ÁLGEBRA INTERMEDIA

EDICIÓN OCTAVA 8 OCTAVA EDICIÓN

ANGEL RUNDE

ALWAYS LEARNING

PEARSON

ÁLGEBRA INTERMEDIA

OCTAVA EDICIÓN

ALLEN R. ANGEL
MONROE COMMUNITY COLLEGE

DENNIS C. RUNDE
STATE COLLEGE OF FLORIDA

TRADUCCIÓN

KENYI CASILLAS RODRÍGUEZ
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

SUSANA BRAVO BÉNARD
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

REVISIÓN TÉCNICA

ING. JUAN DE SANTIAGO CASTILLO MIS
Director del Departamento
de Ciencias y Matemáticas
Instituto Tecnológico y de
Estudios Superiores de Monterrey
Campus San Luis Potosí, México

ING. IND. TERESITA BETANCOURT PÉREZ
Universidad de Guadalajara,
México

LIC. CARLOS CERÓN DE LEÓN
Coordinador Área Científica
Colegio Capouilliez
Guatemala, Guatemala.

PEARSON

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación

Autor: Angel, Allen R., Runde, Dennis C.

Álgebra Intermedia
Educación media superior
8ª edición

Pearson Educación de México, S.A de C.V., México, 2013
ISBN: 978-607-32-2199-3
Área: Bachillerato

Formato: 21 x 27 cm Páginas: 784

Traducción autorizada de la edición en idioma inglés, titulada *Intermediate Algebra for college students,* 8th edition por Allen Angel y Dennis Runde, publicada por Pearson Education, Inc., publicada por Pearson, Copyright © 2011. Todos los derechos reservados.

Authorized translation from the English Language edition, entitled Intermediate Algebra for college students, 8th edition by Allen Angel and Dennis Runde, published by Pearson Education Inc., publishing as Pearson, Copyright © 2011.

ISBN 13: 978-0-321-62091-0 (Student edition)

Esta edición en español es la única autorizada.

Edición en inglés

Editorial Director, Mathematics: Christine Hong • **Editor in Chief:** Paul Murphy • **Sponsoring Editor:** Mary Beckwith • **Executive Projet Manager:** Kari Heen • **Associate Editor:** Joanna Doxey • **Editorial Assistant:** Kristine Rude • **Editor in Chief, Development:** Carol Trueheart • **Production Management:** Elm Street Publishing Services • **Senior Managing Editor:** Karen Wernholm • **Production Supervisor:** Patty Bergin • **Cover Designer:** Barbara T. Atkinson • **Text Design:** Kl Creative • **Digital Assets Manager:** Marianne Groth • **Media Producers:** Audra J. Walsh and Vicki Dreyfus • **Executive Manager, Course Production:** Peter Silvia • **Software Development:** Eileen Moore and Marty Wright • **Executive Marketing Manager:** Michelle Renda • **Marketing Manager:** Adam Goldstein • **Marketing Assistant:** Margaret Wheeler • **Senior Prepress Supervisor:** Caroline Fell • **Senior Manufacturing Manager:** Evelyn Beaton • **Senior Media Buyer:** Ginny Michaud • **Composition:** Prepare Inc. • **Art Studios:** Scientific Illustrators and Laserwords • **Cover images:** Wind turbine farm over sunset: © TedNad/Shutterstock; Gold wheat/clouds: © Triff/ Shutterstock

ÁLGEBRA INTERMEDIA

Octava edición en español

Dirección general: Philip De la Vega • **Dirección K-12:** Santiago Gutiérrez • **Gerencia editorial K-12:** Jorge Luis Íñiguez • **Coordinación editorial Bachillerato:** Lilia Moreno • **Edición sponsor:** Berenice Torruco • **Coordinación de arte y diseño K-12:** Asbel Ramírez • **Supervisión de arte y diseño:** Yair Cañedo • **Edición de desarrollo:** Olga Sánchez • **Asistencia editorial:** Miriam Serna • **Composición y diagramación:** Carácter Tipográfico, Eric Aguirre, Alma Martínez, Aarón León, Enrique Hernández, Adrián León, Francisco Valadez • **Lectura de pruebas:** Cristina Segura, Arturo Manzo, Mirna González.

Director regional K-12 América Latina: Eduardo Guzmán Barros
Directora de contenidos K-12 América Latina: Clara Andrade

ISBN LIBRO IMPRESO: 978-607-32-2199-3
ISBN E-BOOK: 978-607-32-2200-6
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-2201-3

Impreso en México. Printed in Mexico.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – 16 15 14 13

D.R. © 2013 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco 500, 5° piso
Col. Industrial Atoto, C.P. 53519
Naucalpan de Juárez, Edo. de México
Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana Reg. Núm. 1031

PEARSON

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

www.pearsonenespañol.com

A mi esposa, Kathy,
y a mis hijos, Robert y Steven
Allen R. Angel

A mi esposa, Kristin,
y a mis hijos, Alex, Nick, y Max
Dennis C. Runde

Contenido breve

Contenido

4 Sistemas de ecuaciones y desigualdades 217

5 Polinomios y funciones polinomiales 279

6 Expresiones racionales y ecuaciones 361

7 Raíces, radicales y números complejos 425

Prefacio

Este libro lo escribimos pensando en estudiantes de bachillerato que han completado con éxito un primer curso de álgebra elemental. La meta principal fue escribir un libro que ustedes los estudiantes pudieran leer, entender y disfrutar. Para ello utilizamos oraciones cortas, explicaciones claras y muchos ejemplos resueltos a detalle. Asimismo, hemos intentado hacer el libro útil para estudiantes de bachillerato, por medio del uso de aplicaciones prácticas del álgebra a lo largo del libro.

Los diferentes factores que contribuyeron al éxito de las ediciones previas se han mantenido. En la preparación de esta nueva edición, consideramos las sugerencias de diversos profesores y estudiantes de todo el país. La escritura de este libro ha sido influida tanto por los avances en la tecnología como por otras dos obras: *Principios y estándares para escuelas de Matemáticas*, del Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (NCTM, por sus siglas en inglés) y por *Beyond Crossroads: Implementación de estándares matemáticos en los primeros dos años de bachillerato*, de la Asociación Americana de Matemáticas para Segundo Año de Bachillerato (AMATYC, por sus siglas en inglés).

Lo nuevo en esta edición

Una de las características más importantes de este texto es su legibilidad, lo que ha permitido que sea muy fácil de leer para estudiantes de cualquier nivel. Esta octava edición continúa con este énfasis y se ha enfocado con especial atención en desarrollar un texto que sea amigable, tomando en cuenta los diferentes estilos y necesidades de aprendizaje.
Algunos de los cambios realizados en la octava edición son:

Cambios en el contenido

- Se han revisado exhaustivamente las exposiciones a través del texto para que sean breves y accesibles. En la medida de lo posible, se han utilizado diagramas y ejemplos visuales para poder explicar conceptos y procedimientos.
- **Comprendiendo el álgebra** es una nueva sección que aparece en los ladillos ubicado en puntos clave, tiene como finalidad llamar rápidamente tu atención hacia conceptos y hechos relevantes que necesites para dominar los temas.
- Se ha mejorado el uso de los colores de manera pedagógica; ahora se incluye un sistema de código de colores para variables y notación que te ayudará a interpretar mejor el texto.
- Los conjuntos de ejercicios ahora comienzan con **Ejercicios de práctica**, los cuales hacen hincapié en la teoría. Los ejercicios son excelentes como práctica durante la realización de tareas o como una prueba de 5 minutos. Los *Ejercicios de conceptos y escritura* (ubicados al inicio del conjunto de ejercicios) ahora están ubicados después de la sección de *Resolución de problemas* dentro de los conjuntos de ejercicios.
- Además, se han actualizado aplicaciones y ejercicios a lo largo del libro.

Mejoras en los recursos

- El video de la prueba de práctica de cada capítulo y los videos de la serie de lectura/conferencia se encuentran subtitulados en español e inglés y están disponibles en MyMathLab. Los videos de la prueba de práctica también los puedes encontrar en el portal de YouTube.
- MyMathLab y MathXL han sido actualizados y ahora incluyen:

  1. Mayor diversidad en los ejercicios
  2. Actividades sugeridas para realizar tareas
  3. Nuevas estrategias de estudio para la lectura de las matemáticas

Características del texto

Formato a dos colores

Los colores se utilizan de forma pedagógica de la siguiente manera:

- Las definiciones y los procedimientos importantes se resaltan en recuadros de color.
- La selección del color o el texto en color se ha utilizado para destacar conceptos de importancia.
- El material gráfico se ha destacado utilizando color para resaltarlo.
- El formato de dos colores te permitirá una fácil identificación de aspectos relevantes.
- El juego de color utilizado en la obra la hace más atractiva e interesante para ti como estudiante.

Precisión

La precisión en un texto de matemáticas es esencial; para garantizarla, profesores de matemáticas alrededor del mundo leyeron cuidadosamente las páginas para detectar errores tipográficos y validaron las respuestas de todos los ejercicios.

Conexiones

Muchos de los estudiantes como tú no dominan del todo los nuevos conceptos la primera vez que se les presentan. En este texto te invitamos a establecer conexiones; esto es, presentamos un concepto, y más tarde, a lo largo del texto, lo volvemos a presentar brevemente y trabajamos ejemplos a partir de dicho concepto, con ello, lo reforzamos. Los conceptos importantes los utilizamos en muchas secciones del libros, los cuales son reforzados a lo largo del libro en los *Ejercicios de repaso acumulados* y en las *Pruebas de repaso acumuladas*.

Aplicación de inicio del capítulo

Al inicio de cada capítulo se proporciona una ejemplo de la vida real relacionado con el tema a desarrollar en él. Cuando completes el capítulo, tendrás el conocimiento necesario para resolver el problema.

Objetivos de este capítulo

Este apartado al inicio de cada capítulo te proporciona una visión general de la sección, también indica en qué otros capítulos se utilizará el tema.

Este material te ayudará a relacionar diversos temas del libro y a conectarlos con la vida diaria.

El uso de íconos

Al inicio de cada conjunto de ejercicios se muestran los íconos de MathXL, MathXL, y de MyMathLab, MyMathLab, para recordarte los recursos que puedes utilizar para ayudarte en el desarrollo de tus tareas.

Objetivos numerados de la sección

Al inicio de cada sección aparece un listado de habilidades que debes aprender en cada sección. Los objetivos están numerados y se repiten en la parte correspondiente de la sección y se identifican mediante números dentro de un cuadro de color azul como éste 1.

Resolución de problemas

En la sección 2.2 se analiza el procedimiento y/o método de George Pólya de cinco pasos para la resolución de problemas, los cuales se enfatizan a lo largo del libro.

Aplicaciones prácticas

En todo el libro se pone especial atención a las aplicaciones prácticas del álgebra. Es necesario que los estudiantes aprendan a traducir los problemas de aplicación a símbolos algebraicos. El método de resolución de problemas usado en este libro te proporcionará una amplia experiencia en la resolución de problemas de aplicación. Lo cual, incluso te motivará.

Ejemplos resueltos de manera detallada

Se han resuelto una gran cantidad de ejemplos paso a paso, en forma detallada. Los pasos importantes se resaltan en color y no se omite ninguno hasta que el alumno ha visto suficientes ejemplos similares.

Resuelve ahora el ejercicio

En cada sección, después de cada ejemplo, se invita a los estudiantes a trabajar en ejercicios similares al analizado. Los apartados *Resuelve ahora el ejercicio* te convertirán en un estudiante *activo* en lugar de uno pasivo, y reforzarás los conceptos mientras realizas los ejercicios. A través de estos ejercicios, tendrás la oportunidad de aplicar inmediatamente lo que acabas de aprender. Esto se debe a que después de cada ejemplo, el apartado Resuelve ahora el ejercicio se indica en color azul, Resuelve ahora el ejercicio 27. Y también se indican los ejercicios correspondientes en color azul dentro de los conjuntos de ejercicios, como 27.

Habilidades de estudio

Los estudiantes que tomen este curso se verán beneficiados por un repaso de las habilidades básicas de estudio. Estas habilidades son esenciales para tener éxito en las matemáticas. En la sección 1.1, la primera sección del texto, analiza los hábitos de estudio necesarios para tener un máximo aprovechamiento en matemáticas. Esta sección te será de gran ayuda para lograr el éxito en las matemáticas.

Comprendiendo el álgebra

Los nuevos recuadros de **Comprendiendo el álgebra** aparecen en los ladillos a lo largo del texto y se localizan en puntos clave para ayudarte a poner atención en los conceptos y hechos relevantes que requieres para dominar los temas.

Consejos útiles

Los recuadros de *Consejo útil* ofrecen consejos para la resolución de problemas y otros temas diversos. Se encuentran colocados de una forma especial, para asegurar que los estudiantes los lean.

Prevención de errores comunes

En esta sección se ilustran los errores más comunes cometidos por los estudiantes. Se explican las razones por las cuales ciertos procedimientos son incorrectos y se describe la forma correcta de resolver el problema, además, se explica cómo podrías evitar cometerlos.

Conjunto de ejercicios

Los conjuntos de ejercicios se dividen en tres categorías principales: *Ejercicios de práctica*, *Practica tus habilidades*, y *Resolución de problemas*. Muchos conjuntos de ejercicios incluso contienen *Problemas de desafío o actividades de grupo*. La dificultad de cada conjunto de ejercicios está graduada: los primeros te ayudarán a desarrollar confianza, y gradualmente llegarás a problemas de mayor dificultad. En cada sección aparece una cantidad suficiente y variada de ejemplos para que resuelvas con éxito incluso los ejercicios más difíciles. El número de ejercicios en cada sección es más que amplio para tareas y todavía quedan para practicar.

Ejercicios de práctica

El conjunto de ejercicios inicia con *Ejercicios de práctica*. Los ejercicios con espacios en blanco hacen énfasis en la teoría vista a lo largo de la sección. Estos ejercicios sirven de práctica para los ejercicios de tarea o como una prueba de 5 minutos.

Ejercicios de resolución de problemas

Estos ejercicios te ayudarán a pensar mejor y a resolver problemas. Muchos de estos ejercicios involucran aplicaciones del álgebra en la vida real. Para los estudiantes es importante poder aplicar lo que aprenden en situaciones de la vida real, y muchos ejercicios de resolución de problemas les ayudan a lograrlo.

Ejercicios de conceptos y escritura

La mayoría de los conjuntos de ejercicios requiere que expongas los resultados de los problemas con tus propias palabras.

Este tipo de problemas promueve el entendimiento y la comprensión del tema. Muchos de estos ejercicios involucran resolución de problemas y conceptualización, muchos de ellos ayudan a desarrollar mejores habilidades de razonamiento y pensamiento crítico. Estos ejercicios se encuentran después de los ejercicios de *Resolución de problemas*, al final de la sección de conjunto de ejercicios.

Problemas de desafío

Esta sección de ejercicios forma parte del conjunto de ejercicios, proporcionan una amplia variedad de problemas. Muchos de ellos se escribieron para estimular tu reflexión y pensamiento crítico. Algunos proporcionan aplicaciones adicionales del álgebra que se usan en secciones futuras del libro, de tal forma que puedas verlas y aprenderlas antes de que se cubran en el aula de clases. Otros son de mayor desafío en comparación con los ejercicios regulares que se encuentran dentro del conjunto de ejercicios.

Ejercicios de Video de lectura/conferencia

Los ejercicios que se explican a detalle en los Videos de lectura/conferencia se encuentran señalados con un ícono de una videocámara. Esto te será de gran ayuda.

Ejercicios de repaso acumulados

Todos los conjuntos de ejercicios (excepto los dos primeros) contienen preguntas de capítulos y secciones anteriores. Estos ejercicios tienen como propósito reforzar los temas estudiados, ayudar a comprender y a retener los temas vistos previamente mientras aprenden los nuevos temas. Para tu beneficio, después de cada respuesta se incluye una leyenda entre corchetes, como [3.4], que indica la sección en donde se vio el tema.

Actividades de grupo

Algunos de los conjuntos de ejercicios se realizan en grupo, lo que conduce a discusiones grupales interesantes. Muchos estudiantes como tú aprenden mejor en atmósferas grupales y estas actividades les proporcionan herramientas para conversar sobre matemáticas con otros compañeros de estudio.

Pruebas de mitad del capítulo

Hacia la mitad de cada capítulo se encuentran las *Pruebas de mitad de capítulo*. Los estudiantes deberán realizar esta sección para asegurarse de que comprendieron los temas vistos a lo largo del capítulo. Después de cada respuesta se incluye una leyenda entre corchetes, como [2.3], que indica la sección donde la información relacionada con el ejercicio es explicada a detalle.

Resumen del capítulo

Al final de cada capítulo se encuentra el *Resumen del capítulo*, el cual incluye conceptos importantes del capítulo y ejemplos que ilustran estos conceptos.

Ejercicios de repaso del capítulo

Al final de cada capítulo se encuentran los *Ejercicios de repaso* que cubren todo tipo de ejercicios presentados en el capítulo. Este tipo de ejercicios se indican en color y con una leyenda entre corchetes, como [1.5], que indica la sección donde se vio el tema por primera vez.

Prueba de práctica del capítulo

La *Prueba de práctica del capítulo* te permitirá valorar cuán preparado estás para las pruebas de las clases. La sección donde se vio el tema por primera vez se indica entre corchetes en la sección de respuestas.

Prueba de repaso acumulada

Estas pruebas, que aparecen al final de cada capítulo, con excepción del primero, reafirman los conocimientos que adquiriste del tema estudiado desde el principio hasta el final de cada capítulo en el que se encuentren. Puedes utilizar estas pruebas como repaso o como preparación para el examen final. De la misma forma que los *Ejercicios de práctica*, esta sección contribuye a reforzar temas que fueron complicados en secciones anteriores. En la sección de respuestas, después de cada respuesta, se muestra entre corchetes la sección donde se vio el tema a detalle.

Respuestas

Las *respuestas impares* se proporcionan para los conjuntos de ejercicios. Se proporcionan *todas las respuestas* de los *Ejercicios de repaso acumulados*, *Pruebas de mitad de capítulo*, *Ejercicios de repaso de los capítulos*, *Pruebas de práctica de los capítulos*, y *Pruebas de repaso acumuladas*. No se proporcionan las respuestas de los *Ejercicios de actividad de grupo* debido a que queremos que se organicen como estudiantes para dar un resultado en conjunto.

Prerrequisitos

El prerrequisito para este curso es que tengas conocimientos previos de álgebra elemental. Aunque algunos temas de álgebra elemental se revisan brevemente en el texto, debes tener una comprensión y entendimiento del álgebra elemental antes de tomar este curso.

Modos de enseñanza

El formato y legibilidad de este libro proporciona diversos modos de enseñanza. El constante repaso de los conceptos repercutirá en el mejor entendimiento y retención de la información.

La característica del texto y la gran diversidad de recursos hacen que este texto sea adecuado para diferentes tipos de enseñanza, entre ellos:

- clase
- cursos mixtos
- educación a distancia
- aprendizaje autodidacta
- lectura modificada
- estudio en grupo o cooperativo
- laboratorio de aprendizaje

Recursos para profesores y estudiantes

RECURSOS PARA EL ESTUDIANTE

<table>
<tr>
<td>Manual de soluciones del estudiante
Proporciona todas las soluciones al trabajo realizado en
• todos los ejercicios de las secciones impares.
• todos los ejercicios de las Pruebas de mitad del capítulo, las Pruebas de práctica del capítulo y los Ejercicios de repaso acumulados.</td>
<td>Hojas de trabajo para el aula o el laboratorio de práctica
• Están disponibles ejercicios de práctica adicionales para todas las secciones con espacio suficiente para que los estudiantes muestren el desarrollo de su trabajo.</td>
</tr>
<tr>
<td>Videos de lectura/conferencia
Para cada sección del texto, se proveen aproximadamente 20 minutos de conferencia. Los ejercicios de texto que se trabajan en los videos, están identificados con el ícono .
• Subtítulos en inglés y español.
• Disponibles en MyMathLab®</td>
<td>Sección Test Prep Videos
• Soluciones paso a paso para cada ejercicio en cada Prueba de práctica del capítulo.
• Disponible en MyMathLab®
• Disponible en YouTube. (Buscar “Angel Intermediate Algebra” y seleccionar “Channels”)</td>
</tr>
</table>

RECURSOS PARA EL PROFESOR

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Edición extendida para el profesor
Comprende todo el contenido de la edición del estudiante más lo siguiente:
• respuestas a los ejercicios sobre la misma página de texto con gráficas en la sección Respuestas Gráficas en la parte final del texto.
• ejemplos para el instructor en el margen, a la par con cada ejemplo del estudiante.</td>
<td>Manual de recursos para el profesor con pruebas y mini-conferencias
• Mini-conferencias para cada sección del texto.
• Varios formatos de pruebas por capítulo (de respuesta libre o de opción múltiple).
• Respuestas para todos los elementos del texto.
• Disponible para descargar desde IRC y en MyMathLab®</td>
</tr>
<tr>
<td>TestGen®
• Disponible para ser descargados de IRC</td>
</tr>
<tr>
<td>Manual de soluciones para el profesor
• Disponible para descargar de IRC y en MyMathLab®</td>
<td>Recursos en línea
• MyMathLab® (requiere código de acceso)
• MathXL® (requiere código de acceso)</td>
</tr>
</table>

Agradecimientos

Agradecemos a nuestras esposas Kathy Angel y Kris Runde por su apoyo y aliento a lo largo de este proyecto. Estamos profundamente agradecidos por su maravillosa ayuda y comprensión mientras trabajábamos en este libro.

También queremos agradecer a nuestros hijos: Robert y Steven Angel, y a Alex, Nick y Max Runde, que nos apoyaron y comprendieron por no poder disfrutar con ellos el tiempo que hubiéramos deseado, debido a las fechas de entrega del libro. Agradecimientos especiales a mi nuera Kathy y a mis suegros Patricia y Scott, que sin su apoyo y entendimiento este libro no hubiera sido una realidad.

Queremos agradecer a Rafiq Ladhani y a su equipo de Edumedia por la revisión exhaustiva del texto y por haber verificado todas las respuestas.

Asimismo agradecemos a Larry Gilligan, de la universidad de Cincinnati y a Donna Petrie, de la Comunidad universitaria de Monroe por sus continuas contribuciones.

Muchas personas de Pearson merecen agradecimientos, incluyendo a todos los que se mencionan en la página de derechos de autor. En especial agradecemos a Paul Murphy, jefe de edición; Mary Beckwith, editor sponsor; Joanna Doxey, editor asociado; directores de marketing, Michelle Renda y Adam Goldstein; Debbie Meyer, editor de desarrollo; Patty Bergin, supervisor de producción; Karen Wernholm, asistente de edición; y Barbara Atkinson, asistente de diseño.

Nos gustaría agradecer a los siguientes revisores que forman parte de un grupo especial que participaron activamente con sus comentarios y sugerencias:

Laura Adkins, *Missouri Southern State College, MO*
Arthur Altshiller, *Los Angeles Valley College, CA*
Jacob Amidon, *Cayuga Community College, NY*
Bhagirathi Anand, *Long Beach City College, CA*
Sheila Anderson, *Housatonic Community College, CT*
Peter Arvanites, *State University of New York–Rockland Community College, NY*
Jannette Avery, *Monroe Community College, NY*
Mary Lou Baker, *Columbia State Community College, TN*
Linda Barton, *Ball State University, IN*
Jon Becker, *Indiana University, IN*
Paul Boisvert, *Oakton Community College, IL*
Beverly Broomell, *Suffolk County Community College, NY*
Lavon Burton, *Abilene Christian University, TX*
Marc Campbell, *Daytona Beach Community College, FL*
Mitzi Chaffer, *Central Michigan University, MI*
Terry Cheng, *Irvine Valley College, CA*
Ted Corley, *Arizona State University and Glendale Community College, AZ*
Charles Curtis, *Missouri Southern State College, MO*
Joseph de Guzman, *Riverside City College (Norco), CA*
Marla Dresch Butler, *Gavilan Community College, CA*
Gary Egan, *Monroe Community College, NY*
Mark W. Ernsthausen, *Monroe Community College, NY*
Elizabeth Farber, *Bucks County Community College, PA*
Warrene Ferry, *Jones County Junior College, MS*
Christine Fogal, *Monroe Community College, NY*
Gary Glaze, *Spokane Falls Community College, WA*
James Griffiths, *San Jacinto College, TX*
Kathy Gross, *Cayuga Community College, NY*
Abdollah Hajikandi, *State University of New York–Buffalo, NY*
Cynthia Harrison, *Baton Rouge Community College, LA*
Mary Beth Headlee, *State College of Florida, FL*
Kelly Jahns, *Spokane Community College, WA*
Cheryl Kane, *University of Nebraska–Lincoln, NE*
Judy Kasabian, *El Camino College, CA*
Maryanne Kirkpatrick, *Laramie County Community College, WY*
Marcia Kleinz, *Atlantic Cape Community College, NJ*
Shannon Lavey, *Cayuga Community College, NY*
Kimberley A. Martello, *Monroe Community College, NY*
Shywanda Moore, *Meridian Community College, MS*
Catherine Moushon, *Elgin Community College, IL*
Kathy Nickell, *College of DuPage, IL*
Jean Olsen, *Pikes Peak Community College, CO*
Shelle Patterson, *Moberly Area Community College, MO*
Patricia Pifko, *Housatonic Community College, CT*
David Price, *Tarrant County College, TX*
Elise Price, *Tarrant County College, TX*
Dennis Reissig, *Suffolk County Community College, NY*
Linda Retterath, *Mission College, CA*
Dale Rohm, *University of Wisconsin–Stevens Point, WI*
Troy Rux, *Spokane Falls Community College, WA*
Hassan Saffari, *Prestonburg Community College, KY*
Rick Silvey, *St. Mary College, KS*
Julia Simms, *Southern Illinois University–Edwardsville, IL*
Linda Smoke, *Central Michigan University, MI*
Jed Soifer, *Atlantic Cape Community College, NJ*
Richard C. Stewart, *Monroe Community College, NY*
Elizabeth Suco, *Miami–Dade College, FL*
Harold Tanner, *Orangeburg–Calhoun Technological College, SC*
Dale Thielker, *Ranken Technological College, MO*
Ken Wagman, *Gavilan Community College, CA*
Patrick Ward, *Illinois Central College, IL*
Robert E. White, *Allan Hancock College, CA*
Cindy Wilson, *Henderson State University, AZ*

Los participantes de los grupos focalizados

Linda Barton, *Ball State University, IN*
Karen Egedy, *Baton Rogue Community College, LA*
Daniel Fahringer, *Harrisburg Area Community Collge, PA*
Sharon Hansa, *Longview Community Collge, MO*
Cynthia Harrison, *Baton Rogue Community College, LA*
Judy Kasabian, *El Camino College, CA*
Mark Molino, *Erie Community College, NY*
Kris Mudunuri, *Long Beach City College, CA*
Fred Peskoff, *Borough of Manhattan Community College, NY*
David Price, *Tarrant County College, TX*
Elise Price, *Tarrant County College, TX*
Adrian Ranic, *Erie Community College, NY*
Dale Siegel, *Kingsborough Community College, NY*
Christopher Yarish, *Harrisburg Area Community College, PA*

Para el estudiante

El curso de álgebra requiere de una participación activa. Debes leer el texto, poner atención en clase y, lo más importante, debes trabajar con los ejercicios, porque entre más practiques, es mejor.

La obra fue escrita pensando en ti, por lo que se utilizan ideas breves y claras, y se proporcionan muchos ejemplos para ilustrar puntos en específico. El texto hace énfasis en el uso y las aplicaciones del álgebra. Por fortuna, conforme progreses te darás cuenta de que el álgebra no es otro curso de matemáticas que requieres aprender, sino un curso que ofrece una variedad de información y aplicaciones útiles.

El texto se encuentra señalizado mediante un código de color con el fin de remarcar información relevante. Esto te permitirá identificar procedimientos, definiciones y fórmulas importantes, ubicadas dentro de cuadros de texto coloreados.

Debes analizar con detenimiento los recuadros nombrados como **Comprendiendo el álgebra**, ya que hacen énfasis en conceptos e ideas que requieres para tener éxito. Debes también estudiar cuadros de texto **Consejos útiles** ya que contienen información importante. Asegúrate también de estudiar los cuadros de texto **Prevención de errores comunes**. Estos recuadros puntualizan los errores comunes y muestran los procedimientos correctos para resolver los problemas.

Después de cada ejemplo, encontrarás la sección Resuelve ahora el ejercicio, mostrado como Resuelve ahora el ejercicio 27. Estos ejercicios son muy similares al ejemplo desarrollado en el libro, por lo que puedes intentar resolverlos después de leer y entender el ejemplo.

En los conjuntos de ejercicios, aquellos señalados con un ícono de una videocámara, , indican que estos ejercicios se desarrollan en los videos de lectura/conferencia.

Algunas de las preguntas que deberás consultar con el profesor en las primeras clases son: ¿qué otras herramientas están disponibles para usar?, ¿a quién puedes recurrir en caso de que el profesor no se encuentre? Las herramientas disponibles que puedes consultar incluyen: el Manual de soluciones para el estudiante (the Student Solution Manual), la serie de videos de lectura/conferencia (Lecture Series Videos), los videos de la prueba de práctica de cada capítulo, MathXL y MyMathLab. Todos estos aspectos se analizan bajo el encabezado de *Recursos* en la sección 1.1 y se mencionan en el prefacio.

Podrás formar un grupo de estudio con otros estudiantes en clase. Muchos de ellos consideran que trabajar en pequeños equipos es una excelente forma de aprender, además de que se refuerza tu propio aprendizaje por medio de análisis y explicaciones de los conceptos y de los ejercicios entre tu equipo. Una vez que se establezcan los ejes y procedimientos a seguir por tu equipo, asegúrate de realizarlos.

Una de las principales cosas que debes hacer es leer la sección 1.1, denominada *Habilidades de estudio para ser exitoso en las matemáticas*. Lee esta sección con detenimiento y presta particular atención a los consejos y la información proporcionados. Ocasionalmente regresa a esta sección para consultarla. Ésta puede ser la sección más importante del libro. Presta especial atención al material en la realización de la tarea y en las clases.

Al final del conjunto de ejercicios (excepto en los primeros dos capítulos) se encuentran los **Ejercicios de repaso acumulados**. Deberás repasarlos de forma regular, a pesar de no estar asignados dentro de las actividades a realizar. Estos problemas son de secciones pasadas y te ayudarán a recordar y reforzar los temas aprendidos. Si al intentar resolverlos tienes dificultades, te sugerimos leer cuidadosamente la sección del libro relacionada con el problema o estudiar tus notas que correspondan al tema.

A la mitad de cada capítulo encontrarás las **Pruebas de mitad de capítulo**, las cuales deberás realizar para asegurarte de haber comprendido el tema hasta lo que va del capítulo. La sección donde se vio el tema por primera vez se encuentra identificado mediante corchetes después de las respuestas en la sección de respuestas del libro.

Al final de cada capítulo encontrarás el **Resumen del capítulo**, los **Ejercicios de repaso del capítulo**, la **Prueba de práctica del capítulo** y la **Prueba de repaso acumulada**. Antes de cada prueba deberás revisar cuidadosamente este material y realizar los ejercicios de práctica (incluso puedes revisar los videos de la prueba de práctica de cada capítulo). Si lo haces bien en los ejercicios de práctica, podrás hacerlo bien en los exámenes de la clase. Las preguntas en la revisión de ejercicios se encuentran señaladas para indicar la sección en donde se vio el tema por primera vez. Si tienes problemas con una pregunta del ejercicio de repaso, lee nuevamente la sección indicada. Incluso puedes estudiar la **prueba de repaso acumulada** que se encuentran al final de cada capítulo (a partir del capítulo 2).

Al reverso del libro se encuentra la sección de respuestas, la cual contiene la totalidad de las respuestas de los ejercicios impares, incluidas las respuestas de los problemas de desafío. El libro también proporciona las *respuestas impares* para los conjuntos de ejercicios. Se proporcionan *todas las respuestas* de los *Ejercicios de repaso acumulados*, *Pruebas de mitad de capítulo*, *Ejercicios de repaso de los capítulos*, *Pruebas de práctica de los capítulos* y *Pruebas de repaso acumuladas*, pero no se proporcionan las respuestas de los *Ejercicios de actividad de grupo*, debido a que queremos que te organices como estudiante con tu equipo para dar un resultado en conjunto. Deberás utilizar las respuestas solo para comparar tus resultados. Para las *Pruebas de mitad de capítulo*, *Pruebas de práctica del capítulo* y *Pruebas de repaso acumuladas*, después de cada respuesta se indican los números de la sección donde se vio cada tipo de ejercicios.

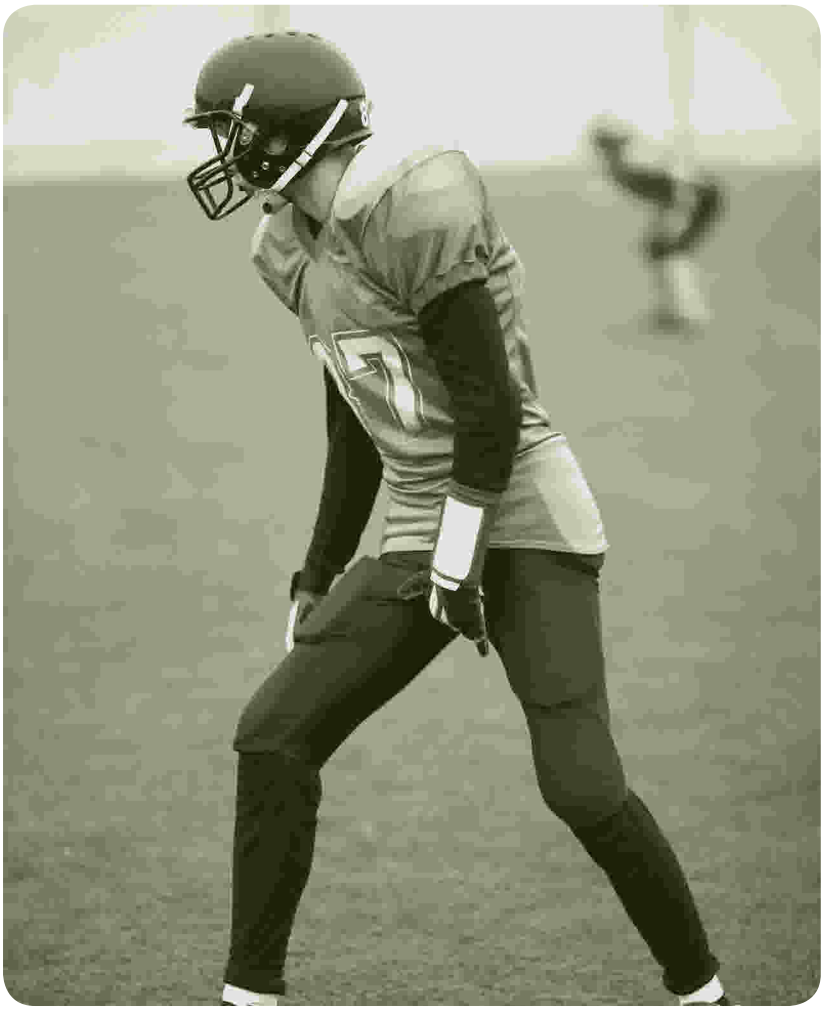
Hemos intentado proporcionar un libro tan claro y libre de errores como nos fue posible, sin embargo ningún libro es perfecto. Si encuentras algún error en el texto o en algún ejemplo o sección que consideres que se pueda mejorar, nos gustaría escucharte, y si disfrutas del libro, también nos gustaría saberlo. Envía tus comentarios a math@pearson.com, dirigidos a Allen Angel y Dennis Runde.

Allen R. Angel
Dennis C. Runde

1 Conceptos básicos

Objetivos de este capítulo

En este capítulo revisaremos los conceptos de álgebra que son fundamentales para el éxito en este curso. A lo largo de este capítulo, y en todo el libro, se utilizan ejemplos de la vida real para mostrar cómo las matemáticas son relevantes en la vida diaria. En la sección 1.1, propongo algunos consejos para ayudarte a establecer habilidades y hábitos efectivos de estudio. Otros temas que se tratarán en este capítulo son conjuntos, números reales y exponentes.



© Glowimages

Alguna vez te has preguntado "¿Cuándo voy a usar el álgebra?". En este capítulo y a lo largo de todo el libro, utilizamos el álgebra para estudiar aplicaciones de la vida real, las cuales van desde series de la copa NASCAR en el ejercicio 91, hasta desastres naturales en el ejercicio 92, ambos en la página 14. En la página 55, se usa notación científica para determinar los ingresos de cuatro equipos de futbol americano de la NFL. Descubriremos que las matemáticas pueden usarse prácticamente en cada aspecto de nuestra vida.

1.1 Habilidades de estudio para tener éxito en matemáticas y uso de la calculadora

1 Tener una actitud positiva.
2 Prepararse y poner atención en clase.
3 Prepararse y presentar exámenes.
4 Buscar ayuda.
5 Aprender a utilizar la calculadora.

Necesitas adquirir ciertas habilidades de estudio que te ayudarán a completar con éxito este curso. Estas habilidades también te ayudarán en cualquiera de los otros cursos de matemáticas que vayas a tomar.

Es importante que tengas presente que este curso es la base para cursos de matemáticas más avanzados. Si tienes una buena comprensión del álgebra, te darás cuenta de que es más sencillo tener éxito en cursos posteriores de matemáticas.

1 Tener una actitud positiva

Podrías estar pensando "Odio las matemáticas" o "Desearía no tomar esta clase". Puedes haber escuchado el término *ansiedad* o *miedo a las matemáticas* y creer que tú entras en esta categoría. Lo primero que tienes que hacer para tener éxito en este curso es cambiar tu actitud y ser más positivo. Debes estar dispuesto a darle al curso y a ti mismo una justa oportunidad.

Si te basas en experiencias pasadas, podrías creer que este curso será difícil. Sin embargo, las matemáticas son algo que necesitas para trabajar. Muchos de los que han tomado este curso tienen más experiencia ahora que con cursos previos. Tu madurez y deseo por aprender son extremadamente importantes y pueden hacer una gran diferencia en la adquisición de habilidades para tener éxito en matemáticas. Yo creo que puedes tener éxito en este curso, pero debes creerlo tú también.

2 Prepararse y poner atención en clase

Revisa el tema previamente Antes de clase, debes dedicar algunos minutos para revisar cualquier tema nuevo del libro de texto. No es necesario que entiendas todo, se trata únicamente de que tengas idea de las definiciones y conceptos que estudiarás. Este repaso rápido te ayudará a entender lo que tu profesor esté explicando durante la clase. Después de la explicación del tema en clase lee cuidadosa y lentamente, palabra por palabra, las secciones correspondientes del texto.

Lee el texto Un libro de texto de matemáticas no es una novela. Los libros de texto de matemáticas deben leerse despacio y con cuidado. Si no entiendes lo que estás leyendo vuelve a leer la información. Cuando pases por un nuevo concepto o definición, puedes subrayarlo o resaltarlo de modo que destaque, de esta forma, cuando lo busques después, te será fácil encontrarlo. Cuando veas un ejercicio desarrollado a detalle, analízalo con cuidado; no solo lo veas, intenta desarrollarlo en otra hoja aparte. También trabaja con las secciones **Resuelve ahora el ejercicio** que aparecen en el texto después de cada ejemplo. Las indicaciones **Resuelve ahora el ejercicio** están diseñadas para que tengas oportunidad de aplicar de manera inmediata nuevas ideas. Elabora notas de todo aquello que no entiendas para que le preguntes después a tu profesor.

Realiza la tarea *Existen dos compromisos que debes hacer para que tengas éxito en este curso: asistir a clase y hacer la tarea con regularidad*. Debes resolver tus tareas de manera concienzuda y por completo. Las matemáticas no pueden aprenderse por observación. Tienes que practicar lo que has escuchado y analizado en clase. Haciendo la tarea realmente aprenderás la materia.

No olvides comprobar las respuestas de tus tareas. Las respuestas de los ejercicios de números impares se encuentran al final del libro. Además, se proporcionan las respuestas de todos los Ejercicios de repaso acumulados, Pruebas de mitad de capítulo, Ejercicios de repaso del capítulo, Pruebas de práctica del capítulo y Pruebas de repaso acumuladas. En las secciones Pruebas de mitad de capítulo, Prueba de práctica del capítulo y Pruebas de repaso acumuladas, se indica entre corchetes, después de cada respuesta, la sección donde se presentó por primera vez el tema. Las respuestas de los ejercicios de actividades en grupo no se proporcionan debido a que queremos que se obtengan las respuestas en grupo.

Si tienes dificultades con algunos de los ejercicios, márcalos y no dudes en preguntar acerca de ellos en la clase. No te conformes hasta que entiendas todos los conceptos necesarios para resolver todos los problemas asignados.

Cuando hagas tu tarea, asegúrate de escribirla con claridad y cuidado. Pon especial atención en copiar de manera correcta los signos y exponentes. Realiza tu tarea paso a paso. De esta forma puedes regresar a ella más adelante y seguir entendiendo lo que escribiste.

Asiste y participa en clase Deberás asistir a todas las clases. Por lo general, entre más inasistencias tengas, menor será tu calificación. Cada vez que pierdas una clase, pierdes información importante. Si perdiste una clase, habla con tu profesor para que te diga cuáles fueron las lecciones abordadas y las tareas.

Durante la clase, pon mucha atención a lo que explica tu profesor. De no entender algo, pídele que repita o explique de otra forma la lección. Si no haces preguntas, tu profesor no sabrá que tienes un problema de comprensión del tema.

En clase, haz tus notas con cuidado. Escribe números y letras de forma clara. No es necesario que escribas todas las palabras que tu profesor dice, copia los puntos principales y los ejemplos que no estén en el texto. No debes tomar notas de forma frenética, ya que puedes perder la continuidad de la clase.

Estudia Mantén una atmósfera adecuada para estudiar. Busca un área donde no te interrumpan constantemente para que prestes la mayor atención posible a lo que estás leyendo. Esta área debe tener suficiente ventilación e iluminación. Debes tener bastante espacio en tu escritorio para extender todo tu material. Tu silla debe ser cómoda. Debes tratar de minimizar las distracciones mientras estudias. No debes estudiar de manera prolongada o incesante; una buena idea es tomar breves periodos de descanso.

Al estudiar, no solo debes entender cómo trabajar un problema, sino también por qué estás siguiendo esos pasos específicos para resolverlo. De no entender por qué estás siguiendo ese proceso específico, no podrás resolver problemas similares.

Administra tu tiempo Es recomendable que los estudiantes ocupen al menos 2 horas en estudiar y hacer la tarea por cada hora de clase. Algunos estudiantes requieren más tiempo que otros. No siempre es sencillo encontrar el tiempo necesario para estudiar, las siguientes son algunas sugerencias que pueden ser de utilidad:

1. Planea con anticipación. Determina cuándo tendrás tiempo para estudiar y hacer tu tarea. No programes otras actividades para estos periodos. Trata de distribuir equitativamente estos periodos durante la semana.
2. Organízate de modo que no pierdas tiempo en buscar tus libros, pluma, calculadora o notas.
3. Utiliza tu calculadora para realizar cálculos tediosos.
4. Cuando dejes de estudiar, marca con claridad el lugar donde te detuviste.
5. Procura no tomar responsabilidades de más. Debes establecer tus prioridades. Si tu educación tiene una alta prioridad, como debería ser, quizá tengas que reducir el tiempo de otras actividades.
6. Si el tiempo es un problema, no te agobies con demasiados cursos. Considera llevar menos materias. Si no cuentas con suficiente tiempo para estudiar, verás afectadas tu comprensión y tu calificación en todos tus cursos.

3 Prepararse y presentar exámenes

Estudia para tus exámenes Si estudias todos los días, no necesitarás cargarte de información la noche anterior a tu examen. Si esperas hasta el último minuto, no tendrás tiempo para buscar ayuda si la necesitas. A fin de repasar para un examen:

© Wavebreak Media LTD/Glowimages

1. Lee tus notas de clase.
2. Repasa tus tareas.
3. Estudia las fórmulas, definiciones y procedimientos que necesitarás para el examen.
4. Lee con cuidado los recuadros Prevención de errores comunes y Consejo útil.
5. Lee el resumen del final de cada capítulo.
6. Resuelve los ejercicios de repaso del final de cada capítulo. Si tienes dificultades, vuelve a estudiar esas secciones. Si aún tienes problemas, busca ayuda.
7. Resuelve las Pruebas de mitad de capítulo y las Pruebas de práctica del capítulo.
8. Si el tema que se trata en los cuestionarios previamente dados está incluido en el examen, vuelve a resolver los cuestionarios.
9. Si el tema de capítulos anteriores está incluido en el examen, resuelve la Prueba de repaso acumulada.

Presenta un examen Asegúrate de haber dormido bien antes del examen. Si estudiaste de forma adecuada no tienes por qué dormirte tarde la noche anterior para preparar tu examen. Llega temprano al lugar del examen para tener unos minutos de relajamiento antes de iniciarlo. Si necesitas apresurarte para llegar al examen, te pondrás nervioso y ansioso. Después de recibir el examen, realiza lo siguiente:

1. Escribe con cuidado cualquier fórmula o idea que necesites recordar.
2. Observa rápidamente todo el examen para que tengas una idea de lo largo que es y asegurarte de que no falte ninguna página. Necesitas establecerte un ritmo de trabajo para asegurarte de completar todo el examen. Prepárate para destinar más tiempo a los problemas que cuentan más puntos.
3. Lee con cuidado las instrucciones del examen.
4. Lee con cuidado cada problema. Responde completamente cada pregunta y asegúrate de haber respondido con exactitud lo que se preguntó.
5. Inicia con la pregunta 1 y resuelve cada pregunta en orden. Si tienes dificultades con una pregunta, no le dediques demasiado tiempo. Continúa resolviendo las preguntas que entiendas. Después regresas y respondes aquellos problemas de los que no estés seguro. No pierdas demasiado tiempo en un solo problema.
6. Procura resolver todos los problemas. Podrías ganar al menos puntos parciales.
7. Trabaja con cuidado y escribe claramente a fin de que tu profesor pueda leer tus respuestas. Además, es fácil cometer errores cuando tu escritura no es clara.
8. Si tienes tiempo, verifica tu trabajo y tus respuestas.
9. No te preocupes si otros terminan su examen antes que tú. No te apures si eres el último en terminar. Ocupa todo el tiempo de que dispongas para verificar tus respuestas.

4 Buscar ayuda

Utiliza los suplementos Este texto viene con varios suplementos. Al inicio del semestre averigua con tu profesor cuáles están disponibles y podrían serte de utilidad. La lectura de suplementos no reemplaza la del texto. Los suplementos sirven para ampliar y reforzar tu comprensión del tema. Si pierdes una clase podrías revisar el material suplementario sobre el tema antes de asistir a la siguiente clase.

Tenemos muchos suplementos disponibles. Los suplementos que podrían estar disponibles para ti son: el Manual de soluciones para el estudiante (Student Solutions Manual) que trabaja los ejercicios de las secciones impares, así como con todos los ejercicios de final de capítulo; una serie de conferencias (CD Lecture Series Videos) que muestran alrededor de 20 minutos de clase por sección e incluye las soluciones completas de los ejercicios marcados con este ícono ; el capítulo de preparación de examen (Chapter Test Prep Video CD) que resuelve cada problema de todas las Pruebas de práctica del capítulo (Chapter Practice Test); MathXL®, un poderoso sistema tutorial y de tareas en línea, que también se encuentra disponible en CD; MyMathLab, el curso en línea que tiene MathXL ofrece una gran variedad de complementos extra; y por último el Centro tutorial de matemáticas de Prentice Hall (Prentice Hall Mathematics Tutor Center). Cabe aclarar que todos estos suplementos están en idioma inglés.

Busca ayuda Una cosa que recalco mucho a mis estudiantes es *¡obtén ayuda tan pronto como la necesites!* ¡No esperes! En matemáticas, por lo general el tema de un día es la base para el siguiente. Así que, si no entiendes el tema de hoy, no podrás entender el de mañana.

¿Dónde buscar ayuda? En tu escuela existen muchos lugares para obtener ayuda. Procura tener una amigo en clase con quien puedas estudiar; incluso, a menudo podrán ayudarse mutuamente. Tal vez desees formar un grupo con otros estudiantes de tu clase. Analizar conceptos y tareas junto con tus compañeros reforzará tu propia comprensión del tema.

No debes dudar en visitar a tu profesor cuando tengas problemas con algún tema. Asegúrate de haber leído el tema asignado e intentado hacer la tarea antes de ir con tu profesor. Llega preparado con preguntas específicas.

Con frecuencia existen otras fuentes de ayuda disponibles. Varias escuelas tienen un laboratorio o centro de aprendizaje de las matemáticas donde se dispone de tutoriales para ayudar a los estudiantes. Pregunta a tu instructor al principio del semestre si hay tutores disponibles y busca dónde se localizan. Visita a estos tutores cuando sea necesario.

5 Aprender a utilizar la calculadora

Varios profesores solicitan a sus estudiantes que compren y utilicen una calculadora para su clase; si tu profesor la pidió, debes saber lo más pronto posible cuál es la calculadora que tu profesor espera que utilices. Si planeas llevar cursos adicionales de matemáticas, debes determinar cuál calculadora necesitarás en esos cursos y pensar en adquirir dicha calculadora para usarla en este curso, si tu instructor lo permite. Algunos solicitan una calculadora científica y otros una calculadora graficadora.

En este libro proporcionamos información acerca de ambos tipos de calculadoras. Lee y guarda siempre el manual del usuario de la calculadora que compres.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1.1

¿Conoces toda la información siguiente? Si no, pregunta a tu profesor lo más pronto posible.

1. ¿Cuál es el nombre de tu profesor?

2. ¿Cuáles son las horas de oficina de tu profesor?

3. ¿Dónde se localiza la oficina de tu profesor?

4. ¿Cómo puedes encontrar más fácilmente a tu profesor?

5. ¿Dónde puedas encontrar ayuda si tu profesor no está disponible?

6. ¿Qué suplementos están disponibles y pueden ayudar en tu aprendizaje?

7. ¿Tu profesor recomienda o requiere una calculadora específica? Si es así, ¿cuál?

8. ¿Cuándo puedes utilizar la calculadora? ¿Puedes usarla en clase, en las tareas o en exámenes?

9. ¿Cuál es la política de tu profesor respecto de la asistencia a clases?

10. ¿Por qué es importante que asistas a todas las clases?

11. ¿Sabes el nombre y número telefónico de algún amigo de la clase?

12. Por cada hora de clase, ¿cuántas horas se recomiendan fuera de clases para tareas y estudio?

13. Haz una lista de lo que debes hacer para estar preparado adecuadamente para la clase.

14. Explica cómo debe leerse un texto de matemáticas.

15. Escribe un resumen de los pasos que deben seguirse cuando se tenga un examen.

16. Tener una actitud positiva es muy importante para tener éxito en el curso. ¿Tienes una actitud positiva? ¡Es muy importante que la tengas!

17. Debes comprometerte a disponer del tiempo necesario para aprender el tema, para hacer la tarea y para asistir a la clase con regularidad. Explica por qué crees que este compromiso es necesario para tener éxito en este curso.

18. ¿Cuáles son las razones por las que estás tomando este curso?

19. ¿Cuáles son tus objetivos para este curso?

20. ¿Has pensado en estudiar con un amigo o un grupo de amigos? ¿Ves alguna ventaja en hacerlo así? ¿Ves alguna desventaja en hacerlo así?

indica que los ejercicios fueron trabajados en *Lecture Series Video*.

1.2 Conjuntos y otros conceptos básicos

1. Identificar conjuntos.
2. Identificar y usar desigualdades.
3. Usar la notación constructiva de conjuntos.
4. Encontrar la unión e intersección de conjuntos.
5. Identificar importantes conjuntos de números.

Variable

Cuando una letra se usa para representar varios números se le conoce como **variable**.

Por ejemplo, si t = al tiempo, en horas, que un automóvil viaja, entonces t es la variable, ya que el tiempo cambia de manera constante conforme el automóvil viaja. Con frecuencia usamos las letras x, y, z y t para representar variables. Sin embargo, pueden ser usadas otras letras.

Si una letra representa un valor particular se le conoce como **constante**. Por ejemplo, si s = al número de segundos en un minuto, entonces, s representa una constante porque siempre hay 60 segundos en un minuto. El número de segundos en un minuto no es una variable. En este libro, las letras que representan variables y constantes aparecen en itálicas.

El término **expresión algebraica**, o simplemente **expresión**, se usará con frecuencia en el texto. Una expresión es una combinación de números, variables, exponentes, símbolos matemáticos (distintos al signo igual) y operaciones matemáticas.

Comprendiendo el álgebra

Como el *tiempo* que un automóvil viaja puede *variar* o *cambiar*, es representado por la variable t.

1 Identificar conjuntos

Un **conjunto** es una colección de objetos. Los objetos en el conjunto son llamados **elementos** del conjunto. Los conjuntos se indican mediante llaves, { }, y con frecuencia sus nombres son letras mayúsculas. Cuando los elementos de un conjunto están listados dentro de una llave, como se ilustra a continuación, se dice que está en **forma de lista (o descriptiva)**.

Conjunto	Número de elementos
$A = \{a, b, c\}$	3
$B = \{\text{amarillo, verde, azul, rojo}\}$	4
$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$	5

El símbolo $\in$ se usa para indicar que un elemento es parte de los elementos de un conjunto. Por ejemplo, el 2 es un elemento del conjunto C y se escribe

$$2 \in C$$

2 es un elemento de C

Que se lee, como "2 es un elemento del conjunto C".

Un conjunto puede ser finito o infinito. Los conjuntos A, B y C tienen un número finito de elementos, por lo tanto, son *conjuntos finitos*. En algunos conjuntos es imposible enlistar todos los elementos. Estos son los *conjuntos infinitos*. El siguiente conjunto, llamado conjunto de **números naturales** o **números para contar**, es un ejemplo de un conjunto infinito.

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Los tres puntos después de la coma se llaman *elipsis*, indican que el patrón continúa indefinidamente.

Comprendiendo el álgebra

El símbolo … llamado *elipsis* sirve para indicar que el patrón continúa indefinidamente.

Otro conjunto infinito importante es el de los números enteros. Por ejemplo, el conjunto de **números enteros** siguiente.

$$I = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Observa que el conjunto de números enteros incluye los números enteros positivos y negativos, así como al número 0.

Si escribimos

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 163\}$$

queremos decir que el conjunto continúa de la misma manera hasta el número 163. El conjunto D es el conjunto de los primeros 163 números naturales. Por lo tanto, D es un conjunto finito.

Comprendiendo el álgebra

Los *enteros positivos* son

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

Los *enteros negativos* son

$$-1, -2, -3, -4, -5, -6, \ldots$$

Un conjunto especial que no contiene elementos se llama **conjunto nulo**, o **conjunto vacío**, y se escribe como { } o ∅. Por ejemplo, el conjunto de estudiantes en tu clase menores de 8 años de edad es un conjunto nulo o vacío.

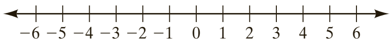
2 Identificar y usar desigualdades

Símbolos de desigualdades

$>$ se lee "mayor que".
$\geq$ se lee "mayor o igual que".
$<$ se lee "menor que".
$\leq$ se lee "menor o igual que".
$\neq$ se lee "no es igual a".

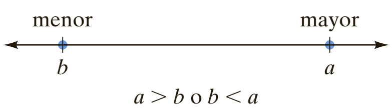
Las desigualdades se pueden explicar con el uso de la recta numérica (ver **Figura 1.1**).

FIGURA 1.1



El número a es mayor que el número b, $a > b$, cuando a se encuentra a la derecha de b en la recta numérica (ver **Figura 1.2**). También podemos afirmar que el número b es menor que a, $b < a$, cuando b se encuentra a la izquierda de a en la recta numérica. La desigualdad $a \neq b$ significa ya sea que $a < b$ o $a > b$.

FIGURA 1.2

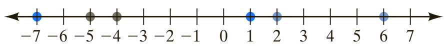


EJEMPLO 1 Escribe $>$ o $<$ dentro del área sombreada que está entre los números para hacer que cada afirmación sea verdadera.

a) 6 ▭ 2 **b)** −7 ▭ 1 **c)** −4 ▭ −5

Solución Dibuja una recta numérica e indica la ubicación de los números de los incisos **a)**, **b)** y **c)** como se ilustra en la **Figura 1.3**.

FIGURA 1.3



a) $6 > 2$ Observa que el número 6 está a la derecha del número 2 en la recta numérica.

b) $-7 < 1$ Observa que el número −7 está a la izquierda del número 1 en la recta numérica.

c) $-4 > -5$ Observa que el número −4 está a la derecha del número −5 en la recta numérica.

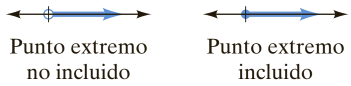
Resuelve ahora el ejercicio 19

Consejo útil

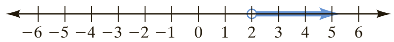
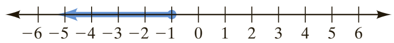
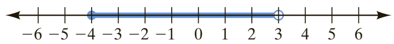
Recuerda que el símbolo usado en una desigualdad, si bien es cierto, siempre apunta hacia el menor de los dos números.

Notación	Se lee como
$x > 2$	x es cualquier número real mayor que 2.
$x \leq -3$	x es cualquier número real menor o igual que −3.
$-4 \leq x < 3$	x es cualquier número real mayor o igual que −4 y menor que 3.

En las desigualdades $x > 2$ y $x \leq -3$, el 2 y el -3 se conocen como **puntos extremos**. En la desigualdad $-4 \leq x < 3$, el -4 y el 3 son los puntos extremos. Las soluciones de las desigualdades que utilizan $<$ o $>$ no incluyen los puntos extremos, pero las soluciones de las desigualdades que utilizan $\leq$ o $\geq$ sí incluyen los puntos extremos. Esto se muestra de la siguiente forma:



A continuación se presentan tres ejemplos.

Desigualdad	Desigualdad indicada en la recta numérica
$x > 2$	
$x \leq -1$	
$-4 \leq x < 3$	

La palabra *entre* indica que los puntos extremos no se incluyen en la respuesta. Por ejemplo, el conjunto de números naturales entre 2 y 6 es $\{3, 4, 5\}$. Si deseáramos incluir los puntos extremos, debemos usar la frase *que los contienen*. Por ejemplo, el conjunto de números naturales entre 2 y 6 que los contienen es $\{2, 3, 4, 5, 6\}$.

3 Usar la notación constructiva de conjuntos

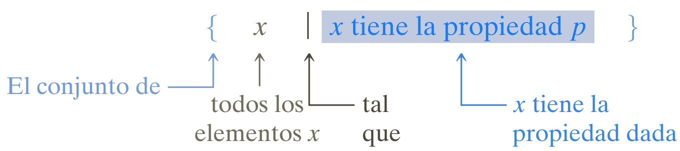
Un segundo método para describir un conjunto es la **notación constructiva de conjuntos**. Por ejemplo, la notación constructiva de conjuntos es

$$E = \{x|x > \text{es un número natural mayor que } 7\}$$

Se lee "el conjunto E es el conjunto de todos los elementos x, de tal manera que x es un número natural mayor que 7". En forma de lista, este conjunto se escribe así

$$E = \{8, 9, 10, 11, 12, \ldots\}$$

La forma general de la notación constructiva de conjuntos es



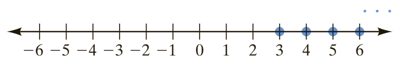
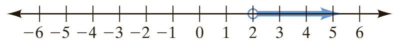
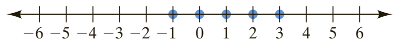
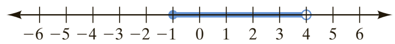
Con frecuencia se usa x como variable al usar la notación constructiva de conjuntos. Sin embargo, se puede utilizar cualquier variable.

Hay dos formas condensadas para escribir el conjunto $E = \{x|x$ es un número natural mayor que $7\}$ en notación constructiva.

$$E = \{x|x > 7 \text{ y } x \in N\} \text{ o } E = \{x|x \geq 8 \text{ y } x \in N\}$$

El conjunto $A = \{x|-3 < x \leq 4 \text{ y } x \in I\}$ es el conjunto de los números enteros mayor que -3 y menor o igual que 4. El conjunto en forma de lista (o descriptiva) se escribe $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Observa que el punto extremo -3 no se incluye en el conjunto pero el punto extremo 4 sí se incluye.

¿Cómo hacer para que los conjuntos $B = \{x|x > 2 \text{ y } x \in N\}$ y $C = \{x|x > 2\}$ sean diferentes? El conjunto B contiene únicamente números naturales mayores que 2, esto es, $\{3, 4, 5, 6, \ldots\}$. El conjunto C no solo contiene los números naturales mayores que 2 sino también las fracciones y números decimales mayores que 2. Ya que no hay menor número mayor que 2, este conjunto no se puede escribir en forma de lista (o descriptiva). En la parte superior de la página siguiente ilustramos estos dos conjuntos en la recta numérica. También ilustramos otros dos conjuntos.

Conjunto	Conjunto indicado en la recta numérica
$\{x \mid x > 2 \text{ y } x \in N\}$	
$\{x \mid x > 2\}$	
$\{x \mid -1 \leq x < 4 \text{ y } x \in I\}$	
$\{x \mid -1 \leq x < 4\}$	

Otro método para indicar desigualdades es la *notación de intervalos* que discutiremos en la sección 2.5.

4 Encontrar la unión e intersección de conjuntos

En conjuntos se pueden realizar *operaciones* como la adición y la multiplicación que se realizan con números. En el caso de los conjuntos, esas dos operaciones son la *unión* e *intersección*.

Unión de dos conjuntos

La **unión** del conjunto A y el conjunto B, escrita como $A \cup B$, es el conjunto de elementos que pertenecen a cualquiera de los dos conjuntos A *o* B.

La letra *o*, usada en este contexto, significa que pertenece al conjunto A o al conjunto B o a ambos conjuntos, es decir, la unión se forma por la combinación, o adición de los elementos del conjunto A con los elementos del conjunto B. Si un elemento forma parte del conjunto A o del conjunto B, o de ambos conjuntos, entonces es un elemento de la unión de los conjuntos. Si un elemento aparece en ambos conjuntos, solo se escribe una vez en la lista de elementos de la unión de los dos conjuntos.

Ejemplos de la unión de conjuntos

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{x, y, z\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, x, y, z\}$

En la notación constructiva podemos expresar $A \cup B$ como

Unión

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Intersección de dos conjuntos

La **intersección** de un conjunto A y un conjunto B, escrita como $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos que son comunes al conjunto A *y* al conjunto B.

La letra *y*, usada en este contexto, significa que pertenece *tanto* al conjunto A *como* al conjunto B; la intersección se forma al usar solo aquellos elementos que están tanto en el conjunto A como en el conjunto B. Si un elemento solo forma parte de uno de los dos conjuntos, entonces éste no es un elemento de la intersección de los conjuntos.

Ejemplos de la intersección de conjuntos

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cap B = \{3, 4, 5\}$

$A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{x, y, z\}$, $A \cap B = \{\ \}$

Observa que en este último ejemplo, los conjuntos A y B no tienen elementos en común, por lo tanto, esta intersección es un conjunto vacío. En la notación constructiva de conjuntos se expresa $A \cap B$ como

Intersección

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}$$

5 Identificar importantes conjuntos de números

En el cuadro de abajo, describimos diferentes conjuntos de números y presentamos las letras que con frecuencia se usan para representar estos conjuntos de números.

Importantes conjuntos de números

Números reales	$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ es un punto en la recta numérica}\}$
Números naturales o para contar	$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
Números enteros positivos	$W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
Números enteros	$I = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
Números racionales	$Q = \left\{\frac{p}{q} \,\middle\vert\, p \text{ y } q \text{ son número enteros } q \neq 0\right\}$
Números irracionales	$H = \{x \mid x \text{ es un número real que no es racional}\}$

Comprendiendo el álgebra

Un *número racional* puede ser expresado como un cociente de dos números enteros:

$$\frac{\text{número entero}}{\text{número entero}}$$

Un **número racional** es cualquier número que se puede representar como un cociente de dos números enteros, cuyo denominador es diferente de 0.

Ejemplos de números racionales

$$\frac{3}{5}, \quad -\frac{2}{3}, \quad 0, \quad 1.63, \quad 7, \quad -17, \quad \sqrt{4}$$

Observa que el 0, o cualquier otro número entero, es también un número racional, ya que puede escribirse como una fracción al tener como denominador al número 1. Por ejemplo, $0 = \frac{0}{1}$ y $7 = \frac{7}{1}$.

El número 1.63 puede escribirse como $\frac{163}{100}$, ya que es un cociente de dos números enteros. Por lo tanto, $\sqrt{4} = 2$ y 2 es un número entero, $\sqrt{4}$ es un número racional. *Cada número racional, cuando se escribe como un número decimal, puede ser una repetición o un número decimal exacto.*

Comprendiendo el álgebra

Un *número racional* cuya representación decimal termina es un *número decimal exacto.* Un número racional cuya representación decimal se repite es un *número decimal periódico.*

Ejemplos de números decimales periódicos	Ejemplos de números decimales exactos
$\frac{2}{3} = 0.6666\ldots$ **6 se repite.**	$\frac{1}{2} = 0.5$
$\frac{1}{7} = 0.142857142857\ldots$ **142857 se repite.**	$\frac{9}{4} = 2.25$

Para mostrar que un dígito o un grupo de dígitos se repiten, debemos colocar una barra sobre el dígito o grupo de dígitos que se repiten. Por ejemplo, podemos escribir

$$\frac{2}{3} = 0.\overline{6} \quad \text{y} \quad \frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$$

Un **número irracional** es un número real que no es un número racional. Algunos números irracionales son $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, y $\sqrt{6}$. Otro número irracional es pi, π. Cuando damos un valor decimal a un número irracional, estamos dando solo una *aproximación* del valor del número irracional. El símbolo $\approx$ significa "es aproximadamente igual a".

$$\pi \approx 3.14 \qquad \sqrt{2} \approx 1.41 \qquad \sqrt{3} \approx 1.73 \qquad \sqrt{10} \approx 3.16$$

Consejo útil

Recuerda que para escribir *aproximadamente* se usa el símbolo $\approx$.

Los **números reales** se forman tomando la *unión* de los números racionales y los números irracionales, por lo tanto, cualquier número real debe ser un número racional o un número irracional. El símbolo $\mathbb{R}$ se usa con frecuencia para representar el conjunto de números reales. La **Figura 1.4** ilustra varios números reales en la recta numérica.

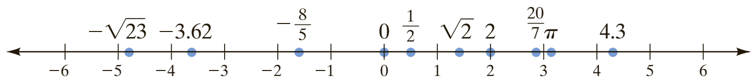


FIGURA 1.4

Subconjunto

El conjunto A es un **subconjunto** del conjunto B cuando cada elemento del conjunto A es también un elemento del conjunto B, y se denota como $A \subseteq B$.

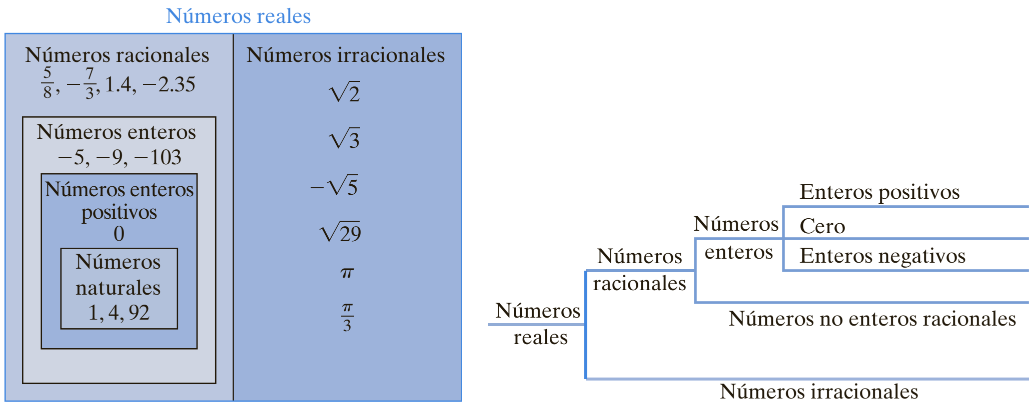
Por ejemplo, el conjunto de números naturales, $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, es un subconjunto del conjunto de los números enteros positivos, $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, porque cada elemento en el conjunto de los números naturales es también un elemento del conjunto de los números enteros positivos. La **Figura 1.5** ilustra la relación entre varios subconjuntos de los números reales. En la **Figura 1.5a**, puedes ver que el conjunto de los números naturales es un subconjunto de los números enteros positivos, del conjunto de los números enteros y del conjunto de los números racionales. Por lo tanto, cada número natural debe ser también un número entero positivo, un número entero, un número racional y un número real.

Cada número natural es también

- un número entero positivo,
- un número entero,
- un número racional y
- un número real.

Al usar el mismo razonamiento, podemos observar que el conjunto de los números enteros positivos es un subconjunto de los números enteros, el conjunto de los números racionales y el conjunto de los números reales, así como el conjunto de los números enteros es un subconjunto del conjunto de números racionales y del conjunto de los números reales.

Observa la **Figura 1.5b**, vemos que los números enteros positivos, el 0 y los números enteros negativos forman los números enteros, que los enteros y no enteros forman los números racionales, y así sucesivamente.



(a) (b)

FIGURA 1.5

EJEMPLO 2 Considera el siguiente conjunto:

$$\left\{-8, 0, \frac{5}{9}, 12.25, \sqrt{7}, -\sqrt{11}, \frac{22}{7}, 5, 7.1, -54, \pi\right\}$$

Indica cuáles elementos de este conjunto son

a) números naturales. **b)** números enteros positivos. **c)** números enteros.
d) números racionales. **e)** números irracionales. **f)** números reales.

Solución

a) Números naturales: 5 **b)** Números enteros positivos: 0, 5 **c)** Números enteros: $-8, 0, 5, -54$

d) Los números racionales pueden escribirse en la forma p/q, $q \neq 0$. Cada uno de los siguientes números puede escribirse en esta forma y es un número racional.

$$-8, 0, \frac{5}{9}, 12.25, \frac{22}{7}, 5, 7.1, -54$$

e) Los números irracionales son números reales que no son números racionales. Los siguientes números son irracionales.

$$\sqrt{7}, -\sqrt{11}, \pi$$

f) Todos los números en el conjunto son números reales. La unión de los números racionales con los números irracionales forma los números reales.

$$-8, 0, \frac{5}{9}, 12.25, \sqrt{7}, -\sqrt{11}, \frac{22}{7}, 5, 7.1, -54, \pi$$

Resuelve ahora el ejercicio 39

No todos los números son números reales. Algunos números que estudiaremos más adelante en el texto son números complejos e imaginarios.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1.2

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) indicados en la siguiente lista.

vacío	constante	racional	conjunto	variable	unión
aproximación	elementos	subconjunto	intersección	irracional	expresión algebraica

1. La letra utilizada para representar varios números es una ______________.

2. La letra que representa un valor en particular es una ______________.

3. Cualquier combinación de números, variables, exponentes, símbolos matemáticos y operaciones se conoce como ________.

4. Una colección de objetos es un ______________.

5. Los objetos dentro de un conjunto se llaman ______________.

6. El conjunto que no contiene elementos es el conjunto ______________.

7. Si cada elemento de un conjunto A es un elemento del conjunto B, entonces el conjunto A es un ______________ del conjunto B

8. $A \cup B$ representa la ______________ de los conjuntos A y B.

9. $A \cap B$ representa la ______________ de los conjuntos A y B.

10. Un número que puede ser representado como el cociente de dos números enteros es un número ______________.

11. Un número real que no es un número racional es un número ______________.

12. El símbolo $\approx$ se conoce como símbolo de ______________.

Practica tus habilidades

Inserta <, > o = en la zona sombreada para que cada proposición sea verdadera.

13. $5 \;\square\; 3$ **14.** $-1 \;\square\; 8$ **15.** $\frac{-4}{2} \;\square\; -2$ **16.** $\frac{9}{-3} \;\square\; -3$

17. $-1 \;\square\; -1.01$ **18.** $2 \;\square\; -3$ **19.** $-5 \;\square\; -3$ **20.** $-8 \;\square\; -1$

21. $-14.98 \;\square\; -14.99$ **22.** $-3.4 \;\square\; -3.2$ **23.** $1.7 \;\square\; 1.9$ **24.** $-1.1 \;\square\; -21$

25. $-\pi \;\square\; -4$ **26.** $-723 \;\square\; -655$ **27.** $-\frac{7}{8} \;\square\; -\frac{10}{11}$ **28.** $-\frac{4}{7} \;\square\; -\frac{5}{9}$

En los ejercicios 29-38, escribe cada conjunto en forma de lista (o descriptiva).

29. $A = \{x|-1 < x < 1 \text{ y } x \in I\}$

30. $B = \{y|y$ es un número natural impar menor que $6\}$

31. $C = \{z|z$ es un número par y entero mayor que 16 y menor o igual que $20\}$

32. $D = \{x|x \geq -3 \text{ y } x \in I\}$

33. $E = \{x|x < 3 \text{ y } x \in W\}$

34. $F = \left\{x \,\middle|\, -\frac{6}{5} \leq x < \frac{15}{4} \text{ y } x \in N\right\}$

El número marcado en otro color, como el **19**, indica un Resuelve ahora el ejercicio.

35. $H = \{x|x$ es un número entero positivo múltiple de $7\}$

36. $L = \{x|x$ es un número entero mayor que $-5\}$

37. $J = \{x|x > 0 \text{ y } x \in I\}$

38. $K = \{x|x$ es un número entero positivo entre 9 y $10\}$

39. Considera el conjunto $\left\{-2, 4, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, 0, \sqrt{2}, \sqrt{8}, -1.23, \frac{78}{79}\right\}$.

Indica los elementos que son:

a) números naturales.
b) números enteros positivos.
c) números enteros.
d) números racionales.
e) números irracionales.
f) números reales.

40. Considera el conjunto $\left\{2, 4, -5.33, \frac{11}{2}, \sqrt{5}, \sqrt{2}, -100, -7, 4.7\right\}$.

Indica los elementos que son:

a) números enteros positivos.
b) números naturales.
c) números racionales.
d) números enteros.
e) números irracionales.
f) números reales.

Encuentra $A \cup B$ y $A \cap B$ para cada conjunto de A y B.

41. $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6\}$

42. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{2, 4, 6, 7\}$

43. $A = \{-3, -1, 1, 3\}, B = \{-4, -3, -2, -1, 0\}$

44. $A = \{-3, -2, -1, 0\}, B = \{-1, 0, 1, 2\}$

45. $A = \{\ \}, B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

46. $A = \{2, 4, 6\}, B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

47. $A = \{0, 10, 20, 30\}, B = \{5, 15, 25\}$

48. $A = \{1, 3, 5\}, B = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

49. $A = \{-1, 0, 1, e, i, \pi\}, B = \{-1, 0, 1\}$

50. $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\right\}, B = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}\right\}$

Describe cada conjunto.

51. $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

52. $B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

53. $C = \{0, 3, 6, 9, \ldots\}$

54. $A = \{a, b, c, d, \ldots, z\}$

55. $B = \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$

56. $C = \{$Alabama, Alaska, ..., Wyoming$\}$

*En los ejercicios 57 y 58, **a)** escribe cómo se lee cada conjunto; **b)** escribe el conjunto en forma de lista (o descriptiva).*

57. $A = \{x|x < 7 \text{ y } x \quad N\}$

58. $B = \{x|x$ es una de las últimas cinco letras del alfabeto$\}$

Ilustra cada conjunto en una recta numérica.

59. $\{x|x \geq 0\}$

60. $\{w|w > -5\}$

61. $\{z|z \leq 2\}$

62. $\{y|y < 4\}$

63. $\{p|-6 \leq p < 3\}$

64. $\{x|-1.67 \leq x < 5.02\}$

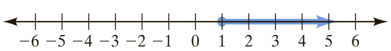
65. $\{q|q > -3 \text{ y } q \in N\}$

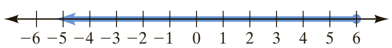
66. $\{x|-1.93 \leq x \leq 2 \text{ y } x \in I\}$

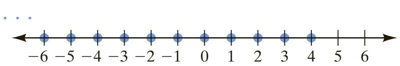
67. $\{r|r \leq \pi \text{ y } r \in W\}$

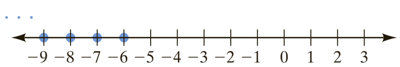
68. $\left\{x \middle| \frac{5}{12} < x \leq \frac{7}{12} \text{ y } x \in N\right\}$

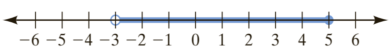
Expresa en notación constructiva de conjuntos cada conjunto de números indicados en la recta numérica.

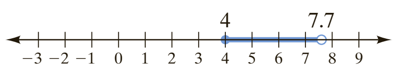
69. 

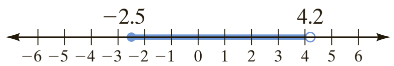
70. 

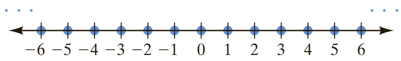
71. 

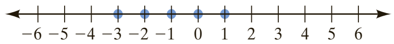
72. 

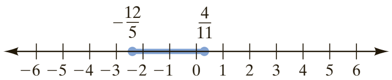
73. 

74. 

75. 

76. 

77. 

78. 

*Ve al recuadro **Importantes conjuntos de números** de la página 10 y considera los significados de* ℝ, *N, W, I, Q y H, luego determina si el primer conjunto es un subconjunto del segundo conjunto para cada par de conjuntos.*

79. *N*, *W* **80.** *W*, *Q* **81.** *Q*, *I* **82.** *I*, *Q*

83. *Q*, ℝ **84.** *Q*, *H* **85.** *W*, *N* **86.** *H*, ℝ

Resolución de problemas

87. Construye un conjunto que contenga cinco números racionales entre 1 y 2.

88. Construye un conjunto que contenga cinco números racionales entre 0 y 1.

89. Determina dos conjuntos A y B tales que $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 8, 9\}$ y $A \cap B = \{4, 5, 9\}$.

