $-8y + 6$ **63.** −5 **65.** −40 **67.** 72 **69.** −18 **71.** 37 **73.** −74 **75.** 180 **77.** 34 **79.** −65 **85.** Equivalente **87.** No equivalente **89.** No equivalente

Capítulo 1 Problemas de muestra (página 35)

1. 5, 7, 9, 11, 13, 15 **2.** Sí **3.** 20 **4.** $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ **5.** 15 **6.** 120 **7.** −8 **8.** −32 **9.** −3 **10.** 322 libras **11.** Propiedad asociativa de la multiplicación **12.** $-11a - b$ **13.** 14

Capítulo 1 Conjunto de problemas de repaso (página 37)

1. −3 **2.** −25 **3.** −5 **4.** −15 **5.** −1 **6.** 2 **7.** −156 **8.** 252 **9.** 6 **10.** −13 **11.** Primo **12.** Compuesto **13.** Compuesto **14.** Compuesto **15.** Compuesto **16.** $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ **17.** $3 \cdot 3 \cdot 7$ **18.** $3 \cdot 19$ **19.** $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ **20.** $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$ **21.** 18 **22.** 12 **23.** 180 **24.** 945 **25.** 66 **26.** −7 **27.** −2 **28.** 4 **29.** −18 **30.** 12 **31.** −34 **32.** −27 **33.** −38 **34.** −93 **35.** 2 **36.** 3 **37.** 35 **38.** 27 **39.** 175°F **40.** 20,602 feet **41.** $2(6) - 4 + 3(8) - 1 = 31$ **42.** \$3444 **43.** $8x$ **44.** $-5y - 9$ **45.** $-5x + 4y$ **46.** $13a - 6b$ **47.** $-ab - 2a$ **48.** $-3xy - y$ **49.** $10x + 74$ **50.** $2x + 7$ **51.** $-7x - 18$ **52.** $-3x + 12$ **53.** $-2a + 4$ **54.** $-2a - 4$ **55.** −59 **56.** −57 **57.** 2 **58.** 1 **59.** 12 **60.** 13 **61.** 22 **62.** 32 **63.** −9 **64.** 37 **65.** −39 **66.** −32 **67.** 9 **68.** −44

Capítulo 1 Examen (página 39)

1. 7 **2.** 45 **3.** 38 **4.** −11 **5.** −58 **6.** −58 **7.** 4 **8.** −1 **9.** −20 **10.** −7 **11.** −6°F **12.** 26 **13.** −36 **14.** 9 **15.** −57 **16.** −47 **17.** −4 **18.** Primo **19.** $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ **20.** 12 **21.** 72
22. Propiedad asociativa de la adición
23. Propiedad distributiva **24.** $-13x + 6y$ **25.** $-13x - 21$

Capítulo 2

Conjunto de problemas 2.1 (página 48)

1. $\frac{2}{3}$ **3.** $\frac{2}{3}$ **5.** $\frac{5}{3}$ **7.** $-\frac{1}{6}$ **9.** $-\frac{3}{4}$ **11.** $\frac{27}{28}$ **13.** $\frac{6}{11}$

15. $\frac{3x}{7y}$ **17.** $\frac{2x}{5}$ **19.** $-\frac{5a}{13c}$ **21.** $\frac{8z}{7x}$ **23.** $\frac{5b}{7}$ **25.** $\frac{15}{28}$

27. $\frac{10}{21}$ **29.** $\frac{3}{10}$ **31.** $-\frac{4}{3}$ **33.** $\frac{7}{5}$ **35.** $-\frac{3}{10}$ **37.** $\frac{1}{4}$

39. -27 **41.** $\frac{35}{27}$ **43.** $\frac{8}{21}$ **45.** $-\frac{5}{6y}$ **47.** $2a$ **49.** $\frac{2}{5}$

51. $\frac{y}{2x}$ **53.** $\frac{20}{13}$ **55.** $-\frac{7}{9}$ **57.** $\frac{2}{9}$ **59.** $\frac{2}{5}$ **61.** $\frac{13}{28}$

63. $\frac{8}{5}$ **65.** -4 **67.** $\frac{36}{49}$ **69.** 1 **71.** $\frac{2}{3}$ **73.** $\frac{20}{9}$

75. $\frac{1}{4}$ **77.** $1\frac{1}{2}$ pies **79.** $2\frac{1}{4}$ tazas **81.** $187,500

83. $1\frac{3}{4}$ tazas **85.** $2\frac{1}{6}$ yardas **87.** 65 yardas

93. **(a)** más grande **(c)** más chico **(e)** más grande

Conjunto de problemas 2.2 (página 57)

1. $\frac{5}{7}$ **3.** $\frac{5}{9}$ **5.** 3 **7.** $\frac{2}{3}$ **9.** $-\frac{1}{2}$ **11.** $\frac{2}{3}$ **13.** $\frac{15}{x}$

15. $\frac{2}{y}$ **17.** $\frac{8}{15}$ **19.** $\frac{9}{16}$ **21.** $\frac{37}{30}$ **23.** $\frac{59}{96}$ **25.** $-\frac{19}{72}$

27. $-\frac{1}{24}$ **29.** $-\frac{1}{3}$ **31.** $-\frac{1}{6}$ **33.** $-\frac{31}{7}$ **35.** $-\frac{21}{4}$

37. $\frac{3y + 4x}{xy}$ **39.** $\frac{7b - 2a}{ab}$ **41.** $\frac{11}{2x}$ **43.** $\frac{4}{3x}$ **45.** $-\frac{2}{5x}$

47. $\frac{19}{6y}$ **49.** $\frac{1}{24y}$ **51.** $-\frac{17}{24n}$ **53.** $\frac{5y + 7x}{3xy}$

55. $\frac{32y + 15x}{20xy}$ **57.** $\frac{63y - 20x}{36xy}$ **59.** $\frac{-6y - 5x}{4xy}$

61. $\frac{3x + 2}{x}$ **63.** $\frac{4x - 3}{2x}$ **65.** $\frac{1}{4}$ **67.** $\frac{37}{30}$ **69.** $\frac{1}{3}$

71. $-\frac{12}{5}$ **73.** $-\frac{1}{30}$ **75.** 14 **77.** 68 **79.** $\frac{7}{26}$ **81.** $\frac{11}{15}x$

83. $\frac{5}{24}a$ **85.** $\frac{4}{3}x$ **87.** $\frac{13}{20}n$ **89.** $\frac{20}{9}n$ **91.** $-\frac{79}{36}n$

93. $\frac{13}{14}x + \frac{9}{8}y$ **95.** $-\frac{11}{45}x - \frac{9}{20}y$ **97.** $2\frac{1}{8}$ yardas

99. $30\frac{3}{8}$ pulgadas **101.** $10\frac{3}{4}$ pies **103.** $1\frac{3}{4}$ millas

105. $36\frac{2}{3}$ yardas

Conjunto de problemas 2.3 (página 68)

1. Racional y real
3. Irracional
5. Racional y no real
7. Racional y no real
9. 0.62 **11.** 1.45 **13.** 3.8 **15.** -3.3 **17.** 7.5 **19.** 7.8
21. -0.9 **23.** -7.8 **25.** 1.16 **27.** -0.272 **29.** -24.3
31. 44.8 **33.** 0.0156 **35.** 1.2 **37.** -7.4 **39.** 0.38
41. 7.2 **43.** -0.42 **45.** 0.76 **47.** 4.7 **49.** 4.3
51. -14.8 **53.** 1.3 **55.** $-1.2x$ **57.** $3n$ **59.** $0.5t$
61. $-5.8x + 2.8y$ **63.** $0.1x + 1.2$ **65.** $-3x - 2.3$

67. $4.6x - 8$ **69.** $\frac{11}{12}$ **71.** $\frac{4}{3}$ **73.** 17.3 **75.** -97.8

77. 2.2 **79.** 13.75 **81.** 0.6 **83.** **(a)** 19.61 mph **(b)** 38.18 mph **(c)** 39 veces más rápido **(d)** 23.8 veces más rápido **85.** $10,002 **87.** 19.1 centímetros
89. 4.7 centímetros **91.** $6.55 **93.** 322.58 millas
99. **(a)** $0.\overline{142857}$ **(c)** $0.\overline{4}$ **(e)** $0.\overline{27}$

Conjunto de problemas 2.4 (página 75)

1. 64 **3.** 81 **5.** -8 **7.** -9 **9.** 16 **11.** $\frac{16}{81}$ **13.** $-\frac{1}{8}$

15. $\frac{9}{4}$ **17.** 0.027 **19.** -1.44 **21.** -47 **23.** -33

25. 11 **27.** -75 **29.** -60 **31.** 31 **33.** -13

35. 7 **37.** $\frac{79}{6}$ **39.** -1 **41.** $9x^2$ **43.** $12xy^2$

45. $-18x^4y$ **47.** $15xy$ **49.** $12x^4$ **51.** $8a^5$

53. $-8x^2$ **55.** $4y^3$ **57.** $-2x^2 + 6y^2$ **59.** $-\frac{11}{60}n^2$

61. $-2x^2 - 6x$ **63.** $7x^2 - 3x + 8$ **65.** $\frac{3y}{5}$ **67.** $\frac{11}{3y}$

69. $\frac{7b^2}{17a}$ **71.** $-\frac{3ac}{4}$ **73.** $\frac{x^2y^2}{4}$ **75.** $\frac{4x}{9}$ **77.** $\frac{5}{12ab}$

79. $\frac{6y^2 + 5x}{xy^2}$ **81.** $\frac{5 - 7x^2}{x^4}$ **83.** $\frac{3 + 12x^2}{2x^3}$ **85.** $\frac{13}{12x^2}$

87. $\frac{11b^2 - 14a^2}{a^2b^2}$ **89.** $\frac{3 - 8x}{6x^3}$ **91.** $\frac{3y - 4x - 5}{xy}$ **93.** 79

95. $\frac{23}{36}$ **97.** $\frac{25}{4}$ **99.** -64 **101.** -25 **103.** -33

105. 0.45

Conjunto de problemas 2.5 (página 80)

Las respuestas pueden variar para los problemas 1-11.
1. La diferencia de a y b
3. Un tercio del producto de B y h
5. Dos veces la cantidad, l más w
7. El cociente de A y w
9. La cantidad, a más b, dividir entre 2
11. Dos más que tres veces y **13.** $l + w$ **15.** ab

17. $\frac{d}{t}$ **19.** lwh **21.** $y - x$ **23.** $xy + 2$ **25.** $7 - y^2$

27. $\frac{x - y}{4}$ **29.** $10 - x$ **31.** $10(n + 2)$ **33.** $xy - 7$

35. $xy - 12$ **37.** $35 - n$ **39.** $n + 45$ **41.** $y + 10$

43. $2x - 3$ **45.** $10d + 25q$ **47.** $\frac{d}{t}$ **49.** $\frac{d}{p}$ **51.** $\frac{d}{12}$

53. $n + 1$ **55.** $n + 2$ **57.** $3y - 2$ **59.** $8w$ **61.** $3l - 4$
63. $4f + 6$ **65.** $2w^2$

Capítulo 2 Problemas de muestra (página 83)

1. -0.03 es un número racional y no real; 8 es un número racional y real; ! $\overline{5}$ es un número irracional

2. $\frac{18}{5a}$ **3.** $\frac{1}{18}$ **4.** $\frac{14}{5}$ **5.** $\frac{13}{24}$ **6.** $\frac{11}{12}y$

7. **(a)** 12.68 **(b)** 6.25 **8.** 3.003 **9.** 2.64 **10.** 32.6

11. $5.52m$ **12.** $-\frac{1}{15}$ **13.** **(a)** 64 **(b)** -1 **(c)** $\frac{25}{16}$

14. -6 **15.** $2y^3$ **16.** $1\frac{11}{12}$ tazas **17.** $n - 6$

Capítulo 2 Conjunto de problemas de repaso (página 88)

1. 64 **2.** -27 **3.** -16 **4.** 125 **5.** $-\frac{1}{4}$ **6.** $\frac{9}{16}$ **7.** $\frac{49}{36}$

8. 0.216 **9.** 0.0144 **10.** 0.0036 **11.** $-\frac{8}{27}$ **12.** $\frac{1}{16}$

13. $-\frac{1}{64}$ **14.** $\frac{4}{9}$ **15.** $\frac{19}{24}$ **16.** $\frac{39}{70}$ **17.** $\frac{1}{15}$

18. $\frac{14y + 9x}{2xy}$ **19.** $\frac{5x - 8y}{x^2y}$ **20.** $\frac{7y}{20}$ **21.** $\frac{4x^3}{5y^2}$

22. $\frac{2}{7}$ **23.** 1 **24.** $\frac{27n^2}{28}$ **25.** $\frac{1}{24}$ **26.** $-\frac{13}{8}$ **27.** $\frac{7}{9}$

28. $\frac{29}{12}$ **29.** $\frac{1}{2}$ **30.** 0.67 **31.** 0.49 **32.** 2.4 **33.** -0.11

34. 1.76 **35.** 36 **36.** 1.92 **37.** $\frac{5}{56}x^2 + \frac{7}{20}y^2$

38. $-0.58ab + 0.36bc$ **39.** $\frac{11x}{24}$ **40.** $2.2a + 1.7b$

41. $-\frac{1}{10}n$ **42.** $\frac{41}{20}n$ **43.** $\frac{19}{42}$ **44.** $-\frac{1}{72}$ **45.** -0.75

46. -0.35 **47.** $\frac{1}{17}$ **48.** -8 **49.** $72 - n$

50. $p + 10d$ **51.** $\frac{x}{60}$ **52.** $2y - 3$ **53.** $5n + 3$

54. $5n + 10d + 25q$ **55.** $n - 5$ **56.** $5 - n$ **57.** $10(x - 2)$

58. $10x - 2$ **59.** $x - 3$ **60.** $\frac{d}{r}$ **61.** $x^2 + 9$ **62.** $(x + 9)^2$

63. $x^3 + y^3$ **64.** $xy - 4$

Capítulo 2 Examen (página 90)

1. **(a)** 81 **(b)** -64 **(c)** 0.008 **2.** $\frac{7}{9}$ **3.** $\frac{9xy}{16}$

4. -2.6 **5.** 3.04 **6.** -0.56 **7.** $\frac{1}{256}$ **8.** $\frac{2}{9}$ **9.** $-\frac{5}{24}$

10. $\frac{187}{60}$ or $3\frac{7}{60}$ **11.** $-\frac{13}{48}$ **12.** $\frac{4y}{5}$ **13.** $2x^2$

14. $\frac{4y^2 - 5x}{xy^2}$ **15.** $\frac{8}{3x}$ **16.** $\frac{35y + 27}{21y^2}$ **17.** $\frac{10a^2b}{9}$

18. $-x + 5xy$ **19.** $-3a^2 - 2b^2$ **20.** $\frac{37}{36}$ **21.** -0.48

22. $-\frac{31}{40}$ **23.** 2.85 **24.** $5n + 10d + 25q$ **25.** $4n - 3$

Capítulos 1-2 Conjunto de problemas de repaso acumulados (página 91)

1. 10 **2.** -30 **3.** 1 **4.** -26 **5.** -29 **6.** 17 **7.** $\frac{1}{2}$

8. $-\frac{7}{6}$ **9.** $\frac{1}{36}$ **10.** -64 **11.** 200 **12.** 0.173

13. -142 **14.** 136 **15.** $\frac{19}{9}$ **16.** -0.01 **17.** -2.4

18. $\frac{79}{40}$ **19.** $\frac{7}{50}$ **20.** $\frac{3}{5}$ **21.** $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

22. $2 \cdot 3 \cdot 13$ **23.** $7 \cdot 13$ **24.** $3 \cdot 3 \cdot 17$ **25.** 14

26. 9 **27.** 4 **28.** 6 **29.** 140 **30.** 200 **31.** 108

32. 80 **33.** $-\frac{1}{12}x - \frac{11}{12}y$ **34.** $-\frac{1}{15}n$

35. $-3a + 1.9b$ **36.** $-2n + 6$ **37.** $-x - 15$

38. $-9a - 13$ **39.** $\frac{11}{48}$ **40.** $-\frac{31}{36}$ **41.** $\frac{5 - 2y + 3x}{xy}$

42. $\frac{-7y + 9x}{x^2y}$ **43.** $\frac{2x}{3}$ **44.** $\frac{8a^2}{21b}$ **45.** $\frac{4x^2}{3y}$ **46.** $-\frac{27}{16}$

47. $p + 5n + 10d$ **48.** $4n - 5$ **49.** $\frac{d}{3}$ **50.** $6w$

Capítulo 3

Conjunto de problemas 3.1 (página 100)

1. $\{8\}$ **3.** $\{-6\}$ **5.** $\{-9\}$ **7.** $\{-6\}$ **9.** $\{13\}$ **11.** $\{48\}$

13. $\{23\}$ **15.** $\{-7\}$ **17.** $\left\{\frac{17}{12}\right\}$ **19.** $\left\{-\frac{4}{15}\right\}$

21. $\{0.27\}$ **23.** $\{-3.5\}$ **25.** $\{-17\}$ **27.** $\{-35\}$

29. $\{-8\}$ **31.** $\{-17\}$ **33.** $\left\{\frac{37}{5}\right\}$ **35.** $\{-3\}$ **37.** $\left\{\frac{13}{2}\right\}$

39. $\{144\}$ **41.** $\{24\}$ **43.** $\{-15\}$ **45.** $\{24\}$ **47.** $\{-35\}$

49. $\left\{\frac{3}{10}\right\}$ **51.** $\left\{-\frac{9}{10}\right\}$ **53.** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ **55.** $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

57. $\left\{\frac{27}{32}\right\}$ **59.** $\left\{-\frac{5}{14}\right\}$ **61.** $\left\{-\frac{7}{5}\right\}$ **63.** $\left\{-\frac{1}{12}\right\}$

65. $\left\{-\frac{3}{20}\right\}$ **67.** $\{0.3\}$ **69.** $\{9\}$ **71.** $\{-5\}$ **73.** 7 **75.** 500

77. 48 **79.** $h = \frac{V}{B}$ **81.** $B = \frac{3V}{h}$ **83.** $h = \frac{V}{\pi r^2}$ **85.** $r = \frac{i}{Pt}$

Conjunto de problemas 3.2 (página 106)

1. $\{4\}$ **3.** $\{6\}$ **5.** $\{8\}$ **7.** $\{11\}$ **9.** $\left\{\frac{17}{6}\right\}$ **11.** $\left\{\frac{19}{2}\right\}$

13. $\{6\}$ **15.** $\{-1\}$ **17.** $\{-5\}$ **19.** $\{-6\}$ **21.** $\left\{\frac{11}{2}\right\}$

23. $\{-2\}$ **25.** $\left\{\frac{10}{7}\right\}$ **27.** $\{18\}$ **29.** $\left\{-\frac{25}{4}\right\}$ **31.** $\{-7\}$

33. $\left\{-\frac{24}{7}\right\}$ **35.** $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ **37.** $\left\{\frac{4}{17}\right\}$ **39.** $\left\{-\frac{12}{5}\right\}$

41. 20 **43.** 9 **45.** $w = \frac{P - 2l}{2}$ **47.** $t = \frac{A - P}{Pr}$

49. $F = \frac{9}{5}C + 32$ **51.** 9 **53.** 22 **55.** 6 **57.** 5

59. 3 **61.** \$8.50 **63.** \$84.00 **65.** \$5.25 **67.** 6.1 pulgadas
69. \$300 **71.** 4 metros **73.** 341 millones **75.** 1.25 horas

Conjunto de problemas 3.3 (página 114)

1. $\{5\}$ **3.** $\{-8\}$ **5.** $\left\{\frac{8}{5}\right\}$ **7.** $\{-11\}$ **9.** $\left\{-\frac{5}{2}\right\}$

11. $\{-9\}$ **13.** $\{2\}$ **15.** $\{-3\}$ **17.** $\left\{\frac{13}{2}\right\}$ **19.** $\{-5\}$

21. $\{17\}$ **23.** $\left\{-\frac{13}{2}\right\}$ **25.** $\left\{\frac{16}{3}\right\}$

27. $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ **29.** $\left\{-\frac{19}{10}\right\}$ **31.** 17 **33.** 35 y 37

35. 36, 38, y 40 **37.** 46 centímetros **39.** 15 pulgadas
41. \$8 **43.** 150π centímetros cuadrados
45. $\frac{1}{4}$ yardas cuadradas **47.** $V = 972\pi$ pulgadas cúbicas
49. $S = 144\pi$ centímetros cuadrados
51. $S = 78\pi$ centímetros cuadrados
53. 32° y 58° **55.** 50° y 130°
57. 65° y 75° **59.** \$42 **61.** \$9 por hora
63. 150 hombres y 450 mujeres **65.** \$91 **67.** \$145

Conjunto de problemas 3.4 (página 122)

1. $\{1\}$ **3.** $\{10\}$ **5.** $\{-9\}$ **7.** $\left\{\frac{29}{4}\right\}$ **9.** $\left\{-\frac{17}{3}\right\}$

11. $\{10\}$ **13.** $\{44\}$ **15.** $\{26\}$ **17.** {Todos reales} **19.** $\varnothing$

21. $\{3\}$ **23.** $\{-1\}$ **25.** $\{-2\}$ **27.** $\{16\}$ **29.** $\left\{\frac{22}{3}\right\}$

31. $\{-2\}$ **33.** $\left\{-\frac{1}{6}\right\}$ **35.** $\{-57\}$ **37.** $\left\{-\frac{7}{5}\right\}$ **39.** $\{2\}$

41. $\{-3\}$ **43.** $\left\{\frac{27}{10}\right\}$ **45.** $\left\{\frac{3}{28}\right\}$ **47.** $\left\{\frac{18}{5}\right\}$

49. $\left\{\frac{24}{7}\right\}$ **51.** $\{5\}$ **53.** $x = \frac{9 - 7y}{3}$ **55.** $y = \frac{9x - 13}{6}$

57. $x = \frac{11y - 14}{2}$ **59.** $x = \frac{-y - 4}{3}$ **61.** $y = \frac{3}{2}x$

63. $y = mx + b$ **65.** 7 y 8 **67.** 14, 15 y 16
69. 6 y 11 **71.** 48 **73.** 14 minutos **75.** 8 pies y 12 pies
77. 15 monedas de cinco, 20 de veinticinco centavos **79.** 40 monedas de cinco, 80 de diez y 90 de veinticinco centavos
81. 8 monedas de diez y 10 de veinticinco centavos **83.** 4 cangrejos, 12 peces y 6 plantas **85.** 30° 87. 20°, 50° y 110°
89. 40° **95.** Cualesquiera tres números reales consecutivos

Conjunto de problemas 3.5 (página 130)

1. El ancho mide 14 pulgadas y el largo mide 42 pulgadas.
3. El ancho mide 12 centímetros y el largo mide 34 centímetros
5. 80 pulgadas cuadradas
7. 24 pies, 31 pies y 45 pies
9. 6 centímetros, 19 centímetros, 21 centímetros
11. 12 centímetros **13.** 17, 8 y 15 centímetros
15. 7 centímetros **17.** 9 horas **19.** $2\frac{1}{2}$ horas
21. 55 millas por hora **23.** 40 minutos **25.** 12.5 mililitros
27. 15 centilitros **29.** $7\frac{1}{2}$ cuartos de solución al 30% y $2\frac{1}{2}$ cuartos de solución al 50% **31.** 12 galones
33. 16.25% **35.** \$900 al 3%; \$2150 al 5%
37. \$5000 al 6%; \$7000 al 8%
39. \$500 al 4%; \$1000 al 5%; \$1500 al 6%
41. \$1500 **43.** \$2166.67 al 5%; \$3833.33 al 7%

Capítulo 3 Problemas de muestra (página 133)

1. $\{-0.6\}$ **2.** $\{-30\}$ **3.** $\{6\}$ **4.** $\{20\}$ **5.** $\left\{\frac{6}{17}\right\}$

6. **(a)** Todos reales **(b)** $\varnothing$ **7.** 8 pulgadas **8.** $P = \frac{i}{rt}$

9. $x = \frac{7y + 21}{3}$ **10.** \$1000 al 4%; \$2500 al 6%

Capítulo 3 Conjunto de problemas de repaso (página 137)

1. $\{-3\}$ **2.** $\{1\}$ **3.** $\left\{-\frac{3}{4}\right\}$ **4.** $\{9\}$ **5.** $\{-4\}$ **6.** $\left\{\frac{40}{3}\right\}$

7. $\left\{\frac{9}{4}\right\}$ **8.** $\left\{-\frac{15}{8}\right\}$ **9.** $\{-7\}$ **10.** $\left\{\frac{2}{41}\right\}$

11. {Todos reales} **12.** $\varnothing$ **13.** $\{-32\}$ **14.** $\{-12\}$

15. $\{21\}$ **16.** $\{-60\}$ **17.** $\{10\}$ **18.** $\left\{-\frac{11}{4}\right\}$ **19.** $\varnothing$

20. $\left\{\frac{5}{21}\right\}$ **21.** 400 **22.** 35 **23.** 6 **24.** 25

25. $t = \frac{A - P}{Pr}$ **26.** $r = \frac{C}{2\pi}$ **27.** $m = \frac{y - b}{x}$

28. $y = \frac{-5x - 6}{2}$ **29.** $x = \frac{13 + 3y}{2}$ **30.** $y = \frac{-x + 7}{3}$

31. 6 centímetros **32.** 15 pies **33.** 24 **34.** 7 **35.** 33
36. 8 **37.** 18 **38.** 16 y 24 **39.** 8 monedas de cinco y 22 de diez centavos **40.** 8 monedas de cinco, 25 de diez centavos y 50 de veinticinco centavos **41.** 52° **42.** 700 millas **43.** 17 pies y 20 pies **44.** 6 metros por 17 meters
45. $1\frac{1}{2}$ horas **46.** 20 litros **47.** 15 centímetros por 40 centímetros **48.** 29 yardas por 10 yardas
49. \$675 al 3% y \$1425 al 5% **50.** 34° y 99°
51. 5 horas **52.** 18 galones **53.** 26%

Capítulo 3 Examen (página 139)

1. $\{2\}$ **2.** $\{3\}$ **3.** $\{-9\}$ **4.** $\{-5\}$ **5.** $\{-53\}$ **6.** $\{-18\}$

7. $\left\{-\frac{5}{2}\right\}$ **8.** $\left\{\frac{35}{18}\right\}$ **9.** $\{12\}$ **10.** $\left\{\frac{31}{2}\right\}$

11. $C = \frac{5F - 160}{9}$ **12.** $x = \frac{y + 8}{2}$ **13.** $y = \frac{9x + 47}{4}$

14. 64π centímetros cuadrados **15.** 576 pulgadas cuadradas **16.** 14 yardas **17.** -57, 256 y -55 **18.** 72 **19.** \$0.35 **20.** 15 metros, 25 metros y 30 metros **21.** 17 monedas de cinco, 33 de diez y 53 de veinticinco centavos **22.** 60°, 30°, 90° **23.** 10 horas **24.** 4 centilitros **25.** \$2500 a 4% y \$4000 a 6%

Capítulo 4

Conjunto de problemas 4.1 (página 148)

1. 65 milímetros **3.** 1.5 libras **5.** 1.05 pintas **7.** 167.2 libras **9.** 150 millas por hora **11.** \$0.41 por onza **13.** En Oscar \$0.35 y en Goody \$0.38 **15.** \$93 con descuento; \$124 con precio regular **17.** \$0.08 por pulgada cuadrada **19.** \$0.52 **21.** $\{9\}$ **23.** $\{10\}$ **25.** $\left\{\frac{15}{2}\right\}$ **27.** $\{-22\}$ **29.** $\{-4\}$ **31.** $\{6\}$ **33.** $\{-28\}$ **35.** $\{34\}$ **37.** $\{6\}$ **39.** $\left\{-\frac{8}{5}\right\}$ **41.** $\{7\}$ **43.** $\left\{\frac{9}{2}\right\}$ **45.** $\left\{-\frac{53}{2}\right\}$ **47.** $\{50\}$ **49.** $\{120\}$ **51.** $\left\{\frac{9}{7}\right\}$ **53.** $\{28\}$ **55.** 330 millas **57.** 60 centímetros **59.** 7.5 libras **61.** $33\frac{1}{3}$ libras **63.** 90,000 **65.** 137.5 gramos **67.** \$800 **69.** \$150,000 **71.** 1360 yen **75.** Todos los números reales menos 2 **77.** $\{0\}$ **79.** Todos los números reales

Conjunto de problemas 4.2 (página 155)

1. 55% **3.** 60% **5.** $16\frac{2}{3}\%$ **7.** $37\frac{1}{2}\%$ **9.** 150% **11.** 240% **13.** 2.66 **15.** 42 **17.** 80% **19.** 60 **21.** 115% **23.** 90 **25.** 4.4 **27.** 350 **29.** 7.5% **31.** 12.5% disminución **33.** 34% aumento **35.** 12.5% disminución **37.** 20% aumento **39.** 2.5% disminución **41.** 32% aumento **43.** 10% disminución **45.** 5% aumento **47.** 8% aumento **49.** 25% aumento **51.** 140% aumento **53.** 520% aumento **55.** \$500 **57.** 8% **59.** \$4166.67 **61.** 2.5 años **63.** \$510 **65.** 16.8%

Conjunto de problemas 4.3 (página 161)

1. $\{1.11\}$ **3.** $\{6.6\}$ **5.** $\{0.48\}$ **7.** $\{80\}$ **9.** $\{3\}$ **11.** $\{50\}$ **13.** $\{70\}$ **15.** $\{200\}$ **17.** $\{450\}$ **19.** $\{150\}$ **21.** $\{2200\}$ **23.** 161 carros **25.** \$38.64 **27.** 690 miligramos **29.** 88.2% **31.** 28.32 mpg **33.** \$50 **35.** \$3600 **37.** \$20.80 **39.** 30% **41.** \$8.50 **43.** \$12.40 **45.** \$1000 **47.** 40% **51.** Sí, si la ganancia se calcula según el precio de venta. **53.** Sí **55.** $\{1.625\}$ **57.** $\{350\}$ **59.** $\{0.06\}$ **61.** $\{15.4\}$

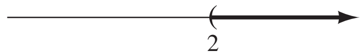
Conjunto de problemas 4.4 (página 169)

1. Cierto **3.** Falso **5.** Falso **7.** Cierto **9.** Cierto

11. $\{x|x > -2\}$ o $(-2, \infty)$

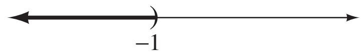
13. $\{x|x \leq 3\}$ o $(-\infty, 3]$

15. $\{x|x > 2\}$ o $(2, \infty)$



17. $\{x|x \leq -2\}$ o $(-\infty, -2]$

19. $\{x|x < -1\}$ o $(-\infty, -1)$



21. $\{x|x < 2\}$ o $(-\infty, 2)$

23. $\{x|x < -20\}$ o $(-\infty, -20)$ **25.** $\{x|x \geq -9\}$ o $[-9, \infty)$ **27.** $\{x|x > 9\}$ o $(9, \infty)$ **29.** $\left\{x|x < \frac{10}{3}\right\}$ o $\left(-\infty, \frac{10}{3}\right)$ **31.** $\{x|x < -8\}$ o $(-\infty, -8)$ **33.** $\{n|n \geq 8\}$ o $[8, \infty)$ **35.** $\left\{n|n > -\frac{24}{7}\right\}$ o $\left(-\frac{24}{7}, \infty\right)$ **37.** $\{n|n > 7\}$ o $(7, \infty)$ **39.** $\{x|x > 5\}$ o $(5, \infty)$ **41.** $\{x|x \leq 6\}$ o $(-\infty, 6]$ **43.** $\{x|x \leq -21\}$ o $(-\infty, -21]$ **45.** $\left\{x|x < \frac{8}{3}\right\}$ o $\left(-\infty, \frac{8}{3}\right)$ **47.** $\left\{x|x < \frac{5}{4}\right\}$ o $\left(-\infty, \frac{5}{4}\right)$ **49.** $\{x|x < 1\}$ o $(-\infty, 1)$ **51.** $\{t|t \geq 4\}$ o $[4, \infty)$ **53.** $\{x|x > 14\}$ o $(14, \infty)$ **55.** $\left\{x|x > \frac{3}{2}\right\}$ o $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ **57.** $\left\{t|t \geq \frac{1}{4}\right\}$ o $\left[\frac{1}{4}, \infty\right)$ **59.** $\left\{x|x < -\frac{9}{4}\right\}$ o $\left(-\infty, -\frac{9}{4}\right)$ **65.** Todos números reales **67.** $\varnothing$ **69.** Todos números reales **71.** $\varnothing$

Conjunto de problemas 4.5 (página 175)

1. $\{x|x > 2\}$ o $(2, \infty)$ **3.** $\{x|x < -1\}$ o $(-\infty, -1)$ **5.** $\left\{x|x > -\frac{10}{3}\right\}$ o $\left(-\frac{10}{3}, \infty\right)$ **7.** $\{n|n \geq -11\}$ o $[-11, \infty)$ **9.** $\{t|t \leq 11\}$ o $(-\infty, 11]$ **11.** $\left\{x|x > -\frac{11}{5}\right\}$ o $\left(-\frac{11}{5}, \infty\right)$

13. $\left\{x \mid x < \frac{5}{2}\right\}$ o $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$ **15.** $\{x \mid x \leq 8\}$ o $(-\infty, 8]$

17. $\left\{n \mid n > \frac{3}{2}\right\}$ o $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ **19.** $\{y \mid y > -3\}$ o $(-3, \infty)$

21. $\left\{x \mid x < \frac{5}{2}\right\}$ o $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$ **23.** $\{x \mid x < 8\}$ o $(-\infty, 8)$

25. $\{x \mid x < 21\}$ o $(-\infty, 21)$ **27.** $\{x \mid x < 6\}$ o $(-\infty, 6)$

29. $\left\{n \mid n > -\frac{17}{2}\right\}$ o $\left(-\frac{17}{2}, \infty\right)$

31. $\{n \mid n \leq 42\}$ o $(-\infty, 42]$

33. $\left\{n \mid n > -\frac{9}{2}\right\}$ o $\left(-\frac{9}{2}, \infty\right)$

35. $\left\{x \mid x > \frac{4}{3}\right\}$ o $\left(\frac{4}{3}, \infty\right)$ **37.** $\{n \mid n \geq 4\}$ o $[4, \infty)$

39. $\{t \mid t > 300\}$ o $(300, \infty)$ **41.** $\{x \mid x \leq 50\}$ o $(-\infty, 50]$

43. $\{x \mid x > 0\}$ o $(0, \infty)$ **45.** $\{x \mid x > 64\}$ o $(64, \infty)$

47. $\left\{n \mid n > \frac{33}{5}\right\}$ o $\left(\frac{33}{5}, \infty\right)$

49. $\left\{x \mid x \geq -\frac{16}{3}\right\}$ o $\left[-\frac{16}{3}, \infty\right)$

51. 

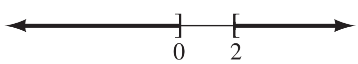
53. 

55. 

57. 

59. 

61. 

63. 

65. 

67. Todos los números mayores a 7 **69.** 15 pulgadas

71. 158 o mejor **73.** Mejor que 90

75. Más de 250 ventas **77.** 77 o menos

Capítulo 4 Problemas de muestra (página 177)

1. 300 pies **2.** \$3.39 **3.** 48 **4.** 39 kg

5. $62\frac{1}{2}$ o 62.5% **6.** **(a)** 2% **(b)** 24 **(c)** 200

7. 25% disminución **8.** 4 años **9.** 30 **10.** \$146.40

11. **(a)** $\{x \mid x \geq -3\}$ 

(b) $\{x \mid x < 4\}$ 

12. $\{x \mid x \geq -3\}$ o $[-3, \infty)$ **13.** $\{x \mid x \geq -4\}$ o $[-4, \infty)$

14. $\left\{x \mid x \geq -\frac{9}{10}\right\}$ o $\left[-\frac{9}{10}, \infty\right)$ **15.** $\{x \mid x \leq -1\}$

16. $\{x \mid x > 3\}$ **17.** 91

Capítulo 4 Conjunto de problemas de repaso (página 183)

1. 99.2 millas por hora **2.** 393.75 gramos **3.** 64 niños **4.** 4.8 pulgadas **5.** \$0.4 por pulgada **6.** \$0.45 por manzana; \$0.40 por manzana **7.** $\{-60\}$ **8.** $\{4\}$ **9.** $\{10\}$

10. $\left\{-\frac{8}{5}\right\}$ **11.** $\{-12\}$ **12.** $\{21\}$ **13.** $\{-7\}$

14. $\{10\}$ **15.** 30 galones **16.** 63 centímetros

17. 400 cervezas; 250 refrescos **18.** 20° **19.** 8 hombres y 32 mujeres **20.** \$200; \$25 **21.** 80% **22.** 36% **23.** 66.7%

24. 83.3% **30.** 72 **31.** 420 **32.** 960 **33.** 25% aumento

34. 40% disminución **35.** 16% disminución **36.** 16.7% aumento

37. \$367.50 **38.** \$4500 **39.** 3 años **40.** 4%

41. $\left\{\frac{17}{12}\right\}$ **42.** $\{5\}$ **43.** $\{800\}$ **44.** $\{16\}$

45. $\{73\}$ **46.** $\{15\}$ **47.** 220 estudiantes **48.** 202.4 minutos

49. \$40 **50.** \$44 **51.** \$200 **52.** \$225

53. 33.3% **54.** 80% **55.** $\{x \mid x > 4\}$ o $(4, \infty)$

56. $\{x \mid x > -4\}$ o $(-4, \infty)$ **57.** $\{x \mid x \geq 13\}$ o $[13, \infty)$

58. $\left\{x \mid x \geq \frac{11}{2}\right\}$ o $\left[\frac{11}{2}, \infty\right)$ **59.** $\{x \mid x > 35\}$ o $(35, \infty)$

60. $\left\{x \mid x < \frac{26}{5}\right\}$ o $\left(-\infty, \frac{26}{5}\right)$ **61.** $\{n \mid n < 2\}$ o $(-\infty, 2)$

62. $\left\{n \mid n > \frac{5}{11}\right\}$ o $\left(\frac{5}{11}, \infty\right)$

63. $\{y \mid y < 24\}$ o $(-\infty, 24)$ **64.** $\{x \mid x > 10\}$ o $(10, \infty)$

65. $\left\{n \mid n < \frac{2}{11}\right\}$ o $\left(-\infty, \frac{2}{11}\right)$

66. $\{n \mid n > 33\}$ o $(33, \infty)$ **67.** $\{n \mid n \leq 120\}$ o $(-\infty, 120]$

68. $\left\{n \mid n \leq -\frac{180}{13}\right\}$ o $\left(-\infty, -\frac{180}{13}\right]$

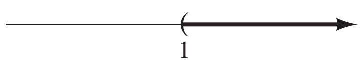
69. $\left\{x \mid x > \frac{9}{2}\right\}$ o $\left(\frac{9}{2}, \infty\right)$

70. $\left\{x \mid x < -\frac{43}{3}\right\}$ o $\left(-\infty, -\frac{43}{3}\right)$

71. 

72. 

73. 

74. 

75. 89 o mejor **76.** 88 o mejor

Capítulo 4 Examen (página 185)

1. \$9.50 **2.** \$12.90 por yarda **3.** $\{-22\}$ **4.** $\left\{-\frac{17}{18}\right\}$

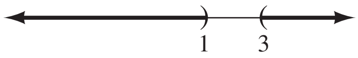
5. $\{-77\}$ **6.** $\{14\}$ **7.** $\left\{\frac{12}{5}\right\}$ **8.** $\{100\}$ **9.** $\{70\}$

10. $\{x \mid x < 5\}$ o $(-\infty, 5)$ **11.** $\{x \mid x \leq 1\}$ o $(-\infty, 1]$

12. $\{x \mid x \geq -9\}$ o $[-9, \infty)$ **13.** $\{x \mid x < 0\}$ o $(-\infty, 0)$

14. $\{n \mid n \geq 12\}$ o $[12, \infty)$

15. 

16. 

17. 125% **18.** 70 **19.** \$350 **20.** \$52 21 **21.** 40%
22. 875 mujeres **23.** 96 o mejor **24.** 33.3% aumento
25. \$2100

Capítulos 1-4 Conjunto de problemas de repaso acumulados (página 186)

1. $-16x$ **2.** $4a - 6$ **3.** $12x + 27$ **4.** $-5x + 1$
5. $9n - 8$ **6.** $14n - 5$ **7.** $\frac{1}{4}x$ **8.** $-\frac{1}{10}n$ **9.** $-0.1x$
10. $0.7x + 0.2$ **11.** -65 **12.** -51 **13.** 20 **14.** 32
15. $\frac{7}{8}$ **16.** $-\frac{5}{6}$ **17.** -0.28 **18.** $-\frac{1}{4}$ **19.** 5 **20.** $-\frac{1}{4}$
21. 81 **22.** -64 **23.** $\frac{8}{27}$ **24.** $-\frac{1}{32}$ **25.** $\frac{25}{36}$
26. $-\frac{1}{512}$ **27.** $\{-4\}$ **28.** $\{-2\}$ **29.** $\varnothing$ **30.** $\{-8\}$
31. $\left\{\frac{25}{2}\right\}$ **32.** $\left\{-\frac{4}{7}\right\}$ **33.** $\left\{\frac{34}{3}\right\}$ **34.** $\{200\}$
35. {Todos reales} **36.** $\{11\}$ **37.** $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ **38.** $\{0\}$
39. $\{x|x > 7\}$ o $(7, \infty)$ **40.** $\{x|x > -6\}$ o $(-6, \infty)$
41. $\left\{n|n \geq \frac{7}{5}\right\}$ o $\left[\frac{7}{5}, \infty\right)$ **42.** $\{x|x \geq 21\}$ o $[21, \infty)$
43. $\{t|t < 100\}$ o $(-\infty, 100)$ **44.** $\{x|x < -1\}$ o $(-\infty, -1)$
45. $\{n|n \geq 18\}$ o $[18, \infty)$ **46.** $\left\{x|x < \frac{5}{3}\right\}$ o $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$
47. \$15,000 **48.** 45° y 135°
49. 8 monedas de cinco y 17 de diez centavos
50. 130 o mayor **51.** 12 pies y 18 pies **52.** \$40 por par
53. 45 millas por hora y 50 millas por hora
54. 5 litros

Capítulo 5

Conjunto de problemas 5.1 (página 194)

1. 3 **3.** 2 **5.** 3 **7.** 2 **9.** 2 **11.** 3 **13.** 5
15. $8x + 11$ **17.** $4y + 10$ **19.** $2x^2 - 2x - 23$
21. $17x - 19$ **23.** $6x^2 - 5x - 4$ **25.** $5n - 6$
27. $-7x^2 - 13x - 7$ **29.** $5x + 5$ **31.** $-2x - 5$
33. $-3x + 7$ **35.** $2x^2 + 15x - 6$ **37.** $5n^2 + 2n + 3$
39. $-3x^3 + 2x^2 - 11$ **41.** $9x - 2$ **43.** $2a + 15$
45. $-2x^2 + 5$ **47.** $6x^3 + 12x^2 - 5$
49. $4x^3 - 8x^2 + 13x + 12$ **51.** $x + 11$ **53.** $-3x - 14$
55. $-x^2 - 13x - 12$ **57.** $x^2 - 11x - 8$ **59.** $-10a - 3b$
61. $-n^2 + 2n - 17$ **63.** $8x + 1$ **65.** $-5n - 1$
67. $-2a + 6$ **69.** $11x + 6$ **71.** $6x + 7$ **73.** $-5n + 7$
75. $8x + 6$ **77.** $20x^2$

Conjunto de problemas 5.2 (página 200)

1. $45x^2$ **3.** $21x^3$ **5.** $-6x^2y^2$ **7.** $14x^3y$ **9.** $-48a^3b^3$
11. $5x^4y$ **13.** $104a^3b^2c^2$ **15.** $30x^6$ **17.** $-56x^2y^3$
19. $-6a^2b^3$ **21.** $72c^3d^3$ **23.** $\frac{2}{5}x^3y^5$ **25.** $-\frac{2}{9}a^2b^5$
27. $0.28x^8$ **29.** $-6.4a^4b^2$ **31.** $4x^8$ **33.** $9a^4b^6$ **35.** $27x^6$
37. $-64x^{12}$ **39.** $81x^8y^{10}$ **41.** $16x^8y^4$ **43.** $81a^{12}b^8$
45. $x^{12}y^6$ **47.** $15x^2 + 10x$ **49.** $18x^3 - 6x^2$
51. $-28x^3 + 16x$ **53.** $2x^3 - 8x^2 + 12x$
55. $-18a^3 + 30a^2 + 42a$ **57.** $28x^3y - 7x^2y + 35xy$
59. $-9x^3y + 2x^2y + 6xy$ **61.** $13x + 22y$
63. $-2x - 9y$ **65.** $4x^3 - 3x^2 - 14x$ **67.** $-x + 14$
69. $-7x + 12$ **71.** $18x^5$ **73.** $-432x^5$ **75.** $25x^7y^8$
77. $-a^{12}b^5c^9$ **79.** $-16x^{11}y^{17}$ **81.** $7x + 5$ **83.** $3\pi x^2$
89. x^{7n} **91.** x^{6n+1} **93.** x^{6n+3} **95.** $-20x^{10n}$ **97.** $12x^{7n}$

Conjunto de problemas 5.3 (página 207)

1. $xy + 3x + 2y + 6$ **3.** $xy + x - 4y - 4$
5. $xy - 6x - 5y + 30$ **7.** $xy + xz + x + 2y + 2z + 2$
9. $6xy + 2x + 9y + 3$ **11.** $x^2 + 10x + 21$
13. $x^2 + 5x - 24$ **15.** $x^2 - 6x - 7$ **17.** $n^2 - 10n + 24$
19. $3n^2 + 19n + 6$ **21.** $15x^2 + 29x - 14$
23. $x^3 + 7x^2 + 21x + 27$ **25.** $x^3 + 3x^2 - 10x - 24$
27. $2x^3 - 7x^2 - 22x + 35$ **29.** $8a^3 - 14a^2 + 23a - 9$
31. $3a^3 + 2a^2 - 8a - 5$ **33.** $x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 23x + 12$
35. $x^4 - 3x^3 - 34x^2 + 33x + 63$ **37.** $x^2 + 11x + 18$
39. $x^2 + 4x - 12$ **41.** $x^2 - 8x - 33$ **43.** $n^2 - 7n + 12$
45. $n^2 + 18n + 72$ **47.** $y^2 - 4y - 21$ **49.** $y^2 - 19y + 84$
51. $x^2 + 2x - 35$ **53.** $x^2 - 6x - 112$ **55.** $a^2 + a - 90$
57. $2a^2 + 13a + 6$ **59.** $5x^2 + 33x - 14$
61. $6x^2 - 11x - 7$ **63.** $12a^2 - 7a - 12$
65. $12n^2 - 28n + 15$ **67.** $14x^2 + 13x - 12$
69. $45 - 19x + 2x^2$ **71.** $-8x^2 + 22x - 15$
73. $-9x^2 + 9x + 4$ **75.** $72n^2 - 5n - 12$
77. $27 - 21x + 2x^2$ **79.** $20x^2 - 7x - 6$
81. **(a)** $x^2 + 8x + 16$
(b) $x^2 - 10x + 25$ **(c)** $x^2 - 12x + 36$
(d) $9x^2 + 12x + 4$ **(e)** $x^2 + 2x + 1$ **(f)** $x^2 - 6x + 9$
83. $x^2 + 14x + 49$ **85.** $25x^2 - 4$ **87.** $x^2 - 2x + 1$
89. $9x^2 + 42x + 49$ **91.** $4x^2 - 12x + 9$ **93.** $4x^2 - 9y^2$
95. $1 - 10n + 25n^2$ **97.** $9x^2 + 24xy + 16y^2$
99. $9 + 24y + 16y^2$ **101.** $1 - 49n^2$
103. $16a^2 - 56ab + 49b^2$ **105.** $x^2 + 16xy + 64y^2$
107. $25x^2 - 121y^2$ **109.** $64x^3 - x$ **111.** $-32x^3 + 2xy^2$
113. $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ **115.** $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$
117. $8n^3 + 12n^2 + 6n + 1$ **119.** $27n^3 - 54n^2 + 36n - 8$
123. $4x^3 - 56x^2 + 196x$; $196 - 4x^2$

Conjunto de problemas 5.4 (página 212)

1. x^8 **3.** $2x^2$ **5.** $-8n^4$ **7.** -8 **9.** $13xy^2$ **11.** $7ab^2$
13. $18xy^4$ **15.** $-32x^5y^2$ **17.** $-8x^5y^4$ **19.** -1
21. $14ab^2c^4$ **23.** $16yz^4$ **25.** $4x^2 + 6x^3$ **27.** $3x^3 - 8x$
29. $-7n^3 + 9$ **31.** $5x^4 - 8x^3 - 12x$ **33.** $4n^5 - 8n^2 + 13$
35. $5a^6 + 8a^2$ **37.** $-3xy + 5y$ **39.** $-8ab - 10a^2b^3$
41. $-3bc + 13b^2c^4$ **43.** $-9xy^2 + 12x^2y^3$

45. $-3x^4 - 5x^2 + 7$ **47.** $-3a^2 + 7a + 13b$
49. $-1 + 5xy^2 - 7xy^5$

Conjunto de problemas 5.5 (página 217)

1. $x + 12$ **3.** $x + 2$ **5.** $x + 8 + \frac{4}{x+3}$
7. $x + 4 + \frac{-7}{x-8}$ **9.** $5n + 4$ **11.** $8y - 3 + \frac{2}{y+7}$
13. $4x - 7$ **15.** $3x + 2 + \frac{-6}{2x+7}$ **17.** $2x^2 + 3x + 4$
19. $5n^2 - 4n - 3$ **21.** $n^2 + 6n - 4$ **23.** $x^2 + 3x + 9$
25. $9x^2 + 12x + 16$ **27.** $3n - 8 + \frac{17}{n+2}$
29. $3t + 2 + \frac{6}{3t-1}$ **31.** $3n^2 - n - 4$
33. $4x^2 - 5x + 5 + \frac{-3}{x+7}$ **35.** $x + 4 + \frac{5x-1}{x^2-2x}$
37. $2x - 12 + \frac{49x-5}{x^2+4x}$ **39.** $x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

Conjunto de problemas 5.6 (página 223)

1. $\frac{1}{9}$ **3.** $\frac{1}{64}$ **5.** $\frac{2}{3}$ **7.** 16 **9.** 1 **11.** $-\frac{27}{8}$ **13.** $\frac{1}{4}$
15. $-\frac{1}{9}$ **17.** $\frac{27}{64}$ **19.** $\frac{1}{8}$ **21.** 27 **23.** 1000
25. $\frac{1}{1000}$ o 0.001 **27.** 18 **29.** 144 **31.** x^5 **33.** $\frac{1}{n^2}$
35. $\frac{1}{a^5}$ **37.** $8x$ **39.** $\frac{27}{x^4}$ **41.** $-\frac{15}{y^3}$ **43.** 96 **45.** x^{10}
47. $\frac{1}{n^4}$ **49.** $2n^2$ **51.** $-\frac{3}{x^4}$ **53.** 4 **55.** x^6 **57.** $\frac{1}{x^4}$
59. $\frac{1}{x^3y^4}$ **61.** $\frac{1}{x^6y^3}$ **63.** $\frac{8}{n^6}$ **65.** $\frac{1}{16n^6}$ **67.** $\frac{81}{a^8}$ **69.** $\frac{x^2}{25}$
71. $\frac{x^2y}{2}$ **73.** $\frac{y}{x^2}$ **75.** a^4b^8 **77.** $\frac{x^2}{y^6}$ **79.** x **81.** $\frac{1}{8x^3}$
83. $\frac{x^4}{4}$ **85.** $7.78(10^{11})$ **87.** $4.3(10^{-3})$ **89.** $8.9(10^4)$
91. $2.5(10^{-2})$ **93.** $1.3(10^7)$ **95.** 8000 **97.** 52,100
99. 11,400,000 **101.** 0.07 **103.** 0.000987
105. 0.00000864 **107.** 0.84 **109.** 450 **111.** 4,000,000
113. 0.0000002 **115.** 0.3 **117.** 0.000007 **119.** \$13,893
121. 358 pies

Capítulo 5 Problemas de muestra (página 226)

1. 6; 5; 2; 3 **2.** **(a)** $5y^2 - 15y - 6$ **(b)** $3y + 8$
3. $-x - 12$ **4.** **(a)** $10x^4$ **(b)** y^{12} **5.** $16x^8y^4$
6. $3x^3 + 2x^2 - 17x + 12$ **7.** $3x^2 + 16x - 35$
8. $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$ **9.** $9x^2 - 42x + 49$
10. $8x + 4$ **11.** $8x^2y^5$ **12.** $2x^3 - 3x + 1$ **13.** $x^2 + x + 3$
14. $\frac{-3}{x^3}$ **15.** 2070 **16.** $(2.1)(10^{-3})$ **17.** 96

Capítulo 5 Conjunto de problemas de repaso (página 230)

1. $8x^2 - 13x + 2$ **2.** $3y^2 + 11y - 9$ **3.** $3x^2 + 2x - 9$
4. $-8x^2 + 18$ **5.** $11x + 8$ **6.** $-9x^2 + 8x - 20$
7. $2y^2 - 54y + 18$ **8.** $-13a - 30$ **9.** $-27a - 7$
10. $n - 2$ **11.** $-5n^2 - 2n$ **12.** $17n^2 - 14n - 16$
13. $35x^6$ **14.** $-54x^8$ **15.** $24x^3y^5$ **16.** $-6a^4b^9$
17. $8a^6b^9$ **18.** $9x^2y^4$ **19.** $35x^2 + 15x$
20. $-24x^3 + 3x^2$ **21.** $x^2 + 17x + 72$ **22.** $3x^2 + 10x + 7$
23. $x^2 - 3x - 10$ **24.** $y^2 - 13y + 36$ **25.** $14x^2 - x - 3$
26. $20a^2 - 3a - 56$ **27.** $9a^2 - 30a + 25$
28. $2x^3 + 17x^2 + 26x - 24$ **29.** $30n^2 + 19n - 5$
30. $12n^2 + 13n - 4$ **31.** $4n^2 - 1$ **32.** $16n^2 - 25$
33. $4a^2 + 28a + 49$ **34.** $9a^2 + 30a + 25$
35. $x^3 - 3x^2 + 8x - 12$ **36.** $2x^3 + 7x^2 + 10x - 7$
37. $a^3 + 15a^2 + 75a + 125$ **38.** $a^3 - 18a^2 + 108a - 216$
39. $x^4 + x^3 + 2x^2 - 7x - 5$
40. $n^4 - 5n^3 - 11n^2 - 30n - 4$ **41.** $-12x^3y^3$
42. $7a^3b^4$ **43.** $-3x^2y - 9x^4$ **44.** $10a^4b^9 - 13a^3b^7$
45. $14x^2 - 10x - 8$ **46.** $x + 4 + \frac{-21}{x+5}$ **47.** $7x - 6$
48. $2x^2 + x + 4 + \frac{4}{x+2}$ **49.** 13 **50.** 25 **51.** $\frac{1}{16}$
52. 1 **53.** -1 **54.** 9 **55.** $\frac{16}{9}$ **56.** $\frac{1}{4}$ **57.** -8 **58.** $\frac{11}{18}$
59. $\frac{5}{4}$ **60.** $\frac{1}{25}$ **61.** $\frac{1}{x^3}$ **62.** $12x^3$ **63.** x^2 **64.** $\frac{1}{x^2}$
65. $8a^6$ **66.** $\frac{4}{n}$ **67.** $\frac{x^2}{y}$ **68.** $\frac{b^6}{a^4}$ **69.** $\frac{1}{2x}$ **70.** $\frac{1}{9n^4}$
71. $\frac{n^3}{8}$ **72.** $-12b$ **73.** 610 **74.** 56,000 **75.** 0.08
76. 0.00092 **77.** $(9)(10^3)$ **78.** $(4.7)(10)$ **79.** $(4.7)(10^{-2})$
80. $(2.1)(10^{-4})$ **81.** 0.48 **82.** 4.2 **83.** 2000
84. 0.00000002

Capítulo 5 Examen (página 232)

1. $-2x^2 - 2x + 5$ **2.** $-3x^2 - 6x + 20$ **3.** $-13x + 2$
4. $-28x^3y^5$ **5.** $12x^5y^5$ **6.** $x^2 - 7x - 18$
7. $n^2 + 7n - 98$ **8.** $40a^2 + 59a + 21$
9. $9x^2 - 42xy + 49y^2$ **10.** $2x^3 + 2x^2 - 19x - 21$
11. $81x^2 - 25y^2$ **12.** $15x^2 - 68x + 77$ **13.** $8x^2y^4$
14. $-7x + 9y$ **15.** $x^2 + 4x - 5$ **16.** $4x^2 - x + 6$
17. $\frac{27}{8}$ **18.** $1\frac{5}{16}$ **19.** 16 **20.** $-\frac{24}{x^2}$ **21.** $\frac{x^3}{4}$ **22.** $\frac{x^6}{y^{10}}$
23. $(2.7)(10^{-4})$ **24.** 9,200,000 **25.** 0.006

Capítulos 1-5 Conjunto de problemas de repaso acumulados (página 233)

1. 130 **2.** -1 **3.** 27 **4.** -16 **5.** 81 **6.** -32 **7.** $\frac{3}{2}$
8. 16 **9.** 36 **10.** $1\frac{3}{4}$ **11.** 0 **12.** $\frac{13}{40}$ **13.** $-\frac{2}{13}$
14. 5 **15.** -1 **16.** -33 **17.** $-15x^3y^7$ **18.** $12ab^7$
19. $-8x^6y^{15}$ **20.** $-6x^2y + 15xy^2$ **21.** $15x^2 - 11x + 2$
22. $21x^2 + 25x - 4$ **23.** $-2x^2 - 7x - 6$ **24.** $49 - 4y^2$
25. $3x^3 - 7x^2 - 2x + 8$ **26.** $2x^3 - 3x^2 - 13x + 20$
27. $8n^3 + 36n^2 + 54n + 27$ **28.** $1 - 6n + 12n^2 - 8n^3$

29. $2x^4 + x^3 - 4x^2 + 42x - 36$ **30.** $-4x^2y^2$
31. $14ab^2$ **32.** $7y - 8x^2 - 9x^3y^3$ **33.** $2x^2 - 4x - 7$
34. $x^2 + 6x + 4$ **35.** $-\frac{6}{x}$ **36.** $\frac{2}{x}$ **37.** $\frac{xy^2}{3}$ **38.** $\frac{z^2}{x^2y^4}$
39. 0.12 **40.** 0.0000000018 **41.** 200 **42.** $\{11\}$
43. $\{-1\}$ **44.** $\{48\}$ **45.** $\left\{-\frac{3}{7}\right\}$ **46.** $\{9\}$ **47.** $\{13\}$
48. $\left\{\frac{9}{14}\right\}$ **49.** $\{500\}$ **50.** $\{x|x \leq -1\}$ o $(-\infty, -1]$
51. $\{x|x > 0\}$ o $(0, \infty)$ **52.** $\left\{x|x < \frac{4}{5}\right\}$ o $\left(-\infty, \frac{4}{5}\right)$
53. $\{x|x < -2\}$ o $(-\infty, -2)$
54. $\left\{x|x \geq \frac{12}{7}\right\}$ o $\left[\frac{12}{7}, \infty\right)$
55. $\{x|x \geq 300\}$ o $[300, \infty)$ **56.** 3 **57.** 40
58. 8 monedas de diez y 10 de veinticinco centavos
59. \$700 a 8% y \$800 a 9% **60.** 3 galones
61. $3\frac{1}{2}$ horas
62. El largo mide 15 metros y el ancho mide 7 metros.