90. Determina dos conjuntos A y B tales que $A \cup B = \{3, 5, 7, 8, 9\}$ y $A \cap B = \{5, 7\}$.

91. NASCAR Sprint Cup Series La NASCAR Sprint Cup Series 2008 consistió en 36 carreras que se llevaron a cabo entre los meses de febrero y noviembre. Dos de dichas carreras fueron la LifeLock 400 y la Dodge Chalenger 500. La tabla siguiente muestra los seis primeros lugares en ambas carreras.

LifeLock 400

Posición	Conductor
1	Dale Earnhardt Jr
2	Kasey Kahn
3	Matt Kenseth
4	Brian Vickers
5	Jimmy Johnson
6	Carl Edwards

Dodge Challenger 500

Posición	Conductor
1	Kyle Busch
2	Carl Edwards
3	Dale Earnhardt Jr
4	David Regan
5	Matt Kenseth
6	Denny Hamlin

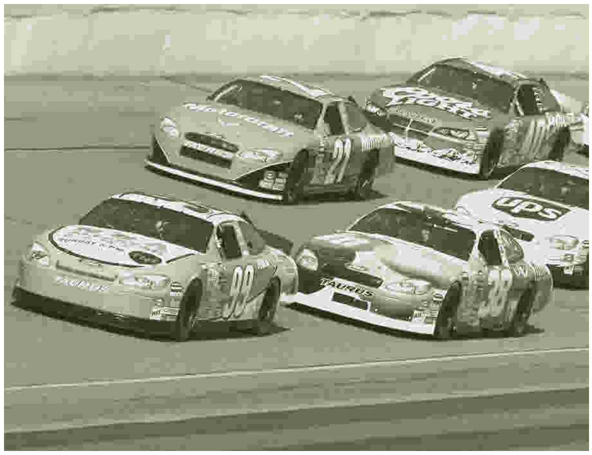
Fuente: www.NASCAR.com

a) Encuentra el conjunto de conductores que hayan terminado dentro de los seis primeros lugares en la LifeLock 400 *o* en la Dodge Chalenger 500.

b) ¿El inciso **a)** representa la unión o intersección de los conductores?

c) Encuentra el conjunto de conductores que hayan terminado dentro de los seis primeros lugares en la LifeLock 400 *y* en la Dodge Chalenger 500.

d) ¿El inciso **c)** representa la unión o intersección de los conductores?



© Larry McTighe/Wikicommons

92. Desastres Las tablas siguientes dan un estimado de los seis terremotos y los seis desastres naturales más mortíferos.

Los seis terremotos más mortíferos

Muertes	Magnitud	Ubicación	Año
255,000	7.8-8.2	Tangshan, China	1976
200,000	8.3	Xining, China	1927
200,000	8.6	Gansu, China	1920
175,000	9.0	Asia/África	2004
143,000	8.3	Kwanto, Japón	1923
110,000	7.3	Turkmenistan	1948

Los seis desastres naturales más mortíferos

Muertes	Evento	Ubicación	Año
3.7 millones	Inundación	Río Huang He, China	1931
300,000	Ciclón	Bangladesh	1970
255,000	Terremoto	Tangshan, China	1976
200,000	Terremoto	Xining, China	1927
200,000	Terremoto	Gansu, China	1920
175,000	Terremoto/ Tsunami	Asia/África	2004

Fuentes: ww.msnbc.com/modules/tables/worstguakesofcentury, Associated Press, Reuters, U.S. Geological Survey, *The World Almanac*, *The Washington Post.*

a) Encuentra el conjunto de la ubicación de los seis terremotos *o* de los seis desastres naturales más mortíferos.

b) ¿El inciso **a)** representa la unión o intersección de dichas categorías?

c) Encuentra el conjunto de la ubicación de los seis terremotos *y* de los seis desastres naturales más mortíferos.

d) ¿El inciso **c)** representa la unión o intersección de dichas categorías?

93. Examen de álgebra La tabla siguiente muestra los estudiantes que obtuvieron una calificación de A (10) en las primeras dos pruebas en una clase de álgebra intermedia.

Primer examen	Segundo examen
Albert	Linda
Carmen	Jason
Frank	David
Linda	Frank
Barbara	Earl
	Kate
	Ingrid

a) Encuentra el conjunto de los estudiantes que obtuvieron una calificación de A (10) en la primera *o* en la segunda prueba.

b) ¿El inciso **a)** representa la unión o intersección de los estudiantes?

c) Encuentra el conjunto de los estudiantes que obtuvieron una calificación de A (10) en la primera *y* en la segunda prueba.

d) ¿El inciso **c)** representa la unión o intersección de los estudiantes?

94. Carreras La tabla siguiente muestra los corredores que participaron en una carrera de 3 y en una de 5 km.

3 km	5 km
Adam	Luan
Kim	Betty
Luan	Darnell
Ngo	Ngo
Carmen	Frances
Earl	George
Martha	Adam

a) Encuentra el conjunto de los corredores que participaron en una carrera de 3 *o* en una de 5 km.

b) ¿El inciso **a)** representa la unión o intersección de los corredores?

c) Encuentra el conjunto de los corredores que participaron en una carrera de 3 *y* en una de 5 km.

d) ¿El inciso **c)** representa la unión o intersección de los corredores?

95. Países más poblados La tabla siguiente muestra los cinco países más poblados en 1950 y en 2010 y los cinco países que se espera sean los más poblados en 2050. Esta información fue tomada del Sitio Web Oficina de Censos de Estados Unidos.

1950	2010	2050
China	China	India
India	India	China
Estados Unidos	Estados Unidos	Estados Unidos
Rusia	Indonesia	Indonesia
Japón	Brasil	Nigeria

a) Encuentra el conjunto de los países más poblados en 2010 *o* 2050.

b) Encuentra el conjunto de los países más poblados en 1950 *o* 2050.

c) Encuentra el conjunto de los países más poblados en 1950 *y* 2010.

d) Encuentra el conjunto de los países más poblados en 2010 *y* 2050.

e) Encuentra el conjunto de los países más poblados en 1950, 2010 *y* 2050.

96. Concurso de escritura La tabla siguiente muestra a los estudiantes de una clase de español que participaron en tres concursos de escritura en una preparatoria local.

Primer concurso	Segundo concurso	Tercer concurso
Jill	Tom	Pat
Sam	Shirley	Richard
Tom	Bob	Arnold
Pat	Donna	Donna
Shirley	Sam	Kate
Richard	Jill	
	Kate	

a) Encuentra el conjunto de los estudiantes que participaron en el primer concurso *o* en el segundo concurso.

b) Encuentra el conjunto de los estudiantes que participaron en el segundo concurso *o* en el tercer concurso.

c) Encuentra el conjunto de los estudiantes que participaron en el primer concurso *y* en el segundo concurso.

d) Encuentra el conjunto de los estudiantes que participaron en el primer concurso *y* en el tercer concurso.

e) Encuentra el conjunto de los estudiantes que participaron en el primero, en el segundo *y* en el tercer concursos.

97. Lobatos de los Scouts Los lobatos de los Scouts de la manada 108 deben completar cuatro hazañas para ganar la insignia de lobo. Doug Wedding, su líder, tiene la siguiente tabla en su libro de récords. Un *Sí* indica que el lobato scout ha completado esa hazaña.

	Hazaña			
Scout	1	2	3	4
Alex	Sí	Sí	Sí	Sí
James	Sí	Sí	No	No
George	No	Sí	No	Sí
Connor	No	Sí	No	Sí
Stephen	No	No	Sí	No

Sea A = al conjunto de los lobatos scouts que han completado la hazaña 1: *Destreza*.

Sea B = al conjunto de los lobatos scouts que han completado la hazaña 2: *Bandera*.

Sea C = al conjunto de los lobatos scouts que han completado la hazaña 3: *Cocina y comida*.

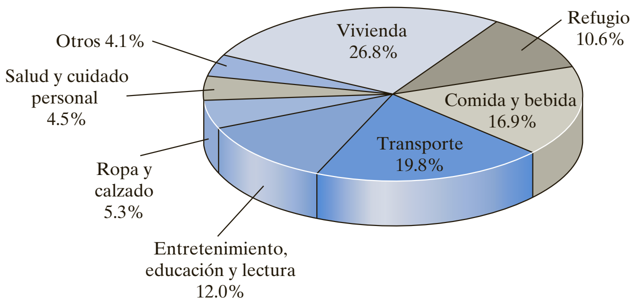
Sea D = al conjunto de los lobatos scouts que han completado la hazaña 4: *Toma de decisiones*.

a) Escribe cada conjunto A, B, C y D usando el método de lista (o descriptivo).

b) Determina el conjunto $A \cap B \cap C \cap D$, es decir, encuentra el conjunto de elementos comunes a los cuatro conjuntos.

c) ¿Cuáles de los lobatos scouts cumplieron con todos los requerimientos para recibir sus insignias de lobo?

98. Bienes y servicios La siguiente gráfica muestra el porcentaje dado en Estados Unidos a diferentes bienes y servicios en el índice de precio del consumidor para diciembre de 2006.



Fuente: Oficina de estadísticas laborales de Estados Unidos (U.S. Bureau of Labor Statistics)

a) Lista el conjunto de bienes y servicios que tienen un porcentaje mayor o igual a 21%.

b) Lista el conjunto de bienes y servicios que tienen un porcentaje menor a 6%.

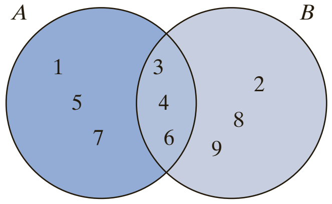
99. El diagrama siguiente es llamado diagrama de Venn. A partir de dicho diagrama determina los siguientes conjuntos:

a) A

b) B

c) $A \cup B$

d) $A \cap B$



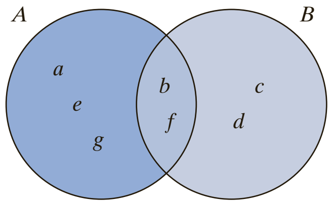
100. Determina los siguientes conjuntos usando el siguiente diagrama de Venn:

a) A

b) B

c) $A \cup B$

d) $A \cap B$



101. a) Explica la diferencia entre los conjuntos de números siguientes: $\{x|x > 1 \text{ y } x \in N\}$ y $\{x|x > 1\}$.

b) Escribe en forma de lista el primer conjunto dado.

c) ¿Puedes escribir el segundo conjunto en forma de lista? Explica tu respuesta.

102. Repite el ejercicio 101 para los conjuntos $\{x|2 < x < 6 \text{ y } x \in \text{N}\}$ y $\{x|2 < x < 6\}$.

103. NASCAR Cup Dibuja un diagrama de Venn para los datos mostrados en el ejercicio 91 de la página 14.

Ejercicios de conceptos y escritura

104. ¿El conjunto de números naturales es un conjunto finito o infinito? Explica.

105. Realiza una lista de cinco símbolos de desigualdades y escribe cómo se lee cada uno de ellos.

106. Realiza una lista del conjunto de números enteros *entre* 3 y 7.

107. Realiza una lista del conjunto de números enteros *entre* -1 y 3, *que incluya* al 3.

108. Explica por qué cada número entero es también un número racional.

109. Describe los números naturales, enteros positivos, enteros, racionales, irracionales y reales. Explica las relaciones entre estos conjuntos de números.

En los ejercicios 110-119, indica si la proposición es verdadera o falsa.

110. Cada número natural es un número entero positivo.

111. Cada número entero positivo es un número natural.

112. Algunos números racionales son números enteros.

113. Cada número entero es un número racional.

114. Cada número racional es un número entero.

115. La unión del conjunto de números racionales con el conjunto de números irracionales forma el conjunto de números reales.

116. La intersección del conjunto de números racionales y el conjunto de números irracionales es un conjunto vacío.

117. El conjunto de números naturales es un conjunto finito.

118. El conjunto de números enteros entre π y 4 es un conjunto nulo.

119. El conjunto de números racionales entre 3 y π es un conjunto infinito.

Problemas de desafío

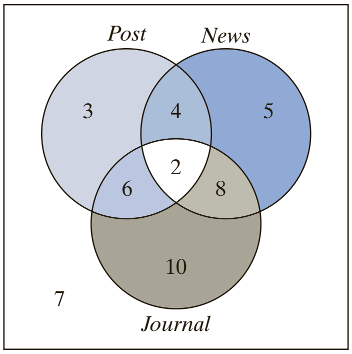
120. **a)** Escribe los números decimales equivalentes a $\frac{1}{9}, \frac{2}{9},$ y $\frac{3}{9}$.

b) Escribe las fracciones equivalentes a $0.\overline{4}, 0.\overline{5},$ y $0.\overline{6}$.

c) ¿A qué es igual $0.\overline{9}$? Explica cómo determinaste tu respuesta.

Actividad de grupo

121. **Preferencia de periódicos** El siguiente diagrama de Venn muestra los resultados de una encuesta realizada a 45 personas. El diagrama muestra el número de personas encuestadas que leen el *New York Post*, el *New York Daily News* y *The Wall Street Journal*.



a) Grupo 1: determina el número de encuestados que leyeron ambos; el *Post* y el *News*, es decir, *Post* ∩ *News*.

b) Grupo 2: determina el número de encuestados que leyeron ambos; el *Post* y el *Journal*, es decir, *Post* ∩ *News*.

c) Grupo 3: determina el número de encuestados que leyeron el *News* y el *Journal*, es decir, *News* ∩ *Journal*.

d) Comparte tu respuesta con tus compañeros de equipo y observa si están de acuerdo con tus respuestas.

e) En equipo, determina el número de personas que leyeron los tres periódicos.

f) En equipo, determina el número de personas que no leyeron ninguno de los tres periódicos.

1.3 Propiedades y operaciones con números reales

1. Evaluar valores absolutos.
2. Sumar números reales.
3. Restar números reales.
4. Multiplicar números reales.
5. Dividir números reales.
6. Usar las propiedades de los números reales.

Dos números que están a la misma distancia del cero en la recta numérica pero en direcciones opuestas se conocen como **inversos aditivos** u **opuestos** uno del otro. Por ejemplo, 3 es el inverso aditivo de -3, y -3 es el inverso aditivo de 3. El número 0 es su propio inverso aditivo. La suma de un número y su inverso aditivo es 0. ¿Cuáles son los inversos aditivos de -56.3 y $\frac{76}{5}$? Sus inversos aditivos son 56.3 y $-\frac{76}{5}$, respectivamente.

Inversos aditivos

-56.3 y 56.3

$\frac{76}{5}$ y $-\frac{76}{5}$

0 y 0

Consejo útil

Observa que el inverso aditivo de un número positivo es un número negativo y el inverso aditivo de un número negativo es un número positivo.

Comprendiendo el álgebra

En los inversos aditivos, uno de los números es *positivo* y el otro es *negativo*.

Inverso aditivo

Para cualquier número real a, su inverso aditivo es $-a$.

Considera el número -5. Su inverso aditivo es $-(-5)$. Como sabemos que este número debe ser positivo, implica que $-(-5) = 5$. Este es un ejemplo de la propiedad del doble negativo.

Propiedad del doble negativo

Para cualquier número real $a, -(-a) = a$.

Por la propiedad del doble negativo, $-(-7.4) = 7.4$ y $-\left(-\frac{12}{5}\right) = \frac{12}{5}$.

1 Evaluar valores absolutos

Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número es su distancia, con respecto al 0, en una recta numérica. El símbolo $|\ |$ se usa para denotar valor absoluto.

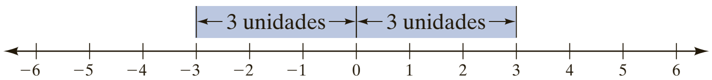


FIGURA 1.6

Considera el número 3 y el -3 (**Figura 1.6**). Ambos números están a tres unidades del 0 en la recta numérica. Por lo tanto,

$$|3| = 3 \text{ y } |-3| = 3$$

EJEMPLO 1 Evalúa. **a)** $|9|$ **b)** $|-8.2|$ **c)** $|0|$

Solución

a) $|9| = 9$, ya que 9 está a 9 unidades del 0 en la recta numérica.

b) $|-8.2| = 8.2$, ya que -8.2 está a 8.2 unidades del 0 en la recta numérica.

c) $|0| = 0$.

El valor absoluto de cualquier número distinto de cero siempre será un número positivo, y el valor absoluto de 0 es 0.

Para determinar el valor absoluto de un número real sin utilizar la recta numérica, usa la definición siguiente.

Resuelve ahora el ejercicio 13

Valor absoluto

Si a representa cualquier número real, entonces

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

La definición de valor absoluto indica que el valor absoluto de cualquier número positivo es él mismo, y el valor absoluto de cualquier número negativo es el inverso aditivo (opuesto) del número. El valor absoluto de un número puede determinarse por medio de la definición anterior, como se ilustra a continuación.

$\lvert 6.3\rvert = 6.3$	Como 6.3 es mayor o igual a 0, su valor absoluto es 6.3.
$\lvert 0\rvert = 0$	Como 0 es mayor o igual a 0, su valor absoluto es 0.
$\lvert -12\rvert = -(-12) = 12$	Como -12 es menor que 0, su valor absoluto es $-(-12)$ o 12.

EJEMPLO 2 Evalúa por medio de la definición de valor absoluto.

a) $-|5|$ **b)** $-|-6.43|$

Solución

a) Se debe determinar el opuesto del valor absoluto de 5. Como el valor absoluto de 5 es positivo, su opuesto debe ser negativo.

$$-|5| = -(5) = -5$$

b) Se debe determinar el opuesto del valor absoluto de -6.43. Como el valor absoluto de -6.43 es positivo, su opuesto debe ser negativo.

$$-|-6.43| = -(-6.43) = -6.43$$

Resuelve ahora el ejercicio 21

EJEMPLO 3 Inserta $<$, $>$ o $=$ en el área sombreada entre los dos valores para que cada proposición sea verdadera.

a) $|8| \;\square\; |-8|$ **b)** $|-1| \;\square\; -|-3|$

Solución

a) Como $|8|$ y $|-8|$ son iguales a 8, tenemos que $|8| = |-8|$.

b) Como $|-1| = 1$ y $-|-3| = -3$, tenemos que $|-1| > -|-3|$.

Resuelve ahora el ejercicio 29

2 Sumar números reales

Suma de dos números con el mismo signo (ambos positivos o negativos)

Suma sus valores absolutos y coloca el signo común antes de la suma.

La suma de dos números positivos siempre será un número positivo, y la suma de dos números negativos siempre será un número negativo.

EJEMPLO 4 Evalúa $-4 + (-7)$.

Solución Como ambos números que se suman son negativos, la suma será negativa. Para determinar la suma, debemos sumar los valores absolutos de los números y colocar el signo negativo antes del valor. Primero, busca el valor absoluto de cada número.

$$|-4| = 4 \qquad |-7| = 7$$

Ahora suma los valores absolutos.

$$|-4| + |-7| = 4 + 7 = 11$$

Por último, como ambos números son negativos, la suma debe ser negativa. Por lo tanto,

$$-4 + (-7) = -11$$

Resuelve ahora el ejercicio 45

Suma de dos números con diferente signo (uno positivo y otro negativo)

Resta el valor absoluto menor del valor absoluto mayor. La respuesta tiene el signo del número con el valor absoluto más grande.

Comprendiendo el álgebra

- La suma de dos números positivos *siempre* será un número positivo.
- La suma de dos números negativos *siempre* será un número negativo.
- La suma de un número positivo y un número negativo puede ser positiva, negativa o cero.

La suma de un número positivo y un número negativo puede ser positiva, negativa o cero. El signo de la respuesta será el mismo signo que el del número con mayor valor absoluto.

EJEMPLO 5 Evalúa $5 + (-9)$.

Solución Como los números que se suman son de signos opuestos, restamos el valor absoluto más pequeño del valor absoluto mayor. Primero tomamos el valor absoluto de cada uno.

$$|5| = 5 \quad |-9| = 9$$

Ahora determinamos la diferencia, $9 - 5 = 4$. El número -9 tiene un valor absoluto mayor que el número 5, por lo que su suma es negativa.

$$5 + (-9) = -4$$

Resuelve ahora el ejercicio 43

EJEMPLO 6 Evalúa. **a)** $1.3 + (-2.7)$ **b)** $-\frac{7}{8} + \frac{5}{6}$

Solución

a) $1.3 + (-2.7) = -1.4$

b) Inicia escribiendo ambas fracciones con el mínimo común denominador: 24.

$$-\frac{7}{8} + \frac{5}{6} = -\frac{21}{24} + \frac{20}{24} = \frac{(-21) + 20}{24} = \frac{-1}{24} = -\frac{1}{24}$$

Resuelve ahora el ejercicio 49

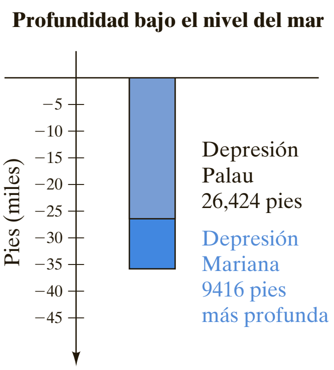


FIGURA 1.7

EJEMPLO 7 **Profundidad de depresiones oceánicas** La depresión Palau en el océano Pacífico se encuentra a 26,424 pies bajo el nivel del mar. La depresión Mariana, la depresión con mayor profundidad, es 9416 pies más profunda que la depresión Palau (ver **Figura 1.7**). Determina la profundidad de la depresión Mariana.

Solución Considera la distancia bajo el nivel del mar como negativa. Por lo tanto, la profundidad total es

$$-26,424 + (-9416) = -35,840 \text{ pies}$$

o 35,840 pies bajo el nivel del mar.

Resuelve ahora el ejercicio 127

3 Restar números naturales

Todo problema de sustracción puede expresarse como un problema de suma mediante la siguiente regla.

Resta de números reales

$$a - b = a + (-b)$$

Para restar b de a, se suma el opuesto (o inverso aditivo) de b a a.

Por ejemplo, $5 - 7$ significa $5 - (+7)$. Para restar $5 - 7$, suma el opuesto de $+7$, que es -7, a 5.

$$5 \underset{\text{resta}}{-} \underset{\substack{7\\ \text{positivo}}}{7} = 5 \underset{\text{suma}}{+} \underset{\substack{7\\ \text{negativo}}}{(-7)}$$

Comprendiendo el álgebra

Cuando *restamos*, se suma el opuesto del segundo número al primer número.

Como $5 + (-7) = -2$, entonces $5 - 7 = -2$.

EJEMPLO 8 Evalúa. **a)** $3 - 8$ **b)** $-6 - 4$

Solución **a)** $3 - 8 = 3 + (-8) = -5$ **b)** $-6 - 4 = -6 + (-4) = -10$

Resuelve ahora el ejercicio 79

EJEMPLO 9 Evalúa $8 - (-15)$.

Solución En este problema, restamos un número negativo. El procedimiento para restar es el mismo.

$$8 - (-15) = 8 + 15 = 23$$

resta 15 negativo suma 15 positivo

Por lo tanto, $8 - (-15) = 23$.

Resuelve ahora el ejercicio 81

Al estudiar el ejemplo 9 y otros problemas, se puede observar el siguiente principio.

Resta de números negativos

$$a - (-b) = a + b$$

Podemos utilizar este principio para evaluar problemas como $8 - (-15)$ y otros problemas en donde *restamos una cantidad negativa*.

EJEMPLO 10 Evalúa $-4 - (-11)$.

Solución $-4 - (-11) = -4 + 11 = 7$

Resuelve ahora el ejercicio 47

EJEMPLO 11 **a)** Resta 35 de -42 **b)** Resta $-\frac{3}{5}$ y $-\frac{5}{9}$.

Solución

a) $-42 - 35 = -77$

b) $-\frac{5}{9} - \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{5}{9} + \frac{3}{5} = -\frac{25}{45} + \frac{27}{45} = \frac{2}{45}$

Resuelve ahora el ejercicio 99

EJEMPLO 12 **Temperaturas extremas** La temperatura más alta registrada en Estados Unidos fue de 134 °F, que ocurrió en Greenland Ranch, California, en el Valle de la Muerte el 10 de julio de 1913. La temperatura más baja registrada en Estados Unidos fue de -79.8 °F, que ocurrió en Prospect Creek Camp, Alaska, en las montañas Endicott el 23 de enero de 1971 (ver **Figura 1.8**). Determina la diferencia entre estas dos temperaturas.

Solución Para determinar la diferencia, restamos.

$$134° - (-79.8°) = 134° + 79.8° = 213.8°$$

Resuelve ahora el ejercicio 125

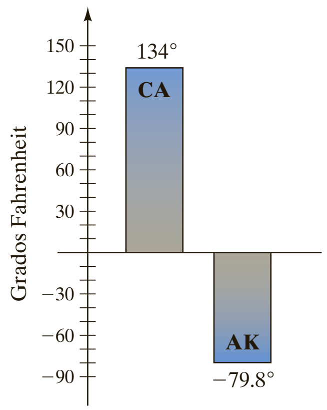


FIGURA 1.8

Con frecuencia la suma y la resta están combinadas en un mismo problema, como se verá en los ejemplos siguientes. A menos que haya paréntesis, si la expresión solo incluye sumas y restas, sumamos y restamos de izquierda a derecha. Cuando se utilizan paréntesis, primero se suma y se resta dentro de los paréntesis, después se suma y resta de izquierda a derecha.

EJEMPLO 13 Evalúa $-15 + (-37) - (5 - 9)$.

Solución

$$\begin{aligned} -15 + (-37) - (5 - 9) &= -15 + (-37) - (-4) \\ &= -15 - 37 + 4 \\ &= -52 + 4 = -48 \end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 85

EJEMPLO 14 Evalúa $2 - |-3| + 4 - (6 - |-8|)$.

Solución Inicia remplazando los números entre signos de valor absoluto con sus equivalentes numéricos, luego evalúa.

$$\begin{aligned} 2 - |-3| + 4 - (6 - |-8|) &= 2 - 3 + 4 - (6 - 8) \\ &= 2 - 3 + 4 - (-2) \\ &= 2 - 3 + 4 + 2 \\ &= -1 + 4 + 2 \\ &= 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 59

4 Multiplicar números reales

Comprendiendo el álgebra

Observa que:

$(-)(-) = +$, $(+)(+) = +$

$(-)(+) = -$, $(+)(-) = -$

Multiplicación de dos números reales

1. Para multiplicar dos números con *signos iguales*, ambos positivos o ambos negativos, multiplica sus valores absolutos. La respuesta es *positiva*.
2. Para multiplicar dos números con *signos diferentes*, uno positivo y el otro negativo, multiplica sus valores absolutos. La respuesta es *negativa*.

EJEMPLO 15 Evalúa. **a)** $(4.2)(-1.6)$ **b)** $(-18)\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Solución

a) $(4.2)(-1.6) = -6.72$ Los números tienen signos diferentes. La respuesta es negativa.

b) $(-18)\left(-\frac{1}{2}\right) = 9$ Los números tienen signos iguales. La respuesta es positiva.

Resuelve ahora el ejercicio 65

EJEMPLO 16 Evalúa $4(-2)(-3)(1)$.

Solución $4(-2)(-3)(1) = (-8)(-3)(1) = 24(1) = 24$

Resuelve ahora el ejercicio 67

Comprendiendo el álgebra

Cuando se multiplican más de dos números negativos, el producto será:

- *negativo*, si hay un número impar de números negativos.
- *positivo*, si hay un número par de números negativos.

Cuando multiplicamos más de dos números, el producto será *negativo* cuando exista un número *impar* de números negativos. El producto será *positivo* cuando exista un número *par* de números negativos.

Propiedad del cero en la multiplicación

Para cualquier número a,

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

Por la propiedad anterior, $5(0) = 0$ y $(-7.3)(0) = 0$.

EJEMPLO 17 Evalúa $9(5)(-2.63)(0)(4)$.

Solución Si uno o más factores son 0, el producto es 0. Por lo tanto, $9(5)(-2.63)(0)(4) = 0$.

Resuelve ahora el ejercicio 101

Comprendiendo el álgebra

Observa que

$$\frac{(-)}{(-)} = +, \quad \frac{(+)}{(+)} = +$$

$$\frac{(+)}{(-)} = -, \quad \frac{(-)}{(+)} = -$$

5 Dividir números reales

Las reglas para la división de números reales son similares a las de la multiplicación de números reales.

Dividir dos números reales

1. Para dividir dos números con *signos iguales*, ambos positivos o ambos negativos, divide sus valores absolutos. La respuesta es *positiva*.
2. Para dividir dos números con *signos diferentes*, uno positivo y otro negativo, divide sus valores absolutos. La respuesta es *negativa*.

EJEMPLO 18 Evalúa. **a)** $-24 \div 4$ **b)** $-6.45 \div (-0.4)$

Solución

a) $\frac{-24}{4} = -6$ Los números tienen signos diferentes. La respuesta es negativa.

b) $\frac{-6.45}{-0.4} = 16.125$ Los números tienen signos iguales. La respuesta es positiva.

Resuelve ahora el ejercicio 71

EJEMPLO 19 Evalúa $\frac{-3}{8} \div \left|\frac{-2}{5}\right|$.

Solución Como $\left|\frac{-2}{5}\right|$ es igual a $\frac{2}{5}$, escribimos

$$\frac{-3}{8} \div \left|\frac{-2}{5}\right| = \frac{-3}{8} \div \frac{2}{5}$$

Ahora invertimos el divisor y procedemos como en la multiplicación.

$$\frac{-3}{8} \div \frac{2}{5} = \frac{-3}{8} \cdot \frac{5}{2} = \frac{-3 \cdot 5}{8 \cdot 2} = \frac{-15}{16} \text{ o } -\frac{15}{16}$$

Resuelve ahora el ejercicio 75

Cuando el denominador de una fracción es un número negativo, generalmente se reescribe la fracción con un denominador positivo. Para hacerlo, se usa el lo siguiente.

Comprendiendo el álgebra

Una fracción negativa puede tener el signo menos en el denominador, en el numerador o en frente de la fracción. Es decir,

$$\frac{3}{-4} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}.$$

Signo de una fracción

Para cualquier número a y cualquier número b distinto de cero.

$$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$$

Por lo tanto, cuando tenemos un cociente de $\frac{1}{-2}$, lo reescribimos como $\frac{-1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$.

6 Usar las propiedades de los números reales

Ya hemos discutido la propiedad del doble negativo y la propiedad del cero en la multiplicación. La **Tabla 1.1** muestra otras propiedades básicas para las operaciones de suma y multiplicación de números reales.

TABLA 1.1

Para números reales *a*, *b* y *c*	**Suma**	**Multiplicación**
Propiedad conmutativa	$a + b = b + a$	$ab = ba$
Propiedad asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$
Propiedad de la identidad	$a + 0 = 0 + a = a$ (el 0 se denomina **elemento de identidad aditiva**)	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (el 1 se denomina **elemento de identidad multiplicativa**)
Propiedad del inverso	$a + (-a) = (-a) + a = 0$ ($-a$ se denomina **inverso aditivo** u **opuesto** de a)	$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ ($\frac{1}{a}$ se denomina **inverso multiplicativo** o **recíproco** de a, $a \cdot 0$)
Propiedad distributiva (de la multiplicación sobre la suma)	$a(b + c) = ab + ac$	

Observa que la propiedad conmutativa implica un cambio en el *orden*, y la propiedad asociativa implica un cambio en la *agrupación*.

La propiedad distributiva se aplica cuando hay más de dos números dentro de los paréntesis.

$$a(b + c + d + \cdots + n) = ab + ac + ad + \cdots + an$$

EJEMPLO 20 Nombra la propiedad que se ilustra.

a) $7 \cdot m = m \cdot 7$ **b)** $(a + 6) + 2b = a + (6 + 2b)$

c) $4s + 5t = 5t + 4s$ **d)** $2v(w + 3) = 2v \cdot w + 2v \cdot 3$

Solución

a) Propiedad conmutativa de la multiplicación; cambio de orden.

b) Propiedad asociativa de la suma; cambio en la agrupación.

c) Propiedad conmutativa de la suma; cambio de orden.

d) Propiedad distributiva; $2v$ es distribuido.

Resuelve ahora el ejercicio 113

En el ejemplo 20 **d)** la expresión $2v \cdot w + 2v \cdot 3$ puede simplificarse a $2vw + 6v$, mediante el uso de las propiedades de los números reales.

EJEMPLO 21 Nombra la propiedad que se ilustra.

a) $9 \cdot 1 = 9$ **b)** $x + 0 - x$

c) $4 + (-4) = 0$ **d)** $1(xy) = xy$

Solución

a) Propiedad de la identidad de la multiplicación.

b) Propiedad de la identidad aditiva.

c) Propiedad del inverso aditivo.

d) Propiedad de la identidad de la multiplicación.

Resuelve ahora el ejercicio 115

EJEMPLO 22 Escribe el inverso aditivo (u opuesto) y el inverso multiplicativo (o recíproco) de cada inciso.

a) -3 **b)** $\frac{2}{3}$

Solución

a) El inverso aditivo es 3. El inverso multiplicativo es $\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$.

b) El inverso aditivo es $-\frac{2}{3}$. El inverso multiplicativo es $\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$.

Resuelve ahora el ejercicio 121

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1.3

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) indicados en la siguiente lista.

resta	*d*	negativo	distributivo	valor absoluto
reflexivo	positivo	inverso aditivo	suma	asociativo
Conmutativo	*c*	cualquier	0	$-c$

1. La suma de dos números positivos es un número ________________.

2. La suma de dos números negativos es un número ________________.

3. Para cualquier número real a, su ________________ es $-a$.

4. Para cualquier número real c, $-(-c) =$ ________________.

5. Para sumar dos números con el mismo signo, ________________ sus valores absolutos y conserva el signo en común.

6. Para sumar dos números con diferentes signos, ________________ el valor absoluto más pequeño con el valor absoluto más grande y conserva el signo del número con el valor absoluto más grande.

7. El ________________ de un número es su distancia desde el 0 en la recta numérica.

8. El valor absoluto de ________________ número es siempre no negativo.

9. La propiedad $a(b + c) = ab + ac$ es la propiedad ________________.

10. La propiedad $d + e = e + d$ es la propiedad ________________ de adición.

Practica tus habilidades

Evalúa cada expresión de valor absoluto.

11. $|5|$ **12.** $|1.9|$ **13.** $|-7|$ **14.** $|-8|$

15. $\left|-\frac{7}{8}\right|$ **16.** $|-8.61|$ **17.** $|0|$ **18.** $-|1|$

19. $-|-7|$ **20.** $-|-\pi|$ **21.** $-\left|\frac{5}{9}\right|$ **22.** $-\left|-\frac{7}{19}\right|$

Inserta <, >, o = en el área sombreada para hacer cada proposición verdadera.

23. $|-9| \;\square\; |9|$ **24.** $|-4| \;\square\; |6|$ **25.** $|-8| \;\square\; -8$ **26.** $|-10| \;\square\; -5$

27. $|-\pi| \;\square\; -3$ **28.** $-|-1| \;\square\; -1$ **29.** $|-7| \;\square\; -|2|$ **30.** $-|9| \;\square\; -|13|$

31. $-(-3) \;\square\; -|-3|$ **32.** $|-(-4)| \;\square\; -4$ **33.** $|19| \;\square\; |-25|$ **34.** $-|-1| \;\square\; |-5|$

Ordena los valores del más pequeño al más grande.

35. $-1, -2, |-3|, 4, -|5|$

36. $-8, -12, -|9|, -|20|, -|-17|$

37. $-32, |-7|, 15, -|4|, 4$

38. $\pi, -\pi, |-3|, -|-3|, -2, |-2|$

39. $-6.1, |-6.3|, -|-6.5|, 6.8, |6.4|$

40. $-2.1, -2, -2.4, |-2.8|, -|2.9|$

41. $\frac{1}{3}, \left|-\frac{1}{2}\right|, -2, \left|\frac{3}{5}\right|, \left|-\frac{3}{4}\right|$

42. $\left|-\frac{5}{2}\right|, \frac{3}{5}, |-3|, \left|-\frac{5}{3}\right|, \left|-\frac{2}{3}\right|$

Evalúa cada problema de suma y resta.

43. $7 + (-4)$ **44.** $-2 + 9$ **45.** $-12 + (-10)$ **46.** $-2.18 - 3.14$

47. $-9 - (-5)$ **48.** $-12 - (-4)$ **49.** $\frac{4}{5} - \frac{6}{7}$ **50.** $-\frac{5}{12} - \left(-\frac{7}{8}\right)$

51. $-14.21 - (-13.22)$ **52.** $79.33 - (-16.05)$ **53.** $10 - (-2.31) + (-4.39)$

54. $-|7.31| - (-3.28) + 5.76$ **55.** $9.9 - |8.5| - |17.6|$ **56.** $|11 - 4| - 10$

57. $|17 - 12| - |3|$ **58.** $|12 - 5| - |5 - 12|$ **59.** $-|-3| - |7| + (6 + |-2|)$

60. $|-4| - |-4| - |-4 - 4|$ **61.** $\left(\frac{3}{5} + \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2}$ **62.** $\frac{4}{5} - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)$

Evalúa cada problema de multiplicación y división.

63. $-5 \cdot 8$ **64.** $(-9)(-3)$ **65.** $-4\left(-\frac{5}{16}\right)$ **66.** $-4\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$

67. $(-1)(-2)(-1)(2)(-3)$ **68.** $(-2.1)(-7.8)(-9.1)$ **69.** $(-1.1)(3.4)(8.3)(-7.6)$ **70.** $-16 \div 8$

71. $-66 \div (-6)$ **72.** $-4 \div \left(-\frac{1}{4}\right)$ **73.** $-\frac{7}{9} \div \frac{-7}{9}$ **74.** $\left|-\frac{1}{2}\right| \cdot \left|\frac{-3}{4}\right|$

75. $\left(-\frac{3}{4}\right) \div |-16|$ **76.** $\left|\frac{3}{8}\right| \div (-4)$ **77.** $\left|\frac{-7}{6}\right| \div \left|\frac{-1}{2}\right|$ **78.** $\frac{-4}{9} \div |-4|$

Evalúa.

79. $10 - 14$ **80.** $-12 - 15$ **81.** $7 - (-11)$

82. $-\frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{16}\right)$ **83.** $3\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)$ **84.** $(-3.2)(4.9)(-2.73)$

85. $-14.4 - (-9.6) - 15.8$ **86.** $(1.32 - 2.76) - (-3.85 + 4.28)$ **87.** $9 - (8 - 7) - (-2 - 1)$

88. $(4.2)(-1)(-9.6)(3.8)$ **89.** $-|12| \cdot \left|\frac{-1}{2}\right|$ **90.** $-\left|\frac{-24}{5}\right| \cdot \left|\frac{3}{8}\right|$

91. $\left|\frac{-9}{4}\right| \div \left|\frac{-4}{9}\right|$ **92.** $(-|3| + |5|) - (1 - |-9|)$ **93.** $5 - |-7| + 3 - |-2|$

94. $\left(\frac{3}{8} - \frac{4}{7}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)$ **95.** $\left(-\frac{3}{5} - \frac{4}{9}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right)$ **96.** $(|-9| - 8) - (3 \cdot |-5|$

97. $(25 - |32|)(-7 - 4)$ **98.** $\left[(-2)\left|-\frac{1}{2}\right|\right] \div \left|-\frac{1}{4}\right|$ **99.** Resta 29 de -10

100. Resta $-\frac{1}{2}$ de $-\frac{2}{3}$. **101.** $7(3)(0)(-193)$ **102.** $16(-5)(-10)(0)$

Nombra cada propiedad ilustrada.

103. $r + s = s + r$ **104.** $7(v + w) = 7v + 7w$

105. $b \cdot 0 = 0$ **106.** $c \cdot d = d \cdot c$

107. $(x + 3) + 6 = x + (3 + 6)$ **108.** $x + 0 = x$

109. $x = 1 \cdot x$ **110.** $x(y + z) = xy + xz$

111. $2(xy) = (2x)y$ **112.** $(2x \cdot 3y) \cdot 6y = 2x \cdot (3y \cdot 6y)$

113. $4(x + y + 2) = 4x + 4y + 8$ **114.** $-(-2) = 2$

115. $5 + 0 = 5$ **116.** $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$

117. $3 + (-3) = 0$ **118.** $(x + y) = 1(x + y)$

119. $-(-x) = x$ **120.** $x + (-x) = 0$

Escribe el inverso aditivo y el inverso multiplicativo de cada problema.

121. 6 **122.** -13 **123.** $-\frac{22}{9}$ **124.** $-\frac{3}{5}$

Resolución de problemas

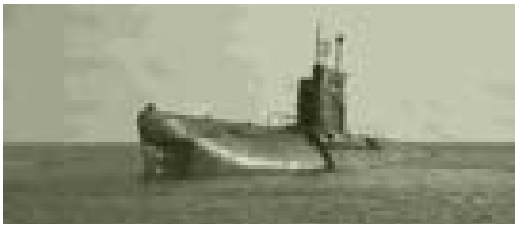
125. Cambio de temperatura El cambio de temperatura más inusual de acuerdo con el libro mundial de *Récords Guiness* sucedió de las 7:30 a.m. a las 7:32 a.m. el 22 de enero de 1943, en Spearfish, Dakota del Sur. Durante estos 2 minutos la temperatura cambio de -4 °F a 45 °F. Determina el incremento de la temperatura en estos 2 minutos.

126. Película *Gold* Durante la producción del documental *Gold*, el equipo de filmación percibió varios cambios en la temperatura. En una mina de oro en África del Sur localizada 3 millas por debajo de la tierra, la temperatura era de 140 °F. En una montaña cerca de Cuzco, Perú, la temperatura era de 40 °F. Determina la diferencia en la temperatura de estos dos sitios de filmación.

Fuente: Sitio Web History Channel

© Steve Lovegrove\Shutterstock

127. **Inmersión de un submarino** Un submarino se sumergió 358.9 pies. Después de un tiempo el submarino ascendió 210.7 pies. Encuentra la profundidad final del submarino desde su punto inicial (considera que la distancia en dirección hacia abajo es negativa).



© Shutterstock

128. **Cuenta bancaria** Sharon Koch tiene un saldo de $-\$32.64$ en su cuenta bancaria y depositó un cheque por \$99.38. ¿Cuál es su nuevo estado de cuenta?

129. **Temperaturas extremas** La temperatura más baja registrada en Estados Unidos fue de -79.8 °F el 23 de enero de 1971, en Prospect Creek, Alaska. La temperatura más baja en los estados contiguos (todos los estados excepto Alaska y Hawái) fue de -69.7 °F el 20 de enero del 1954, en Roger Pass, Montana. Encuentra la diferencia entre estas temperaturas.

130. **Impuestos estimados** En el 2010, Joanne Butler hizo cuatro pagos trimestrales estimados de impuestos sobre la renta de \$3000 cada uno. Cuando completó sus formas de impuesto sobre la renta del año 2010, encontró que sus impuestos totales eran de \$10,125.

a) ¿Tendrá Joanne derecho a un reembolso o tendrá que pagar más impuestos? Explica tu respuesta.

b) ¿Cuánto recibirá de reembolso o cuánto deberá de impuestos?

131. **Precios de las acciones** Ron Blackwood compró 100 acciones de Home Depot a \$30.30 por acción. Seis meses después Ron vendió las 100 acciones a un precio de \$42.37 por acción. ¿Cuál fue la ganancia o pérdida de esta transacción?

132. **Contrato** Samuel Pritchard firmó un contrato con una compañía publicitaria por \$60,000 pagado por adelantado para la venta de su libro *Moon Spray*. Cuando el libro sea publicado y empiece a tener ganancias, la editorial automáticamente deducirá su anticipo de las regalías del autor.

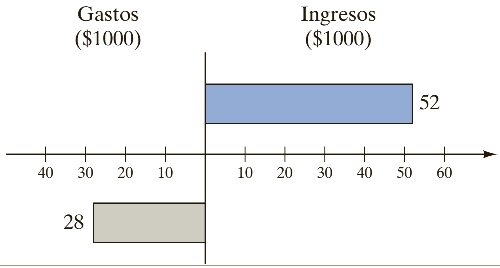
a) Seis meses después del lanzamiento del libro, las regalías del autor fueron de \$47,600 antes de deducirlo del anticipo. Determina cuánto dinero recibirá de o deberá a la editorial.

b) Después de un año, las regalías son de \$87,500. Determina cuánto dinero recibirá de o deberá a la compañía publicitaria.

133. Escribe tu propio problema realista que involucre restar un número positivo de un número negativo. Da la respuesta de tu problema.

134. Escribe tu propio problema realista que involucre restar un número negativo de un número negativo. Da la respuesta de tu problema.

135. **Pequeñas empresas** El promedio de inversiones del primer año y el promedio de ingresos del primer año de pequeñas empresas se muestra en la gráfica de barras siguiente. Estima el promedio del primer año restando el promedio de gastos del primer año del promedio de ingresos del primer año.



Ejercicios de conceptos y escritura

136. Da la definición del valor absoluto.

En los ejercicios 137-142, encuentra el número(s) desconocido(s). Explica cómo determinaste tu respuesta.

137. Todos los números a tal que $|a| = |-a|$

138. Todos los números a tal que $|a| = a$

139. Todos los números a tal que $|a| = 6$

140. Todos los números a tal que $|a| = -a$

141. Todos los números a tal que $|a| = -9$

142. Todos los números x tal que $|x - 3| = |3 - x|$

143. Explica cómo sumar dos números con el mismo signo.

144. Explica cómo sumar dos números con diferentes signos.

145. Explica cómo restar números reales.

146. Explica por qué las reglas de la división y de la multiplicación de números reales son similares.

147. Escribe dos formas diferentes en que se puede representar la fracción $\dfrac{a}{-b}$.

148. **a)** Escribe la propiedad asociativa de multiplicación.
b) Explica la propiedad.

149. **a)** Escribe la propiedad conmutativa de adición.
b) Explica la propiedad

150. **a)** Escribe la propiedad distributiva de multiplicación sobre la de adición.
b) Explica la propiedad.

151. Usando un ejemplo, explica por qué la adición no es distributiva sobre la de la multiplicación. Es decir, explica por qué $a + (b \cdot c) \neq (a + b) \cdot (a + c)$.

Problemas de desafío

152. Evalúa $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + 99 - 100$. (*Consejo*: agrupar en pares).

153. Evalúa $1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 + 7 + 8 - 9 + 10 + 11 - 12 + \ldots + 22 + 23 - 24$. (*Consejo*: examina en grupos de tres números).

154. Evalúa $\dfrac{(1)\cdot|-2|\cdot(-3)\cdot|4|\cdot(-5)}{|-1|\cdot(-2)\cdot|-3|\cdot(4)\cdot|-5|}$.

155. Evalúa $\dfrac{(1)(-2)(3)(-4)(5)\cdots(97)(-98)}{(-1)(2)(-3)(4)(-5)\cdots(-97)(98)}$.

Ejercicios de repaso acumulados

[1.2] **156.** Responde verdadero o falso: cada número irracional es un número real.

157. Escribe el conjunto de números naturales.

158. Considera el conjunto $\left\{3, 4, -2, \frac{5}{6}, \sqrt{11}, 0\right\}$. Indica los elementos que son

a) números enteros

b) números racionales

c) números irracionales

d) números reales

159. $A = \{4,7,9,12\}$; $B = \{1,4,7,19\}$. Encuentra

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

160. Ilustra $\{x|-4 < x \leq 5\}$ en una recta numérica.

1.4 Orden de las operaciones

1 Evaluar expresiones exponenciales.

2 Evaluar raíces cuadradas y raíces de orden superior.

3 Evaluar expresiones por medio del orden de las operaciones.

4 Evaluar expresiones que contienen variables.

Antes de estudiar el orden de las operaciones, necesitamos hablar brevemente acerca de los exponentes y las raíces.

1 Evaluar expresiones exponenciales

En la multiplicación, los números o expresiones que se van a multiplicar se denominan **factores**. Si $a \cdot b = c$, entonces a y b son factores de c. Por ejemplo, como $2 \cdot 3 = 6$, entonces 2 y 3 son factores de 6. El número 1 es un factor de todo número y expresión.

La cantidad 3^2 se denomina **expresión exponencial**. En la expresión, al 3 se le llama **base** y al 2 se le denomina **exponente**. La expresión 3^2 se lee “tres al cuadrado” o “tres a la segunda potencia”.

Observa que

$$3^2 \longleftarrow \text{exponente} \qquad 3 \longleftarrow \text{base}$$

$$3^2 = \underbrace{3 \cdot 3}_{\text{2 factores de 3}}$$

La expresión 5^3 se lee “cinco al cubo” o “cinco elevado a la tercera potencia”. Observa que

$$5^3 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{\text{3 factores de 5}}$$

En general. La base b a la *enésima* potencia se escribe b^n. Para cualquier número natural n,

$$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n \text{ factores de } b}$$

Observa que 0^0 es *indefinido*.

EJEMPLO 1 Evalúa. **a)** $(0.5)^3$ **b)** $(-3)^5$ **c)** 1^{23} **d)** $\left(-\frac{4}{7}\right)^3$

Solución

a) $(0.5)^3 = (0.5)(0.5)(0.5) = 0.125$

b) $(-3)^5 = (-3)(-3)(-3)(-3)(-3) = -243$

c) $1^{23} = 1$; 1 elevado a cualquier potencia será igual a 1.

d) $\left(-\frac{4}{7}\right)^3 = \left(-\frac{4}{7}\right)\left(-\frac{4}{7}\right)\left(-\frac{4}{7}\right) = -\frac{64}{343}$

Resuelve ahora el ejercicio 19

Consejo útil

Consejo de estudio

Se cuidadoso cuando escribas o copies exponentes. Como los exponentes son pequeños, es muy fácil que escribas o copies un exponente y que no reconozcas después lo que hayas escrito.

Comprendiendo el álgebra

No confundas -7^2 con $(-7)^2$.

-7^2 significa $-(7 \cdot 7) = -49$, un número *negativo*.

$(-7)^2$ significa $(-7)(-7) = 49$, un número *positivo*.

No es necesario escribir exponentes de 1. Siempre que se encuentre un valor numérico o una variable sin un exponente, se asume que tiene un exponente igual a 1. Por lo tanto, 3 significa 3^1, x significa x^1, x^3y significa x^3y^1, y $-xy$ *significa* $-x^1y^1$.

Prevención de errores comunes

Con frecuencia los estudiantes evalúan de manera incorrecta expresiones que incluyen $-x^2$. La expresión $-x^2$ significa $-1(x^2)$ o $-(x^2)$, no $(-x)^2$. Observa que -5^2 significa $-1(5^2)$ o $-(5^2) = -(5 \cdot 5) = -25$, mientras que $(-5)^2$ significa $(-5)(-5) = 25$. *En general,* $-x^m$ *significa* $-1(x^m)$ o $-(x^m)$, *no* $(-x)^m$.

EJEMPLO 2 Evalúa. **a)** -6^2 **b)** $(-6)^2$

Solución

a) $-6^2 = -(6 \cdot 6) = -36$

b) $(-6)^2 = (-6)(-6) = 36$

Resuelve ahora el ejercicio 41

EJEMPLO 3 Evalúa $-5^2 + (-5)^2 - 4^3 + (-4)^3$.

Solución Primero, evaluamos cada expresión exponencial. Después sumamos o restamos, trabajando de izquierda a derecha.

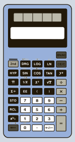
$$\begin{aligned} -5^2 + (-5)^2 - 4^3 + (-4)^3 &= -(5^2) + (-5)^2 - (4^3) + (-4)^3 \\ &= -25 + 25 - 64 + (-64) \\ &= -25 + 25 - 64 - 64 \\ &= -128 \end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 59

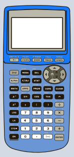
Cómo utilizar tu calculadora

Evaluación de expresiones exponenciales en una calculadora científica y en una calculadora graficadora

En las calculadoras científicas y en las graficadoras puede usarse la tecla $\boxed{x^2}$ para elevar un número al cuadrado. A continuación se muestra la secuencia de teclas a pulsar para evaluar 5^2.



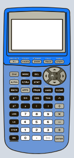
Calculadora científica $5\ \boxed{x^2}\ 25$ ← respuesta que se muestra



Calculadora graficadora $5\ \boxed{x^2}\ \boxed{\text{ENTER}}\ 25$ ← respuesta que se muestra

Para evaluar expresiones exponenciales con otros exponentes, puedes utilizar la tecla $\boxed{y^x}$ o $\boxed{\wedge}$ La mayoría de las calculadoras científicas tiene una tecla $\boxed{y^x}$*, mientras que las calculadoras graficadoras utilizan la tecla $\boxed{\wedge}$. Para evaluar las expresiones exponenciales por medio de estas teclas, primero introduce la base, después presiona la tecla $\boxed{y^x}$ o $\boxed{\wedge}$, y después introduce el exponente. Por ejemplo, para evaluar 6^4 hacemos lo siguiente:

Calculadora científica $6\ \boxed{y^x}\ 4\ \boxed{=}\ 1296$ ← respuesta que se muestra



Calculadora graficadora $6\ \boxed{\wedge}\ 4\ \boxed{\text{ENTER}}\ 1296$ ← respuesta que se muestra

*Algunas calculadoras tienen las teclas $\boxed{x^y}$ o $\boxed{a^b}$ en lugar de la tecla $\boxed{y^x}$.

2 Evaluar raíces cuadradas y raíces de orden superior

El símbolo que se usa para indicar una raíz, $\sqrt{}$, se denomina **signo radical**. El número o expresión dentro del signo radical se llama **radicando**. En $\sqrt{25}$, el radicando es 25. La **raíz cuadrada principal o positiva** de un número positivo a, escrita $\sqrt{a}$, es un número positivo que multiplicado por sí mismo da a. Por ejemplo, la raíz cuadrada principal de 4 es 2, escrita $\sqrt{4} = 2$, porque $2 \cdot 2 = 4$. En general, $\sqrt{a} = b$ si $b \cdot b = a$. Siempre que usemos las palabras *raíz cuadrada*, estaremos haciendo referencia a la "raíz cuadrada principal".

EJEMPLO 4 Evalúa. **a)** $\sqrt{25}$ **b)** $\sqrt{\frac{81}{4}}$ **c)** $\sqrt{0.64}$ **d)** $-\sqrt{49}$

Solución

a) $\sqrt{25} = 5$, ya que $5 \cdot 5 = 25$.

b) $\sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$, ya que $\frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{81}{4}$.

c) $\sqrt{0.64} = 0.8$, ya que $(0.8)(0.8) = 0.64$.

d) $-\sqrt{49}$ significa $-(\sqrt{49})$. Determinamos que $\sqrt{49} = 7$, ya que $7 \cdot 7 = 49$. Por lo tanto, $-\sqrt{49} = -7$.

Resuelve ahora el ejercicio 21

La raíces cuadradas de otros números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, y $\sqrt{5}$ son números irracionales. Los valores decimales de tales números nunca pueden darse con exactitud, debido a que los números irracionales son números decimales no periódicos. El valor *aproximado* de $\sqrt{2}$ y de otros números irracionales puede determinarse con una calculadora.

$$\sqrt{2} \approx 1.414213562 \quad \text{en una calculadora}$$

En esta sección introducimos las raíces cuadradas; las raíces cúbicas, simbolizadas por $\sqrt[3]{}$; y raíces de orden superior. El número utilizado para indicar la raíz se llama **índice**.

$$\overset{\text{índice}\searrow\quad\swarrow\text{signo radical}}{\sqrt[n]{a}} \longleftarrow \text{radicando}$$

El índice de una raíz cuadrada es 2. Sin embargo, por lo general no se escribe el índice 2. Por lo tanto, $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$.

El concepto que se usa para explicar raíces cuadradas puede ampliarse para explicar raíces cúbicas y raíces de orden superior. La raíz cúbica de un número a se escribe $\sqrt[3]{a}$.

$$\sqrt[3]{a} = b \text{ si } \underbrace{b \cdot b \cdot b}_{\text{3 factores de } b} = a$$

Por ejemplo, $\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. La expresión $\sqrt[n]{a}$ se lee "raíz *ené*sima de a".

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{si} \quad \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n \text{ factores de } b} = a$$

EJEMPLO 5 Evalúa.. **a)** $\sqrt[3]{125}$ **b)** $\sqrt[4]{81}$ **c)** $\sqrt[5]{32}$

Solución

a) $\sqrt[3]{125} = 5$, ya que $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

b) $\sqrt[4]{81} = 3$, ya que $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

c) $\sqrt[5]{32} = 2$, ya que $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

Resuelve ahora el ejercicio 25

EJEMPLO 6 Evalúa. **a)** $\sqrt[4]{256}$ **b)** $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$ **c)** $\sqrt[3]{-8}$ **d)** $-\sqrt[3]{8}$

Solución

a) $\sqrt[4]{256} = 4$, ya que $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$. **b)** $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$, ya que $\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$.

c) $\sqrt[3]{-8} = -2$, ya que $(-2)(-2)(-2) = -8$.

d) $-\sqrt[3]{8}$ significa $-(\sqrt[3]{8})$. Determinamos que $\sqrt[3]{8} = 2$, ya que $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Por lo tanto, $-\sqrt[3]{8} = -2$.

Resuelve ahora el ejercicio 27

Cómo utilizar tu calculadora

Evaluación de raíces en una calculadora científica

Las raíces cuadradas de números pueden determinarse en una calculadora con la tecla de raíz cuadrada $\boxed{\sqrt{x}}$. Para evaluar $\sqrt{25}$ en la mayoría de las calculadoras que tienen esta tecla, presione

$$25 \ \boxed{\sqrt{x}} \ \underbrace{5}_{\text{respuesta mostrada}}$$

Las raíces de orden superior pueden determinarse en calculadoras que tiene la tecla $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ o la tecla $\boxed{y^x}$*. Para evaluar $\sqrt[4]{625}$ en una calculadora con la tecla $\boxed{\sqrt[x]{y}}$, realiza lo siguiente:

$$625 \ \boxed{\sqrt[x]{y}} \ 4 \ \boxed{=} \ \underbrace{5}_{\text{respuesta mostrada}}$$

Observa que el número dentro del signo radical (radicando), 625, se introduce primero, después se presiona la tecla $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ y luego se introduce la raíz (o el índice) 4. Cuando se presiona la tecla $\boxed{=}$, aparece la respuesta 5.

Para evaluar $\sqrt[4]{625}$ en una calculadora con la tecla $\boxed{y^x}$, utiliza la tecla inverso como sigue:

$$625 \ \boxed{\text{INV}} \ \boxed{y^x} \ 4 \ \boxed{=} \ \underbrace{5}_{\text{respuesta mostrada}}$$

*Las teclas de las calculadoras varían. Algunas tienen las teclas $\boxed{x^y}$ o $\boxed{a^b}$ en lugar de la tecla $\boxed{y^x}$ y algunas calculadoras tienen una tecla $\boxed{2^{\text{nd}}}$ o $\boxed{\text{shift}}$ en lugar de la tecla $\boxed{\text{INV}}$.

Cómo utilizar tu calculadora graficadora

Evaluación de raíces en una calculadora graficadora

Para determinar la raíz cuadrada en una calculadora graficadora, usa $\sqrt{\ }$. El símbolo $\sqrt{\ }$ aparece arriba de la tecla $\boxed{x^2}$, así que necesitarás presionar la tecla $\boxed{2^{\text{nd}}}$ para evaluar las raíces cuadradas. Por ejemplo, para evaluar $\sqrt{25}$ presiona

$$\boxed{2^{\text{nd}}} \ \boxed{x^2} \ 25 \ \boxed{\text{ENTER}} \qquad 5 \longleftarrow \text{respuesta mostrada}$$

Cuando presionas $\boxed{2^{\text{nd}}}$ $\boxed{x^2}$, la Texas Instruments TI-84 Plus genera $\sqrt{\ }($. Entonces inserta el radicando, después el paréntesis derecho y presiona $\boxed{\text{ENTER}}$. Para aprender cómo encontrar raíces cúbicas y de orden superior, consulta el manual de tu calculadora graficadora. Con la TI-84 Plus, puedes usar la tecla $\boxed{\text{MATH}}$. Cuando presiones esta tecla obtendrás varias opciones, incluyendo la 4 y 5, que se muestran a continuación.

$$4: \sqrt[3]{\ }(\qquad 5: \sqrt[x]{y}$$

La opción 4 puede ser usada para determinar las raíces cúbicas y la opción 5 para determinar raíces de orden superior, como se muestra en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO Evalúa $\sqrt[3]{120}$.

Solución

$$\boxed{\text{MATH}} \ \underbrace{4}_{\substack{\text{seleccionar}\\ \text{opción 4}}} \ \underbrace{120}_{\substack{\text{ingresar}\\ \text{el radicando}}} \ \boxed{)} \ \boxed{\text{ENTER}} \ \underbrace{4.932424149}_{\text{respuesta mostrada}}$$

Para encontrar la raíz con un índice mayor que 3, primero introduce el índice, después presiona la tecla $\boxed{\text{MATH}}$ y luego la opción 5.

(*continúa en la siguiente página*)

EJEMPLO Evalúa $\sqrt[4]{625}$.

Solución

4 $\boxed{\text{MATH}}$ 5 $\underbrace{625}_{\text{ingresar el radicando}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ 5

índice, seleccionar opción, respuesta mostrada

En la sección 7.2 mostraremos otra forma de determinar raíces con un calculadora graficadora, cuando estudiemos exponentes racionales.

3 Evaluar expresiones por medio del orden de las operaciones

Con frecuencia tendremos que evaluar expresiones que tienen varias operaciones. Para hacerlo, sigue el **orden de las operaciones** indicado a continuación.

Comprendiendo el álgebra

Puedes recordar el orden de las operaciones como PEMDAS, lo cual es,

P: paréntesis
E: exponentes (raíces)
M: multiplicación
D: división
A: adición (suma)
S: sustracción (resta)

Orden de las operaciones

Para evaluar expresiones matemáticas, utiliza el siguiente orden:

1. Primero, evalúa las expresiones dentro de símbolos de agrupación, como paréntesis ( ), corchetes [ ], llaves { } y valor absoluto | |. Si la expresión contiene símbolos de agrupación anidados (una pareja de símbolos de agrupación dentro de otro par), primero evalúa las expresiones dentro de los símbolos de agrupación más internos.
2. Después, evalúa todos los términos que tengan exponentes y raíces.
3. A continuación, evalúa todas las multiplicaciones y divisiones, en el orden en el que aparezcan de izquierda a derecha.
4. Por último, evalúa todas las sumas y restas en el orden en el que aparezcan de izquierda a derecha.

Consejo útil

Hay que tener en cuenta que una barra de fracción actúa como un símbolo de agrupación. Por lo tanto, al evaluar expresiones que tienen una barra de fracción, trabajamos de forma separada arriba y debajo de la barra de fracción.

Con frecuencia, los corchetes se usan en lugar de los paréntesis para evitar confusión. Por ejemplo, la expresión $7((5\cdot 3)+6)$ es más fácil de seguir cuando se escribe $7[(5\cdot 3)+6]$. Recuerda evaluar primero el grupo más interno.

EJEMPLO 7 Evalúa $6+3\cdot 5^2-17$.

Solución Usaremos el sombreado para indicar el orden en el que se evalúan las operaciones. Como no hay paréntesis, primero evaluaremos 5^2.

$$6+3\cdot 5^2-17=6+3\cdot 25-17$$

Después, realizamos las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.

$$=6+75-17$$

Por último, realizamos las sumas y restas de izquierda a derecha.

$$=81-17$$
$$=64$$

Resuelve ahora el ejercicio 67

EJEMPLO 8 Evalúa $10 + \{6 - [4(5-2)]\}^2$.

Solución Primero evalúa la expresión dentro de los paréntesis más internos. Después continúa de acuerdo con el orden de las operaciones.

$$\begin{aligned} 10 + \{6 - [4(5-2)]\}^2 &= 10 + \{6 - [4(3)]\}^2 \\ &= 10 + [6 - (12)]^2 \\ &= 10 + (-6)^2 \\ &= 10 + 36 \\ &= 46 \end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 77

EJEMPLO 9 Evalúa $\dfrac{6 \div \frac{1}{2} + 5|7-3|}{1 + (3-5) \div 2}$.

Solución Recuerda que la barra de fracción actúa como un símbolo de agrupación. Trabaja de manera separada arriba y abajo de la barra de fracción.

$$\begin{aligned} \frac{6 \div \frac{1}{2} + 5|7-3|}{1 + (3-5) \div 2} &= \frac{6 \div \frac{1}{2} + 5|4|}{1 + (-2) \div 2} \\ &= \frac{12 + 20}{1 + (-1)} \\ &= \frac{32}{0} \end{aligned}$$

Como la división entre 0 no es posible, la expresión original **está indefinida**.

Resuelve ahora el ejercicio 83

Comprendiendo el álgebra

Al *evaluar* las expresiones matemáticas, asegúrate de que la *variable* se *sustituya* por un *número* específico.

4 Evaluar expresiones que contienen variables

Para evaluar expresiones matemáticas, usamos el orden de las operaciones que se acaba de dar. El ejemplo 10 es un problema de aplicación en el cual se usa el orden de las operaciones.

EJEMPLO 10 **Suplementos nutricionales** Las ventas aproximadas de suplementos entre 1997 y 2009, en miles de millones de dólares, pueden estimarse por medio de la siguiente ecuación

$$\text{ventas} = -0.063x^2 + 1.62x + 9.5$$

donde x representa los años desde 1997. En la expresión del lado derecho del signo igual, sustituye x por 1 para estimar las ventas de suplementos en 1998, x por 2 para estimar las ventas de suplementos en 1999, y así sucesivamente.

Estima las ventas de suplementos durante los años **a)** 1998 y **b)** 2009.

© Elena Elisseva/Glowimages

Solución

a) Sustituiremos x por 1 para estimar las ventas de suplementos en 1998.

$$\begin{aligned} \text{ventas} &= -0.063x^2 + 1.62x + 9.5 \\ &= -0.063(1)^2 + 1.62(1) + 9.5 \\ &= -0.063 + 1.62 + 9.5 \\ &= 11.057 \end{aligned}$$

Por lo tanto, en 1998 las ventas de los suplementos en Estados Unidos fueron alrededor de $11,057 miles de millones.

b) El año 2009 corresponde al número 12. Podemos obtener el 12 restando 1997 de 2009. Por lo tanto, para estimar las ventas de suplementos en 2009, sustituimos x por 12 en la ecuación.

$$\begin{aligned} \text{Ventas} &= -0.063x^2 + 1.62x + 9.5 \\ &= -0.063(12)^2 + 1.62(12) + 9.5 \\ &= -0.063(144) + 19.44 + 9.5 \\ &= 19.868 \end{aligned}$$

La respuesta es razonables: con base en la información dada se esperaba ver un aumento. En 2009, las ventas de suplementos en Estados Unidos fueron de alrededor de $19.868 miles de millones.

Resuelve ahora el ejercicio 121

EJEMPLO 11

Evalúa $-x^3 - xy - y^2$ cuando $x = -2$ y $y = 5$.

Solución Sustituye -2 por cada x y 5 por cada y en la expresión. Después evalúa.

$$\begin{aligned} -x^3 - xy - y^2 &= -(-2)3 - (-2)(5) - (5)2 \\ &= -8(-8) - (10) - 25 \\ &= 8 + 10 - 25 \\ &= -7 \end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 101

EJEMPLO 12

a) Encuentra una expresión algebraica para el siguiente enunciado. Suma 3 a la variable y. Multiplica esta suma por 8. Después resta 20 de este producto. Al final, divide esta diferencia entre 5.

b) Evalúa la expresión algebraica del inciso **a)** cuando $y = 2$.

Solución

a) Traduce los enunciados a expresiones algebraicas como se muestra a continuación.

Enunciado	Expresión algebraica
Suma 3 a la variable y.	$y + 3$
Multiplica esta suma por 8.	$8(y + 3)$
Después resta 20 de este producto.	$8(y + 3) - 20$
Al final, divide esta diferencia entre 5.	$\dfrac{8\ y + 3\ \ - 20}{5}$

b) Para evaluar esta expresión algebraica cuando $y = 2$, sustituye y por 2.

$$\frac{8(y + 3) - 20}{5} \qquad \text{Expresión algebraica.}$$

$$= \frac{8(2 + 3) - 20}{5} \qquad \text{Sustituye y por 2.}$$

$$= \frac{8(5) - 20}{5} \qquad \text{Suma } 2 + 3 = 5.$$

$$= \frac{40 - 20}{5} \qquad \text{Multiplica } 8 \cdot 5 = 40.$$

$$= \frac{20}{5} \qquad \text{Resta } 40 - 20 = 20.$$

$$= 4 \qquad \text{Divide } \frac{20}{5} = 4.$$

Resuelve ahora el ejercicio 109

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1.4

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) indicados en la siguiente lista.

base	índice	positivo	negativo	factores	radicando
exponente	exponencial	signo radical	3	6	número real
16	64	9	18		

1. Los números o expresiones en una multiplicación se llaman ______.

2. La cantidad 7^2 es una expresión ______.

3. En la expresión 4^3, al 3 se le conoce como ______.

4. En la expresión 4^3, al 4 se le conoce como ______.

5. El resultado de 4^3 es ______.

6. En la expresión $\sqrt{81}$, el $\sqrt{\ }$ se conoce como ______.

7. En la expresión $\sqrt{81}$, el 81 es llamado ______.

8. La raíz cuadrada principal o positiva de 81 es ______.

9. En la expresión $\sqrt[4]{81}$, el 4 es llamado ______.

10. El resultado de $\sqrt[4]{81}$ es ______.

11. El resultado de $\sqrt[4]{-81}$ no es número ______.

12. La raíz cúbica de un valor negativo es un número ______.

Practica tus habilidades

Evalúa cada expresión sin usar una calculadora.

13. 3^2 **14.** $(-4)^3$ **15.** -3^2 **16.** -4^3

17. $(-5)^2$ **18.** $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ **19.** $-\left(\frac{3}{5}\right)^4$ **20.** $(0.3)^2$

21. $\sqrt{49}$ **22.** $\sqrt{169}$ **23.** $-\sqrt{36}$ **24.** $-\sqrt{0.64}$

25. $\sqrt[3]{-27}$ **26.** $\sqrt[3]{\frac{-216}{343}}$ **27.** $\sqrt[3]{0.001}$ **28.** $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$

Usa una calculadora para evaluar cada expresión. Redondea las respuestas hasta la milésima cifra.

29. $(0.35)^4$ **30.** $-(1.7)^{3.9}$ **31.** $\left(-\frac{13}{12}\right)^8$ **32.** $\left(\frac{5}{7}\right)^7$

33. $(6.721)^{5.9}$ **34.** $(5.382)^{6.9}$ **35.** $\sqrt[3]{26}$ **36.** $-\sqrt[4]{72.8}$

37. $\sqrt[5]{362.65}$ **38.** $-\sqrt{\frac{8}{9}}$ **39.** $-\sqrt[3]{\frac{20}{53}}$ **40.** $\sqrt[3]{-\frac{15}{19}}$

*Evalúa **a)** x^2 y **b)** $-x^2$ para cada valor dado de x.*

41. 3 **42.** 7 **43.** -10 **44.** -2

45. -1 **46.** -6 **47.** $\frac{1}{3}$ **48.** $-\frac{4}{5}$

*Evalúa **a)** x^3 y **b)** $-x^3$ para cada valor dado de x.*

49. 3 **50.** -3 **51.** -5 **52.** 5

53. -2 **54.** 4 **55.** $\frac{2}{5}$ **56.** $-\frac{3}{4}$

Evalúa cada expresión.

57. $4^2 + 2^3 - 2^2 - 3^3$ **58.** $(-1)^2 + (-1)^3 - 1^4 + 1^5$ **59.** $-2^2 - 2^3 + 1^{10} + (-2)^3$

60. $(-3)^3 - 2^2 - (-2)^2 + (9 - 9)^2$ **61.** $(1.5)^2 - (3.9)^2 + (-2.1)^3$ **62.** $(3.7)^2 - (0.8)^2 + (2.4)^3$

63. $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3$ **64.** $\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} - \left(-\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3$

Evalúa cada expresión.

65. $3 + 5 \cdot 8$ **66.** $(2 - 6) \div 4 + 3$ **67.** $18 - 7 \div 7 + 8$

68. $4 \cdot 3 \div 6 - 2^3$ **69.** $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} - 2 + 5 \div 10$ **70.** $3 \cdot 6 \div 18 + \frac{3}{5}$

71. $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \div \frac{3}{4} - \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$ **72.** $3[4 + (-2)(8)] + 3^3$ **73.** $10 \div [(3 + 2^2) - (2^4 - 8)]$

74. $[3 - (4 - 2^3)^2]^2$ **75.** $5\left(\sqrt[3]{27} + \sqrt[5]{32}\right) \div \frac{\sqrt{100}}{4}$ **76.** $\{5 + [4^2 - 3(2 - 7)] - 5\}^2$

77. $\{[(12 - 15) - 3] - 2\}^2$ **78.** $4\{6 - [(25 \div 5) - 2]\}^3$ **79.** $3[5(16 - 6) \div (25 \div 5)^2]^2$

80. $\dfrac{15 \div 3 + 7 \cdot 2}{\sqrt{25} \div 5 + 8 \div 2}$

81. $\dfrac{4 - (2 + 3)^2 - 6}{4(3 - 2) - 3^2}$

82. $-2\left|-3 - \dfrac{1}{3}\right| + 5$

83. $\dfrac{8 + 4 \div 2 \cdot 3 + 9}{5^2 - 3^2 \cdot 2 - 7}$

84. $\dfrac{6(-3) + 4 \cdot 7 - 4^2}{-6 + \sqrt{4}(2^2 - 1)}$

85. $\dfrac{8 - [4 - (3 - 1)^2]}{5 - (-3)^2 + 4 \div 2}$

86. $12 - 15 \div |5| - (|4| - 2)^2$

87. $-2|-3| - \sqrt{36} \div |2| + 3^2$

88. $\dfrac{5 - |-15| \div |3|}{2(4 - |5|) + 9}$

89. $\dfrac{6 - |-4| - 4|8 - 5|}{5 - 6 \cdot 2 \div |-6|}$

90. $-\dfrac{1}{2}[8 - |-6| \div 3 - 4]^2$

91. $\dfrac{2}{5}\left[\sqrt[3]{27} - |-9| + 4 - 3^2\right]^2$

92. $\dfrac{3(12 - 9)^2}{-3^2} - \dfrac{2(3^2 - 4^2)}{4 - (-2)}$

93. $\dfrac{24 - 5 - 4^2}{|-8| + 4 - 2(3)} + \dfrac{4 - (-3)^2 + |4|}{3^2 - 4 \cdot 3 + |-7|}$

94. $\dfrac{-2 - 8 \div 4^2 \cdot |8|}{|8| - \sqrt{64}} + \dfrac{[(8 - 3)^2 - 7]^2}{2^2 + 16}$

Evalúa cada expresión para cada valor o valores dados.

95. $5x^2 + 7x$ cuando $x = 2$

96. $5x^2 - 2x + 17$ cuando $x = 3$

97. $-9x^2 + 3x - 29$ cuando $x = -1$

98. $3(x - 2)^2$ cuando $x = \dfrac{1}{4}$

99. $16(x + 5)^3 - 25(x + 5)$ cuando $x = -4$

100. $-7x + 3y^2$ cuando $x = 2, y = 4$

101. $6x^2 + 3y^3 - 25$ cuando $x = 1, y = -3$

102. $4x^2 - 3y - 10$ cuando $x = 4, y = -2$

103. $3(a + b)^2 + 4(a + b) - 6$ cuando $a = 4, b = -1$

104. $-9 - \{2x - [5x - (2x + 1)]\}$ cuando $x = 3$

105. $-9 - \{x - [2x - (x - 3)]\}$ cuando $x = 4$

106. $\dfrac{(x - 3)^2}{9} + \dfrac{(y + 5)^2}{16}$ cuando $x = 4, y = 3$

107. $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ cuando $a = 6, b = -11, c = 3$

108. $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ cuando $a = 2, b = 1, c = -10$

Resolución de problemas

En los ejercicios 109-114, escribe una expresión algebraica para cada problema. Evalúa la expresión para cada valor dado de la variable o variables.

109. Multiplica la variable y por 7. A este producto réstale 14. Ahora divide esta diferencia entre 2. Encuentra el resultado de esta expresión cuando $y = 6$.

110. Resta 4 de z. Multiplica esta diferencia por 5. Ahora eleva este producto al cuadrado. Encuentra el valor de esta expresión cuando $z = 10$.

111. Suma 6 al producto de 3 y x. Multiplica dicha expresión por 6. Resta 9 a este producto. Encuentra el valor de la expresión cuando $x = 3$.

112. Multiplica por 2 la suma de x y y. Restarle 5 a este producto. Eleva esta expresión al cuadrado. Encuentra el valor de esta expresión cuando $x = 2$ y $y = -3$.

113. Suma 3 a x. Esta suma divídela entre el doble de y. Este cociente elévalo al cuadrado. Por último, a esta expresión réstale 3. Encuentra el valor de esta expresión cuando $x = 5$ y $y = 2$.

114. Resta 4 a x. Divide esta suma entre $10y$. Eleva el cociente al cubo. Al final, súmale 19. Encontrar el valor de esta expresión cuando $x = 64$ y $y = 3$.

Usa una calculadora para responder los ejercicios 115-128.

115. Paseo en bicicleta Frank Kelso puede viajar en bicicleta a una velocidad de 8.2 millas por hora en el *C & O Tow Path* en Maryland. La distancia recorrida, en millas, después de pasear en bicicleta x horas, se determina por

$$\text{distancia} = 8.2x$$

¿Qué distancia recorrió Frank en

a) 3 horas?

b) 7 horas?

© Allen R. Angel

116. Salario El 2 de enero de 2010, Mary Ferguson empezó un nuevo trabajo con un salario anual de $32,550. Su jefe aceptó darle un aumento de $1200 al año por los siguientes 20 años. Su salario, en dólares, está determinado por

$$\text{salario} = 32{,}550 + 1200x$$

donde x es el número de años desde el 2010. Sustituye x por 1 para determinar su salario en el 2011, x por 2 para determinar su salario en el 2012 y así sucesivamente. Encuentra el salario de Mary en el

a) 2014.

b) 2024.

117. Lanzamiento de bola Cuong Chapman lanzó una pelota de beisbol hacia arriba desde la ventana de un dormitorio. La altura de la pelota por encima del suelo, en pies, se determina por

$$\text{altura} = -16x^2 + 72x + 22$$

donde x es el número de segundos después de que la pelota de beisbol es lanzada desde la ventana. Determina la altura de la bola

a) 2 segundos

b) 4 segundos

después de que es lanzada por la ventana.

118. Velocidad Ve el ejercicio 117. Después de que la bola es lanzada por la ventana, su velocidad (o rapidez), en pies por segundo, se determina por

$$\text{velocidad} = -32x + 72$$

Encuentra la velocidad de la bola

a) 2 segundos
b) 4 segundos

después de que la bola es lanzada por la ventana.

119. Gasto de dinero El monto, en dólares, gastado en regalos de navidad por una persona puede estimarse por

$$\text{gasto} = 26.865x + 488.725$$

donde x es el número de años desde 2002. Sustituye x por 1 para determinar el monto que se gastó en 2003, x por 2 para determinar el monto que se gastó en 2004 y así sucesivamente. Suponiendo que esta tendencia continúe, determina la cantidad que cada consumidor gastará en regalos en

a) 2015.
b) 2020.

120. Longevas Las personas que viven 100 años o más son conocidas como longevas. El número aproximado de personas longevas que viven en Estados Unidos entre los años 1995 y 2050, en miles, se puede estimar por

$$\text{número de personas longevas} = 0.30x^2 - 3.69x + 92.04$$

donde x representa los años desde 1995. Sustituye x por 1 para encontrar el número de personas longevas en 1996, x por 2 para encontrar las personas longevas de 1997 y así sucesivamente.

Fuente: Oficina de censo de Estados Unidos

a) Estima el número de longevos que vivían en Estados Unidos en 2005.
b) Estima el número de longevos que vivirán en 2050 en Estados Unidos.

121. Transporte público Entre 1992 y 2008, el número aproximado de viajes en transporte público por año en Estados Unidos, en billones, se puede estimar usando

$$\text{número de viajes} = 0.065x^2 - 0.39x + 8.47$$

donde x representa los años desde 1992. Sustituye x por 1 para determinar el número de viajes realizados en 1993, x por 2 para determinar los viajes en 1994 y así sucesivamente.

Fuente: Asociación Americana del Trasporte Público

a) Estima el número de viajes realizados en transporte público en el año 2000.
b) Suponiendo que la tendencia continuó, estima el número de viajes que se realizaron en 2010.

© Allen R. Angel

El Tranvía es una forma de transporte público en San Francisco.

122. Inflación La inflación estuvo en descenso durante los años 2000 a 2002. En 2003, fue en aumento. La tasa de inflación, en porcentaje, para los años pares desde el 2000, se puede estimar por

$$\text{inflación} = 0.35x^2 - 1.09x + 3.07$$

donde x es el número de un periodo de 2 años desde 2000. Sustituye x por 1 para encontrar la tasa de inflación en 2002, x por 2 para 2004 y así sucesivamente. Suponiendo que esta tendencia continuó, encuentra la tasa de inflación en

Fuente: Departamento de tesorería

a) 2006.
b) 2010.

123. Subastas Las ventas, en billones de dólares, de las subastas se pueden estimar por

$$\text{ventas} = 13.5x + 189.83$$

donde x es el número de años desde 2002. Sustituye x por 1 para determinar las ventas de las subastas en el 2003, x por 2 para 2004 y así sucesivamente. Suponiendo que la tendencia continúa, determina las ventas de las subastas en

Fuente: Asociación Nacional de Subastadores

a) 2010.
b) 2018.

124. Dióxido de carbono La producción total (medida en millones de toneladas métricas) de dióxido de carbono (CO_2) de todos los países, excepto Estados Unidos, Canadá y Europa Occidental, se puede aproximar por

$$CO_2 = 0.073x^2 - 0.39x + 0.55$$

donde x representa el número de periodos de 10 años desde 1905. Sustituye x por 1 para calcular la producción de CO_2 en 1915, x por 2 para 1925, x por 3 para 1935 y así sucesivamente.

a) Determina la cantidad aproximada de CO_2 producida por todos los países excepto Estados Unidos, Canadá y Europa Occidental en 1945.
b) Suponiendo que esta tendencia continúa, determina la cantidad aproximada de CO_2 producida por todos los países excepto Estados Unidos, Canadá y Europa Occidental en 2015.

125. Niños cuyos padres trabajan El número de *niños que se cuidan a sí mismos* mientras sus padres trabajan aumenta con la edad. El porcentaje de niños de diferentes edades, de los 5 a los 14 años de edad, que se cuidan a sí mismos se puede aproximar por

$$\text{porcentaje de niños} = 0.23x^2 - 1.98x + 4.42$$

donde x representa la edad de los niños. Sustituye el x por 5 para determinar el porcentaje de niños de 5 años que se cuidan a sí mismos, x por 6 para encontrar el porcentaje de niños de 6 años y así sucesivamente.

a) Determina el porcentaje de niños de 10 años de edad que se cuidan a sí mismos.
b) Determina el porcentaje de niños de 14 años de edad que se cuidan a sí mismos.

126. Lectores de periódico El número de norteamericanos que leen el periódico está disminuyendo constantemente. El porcentaje de lectores que leen el periódico se puede aproximar por

$$\text{porcentaje} = -6.2x + 82.2$$

donde x representa el número de periodos de 10 años desde 1960. Sustituye x por 1 para determinar el porcentaje en 1970, x por 2 para 1980 y así sucesivamente.

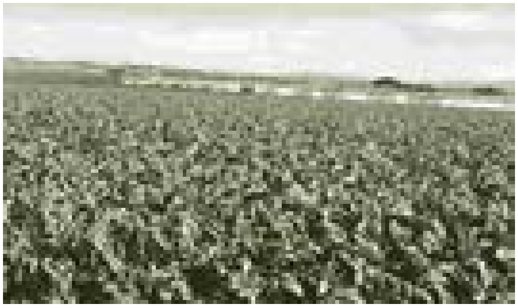
a) Determina el porcentaje de adultos de Estados Unidos que leían el periódico en 1970.

b) Suponiendo que la tendencia continuó, determina el porcentaje de adultos de Estados Unidos que leían el periódico en 2010.

127. Comida orgánica El aumento del miedo a usar pesticidas y cosechas alteradas genéticamente ha llevado a mucha gente a comprar productos cultivados de manera orgánica. Desde 1990 hasta 2010, las ventas, en billones de dólares, de productos cultivados de forma orgánica se puede determinar por

$$\text{ventas} = 0.062x^2 + 0.020x + 1.18$$

donde x representa los años desde 1990. Sustituye x por 1 para determinar las ventas de productos cultivados de manera orgánica en 1970, x por 2 para encontrar las ventas en 1980 y así sucesivamente.



© Allen R. Angel

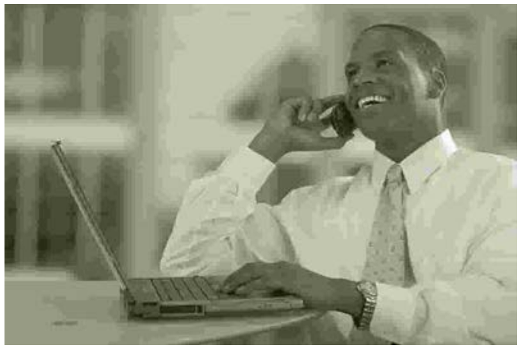
128. Teléfonos celulares El número de usuarios de teléfonos celulares, en millones, se pueden aproximar por

$$\text{número de usuarios} = 0.42x^2 - 3.44x + 5.80$$

donde x representa los años desde 1982. Sustituye x por 1 para determinar el número de usuarios en 1983, x por 2 para los usuarios en 1984 y así sucesivamente.

a) Determina el número de personas que usaban celulares en 1989.

b) Determina el número de personas que usaban celulares en 2009.



© Shutterstock

Ejercicios de conceptos y escritura

129. ¿Cuál es el significado de a^n?

130. ¿Qué significa si $\sqrt[n]{a} = b$?

131. ¿Cuál es la principal raíz cuadrada de un número positivo?

132. Explica por qué $\sqrt{-4}$ no puede ser un número real.

133. Explica por qué una raíz impar de un número negativo será negativa.

134. Explica por qué una raíz impar de un número positivo será positiva.

135. Explica el orden de operaciones que se debe seguir cuando se evalúa una expresión matemática. Ver la página 32.

136. a) Explica paso a paso cómo evaluarías

$$\frac{5 - 18 \div 3^2}{4 - 3 \cdot 2}$$

b) Evalúa la expresión.

137. a) Explica paso a paso cómo evaluarías

$16 \div 22 + 6 \cdot 4 - 24 \div 6$.

b) Evalúa la expresión.

138. a) Explica paso a paso cómo evaluarías

$\{5 - [4 - (3 - 8)]\}^2$.

b) Evalúa la expresión.

Ejercicios de repaso acumulados

[1.2] **139.** $A = \{a, b, c, d, f\}$, $B = \{b, c, f, g, h\}$. Determina

a) $A \cap B$,

b) $A \cup B$.

[1.3] *En los ejercicios 140-142, la letra a representa un número real. ¿Para qué valores de a será verdadera cada proposición?*

140. $|a| = |-a|$

141. $|a| = a$

142. $|a| = 8$

143. Ordena de menor a mayor: $-|6|, -4, |-5|, -|-2|, 0$.

144. Nombra la siguiente propiedad:

$(7 + 3) + 9 = 7 + (3 + 9)$.

Prueba de mitad de capítulo: 1.1-1.4

Para evaluar tus conocimientos adquiridos de los temas del capítulo cubiertos hasta el momento, resuelve esta pequeña prueba. Las respuestas, y la sección donde se trató el tema por primera vez, se encuentran al final del libro. Repasa el tema de las preguntas que no respondiste correctamente.

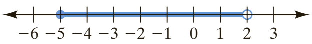
1. ¿Dónde está la oficina de tu profesor? ¿Cuál es el horario de oficina de tu profesor?

2. Dados $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ y $B = \{-1, 1, 3, 5\}$, determina $A \cup B$ y $A \cap B$.

3. Describe el conjunto $D = \{0, 5, 10, 15, \ldots\}$.

4. Ilustra el conjunto $\{x \mid x \geq 3\}$ en una recta numérica.

5. Inserta $<$ o $>$ en el área sombreada de $\frac{3}{5} \square \frac{4}{9}$ para que la proposición sea verdadera.

6. Expresa  en notación constructiva.

7. ¿Es W un subconjunto de N? Explica.

8. Ordena los valores de menor a mayor: $-15, |-17|, |-6|, 7$.

Evalúa cada expresión.

9. $7 - 2.3 - (-4.5)$

10. $\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}$

11. $(5)(-2)(3.2)(-8)$

12. $\left|-\frac{8}{13}\right| \div (-2)$

13. Evalúa $(7 - |-2|) - (-8 + |16|)$.

14. Nombra la propiedad ilustrada por $5(x + y) = 5x + 5y$.

15. Simplifica $\sqrt{0.81}$.

16. Evalúa

a) -11^2

b) (-11^2)

17. **a)** Escribe el orden de las operaciones.

b) Evalúa $4 - 2 \cdot 3^2$ y explica cómo determinaste tu respuesta.

Evalúa cada expresión.

18. $5 \cdot 4 \div 10 + 2^5 - 11$

19. $\frac{1}{4}\{[(12 \div 4)^2 - 7]^3 \div 2\}^2$

20. $\dfrac{\sqrt{16} + \left(\sqrt{49} - 6\right)^4}{\sqrt[3]{-27} - (4 - 3^2)}$

1.5 Exponentes

1 Uso de la regla del producto para exponentes.
2 Uso de la regla del cociente para exponentes.
3 Uso de la regla del exponente negativo.
4 Uso de la regla del exponente cero.
5 Uso de la regla para elevar una potencia a otra potencia.
6 Uso de la regla para elevar un producto a una potencia.
7 Uso de la regla para elevar un cociente a una potencia.

En esta sección analizaremos las reglas de los exponentes.

1 Uso de la regla del producto para exponentes

Considera la multiplicación $x^3 \cdot x^5$. Podemos simplificar esta expresión como sigue:

$$x^3 \cdot x^5 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x) = x^8$$

Este problema puede simplificarse usando la **regla del producto para exponentes**.*

Regla del producto para exponentes

Si m y n son números naturales y a es cualquier número real, entonces

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Para multiplicar expresiones exponenciales, mantén la base común y suma los exponentes.

$$x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$$

Comprendiendo el álgebra

Cuando *multiplicamos* expresiones con la misma base, mantenemos la base y *sumamos los exponentes*:

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^8 = 256$$

EJEMPLO 1 Simplifica. **a)** $2^3 \cdot 2^4$ **b)** $d^2 \cdot d^5$ **c)** $h \cdot h^9$

Solución

a) $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$

b) $d^2 \cdot d^5 = d^{2+5} = d^7$

c) $h \cdot h^9 = h^1 \cdot h^9 = h^{1+9} = h^{10}$

Resuelve ahora el ejercicio 13

*Las reglas que se dan en esta sección también se aplican para exponentes racionales o fraccionarios.

2 Uso de la regla del cociente para exponentes

Considera la división $x^7 \div x^4$. Podemos simplificar la expresión como sigue:

$$\frac{x^7}{x^4} = \frac{\cancel{x}^{1} \cdot \cancel{x}^{1} \cdot \cancel{x}^{1} \cdot \cancel{x}^{1} \cdot x \cdot x \cdot x}{\cancel{x}_{1} \cdot \cancel{x}_{1} \cdot \cancel{x}_{1} \cdot \cancel{x}_{1}} = x \cdot x \cdot x = x^3$$

Este problema podría ser simplificado por medio de la **regla del cociente para exponentes**.

Comprendiendo el álgebra

Cuando *dividimos* expresiones con la misma base, mantenemos la base y *restamos los exponentes*:

$$\frac{5^6}{5^4} = 5^{6-4} = 5^2 \text{ (o 25)}$$

Regla del cociente para exponentes

Si a es cualquier número real diferente de cero y m y n son enteros diferentes de cero, entonces

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Para dividir expresiones en forma exponencial, mantén la base y resta los exponentes.

$$\frac{x^7}{x^4} = x^{7-4} = x^3$$

EJEMPLO 2 Simplifica. **a)** $\frac{6^4}{6^2}$ **b)** $\frac{x^7}{x^3}$ **c)** $\frac{y^2}{y^5}$

Solución **a)** $\frac{6^4}{6^2} = 6^{4-2} = 6^2 = 36$ **b)** $\frac{x^7}{x^3} = x^{7-3} = x^4$ **c)** $\frac{y^2}{y^5} = y^{2-5} = y^{-3}$

Resuelve ahora el ejercicio 15

3 Uso de la regla del exponente negativo

Observa que en el ejemplo 2 inciso **c)** la respuesta contiene un exponente negativo. Realiza el inciso **c)** nuevamente cancelando los factores comunes.

$$\frac{y^2}{y^5} = \frac{\cancel{y}^{1} \cdot \cancel{y}^{1}}{\cancel{y}_{1} \cdot \cancel{y}_{1} \cdot y \cdot y \cdot y} = \frac{1}{y^3}$$

Al reducir factores comunes y usar el resultado del ejemplo 2 inciso **c)**, podemos razonar que $y^{-3} = \frac{1}{y^3}$. Este es un ejemplo de la regla del exponente negativo.

Comprendiendo el álgebra

Cuando simplificamos expresiones con una base elevada a un *exponente negativo*, la respuesta es una fracción cuyo *numerador* es 1 y el *denominador* es la base elevada a un *exponente positivo*:

$$4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

Regla del exponente negativo

Para cualquier número real a diferente de cero y cualquier número entero positivo m, tenemos

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Una expresión elevada a un exponente negativo es igual a 1 dividido entre la expresión con el signo del exponente cambiado.

EJEMPLO 3 Escribe cada expresión sin exponentes negativos.

a) 7^{-2} **b)** $8a^{-6}$ **c)** $\frac{1}{c^{-5}}$

Solución

a) $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$ **b)** $8a^{-6} = 8 \cdot \frac{1}{a^6} = \frac{8}{a^6}$

c) $\frac{1}{c^{-5}} = 1 \div c^{-5} = 1 \div \frac{1}{c^5} = \frac{1}{1} \cdot \frac{c^5}{1} = c^5$

Resuelve ahora el ejercicio 37

Consejo útil

En el ejemplo 3 inciso **c)** mostramos que $\frac{1}{c^{-5}} = c^5$. En general, para cualquier número real a diferente de cero y cualquier entero positivo m, $\frac{1}{a^{-m}} = a^m$. Cuando un factor del numerador o del denominador está elevado a cualquier potencia, el factor puede moverse al otro lado de la fracción, siempre y cuando el signo del exponente esté cambiado. Así, por ejemplo,

$$\frac{2a^{-3}}{b^2} = \frac{2}{a^3b^2} \qquad \frac{a^{-2}b^4}{c^{-3}} = \frac{b^4c^3}{a^2}$$

NOTA: al usar este procedimiento, el signo de la base no cambia, solo cambia el signo del exponente. Por ejemplo,

$$-c^{-3} = -(c^{-3}) = -\frac{1}{c^3}$$

Por lo general, no dejamos expresiones exponenciales con exponentes negativos. *Cuando decimos que una expresión exponencial se simplificará, queremos decir que la respuesta debe escribirse sin exponentes negativos o cero.*

EJEMPLO 4 Simplifica. **a)** $\frac{5xz^2}{y^{-4}}$ **b)** $4^{-2}x^{-1}y^2$ **c)** $-3^3x^2y^{-6}$

Solución

a) $\frac{5xz^2}{y^{-4}} = 5xy^4z^2$

b) $4^{-2}x^{-1}y^2 = \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{x^1} \cdot y^2 = \frac{y^2}{16x}$

c) $-3^3x^2y^{-6} = -(3^3)x^2 \cdot \frac{1}{y^6} = -\frac{27x^2}{y^6}$

Resuelve ahora el ejercicio 41

Observa que las expresiones en el ejemplo 4 no incluyen sumas o restas. La presencia de un signo más o menos lo convierte en un problema muy diferente, como lo veremos a continuación.

EJEMPLO 5 Simplifica. **a)** $4^{-1} + 6^{-1}$ **b)** $2 \cdot 3^{-2} + 7 \cdot 6^{-2}$

Solución

a)
$$\begin{aligned} 4^{-1} + 6^{-1} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} && \text{Regla del exponente negativo} \\ &= \frac{3}{12} + \frac{2}{12} && \text{Reescribe con el mínimo común denominador, 12.} \\ &= \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2 \cdot 3^{-2} + 7 \cdot 6^{-2} &= 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 7 \cdot \frac{1}{6^2} && \text{Regla del exponente negativo} \\ &= \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{9} + \frac{7}{1} \cdot \frac{1}{36} \\ &= \frac{2}{9} + \frac{7}{36} \\ &= \frac{8}{36} + \frac{7}{36} && \text{Reescribe con el mínimo común denominador, 36.} \\ &= \frac{8+7}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 75

4 Uso de la regla del exponente cero

La siguiente regla que estudiaremos es la **regla del exponente cero**. Cualquier número diferente de cero dividido entre sí mismo es 1. Por lo tanto,

$$\frac{x^5}{x^5} = 1.$$

Por medio de la regla del cociente para los exponentes,

$$\frac{x^5}{x^5} = x^{5-5} = x^0.$$

Como $x^0 = \frac{x^5}{x^5}$ y $\frac{x^5}{x^5} = 1$, entonces

$$x^0 = 1.$$

Regla del exponente cero

Si a es cualquier número real diferente de cero, entonces

$$a^0 = 1$$

La regla del exponente cero ilustra que *cualquier número real diferente de cero con un exponente 0 es igual a 1*. Debemos especificar que $a \neq 0$, ya que 0^0 está indefinido.

EJEMPLO 6 Simplifica (asume que la base no es 0).

a) 162^0 **b)** $7p^0$ **c)** $-y^0$ **d)** $-(8x + 9y)^0$

Solución

a) $162^0 = 1$

b) $7p^0 = 7 \cdot p^0 = 7 \cdot 1 = 7$

c) $-y^0 = -1 \cdot y^0 = -1 \cdot 1 = -1$

d) $-(8x + 9y)^0 = -1 \cdot (8x + 9y)^0 = -1 \cdot 1 = -1$

Resuelve ahora el ejercicio 33

5 Uso de la regla para elevar una potencia a otra potencia

Considera la expresión $(x^3)^2$. Podemos simplificar esa expresión como sigue:

$$(x^3)^2 = x^3 \cdot x^3 = x^{3+3} = x^6$$

Este problema también podría simplificarse por medio de la regla para **elevar una potencia a otra potencia** (también conocida como **regla de la potencia**).

Comprendiendo el álgebra

Cuando elevamos una *potencia* a otra *potencia*, mantenemos la base y *multiplicamos* los exponentes:

$$(a^4)^3 = a^{4\cdot 3} = a^{12}$$

Elevar una potencia a otra potencia (regla de la potencia)

Si a es cualquier número real y m y n son enteros, entonces

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Para elevar una expresión exponencial a una potencia, mantén la base y multiplica los exponentes.

$$(x^3)^2 = x^{3\cdot 2} = x^6$$

EJEMPLO 7 Simplifica (asume que la base no es 0).

a) $(2^2)^3$ **b)** $(z^{-5})^4$ **c)** $(2^{-3})^2$

Solución

a) $(2^2)^3 = 2^{2\cdot 3} = 2^6 = 64$

b) $(z^{-5})^4 = z^{-5\cdot 4} = z^{-20} = \frac{1}{z^{20}}$

c) $(2^{-3})^2 = 2^{-3\cdot 2} = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

Resuelve ahora el ejercicio 81

Consejo útil

Con frecuencia los estudiantes confunden la *regla del producto*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

con la *regla de la potencia*

$$(a^m)^n = a^{-m \cdot n}$$

Por ejemplo, $(x^3)^2 = x^6$, no x^5, y $(y^2)^5 = y^{10}$, no y^7.

6 Uso de la regla para elevar un producto a una potencia

Considera la expresión $(xy)^2$. Podemos simplificar esta expresión como sigue:

$$(xy)^2 = (xy)(xy) = x \cdot x \cdot y \cdot y = x^2y^2$$

Esta expresión también podría simplificarse por medio de la regla para **elevar un producto a una potencia**.

Comprendiendo el álgebra

Cuando elevamos un producto a una potencia, elevamos cada factor del producto a la potencia:

$$\begin{aligned}(3 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 5^2 &= 9 \cdot 25 \\ &= 225\end{aligned}$$

Elevar un producto a una potencia

Si a y b son números reales y m es entero, entonces

$$(ab)^m = a^mb^m$$

Para elevar un producto a una potencia, eleva todos los factores dentro del paréntesis a la potencia fuera de los paréntesis.

EJEMPLO 8 Simplifica. **a)** $(-9x^3)^2$ **b)** $(3x^{-5}y^4)^{-3}$

Solución

a) $(-9x^3)^2 = (-9)^2(x^3)^2 = 81x^6$

b)
$$\begin{aligned}(3x^{-5}y^4)^{-3} &= 3^{-3}(x^{-5})^{-3}(y^4)^{-3} && \text{Regla del producto a una potencia} \\ &= \frac{1}{3^3} \cdot x^{15} \cdot y^{-12} && \text{Regla del exponente negativo, regla de la potencia} \\ &= \frac{1}{27} \cdot x^{15} \cdot \frac{1}{y^{12}} && \text{Regla del exponente negativo} \\ &= \frac{x^{15}}{27y^{12}}\end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 93

7 Uso de la regla para elevar un cociente a una potencia

Considera la expresión $\left(\frac{x}{y}\right)^2$. Podemos simplificar esta expresión como sigue:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x \cdot x}{y \cdot y} = \frac{x^2}{y^2}$$

Esta expresión también podría simplificarse por medio de la regla para **elevar un cociente a una potencia**.

Comprendiendo el álgebra

Cuando elevamos un cociente a un exponente, escribimos el numerador elevado a ese exponente dividido entre el denominador elevado también a ese exponente.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$$

Elevar un cociente a una potencia

Si a y b son números reales y m es entero, entonces

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \qquad b \neq 0$$

Para elevar un cociente a una potencia, eleva al exponente fuera del paréntesis todos los factores que están dentro del paréntesis.

EJEMPLO 9 Simplifica. **a)** $\left(\frac{5}{x^2}\right)^3$ **b)** $\left(\frac{2x^{-2}}{y^3}\right)^{-4}$

Solución

a) $\left(\frac{5}{x^2}\right)^3 = \frac{5^3}{(x^2)^3} = \frac{125}{x^6}$

b)
$$\left(\frac{2x^{-2}}{y^3}\right)^{-4} = \frac{2^{-4}(x^{-2})^{-4}}{(y^3)^{-4}} \quad \text{Elevar un cociente a una potencia}$$
$$= \frac{2^{-4}x^8}{y^{-12}} \quad \text{Regla de la potencia}$$
$$= \frac{x^8y^{12}}{2^4} \quad \text{Regla del exponente negativo}$$
$$= \frac{x^8y^{12}}{16}$$

Resuelve ahora el ejercicio 99

Comprendiendo el álgebra

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n = \frac{y^n}{x^n}$$

Considera $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$. Por medio de la regla para elevar un cociente a una potencia, obtenemos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Al usar este resultado, observamos que cuando tenemos un número racional elevado a un exponente negativo, podemos tomar el recíproco de la base y cambiar el signo del exponente como sigue.

$$\left(\frac{8}{9}\right)^{-3} = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \qquad \left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{-4} = \left(\frac{y^3}{x^2}\right)^4$$

Ahora trabajaremos algunos ejemplos que combinan varias propiedades de los números. Por lo general, siempre que la misma variable aparezca arriba y abajo de la barra de fracción, movemos la variable con el *exponente menor* al lado opuesto de la barra de fracción. Esto tendrá como resultado que el exponente de la variable sea positivo cuando se aplique la regla del producto. Los ejemplos 10 y 11 ilustran este procedimiento.

EJEMPLO 10 Simplifica. **a)** $\left(\frac{15x^2y^4}{5x^2y}\right)^2$ **b)** $\left(\frac{6x^4y^{-2}}{12xy^3z^{-1}}\right)^{-3}$

Solución Las expresiones exponenciales pueden simplificarse en más de una forma. En general, es más fácil simplificar primero la expresión que está dentro de los paréntesis.

a) $\left(\frac{15x^2y^4}{5x^2y}\right)^2 = (3y^3)^2 = 9y^6$

b)
$$\left(\frac{6x^4y^{-2}}{12xy^3z^{-1}}\right)^{-3} = \left(\frac{x^4\cdot x^{-1}z}{2y^3\cdot y^2}\right)^{-3} \quad \text{Mueve } x,\ y^{-2} \text{ y } z^{-1} \text{ al otro lado de la barra de fracción y cambia los signos de los exponentes.}$$
$$= \left(\frac{x^3z}{2y^5}\right)^{-3} \quad \text{Regla del producto}$$
$$= \left(\frac{2y^5}{x^3z}\right)^3 \quad \text{Toma el recíproco de la expresión dentro de los paréntesis y cambia el signo del exponente.}$$
$$= \frac{2^3y^{5\cdot 3}}{x^{3\cdot 3}z^3} \quad \text{Eleva un cociente a una potencia.}$$
$$= \frac{8y^{15}}{x^9z^3}$$

Resuelve ahora el ejercicio 109

EJEMPLO 11 Simplifica $\dfrac{(2p^{-3}q^5)^{-2}}{(p^{-5}q^4)^{-3}}$.

Solución Primero, utiliza la regla de la potencia. Después simplifica.

$$
\begin{aligned}
\frac{(2p^{-3}q^5)^{-2}}{(p^{-5}q^4)^{-3}} &= \frac{2^{-2}p^6q^{-10}}{p^{15}q^{-12}} && \text{Regla de la potencia}\\
&= \frac{q^{-10}\cdot q^{12}}{2^2p^{15}\cdot p^{-6}} && \text{Mueve } 2^{-2},\ p^6 \text{ y } q^{-12} \text{ al otro lado de la barra de fracción y cambia los signos de los exponentes.}\\
&= \frac{q^{-10+12}}{4p^{15-6}} && \text{Regla del producto}\\
&= \frac{q^2}{4p^9}
\end{aligned}
$$

Resuelve ahora el ejercicio 115

Resumen de las reglas de los exponentes

Para todos los números reales a y b y todos los enteros m y n:

Regla del producto	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	
Regla del cociente	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$	$a \neq 0$
Regla del exponente negativo	$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m},$	$a \neq 0$
Regla del exponente cero	$a^0 = 1,$	$a \neq 0$
Elevar una potencia a otra potencia	$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$	
Elevar un producto a una potencia	$(ab)^m = a^m b^m$	
Elevar un cociente a una potencia	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m},$	$b \neq 0$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1.5

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) indicados en la siguiente lista.

aditivo	exponente cero	elevar una potencia	indefinido	elevar un producto
inverso	$\frac{1}{9}$	-9	cociente	$\frac{1}{8}$
recíproco	producto	elevar un cociente	exponente negativo	8

1. La regla $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ es llamada la regla del ________ para exponentes.

2. Para $a \neq 0$, la regla $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ es llamada la regla del ________ para exponentes.

3. Para $a \neq 0$, la regla $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$ es llamada la regla del ________.

4. Para $a \neq 0$, la regla $a^0 = 1$ es llamada la regla del ________.

5. El valor de 0^0 es ________.

6. La regla $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$ es llamada la regla de ________ a otra potencia.

7. La regla $(ab)^m = a^m b^m$ es llamada la regla de ________ a una potencia.

8. La regla $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$ es llamada la regla de ________ a una potencia.

9. Si $x \neq 0$, entonces $\dfrac{1}{x}$ es el ________ de x.

10. Si y es cualquier número real, entonces $-y$ es el ________ aditivo de y.

11. La forma simplificada de 3^{-2} es ________.

12. La forma simplificada de $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$ es ________.

Practica tus habilidades

Evalúa cada expresión.

13. $2^3 \cdot 2^2$ **14.** $3^2 \cdot 3^3$ **15.** $\frac{3^7}{3^5}$ **16.** $\frac{8^7}{8^6}$

17. 9^{-2} **18.** 7^{-2} **19.** $\frac{1}{5^{-3}}$ **20.** $\frac{1}{3^{-2}}$

21. 15^0 **22.** 24^0 **23.** $(2^3)^2$ **24.** $(3^2)^2$

25. $(2 \cdot 4)^2$ **26.** $(6 \cdot 5)^2$ **27.** $\left(\frac{4}{7}\right)^2$ **28.** $\left(\frac{3}{5}\right)^4$

Evalúa cada expresión.

29. **a)** 3^{-2} **b)** $(-3)^{-2}$ **c)** -3^{-2} **d)** $-(-3)^{-2}$

30. **a)** 4^{-3} **b)** $(-4)^{-3}$ **c)** -4^{-3} **d)** $-(-4)^{-3}$

31. **a)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ **b)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$ **c)** $-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ **d)** $-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$

32. **a)** $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$ **b)** $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}$ **c)** $-\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$ **d)** $-\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}$

Simplifica cada expresión y escribe la respuesta sin exponentes negativos. Considera que todas las bases representadas por variables son diferentes de cero.

33. **a)** $5x^0$ **b)** $-5x^0$ **c)** $(-5x)^0$ **d)** $-(-5x)^0$

34. **a)** $7y^0$ **b)** $(7y)^0$ **c)** $-7y^0$ **d)** $(-7y)^0$

35. **a)** $3xyz^0$ **b)** $(3xyz)^0$ **c)** $3x(yz)^0$ **d)** $3(xyz)^0$

36. **a)** $x^0 + y^0$ **b)** $(x + y)^0$ **c)** $x + y^0$ **d)** $x^0 + y$

Simplifica cada expresión y escribe la respuesta sin exponentes negativos.

37. $7y^{-3}$ **38.** $\frac{1}{y^{-1}}$ **39.** $\frac{9}{x^{-4}}$ **40.** $\frac{8}{5x^{-2}}$

41. $\frac{3a}{b^{-3}}$ **42.** $\frac{10x^4}{y^{-1}}$ **43.** $\frac{17m^{-2}n^{-3}}{2}$ **44.** $\frac{13x^{-3}}{z^4}$

45. $\frac{5x^{-2}y^{-3}}{z^{-4}}$ **46.** $\frac{15ab^5}{3c^{-3}}$ **47.** $\frac{9^{-1}x^{-1}}{y}$ **48.** $\frac{8^{-1}z}{x^{-1}y^{-1}}$

Simplifica cada expresión y escribe la respuesta sin exponentes negativos.

49. $2^5 \cdot 2^{-7}$ **50.** $a^3 \cdot a^5$ **51.** $x^6 \cdot x^{-4}$ **52.** $x^{-4} \cdot x^3$

53. $\frac{8^7}{8^5}$ **54.** $\frac{4^3}{4^{-1}}$ **55.** $\frac{7^{-5}}{7^{-3}}$ **56.** $\frac{x^{-7}}{x^4}$

57. $\frac{m^{-6}}{m^5}$ **58.** $\frac{p^0}{p^{-3}}$ **59.** $\frac{5w^{-2}}{w^{-7}}$ **60.** $\frac{x^{-7}}{x^{-9}}$

61. $3a^{-2} \cdot 4a^{-6}$ **62.** $(-8v^4)(-3v^{-5})$ **63.** $(-3p^{-2})(-p^3)$ **64.** $(2x^{-3}y^{-4})(6x^{-4}y^7)$

65. $(5r^2s^{-2})(-2r^5s^2)$ **66.** $(-6p^{-4}q^6)(2p^3q)$ **67.** $(2x^4y^7)(4x^3y^{-5})$ **68.** $\frac{27x^3y^2}{9xy}$

69. $\frac{33x^5y^{-4}}{11x^3y^2}$ **70.** $\frac{16x^{-2}y^3z^{-2}}{-2x^4y}$ **71.** $\frac{9xy^{-4}z^3}{-3x^{-2}yz}$ **72.** $\frac{(x^{-2})(4x^2)}{x^3}$

Evalúa cada expresión.

73. **a)** $4(a + b)^0$ **b)** $4a^0 + 4b^0$ **c)** $(4a + 4b)^0$ **d)** $-4a^0 + 4b^0$

74. **a)** $-3^0 + (-3)^0$ **b)** $-3^0 - (-3)^0$ **c)** $-3^0 + 3^0$ **d)** $-3^0 - 3^0$

75. **a)** $4^{-1} - 3^{-1}$ **b)** $4^{-1} + 3^{-1}$ **c)** $2 \cdot 4^{-1} + 3 \cdot 5^{-1}$ **d)** $(2 \cdot 4)^{-1} + (3 \cdot 5)^{-1}$

76. **a)** $5^{-2} + 4^{-1}$ **b)** $5^{-2} - 4^{-1}$ **c)** $3 \cdot 5^{-2} + 2 \cdot 4^{-1}$ **d)** $(3 \cdot 5)^{-2} - (2 \cdot 4)^{-1}$

Simplifica cada expresión y escribe la respuesta sin exponentes negativos.

77. $(3^2)^2$ **78.** $(5^2)^{-1}$ **79.** $(3^2)^{-2}$ **80.** $(2^2)^{-3}$

81. $(b^{-3})^{-2}$ **82.** $(-c)^4$ **83.** $(-c)^3$ **84.** $(-x)^{-4}$

85. $(-5x^{-3})^2$ **86.** $-11(x^{-3})^2$ **87.** $4^{-2} + 8^{-1}$ **88.** $5^{-1} + 2^{-1}$

89. $3 \cdot 4^{-2} + 9 \cdot 8^{-1}$ **90.** $5 \cdot 2^{-3} + 7 \cdot 4^{-2}$ **91.** $\left(\frac{4b}{3}\right)^{-2}$ **92.** $\left(\frac{2c}{5}\right)^{-3}$

93. $(4x^2y^{-2})^2$ **94.** $(4x^2y^3)^{-3}$ **95.** $(5p^2q^{-4})^{-3}$ **96.** $(8s^{-3}t^{-4})^2$

97. $(-3g^{-4}h^3)^{-3}$ **98.** $8(x^2y^{-1})^{-4}$ **99.** $\left(\frac{5j}{4k^2}\right)^2$ **100.** $\left(\frac{3x^2y^4}{z}\right)^3$

101. $\left(\frac{2r^4s^5}{r^2}\right)^3$ **102.** $\left(\frac{5m^5n^6}{10m^4n^7}\right)^3$ **103.** $\left(\frac{4xy}{y^3}\right)^{-3}$ **104.** $\left(\frac{9x^{-2}}{xy}\right)^{-2}$

105. $\left(\frac{5x^{-2}y}{x^{-5}}\right)^3$ **106.** $\left(\frac{4x^2y}{x^{-5}}\right)^{-3}$ **107.** $\left(\frac{14x^2y}{7xz}\right)^{-3}$ **108.** $\left(\frac{3xy}{z^{-2}}\right)^3$

109. $\left(\frac{x^8y^{-2}}{x^{-2}y^3}\right)^2$ **110.** $\left(\frac{x^2y^{-3}z^6}{x^{-1}y^2z^4}\right)^{-1}$ **111.** $\left(\frac{4x^{-1}y^{-2}z^3}{2xy^2z^{-3}}\right)^{-2}$ **112.** $\left(\frac{9x^4y^{-6}z^4}{3xy^{-6}z^{-2}}\right)^{-2}$

113. $\left(\frac{-a^3b^{-1}c^{-3}}{4ab^3c^{-4}}\right)^{-3}$ **114.** $\frac{(2x^{-1}y^{-2})^{-3}}{(5x^{-1}y^3)^2}$ **115.** $\frac{(3x^{-4}y^2)^3}{(2x^3y^5)^3}$ **116.** $\frac{(2xy^2z^{-3})^2}{(9x^{-1}yz^2)^{-1}}$

Resolución de problemas

Simplifica cada expresión. Considera que todas las variables representan enteros diferentes de cero.

117. $x^{2a} \cdot x^{5a+3}$ **118.** $y^{2m+3} \cdot y^{5m-7}$ **119.** $w^{2a-5} \cdot w^{3a-2}$ **120.** $d^{-4x+7} \cdot d^{5x-6}$

121. $\frac{x^{2w+3}}{x^{w-4}}$ **122.** $\frac{y^{5m-1}}{y^{7m-1}}$ **123.** $(x^{3p+5})(x^{2p-3})$ **124.** $(s^{2t-3})(s^{-t+5})$

125. $x^{-m}(x^{3m+2})$ **126.** $y^{3b+2} \cdot y^{2b+4}$ **127.** $\frac{30m^{a+b}n^{b-a}}{6m^{a-b}n^{a+b}}$ **128.** $\frac{24x^{c+3}y^{d+4}}{8x^{c-4}y^{d+6}}$

129. **a)** ¿Para qué valores de x es $x^4 > x^3$?
b) ¿Para qué valores de x es $x^4 < x^3$?
c) ¿Para qué valores de x es $x^4 = x^3$?
d) ¿Por qué no es posible decir que $x^4 > x^3$?

130. ¿Es 3^{-8} mayor o menor que 2^{-8}? Explica.

131. **a)** Explica por qué $(-1)^n = 1$ para cualquier número par n.
b) Explica por qué $(-1)^n = -1$ para cualquier número impar n.

132. **a)** Explica por qué $(-12)^{-8}$ es positivo.
b) Explica por qué $(-12)^{-7}$ es negativo.

133. **a)** ¿Es $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$ igual a $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$?
b) ¿Será $(x)^{-2}$ igual a $(-x)^{-2}$ para todos los números reales x excepto el 0? Explica tu respuesta.

134. **a)** ¿Es $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$ igual a $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$?
b) ¿Será $(x)^{-3}$ igual a $(-x)^{-3}$ para cualquier número real x diferente de cero? Explica.
c) ¿Cuál es la relación entre $(-x)^{-3}$ y $(x)^{-3}$ para cualquier número real x diferente de cero?

Determina cuáles exponentes deben colocarse en el área sombreada para hacer la expresión verdadera. Cada área sombreada puede representar un exponente diferente. Explica cómo determinaste tu respuesta.

135. $\left(\frac{x^2y^{-2}}{x^{-3}y^{\square}}\right)^2 = x^{10}y^2$ **136.** $\left(\frac{x^{-2}y^3z}{x^4y^{\square}z^{-3}}\right)^3 = \frac{z^{12}}{x^{18}y^6}$ **137.** $\left(\frac{x^{\square}y^5z^{-2}}{x^4y^{\square}z}\right)^{-1} = \frac{x^5z^3}{y^2}$

Problemas de desafío

En la Sección 7.2 aprenderemos que las reglas de los exponentes dadas en esta sección también se aplican cuando los exponentes son números racionales. Usando esta información y las reglas de los exponentes, evalúa cada expresión.

138. $\left(\frac{x^{1/2}}{x^{-1}}\right)^{3/2}$ **139.** $\left(\frac{x^{5/8}}{x^{1/4}}\right)^3$ **140.** $\left(\frac{x^4}{x^{-1/2}}\right)^{-1}$

141. $\frac{x^{1/2}y^{-3/2}}{x^5y^{5/3}}$ **142.** $\left(\frac{x^{1/2}y^4}{x^{-3}y^{5/2}}\right)^2$

Actividad de grupo

Discute y responde el ejercicio 143 en grupo.

143. Duplicando un centavo El día 1 te dan un centavo. Durante los siguientes días, te dan cada día el doble de lo que recibiste el día anterior.

a) Escribe las cantidades que recibirías cada uno de los primeros 6 días.

b) Expresa cada uno de estos números como una expresión exponencial en base 2.

c) Observando el patrón, determina una expresión exponencial para el número de centavos que recibirás el día 10.

d) Escribe una expresión exponencial general para el número de centavos que recibirás el día n.

e) Escribe una expresión exponencial para el número de centavos que recibirás el día 30.

f) Calcula el valor de la expresión del inciso **e)**. Usa una calculadora.

g) Determina la cantidad que se obtuvo en el inciso **f)** en dólares.

h) Escribe una expresión exponencial general para el número de dólares que recibirás el día n.

Ejercicios de repaso acumulados

[1.2] **144.** Si $A = \{3, 4, 6\}$ y $B = \{1, 2, 5, 9\}$, determina

a) $A \cup B$ y

b) $A \cap B$.

145. Ilustra el siguiente conjunto en la recta numérica: $\{x|-3 \le x < 2\}$.

[1.4] **146.** Evalúa $8 + |12| \div |-3| - 4 \cdot 2^2$.

147. Evalúa $\sqrt[3]{-125}$.

1.6 Notación científica

1 Escribir números en notación científica.

2 Cambiar números en notación científica a forma decimal.

3 Usar notación científica en la resolución de problemas.

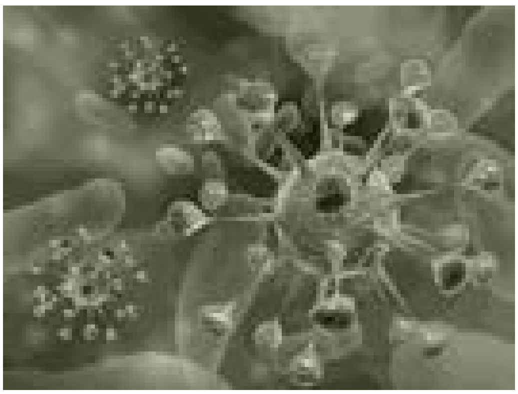
1 Escribir números en notación científica

Con frecuencia, científicos e ingenieros tratan con números muy grandes y muy pequeños. Por ejemplo, la frecuencia de la señal de una radio FM puede ser de 14,200,000,000 hertz (o ciclos por segundo) y el diámetro de un átomo de hidrógeno es de alrededor 0.0000000001 metros. Ya que es difícil trabajar con muchos ceros, los científicos suelen expresar tales números con exponentes. Por ejemplo, el número 14,200,000,000 podría escribirse como 1.42×10^{10} y 0.0000000001 como 1×10^{-10}. Los números como 1.42×10^{10} y 1×10^{-10} están en la forma conocida como **notación científica**. En notación científica, los números se expresan como $a \times 10^n$, donde $1 \le a < 10$ y n es un entero. Cuando una potencia de 10 no tiene coeficiente numérico, como en 10^5, suponemos que el coeficiente numérico es 1. Por lo tanto, 10^5 significa 1×10^5 y 10^{-4} significa 1×10^{-4}.

© X-ray:NASA/OXC/Wesleyan Univ/R.Kilgard et al:UV:NASA/JPL-Caltech; Optical: NASA/ESA/S. Beckwith&Hubble Heritage Team (STScl/AURA)IR: NASA/JPL-CALTECH/Univ. of AZ/R. Kennicutt

El diámetro de esta galaxia es alrededor de 1×10^{21} metros.

© Shutterstock



El diámetro de estos virus es alrededor de 1×10^{-7} metros.

Ejemplos de números en notación científica

3.2×10^6 $\quad 4.176 \times 10^3$ $\quad 2.64 \times 10^{-2}$

Lo siguiente muestra el número 32,400 cambiado a notación científica.

$$\begin{aligned} 32{,}400 &= 3.24 \times 10{,}000 \\ &= 3.24 \times 10^4 \qquad (10{,}000 = 10^4) \end{aligned}$$

Hay cuatro ceros en 10,000, el mismo número que el exponente en 10^4. El procedimiento para escribir un número en notación científica es el siguiente.

Para escribir un número en notación científica

1. Mueve el punto decimal en el número a la derecha del primer dígito diferente de cero. Esto da un número mayor o igual a 1 y menor que 10.
2. Cuenta el número de lugares al que moviste el punto decimal en el paso 1. Si el número original es 10 o mayor, la cuenta se considera positiva. Si el número original es menor que 1, la cuenta se considera negativa.
3. Multiplica el número obtenido en el paso 1 por 10 elevado a la cuenta (potencia) que encontraste en el paso 2.

EJEMPLO 1 Escribe los siguientes números en notación científica.

a) 68,900 **b)** 0.000572 **c)** 0.0074

Solución

a) El punto decimal en 68,900 está a la derecha del último cero.

$$68{,}900. = 6.89 \times 10^4$$

El punto decimal se movió cuatro lugares. Cómo el número original es mayor que 10, el exponente es positivo.

b) $0.000572 = 5.72 \times 10^{-4}$

El punto decimal se movió cuatro lugares. Cómo el número original es menor que 1, el exponente es negativo.

c) $0.0074 = 7.4 \times 10^{-3}$

Resuelve ahora el ejercicio 11

2 Cambiar números en notación científica a forma decimal

En ocasiones, puedes necesitar convertir un número escrito en notación científica a su forma decimal. El procedimiento es como sigue.

Para convertir un número en notación científica a su forma decimal

1. Observa el exponente en la base 10.
2. **a)** Si el exponente es positivo, mueve el punto decimal en el número hacia la derecha el mismo número de lugares que el exponente. Puede ser necesario agregar ceros al número. Esto tendrá como resultado un número mayor o igual a 10.

   b) Si el exponente es 0, el punto decimal en el número no se mueve de su posición actual. Quita el factor 10^0. Esto resultará en un número mayor o igual a 1 pero menor que 10.

   c) Si el exponente es negativo, mueve el punto decimal en el número hacia la izquierda el mismo número de lugares que el exponente. Puede ser necesario agregar ceros. Esto resultará en un número menor que 1.

EJEMPLO 2 Escribe los números siguientes sin exponentes.

a) 2.1×10^4 **b)** 8.73×10^{-3} **c)** 1.45×10^8

Solución

a) Mueve el punto decimal cuatro lugares hacia la derecha.

$$2.1 \times \boxed{10^4} = 2.1 \times \boxed{10{,}000} = 21{,}000$$

b) Mueve el punto decimal tres lugares hacia la izquierda.

$$8.73 \times 10^{-3} = 0.00873$$

c) Mueve el punto decimal ocho lugares hacia la derecha.

$$1.45 \times 10^8 = 145{,}000{,}000$$

Resuelve ahora el ejercicio 25

3 Usar notación científica en la resolución de problemas

Podemos utilizar las reglas de los exponentes cuando trabajamos con números escritos en notación científica, como se ilustra en las aplicaciones siguientes.

EJEMPLO 3 **Deuda pública por persona** La deuda pública es el monto total que el gobierno federal de Estados Unidos adeuda a prestadores en la forma de bonos del gobierno. El 20 de julio de 2008, la deuda pública de Estados Unidos era aproximadamente \$9,525,000,000,000 (9 billones 525 mil millones de dólares). La población de Estados Unidos en esa fecha era de alrededor 305,000,000.

a) Determina la deuda promedio por persona de Estados Unidos (deuda per cápita).

b) El 1 de julio de 1982, la deuda de Estados Unidos fue de alrededor de \$1,142,000,000,000. ¿Cuán mayor fue la deuda en 2008 que en 1982?

c) ¿Cuántas veces fue mayor la deuda en 2008 que en 1982?

Solución

a) Para determinar la deuda per cápita, dividimos la deuda pública entre la población.

$$\frac{9{,}525{,}000{,}000{,}000}{305{,}000{,}000} = \frac{9.525 \times 10^{12}}{3.05 \times 10^8} \approx 3.12 \times 10^{12-8} \approx 3.12 \times 10^4 \approx 31{,}200$$

Por lo tanto, la deuda per cápita fue de casi \$31,200. Esto significa que si los ciudadanos de Estados Unidos desearan “compartir los gastos” y saldar la deuda federal, les tocaría alrededor de \$31,200 a cada hombre, mujer y niño de Estados Unidos.

b) Necesitamos encontrar la diferencia en la deuda entre 2008 y 1982.

$$\begin{aligned} 9{,}525{,}000{,}000{,}000 - 1{,}142{,}000{,}000{,}000 &= 9.525 \times 10^{12} - 1.142 \times 10^{12} \\ &= (9.525 - 1.142) \times 10^{12} \\ &= 8.383 \times 10^{12} \\ &= 8{,}383{,}000{,}000{,}000 \end{aligned}$$

La deuda pública de Estados Unidos fue \$8,383,000,000,000 mayor en 2008 que en 1982.

c) Para determinar cuántas veces fue mayor la deuda pública en 2008, dividimos la deuda de 2008 entre la deuda de 1982 como sigue:

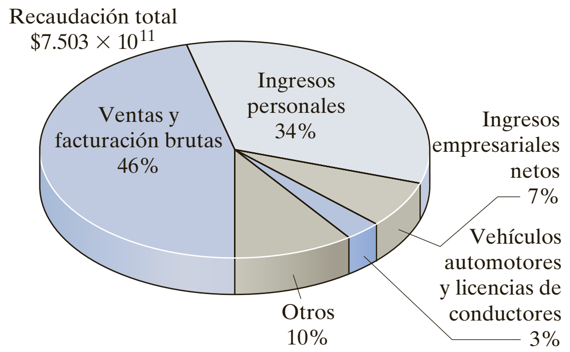
$$\frac{9{,}525{,}000{,}000{,}000}{1{,}142{,}000{,}000{,}000} = \frac{9.525 \times 10^{12}}{1.142 \times 10^{12}} \approx 8.34$$

Por lo tanto, la deuda pública de 2008 fue casi 8.34 veces mayor que en 1982.

Resuelve ahora el ejercicio 87

EJEMPLO 4 Recaudación de impuestos Los datos para la gráfica en la **Figura 1.9** se tomaron del Sitio Web de la Oficina de Censos de Estados Unidos. La gráfica muestra la recaudación estatal acumulada de impuestos en 2007. Hemos dado los montos recolectados en notación científica.

Recaudación de impuestos estatales, por tipo: 2007



Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos

FIGURA 1.9

a) Determina, usando notación científica, cuánto dinero se recolectó en impuestos sobre percepciones personales en 2007.

b) Determina, usando notación científica, cuánto dinero más se recaudó en impuestos a ventas y facturación brutas que en impuestos por ingresos empresariales netos.

Solución

a) En 2007, 34% de los $\$7.503 \times 10^{11}$ se recaudaron de impuestos en percepciones personales. En forma decimal, 34% es 0.34, y en notación científica 34% es 3.4×10^{-1}. Para determinar 34% de $\$7.503 \times 10^{11}$, multiplicamos usando la notación científica como sigue.

$$\begin{aligned}\text{Recaudación de impuestos en percepciones personales} &= (3.4 \times 10^{-1})(7.503 \times 10^{11})\\ &= (3.4 \times 7.503)(10^{-1} \times 10^{11})\\ &= 25.5102 \times 10^{-1+11}\\ &= 25.5102 \times 10^{10}\\ &= 2.55102 \times 10^{11}\end{aligned}$$

Por lo tanto, en 2007 se recaudaron alrededor de $\$2.55102 \times 10^{11}$ o \$255,102,000,000 por percepciones personales.

b) En 2007 se recolectaron 46% de ventas y facturación brutas y 7% de impuestos a ingresos netos empresariales. Para determinar cuánto dinero más se recaudó de ventas y facturación brutas que de impuestos a ingresos netos empresariales, primero determinamos la diferencia entre los dos porcentajes.

$$\text{diferencia} = 46\% - 7\% = 39\%$$

Para determinar 39% de $\$7.503 \times 10^{11}$, cambiamos 39% a notación científica y después multiplicamos.

$$39\% = 0.39 = 3.9 \times 10^{-1}$$

$$\begin{aligned}\text{Diferencia en recaudación de impuestos} &= (3.9 \times 10^{-1})(7.503 \times 10^{11})\\ &= (3.9 \times 7.503)(10^{-1} \times 10^{11})\\ &= 29.2617 \times 10^{10}\\ &= 2.92617 \times 10^{11}\end{aligned}$$

Por lo tanto, se recaudó $\$2.92617 \times 10^{11}$ o \$292,617,000,000 más de dinero en impuestos a ventas y facturación brutas que de impuestos a ingresos netos empresariales.

Resuelve ahora el ejercicio 95

Cómo utilizar tu calculadora

En una calculadora científica o graficadora el producto (8,000,000)(400,000) podría mostrarse como 3.2^{12} o 3.2E12. Ambos representan 3.2×10^{12}, o sea, 3,200,000,000,000.

Para introducir números en notación científica en una calculadora científica o graficadora, por lo común se utilizan las teclas $\boxed{\text{EE}}$ o $\boxed{\text{EXP}}$.

Para introducir 4.6×10^8, debes presionar 4.6 $\boxed{\text{EE}}$ 8 o 4.6 $\boxed{\text{EXP}}$ 8. La pantalla de tu calculadora podría mostrar 4.6^{08} o bien 4.6E8.

En la TI-84 Plus aparece EE debajo de la tecla $\boxed{,}$ Por lo tanto, para introducir (8,000,000)(400,000) en notación científica deberás presionar

$$8 \underbrace{\boxed{2^{\text{nd}}}\ \boxed{,}}_{\text{para obtener EE}}\ 6\ \boxed{\times}\ 4 \underbrace{\boxed{2^{\text{nd}}}\ \boxed{,}}_{\text{para obtener EE}}\ 5\ \boxed{\text{ENTER}}\ \overset{\text{respuesta mostrada}}{3.2\text{E}12}$$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1.6

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) indicados en la siguiente lista.

Positivo   negativo   1   5   notación científica   2   4   3   0

1. Un número escrito como $a \times 10_n$, donde $1 \leq a < 10$ y n es un entero, está escrito en ______________.

2. Cuando un número mayor que 10 está escrito en notación científica, el valor para n en 10^n es un entero ____________.

3. Para escribir 0.00329 en notación científica, desplaza el punto decimal ______________ lugares a la derecha.

4. Para escribir 75,618 en notación científica, desplaza el punto decimal ______________ lugares a la izquierda.

Practica tus habilidades

Expresa cada número en notación científica.

5. 3700 **6.** 860 **7.** 0.043 **8.** 0.000000918

9. 760,000 **10.** 9,260,000,000 **11.** 0.00000186 **12.** 0.00000914

13. 5,780,000 **14.** 0.0000723 **15.** 0.000106 **16.** 952,000,000

Expresa cada número sin exponentes.

17. 3.1×10^4 **18.** 5×10^8 **19.** 2.13×10^{-5} **20.** 6.78×10^{-5}

21. 9.17×10^{-1} **22.** 5.4×10^1 **23.** 3.0×10^6 **24.** 7.6×10^4

25. 2.03×10^5 **26.** 9.25×10^{-6} **27.** 1×10^6 **28.** 1×10^{-8}

Expresa cada valor sin exponentes.

29. $(4 \times 10^5)(6 \times 10^2)$ **30.** $(7.6 \times 10^{-3})(1.2 \times 10^{-1})$ **31.** $\dfrac{8.4 \times 10^{-6}}{4 \times 10^{-4}}$

32. $\dfrac{8.5 \times 10^3}{1.7 \times 10^{-2}}$ **33.** $\dfrac{9.45 \times 10^{-3}}{3.5 \times 10^2}$ **34.** $(5.2 \times 10^{-3})(4.1 \times 10^5)$

35. $(8.2 \times 10^5)(1.4 \times 10^{-2})$ **36.** $(6.3 \times 10^4)(3.7 \times 10^{-8})$ **37.** $\dfrac{1.68 \times 10^4}{5.6 \times 10^7}$

38. $\dfrac{7.2 \times 10^{-2}}{3.6 \times 10^{-6}}$ **39.** $(9.1 \times 10^{-4})(7.4 \times 10^{-4})$ **40.** $\dfrac{8.6 \times 10^{-8}}{4.3 \times 10^{-6}}$

Expresa cada valor en notación científica.

41. (0.03)(0.0005) **42.** (2500)(7000) **43.** $\dfrac{35{,}000{,}000}{7000}$

44. $\dfrac{560{,}000}{0.0008}$ **45.** $\dfrac{0.00069}{23{,}000}$ **46.** $\dfrac{0.000018}{0.000009}$

47. (47,000)(35,000,000) **48.** $\dfrac{0.0000286}{0.00143}$ **49.** $\dfrac{2016}{0.0021}$

50. $\dfrac{0.018}{160}$ **51.** $\dfrac{0.00153}{0.00051}$ **52.** (0.0015)(0.00038)

Expresa cada valor en notación científica. Redondea los números decimales a la milésima cifra.

53. $(4.78 \times 10^{9})(1.96 \times 10^{5})$

54. $\dfrac{5.55 \times 10^{3}}{1.11 \times 10^{1}}$

55. $(7.23 \times 10^{-3})(1.46 \times 10^{5})$

56. $(5.71 \times 10^{5})(4.7 \times 10^{-3})$

57. $\dfrac{4.36 \times 10^{-4}}{8.17 \times 10^{-7}}$

58. $\dfrac{9.675 \times 10^{25}}{3.225 \times 10^{15}}$

59. $(4.89 \times 10^{15})(6.37 \times 10^{-41})$

60. $(4.36 \times 10^{-6})(1.07 \times 10^{-6})$

61. $(4.16 \times 10^{3})(9.14 \times 10^{-31})$

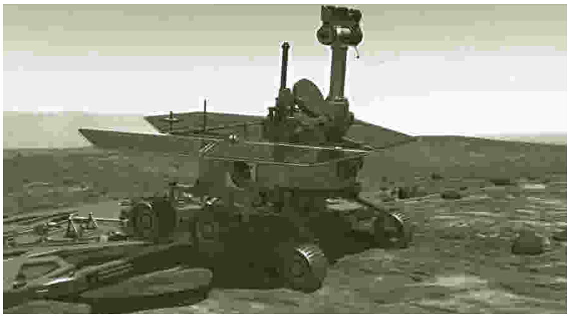
62. $\dfrac{3.71 \times 10^{11}}{4.72 \times 10^{-9}}$

63. $\dfrac{1.5 \times 10^{35}}{4.5 \times 10^{-26}}$

64. $(4.9 \times 10^{5})(1.347 \times 10^{31})$

Notación científica *En los ejercicios 65-78, cada número en itálicas escríbelo en notación científica.*

65. A la NASA le costó más de *$850 millones* enviar a los exploradores *Spirit* y *Opportunity* a Marte.



© NASA/Jet Propulsion Laboratoy

66. La distancia entre el Sol y la Tierra es aproximadamente de *93 millones* de millas.

67. El costo promedio por un anuncio publicitario de 30 segundos en el Super Bowl XLI fue de *$2.7 millones*.

68. De acuerdo con la Oficina de Censos de Estados Unidos, la población mundial en 2050 será de *9.2 billones* de personas.

69. De acuerdo con el *World Almanac and Fact Book* de 2008, el hombre más rico del mundo es Warren Buffet de Berkshire Hathaway, que se calcula tiene *$62 billones*.

70. El presupuesto federal de Estados Unidos en 2006 era aproximadamente de *$2.56 trillones*.

71. En 2008, la deuda de Estados Unidos era aproximadamente de *$9.5 trillones*.

72. La velocidad de la luz es aproximadamente de *186,000* millas por segundo.

73. Un centímetro = *0.001* hectómetros.

74. Un milímetro = *0.000001* kilómetros.

75. Una pulgada ≈ *0.0000158* millas.

76. Una onza ≈ *0.00003125* toneladas.

77. Un miligramo = *0.000000001* toneladas métricas.

78. Una determinada computadora puede realizar un cálculo en *0.0000001* segundos.

Resolución de problemas

79. Explica cómo puedes dividir rápidamente un número dado en notación científica entre

a) 10,

b) 100,

c) 1 millón.

d) Divide 6.58×10^{-4} entre 1 millón. Escribe tu respuesta en notación científica.

80. Explica cómo puedes multiplicar rápidamente un número dado en notación científica por

a) 10,

b) 100,

c) 1 millón.

d) Multiplica 7.59×10^{7} entre 1 millón. Escribe tu respuesta en notación científica.

81. Experimento científico Durante un experimento científico encontraste que la respuesta correcta es 5.25×10^{4}.

a) Si por error escribes como respuesta 4.25×10^{4}, ¿qué tanto te alejaste de la respuesta correcta?

b) Si por error escribes como respuesta 5.25×10^{5}, ¿qué tanto te alejaste de la respuesta correcta?

c) ¿Cuál de los dos errores es el que más se aleja de la respuesta correcta? Explica.

82. Orbita de la Tierra

a) La Tierra completa sus 5.85×10^{8} millas de orbita alrededor del Sol en 365 días. Determina la distancia recorrida por día.

b) La velocidad de la Tierra es aproximadamente ocho veces más rápida que la de una bala. Estima la velocidad de una bala en millas por hora.

© Trinacria Photo\Shutterstock

83. Distancia al Sol La distancia de la Tierra al Sol es de 93,000,000 millas. Si una nave espacial viaja a una velocidad de 3100 millas por hora, ¿cuánto se tardará en llegar al Sol?

84. Universo Existe evidencia de que hay al menos 1 sextillón, 10^{21}, de estrellas en el universo.

a) Escribe ese número sin exponentes.

b) ¿Cuántas estrellas son en millones? Explica cómo determinaste tu respuesta.

85. Población de Estados Unidos y del mundo El 20 de julio de 2008, la población de Estados Unidos era de 3.046×10^8. Ese mismo día, la población del mundo era aproximadamente de 6.711×10^9.

Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos

a) ¿Cuántas personas vivían fuera de Estados Unidos en 2008?

b) ¿Qué porcentaje de la población mundial vivía en Estados Unidos en 2008?

86. Puente New River Gorge El puente New River Gorge, que se muestra en la fotografía, tiene una longitud de 3030.5 pies. Fue completado en 1977 cerca de Fayetteville, West Virginia, y es el arco de acero más largo del mundo. Su peso total es de 8.80×10^7 libras y su pieza más pesada es de 1.84×10^5 libras.

a) ¿Cuántas veces es mayor el peso total del puente que el peso de su pieza más pesada?

b) ¿Cuál es la diferencia de pesos entre el peso total del puente y el peso de su pieza más pesada?

© Allen R. Angel

87. Producto Interno Bruto El Producto Interno Bruto (PIB) es una medida de la actividad económica. EL PIB es la cantidad total de bienes y servicios producidos por un país durante un año. En 2007, el PIB de Estados Unidos era aproximadamente de \$11.750 trillones y la población de Estados Unidos era aproximadamente de 302.2 millones.

Fuente: Sitio Web de Tesorería de Estados Unidos

a) Escribe cada uno de estos dos números en notación científica.

b) Determina el PIB *per cápita* dividiendo el PIB entre la población de Estados Unidos.

88. Producto Interno Bruto En 2007, el PIB (ver ejercicio 87) del mundo era aproximadamente de \$55.500 trillones y la población mundial era aproximadamente de 6.6 billones de personas.

Fuente: Sitio Web de Tesorería de Estados Unidos y www.en.wikipedia.org/wiki

a) Escribe cada uno de estos dos números en notación científica.

b) Determina el PIB *per cápita* dividiendo el PIB entre la población mundial.

89. Densidad de población La densidad de población (personas por kilómetro cuadrado) se determina dividiendo la población de un país entre su área territorial. Determina la densidad de población de China si su población en 2008 era de 1.32×10^9 personas y si el área territorial era de 9.8×10^6 kilómetros cuadrados. (Redondea tu respuesta a la unidad más cercana).

90. Densidad de población Determina la densidad de población (ver ejercicio 89) de India si su población en 2008 era de 11.3×10^9 personas y si el área territorial era de 3.2×10^6 kilómetros cuadrados. (Redondea tu respuesta a la unidad más cercana).

91. Reciclaje de plástico En Estados Unidos solo cerca de 5% de las 4.2×10^9 libras de plástico usado se recicla anualmente.

a) ¿Cuántas libras se reciclan al año?

b) Cuántas libras no se reciclan en un año?

92. Distancia a Próxima Centauri La distancia de la Tierra al Sol es aproximadamente de 150 millones de kilómetros. La siguiente estrella más cercana a la Tierra es Próxima Centauri, la cual está 268,000 veces más lejos de la Tierra de lo que está el Sol. Aproxima la distancia de Próxima Centauri a la Tierra. Escribe tu respuesta en notación científica.

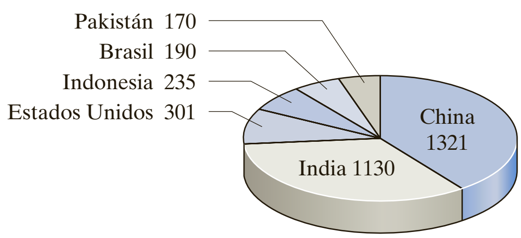
Fuente: Sitio Web de la NASA

© Wikicommons

Próxima Centauri

93. Países con mayor población En 2007, los seis países con mayor población eran representados por 3,347,000,000 personas del total de la población mundial de 6,600,000,000. los seis países con mayor población de 2007 se muestran en la siguiente gráfica, cada uno con su respectiva población.

Los seis países con mayor población (población en millones)



Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos.
Nota: China incluye a China continental y a Taiwán.

a) ¿Cuántas personas más vivían en China que en Estados Unidos?

b) ¿Qué porcentaje de la población mundial vivía en China?

c) Si el área de China es de 3.70×10^6 millas cuadradas, determina la densidad de población de China (personas por milla cuadrada).

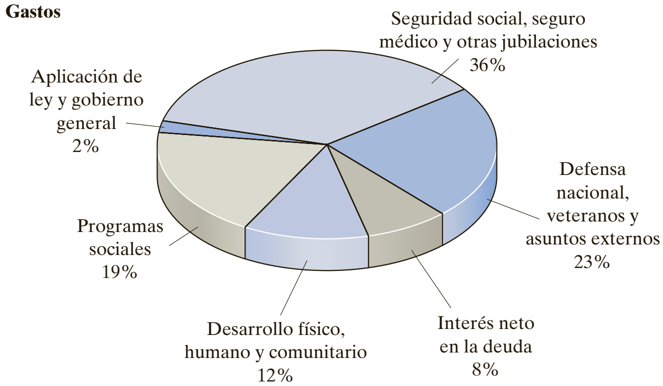
d) Si el área de Estados Unidos es de 3.62×10^6 millas cuadradas, determina la densidad de población en Estados Unidos.*

94. Población mundial Se necesitó de toda la historia del hombre para que la población mundial llegara a 6.711×10^9 personas en el año 2008. Al ritmo actual, la población mundial se duplicará en aproximadamente 62 años.

a) Estima la población mundial en 2070.

b) Suponiendo que un año tiene 365 días, estima el número promedio de personas adicionales que se incorporarán a la población mundial cada día entre 2008 y 2070.

95. Gastos federales La siguiente gráfica aparece en la página 86 del manual de impuestos Internal Revenue Service Form 1040, de 2007. La gráfica muestra la distribución de gastos del gobierno federal en el Año Fiscal (AF) 2006. El total de gastos del gobierno federal en AF 2006 fue de $\$2.655 \times 10^{12}$.



Usa esta gráfica de pastel para responder las siguientes preguntas. Escribe todas las respuestas en notación científica.

a) ¿Cuál fue la deuda en el AF 2006 para la aplicación de ley y gobierno general?

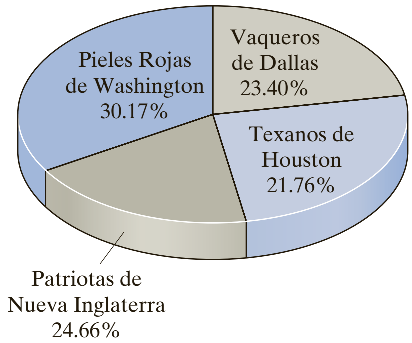
b) ¿Cuál fue la deuda en el AF 2006 para la seguridad social, seguro médico y otras jubilaciones?

c) ¿Cuál fue la deuda en el AF 2006 para todos los programas con excepción del interés neto en la deuda?

96. Ingresos del futbol americano en la NFL En 2007, los 32 equipos profesionales de futbol americano en la NFL generaron más de \$5 billones en ingresos. Los cuatro equipos que generaron más ingresos fueron los Pieles Rojas de Washington, los Vaqueros de Dallas, los patriotas de Nueva Inglaterra, y los Texanos de Houston. El ingreso total de estos cuatro equipos fue de $\$1.034 \times 10^9$. La gráfica muestra el porcentaje de distribución de los $\$1.034 \times 10^9$ de estos cuatro equipos.

Usa esta gráfica para responder las siguientes preguntas.

Los cuatro equipos de la NFL que generan los mayores ingresos, (en total $\$1.034 \times 10^9$)



Fuente: NFL.

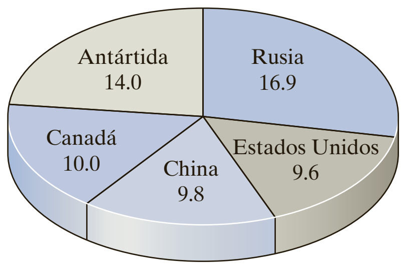
a) Determina los ingresos de los Vaqueros de Dallas y de los Texanos de Houston. Expresa tu respuesta en notación científica.

b) ¿Cuál es la diferencia de ingresos entre los Vaqueros de Dallas y los Texanos de Houston?

c) Si el total de ingresos de los 32 equipos fue de \$5 billones en 2007, ¿qué porcentaje del total de ingresos representan estos cuatro equipos? Expresa tu respuesta en notación científica.

97. Área territorial El área territorial, en kilómetros cuadrados, de los cinco países más grandes en el mundo se muestra en la siguiente gráfica.

Área territorial (en millones de kilómetros cuadrados) de los cinco países más grandes



Fuente: www.world-gazetteer.com

a) ¿Cuál es el total del área territorial de los cinco países más grandes? Escribe tu respuesta en notación científica.

b) ¿Cuánta área territorial tiene de más Antártida que Estados Unidos? Escribe tu respuesta en notación científica.

Problemas de desafío

98. Año-luz Un *año-luz* es la distancia que la luz recorre en 1 año.

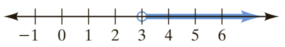
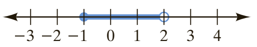
a) Determina el número de millas en un año-luz si la luz viaja a 1.86×10^5 millas *por segundo*.

b) Si la Tierra está a 93,000,000 millas del Sol, ¿cuánto tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra?

c) Nuestra galaxia, la Vía Lactea, tiene una longitud de 6.25×10^{16} millas de extremo a extremo. Si una nave espacial pudiera viajar a la mitad de la velocidad de la luz, ¿cuánto tardaría en viajar de un extremo de la galaxia al otro?

*A partir de junio de 2008, la región con la mayor densidad de población era Macau (China), con una densidad de población de 48,459 personas por milla cuadrada. El país con la mayor densidad de población era Mónaco, con una densidad de población de 42,689 personas por milla cuadrada.