Capítulo 6

Conjunto de problemas 6.1 (página 242)

1. $6y$ **3.** $12xy$ **5.** $14ab^2$ **7.** $2x$ **9.** $8a^2b^2$
11. $4(2x + 3y)$ **13.** $7y(2x - 3)$ **15.** $9x(2x + 5)$
17. $6xy(2y - 5x)$ **19.** $12a^2b(3 - 5ab^3)$
21. $xy^2(16y + 25x)$ **23.** $8(8ab - 9cd)$ **25.** $9a^2b(b^3 - 3)$
27. $4x^4y(13y + 15x^2)$ **29.** $8x^2y(5y + 1)$
31. $3x(4 + 5y + 7x)$ **33.** $x(2x^2 - 3x + 4)$
35. $4y^2(11y^3 - 6y - 5)$ **37.** $7ab(2ab^2 + 5b - 7a^2)$
39. $(y + 1)(x + z)$ **41.** $(b - 4)(a - c)$
43. $(x + 3)(x + 6)$ **45.** $(x + 1)(2x - 3)$
47. $(x + y)(5 + b)$ **49.** $(x - y)(b - c)$
51. $(a + b)(c + 1)$ **53.** $(x + 5)(x + 12)$
55. $(x - 2)(x - 8)$ **57.** $(2x + 1)(x - 5)$
59. $(2n - 1)(3n - 4)$ **61.** $\{0, 8\}$ **63.** $\{-1, 0\}$
65. $\{0, 5\}$ **67.** $\left\{0, \frac{3}{2}\right\}$ **69.** $\left\{-\frac{3}{7}, 0\right\}$ **71.** $\{-5, 0\}$
73. $\left\{0, \frac{3}{2}\right\}$ **75.** $\{0, 7\}$ **77.** $\{0, 13\}$ **79.** $\left\{-\frac{5}{2}, 0\right\}$
81. $\{-5, 4\}$ **83.** $\{4, 6\}$ **85.** 0 o 9 **87.** 20 unidades **89.** $\frac{4}{\pi}$
91. El cuadrado mide 3 pulgadas por 3 pulgadas y el rectángulo mide 3 pulgadas por 6 pulgadas. **95.** **(a)** \$116 **(c)** \$750
97. $x = 0$ o $x = \frac{c}{b^2}$ **99.** $y = \frac{c}{1 + a - b}$

Conjunto de problemas 6.2 (página 247)

1. $(x - 1)(x + 1)$ **3.** $(x - 10)(x + 10)$
5. $(x - 2y)(x + 2y)$ **7.** $(3x - y)(3x + y)$
9. $(6a - 5b)(6a + 5b)$ **11.** $(1 - 2n)(1 + 2n)$
13. $5(x - 2)(x + 2)$ **15.** $8(x^2 + 4)$
17. $2(x - 3y)(x + 3y)$ **19.** $x(x - 5)(x + 5)$
21. No factorizable **23.** $9x(5x - 4y)$
25. $4(3 - x)(3 + x)$ **27.** $4a^2(a^2 + 4)$
29. $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$ **31.** $x^2(x^2 + 1)$
33. $3x(x^2 + 16)$ **35.** $5x(1 - 2x)(1 + 2x)$
37. $4(x - 4)(x + 4)$ **39.** $3xy(5x - 2y)(5x + 2y)$
41. $(2x + 3y)(2x - 3y)(4x^2 + 9y^2)$
43. $(3 + x)(3 - x)(9 + x^2)$
45. $\{-3, 3\}$ **47.** $\{-2, 2\}$ **49.** $\left\{-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right\}$ **51.** $\{-11, 11\}$
53. $\left\{-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right\}$ **55.** $\{-5, 5\}$ **57.** $\{-4, 0, 4\}$
59. $\{-4, 0, 4\}$ **61.** $\left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$ **63.** $\{-10, 0, 10\}$
65. $\left\{-\frac{9}{8}, \frac{9}{8}\right\}$ **67.** $\left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$ **69.** -7 o 7
71. $-4, 0,$ o 4 **73.** 3 pulgadas y 15 pulgadas
75. El largo mide 20 centímetros y el ancho mide 8 centímetros. **77.** 4 metros y 8 metros
79. 5 centímetros **85.** $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$
87. $(n + 4)(n^2 - 4n + 16)$
89. $(3a - 4b)(9a^2 + 12ab + 16b^2)$
91. $(1 + 3a)(1 - 3a + 9a^2)$
93. $(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$
95. $(3x - 2y)(9x^2 + 6xy + 4y^2)$
97. $(5x + 2y)(25x^2 - 10xy + 4y^2)$
99. $(4 + x)(16 - 4x + x^2)$

Conjunto de problemas 6.3 (página 255)

1. $(x + 4)(x + 6)$ **3.** $(x + 5)(x + 8)$ **5.** $(x - 2)(x - 9)$
7. $(n - 7)(n - 4)$ **9.** $(n + 9)(n - 3)$
11. $(n - 10)(n + 4)$ **13.** No factorizable
15. $(x - 6)(x - 12)$ **17.** $(x + 11y)(x - 6y)$
19. $(y - 9)(y + 8)$ **21.** $(x + 5)(x + 16)$
23. $(x + 12)(x - 6)$ **25.** No factorizable
27. $(x - 2y)(x + 5y)$ **29.** $(a - 8b)(a + 4b)$
31. $\{-7, -3\}$ **33.** $\{3, 6\}$ **35.** $\{-2, 5\}$ **37.** $\{-9, 4\}$
39. $\{-4, 10\}$ **41.** $\{-8, 7\}$ **43.** $\{2, 14\}$ **45.** $\{-12, 1\}$
47. $\{2, 8\}$ **49.** $\{-6, 4\}$ **51.** 7 y 8 o -7 y -8
53. 12 y 14 **55.** $-4, -3, -2,$ y -1 o 7, 8, 9, y 10
57. 4 y 7 o 0 y 3
59. El largo mide 9 pulgadas y el ancho 6 pulgadas.
61. 9 centímetros por 6 centímetros **63.** 7 filas
65. 8 pies, 15 pies y 17 pies **67.** 6 pulgadas y 8 pulgadas
73. $(x^a + 8)(x^a + 5)$ **75.** $(x^a + 9)(x^a - 3)$

Conjunto de problemas 6.4 (página 261)

1. $(3x + 1)(x + 2)$ **3.** $(2x + 5)(3x + 2)$
5. $(4x - 1)(x - 6)$ **7.** $(4x - 5)(3x - 4)$
9. $(5y + 2)(y - 7)$ **11.** $2(2n - 3)(n + 8)$
13. No factorizable **15.** $(3x + 7)(x + 1)$
17. $(7x - 2)(x - 4)$ **19.** $(4x + 7)(2x - 3)$
21. $t(3t + 2)(3t - 7)$ **23.** $(2x + 5)(x - 2)$
25. No factorizable **27.** $(2x + 7)(x + 2)$

29. $(2x - 3)(2x + 5)$ **31.** $(4n - 1)(n + 2)$
33. $(3x - 5)(2x + 1)$ **35.** $(2x + 9)(x + 3)$
37. $(3a + 1)(7a - 2)$ **39.** $(5a + 4)(a - 3)$
41. $3(2x + 3)(2x + 3)$ **43.** $(2x - y)(3x - y)$
45. $(2x + 3y)(x - 2y)$ **47.** $(x - 3y)(5x - 2y)$
49. $(8x + y)(x - 7y)$ **51.** $\left\{-6, -\frac{1}{2}\right\}$
53. $\left\{-\frac{3}{2}, -1\right\}$ **55.** $\left\{\frac{1}{3}, 8\right\}$ **57.** $\left\{2, \frac{5}{2}\right\}$
59. $\left\{-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right\}$ **61.** $\left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}$ **63.** $\left\{-2, -\frac{3}{7}\right\}$
65. $\left\{-\frac{7}{3}, -2\right\}$ **67.** $\left\{-\frac{3}{5}, 2\right\}$ **69.** $\left\{-2, -\frac{3}{5}\right\}$
71. $\left\{-5, -\frac{2}{3}\right\}$ **73.** $\left\{-2, \frac{5}{3}\right\}$ **75.** $\left\{-2, \frac{4}{3}\right\}$

Conjunto de problemas 6.5 (página 269)

1. $(x + 2)^2$ **3.** $(x - 5)^2$ **5.** $(3n + 2)^2$ **7.** $(4a - 1)^2$
9. $(2 + 9x)^2$ **11.** $(4x - 3y)^2$ **13.** $(2x + 1)(x + 8)$
15. $2x(x - 6)(x + 6)$ **17.** $(n - 12)(n + 5)$
19. No factorizable **21.** $8(x^2 + 9)$ **23.** $(3x + 5)^2$
25. $5(x + 2)(3x + 7)$ **27.** $(2x + 3y)(2x - y)$
29. $(x + 5)(y - 8)$ **31.** $(2a + 5)(b + 7)$
33. $(8p - 6)(3m - 4)$ **35.** $(5x - y)(4x + 7y)$
37. $(a + 5)(b - 3)$ **39.** $3(2x - 3)(4x + 9)$
41. $6(2x^2 + x + 5)$ **43.** $(x^2 + 2)(x - 5)$
45. $5(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$ **47.** $(x - 4)(y - 2)$
49. $(x + 2y)(x + 1)$ **51.** $(x + 6y)^2$ **53.** $\{0, 5\}$
55. $\{-3, 12\}$ **57.** $\{-2, 0, 2\}$ **59.** $\left\{-\frac{2}{3}, \frac{11}{2}\right\}$
61. $\left\{\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right\}$ **63.** $\{-3, -1\}$ **65.** $\{0, 6\}$ **67.** $\{-4, 0, 6\}$
69. $\{-4, -3\}$ **71.** $\{-8, 4\}$ **73.** $\left\{-\frac{10}{3}, 1\right\}$ **75.** $\{0, 6\}$
77. $\left\{\frac{4}{3}\right\}$ **79.** $\{-5, 0\}$ **81.** $\left\{-\frac{5}{3}, 1\right\}$
83. $\frac{5}{4}$ y 12 o -5 y -3 **85.** -1 y 1 o $-\frac{1}{2}$ y 2
87. 4 y 9 o $-\frac{24}{5}$ y $-\frac{43}{5}$
89. 6 filas y 9 sillas por fila.
91. Un cuadrado mide 6 pies por 6 pies y el otro mide 18 pies por 18 pies.
93. 11 centímetros de largo y 5 centímetros de ancho.
95. El lado mide 17 pulgadas y la altura a ese lado mide 6 pulgadas.
97. $1\frac{1}{2}$ pulgadas **99.** 6 pulgadas y 12 pulgadas

Capítulo 6 Problemas de muestra (página 271)

1. $7xy^2$ **2.** $6y(2xy - 3 + 7x)$ **3.** $(2x - 3)(y + 2)$
4. $(7x + 3y)(7x - 3y)$ **5.** $(x - 3)(x + 7)$
6. **(a)** $(5x + 1)(x - 3)$ **(b)** $(3x + 1)(x + 4)$ **7.** $(8x - 3)^2$
8. $5(x - y)^2$ **9.** $\{0, 6\}$ **10.** 6 pies, 8 pies

Capítulo 6 Conjunto de problemas de repaso (página 273)

1. $(x - 2)(x - 7)$ **2.** $3x(x + 7)$
3. $(3x + 2)(3x - 2)$ **4.** $(2x - 1)(2x + 5)$ **5.** $(5x - 6)^2$
6. $n(n + 5)(n + 8)$ **7.** $(y + 12)(y - 1)$ **8.** $3xy(y + 2x)$
9. $(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$ **10.** $(2x - 3)(x + 3)$
11. No factorizable **12.** $(4x - 7)(x + 1)$
13. $3(n + 6)(n - 5)$ **14.** $x(x + y)(x - y)$
15. $(2x - y)(x + 2y)$ **16.** $2(n - 4)(2n + 5)$
17. $(x + y)(5 + a)$ **18.** $(7t - 4)(3t + 1)$
19. $2x(x + 1)(x - 1)$ **20.** $3x(x + 6)(x - 6)$
21. $(4x + 5)^2$ **22.** $(y - 3)(x - 2)$
23. $(5x + y)(3x - 2y)$ **24.** $n^2(2n - 1)(3n - 1)$
25. $\{-6, 2\}$ **26.** $\{0, 11\}$ **27.** $\left\{-4, \frac{5}{2}\right\}$ **28.** $\left\{-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right\}$
29. $\{-2, 2\}$ **30.** $\left\{-\frac{5}{4}\right\}$ **31.** $\{-1, 0, 1\}$ **32.** $\left\{-2, -\frac{2}{3}\right\}$
33. $\{-7, 4\}$ **34.** $\{-5, 5\}$ **35.** $\left\{-2, \frac{1}{5}\right\}$ **36.** $\left\{-\frac{7}{2}, 1\right\}$
37. $\{-2, 0, 2\}$ **38.** $\{8, 12\}$ **39.** $\left\{-5, \frac{3}{4}\right\}$ **40.** $\{-2, 3\}$
41. $\left\{-\frac{7}{3}, \frac{5}{2}\right\}$ **42.** $\{-9, 6\}$ **43.** $\left\{-5, \frac{3}{2}\right\}$ **44.** $\left\{\frac{1}{2}, 4\right\}$
45. $-\frac{8}{3}$ y $-\frac{19}{3}$ o 4 y 7
46. El largo mide 8 centímetros y el ancho 2 centímetros.
47. Un cuadrado de 2 por 2 pulgadas y un cuadrado de 10 por 10 pulgadas.
48. 8 por 15 por 17 **49.** $-\frac{13}{6}$ y -12 o 2 y 13
50. 7, 9 y 11 **51.** 4 repisas **52.** Un cuadrado de 5 por 5 yardas y un rectángulo de 5 por 40 yardas
53. -18 y -17 o 17 y 18 **54.** 6 unidades
55. 2 metros y 7 metros **56.** 9 y 11
57. 2 centímetros **58.** 15 pies

Capítulo 6 Examen (página 275)

1. $(x + 5)(x - 2)$ **2.** $(x + 3)(x - 8)$
3. $2x(x + 1)(x - 1)$ **4.** $(x + 9)(x + 12)$
5. $3(2n + 1)(n + 2)$ **6.** $(x + y)(a + 2b)$
7. $(2x - 3)(2x + 5)$ **8.** $6(x^2 + 4)$
9. $2x(x - 7)(x - 3)$ **10.** $(6 - x)(2 + x)$
11. $\{-3, 3\}$ **12.** $\{-6, 1\}$ **13.** $\{0, 8\}$ **14.** $\left\{-\frac{5}{2}, \frac{2}{3}\right\}$
15. $\{-6, 2\}$ **16.** $\{-12, -4, 0\}$ **17.** $\{5, 9\}$
18. $\left\{-4, \frac{1}{3}\right\}$ **19.** $\left\{-4, \frac{2}{3}\right\}$ **20.** $\{-5, 0, 5\}$ **21.** $\left\{\frac{7}{5}\right\}$
22. 14 pulgadas **23.** 12 centímetros
24. 16 sillas por fila **25.** 12 unidades

Capítulo 7

Conjunto de problemas 7.1 (página 281)

1. $\frac{3x}{7y}$ **3.** $\frac{3y}{8}$ **5.** $-\frac{3xy}{5}$ **7.** $\frac{3y}{4x^2}$ **9.** $-\frac{2b^2}{9}$ **11.** $\frac{4xy}{9z}$

13. $\frac{y}{x-2}$ **15.** $\frac{2x+3y}{3}$ **17.** $\frac{x+2}{x-7}$ **19.** -1 **21.** -3

23. $-4x$ **25.** $\frac{x+1}{3x}$ **27.** $\frac{x+y}{x}$ **29.** $\frac{x(2x-5y)}{2(x+4y)}$

31. $\frac{n}{n+1}$ **33.** $\frac{2n-1}{n-3}$ **35.** $\frac{2x+7}{3x+4}$ **37.** $\frac{3}{4(x-1)}$

39. $\frac{x+9}{x+3}$ **41.** $\frac{2a-1}{3a-1}$ **43.** $\frac{x+3y}{2x+y}$ **45.** $-\frac{x-3}{x}$

47. $\frac{n+7}{8}$ **49.** $\frac{2n-3}{n+1}$ **51.** $\frac{y-12}{y-14}$ **53.** $\frac{1+x}{x}$

55. $\frac{2+x}{4+5x}$ **57.** $-\frac{x+9}{x+6}$ **59.** $-\frac{1}{2}$ **63.** $\frac{y-3}{y+5}$

65. $\frac{x+1}{x+5}$ **67.** $\frac{1}{x^6}$ **69.** $\frac{1}{x^3y^2}$ **71.** $-\frac{4}{a^3}$

Conjunto de problemas 7.2 (página 285)

1. $\frac{1}{6}$ **3.** $-\frac{9}{14}$ **5.** $-\frac{17}{19}$ **7.** $\frac{2x^2}{7y}$ **9.** $-\frac{3n^2}{10}$ **11.** $2a$

13. $\frac{10b^3}{27}$ **15.** $\frac{3x^2y}{2}$ **17.** $-\frac{4}{5b^3}$ **19.** $\frac{s}{17}$ **21.** $\frac{x-y}{x}$

23. $\frac{1}{5}$ **25.** $\frac{3a}{14}$ **27.** $\frac{5(x+6)}{x+9}$ **29.** $\frac{3y(2x-y)}{2(x+y)}$

31. $\frac{a}{(5a+2)(3a+1)}$ **33.** $\frac{2x(x+4)}{5y(x+8)}$ **35.** $\frac{5}{x+y}$

37. $\frac{4t+1}{3(4t+3)}$ **39.** 4 **41.** $\frac{y^2}{3}$ **43.** $\frac{x-1}{y^2(1-y)(x-y)}$

45. $\frac{x+6}{x}$

Conjunto de problemas 7.3 (página 291)

1. $\frac{17}{x}$ **3.** $\frac{2}{3x}$ **5.** $\frac{4}{n}$ **7.** $-\frac{1}{x^2}$ **9.** $\frac{x+4}{x}$ **11.** $-\frac{3}{x-1}$

13. 1 **15.** $\frac{5t+2}{4}$ **17.** $\frac{3a+8}{3}$ **19.** $\frac{5n+4}{4}$

21. $-n-1$ **23.** $\frac{-3x-5}{7x}$ **25.** $\frac{9}{4}$ **27.** 3 **29.** $-\frac{1}{7x}$

31. $a-2$ **33.** $\frac{3}{x-6}$ **35.** $\frac{13x}{8}$ **37.** $-\frac{3n}{4}$ **39.** $\frac{11y}{12}$

41. $\frac{47x}{21}$ **43.** $\frac{14x}{15}$ **45.** $\frac{13n}{24}$ **47.** $\frac{7x-14}{10}$ **49.** $\frac{4x}{9}$

51. $\frac{18n+11}{12}$ **53.** $\frac{9n-14}{18}$ **55.** $\frac{7x}{24}$ **57.** $\frac{-23x-18}{60}$

59. $\frac{19}{24x}$ **61.** $\frac{1}{18y}$ **63.** $\frac{20x-33}{48x^2}$ **65.** $\frac{25}{12x}$

67. $\frac{10x-35}{x(x-5)}$ **69.** $\frac{-n+3}{n(n-1)}$ **71.** $\frac{-2n+16}{n(n+4)}$

73. $\frac{6}{x(2x+1)}$ **75.** $\frac{10x+12}{(x+4)(x-3)}$ **77.** $\frac{-6x+21}{(x-2)(x+1)}$

79. $\frac{x+7}{(2x-1)(3x+1)}$ **85.** $\frac{4}{x-3}$ **87.** $\frac{-6}{a-1}$

89. $\frac{n+3}{2n-1}$

Conjunto de problemas 7.4 (página 299)

1. $\frac{3x-8}{x(x-4)}$ **3.** $\frac{-5x-3}{x(x+2)}$ **5.** $\frac{8n-50}{n(n-6)}$ **7.** $-\frac{4}{n+1}$

9. $\frac{5x-7}{2x(x-1)}$ **11.** $\frac{5x-17}{(x+4)(x-4)}$ **13.** $\frac{4}{x+1}$

15. $\frac{11a-6}{a(a-2)(a+2)}$ **17.** $\frac{12}{x(x-6)(x+6)}$

19. $\frac{n+8}{3(n+4)(n-4)}$ **21.** $\frac{19x}{6(3x+2)}$ **23.** $\frac{-2x+17}{15(x+1)}$

25. $\frac{5x+6}{(x+3)(x+4)(x-3)}$ **27.** $\frac{x^2-10x-20}{(x+2)(x+4)(x-5)}$

29. $\frac{a-b}{ab}$ **31.** $\frac{8x-14}{(x-5)(x+5)}$ **33.** $\frac{15x+4}{x(x-2)(x+2)}$

35. $\frac{4x-4}{(x+5)(x+2)}$ **37.** $\frac{-2x+6}{(3x-5)(x+4)}$ **39.** $\frac{3}{x+4}$

41. $-\frac{1}{2}$ **43.** $\frac{10}{3}$ **45.** $\frac{28}{27}$ **47.** $\frac{y}{3x}$ **49.** $\frac{2y+3x}{5y-x}$

51. $\frac{x^2-4y}{7xy-3x^2}$ **53.** $\frac{6+2x}{3+4x}$ **55.** $\frac{9-24x}{10x+42}$ **57.** $\frac{x^2+2x}{6x+4}$

59. $\frac{-2x+3}{4x-1}$ **61.** $\frac{m}{40}$ **63.** $\frac{k}{r}$ **65.** $\frac{d}{l}$ **67.** $\frac{34}{n}$ **69.** $\frac{47}{l}$

71. $\frac{96}{b}$ **73.** $\frac{-n^2+n-1}{n-1}$ **75.** $\frac{3x^2-4x+2}{4x-2}$

Conjunto de problemas 7.5 (página 305)

1. $\{12\}$ **3.** $\left\{-\frac{2}{21}\right\}$ **5.** $\{4\}$ **7.** $\{-1\}$ **9.** $\{3\}$

11. $\{-38\}$ **13.** $\{2\}$ **15.** $\{2\}$ **17.** $\{6\}$ **19.** $\left\{\frac{5}{18}\right\}$

21. $\left\{-\frac{7}{10}\right\}$ **23.** $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ **25.** $\{8\}$ **27.** $\{37\}$ **29.** $\varnothing$

31. $\{39\}$ **33.** $\{-1\}$ **35.** $\{-6\}$ **37.** $\left\{-\frac{2}{3}\right\}$

39. $\left\{\frac{12}{7}\right\}$ **41.** $\frac{40}{48}$ **43.** 10 **45.** 48° y 72° **47.** 60°

49. 15 millas por hora
51. 50 millas por hora para Dave y 54 millas por hora para Kent
57. Todos los números reales excepto 0
59. Todos los números reales excepto -2 y -3.

Conjunto de problemas 7.6 (página 314)

1. $\{-2\}$ **3.** $\{5\}$ **5.** $\left\{\frac{9}{2}\right\}$ **7.** $\left\{-\frac{49}{10}\right\}$ **9.** $\left\{\frac{2}{3}\right\}$

11. $\left\{\frac{4}{3}\right\}$ **13.** $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ **15.** $\left\{\frac{11}{3}\right\}$ **17.** $\left\{\frac{13}{4}\right\}$

19. $\left\{-1, -\frac{5}{8}\right\}$ **21.** $\left\{\frac{1}{4}, 4\right\}$ **23.** $\left\{-\frac{5}{2}, 6\right\}$ **25.** $\{5\}$

27. $\{-21\}$ **29.** $\{2\}$ **31.** $\{-8, 1\}$ **33.** $\frac{1}{2}$ o 4

35. $-\frac{2}{5}$ o $\frac{5}{2}$

37. 17 millas por hora para Tom y 20 millas por hora para Celia

39. 16 millas por hora para el viaje de ida y 12 millas por hora en el viaje de regreso

41. 30 minutos **43.** 60 minutos para Mike y 120 minutos para Barry **45.** 9 horas **47.** 4 minutos

49. 10 ostras por minutos para Tchaika y 15 ostras por minutos para Pachena **53.** $\{0\}$

Capítulo 7 Problemas de muestra (página 317)

1. $\frac{x}{x+4}$ **2.** $\frac{y}{3(y-7)}$ **3.** $\frac{3}{2}$ **4.** $\frac{x+3}{2}$ **5.** $\frac{4x-9}{(x+3)(x-3)}$

6. $\frac{3+2x}{y-x}$ **7.** $\{15\}$ **8.** $\{8\}$ **9.** $\{-7\}$ **10.** $\frac{12}{15}$

11. Alex, 15 minutos; Chris, 30 minutos

Capítulo 7 Conjunto de problemas de repaso (página 322)

1. $\frac{7x^2}{9y^2}$ **2.** $\frac{x}{x+3}$ **3.** $\frac{3n+5}{n+2}$ **4.** $\frac{4a+3}{5a-2}$ **5.** $\frac{3x}{8}$

6. $x(x-3)$ **7.** $\frac{n-7}{n^2}$ **8.** $\frac{2a+1}{a+6}$ **9.** $\frac{22x-19}{20}$

10. $\frac{43x-3}{12x^2}$ **11.** $\frac{10n-7}{n(n-1)}$ **12.** $\frac{-a+8}{(a-4)(a-2)}$

13. $\frac{5x+9}{4x(x-3)}$ **14.** $\frac{5x-4}{(x+5)(x-5)(x+2)}$

15. $\frac{6x-37}{(x-7)(x+3)}$ **16.** $\frac{3y^2-4x}{4xy+5y^2}$ **17.** $\frac{2y-xy}{3xy+5x}$

18. $\{-2\}$ **19.** $\left\{-\frac{61}{60}\right\}$ **20.** $\{9\}$ **21.** $\{3\}$ **22.** $\left\{\frac{3}{4}\right\}$

23. $\{1\}$ **24.** $\{-7\}$ **25.** $\left\{\frac{1}{7}\right\}$ **26.** $\left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$

27. $\{-5, 10\}$ **28.** $\left\{-\frac{1}{5}\right\}$ **29.** $\{-1\}$

30. Becky $2\frac{2}{3}$ horas, Nancy 8 horas **31.** 1 o 2 **32.** $\frac{36}{72}$

33. La rapidez de Todd es 15 millas por hora y la de Lanette es 22 millas por hora **34.** 8 millas por hora

35. 60 minutos

Capítulo 7 Examen (página 323)

1. $\frac{8x^2y}{9}$ **2.** $\frac{x}{x-6}$ **3.** $\frac{2n+1}{3n+4}$ **4.** $\frac{2x-3}{x-5}$ **5.** $2x^2y^2$

6. $\frac{x-2}{x+3}$ **7.** $\frac{(x+4)^2}{x(x+7)}$ **8.** $\frac{6x+5}{24}$ **9.** $\frac{9n-4}{30}$

10. $\frac{41-15x}{18x}$ **11.** $\frac{2n-6}{n(n-1)}$ **12.** $\frac{5x-18}{4x(x+6)}$

13. $\frac{5x-11}{(x-4)(x+8)}$ **14.** $\frac{-13x+43}{(2x-5)(3x+4)(x-6)}$

15. $\{-5\}$ **16.** $\left\{-\frac{19}{16}\right\}$ **17.** $\left\{\frac{4}{3}, 3\right\}$ **18.** $\{-6, 8\}$