Resumen del capítulo 1

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 1.2	
Una **variable** es una letra utilizada para representar varios números. Una **constante** es una letra que se usa para representar un valor particular. Una **expresión algebraica** (o **expresión**) es cualquier combinación de números, variables, exponentes, símbolos matemáticos u operaciones.	x y y son usadas comúnmente como variables. Si h es el número de horas en un día, entonces $h = 24$, una constante. $3x^2(x - 2) + 2x$ es una expresión algebraica.
Un **conjunto** es una colección de objetos. Los **objetos** se denominan **elementos**. La **forma de lista** es un conjunto que tiene listados sus elementos dentro de un par de llaves. Un primer conjunto es un **subconjunto** de un segundo conjunto cuando cada elemento del primer conjunto también es elemento del segundo conjunto. El **conjunto nulo** o **conjunto vacío**, se simboliza { } o $\varnothing$, no tiene elementos.	Si $A = \{$azul, verde, rojo$\}$, entonces azul, verde y rojo son elementos de A. $\{1, 3, 5\}$ es un subconjunto de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ El conjunto de personas vivas con más de 200 años de edad es un conjunto vacío.
Símbolos de desigualdades $>$ se lee "mayor que" $\geq$ se lee "mayor o igual que" $<$ se lee "menor que" $\leq$ se lee "menor o igual que" $\neq$ se lee "no es igual a" Las desigualdades pueden graficarse en una recta numérica. **La notación constructiva de conjuntos** tiene la forma $\{\ x \mid x$ tiene la propiedad $p\ \}$ El conjunto de — todos los elementos x — tal que — x tiene la propiedad dada	$6 > 2$ se lee 6 es mayor que 2 $5 \geq 5$ se lee 5 es mayor o igual que 5 $-4 < 3$ se lee -4 es menor que 3 $-10 \leq -1$ se lee -10 es menor o igual que -1 $-5 \neq 17$ se lee -5 no es igual que 17 $x > 3$  $\{x \mid -1 \leq x < 2\}$ 
Conjuntos importantes de números reales Números reales Números naturales o para contar Números enteros positivos Números enteros Números racionales Números irracionales La **unión** del conjunto A y el conjunto B, escrita como $A \cup B$, es el conjunto de elementos que pertenecen al conjunto A *o* al conjunto B. La **intersección** de un conjunto A y un conjunto B, escrita $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos que son comunes a ambos conjuntos, A y B.	$\mathbb{R} = \{x \mid x$ es un punto en la recta numérica$\}$ $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ $W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ $I = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ $Q = \left\{ \frac{p}{q} \middle\| p \text{ y } q \text{ son enteros, } q \neq 0 \right\}$ $H = \{x \mid x$ es un número real que es no racional$\}$ Dado $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, entonces $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ $A \cap B = \{3, 5, 7\}$
Sección 1.3	
Inverso aditivo Para cualquier número real a, su inverso aditivo es $-a$.	-8 es el inverso aditivo de 8.
Propiedad del doble negativo Para cualquier número real a, $-(-a) = a$.	$-(-5) = 5$
Valor absoluto Si a representa cualquier número real, entonces $\lvert a \rvert = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$	$\lvert 9 \rvert = 9$, $\lvert -9 \rvert = 9$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 1.3 (cont.)	
Suma de números reales	
Para sumar dos números con el *mismo signo* (ambos positivos o negativos), suma sus valores absolutos y coloca el signo común antes de la suma.	Suma $-6 + (-8)$. $\|-6\| = 6$ y $\|-8\| = 8$ $\|-6\| + \|-8\| = 6 + 8 = 14$ Por lo tanto, $-6 + (-8) = -14$.
Para restar dos números con *diferente signo* (uno positivo y otro negativo), resta el valor absoluto menor del valor absoluto mayor. La respuesta tiene el signo del número con el valor absoluto más grande.	Suma $8 + (-2)$. $8 + (-2) = \|8\| - \|-2\|$ $= 8 - 2$ $= 6$ Por lo tanto, $8 + (-2) = 6$.
Resta de números reales $a - b = a + (-b)$	$-14 - 10 = -14 + (-10) = -24$
Multiplicación de dos números reales Para multiplicar dos números con *signos iguales*, ambos positivos o ambos negativos, multiplica sus valores absolutos. La respuesta es *positiva*.	$(-1.6)(-8.9) = 14.24$
Para multiplicar dos números con *signos diferentes*, uno positivo y el otro negativo, multiplica sus valores absolutos. La respuesta es *negativa*.	$21\left(-\frac{1}{7}\right) = -3$
Propiedad del cero en la multiplicación Para cualquier número a, $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$	$0 \cdot 5 = 0$
Dividir dos números reales **1.** Para dividir dos números con *signos iguales*, ambos positivos o ambos negativos, divide sus valores absolutos. La respuesta es *positiva*.	$\frac{-8}{-2} = 4$
2. Para dividir dos números con *signos diferentes*, uno positivo y otro negativo, divide sus valores absolutos. La respuesta es *negativa*.	$\frac{-21}{7} = -3$
Dividir entre cero Para cualquier número real $a \neq 0$, cuando $\frac{a}{0}$ no está definido.	$\frac{7}{0}$ no está definido.
Propiedades de los números reales Para cualquier número real a, b y c.	
Propiedad conmutativa $a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$	$6 + 7 = 7 + 6$ $3 \cdot 16 = 16 \cdot 3$
Propiedad asociativa $(a + b) + c = a + (b + c)$ $(ab)c = a(bc)$	$(5 + 4) + 11 = 5 + (4 + 11)$ $(8 \cdot 2) \cdot 15 = 8 \cdot (2 \cdot 15)$
Propiedad de la identidad $a + 0 = 0 + a = a$ $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	$31 + 0 = 0 + 31 = 31$ $6 \cdot 1 = 1 \cdot 6 = 6$
Propiedad del inverso $a + (-a) = (-a) + a = 0$ $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$	$18 + (-18) = -18 + 18 = 0$ $14 \cdot \frac{1}{14} = \frac{1}{14} \cdot 14 = 1$
Propiedad distributiva $a(b + c) = ab + ac$	$9(x + 10) = 9 \cdot x + 9 \cdot 10$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 1.4	
Los **factores** son números o expresiones que se multiplican.	En $3 \cdot 5 = 15$, el 3 y el 5 son factores de 15.
Para cualquier número natural n, b^n es una expresión exponencial tal que $$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n \text{ factores}}$$	$(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$
La **raíz cuadrada de un número** $\sqrt{a} = b$ si $b^2 = a$ La **raíz cúbica** de un número $\sqrt[3]{a} = b$ si $b^3 = a$ La **raíz *enésima*** de un número $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$	$\sqrt{36} = 6$ ya que $6^2 = 36$ $\sqrt[3]{64} = 4$ ya que $4^3 = 64$ $\sqrt[4]{625} = 5$ ya que $5^4 = 625$
Orden de las operaciones Para evaluar expresiones matemáticas, utiliza el siguiente orden: **1.** Primero, evalúa las expresiones dentro de símbolos de agrupación, como paréntesis ( ), corchetes [ ], llaves { } y valor absoluto | |. Si la expresión contiene símbolos de agrupación anidados (una pareja de símbolos de agrupación dentro de otro par), primero evalúa las expresiones dentro de los símbolos de agrupación más internos. **2.** Después, evalúa todos los términos que tengan exponentes y raíces. **3.** A continuación, evalúa todas las multiplicaciones y divisiones, en el orden en el que aparezcan de izquierda a derecha. **4.** Por último, evalúa todas las sumas y restas en el orden en el que aparezcan de izquierda a derecha.	Evalúa $4 + 3 \cdot 9^2 - \sqrt{121}$. $4 + 3 \cdot 9^2 - \sqrt{121} = 4 + 3 \cdot 81 - 11$ $= 4 + 243 - 11$ $= 247 - 11$ $= 236$
Sección 1.5	
Regla del producto para exponentes Si m y n son números naturales y a es cualquier número real, entonces $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$	$x^8 \cdot x^{15} = x^{8+15} = x^{23}$
Regla del cociente para exponentes Si a es cualquier número real diferente de cero y m y n son enteros diferentes de cero, entonces $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$	$\frac{z^{21}}{z^{14}} = z^{21-14} = z^7$
Regla del exponente negativo Para cualquier número real a diferente de cero y cualquier número entero positivo m, tenemos $$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$	$y^{-13} = \frac{1}{y^{13}}$
Regla del exponente cero Si a es cualquier número real diferente de cero, entonces $$a^0 = 1$$	$7x^0 = 7 \cdot 1 = 7$
Elevar una potencia a otra potencia (Regla de la potencia) Si a es cualquier número real y m y n son enteros, entonces $$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$	$(c^{-8})^{-5} = c^{(-8)(-5)} = c^{40}$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 1.5 (cont.)	
Elevar un producto a una potencia Si a y b son números reales y m es entero, entonces $(ab)^m = a^m b^m$	$(8x^6)^2 = 8^2(x^6)^2 = 64x^{12}$
Elevar un cociente a una potencia Si a y b son números reales y m es entero, entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \quad b \neq 0$ y $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m, \quad a \neq 0, b \neq 0$	$\left(\frac{2}{r}\right)^3 = \frac{2^3}{r^3} = \frac{8}{r^3}$ $\left(\frac{6}{x^3}\right)^{-5} = \left(\frac{x^3}{6}\right)^5 = \frac{(x^3)^5}{6^5} = \frac{x^{15}}{7776}$
Sección 1.6	
Un número escrito en **notación científica** tiene la forma $a \times 10^n$, donde $1 \leq a < 10$ y n es un entero.	$5.2 \times 10^7, \quad 1.036 \times 10^{-8}$
Para escribir un número en notación científica **1.** Mueve el punto decimal en el número a la derecha del primer dígito diferente de cero. Esto da un número mayor o igual a 1 y menor que 10. **2.** Cuenta el número de lugares al que moviste el punto decimal en el paso 1. Si el número original es 10 o mayor, la cuenta se considera positiva. Si el número original es menor que 1, la cuenta se considera negativa. **3.** Multiplica el número obtenido en el paso 1 por 10 elevado a la cuenta (potencia) que encontraste en el paso 2.	$12{,}900 = 1.29 \times 10^4$ $0.035 = 3.5 \times 10^{-2}$
Para convertir un número en notación científica a su forma decimal **1.** Observa el exponente en la base 10. **2. a)** Si el exponente es positivo, mueve el punto decimal en el número hacia la derecha el mismo número de lugares que el exponente. **b)** Si el exponente es negativo, mueve el punto decimal en el número hacia la izquierda el mismo número de lugares que el exponente.	$3.08 \times 10^3 = 3080$ $8.76 \times 10{-}^4 = 0.000876$

Ejercicios de repaso del capítulo 1

[1.2] *Escribe cada conjunto en forma de lista.*

1. $A = \{x \mid x$ es un número natural entre 3 y 10$\}$

2. $B = \{x \mid x$ es un número entero positivo múltiplo de 3$\}$

Sea N = un conjunto de números naturales, W = un conjunto de números enteros positivos, I = un conjunto de números enteros, Q = un conjunto de números racionales, H = un conjunto de números irracionales y $\mathbb{R}$ = un conjunto de números reales. Determina si el primer conjunto es un subconjunto del segundo para cada par de conjuntos.

3. $Q, \mathbb{R}$

4. N, W

5. Q, H

6. $H, \mathbb{R}$

Considera el conjunto de números $\left\{-2, 4, 6, \frac{1}{2}, \sqrt{7}, \sqrt{3}, 0, \frac{15}{27}, -\frac{1}{5}, 1.47\right\}$. *Indica los elementos del conjunto que sean*

7. números naturales.

8. números enteros positivos.

9. números enteros.

10. números racionales.

11. números irracionales.

12. números reales.

Indica si la proposición es verdadera o falsa.

13. $\frac{0}{1}$ no es un número real.

14. Un número real no se puede dividir entre 0.

15. $0, \frac{3}{5}, -2,$ y 4 son números racionales.

16. Todo número racional e irracional es un número real.

Determina $A \cup B$ y $A \cap B$ para cada conjunto de A y B.

17. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

18. $A = \{3, 5, 7, 9\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$

19. $A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}, B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

20. $A = \{4, 6, 9, 10, 11\}, B = \{3, 5, 9, 10, 12\}$

Ilustra cada conjunto en la recta numérica.

21. $\{x|x > 5\}$

22. $\{x|x \leq -2\}$

23. $\{x|-1.3 < x \leq 2.4\}$

24. $\left\{x \,\middle|\, \frac{2}{3} \leq x < 4 \text{ y } x \in N\right\}$

[1.3] *Coloca <, > o = en el área sombreada entre los dos números para que cada proposición sea verdadera.*

25. $-3 \;\square\; 0$

26. $-4 \;\square\; -3.9$

27. $1.06 \;\square\; 1.6$

28. $|-8| \;\square\; 8$

29. $|-4| \;\square\; |-10|$

30. $13 \;\square\; |-9|$

31. $\left|-\frac{2}{3}\right| \;\square\; \frac{3}{5}$

32. $-|-2| \;\square\; -6$

Escribe los números en cada lista de menor a mayor.

33. $\pi, -\pi, -3, 3$

34. $0, \frac{3}{5}, 2.7, |-3|$

35. $|-10|, |-5|, 3, -2$

36. $|-3|, -7, |-7|, -3$

37. $-4, 6, -|-3|, 5$

38. $|1.6|, |-2.3|, -2, 0$

Nombra cada propiedad.

39. $-7(x + 5) = -7x - 35$

40. $rs = sr$

41. $(x + 4) + 2 = x + (4 + 2)$

42. $p + 0 = 0$

43. $8(rs) = (8r)s$

44. $-(-6) = 6$

45. $11(0) = 0$

46. $b + (-b) = 0$

47. $x \cdot \frac{1}{x} = 1$

48. $k + l = 1 \cdot (k + l)$

[1.3, 1.4] *Evalúa.*

49. $5 + 3^2 - \sqrt{36} \div 2$

50. $-4 \div (-2) + 16 - \sqrt{81}$

51. $(7 - 9) - (-3 + 5) + 16$

52. $2|-7| - 4|-6| + 7$

53. $(6 - 9) \div (9 - 6) + 3$

54. $|6 - 3| \div 3 + 4 \cdot 8 - 12$

55. $\sqrt{9} + \sqrt[3]{64} + \sqrt[5]{32}$

56. $3^2 - 6 \cdot 9 + 4 \div 2^2 - 15$

57. $4 - (2 - 9)^0 + 3^2 \div 1 + 3$

58. $5^2 + (-2 + 2^2)^3 + 9$

59. $-3^2 + 14 \div 2 \cdot 3 - 8$

60. $\{[(12 \div 4)^2 - 1]^2 \div 16\}^3$

61. $\dfrac{9 + 7 \div (3^2 - 2) + 6 \cdot 8}{\sqrt{81} + \sqrt{1} - 10}$

62. $\dfrac{-(5 - 7)^2 - 3(-2) + |-6|}{18 - 9 \div 3 \cdot 5}$

Evalúa.

63. Evalúa $2x^2 + 3x + 8$ cuando $x = 2$.

64. Evalúa $5a^2 - 7b^2$ cuando $a = -3$ y $b = -4$.

65. Campaña política El costo de las campañas políticas ha cambiado de forma drástica desde 1952. La cantidad gastada, en millones de dólares, en todas las elecciones de Estados Unidos –incluyendo locales, estatales, y nacionales; partidos políticos; comités de acción política y boletas electorales– es aproximadamente de

$$\text{dólares gastados} = 50.86x^2 - 316.75x + 541.48$$

donde x representa el número de periodos de 4 años desde 1948. Sustituir x por 1 para determinar la cantidad gastada en 1952, x por 2 para determinarla en 1956, x por 3 para determinarla en 1960 y así sucesivamente.

a) Determina la cantidad gastada en las elecciones de 1976.

b) Determina la cantidad que se supone se habría gastado en las elecciones de 2008.

66. Tráfico ferroviario El uso de trenes ha ido incrementando constantemente desde 1965. Este incremento se debe principalmente a que se utiliza para transportar bienes por medio de contenedores. Podemos aproximar la cantidad de carga transportada en toneladas-millas (una tonelada-milla equivale a una tonelada de carga transportada una milla) mediante

$$\text{carga transportada} = 14.04x^2 + 1.96x + 712.05$$

donde x representa el número de periodos de 5 años desde 1960. Sustituir x por 1 para determinar la cantidad de carga transportada en 1965, x por 2 para determinarla en 1970, x por 3 para determinarla en 1975 y así sucesivamente.

a) Determina la cantidad de carga transportada por trenes en 1980.

b) Determina la cantidad de carga transportada que se supone fue transportada por trenes en 2010.

© R Carner\Shutterstock

[1.5] *Simplifica cada expresión y escribe la respuesta sin exponentes negativos.*

67. $2^3 \cdot 2^2$ **68.** $x^2 \cdot x^3$ **69.** $\dfrac{a^{12}}{a^4}$ **70.** $\dfrac{y^{12}}{y^5}$

71. $\dfrac{b^7}{b^{-2}}$ **72.** $c^3 \cdot c^{-6}$ **73.** $5^{-2} \cdot 5^{-1}$ **74.** $8x^0$

75. $(-9m^3)^2$ **76.** $\left(\dfrac{5}{7}\right)^{-1}$ **77.** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$ **78.** $\left(\dfrac{x}{y^2}\right)^{-1}$

79. $(5xy^3)(-3x^2y)$ **80.** $(2v^3w^{-4})(7v^{-6}w)$ **81.** $\dfrac{6x^{-3}y^5}{2x^2y^{-2}}$ **82.** $\dfrac{12x^{-3}y^{-4}}{4x^{-2}y^5}$

83. $\dfrac{g^3h^{-6}j^{-9}}{g^{-2}h^{-1}j^5}$ **84.** $\dfrac{21m^{-3}n^{-2}}{7m^{-4}n^2}$ **85.** $\left(\dfrac{4a^2b}{a}\right)^3$ **86.** $\left(\dfrac{x^5y}{-3y^2}\right)^2$

87. $\left(\dfrac{p^3q^{-1}}{p^{-4}q^5}\right)^2$ **88.** $\left(\dfrac{-2ab^{-3}}{c^2}\right)^3$ **89.** $\left(\dfrac{5xy^3}{z^2}\right)^{-2}$ **90.** $\left(\dfrac{9m^{-2}n}{3mn}\right)^{-3}$

91. $(-2m^2n^{-3})^{-2}$ **92.** $\left(\dfrac{15x^5y^{-3}z^{-2}}{-3x^4y^{-4}z^3}\right)^4$ **93.** $\left(\dfrac{2x^{-1}y^5z^4}{3x^4y^{-2}z^{-2}}\right)^{-2}$ **94.** $\left(\dfrac{10x^{-2}y^{-2}z}{-x^4y^{-4}z^3}\right)^{-1}$

[1.6] *Expresa cada número en notación científica.*

95. 0.0000742 **96.** 460,000 **97.** 183,000 **98.** 0.000002

Simplifica cada expresión y expresa la respuesta sin exponentes.

99. $(25 \times 10^{-3})(1.2 \times 10^6)$ **100.** $\dfrac{21 \times 10^3}{7 \times 10^5}$ **101.** $\dfrac{6{,}000{,}000}{0.02}$ **102.** $(0.004)(500{,}000)$

103. Publicidad en Internet Las tres compañías con el mayor número de personas que leyeron sus anuncios en el 2007 se listan a continuación.

Compañía	Número de personas
Google	1.107×10^9
Double Click	1.079×10^9
Yahoo	3.62×10^8

a) ¿Cuántas personas más han leído anuncios en Google que en Double Click?

b) ¿Cuántas personas más han leído anuncios en Google que en Yahoo?

c) ¿Cuál es el número total de personas que leyeron anuncios en las tres compañías?

104. Voyager El 17 de Febrero de 1998, la nave espacial *Voyager 1* se convirtió en el explorador con mayor distancia recorrida en el sistema solar, rompiendo el récord del *Pioneer 10*. Con 28 años de edad, el *Voyager 1* ha viajado más de 1.4×10^{10} kilómetros desde la Tierra (cerca de 150 veces la distancia de la Tierra al Sol).

a) Representa 1.4×10^{10} como un número entero.

b) ¿Cuántos billones de kilómetros ha viajado el *Voyager 1*?

c) Asumiendo que el *Voyager 1* viajó los mismos kilómetros en cada uno de los 28 años, ¿cuántos kilómetros promedió en un año?

d) Si 1 kilómetro equivale a 0.6 millas, ¿qué tan lejos, en millas, viajó el *Voyager 1?*

Prueba de práctica del capítulo 1

Los videos de la prueba de práctica del capítulo proporcionan soluciones totalmente resueltas para cualquiera de los ejercicios que quieras repasar. Los videos de la prueba de práctica del capítulo están disponibles vía MyMathLab, o en YouTube (busca "Angel Intermediate Algebra" y da click en "Channels").

1. Escribe en forma de lista $A = \{x|x$ es un número natural mayor o igual a $6\}$.

Indica si la proposición es verdadera o falsa.

2. Cada número real es un número racional.
3. La unión del conjunto de números racionales y el conjunto de números irracionales es un conjunto de números reales.

Considera el conjunto de números $\left\{-\frac{3}{5}, 2, -4, 0, \frac{19}{12}, 2.57, \sqrt{8}, \sqrt{2}, -1.92\right\}$. *Lista los elementos del conjunto que son*

4. números racionales.
5. números reales.

Determina $A \cup B$ y $A \cap B$ para los conjuntos A y B.

6. $A = \{8, 10, 11, 14\}, B = \{5, 7, 8, 9, 10\}$
7. $A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}, B = \{3, 5, 7, 9, 11\}$

En los ejercicios 8 y 9, ilustra cada conjunto en la recta numérica.

8. $\{x| -2.3 \le x < 5.2\}$
9. $\left\{x \,\middle|\, -\frac{5}{2} < x < \frac{6}{5} \text{ y } x \in I\right\}$
10. Ordena de menor a mayor: $|3|, -|4|, -2, 9$.

Da el nombre de cada propiedad ilustrada.

11. $(x + y) + 8 = x + (y + 8)$
12. $3x + 4y = 4y + 3x$

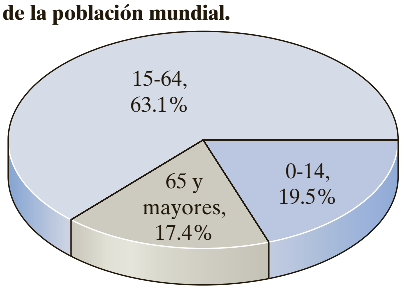
Evalúa cada expresión.

13. $\{6 - [7 - 3^2 \div (3^2 - 2 \cdot 3)]\}$
14. $2^4 + 4^2 \div 2^3 \cdot \sqrt{25} + 7$
15. $\dfrac{-3|4 - 8| \div 2 + 6}{-\sqrt{36} + 18 \div 3^2 + 4}$
16. $\dfrac{-6^2 + 3(4 - |6|) \div 6}{4 - (-3) + 12 \div 4 \cdot 5}$
17. Evalúa $-x^2 + 2xy + y^2$ cuando x =2 y $y = 3$.
18. **Bala de cañón** Para celebrar el 4 de julio, un cañón es disparado desde un fuerte hacia el océano. La altura, h, en pies, de la bala de cañón por encima del nivel del mar a cualquier tiempo t, en segundos, se puede determinar por la fórmula $h = -16t^2 + 120t + 200$. Determina la altura de la bala de cañón por encima del nivel del mar **a)** 1 segundo después de que el cañón se disparó, **b)** 5 segundos después de que el cañón se disparó.

Simplifica cada expresión y escribir la respuesta sin exponentes negativos.

19. 3^{-2}
20. $\left(\dfrac{4m^{-3}}{n^2}\right)^2$
21. $\dfrac{24a^2b^{-3}c^0}{30a^3b^2c^{-2}}$
22. $\left(\dfrac{-3x^3y^{-2}}{x^{-1}y^5}\right)^{-3}$
23. Convierte 389,000,000 en notación científica.
24. Simplifica $\dfrac{3.12 \times 10^6}{1.2 \times 10^{-2}}$ y escribe el número sin exponentes.
25. **Población mundial**
    a) Se espera que en el 2050 la población mundial sea de alrededor de 9.2 billones de personas. Escribe este número en notación científica.
    b) La siguiente gráfica muestra la distribución esperada de la población mundial en 2050 para tres grupos de edades: 0–14, 15–64 y 65 y mayores. Usa la notación científica para determinar el número de personas en cada uno de estos grupos de edades en 2050.

Distribución esperada por edades de la población mundial.



2 Ecuaciones y desigualdades

Objetivos de este capítulo

En este capítulo nos concentramos en resolver ecuaciones lineales y desigualdades, y en la utilización de ecuaciones, fórmulas y desigualdades para encontrar la solución a problemas de la vida real. Además, te presentamos una técnica efectiva para la solución de problemas que usaremos a lo largo del capítulo. Seremos testigos del poder del álgebra como herramienta para resolver problemas en una infinidad de áreas, incluyendo aplicaciones reales, química, negocios, contabilidad, física y finanzas personales.

© Monkey Bussiness Images/Glowimages

Gran parte del sueño americano es tener casa propia. Muchos factores están involucrados en el costo de obtener un préstamo para adquirir una casa. Estos factores varían en función de diferentes prestamistas. En el ejemplo 8 de la página 89, compararemos los intereses ofrecidos por dos diferentes prestamistas.

2.1 Solución de ecuaciones lineales

1 Identificar las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

2 Reducción de términos semejantes.

3 Solución de ecuaciones lineales.

4 Solución de ecuaciones con fracciones.

5 Identificar ecuaciones condicionales, inconsistentes e identidades.

6 Comprensión de conceptos para resolver ecuaciones.

1 Identificar las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva

Comenzamos revisando la solución de ecuaciones lineales. Primero estudiaremos tres propiedades de las igualdades.

Propiedades de la igualdad

Para todos los números reales a, b y c:

1. $a = a$.	Propiedad reflexiva
2. Si $a = b$, entonces $b = a$.	Propiedad simétrica
3. Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.	Propiedad transitiva

Ejemplos de la propiedad reflexiva

$$7 = 7$$

$$x + 5 = x + 5$$

Ejemplos de la propiedad simétrica

Si $x = 3$, entonces $3 = x$.

Si $y = x + 9$, entonces $x + 9 = y$.

Ejemplos de la propiedad transitiva

Si $x = a$ y $a = 4y$, entonces $x = 4y$.

Si $a + b = c$ y $c = 4d$, entonces $a + b = 4d$.

En adelante utilizaremos con frecuencia estas propiedades sin referirnos a ellas por su nombre.

2 Reducción de términos semejantes

Cuando una ecuación algebraica se compone de diferentes partes, las partes que se suman son llamados **términos** de la expresión.

La expresión $3x^2 - 6x - 2$

puede ser escrita como: $\underbrace{3x^2}_{\text{término}} + \underbrace{(-6x)}_{\text{término}} + \underbrace{(-2)}_{\text{término}}$

tiene 3 términos.

Expresiones	Términos
$\frac{1}{2}x^2 - 3x - 7$	$\frac{1}{2}x^2$, $-3x$, -7
$-5x^3 + 3x^2y - 2$	$-5x^3$, $3x^2y$, -2
$4(x + 3) + 2x + \frac{1}{5}(x - 2) + 1$	$4(x + 3)$, $2x$, $\frac{1}{5}(x - 2)$, 1

La parte numérica de un término se denomina **coeficiente numérico** o simplemente **coeficiente**. En el término $6x^2$, el número 6 es el coeficiente numérico.

Términos	Coeficiente numérico
$x = 1 \cdot x$	1
$-a^2 = -1 \cdot a^2$	-1
$\dfrac{5k}{9} = \dfrac{5}{9}k$	$\dfrac{5}{9}$
$\dfrac{-6xyz}{7} = -\dfrac{6}{7} \cdot xyz$	$-\dfrac{6}{7}$
$8 = 8x^0$	8

Cuando un término solo consiste de un número, ese número es llamado **constante**. Por ejemplo, en la expresión $x^2 - 4$, el -4 es una constante.

El **grado de un término** con exponentes de números enteros positivos es la suma de los exponentes de la variable del término. Por ejemplo, $3x^2$ es un término de segundo grado, y $-4x$ es un término de primer grado.

Término	Grado
x^2	2
$3x = 3x^1$	1
$6 = 6x^0$	0
$4xy^5 = 4x^1y^5$	$1 + 5 = 6$
$6x^3y^5$	$3 + 5 = 8$

Comprendiendo el álgebra

Los términos semejantes son términos con la misma variable y con los mismos exponentes. En otras palabras, *los términos semejantes tienen variables idénticas.*

Los **términos semejantes** son términos que tienen las mismas variables con los mismos exponentes. Por ejemplo, $3x$ y $5x$ son términos semejantes, $2x^2$ y $-3x^2$ son términos semejantes, y $3x^2y$ y $-2x^2y$ son términos semejantes. Los términos que no se parecen se conocen como **términos no semejantes**. Todas las constantes son consideradas términos semejantes.

Simplificar una expresión significa reducir (o combinar) todos los términos semejantes de dicha expresión. Para reducir los términos semejantes podemos utilizar la propiedad distributiva.

Ejemplos de reducción de términos semejantes

$$8x - 2x = (8 - 2)x = 6x$$

$$3x^2 - 5x^2 = (3 - 5)x^2 = -2x^2$$

$$-7x^2y + 3x^2y = (-7 + 3)x^2y = -4x^2y$$

Al simplificar expresiones, reacomodamos los términos usando las propiedades conmutativa y asociativa.

EJEMPLO 1 Simplifica mediante la reducción de términos semejantes.

a) $-2x + 5 + 3x - 7$ **b)** $7x^2 - 2x^2 + 3x + 4$ **c)** $2x - 3y + 4 + 5x - 6y - 3$

Solución

a) $-2x + 5 + 3x - 7 = \underbrace{-2x + 3x}_{x} \underbrace{+ 5 - 7}_{-2}$ Coloca los términos semejantes juntos.

Esta expresión se simplifica y el resultado es $x - 2$.

b) $7x^2 - 2x^2 + 3x + 4 = 5x^2 + 3x + 4$

c) $2x - 3y + 4 + 5x - 6y - 3 = 2x + 5x - 3y - 6y + 4 - 3$ Coloca los términos semejantes juntos.

$= 7x - 9y + 1$

Resuelve ahora el ejercicio 39

EJEMPLO 2 Simplifica $-2(a+7)-[-3(a-1)+8]$.

Solución

$$\begin{aligned} -2(a+7)-[-3(a-1)+8] &= -2(a+7)-1[-3(a-1)+8] \\ &= -2a-14-1[-3a+3+8] && \text{Propiedad distributiva} \\ &= -2a-14-1[-3a+11] && \text{Reducción de términos semejantes.} \\ &= -2a-14+3a-11 && \text{Propiedad distributiva} \\ &= a-25 && \text{Reducción de términos semejantes.} \end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 55

3 Solución de ecuaciones lineales

Comprendiendo el álgebra

Todas las ecuaciones deben tener un signo de igualdad.

Ecuación

Una ***ecuación*** es una expresión matemática de igualdad. *Una ecuación debe tener un signo igual* y una expresión matemática de cada lado del signo igual.

Ejemplos de ecuaciones

$$x+8=-7$$
$$2x^2-4=-3x+13$$

Los números que hacen de una ecuación una expresión verdadera son denominados **solución** de la ecuación. El **conjunto solución** de una ecuación es el conjunto de números reales que hacen verdadera la ecuación.

Ecuación	Solución	Conjunto solución
$2x+3=9$	3	$\{3\}$

Cuando dos o más ecuaciones tienen el mismo conjunto de soluciones se dice que son **ecuaciones equivalentes**. Por lo general, las ecuaciones se resuelven comenzando con una ecuación dada y produciendo una serie de ecuaciones equivalentes más simples.

Ejemplo de ecuaciones equivalentes

Ecuaciones	Conjunto solución
$2x+3=9$	$\{3\}$
$2x=6$	$\{3\}$
$x=3$	$\{3\}$

En esta sección discutiremos cómo resolver **ecuaciones lineales con una variable**. Una ecuación lineal es aquella que puede escribirse en la forma $ax+b=c$, $a \neq 0$.

Comprendiendo el álgebra

Para resolver ecuaciones lineales, usamos las propiedades de la suma y la multiplicación de la igualdad para *aislar la variable* en un lado de la igualdad.

Propiedad de la suma para la igualdad

Si $a=b$, entonces $a+c=b+c$ para cualquier a, b y c.

La propiedad de la suma para la igualdad indica que el mismo número puede ser sumado o restado en ambos lados de una ecuación sin cambiar la solución de la ecuación original.

Propiedad de la multiplicación para la igualdad

Si $a=b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$ para cualquier a, b y c.

La propiedad de la multiplicación para la igualdad señala que podemos multiplicar o dividir ambos lados de una ecuación por el mismo número sin cambiar la solución.

Cuando resolvemos una ecuación, nuestro objetivo es tener la variable completamente sola en un lado de la ecuación, es decir, *aislar la variable*.

Comprendiendo el álgebra

Cuando multiplicas ambos lados de una ecuación que tiene fracciones por el mínimo común denominador, podrás eliminar las fracciones de la ecuación.

Para resolver ecuaciones lineales

1. **Eliminar las fracciones**. Si la ecuación contiene fracciones, elimínalas multiplicando ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador.
2. **Simplifica cada lado por separado**. Simplifica cada lado de la ecuación tanto como sea posible. Usa la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis y reduce los términos semejantes cuando sea necesario.
3. **Aísla el término de la variable de un solo lado**. Utiliza la propiedad de la adición para acomodar todos los términos con variables de un lado de la ecuación y todos los términos constantes del otro lado. Para lograrlo quizá se requiera aplicar varias veces la propiedad de la suma.
4. **Despeja la variable**. Utiliza la propiedad de la multiplicación para obtener una ecuación que contenga solo la variable (con un coeficiente de 1) en un lado.
5. **Verifica**. Verifica la solución sustituyendo los valores obtenidos en el paso 4 en la ecuación original.

EJEMPLO 3 Resuelve la ecuación $2x + 9 = 14$.

Solución

$$2x + 9 = 14$$

$$2x + 9 \boxed{-9} = 14 \boxed{-9} \qquad \text{Resta 9 en ambos lados.}$$

$$2x = 5$$

$$\frac{\overset{1}{\cancel{2}}x}{\boxed{\underset{1}{\cancel{2}}}} = \frac{5}{\boxed{2}} \qquad \text{Divide ambos lados entre 2.}$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Verifica

$$2x + 9 = 14$$

$$\cancel{2}\left(\frac{5}{\cancel{2}}\right) + 9 \stackrel{?}{=} 14$$

$$5 + 9 \stackrel{?}{=} 14$$

$$14 = 14 \qquad \text{Verdadero}$$

Como el valor satisface la ecuación, la solución es $\frac{5}{2}$.

Resuelve ahora el ejercicio 61

EJEMPLO 4 Resuelve la ecuación $-2b + 8 = 3b - 7$.

Solución

$$-2b + 8 = 3b - 7$$

$$-2b \boxed{+ 2b} + 8 = 3b \boxed{+ 2b} - 7 \qquad \text{Suma } 2b \text{ en ambos lados.}$$

$$8 = 5b - 7$$

$$8 \boxed{+ 7} = 5b - 7 \boxed{+ 7} \qquad \text{Suma 7 en ambos lados.}$$

$$15 = 5b$$

$$\frac{15}{\boxed{5}} = \frac{5b}{\boxed{5}} \qquad \text{Divide ambos lados entre 5.}$$

$$3 = b$$

Resuelve ahora el ejercicio 63

El ejemplo 5 incluye números decimales. Resolveremos este problema siguiendo las instrucciones proporcionadas anteriormente. Reduce los términos semejantes de ambos lados de la ecuación antes de usar las propiedades de la suma y la multiplicación.

EJEMPLO 5 Resuelve la ecuación $4(x - 3.1) = 2.1(x - 4) + 3.5x$.

Solution

$$
\begin{aligned}
4(x - 3.1) &= 2.1(x - 4) + 3.5x \\
4(x) - 4(3.1) &= 2.1(x) - 2.1(4) + 3.5x && \text{Propiedad distributiva} \\
4x - 12.4 &= 2.1x - 8.4 + 3.5x \\
4x - 12.4 &= 5.6x - 8.4 && \text{Reduce los términos semejantes.} \\
4x - 12.4 + 8.4 &= 5.6x - 8.4 + 8.4 && \text{Suma 8.4 en ambos lados.} \\
4x - 4.0 &= 5.6x \\
4x - 4x - 4.0 &= 5.6x - 4x && \text{Resta } 4x \text{ en ambos lados.} \\
- 4.0 &= 1.6x \\
\frac{-4.0}{1.6} &= \frac{1.6x}{1.6} && \text{Divide ambos lados entre 1.6.} \\
-2.5 &= x
\end{aligned}
$$

La solución es -2.5.

Resuelve ahora el ejercicio 111

Para ahorrar espacio, no siempre mostraremos la comprobación de las soluciones; sin embargo, deberás comprobar todas tus respuestas. Cuando la ecuación tenga números decimales, puedes usar la calculadora para corroborar la solución de la ecuación y así ahorrar un poco de tiempo.

Cómo utilizar tu calculadora

Comprobación de soluciones por sustitución

Para corroborar la solución mediante el uso de la calculadora, sustituye los valores en ambos lados de la ecuación para validar que obtienes los mismos valores. La pantalla de la calculadora graficadora en la **Figura 2.1** muestra los dos lados de la ecuación dada en el ejemplo 5: son iguales a -22.4 cuando se sustituye -2.5 por x. Por lo tanto, la solución -2.5 satisface la ecuación.

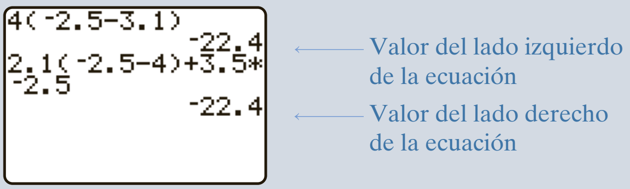


FIGURA 2.1

$$
\begin{aligned}
4(x - 3.1) &= 2.1(x - 4) + 3.5x \\
4(-2.5 - 3.1) &= 2.1(-2.5 - 4) + 3.5(-2.5)
\end{aligned}
$$

Ahora trabajaremos con un ejemplo que contiene paréntesis anidados.

EJEMPLO 6 Resuelve la ecuación $7c - 15 = -2[6(c - 3) - 4(2 - c)]$.

Solución

$$
\begin{aligned}
7c - 15 &= -2[6(c - 3) - 4(2 - c)] \\
7c - 15 &= -2[6c - 18 - 8 + 4c] && \text{Propiedad distributiva} \\
7c - 15 &= -2[10c - 26] && \text{Reduce los términos semejantes.} \\
7c - 15 &= -20c + 52 && \text{Propiedad distributiva}
\end{aligned}
$$

$$7c + 20c - 15 = -20c + 20c + 52 \qquad \text{Suma } 20c \text{ en ambos lados.}$$
$$27c - 15 = 52$$
$$27c - 15 + 15 = 52 + 15 \qquad \text{Suma 15 en ambos lados.}$$
$$27c = 67$$
$$\frac{27c}{27} = \frac{67}{27} \qquad \text{Divide ambos lados entre 27.}$$
$$c = \frac{67}{27}$$

Resuelve ahora el ejercicio 91

Al resolver las siguientes ecuaciones omitiremos algunos pasos intermedios. Ahora ilustraremos cómo se hace.

Solución		Solución abreviada
a) $x + 4 = 6$ $x + 4 - 4 = 6 - 4$ $x = 2$	← Realiza mentalmente este paso.	**a)** $x + 4 = 6$ $x = 2$
b) $3x = 6$ $\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$ $x = 2$	← Realiza mentalmente este paso.	**b)** $3x = 6$ $x = 2$

4 Solución de ecuaciones con fracciones

Cuando una ecuación contiene fracciones, empezamos multiplicando *ambos* lados de la ecuación por el mínimo común denominador.

Mínimo común denominador

El **mínimo común denominador** (MCD) de un conjunto de denominadores es el número más pequeño que ambos denominadores pueden dividir sin dejar como resultado un residuo.

Por ejemplo, si el denominador de dos fracciones son 4 y 6, entonces 12 es el mínimo común denominador, ya que es el número más pequeño que los denominadores 4 y 6 pueden dividir sin dejar un residuo como resultado.

Comprendiendo el álgebra

Después de multiplicar ambos lados de la ecuación por el MCD, la ecuación no deberá contener ninguna fracción.

EJEMPLO 7 Resuelve la ecuación $5 - \frac{2a}{3} = -9$.

Solución El mínimo común denominador es 3. Multiplica ambos lados de la ecuación por 3, después usa la propiedad distributiva del lado izquierdo de la igualdad. *Este proceso eliminará todas las fracciones de la ecuación.*

$$5 - \frac{2a}{3} = -9$$
$$3\left(5 - \frac{2a}{3}\right) = 3(-9) \qquad \text{Multiplica ambos lados por 3.}$$
$$3(5) - \overset{1}{\cancel{3}}\left(\frac{2a}{\underset{1}{\cancel{3}}}\right) = -27 \qquad \text{Propiedad distributiva}$$
$$15 - 2a = -27$$
$$15 - 15 - 2a = -27 - 15 \qquad \text{Resta 15 en ambos lados.}$$
$$-2a = -42$$
$$\frac{-2a}{-2} = \frac{-42}{-2} \qquad \text{Divide ambos lados entre } -2.$$
$$a = 21$$

Resuelve ahora el ejercicio 97

EJEMPLO 8 Resuelve la ecuación $\frac{1}{2}(x + 4) = \frac{1}{3}x$.

Solución Empieza multiplicando ambos lados de la igualdad por 6, el MCD de 2 y 3.

$$6\left[\frac{1}{2}(x + 4)\right] = 6\left(\frac{1}{3}x\right) \quad \text{Multiplica ambos lados por 6.}$$

$$3(x + 4) = 2x \quad \text{Simplifica.}$$

$$3x + 12 = 2x \quad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$3x - 2x + 12 = 2x - 2x \quad \text{Resta } 2x \text{ en ambos lados.}$$

$$x + 12 = 0$$

$$x + 12 - 12 = 0 - 12 \quad \text{Resta 12 en ambos lados.}$$

$$x = -12$$

Resuelve ahora el ejercicio 99

En la sección 6.4 estudiaremos ecuaciones que contienen fracciones.

5 Identificar ecuaciones condicionales, contradicciones e identidades

Todas las ecuaciones estudiadas hasta el momento han sido verdaderas sólo para un valor de la variable, estas ecuaciones se denominan **ecuaciones condicionales**. Las ecuaciones que nunca son verdaderas y no tienen solución son llamadas **contradicciones**. Otras ecuaciones, denominadas **identidades,** son siempre verdaderas y tiene un número infinito de soluciones. La **Tabla 2.1** resume estos tipos de ecuaciones lineales y su correspondiente número de soluciones.

TABLA 2.1

Tipo de ecuación lineal	Número de soluciones
Ecuación condicional	Una
Contradicción	Ninguna (conjunto solución: $\emptyset$)
Identidad	Número infinito (conjunto solución: $\mathbb{R}$)

El conjunto solución de una ecuación condicional tiene la solución dada en un conjunto entre llaves. Por ejemplo, el conjunto solución del ejemplo 8 es $\{-12\}$. El conjunto solución de una contradicción es el conjunto vacío o nulo identificado por $\{\ \}$ o $\emptyset$. El conjunto solución de una identidad es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 9 Determina si la ecuación $5(a - 3) - 3(a - 6) = 2(a + 1) + 1$ es una ecuación condicional, una contradicción o una identidad. Encuentra el conjunto solución para la ecuación.

Solución

$$5(a - 3) - 3(a - 6) = 2(a + 1) + 1$$

$$5a - 15 - 3a + 18 = 2a + 2 + 1 \quad \text{Propiedad distributiva}$$

$$2a + 3 = 2a + 3 \quad \text{Reduce los términos.}$$

A partir de que obtenemos la misma expresión en ambos lados de la ecuación, se determina que es una identidad. Esta ecuación es verdadera para todos los números reales. El conjunto solución es $\mathbb{R}$.

Resuelve ahora el ejercicio 125

En el ejemplo 9, si se hubiera resuelto la ecuación restando $2a$ en ambos lados de la igualdad, se habría obtenido la ecuación $3 = 3$. Esta ecuación además de ser una identidad, indica que el conjunto solución es $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 10 Determina si $2(3m + 1) = 6m + 3$ es una ecuación condicional, una contradicción o una identidad. Encuentra el conjunto solución para la ecuación.

Solución

$$\begin{aligned} 2(3m + 1) &= 6m + 3 \\ 6m + 2 &= 6m + 3 && \text{Propiedad distributiva} \\ 6m - 6m + 2 &= 6m - 6m + 3 && \text{Resta } 6m \text{ en ambos lados.} \\ 2 &= 3 \end{aligned}$$

Como $2 = 3$ nunca es una proposición verdadera, la ecuación es una contradicción, el conjunto solución es $\varnothing$.

Resuelve ahora el ejercicio 119

Comprendiendo el álgebra

Si al resolver una ecuación la solución no contiene variables, entonces la ecuación original es o una identidad o una contradicción. Por ejemplo, $3 = 3$ es una identidad y significa que el conjunto solución es $\mathbb{R}$; $2 = 3$ es una contradicción y significa que el conjunto solución es $\varnothing$.

6 Comprensión de conceptos para resolver ecuaciones

Los números o variables que aparecen en la ecuación no afectan los procedimientos para resolver las ecuaciones. En el siguiente ejemplo resolveremos la ecuación usando los conceptos y procedimientos hasta ahora mostrados.

EJEMPLO 11 En la siguiente ecuación, supón que $\odot$ representa la variable que resolveremos y el resto de los símbolos representan números reales diferentes de cero. Resuelve la ecuación para $\odot$.

$$\square\odot + \triangle = \#$$

Solución Para despejar $\odot$ necesitamos aislarla. Para lo cual usaremos las propiedades de la suma y la multiplicación.

$$\begin{aligned} \square\odot + \triangle &= \# \\ \square\odot + \triangle - \triangle &= \# - \triangle && \text{Resta } \triangle \text{ en ambos lados.} \\ \square\odot &= \# - \triangle \\ \frac{\square\odot}{\square} &= \frac{\# - \triangle}{\square} && \text{Divide ambos lados entre } \square. \\ \odot &= \frac{\# - \triangle}{\square} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución es $\odot = \dfrac{\# - \triangle}{\square}$.

Resuelve ahora el ejercicio 133

Considera la ecuación $5x + 7 = 12$. Si hacemos que $5 = \square$, $x = \odot$, $7 = \triangle$ y $12 = \#$, la ecuación tiene la misma forma que la ecuación del ejemplo 11. Por lo tanto, la solución será de la misma forma.

Ecuación	Solución
$\square\odot + \triangle = \#$	$\odot = \dfrac{\# - \triangle}{\square}$
$5x + 7 = 12$	$x = \dfrac{12 - 7}{5} = \dfrac{5}{5} = 1$

Si resuelves la ecuación $5x + 7 = 12$ te darás cuenta de que la solución es 1.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2.1

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

condicional	$\emptyset$	términos semejantes	identidad	mínimo común denominador	$\mathbb{R}$
términos	contradicción	grado	términos no semejantes	aislar	

1. Las partes que se suman en una expresión algebraica son llamadas ______________ de la expresión.
2. Los términos que tienen partes variables idénticas se llaman ______________.
3. El objetivo de resolver ecuaciones es ______________ la variable en uno de los lados de la ecuación.
4. Podemos eliminar fracciones en una ecuación multiplicando ambos lados de la ecuación por el ______________.
5. Una ecuación que siempre se satisface se conoce como ______________.
6. Una ecuación que se satisface solo para valores específicos de las variables es conocida como una ecuación ______________.
7. Una ecuación que nunca se satisface se conoce como ______________.
8. El ______________ de un término es la suma de los exponentes de los factores en el término.
9. El símbolo ______________ se usa para indicar que la solución establece una contradicción.
10. El símbolo ______________ se usa para indicar que la solución establece una identidad.

Practica tus habilidades

Indica para cada expresión su propiedad correspondiente.

11. Si $x = 13$, entonces $13 = x$.

12. Si $m + 2 = 3$, entonces $3 = m + 2$.

13. Si $b = c$ y $c = 9$, entonces $b = 9$.

14. Si $x + 1 = a$ y $a = 2y$, entonces $x + 1 = 2y$.

15. $a + c = a + c$

16. Si $r = 4$, entonces $r + 3 = 4 + 3$.

17. Si $x = 8$, entonces $x - 8 = 8 - 8$.

18. Si $2x = 4$, entonces $3(2x) = 3(4)$.

19. Si $5x = 4$, entonces $\frac{1}{5}(5x) = \frac{1}{5}(4)$.

20. Si $a + 2 = 4$, entonces $a + 2 - 2 = 4 - 2$.

21. Si $\frac{t}{4} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, entonces $12\left(\frac{t}{4} + \frac{1}{3}\right) = 12\left(\frac{5}{6}\right)$.

22. Si $x - 3 = x + y$ y $x + y = z$, entonces $x - 3 = z$.

23. Si $x + 3 = 7$, entonces $x = 4$.

24. Si $5x = 35$, entonces $x = 7$.

Encuentra el grado de los siguientes términos.

25. $5y$ **26.** $-2z$ **27.** $5c^3$ **28.** $-6y^2$

29. $3ab$ **30.** $\frac{1}{2}x^4y$ **31.** 6 **32.** -3

33. $-5r$ **34.** $18p^2q^3$ **35.** $5a^2b^4c$ **36.** m^4n^6

37. $3x^5y^6z$ **38.** $-2x^4y^7z^8$

Simplifica las siguientes expresiones. Si alguna no puede ser simplificada, especifícalo.

39. $7r + 3b - 11x + 12y$ **40.** $3x^2 + 4x + 5$ **41.** $-2x^2 - 5x + 7x - 3$

42. $2a^2 - 4ab + 5ab - 10b^2$ **43.** $10.6c^2 - 2.3c + 5.9c - 1.9c^2$ **44.** $7y + 3x - 7 + 5x - 2y$

45. $w^3 + w^2 - w + 1$ **46.** $b + b^2 - 4b + b^2 + 3b$ **47.** $8pq - 9pq + p + q$

48. $7x^3y^2 + 11y^3x^2$ **49.** $12\left(\frac{1}{6} + \frac{d}{4}\right) + 5d$ **50.** $4.3 - 3.2x - 2(x - 2)$

51. $3\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}x + 5$

52. $6n + 0.6(n - 3) - 5(n + 0.7)$

53. $4 - [6(3x + 2) - x] + 4$

54. $3(a + c) - 4(a + c) - 3$

55. $9x - [3x - (5x - 4y)] - 2y$

56. $-2[3x - (2y - 1) - 5x] + y$

57. $5b - \{7[2(3b - 2) - (4b + 9)] - 2\}$

58. $2\{[3a - (2b - 5a)] - 3(2a - b)\}$

59. $-\{[2rs - 3(r + 2s)] - 2(2r^2 - s)\}$

60. $p^2q + 4pq - [-(pq + 4p^2q) + pq]$

Resuelve las siguientes ecuaciones.

61. $5a - 1 = 14$ **62.** $7x - 6 - 5x = -8$ **63.** $4x - 5 = 2(x + 5)$

64. $5s - 3 = 2s + 6$ **65.** $4x - 8 = -4(2x - 3) + 4$ **66.** $8w + 7 = -3w - 15$

67. $-6(z - 1) = -5(z + 2)$ **68.** $7(x - 1) = 3(x + 2)$ **69.** $-3(t - 5) = 2(t - 5)$

70. $4(2x - 4) = -2(x + 3)$
71. $3x + 4(2 - x) = 4x + 5$
72. $6(3 - q) = -4(q + 1)$
73. $2 - (x + 5) = 4x - 8$
74. $4x - 2(3x - 7) = 2x - 6$
75. $p - (p + 4) = 4(p - 1) + 2p$
76. $8x + 2(x - 4) = 8x + 12$
77. $-3(y - 1) + 2y = 4(y - 3)$
78. $5r - 13 - 6r = 3(r + 5) - 16$
79. $6 - (n + 3) = 3n + 5 - 2n$
80. $8 - 3(2a - 4) = 5 + 3a - 4a$
81. $4(2x - 2) - 3(x + 7) = -4$
82. $-2(3w + 6) - (4w - 3) = 21$
83. $-4(3 - 4x) - 2(x - 1) = 12x$
84. $-4(2z - 6) = -3(z - 4) + z$
85. $5(a + 3) - a = -(4a - 6) + 1$
86. $3(2x - 4) + 3(x + 1) = 9$
87. $5(x - 2) - 14x = x - 5$
88. $3[6 - (h + 2)] - 6 = 4(-h + 7)$
89. $2[3x - (4x - 6)] = 5(x - 6)$
90. $-z - 6z + 3 = 4 - [6 - z - (3 - 2z)]$
91. $4\{2 - [3(c + 1) - 2(c + 1)]\} = -2c$
92. $3\{[(x - 2) + 4x] - (x - 3)\} = 4 - (x - 12)$
93. $-\{4(d + 3) - 5[3d - 2(2d + 7)] - 8\} = -10d - 6$
94. $-3(6 - 4x) = 4 - \{5x - [6x - (4x - (3x + 2))]\}$

Resuelve las siguientes ecuaciones. Si no es un valor entero, expresa tu respuesta como fracción.

95. $\dfrac{d}{5} = -7$
96. $\dfrac{7m + 9}{6} = 5$
97. $\dfrac{4x - 2}{3} = -6$
98. $\dfrac{1}{2}(6r - 10) = 7$
99. $\dfrac{3}{4}t + \dfrac{7}{8}t = 39$
100. $\dfrac{1}{4}(x - 2) = \dfrac{1}{3}(2x + 6)$
101. $\dfrac{1}{2}(x - 2) = \dfrac{1}{3}(x + 2)$
102. $\dfrac{1}{2}x + 2 = \dfrac{1}{8}x - 1$
103. $4 - \dfrac{3}{4}a = 7$
104. $x - 2 = \dfrac{3}{4}(x + 4)$
105. $\dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{5}x - \dfrac{1}{4}$
106. $\dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{6} = 2x$
107. $\dfrac{1}{4}(x + 3) = \dfrac{1}{3}(x - 2) + 1$
108. $\dfrac{5}{6}m - \dfrac{5}{12} = \dfrac{7}{8}m + \dfrac{2}{3}$

Resuelve las siguientes ecuaciones. Redondea las respuestas a la centésima más cercana.

109. $0.4n + 4.7 = 5.1n$
110. $0.2(x - 30) = 1.6x$
111. $4.7x - 3.6(x - 1) = 4.9$
112. $6.1p - 4.5(3 - 2p) = 15.7$
113. $5(z + 3.41) = -7.89(2z - 4) - 5.67$
114. $0.05(2000 + 2x) = 0.04(2500 - 6x)$
115. $0.6(500 - 2.4x) = 3.6(2x - 4000)$
116. $0.42x - x = 5.1(x + 3)$
117. $1000(7.34q + 14.78) = 100(3.91 - 4.21q)$
118. $0.6(14x - 8000) = -0.4(20x + 12{,}000) + 20.6x$

Encuentra la solución para cada ejercicio. Luego indica si la ecuación es una condicional, una identidad o una contradicción.

119. $3(y + 3) - 4(2y - 7) = -5y + 2$
120. $7x + 5 - 5(x - 3) = 5(x + 4) - 3x$
121. $7 + 3(x - 2) + 8x = 6(x + 1) + 2x - 9$
122. $-5(c + 3) + 4(c - 2) = 2(c + 2)$
123. $4 - \left(\dfrac{2}{3}x + 2\right) = 2\left(-\dfrac{1}{3}x + 1\right)$
124. $7 - \left(\dfrac{1}{2}x + 4\right) = 3\left(-\dfrac{1}{6}x + 2\right)$
125. $6\ x - 1) = -3(2 - x) + 3x$
126. $0.6(z + 5) - 0.5(z + 2) = 0.1(z - 23)$
127. $0.8z - 0.3(z + 10) = 0.5(z + 1)$
128. $4(2 - 3x) = -[6x - (8 - 6x)]$

Resolución de problemas

129. Densidad de población La densidad de la población de Estados Unidos se ha incrementado constantemente desde el año 2000. La densidad de población de Estados Unidos puede ser estimada usando la ecuación

$$P = 0.82t + 78.5$$

donde P es la densidad de población, medida en número de personas por milla cuadrada, y t es el número de años desde 2000. Usa $t = 1$ para 2001, $t = 2$ para 2002 y así sucesivamente. Si la densidad de población continúa aumentando a la tasa actual,

a) determina la densidad de población de Estados Unidos en 2008.

b) ¿en qué año la densidad de la población de Estados Unidos alcanzará 100 personas por milla cuadrada?

130. Bebés durmiendo El Dr. Richard Ferber, un pediatra experto en sueño, ha desarrollado un método* para ayudar a niños con 6 meses de edad o mayores a dormir durante la noche. El a menudo llamado "Ferberizante" invita a los padres a esperar por periodos cada vez más largos antes de entrar al cuarto del niño a consolarle el llanto. El tiempo sugerido depende de

*Antes de intentar este método, los padres lo deben consultar con su pediatra.

cuantas noches los padres han estado usando el método: para calcularlo, se utiliza la siguiente ecuación

$$W = 5n + 5$$

donde W es el tiempo de espera en minutos y n es el número de noches. Por ejemplo, en la primera noche, $n = 1$, en la segunda noche, $n = 2$, y así sucesivamente.

a) ¿Cuánto tiempo deben los padres esperar durante la primera noche?

b) ¿Cuánto tiempo deben los padres esperar durante la cuarta noche?

c) ¿En qué noche los padres deben esperar 30 minutos?

d) ¿En qué noche los padres deben esperar 40 minutos?

© Allen R. Angel

131. **Costos que se incrementan por el cuidado de la salud** Se proyecta que el gasto por el cuidado de la salud en Estados Unidos crece de acuerdo con la siguiente ecuación $C = 0.2x + 2.8$, donde C representa la cantidad total gastada en materia de salud en unidades de trillones de dólares y x representa los años transcurridos desde 2008. Usa $x = 1$ para 2009, $x = 2$ para 2010 y así sucesivamente.

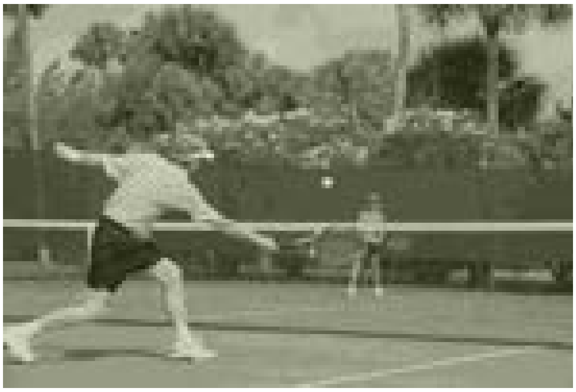
Fuente: Coalición Nacional por el Cuidado de la Salud

a) ¿Cuánto se gastó en materia de salud en Estados Unidos en 2009?

b) ¿Si esta tendencia continua, en qué año el gasto en materia de salud alcanzará los 4 trillones?

132. **Envejecimiento de la población** Se estima que el porcentaje de la población americana que es mayor de 65 años crezca de acuerdo con la siguiente ecuación $P = 1.5x + 38.7$. En donde P representa el porcentaje de la población americana mayor de 65 años y x representa los años transcurridos desde 2008. Usa $x = 1$ para 2009, $x = 2$ para 2010 y así sucesivamente.

Fuente: Academia Nacional de Ciencias



© Christian Wheatley\Shutterstock

a) ¿Cuál es el porcentaje de americanos mayores de 65 años en 2009?

b) ¿En qué año se estima que el porcentaje de americanos mayores de 65 años alcanzará el 50%?

Resuelve cada ecuación para el símbolo dado. Asume que el símbolo que estás resolviendo representa la variable y que los demás símbolos representan números reales diferentes de cero. Ver el Ejemplo 11.

133. Resuelve $\circledast\triangle - \square = \odot$ para $\triangle$.

134. Resuelve $\triangle(\odot + \square) = \otimes$ para $\triangle$.

135. Resuelve $\odot\square + \triangle = \otimes$ para $\odot$.

136. Resuelve $\triangle(\odot + \square) = \otimes$ para $\square$.

Ejercicios de conceptos y escritura

137. Considera la ecuación $2x = 5$. Proporciona tres ecuaciones equivalentes. Explica por qué son equivalentes.

138. Considera la ecuación $x = 4$. Proporciona tres ecuaciones equivalentes. Explica por qué son equivalentes.

139. Construye una ecuación que lleve a una contradicción. Explica cómo creaste la contradicción.

140. Construye una ecuación que lleve a una identidad. Explica cómo creaste la ecuación.

141. Crea una ecuación con dos términos del lado izquierdo del signo igual y tres términos a la derecha del signo igual que sea equivalente a la siguiente ecuación $\frac{1}{2}p + 3 = 6$.

142. Crea una ecuación con tres términos del lado izquierdo del signo igual y dos términos a la derecha del signo que sea equivalente a la siguiente ecuación $3m + 1 = m + 5$.

143. Considera la ecuación $2(a + 5) + n = 4a - 8$. ¿Qué valor debe tomar n para que la solución sea -2? Explica cómo determinaste tu respuesta.

144. Considera la ecuación $-3(x + 2) + 5x + 12 = n$. ¿Qué valor debe tomar n para que la solución sea 6? Explica cómo determinaste tu respuesta.

Ejercicios de repaso acumulados

[1.3] **145.** **a)** Explica cómo encontrar el valor absoluto de un número.

b) Escribe la definición de valor absoluto.

[1.4] *Evalúa.*

146. **a)** -3^2

b) $(-3)^2$

147. $\sqrt[3]{-125}$

148. $\left(-\frac{2}{7}\right)^2$

2.2 Solución de problemas y uso de fórmulas

1 Uso del procedimiento para la solución de problemas.

2 Despejar una variable de una ecuación o fórmula.

1 Uso del procedimiento para la solución de problemas

Una de las razones principales para estudiar matemáticas es que las podemos utilizar para resolver problemas de la vida diaria. Para resolver la mayoría de los problemas de aplicación matemática, necesitamos ser capaces de representar el problema mediante símbolos matemáticos usando expresiones o ecuaciones, y cuando lo hacemos, creamos un **modelo matemático** de la situación.

En esta sección, presentamos el procedimiento para la resolución de problemas y analizamos fórmulas. Una **fórmula** es una ecuación que representa el modelo matemático de una situación de la vida real. A lo largo del libro resolveremos problemas, en donde determinaremos una ecuación o una fórmula que representen o modelen situaciones de la vida cotidiana.

Puedes abordar cualquier problema usando el procedimiento de solución de problemas de cinco pasos desarrollado por George Pólya, presentado en su libro *How to Solve it*.

Guía para la resolución de problemas

1. **Entiende el problema.**
   - Lee el problema **con detenimiento** al menos dos veces. En la primera lectura obtén una visión general del problema. En la segunda lectura, determina (a) exactamente lo que se te pide calcular y (b) qué información proporciona el problema.
   - De ser posible, has un bosquejo para ilustrar el problema. Etiqueta la información obtenida.
   - Anota en forma de lista la información que te pueda ayudar en la solución del problema.
2. **Traduce el problema a lenguaje matemático**.
   - A menudo esto implicará expresar el problema de manera algebraica.
   - En algunas ocasiones esto implicará utilizar una fórmula en particular, mientras que en otras debes generar tu propia ecuación. Puede ser necesario que consultes otras fuentes para el uso apropiado de las fórmulas.
3. **Lleva a cabo los cálculos matemáticos necesarios para resolver el problema**.
4. **Verifica la respuesta obtenida en el paso 3**.
   - Pregúntate: "¿Tiene sentido la respuesta?", "¿La respuesta es razonable?" Si la respuesta no lo es, verifica nuevamente tu método para la solución del problema y tus cálculos.
   - De ser posible verifica la solución en el problema original.
5. **Responde la pregunta**. Asegúrate de haber respondido la pregunta. Establece las respuestas con claridad.

En los siguientes ejemplos se muestra cómo aplicar la guía para la resolución de problemas. Cuando sea necesario proporcionaremos los pasos en los ejemplos para ilustrar el método de los cinco pasos.

Como se indicó en el paso dos de la guía para la resolución de problemas –*traduce el problema a lenguaje matemático*–, en algunas ocasionas necesitaremos encontrar y usar una *fórmula*. En esta sección te mostraremos cómo hacerlo.

EJEMPLO 1 **Préstamo personal** Diane Basile hace un préstamo personal por \$5000 con un interés simple de 4% a su hermano, Bob Basile, por un periodo de 5 años.

a) Al término de 5 años, ¿qué interés le pagará Bob a Diane?

b) Cuando Bob pague su deuda transcurridos 5 años, ¿cuánto dinero, en total, debe pagar a Diane?

Solución **a)** Entiende Cuando una persona obtiene un préstamo con interés simple, ésta deberá pagar tanto el interés como el capital (la cantidad original que le fue prestada) a la fecha de vencimiento del préstamo. En este caso, el interés simple tiene una tasa de 4% y el préstamo es por 5 años.

Traduce La **fórmula de interés simple** es:

$$\text{interés} = \text{capital} \cdot \text{tasa} \cdot \text{tiempo} \quad \text{o} \quad i = prt$$

Donde i = interés simple

p = capital

r = tasa de interés escrito en forma decimal

t = tiempo

Observa que la tasa y el tiempo se representan en las mismas unidades de tiempo. Regularmente usaremos años. En este problema $p = \$5000$, $r = 0.04$ y $t = 5$. Obtendremos el interés simple, i, substituyendo estos valores en la fórmula de interés simple.

Realiza los cálculos

$$\begin{aligned} i &= ptr \\ &= 5000(0.04)(5) \\ &= 1000 \end{aligned}$$

Verifica La respuesta parece razonable, ya que Bob pagará \$1000 por el uso de \$5000 por 5 años.

Responde El interés simple generado es \$1000.

b) Bob debe pagar el capital que le prestaron, \$5000, más el interés determinado en el inciso **a)** \$1000. Por lo tanto, cuando Bob salde su deuda deberá pagarle a Diane \$6000.

Resuelve ahora el ejercicio 67

EJEMPLO 2 **Certificado de depósito** Pola Sommers recibe un bono de vacaciones por \$ 1350 e invierte el dinero en un certificado de depósito (CD) a una tasa de interés anual de 3.6% compuesto de forma mensual por 18 meses.

a) ¿Qué valor tendrá el CD después de 18 meses?

b) ¿Cuánto ganará de interés durante los 18 meses?

Solución **a)** Entiende El **interés compuesto** significa que obtienes intereses de tu inversión por un periodo de tiempo. Entonces, en el siguiente periodo obtendrás el interés sobre la inversión, más el interés sobre el interés que se pagó en el primer periodo. Este proceso continúa para cada periodo.

Traduce La **fórmula de interés compuesto** es:

$$A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

donde A = la cantidad acumulada, o el balance, en la cuenta

p = el capital, o la inversión inicial

r = la tasa de interés expresada en forma decimal

n = el número de veces por año que el interés es compuesto

t = tiempo medido en años

En este problema, tenemos que $p = \$1350$, $r = 3.6\%$, $n = 12$ (considerando que un año tiene 12 meses), y $t = 1.5 \left(18 \text{ meses } = \frac{18}{12} = 1.5 \text{ años}\right)$. Sustituye estos valores en la fórmula y realiza los cálculos.

$$A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Realiza los cálculos
$$= 1350\left(1 + \frac{.036}{12}\right)^{12(1.5)}$$
$$= 1350(1 + 0.003)^{18}$$
$$= 1350(1.003)^{18}$$
$$\approx 1350(1.05539928) \quad \text{Realizado en una calculadora}$$
$$\approx 1424.79 \quad \text{Redondeado al centavo más cercano}$$

Verifica La respuesta \$1424.79 es razonable, ya que es más de lo que Pola invirtió originalmente.

Responde El CD de Pola tendrá un valor de \$1424.79 al final de los 18 meses.

b) Entiende El interés será la diferencia entre la cantidad original invertida y el valor del certificado de depósito al final de los 18 meses.

Traduce
$$\text{interés} = \left(\begin{array}{c}\text{valor del certificado de}\\ \text{depósito después de 18 meses}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{monto invertido}\\ \text{originalmente}\end{array}\right)$$

Realiza los cálculos $= 1424.79 - 1350 = 74.79$

Verifica El monto del interés es razonable y la aritmética es fácil de verificar.

Responde El interés ganado en el periodo de 18 meses será \$74.79.

Resuelve ahora el ejercicio 77.

El siguiente ejemplo involucra una fórmula que contiene subíndices. Los **subíndices** son números (u otras variables) localizados debajo y a la derecha de las variables. Por ejemplo, si una fórmula contiene la velocidad original y final, ambas velocidades son simbolizadas como V_0 y V_f, respectivamente. Los subíndices se leen usando el sufijo "sub". Por ejemplo V_f se lee "*V* subíndice *f*" y x_2 se lee como "*x* subíndice 2".

EJEMPLO 3 **Comparación de inversiones** Sharon Griggs se encuentra en el rango de ingresos con impuestos federales de 25%, y aún no decide si invertir en bonos municipales libres de impuestos con una tasa de interés de 2.24% o en certificados de depósito gravables con una tasa de 3.70%.

a) Determina la tasa de interés gravable equivalente a 2.24% libre de impuestos para Sharon.

b) Si ambas inversiones fueran por el mismo periodo, ¿cuál proporcionaría a Sharon el mayor rendimiento?

Solución **a)** Entiende Algunos de los intereses que recibimos, como los bonos municipales, son libres de impuestos. Otros intereses que recibimos, como cuentas de ahorro o certificados de depósito, son gravables en nuestros impuestos. Pagar impuestos sobre el interés tiene el efecto de reducir la cantidad de dinero que en realidad obtenemos de los intereses. Necesitamos determinar la tasa de interés gravable que es equivalente a 2.24% libre de impuestos para Sharon, quien se encuentra en el rango de ingresos con tasa de impuestos de 25%.

Traduce La fórmula utilizada para comparar tasas de interés gravable y tasas de interés libre de impuestos es

$$T_f = T_a(1 + F)$$

donde T_f es la tasa libre de impuestos, T_a es la tasa de interés gravable y F es el rango de ingresos con tasa de impuestos federales. Para determinar la tasa de interés gravable T_a, sustituye los valores apropiados en la fórmula y resuelve para T_a.

$$T_f = T_a(1 - F)$$
$$0.0224 = T_a(1 - 0.25)$$

Realiza los cálculos
$$0.0224 = T_a(0.75)$$
$$\frac{0.0224}{0.75} = T_a$$
$$0.0299 \approx T_a \quad \text{Redondeado a cuatro decimales}$$

Verifica El resultado, 0.0299 o 2.99%, parece razonable porque es mayor que 2.24%, que es lo que esperábamos.

Responde La tasa de interés gravable alrededor de 2.99% le daría a Sharon aproximadamente el mismo interés que una inversión libre de impuestos de 2.24%.

b) Nos piden determinar cuál inversión proporcionaría a Sharon el mayor rendimiento.

Como lo vimos en el inciso **a)**, la tasa gravable equivalente a los bonos municipales es 2.99%. La tasa sujeta a impuestos del certificado de depósito es 3.70%. Por lo tanto, el certificado de depósito que paga 3.70% le dará a Sharon el mayor rendimiento de su inversión comparado con el bono municipal libre de impuestos que paga 2.24%

Resuelve ahora el ejercicio 83

2 Despejar una variable en una ecuación o fórmula

En muchas ocasiones podrías tener una ecuación o una fórmula con tenga la variable despejada; sin embargo, querrás despejar una variable diferente. Tomando en cuenta que las fórmulas son ecuaciones, usaremos el mismo procedimiento usado para despejar una variable de una ecuación en una fórmula.

Cuando tengas una ecuación (o fórmula) con una variable despejada y quieras despejar para otra variable, trata cada variable de la ecuación, excepto la que quieras despejar, como si fueran constantes. Entonces *aísla la variable* que requieras despejar usando los procedimientos similares a los que se usan para resolver ecuaciones.

EJEMPLO 4 Despeja y de la ecuación $5x - 8y = 32$.

Solución Despejaremos la variable y aislando el término que contiene a y del lado izquierdo de la ecuación.

$$5x - 8y = 32$$

$$5x \boxed{-5x} - 8y = \boxed{-5x} + 32 \qquad \text{Resta } 5x \text{ en ambos lados.}$$

$$-8y = -5x + 32$$

$$\frac{-8y}{\boxed{-8}} = \frac{-5x + 32}{\boxed{-8}} \qquad \text{Divide ambos lados entre } -8.$$

$$y = \frac{-5x + 32}{-8}$$

$$y = \frac{-1(-5x + 32)}{-1(-8)} \qquad \text{Multiplica el numerador y el denominador por } -1.$$

$$y = \frac{5x - 32}{8} \quad \text{o} \quad y = \frac{5}{8}x - 4$$

Resuelve ahora el ejercicio 29

EJEMPLO 5 Despeja y de la ecuación $2y - 3 = \frac{1}{2}(x + 3y)$.

Solución Comenzamos multiplicando ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador, 2.

$$2y - 3 = \frac{1}{2}(x + 3y)$$

$$\boxed{2}(2y - 3) = \boxed{\cancel{2}}\left[\frac{1}{\cancel{2}}(x + 3y)\right] \qquad \text{Multiplica ambos lados por el MCD, 2.}$$

$$4y - 6 = x + 3y \qquad \text{Propiedad distributiva}$$

$$4y \boxed{-3y} - 6 = x + 3y \boxed{-3y} \qquad \text{Resta } 3y \text{ en ambos lados.}$$

$$y - 6 = x$$

$$y - 6 \boxed{+6} = x \boxed{+6} \qquad \text{Suma 6 en ambos lados.}$$

$$y = x + 6$$

Resuelve ahora el ejercicio 35

Ahora despejemos una variable de una fórmula. Recuerda: nuestra meta es aislar la variable que estamos despejando.

EJEMPLO 6 La fórmula del perímetro de un rectángulo es $P = 2l + 2w$, donde l es el largo y w es el ancho del rectángulo (ver **Figura 2.2**). De esta fórmula despeja el ancho w.

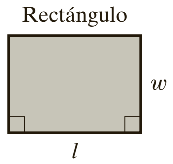


FIGURA 2.2

Solución Ya que despejaremos w, debemos aislar w de un lado de la ecuación.

$$P = 2l + 2w$$

$$P - 2l = 2l - 2l + 2w \qquad \text{Resta } 2l \text{ en ambos lados.}$$

$$P - 2l = 2w$$

$$\frac{P - 2l}{2} = \frac{2w}{2} \qquad \text{Divide entre 2 en ambos lados.}$$

$$\frac{P - 2l}{2} = w$$

Por lo tanto, $w = \dfrac{P - 2l}{2}$ o $w = \dfrac{P}{2} - \dfrac{2l}{2} = \dfrac{P}{2} - l$.

Resuelve ahora el ejercicio 49

EJEMPLO 7 La fórmula utilizada para encontrar el área de un trapezoide es $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$, donde h es la altura y, b_1 y b_2 son las longitudes de las bases del trapezoide (ver **Figura 2.3**) Despeja b_2 de la fórmula.

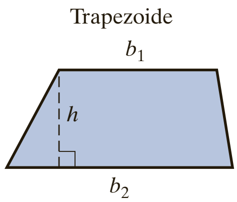


FIGURA 2.3

Solución Comenzamos multiplicando ambos lados de la ecuación por el MCD, 2, para eliminar las fracciones.

$$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$

$$2 \cdot A = \cancel{2}\left[\frac{1}{\cancel{2}}h(b_1 + b_2)\right] \qquad \text{Multiplica ambos lados por 2.}$$

$$2A = h(b_1 + b_2)$$

$$\frac{2A}{h} = \frac{h(b_1 + b_2)}{h} \qquad \text{Divide entre } h \text{ en ambos lados.}$$

$$\frac{2A}{h} = b_1 + b_2$$

$$\frac{2A}{h} - b_1 = b_1 - b_1 + b_2 \qquad \text{Resta } b_1 \text{ de ambos lados.}$$

$$\frac{2A}{h} - b_1 = b_2$$

Resuelve ahora el ejercicio 57

EJEMPLO 8 En el ejemplo 3 de la página 77 mostramos la fórmula $T_f = T_a(1 - F)$.

a) Despeja T_a de esta fórmula.

b) John y Dorothy Cutter están en el rango de ingresos con 33% de impuestos. ¿Cuál es el monto gravable equivalente a 2.6% del rendimiento libre de impuestos?

Solución

a) Deseamos despejar T_a de esta fórmula. Por lo tanto, trataremos al resto de variables de la ecuación como si fueran constantes. Como T_a está multiplicando a $(1 - F)$, para aislar T_a dividimos ambos lados de la ecuación entre $1 - F$.

$$T_f = T_a(1 - F)$$

$$\frac{T_f}{1 - F} = \frac{T_a\cancel{(1 - F)}}{\cancel{1 - F}} \qquad \text{Divide ambos lados entre } 1 - F.$$

$$\frac{T_f}{1 - F} = T_a \quad \text{o} \quad T_a = \frac{T_f}{1 - F}$$

b) Sustituye los valores apropiados en la fórmula encontrada en el inciso **a)**.

$$T_a = \frac{T_f}{1 - F}$$

$$T_a = \frac{0.026}{1 - 0.33} = \frac{0.026}{0.67} \approx 0.039$$

Por lo tanto, el rendimiento gravable equivalente sería alrededor de 3.9%.

Resuelve ahora el ejercicio 63

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2.2

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

fórmula	modelo matemático	entender	traducir
checar	subíndice	superíndice	

1. Expresar un problema usando símbolos matemáticas es crear un ______________.
2. El número o variable colocado abajo a la derecha de las variables es un ______________.
3. Expresar un problema algebraicamente es ______________ el problema a lenguaje matemático.
4. El primer paso en nuestro procedimiento de resolución de problemas es ______________ el problema.
5. Para ______________ una respuesta nos preguntamos primero "¿La respuesta tiene sentido?".
6. Una ______________ es una ecuación que es un modelo matemático de una situación de la vida real.

Practica tus habilidades

Evalúa las siguientes fórmulas para los valores dados. Usa la tecla $\boxed{\pi}$ *en tu calculadora para evaluar* π *cuando lo necesites. Redondea tus respuestas a centésimas.*

7 $W = Fd$ cuando $F = 20$, $d = 15$ (es una fórmula de física usada para calcular el trabajo)

8. $A = lw$ cuando $l = 7$, $w = 6$ (fórmula para encontrar el área de un rectángulo)

9. $R = R_1 + R_2$ cuando $R_1 = 100$, $R_2 = 200$ (es una fórmula usada para calcular la resistencia en electricidad)

10. $A = \frac{1}{2}bh$ cuando $b = 7$, $h = 6$ (fórmula para encontrar el área de un triángulo)

11. $A = \pi r^2$ cuando $r = 8$ (fórmula para encontrar el área de un círculo)

12. $P_1 = \dfrac{T_1P_2}{T_2}$ cuando $T_1 = 150$, $T_2 = 300$, $P_2 = 200$ (fórmula de química que relaciona la temperatura y la presión de los gases)

13. $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ cuando $x_1 = 40$, $x_2 = 90$, $x_3 = 80$ (fórmula para encontrar el promedio de tres números)

14. $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ cuando $h = 15$, $b_1 = 20$, $b_2 = 28$ (fórmula para encontrar el área de un trapezoide)

15. $A = P + Prt$ cuando $P = 160$, $r = 0.05$, $t = 2$ (fórmula bancaria que proporciona el saldo total en una cuenta después de sumar los intereses)

16. $E = a_1p_1 + a_2p_2$ cuando $a_1 = 10$, $p_1 = 0.2$, $a_2 = 100$, $p_2 = 0.3$ (fórmula usada en estadística para encontrar el valor esperado de un evento)

17. $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ cuando $y_2 = 4$, $y_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_1 = -6$ (fórmula para encontrar la pendiente de una línea recta, discutiremos esta fórmula en el Capítulo 3)

18. $F = G\dfrac{m_1m_2}{r^2}$ cuando $G = 0.5$, $m_1 = 100$, $m_2 = 200$, $r = 4$ (fórmula de física para calcular la fuerza de atracción entre dos masas separadas entre sí una distancia r)

19. $R_T = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$ cuando $R_1 = 100$, $R_2 = 200$ (fórmula de electrónica para calcular la resistencia total en un circuito con dos resistencias conectadas en paralelo)

20. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ cuando $x_2 = 5$, $x_1 = -3$, $y_2 = -6$, $y_1 = 3$ (fórmula para encontrar la distancia entre dos puntos sobre una línea recta; discutiremos esta fórmula en el Capítulo 10)

21. $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ cuando $a = 2$, $b = -5$, $c = -12$ (fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas; discutiremos la fórmula cuadrática en el Capítulo 8)

22. $x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ cuando $a = 2$, $b = -5$, $c = -12$ (fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas)

23. $A = p\left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^{nt}$ cuando $p = 100$, $r = 0.06$, $n = 1$, $t = 3$ (fórmula para calcular el interés compuesto; ver ejemplo 2)

24. $z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ cuando $\bar{x} = 78$, $\mu = 66$, $\sigma = 15$, $n = 25$ (fórmula de estadística para encontrar la desviación estándar de una muestra con promedio $\bar{x}$)

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones para y (ver ejemplos 4 y 5).

25. $3x + y = 5$

26. $3x + 4y = 8$

27. $3x + 2y = 6$

28. $-6x + 5y = 25$

29. $6x - 2y = 16$

30. $9x = 7y + 23$

31. $\frac{3}{4}x - y = 5$

32. $\frac{x}{4} - \frac{y}{6} = 2$

33. $3(x - 2) + 3y = 6x$

34. $y - 4 = \frac{2}{3}(x + 6)$

35. $y + 1 = -\frac{4}{3}(x - 9)$

36. $\frac{1}{5}(x + 3y) = \frac{4}{7}(2x - 1)$

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones para la variable indicada (ver los ejemplos 6-8).

37. $E = IR$, para I

38. $C = 2\pi r$, para r

39. $C = \pi d$, para d

40. $A = lw$, para l

41. $P = 2l + 2w$, para l

42. $P = 2l + 2w$, para w

43. $V = lwh$, para h

44. $V = \pi r^2 h$, para h

45. $A = P + Prt$, para r

46. $Ax + By = C$, para y

47. $V = \frac{1}{3}lwh$, para l

48. $A = \frac{1}{2}bh$, para b

49. $y = mx + b$, para m

50. $IR + Ir = E$, para R

51. $y - y_1 = m(x - x_1)$, para m

52. $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$, para σ

53. $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$, para μ

54. $y = \frac{kx}{z}$, para z

55. $P_1 = \frac{T_1 P_2}{T_2}$, para T_2

56. $F = \frac{mv^2}{r}$, para m

57. $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$, para h

58. $D = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{n}$, para n

59. $S = \frac{n}{2}(f + l)$ para n

60. $S = \frac{n}{2}(f + l)$, para l

61. $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, para F

62. $F = \frac{9}{5}C + 32$, para C

63. $F = \frac{km_1 m_2}{d^2}$, para m_1

64. $F = \frac{km_1 m_2}{d^2}$ para m_2

Resolución de problemas

En los ejercicios 65-88, redondea el resultado hasta dos decimales cuando sea el caso.