19. $\left\{-\frac{1}{5}, 2\right\}$ **20.** $\{-23\}$ **21.** $\{2\}$ **22.** $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$

23. $\frac{2}{3}$ o 3 **24.** 14 millas por hora **25.** 12 minutos

Capítulos 1-7 Conjunto de problemas de repaso acumulados (página 324)

1. $\frac{5}{2}$ **2.** 6 **3.** $\frac{17}{12}$ **4.** 0.6 **5.** 20 **6.** 0 **7.** 2 **8.** -3

9. $\frac{1}{27}$ **10.** $\frac{3}{2}$ **11.** 1 **12.** $\frac{12}{7}$ **13.** $-\frac{1}{16}$ **14.** $\frac{9}{4}$

15. $\frac{4}{25}$ **16.** $-\frac{1}{27}$ **17.** $\frac{19}{10x}$ **18.** $\frac{2y}{3x}$ **19.** $\frac{7x-2}{(x-6)(x+4)}$

20. $\frac{-x+12}{x^2(x-4)}$ **21.** $\frac{x-7}{3y}$ **22.** $\frac{-3x-4}{(x-4)(x+3)}$

23. $-35x^5y^5$ **24.** $81a^2b^6$ **25.** $-15n^4-18n^3+6n^2$

26. $15x^2+17x-4$ **27.** $4x^2+20x+25$

28. $2x^3+x^2-7x-2$ **29.** $x^4+x^3-6x^2+x+3$

30. $-6x^2+11x+7$ **31.** $3xy-6x^3y^3$ **32.** $7x+4$

33. $3x(x^2+5x+9)$ **34.** $(x+10)(x-10)$

35. $(5x-2)(x-4)$ **36.** $(4x+7)(2x-9)$

37. $(n+16)(n+9)$ **38.** $(x+y)(n-2)$

39. $3x(x+1)(x-1)$ **40.** $2x(x-9)(x+6)$

41. $(6x-5)^2$ **42.** $(3x+y)(x-2y)$ **43.** $\left\{\frac{16}{3}\right\}$

44. $\{-11, 0\}$ **45.** $\left\{\frac{1}{14}\right\}$ **46.** $\{15\}$ **47.** $\{-1, 1\}$

48. $\{-6, 1\}$ **49.** $\{2\}$ **50.** $\left\{\frac{11}{12}\right\}$ **51.** $\{1, 2\}$

52. $\left\{-\frac{1}{18}\right\}$ **53.** $\left\{-\frac{7}{2}, \frac{1}{3}\right\}$ **54.** $\left\{\frac{1}{2}, 8\right\}$ **55.** $\{-9, 2\}$

56. $\left\{\frac{16}{5}\right\}$ **57.** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ **58.** 6 pulgadas, 8 pulgadas, 10 pulgadas

59. 75 **60.** 100 mililitros **61.** 6 pies y 8 pies

62. 2.5 horas **63.** 7.5 centímetros **64.** 27 galones

65. 92 o mejor **66.** $\{1, 2, 3\}$

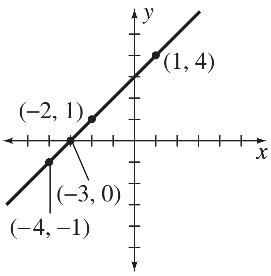
67. Todos los números reales mayores que $\frac{7}{2}$ **68.** 40 pints

69. 150% **70.** Green Leaf, \$0.29 por onza; Ever Fresh, \$0.25 por onza

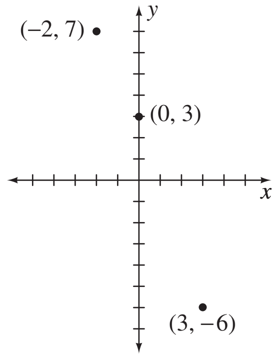
Capítulo 8

Conjunto de problemas 8.1 (página 335)

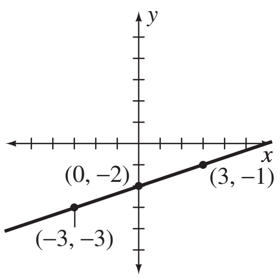
1. Sí



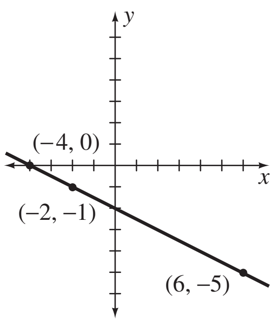
3. No



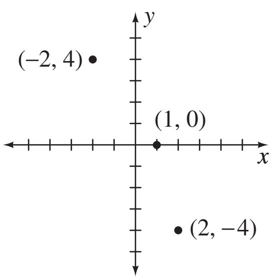
5. Sí



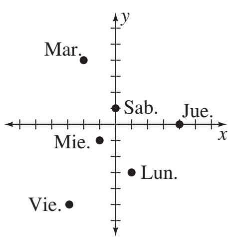
7. Sí



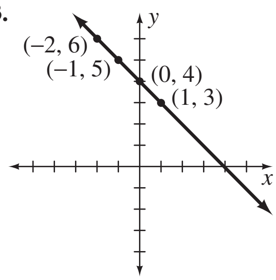
9. No



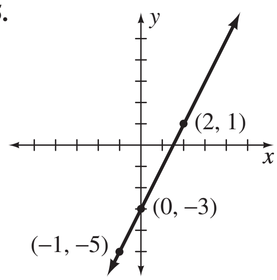
11.



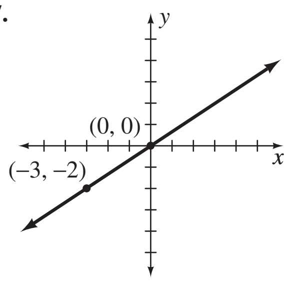
13.



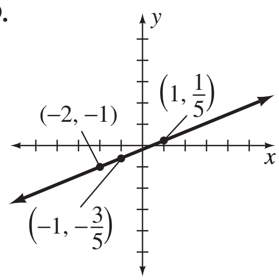
15.



17.



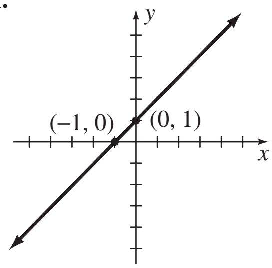
19.



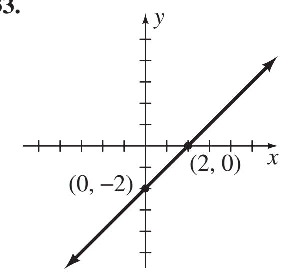
21. $y = -\frac{3}{7}x + \frac{13}{7}$ **23.** $x = 3y + 9$ **25.** $y = \frac{1}{5}x + \frac{14}{5}$

27. $x = \frac{1}{3}y - \frac{7}{3}$ **29.** $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$

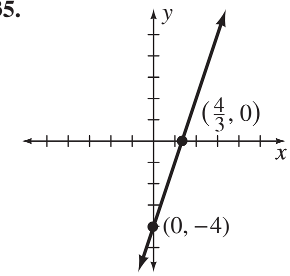
31.



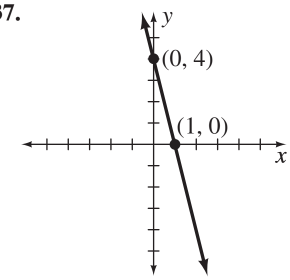
33.



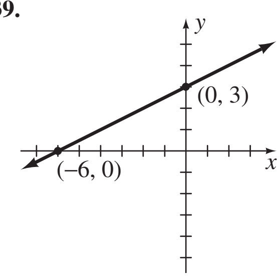
35.



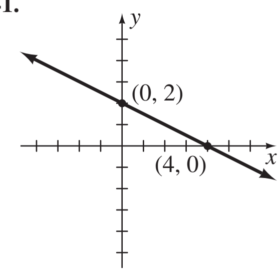
37.



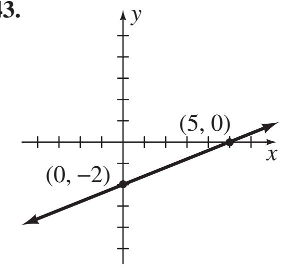
39.



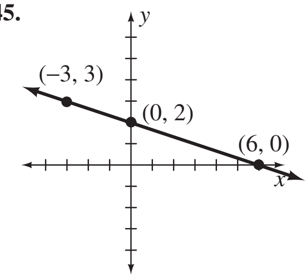
41.



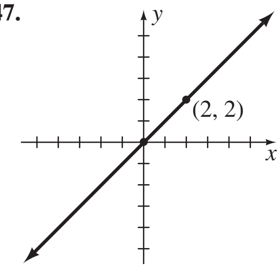
43.



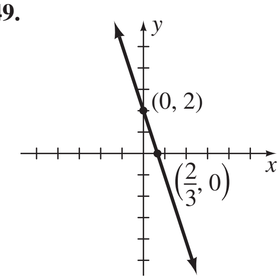
45.



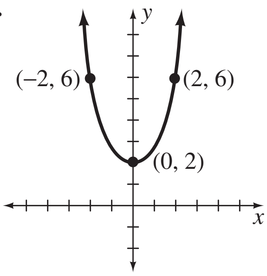
47.



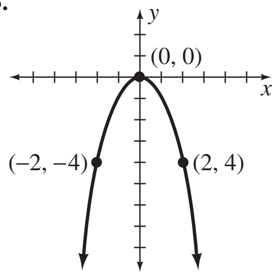
49.



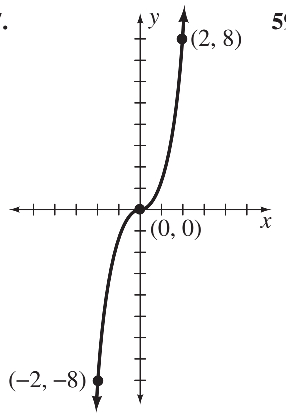
53.



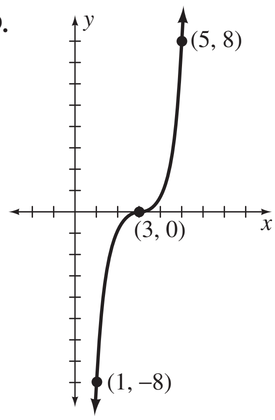
55.



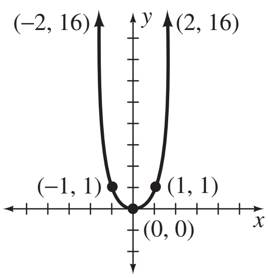
57.



59.

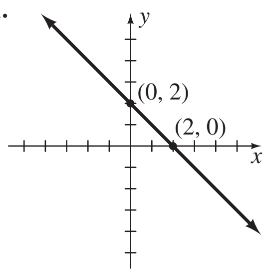


61.

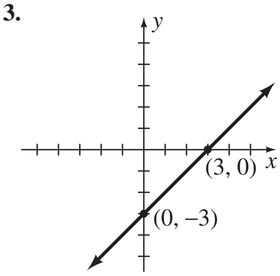


Conjunto de problemas 8.2 (página 342)

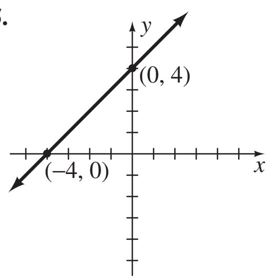
1.



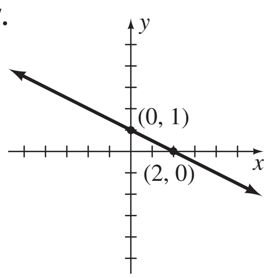
3.



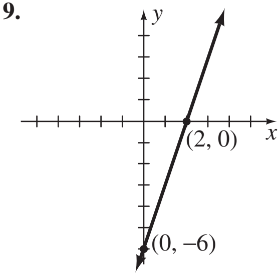
5.



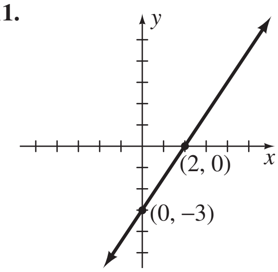
7.



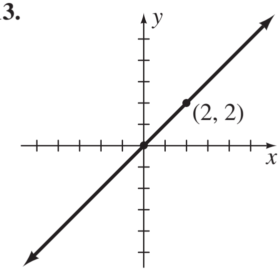
9.



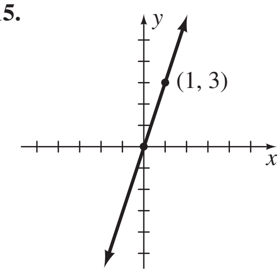
11.



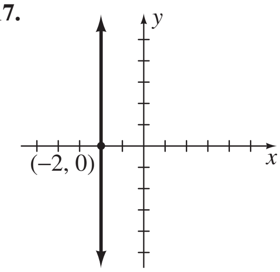
13.



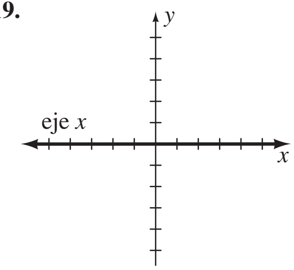
15.



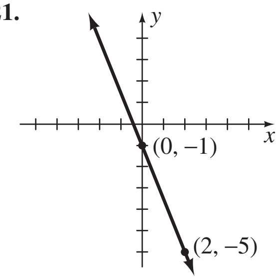
17.



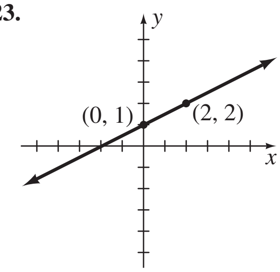
19.



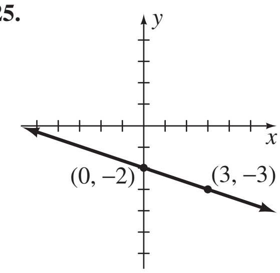
21.



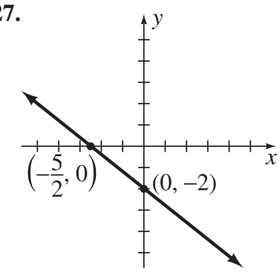
23.



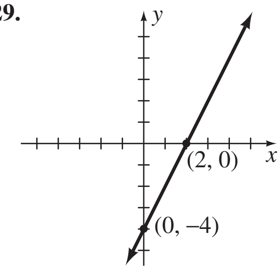
25.



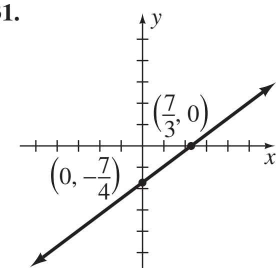
27.



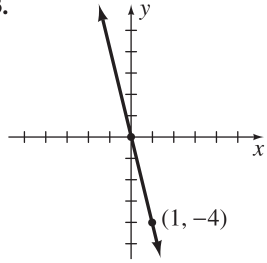
29.



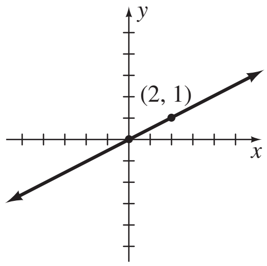
31.



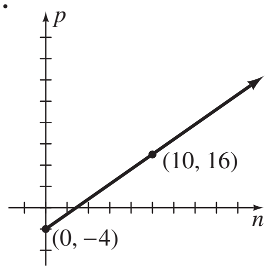
33.



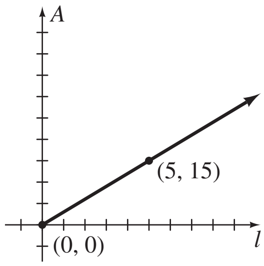
35.



37.



39.

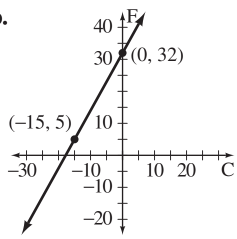


41. \$41.76; \$43.20; \$44.40; \$46.50; \$46.92

43. a.

C	0	5	10	15	20	−5	−10	−15	−20	−25
F	32	41	50	59	68	23	14	5	−4	−13

b.



d. 77°, 86°, −22°, −40°

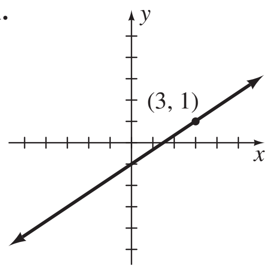
Conjunto de problemas 8.3 (página 349)

1. $\frac{3}{4}$ **3.** $\frac{7}{5}$ **5.** $-\frac{6}{5}$ **7.** $-\frac{10}{3}$ **9.** $\frac{3}{4}$ **11.** 0 **13.** $-\frac{3}{2}$

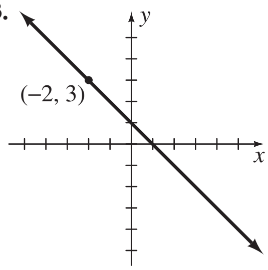
15. Indefinido **17.** 1 **19.** $\frac{b-d}{a-c}$ o $\frac{d-b}{c-a}$ **21.** 4

23. −6 **25–31.** Las respuestas varían **33.** Negativo
35. Positivo **37.** Cero **39.** Negativo

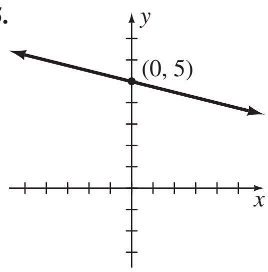
41.



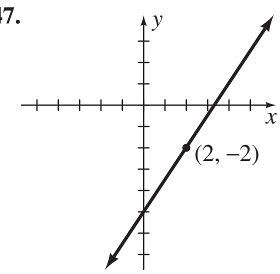
43.



45.



47.



49. $-\frac{3}{2}$ **51.** $\frac{5}{4}$ **53.** $-\frac{1}{5}$ **55.** 2 **57.** 0 **59.** $\frac{2}{5}$ **61.** $\frac{6}{5}$

63. −3 **65.** 4 **67.** $\frac{2}{3}$ **69.** 5.1% **71.** 32 cm

73. 1.0 pies

Conjunto de problemas 8.4 (página 360)

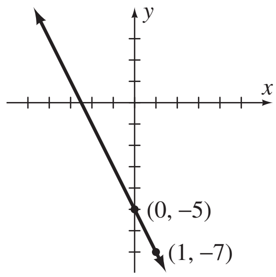
1. $2x - 3y = -5$ **3.** $x - 2y = 7$ **5.** $x + 3y = 20$
7. $0x + y = -7$ **9.** $4x + 9y = 0$ **11.** $3x - y = -16$
13. $7x - 5y = -1$ **15.** $3x + 2y = 5$ **17.** $x - y = 1$

19. $5x - 3y = 0$ **21.** $4x + 7y = 28$ **23.** $y = \frac{3}{5}x + 2$

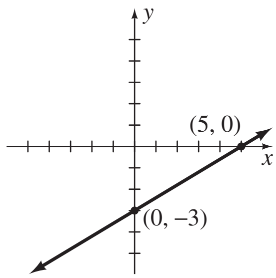
25. $y = 2x - 1$ **27.** $y = -\frac{1}{6}x - 4$ **29.** $y = -x + \frac{5}{2}$

31. $y = -\frac{5}{9}x - \frac{1}{2}$

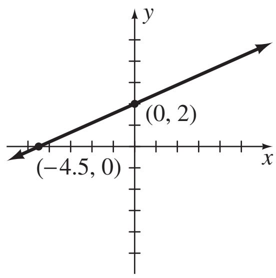
33. $m = -2, b = -5$



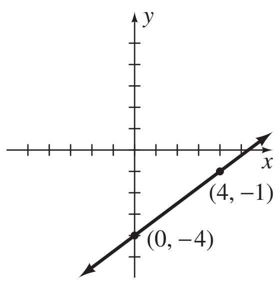
35. $m = \frac{3}{5}, b = -3$



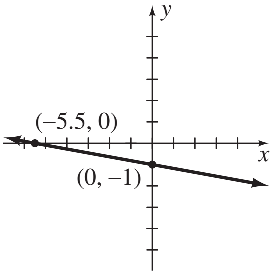
37. $m = \frac{4}{9}, b = 2$



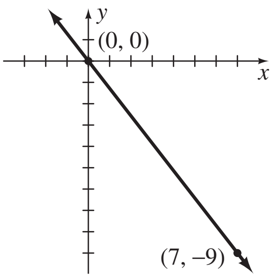
39. $m = \frac{3}{4}, b = -4$



41. $m = -\dfrac{2}{11}, b = -1$



43. $m = -\dfrac{9}{7}, b = 0$



45. $2x - y = 4$ **47.** $5x + 8y = -15$ **49.** $x + 0y = 2$
51. $0x + y = 6$ **53.** $x + 5y = 16$ **55.** $4x - 7y = 0$
57. $x + 2y = 5$ **59.** $3x + 2y = 0$

Conjunto de problemas 8.5 (página 369)

1. $\{(2, -1)\}$ **3.** $\{(2, 1)\}$ **5.** $\varnothing$ **7.** $\{(0, 0)\}$
9. $\{(1, -1)\}$ **11.** $\{(x, y) \mid y = -2x + 3\}$ **13.** $\{(1, 3)\}$
15. $\{(3, -2)\}$ **17.** $\{(2, 4)\}$ **19.** $\{(-2, -3)\}$ **21.** $\{(8, 12)\}$
23. $\{(-4, -6)\}$ **25.** $\{(-9, 3)\}$ **27.** $\varnothing$ **29.** $\left\{\left(5, \dfrac{3}{2}\right)\right\}$
31. $\left\{\left(\dfrac{9}{5}, -\dfrac{7}{25}\right)\right\}$ **33.** $\{(-2, -4)\}$ **35.** $\{(5, 2)\}$
37. $\{(-4, -8)\}$ **39.** $\left\{\left(\dfrac{11}{20}, \dfrac{7}{20}\right)\right\}$
41. $\{(x, y) \mid x - 2y = -3\}$ **43.** $\left\{\left(-\dfrac{3}{4}, -\dfrac{6}{5}\right)\right\}$
45. $\left\{\left(\dfrac{5}{27}, -\dfrac{26}{27}\right)\right\}$ **47.** \$2000 a 7% y \$8000 a 8%
49. \$4500 a 3% y \$7500 a 5% **51.** 34 y 97
53. 42 mujeres **55.** 20 pulgadas por 27 pulgadas
57. 30 pies por 20 pies **59.** 25°, 65°
61. 60 billetes de cinco dólares y 40 billetes de diez dólares
63. 2500 boletos de estudiante y 500 boletos generales.

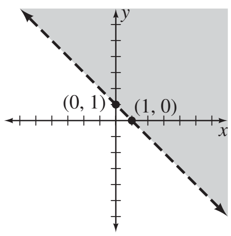
Conjunto de problemas 8.6 (página 377)

1. $\{(4, -3)\}$ **3.** $\{(-1, -3)\}$ **5.** $\{(-8, 2)\}$ **7.** $\{(-4, 0)\}$
9. $\{(1, -1)\}$ **11.** $\varnothing$ **13.** $\left\{\left(-\dfrac{1}{11}, \dfrac{4}{11}\right)\right\}$
15. $\left\{\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{3}\right)\right\}$ **17.** $\{(4, -9)\}$ **19.** $\{(7, 0)\}$
21. $\{(7, 12)\}$ **23.** $\left\{\left(\dfrac{7}{11}, \dfrac{2}{11}\right)\right\}$ **25.** $\varnothing$
27. $\left\{\left(\dfrac{51}{31}, -\dfrac{32}{31}\right)\right\}$ **29.** $\{(-2, -4)\}$ **31.** $\left\{\left(-1, -\dfrac{14}{3}\right)\right\}$
33. $\{(-6, 12)\}$ **35.** $\{(2, 8)\}$ **37.** $\{(-1, 3)\}$ **39.** $\{(16, -12)\}$

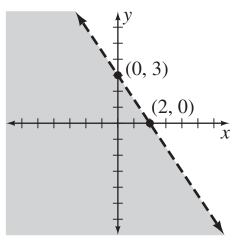
41. $\left\{\left(-\dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{2}\right)\right\}$ **43.** $\{(5, -5)\}$
45. 5 galones de solución al 10% y 15 galones de solución al 20% **47.** 14 libros a \$22 cada uno y 21 libros a \$34 cada uno
49. 40 cuartos dobles y 15 cuartos simples **51.** \$8 \$8 por pizza de pepperoni y \$6 por pizza de queso **53.** \$1.59
57. **a.** Consistente **c.** Consistente
e. Dependiente **g.** Inconsistente
59. $x = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_2b_1 - a_1b_2}$ y $y = \dfrac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}$

Conjunto de problemas 8.7 (página 384)

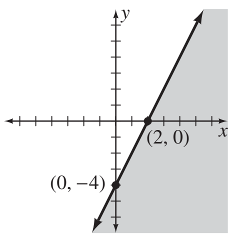
1.



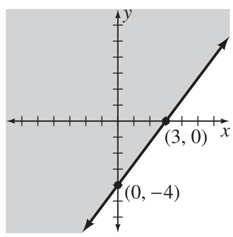
3.



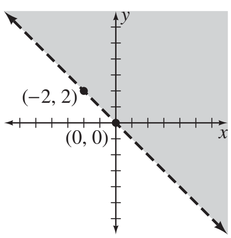
5.



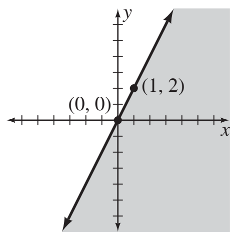
7.



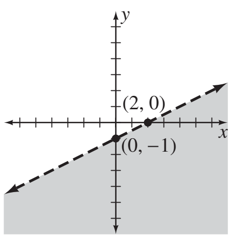
9.



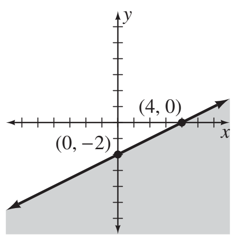
11.



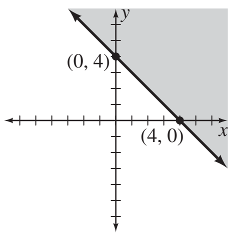
13.



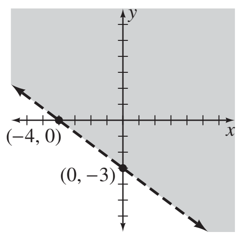
15.



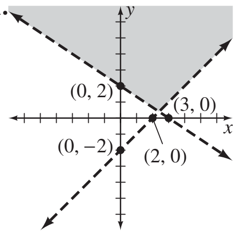
17.



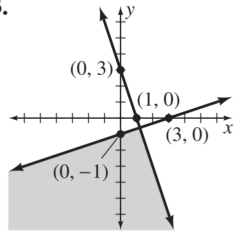
19.



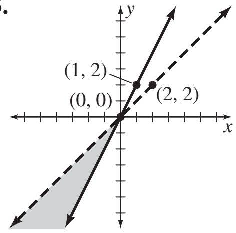
21.



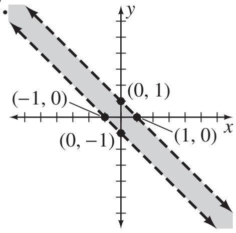
23.



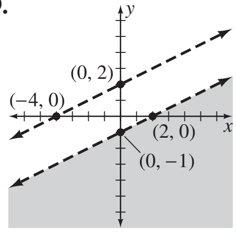
25.



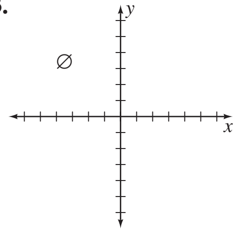
27.



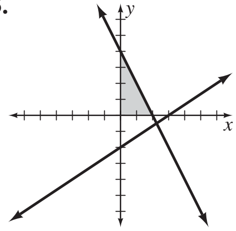
29.



33.

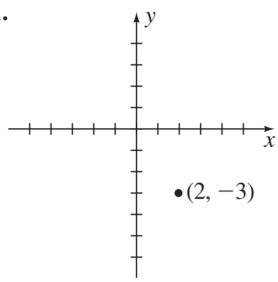


35.

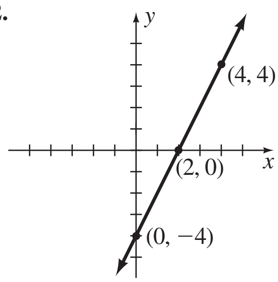


Capítulo 8 Problemas de muestra (página 385)

1.

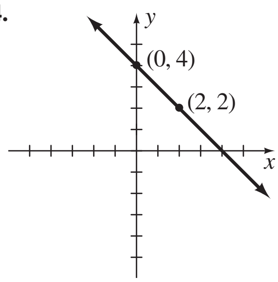


2.

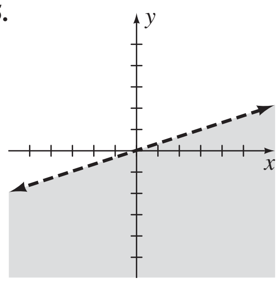


3. abscisa al origen es 4 y la ordenada al origen es 6.

4.

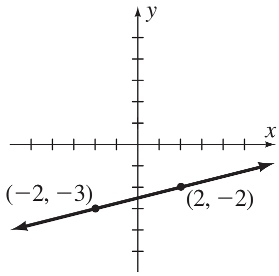


5.



6. $m = \frac{-2}{3}$

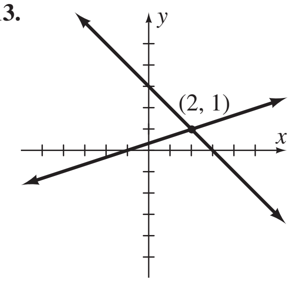
7.



8. $m = \frac{-1}{2}$ y la ordenada al origen es 4 **9.** 12 pulgadas

10. $y = -2x - 1$ **11.** $4x + y = 11$ **12.** $2x + 3y = 5$

13.



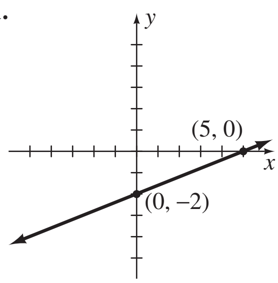
Las líneas se cruzan en el punto (2, 1), que es la solución del sistema.

14. $\{(-5, -3)\}$ **15.** $\{(-2, 5)\}$ **16.** $\{(4, 1)\}$

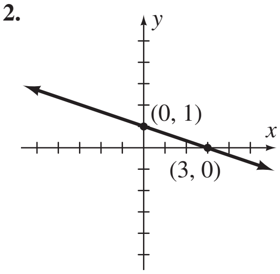
17. El número más pequeño es 31 y el más grande es 59.

Capítulo 8 Conjunto de problemas de repaso (página 392)

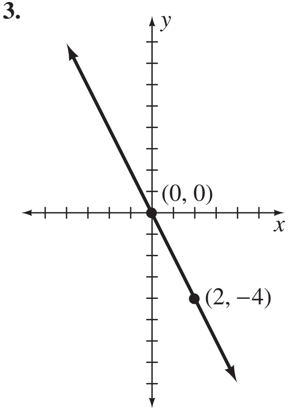
1.



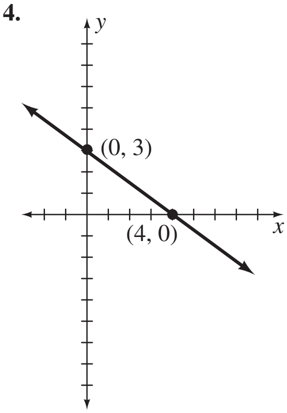
2.



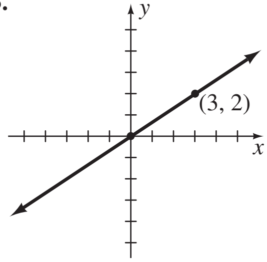
3.



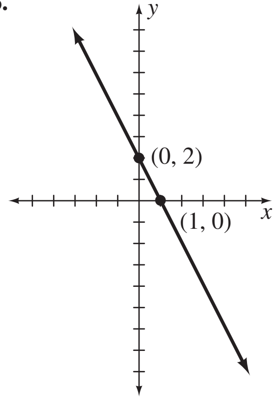
4.



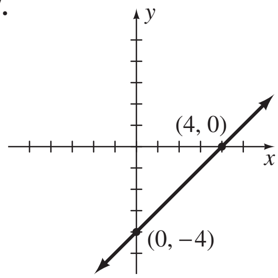
5.



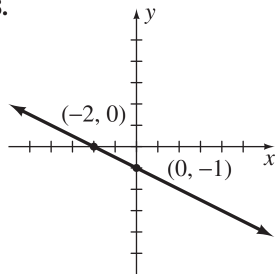
6.



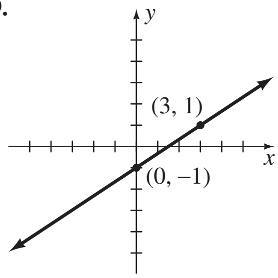
7.



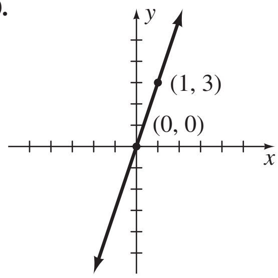
8.



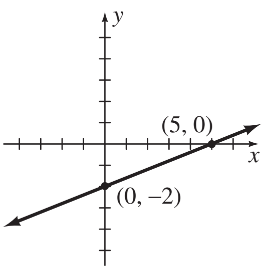
9.



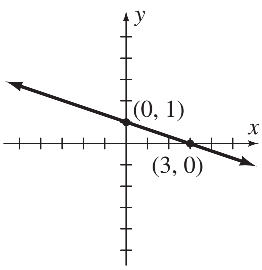
10.



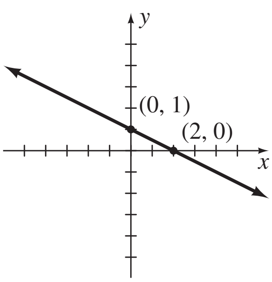
11. $m = \frac{2}{5}, b = -2$



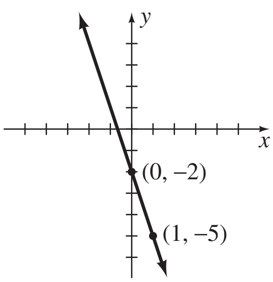
12. $m = -\frac{1}{3}, b = 1$



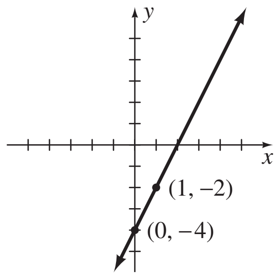
13. $m = -\frac{1}{2}, b = 1$



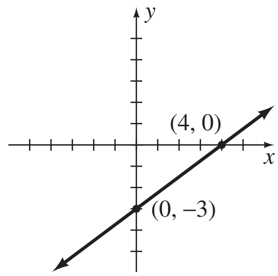
14. $m = -3, b = -2$



15. $m = 2, b = -4$



16. $m = \frac{3}{4}, b = -3$



17. $-\frac{9}{5}$ **18.** $\frac{5}{6}$ **19.** $5x + 7y = -11$ **20.** $8x - 3y = 1$

21. $2x - 9y = 9$ **22.** $x = 2$ **23.** $\{(3, -2)\}$

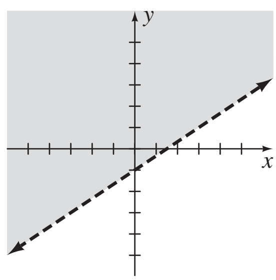
24. $\{(7, 13)\}$ **25.** $\{(16, -5)\}$ **26.** $\left\{\left(\frac{41}{23}, \frac{19}{23}\right)\right\}$

27. $\{(10, 25)\}$ **28.** $\{(-6, -8)\}$ **29.** $\{(400, 600)\}$ **30.** $\varnothing$

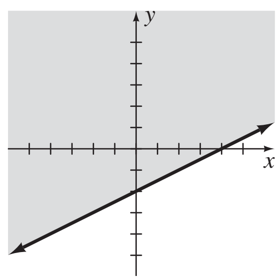
31. $\left\{\left(\frac{5}{16}, -\frac{17}{16}\right)\right\}$ **32.** $t = 4$ y $u = 8$

33. $t = 8$ y $u = 4$ **34.** $t = 3$ y $u = 7$ **35.** $\{(-9, 6)\}$

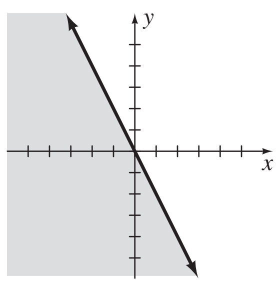
36.



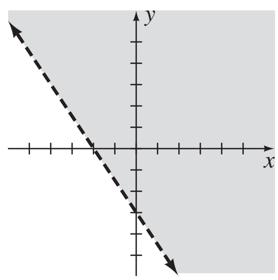
37.



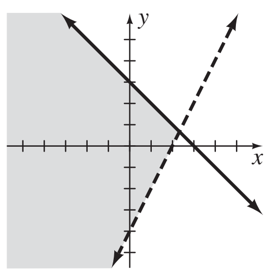
38.



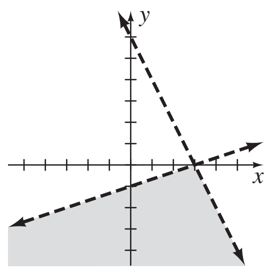
39.



40.



41.



42. 38 y 75 **43.** \$2500 a 6% y \$3000 a 8%

44. 18 monedas de cinco y 25 monedas de veinticinco centavos.

45. El largo mide 19 pulgadas y el ancho mide 6 pulgadas.

46. El largo mide 12 pulgadas y el ancho mide 7 pulgadas.

47. 21 monedas de diez y 11 de veinticinco centavos.

48. 32° y 58°

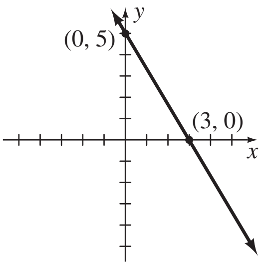
49. 50° y 130°

50. \$3.25 por una hamburguesa y \$2.50 por una malteada.

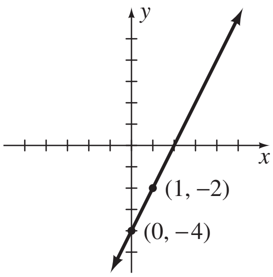
51. \$1.59 por jugo de naranja y \$0.99 por agua.

Capítulo 8 Examen (página 394)

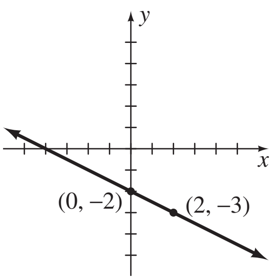
1. $m = -\frac{5}{3}, b = 5$



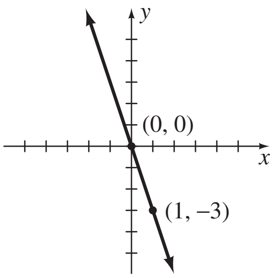
2. $m = 2, b = -4$



3. $m = -\frac{1}{2}, b = -2$

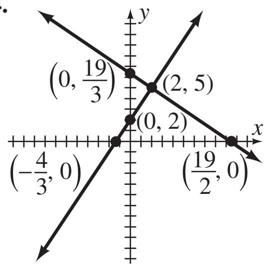


4. $m = -3, b = 0$



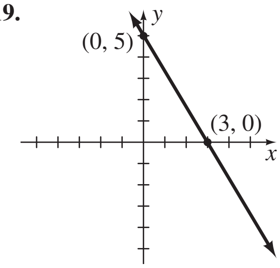
5. 8 **6.** 8 **7.** (7, 6), (11, 7) u otros
8. $(3, -2), (4, -5)$ u otros **9.** 4.6% **10.** -2
11. $3x + 5y = 20$ **12.** $4x - 9y = 34$ **13.** $3x - 2y = 0$

14.

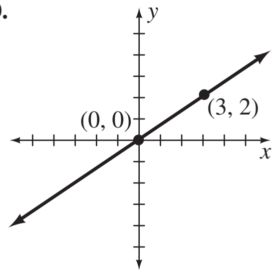


15. $\{(3, 4)\}$ **16.** $\{(-4, 6)\}$ **17.** $\{(-1, -4)\}$ **18.** $\{(3, -6)\}$

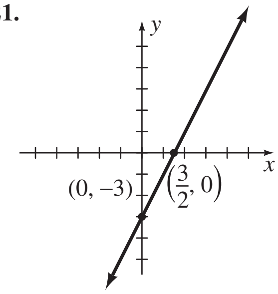
19.



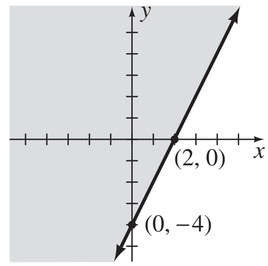
20.



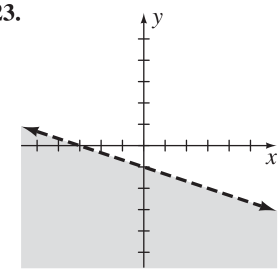
21.



22.



23.



24. Papel \$3.49, cuaderno \$2.29 **25.** 13 pulgadas

Capítulo 9

Conjunto de problemas 9.1 (página 401)

1. 7 **3.** -8 **5.** 11 **7.** 60 **9.** -40 **11.** 80 **13.** 18
15. $\frac{5}{3}$ **17.** 0.4 **19.** 3 **21.** 2 **23.** -9 **25.** -6 **27.** 24
29. 48 **31.** 28 **33.** 65 **35.** 58 **37.** 15 **39.** 21
41. 4.36 **43.** 7.07 **45.** 8.66 **47.** 9.75 **49.** 66 **51.** 34
53. 97 **55.** 20 **57.** 32 **59.** $21\sqrt{2}$ **61.** $8\sqrt{7}$
63. $11\sqrt[3]{2}$ **65.** $3\sqrt[3]{7} + 2\sqrt[3]{5}$ **67.** $-\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$
69. $-9\sqrt{7} - 2\sqrt{10}$ **71.** 17.3 **73.** 13.4 **75.** -1.4
77. 26.5 **79.** 4.1 **81.** 2.1 **83.** -29.8
85. 1.6 segundos; 2.1 segundos; 2.2 segundos
87. 2.2 segundos; 2.8 segundos; 18.2 segundos

Conjunto de problemas 9.2 (página 406)

1. $2\sqrt{6}$ **3.** $3\sqrt{2}$ **5.** $3\sqrt{3}$ **7.** $2\sqrt{10}$ **9.** $-3\sqrt[3]{2}$
11. $4\sqrt{5}$ **13.** $3\sqrt{13}$ **15.** $24\sqrt{2}$ **17.** $6\sqrt[3]{5}$
19. $-10\sqrt{5}$ **21.** $-32\sqrt{6}$ **23.** $3\sqrt{2}$ **25.** $\frac{3}{2}\sqrt{3}$
27. $-2\sqrt{5}$ **29.** $-\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ **31.** $xy\sqrt{y}$ **33.** $x\sqrt{2y}$
35. $2x\sqrt{2}$ **37.** $3a\sqrt{3ab}$ **39.** $4x\sqrt[3]{xy^2}$ **41.** $3x^2y\sqrt{7}$
43. $12x\sqrt{3}$ **45.** $-36x^3\sqrt{2x}$ **47.** $\frac{2}{3}\sqrt{6xy}$ **49.** $\frac{5x}{8}\sqrt[3]{2x}$
51. $-\frac{26}{3}a^4$ **53.** $33\sqrt{2}$ **55.** $3\sqrt{5}$ **57.** $18\sqrt[3]{2}$
59. $-2\sqrt{7}$ **61.** $9\sqrt{3}$ **63.** $2\sqrt{5}$ **65.** $-15\sqrt{2} - 55\sqrt{5}$
69. **(a)** $9\sqrt{2}$ **(c)** $5\sqrt{11}$

Conjunto de problemas 9.3 (página 412)

1. $\frac{4}{5}$ **3.** -3 **5.** $\frac{1}{8}$ **7.** $\frac{5}{4}$ **9.** $-\frac{5}{16}$ **11.** $\frac{\sqrt{19}}{5}$
13. $\frac{2\sqrt{2}}{7}$ **15.** $\frac{5\sqrt[3]{3}}{6}$ **17.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **19.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **21.** $\frac{\sqrt{10}}{4}$

23. $\sqrt{7}$ **25.** 3 **27.** $\frac{\sqrt{10}}{6}$ **29.** $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ **31.** $\frac{\sqrt{6}}{12}$

33. $\frac{2\sqrt{15}}{5}$ **35.** $\frac{4\sqrt{6}}{9}$ **37.** $\frac{\sqrt{21}}{8}$ **39.** $\frac{\sqrt{37}}{3}$ **41.** $\frac{3\sqrt{x}}{x}$

43. $\frac{5\sqrt{2x}}{2x}$ **45.** $\frac{\sqrt{3x}}{x}$ **47.** $\frac{2\sqrt{3}}{x}$ **49.** $\frac{\sqrt{10xy}}{5y}$

51. $\frac{\sqrt{15xy}}{9y}$ **53.** $\frac{x\sqrt{xy}}{2y}$ **55.** $\frac{3\sqrt{x}}{x^2}$ **57.** $\frac{4\sqrt{x}}{x^4}$

59. $\frac{3\sqrt{xy}}{2y^2}$ **61.** $\frac{22\sqrt{3}}{3}$ **63.** $\frac{19\sqrt{10}}{5}$ **65.** $-3\sqrt{5}$

67. $-\frac{14\sqrt{6}}{3}$ **69.** $-6\sqrt{3}$ **71.** $-7\sqrt{15}$ **75.** $\frac{\sqrt[3]{63}}{3}$

77. $\frac{2\sqrt[3]{5}}{5}$ **79.** $\frac{\sqrt[3]{14}}{4}$

Conjunto de problemas 9.4 (página 418)

1. $\sqrt{35}$ **3.** $4\sqrt{3}$ **5.** $5\sqrt{2}$ **7.** $3\sqrt[3]{2}$ **9.** $4\sqrt{6}$
11. $15\sqrt{21}$ **13.** $-10\sqrt[3]{3}$ **15.** 72 **17.** $40\sqrt{6}$
19. $24\sqrt{5}$ **21.** $\sqrt{6} + \sqrt{10}$ **23.** $2\sqrt{3} - 5\sqrt{6}$
25. $2 + \sqrt[3]{20}$ **27.** $6\sqrt{2} - 4\sqrt{6}$ **29.** $4\sqrt{6} - 8\sqrt{15}$
31. $56 + 15\sqrt{2}$ **33.** $-9 - 2\sqrt{6}$
35. $3\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 4\sqrt{3} + 6$ **37.** 15 **39.** 15 **41.** 51
43. $x\sqrt{y}$ **45.** $5x$ **47.** $12a\sqrt{b}$ **49.** $x\sqrt{6} - 2\sqrt{3xy}$
51. $x + 2\sqrt{x} - 15$ **53.** $x - 49$ **55.** $\frac{-3\sqrt{2} + 12}{14}$
57. $4\sqrt{6} + 8$ **59.** $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ **61.** $\frac{-20 - 30\sqrt{3}}{23}$
63. $\frac{4\sqrt{x} + 8}{x - 4}$ **65.** $\frac{x - 3\sqrt{x}}{x - 9}$
67. $\frac{a + 7\sqrt{a} + 10}{a - 25}$ **69.** $\frac{6 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \sqrt{6}}{7}$

Conjunto de problemas 9.5 (página 424)

1. $\{49\}$ **3.** $\{18\}$ **5.** $\varnothing$ **7.** $\left\{\frac{9}{4}\right\}$ **9.** $\left\{\frac{4}{9}\right\}$ **11.** $\{14\}$

13. $\varnothing$ **15.** $\left\{\frac{7}{3}\right\}$ **17.** $\{36\}$ **19.** $\{6\}$ **21.** $\{2\}$

23. $\left\{\frac{21}{4}\right\}$ **25.** $\{-3, -2\}$ **27.** $\{6\}$ **29.** $\{2\}$ **31.** $\{12\}$

33. $\{25\}$ **35.** $\{3\}$ **37.** $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ **39.** $\{2\}$

41. 56 pies; 106 pies; 148 pies
43. 3.2 pies; 5.1 pies; 7.3 pies **47.** $\{18\}$ **49.** $\{4, 12\}$
51. $\{57\}$ **53.** $\{110\}$ **55.** $\{252\}$

Capítulo 9 Problemas de muestra (página 426)

1. (a) 9 (b) -3 **2.** (a) $4\sqrt{6}$ (b) $2\sqrt[3]{4}$ **3.** $2y\sqrt{6xy}$
4. $4\sqrt{3}$ **5.** $\frac{\sqrt{3}}{7}$ **6.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$ **7.** $\frac{29\sqrt{5}}{5}$
8. (a) $3x\sqrt[3]{3y^2}$ (b) 4 **9.** $2(\sqrt{7} + 2)$
10. (a) $\{3\}$ (b) $\{4\}$ **11.** $f = \frac{S^2}{30D}$

Capítulo 9 Conjunto de problemas de repaso (página 430)

1. 8 **2.** -7 **3.** 40 **4.** $\frac{9}{5}$ **5.** $-\frac{2}{3}$ **6.** $\frac{7}{6}$ **7.** $2\sqrt{5}$
8. $4\sqrt{2}$ **9.** $10\sqrt{2}$ **10.** $4\sqrt{5}$ **11.** -10 **12.** $\sqrt[3]{5}$
13. $\frac{6\sqrt{7}}{7}$ **14.** $\frac{\sqrt{14}}{4}$ **15.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **16.** $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ **17.** 2
18. $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ **19.** $\frac{-\sqrt{6}}{3}$ **20.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **21.** 5.2 **22.** 1.2
23. 17.3 **24.** -6.9 **25.** $2ab\sqrt{3b}$ **26.** $5y^2\sqrt{2x}$
27. $4xy\sqrt{3x}$ **28.** $5\sqrt[3]{a^2b}$ **29.** $4y\sqrt{3x}$ **30.** $\frac{3x\sqrt[3]{3}}{2}$
31. $\frac{\sqrt{10xy}}{5y}$ **32.** $\frac{3\sqrt{2xy}}{2y}$ **33.** $\frac{2\sqrt{x}}{x}$ **34.** $\frac{x\sqrt{2x}}{3}$
35. $\frac{3\sqrt{xy}}{4y^2}$ **36.** $\frac{-2\sqrt{x}}{5}$ **37.** $6\sqrt{2}$ **38.** $18\sqrt{2}$
39. -40 **40.** $10\sqrt[3]{28}$ **41.** $\sqrt[3]{6} + 2$
42. $6\sqrt{10} - 12\sqrt{15}$ **43.** $3 + \sqrt{21} + \sqrt{15} + \sqrt{35}$
44. $-24 - 7\sqrt{6}$ **45.** $4 + 5\sqrt{42}$ **46.** $-18 - \sqrt{5}$
47. $\frac{5(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{2}$ **48.** $3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ **49.** $\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{6}$
50. $\frac{3\sqrt{42} - 4\sqrt{15}}{23}$ **51.** $18\sqrt{2}$ **52.** $-7\sqrt{2x}$
53. $-\sqrt[3]{2}$ **54.** $\frac{16\sqrt{10}}{5}$ **55.** $\frac{52\sqrt{5}}{5}$ **56.** $\frac{-17\sqrt{6}}{3}$
57. $\{6\}$ **58.** $\{4\}$ **59.** $\{0, 9\}$ **60.** $\{-5, -4\}$
61. $\{3\}$ **62.** No hay solución en números reales
63. 46 **64.** 66 **65.** 72 **66.** 26 **67.** 47 **68.** 74

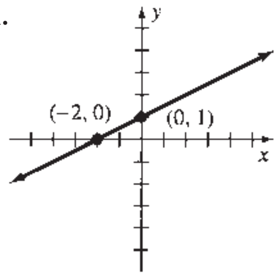
Capítulo 9 Examen (página 431)

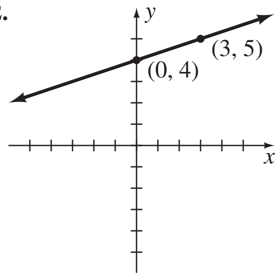
1. $-\frac{8}{7}$ **2.** 0.05 **3.** 2.8 **4.** -5.6 **5.** 2.1 **6.** $3\sqrt{5}$
7. $-12\sqrt[3]{2}$ **8.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **9.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ **10.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **11.** $\frac{\sqrt{10}}{4}$
12. $-5xy\sqrt[3]{2x}$ **13.** $\frac{\sqrt{15xy}}{5y}$ **14.** $3xy\sqrt{3x}$ **15.** $4\sqrt{6}$
16. $24\sqrt[3]{10}$ **17.** $12\sqrt{2} - 12\sqrt{3}$ **18.** $1 - 5\sqrt{15}$
19. $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{5}$ **20.** $4\sqrt{6}$ **21.** 22 **22.** $\{5\}$ **23.** $\varnothing$
24. $\{3\}$ **25.** $\{-2, 1\}$

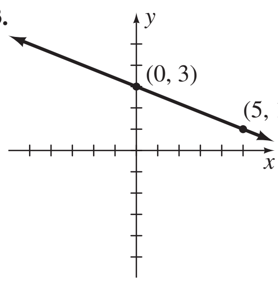
Capítulos 1-9 Conjunto de problemas de repaso acumulados (página 432)

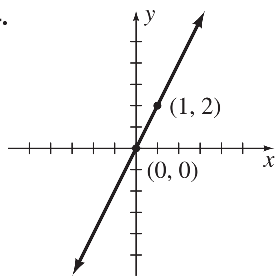
1. -64 **2.** 64 **3.** 144 **4.** -8 **5.** $\frac{2}{3}$ **6.** $\frac{13}{9}$ **7.** -9
8. -49 **9.** -29 **10.** 49 **11.** $-\frac{15}{4x}$ **12.** $\frac{-x + 17}{(x - 2)(x + 3)}$
13. $\frac{5y}{2}$ **14.** $\frac{1}{x - 4}$ **15.** $\frac{-8x - 41}{(x + 6)(x - 3)}$ **16.** $60x^4y^4$
17. $\frac{-8}{x^2}$ **18.** $\frac{-3a^3}{b}$ **19.** $\frac{1}{3n^4}$ **20.** $27x^2 + 30x - 8$
21. $-5x^2 - 12x - 7$ **22.** $6x^3 - x^2 - 13x - 4$

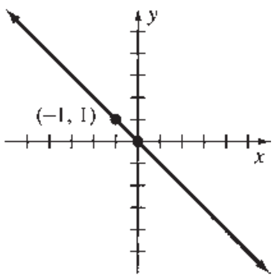
23. $3x^3y^6 - 4y^3$ **24.** $2x^2 - 2x - 3$ **25.** $y - x$
26. 4.67 galones **27.** 25% **28.** 108 **29.** 130 pies
30. 314 pulgadas cuadradas **31.** **(a)** $(8.5)(10^4)$ **(b)** $(9)(10^{-4})$ **(c)** $(1.04)(10^{-6})$ **(d)** $(5.3)(10^7)$ **32.** $2x(2x + 5)(3x - 4)$
33. $3(2x + 3)(2x - 3)$ **34.** $(y + 3)(x - 2)$
35. $(5 - x)(6 + 5x)$ **36.** $4(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$
37. $(7x - 2)(3x + 4)$ **38.** $8\sqrt{7}$ **39.** $-3\sqrt{5}$ **40.** $\frac{6\sqrt{5}}{5}$
41. $\frac{5\sqrt{6}}{18}$ **42.** $6y^2\sqrt{2xy}$ **43.** $-\frac{2\sqrt{ab}}{5}$ **44.** 48
45. $216 - 36\sqrt{6}$ **46.** 11 **47.** $4\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$
48. $-\frac{2\left(3\sqrt{5} + \sqrt{6}\right)}{13}$ **49.** $\sqrt{2}$ **50.** $\frac{37\sqrt{5}}{12}$

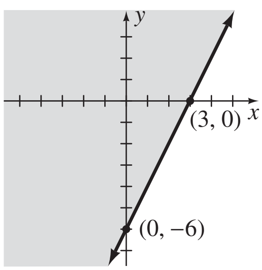
51.


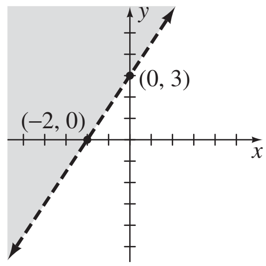
52.


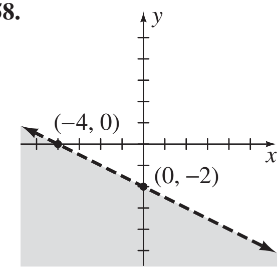
53.


54.


55.


56.


57.


58.