65. Cambio de moneda

a) De acuerdo con el Sitio Web Convertidor Universal, el día 16 de agosto de 2008, un dólar americano podía ser intercambiado por 0.68 euros. Escribe una fórmula, usando d para denotar la cantidad de dólares americanos y e para denotar la cantidad de euros, que se pueda utilizar para convertir dólares a euros.

b) Escribe una fórmula que pueda ser usada para convertir euros a dólares.

© Shutterstock

66. Cambio de moneda

a) De acuerdo con el Sitio Web Convertidor Universal, el día 16 de agosto de 2008, un dólar americano podía ser intercambiado por 110.54 yenes japoneses. Escribe una fórmula, usando d para denotar la cantidad de dólares americanos y y para denotar la cantidad de yenes, que se pueda utilizar para convertir dólares a yenes.

b) Escribe una fórmula que pueda ser usada para convertir yenes a dólares.

En los ejercicios 67-70, usa la fórmula de interés simple i = prt. Ver ejemplo 1.

67. Préstamo personal Edison Tan le ha hecho un préstamo a su colega, Ken Pothoven, de $1100 a una tasa de interés simple de 7% anual por 4 años. Determina el interés simple que Ken debe pagar a Edison al término de los 4 años.

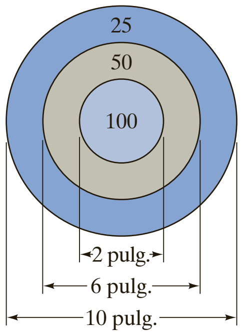
68. Determina la tasa Steve Marino pidió prestados $500 a su unión de crédito por 2 años. El interés simple que pagó fue de $52.90. ¿Qué tasa de interés simple se le cobró a Steve?

69. Determina la duración de un préstamo Mary Haran le hizo a su hija, Dawn, un préstamo por $20,000 a una tasa de interés simple de 3.75% al año. Al final del periodo del préstamo, Dawn pagó a Mary los $20,000 originales más $4875 de intereses. Determina la duración del préstamo.

70. Un certificado de depósito Erin Grabish recibió $2000 por hablar en el seminario de planeación financiera. Erin invirtió el dinero en un certificado de depósito por 2 años. Cuando canjeó el certificado de depósito, recibió $2166. ¿Qué tasa de interés simple recibió Erin por este certificado de depósito?

En los ejercicios 71-76, si no estás seguro de qué fórmula usar, consulta el Apéndice A.

71. Area de tablero de dardos Marc Mazzoni, campeón de lanzamiento de dardo en el estado de Michigan, practica sobre un tablero con círculos concéntricos como se muestra en la figura.



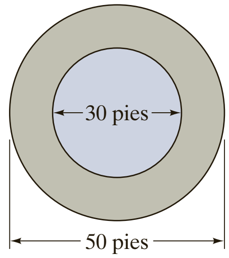
a) Encuentra el área del círculo marcado como 100.
b) Encuentra el área de todo el tablero.

72. Planeando un arenero Betsy Nixon está planeando construir un arenero rectangular para su hija. Ella cuenta con 38 pies de madera para hacer las paredes del arenero. Si la longitud tiene que ser de 11 pies, ¿de qué tamaño debe ser el ancho de los lados?

73. Volumen de concreto para un camino de entrada Anthony Palmiotto está preparando concreto para construir un camino de entrada. el camino debe tener 15 pies de largo por 10 pies de ancho por 6 pulgadas de profundidad.

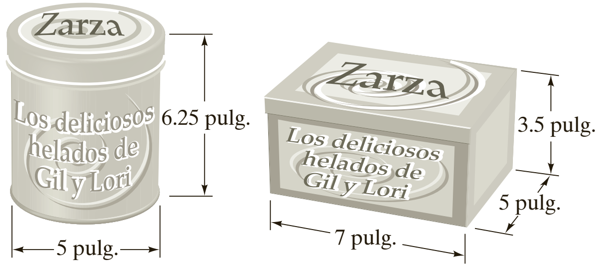
a) Encuentra el volumen de concreto que se necesita en pies cúbicos.
b) Si una yarda cúbica = 27 pies cúbicos, ¿cuántas yardas cúbicas de concreto se necesitan?
c) Si el concreto cuesta $35 por yarda cúbica, ¿cuál será el costo del concreto? Solo es posible comprar concreto por yardas enteras.

74. El área de un helipuerto Un helipuerto en Raleigh, Carolina del Norte, tiene dos círculos concéntricos como se muestra en la figura de arriba a la derecha.

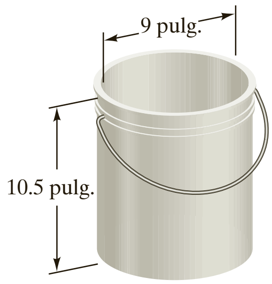


Encuentra el área de la región gris en la figura.

75. Recipientes de helado La compañía "Los deliciosos helados de Gil y Lori" vende helados en dos tipos de contenedores: un tubo cilíndrico y una caja rectangular, como se muestra en la figura. ¿En cuál de los contenedores cabe más helado y cuál es la diferencia de sus volúmenes?



76. Capacidad de una cubeta Sandra Hakanson tiene una cubeta en la cual desea mezclar detergente. Las dimensiones de la cubeta se muestran en la figura.



a) Encuentra la capacidad de la cubeta en pulgadas cúbicas.
b) Si 231 pulgadas cúbicas = 1 galón, ¿cuál es la capacidad de la cubeta en galones?
c) Si las instrucciones en la botella de detergente indican agregar 1 onza por galón de agua, ¿cuánto detergente debe agregar Sandra a la cubeta llena de agua?

Para los ejercicios 77-80, consulta el ejemplo 2.

77. Cuenta de ahorro Beth Rechsteiner invirtió $10,000 en una cuenta de ahorro que paga un interés compuesto trimestral de 6%. ¿Cuánto dinero tendrá en su cuenta al trascurrir 2 años?

78. Cálculo mensual de intereses Vigay Patel invirtió $8500 en una cuenta de ahorro que paga un interés compuesto mensual de 3.2%. ¿Cuánto dinero tendrá en su cuenta al final de 4 años?

79. Un certificado de depósito Heather Kazakoff invirtió $4390 en un certificado de depósito que paga un interés compuesto semestral de 4.1%. ¿A cuánto equivaldrá el certificado de depósito después de 36 meses?

80. Comparando cuentas James Misenti tiene $1500 para invertir durante 1 año. James tiene la opción de una cuenta en una unión de crédito la cuál paga un interés simple de 4.5% o una cuenta de débito que paga un interés compuesto trimestral de 4%. ¿En qué cuenta le darían más intereses por lo que invirtió?, y ¿de cuánto es la diferencia?

Para los ejercicios 81-84, consulta el ejemplo 3.

81. Tasa de impuestos equivalente Kimberly Morse-Austin es una estudiante y se encuentra en el rango federal de ingresos con 15% de impuestos. Kimberly está considerando invertir \$825 en un fondo común libre de impuestos que paga un interés simple de 3.5%. Determina la tasa de impuestos equivalente a una tasa libre de impuestos de 3.5%.

82. Comparando inversiones Dave Ostrow se encuentra en el rango federal de ingresos con 35% de impuestos y está considerando dos inversiones: un abono en un fondo común libre de impuestos que paga un interés simple de 3% o un certificado de depósito que paga un interés simple de 4.5%. ¿Cuál de las inversiones proporciona mayores ganancias?

83. Inversiones de padre e hijo Anthony Rodríguez se encuentra en el rango federal de ingresos con 35% de impuestos y su hijo Ángelo, en el rango con 28%. Cada uno de ellos está considerando crear un fondo común libre de impuestos que proporciona un interés simple de 4.6%.

a) Encuentra la tasa de impuestos equivalente a una tasa de 4.6% libre de impuestos para Anthony.

b) Encuentra la tasa de impuestos equivalente a una tasa de 4.6% libre de impuestos para Ángelo.

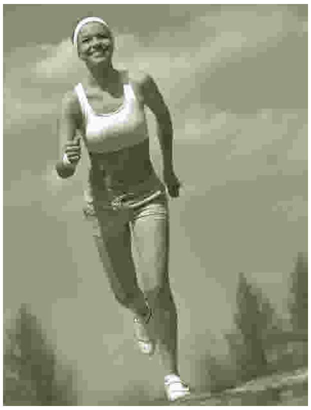
84. Comparación de inversiones Marissa Felberty está considerando invertir \$9200 en una cuenta que genera impuestos que da un interés simple de 6.75% o en una cuenta libre de impuestos que da un interés simple de 5.5%. Si ella se encuentra en el rango federal con impuestos de 25%, ¿cuál inversión le generará mayores ganancias?

Los ejercicios 85-88 son de situaciones diversas. Resuelve todos.

85. Pérdida de peso Un nutriólogo explica a Robin Thomas que una persona pierde peso al quemar más calorías de las que consume. Si Robin quema más de 2400 calorías diarias, su pérdida de peso puede calcularse por el siguiente modelo matemático: $w = 0.02c$, donde w es el peso perdido *semanal* y c es el número de calorías quemadas por *día* por *encima* de 2400 calorías.

a) Encuentra la pérdida de peso semanal de Robin si al ejercitarse quema 2600 calorías por día.

b) ¿Cuántas calorías tendría que quemar Robin en un día para perder 2 libras en una semana?



© Glowimages

86. Toma de presión Cuando se realiza una toma de presión, el ritmo cardiaco máximo permitido, m, en unidades de latidos por minuto, puede ser aproximado por la ecuación $m = -0.875x + 190$, donde x representa la edad del paciente desde 1 a 99. Usando este modelo matemático, encuentra

a) el ritmo cardiaco máximo para una persona con 50 años de edad.

b) la edad de una persona cuyo ritmo cardiaco máximo sea de 160 latidos por minuto.

87. Saldo de una cartera de inversiones Algunos asesores financieros recomiendan la siguiente regla de oro a los inversionistas: "El porcentaje de acciones en su cartera debe ser igual a 100 menos su edad". El resto debe estar en forma de bonos o efectivo.

a) Construir un modelo matemático para el porcentaje de la cartera que debe ser usada en acciones (usa S para denotar el porcentaje en acciones y a para la edad de una persona).

b) Usando esta regla de oro, encuentra el porcentaje de la cartera que debe mantenerse en acciones para una persona de 60 años de edad.

88. Índice de masa corporal El índice de masa corporal es una manera estándar de evaluar el peso de una persona en relación con su estatura. Para determinar tu índice de masa corporal (IMC) usando las medidas métricas, divide tu peso en kilogramos, por tu estatura, en metros cuadrados. Para calcular tu IMC usando libras y pulgadas, multiplica tu peso en libras por 705, luego divídelo entre el cuadrado de tu estatura en pulgadas.

a) Crea una fórmula para encontrar el IMC de una persona usando kilogramos y metros.

b) Crea una fórmula para encontrar el IMC de una persona cuando su peso está dado en libras y su estatura en pulgadas.

c) Determina tu IMC.

Problema de desafío

89. Resuelve la fórmula $r = \dfrac{s/t}{t/u}$ para **a)** s, **b)** u.

Ejercicios de repaso acumulados

[1.4] **90.** Evalúa $-\sqrt{3^2 + 4^2} + |3 - 4| - 6^2$.

91. Evalúa $\dfrac{7 + 9 \div (2^3 + 4 \div 4)}{|3 - 7| + \sqrt{5^2 - 3^2}}$.

92. Evalúa $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ cuando $a = -2$, $b = 3$.

[2.1] **93.** Resuelve la ecuación $\frac{1}{4}t + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{8}t$.

2.3 Aplicaciones del álgebra

1 Traducir una proposición verbal a una expresión algebraica o a una ecuación.

2 Utilizar el procedimiento de resolución de problemas.

1 Traducir una proposición verbal a una expresión algebraica o a una ecuación

Traducir un problema de aplicación verbal a una ecuación es quizá la parte más difícil en la resolución de problemas. Comencemos esta sección con algunos ejemplos o frases representadas como expresiones algebraicas.

Frase	Expresión algebraica
Un número incrementado en 8	$x + 8$
Dos veces un número	$2x$
Un número menos 7	$x - 7$
Un noveno de un número	$\frac{1}{9}x$ o $\frac{x}{9}$
2 más 3 veces un número	$3x + 2$
4 menos 6 veces un número	$6x - 4$
12 veces la suma de un número y 5	$12(x+5)$

La variable x se utiliza en estas expresiones algebraicas, sin embargo, se puede utilizar cualquier variable para representar la cantidad desconocida.

EJEMPLO 1 Expresa cada frase como una expresión algebraica.

a) El radio, r, disminuido en 9 centímetros

b) 5 menos que dos veces la distancia, d

c) 7 veces un número, n, aumentado en 8

Solución

a) $r - 9$ **b)** $2d - 5$ **c)** $7n + 8$

Resuelve ahora el ejercicio 9

Consejo útil

Consejo de estudio

¡El éxito en la solución de problemas requiere de un trabajo arduo! Asegúrate de lo siguiente:

- Lee el libro y los ejemplos cuidadosamente.
- Asiste a clases todos los días.
- Realiza todos los ejercicios que se te asignen.

Conforme vayas leyendo los ejemplos en el resto del capítulo, piensa en cómo estos se pueden aplicar a otros problemas similares. Por ejemplo, en el ejemplo 1 **a)** establecimos que el radio, r, disminuido en 9 centímetros, puede ser representado por $r - 9$. Puedes generalizar para otros problemas similares. Por ejemplo, un peso, w, disminuido en 15 libras puede ser representado como $w - 15$.

EJEMPLO 2 Escribe cada una de las frases como una expresión algebraica.

a) El costo de comprar x camisas a \$4 cada una

b) La distancia recorrida en t horas a 65 millas por hora

c) El número de centavos en n monedas de cinco centavos

d) Una comisión de 8% en la venta de x dólares

Solución

a) Podemos razonarlo de la siguiente forma: una camisa costaría 1(4) dólares; dos camisas, 2(4) dólares; tres camisas, 3(4) dólares; cuatro camisas, 4(4) dólares, y así sucesivamente. Al continuar con este proceso de razonamiento podremos observar que x camisas costarán $x(4)$ o $4x$ dólares. Podemos usar el mismo proceso de razonamiento para resolver cada uno de los otros incisos.

b) $65t$

c) $5n$

d) $0.08x$ (8% se escribe como 0.08 en forma decimal)

Resuelve ahora el ejercicio 7

Consejo útil

Cuando se nos solicita calcular un porcentaje, siempre calculamos el porcentaje de alguna cantidad. Por lo tanto, cuando se da un porcentaje, *siempre* es multiplicado por un número o una variable. En los siguientes ejemplos usamos la variable c, aunque cualquier letra puede usarse, para representar la variable.

Frase	Expresado como
6% de un número	$0.06c$
El costo de un artículo incrementado en 7% de impuestos	$c + 0.07c$
El costo de un artículo reducido en 35%	$c - 0.35c$

A veces, en un problema hay dos números que se relacionan entre sí. Con frecuencia representamos uno de los números como una variable y el otro número como una expresión que contiene a esa variable. Por lo general, representamos la descripción menos complicada con la variable, y escribimos la segunda (la expresión más complicada) en términos de la variable. En los ejemplos siguientes, utilizamos x para la variable.

Frase	Un número	Segundo número
La edad de Dawn ahora y la edad de Dawn dentro de 3 años	x	$x + 3$
Un número es 9 veces el otro	x	$9x$
El segundo número es el número menos 4	x	$x - 4$
Un número y el número aumentado en 16%	x	$x + 0.16x$
Un número y el número disminuido en 10%	x	$x - 0.10x$
La suma de dos números es 10	x	$10 - x$
Una tabla de 6 pies cortada en dos partes	x	$6 - x$
$10,000 compartidos por dos personas	x	$10{,}000 - x$

Los últimos tres ejemplos pudieran no ser tan obvios. Considera “La suma de dos números es 10”. Cuando sumamos x y $10 - x$, obtenemos $x + (10 - x) = 10$. Cuando una tabla de 6 pies se corta en dos partes, las dos partes serían x y $6 - x$. Por ejemplo, si una parte es de 2 pies, la otra debe de ser $6 - 2 = 4$ pies.

Consejo útil

Supón que lees la siguiente oración en un problema de aplicación: “Una cuerda de 12 pies es cortada en dos partes.” Probablemente sabrás que x será la variable que represente la longitud de la primera parte. De lo que no se está seguro es si debe utilizar $x - 12$ o $12 - x$ para representar la longitud de la segunda parte. Para ayudarte a decidir, podría ser de utilidad usar números específicos para establecer un patrón. En este ejemplo podrás usar un patrón similar al que se muestra a continuación como apoyo.

Si la primera parte es…	La segunda parte es…
2 pies	10 pies = 12 pies − 2 pies
5 pies	7 pies = 12 pies − 5 pies

Para este patrón puedes observar que si la primera parte es x pies, entonces la segunda parte es $12 - x$ pies.

EJEMPLO 3 Para cada relación, selecciona la variable que represente una cantidad y expresa la segunda cantidad en términos de la primera.

a) La velocidad del segundo tren es 1.8 veces la velocidad del primero.
b) David y su hermano comparten \$90.
c) A Tom le toma 3 horas más que a Roberta terminar la tarea.
d) Hilda tiene \$5 más que el doble de la cantidad de dinero que tiene Héctor.
e) La longitud de un rectángulo es 7 unidades menos que el triple de su ancho.

Solución

a) Velocidad del primer tren, s; velocidad del segundo tren, $1.8s$.
b) La cantidad que tiene David, x; la que tiene su hermano, $90 - x$.
c) Roberta, t; Tom, $t + 3$
d) Hector, x; Hilda, $2x + 5$
e) Ancho, w; longitud, $3w - 7$

Resuelve ahora el ejercicio 11

La palabra *es* en un problema verbal con frecuencia se traduce con el símbolo de igualdad.

Comprendiendo el álgebra

Cuando se traducen problemas verbales a símbolos algebraicos, la palabra *es* se traduce como *es igual* a y es representada con el símbolo de igualdad, =.

Proposición verbal	Ecuación algebraica
4 menos 6 veces un número *es* 17.	$6x - 4 = 17$
Un número reducido en 4 *es* 5 veces más que el doble del número	$x - 4 = 2x + 5$
El producto de dos números enteros consecutivos *es* 72	$x(x+1) = 72$
Un número incrementado en 15% *es* 90	$x + 0.15x = 90$
Un número disminuido en 12% *es* 52	$x - 0.12x = 52$
La suma de un número y el número incrementado en 4% *es* 324	$x + (x + 0.04x) = 324$
El costo de rentar un carro por x días a \$24 por día *es* \$120	$24x = 120$

2 Utilizar el procedimiento de resolución de problemas

Existen muchos tipos de problemas verbales y el procedimiento general para la resolución de problemas dado en la Sección 2.2 puede emplearse para resolver todos los problemas. Ahora presentamos otra vez los cinco pasos del procedimiento para resolver problemas de manera que puedas consultarlo con facilidad. Hemos incluido información adicional después del paso 2, ya que en esta sección vamos a enfatizar la traducción de problemas verbales en ecuaciones.

Procedimiento para resolver problemas de aplicación

1. **Comprende el problema**. Identifica la cantidad o cantidades que se pide determinar.
2. **Traduce el problema a lenguaje matemático** (expresa el problema como una ecuación).
   a) Elige una variable para representar una cantidad y *escribe exactamente lo que representa*. Expresa cualquier otra cantidad a determinar en términos de esta variable.
   b) Con la información del inciso a), escribe una ecuación que represente el problema verbal.
3. **Realiza los cálculos matemáticos** (resuelve la ecuación).
4. **Verifica la respuesta** (utiliza el texto original del problema).
5. **Responde la pregunta que se hizo**.

Algunas veces combinaremos los pasos o no mostraremos algunos en el procedimiento para resolver problemas, debido a la limitación de espacio. Aun cuando no mostremos una comprobación para un problema, tú siempre debes comprobarlo para asegurarte de que tu respuesta es razonable y tiene sentido.

EJEMPLO 4 Planes para llamadas de larga distancia El plan de pago de tasa preferencial en todo el país de la compañía telefónica AT&T requiere que el cliente pague una cuota mensual de \$5.00 y luego 5 centavos por minuto por cualquier llamada de larga distancia realizada. El plan ilimitado de llamadas nacionales de la misma compañía tiene un pago mensual de \$22 y no hay un pago por minuto. Determina el número de minutos que un cliente necesitaría dedicar a llamadas de larga distancia para que el costo de los dos planes fuesen iguales.

Solución **Entiende** Se nos pide determinar el *número de minutos* de llamadas de larga distancia que resultaría en que ambos planes tengan el mismo costo total. Para resolver el problema estableceremos la expresión algebraica para el costo de los dos planes iguales entre sí y resolveremos para el mismo número de minutos.

Traduce Sea n = número de minutos en llamadas de larga distancia.

Entonces $0.05n$ = costo por n minutos a 5 centavos por minuto.

costo del plan a tasa preferencial = costo del plan del servicio ilimitado

gasto mensual + costo de n minutos = costo de llamadas

$$5 + 0.05n = 22$$

Realiza los cálculos

$$5 + 0.05n = 22$$
$$0.05n = 17$$
$$\frac{0.05n}{0.05} = \frac{17}{0.05}$$
$$n = 340$$

Verifica El número de minutos es razonable y la aritmética es sencilla de verificar.

Responde Si se emplearan alrededor de 340 minutos por mes, ambos planes tendrían el mismo costo total.

Resuelve ahora el problema 33

EJEMPLO 5 Costo de un Corvette En 2008, el precio de un Chevrolet Corvette Z06 era de \$72,125. Éste incrementó 8.5% respecto al precio que tenía en 2007. Determina el precio del Chevrolet Corvette Z06 para 2007.

Solución **Entiende** Necesitamos determinar el precio del Corvette para 2007. Para resolver este problema, usaremos el hecho de que el precio se incrementó 8.5% de 2007 a 2008 y que el precio de 2008 fue de \$72,125.

Traduce Sea x = el precio del Corvette en 2007.

Entonces, $0.085x$ = el incremento en el precio del Corvette de 2007 a 2008.

$$\begin{pmatrix}\text{precio del Corvette}\\ \text{Z06 en 2007}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{incremento en el precio}\\ \text{de 2007 a 2008}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{precio del Corvette}\\ \text{Z06 en 2008}\end{pmatrix}$$
$$x + 0.085x = 72{,}125$$


© Stephen Hew/Shutterstock

Realiza los cálculos

$$x + 0.085x = 72{,}125$$
$$1.085x = 72{,}125$$
$$x \approx 66{,}474.65$$

Verifica y responde El número obtenido es menor que el precio del Corvette Z06 de 2008, que es lo que esperábamos. El precio del Corvette Z06 de 2007, fue alrededor de 66,474.65.

Resuelve ahora el ejercicio 41

EJEMPLO 6 Área territorial El total de área territorial de Gibraltar, Nauru, Bermudas y de la isla de Norfolk es de 116 km². El área territorial de Gibraltar es $\frac{1}{3}$ del área territorial de Nauru. El área territorial de la isla de Norfolk es $\frac{5}{3}$ del área territorial de Nauru. El área territorial de Bermudas es 10 km² menos que 3 veces el área territorial de Nauru. Determina el área de cada una de estas poblaciones.

Solución **Entiende** Necesitamos determinar el área (en km^2) de Gibraltar, Nauru, Bermudas y la isla de Norfolk. Observa que el área de las poblaciones puede determinarse a partir del área de Nauru. Por tanto, estableceremos como variable desconocida el área de Nauru. Además, observa que el área total de las cuatro poblaciones es de 116 km^2.

Traduce

Sea a = área territorial de Nauru

y $\frac{1}{3}a$ = área territorial de Gibraltar

y $\frac{5}{3}a$ = área territorial de la isla de Norfolk

y $3a - 10$ = área territorial de Bermudas

$$\begin{pmatrix}\text{área de}\\ \text{Nauru}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{área de}\\ \text{Gibraltar}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{área de la isla}\\ \text{de Norfolk}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{área de}\\ \text{Bermudas}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{área}\\ \text{total}\end{pmatrix}$$

$$a + \frac{1}{3}a + \frac{5}{3}a + (3a - 10) = 116$$

Realiza los cálculos

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{3}a + \frac{5}{3}a + (3a - 10) &= 116 \\ a + 2a + 3a - 10 &= 116 \\ 6a - 10 &= 116 \\ 6a &= 126 \\ a &= 21 \end{aligned}$$

Verifica y responde El área territorial de Nauru es de 21 km^2. El área territorial de Gibraltar es $\frac{1}{3}(21) = 7$ km^2. El área territorial de la isla Norfolk es $\frac{5}{3}(21) = 35$ km^2. El área territorial de las Bermudas es $(3 \cdot 21) - 10 = 63 - 10 = 53$ km^2. El área total de estas cuatro poblaciones es $(21 + 7 + 35 + 53) = 116$ km^2, así que la respuesta se verifica.

Fuente: www.gazetteer.com

Resuelve ahora el ejercicio 53

EJEMPLO 7 **Playa Daytona** Erin Grabish llevó a su familia a visitar la playa Daytona, Florida. Permanecieron una noche en un Holiday Inn. Cuando hicieron su reservación del hotel se les cotizó una tarifa de \$95 por noche, antes de aplicar los impuestos. Cuando salieron, su facturación total fue \$110.85, que incluía el impuesto de la habitación y un cargo de \$3.50 por una barra de dulce del servibar de la habitación. Determina la tasa de impuestos por la habitación.

© Allen R. Angel

Carrera Daytona 500

Solución **Entiende** Su facturación total consiste en la tarifa de la habitación, el impuesto por la habitación y el costo de \$3.50 por la barra de dulce. El impuesto de la habitación se determina multiplicando el costo de la tarifa de la habitación por la tasa de impuesto. Nos piden determinar la tasa de impuesto de la habitación.

Traduce

Sea t = tasa de impuesto por habitación.

Entonces, $0.01t$ = tasa de impuesto, como decimal.

costo de la habitación + impuesto de la habitación + barra de dulce = total

$$95 + 95(0.01t) + 3.50 = 110.85$$

Realiza los cálculos

$$\begin{aligned} 95 + 0.95t + 3.50 &= 110.85 \\ 0.95t + 98.50 &= 110.85 \\ 0.95t &= 12.35 \\ t &= 13 \end{aligned}$$

Verifica y responde Si sustituyes 13 por t en la ecuación, verás que se verifica la respuesta. La tasa de impuesto es 13%.

Resuelve ahora el ejercicio 47

EJEMPLO 8 **Hipoteca de una casa** Mary Shapiro comprará su primera casa y está considerando dos bancos por una hipoteca de \$60,000. Citibank cobra 6.50% de tasa de interés sin puntos por un préstamo a 30 años. (Un punto es un cobro por única vez de 1% del monto de la hipoteca). Los pagos mensuales de la hipoteca en Citibank serían de \$379.24. Citibank también cobra una cuota de \$200 por la solicitud. El Banco de América cobra 6.00% de tasa de interés con dos puntos por un préstamo a 30 años. Los pagos mensuales del Banco de América serían de \$359.73 y el costo de los puntos que Mary necesitaría pagar al momento de contratar es 0.02(\$60,000) = \$1200. El Banco de América no cobra solicitud.

a) ¿Cuánto tiempo tomaría para que los pagos totales de la hipoteca de Citibank fueran iguales a los pagos totales de la hipoteca del Banco de América?

b) Si Mary planea conservar su casa durante 20 años, ¿cuál hipoteca resultaría en un costo menor?

Solución **a)** Entiende Citibank cobra una tasa de interés más alta y una pequeña cuota de la solicitud pero no cobra puntos. El Banco de América cobra una tasa menor y no cobra por la solicitud, pero cobra dos puntos. Necesitamos determinar el número de meses cuando los pagos totales de los dos préstamos fueran iguales.

Traduce Sea x = número de meses.

Entonces, $379.24x$ = costo de pagos a la hipoteca por x meses con Citibank.

y $359.73x$ = costo de pagos a la hipoteca por x meses con el Banco de América.

costo total con Citibank = costo total con el Banco de América.

pagos a la hipoteca + costo de la solicitud = pagos a la hipoteca + puntos

$$379.24x \quad + \quad 200 \quad = \quad 359.73x \quad + \quad 1200$$

Realiza los cálculos

$$379.24x + 200 = 359.73x + 1200$$
$$379.24x = 359.73x + 1000$$
$$19.51x = 1000$$
$$x \approx 51.26$$

Responde El costo sería el mismo en alrededor de 51.26 meses o casi 4.3 años.

b) El costo total sería el mismo en casi 4.3 años; antes de los 4.3 años, el costo del préstamos con el Banco de América sería mayor a consecuencia del cobro inicial de \$1200 por los puntos. Sin embargo, después de 4.3 años el costo del Banco de América sería menor ya que el pago mensual es menor. Si evaluamos el costo total con Citibank durante 20 años (240 pagos mensuales), obtenemos \$91,217.60. Si evaluamos el costo total con el Banco de América durante 20 años, obtenemos \$87,535.20. Por lo tanto, Mary ahorrará \$3682.40 durante el periodo de 20 años con el Banco de América.

Resuelve ahora el ejercicio 49

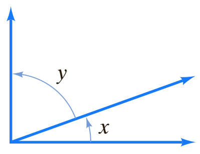


FIGURA 2.4

Ahora veamos dos ejemplos que incluyen ángulos. En el Ejemplo 9 utilizaremos **ángulos complementarios**, éstos son dos ángulos cuya suma es 90° (ver **Figura 2.4**).

En la **Figura 2.4**, el ángulo x (representado $\measuredangle x$) y el ángulo y ($\measuredangle y$) son ángulos complementarios ya que su suman 90°.

EJEMPLO 9 **Ángulos complementarios** Si el ángulo A y el ángulo B son complementarios y el ángulo B es 42° mayor que el ángulo A, determina las medidas de los ángulos A y B.

Solución Entiende La suma de las medidas de los dos ángulos debe ser 90°, ya que son ángulos complementarios. Usaremos este hecho para plantear una ecuación. Como el ángulo B está descrito en términos del ángulo A, representaremos con x la medida del ángulo A.

Traduce

$$\text{Sea } x = \text{medida del ángulo } A.$$
$$\text{Entonces } x + 42 = \text{medida del ángulo } B.$$
$$\text{medida del ángulo } A + \text{medida del ángulo } B = 90°$$
$$x \quad + \quad x + 42 \quad = 90$$

Realiza los cálculos

$$2x + 42 = 90$$
$$2x = 48$$
$$x = 24$$

Verifica y responde Como $x = 24$, la medida del ángulo A es 24°. La medida del ángulo $B = x + 42 = 24 + 42 = 66$, por lo que el ángulo B tiene una medida de 66°. Observa que el ángulo B es 42° mayor que el ángulo A, y la suma de las medidas de ambos ángulos es $24° + 66° = 90°$.

Resuelve ahora el ejercicio 21

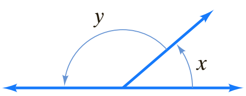


FIGURA 2.5

En el ejemplo 10 utilizaremos **ángulos suplementarios**, que son dos ángulos cuya suma de medidas es 180° (ver **Figura 2.5**).

En la **Figura 2.5**, los ángulos x y y son ángulos suplementarios ya que la suma de sus medidas es 180°.

EJEMPLO 10 **Ángulos suplementarios** Si el ángulo C y el ángulo D son suplementarios y el ángulo C es 6° mayor que el doble de la medida del ángulo D, determina las medidas de los ángulos C y D.

Solución **Entiende** La suma de las medidas de los dos ángulos debe ser 180°, ya que son ángulos suplementarios. Como el ángulo C se describe en términos del ángulo D, representaremos con x la medida del ángulo D.

Traduce

$$\text{Sea } x = \text{medida del ángulo } D.$$
$$\text{Entonces } 2x + 6 = \text{medida del ángulo } C.$$
$$\text{medida del ángulo } C + \text{medida del ángulo } D = 180°$$
$$2x + 6 \quad + \quad x \quad = 180$$

Realiza los cálculos

$$3x + 6 = 180$$
$$3x = 174$$
$$x = 58$$

Verifica y responde Como $x = 58$, la medida del ángulo D es 58°. La medida del ángulo $C = 2x + 6 = 2(58) + 6 = 122$, por lo que el ángulo C tiene una medida de 122°. Observa que el ángulo C es 6° mayor que el doble de la medida del ángulo D, y la suma de las medidas de ambos ángulos es $122° + 58° = 180°$.

Resuelve ahora el ejercicio 23

Consejo útil

Consejo de estudio

A continuación aparecen algunas sugerencias, por si tienes alguna dificultad con problemas de aplicación.

1. Instructor. Pide una cita para ver a tu instructor. Asegúrate de haber leído el tema del libro y haber intentado resolver todos los problemas de tarea. *Acude con preguntas específicas*.
2. Tutoría. Si tu colegio ofrece tutoría gratis aprovecha esa ventaja.
3. Grupo de estudio. Forma un grupo de estudio con tus compañeros de clase. Intercambia números telefónicos y direcciones de correo electrónico. Podrían ayudarse unos a otros.
4. Manual de soluciones para el estudiante. Si te atoras con un ejercicio, podrías utilizar el Manual de Estudio para el Estudiante a fin de ayudarte a entender el problema. No utilices el manual en lugar de trabajar los ejercicios. En general, el manual de soluciones debe usarse solo para verificar tu trabajo.

(*continúa en la siguiente página*)

5. MyMathLab. Proporciona ejercicios correlacionados con el texto, que se generan de forma algorítmica para una práctica y dominio sin límite. Además, están disponibles herramientas en línea como videoclases, animaciones y un libro de texto multimedia, para ayudarte a entender el tema.
6. MathXL. Es un poderoso sistema de tareas, tutorial y evaluación correlacionado específicamente con este texto. Puedes hacer exámenes de los capítulos en MathXL y recibir un plan de estudio personalizado con base en tus resultados. El plan de estudios lo enlaza directamente a ejercicios de apoyo para los objetivos que necesitas estudiar o volver a examinar. Verifica con tu instructor para conocer si está disponible MathXL.

¡Es importante que sigas intentando! Recuerda, cuánto más practiques mayor será tu habilidad en la resolución de problemas de aplicación.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2.3

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

menor que   mayor que   es $x + 3$ $x - 3$ $x - 7$ $7 - x$

1. La frase "un número aumentado por 3" se puede representar con la expresión algebraica ________.
2. La frase "un número disminuido por 3" se puede representar con la expresión algebraica ________.
3. Una cuerda de siete pies es cortada en dos piezas. Si $x =$ la longitud de la primera pieza, entonces ________ $=$ la longitud de la segunda pieza.
4. La palabra "________" en un problema significa "es igual a".
5. La frase "6 ________ un número" se puede representar por una expresión algebraica $x - 6$.
6. La frase "5 ________ un número" se puede representar por una expresión algebraica $x + 5$.

Practica tus habilidades

En los ejercicios 7-10, escribe cada frase como una expresión algebraica.

7. El costo de comprar y libros a \$19.95 cada uno.
8. 17 más que 4 veces un número, m.
9. 11 veces un número n, disminuido por 7.5.
10. 7 veces un número, p, incrementado por 8.

En los ejercicios 11-20, selecciona una variable que represente una cantidad y expresa la segunda cantidad en términos de la primera.

11. Una pieza de madera de 12 pies se corta en 2 partes.
12. Un ángulo de un triángulo es 7° más que el otro ángulo.
13. El largo de un rectángulo es 29 metros más grande que el ancho.
14. Robin y Tom comparten una tarea de 17 horas.
15. Max y Lora comparten \$165.
16. George puede pintar una casa dos veces más rápido que Jason.
17. Nora puede trotar 1.3 millas por hora más rápido que Betty.
18. El límite de velocidad en una carretera es de 30 millas por hora más rápido que el límite de velocidad en un camino local.
19. El costo de la electricidad se incrementó 22%.
20. El precio de un refrigerador ha incrementado 6%.

© Monkey Bussiness Images/Glowimages

Ver ejercicio 16.

Resolución de problemas

En los ejercicios 21-27, escribe una ecuación que se pueda usar para resolver el problema. Resuelve el problema.

21. **Ángulos complementarios** Los ángulos A y B son ángulos complementarios. Determina las medidas de los ángulos A y B si el ángulo A es cuatro veces el tamaño del ángulo B. Ver el Ejemplo 9.
22. **Ángulos complementarios** Los ángulos C y D son ángulos complementarios. Determina las medidas de los ángulos C y D si el ángulo D es 15° menor que el doble del ángulo C.
23. **Ángulos suplementarios** Los ángulos A y B son ángulos suplementarios. Determina las medidas de los ángulos A y B si el ángulo B es cuatro veces el tamaño del ángulo A. Ver el Ejemplo 10.
24. **Ángulos suplementarios** Los ángulos A y B son ángulos suplementarios. Determina las medidas de los ángulos A y B si el ángulo A es 30° mayor que el ángulo B.

25. Ángulos en un triángulo La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es de 180°. Encuentra los tres ángulos de un triángulo si un ángulo es 20° mayor que el ángulo más pequeño y el tercer ángulo es el doble del ángulo más pequeño.

26. Ángulos en un triángulo Encuentra las medidas de los tres ángulos de un triángulo si un ángulo es el doble del ángulo más pequeño y el tercer ángulo es 60° mayor que el ángulo más pequeño.

27. Sociedad de Honor de Historia Un beneficio de ser miembro de una sociedad de honor, es 25% de descuento en todas las suscripciones a las revistas de historia. Thomas usó este descuento para suscribirse a la revista *American Heritage* y pago $24. ¿Cuál es el costo de una suscripción regular?

28. Un traje nuevo Matthew Stringer encontró un traje en K & G ropa para hombres, el precio ya rebajado 25% es de $187.50. Encuentra el precio regular del traje.

29. Pase de autobús Kate Spence compra un pase mensual para el autobús, el cual incluye viaje ilimitado por $45 al mes. Sin el pase, cada viaje cuesta $1.80. ¿Cuántos viajes por mes tendría que tomar Kate para que el costo de los viajes sin su pase sea igual al total del costo de los viajes con el pase del autobús?

30. Costo de un servicio de lavandería A Bill Winschief le cuesta $12.50 a la semana lavar y secar su ropa en la lavandería de la esquina. Si una lavadora y una secadora cuestan un total de $940, ¿cuántas semanas tomaría para que el costo de lavar en la lavandería sea igual al costo de las máquinas? (No tomar en cuenta el costo de la electricidad.)

31. Renta de un camión El costo por rentar un camión es de $35 al día más 20 centavos por milla. ¿Qué tan lejos Tanya Richardson puede manejar en un día si tiene $80?

32. Salario de una mesera Candice Colton es una mesera de banquetes. Ella gana $3.25 por hora más 15% del total del costo de la comida y bebidas que sirve durante el banquete. Si, durante 5 horas de turno, Candice gana $331.25, ¿cuál es el total del costo de la comida y bebidas que ella sirvió?

© Golden Pixels LLC/Shutterstock

33. Jugando golf Albert Sánchez tiene dos opciones de membresías en un club de golf. Una membresía social cuesta $1775 de cuota anual. Además, él pagaría una tarifa verde de $50 y una de $25 por usar el carrito de golf cada vez que juegue. Una membresía de golf cuesta $2425 de cuota anual. Con esta membresía, Albert pagaría solo $25 por usar el carrito de golf cuando juegue. ¿Cuántas veces por año Albert necesitaría jugar golf para que las dos opciones le cuesten lo mismo?

34. Puente de cuota George Washington Los viajeros que van a New York (durante las horas pico) usando el puente George Washington deben pagar una cuota de $8 en efectivo o $6 usando el sistema de Pase EZ. El sistema de pase EZ es un plan de prepago que también requiere una tarifa de activación de $10. ¿Cuántos viajes a New York necesitaría hacer una persona para que la cantidad gastada usando el sistema de pase EZ sea igual al gasto en cuotas pagando en efectivo?

Fuente: Autoridad del Puerto de NY y Sitio Web NJ

© Scott Lomenzo/Shutterstock

35. Puente de cuota La Sra. y el Sr. Morgan viven en un centro comunitario en una isla unida al continente por un puente de cuota. La cuota es de $2.5 por carro para entrar a la Isla, pero no hay cuota para salir de la Isla. Los residentes de la Isla pueden adquirir un pase mensual por $20, que les permite cruzar a la isla por solo 50 centavos cada vez. ¿Cuántas veces al mes tendrían que ir a la isla desde el continente para que el costo del pase mensual sea igual al costo regular de la cuota?

36. IVA El impuesto al valor agregado en North Carolina es de 4.25%. ¿Cuánto es lo máximo que puede gastar Betty Lichtenberg en un escritorio nuevo si el costo total del escritorio, incluyendo impuestos, es de $650?

37. Renta de un departamento La familia DuVall está rentando un apartamento en California. La renta mensual en 2010 es de $1720. La renta mensual en 2010 es 7.5% más cara que la renta mensual en 2009. Determina la renta mensual en 2009.

38. Fondos de retiro Eva Chang hace contribuciones de $5000 anualmente en su plan de retiro. Ella da algo de su contribución al fondo de acciones y otra parte al fondo de acciones global. Su contribución al fondo de acciones es $250 menor que el doble de lo que contribuye al fondo de acciones global. ¿Cuánto contribuye a cada fondo?

39. Niñas scouts Para hacer dinero para la organización, las niñas Scout tienen que vender galletas cada año. Este año, el total de las ventas de dos distritos, el distrito del sur y el del norte, fue de $4.6 millones. Si las ventas del distrito del sur fueron de $0.31 millones más que las ventas del distrito del norte, encuentra las ventas de cada distrito.

© Ross Anania/Glowimages

40. Valor de la franquicia NFL El 13 de julio de 2008, Cowboys de Dallas y Redskins de Washington tuvieron los valores más altos de una franquicia entre todos los equipos. El valor total de las dos franquicias fue de $2967 billones. El valor de los Cowboys fue cerca de 2.25% mayor que el valor de los Redskins. Determina el valor de los dos equipos.

Fuente: Revista ESPN

41. Comparación de fibras Una porción de zarzamoras enlatadas contiene 4.4 gramos de fibra. Esto equivale a 10% más de fibra de lo que contiene una manzana mediana. ¿Cuántos gramos de fibra hay en una manzana mediana?

Fuente: Socios de la Salud

© Yuri Arcurs/Shutterstock

42. Comparación de licopeno Una toronja contiene 3 mg de licopeno. Esto es, 50% más licopeno que en una cucharada de catsup. ¿Cuántos miligramos de licopeno hay en una cucharada de catsup?

Fuente: Fórmulas medicas avanzadas.

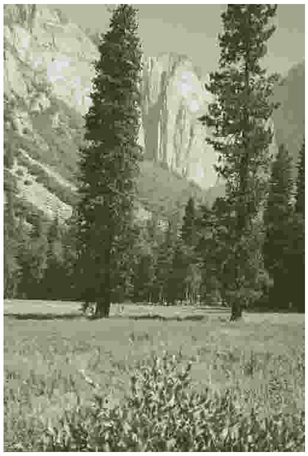
© V.J. Matthew/Shutterstock

43. Incremento al salario mínimo Desde el 2008 al 2009, el salario mínimo federal por hora aumentó 10.69% a $7.25. ¿Cuál era el salario mínimo por hora en el 2008?

Fuente: Departamento del trabajo de Estados Unidos

44. Huesos y acero De acuerdo con la revista *Health*, la tensión que puede resistir un hueso en libras por pulgada cuadrada es 6000 libras más que 3 veces la cantidad que el acero puede resistir. Si la diferencia entre la resistencia del acero y el hueso es de 18,000 libras por pulgada cuadrada, encuentra la tensión que pueden resistir tanto el hueso como el acero.

45. Polen Hay 57 fuentes principales de polen en los Estados Unidos. Estas fuentes están categorizadas como pastos, malezas y árboles. Si el número de malezas es 5 veces menor que el doble del número de pastos, y el número de los árboles es 2 veces mayor que el doble del número de pastos, encuentra el número de los pastos, malezas y árboles que son las fuentes principales del polen.



© Allen R. Angel

46. Sistema antirrobos para autos Al adquirir e instalar un sistema LoJack, Janet Samuels pudo ahorrar 15% del precio de su seguro de auto. El sistema LoJack cuesta $743.65. Si el costo del seguro del auto de Janet antes de la instalación del sistema LoJack es de $849.44, ¿en cuántos años el sistema LoJack se pagaría por si solo?

47. Comida Valerie solo tiene $20 para gastar en su comida. Si ella debe pagar 7% en impuestos y desea dar 15% de propina del total de la cuenta (comida más impuesto), ¿cuál es el precio máximo que puede gastar?

48. Tarifa de impuestos de un hotel La familia Ahmed pagó $85 de una habitación por una noche en Milwaukee. Además, vieron una película que costó $9.25. El total de su cuenta fue de $106.66. ¿Cuánto pagaron de impuesto?

49. Comparación de hipotecas La familia Chos va a adquirir una nueva casa y están considerando una hipoteca de $70,000 a 30 años con dos diferentes bancos. Madison Savings les cobra 9% con 0 puntos y el First National les cobra 8.5% con 2 puntos. First National les cobra también una tarifa de aplicación de $200, mientras que Madison no cobra nada. Los pagos mensuales con Madison serían de $563.50 y los pagos mensuales con First National serían de $538.30.

a) ¿Después de cuántos meses el total de los pagos sería el mismo para los dos bancos?

b) Si la familia Chos planea quedarse con su casa por 30 años, ¿cuál sería la hipoteca de menor costo? (Ver el Ejemplo 8)

50. Plan de pago El club de tenis Midtown ofrece dos planes de pago para sus miembros. El Plan 1 es una tarifa mensual de $25 más $10 de la renta de la cancha por hora. El plan 2 no tiene tarifa mensual, pero la renta de la cancha tiene un costo de $18.50 por hora. ¿Cuántas horas tendría que jugar la Sra. Levin por mes para que el plan 1 sea la mejor opción?

51. Refinanciando una hipoteca Dung Nguyen está considerando refinanciar su casa con una tasa de interés mas baja. El tiene una hipoteca de 11.875% y está pagando mensualmente $510, incluyendo impuestos, y le quedan 20 años de hipoteca. Porque la tasa de interés ha caído, la corporación de la hipoteca está ofreciéndole una tasa de 9.5%, por lo que solamente tendría que pagar $420.50 el resto de los años. Sin embargo, para obtener esta hipoteca, el costo final sería de $2500.

a) ¿En cuántos meses después del refinanciamiento gastará la misma cantidad con su nueva hipoteca más el costo final que lo que hubiera gastado en su hipoteca inicial?

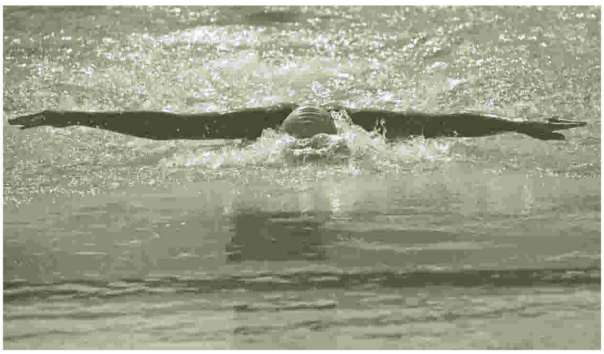
b) Si planea gastar los siguientes 20 años en la casa, ¿ahorraría dinero por el refinanciamiento?

52. Seminarios de cena Heather Jockson, una asesora financiera, está patrocinando seminarios con cena. Ella tiene que pagar de su propio bolsillo las cenas de los asistentes. Ella escogió un restaurant con 40 lugares disponibles que cobra $9.5 por persona. Si ella gana 12% por comisión de las ventas realizadas, determina ¿cuántas ventas tiene que hacer de las 40 personas

a) para no ganar ni perder dinero?

b) para ganar $500?

53. Nadadores olímpicos 2008 Los mejores 4 nadadores de Estados Unidos durante los Juegos Olímpicos de verano del 2008 fueron Phelps, Coughlin, Lochte y Grevers. Entre los cuatro ganaron 21 medallas. Lochte ganó una medalla más que Grevers. Coughlin ganó el doble de medallas que Grevers. Phelps ganó dos medallas más que el doble de las que ganó Grevers. ¿Cuántas medallas ganó cada nadador?



© V.J. Matthew/Shutterstock

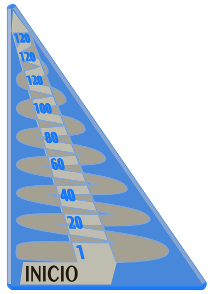
Fuente: Comité Olímpico de Estados Unidos

54. Exámenes En un examen reciente de algebra, 34 estudiantes fueron evaluados con las siguientes calificaciones A, B, C o D. Hay el doble de evaluados con C que de evaluados con D. Hay 2 evaluados con B más que evaluados con D. El número de evaluados con A es dos más que el doble del número de evaluados con D. Determina el número de evaluados que resultó para cada letra A, B, C y D de este examen.

55. Animales y plantas Aproximadamente 1,500,000 especies en todo el mundo han sido clasificadas ya sea como plantas, animales o insectos. Los insectos a menudo se subdividen en escarabajos e insectos que no son escarabajos. Hay alrededor de 100,000 plantas más que animales. Hay 290,000 insectos que no son escarabajos más que animales. El número de escarabajos es 140,000 menor que el doble de animales. Encuentra el número de animales, plantas, escarabajos e insectos que no son escarabajos.

56. Lados de un triángulo La suma de las longitudes de los lados de un triángulo es de 30 pulgadas. La longitud del primer lado es de 3 pulgadas más que el doble del lado más pequeño. La longitud del segundo lado es de 2 pulgadas más que el doble del lado más pequeño. Encuentra las longitudes de los tres lados del triángulo.

57. Perímetro de un triángulo John está diseñando un juego que contiene un tablero triangular. El perímetro del tablero es de 36 pulgadas. Encuentra la longitud de los tres lados si un lado es 3 pulgadas más grande que el lado más pequeño y el tercer lado es 3 pulgadas menor que el doble de la longitud del lado más pequeño.

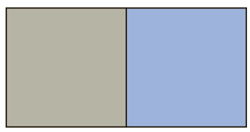


58. Ángulos de un triángulo Una pieza rectangular de papel se corta del lado opuesto de las esquinas para formar un triángulo. Un ángulo del triángulo mide 12° más que el lado más pequeño. El tercer ángulo mide 27° menos que tres veces el ángulo más pequeño. Si la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, determina las medidas de los tres ángulos.

59. Jardín triangular El perímetro de un jardín triangular es de 60 pies. Encuentra la longitud de los tres lados si un lado es 4 pies más grande que el doble de la longitud del lado más pequeño y el tercer lado es 4 pies menor que tres veces la longitud del lado más pequeño.

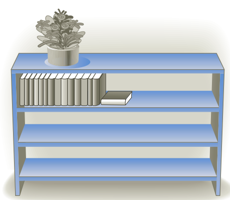
60. Barandal Un barandal tiene un diseño con triángulos. En uno de los triángulos un ángulo mide 20° menos que el doble del ángulo más pequeño. El tercer ángulo mide 25° más que el doble del ángulo más pequeño. Determina las medidas de los tres ángulos.

61. Dimensiones de una cerca Greg Middleton, arquitecto, quiere cercar dos áreas iguales, como se ilustra en la Figura. Si ambas áreas son cuadradas y el total de la longitud de la cerca usada fue de 91 metros, encuentra las dimensiones de cada cuadrado.

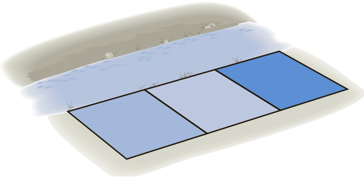


62. Construcción de una caja de arena Edie Hall va a construir una caja de arena rectangular para sus hijos. Ella quiere que a lo largo mida 3 pies más que a lo ancho. Encuentra las medidas del largo y el ancho de la caja de arena si solamente hay 22 pies de madera para formar el marco. Usar $P = 2l + 2w$.

63. Dimensiones de un librero Eric Krassow va a construir un librero con cuatro estanterías, como se muestra en la figura. El ancho del librero va a ser 3 pies más que la altura. Si solamente tiene 30 pies de madera para construir el librero, ¿cuáles serán las dimensiones del librero?



64. **Dimensiones de una cerca** Collette Siever desea cercar en tres áreas rectangulares a lo largo de la orilla del río, como se muestra en la figura. Cada rectángulo debe tener las mismas dimensiones, y el largo de cada rectángulo tiene que ser de un metro más grande que el ancho (a lo largo del río). Encuentra el largo y el ancho de cada rectángulo si la cantidad total de cercas usadas es de 114 metros.



65. **Ofertas** Durante la primera semana de ventas, Sam's General Store redujo 10% todos los precios. La segunda semana de ventas, le redujo a todos los artículos $5. Si Jim Condor compró una calculadora por $49 durante la segunda semana, encuentra el precio original de la calculadora.

66. **Granja** La granja de Deborah Schmidt está dividida en tres regiones. El área de una región es el doble del largo que el área de la región más pequeña, y el área de la tercera región es 4 hectáreas menor que tres veces el área de la región más pequeña. Si el total de la superficie de la granja es 512 hectáreas, encuentra el área de cada una de las tres regiones.

67. **Vendedor de pinturas** J. P. Richardson vende cada una de sus pinturas por $500. La galería donde muestra su trabajo le cobra $1350 al mes más 10% de comisión. ¿Cuántas pinturas debe vender al mes para no ganar ni perder dinero?

68. **Comparando ventas de juguetes** Kristen Hodge va a comprar una bicicleta para su sobrina y sabe que la tienda Toys "R" Us y Wal-Mart venden la bicicleta al mismo precio. El 26 de diciembre, Toys "R" Us tuvo a la venta la bicicleta con 37% de descuento y Wal-Mart la tuvo con $50 menos del precio original. Después de visitar ambas tiendas, Kristen descubrió que los precios siguen siendo los mismos.
   a) Determina el precio original de la bicicleta.
   b) Determina el precio con descuento de la bicicleta.

© Allen R. Angel

69. **Focos incandescentes** El costo de comprar un foco incandescente para usarlo en un periodo de 9750 horas es de $9.75. El costo de la energía que consumen los focos incandescentes durante este periodo es de $73. El costo de un foco fluorescente que dura el mismo tiempo es de $20. Al usar un foco fluorescente en lugar de un foco incandescente durante este periodo se ahorra $46.75 del precio total (incluyendo el costo de adquisición y de la energía). ¿Cuál es el costo de la energía usada por un foco fluorescente para este periodo?

70. **La cuenta de la cena** Los cinco miembros de la familia Newton salieron a cenar con tres miembros de la familia Lee. Antes de la cena, ellos decidieron que la familia Newton pagaría $\frac{5}{8}$ de la cuenta (sin propina) y la familia Lee pagaría $\frac{3}{8}$ más 15% de propina. Si el total de la cuenta incluyendo la propina fue de $184.60, ¿cuánto pagó cada familia?

71. **Calificaciones** Para encontrar el promedio de un conjunto de calificaciones, se divide la suma de las calificaciones entre el número de ellas. Las calificaciones que sacó Paula West en sus 4 pruebas fueron 88, 92, 97 y 96.
   a) Escribir una ecuación que pueda ser usada para determinar la calificación que necesita sacar Paula para obtener un promedio de 90.
   b) Explica cómo la obtuviste.
   c) Resuelve la ecuación y determina la calificación.

© Wavebreak Media LTD/Glowimages

72. **Promedio de examen físico** Las calificaciones que sacó Francis Timoney en cinco pruebas físicas fueron 70, 83, 97, 84 y 74.
   a) Si el examen final vale el doble que cualquiera de los otros exámenes, ¿qué calificación necesita Francis en el examen final para tener un promedio de 80? Explica.
   b) Si la calificación más alta que se puede obtener en el examen final es de 100, ¿es posible que Francis obtenga un promedio de 90? Explica.

73. **a)** Inventa un problema realista que involucre porcentajes. Representa este problema como una ecuación.
   b) Resuelve la ecuación y da la respuesta.

74. **a)** Inventa un problema realista que involucre dinero. Representa este problema como una ecuación.
   b) Resuelve la ecuación y da la respuesta.

Problemas de desafío

75. **Renta de camiones** La agencia Elmers cobra $28 por día más 15 centavos la milla. Si Martina Estaban rentó un pequeño camión por 3 días y el total de la cuenta fue de $121.68, incluyendo 4% de impuestos, ¿cuántas millas manejó?

76. **Mercado financiero** El lunes Sophia Murkovic adquirió acciones. El martes el valor de las acciones subió 5%, y el miércoles el valor cayó 5%. ¿Cuánto pagó Sofía por las acciones el lunes si las vendió el jueves por $59.85?

Actividad de grupo

Discutir y responder el ejercicio 77 en grupo.

77. **a)** Que cada miembro del grupo escoja un número. Multiplicarlo por 2, sumarle 33, restarle 13, dividirlo entre 2 y restarle el número con que empezó. Escribe cada respuesta.

b) Comparar las respuestas. Si no obtuvieron las mismas respuestas, verificar el trabajo de otro grupo.

c) Explicar porque siempre se obtiene 10 para cualquier número real.

Ejercicios de repaso acumulados

[1.3] *Evalúa.*

78. $7 - \left|-\frac{3}{5}\right|$

79. $-6.4 - (-3.7)$

80. $\left|-\frac{5}{8}\right| \div |-4|$

81. $5 - |-3| - |12|$

[1.5] **82.** Simplifica $(2x^4y^{-6})^{-3}$.

Prueba de mitad de capítulo: 2.1-2.3

Pongamos a prueba tus habilidades adquiridas hasta este punto, haz la siguiente prueba. Las respuestas, y la sección donde el tema se explicó inicialmente, se dan al final del libro. Revisa las preguntas que respondiste incorrectamente.

1. Dar el grado de $6x^5y^7$.

Simplifica cada expresión.

2. $3x^2 + 7x - 9x + 2x^2 - 11$

3. $2(a - 1.3) + 4(1.1a - 6) + 17$

Resuelve cada ecuación.

4. $7x - 9 = 5x - 21$

5. $\frac{3}{4}y + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}y - \frac{5}{4}$

6. $3p - 2(p + 6) = 4(p + 1) - 5$

7. $0.6(a - 3) - 3(0.4a + 2) = -0.2(5a + 9) - 4$

Encuentra la solución de cada ecuación. Luego indica si la ecuación es condicional, una identidad o una contradicción.

8. $4x + 15 - 9x = -7(x - 2) + 2x + 1$

9. $-3(3x + 1) = -[4x + (6x - 5)] + x + 7$

En los ejercicios 10 y 11, realiza los cálculos indicados.

10. Evalúa $A = \frac{1}{2}hb$, donde $h = 10$ y $b = 16$.

11. Evalúa $R_T = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$, donde $R_1 = 100$ y $R_2 = 50$.

12. Resuelve $y = 7x + 13$ para x.

13. Resuelve $A = \frac{2x_1 + x_2 + x_3}{n}$ para x_3.

Resuelve cada ejercicio.

14. Robert invirtió \$700 en un certificado de depósito y gana 6% de interese compuesto trimestralmente. ¿Cuánto vale el certificado 5 años después?

15. Los ángulos A y B son ángulos complementarios. Determina las medidas de los ángulos A y B si el ángulo A es 6° mayor que el doble del ángulo B.

16. El costo de rentar una escalera es de \$15 más \$1.75 por día. ¿Cuántos días rentó Tom Lang la escalera si el costo total fue de \$32.50?

17. El perímetro de un triángulo es de 100 pies. El lado más largo es dos veces la longitud del lado más corto y el otro lado es 20 pies más largo que el lado más corto. Encuentra las longitudes de los tres lados del triángulo.

18. Tien compró un par de zapatos por \$36.00. Con impuestos, el costo fue de \$37.62. Encuentra la tasa de impuestos.

19. La población de un pequeño pueblo aumenta 52 personas al mes. Si la población actual es de 5693 personas, ¿hace cuántos meses la población era de 3613 personas?

20. Cuando se le pidió a Mary Dunwell que resolviera la siguiente ecuación $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3} = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$, dijo que para eliminar las fracciones, el lado izquierdo de la expresión debería ser multiplicado por 6 y el lado derecho debería ser multiplicado por 8. ¿Es correcto? ¿Por qué es incorrecto? Explica tu respuesta. ¿Qué número debería ser usado para eliminar las fracciones de la ecuación entera? Resuelve la ecuación correctamente.

2.4 Problemas adicionales de aplicación

1 Resolver problemas de movimiento.

2 Resolver problemas de mezclas.

En esta sección analizaremos dos tipos adicionales de problemas de aplicación: problemas de movimiento y de mezcla.

1 Resolver problemas de movimiento

Una fórmula con muchas aplicaciones útiles es

Fórmula de movimiento

cantidad = tasa · tiempo

La "cantidad" en esta fórmula puede ser una medida de muchas cantidades diferentes, dependiendo de la tasa. Por ejemplo, si tasa se mide en *millas* por hora, la cantidad será la *distancia*. Si la tasa se mide en *galones*, la cantidad será *volumen*, etcétera.

La fórmula de movimiento puede ser usada en muchas aplicaciones. Una enfermera que aplica una inyección intravenosa a un paciente puede utilizar esta fórmula para determinar la velocidad de goteo del fluido que se está inyectando. Una compañía de perforación de petróleo puede emplear esta fórmula para determinar la cantidad de tiempo necesario para alcanzar su meta. Al aplicar la fórmula las unidades deben ser consistentes. Por ejemplo, si una fotocopiadora tiene una tasa de copiado de 45 copias por minuto, el tiempo debe estar dado en minutos.

Comprendiendo el álgebra

En los problemas en los que se usa la fórmula cantidad = tasa · tiempo son llamados *problemas de movimiento* porque involucran movimiento a una tasa constante para un cierto periodo.

Cuando la fórmula de movimiento se utiliza para calcular distancia, la palabra *cantidad* es remplazada con la palabra *distancia,* y la fórmula se denomina **fórmula de distancia**.

Fórmula de distancia

La fórmula de distancia es

distancia = tasa · tiempo

o $d = rt$ (variables de fórmula en inglés donde r = tasa)

Cuando un problema de movimiento tiene dos tasas diferentes, con frecuencia es útil poner la información en una tabla para ayudar a analizar el problema.

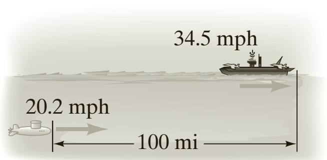


FIGURA 2.6

EJEMPLO 1 **Barcos en el mar** El portaviones *USS John F. Kennedy* y el submarino nuclear *USS Memphis* partieron al mismo tiempo de la estación naval Puget Sound dirigiéndose al mismo destino en el océano Índico. El portaviones viaja a su velocidad máxima de 34.5 millas por hora y el submarino viaja sumergido a una velocidad máxima de 20.2 millas por hora. El portaviones y el submarino viajan a esas velocidades hasta que están a 100 millas de separación. ¿Cuánto tiempo pasará para que el portaviones y el submarino estén a 100 millas de separación? (ver **Figura 2.6**)

Solución **Entiende** Deseamos determinar cuánto tiempo pasa para que la diferencia de distancia sea 100 millas. Para resolver este problema, usaremos la fórmula de distancia, $d = rt$. Para ayudar a entender este problema podría ser útil poner la información en una tabla.

Sea t = tiempo.

	Tasa	Tiempo	Distancia
Portaviones	34.5	t	$34.5t$
Submarino	20.2	t	$20.2t$

Traduce La diferencia entre estas distancias es 100 millas. Entonces,

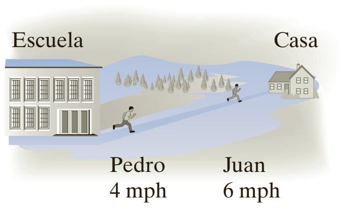
$$\text{distancia del portaviones} - \text{distancia del submarino} = 100$$
$$34.5t - 20.2t = 100$$

Realiza los cálculos

$$14.3t = 100$$
$$t \approx 6.99$$

Responde El portaviones y el submarino estarán a 100 millas de separación en alrededor de 7 horas.

Resuelve ahora el ejercicio 3



Juan llega a casa
1/2 hora antes que Pedro.

FIGURA 2.7

EJEMPLO 2 Corriendo a casa Para estar en forma para la próxima temporada de pista, Juan y Pedro Santiago corren a casa después de la escuela. Juan corre a una tasa de 6 mph y Pedro corre a una tasa de 4 mph. Cuando dejan al mismo tiempo la escuela, Juan llega a casa $\frac{1}{2}$ hora antes que Pedro (ver **Figura 2.7**).

a) ¿Cuánto tiempo le toma a Pedro llegar a casa?

b) ¿A qué distancia viven Juan y Pedro de la escuela?

Solución **a)** Entiende Juan y Pedro correrán la misma distancia. Sin embargo, Juan corre más rápido que Pedro, el tiempo de Juan será menor que el de Pedro por $\frac{1}{2}$ hora.

Sea t = tiempo de Pedro para llegar a casa.

Entonces $t - \frac{1}{2}$ = tiempo de Juan para llegar a casa.

Corredor	Tasa	Tiempo	Distancia
Pedro	4	t	$4t$
Juan	6	$t - \frac{1}{2}$	$6\left(t - \frac{1}{2}\right)$

Traduce Cuando los chicos están en casa ambos habrán corrido la misma distancia desde la escuela. De modo que

$$\text{distancia de Pedro} = \text{distancia de Juan}$$

$$4t = 6\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

Realiza los cálculos

$$4t = 6t - 3$$

$$-2t = -3$$

$$t = \frac{3}{2}$$

Responde A Pedro le tomará $1\frac{1}{2}$ horas llegar a casa.

b) La distancia puede determinarse usando la tasa y el tiempo de Pedro o de Juan. Se multiplicará la tasa de Pedro por el tiempo de Pedro para determinar la distancia.

$$d = rt = 4\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{12}{2} = 6 \text{ millas}$$

Por lo tanto, Juan y Pedro viven a 6 millas de la escuela.

Resuelve ahora el ejercicio 9

Consejo útil

En el ejemplo 2, la respuesta habría cambiado si hubiésemos dicho que t representa el tiempo de Juan y que $t + \frac{1}{2}$ representa el tiempo de Pedro. Aunque esto conduciría a una tabla diferente y una ecuación diferente, la respuesta final todavía sería la misma. Trabaja con esta información y prueba.

EJEMPLO 3 Producción de refresco Una máquina llena botellas de refresco y coloca las tapas. La máquina puede trabajar a dos tasas distintas. A la tasa más rápida, la máquina llena y coloca las tapas a 600 botellas más por hora que a la tasa más lenta. La máquina se enciende durante 4.8 horas a la tasa más lenta, luego se cambia a la tasa más rápida por otras 3.2 horas. Durante estas 8 horas se llenaron y colocaron las tapas a un total de 25,920 botellas. Determina ambas tasas.

Solución **Entiende** Este problema utiliza un número de botellas, una cantidad, en lugar de una distancia; sin embargo, el problema se resuelve de una manera similar. Utilizaremos la fórmula, cantidad = tasa · tiempo. Nos dan dos distintas tasas y nos piden determinar dichas tasas. Usaremos el hecho de que la cantidad de botellas llenadas a la tasa más lenta más la cantidad de llenadas a la tasa más rápida es igual a la cantidad total de botellas llenadas.

Sea r = tasa más lenta.

Entonces $r + 600$ = tasa más rápida.

	Tasa	Tiempo	Cantidad
Tasa más lenta	r	4.8	$4.8r$
Tasa más rápida	$r + 600$	3.2	$3.2(r + 600)$

Traduce cantidad de botellas llenadas a la tasa más lenta + cantidad de botellas llenadas a la tasa más rápida = 25,920

$$4.8r + 3.2(r + 600) = 25{,}920$$

Realiza los cálculos

$$4.8r + 3.2r + 1920 = 25{,}920$$
$$8r + 1920 = 25{,}920$$
$$8r = 24{,}000$$
$$r = 3000$$

Responde La tasa más lenta es 3000 botellas por hora. La tasa más rápida es $r + 600$ o $3000 + 600 = 3600$ botellas por hora.

Resuelve ahora el ejercicio 11

2 Resolver problemas de mezcla

Como lo hicimos en problemas de movimiento, usaremos tablas para ayudar a organizar la información en problemas de mezcla. Los ejemplos 4 y 5 son problemas de mezcla que implican dinero.

Comprendiendo el álgebra

Cualquier problema en el que dos o más cantidades se combinan para producir una cantidad diferente, o donde una cantidad simple es separada en dos o más cantidades diferentes, puede considerarse un *problema de mezcla*.

EJEMPLO 4 **Dos inversiones** Bettie Truitt vendió su bote por \$15,000 y prestó una parte de este dinero a su amiga Kathy Testone. El préstamo fue por un año con una tasa de interés simple de 4.5%. Bettie puso el resto en una cuenta en la unión de crédito del mercado de valores que producía 3.75% de interés simple. Un año más tarde, Bettie ganó un total de \$637.50 de las dos inversiones. Determina la cantidad que Bettie le prestó a Kathy.

Solución **Entiende y traduce** Para resolver este problema usaremos la fórmula de interés simple, interés = capital · tasa · tiempo. Sabemos que parte de la inversión produjo 4.5% y el resto 3.75% de interés simple; se nos pide determinar la cantidad que Bettie prestó a Kathy.

Sea p = cantidad prestada a Kathy al 4.5%.

Entonces $15{,}000 - p$ = cantidad invertida al 3.75%.

Observa que la suma de las dos cantidades es igual a la cantidad total invertida, \$15,000. Determinaremos la cantidad prestada a Kathy con la ayuda de una tabla.

Inversión	Capital	Tasa	Tiempo	Interés
Préstamo a Kathy	p	0.045	1	$0.045p$
Mercado de valores	$15{,}000 - p$	0.0375	1	$0.0375(15{,}000 - p)$

Como el interés total cobrado es \$637.50, escribimos:

interés del préstamo a 4.5% + interés de la cuenta a 3.75% = interés total

$$0.045p + 0.0375(15{,}000 - p) = 637.50$$

Realiza los cálculos

$$
\begin{aligned}
0.045p + 0.0375(15{,}000 - p) &= 637.50 \\
0.045p + 562.50 - 0.0375p &= 637.50 \\
0.0075p + 562.50 &= 637.50 \\
0.0075p &= 75 \\
p &= 10{,}000
\end{aligned}
$$

Responde Por lo tanto, el préstamo fue de \$10,000 y \$15,000 − p o \$15,000 − \$10,000 = \$5,000, que fue lo invertido en la cuenta del mercado de valores.

Resuelve ahora el ejercicio 15

EJEMPLO 5 **Ventas en un puesto de hot dogs** El puesto de hot dogs de Matt en Chicago vende hot dogs a \$2.00 cada uno y tacos de bistec a \$2.25 cada uno. Si la venta total del día fue \$585.50 y se vendieron 278 productos, ¿cuánto vendió de cada producto?

Solución **Entiende y traduce** Se nos pide determinar el número de hot dogs y de tacos de bistec vendidos.

Sea x = número de hot dogs vendidos.

Entonces $278 - x$ = número de tacos de bistec vendidos.

Producto	Costo del producto	Número de productos	Ventas totales
Hot dogs	2.00	x	$2.00x$
Tacos de bistec	2.25	$278 - x$	$2.25(278 - x)$

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{ventas totales de hot dogs} & + & \text{ventas totales de tacos de bistec} & = & \text{ventas totales} \\
2.00x & + & 2.25(278 - x) & = & 585.50
\end{array}
$$

Realiza los cálculos

$$
\begin{aligned}
2.00x + 625.50 - 2.25x &= 585.50 \\
-0.25x + 625.50 &= 585.50 \\
-0.25x &= -40 \\
x &= \frac{-40}{-0.25} = 160
\end{aligned}
$$

Responde Por lo tanto, se vendieron 160 hot dogs y 278 − 160 = 118 tacos de bistec.

Resuelve ahora el ejercicio 17

En el ejemplo 5 podríamos haber multiplicado ambos lados de la ecuación por 100 para eliminar los números decimales y después resolver la ecuación.

El ejemplo 6 es un problema de mezcla que incluye la mezcla de dos soluciones.

EJEMPLO 6 **Mezcla de medicina** Tony Gambino, profesor de química, tiene soluciones de citrato de litio al 6% y al 15%. Desea obtener 0.5 litros de una solución de citrato de litio al 8%. ¿Qué cantidad de cada solución debe utilizar en la mezcla?

Solución **Entiende y traduce** se nos pide determinar la cantidad a mezclar de cada solución.

Sea x = número de litros de solución al 6%.

Entonces $0.5 - x$ = número de litros de solución al 15%.

La cantidad de citrato de litio en una solución se determina multiplicando el porcentaje de citrato de litio en la solución por el volumen de la solución. Haremos un bosquejo del problema (ver **Figura 2.8** de la página 101) y luego construiremos una tabla.

Comprendiendo el álgebra

La concentración de una solución hecha por una mezcla de soluciones siempre estará entre las concentraciones de las dos soluciones usadas para preparar dicha solución. Por ejemplo, si mezclas una solución de ácido al 5% con una solución de ácido al 10%, la mezcla resultante tendrá una concentración entre 5 y 10%.

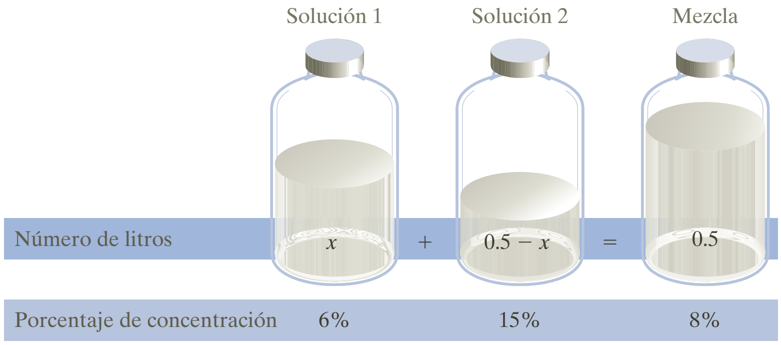


FIGURA 2.8

Solución	Concentración de la solución	Número de litros	Cantidad de citrato de litio
1	0.06	x	$0.06x$
2	0.15	$0.5 - x$	$0.15(0.5 - x)$
Mezcla	0.08	0.5	$0.08(0.5)$

$$\left(\begin{array}{c}\text{cantidad de citra-}\\ \text{to de litio en la}\\ \text{solución al 6\%}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{cantidad de citra-}\\ \text{to de litio en la}\\ \text{solución al 15\%}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{cantidad de}\\ \text{citrato de litio en}\\ \text{la mezcla}\end{array}\right)$$

$$0.06x \quad + \quad 0.15(0.5 - x) \quad = \quad 0.08(0.5)$$

Realiza los cálculos

$$\begin{aligned} 0.06x + 0.15(0.5 - x) &= 0.08(0.5) \\ 0.06x + 0.075 - 0.15x &= 0.04 \\ 0.075 - 0.09x &= 0.04 \\ -0.09x &= -0.035 \\ x &= \frac{-0.035}{-0.09} \approx 0.39 \quad \left(\text{a la centésima más cercana}\right) \end{aligned}$$

Responde Tony debe mezclar 0.39 litros de la solución al 6% y $0.5 - x$ o $0.5 - 0.39 = 0.11$ litros de la solución al 15% para obtener 0.5 litros de una solución al 8%.

Resuelve ahora el ejercicio 21

CONJUNTO DE EJERCICIOS

Practica tus habilidades y Resolución de problemas

En los ejercicios 1-14 escribe la ecuación que puede ser usada para resolver los problemas de movimiento. Resuelve la ecuación y responde la pregunta que se te hace.

1. Escalando en las Rocallosas Dos amigos, Don O'Neal y Judy McElroy, fueron a escalar a las Montañas Rocallosas. Cuando estaban escalando llegaron al Lago Bear. Ellos se preguntaron cuál sería la distancia alrededor del lago y decidieron averiguarlo. Don sabe que camina a 5 mph y Judy sabe que camina a 4.5 mph. Si ellos comienzan a caminar al mismo tiempo en direcciones opuestas alrededor del lago y se encuentran en 1.2 horas, ¿cuál es la distancia alrededor del lago?

© Glowimages

2. Velocidad de copiado María Hannaseck tiene dos copiadoras donde produce volantes. Una copiadora tiene una tasa de 45 copias por minuto y la otra una tasa de 15 copias por minuto. Si Darrell inicia ambas copiadoras al mismo tiempo y las deja copiando por 10 minutos, ¿cuántos volantes producen las fotocopiadoras?

3. Vuelo de globos Cada año en Albuquerque, Nuevo México, se realiza el festival de globos aerostáticos, durante el cual la gente puede pasear en ellos. Supón que parte de la familia Díaz va en un globo y la otra parte va en otro globo. Como los globos viajan en diferentes altitudes y cargan diferentes pesos, un globo viaja a 14 millas por hora mientras el otro viaja en la misma dirección a 11 millas por hora. ¿En cuántas horas estarán a 12 millas de distancia?

© Aimee Calhoun/Allen R. Angel

4. Bicicletas Paul y Frank tienen el mismo trayecto de bicicleta de 39.15 millas de distancia. Van a montar sus bicicletas en los extremos del trayecto, uno contra el otro, hasta que se encuentren. Frank comienza a pedalear $1\frac{1}{2}$ horas después que Paul. Paul viaja a 1.8 millas por hora más rápido que Frank. Si se encuentran 3 horas después de que Paul empezó, encuentra la velocidad de cada ciclista.

5. Maizal Rodney y Dennis recogen el maíz de un maizal que tiene 1.5 millas de largo. Rodney comienza en un lado del maizal a una tasa de 0.15 millas por hora. Dennis comienza del otro lado a una tasa de 0.10 millas por hora. Si ellos comenzaron al mismo tiempo y continuaron trabajando a la misma tasa respectiva, ¿cuánto tiempo pasará hasta que se encuentren?

6. Fotocopiado Para hacer una gran cantidad de copias, Eileen Jones usa dos fotocopiadoras. Una produce copias a una tasa de 42 copias por minuto. La otra copiadora puede producir copias a una tasa de 52 por minuto. Si Eileen comienza al mismo tiempo con las dos máquinas, ¿cuánto tardará con las dos copiadoras para producir 1316 copias?

7. Carrera por la caridad La hermandad Alfa-Delta-Pi recolecta dinero para Ronald McDonald House en la competencia anual "Roll for Ronald". Mary Lou Baker en su bicicleta viaja al doble de lo que viaja Wayne Siegert, que usa patines. Los dos comienzan la carrera al mismo tiempo y después de 3 horas, Mary está 18 millas adelante de Wayne.

a) ¿Cuál es la velocidad de Wayne?

b) ¿Cuál es la velocidad de Mary?

8. Escalada en el cañón Jennifer Moyers escala hacia abajo al fondo del cañón Bryce, acampa en la noche y continua el siguiente día. La velocidad de la escalada tiene un promedio de 3.5 millas por hora y el regreso tiene un promedio de 2.1 millas por hora. Si ella escala un total de 16 horas, encuentra:

a) ¿Cuánto tiempo le tomó llegar al fondo del cañón?

b) El total de la distancia recorrida.

© Natalia Bratslavsky/Shutterstock

Ver ejercicio 8.

9. Alcanzando Luis Nunez comienza a caminar a una tasa de 4 mph. 45 minutos después de que se fue, su esposa, Kristin, se da cuenta de que Luis olvidó su cartera. Kristin toma su bicicleta y comienza a pedalear a una tasa de 24 mph en el mismo camino que Luis tomó.

a) ¿Cuánto tiempo le toma a Kristin alcanzar a Luis?

b) ¿Qué tan lejos de su casa Kristin alcanza a Luis?

10. Caminando hacia la playa Max sale de su condominio en la playa y comienza a caminar por la playa a una tasa de 3 millas por hora. 30 minutos después, Rhiannon sale del mismo condominio y comienza caminar por la misma playa a una tasa de 4 millas por hora.

a) ¿Cuánto tiempo le toma a Rhiannon alcanzar a Max?

b) ¿Qué tan lejos del condominio alcanza Rhiannon a Max?

11. Empacando espagueti Dos máquinas empacan espagueti en cajas. La máquina pequeña empaca 400 cajas por hora y la grande empaca 600 cajas por hora. Si la máquina grande comenzó 2 horas antes que la chica, ¿cuánto tiempo después de que la máquina chica se encendió se empacarán 15,000 cajas de espagueti?

12. Carrera de caracoles Como parte de un proyecto de ciencias, la clase de la señora Joy Pribble hace una carrera de caracoles. El primer caracol, Zippy, se sabe que se mueve a una tasa de 5 pulgadas por hora. El segundo caracol, Lightning, se sabe que se mueve a 4.5 pulgadas por hora. Si los caracoles hacen una carrera recta y si Zippy termina la carrera 0.25 horas antes que Lightning,

a) Determina el tiempo que le toma a Lightning terminar la carrera.

b) Determina el tiempo que hace Zippy.

c) ¿Cuál es la distancia de la carrera?

13. Cita para almorzar Ena y Jana viven a 385 millas de distancia y se quieren encontrar en algún lugar entre sus casas y después ir a un restaurant a almorzar. Si Ena maneja a 60 millas por hora y Jana maneja a 50 millas por hora, ¿cuánto tiempo les tomará encontrarse?

© Glowimages

14. Alcance del walkie-talkie Un par de walkie-talkies tiene un rango de cerca de 2 millas. Alice Burstein y Mary Kalscheur comienzan a caminar en un sendero en direcciones opuestas cargando los walkie-talkies. Si Alice camina a una tasa de 3.8 mph y Mary camina a una tasa de 4.2 mph, ¿cuánto tiempo les tomará estar fuera de rango de alcance de los walkie-talkies?

En los ejercicios 15-28, escribe una ecuación que pueda usarse para resolver el problema de mezcla. Resuelve cada ecuación y responde la pregunta.

15. **Dos inversiones** Bill Palow invirtió $30,000 por un año en dos cuentas separadas que pagaban 3 y 4.1% anual de interés simple. Si Bill ganó en total $1091.73 de las dos inversiones, ¿cuánto invirtió en cada cuenta?

16. **Dos inversiones** Terry Edwards invirtió $3000 por dos años, parte a 3.5% de interés simple y el resto a 2.5% de interés simple. Después de dos años, ella ganó un total de $190 en intereses. ¿Cuánto invirtió en cada tasa?

17. **Mezclando café** Joan Smith es la dueña de una Starbucks Coffee Shop. Ella vende Café Kona a $6.20 por libra y el café Amaretto se vende a $5.80 por libra. Ella encuentra que al mezclar los dos tipos de café crea otro que se vende mejor. Si usa 18 libras de café amaretto y desea vender la mezcla en $6.10 por libra, ¿cuántas libras de café Kona tiene que mezclar con el de Amaretto?

© Allen R. Angel

18. **Mezclando nueces** J.B. Davis es dueño de una tienda de nueces. Vende almendras por $6 la libra y nueces por $5.20 la libra. Recibe un pedido especial de un cliente que quiere comprar 30 libras de una mezcla de almendras y nueces por $165. Determina cuántas libras de almendras y nueces se deben mezclar.

19. **Invirtiendo en Webkinz** Nicholas es coleccionista de juguetes y está invirtiendo en Webkinz en animales de peluche. Compró algunos perros basset hounds por $50 cada uno y el doble de gatos negros por $13 cada uno. Si Nicholas gastó en total $304, ¿cuántos perros basset hounds y cuántos gatos negros compró?


© Allen R. Angel

20. **Soluciones de ácido sulfúrico** Read Wickham, un profesor de química, necesita una solución al 5% de ácido sulfúrico para usarlo en el laboratorio. Cuando revisa el estante, se da cuenta de que tiene solo 8 onzas de una solución de ácido sulfúrico al 25%. No hay suficiente tiempo para que ordene más, por lo que decide hacer una solución al 5% adicionando agua cuidadosamente a la solución al 25%. Determina cuánta agua debe añadir a la solución al 25% para reducirla al 5%.

21. **Soluciones de vinagre** El vinagre blanco destilado disponible en los supermercados generalmente tiene 5% de acidez. Para hacer su asado, La chef Judy Ackerman marina ternera toda la noche en un vinagre destilado especial de 8% que ella prepara. Para hacer la solución especial, mezcla el vinagre regular de 5% con una solución de vinagre al 12% que compra en internet. ¿Cuántas onzas de la solución de vinagre al 12% debería adicionar a 40 onzas del vinagre al 5% para obtener la solución al 8%?

22. **Solución de peróxido de hidrógeno** David Robertson trabaja como ingeniero químico para la Corporación US Peroxide. Tiene 2500 galones de un peróxido de hidrógeno comercial, con 60% de pureza. ¿Cuánta agua destilada (que es 0% de peróxido de hidrógeno) necesitará adicionar a la solución para crear una solución al 25%?

23. **Salsa de rábanos** Sally Finkelstein tiene una receta que llama "salsa de rábanos" que contiene 45% rábano puro. En la tienda encuentra una salsa de rábanos 30% rábano puro y otra que es 80% rábano puro. ¿Cuántas cucharadas de cada una de estas salsas debería mezclar para obtener 4 cucharadas de la salsa de rábanos que es 45% rábano puro?

24. **Mezcla de semillas de pasto** El vivero Pearlman vende dos tipos de semillas de pasto a granel. La semilla de baja calidad tiene una tasa de germinación de 76%, pero la tasa de germinación de la de alta calidad es desconocida. Se mezclan 7 libras de la semilla de alta calidad con 14 libras de la de baja calidad. Si un análisis posterior de la mezcla revela que la tasa de germinación fue de 80%, ¿cuál es la tasa de germinación de la semilla de alta calidad?

25. **Soluciones ácidas** Hay dos soluciones ácidas disponibles para un químico. Una es una solución al 20% de ácido sulfúrico, pero la etiqueta que indica la concentración de la otra solución está perdida. Se mezclan 200 mL de la solución al 20% con 100 mL de la desconocida. Después de un análisis, se determinó que la mezcla tiene una concentración al 25% de ácido sulfúrico. Determina la concentración de la solución sin etiqueta.

26. **Diluyendo vinagre** Alex desea usar un vinagre que contiene 13% de ácido acético como herbicida natural. Tiene vinagre de mesa al 5% de ácido acético y dos tazas de vinagre para encurtir al 15% de ácido acético. ¿Cuántas tazas de vinagre de mesa debería adicionar a las dos tazas de vinagre para encurtir para obtener un vinagre al 13% de ácido acético?

27. **Mezcla de dulces** En un supermercado se venden dos tipos de dulces: rebanadas de naranja y hojas de fresa. Las rebanadas de naranja cuestan $1.29 cada libra y las hojas de fresa tienen un costo de $1.29 la libra. ¿Cuántas libras de cada una deben mezclarse para obtener una mezcla de 12 libras que se venda en $17.48?


© Allen R. Angel

28. Octanajes El octanaje de la gasolina indica el porcentaje del octano puro en la gasolina. Por ejemplo, la gasolina común tiene un índice de octanaje de 87, lo que significa que la gasolina tiene 87% de octano (y 13% de algún otro compuesto como pentano). Blake De Young es dueño de una gasolinera y tiene 850 galones de gasolina con octanaje 87. ¿Cuántos galones debe mezclar de gasolina con octanaje 93 con gasolina con octanaje 87 para obtener gasolina con octanaje 89?

En los ejercicios 29-46, escribe una ecuación que pueda ser usada para resolver el problema de movimiento o de mezcla. Resuelve cada ecuación y da una respuesta a las preguntas.

29. Ruta 66 La famosa autopista Ruta 66 de Estados Unidos conecta Chicago y Los Ángeles y se extiende 2448 millas. Julie Turley empieza en Chicago y maneja a una tasa promedio de 45 mph en la Ruta 66 hacia Los Ángeles. Al mismo tiempo Kamilia Nemri empieza en Los Ángeles y maneja a una tasa promedio de 50 mph hacia Chicago. Si Julie y Kamilia mantienen constantes sus velocidades, ¿cuánto tiempo tardan en encontrarse?

30. Reunión en un restaurante Mike Mears y Scott Greenhalgh viven a 110 millas de distancia uno de otro. Ellos frecuentemente se reúnen para comer en un restaurante que está entre la casa de Mike y la casa de Scott. Si dejan la casa al mismo tiempo, Mike hace 1 hora y 30 minutos y Scott hace 1 hora y 15 minutos para llegar al restaurante. Si cada uno maneja a la misma velocidad,

a) determina su velocidad.

b) ¿qué tan lejos está la casa de Scott del restaurante?

31. Albercas Gary Egan necesita drenar su alberca, cuya capacidad es de 15,000 galones, para revestirla. Usa dos bombas para drenar la alberca. Una drena 10 galones de agua por minuto mientras que la otra la drena a 20 galones por minuto. Si las bombas se encienden al mismo tiempo y se dejan hasta que la alberca esté vacía, ¿cuánto tiempo tarda en drenarse?

© Allen R. Angel

32. Dos inversiones Chuy Carreón invirtió $8000 por un año, parte a 3% y otra parte a 5% de interés simple. ¿Cuánto invirtió en cada cuenta si recibió la misma cantidad de dinero por cada cuenta?

33. Anticongelante ¿Cuántos cuartos de galón de anticongelante puro debería Doreen Kelly adicionar a 10 cuartos de galón de una solución al 20% para hacer una solución anticongelante al 50%?

34. Viaje a Hawaii Un jet vuela de Chicago a Los Ángeles a una velocidad promedio de 500 millas por hora. Luego continua el viaje por el Océano Pacifico rumbo a Hawaii a una velocidad promedio de 550 millas por hora. Si el viaje completo cubre 5200 millas y la parte sobre el océano toma el doble de tiempo que la parte sobre tierra, ¿cuánto tarda el viaje entero?

35. Combustible para jet Un jet de la fuerza aérea se va en un vuelo de larga distancia y necesitará reabastecer combustible en el aire sobre el Océano Pacífico. Un avión de reabastecimiento puede viajar más lejos que el jet pero vuela a menor velocidad. El avión de reabastecimiento y el jet salen de la misma base, pero el avión dejará la base 2 horas antes que el jet. El jet volará a 800 mph y el avión a 520 millas por hora.

a) ¿Cuánto tiempo tardarán en encontrarse?

b) ¿Qué tan lejos de la base se llevará a cabo la recarga?

© Wikicommons

36. Dos trabajos Hal Turziz tiene dos trabajos de medio tiempo. En uno le pagan $7.50 por hora y en el otro le pagan $8.25 por hora. La semana pasada Hal ganó un total de $190.50 y trabajó un total de 24 horas. ¿Cuántas horas trabajó en cada empleo?

37. Ventas de obras de arte Joseph DeGuizman, un artista, vende pinturas grandes por $180 y pinturas pequeñas por $60. Al final de la semana vendió 12 pinturas por $1200. Determina el número de pinturas pequeñas y grandes que vendió.

38. Viaje de negocios Vince Jansen vive a 35 millas de su trabajo. Debido a una construcción, debe manejar los primeros 15 minutos a una velocidad de 10 mph más lento que el resto del viaje. Si el viaje entero le toma 45 minutos, determina la velocidad de Vince en cada parte del viaje.

39. Solución alcohólica Herb Garrett tiene una solución al 80% de alcohol metílico. Quiere hacer un galón de limpiaparabrisas mezclando su solución con agua. Si 128 onzas, o un galón, de limpiaparabrisas debería contener 6% de alcohol metílico, ¿cuánto de la solución al 80% y cuánto de agua deberá mezclar?

40. Cortando el pasto Richard Stewart corta parte de su pasto con una podadora (1) y otra parte con otra podadora (2). Le toma 2 horas cortar todo el pasto y el odómetro de las podadoras marcan que cubrió 13.8 millas. Si el promedio de la podadora (1) es de 4.2 mph y el de la podadora (2) es de 7.8 mph, ¿Cuánto tiempo le llevó podar con cada una?

41. Boletos para un concierto El precio de los boletos para el concierto de Jonas Brothers es de \$56.50. Los estudiantes los pueden adquirir con descuento a tan solo \$49.50. Si el total de los 3250 boletos fue vendido y si el total de las ventas fue de \$162,611,

a) ¿cuántos boletos se vendieron al precio normal?

b) ¿cuántos boletos se vendieron a estudiantes?

© Yuri Arcus/Glowimages

42. Mezcla de leche La lechería Sundance tiene 200 litros de leche entera que contienen 6% de grasa. ¿Cuántos litros de leche con 1.5% de grasa deberían añadirse para producir leche que contenga 2.4% de grasa?

43. Comparación de transporte George Young va a su trabajo en bicicleta en $\frac{3}{4}$ de hora. Si fuera en su carro, tardaría $\frac{1}{6}$ de hora. Si George maneja su carro a una velocidad promedio de 14 mph más rápido de lo que maneja su bicicleta, determina la distancia a su trabajo.

© Stocklite/Glowimages

44. Máquina de envase de cartón de leche Una vieja máquina que dobla y sella cartones de leche puede producir 50 cartones por minuto. Una máquina nueva puede producir 70 cartones por minuto. La máquina vieja ha hecho 1000 cartones cuando se prende la máquina nueva. Si ambas máquinas continúan trabajando, ¿cuánto tiempo después de que la máquina nueva es encendida, ésta habrá producido el mismo número de cartones que la máquina vieja?

45. Salinidad del océano La salinidad (contenido de sal) del Océano Atlántico tiene en promedio 37 partes por millar. Si se recolectan 64 onzas de agua salada y se colocan al sol, ¿cuántas onzas de agua pura se necesitarían evaporar para alcanzar una salinidad de 45 partes por millar? (Solo el agua pura se evapora, la sal se queda.)

46. Dos cohetes Dos cohetes se lanzan desde el Centro Espacial Kennedy. El primer cohete, lanzado a la Luna, viajará a 8000 millas por hora. El segundo se lanzará tiempo después y viajará a 9500 millas por hora. ¿Cuándo se debería lanzar el segundo cohete si ambos se tienen que encontrar a 38,000 millas de la Tierra?

a) Encuentra la solución del problema.

b) Explica cómo encontraste la solución al problema.

© NASA Headquarters

47. a) Inventa un problema de movimiento real que pueda ser representado con una ecuación.

b) Escribe la ecuación que represente tu problema.

c) Resuelve la ecuación y encuentra la respuesta a tu problema.

48. a) Inventa un problema de mezcla real que pueda ser representado con una ecuación.

b) Escribe la ecuación que represente tu problema.

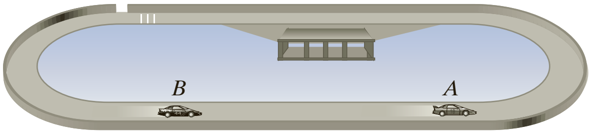
c) Resuelve la ecuación y encuentra la respuesta a tu problema.

Problemas de desafío

49. Distancia a Calais El eurotúnel (túnel submarino que va de Folkestone, Inglaterra, a Calais, Francia) tiene una longitud de 31 millas. Una persona puede tomar el tren bala en París y llegar a Londres en 3 horas. La velocidad promedio del tren es de 130 mph de París a Calais. Después disminuye su velocidad a 90 millas por hora en la milla 31 del eurotúnel. Cuando sale de Folkestone, viaja 68 millas hasta Londres a una velocidad promedio de 45 mph. Con esta información, determina la distancia desde París hasta Calais, Francia.

© Thinkstock

50. Autos de carreras Dos autos rotulados como A y B se encuentran en una carrera a 500 vueltas. Cada vuelta es de 1 milla. EL auto que lleva la delantera, A, alcanza una velocidad promedio de 125 millas por hora cuando llega a la mitad de la vuelta. El auto B está exactamente 6.2 vueltas detrás.



a) Determina la velocidad promedio del auto B.

b) Cuando el auto A llega a la mitad de la vuelta, ¿qué tan atrás, en segundos, se encuentra el auto B del auto A?

51. Solución anticongelante El radiador de un automóvil tiene una capacidad de 16 cuartos de galón. En este momento está lleno con una solución al 20% de anticongelante. ¿Cuántos cuartos de galón deben vaciarse y reemplazarse con anticongelante puro para hacer que el radiador contenga una solución al 50% de anticongelante?

Ejercicios de repaso acumulados

[1.6] **52.** Expresa el cociente en notación científica.

$$\frac{2.16 \times 10^5}{3.6 \times 10^8}$$

Resuelve.

[2.1] **53.** $0.6x + 0.22 = 0.4(x - 2.3)$

54. $\frac{2}{3}x + 8 = x + \frac{25}{4}$

[2.2] **55.** Despeja a y de la ecuación $\frac{3}{5}(x - 2) = \frac{2}{7}(2x + 3y)$.

[2.3] **56.** **Renta de automóviles** La agencia de renta de autos Hertz/Penske cobra \$35 por día más 75¢ la milla. La agencia de renta de autos Budget cobra \$20 por día más 80¢ la milla por el mismo auto. ¿Qué distancia tendrías que conducir en un día para que el costo de la renta de Hertz/Penske sea igual al costo de la renta de Budget?

2.5 Solución de desigualdades lineales

1 Resolver desigualdades.

2 Graficar soluciones en la recta numérica, notación de intervalo y conjuntos solución.

3 Resolver desigualdades compuestas que incluyan *y*.

4 Resolver desigualdades compuestas que incluyan *o*.

1 Resolver desigualdades

En la sección 1.2 introdujimos las desigualdades y la notación constructiva de conjuntos. Tal vez desees repasar esta sección ahora. A continuación se presentan los símbolos de desigualdad.*

Símbolos de desigualdad	
$>$	mayor que
$\geq$	mayor o igual que
$<$	menor que
$\leq$	menor o igual que

Una expresión matemática con uno o más de estos símbolos se le conoce como **desigualdad**.

Ejemplos de desigualdades con una variable

$$2x + 3 \leq 5 \qquad 4x > 3x - 5 \qquad 1.5 \leq -2.3x + 4.5 \qquad \frac{1}{2}x + 3 \geq 0$$

Para resolver una desigualdad, debemos aislar la variable de un lado del símbolo de desigualdad. Para aislar la variable, utilizamos las mismas técnicas básicas empleadas para resolver ecuaciones.

*$\neq$, es distinto a, también es una desigualdad, $\neq$ significa $<$ o $>$. Por lo tanto, $2 \neq 3$ significa $2 < 3$ o $2 > 3$.

Propiedades utilizadas para resolver desigualdades lineales

1. Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.
2. Si $a > b$, entonces $a - c > b - c$.
3. Si $a > b$, y $c > 0$, entonces $ac > bc$.
4. Si $a > b$, y $c > 0$, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.
5. Si $a > b$, y $c < 0$, entonces $ac < bc$.
6. Si $a > b$, y $c < 0$, entonces $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Consejo útil

Las propiedades utilizadas para resolver desigualdades lineales pueden resumirse en tres proposiciones:

1. El mismo número puede sumarse o restarse en ambos lados de una desigualdad.
2. Ambos lados de la desigualdad pueden multiplicarse o dividirse por cualquier número positivo.
3. *Cuando ambos lados de la desigualdad se multiplican o dividen por cualquier número negativo, la dirección del símbolo de desigualdad se invierte.*

Ejemplo de multiplicación por un número negativo

Multiplica ambos lados de la desigualdad por -1 e invierte la dirección del símbolo de desigualdad.

$$4 > -2$$
$$-1(4) < -1(-2)$$
$$-4 < 2$$

Ejemplo de división entre un número negativo

Divide ambos lados de la desigualdad entre -2 e invierte la dirección del símbolo de desigualdad.

$$10 \geq -4$$
$$\frac{10}{-2} \leq \frac{-4}{-2}$$
$$-5 \leq 2$$

Consejo útil

No olvides invertir la dirección del símbolo de desigualdad cuando multipliques o dividas ambos lados de la desigualdad por un número negativo.

Desigualdad	Dirección del símbolo de desigualdad
$-3x < 6$	$\frac{-3x}{-3} > \frac{6}{-3}$
$-\frac{x}{2} > 5$	$(-2)\left(-\frac{x}{2}\right) < (-2)(5)$

EJEMPLO 1 Resuelve las desigualdades. **a)** $5x - 7 \geq -17$ **b)** $-6x + 4 < -14$

Solución

a)

$$5x - 7 \geq -17$$
$$5x - 7 + 7 \geq -17 + 7 \qquad \text{Suma 7 a ambos lados.}$$
$$5x \geq -10$$
$$\frac{5x}{5} \geq \frac{-10}{5} \qquad \text{Divide a ambos lados entre 5.}$$
$$x \geq -2$$

El conjunto solución es $\{x|x \geq -2\}$. Cualquier número real mayor que o igual a -2 satisface la desigualdad.

b)

$$-6x + 4 < -14$$
$$-6x + 4 - 4 < -14 - 4 \qquad \text{Resta 4 a ambos lados.}$$
$$-6x < -18$$
$$\frac{-6x}{-6} > \frac{-18}{-6} \qquad \text{Divide a ambos lados entre } -6 \text{ e invierte la dirección del símbolo de desigualdad.}$$
$$x > 3$$

El conjunto solución es $\{x|x > 3\}$. Cualquier número mayor que 3 satisface la desigualdad.

Resuelve ahora el ejercicio 17

2 Graficar soluciones en la recta numérica, notación de intervalo y conjuntos solución

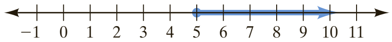
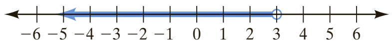
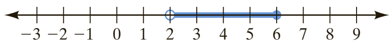
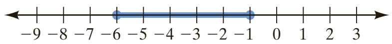
La solución de una desigualdad puede indicarse sobre la recta numérica o escribirse como un conjunto solución. La solución también puede escribirse en notación de intervalo, como se ilustra a continuación.

Los siguientes símbolos se usarán para representar soluciones de desigualdades.

Símbolo de desigualdad	Puntos extremos en la recta numérica	Símbolos para la notación de intervalo	¿Se incluye el punto extremo en la solución?
$<$ o $>$	∘	(o)	No
$\leq$ o $\geq$	•	[o]	Sí

El símbolo ∞ se lee "infinito"; indica que el conjunto solución continúa indefinidamente.

> **Comprendiendo el álgebra**
>
> Cada vez que se utilice ∞ en notación de intervalo, se debe utilizar un *paréntesis* del lado correspondiente de esta notación de intervalo.

Solución de desigualdad	Conjunto solución indicado en la recta numérica	Conjunto solución representado en notación de intervalo
$x \geq 5$		$[5, \infty)$
$x < 3$		$(-\infty, 3)$
$2 < x \leq 6$		$(2, 6]$
$-6 \leq x \leq -1$		$[-6, -1]$
$x > a$		(a, ∞)
$x \geq a$		$[a, \infty)$
$x < a$		$(-\infty, a)$
$x \leq a$		$(-\infty, a]$
$a < x < b$		(a, b)
$a \leq x \leq b$		$[a, b]$
$a < x \leq b$		$(a, b]$
$a \leq x < b$		$[a, b)$

EJEMPLO 2 Resuelve la siguiente desigualdad y proporciona la solución tanto en la recta numérica como en notación de intervalo.

$$\frac{1}{4}z - \frac{1}{2} < \frac{2z}{3} + 2$$

Solución Podemos eliminar las fracciones de una desigualdad al multiplicar ambos lados de la desigualdad por el mínimo común denominador, MCD, de las fracciones.

$$\frac{1}{4}z - \frac{1}{2} < \frac{2z}{3} + 2$$

$$12\left(\frac{1}{4}z - \frac{1}{2}\right) < 12\left(\frac{2z}{3} + 2\right) \qquad \text{Multiplica ambos lados de la ecuación por el MCD, 12.}$$

$$3z - 6 < 8z + 24 \qquad \text{Propiedad distributiva}$$

$$3z - 8z - 6 < 8z - 8z + 24 \qquad \text{Resta } 8z \text{ a ambos lados.}$$

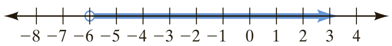
$$-5z - 6 < 24$$

$$-5z - 6 + 6 < 24 + 6 \qquad \text{Suma 6 a ambos lados.}$$

$$-5z < 30$$

$$\frac{-5z}{-5} > \frac{30}{-5} \qquad \text{Divide a ambos lados entre } -5 \text{ e invierte la dirección del símbolo de desigualdad.}$$

$$z > -6$$

Recta numérica	Notación de intervalo
	$(-6,\infty)$

El conjunto solución es $\{z|z > -6\}$.

Resuelve ahora el ejercicio 31

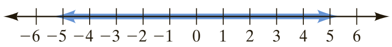
En el ejemplo 2 ilustramos la solución en la recta numérica, en notación de intervalo y como un conjunto solución.

EJEMPLO 3 Resuelve la desigualdad $2(3p - 5) + 9 \le 8(p + 1) - 2(p - 3)$.

Solución

$$2(3p - 5) + 9 \le 8(p + 1) - 2(p - 3)$$
$$6p - 10 + 9 \le 8p + 8 - 2p + 6$$
$$6p - 1 \le 6p + 14$$
$$6p - 6p - 1 \le 6p - 6p + 14$$
$$-1 \le 14$$

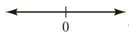
Como -1 siempre es menor o igual a 14, la desigualdad es verdadera para todos los números reales. Cuando una desigualdad es verdadera para todos los números reales, el conjunto solución es *el conjunto de todos los números reales,* $\mathbb{R}$. El conjunto solución de este ejemplo también puede indicarse en la recta numérica o en notación de intervalo.



o $(-\infty,\infty)$

Resuelve ahora el ejercicio 23

> **Comprendiendo el álgebra**
>
> Si cuando resolvemos una desigualdad se obtiene una desigualdad sin variables, esto siempre es:
>
> - verdadero, cuando $-1 \le 14$, entonces el conjunto solución es el conjunto de *todos los números reales,* $\mathbb{R}$.
> - falso, cuando $5 < -3$, entonces el conjunto solución es el conjunto vacío, $\varnothing$.

Si en el ejemplo 3 hubiese resultado la expresión $-1 \ge 14$, la desigualdad nunca sería verdadera, ya que -1 nunca es mayor que o igual a 14. Cuando una desigualdad nunca es verdadera, no tiene solución; su conjunto solución es el *conjunto vacío o conjunto nulo*, { } o $\varnothing$. Representaremos el conjunto vacío en la recta numérica como sigue, .

> **Consejo útil**
>
> Por lo general, cuando se escribe una solución a una desigualdad, escribimos la variable a la izquierda. Por ejemplo, cuando resolvemos una desigualdad, si obtenemos $5 \ge y$ escribiríamos la solución como $y \le 5$. Por ejemplo,
>
> $-6 < x$ significa $x > -6$ (el símbolo de desigualdad apunta a -6 en ambos casos)
> $4 > x$ significa $x < 4$ (el símbolo de desigualdad apunta a x en ambos casos)
> $a < x$ significa $x > a$ (el símbolo de desigualdad apunta a a en ambos casos)
> $a > x$ significa $x < a$ (el símbolo de desigualdad apunta a x en ambos casos)

EJEMPLO 4 **Paquetes en un bote** Un pequeño bote puede transportar un peso máximo de 750 libras. Millie Harrison tiene que transportar cajas que pesan 42.5 libras cada una.

a) Escribe una desigualdad que pueda usarse para determinar el número máximo de cajas que Millie puede colocar de forma segura en su bote, si ella pesa 128 libras.

b) Determina el número máximo de cajas que Millie puede transportar.

Solución

a) Entiende y traduce Sea n = número de cajas.

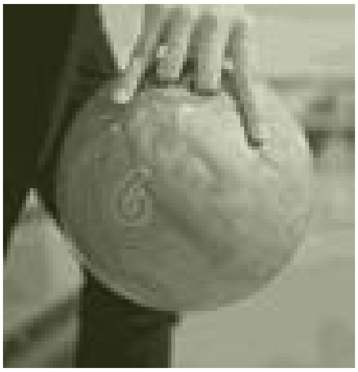
$$\text{peso de Millie} + \text{peso de } n \text{ cajas} \le 750$$
$$128 \quad + \quad 42.5n \quad \le 750$$

b) Realiza los cálculos

$$128 + 42.5n \le 750$$
$$42.5n \le 622$$
$$n \le 14.6$$

Responde Por lo tanto, Millie puede transportar hasta 14 cajas en el bote.

Resuelve ahora el ejercicio 65


© Tereshchenko Dimitry/Shutterstock

EJEMPLO 5 **Costo de línea de bolos** En el boliche Corbin en Tarzana, California, cuesta \$2.50 rentar zapatos para boliche y cuesta \$4.00 cada juego.

a) Escribe una desigualdad que pueda usarse para determinar el número máximo de juegos de bolos que Ricky Olson puede jugar a los bolos si solo tiene \$20.

b) Determina el número máximo de juegos de bolos que puede jugar Ricky.

Solución **a)** Entiende y traduce

Sea g = número de juegos.

Entonces $4.00g$ = costo de jugar g juegos.

costo de la renta de zapatos + costo de jugar g juegos ≤ dinero que tiene Ricky

$$2.50 \quad + \quad 4.00g \quad \leq \quad 20$$

b) Realiza los cálculos

$$\begin{aligned} 2.50 + 4.00g &\leq 20 \\ 4.00g &\leq 17.50 \\ \frac{4.00g}{4.00} &\leq \frac{17.50}{4.00} \\ g &\leq 4.375 \end{aligned}$$

Responde y verifica Como Ricky no puede jugar parte de un juego, el número máximo de juegos que puede pagar es 4. Si Ricky fuese a jugar 5 juegos de bolos debería gastar \$2.50 + 5(\$4.00) = \$22.50, que es más que los \$20 que tiene.

Resuelve ahora el ejercicio 67

EJEMPLO 6 **Utilidad** Para que un negocio logre una utilidad, su ingreso, R, debe ser mayor que su costo, C. Esto es, se obtendrá una utilidad cuando $R > C$ (el punto de equilibrio de la compañía es cuando $R = C$). Una compañía que produce naipes tiene una ecuación de costo semanal de $C = 1525 + 1.7x$ y una ecuación de ingresos semanales de $R = 4.2x$, donde x es el número de mazos de naipes producidos y vendidos en una semana. ¿Cuántos mazos de naipes deben producirse y venderse en una semana para que la compañía tenga una utilidad?

Solución Entiende y traduce La compañía tendrá una utilidad cuando $R > C$, o

$$4.2x > 1{,}525 + 1.7x$$

Realiza los cálculos

$$\begin{aligned} 2.5x &> 1525 \\ x &> \frac{1525}{2.5} \\ x &> 610 \end{aligned}$$

Responde La compañía tendrá una utilidad cuando se produzcan y vendan más de 610 mazos de naipes en una semana.

Resuelve ahora el ejercicio 69

EJEMPLO 7 **Tabla de impuestos** La tabla de la tasa de impuestos de 2008 para parejas casadas que presentan declaración de impuestos conjunta se muestra a continuación.

Tabla Y-1 Utilice si su estado civil es **Casado por bienes mancomunados o viudo(a)**

Si los ingresos gravables son mayores-	Pero no mayores a-	El impuesto es:	De la cantidad mayor a-
\$0	\$16,050	10%	\$0
\$16,050	\$65,100	\$1,605.00 + 15%	\$16,050
\$65,100	\$131,450	\$8,962.50 + 25%	\$65,100
\$131,450	\$200,300	\$25,550.00 + 28%	\$131,450
\$200,300	\$357,700	\$44,828.00 + 33%	\$200,300
\$357,700	∞	\$96,770.00 + 35%	\$357,700

a) Escribe, en notación de intervalo, las cantidades de ingresos gravables que conforman cada uno de los seis rangos de impuestos listados, esto es, los rangos del 10%, 15%, 25%, 28%, 33% y 35%.

b) Determina el impuesto de una pareja casada por bienes mancomunados si sus ingresos gravables son $13,500.

c) Determina el impuesto de una pareja casada por bienes mancomunados si sus ingresos gravables son $136,000.

Solución

a) Las palabras *pero no mayor que* significa “menor que o igual a”. Los ingresos gravables que conforman los seis rangos son:

$(0,16{,}050]$ para el rango de 10%
$(16{,}050, 65{,}100]$ para el rango de 15%
$(65{,}100,131{,}450]$ para el rango de 25%
$(131{,}450,200{,}300]$ para el rango de 28%
$(200{,}300,357{,}700]$ para el rango de 33%
$(357{,}700,\infty)$ para el rango de 35%

b) El impuesto para una pareja casada por bienes mancomunados con ingreso gravable de $13,500 es 10% de $13,500. Por lo tanto,

$$\text{impuesto} = 0.10(13{,}500) = \$1350$$

El impuesto es $1350.

c) Un ingreso gravable de $136,000 coloca a la pareja en el rango de impuestos de 28%. El impuesto es $25,500 + 28% del ingreso gravable mayor que $131,450. El ingreso gravable mayor que $131,450 es $\$136{,}000 - \$131{,}450 = \$4550$. Por lo tanto,

$$\text{impuesto} = 25{,}550.00 + 0.28(4550) = 25{,}550 + 1274 = 26{,}824$$

El impuesto es $26,824.

Resuelve ahora el ejercicio 79

3 Resolver desigualdades compuestas que incluyan *y*

Una **desigualdad compuesta** está formada por dos desigualdades ligadas con la letra *y* o la letra *o*. En ocasiones la letra *y* está implícita sin que esté escrita.

Ejemplos de desigualdades compuestas

$$3 < x \quad \text{y} \quad x < 5$$
$$x + 4 > 2 \quad \text{o} \quad 2x - 3 < 6$$
$$4x - 6 \geq -3 \quad \text{y} \quad x - 6 < 17$$

La solución de una desigualdad compuesta que utilice la letra *y* son todos los números que hacen *ambas* partes de la desigualdad verdaderas. Considera

$$3 < x \quad \text{y} \quad x < 5$$

Los números que satisfacen ambas desigualdades pueden verse con facilidad si graficamos la solución de cada desigualdad en una recta numérica (ver **Figura 2.9**). Ahora observa que los números que satisfacen ambas desigualdades son los números entre 3 y 5. El conjunto solución es $\{x|3 < x < 5\}$.

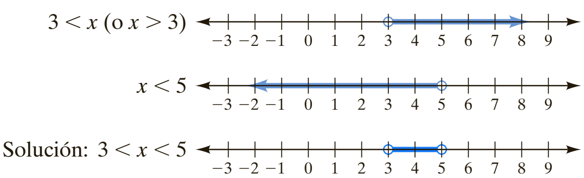


FIGURA 2.9

La intersección de dos conjuntos es el conjunto de elementos comunes a ambos conjuntos. *Para determinar el conjunto solución de una desigualdad que contenga la letra* ***y****, toma la* ***intersección*** *de los conjuntos solución de las dos desigualdades.*

EJEMPLO 8 Resuelve $x + 5 \leq 8$ y $2x - 9 > -7$.

Solución Comienza por resolver cada desigualdad por separado.

$$\begin{array}{rcr} x + 5 \leq 8 & \text{y} & 2x - 9 > -7 \\ x \leq 3 & & 2x > 2 \\ & & x > 1 \end{array}$$

Ahora toma la intersección de los conjuntos $\{x|x \leq 3\}$ y $\{x|x > 1\}$. Cuando encontramos $\{x|x \leq 3\} \cap \{x|x > 1\}$, determinamos los valores de x comunes a ambos conjuntos. La **Figura 2.10** ilustra que el conjunto solución es $\{x|1 < x \leq 3\}$. En notación de intervalo, la solución es $(1,3]$.

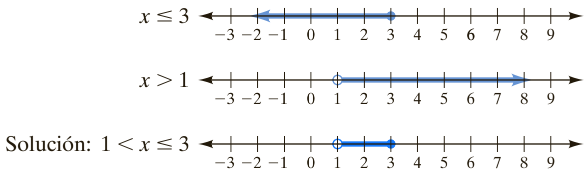


FIGURA 2.10

Resuelve ahora el ejercicio 57

A veces podemos escribir una desigualdad compuesta que utiliza la letra *y* en una forma más corta.

$$3 < x \quad \text{y} \quad x < 5 \quad \text{se escribe} \quad 3 < x < 5,$$
$$-1 < x + 3 \quad \text{y} \quad x + 3 \leq 5 \quad \text{se escribe} \quad -1 < x + 3 \leq 5$$

EJEMPLO 9 Resuelve $-1 < x + 3 \leq 5$.

Solución $-1 < x + 3 \leq 5$ significa $-1 < x + 3$ y $x + 3 \leq 5$. Resuelve cada desigualdad por separado.

$$\begin{array}{rcr} -1 < x + 3 & \text{y} & x + 3 \leq 5 \\ -4 < x & & x \leq 2 \end{array}$$

Recuerda que $-4 < x$ significa $x > -4$. La **Figura 2.11** ilustra que el conjunto solución es $\{x|-4 < x \leq 2\}$. En notación de intervalo, la solución es $(-4,2]$.

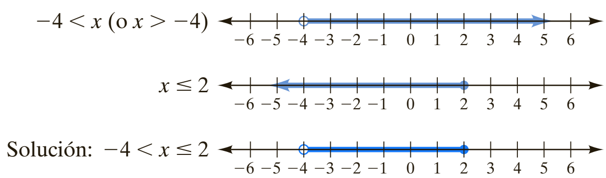


FIGURA 2.11

Resuelve ahora el ejercicio 35

Comprendiendo el álgebra

Cuando trabajamos con desigualdades con más de dos *partes*, lo que hagamos para una parte lo debemos hacer para *todas* las partes.

La desigualdad del Ejemplo 9, $-1 < x + 3 \leq 5$, puede resolverse de otra forma. Podríamos restar el número 3 a las tres partes de la desigualdad para aislar la variable de en medio y resolver.

$$-1 < x + 3 \leq 5$$
$$-1 - 3 < x + 3 - 3 \leq 5 - 3$$
$$-4 < x \leq 2$$

Observa que esta es la misma solución que se obtuvo en el ejemplo 9.

EJEMPLO 10 Resuelve la desigualdad $-3 \le 2t - 7 < 8$.

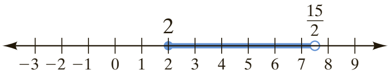
Solución Queremos despejar la variable t. Comenzaremos por sumar 7 a las tres partes de la desigualdad.

$$-3 \le 2t - 7 < 8$$
$$-3 + 7 \le 2t - 7 + 7 < 8 + 7$$
$$4 \le 2t < 15$$

Ahora divide las tres partes de la desigualdad entre 2.

$$\frac{4}{2} \le \frac{2t}{2} < \frac{15}{2}$$
$$2 \le t < \frac{15}{2}$$

La solución también puede ilustrarse en una recta numérica, escribirse en notación de intervalo o escribirse como un conjunto solución. A continuación mostramos cada forma.



La respuesta en notación de intervalo es $\left[2, \frac{15}{2}\right)$. El conjunto solución es $\left\{t \,\middle|\, 2 \le t < \frac{15}{2}\right\}$.

Resuelve ahora el ejercicio 41

EJEMPLO 11 Resuelve la desigualdad $-2 < \dfrac{4 - 3x}{5} < 8$.

Solución Multiplica las tres partes por 5 para eliminar el denominador.

$$-2 < \frac{4 - 3x}{5} < 8$$
$$-2(5) < \cancel{5}\left(\frac{4 - 3x}{\cancel{5}}\right) < 8(5)$$
$$-10 < 4 - 3x < 40$$
$$-10 - 4 < 4 - 4 - 3x < 40 - 4$$
$$-14 < -3x < 36$$

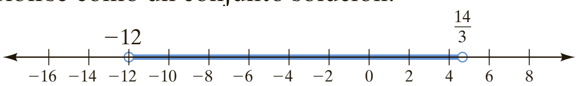
Ahora divide las tres partes de la desigualdad entre -3. Recuerda que cuando multiplicamos o dividimos una desigualdad por un número negativo, la dirección del símbolo de desigualdad se invierte.

$$\frac{-14}{-3} > \frac{-3x}{-3} > \frac{36}{-3}$$
$$\frac{14}{3} > x > -12$$

Aunque $\frac{14}{3} > x > -12$ es correcto, por lo general, escribimos desigualdades compuestas con el valor más pequeño a la izquierda. Por lo tanto, rescribiremos la solución como

$$-12 < x < \frac{14}{3}$$

La solución también puede ilustrarse en una recta numérica, escribirse en notación de intervalo o escribirse como un conjunto solución.



La respuesta en notación de intervalo es $\left(-12, \frac{14}{3}\right)$. El conjunto solución es $\left\{x \,\middle|\, -12 < x < \frac{14}{3}\right\}$.

Resuelve ahora el ejercicio 43

Prevención de errores comunes

Debes tener cuidado al escribir la solución de una desigualdad compuesta. En el Ejemplo 11 podemos cambiar la solución de

$$\frac{14}{3} > x > -12 \quad \text{a} \quad -12 < x < \frac{14}{3}$$

Esto es correcto, ya que ambos dicen que x es mayor que -12 y menor que $\frac{14}{3}$. Observa que el símbolo de la desigualdad en ambos casos apunta al número menor.

En el Ejemplo 11, si hubiéramos escrito la respuesta $\frac{14}{3} < x < -12$, habríamos dado una solución incorrecta. Recuerda que la desigualdad $\frac{14}{3} < x < -12$ significa que $\frac{14}{3} < x$ y x -12. No existe ningún número que sea al mismo tiempo mayor que $\frac{14}{3}$ y menor que -12. Además, al examinar la desigualdad $\frac{14}{3} < x < -12$, aparece como si dijéramos que -12 es un número mayor que $\frac{14}{3}$, lo que obviamente es incorrecto.

También sería incorrecto escribir la respuesta como

$$\cancel{-12 < x > \frac{14}{3}} \quad \text{o} \quad \cancel{\frac{14}{3} < x > -12}$$

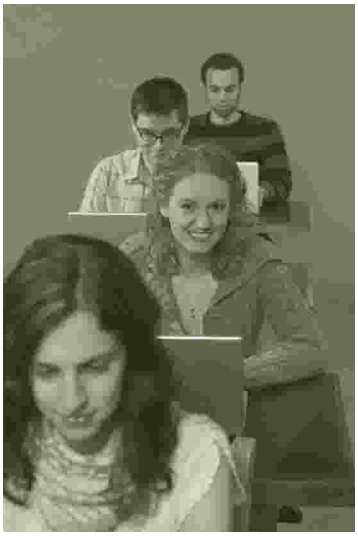
EJEMPLO 12 **Cálculo de calificaciones** En un curso de anatomía y fisiología, una calificación promedio mayor que o igual a 80 y menor que 90 tiene como resultado una nota de B. Steve Reinquist recibió calificaciones de 85, 90, 68 y 70 en sus primeros cuatro exámenes. Para que Steve reciba una nota final de B en el curso, ¿entre qué par de calificaciones debe estar su quinto (y último) examen?

Solución Sea x = calificación en el último examen de Steve.

$$\begin{aligned}
80 &\le \text{promedio de los cinco exámenes} < 90 \\
80 &\le \frac{85 + 90 + 68 + 70 + x}{5} < 90 \\
80 &\le \frac{313 + x}{5} < 90 \\
400 &\le 313 + x < 450 \\
400 - 313 &\le 313 - 313 + x < 450 - 313 \\
87 &\le x < 137
\end{aligned}$$

Steve necesitaría una calificación mínima de 87 en su último examen para obtener una nota final de B. Si la calificación más alta que pudiera recibir en el examen es 100, ¿podría lograr una nota final de A (promedio de 90 o más)? Explica.

Resuelve ahora el ejercicio 75



© Erik Palmer/Glowimages

4 Resolver desigualdades compuestas que incluyan *o*

La solución de una desigualdad compuesta que utilice la letra *o* son todos los números que hacen *cualquiera* de las desigualdades verdadera. Considera la desigualdad compuesta

$$x > 3 \text{ o } x < 5$$

¿Qué números satisfacen la desigualdad compuesta? Grafiquemos la solución de cada desigualdad mediante la recta numérica (ver **Figura 2.12**). Observa que todo número real satisface al menos una de las dos desigualdades. Por lo tanto, el conjunto solución de la desigualdad compuesta es el conjunto de todos los números reales, $\mathbb{R}$.

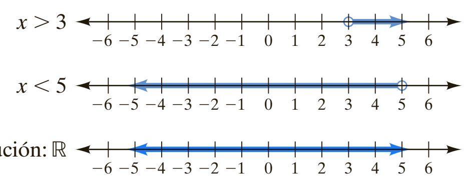


FIGURA 2.12

La *unión* de dos conjuntos es el conjunto de elementos que pertenecen a *cualquiera* de los conjuntos. *Para encontrar el conjunto solución de la desigualdad que contenga la letra* ***o****, toma la* ***unión*** *de los conjuntos solución de las dos desigualdades que comprenden la desigualdad compuesta*.

EJEMPLO 13 Resuelve $r - 2 \leq -6$ o $-4r + 3 < -5$.

Solución Resuelve cada desigualdad por separado.

$$\begin{array}{rcr} r - 2 \leq -6 & \text{o} & -4r + 3 < -5 \\ r \leq -4 & & -4r < -8 \\ & & r > 2 \end{array}$$

Ahora grafica cada solución en rectas numéricas y después determina la unión (ver **Figura 2.13**). La unión es $r \leq -4$ o $r > 2$.

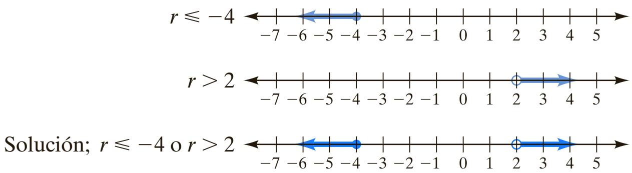


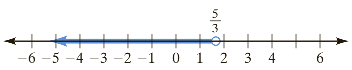
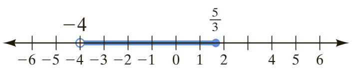
FIGURA 2.13

El conjunto solución es $\{r|r \leq -4\} \cup \{r|r > 2\}$, que podemos escribir como $\{r|r \leq -4 \text{ o } r > 2\}$. En notación de intervalo, la solución es $(-\infty, -4] \cup (2, \infty)$.

Resuelve ahora el ejercicio 59

Consejo útil

Existen varias formas de escribir la solución de un problema de desigualdad. Asegúrate de indicar la solución de un problema de desigualdad en la forma solicitada por tu profesor. A continuación proporcionamos ejemplos de varias formas.

Desigualdad	Recta numérica	Notación de intervalo	Conjunto solución
$x < \frac{5}{3}$		$\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$	$\left\{x \middle| x < \frac{5}{3}\right\}$
$-4 < t \leq \frac{5}{3}$		$\left(-4, \frac{5}{3}\right]$	$\left\{t \middle| -4 < t \leq \frac{5}{3}\right\}$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2.5

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

dirección abierto cerrado intersección unión compuesto simple

1. Una desigualdad __________ se forma uniendo dos desigualdades con la letra *y* u *o*.
2. Un círculo __________ en la recta numérica indica que el punto final no es parte de la solución.
3. Un círculo __________ en la recta numérica indica que el punto final es parte de la solución.
4. Para encontrar el conjunto solución de una desigualdad que contiene la letra *y*, se toma la __________ de los conjuntos solución de cada una de las desigualdades.
5. Para encontrar el conjunto solución de una desigualdad que contiene la letra *o*, se toma la __________ de los conjuntos solución de cada una de las desigualdades.
6. Siempre que se dividan o multipliquen los dos lados de una desigualdad por un número negativo, debes cambiar la __________ del símbolo de desigualdad.

Practica tus habilidades

*Expresa cada desigualdad **a)** usando una recta numérica, **b)** en notación de intervalo, y **c)** como un conjunto solución (usa la notación constructiva de conjuntos).*

7. $x > -3$
8. $t > \frac{3}{4}$
9. $w \leq \pi$
10. $-4 < x < 3$
11. $-3 < q \leq \frac{4}{5}$
12. $x \geq -\frac{6}{5}$
13. $-7 < x \leq -4$
14. $-2\frac{7}{8} \leq k < -1\frac{2}{3}$

Resuelve cada desigualdad y grafica la solución en la recta numérica.

15. $x + 8 > 10$
16. $2x + 3 > 4$
17. $3 - x < -4$
18. $12b - 5 \leq 8b + 7$
19. $4.7x - 5.48 \geq 11.44$
20. $1.4x + 2.2 < 2.6x - 0.2$
21. $4(x + 2) \leq 4x + 8$
22. $15.3 > 3(a - 1.4)$
23. $5b - 6 \geq 3(b + 3) + 2b$
24. $-6(d + 2) < -9d + 3(d - 1)$
25. $2y - 6y + 8 \leq 2(-2y + 9)$
26. $\frac{y}{2} + \frac{4}{5} \leq 3$

Resuelve las siguientes desigualdades y da la solución usando notación de intervalo.

27. $4 + \frac{4x}{3} < 6$
28. $4 - 3x < 5 + 2x + 17$
29. $\frac{v - 5}{3} - v \geq -3(v - 1)$
30. $\frac{h}{2} - \frac{5}{6} < \frac{7}{8} + h$
31. $\frac{t}{3} - t + 7 \leq -\frac{4t}{3} + 8$
32. $\frac{6(x - 2)}{5} > \frac{10(2 - x)}{3}$
33. $-3x + 1 < 3[(x + 2) - 2x] - 1$
34. $4[x - (3x - 2)] > 3(x + 5) - 15$

Resuelve las siguientes desigualdades y da la solución usando notación de intervalo.

35. $-2 \leq t + 3 < 4$
36. $-7 < p - 6 \leq -5$
37. $-15 \leq -3z \leq 12$
38. $-16 < 5 - 3n \leq 13$
39. $4 \leq 2x - 4 < 7$
40. $-12 < 3x - 5 \leq -1$
41. $14 \leq 2 - 3g < 15$
42. $\frac{1}{2} < 3x + 4 < 13$

Resuelve cada una de las siguientes desigualdades y da el conjunto solución.

43. $5 \leq \frac{3x + 1}{2} < 11$
44. $\frac{3}{5} < \frac{-x-5}{3} < 2$
45. $-6 \leq -3(2x - 4) < 12$
46. $-6 < \frac{4 - 3x}{2} < \frac{2}{3}$
47. $0 \leq \frac{3(u - 4)}{7} \leq 1$
48. $-15 < \frac{3(x - 2)}{5} \leq 0$

Resuelve cada una de las siguientes desigualdades e indica su conjunto solución.

49. $c \leq 1$ y $c > -3$
50. $d > 0$ o $d \leq 8$
51. $x < 2$ y $x > 4$
52. $w \leq -1$ o $w > 6$
53. $x + 1 < 3$ y $x + 1 > -4$
54. $5x - 3 \leq 7$ o $-2x + 5 < -3$

Resuelve cada una de las desigualdades y da la solución en notación de intervalos.

55. $2s + 3 < 7$ o $-3s + 4 \leq -17$
56. $4a + 7 \geq 9$ y $-3a + 4 \leq -17$
57. $4x + 5 \geq 5$ y $3x - 7 \leq -1$
58. $5 - 3x < -3$ y $5x - 3 > 10$
59. $4 - r < -2$ o $3r - 1 < -1$
60. $-x + 3 < 0$ o $2x - 5 \geq 3$
61. $2k + 5 > -1$ y $7 - 3k \leq 7$
62. $2q - 11 \leq -7$ o $2 - 3q < 11$

Resolución de problemas

63. Paquetes de UPS La longitud más la circunferencia de un paquete no puede ser mayor a 130 pulgadas, para poder ser enviado sin recargo por United Parcel Service (UPS).

a) Escribe una desigualdad que exprese esta información, usando l para expresar la longitud y g para la circunferencia.

b) UPS ha definido la circunferencia como el doble del ancho más el doble de la profundidad. Escribe una desigualdad expresando la longitud con l, el ancho con w y la profundidad con d, para indicar las dimensiones máximas permitidas para que un paquete pueda ser enviado sin pagar recargo.

c) Si la longitud de un paquete es de 40 pulgadas y su ancho es 20.5 pulgadas, encuentra la máxima profundidad permitida del paquete.

64. Equipaje de mano Varias aerolíneas han limitado el tamaño del equipaje que los pasajeros pueden llevar abordo de vuelos domésticos. La longitud, l, más el ancho w, más la profundidad d del equipaje de mano no deben exceder 45 pulgadas.

a) Escribe una desigualdad que describa esta restricción, usando l, w y d como se describió antes.

b) Si el equipaje de Ryan McHenry mide 23 pulgadas de largo y 12 pulgadas de ancho, ¿qué profundidad máxima puede tener para poder ser llevado a bordo del avión?

© Allen R. Angel

En los ejercicios 65-78, establece una desigualdad que pueda usarse para resolver el problema. Resuelve el problema y encuentra el valor deseado.

65. Límite de peso Cal Worth, un conserje, debe mover un gran cargamento de libros desde el primer piso hasta el quinto piso. Un aviso en el elevador dice "peso máximo: 800 libras". Si cada caja de libros pesa 70 libras, encuentra el máximo número de cajas que Cal puede colocar en el elevador si él no se sube.

66. Límite del elevador Si el conserje del Ejercicio 65 pesa 195 libras y debe subir al elevador con las cajas de libros, encuentra el máximo número de cajas que puede colocar dentro del elevador.

67. Mensajes de texto El plan "Paquete 200 mensajes inalámbricos" de The Verizon incluye 200 mensajes de texto por mes por \$5.00. Los mensajes adicionales cuestan \$0.15 cada uno. Si Berma Williams usa este plan, ¿cuántos mensajes de texto puede comprar por \$20?

© Glowimages

68. Estacionamiento público Un estacionamiento público en el centro de la ciudad de Austin, Texas, cobra \$1.25 por la primera hora y \$0.75 por cada hora o fracción adicional. ¿Cuál es el máximo periodo que puedes estacionarte si no deseas pagar más de \$3.75?

69. Ganancias por un libro April Lemons está considerando escribir y publicar su propio libro. Ella estima que su ecuación de ingresos es $R = 6.42x$, y su ecuación de costo es $C = 10{,}025 + 1.09x$, donde x es el número de libros que vende. Encuentra el número mínimo de libros que tiene que vender para obtener ganancias. Ver ejemplo 6.

70. Ganancias en una tintorería Peter Collinge va a abrir una tintorería. Estima que su ecuación de costos es $C = 8000 + 0.08x$ y su ecuación de ingresos es $R = 1.85x$, donde x es el número de prendas que deben lavarse en seco en un año. Encuentra el número mínimo de prendas que deben lavarse en seco al año para que Peter tenga ganancias.

© Allen R. Angel

71. Envío postal de sobres grandes El costo de enviar por correo sobres grandes es de \$0.83 para la primera onza y \$0.17 para cada onza adicional. ¿Cuál es el máximo peso que un sobre grande debe tener para que Joni Burnette pueda enviarlo por \$2.70?

72. Correo prepagado de primera clase Las compañías pueden enviar paquetes por correo que pesen hasta 1 onza usando el servicio de correo *prepagado de primera clase*. La compañía debe comprar un permiso por volumen de \$180 al año, y pagar \$0.394 por pieza enviada. Sin dicho permiso, enviar cada pieza costaría \$0.42. Determina el número mínimo de piezas que tendría que ser enviadas para que el correo prepagado de primera clase le resulte económicamente viable.

73. Comparando planes de pago Melissa Pfistner, acaba de aceptar un puesto de ventas en Ohio. Ella puede elegir entre dos planes de pago de salario. En el plan 1 el salario es de \$300 a la semana más una comisión de 10% por ventas. En el plan 2, el salario es de \$400 a la semana más una comisión de 8% por ventas. ¿Por qué cantidad semanal de ventas Melissa ganaría más estando en el plan 1?

74. Empleo en el colegio Para que Katie Hanenberg pueda continuar con su ayuda financiera para el colegio, no debe ganar más de \$2000 en su empleo de 8 semanas durante el verano. Actualmente gana \$90 a la semana como asistente de guardería y está considerando también tomar un trabajo nocturno en un restaurante de comida rápida, donde ganaría \$6.25 por hora. ¿Cuál es el máximo número de horas que podría trabajar en el restaurante sin arriesgar su ayuda financiera?

75. Nota aprobatoria Para aprobar un curso, Corrina Schultz necesita una calificación promedio de 60 o mayor. Si las calificaciones de Corrina son 66, 72, 90, 49 y 59, encuentra la calificación mínima que ella puede obtener en su sexto y último examen para aprobar el curso.

76. Calificación mínima Para obtener una A en un curso, Stephen Heasley debe obtener una calificación promedio de 90 o mayor en cinco exámenes. Si en los primeros cuatro exámenes de Stephen sus calificaciones son 92, 87, 96 y 77, ¿cuál es la mínima calificación que Stephen puede recibir en el quinto examen para obtener una A en el curso?

77. Promediando calificaciones Las calificaciones de Calisha Mahoney en sus primeros cuatro exámenes son 85, 92, 72 y 75. Un promedio mayor que o igual a 80 y menor que 90 resultaría en una calificación final B. ¿Qué rango de calificaciones en el quinto y último examen de Calisha darían por resultado una calificación final de B? Asume que la calificación máxima es de 100.

78. Aire limpio Para que el aire se considere "limpio", el promedio de las cantidades de tres contaminantes debe ser menos de 3.2 partes por millón. Si las cantidades de dos de los contaminantes son 2.7 y 3.42 ppm, ¿qué cantidad del tercero daría como resultado aire limpio?

79. Impuestos sobre la renta Consulta el Ejemplo 7 de la página 110. Su-hua y Ting-Fang Zheng presentaron una declaración de impuestos conjunta. Determina la aportación tributaria que en 2008 Su-hua y Ting-Fang deberán si su ingreso gravable es de

a) \$78,221. **b)** \$301,233.

80. Impuesto sobre la renta Ve el ejemplo 7 de la página 110. José y Mildred Battiste presentaron una declaración de impuestos conjunta. Determina la aportación tributaria que en 2008 José y Mildred Battiste deberán si su impuesto sobre la renta es de

a) \$128,479. **b)** \$275,248.

Velocidad *En física, un objeto que desplaza hacia arriba tiene una velocidad positiva ($v > 0$) y un objeto que se desplaza hacia abajo tiene una velocidad negativa ($v < 0$). En los ejercicios 81-86, la velocidad, v, esta dada por un objeto t segundos después que se proyecta hacia arriba. Usando la notación de intervalo, determina los intervalos de tiempo cuando el objeto viaja* **a)** *hacia arriba o* **b)** *hacia abajo.*

81. $v = -32t + 96, \quad 0 \le t \le 10$

82. $v = -32t + 172.8, 0 \le t \le 12$

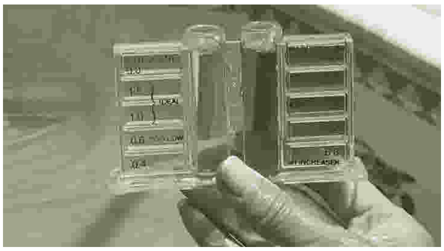
83. $v = -9.8t + 49, \quad 0 \le t \le 13$

84. $v = -9.8t + 31.36, 0 \le t \le 6$

85. $v = -32t + 320, \quad 0 \le t \le 8$

86. $v = -9.8t + 68.6, \quad 0 \le t \le 5$

87. Acidez del agua Thomas Hayward está midiendo la acidez del agua en una alberca. La acidez del agua se considera normal cuando la lectura del pH promedio de tres mediciones diarias es mayor que 7.2 y menor que 7.8. Si las dos primeras lecturas del pH son 7.48 y 7.15, encuentra el rango de valores del pH para la tercera lectura para que la acidez del agua resulte normal.



© Allen R. Angel

88. ¿Si $a > b$, será a^2 siempre mayor que b^2? Explica y da un ejemplo que sustente tu respuesta.

89. Póliza de seguros Una póliza de seguro Blue Cross/Blue Shield tiene un deducible de \$100, a partir del cual cubre 80% de los gastos médicos, c. El cliente paga 20% hasta que ha pagado un total de \$500, después del cual la póliza paga el 100% de los gastos médicos. Podemos describir la póliza como sigue:

Blue Cross Paga

$$\begin{array}{rl} 0, & \text{si } c \le \$100 \\ 0.80(c - 100), & \text{si } \$100 < c \le \$2100 \\ c - 500, & \text{si } c > \$2100 \end{array}$$

Explica por este conjunto de desigualdades describe el plan de pago de Blue Cross/Blue Shield.

90. Explica por qué la desigualdad $a < bx + c < d$ no puede ser resuelta para x a menos que se proporcione mayor información.

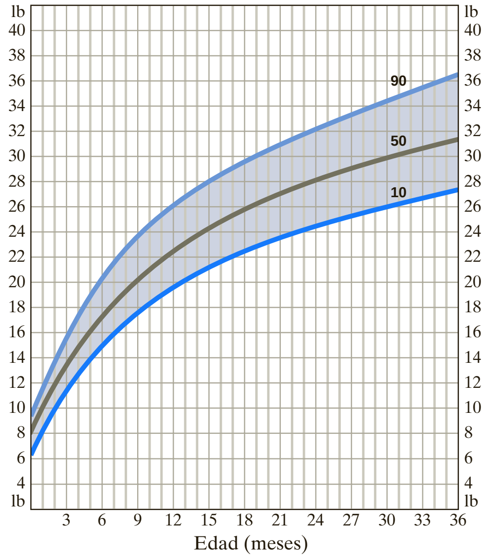
Gráficas de crecimiento *Los ejercicios 91 y 92 muestran las gráficas de crecimiento para niños entre 0 y 36 meses de edad. En general, el percentil enésimo significa que el valor está por arriba de n% y por debajo de (100 − n)% de los niños medidos. Por ejemplo, un niño de 24 meses de edad en el percentil 60 de peso pesa más que 60% y menos que 40% que los niños con 24 meses de edad.*

91. La siguiente gráfica muestra los percentiles de peso por edad desde el nacimiento hasta 36 meses de edad. La curva gris es el percentil 50. La región sombreada se encuentra entre el percentil 10 (curva azul oscuro) y el percentil 90 (curva azul claro). Esto es, 80% de los pesos se encuentran entre los valores representados por la curva azul oscuro y la curva azul claro. Usa esta gráfica para determinar, en notación de intervalo, dónde se encuentra el 80% de los pesos para niños de

a) 9 meses. **b)** 21 meses.

c) 36 meses.

Percentiles de peso por edad:
Niños, de 0 a 36 meses



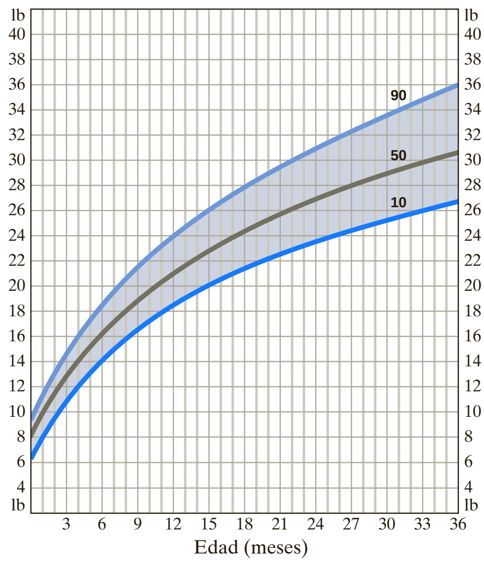
Fuente: Centro Nacional de Estadísticas de Salud

92. La siguiente gráfica muestra los percentiles de peso por edad desde el nacimiento hasta los 36 meses de edad. La región sombreada se encuentra entre el percentil 10 (curva azul oscuro) y el percentil 90 (curva azul claro), y 80% de los pesos se encuentra en esta región. Usa esta gráfica para determinar, en notación de intervalo, dónde se encuentra el 80% de los pesos para niñas de

a) 9 meses. **b)** 21 meses.

c) 36 meses.

Percentiles de peso por edad:
Niñas, de 0 a 36 meses



Fuente: Centro Nacional de Estadísticas de Salud

Problemas de desafío

93. Calculando calificaciones Las primeras cinco notas de Stephen Heasley en Historia Europea fueron 82, 90, 74, 76 y 68. El examen final cuenta un tercio para calcular el promedio final. El promedio final mayor que o igual a 80 y menor que 90 resultará en una calificación de B. ¿Qué rango de valores de las notas finales darían por resultado que Stephen recibiera una calificación de B en el curso? Asume que una máxima puntuación de 100 es posible.

En los ejercicios 94-96, **a)** *explica cómo resolver la desigualdad, y* **b)** *resuelve la desigualdad y da la solución en notación de intervalo.*

94. $x < 3x - 10 < 2x$

95. $x < 2x + 3 < 2x + 5$

96. $x + 5 < x + 3 < 2x + 2$

Ejercicios de repaso acumulados

[1.2] **97.** Para $A = \{1,2,6,8,9\}$ y $B = \{1,3,4,5,8\}$, encuentra

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

98. Para $A = \left\{-3, 4, \frac{5}{2}, \sqrt{7}, 0, -\frac{13}{29}\right\}$ indica los elementos que son

a) números naturales

b) números enteros

c) números racionales

d) números reales

[1.3] *Nombre cada propiedad ilustrada.*

99. $(3x + 8) + 4y = 3x + (8 + 4y)$

100. $5x + y = y + 5x$

[2.2] **101.** Despeja la V de la fórmula $R = L + (V - D)r$.

2.6 Solución de ecuaciones y desigualdades con valor absoluto

1 Entender la interpretación geométrica del valor absoluto.

2 Resolver ecuaciones de la forma $|x| = a, a > 0$.

3 Resolver desigualdades de la forma $|x| < a, a > 0$.

4 Resolver desigualdades de la forma $|x| > a, a > 0$.

5 Resolver desigualdades de la forma $|x| < a$ o $|x| > a$, $a < 0$.

6 Resolver desigualdades de la forma $|x| < 0$, $|x| \le 0$, $|x| > 0$, o $|x| \ge 0$.

7 Resolver ecuaciones de la forma $|x| = |y|$.

1 Entender la interpretación geométrica del valor absoluto

Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número x, representado como $|x|$, es la distancia x con respecto al número 0 en la recta numérica.

$|3| = 3$ porque el número 3 está a 3 unidades del 0 en la recta numérica.

$|-3| = 3$ porque el número -3 está a 3 unidades del 0 en la recta numérica.

Ahora considera la ecuación $|x| = 3$. Queremos encontrar los valores de x que *están exactamente a* 3 unidades del 0 en la recta numérica. Entonces, las soluciones para $|x| = 3$ son $x = 3$ y $x = -3$ (ver **Figura 2.14a**).

Ahora considera la desigualdad $|x| < 3$. Queremos encontrar los valores para x que *sean menores que* 3 unidades con respecto al 0 en la recta numérica. Entonces, las soluciones para $|x| < 3$ son los valores entre -3 y 3 sobre la recta numérica (ver **Figura 2.14b**).

Por último, considera la desigualdad $|x| > 3$. Queremos encontrar los valores de x que *sean mayores que* 3 unidades con respecto al 0 en la recta numérica. Entonces, las soluciones para $|x| > 3$ son los valores menores que -3 o mayores que 3 sobre la recta numérica (ver **Figura 2.14c**).

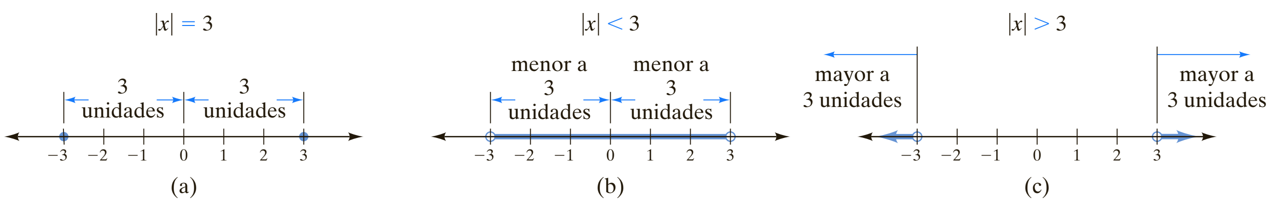


FIGURA 2.14

Utilizaremos los siguientes ejemplos y sus ilustraciones en la recta numérica para desarrollar métodos que sirven para resolver ecuaciones y desigualdades que contienen valor absoluto.

2 Resolver ecuaciones de la forma $|x| = a, a > 0$

Cuando resolvemos una ecuación de la forma $|x| = a$, $a > 0$, encontramos los valores que abarcan exactamente a unidades desde el 0 en la recta numérica.

Para resolver ecuaciones de la forma $|x| = a$

Si $|x| = a$ y $a > 0$, entonces $x = a$ o $x = -a$.

Comprendiendo el álgebra

El valor absoluto de un número *nunca* es negativo.

EJEMPLO 1 Resuelve cada ecuación.

a) $|x| = 2$ **b)** $|x| = 0$ **c)** $|x| = -2$

Solución

a) Al usar el procedimiento obtenemos $x = 2$ o $x = -2$. El conjunto solución es

b) El único número real cuyo valor absoluto es igual a cero es 0. Por lo tanto, el conjunto solución para $|x| = 0$ es 0}.

c) El valor absoluto de un número nunca es negativo, así que no existen soluciones para esta ecuación. El conjunto solución es $\varnothing$.

Resuelve ahora el ejercicio 13

EJEMPLO 2 Resuelve la ecuación $|2w - 1| = 5$.

Solución Buscamos los valores de w tales que $2w - 1$ esté exactamente a 5 unidades del 0 en la recta numérica. Por lo tanto, la cantidad $2w - 1$ debe ser igual a 5 o -5.

$$\begin{aligned} 2w - 1 &= 5 \qquad &\text{o} \qquad 2w - 1 &= -5 \\ 2w &= 6 & 2w &= -4 \\ w &= 3 & w &= -2 \end{aligned}$$

Verifica

$$\begin{aligned} w = 3 \qquad |2w - 1| &= 5 & w = -2 \qquad |2w - 1| &= 5 \\ |2(3) - 1| &\stackrel{?}{=} 5 & |2(-2) - 1| &\stackrel{?}{=} 5 \\ |6 - 1| &\stackrel{?}{=} 5 & |-4 - 1| &\stackrel{?}{=} 5 \\ |5| &\stackrel{?}{=} 5 & |-5| &\stackrel{?}{=} 5 \\ 5 &= 5 \quad \text{Verdadero} & 5 &= 5 \quad \text{Verdadero} \end{aligned}$$

Cada una de las soluciones, 3 y -2, hacen que $2w - 1$ esté a 5 unidades del 0 en la recta numérica. El conjunto solución es $\{-2, 3\}$.

Resuelve ahora el ejercicio 19

Considera la ecuación $|2w - 1| - 3 = 2$. El primer paso en la resolución de esta ecuación es aislar el término con el valor absoluto. Hacemos esto sumando 3 a ambos lados de la ecuación; esto resulta en la ecuación $|2w - 1| = 5$, que resolvimos en el Ejemplo 2.

3 Resolver desigualdades de la forma $|x| < a, a > 0$

Recordemos nuestra discusión anterior sobre $|x| < 3$. La solución para $|x| < 3$ son los valores entre -3 y 3 en la recta numérica (ver **figura 2.14b** de la página 119). De forma similar, las soluciones para $|x| < a$ son los valores que están entre $-a$ y a en la recta numérica.

Para resolver desigualdades de la forma $|x| < a$, podemos usar el siguiente procedimiento.

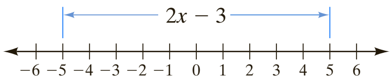
Para resolver desigualdades de la forma $|x| < a$

Si $|x| < a$ y $a > 0$, entonces $-a < x < a$.

EJEMPLO 3 Resuelve la desigualdad $|2x - 3| < 5$.

Solución La solución de esta desigualdad será el conjunto de valores tales que la distancia entre $2x - 3$ y 0 en la recta numérica sea menor que 5 unidades (ver **Figura 2.15**). Utilizando la **Figura 2.15**, podemos ver que $-5 < 2x - 3 < 5$.

FIGURA 2.15



Resolviendo, obtenemos

$$-5 < 2x - 3 < 5$$
$$-2 < 2x < 8$$
$$-1 < x < 4$$

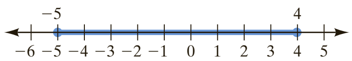
El conjunto solución es $\{x|-1 < x < 4\}$.

Resuelve ahora el ejercicio 33

EJEMPLO 4 Resuelve la desigualdad $|2x + 1| \leq 9$ y grafica la solución en la recta numérica.

Solución Como esta desigualdad es de la forma $|x| \leq a$, escribimos

$$-9 \leq 2x + 1 \leq 9$$
$$-10 \leq 2x \leq 8$$
$$-5 \leq x \leq 4$$

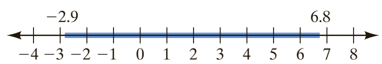


Resuelve ahora el ejercicio 75

EJEMPLO 5 Resuelve la desigualdad $|7.8 - 4x| - 5.3 < 14.1$ y grafica la solución en la recta numérica.

Solución Primero aísla el valor absoluto sumando 5.3 a ambos lados de la desigualdad. Después resuelve como en los ejemplos anteriores.

$$|7.8 - 4x| - 5.3 < 14.1$$
$$|7.8 - 4x| < 19.4$$
$$-19.4 < 7.8 - 4x < 19.4$$
$$-27.2 < -4x < 11.6$$
$$\frac{-27.2}{-4} > \frac{-4x}{-4} > \frac{11.6}{-4}$$
$$6.8 > x > -2.9 \quad \text{o} \quad -2.9 < x < 6.8$$



El conjunto solución es $\{x|-2.9 < x < 6.8\}$.

Resuelve ahora el ejercicio 43

Comprendiendo el álgebra

En el Ejemplo 5, la solución

$$-2.9 < x < 6.8$$

escrita en notación de intervalo es

$$(-2.9, 6.8).$$

4 Resolver desigualdades de la forma $|x| > a$, $a > 0$

Recordemos nuestra discusión anterior sobre $|x| > 3$. las soluciones para $|x| > 3$ son los valores menores que -3 y mayores que 3 en la recta numérica (ver **Figura 2.14c** de la página 119). De forma similar, las soluciones para $|x| > a$ son los valores que sean menores que $-a$ o mayores que a en la recta numérica.

Para resolver desigualdades de la forma $|x| > a$, podemos usar el siguiente procedimiento.

Para resolver desigualdades de la forma $|x| > a$

Si $|x| > a$ y $a > 0$, entonces $x < -a$ o $x > a$.

EJEMPLO 6 Resuelve la desigualdad $|2x - 3| > 5$ y grafica la solución en la recta numérica.

Solución La solución a $|2x - 3| > 5$ es el conjunto de valores tales que la distancia entre $2x - 3$ y 0 en la recta numérica sea mayor que 5 unidades. La cantidad $2x - 3$ debe ser menor que -5 o mayor que 5 (ver **Figura 2.16**).

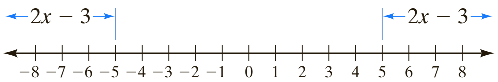
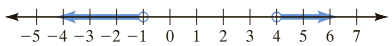


FIGURA 2.16

Como $2x - 3$ debe ser menor que -5 o mayor que 5, establecemos y resolvemos la siguiente desigualdad compuesta:

$$\begin{aligned} 2x - 3 &< -5 & \quad \text{o} \quad && 2x - 3 &> 5 \\ 2x &< -2 & && 2x &> 8 \\ x &< -1 & && x &> 4 \end{aligned}$$



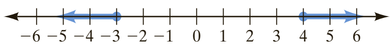
El conjunto solución para $|2x - 3| > 5$ es $\{x|x < -1 \text{ o } x > 4\}$.

Resuelve ahora el ejercicio 51

EJEMPLO 7 Resuelve la desigualdad $|2x - 1| \geq 7$ y grafica la solución en la recta numérica.