59. -2 **60.** $\frac{4}{7}$ **61.** $2x - 3y = 8$ **62.** $4x + 3y = -13$
63. $x + 4y = -12$ **64.** $\frac{3}{2}$ **65.** $\{(1, -2)\}$
66. $\{(-2, 4)\}$ **67.** $\{(-6, 12)\}$ **68.** $\left\{\left(\frac{1}{2}, 3\right)\right\}$ **69.** $\{17\}$
70. $\left\{-\frac{23}{5}\right\}$ **71.** $\{5\}$ **72.** $\left\{-\frac{19}{10}\right\}$ **73.** $\left\{\frac{47}{7}\right\}$
74. $\{500\}$ **75.** $\{53\}$ **76.** $\left\{-\frac{2}{3}\right\}$ **77.** $\{-6, 2\}$
78. $\{-2, 2\}$ **79.** $\{29\}$ **80.** $\{27\}$
81. $\{n|n \geq -5\}$ o $[-5, \infty)$ **82.** $\left\{n|n > \frac{1}{4}\right\}$ o $\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$
83. $\left\{x|x > -\frac{2}{5}\right\}$ o $\left(-\frac{2}{5}, \infty\right)$
84. $\{n|n > 6\}$ o $(6, \infty)$ **85.** $\left\{x|x < \frac{5}{16}\right\}$ o $\left(-\infty, \frac{5}{16}\right)$
86. $\left\{x|x \geq -\frac{16}{3}\right\}$ o $\left[-\frac{16}{3}, \infty\right)$ **87.** 65° y 115°
88. 13 y 37 **89.** 7, 9
90. 7 monedas de cinco, 15 de diez y 25 de veinticinco centavos.
91. \$3780 **92.** \$48 **93.** $4\frac{1}{2}$ horas **94.** 12.5 mililitros
95. 91 o mejor **96.** Más de 11 **97.** 12 minutos

Capítulo 10

Conjunto de problemas 10.1 (página 442)

1. $\{-15, 0\}$ **3.** $\{0, 12\}$ **5.** $\{0, 5\}$ **7.** $\{1, 8\}$ **9.** $\{-2, 7\}$
11. $\{-6, 1\}$ **13.** $\left\{-\frac{5}{3}, \frac{1}{2}\right\}$ **15.** $\left\{\frac{2}{5}, \frac{5}{6}\right\}$ **17.** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$
19. $\{-8, 8\}$ **21.** $\left\{-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right\}$ **23.** $\{-4, 4\}$
25. $\{-\sqrt{14}, \sqrt{14}\}$ **27.** No hay solución en números reales
29. $\{-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\}$ **31.** $\{-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\}$
33. $\left\{-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right\}$ **35.** $\left\{-\frac{5\sqrt{2}}{4}, \frac{5\sqrt{2}}{4}\right\}$ **37.** $\{-1, 3\}$
39. $\{-8, 2\}$ **41.** $\left\{-\frac{5}{3}, 3\right\}$ **43.** $\{-6 - \sqrt{5}, -6 + \sqrt{5}\}$
45. $\{1 - 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}\}$
47. $\left\{\frac{-3 - 2\sqrt{5}}{2}, \frac{-3 + 2\sqrt{5}}{2}\right\}$
49. No hay solución en números reales

51. $\left\{\frac{5-2\sqrt{10}}{3}, \frac{5+2\sqrt{10}}{3}\right\}$ **53.** $\left\{-\frac{3}{7}, \frac{5}{7}\right\}$
55. $\{-8-5\sqrt{2}, -8+5\sqrt{2}\}$ **57.** $5\sqrt{2}$ pulgadas
59. $2\sqrt{7}$ metros **61.** $2\sqrt{11}$ pies
63. $a = 4$ pulgadas y $b = 4\sqrt{3}$ pulgadas
65. $c = 12$ pies y $b = 6\sqrt{3}$ pies
67. $a = 4\sqrt{3}$ metros y $c = 8\sqrt{3}$ metros
69. $a = 10$ pulgadas y $c = 10\sqrt{2}$ pulgadas
71. $a = b = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ metros **73.** 8.2 pies **75.** 30 metros
77. 35 metros **81.** 5.2 centímetros **83.** 10.8 centímetros

Conjunto de problemas 10.2 (página 448)

1. $\{-4-\sqrt{17}, -4+\sqrt{17}\}$
3. $\{-5-\sqrt{23}, -5+\sqrt{23}\}$ **5.** $\{2-2\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2}\}$
7. No hay solución en números reales
9. $\{-1-3\sqrt{2}, -1+3\sqrt{2}\}$
11. $\left\{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right\}$
13. $\left\{\frac{5-\sqrt{33}}{2}, \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right\}$
15. $\left\{\frac{-4-\sqrt{22}}{2}, \frac{-4+\sqrt{22}}{2}\right\}$
17. $\left\{\frac{-6-\sqrt{42}}{3}, \frac{-6+\sqrt{42}}{3}\right\}$
19. $\left\{\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right\}$
21. No hay solución en números reales
23. $\left\{\frac{9-\sqrt{65}}{2}, \frac{9+\sqrt{65}}{2}\right\}$
25. $\left\{\frac{-3-\sqrt{17}}{4}, \frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right\}$
27. $\left\{\frac{-1-\sqrt{7}}{3}, \frac{-1+\sqrt{7}}{3}\right\}$ **29.** $\{-14, 12\}$
31. $\{-11, 15\}$ **33.** $\{-6, 2\}$ **35.** $\{-9, -3\}$
37. $\{-5, 8\}$ **39.** $\left\{\frac{1}{2}, 4\right\}$ **41.** $\left\{-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right\}$
45. $\left\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$

Conjunto de problemas 10.3 (página 453)

1. $\{-1, 6\}$ **3.** $\{-9, 4\}$ **5.** $\{1-\sqrt{6}, 1+\sqrt{6}\}$
7. $\left\{\frac{5-\sqrt{33}}{2}, \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right\}$ **9.** No hay solución en números reales
11. $\{-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\}$ **13.** $\{0, 6\}$ **15.** $\left\{0, \frac{7}{2}\right\}$
17. $\{16, 18\}$ **19.** $\{-10, 8\}$ **21.** $\{-2\}$ **23.** $\left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\}$
25. $\left\{-1, \frac{2}{5}\right\}$ **27.** $\left\{-\frac{5}{4}, -\frac{1}{3}\right\}$
29. $\left\{\frac{-5-\sqrt{73}}{4}, \frac{-5+\sqrt{73}}{4}\right\}$
31. $\left\{\frac{-2-\sqrt{7}}{3}, \frac{-2+\sqrt{7}}{3}\right\}$ **33.** $\left\{-\frac{3}{4}\right\}$
35. $\left\{\frac{-2-\sqrt{5}}{2}, \frac{-2+\sqrt{5}}{2}\right\}$
37. $\left\{\frac{-9-\sqrt{57}}{12}, \frac{-9+\sqrt{57}}{12}\right\}$
39. $\left\{\frac{1-\sqrt{33}}{4}, \frac{1+\sqrt{33}}{4}\right\}$
41. No hay solución en números reales
43. $\left\{\frac{-5-\sqrt{137}}{14}, \frac{-5+\sqrt{137}}{14}\right\}$
45. $\left\{\frac{1-\sqrt{85}}{6}, \frac{1+\sqrt{85}}{6}\right\}$ **47.** $\{-14, -9\}$
53. $\{-2.52, 7.52\}$ **55.** $\{-8.10, 2.10\}$ **57.** $\{-3.55, 1.22\}$
59. $\{-1.33, 3.58\}$ **61.** $\{-1.95, 2.15\}$

Conjunto de problemas 10.4 (página 457)

1. $\{-9, 5\}$ **3.** $\left\{-\frac{13}{5}, \frac{1}{5}\right\}$ **5.** $\{-1, 2\}$ **7.** $\left\{0, \frac{8}{3}\right\}$
9. $\left\{\frac{1}{3}\right\}$ **11.** $\left\{0, \frac{8}{5}\right\}$ **13.** $\{7-2\sqrt{17}, 7+2\sqrt{17}\}$
15. $\left\{-1, \frac{7}{5}\right\}$ **17.** $\left\{-\frac{5}{3}, -\frac{1}{5}\right\}$ **19.** $\{4-\sqrt{23}, 4+\sqrt{23}\}$
21. $\{-12, 7\}$ **23.** $\left\{\frac{3-\sqrt{33}}{4}, \frac{3+\sqrt{33}}{4}\right\}$ **25.** $\{-1, 4\}$
27. No hay solución en números reales **29.** $\{16, 30\}$
31. $\left\{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right\}$ **33.** $\left\{\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right\}$ **35.** $\{-13, 1\}$
37. $\{11, 17\}$ **39.** $\left\{\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right\}$ **41.** $\left\{-1, -\frac{2}{3}\right\}$
43. $\left\{\frac{-5-\sqrt{193}}{6}, \frac{-5+\sqrt{193}}{6}\right\}$ **45.** $\{-5, 3\}$

Conjunto de problemas 10.5 (página 462)

1. 17 y 18 **3.** 19 y 25 **5.** $3+\sqrt{5}$ y $3-\sqrt{5}$
7. $\sqrt{2}$ o $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **9.** 12, 14 y 16 **11.** -8 o 8
13. 8 metros por 12 metros **15.** 15 centímetros por 25 centímetros
17. 27 pies por 78 pies **19.** 15 filas y 20 asientos por fila
21. 7 pies por 9 pies **23.** 6 pulgadas y 8 pulgadas
25. $1\frac{1}{2}$ pulgadas **27.** 30 estudiantes **29.** 24 pulgadas y 32 pulgadas
31. 18 millas por hora

Capítulo 10 Problemas de muestra (página 465)

1. $\{-5, 7\}$ **2.** $\left\{\frac{2+\sqrt{13}}{3}, \frac{2-\sqrt{13}}{3}\right\}$
3. $\{6+\sqrt{33}, 6-\sqrt{33}\}$ **4.** $\{4+\sqrt{15}, 4-\sqrt{15}\}$
5. $\left\{\frac{-3}{2}, 5\right\}$ **6.** $6\sqrt{2} \approx 8.5$ pulgadas
7. 6 pulgadas por 8 pulgadas

Capítulo 10 Conjunto de problemas de repaso (página 467)

1. $\{-6, -1\}$ **2.** $\{-4-\sqrt{13}, -4+\sqrt{13}\}$ **3.** $\left\{\frac{2}{7}, \frac{1}{3}\right\}$
4. $\{0, 17\}$ **5.** $\{-4, 1\}$ **6.** $\{11, 15\}$
7. $\left\{\frac{-7-\sqrt{61}}{6}, \frac{-7+\sqrt{61}}{6}\right\}$ **8.** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$
9. No hay solución en números reales **10.** $\{-5, -1\}$
11. $\{2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\}$
12. $\{-2-3\sqrt{2}, -2+3\sqrt{2}\}$ **13.** $\{-3\sqrt{5}, 3\sqrt{5}\}$
14. $\{-3, 9\}$ **15.** $\{0, 1\}$ **16.** $\{2-\sqrt{13}, 2+\sqrt{13}\}$
17. $\{20, 24\}$ **18.** $\{2-2\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2}\}$ **19.** $\left\{-\frac{8}{5}, 1\right\}$
20. $\left\{\frac{-1-\sqrt{73}}{12}, \frac{-1+\sqrt{73}}{12}\right\}$ **21.** $\left\{\frac{1}{2}, 4\right\}$
22. $\left\{-\frac{4}{3}, -1\right\}$ **23.** 9 pulgadas por 12 pulgadas
24. 18 y 19 **25.** 7, 9 y 11
26. $\sqrt{5}$ metros y $3\sqrt{5}$ metros **27.** 4 yardas y 6 yardas
28. 40 acciones a \$20 por acción **29.** 10 metros
30. La rapidez de Jay fue 45 millas por hora y la de Jean 48 millas por hora; o la rapidez de Jay fue $7\frac{1}{2}$ millas por hora y la de Jean $10\frac{1}{2}$ millas por hora.
31. $6\sqrt{2}$ pulgadas **32.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ centímetros

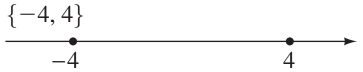
Capítulo 10 Examen (página 469)

1. $2\sqrt{13}$ pulgadas **2.** 13 metros **3.** 7 pulgadas
4. $4\sqrt{3}$ centímetros **5.** $\left\{-3, \frac{5}{3}\right\}$ **6.** $\{-4, 4\}$
7. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$ **8.** $\left\{\frac{3-\sqrt{29}}{2}, \frac{3+\sqrt{29}}{2}\right\}$
9. $\{-1-\sqrt{10}, -1+\sqrt{10}\}$
10. No hay solución en números reales **11.** $\{-12, 2\}$
12. $\left\{\frac{3-\sqrt{41}}{4}, \frac{3+\sqrt{41}}{4}\right\}$
13. $\left\{\frac{1-\sqrt{57}}{2}, \frac{1+\sqrt{57}}{2}\right\}$ **14.** $\left\{\frac{1}{5}, 2\right\}$ **15.** $\{0, 7\}$
16. $\{13, 15\}$ **17.** $\left\{\frac{3}{4}, 4\right\}$ **18.** $\left\{0, \frac{1}{6}\right\}$ **19.** $\left\{-1, \frac{3}{7}\right\}$
20. $\left\{\frac{1-3\sqrt{3}}{4}, \frac{1+3\sqrt{3}}{4}\right\}$
21. No hay solución en números reales **22.** 15 asientos por fila
23. 14 millas por hora **24.** 15 y 17 **25.** 9 pies

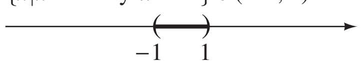
Capítulo 11

Conjunto de problemas 11.1 (página 475)

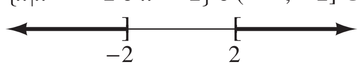
1. $\{-4, 4\}$



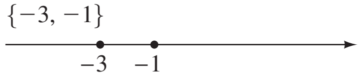
3. $\{x|x > -1 \text{ y } x < 1\}$ o $(-1, 1)$



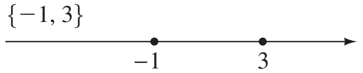
5. $\{x|x \le -2 \text{ o } x \ge 2\}$ o $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$



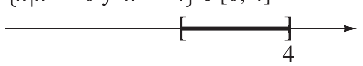
7. $\{-3, -1\}$



9. $\{-1, 3\}$

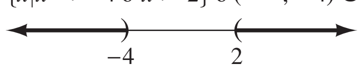


11. $\{x|x \ge 0 \text{ y } x \le 4\}$ o $[0, 4]$

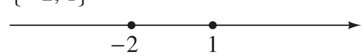


0

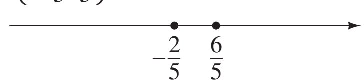
13. $\{x|x < -4 \text{ o } x > 2\}$ o $(-\infty, -4) \cup (2, \infty)$



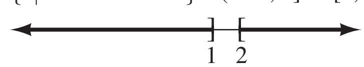
15. $\{-2, 1\}$



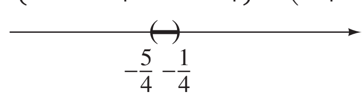
17. $\left\{-\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right\}$



19. $\{x|x \le 1 \text{ o } x \ge 2\}$ o $(-\infty, 1] \cup [2, \infty)$

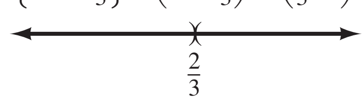


21. $\left\{x|x > -\frac{5}{4} \text{ y } x < -\frac{1}{4}\right\}$ o $\left(-\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$



23. $\{-2\}$

25. $\left\{x|x \ne \frac{2}{3}\right\}$ o $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$



27. $\left\{-\frac{16}{3}, 6\right\}$

29. $\{x|x < -5 \text{ o } x > 4\}$ o $(-\infty, -5) \cup (4, \infty)$

31. $\left\{x|x > -\frac{14}{3} \text{ y } x < 8\right\}$ o $\left(-\frac{14}{3}, 8\right)$

33. $\left\{-6, \frac{16}{3}\right\}$ **35.** $\left\{x|x \geq -6 \text{ y } x \leq \frac{19}{2}\right\}$ o $\left[-6, \frac{19}{2}\right]$

37. $\left\{x|x \leq -\frac{21}{5} \text{ o } x \geq 3\right\}$ o $\left(-\infty, -\frac{21}{5}\right] \cup [3, \infty)$

39. $\{x|x > -6 \text{ y } x < 2\}$ o $(-6, 2)$

41. $\left\{x|x < -\frac{5}{2} \text{ o } x > \frac{7}{2}\right\}$ o $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2}, \infty\right)$

43. $\{0\}$ **45.** $\{x|x$ es cualquier numero real$\}$ **47.** $\varnothing$

49. $\{-6\}$ **53.** $\{x|4 < x < 14\}$ o $(4, 14)$

55. $\{x|-1 \leq x \leq 4\}$ o $[-1, 4]$

57. $\{x|-11 < x < 7\}$ o $(-11, 7)$

59. $\{x|-7 < x < -1\}$ o $(-7, -1)$

61. $\{x|-1 < x < 6\}$ o $(-1, 6)$

Conjunto de problemas 11.2 (página 483)

1. (3, 1, −2) **3.** (−1, 3, 4) **5.** (5, −3, 1) **7.** (−2, 3, 5)
9. (3, −2, −4) **11.** (−1, 3, 1) **13.** (3, 0, −2) **15.** (1, 4, 2)
17. 10 monedas de veinticinco, 8 de diez y 2 de cinco centavos
19. $\angle A = 120°$, $\angle B = 24°$, $\angle C = 36°$
21. Plomero = \$50 por hora; Aprendiz = \$20 por hora; Trabajador = \$10 por hora
23. Duraznos = \$1.29 por libra; Cerezas = \$.99 por libra; Peras = \$.69 por libra.
25. Casco = \$250, Chaqueta = \$350, Guantes = \$50
29. Una infinidad de soluciones **31.** $\varnothing$

Conjunto de problemas 11.3 (página 489)

1. 9 **3.** −10 **5.** 5 **7.** −4 **9.** $\frac{4}{7}$ **11.** 3 **13.** −3

15. 8 **17.** 16 **19.** 16 **21.** 32 **23.** $\frac{1}{2}$ **25.** −3 **27.** $\frac{1}{8}$

29. $\frac{27}{8}$ **31.** 2 **33.** 625 **35.** −32 **37.** $\frac{1}{8}$ **39.** 2

41. 27 **43.** 1 **45.** $\frac{1}{3}$ **47.** 4 **49.** 49 **51.** $x^{\frac{3}{4}}$ **53.** $a^{\frac{17}{12}}$

55. $15x^{\frac{7}{12}}$ **57.** $24x^{\frac{11}{12}}$ **59.** $2y^{\frac{5}{12}}$ **61.** $10n^{\frac{1}{4}}$ **63.** $\frac{2}{x^{\frac{1}{6}}}$

65. $25xy^2$ **67.** $64x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{2}}$ **69.** $2x^2y$ **71.** $4x^{\frac{4}{15}}$ **73.** $\frac{4}{b^{\frac{5}{12}}}$

75. 3 **77.** $\frac{9}{4x^{\frac{1}{3}}}$ **79.** $\frac{125x^{\frac{3}{2}}}{216y}$

83. **(a)** 28 **(b)** 35 **(c)** 17 **(d)** 42 **85.** **(a)** 11.18
(b) 5.28 **(c)** 3.11 **(d)** 1573.56 **(e)** 6.45 **(f)** 5.81

Conjunto de problemas 11.4 (página 493)

1. $8i$ **3.** $\frac{5}{3}i$ **5.** $i\sqrt{11}$ **7.** $5i\sqrt{2}$ **9.** $4i\sqrt{3}$ **11.** $3i\sqrt{6}$

13. $8 + 17i$ **15.** $10 - 10i$ **17.** $4 + 2i$ **19.** $-2 - 6i$
21. $-5 + 3i$ **23.** $-12 - 16i$ **25.** $-10 - 4i$

27. $-1 + 12i$ **29.** $-20 - 8i$ **31.** $\frac{5}{6} + \frac{5}{12}i$

33. $-\frac{1}{15} + \frac{7}{12}i$ **35.** $-56 + 0i$ **37.** $-6 + 12i$

39. $-24 + 20i$ **41.** $-2 + 23i$ **43.** $59 - 17i$
45. $-21 - 12i$ **47.** $-26 + 15i$ **49.** $-9 + 40i$
51. $61 + 0i$ **53.** $5 + 0i$

Conjunto de problemas 11.5 (página 496)

1. $\{-8i, 8i\}$ **3.** $\{2 - i, 2 + i\}$
5. $\{-5 - i\sqrt{13}, -5 + i\sqrt{13}\}$

7. $\{3 - 3i\sqrt{2}, 3 + 3i\sqrt{2}\}$ **9.** $\left\{-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right\}$ **11.** $\{-1, 4\}$

13. $\{-3 - i\sqrt{3}, -3 + i\sqrt{3}\}$ **15.** $\{3 - 2i, 3 + 2i\}$

17. $\{2 - 4i, 2 + 4i\}$ **19.** $\left\{\frac{1 - i\sqrt{2}}{3}, \frac{1 + i\sqrt{2}}{3}\right\}$

21. $\left\{-1, \frac{5}{2}\right\}$ **23.** $\{1 - 3i\sqrt{2}, 1 + 3i\sqrt{2}\}$

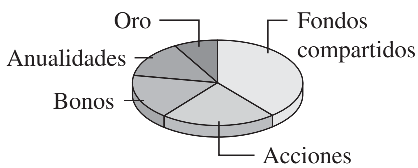
25. $\{2 - i\sqrt{3}, 2 + i\sqrt{3}\}$ **27.** $\left\{\frac{1 - i\sqrt{31}}{8}, \frac{1 + i\sqrt{31}}{8}\right\}$

29. $\left\{\frac{-1 - i\sqrt{5}}{6}, \frac{-1 + i\sqrt{5}}{6}\right\}$

Conjunto de problemas 11.6 (página 502)

1. 14% **3.** 480 **5.** 66% **7.** Física **9.** 21%
11. 62% **13.** 1000 personas **15.** 1500 personas
17. Ene. y feb. **19.** Feb. y marzo **21.** 0.4%
23. \$390 **25.** Lunes o miércoles **27.** \$580
29. 2% **31.** 2% **33.** 2011 y 2012
35. **(a)** 12% **(b)** 12% **(c)** Ninguno, son iguales

39.



Conjunto de problemas 11.7 (página 508)

1. Dominio: {4, 6, 8, 10}
Rango: {7, 11, 20, 28}
Es una función

3. Dominio: {−2, −1, 0, 1}
Rango: {1, 2, 3, 4}
Es una función

5. Dominio: {4, 9}
Rango: {−3, −2, 2, 3}
No es una función

7. Dominio: {3, 4, 5, 6}
Rango: {15}
Es una función

9. Dominio: {Carol}
Rango: {22400, 23700, 25200}
No es una función

11. Dominio: $\{-6\}$
Rango: $\{1, 2, 3, 4\}$
No es una función

13. Dominio: $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
Rango: $\{0, 1, 4\}$
Es una función

15. Todos reales **17.** Todos los números excepto -8
19. Todos reales **21.** Todos los números excepto 5
23. Todos los números excepto $\frac{8}{5}$ **25.** Todos reales
27. Todos los números excepto **29.** Todos reales **31.** 4; 7; 1; 22
33. -16; 19; 24; $-5t - 1$ **35.** $\frac{11}{4}$; $\frac{13}{12}$; $\frac{19}{36}$; $-\frac{7}{12}$
37. 0; 0; 45; -4 **39.** 0; -3; -3; -8 **41.** 23; -21; 3; 8
43. 8; 48; 8; -7

Conjunto de problemas 11.8 (página 511)

1. 9; 289; 72.25; 430.56; 126.56 **3.** \$464,500
5. \$6.75; \$10.13; \$13.50; \$24.60 **7.** \$30; \$15; \$27
9. \$4.00; \$1.50; \$0; \$6.00 **11.** \$367.50; \$420; \$577.50; \$210
13. \$118.50; \$138.50; \$98.50; \$158.50

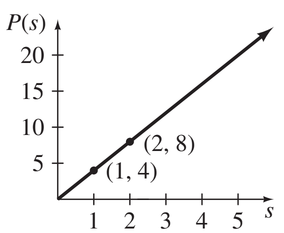
15.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	1/10	1/5	3/10	2/5

17.

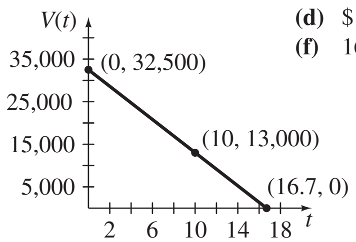
n	10,000	15,000	20,000	25,000	30,000
$f(n)$	3	4.5	6	7.5	9

19. **(a)** 12 **(b)** 20
(c)



(d) 17

21. **(a)** \$20,800 **(b)** \$14,950
(c)

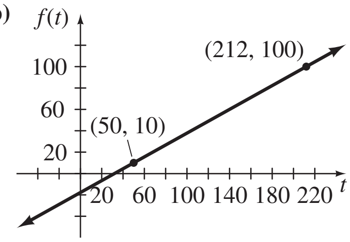


(d) \$13,000
(f) 16.7 años

23. **(a)**

t	50	41	-4	212	95	77	59
$f(t)$	10	5	-20	100	35	25	15

(b)



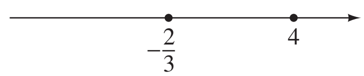
(c) $-6.7°$C

Capítulo 11 Problemas de muestra (página 514)

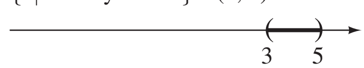
1. $\left\{\frac{-13}{3}, 1\right\}$ **2.** **(a)** $(-\infty, -9] \cup [5, \infty)$ **(b)** $(-3, 13)$
3. **(a)** 4 **(b)** 64 **(c)** $\frac{1}{4}$ **(d)** -64 **(e)** 256 **(f)** 16
4. $x^{\frac{5}{6}}$; $6x^{\frac{5}{6}}$; $3x^{\frac{1}{6}}$; $4x^{\frac{5}{12}}$ **5.** $2i\sqrt{5}$ **6.** $10 + i$ **7.** $2 - 3i$
8. $23 - 11i$ **9.** $\{3 + 2i\sqrt{6}, 3 - 2i\sqrt{6}\}$
10. $\{-2 + i\sqrt{3}, -2 - i\sqrt{3}\}$
11. $\left\{\frac{3 + i\sqrt{11}}{2}, \frac{3 - i\sqrt{11}}{2}\right\}$ **12.** D:{1,3,5}; R:{2,4}.
13. **(a)** Función **(b)** No es una función **14.** $f(6) = 11$

Capítulo 11 Conjunto de problemas de repaso (página 519)

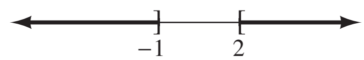
1. 55% **2.** 44% **3.** 52% **4.** 25 estudiantes
5. Compras y ejercicio
6. Cena fuera, televisión, cine, compras y ejercicio, deportes, estudio.
7. 2010 **8.** \$1500 **9.** \$5750 **10.** \$5583
11. $\left\{-\frac{2}{3}, 4\right\}$



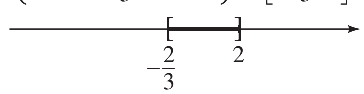
12. $\{x|x > 3$ y $x < 5\}$ o $(3, 5)$



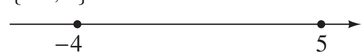
13. $\{x|x \leq -1$ o $x \geq 2\}$ o $(-\infty, -1] \cup [2, \infty)$



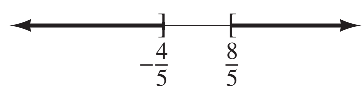
14. $\left\{x|x \geq -\frac{2}{3} \text{ y } x \leq 2\right\}$ o $\left[-\frac{2}{3}, 2\right]$



15. $\{-4, 5\}$



16. $\left\{x|x \leq -\frac{4}{5} \text{ o } x \geq \frac{8}{5}\right\}$ o $\left(-\infty, -\frac{4}{5}\right] \cup \left[\frac{8}{5}, \infty\right)$



17. $\frac{4}{3}$ **18.** -1 **19.** $\frac{3}{4}$ **20.** -5 **21.** $\frac{3}{2}$ **22.** 125 **23.** 32
24. -32 **25.** $\frac{1}{16}$ **26.** $\frac{1}{2}$ **27.** $\frac{1}{4}$ **28.** $\frac{3}{2}$ **29.** 8 **30.** 9

31. $\frac{1}{3}$ **32.** $x^{\frac{5}{3}}$ **33.** $6x^{\frac{17}{20}}$ **34.** $36a^{\frac{1}{6}}$ **35.** $27xy^2$ **36.** $5x^2y^3$

37. $13n^{\frac{7}{20}}$ **38.** $\frac{4}{n^{\frac{1}{4}}}$ **39.** $8x^3$ **40.** $\{(0, 2, 5)\}$

41. $\{(2, 1, 3)\}$ **42.** $1 + 2i$ **43.** $-7 - 5i$ **44.** $2 - 4i$

45. $3 - 4i$ **46.** $-1 + 3i$ **47.** $-6 + 10i$ **48.** $-34 + 31i$

49. $-2 - 11i$ **50.** $-4 - 8i$ **51.** $3 - 45i$ **52.** 85

53. 58 **54.** $55 - 48i$ **55.** $3 - 15i$ **56.** $\{6 - 5i, 6 + 5i\}$

57. $\{-1 - i\sqrt{6}, -1 + i\sqrt{6}\}$

58. $\{1 - 4i, 1 + 4i\}$

59. $\left\{\frac{1 - 3i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + 3i\sqrt{3}}{2}\right\}$

60. $\left\{\frac{1 - i\sqrt{23}}{4}, \frac{1 + i\sqrt{23}}{4}\right\}$ **61.** $\left\{\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right\}$

62. $\left\{\frac{5 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{5 + i\sqrt{3}}{2}\right\}$

63. $\left\{\frac{-3 - i\sqrt{39}}{4}, \frac{-3 + i\sqrt{39}}{4}\right\}$

64. $\left\{\frac{-1 - i\sqrt{59}}{6}, \frac{-1 + i\sqrt{59}}{6}\right\}$

65. $\left\{\frac{-1 - i\sqrt{47}}{8}, \frac{-1 + i\sqrt{47}}{8}\right\}$

66. Dominio: {rojo, azul, verde}
Rango: $\left\{\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{8}\right\}$
Es una función.