Solución Como esta desigualdad es de la forma $|x| \geq a$, utilizamos el procedimiento dado anteriormente.

$$\begin{aligned} 2x - 1 &\leq -7 & \quad \text{o} \quad && 2x - 1 &\geq 7 \\ 2x &\leq -6 & && 2x &\geq 8 \\ x &\leq -3 & && x &\geq 4 \end{aligned}$$



Resuelve ahora el ejercicio 53

Comprendiendo el álgebra

En el Ejemplo 7, cualquier valor de x menor que o igual a -3, o mayor que o igual que 4, daría lugar a $2x - 1$, que representa un número que es mayor que o igual a 7 unidades del 0 en la recta numérica. El conjunto solución es $\{x|x \leq -3 \text{ o } x \geq 4\}$. En notación de intervalo, la solución es $(-\infty, -3] \cup [4, \infty)$.

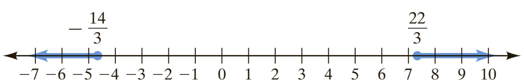
EJEMPLO 8 Resuelve la desigualdad $\left|\frac{3x - 4}{2}\right| \geq 9$ y grafica la solución en la recta numérica.

Solución Como esta desigualdad es de la forma $|x| \geq a$, escribimos

$$\frac{3x - 4}{2} \leq -9 \quad \text{o} \quad \frac{3x - 4}{2} \geq 9$$

Ahora multiplica ambos lados de cada desigualdad por el mínimo común denominador, 2. Después resuelve cada desigualdad.

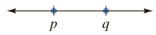
$$\begin{aligned} \cancel{2}\left(\frac{3x - 4}{\cancel{2}}\right) &\leq -9 \cdot 2 & \quad \text{o} \quad && \cancel{2}\left(\frac{3x - 4}{\cancel{2}}\right) &\geq 9 \cdot 2 \\ 3x - 4 &\leq -18 & && 3x - 4 &\geq 18 \\ 3x &\leq -14 & && 3x &\geq 22 \\ x &\leq -\frac{14}{3} & && x &\geq \frac{22}{3} \end{aligned}$$



Resuelve ahora el ejercicio 57

Consejo útil

A continuación damos información general acerca de las ecuaciones y desigualdades con valor absoluto. Para números reales a, b y c, donde $a \neq 0$ y $c > 0$:

Forma de la ecuación o desigualdad	La solución será:	Solución en la recta numérica:
$\lvert ax + b\rvert = c$	Dos números distintos, p y q	
$\lvert ax + b\rvert < c$	El conjunto de números entre dos números $p < x < q$	
$\lvert ax + b\rvert > c$	El conjunto de números menores que un número o mayores que un segundo número, $x < p$ o $x > q$	

Comprendiendo el álgebra

Cualquier desigualdad de la forma $|x| < a$, donde a es un número negativo, tendrá como solución el conjunto vacío, $\varnothing$.

5 Resolver desigualdades de la forma $|x| < a$ o $|x| > a$, $a < 0$

Considera la desigualdad $|x| < -3$. Como $|x|$ siempre tendrá un valor mayor o igual que 0 para cualquier número real x, esta desigualdad nunca podrá ser verdadera y la solución es el conjunto vacío, $\varnothing$.

EJEMPLO 9 Resuelve la desigualdad $|6x - 8| + 5 < 3$.

Solución Comienza restando 5 en ambos lados de la desigualdad.

$$|6x - 8| + 5 < 3$$
$$|6x - 8| < -2$$

Como $|6x - 8|$ siempre será mayor que o igual a 0 para cualquier número real x, esta desigualdad nunca podrá ser verdadera. Por lo tanto, la solución es el conjunto vacío, $\varnothing$.

Resuelve ahora el ejercicio 41

Ahora considera la desigualdad $|x| > -3$. Como $|x|$ siempre tendrá un valor mayor que o igual a 0 para cualquier número real x, esta desigualdad siempre será verdadera y la solución es el conjunto de todos los números reales, $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 10 Resuelve la desigualdad $|5x + 3| + 4 \geq -9$.

Solución Comienza restando 4 en ambos lados de la desigualdad.

$$|5x + 3| + 4 \geq -9$$
$$|5x + 3| \geq -13$$

Como $|5x + 3|$ siempre será mayor que o igual a 0 para cualquier número real x, esta desigualdad es verdadera para todos los números reales. Por lo tanto, la solución es el conjunto de todos los números reales, $\mathbb{R}$.

Resuelve ahora el ejercicio 59

Comprendiendo el álgebra

Cualquier desigualdad de la forma $|x| > a$, donde a es un número negativo, tiene como conjunto solución $\mathbb{R}$.

6 Resolver desigualdades de la forma $|x| < 0$, $|x| \leq 0$, $|x| > 0$ o $|x| \geq 0$

Para cada uno de los ejemplos de la parte superior de la página 124, es necesario recordar que el valor absoluto de un número nunca puede ser negativo.

Desigualdad	Conjunto solución	Explicación
$\lvert x - 5\rvert < 0$	$\varnothing$	El valor absoluto de un número nunca puede ser < 0.
$\lvert x - 5\rvert \le 0$	$\{5\}$	El valor absoluto de un número nunca puede ser < 0, pero puede ser $= 0$. Cuando $x = 5$, tenemos $\lvert x - 5\rvert \le 0$ $\lvert 5 - 5\rvert \le 0$ $0 \le 0$ Verdadero
$\lvert x - 5\rvert > 0$	$\{x \mid x \neq 5\}$	Sustituyendo cualquier número real para x, excepto 5, hacemos que $\lvert x - 5\rvert$ sea positivo. Cuando $x = 5$, tenemos $x - 5\rvert > 0$ $5 - 5\rvert > 0$ $0 > 0$ Falso El valor absoluto de cualquier número es siempre ≥ 0.

EJEMPLO 11 Resuelve cada desigualdad. **a)** $|x + 2| > 0$ **b)** $|3x - 8| \le 0$

Solución

a) La desigualdad será verdadera para todo valor de x excepto -2. El conjunto solución es $\{x \mid x < -2 \text{ o } x > -2\}$.

b) Determina el número que hace al valor absoluto igual a 0 estableciendo que la expresión dentro del valor absoluto sea igual a 0 y resolver para x.

$$\begin{aligned} 3x - 8 &= 0 \\ 3x &= 8 \\ x &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

La desigualdad será verdadera solo cuando $x = \frac{8}{3}$. El conjunto solución es $\left\{\frac{8}{3}\right\}$.

Resuelve ahora el ejercicio 61

7 Resolver ecuaciones de la forma $|x| = |y|$

Ahora analicemos ecuaciones con valor absoluto en las que hay un valor absoluto en ambos lados de la ecuación.

Cuando resolvemos una ecuación con valor absoluto con una expresión con valor absoluto en cada lado del signo igual, las dos expresiones deben tener el mismo valor absoluto. Por lo tanto, *las expresiones deben ser iguales entre sí o ser opuestas entre sí.*

Para resolver ecuaciones de la forma $|x| = |y|$

Si $|x| = |y|$, entonces $x = y$ o $x = -y$.

EJEMPLO 12 Resuelve la ecuación $|z + 3| = |2z - 7|$.

Solución Si hacemos que $z + 3$ sea x y $2z - 7$ sea y, esta ecuación es de la forma $|x| = |y|$. Utilizando el procedimiento anterior, obtenemos las dos ecuaciones

$$z + 3 = 2z - 7 \qquad z + 3 = -(2z - 7)$$

Ahora resuelve la ecuación.

$$\begin{aligned} z + 3 &= 2z - 7 \\ 3 &= z - 7 \\ 10 &= z \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} z + 3 &= -(2z - 7) \\ z + 3 &= -2z + 7 \\ 3z + 3 &= 7 \\ 3z &= 4 \\ z &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Comprendiendo el álgebra

Si $|x| = |y|$, entonces $x = y$ o $x = -y$.

Verifica $z = 10$

$$\begin{aligned} |z + 3| &= |2z - 7| \\ |10 + 3| &\stackrel{?}{=} |2(10) - 7| \\ |13| &\stackrel{?}{=} |20 - 7| \\ |13| &\stackrel{?}{=} |13| \\ 13 &= 13 \quad \text{Verdadero} \end{aligned}$$

$z = \frac{4}{3}$

$$\begin{aligned} |z + 3| &= |2z - 7| \\ \left|\frac{4}{3} + 3\right| &\stackrel{?}{=} \left|2\left(\frac{4}{3}\right) - 7\right| \\ \left|\frac{13}{3}\right| &\stackrel{?}{=} \left|\frac{8}{3} - \frac{21}{3}\right| \\ \left|\frac{13}{3}\right| &\stackrel{?}{=} \left|-\frac{13}{3}\right| \\ \frac{13}{3} &= \frac{13}{3} \quad \text{Verdadero} \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\left\{10, \frac{4}{3}\right\}$.

Resuelve ahora el ejercicio 63

EJEMPLO 13 Resuelve la ecuación $|4x - 7| = |6 - 4x|$.

Solución

$$\begin{aligned} 4x - 7 &= 6 - 4x & \quad \text{o} \quad && 4x - 7 &= -(6 - 4x) \\ 8x - 7 &= 6 & && 4x - 7 &= -6 + 4x \\ 8x &= 13 & && -7 &= -6 \quad \text{Falso} \\ x &= \frac{13}{8} \end{aligned}$$

Como la ecuación $4x - 7 = -(6 - 4x)$ tiene como resultado una proposición falsa, la ecuación con valor absoluto tiene una única solución. La verificación mostrará que el conjunto solución es $\left\{\frac{13}{8}\right\}$.

Resuelve ahora el ejercicio 69

Resumen de los procedimientos para resolver ecuaciones y desigualdades con valor absoluto

Para $a > 0$,

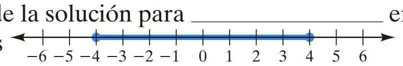
Si $|x| = a$, entonces $x = a$ o $x = -a$.
Si $|x| < a$, entonces $-a < x < a$.
Si $|x| > a$, entonces $x < -a$ o $x > a$.
Si $|x| = |y|$, entonces $x = y$ o $x = -y$.

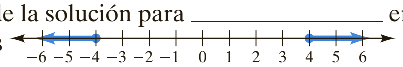
CONJUNTO DE EJERCICIOS 2.6

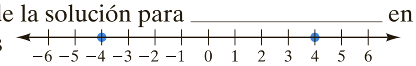
Ejercicios de práctica

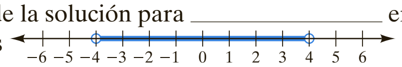
Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

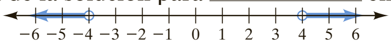
$\|x\| = 4$	$\|x\| < 4$	$\|x\| \le 4$	$\|x\| > 4$	$\|x\| \ge 4$	$\|x\| = 5$
$\|x\| < 5$	$\|x\| \le 5$	$\|x\| > 5$	$\|x\| \ge 5$	$\|x\| < -6$	$\|x\| > -6$

1. La gráfica de la solución para ______________ en la recta numérica es 

2. La gráfica de la solución para ______________ en la recta numérica es 

3. La gráfica de la solución para ______________ en la recta numérica es 

4. La gráfica de la solución para ______________ en la recta numérica es 

5. La gráfica de la solución para ______________ en la recta numérica es 

6. El conjunto solución para ______________ es $\{x \mid -5 \le x \le 5\}$.

7. El conjunto solución para ______________ es $\{x \mid x \le -5 \text{ o } x \ge 5\}$.

8. El conjunto solución para ______________ es $\{-5, 5\}$.

9. El conjunto solución para ______________ es $\{x \mid -5 < x < 5\}$.

10. El conjunto solución para ______________ es $\{x \mid x < -5 \text{ o } x < 5\}$.

11. El conjunto solución para ______________ es $\mathbb{R}$.

12. El conjunto solución para ______________ es $\varnothing$.

Practica tus habilidades

Encuentra el conjunto solución para cada ecuación.

13. $|a| = 7$

14. $|b| = 17$

15. $|c| = \frac{1}{2}$

16. $|x| = 0$

17. $|d| = -\frac{5}{6}$

18. $|l + 4| = 6$

19. $|x + 5| = 8$

20. $|3 + y| = \frac{3}{5}$

21. $|4.5q + 31.5| = 0$

22. $|4.7 - 1.6z| = 14.3$

23. $|5 - 3x| = \frac{1}{2}$

24. $|6(y + 4)| = 24$

25. $\left|\frac{x - 3}{4}\right| = 5$

26. $\left|\frac{3z + 5}{6}\right| - 2 = 7$

27. $\left|\frac{x - 3}{4}\right| + 8 = 8$

28. $\left|\frac{5x - 3}{2}\right| + 5 = 9$

29. $|x - 5| + 4 = 3$

30. $|2x + 3| - 5 = -8$

Encuentra el conjunto solución para cada desigualdad.

31. $|w| < 1$

32. $|p| \le 9$

33. $|q + 5| \le 8$

34. $|7 - x| < 6$

35. $|5b - 15| < 10$

36. $|x - 3| - 7 < -2$

37. $|2x + 3| - 5 \le 10$

38. $|4 - 3x| - 4 < 11$

39. $|3x - 7| + 8 < 14$

40. $\left|\frac{2x - 1}{9}\right| \le \frac{5}{9}$

41. $|2x - 6| + 5 \le 1$

42. $|2x - 3| < -10$

43. $\left|\frac{1}{2}j + 4\right| < 7$

44. $\left|\frac{k}{4} - \frac{3}{8}\right| < \frac{7}{16}$

45. $\left|\frac{x - 3}{2}\right| - 4 \le -2$

46. $\left|7x - \frac{1}{2}\right| < 0$

Encuentra el conjunto solución para cada desigualdad.

47. $|y| > 8$

48. $|a| \ge 13$

49. $|x + 4| > 5$

50. $|2b - 7| > 3$

51. $|7 - 3b| > 5$

52. $\left|\frac{6 + 2z}{3}\right| > 2$

53. $|2h - 5| > 3$

54. $|2x - 1| \ge 12$

55. $|0.1x - 0.4| + 0.4 > 0.6$

56. $|3.7d + 6.9| - 2.1 > -5.4$

57. $\left|\frac{x}{2} + 4\right| \ge 5$

58. $\left|4 - \frac{3x}{5}\right| \ge 9$

59. $|7w + 3| - 12 \ge -12$

60. $|2.6 - x| \ge 0$

61. $|4 - 2x| > 0$

62. $|2c - 8| > 0$

Encuentra el conjunto solución para cada ecuación.

63. $|3p - 5| = |2p + 10|$

64. $|6n + 3| = |4n - 13|$

65. $|6x| = |3x - 9|$

66. $|5t - 10| = |10 - 5t|$

67. $\left|\frac{2r}{3} + \frac{5}{6}\right| = \left|\frac{r}{2} - 3\right|$

68. $|3x - 8| = |3x + 8|$

69. $\left|-\frac{3}{4}m + 8\right| = \left|7 - \frac{3}{4}m\right|$

70. $\left|\frac{3}{2}r + 2\right| = \left|8 - \frac{3}{2}r\right|$

Encuentra el conjunto solución para cada ecuación o desigualdad.

71. $|h| = 9$

72. $|y| \le 8$

73. $|q + 6| > 2$

74. $|9d + 7| \le -9$

75. $|2w - 7| \le 9$

76. $|2z - 7| + 5 > 8$

77. $|5a - 1| = 9$

78. $|2x - 4| + 5 = 13$

79. $|5 + 2x| > 0$

80. $|7 - 3b| = |5b + 15|$

81. $|4 + 3x| \le 9$

82. $|2.4x + 4| + 4.9 > 3.9$

83. $|3n + 8| - 4 = -10$

84. $|4 - 2x| - 3 = 7$

85. $\left|\frac{w + 4}{3}\right| + 5 < 9$

86. $\left|\frac{5t-10}{6}\right| > \frac{5}{3}$

87. $\left|\frac{3x-2}{4}\right| - \frac{1}{3} \geq -\frac{1}{3}$

88. $\left|\frac{2x-4}{5}\right| = 14$

89. $|2x-8| = \left|\frac{1}{2}x+3\right|$

90. $\left|\frac{1}{3}y+3\right| = \left|\frac{2}{3}y-1\right|$

91. $|2-3x| = \left|4-\frac{5}{3}x\right|$

92. $\left|\frac{-2u+3}{7}\right| \leq 5$

Resolución de problemas

93. Grosor del vidrio Ciertos tipos de vidrio fabricados por industrias PPG, idealmente tienen un grosor de 0.089 pulgadas. Sin embargo, debido a las limitaciones en el proceso de manufactura, el grosor puede variar hasta 0.004 pulgadas con respecto del ideal. Si t representa el grosor actual del vidrio, entonces el rango permitido del grosor puede ser representado usando la desigualdad $|t - 0.089| \leq 0.004$.

Fuente: www.ppg.com

a) Resuelve la desigualdad para t (usa la notación de intervalo).

b) ¿Cuál es el grosor más pequeño permitido para el vidrio?

c) ¿Cuál es el mayor grosor permitido para el vidrio?

94. Garantía de la madera terciada Cierta madera terciada fabricada por Lafor International garantiza que tiene un grosor de $\frac{5}{8}$ de pulgada con una tolerancia de más o menos $\frac{1}{56}$ de pulgada. Si t representa el grosor real de la madera terciada, entonces el rango permitido puede representarse por medio de la desigualdad $\left|t - \frac{5}{8}\right| \leq \frac{1}{56}$.

Fuente: www.sticktrade.com

a) Resuelve la desigualdad para t (usa la notación de intervalo).

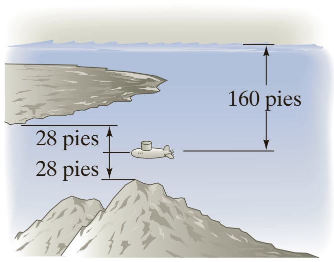
b) ¿Cuál es el grosor más pequeño permitido para la madera terciada?

c) ¿Cuál es el mayor grosor permitido para la madera terciada?

95. Profundidad de un submarino Un submarino está 160 pies por debajo del nivel del mar y tiene formaciones de roca por encima y por debajo de él, y no debe cambiar su profundidad por más de 28 pies. Su distancia por debajo del nivel del mar, d, puede describirse por la desigualdad $|d - 160| \leq 28$.

a) Resuelve la desigualdad para d. Escribe tu respuesta en notación de intervalo.

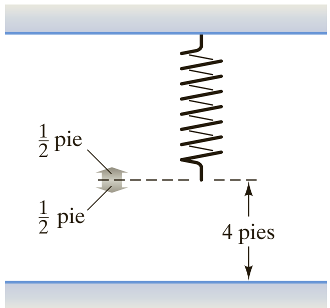
b) ¿Entre qué distancias verticales, medidas desde el nivel del mar, se puede mover el submarino?



96. Un resorte que rebota Un resorte sujeto al techo está rebotando hacia arriba y hacia abajo de modo que su distancia, d, con respecto al piso satisface la desigualdad $|d - 4| \leq \frac{1}{2}$ pies (ve la Figura).

a) Resuelve esta desigualdad para d. Escribe tu respuesta en notación de intervalo.

b) ¿Entre qué distancias, medidas con respecto al piso, oscilará el resorte?



97. ¿Cuántas soluciones hay para las siguientes desigualdades o ecuaciones si $a \neq 0$ y $k > 0$?

a) $|ax + b| = k$

b) $|ax + b| < k$

c) $|ax + b| > k$

98. Considera que $|x| < |y|$ y $x < 0$ y $y < 0$.

a) ¿Cuál de los siguientes es verdadero: $x < y$, $x > y$ o $x = y$?

b) Da un ejemplo que apoye tu respuesta del inciso **a)**.

99. ¿Cuántas soluciones tiene $|ax + b| = k$, $a \neq 0$ si

a) $k < 0$,

b) $k = 0$,

c) $k > 0$?

100. Considera que m y n $(m < n)$ son dos soluciones distintas para la ecuación $|ax + b| = c$. Indica las soluciones, usando ambos símbolos de desigualdad y la recta numérica, para cada desigualdad.(Ver Consejo útil de la página 123.)

a) $|ax + b| < c$

b) $|ax + b| > c$

Ejercicios de conceptos y escritura

101. ¿Para qué valor de x la desigualdad $|ax + b| \leq 0$ será verdadera? Explica.

102. ¿Para qué valor de x la desigualdad $|ax + b| > 0$ *no* será verdadera? Explica.

103. a) Explica cómo encontrar la solución para la ecuación $|ax + b| = c$ (asumiendo que $c > 0$ y $a \neq 0$).

b) Resuelve esta ecuación para x.

104. a) Explica cómo encontrar la solución para la desigualdad $|ax + b| < 0$ (asumiendo que $a > 0$ y $c > 0$).

b) Resuelve esta desigualdad para x.

105. a) Explica cómo encontrar la solución de la desigualdad $|ax + b| > 0$ (asumiendo que $a > 0$ y $c > 0$).

b) Resuelve esta desigualdad para x.

106. a) ¿Cuál es el primer paso para resolver la siguiente desigualdad $-4|3x - 5| \leq -12$?

b) Resuelve la desigualdad y da la solución en notación de intervalo.

Determina para qué valores de x la ecuación será verdadera. Explica tu respuesta.

107. $|x - 4| = |4 - x|$ **108.** $|x - 4| = -|x - 4|$ **109.** $|x| = x$ **110.** $|x + 2| = x + 2$

Resuelve. Explica cómo obtuviste la respuesta.

111. $|x + 1| = 2x - 1$ **112.** $|3x + 1| = x - 3$ **113.** $|x - 4| = -(x - 4)$

Ejercicios de desafío

Resuelve tomando en consideración los posibles signos para x.

114. $|x| + x = 8$ **115.** $x + |-x| = 8$ **116.** $|x| - x = 8$ **117.** $x - |x| = 8$

Actividad de grupo

Discute y responde el ejercicio 118 en grupo.

118. Consideren la ecuación $|x + y| = |y + x|$.

a) Cada integrante del grupo tiene que seleccionar un valor para x y un valor para y y determinar si la ecuación se cumple. Repitan para los otros dos valores de x y y.

b) Determinen para qué valores de x y y la ecuación es verdadera. Expliquen la respuesta.

c) Consideren $|x - y| = -|y - x|$. ¿Bajo qué condición esta ecuación será verdadera?

Ejercicios de repaso acumulados

Evalúa.

[1.4] **119.** $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \div \frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^2$

120. $4(x + 3y) - 5xy$ cuando $x = 1, y = 3$

[2.4] **121. Natación** Terry Chong cruza nadando un lago a una velocidad promedio de 2 millas por hora. Luego regresa, pero ahora con una velocidad promedio de 1.6 millas por hora, ¿Cuál es el ancho del lago si en total nada 1.5 horas?

[2.5] **122.** Encuentra el conjunto solución para la desigualdad $-7(x - 3) + 5(x + 1) \geq 20$

Resumen del capítulo 2

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 2.1	
Propiedades de la igualdad Para todos los números reales a, b y c: **1.** $a = a$ — Propiedad reflexiva **2.** Si $a = b$, entonces $b = a$ — Propiedad simétrica **3.** Si $a = b$ y $b = a$, entonces $a = c$ — Propiedad transitiva	$9 = 9$ Si $x = 10$, entonces $10 = x$. Si $y = a + b$ y $a + b = 4t$, entonces $y = 4t$.
Los **términos** son las partes que aparecen sumadas en una expresión algebraica. El **coeficiente** es la parte numérica de un término que precede a la variable. El **grado de un término** con exponentes de números enteros positivos es la suma de los exponentes en las variables.	En la expresión $9x^2 - 2x + \frac{1}{5}$, los términos son $9x^2$, $-2x$ y $\frac{1}{5}$. Término — Coeficiente $15x^4y$ — 15 Término — Grado $17xy^5$ — $1 + 5 = 6$
Términos semejantes son términos que tienen las mismas variables con los mismos exponentes. **Términos no semejantes** son términos que no son los mismos término. **Simplificar una ecuación** significa reducir (combinar) todos los términos semejantes.	Términos semejantes — Términos no semejantes $2x, 7x$ — $3x, 4y$ $9x^2, -5x^2$ — $10x^2, 2x^{10}$ $3x^2 + 12x - 5 + 7x^2 - 12x + 1 = 10x^2 - 4$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 2.1 (cont.)	
Una **ecuación** es un enunciado matemático de la igualdad. La **solución** de una ecuación es el o los números que la hacen un enunciado verdadero.	$x + 15 = 36$ La solución de $\frac{1}{2}x + 1 = 7$ es 12.
Una **ecuación lineal con una variable** es la ecuación que tiene la forma $ax + b = c, a \neq 0$	$8x - 3 = 17$
Propiedad de la suma en la igualdad Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$ para cualquier número a, b y c.	Si $5x - 7 = 19$, entonces $5x - 7 + 7 = 19 + 7$
Propiedad de la multiplicación en la igualdad Si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$ para cualquier número a, b y c.	Si $\frac{1}{3}x = 2$, entonces $3 \cdot \frac{1}{3}x = 3 \cdot 2$.
Para resolver ecuaciones lineales **1.** Elimina las fracciones. **2.** Simplifica cada lado de forma separada. **3.** Aísla el término con la variable en un lado de la ecuación. **4.** Despeja la variable. **5.** Verifica. Para más detalles, ve a la página 67.	Resuelve la ecuación $\frac{1}{2}x + 7 = \frac{4}{3}x - 3$. $\frac{1}{2}x + 7 = \frac{4}{3}x - 3$ $6\left(\frac{1}{2}x + 7\right) = 6\left(\frac{4}{3}x - 3\right)$ $3x + 42 = 8x - 18$ $42 = 5x - 18$ $60 = 5x$ $12 = x$ La comprobación muestra que 12 es la solución.
Una **ecuación condicional** es una ecuación que es verdadera solo para valores específicos de la variable. Una **contradicción** es una ecuación que no tiene solución (el conjunto solución es $\varnothing$). Una **identidad** es una ecuación que tiene un número infinito de soluciones (el conjunto solución es $\mathbb{R}$).	$2x + 4 = 5$ La solución es $x = \frac{1}{2}$ $2x + 6 = 2x + 8$ El conjunto solución es $\varnothing$. $3x + 6 = 3(x + 2)$ El conjunto solución es $\mathbb{R}$.
Sección 2.2	
Un **modelo matemático** es una aplicación de la vida real expresada en forma matemática. Una **fórmula** es una ecuación que es un modelo matemático para una situación de la vida real.	La velocidad, s, de un automóvil aumentada en 20 mph es 60 mph. Modelo: $s + 20 = 60$. $A = l \cdot w$
Guía para la resolución de problemas **1.** Entender el problema. **2.** Traducir el problema a lenguaje matemático. **3.** Realizar los cálculos matemáticos necesarios para resolver el problema. **4.** Verificar la respuesta obtenida en el paso 3. **5.** Responder la pregunta. Para más detalles, consulta la página 75.	Max Johnson le hizo un préstamo personal a Jill Johnson de \$2000 con una tasa de interés simple de 3% por 6 años. Al término de los 6 años, ¿qué interés pagará Jill a Max? Entiende: Éste es un problema de interés simple. Traduce: $i = prt$ Realiza los cálculos: $= 2000(0.03)(6)$ $= 360$ Verifica: La respuesta parece razonable. Responde: El interés simple que se debe es \$360.
La **fórmula del interés simple** es $i = prt$.	Determina el interés simple, al cabo de 2 años, de un préstamo de \$1000 a 6% de interés simple. $i = (1000)(0.06)(2) = 120$ El interés simple es \$120.
La **fórmula del interés compuesto** es $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$.	Determina el monto de una cuenta de ahorro para un depósito de \$6500 que paga 4.8% de interés compuesto semestralmente durante 10 años. $A = 6500\left(1 + \frac{0.048}{2}\right)^{2 \cdot 10}$ $\approx 10{,}445.10$ El monto en la cuenta de ahorros es \$10,445.10.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 2.2 (cont.)	
Resolver (o despejar) una ecuación (o fórmula) para una variable significa aislar esa variable.	Despeja a y de $3x + 7y = 2$. $7y = -3x + 2$ $y = -\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}$
Sección 2.3	
Las frases pueden traducirse a expresiones algebraicas.	**Frase** — **Expresión algebraica** 4 más que 7 veces un número — $7x + 4$
Ángulos complementarios son dos ángulos cuyas medidas suman 90°. **Ángulos suplementarios** son dos ángulos cuyas medidas suman 180°.	Si el ángulo $A = 62°$ y el ángulo $B = 28°$, entonces los ángulos A y B son ángulos complementarios. Si el ángulo $A = 103°$ y el ángulo $B = 77°$, entonces los ángulos A y B son ángulos suplementarios.
Sección 2.4	
Una **fórmula general para el problema de movimiento** es cantidad = razón · tiempo. La **fórmula de distancia** es distancia = velocidad · tiempo.	Determina la cantidad de gas bombeado cuando se bombea gas durante 3 minutos a razón de 6 galones por minuto. $A = 6 \cdot 3 = 18$ galones Determina la distancia recorrida cuando un automóvil viaja a 60 millas por hora durante 5 horas. $D = 60 \cdot 5 = 300$ millas
Un **problema de mezcla** es cualquier problema en el que dos o más cantidades se combinan para producir una cantidad diferente, o donde una cantidad simple se separa en dos o más cantidades diferentes.	Si 4 litros de solución al 10% se mezcla con 8 litros de una solución al 16%, determina la concentración de la mezcla. $4(0.10) + 8(0.16) = 12(x)$ $x = 0.14$ o $x = 14\%$
Sección 2.5	
Propiedades utilizadas para resolver desigualdades **1.** Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$. **2.** Si $a > b$, entonces $a - c > b - c$. **3.** Si $a > b$, y $c > 0$, entonces $ac > bc$. **4.** Si $a > b$, y $c > 0$, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. **5.** Si $a > b$, y $c < 0$, entonces $ac < bc$. **6.** Si $a > b$, y $c < 0$, entonces $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.	**1.** Si $6 > 5$, entonces $6 + 3 > 5 + 3$. **2.** Si $6 > 5$, entonces $6 - 3 > 5 - 3$. **3.** Si $7 > 3$, entonces $7 \cdot 4 > 3 \cdot 4$. **4.** Si $7 > 3$, entonces $\frac{7}{4} > \frac{3}{4}$. **5.** Si $9 > 2$, entonces $9(-3) < 2(-3)$. **6.** Si $9 > 2$, entonces $\frac{9}{-3} < \frac{2}{-3}$.
Una **desigualdad compuesta** está formada por dos desigualdades ligadas con la letra *y* o la letra *o*. Para determinar el conjunto solución de una desigualdad que incluye la letra *y*, toma la **intersección** de los conjuntos solución de las dos desigualdades. Para determinar el conjunto solución de una desigualdad que incluye la letra *o*, toma la **unión** de los conjuntos solución de las dos desigualdades.	$x \leq 7$ y $x > 5$ $x < -1$ o $x \geq 4$ Resuelve $x \leq 7$ y $x > 5$. La intersección de $\{x\|x \leq 7\}$ y $\{x\|x > 5\}$ es $\{x\|5 < x \leq 7\}$ o $(5,7]$. Resuelve $x < -1$ o $x \geq 4$. La unión de $\{x\|x < -1\}$ o $\{x\|x \geq 4\}$ es $\{x\|x < -1$ o $x \geq 4\}$ o $(-\infty,-1)\cup[4,\infty)$.
Sección 2.6	
Para resolver ecuaciones de la forma $\|x\| = a$ Si $\|x\| = a$ y $a > 0$, entonces $x = a$ o $x = -a$.	Resuelve $\|x\| = 6$. $\|x\| = 6$ resulta $x = 6$ o $x = -6$.
Para resolver desigualdades de la forma $\|x\| < a$ Si $\|x\| < a$ y $a > 0$, entonces $-a < x < a$.	Resuelve $\|3x + 1\| < 13$. $-13 < 3x + 1 < 13$ $-\frac{14}{3} < x < 4$ $\left\{x \middle\| -\frac{14}{3} < x < 4\right\}$ o $\left(-\frac{14}{3}, 4\right)$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 2.6 (cont.)	
Para resolver desigualdades de la forma $\lvert x \rvert > a$ Si $\lvert x\rvert > a$ y $a > 0$, entonces $x < -a$ o $x > a$.	Resuelve $\lvert 2x - 3\rvert \geq 5$. $2x - 3 \leq -5$ o $2x - 3 \geq 5$ $2x \leq -2$ $\quad$ $2x \geq 8$ $x \leq -1$ $\quad$ $x \geq 4$ $\{x \mid x \leq -1 \text{ o } x \geq 4\}$ o $(-\infty,-1]\cup[4,\infty)$
Si $\lvert x \rvert > a$ y $a < 0$, el conjunto solución es $\mathbb{R}$. Si $\lvert x \rvert < a$ y $a < 0$, el conjunto solución es $\varnothing$.	Si $\lvert x \rvert > -7$, el conjunto solución es $\mathbb{R}$. Si $\lvert x \rvert < -7$, el conjunto solución es $\varnothing$.
Para resolver ecuaciones de la forma $\lvert x\rvert = \lvert y\rvert$. Si $\lvert x \rvert = \lvert y \rvert$, entonces $x = y$ o $x = -y$.	Resuelve $\lvert x\rvert = \lvert 3\rvert$. $x = 3$ o $x = -3$

Ejercicios de repaso del capítulo 2

[2.1] *Indica el grado de cada término.*

1. $9a^2b^6$ **2.** $2y$ **3.** $-21xyz^5$

Simplifica cada expresión. Si no se puede, indícalo.

4. $7(z + 3) - 2(z + 4)$
5. $x^2 + 2xy + 6x^2 - 13$
6. $b^2 + b - 9$
7. $2[-(x - y) + 3x] - 5y + 10$

Resuelve cada ecuación. Si una ecuación no tiene solución, indícalo.

8. $4(a + 3) - 6 = 2(a + 1)$
9. $3(x + 1) - 3 = 4(x - 5)$
10. $3 + \dfrac{x}{2} = \dfrac{5}{6}$
11. $\dfrac{1}{2}(3t + 4) = \dfrac{1}{3}(4t + 1)$
12. $2\left(\dfrac{x}{2} - 4\right) = 3\left(x + \dfrac{1}{3}\right)$
13. $3x - 7 = 9x + 8 - 6x$
14. $2(x - 6) = 5 - \{2x - [4(x - 2) - 9]\}$

[2.2] *Evalúa cada fórmula para los valores dados.*

15. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ cuando $x = 3$ y $y = -4$
16. $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ cuando $a = 8$, $b = 10$, $c = -3$
17. $h = \dfrac{1}{2}at^2 + v_0t + h_0$ cuando $a = -32$, $v_0 = 0$, $h_0 = 85$, $t = 1$
18. $z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma}$ cuando $\bar{x} = 50$, $\mu = 54$, $\sigma = 5$, $n = 25$

Despeja de cada ecuación las variables indicadas.

19. $D = r \cdot t$, para t
20. $P = 2l + 2w$ para w
21. $A = \pi r^2 h$, para h
22. $A = \dfrac{1}{2}bh$, para h
23. $y = mx + b$, para m
24. $2x - 3y = 5$, para y
25. $R_T = R_1 + R_2 + R_3$, para R_2
26. $S = \dfrac{3a + b}{2}$, para a
27. $K = 2(d + l)$, para l

[2.3] *En los ejercicios 28-32, escribe una ecuación que se pueda utilizar para resolver cada problema. Resuelve el problema y verifica tu respuesta.*

28. Dispositivo GPS Anna Conn adquirió un GPS por \$630, que tenía 10% de descuento del precio original. Determina el precio original.

© Edward J. Bock III/Glowimages

29. Aumento de la población La población de un pequeño pueblo está aumentando 350 personas por año. Si la población actual es de 4750, ¿cuánto tiempo tardará en alcanzar una población de 7200?

30. Sueldo por comisión El suelo de Celeste Nossiter es de \$300 a la semana más 60% por comisión de ventas. ¿Cuánto debe vender Celeste para ganar \$708 a la semana?

31. Comparación en la renta de un auto En el aeropuerto de Kansas City, el costo de la renta de un Ford en Hertz es de \$24.99 por día con kilometraje ilimitado. El costo de la renta del mismo auto pero en Avis es de \$19.99 por día más \$0.10 por milla. Si Cathy Panik necesita rentar un auto por 3 días, determina el número de millas que necesitará para alcanzar el mismo costo de ambas compañías.

32. Ventas En una venta por liquidación, los muebles se venden con 40% de descuento. Además, a los artículos con etiqueta verde se les descuentan \$20 adicionales. Si Alice Barr adquirió un artículo con etiqueta verde y pagó \$136, determina su precio regular.

[2.4] *En los ejercicios 33-37, resuelve los siguientes problemas de movimiento y de mezcla.*

33. Inversión de un bono Después de que Ty Olden recibió un bono de $5000 en el trabajo, invirtió algo de dinero en una cuenta del mercado de valores que produce 3.5% de interés simple y el resto en un certificado de depósito que produce 4.0% de interés simple. Si la cantidad total de interés que el Sr. Olden ganó durante el año fue $187.15, determina el monto total invertido en cada inversión.

34. Soluciones de fertilizantes Dale Klitzke tiene soluciones de fertilizante líquido que contienen 20% y 60% de nitrógeno. ¿Cuántos galones de cada una de las soluciones debe mezclar para obtener 250 galones de una solución que contenga 30% de nitrógeno?

35. Dos trenes Dos trenes parten de Portland, Oregon, al mismo tiempo en direcciones opuestas. Un tren viaja a 60 millas por hora y el otro a 80 millas por hora. ¿En cuántas horas estarán a 910 millas de distancia entre sí?

36. Transbordadores espaciales El transbordador espacial 2 despega 0.5 horas después de que despega el transbordador espacial 1. Si el transbordador 2 viaja a 300 millas por hora más rápido que el transbordador 1 y lo rebasa exactamente 5 horas después de haber despegado, encuentra

a) la velocidad del transbordador espacial 1.
b) la distancia desde el lugar de lanzamiento hasta donde el transbordador 2 rebasa al transbordador 1.

37. Mezcla de café El señor Tom Tomlins, propietario de un café gourmet, vende dos tipos de café, uno en $6.00 la libra y el otro a $6.80 la libra. ¿Cuántas libras de cada tipo de café debe mezclar para producir 40 libras de café para vender a $6.50 la libra?

[2.3, 2.4] *Resuelve.*

38. Venta de electrónicos En Best Buy, el precio de un teléfono inalámbrico se redujo 20%. Si el precio de venta es de $28.80, determina el precio original.

39. Trotando Nicolle Ryba trota una distancia, luego da vuelta y regresa caminando al punto de inicio. Mientras trota promedia 7.2 millas por hora, y mientras camina promedia 2.4 millas por hora. Si el tiempo total que empleó en el trote y en la caminata fue de 4 horas, encuentra

a) el tiempo total que trotó, y
b) la distancia total que recorrió.

40. Medidas de ángulo Encuentra las medidas de tres ángulos de un triángulo si uno de ellos mide 25° más que el ángulo más pequeño y el otro ángulo mide 5° menos que el doble del ángulo menor.

41. Alberca Dos mangueras llenan una alberca. La manguera con mayor diámetro suministra 1.5 veces más agua que la de menor diámetro. La manguera mayor empieza a suministrar 2 horas antes que la menor. Si después de 5 horas de haber empezado la manguera mayor hay 3150 galones de agua en la alberca, encuentra la velocidad de flujo de cada manguera.

42. Ángulos complementarios Un ángulo complementario tiene una medida que es 30° menor que el doble del otro ángulo. Determina las medidas de los dos ángulos.

43. Tinte azul Un fabricante de telas tiene dos soluciones de tinte azul, ambas hechas del mismo concentrado. Una solución tiene 6% de tinte azul y la otra tiene 20%. ¿Cuántas onzas de la solución al 20% debe mezclar con 10 onzas de solución al 6% para que la mezcla tenga 12% de solución de tinte azul?

44. Dos inversiones David Alevy invierte $12,000 en dos cuentas de ahorro. Una cuenta paga 10% de interés simple y la otra, 6% de interés simple. Si en un año gana el mismo interés en cada cuenta. ¿Cuánto invirtió a cada tasa de interés?

45. Gimnasio El gimnasio West Ridge tiene dos planes de membrecía. Con el primer plan se pagan $40 al mes más un cargo de $1.00 por visita. El segundo plan es de $25 mensual más un cargo de $4.00 por visita. ¿Cuántas visitas debe hacer Jeff Feazell al mes para que le convenga el primer plan?

46. Trenes en Alaska Dos trenes parten de Anchorage al mismo tiempo, en vías paralelas viajando en direcciones opuesta. El tren más rápido viaja 10 millas por hora más rápido que el más lento. Encuentra la velocidad de cada tren, si los trenes están separados una distancia de 270 millas después de 3 horas.

© Allen R. Angel

[2.5] *Resuelve la desigualdad. Grafica la solución en una recta numérica.*

47. $3z + 9 \leq 15$

48. $8 - 2w > -4$

49. $2x + 1 > 6$

50. $26 \leq 4x + 5$

51. $\dfrac{4x + 3}{3} > -5$

52. $2(x - 1) > 3x + 8$

53. $-4(x - 2) \geq 6x + 8 - 10x$

54. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{4} > x - \dfrac{x}{2} + 1$

Escribe una desigualdad que pueda ser usada para resolver cada problema. Resuelve la desigualdad y responde la pregunta.

55. Peso límite Una canoa puede transportar de manera segura un peso total de 560 libras. Si Bob y Kathy juntos pesan 300 libras, ¿cuál es el número máximo de cajas de 40 libras que pueden llevar de manera segura en su canoa?

© Allen R. Angel

56. Andando en bicicleta Pat y Janie Wetter desean rentar una bicicleta doble mientras visitan el parque. El cargo es de \$14 por la primera hora y \$7 por cada hora después de la primera. ¿Cuántas horas pueden los Wetters andar en bicicleta si tienen \$63 para gastar?

© Monkey Business Images/Shutterstock

57. Gimnasio Un gimnasio garantiza que sus clientes pierdan un mínimo de 5 libras la primera semana y $1\frac{1}{2}$ libras cada semana adicional. Encuentra la cantidad máxima de tiempo necesario para perder 27 libras.

58. Calificaciones Las calificaciones de Patrice Lee de 4 exámenes fueron 94, 73, 72 y 80. Si el promedio final tiene que ser mayor que o igual a 80 y menor que 90 para recibir una nota final de B en el curso, ¿qué rango de calificaciones necesita sacar en el quinto y último examen para obtener B? Asume que la calificación máxima es 100.

Resuelve cada desigualdad. Escribe la solución en notación de intervalo.

59. $-2 < z - 5 < 3$

60. $8 < p + 11 \le 16$

61. $3 < 2x - 4 < 12$

62. $-12 < 6 - 3x < -2$

63. $-1 < \frac{5}{9}x + \frac{2}{3} \le \frac{11}{9}$

64. $-8 < \frac{4 - 2x}{3} < 0$

Encuentra el conjunto solución para cada desigualdad compuesta.

65. $2x + 1 \le 7$ y $x - 3 > 11$

66. $2x - 1 > 5$ o $3x - 2 \le 10$

67. $4x - 5 < 11$ y $3x - 4 \ge 8$

68. $\frac{7 - 2g}{3} \le -5$ o $\frac{3 - g}{9} > 1$

[2.5, 2.6] *Encuentra el conjunto solución para cada ecuación o desigualdad.*

69. $|h| = 4$

70. $|x| < 8$

71. $|x| \ge 9$

72. $|l + 5| = 13$

73. $|x - 2| \ge 5$

74. $|4 - 2x| = 5$

75. $|-2q + 9| < 7$

76. $\left|\frac{2x - 3}{5}\right| = 1$

77. $\left|\frac{x - 4}{3}\right| < 6$

78. $|4d - 1| = |6d + 9|$

79. $|2x - 3| + 4 \ge -17$

Resuelve cada desigualdad. Da la solución en notación de intervalo.

80. $|2x - 3| \ge 5$

81. $3 < 2x - 5 \le 11$

82. $-6 \le \frac{3 - 2x}{4} < 5$

83. $2p - 5 < 7$ y $9 - 3p \le 15$

84. $x - 3 \le 4$ o $2x - 5 > 7$

85. $-10 < 3(x - 4) \le 18$

Prueba de práctica del capítulo 2

Chapter Test Prep Videos proporciona soluciones totalmente resueltas para cualquiera de los ejercicios que quieras repasar. Chapter Test Prep Videos están disponibles vía MyMathLab, o en YouTube (busca "Angel Intermediate Algebra" y da click en "Channels")

1. Indica cuál es el grado del término $-3a^2bc^4$.

Simplifica.

2. $2p - 3q + 2pq - 6p(q - 3) - 4p$

3. $7q - \{2[3 - 4(q + 7)] + 5q\} - 8$

En los ejercicios 4-8, resuelve la ecuación.

4. $7(d + 2) = 3(2d - 4)$

5. $\frac{r}{12} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$

6. $-2(x + 3) = 4\{3[x - (3x + 7)] + 2\}$

7. $7x - 6(2x - 4) = 3 - (5x - 6)$

8. $-\frac{1}{2}(4x - 6) = \frac{1}{3}(3 - 6x) + 2$

9. Encuentra el valor de S_n para los valores dados.

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}, a_1 = 3, r = \frac{1}{3}, n = 3$$

10. Despeja a b de $c = \frac{a - 5b}{2}$.

11. Resuelve $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ para b_2.

En los ejercicios 12-16, escribe una ecuación que pueda ser usada para resolver cada problema. Resuelve la ecuación y responde la pregunta.

12. Descuento en palos de golf Encuentra el costo de un juego de palos de golf, antes de impuestos, si el costo de los palos de golf más 7% de impuestos es de \$668.75.

© Allen R. Angel

13. **Costo de clases de aeróbics** El costo por inscribirse a clases de aeróbics es de \$240 por año, más \$2 por visita (por uso de toalla y artículos de tocador). Si Bill Rush quiere gastar un total de \$400 al año en clases de aeróbics, ¿cuántas visitas puede hacer?

14. **Viaje en bicicleta** Jeffrey Chang y Roberto Fernández comienzan en el mismo punto y en bicicleta van en direcciones opuestas. La velocidad de Jeffrey es de 15 millas por hora y la velocidad de Roberto es de 20 millas por hora. ¿En cuántas horas los dos hombres estarán separados por 147 millas?

15. **Solución salina** ¿Cuántos litros de una solución salina al 12% deben añadirse a 10 litros de una solución salina al 25% para obtener una solución salina al 20%?

16. **Dos inversiones** June White tiene \$12,000 para invertir. Ella coloca parte de su dinero en una cuenta de ahorro con 8% de interés simple y la otra parte en una cuenta de ahorro con 7% de interés simple. Si el total de interés en las dos cuentas al final de un año es de \$910, encuentra el monto colocado en cada cuenta.

Resuelve cada desigualdad y grafica la solución en una recta numérica.

17. $3(2q + 4) < 5(q - 1) + 7$

18. $\dfrac{6 - 2x}{5} \geq -12$

Resuelve cada desigualdad y escribe la solución en notación de intervalo.

19. $x - 3 \leq 4$ y $2x + 1 > 10$

20. $7 \leq \dfrac{2u - 5}{3} < 9$

Encuentra el conjunto solución de las siguientes ecuaciones.

21. $|2b + 5| = 9$

22. $|2x - 3| = \left|\dfrac{1}{2}x - 10\right|$

Encuentra el conjunto solución de las siguientes desigualdades.

23. $|4z + 12| \leq 0$

24. $|2x - 3| + 6 > 11$

25. $\left|\dfrac{2x - 3}{8}\right| \leq \dfrac{1}{4}$

Prueba de repaso acumulada

Realiza la siguiente prueba y comprueba tus respuestas con aquellas que se dan al final del libro. Repasa cualquier pregunta que hayas contestado incorrectamente. La sección en donde se vio el tema se indica después de cada respuesta.

1. Si $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ y $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$, encuentra
   a) $A \cup B$
   b) $A \cap B$

2. Nombra cada propiedad indicada.
   a) $9x + y = y + 9x$
   b) $(2x)y = 2(xy)$
   c) $4(x + 3) = 4x + 12$

Evalúa.

3. $-4^3 + (-6)^2 \div (2^3 - 2)^2$

4. $a^2b^3 + ab^2 - 3b$ cuando $a = -1$ y $b = -2$

5. $\dfrac{8 - \sqrt[3]{27} \cdot 3 \div 9}{|-5| - [5 - (12 \div 4)]^2}$

En los ejercicios 6 y 7, simplifica.

6. $(5x^4y^3)^{-2}$

7. $\left(\dfrac{4m^2n^{-4}}{m^{-3}n^2}\right)^2$

8. **Comparando el tamaño de los estados** Rhode Island tiene un área territorial de 1.045×10^3 millas cuadradas y Alaska de 5.704×10^5 millas cuadradas. ¿Cuántas veces es más grande el área territorial de Alaska que el área de Rhode Island?

En los ejercicios 9-11, resuelve la ecuación.

9. $-3(y + 7) = 2(-2y - 8)$

10. $1.2(x - 3) = 2.4x - 4.98$

11. $\dfrac{2m}{3} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{9}m$

12. Explica la diferencia entre una ecuación lineal condicional, una identidad y una contradicción. Da un ejemplo de cada una.

13. Evalúa la fórmula $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ para $a = 3$, $b = -8$, y $c = -3$

14. Resuelve la fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$ para x.

15. Resuelve la desigualdad $-4 < \dfrac{5x - 2}{3} < 2$ y da la respuesta
   a) en una recta numérica,
   b) como un conjunto solución, y.
   c) en notación de intervalo.

En los ejercicios 16 y 17, encuentra el conjunto solución.

16. $|3h - 1| = 8$

17. $|2x - 4| - 6 \geq 18$

18. **Rebajas en equipo de baseball** Una semana después de la serie mundial, el precio de todo el equipamiento de baseball tiene un descuento de 40%. Si Maxwell Allen compra un bat de baseball de la marca Louisville Slugger por \$21 en venta, ¿cuál era el precio original del bat?

19. **Dos automóviles** Dos autos dejan Newark, New Jersey, al mismo tiempo viajando en direcciones opuestas. El auto que viaja al norte se está moviendo 20 millas por hora más rápido que el auto que viaja al sur. Si los dos autos están separados por 300 millas después de 3 horas, encuentra la velocidad de cada auto.

20. **Nueces mixtas** Molly Fitzgerald, dueña de Molly's Nut House, tiene nueces de la India que cuestan \$6.50 la libra y cacahuates que cuestan \$2.50 la libra. Si ella quiere hacer 40 libras de una mezcla de nueces de la India y cacahuates que venda en \$4.00 la libra, ¿cuántas libras de nueces de la India y cuantas libras de cacahuates debería mezclar Molly?

3

Gráficas y funciones

Objetivos de este capítulo

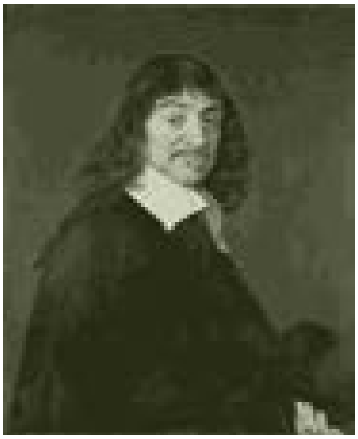
Los dos principales objetivos de este capítulo son proporcionarte un buen entendimiento de gráficas y funciones. Graficar es un elemento clave para éste y muchos cursos de matemáticas. Las funciones están estrechamente relacionadas con gráficas y son un concepto unificador en las matemáticas. Usaremos ambas, gráficas y funciones, en el resto de este libro.

© Glowimages

Todos los días vemos gráficas en los periódicos, las revistas y en Internet. Verás muchas de estas gráficas en este capítulo. Por ejemplo, en el ejercicio 74 de la página 161, se usa una gráfica para mostrar precios de gasolina ajustados a la inflación.

3.1 Gráficas

1. Trazado de puntos en el sistema de coordenadas cartesianas.
2. Dibujo de gráficas por trazado de puntos.
3. Gráfica de ecuaciones no lineales.
4. Interpretación de gráficas.



© Wikipedia, The Free Encyclopedia

René Descartes

1 Trazado de puntos en el sistema de coordenadas cartesianas

Es más sencillo entender muchas relaciones algebraicas si podemos ver una representación visual de ellas. Una gráfica es una representación visual que muestra la relación entre dos o más variables en una ecuación.

El **sistema de coordenadas cartesianas** (o **rectangulares**), que debe su nombre al matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650), consiste en dos ejes (o líneas de números) en un plano colocadas en forma perpendicular entre sí (**Figura 3.1**). Observa cómo los dos ejes forman cuatro **cuadrantes**, marcados con números romanos I, II, III y IV.

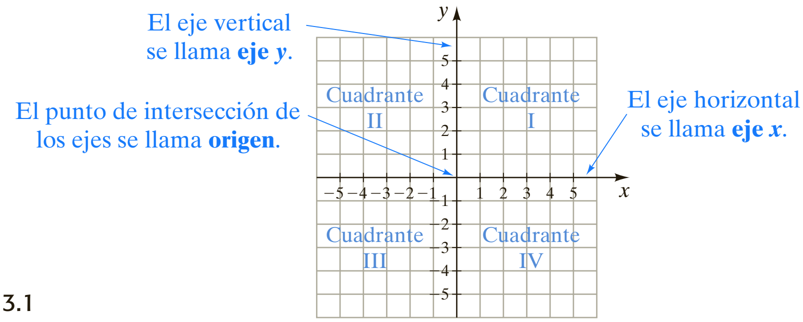


FIGURA 3.1

Para localizar un punto en el sistema de coordenadas cartesianas, usaremos un **par ordenado** de la forma (x, y). El primer número, x, se llama **coordenada *x*** y el segundo número, y, se llama **coordenada *y***.

Para trazar el punto $(3, 5)$, empieza en el origen,

$(3, 5)$

La coordenada x es 3, lo que significa "muévete 3 unidades hacia la *derecha*".

La coordenada y es 5, lo que significa "muévete 5 unidades hacia *arriba*".

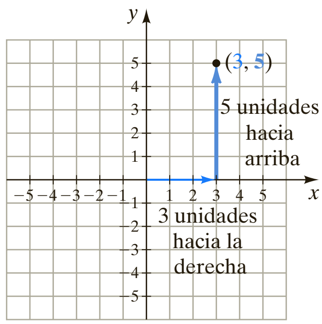


FIGURA 3.2

Los pares ordenados A en $(-2, 3)$, B en $(0, 2)$, C en $(4, -1)$ y D en $(-4, 0)$ se trazan en la **Figura 3.3**.

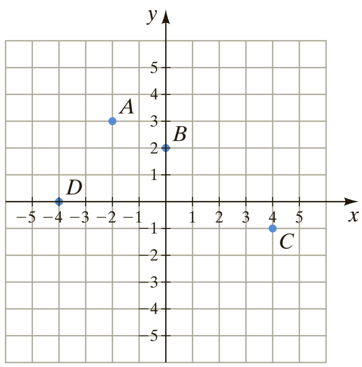


FIGURA 3.3

EJEMPLO 1 Traza los siguientes puntos en el mismo sistema de ejes.

a) $A(1, 4)$ **b)** $B(4, 1)$ **c)** $C(0, 2)$
d) $D(-3, 0)$ **e)** $E(-3, -1)$ **f)** $F(2, -4)$

Solución

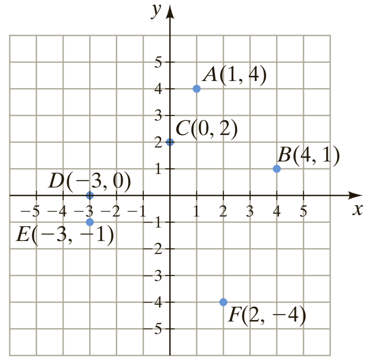


FIGURA 3.4

Resuelve ahora el ejercicio 7

Comprendiendo el álgebra

En la **Figura 3.4** observa lo siguiente:

- (1, 4) es un punto diferente de (4, 1)
- Cuando la coordenada *x* es 0 (punto *C*), el punto está sobre el eje *y*.
- Cuando la coordenada *y* es 0 (punto *D*), el punto está sobre el eje *x*.

2 Dibujo de gráficas por trazado de puntos

En el capítulo 2 resolvimos ecuaciones que contienen una variable. Ahora discutiremos ecuaciones que contienen dos variables. Si una ecuación contiene dos variables, sus soluciones son pares ordenados de números.

EJEMPLO 2 Determina si los siguientes pares ordenados son soluciones de la ecuación $y = 2x - 3$.

a) $(1, -1)$ **b)** $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$
c) $(4, 6)$ **d)** $(-1, -5)$

Solución Sustituimos el primer número en el par ordenado por *x* y el segundo número por *y*. Si el resultado es una proposición verdadera, el par ordenado es solución de la ecuación.

a)
$$\begin{aligned} y &= 2x - 3 \\ -1 &\overset{?}{=} 2(1) - 3 \\ -1 &\overset{?}{=} 2 - 3 \\ -1 &= -1 \quad \text{Verdadero} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} y &= 2x - 3 \\ -2 &\overset{?}{=} 2\left(\frac{1}{2}\right) - 3 \\ -2 &\overset{?}{=} 1 - 3 \\ -2 &= -2 \quad \text{Verdadero} \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} y &= 2x - 3 \\ 6 &\overset{?}{=} 2(4) - 3 \\ 6 &\overset{?}{=} 8 - 3 \\ 6 &= 5 \quad \text{Falso} \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} y &= 2x - 3 \\ -5 &\overset{?}{=} 2(-1) - 3 \\ -5 &\overset{?}{=} -2 - 3 \\ -5 &\overset{?}{=} -5 \quad \text{Verdadero} \end{aligned}$$

Por lo tanto, los pares ordenados $(1,-1)$, $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$, y $(-1,-5)$ son soluciones de la ecuación $y = 2x - 3$. El par ordenado $(4, 6)$ no es solución.

Resuelve ahora el ejercicio 17

Existe un número infinito de soluciones para la ecuación del ejemplo 2. Un método para encontrar soluciones para $y = 2x - 3$ es sustituir valores en *x* y encontrar los valores correspondientes de y. Por ejemplo, para encontrar la solución cuando $x = 0$, sustituye x por 0 y resuelve para y.

$$\begin{aligned} y &= 2x - 3 \\ y &= 2(0) - 3 \\ y &= 0 - 3 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, otra solución a la ecuación es $(0, -3)$.

Gráfica de una ecuación

La **gráfica de una ecuación** es una ilustración del conjunto de puntos cuyos pares ordenados son soluciones de la ecuación.

La siguiente tabla muestra los cuatro pares ordenados que encontramos como solución de $y = 2x - 3$.

x	y	(x, y)
-1	-5	$(-1, -5)$
0	-3	$(0, -3)$
$\frac{1}{2}$	-2	$\left(\frac{1}{2}, -2\right)$
1	-1	$(1, -1)$

Cuando trazamos estos puntos vemos que todos están en la misma línea; entonces se dice que los puntos son **colineales** (ver **Figura 3.5a**). La gráfica de la ecuación es una línea recta que pasa por estos puntos (ver **Figura 3.5b**). La línea recta continúa indefinidamente en las dos direcciones como indican las flechas.

Comprendiendo el álgebra

La ecuación $y = 2x - 3$ tiene un número infinito de soluciones. Cada solución se representa por un punto en la recta en la **Figura 3.5b**. Además, cada punto en la recta representa una solución de la ecuación $y = 2x - 3$.

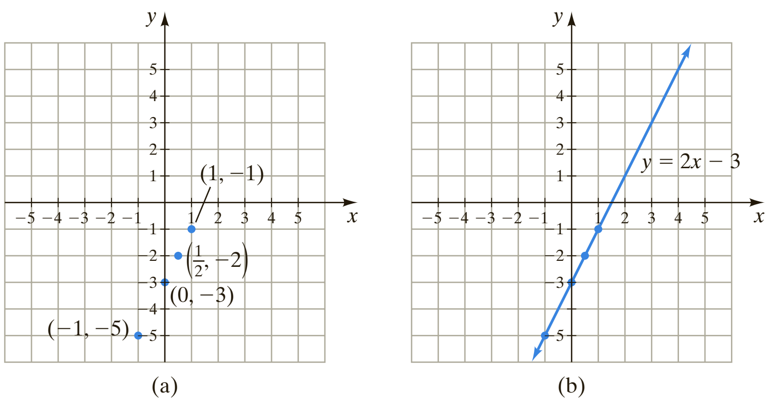


FIGURA 3.5

Como la gráfica es una línea recta, se dice que la gráfica es **lineal** y la ecuación se llama **ecuación lineal**. A la ecuación también se le llama **ecuación de primer grado** ya que el mayor exponente de cualquiera de sus variables es 1.

Consejo útil

Consejo de estudio

En este capítulo, y en varios de los capítulos siguientes, trazarás puntos y dibujarás gráficas usando el sistema de coordenadas cartesianas. Las siguientes sugerencias pueden mejorar la calidad de las gráficas que elabores.

1. Para tu tarea, el uso del papel para graficar te ayudará a mantener una escala consistente en toda tu gráfica.
2. Tus ejes y líneas se verán mucho mejor y serán más precisas si las trazas con regla o escuadra.

(*continúa en la siguiente página*)

3. Si no usas papel para graficar, usa una regla para crear una escala consistente en tus ejes. Es imposible obtener una gráfica precisa cuando los ejes están marcados con una escala desigual.
4. Usa un lápiz en lugar de una pluma. Un error se puede corregir rápidamente con lápiz y goma y no tendrás que empezar de nuevo desde el principio.
5. Resuelve todos los problemas de la tarea que se te hayan asignado.

EJEMPLO 3 Grafica $y = x$.

Solución Primero encontramos algunos pares ordenados que sean soluciones; seleccionamos valores de x y encontramos los valores correspondientes de y. Seleccionamos 0, algunos valores positivos y algunos valores negativos para x. En general, escogeremos números cercanos a 0 para que los pares ordenados quepan en los ejes. La gráfica se ilustra en la **Figura 3.6**.

x	y	(x, y)
-2	-2	$(-2, -2)$
-1	-1	$(-1, -1)$
0	0	$(0, 0)$
1	1	$(1, 1)$
2	2	$(2, 2)$

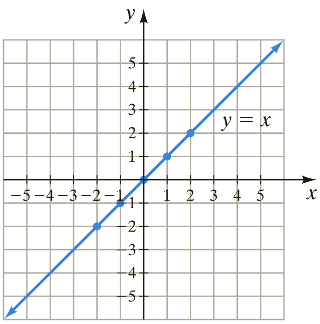


FIGURA 3.6

1. Selecciona valores para x.
2. Calcula y.
3. Pares ordenados.
4. Traza los puntos y dibuja la gráfica.

Resuelve ahora el ejercicio 27

EJEMPLO 4 Grafica $y = -\frac{1}{3}x + 1$.

Solución Cuando seleccionemos valores para x, escogeremos algunos valores positivos, algunos valores negativos y 0. Escogeremos múltiplos de 3 para que los valores de y sean valores enteros. La gráfica se ilustra en la **Figura 3.7**.

Comprendiendo el álgebra

Cuando grafiques ecuaciones lineales en las que el coeficiente de x es una fracción, escoge valores de x que sean múltiplos del denominador. Esto puede dar como resultado valores enteros para y.

x	y
-6	3
-3	2
0	1
3	0
6	-1

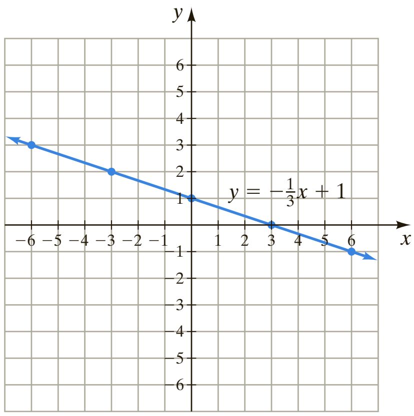


FIGURA 3.7

1. Selecciona valores para x.
2. Calcula y.
3. Traza los puntos y dibuja la gráfica.

Resuelve ahora el ejercicio 35

Si se nos pide graficar una ecuación no resuelta para y, como $x + 3y = 3$, nuestro primer paso será resolver la ecuación para y. Por ejemplo, si resolvemos $x + 3y = 3$ para y, obtenemos

$$x + 3y = 3$$

$$3y = -x + 3 \qquad \text{Resta } x \text{ en ambos lados.}$$

$$y = \frac{-x + 3}{3} \qquad \text{Divide ambos lados entre 3.}$$

$$y = \frac{-x}{3} + \frac{3}{3} = -\frac{1}{3}x + 1$$

La ecuación que resulta, $y = -\frac{1}{3}x + 1$, es la misma ecuación que graficamos en el ejemplo 4. Por lo tanto, la gráfica de $x + 3y = 3$ se ilustra también en la **Figura 3.7** en la página 139.

3 Gráfica de ecuaciones no lineales

Las ecuaciones cuyas gráficas no son líneas rectas se llaman **ecuaciones no lineales**. Para graficar ecuaciones no lineales trazando puntos, seguimos el mismo procedimiento que usamos para graficar ecuaciones lineales. Sin embargo, como las gráficas no son líneas rectas, probablemente tengamos que trazar más puntos para obtener la gráfica.

EJEMPLO 5 Grafica $y = x^2 - 4$.

Solución Seleccionamos algunos valores para x y encontramos los valores correspondientes para y. Después trazamos los puntos y los conectamos por medio de una curva suave. La gráfica se muestra en la **Figura 3.8**.

x	y
-3	5
-2	0
-1	-3
0	-4
1	-3
2	0
3	5

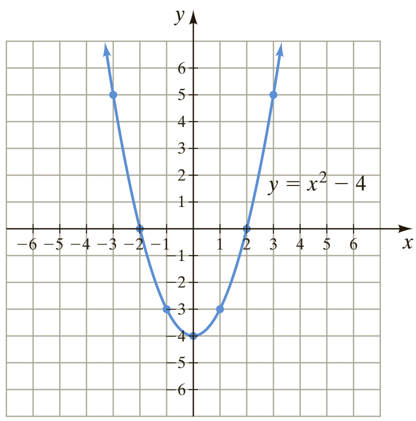


FIGURA 3.8

Comprendiendo el álgebra

Cuando sustituimos valores de x, debemos seguir el orden de operaciones que discutimos en la sección 1.4.

Resuelve ahora el ejercicio 41

EJEMPLO 6 Grafica $y = \frac{1}{x}$.

Solución Cuando escojas valores para x, observa que $x = 0$ da $y = \frac{1}{0}$, lo cual es indefinido. Entonces, no habrá gráfica en la parte de $x = 0$. También observa que cuando $x = \frac{1}{2}$, obtienes $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \div \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{2}{1} = 2$. Esta gráfica tiene dos ramas, una a la izquierda del eje y y otra a la derecha del eje y, como se muestra en la **Figura 3.9** en la página 141.

x	y
-3	$-\frac{1}{3}$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$

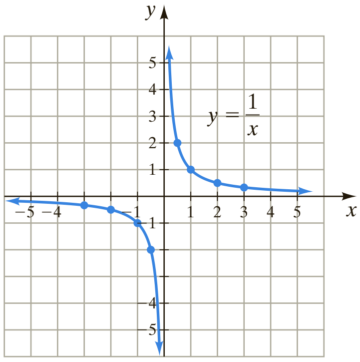


FIGURA 3.9

Resuelve ahora el ejercicio 51

En la gráfica del ejemplo 6, observa que para valores lejanos de x a la derecha de 0, o lejanos a la izquierda de 0, la gráfica se aproxima al eje x pero no lo toca. Por ejemplo, cuando $x = 1000$, $y = 0.001$ y cuando $x = -1000$, $y = -0.001$.

EJEMPLO 7 Grafica $y = |x|$.

Solución Para graficar esta ecuación de valor absoluto seleccionamos algunos valores para x y encontramos los valores correspondientes de y. Después trazamos los puntos y dibujamos la gráfica.

Observa que esta gráfica tiene forma de V, como se muestra en la **Figura 3.10**.

x	y
-4	4
-3	3
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4

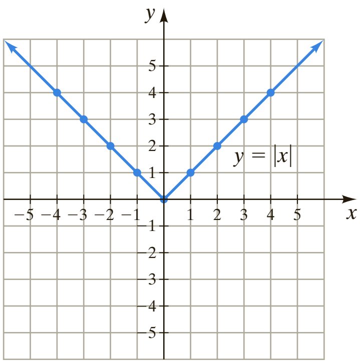


FIGURA 3.10

Resuelve ahora el ejercicio 45

Comprendiendo el álgebra

El valor absoluto de un número x, que se escribe $|x|$, es la distancia a la que x está de 0 en la recta numérica.

Prevención de errores comunes

Cuando grafiques ecuaciones no lineales asegúrate de trazar suficientes puntos para tener una imagen clara de la gráfica. Por ejemplo, al graficar $y = \frac{1}{x}$ muchos estudiantes consideran solo valores enteros de x. A continuación se muestra una tabla con valores para la ecuación y dos gráficas que contienen los puntos indicados en la tabla.

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

(*continúa en la página siguiente*)

CORRECTO

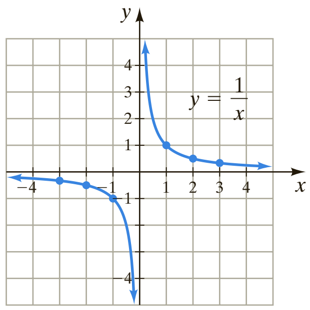


FIGURA 3.11

INCORRECTO

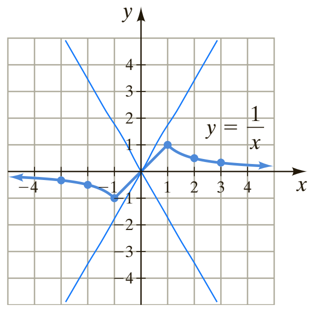


FIGURA 3.12

Si seleccionas y trazas valores fraccionarios de x cercanos a 0, como hicimos en el ejemplo 6, obtendrás la gráfica de la **Figura 3.11**. La gráfica de la **Figura 3.12** no puede ser correcta ya que la ecuación no está definida cuando x es 0 y por lo tanto la gráfica no puede cruzar el eje y. Cuando traces una gráfica que contenga una variable en el denominador, escoge valores para la variable que sean muy cercanos al valor que hace 0 al denominador y observa qué sucede. Por ejemplo, cuando graficas $y = \dfrac{1}{x-3}$ debes usar valores de x cercanos a 3, como 2.9 y 3.1 o 2.99 y 3.01, y ve qué valores obtienes para y.

Además, cuando graficas ecuaciones no lineales, es una buena idea considerar valores positivos y negativos. Por ejemplo, si usaste solo valores positivos de x cuando graficaste $y = |x|$, la gráfica parecería ser una línea recta que pasa por el origen en lugar de la gráfica en forma de V que se muestra en la **Figura 3.10** de la página 141.

Cómo utilizar tu calculadora graficadora

A lo largo de este libro iremos introduciendo algunos de los usos básicos de la calculadora graficadora. El manual de tu calculadora incluye información más detallada. Una **ventana** es la pantalla en la que se muestra una gráfica. En este libro todas las ventanas y teclas serán las de una calculadora graficadora TI-84 Plus. La **Figura 3.13** muestra una ventana estándar y la **Figura 3.14** muestra la configuración estándar de una ventana de la **TI-84 Plus**.

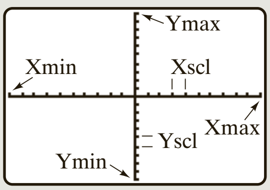


FIGURA 3.13

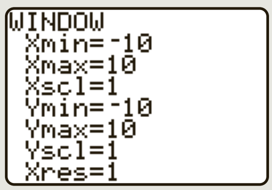


FIGURA 3.14

Para graficar la ecuación $y = -2x + 3$, oprime

Y= | (−) | 2 | X,T,θ,n | + | 3 | GRAPH

La gráfica de la ecuación aparece en la ventana como se muestra en la **Figura 3.15**.

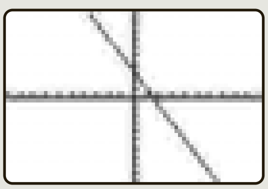


FIGURA 3.15

4 Interpretación de gráficas

Todos los días vemos diferentes tipos de gráficas en los periódicos, revistas, en Internet, etc. A lo largo de este libro presentaremos una variedad de gráficas. Ya que poder trazar e interpretar gráficas es muy importante, estudiaremos esto más adelante en la sección 3.2. En el ejemplo 8 deberás entender e interpretar gráficas para responder la pregunta.

EJEMPLO 8 Cuando Jim Herring fue a ver a su madre en Cincinnati, abordó un avión de la aerolínea Southwest. El avión estuvo en la pista por 20 minutos y luego despegó. El avión voló aproximadamente a 600 millas por hora por alrededor de 2 horas. Después redujo su velocidad a cerca de 300 millas por hora y se mantuvo dando vueltas sobre el aeropuerto de Cincinnati por alrededor de 15 minutos antes de aterrizar. Después de aterrizar, el avión fue llevado a la puerta y se detuvo. ¿Cuál gráfica de las **Figuras 3.16**, **3.17**, **3.18** o **3.19** ilustra mejor esta situación?

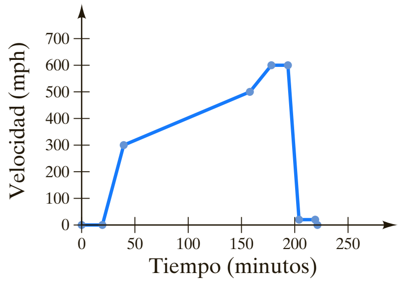


FIGURA 3.16

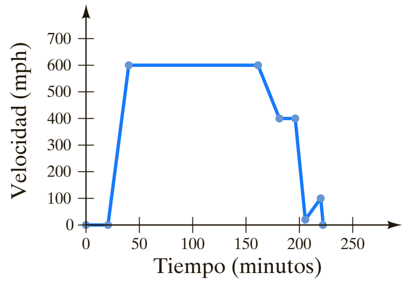


FIGURA 3.17

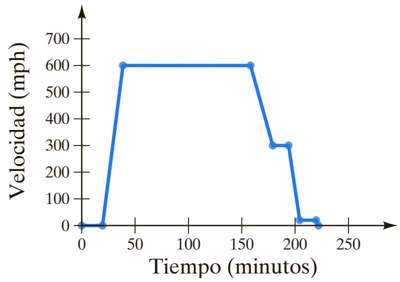


FIGURA 3.18

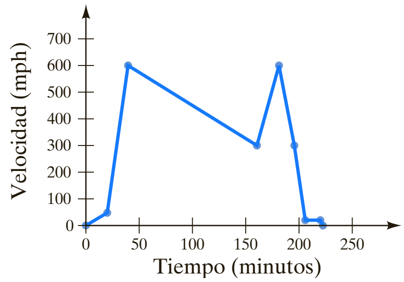


FIGURA 3.19

Solución La gráfica que representa la situación descrita es la de la **Figura 3.18**, que reproducimos con anotaciones en la **Figura 3.20**. La gráfica muestra la velocidad contra el tiempo, con el tiempo en el eje horizontal.

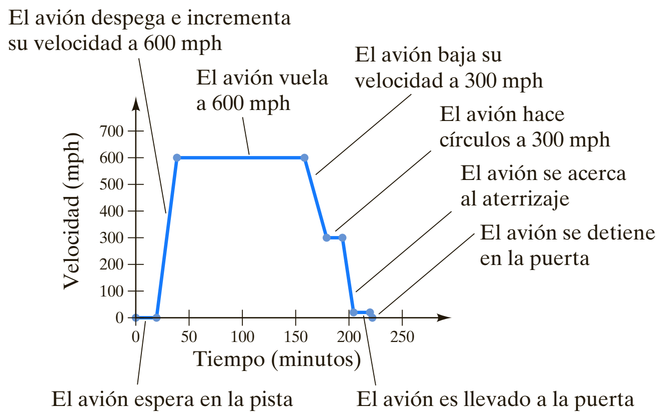


FIGURA 3.20

Resuelve ahora el ejercicio 75

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.1

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

coordenada x colineales gráfica coordenada y solución par ordenado

1. Una solución para una ecuación con dos variables es un ________________.

2. La ____________ de una ecuación es una ilustración del conjunto de puntos cuyos pares ordenados son soluciones para la ecuación.

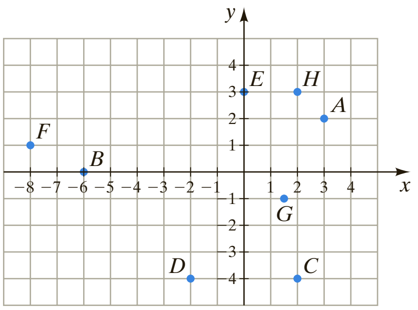
3. Si tres o más puntos se encuentran en la misma recta se dice que son ________________.

4. La primera coordenada en un par ordenado es la ____________ y la segunda coordenada es la coordenada y.

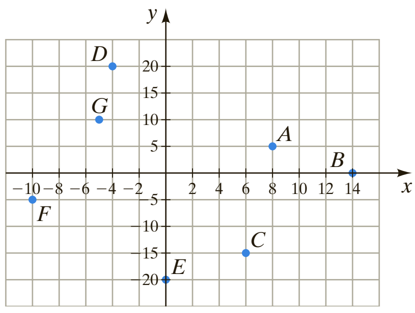
Practica tus habilidades

Indica los pares ordenados que corresponden a los puntos señalados.

5.



6.



7. Grafica los siguientes puntos en el mismo plano cartesiano.
$A(4, 2)$ $B(-6, 2)$ $C(0, -1)$ $D(-2, 0)$

8. Grafica los siguientes puntos en el mismo plano cartesiano.
$A(-4, -2)$ $B(3, 2)$ $C(2, -3)$ $D(-3, 3)$

Determina el cuadrante en donde cada punto esté localizado.

9. $(1, 3)$ **10.** $(-9, 1)$ **11.** $(4, -3)$ **12.** $(36, 43)$

13. $(-12, 18)$ **14.** $(-31, -8)$ **15.** $(-11, -19)$ **16.** $(8, -52)$

Determina si el par ordenado es una solución para la ecuación dada.