67. Dominio: $\{3, 4, 5\}$
Rango: $\{5, 7, 9\}$
Es una función.

68. Dominio: $\{1, 2\}$
Rango: $\{-16, -8, 8, 16\}$
No es una función.

69. Dominio: $\{2, 3, 4, 5\}$
Rango: $\{10\}$
Es una función.

70. Dominio: $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
Rango: $\{0, 1, 4\}$
Es una función.

71. Dominio: $\{1, 2, 3\}$
Rango: $\{4, 8, 10, 15\}$
No es una función.

72. Todos los números excepto 6 **73.** Todos reales

74. Todos reales **75.** Todos los números excepto -4

76. Todos los números excepto $\frac{1}{2}$

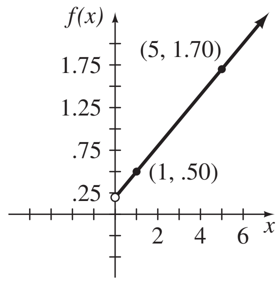
77. Todos los números excepto $-\frac{1}{3}$

78. $-14; -2; 13; 3a - 2$ **79.** $-\frac{3}{4}; \frac{3}{2}; -2; -3$

80. $\frac{3}{5}; 0; \frac{2}{5}; \frac{3}{7}$ **81.** $-6; -3; 2; 9$

82. **(a)** $.80 **(b)** $1.70

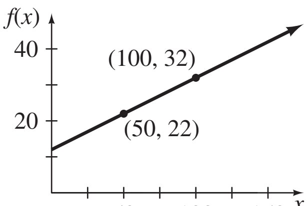
(c)



(d) $1.40

83. **(a)** 22 galones **(b)** 32 galones

(c)



(d) 28 galones

Capítulo 11 Examen (página 521)

1. Papas fritas; ensalada **2.** 30 **3.** 60 **4.** 35

5. $11 - 13i$ **6.** $5i\sqrt{3}$ **7.** 216 **8.** $\frac{27}{8}$ **9.** $10x^{\frac{11}{12}}$

10. $5n^{\frac{1}{10}}$ **11.** $\{2 - 4i, 2 + 4i\}$

12. $\{1 - i\sqrt{2}, 1 + i\sqrt{2}\}$

13. $\{-3 - 2i\sqrt{3}, -3 + 2i\sqrt{3}\}$

14. $\left\{\frac{3 - i\sqrt{11}}{2}, \frac{3 + i\sqrt{11}}{2}\right\}$ **15.** $\{-4, 8\}$

16. $\left\{-\frac{7}{4}, -\frac{3}{4}\right\}$ **17.** $\varnothing$

18. $\left\{\frac{1 - i\sqrt{7}}{4}, \frac{1 + i\sqrt{7}}{4}\right\}$ **19.** $\left\{-4, \frac{7}{3}\right\}$

20. $\{x \mid x \leq -5 \text{ o } x \geq -1\}$ o $(-\infty, -5] \cup [-1, \infty)$

21. $\{x \mid x > -3 \text{ y } x < 4\}$ o $(-3, 4)$

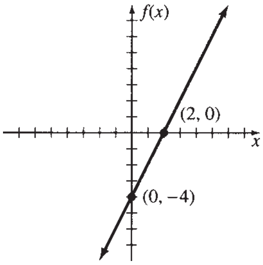
22. Todos los números excepto $\frac{7}{2}$ **23.** $4; -6; -21; 14$

24. $447 **25.** $11,550; $16,250

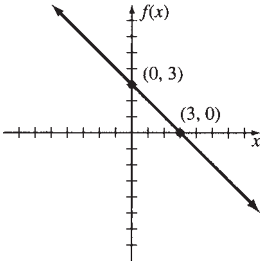
Capítulo 12

Conjunto de problemas 12.1 (página 529)

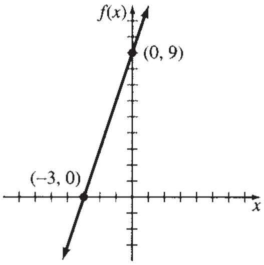
1.



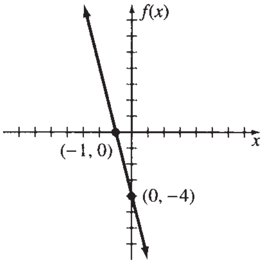
3.



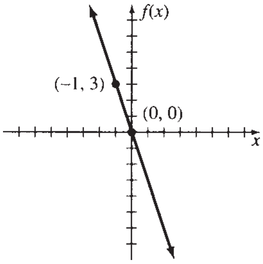
5.



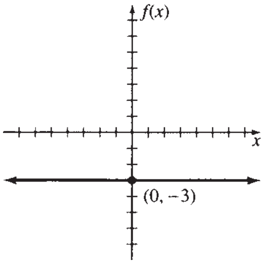
7.



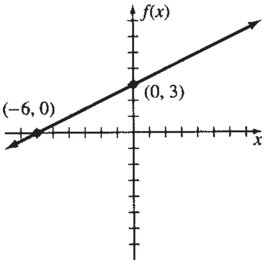
9.



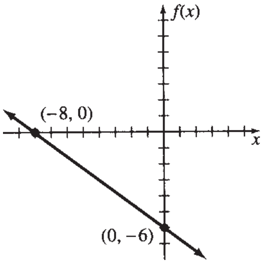
11.



13.



15.

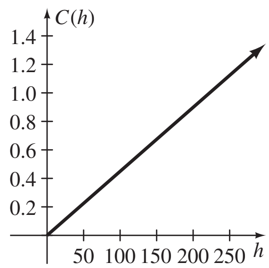


17. $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$ **19.** $f(x) = -x - 4$

21. $f(x) = -\frac{1}{5}x + \frac{21}{5}$

23. **(a)** $0.42

(b)



(c) Respuestas pueden variar.
(d) $1.01

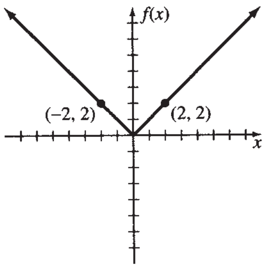
25. $f(x) = 0.25x + 30$

27. $26; $30.50; $50; $60.50

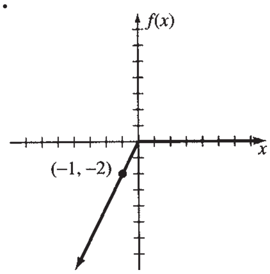
29. $f(p) = 0.8p$; $7.60; $12; $60; $10; $600

31. 21 días, 29 días, 45 días

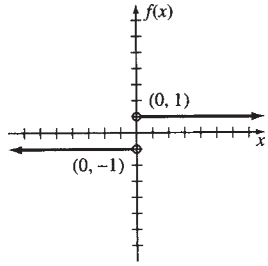
35.



37.

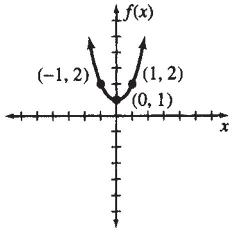


39.

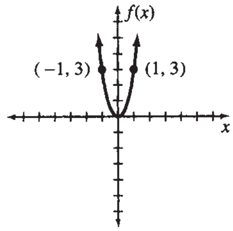


Conjunto de problemas 12.2 (página 538)

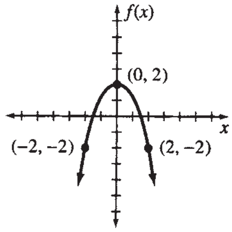
1.



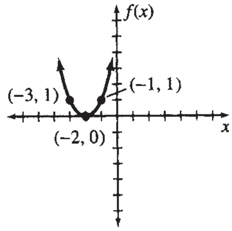
3.



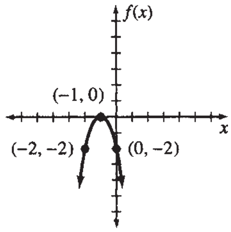
5.



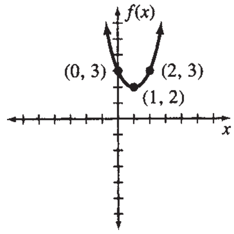
7.



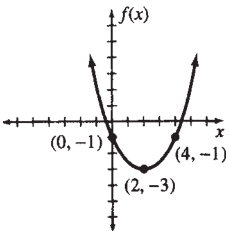
9.



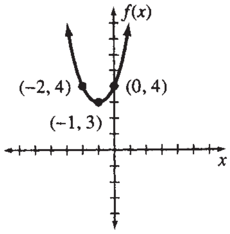
11.



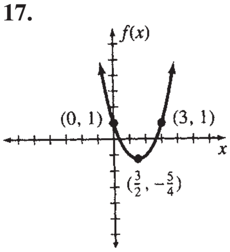
13.



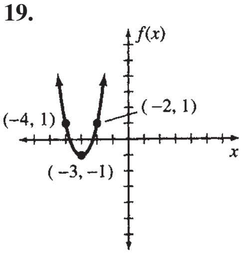
15.



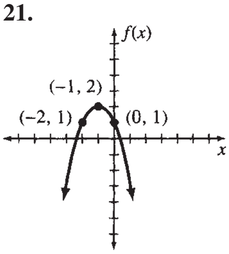
17.



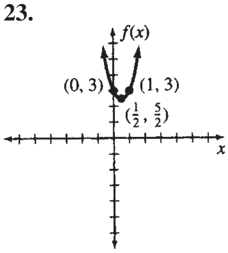
19.



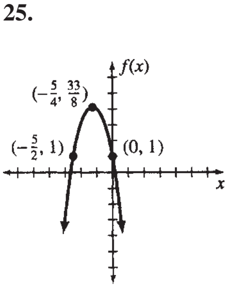
21.



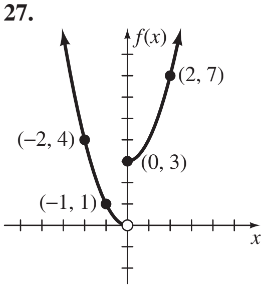
23.



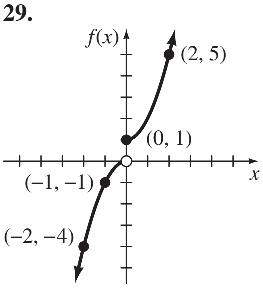
25.



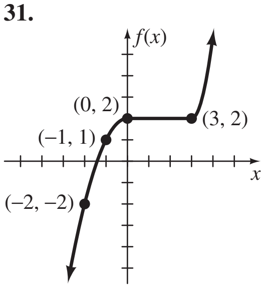
27.



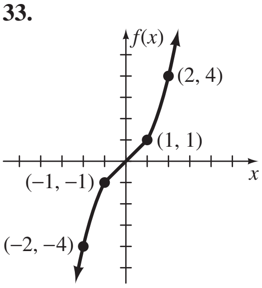
29.



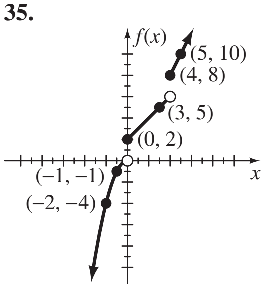
31.



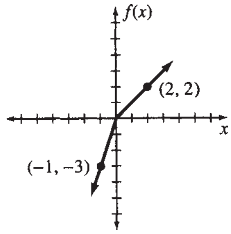
33.



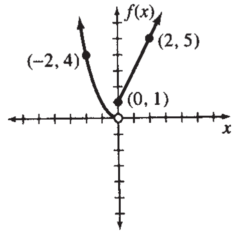
35.



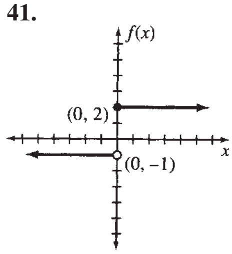
37.



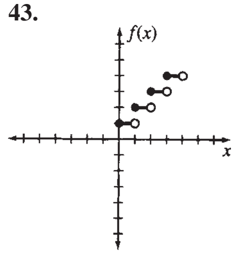
39.



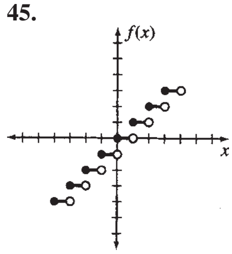
41.



43.

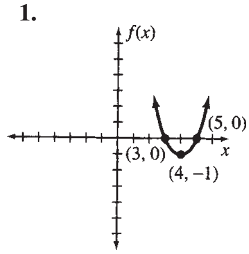


45.

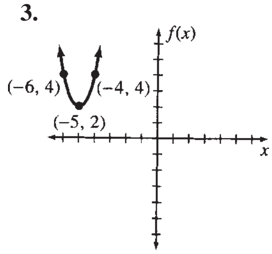


Conjunto de problemas 12.3 (página 547)

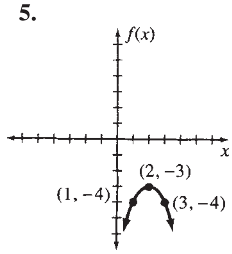
1.



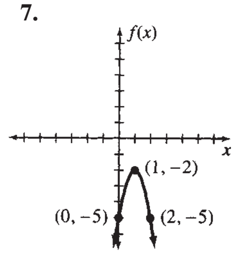
3.



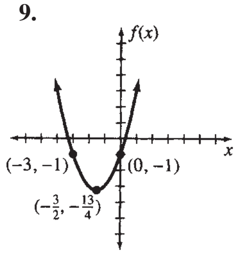
5.



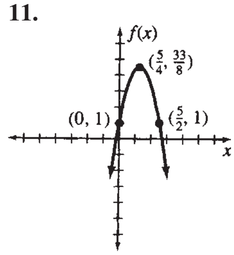
7.



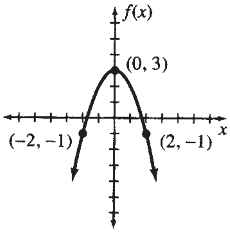
9.



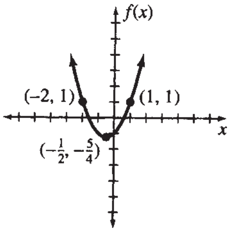
11.



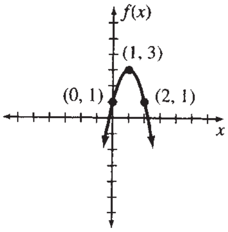
13.



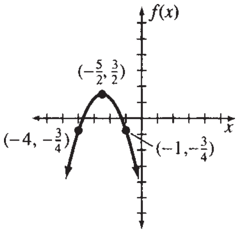
15.



17.



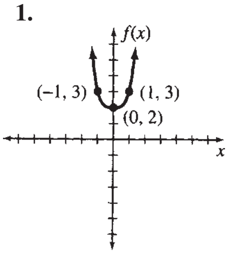
19.



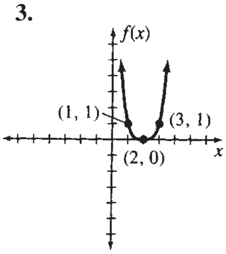
21. -2 y 2; (0, -12) **23.** 0 y 2; (1, -5)
25. 3 y 5; (4, -1) **27.** 6 y 8; (7, -2)
29. 4 y 6; (5, 1) **31.** $7 + \sqrt{5}$ y $7 - \sqrt{5}$; (7, -5)
33. Sin intercepciones x $\left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{4}\right)$
35. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$ **37.** -11 y 8
39. 3 y 9 **41.** $2 - i\sqrt{7}$ y $2 + i\sqrt{7}$
43. 70 **45.** 144 pies **47.** 25 y 25
49. 40 yardas por 80 yardas
51. 60 metros por 60 metros
53. 1100 suscriptoress a $13.75 por mes

Conjunto de problemas 12.4 (página 557)

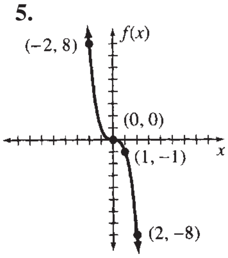
1.



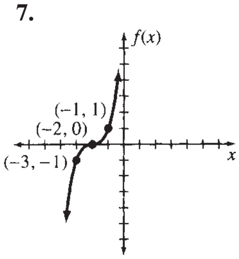
3.



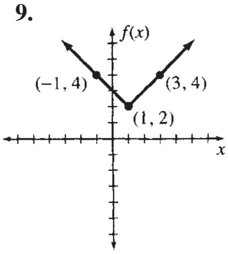
5.



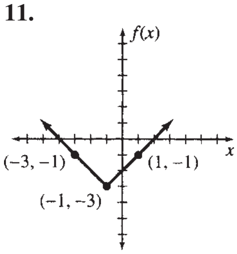
7.



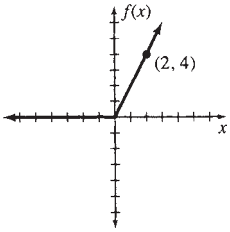
9.



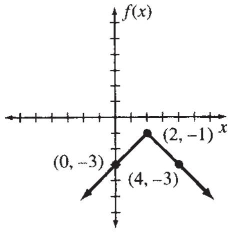
11.



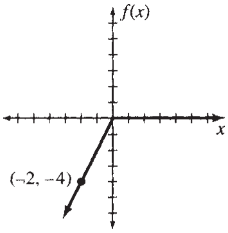
13.



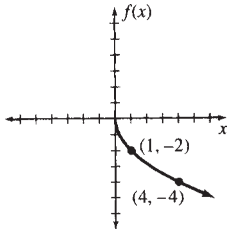
15.



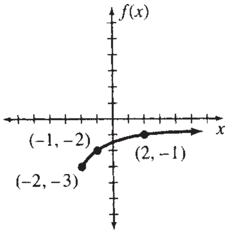
17.



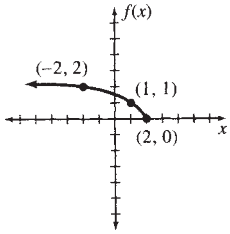
19.



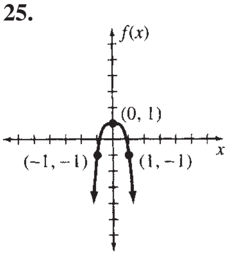
21.



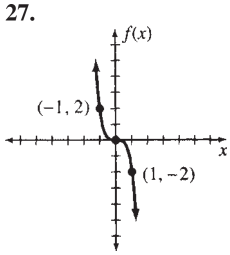
23.



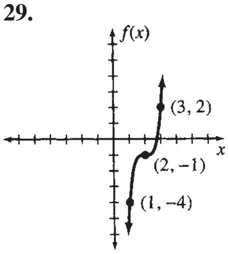
25.



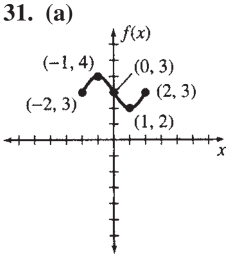
27.



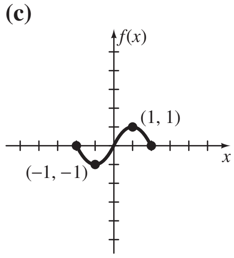
29.



31. (a)

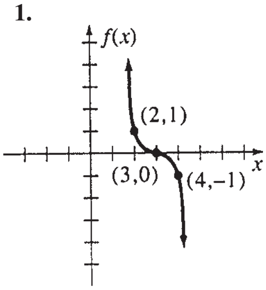


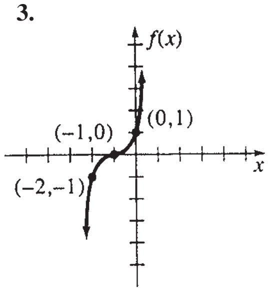
(c)

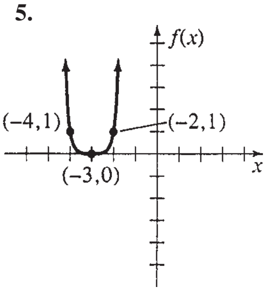


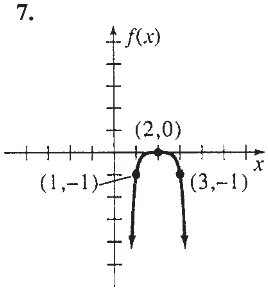
Capítulo 13

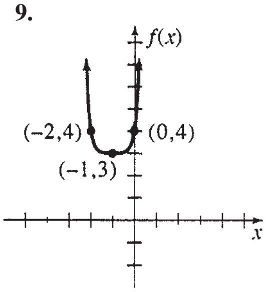
Conjunto de problemas 13.1 (página 568)

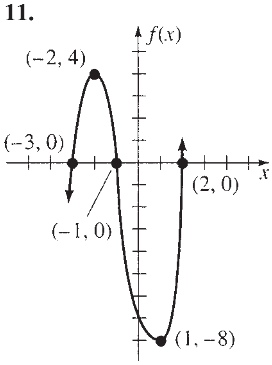
1.


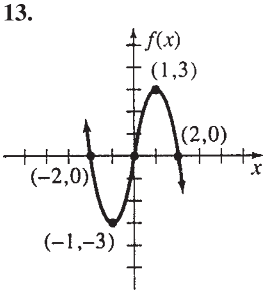
3.


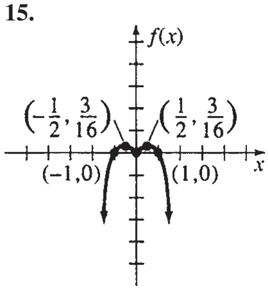
5.


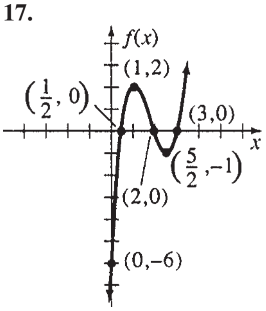
7.


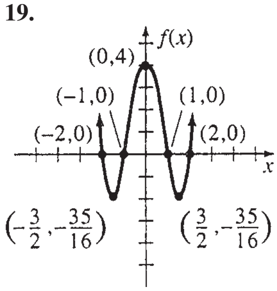
9.


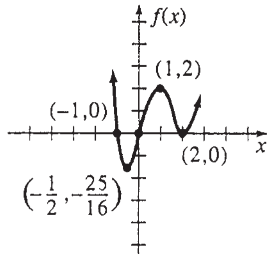
11.


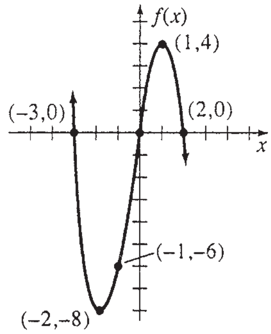
13.


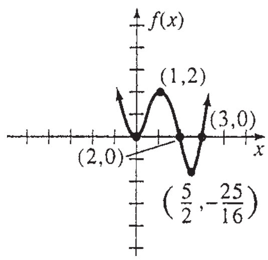
15.


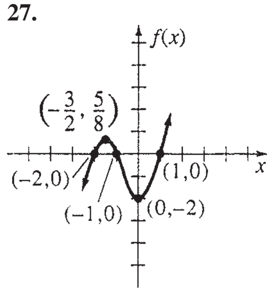
17.


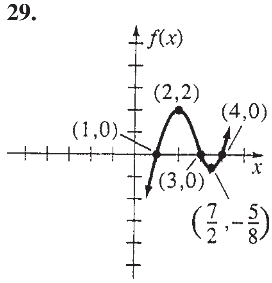
19.


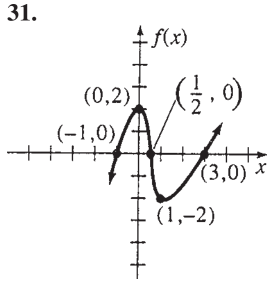
21.


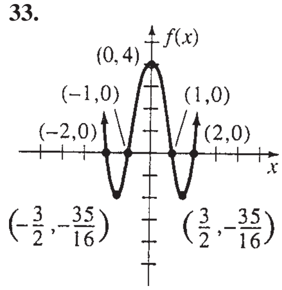
23.


25.


27.


29.


31.


33.


35. **(a)** -144 **(b)** -3, 6 y 8
(c) $f(x) > 0$ para $\{x|x < -3 \text{ o } 6 < x < 8\}$; $f(x) < 0$ para $\{x|-3 < x < 6 \text{ o } x > 8\}$

37. **(a)** -81 **(b)** -3 y 1 **(c)** $f(x) > 0$ para $\{x|x > 1\}$; $f(x) < 0$ para $\{x|x < -3 \text{ o } -3 < x < 1\}$

39. **(a)** 0 **(b)** -4, 0 y 6
(c) $f(x) > 0$ para $\{x|x < -4 \text{ o } 0 < x < 6 \text{ o } x > 6\}$; $f(x) < 0$ para $\{x|-4 < x < 0\}$

41. **(a)** 0 **(b)** -3, 0 y 2
(c) $f(x) > 0$ para $\{x|-3 < x < 0 \text{ o } 0 < x < 2\}$; $f(x) < 0$ para $\{x|x < -3 \text{ o } x > 2\}$

43. 1.7 pulgadas

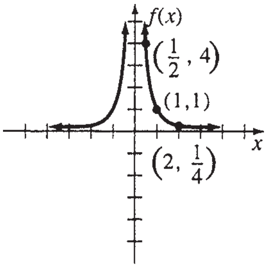
47. **(a)** 1.6 **(c)** 6.1 **(e)** 2.5

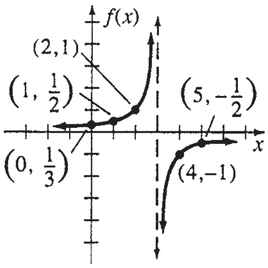
53. **(a)** -2, 1 y 4; $f(x) > 0$ para $(-2, 1) \cup (4, \infty)$; $f(x) < 0$ para $(-\infty, -2) \cup (1, 4)$
(c) 2 y 3; $f(x) > 0$ para $(3, \infty)$; $f(x) < 0$ para $(2, 3) \cup (-\infty, -2)$ **(e)** -3, -1 y 2; $f(x) > 0$ para $(-\infty, -3) \cup (2, \infty)$; $f(x) < 0$ para $(-3, -1) \cup (-1, 2)$

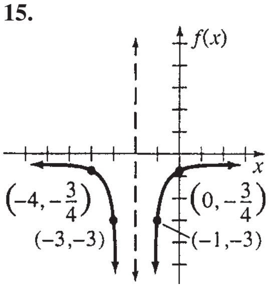
55. **(a)** -3.3; $(0.5, 3.1)$, $(-1.9, 10.1)$
(c) -2.2, 2.2; $(-1.4, -8.0)$, $(0, -4.0)$, $(1.4, -8.0)$

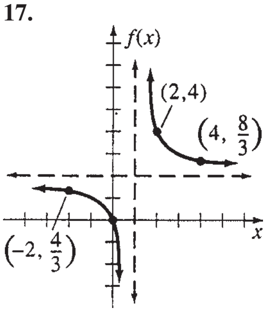
Conjunto de problemas 13.2 (página 577)

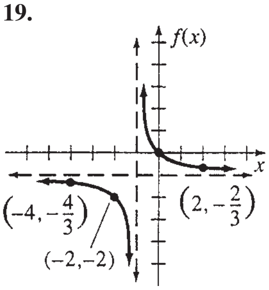
1. V.A. $x = -3$; H.A. $y = 0$
3. V.A. $x = 1$; H.A. $y = 4$
5. V.A. $x = -3$, $x = 4$; H.A. $y = 0$
7. V.A. $x = -3$, $x = 3$; H.A. $y = 0$
9. V.A. none; H.A. $y = 5$

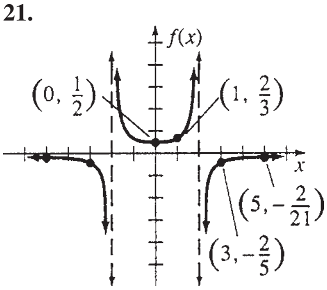
11.


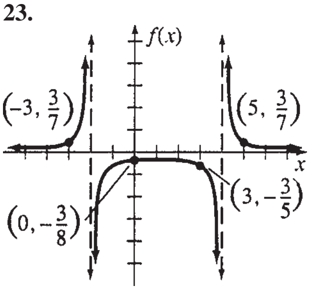
13.


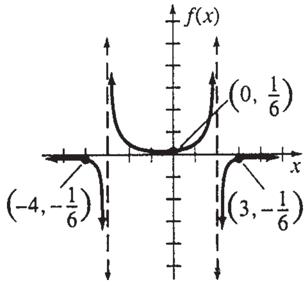
15.


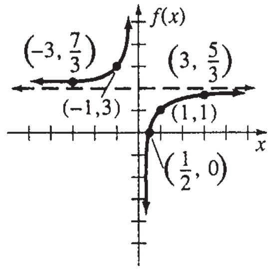
17.


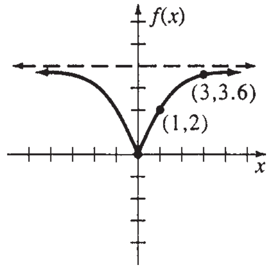
19.


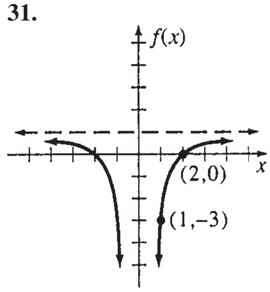
21.


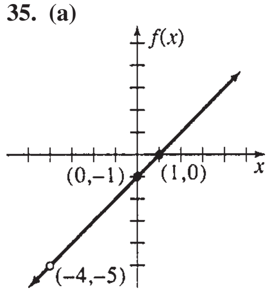
23.


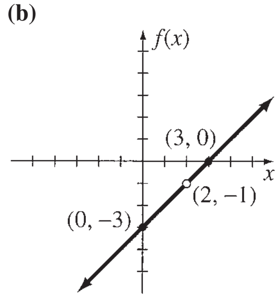
25.


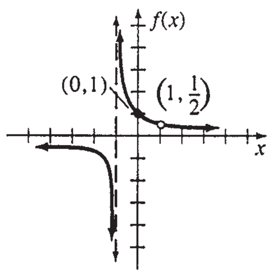
27.


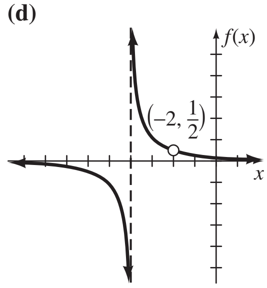
29.


31.


35. **(a)**


(b)


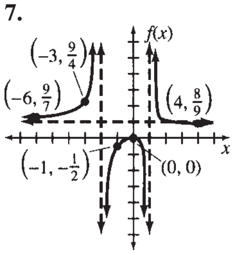
(c)


(d)


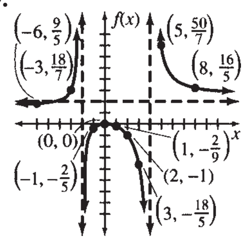
Conjunto de problemas 13.3 (página 585)

1. $y = x - 1$ **3.** $y = x + 2$ **5.** $y = 3x - 5$

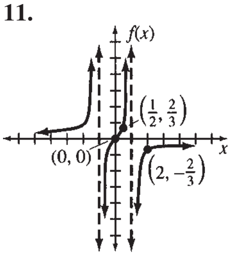
7.



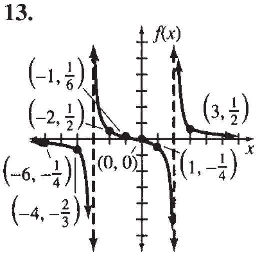
9.



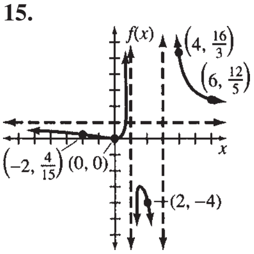
11.



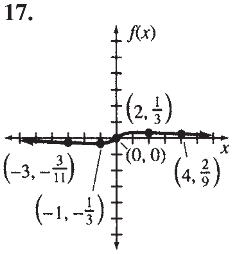
13.



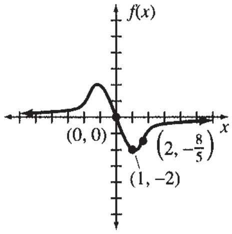
15.



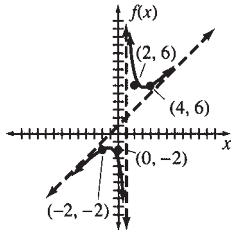
17.



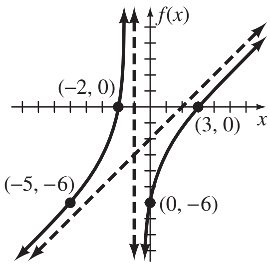
19.



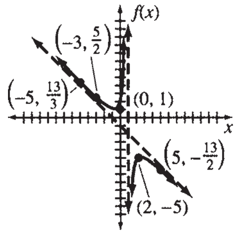
21.



23.



25.



Capítulo 14

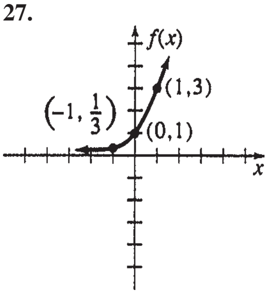
Conjunto de problemas 14.1 (página 594)

1. $\{6\}$ **3.** $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ **5.** $\{7\}$ **7.** $\{5\}$ **9.** $\{1\}$ **11.** $\{-3\}$

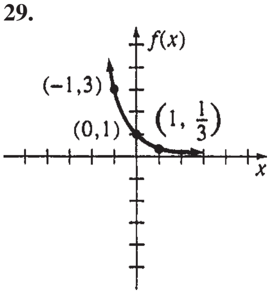
13. $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ **15.** $\left\{\frac{1}{5}\right\}$ **17.** $\{0\}$ **19.** $\{-1\}$ **21.** $\left\{\frac{5}{2}\right\}$

23. $\{3\}$ **25.** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

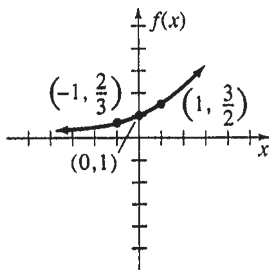
27.



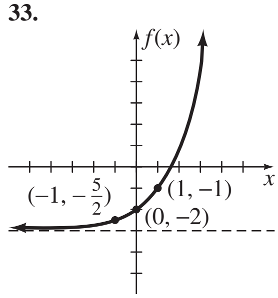
29.



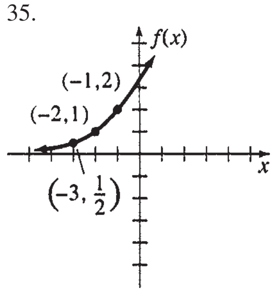
31.



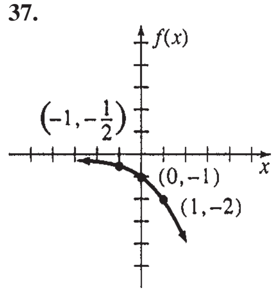
33.



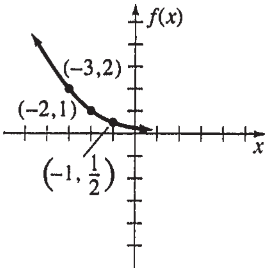
35.



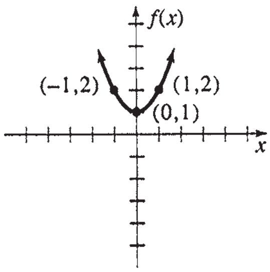
37.



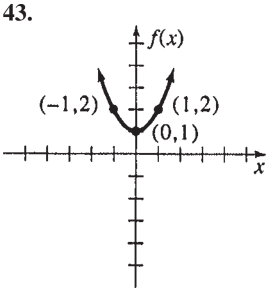
39.



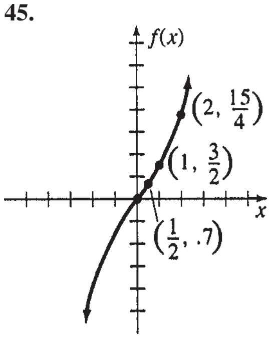
41.



43.



45.



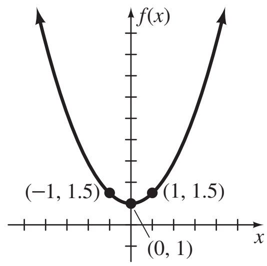
49.

	4%	5%	6%	7%
5 años	1221	1284	1350	1419
10 años	1492	1649	1822	2014
15 años	1822	2117	2460	2858
20 años	2226	2718	3320	4055
25 años	2718	3490	4482	5755

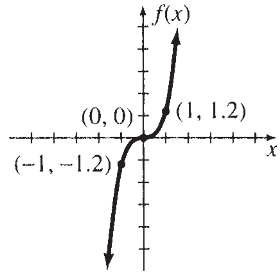
51.

	4%	5%	6%	7%
Compuesto anualmente	1480	1629	1791	1967
Compuesto semestralmente	1486	1639	1806	1990
Compuesto trimestralmente	1489	1644	1814	2002
Compuesto mensualmente	1490	1647	1819	2010
Compuesto continuamente	1492	1649	1822	2014

53.



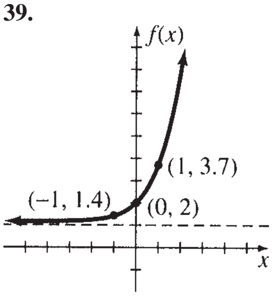
55.



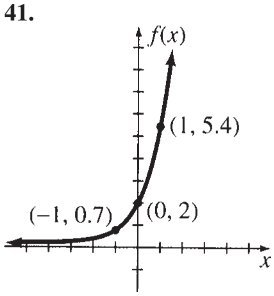
Conjunto de problemas 14.2 (página 603)

1. **(a)** \$1.55 **(b)** \$4.17 **(c)** \$2.33 **(d)** \$2.28 **(e)** \$21,900 **(f)** \$246,342 **(g)** \$658
3. \$283.70 **5.** \$659.74 **7.** \$1251.16 **9.** \$2234.77
11. \$9676.41 **13.** \$13,814.17 **15.** \$567.63
17. \$1422.36 **19.** \$5715.30 **21.** \$14,366.56
23. \$26,656.96 **25.** 5.9% **27.** 8.06%
29. 8.25% compuesto trimestralmente
31. 50 gramos; 37 gramos **33.** 2226; 3320; 7389
35. 2000 **37.** **(a)** 6.5 libras por pulgada cuadrada **(c)** 13.6 libras por pulgada cuadrada

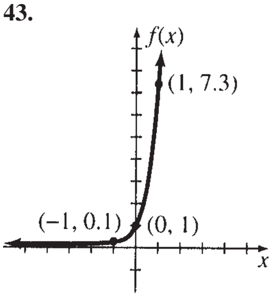
39.



41.



43.



Conjunto de problemas 14.3 (página 612)

1. Si **3.** No **5.** Si **7.** Si **9.** Si
11. No **13.** No
15. **(a)** Dominio de f: $\{1, 2, 5\}$; Rango de f: $\{5, 9, 21\}$
(b) $f^{-1} = \{(5, 1), (9, 2), (21, 5)\}$
(c) Dominio de f^{-1}: $\{5, 9, 21\}$; Rango de f^{-1}: $\{1, 2, 5\}$
17. **(a)** Dominio de f: $\{0, 2, -1, -2\}$; Rango de f: $\{0, 8, -1, -8\}$
(b) f^{-1}: $\{(0, 0), (8, 2), (-1, -1), (-8, -2)\}$
(c) Dominio de f^{-1}: $\{0, 8, -1, -8\}$; Rango de f^{-1}: $\{0, 2, -1, -2\}$
27. No **29.** Si **31.** No **33.** Si **35.** Si

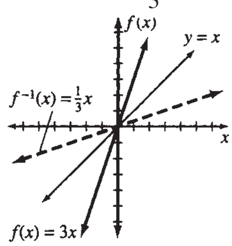
37. $f^{-1}(x) = x + 4$ **39.** $f^{-1}(x) = \dfrac{-x-4}{3}$

41. $f^{-1}(x) = \dfrac{12x+10}{9}$ **43.** $f^{-1}(x) = -\dfrac{3}{2}x$

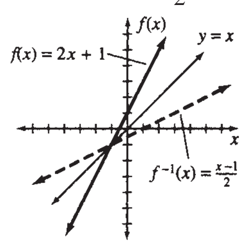
45. $f^{-1}(x) = x^2$ para $x \geq 0$ **47.** $f^{-1}(x) = \sqrt{x-4}$ para $x \geq 4$

49. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x-1}$ para $x > 1$

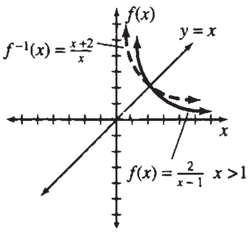
51. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{3}x$



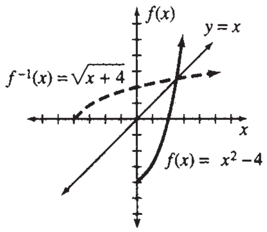
53. $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$



55. $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{x}$ para $x > 0$



57. $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$ para $x \geq -4$



59. Aumentando en $[0, \infty)$ y disminuyendo en $(-\infty, 0]$
61. Disminuyendo en $(-\infty, \infty)$
63. Aumentando en $(-\infty, -2]$ y disminuyendo en $[-2, \infty)$
65. Aumentando en $(-\infty, -4]$ y disminuyendo en $[-4, \infty)$

71. **(a)** $f^{-1}(x) = \dfrac{x+9}{3}$ **(c)** $f^{-1}(x) = -x + 1$

(e) $f^{-1}(x) = -\dfrac{1}{5}x$

Conjunto de problemas 14.4 (página 622)

1. $\log_2 128 = 7$ **3.** $\log_5 125 = 3$ **5.** $\log_{10} 1000 = 3$

7. $\log_2\left(\dfrac{1}{4}\right) = -2$ **9.** $\log_{10} 0.1 = -1$ **11.** $3^4 = 81$

13. $4^3 = 64$ **15.** $10^4 = 10{,}000$ **17.** $2^{-4} = \dfrac{1}{16}$

19. $10^{-3} = 0.001$ **21.** 4 **23.** 4 **25.** 3 **27.** $\dfrac{1}{2}$ **29.** 0

31. -1 **33.** 5 **35.** -5 **37.** 1 **39.** 0 **41.** $\{49\}$

43. $\{16\}$ **45.** $\{27\}$ **47.** $\left\{\dfrac{1}{8}\right\}$ **49.** $\{4\}$ **51.** 5.1293

53. 6.9657 **55.** 1.4037 **57.** 7.4512 **59.** 6.3219
61. -0.3791 **63.** 0.5766 **65.** 2.1531 **67.** 0.3949
69. $\log_b x + \log_b y + \log_b z$ **71.** $\log_b y - \log_b z$

73. $3\log_b y + 4\log_b z$ **75.** $\dfrac{1}{2}\log_b x + \dfrac{1}{3}\log_b y - 4\log_b z$

77. $\dfrac{2}{3}\log_b x + \dfrac{1}{3}\log_b z$ **79.** $\dfrac{3}{2}\log_b x - \dfrac{1}{2}\log_b y$

81. $\log_b\left(\dfrac{x^2}{y^4}\right)$ **83.** $\log_b\left(\dfrac{xz}{y}\right)$ **85.** $\log_b\left(\dfrac{x^2z^4}{z^3}\right)$

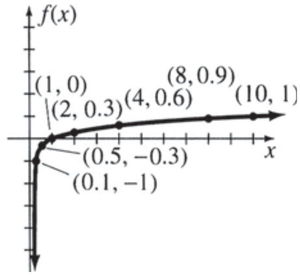
87. $\log_b\left(\dfrac{y^4\sqrt{x}}{x}\right)$ **89.** $\left\{\dfrac{9}{4}\right\}$ **91.** $\{25\}$ **93.** $\{4\}$ **95.** $\{-2\}$

97. $\left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$ **99.** $\left\{\dfrac{19}{8}\right\}$ **101.** $\{9\}$ **103.** $\varnothing$ **105.** $\{1\}$

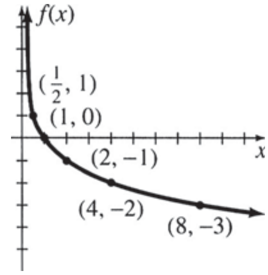
Conjunto de problemas 14.5 (página 629)

1. 0.8597 **3.** 1.7179 **5.** 3.5071 **7.** -0.1373 **9.** -3.4685
11. 411.43 **13.** 90,095 **15.** 79.543 **17.** 0.048440
19. 0.0064150 **21.** 1.6094 **23.** 3.4843 **25.** 6.0638
27. -0.7765 **29.** -3.4609 **31.** 1.6034 **33.** 3.1346
35. 108.56 **37.** 0.48268 **39.** 0.035994

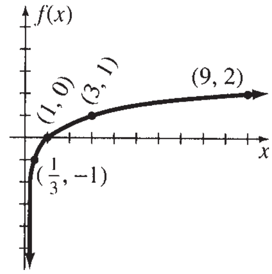
41.



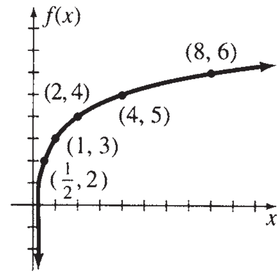
43.



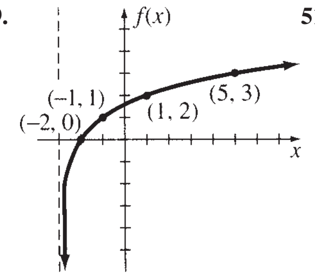
45.



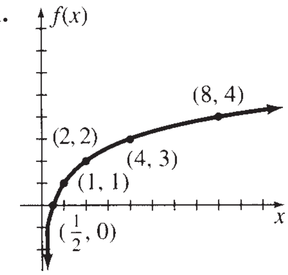
47.



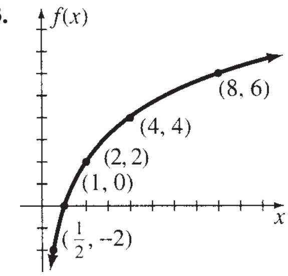
49.



51.



53.



55. 0.36 **57.** 0.73 **59.** 23.10 **61.** 7.93

Conjunto de problemas 14.6 (página 637)

1. $\{2.33\}$ **3.** $\{2.56\}$ **5.** $\{5.43\}$ **7.** $\{4.18\}$ **9.** $\{0.12\}$
11. $\{3.30\}$ **13.** $\{4.57\}$ **15.** $\{1.79\}$ **17.** $\{3.32\}$ **19.** $\{2.44\}$

21. $\{4\}$ **23.** $\left\{\dfrac{19}{47}\right\}$ **25.** $\left\{\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}\right\}$ **27.** $\{1\}$

29. $\{8\}$ **31.** $\{1, 10{,}000\}$ **33.** 5.322 **35.** 2.524 **37.** 0.339
39. -0.837 **41.** 3.194 **43.** 4.8 años **45.** 17.3 años
47. 5.9% **49.** 6.8 horas **51.** 6100 pies **53.** 3.5 horas
55. 6.7 **57.** Aproximadamente 8 veces **65.** $\{1.13\}$
67. $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$

Apéndice A

Respuestas del apéndice A (página 641)

1. 16 **2.** 25 **3.** 5 **4.** $\frac{6}{5}$ **5.** 2 **6.** 33 y 34
7. -41 y -42 **8.** 22, 24, y 26 **9.** 47, 49, y 51
10. 3 **11.** -3 **12.** 19 y 20 **13.** 49, 50, y 51
14. 9 **15.** 32 **16.** 48 **17.** 72
18. 4 y 7 o $-\frac{7}{2}$ y -8
19. -2 y -12 o $\frac{12}{5}$ y 10
20. 5 y 6 o -5 y -6 **21.** 3 y 5
22. 18 y 39 **23.** 9 y 56
24. $\frac{5}{6}$ **25.** 4 **26.** $-\frac{1}{5}$ o 5 **27.** $-\frac{4}{3}$ o $\frac{3}{4}$ **28.** $\frac{1}{2}$ o 6
29. $-\frac{3}{2}$ o $\frac{2}{3}$ **30.** 36 y 42 **31.** 14 y 41 **32.** 17 y 85
33. 32 y 67 **34.** 40 y 96 **35.** $5 + \sqrt{3}$; $5 - \sqrt{3}$
36. 8 y 9 **37.** 3 y 6 **38.** Todo número mayor que $\frac{13}{3}$
39. Todo número menor que o igual a 8
40. Todo número menor que 3 **41.** 92 o mejor
42. 100 o mejor **43.** 77 o menos **44.** 166 o mejor
45. 10 centímetros **46.** 14 pulgadas **47.** 35° y 70°
48. 62° y 118° **49.** 24° y 66° **50.** 60°
51. $A = 32°$, $B = 58°$ y $C = 90°$
52. 55° **53.** 7 pulgadas y 15 pulgadas
54. 14 centímetros por 21 centímetros
55. 7 yardas, 12 yardas y 15 yardas **56.** 12 pulgadas
57. 5 centímetros **58.** 5 metros por 8 metros
59. El lado mide 9 pulgadas y la altura mide 4 pulgadas
60. 9 pulgadas y 12 pulgadas
61. El ancho mide 8 metros y el largo mide 15 metros.
62. 1 metro **63.** 8 pulgadas por 14 pulgadas
64. 9 unidades por 11 unidades
65. $3000 al 5% y $4500 al 6%
66. $1000 al 8% y $3000 al 9%
67. $1000 **68.** $800 al 7% y $1200 al 8%
69. 40 acciones a $20 cada una
70. 40 acciones a $15 cada una
71. 12 lotes a $10,000 por lote. **72.** 14 pies por 17 pies
73. 130 millas **74.** 300 millas **75.** $4000 **76.** 25 libras
77. $9\frac{3}{5}$ pies y $14\frac{2}{5}$ pies **78.** $87\frac{1}{2}$ millas
79. $300 y $450 **80.** 2750 mujeres y 1650 hombres
81. 30% **82.** 115% **83.** 75 **84.** 55 **85.** 90 **86.** $52
87. $60 **88.** 40% **89.** 35% **90.** $8 **91.** $36.25
92. $27.50 **93.** $1.60 por libra
94. 58 mph y 65 mph **95.** $3\frac{1}{2}$ horas
96. 1 hora **97.** $1\frac{3}{4}$ horas
98. Kaitlin a 9 millas por hora y Kent a 12 millas por hora
99. Simon camina 2 horas a 3 millas por hora y Dave camina $3\frac{1}{2}$ horas a 2 millas por hora
100. 12 millas por hora de ida y 8 millas por hora de regreso o 16 mph de ida y 12 mph de regreso
101. Camina a $2\frac{1}{2}$ millas por hora y trota a 5 millas por hora
102. 55 millas por hora **103.** 20 millas por hora
104. Lorraine a 20 mph y Charlotte a 25 mph, o Lorraine a 45 mph y Charlotte a 50 mph
105. 4 litros **106.** $2\frac{2}{9}$ tazas **107.** 25 mililitros
108. 10 galones **109.** $43\frac{1}{3}$%
110. 15 cuartos al 30% y 5 cuartos al 70%
111. 12 minutos **112.** $37\frac{1}{2}$ minutos
113. A en 2 horas y B en 2 horas **114.** 60 minutos
115. 6 horas para Tom y 8 horas para Terry
116. 80 minutos
117. 5 monedas de un centavo, 15 de cinco y 20 de diez centavos
118. 14 monedas de cinco y 16 de diez centavos
119. 48 monedas de un centavo, 24 monedas de cinco y 32 de diez centavos
120. 40 monedas de veinticinco, 20 de diez y 10 de cinco centavos
121. 30 monedas de un centavo, 20 monedas de cinco y 45 de diez centavos
122. 8 monedas de diez y 15 de veinticinco centavos
123. 12 monedas de cinco, 25 de diez y 35 de veinticinco centavos
124. $9.50 por hora **125.** $20 **126.** $30 por hora
127. $3.69 **128.** $65 **129.** 730 demócratas
130. 360 niñas **131.** $23 por acción **132.** $12 por hora
133. $10.20 por hora **134.** 5 filas y 13 árboles por fila
135. 6 filas y 8 bancas por fila
136. $1.79 por libra de manzanas Gala y $0.99 por libra de manzanas Fuji
137. $1.69 por cinta
138. $2.29 por hojuelas de maíz y $2.98 por hojuelas de trigo
139. 30 horas **140.** 25 estudiantes a $4 cada uno
141. 8 personas **142.** 12 tazas a $7 cada una
143. 30 pies

ALGUNAS COMPARACIONES APROXIMADAS ENTRE LOS SISTEMAS INGLÉS Y MÉTRICO

(el símbolo $\approx$ significa "es aproximadamente igual a")

Longitud

1 pulgada $\approx$ 2.5 centímetros	1 centímetro $\approx$ 0.4 de una pulgada
1 pie $\approx$ 30.5 centímetros	1 centímetro $\approx$ 0.03 de un pie
1 yarda $\approx$ 0.9 de un metro	1 metro $\approx$ 1.1 yardas
1 milla $\approx$ 1.6 kilómetros	1 kilómetro $\approx$ 0.6 de una milla

Volumen

1 pinta $\approx$ 0.5 de un litro	1 litro $\approx$ 2.1 pintas
1 cuarto $\approx$ 0.9 de un litro	1 litro $\approx$ 1.1 cuartos
1 galón $\approx$ 3.8 litros	1 litro $\approx$ 0.3 de un galón

Masa

1 onza $\approx$ 28.35 gramos	1 gramo $\approx$ 0.04 de una onza
1 libra $\approx$ 453.6 gramos	1 gramo $\approx$ 0.002 de una libra
1 libra $\approx$ 0.45 de un kilogramo	1 kilogramo $\approx$ 2.2 libras

Interés simple

$$I = Prt \qquad A = P + Prt$$

I interés simple
P principal
A cantidad
r tasa de interés
t tiempo (en años)

Temperatura

$$\mathrm{C} = \frac{5}{9}(\mathrm{F} - 32)$$

$$\mathrm{F} = \frac{9}{5}\mathrm{C} + 32$$

F grados Fahrenheit
C grados Celsius

Distancia-Rapidez-Tiempo

$$d = rt \qquad r = \frac{d}{t} \qquad t = \frac{d}{r}$$

d distancia
r rapidez
t tiempo

SUBCONJUNTOS DE NÚMEROS REALES

Números naturales	$\{1, 2, 3, \ldots\}$
Números enteros	$\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
Números reales	$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
Números racionales	$\left\{\dfrac{a}{b}\,\middle\vert\, a \text{ y } b \text{ son números reales y } b \neq 0\right\}$
Números irracionales	$\{x \mid x \text{ es un número real y } x \text{ no es racional}\}$

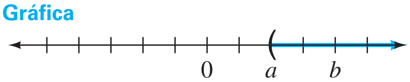
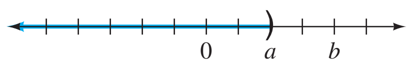
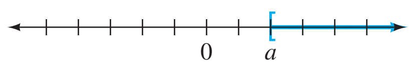
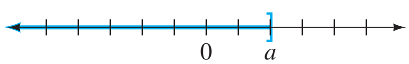
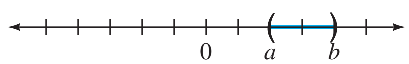
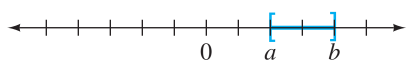
PROPIEDADES DE NÚMEROS REALES

Sean números reales, a, b y c, las siguientes propiedades son ciertas.

	Suma	**Multiplicación**
Propiedad conmutativa	$a + b = b + a$	$ab = ba$
Propiedad asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$
Propiedad del inverso	$a + (-a) = 0$	$a\left(\dfrac{1}{a}\right) = 1$
Propiedad de identidad	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$

Propiedad distributiva $\qquad a(b + c) = ab + ac$

DESIGUALDADES

Frase	**Notación de conjuntos**	**Gráfica**	**Notación de intervalos**
$x > a$	$\{x \mid x > a\}$		(a, ∞)
$x < a$	$\{x \mid x < a\}$		$(-\infty, a)$
$x \geq a$	$\{x \mid x \geq a\}$		$[a, \infty)$
$x \leq a$	$\{x \mid x \leq a\}$		$(-\infty, a]$
$a < x < b$	$\{x \mid a < x < b\}$		(a, b)
$a \leq x \leq b$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$		$[a, b]$

PROPIEDADES DE EXPONENTES Y RADICALES

$b^n \cdot b^m = b^{n+m} \qquad \dfrac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$

$(b^n)^m = b^{n \times m}$

$(ab)^n = a^n b^n \qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} \qquad \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

MULTIPLICACIÓN DE PATRONES

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

PATRONES DE FACTORIZACIÓN

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Álgebra. Elemental está pensado tanto para estudiantes que jamás han tomado un curso de álgebra elemental como para aquellos que necesitan un repaso de temas adicionales de matemáticas. En sus páginas los conceptos básicos de álgebra elemental se presentan de manera simple y directa. Estos conceptos se desarrollan por medio de ejemplos, y se refuerzan continuamente mediante ejercicios adicionales, aplicados a resolución de problemas.

Esta primera edición en español de **Álgebra. Elemental** de Jerome E. Kaufmann y Karen L. Schwitters ha sido ampliada con tres secciones del libro *Algebra for College Students* de los mismos autores para ampliar su espectro y su aceptación en las aulas. Así, sus páginas conservan las características que hicieron de las ediciones pasadas un éxito; al mismo tiempo que se han incorporado varias mejoras sugeridas por los revisores.

ISBN-13: 978-607-526-420-2
ISBN-10: 607-526-420-5
9 786075 264202

CENGAGE Learning®

Visite nuestro sitio en http://latinoamerica.cengage.com