17. $(2, -1); y = 2x - 5$ **18.** $(1, 3); 2x + 3y = 6$ **19.** $(-4, +2); y = |x| + 3$ **20.** $(1, -5); y = x^2 + x - 7$

21. $(-2, 5); s = 2r^2 - r - 5$ **22.** $\left(\frac{1}{4}, \frac{11}{4}\right); y = |x - 3|$ **23.** $(2, 1); -a^2 + 2b^2 = -2$

24. $(-10, -2); |p| - 3|q| = 4$ **25.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right); 2x^2 + 6x - y = 0$ **26.** $\left(-3, \frac{7}{2}\right); 2m^2 + 3n = 2$

Realiza la gráfica de cada ecuación.

27. $y = x + 1$ **28.** $y = 3x$ **29.** $y = -3x - 5$ **30.** $y = -2x + 2$

31. $y = 2x + 4$ **32.** $y = x + 2$ **33.** $y = \frac{1}{2}x$ **34.** $y = -\frac{1}{3}x$

35. $y = \frac{1}{2}x - 1$ **36.** $y = -\frac{1}{2}x - 3$ **37.** $y = -\frac{1}{3}x + 2$ **38.** $y = -\frac{1}{3}x + 4$

39. $y = x^2$ **40.** $y = x^2 - 2$ **41.** $y = -x^2$ **42.** $y = -x^2 + 4$

43. $y = |x| + 1$ **44.** $y = |x| + 2$ **45.** $y = -|x|$ **46.** $y = -|x| - 3$

47. $y = x^3$ **48.** $y = -x^3$ **49.** $y = x^3 + 1$ **50.** $y = \frac{1}{x}$

51. $y = -\frac{1}{x}$ **52.** $x^2 = 1 + y$ **53.** $x = |y|$ **54.** $x = y^2$

En los ejercicios 55-62, utiliza una calculadora para obtener al menos ocho puntos que sean solución de la ecuación. Después, grafica la ecuación mediante el trazado de los puntos.

55. $y = x^3 - x^2 - x + 1$ **56.** $y = -x^3 + x^2 + x - 1$ **57.** $y = \frac{1}{x + 1}$ **58.** $y = \frac{1}{x} + 1$

59. $y = \sqrt{x}$ **60.** $y = \sqrt{x + 4}$ **61.** $y = \frac{1}{x^2}$ **62.** $y = \frac{|x^2|}{2}$

63. ¿El punto representado por el par ordenado $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{12}\right)$ forma parte de la gráfica de la ecuación $y = \frac{x^2}{x + 1}$? Explica.

64. ¿El punto representado por el par ordenado $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}\right)$ forma parte de la gráfica de la ecuación $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$? Explica.

65. a) Traza los puntos $A(2, 7)$, $B(2, 3)$ y $C(6, 3)$ y después dibuja $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, y $\overline{BC}$. ($\overline{AB}$ representa el segmento de recta de A a B).

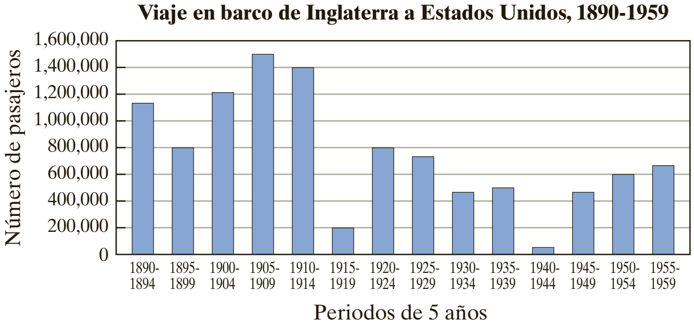
b) Determina el área de la figura.

66. a) Traza los puntos $A(-4, 5)$, $B(2, 5)$, $C(2, -3)$ y $D(-4, -3)$, y después dibuja $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$.

b) Determina el área de la figura.

67. Viaje de Inglaterra a Estados Unidos La siguiente gráfica muestra el número de pasajeros que viajaron en barco de Inglaterra a Estados Unidos en periodos de 5 años desde 1890 hasta 1959.

Viaje en barco de Inglaterra a Estados Unidos, 1890-1959



Fuente: Lista de pasajeros BT27 de findmypast.com

a) Estima el número de pasajeros durante 1895-1899.

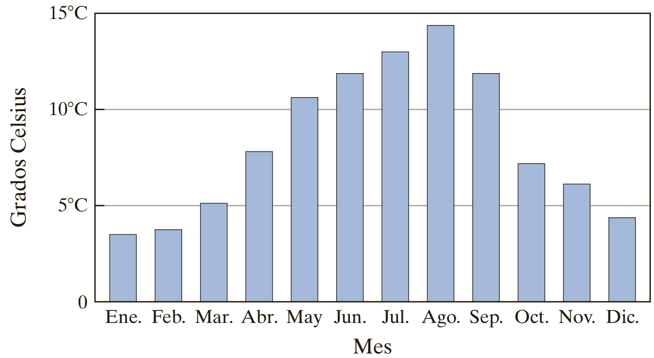
b) Estima el número de pasajeros durante 1955-1959.

c) ¿Durante qué periodo de 5 años el número de pasajeros fue mayor a 1,000,000?

d) ¿Esta gráfica parece ser lineal?

68. Temperatura en Scotland La siguiente gráfica muestra la temperatura promedio por mes en grados Celsius en Glasgow, Scotland.

Temperaturas medias mensuales registradas en Glasgow, Scotland



Fuente: www.wunderground.com

a) Estima la temperatura promedio en Febrero.

b) Estima la temperatura promedio en Julio.

c) ¿Durante qué meses la temperatura promedio fue mayor a 10 °C?

d) ¿Esta gráfica parece ser lineal?

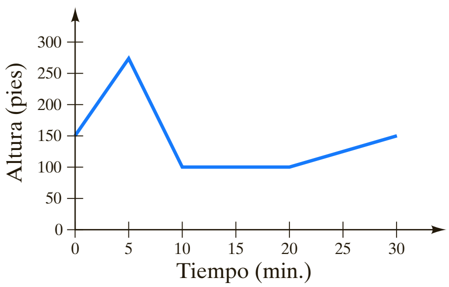
Relaciona los ejercicios 69-72 con la gráfica correspondiente de altura sobre el nivel del mar en función del tiempo, rotuladas como a-d.

69. Nancy Johnson comenzó subiendo una colina empinada por 5 minutos. Los siguientes 5 minutos descendió de la colina hasta una altura menor que su punto inicial. Los siguientes 10 minutos caminó a nivel de suelo y los últimos 10 minutos subió una pequeña colina hasta llegar a la altura inicial.

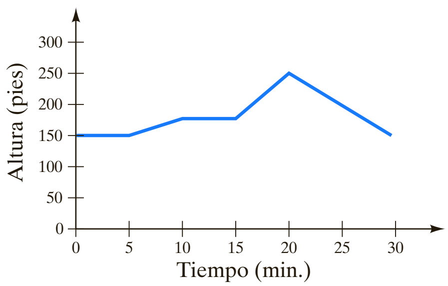
70. James Condor comenzó subiendo una colina por 5 minutos. Los siguientes 10 minutos descendió de la colina hasta una altura igual a la altura inicial. Los siguientes 10 minutos caminó a nivel de suelo y los últimos 5 minutos descendió una colina.

71. Mary Beth Headlee caminó por 5 minutos a nivel de suelo. Los siguientes 5 minutos escaló una pequeña colina. Luego caminó a nivel de suelo por 5 minutos. Los 5 minutos siguientes escaló una colina empinada. Durante los últimos 10 minutos descendió uniformemente hasta que alcanzó la altura a la que comenzó.

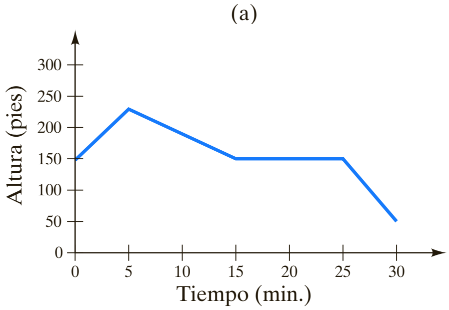
72. Don Ransford caminó a nivel de suelo por 5 minutos. Después descendió una colina empinada por 10 minutos. Los siguientes 5 minutos caminó a nivel de suelo. Después caminó 5 minutos de regreso a su altura inicial. Los últimos 5 minutos caminó a nivel de suelo.



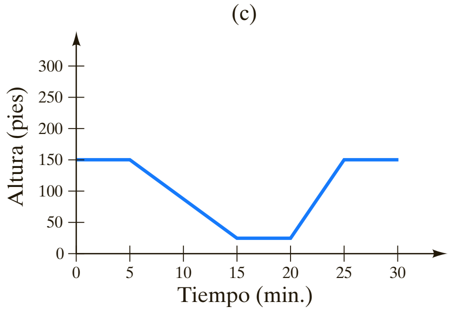
(a)



(c)



(b)



(d)

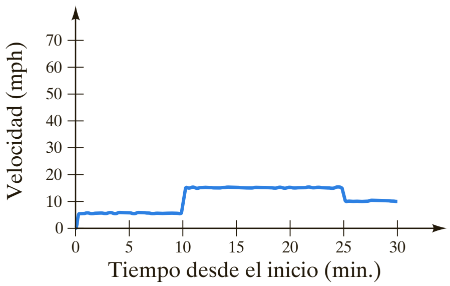
Relaciona los ejercicios 73-76 con la gráfica correspondiente de velocidad contra tiempo, rotuladas como a-d.

73. Para ir al trabajo, Donna Clark conduce 10 minutos por un camino rural, después conduce por una carretera durante 12 minutos y por último conduce en el tráfico de la ciudad por 8 minutos.

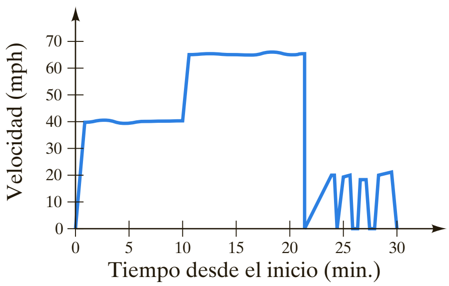
74. Para ir al trabajo, Bob Plough conduce 5 minutos en el tráfico de la ciudad, después conduce por la autopista durante 20 minutos y por último conduce en el tráfico de la ciudad por 5 minutos.

75. Para ir al trabajo, Ron Breitfelder camina 3 minutos, espera 5 minutos el tren, viaja en él por 15 minutos y por último camina 7 minutos.

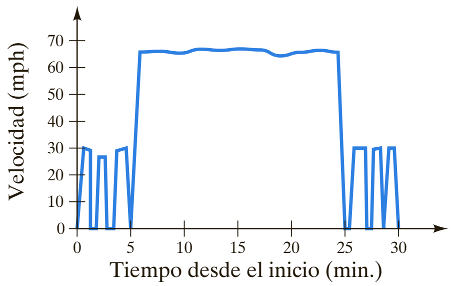
76. Para ir al trabajo, Kim Ghiselin conduce su bicicleta colina arriba por 10 minutos, después conduce 15 minutos colina abajo y por último conduce a nivel de calle por 5 minutos.



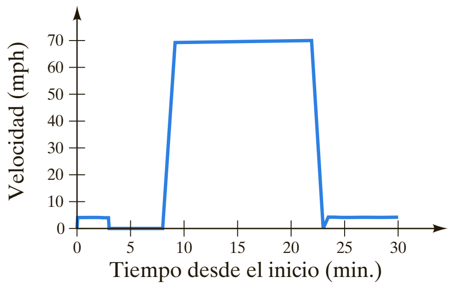
(a)



(b)



(c)



(d)

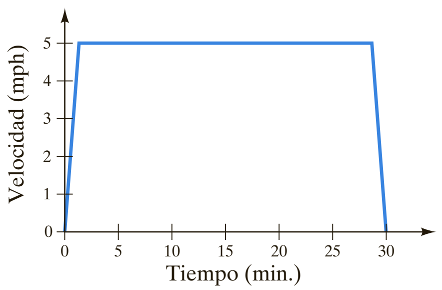
Relaciona los ejercicios 77-80 con la gráfica correspondiente de velocidad contra tiempo, rotuladas como a-d.

77. Christina Dwyer camina 5 minutos para calentar, trota 20 minutos y después camina 5 minutos para enfriarse.

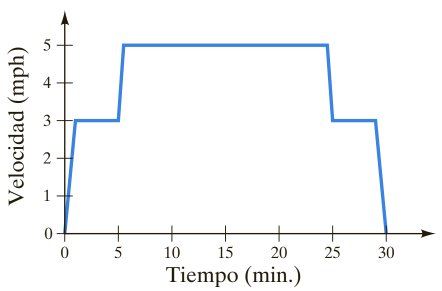
78. Annie Droullard fue a dar un paseo en bicicleta a una velocidad constante durante 30 minutos.

79. Michael Odu fue a caminar 30 minutos por su vecindario. Se detuvo brevemente en 7 ocasiones para levantar basura.

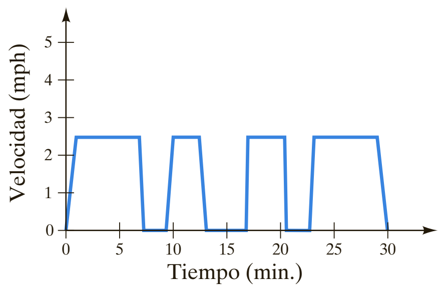
80. Richard Dai caminó por su vecindario y se detuvo 3 veces para conversar con sus vecinos. En total estuvo fuera de su casa 30 minutos.



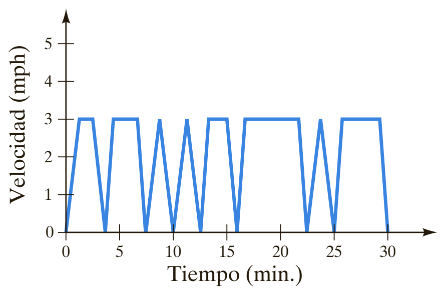
(a)



(b)



(c)



(d)

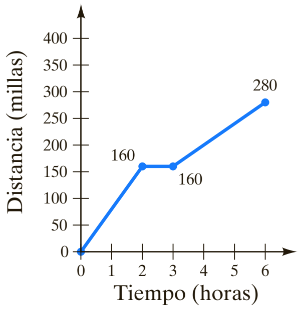
Relaciona los ejercicios 81-84 con la gráfica correspondiente de distancia recorrida contra tiempo, rotuladas como a-d. Recuerda del capítulo 2 que distancia = velocidad × tiempo. Las distancias seleccionadas están indicadas en las gráficas.

81. El tren A viaja a una velocidad de 40 mph durante 1 hora, después a 80 mph durante 2 horas y por último a 60 mph durante 3 horas.

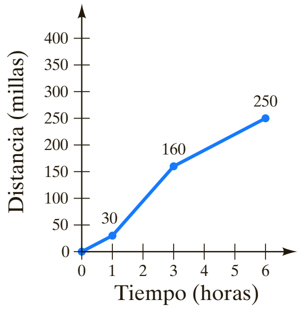
82. El tren C viaja a una velocidad de 80 mph durante 2 horas, después permanece en una estación durante 1 hora y luego viaja a 40 mph durante 3 horas.

83. El tren B viaja a una velocidad de 20 mph durante 2 horas, después a 60 mph durante 3 horas y por último a 80 mph durante 1 hora.

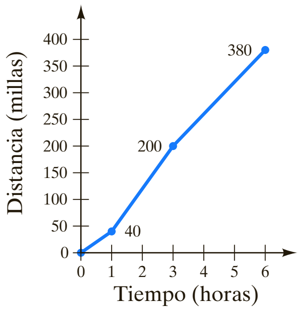
84. El tren D viaja a 30 mph durante 1 hora, después a 65 mph durante 2 horas y por último a 30 mph durante 3 horas.



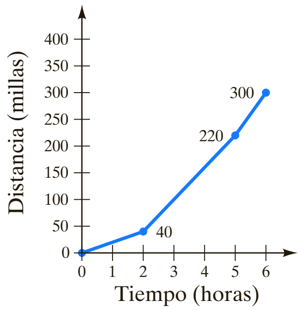
(a)



(c)



(b)



(d)

Usa una calculadora graficadora para graficar cada función. Asegúrate de seleccionar valores para la ventana que mostrará la curvatura de la gráfica. Después, si tu calculadora puede elaborar tablas, realiza una tabla en donde los valores de x vayan de 0 a 6.

85. $y = 2x - 3$

86. $y = \frac{1}{3}x + 2$

87. $y = x^2 - 2x - 8$

88. $y = -x^2 + 16$

89. $y = x^3 - 2x + 4$

90. $y = 2x^3 - 6x^2 - 1$

Problemas de desafío

Discutiremos muchos de los conceptos introducidos en los ejercicios 91-98 de la sección 3.4.

91. Grafica $y = x + 1$, $y = x + 3$, y $y = x - 1$ en el mismo plano cartesiano.

a) ¿Qué es lo que observas en las gráficas de las ecuaciones y en los valores donde la gráfica intersecta el eje y?

b) ¿Todas las gráficas parecen tener la misma inclinación (o pendiente)?

92. Grafica $y = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{2}x + 3$, y $y = \frac{1}{2}x - 4$ en el mismo plano cartesiano.

a) ¿Qué es lo que observas en las gráficas de las ecuaciones y en los valores donde la gráfica intersecta el eje y?

b) ¿Todas las gráficas parecen tener la misma inclinación (o pendiente)?

93. Grafica $y = 2x$. Determina la *razón de cambio* de y con respecto a x. Es decir, por cuantas unidades cambia y comparada con cada unidad que cambia x.

94. Grafica $y = 4x$. Determina la razón de cambio de y con respecto a x.

95. Grafica $y = 3x + 2$. Determina la razón de cambio de y con respecto a x.

96. Grafica $y = \frac{1}{2}x$. Determina la razón de cambio de y con respecto a x.

97. El par ordenado $(3, -7)$ representa un punto en la gráfica de una ecuación lineal. Si y aumenta 4 unidades por cada unidad aumentada en x en la gráfica, determina otras dos soluciones para la ecuación.

98. El par ordenado $(1, -4)$ representa un punto en la gráfica de una ecuación lineal. Si y aumenta 3 unidades por cada unidad aumentada en x en la gráfica, determina otras dos soluciones para la ecuación.

Grafica cada ecuación.

99. $y = |x - 2|$

100. $x = y^2 + 2$

Actividad de grupo

Discute y trabaja los ejercicios 101-102 con tu grupo.

101. a) Integrante 1 del grupo: traza los puntos $(-2, 4)$ y $(6, 8)$. Determina el *punto medio* del segmento de línea que conecta a estos puntos.

Integrante 2 del grupo: sigue las instrucciones anteriores para los puntos $(-3, -2)$ y $(5, 6)$.

Integrante 3 del grupo: sigue las instrucciones anteriores para los puntos $(4, 1)$ y $(-2, 4)$.

b) En grupo, determinen una fórmula para el punto medio del segmento de línea que conecta a los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). (*Nota:* se discutirá la fórmula para el punto medio en el capítulo 10).

102. Los tres puntos en un paralelogramo son $A(3, 5)$, $B(8, 5)$, y $C(-1, -3)$.

a) De manera individual determinen un cuarto punto D que complete el paralelogramo.

b) De manera individual calculen el área de su paralelogramo.

c) Comparen sus respuestas. ¿Todos obtuvieron la misma respuesta? Si no es así, ¿cuál fue la razón?

d) ¿Existe más de un punto que pueda ser usado para completar el paralelogramo? Si es así, den los puntos y determinen las áreas correspondientes de cada paralelogramo.

Ejercicios de repaso acumulados

[2.2] **103.** Evalúa $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ para $a = 2$, $b = 7$, y $c = -15$.

[2.3] **104. Renta de un automóvil** Automóviles en renta Hertz cobra una cuota diaria de \$60 más 10¢ por milla. La Agencia Nacional de Renta de Automóviles cobra una cuota diaria de \$50 más 24¢ por milla por el mismo auto. ¿Qué distancia tendrías que conducir en un día para hacer el costo de renta de Hertz igual al costo de renta de la Agencia Nacional?

[2.5] **105.** Resuelve la desigualdad $-1 \leq \dfrac{4 - 3x}{2} < 5$. Escribe la solución en notación constructiva de conjuntos.

[2.6] **106.** Determina el conjunto solución para la desigualdad $|3x + 2| > 7$.

3.2 Funciones

1. Entender las relaciones.
2. Reconocer funciones.
3. Uso de la prueba de la línea recta vertical.
4. Entender notación de funciones.
5. Aplicación de las funciones en la vida diaria.

1 Entender las relaciones

Con frecuencia encontramos que una cantidad está relacionada con otra cantidad. Por ejemplo, la cantidad que gastas en naranjas está relacionada con el número de naranjas que compras.

Supón que las naranjas cuestan 30 centavos cada una. Entonces una naranja cuesta 30 centavos, dos naranjas cuestan 60 centavos, tres naranjas cuestan 90 centavos, etc. Los pares ordenados que representan esta situación son $(1, 30)$, $(2, 60)$, $(3, 90)$, etc. Una ecuación que representa esta situación es

$$C = 30n$$

El costo de las naranjas *depende* del número de naranjas compradas. Por lo tanto, el costo es la variable *dependiente*.

El número de naranjas es la variable independiente.

Ahora considera la ecuación $y = 2x + 3$. Algunos pares ordenados que satisfacen esta ecuación son $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, $(0, 3)$, $(1, 5)$, $(2, 7)$, etcétera.

$$y = 2x + 3$$

El valor de y *depende* del valor de x. Por lo tanto, y es la variable *dependiente*.

x es la variable independiente

Variable dependiente e independiente

Para una ecuación con las variables x y y, si el valor de y depende del valor de x, entonces y es la **variable dependiente** y x es la **variable independiente**.

Debido a que las cantidades relacionadas se pueden representar como pares ordenados, el concepto de *relación* se puede definir de la siguiente manera.

Relación, dominio, rango

Una **relación** es cualquier conjunto de pares ordenados de la forma (x, y). El conjunto de coordenadas x se llama el **dominio** de la relación. El conjunto de coordenadas y se llama el **rango** de la relación.

Como la ecuación $y = 2x + 3$ se puede representar como un conjunto de pares ordenados, es una relación.

2 Reconocer funciones

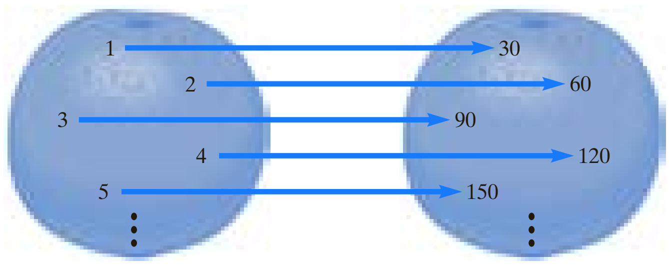
Ahora trabajaremos con funciones, uno de los conceptos más importantes en matemáticas.

Función

Una **función** es una relación en la que cada elemento del dominio corresponde exactamente a un elemento del rango.

Considera las naranjas que cuestan 30 centavos cada una que discutimos anteriormente. Podemos ilustrar el número de naranjas y el costo de las naranjas usando la **Figura 3.21**.

Número de naranjas, n | Correspondencia $c = 30n$ | Costo de las naranjas, C (centavos)



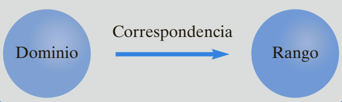
El dominio es el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

El rango es el conjunto $\{30, 60, 90, 120, 150, \ldots\}$

FIGURA 3.21

Comprendiendo el álgebra

En una relación (o función), el conjunto de valores para la variable independiente se llama *dominio*. El conjunto de valores para la variable dependiente se llama *rango*.



Observa que cada número en el conjunto de número de naranjas, n, corresponde a (o se asocia con) exactamente un número en el conjunto de costo de las naranjas, C. Por lo tanto, esta correspondencia es una función.

EJEMPLO 1 Determina si cada correspondencia es una función.

a)
$1 \rightarrow 1$
$2 \rightarrow 4$
$3 \rightarrow 9$

b)
catarina → insecto
grillo → insecto
águila → pájaro
halcón → pájaro

c)
JCPenney → Dallas
JCPenney → Milwaukee
Sears → Chicago

Solución

a) Para que una correspondencia sea función, cada elemento del dominio debe corresponder exactamente con un elemento del rango. Aquí el dominio es $\{1, 2, 3\}$ y el rango es $\{1, 4, 9\}$. Como cada elemento del dominio corresponde exactamente a un elemento del rango, esta correspondencia es una función.

b) Aquí el dominio es {catarina, grillo, águila, halcón} y el rango es {insecto, pájaro}. Aunque el dominio tiene cuatro elementos y el rango tiene dos elementos, cada elemento en el dominio corresponde exactamente a un elemento en el rango. Entonces, esta correspondencia es una función.

c) Aquí el dominio es {JCPenney, Sears} y el rango es {Dallas, Milwaukee, Chicago}. Observa que JCPenney corresponde a Dallas y a Milwaukee. Entonces, cada elemento del dominio *no* corresponde a exactamente un elemento del rango. Por lo tanto, esta correspondencia es una relación pero *no* una función.

Resuelve ahora el ejercicio 17

EJEMPLO 2 Indica el dominio y el rango, después determina si la relación es una función.

a) $\{(1, 4), (2, 3), (3, 5), (-1, 3), (0, 6)\}$

b) $\{(-1, 3), (4, 2), (3, 1), (2, 6), (3, 5)\}$

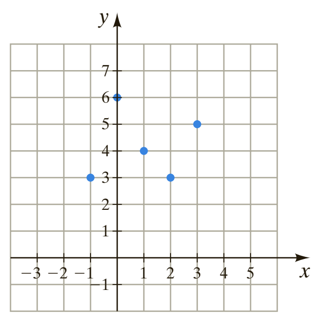
Solución

a) El dominio es $\{1, 2, 3, -1, 0\}$ y el rango es $\{4, 3, 5, 6\}$. Observa que cuando escribimos el rango solo incluimos el número 3 una vez, aunque aparece en ambos, $(2, 3)$ y $(-1, 3)$. Cada número del dominio corresponde exactamente a un número del rango. Por ejemplo, el 1 en el dominio corresponde únicamente al 4 en el rango, etc. Debido a que ningún valor de x corresponde a más de un valor de y, esta relación es una *función*.

b) El dominio es $\{-1, 4, 3, 2\}$ y el rango es $\{3, 2, 1, 6, 5\}$. Como los pares ordenados $(3, 1)$ y $(3, 5)$ tienen la *misma primera coordenada* y diferente segunda coordenada, cada valor en el dominio no corresponde exactamente a un valor en el rango. Por lo tanto, esta relación *no es una función*.

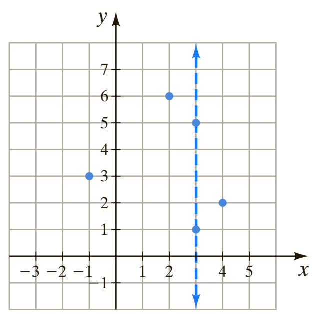
Resuelve ahora el ejercicio 23

Función



(a) Primer conjunto de pares ordenados

No es una función



(b) Segundo conjunto de pares ordenados

FIGURA 3.22

El ejemplo 2 nos lleva a una definición alternativa de función.

Función

Una **función** es un conjunto de pares ordenados en los cuales no se repite la *primera* coordenada.

Recuerda la ecuación $y = 2x + 3$ que vimos en la página 148. Algunos pares ordenados que satisfacen esta ecuación son $(-2, 1)$, $(-1, 1)$, $(0, 3)$, $(1, 5)$ y $(2, 7)$. Observa que cada valor de x proporciona un valor único de y. Por lo tanto, la ecuación $y = 2x + 3$ no es solo una relación sino que también es una función.

3 Uso de la prueba de la línea recta vertical

Gráfica de una función o una relación

La **gráfica de una función o una relación** es la gráfica de su conjunto de pares ordenados.

Los dos conjuntos de pares ordenados en el ejemplo 2 incisos **a)** y **b)** se grafican en las **Figuras 3.22a** y **3.22b**, respectivamente. Observa que en la función de la **Figura 3.22a** no es posible dibujar una línea recta vertical que intersecte dos puntos. En la **Figura 3.22b** *podemos* dibujar una línea recta vertical que pase por los puntos $(3, 1)$ y $(3, 5)$. Esto muestra que cada valor x no corresponde a exactamente un valor y, y la gráfica no representa una función.

Este método para determinar si una gráfica representa una función se llama **criterio de la línea recta vertical**.

Criterio de la línea recta vertical

Si se puede trazar una línea recta vertical de manera que intersecte una gráfica en más de un punto, entonces la gráfica no representa una función. Si no se puede trazar una línea recta vertical de manera que intersecte la gráfica en más de un punto, entonces la gráfica representa una función.

La prueba de la línea recta vertical muestra que la **Figura 3.23b** representa una función y las **Figuras 3.23a** y **3.23c** no representan funciones.

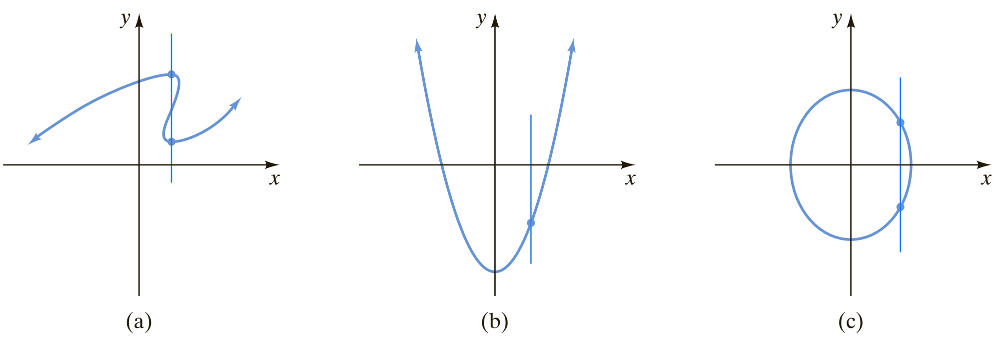


FIGURA 3.23

EJEMPLO 3

Usa la prueba de la línea recta vertical para determinar si las siguientes gráficas representan funciones. También determina el dominio y el rango de cada función.

a)

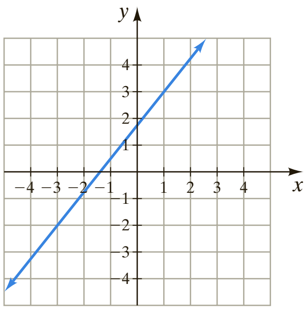


FIGURA 3.24

b)

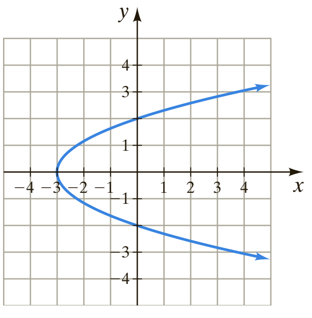


FIGURA 3.25

Solución

a) No se puede trazar una línea recta vertical que intersecte en más de un punto la gráfica de la **Figura 3.24**. Por lo tanto, es la gráfica de una función. Como la línea recta se extiende indefinidamente en ambas direcciones, cualquier valor de x estará incluido en el dominio. El dominio es el conjunto de los números reales.

$$\text{Dominio: } \mathbb{R} \quad \text{o} \quad (-\infty, \infty)$$

Como todos los valores de y están incluidos en la gráfica, el rango es también el conjunto de los números reales.

$$\text{Rango: } \mathbb{R} \quad \text{o} \quad (-\infty, \infty)$$

b) Como es posible trazar una línea recta vertical que intersecte en más de un punto la gráfica de la **Figura 3.25**, ésta *no* es la gráfica de una función. El dominio de esta relación es el conjunto de los valores mayores o iguales a -3.

$$\text{Dominio: } \{x | x \geq -3\} \quad \text{o} \quad [-3, \infty)$$

El rango es el conjunto de los valores y, que puede ser cualquier número real.

$$\text{Rango: } \mathbb{R} \quad \text{o} \quad (-\infty, \infty)$$

Resuelve ahora el ejercicio 33

EJEMPLO 4 Considera la función cuya gráfica se da en la **Figura 3.26**.

a) ¿Qué elemento del rango se asocia con el 4 en el dominio?

b) ¿Qué elementos del dominio se asocian con −2 en el rango?

c) ¿Cuál es el dominio de la función?

d) ¿Cuál es el rango de la función?

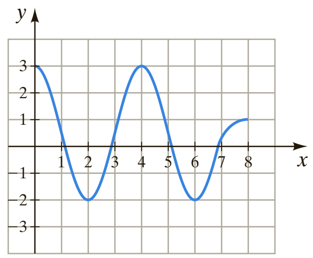


FIGURA 3.26

Solución

a) El rango es el conjunto de valores de y. El valor de y que se asocia con el valor de x, 4, es 3.

b) El dominio es el conjunto de valores de x. Los valores de x que se asocian con el valor de y, −2, son 2 y 6.

c) El dominio es el conjunto de valores de x, de 0 a 8. Entonces el dominio es

$$\{x|0 \leq x \leq 8\} \text{ o } [0, 8]$$

d) El rango es el conjunto de valores de y, de −2 a 3. Entonces el rango es

$$\{y|-2 \leq y \leq 3\} \text{ o } [-2, 3]$$

Resuelve ahora el ejercicio 39

EJEMPLO 5 La **Figura 3.27** ilustra la gráfica de la velocidad contra el tiempo de un hombre que salió a caminar y a correr. Escribe un relato acerca del paseo del hombre que corresponda a esta función.

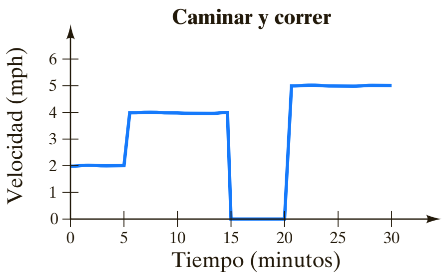


FIGURA 3.27

Solución

Entiende El eje horizontal es el tiempo y el eje vertical es la velocidad. Cuando la gráfica es horizontal, significa que la persona se mueve a velocidad constante, lo que se indica en el eje vertical. Las partes inclinadas de la gráfica que se incrementan con el tiempo indican un aumento en la velocidad, mientras que las partes inclinadas de la gráfica que disminuyen con el tiempo indican un descenso de la velocidad.

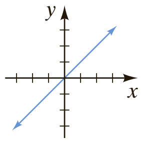
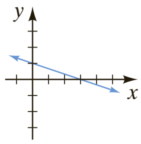
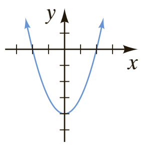
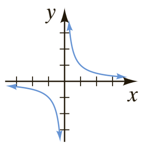
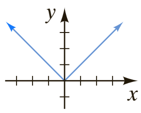
Responde Ésta es una posible interpretación de la gráfica. El hombre camina por aproximadamente 5 minutos a una velocidad de alrededor de 2 millas por hora. Después el hombre acelera a 4 millas por hora y camina rápido o corre a esta velocidad por alrededor de 10 minutos. Luego el hombre baja la velocidad y se detiene, y descansa por alrededor de 5 minutos. Al final, el hombre acelera a aproximadamente 5 millas por hora y corre a esta velocidad por alrededor de 10 minutos.

Resuelve ahora el ejercicio 67

4 Entender notación de funciones

En la sección 3.1 graficamos las ecuaciones que se muestran en la **Tabla 3.1** de la página 153. Observa que cada una de estas gráficas pasa la prueba de la línea recta vertical. Por lo tanto, las *gráficas* representan funciones y decimos que las *ecuaciones* definen funciones. Usaremos notación específica para nombrar funciones que se definen por ecuaciones.

TABLA 3.1 Ejemplo

Ejemplo de la sección 3.1	Ecuación graficada	Gráfica	¿Representa la gráfica una función?	Dominio	Rango
3	$y = x$		Sí	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
4	$y = -\frac{1}{3}x + 1$		Sí	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
5	$y = x^2 - 4$		Sí	$(-\infty, \infty)$	$[-4, \infty)$
6	$y = \frac{1}{x}$		Sí	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
7	$y = \lvert x \rvert$		Sí	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$

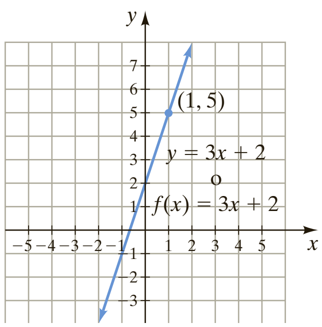


FIGURA 3.28

Notación de funciones

Si una ecuación que incluye x como la variable independiente y y como la variable dependiente define una función, decimos que ***y* es función de *x*** y lo escribimos como $\boldsymbol{y = f(x)}$ (que se lee "f de x").

Considera la ecuación $y = 3x + 2$ como se ve en la **Figura 3.28**. Como esta gráfica pasa la prueba de la línea recta vertical, esta ecuación define una función y podemos escribir la ecuación usando notación de funciones como $f(x) = 3x + 2$.

$$f(x) = \underbrace{3x + 2}$$

f es el nombre de la función

x es la variable independiente

Sustituye valores de x para obtener los valores correspondientes de y o $f(x)$

Por ejemplo, si $f(x) = 3x + 2$, entonces $f(1)$, que se lee como "f de uno" se obtiene de la siguiente manera:

$$f(x) = 3x + 2$$
$$f(1) = 3(1) + 2 = \mathbf{5}$$

Por lo tanto, cuando x es 1, y es **5**. El par ordenado (1, **5**) aparece en la gráfica de $y = 3x + 2$ en la **Figura 3.28**.

Comprendiendo el álgebra

La notación $f(x)$ significa que la ecuación define una función en la que x es la variable independiente. Observa que $f(x)$ no quiere decir f multiplicada por x.

Comprendiendo el álgebra

Aunque con frecuencia usamos f como el nombre de una función, también podemos usar otras letras. Por ejemplo, $g(x)$ y $h(x)$ también se usarán para representar funciones de x.

Consejo útil

Las ecuaciones lineales que no están resueltas para y se pueden escribir usando notación de funciones si resolvemos la ecuación para y y después sustituimos y por $f(x)$. Por ejemplo, la ecuación $-9x + 3y = 6$ se vuelve $y = 3x + 2$ y la podemos escribir como $f(x) = 3x + 2$.

EJEMPLO 6 Si $f(x) = -4x^2 + 3x - 2$, encuentra

a) $f(2)$ **b)** $f(-1)$ **c)** $f(a)$

Solución

a) $f(x) = -4x^2 + 3x - 2$

$f(2) = -4(2)^2 + 3(2) - 2 = -4(4) + 6 - 2 = -16 + 6 - 2 = -12$

b) $f(-1) = -4(-1)^2 + 3(-1) - 2 = -4(1) - 3 - 2 = -4 - 3 - 2 = -9$

c) Para evaluar la función en a, sustituimos cada x en la función por a.

$$f(x) = -4x^2 + 3x - 2$$
$$f(a) = -4a^2 + 3a - 2$$

Resuelve ahora el ejercicio 45

EJEMPLO 7 Determina el valor de cada función indicada

a) $g(-2)$ para $g(t) = \dfrac{1}{t + 8}$

b) $h(5)$ para $h(s) = 2|s - 6|$

c) $j(-3)$ para $j(r) = \sqrt{22 - r}$

Solución En cada parte sustituye el valor indicado en la función y evalúa.

a) $g(-2) = \dfrac{1}{-2 + 8} = \dfrac{1}{6}$

b) $h(5) = 2|5 - 6| = 2|-1| = 2(1) = 2$

c) $j(-3) = \sqrt{22 - (-3)} = \sqrt{22 + 3} = \sqrt{25} = 5$

Resuelve ahora el ejercicio 49

5 Aplicación de las funciones en la vida diaria

Ahora examinaremos aplicaciones adicionales de las funciones.

EJEMPLO 8 **Aviones de negocios** La gráfica en la **Figura 3.29** muestra el número de aviones de negocios fabricados en los años de 1994 a 2008, con proyección hasta el 2013.

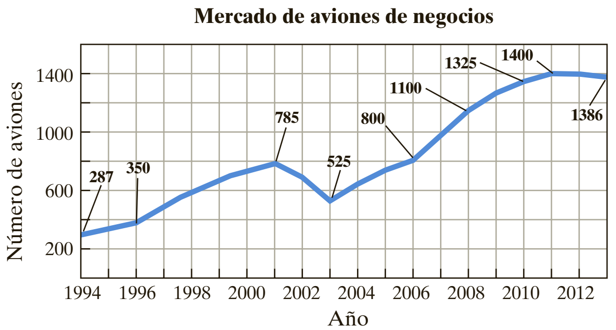


FIGURA 3.29 *Fuente:* Proyección internacional

a) Explica por qué la gráfica de la **Figura 3.29** representa una función.

b) Determina el número de aviones de negocios que se proyectó fabricar en 2010.

c) Determina el porcentaje de incremento que se proyectó en el número de aviones de negocios que se fabricaron de 2003 a 2011.

d) Determina el porcentaje de disminución que se proyectó en el número de aviones de negocios que se fabricaron de 2001 a 2003.


© Charlie Borland/Glowimages

Solución

a) La gráfica representa una función, ya que cada año corresponde a un número específico de aviones de negocios fabricados. Observa que la gráfica pasa la prueba de la línea recta vertical.

b) En 2010, la gráfica muestra que se debieron fabricar 1325 aviones de negocios. Si J representa la función, entonces $J(2010) = 1325$.

c) Seguiremos el procedimiento de solución de problemas para resolver este problema.

Entiende y traduce Necesitamos determinar el porcentaje de incremento en el número de aviones de negocios que fueron fabricados de 2003 a 2011. Para hacer esto, usa la fórmula

$$\begin{array}{c}\text{porcentaje de cambio}\\ \text{(incremento o disminución)}\end{array} = \frac{\begin{pmatrix}\text{valor en el}\\ \text{último periodo}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{valor en el}\\ \text{periodo anterior}\end{pmatrix}}{\text{valor en el periodo anterior}}$$

El último periodo es 2011 y el periodo anterior es 2003. Sustituimos los valores y obtenemos

$$\text{Porcentaje de cambio} = \frac{1400 - 525}{525}$$

Realiza los cálculos

$$= \frac{875}{525} \approx 1.667 = 166.7\%$$

Verifica y responde Nuestros cálculos parecen ser correctos. Se proyectó un incremento de 166.7% en el número de aviones de negocios que se fabricaron de 2003 a 2011.

d) Para encontrar el porcentaje de decremento de 2001 a 2003, seguimos el mismo procedimiento que en el inciso **c)**. El último periodo es 2003 y el periodo anterior es 2001.

$$\begin{array}{c}\text{porcentaje de cambio}\\ \text{(incremento o disminución)}\end{array} = \frac{\begin{pmatrix}\text{valor en el}\\ \text{último periodo}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{valor en el}\\ \text{periodo anterior}\end{pmatrix}}{\text{valor en el periodo anterior}}$$

$$= \frac{525 - 785}{785} = \frac{-260}{785} \approx -0.331 = -33.1\%$$

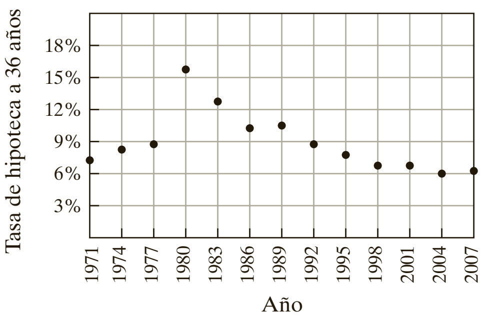
El signo negativo que antecede a 33.1% indica una disminución en porcentaje. Por lo tanto, hubo una disminución de aproximadamente 33.1% en la fabricación de aviones de negocios de 2001 a 2003.

Resuelve ahora el ejercicio 73

EJEMPLO 9 **Tasas de hipoteca a 36 años** La gráfica en la **Figura 3.30** muestra la tasa de una hipoteca a 36 años de 1971 a 2007.

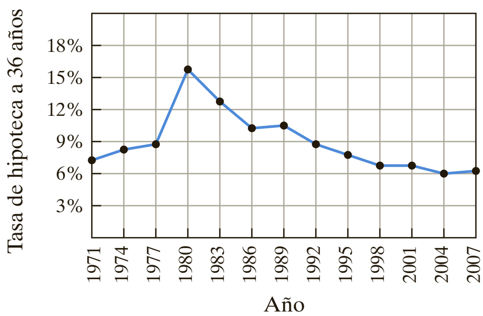
a) Usa la gráfica de la **Figura 3.30** para explicar por qué este conjunto de puntos representa una función.

b) Usa la gráfica de la **Figura 3.31** para estimar la tasa de una hipoteca a 36 años en 2006.



Fuente: www.data360.org

FIGURA 3.30



Fuente: www.data360.org

FIGURA 3.31

Solución

a) Como cada año corresponde exactamente a una tasa de hipoteca a 36 años, el conjunto de puntos representa una función. Observa que esta gráfica pasa la prueba de la línea recta vertical.

b) Si conectamos los puntos con los segmentos de recta como en la **Figura 3.31**, podemos estimar a partir de la gráfica que la tasa de hipoteca a 36 años en 2006 fue de aproximadamente 6%. Si llamamos f a esta función, entonces $f(2006) \approx 6\%$.

Resuelve ahora el ejercicio 75

Con frecuencia las fórmulas se escriben usando notación de funciones como se muestra a continuación.

EJEMPLO 10 La temperatura Celsius, C, es una función de la temperatura Fahrenheit, F.

$$C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Determina la temperatura Celsius que corresponde a 50 °F.

Solución Necesitamos encontrar $C(50)$. Lo hacemos por sustitución.

$$C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$$

$$C(50) = \frac{5}{9}(50 - 32)$$

$$= \frac{5}{9}(18) = 10$$

Entonces, 50 °F = 10 °C.

Resuelve ahora el ejercicio 55

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.2

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

relación	función	dominio	gráfica	rango	coordenada x	coordenadas y
$f(x)$	línea vertical	prueba de la línea vertical	dependiente	independiente	pares ordenados	

1. Al conjunto de coordenadas x de una relación se le conoce como el ______ de la relación.
2. Al conjunto de ______ de una relación se le conoce como el rango de la relación.
3. Una relación es cualquier conjunto de ______.
4. Una función es una ______ en la que cada elemento del dominio corresponde exactamente a un elemento del rango.
5. Si una ______ intersecta una gráfica en más de un punto, entonces esta gráfica no es la gráfica de una función.
6. En una función, cada ______ corresponde exactamente a una coordenada y.
7. En una función cada elemento en el dominio debe corresponder exactamente a un elemento en el ______.
8. La notación ______ se pronuncia "f de x".
9. La notación $y = f(x)$, significa que y es una ______ de x.
10. En la notación $y = f(x)$, y es la variable ______.
11. En la notación $y = f(x)$, x es la variable ______.
12. La ______ de una función o relación es la gráfica de su conjunto de pares ordenados.

Practica tus habilidades

En los ejercicios 13-20, ***a)*** *determina si la relación ilustrada es una función.* ***b)*** *Indica el dominio y el rango de cada función o relación.*

13. Edad mínima para conducir

Idaho → 15
Texas → 16
Georgia → 18

14. Edad mínima para conducir

New York → 16
Florida → 16
Michigan → 16

15. Dos veces un número

3 → 6
5 → 10
11 → 22

16. Apodos

Robert → Bobby
Robert → Rob
Margaret → Peggy
Margaret → Maggie

17. Número de hermanos

Cameron → 3
Tyrone → 6
Vishnu → 6

18. Número al cuadrado

4 → 16
5 → 25
7 → 49

19. Costo de una estampilla

1990 → 20
2001 → 34
2002 → 34
2002 → 37

20. Valor absoluto

$|-8| \to 8$
$|8| \to 8$
$|0| \to 0$

En los ejercicios 21-28, **a)** *determina cuáles de las siguientes relaciones son también funciones.* **b)** *Indica el dominio y el rango de cada relación o función.*

21. $\{(1,4),(2,2),(3,5),(4,3),(5,1)\}$

22. $\{(1,0),(4,2),(9,3),(1,-1),(4,-2),(9,-3)\}$

23. $\{(3,-1),(5,0),(1,2),(4,4),(2,2),(7,9)\}$

24. $\{(-1,1),(0,-3),(3,4),(4,5),(-2,-2)\}$

25. $\{(1,4),(2,5),(3,6),(2,2),(1,1)\}$

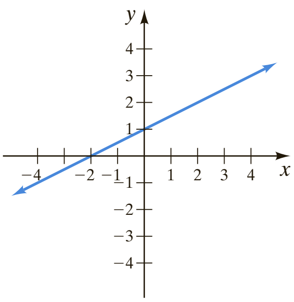
26. $\{(6,3),(-3,4),(0,3),(5,2),(3,5),(2,8)\}$

27. $\{(0,3),(1,3),(2,2),(1,-1),(2,-7)\}$

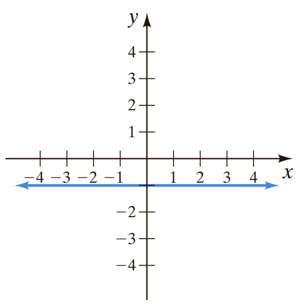
28. $\{(3,5),(2,5),(1,5),(0,5),(-1,5)\}$

En los ejercicios 29-40, **a)** *determina si la gráfica ilustrada representa una función.* **b)** *Indica el dominio y el rango de cada función o relación.* **c)** *Aproxima el valor o valores de x donde y = 2.*

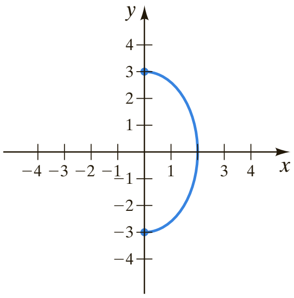
29.



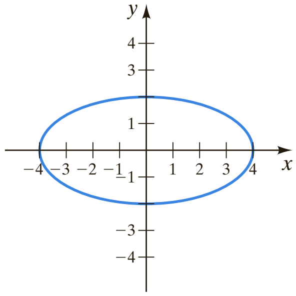
30.



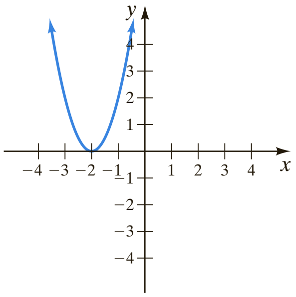
31.



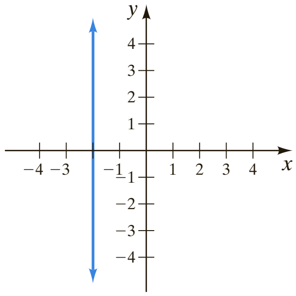
32.



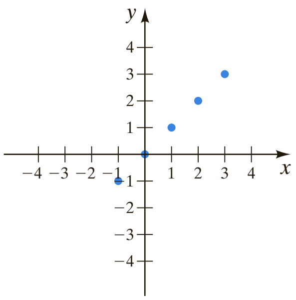
33.



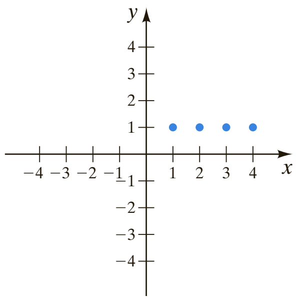
34.



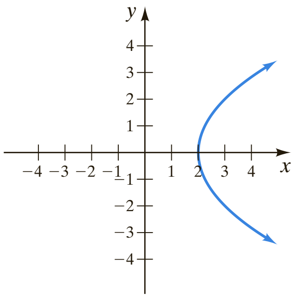
35.



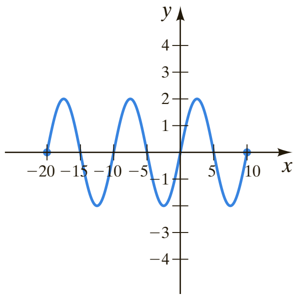
36.



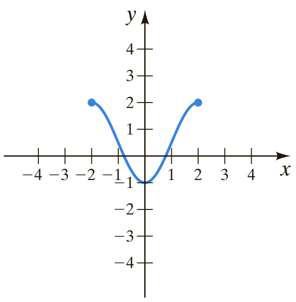
37.



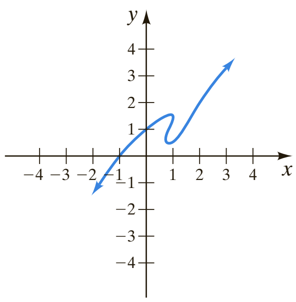
38.



39.



40.



Evalúa cada función con los valores indicados.

41. $f(x) = 4x - 3$; determina

a) $f(2)$. **b)** $f(-2)$.

42. $f(a) = \frac{1}{3}a + 4$; determina

a) $f(0)$. **b)** $f(-12)$.

43. $h(x) = x^2 - x - 6$; determina

a) $h(0)$. **b)** $h(-1)$.

44. $g(x) = -2x^2 + 7x - 11$; determina
a) $g(2)$. **b)** $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

45. $r(t) = -t^3 - 2t^2 + t + 4$; determina
a) $r(1)$. **b)** $r(-2)$.

46. $g(t) = 4 - 3t + 16t^2 - 2t^3$; determina
a) $g(0)$. **b)** $g(3)$.

47. $h(z) = |5 - 2z|$; determina
a) $h(6)$. **b)** $h\left(\frac{5}{2}\right)$.

48. $q(x) = -2|x + 8| + 13$; determina
a) $q(0)$. **b)** $q(-4)$.

49. $s(t) = \sqrt{t + 3}$; determina
a) $s(-3)$. **b)** $s(6)$.

50. $f(t) = \sqrt{5 - 2t}$; determina
a) $f(-2)$. **b)** $f(2)$.

51. $g(x) = \dfrac{x^3 - 2}{x - 2}$; determina
a) $g(0)$. **b)** $g(2)$.

52. $h(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x + 6}$; determina
a) $h(-3)$. **b)** $h\left(\frac{2}{5}\right)$.

Resolución de problemas

53. Área de un rectángulo La fórmula para el área de un rectángulo es $A = lw$, donde l es el largo y w el ancho. Si el largo de un rectángulo es de 4 pulgadas, entonces el área es una función de su ancho, $A(w) = 4w$. Determina el área cuando el ancho es de
a) 4 pies.
b) 6.5 pies.

54. Interés simple La fórmula para el interés simple ganado en un periodo de un año es $i = pr$, donde p es el capital invertido y r es la tasa de interés simple. Si se invierten \$1000, el interés simple ganado en un año es una función de la tasa de interés simple, $i(r) = 1000r$. Determina el interés simple ganado en un año si la tasa de interés es de
a) 2.5%.
b) 4.25%.

55. Área de un círculo La fórmula para el área de un círculo es $A = \pi r^2$. El área es una función del radio.
a) Escribe esta función usando notación de funciones.
b) Determina el área cuando el radio es de 12 yardas.

56. Perímetro de un cuadrado La fórmula para el perímetro de un cuadrado es $P = 4s$ donde s representa el largo de cualquiera de sus lados.
a) Escribe esta función usando notación de funciones.
b) Determina el perímetro de un cuadrado con lados de longitud de 7 metros.

57. Temperatura La fórmula para convertir la temperatura de grados Fahrenheit a grados Centígrados es $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. La temperatura en grados Centígrados es una función de la temperatura en grados Fahrenheit.
a) Escribe esta función usando notación de funciones.
b) Determina la temperatura en grados Centígrados que corresponde a -31 °F.

58. Volumen de un cilindro La fórmula para el volumen de un cilindro circular recto es $V = \pi r^2 h$. Si la altura, h, es de 3 pies, entonces el volumen es una función del radio r.
a) Escribe esta fórmula en notación de funciones, donde la altura es de 3 pies.
b) Determina el volumen si el radio es de 2 pies.

59. Temperatura en un Sauna La temperatura, T, en grados Centígrados, en un sauna n minutos después de que se ha encendido está dada por la función $T(n) = -0.03n^2 + 1.5n + 14$. Determina la temperatura del sauna después de
a) 3 minutos. **b)** 12 minutos.

60. Distancia de frenado La distancia de frenado, d, en metros para un auto que viaja v kilómetros por hora está dada por la función $d(v) = 0.18v + 0.01v^2$. Determina la distancia de frenado para las siguientes velocidades:
a) 60 km/h **b)** 25 km/h


© Allen R. Angel

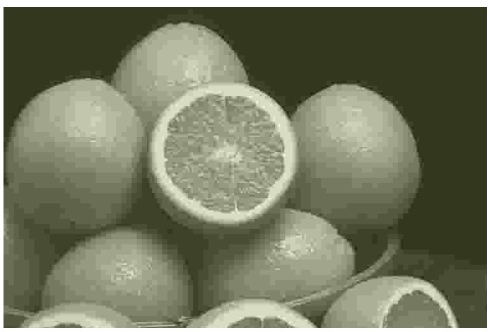
61. Aire acondicionado Cuando un aire acondicionado se enciende al máximo en un cuarto que se encuentra a 80 °F, la temperatura, T, en el cuarto después de A minutos puede aproximarse por la función $T(A) = -0.02A^2 - 0.34A + 80, 0 \le A \le 15$.
a) Estima la temperatura del cuarto 4 minutos después de encender el aire acondicionado.
b) Estima la temperatura del cuarto 12 minutos después de encender el aire acondicionado.

62. Accidentes El número de accidentes, n, en un mes que involucran conductores de x años de edad puede aproximarse por la función $n(x) = 2x^2 - 150x + 4000$. Determina el número aproximado de accidentes en un mes que involucran conductores de
a) 18 años de edad. **b)** 25 años de edad.

63. Naranjas El número total de naranjas, T, en una pirámide cuya base cuadrada es de n por n naranjas está dado por la función

$$T(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

Determina el número de naranjas si la base es de
a) 6 por 6 naranjas. **b)** 8 por 8 naranjas.


© Glowimages

64. Concierto de rock Si el costo de un boleto para un concierto de rock se incrementa por x dólares, el aumento estimado en la ganancia, R, en miles de dólares está dado por la función $R(x) = 24 + 5x - x^2, x < 8$. Determina el aumento en la ganancia si el costo del boleto se incrementa

a) \$1.

b) \$4.

65. Oferta y demanda El precio de una tonelada de soya puede estimarse por la función

$$f(Q) = -0.00004Q + 4.25, 10{,}000 \leq Q \leq 60{,}000$$

donde $f(Q)$ es el precio de una tonelada de soya y Q es el número producido anualmente de toneladas de soya.

a) Construye una gráfica que muestre la relación entre el número de toneladas de soya producidas y el precio de una tonelada.

b) Estima el costo de una tonelada de soya si se producen 40, 000 tonelada durante un año dado.

66. Gastos del hogar El promedio anual de gastos del hogar es una función del promedio anual de ingresos del hogar. El promedio de gastos puede estimarse por la función

$$f(i) = 0.6i + 5000, \$3500 \leq i \leq \$50{,}000$$

donde $f(i)$ es el promedio de gastos del hogar e i es el promedio de ingresos del hogar.

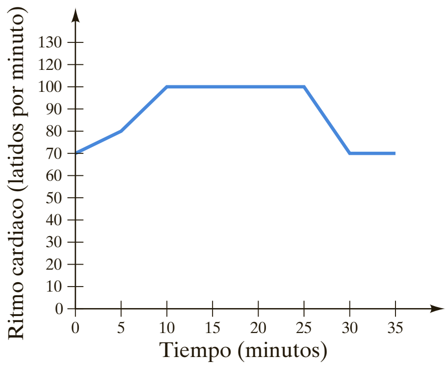
a) Construye una gráfica que muestre la relación entre el promedio de ingresos del hogar y promedio de gastos del hogar.

b) Estima el promedio de gastos del hogar para una familia cuyo promedio de ingresos del hogar es de \$30,000.

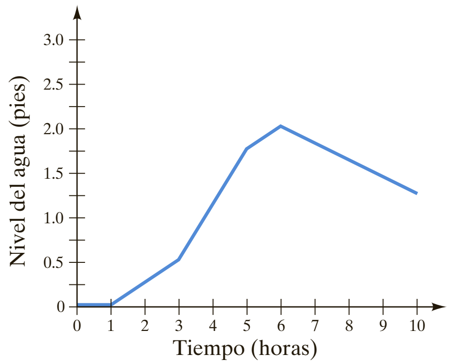
Ejercicios de conceptos y escritura

Revisa el ejemplo 5 antes de trabajar los ejercicios 67-72.

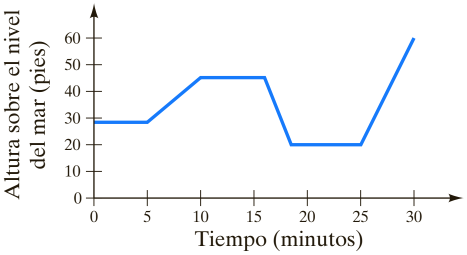
67. Ritmo cardiaco La siguiente gráfica muestra el ritmo cardiaco de una persona mientras realiza ejercicio. Escribe una historia que esta gráfica pueda representar.



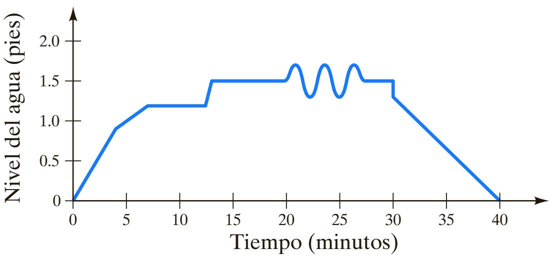
68. Nivel del agua La siguiente gráfica muestra el nivel del agua en un cierto punto durante una inundación. Escribe una historia que esta gráfica pueda representar.



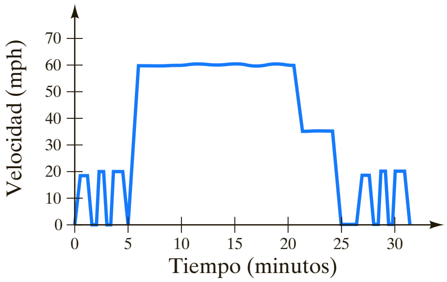
69. Altura sobre el nivel del mar La siguiente gráfica muestra la altura sobre el nivel del mar contra el tiempo en que un hombre deja su casa y va a caminar. Escribe una historia que esta gráfica pueda representar.



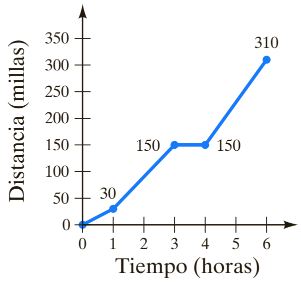
70. Nivel del agua en una tina de baño La siguiente gráfica muestra el nivel del agua en una tina de baño contra el tiempo. Escribe una historia que esta gráfica pueda representar.



71. Velocidad de un automóvil La siguiente gráfica muestra la velocidad de un automóvil contra el tiempo. Escribe una historia que esta gráfica pueda representar.

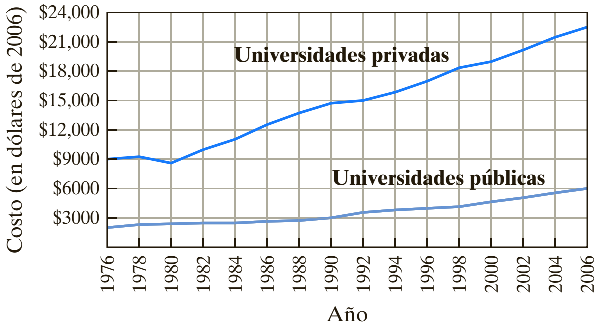


72. Distancia recorrida La siguiente gráfica muestra la distancia recorrida por una persona en un automóvil contra el tiempo. Escribe una historia que esta gráfica pueda representar.



73. Costos de la universidad La siguiente gráfica compara el costo promedio (en dólares de 2006) de asistir a la universidad por un año en universidades privadas y en universidades públicas.

Costos de la universidad



Fuente: www.data360.org

a) ¿Las líneas mostradas representan una función? Explica.

b) En estas gráficas, ¿qué variable es la variable independiente?

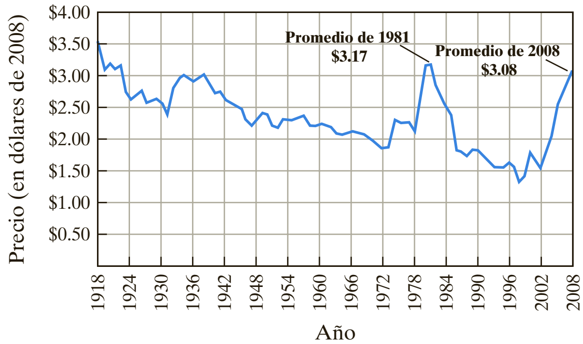
c) Si f representa el costo promedio de asistir a una universidad privada durante un año, determina $f(2006)$.

d) Si g representa el costo promedio de asistir a una universidad pública durante un año, determina $g(2006)$.

e) Determina el porcentaje de aumento desde 1990 hasta 2006 en el costo promedio de un año de universidad pública.

74. Precio de la gasolina La siguiente gráfica muestra el ajuste en la inflación del precio promedio de un galón (en dólares de 2008) de gasolina para los años de 1918 a 2008.

Ajuste en la inflación de los precios de la gasolina



Fuente: US Energy Information Administration

a) ¿Esta gráfica representa una función?

b) En esta gráfica, ¿cuál es la variable dependiente?

c) Si p representa esta función, determina $p(2006)$.

d) Determina el porcentaje de disminución desde 1981 hasta 2008 (redondea tu respuesta a decimales en el porcentaje).

75. Comerciales durante el Súper Tazón El precio promedio del costo de un comercial de 30 segundos durante el Súper Tazón ha ido en aumento año con año. La siguiente tabla muestra el costo aproximado de un comercial de 30 segundos en distintos años de 1981 a 2009.

Año	Costo ($1000s)
1981	280
1985	500
1989	740
1993	970
1997	1200
2001	2000
2005	2400
2009	3000

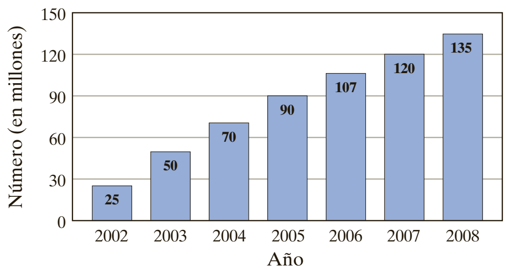
a) Realiza una gráfica de línea que represente esta información.

b) ¿La gráfica parece ser aproximadamente lineal? Explica.

c) A partir de la gráfica, estima el costo de un comercial de 30 segundos en 2004.

76. Embarques de pantallas LCD La siguiente gráfica muestra los embarques de pantallas LCD, en millones de unidades, para los años desde 2002 a 2008.

Embarques de pantallas LCD



Fuente: DisplaySearch, Market Intelligence Center, *Wall Street Journal*

a) Haz una gráfica de línea que represente esta información.

b) ¿La gráfica que realizaste en el inciso **a)** parece ser aproximadamente lineal? Explica.

c) Suponiendo que la tendencia continúa, de la gráfica de línea que realizaste, estima el número de pantallas LCD que se embarcaron en 2009.

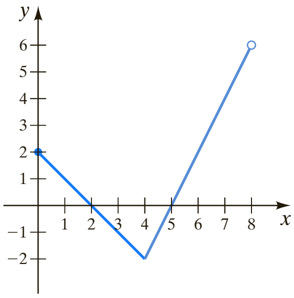
d) ¿La gráfica de barras representa una función?

e) ¿La gráfica de línea que realizaste en el inciso **a)** representa una función?

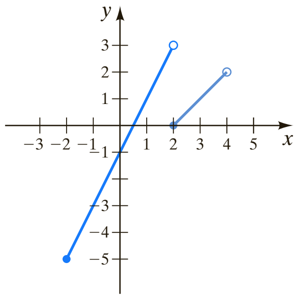
Actividad de grupo

En muchas situaciones de la vida real, más de una función puede necesitarse para representar un problema. Esto ocurre a menudo cuando dos o más tipos diferentes están involucrados. Por ejemplo, en los impuestos federales, existen diferentes tipos de gravamen. Cuando dos o más funciones se usan para representar un problema, la función se conoce como ***función por partes****. A continuación se dan dos ejemplos de funciones por partes y sus gráficas.*

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & 0 \le x < 4 \\ 2x - 10, & 4 \le x < 8 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & -2 \le x < 2 \\ x - 2, & 2 \le x < 4 \end{cases}$$



En grupo, grafiquen las siguientes funciones por partes.

77. $f(x) = \begin{cases} x + 3, & -1 \le x < 2 \\ 7 - x, & 2 \le x < 4 \end{cases}$

78. $g(x) = \begin{cases} 2x + 3, & -3 < x < 0 \\ -3x + 1, & 0 \le x < 2 \end{cases}$

Ejercicios de repaso acumulados

[2.1] **79.** Resuelve $3x - 2 = \frac{1}{3}(3x - 3)$.

[2.2] **80.** Despeja a p_2 de la siguiente fórmula

$$E = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3$$

[2.5] **81.** Resuelve la desigualdad $\frac{3}{5}(x - 3) > \frac{1}{4}(3 - x)$ e indica la solución

a) en una recta numérica.

b) en notación de intervalos.

c) en notación constructiva de conjuntos.

[2.6] **82.** Resuelve $\left|\frac{x - 4}{3}\right| + 9 = 11$.

3.3 Funciones lineales: gráficas y aplicaciones

1 Graficar funciones lineales.

2 Graficar funciones lineales por el uso de intersecciones.

3 Graficar ecuaciones de la forma $x = a$ y $y = b$.

4 Estudiar aplicaciones de las funciones.

1 Graficar funciones lineales

En la sección 3.1 graficamos ecuaciones lineales. Para graficar la ecuación lineal $y = 2x + 4$, podemos hacer una tabla de valores, trazar los puntos y dibujar la gráfica, como se muestra en la **Figura 3.32**. Como esta gráfica pasa la prueba de la línea recta vertical, la ecuación define una función y la podemos escribir como $f(x) = 2x + 4$.

x	y
-2	0
0	4
1	6

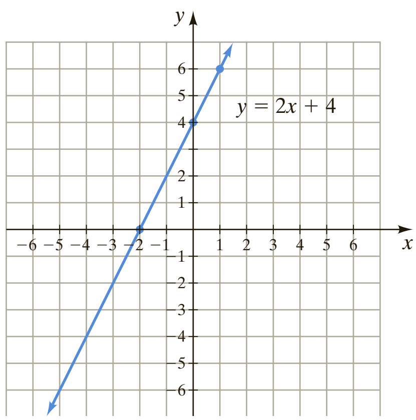


FIGURA 3.32

Éste es un ejemplo de una función lineal.

Función lineal

Una función lineal es una función de la forma $f(x) = ax + b$.

- La gráfica de una ecuación lineal es una línea recta.
- El dominio de una función lineal son todos los números reales, $\mathbb{R}$.
- Si $a \neq 0$, entonces el rango de una función lineal son todos los números reales, $\mathbb{R}$.

Consejo útil

Para graficar funciones lineales tomamos $f(x)$ como y y seguimos el mismo procedimiento usado para graficar ecuaciones lineales que discutimos en la sección 3.1.

EJEMPLO 1 Grafica $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

Solución Construimos una tabla de valores en la que sustituimos los valores de x y encontramos los valores correspondientes de $f(x)$ o y. Después trazamos los puntos y dibujamos la gráfica, como se ilustra en la **Figura 3.33**.

x	$f(x)$
-2	-2
0	-1
2	0

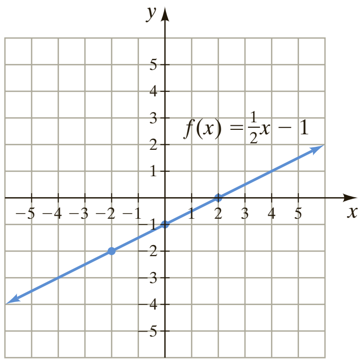


FIGURA 3.33

Resuelve ahora el ejercicio 31

Observa que el eje vertical en la **Figura 3.33** también se puede marcar como $f(x)$ en lugar de y. En este libro seguiremos marcándolo como y.

2 Graficar funciones lineales por el uso de intersecciones

Las ecuaciones lineales no siempre se dan en la forma $y = ax + b$. La ecuación $2x + 3y = 6$ es un ejemplo de una ecuación lineal dada en la *forma estándar*.

Forma estándar de una ecuación lineal

La **forma estándar de una ecuación lineal** es

$$ax + by = c$$

donde a, b y c son números reales, y a y b no pueden ser ambas 0.

Ejemplos de ecuaciones lineales en la forma estándar

$$2x + 3y = 4 \qquad -x + 5y = -2$$

Examina la gráfica de la **Figura 3.32** en la página 162. La gráfica cruza el eje x en el punto $(-2, 0)$ y cruza el eje y en $(0, 4)$. Estos puntos importantes se llaman **intersecciones** de la gráfica. Cuando una ecuación lineal se da en forma estándar, puede ser más sencillo graficar la ecuación si encuentras su intersección en x y su intersección en y.

Intersecciones con el eje x y con el eje y

La **intersección con el eje x** es el punto donde la gráfica cruza al eje x.

- La intersección con x siempre será de la forma $(x, 0)$.

La **intersección con el eje y** es el punto donde la gráfica cruza al eje y.

- La intersección con y siempre será de la forma $(0, y)$.

El siguiente procedimiento nos ayudará a graficar ecuaciones lineales usando sus intersecciones.

Para graficar una ecuación lineal usando sus intersecciones con x y con y

1. ***Encuentra la intersección con el eje y.*** Establece x igual a 0 para encontrar el valor correspondiente de y.
2. ***Encuentra la intersección con el eje x.*** Establece y igual a 0 para encontrar el valor correspondiente de x.
3. ***Traza las intersecciones.***
4. ***Traza la línea recta.*** Usando una escuadra, traza una línea recta que pase por los puntos. Traza una flecha en cada extremo de la línea.

EJEMPLO 2 Grafica $5x = 10y - 20$ usando sus intersecciones con x y con y.

Solución Para encontrar la intersección con el eje y, establecemos $x = 0$ y resolvemos para y.

$$\begin{aligned} 5x &= 10y - 20 \\ 5(0) &= 10y - 20 \\ 0 &= 10y - 20 \\ 20 &= 10y \\ \mathbf{2} &= y \end{aligned}$$

La intersección con y es $(0, \mathbf{2})$.

Para encontrar la intersección con x, establecemos $y = \mathbf{0}$ y resolvemos para x.

$$\begin{aligned} 5x &= 10y - 20 \\ 5x &= 10(\mathbf{0}) - 20 \\ 5x &= -20 \\ x &= \mathbf{-4} \end{aligned}$$

La intersección con x es $(-4, \mathbf{0})$. Ahora traza las intersecciones y la gráfica (**Figura 3.34**).

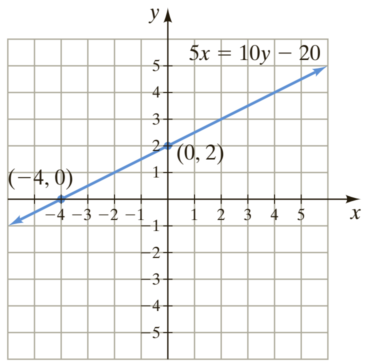


FIGURA 3.34

Resuelve ahora el ejercicio 23

Consejo útil

Cuando grafiques una ecuación lineal por medio de sus intersecciones con el eje x y con el eje y, es útil trazar un punto de control. Por ejemplo, en el ejemplo 2, si sustituimos $x = 2$ en la ecuación y resolvemos para y, obtenemos $y = 3$. Entonces, un tercer punto en la gráfica debe ser (2, 3). Si observas la **Figura 3.34**, puedes ver que este punto está en la gráfica y estamos seguros que nuestra gráfica es correcta.

EJEMPLO 3 Grafica $f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$ usando sus intersecciones con x y con y.

Solución Tomamos a $f(x)$ como igual a y. Para encontrar la intersección con y, haz $x = 0$ y resuelve para $f(x)$.

$$f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}(0) - 1 = -1$$

La intersección en y es $(0, -1)$.

Para encontrar la intersección en x, hacemos $f(x) = 0$ y resolvemos para x.

$$f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$$

$$0 = -\frac{1}{3}x - 1$$

$$3(0) = 3\left(-\frac{1}{3}x - 1\right) \quad \text{Multiplica ambos lados por 3.}$$

$$0 = -x - 3 \quad \text{Propiedad distributiva}$$

$$x = -3 \quad \text{Suma } x \text{ en ambos lados.}$$

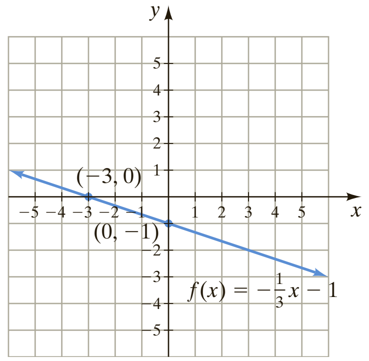


FIGURA 3.35

La intersección con x es $(-3, 0)$. La gráfica se muestra en la **Figura 3.35**.

Resuelve ahora el ejercicio 15

EJEMPLO 4 Grafica $-6x + 4y = 0$.

Solución Si sustituimos $x = 0$ encontramos que $y = 0$. Entonces la gráfica pasa por el origen. Seleccionaremos $x = -2$ y $x = 2$ y sustituimos estos valores en la ecuación para encontrar dos puntos adicionales en la gráfica.

Sea $x = -2$.	Sea $x = 2$.
$-6x + 4y = 0$	$-6x + 4y = 0$
$-6(-2) + 4y = 0$	$-6(2) + 4y = 0$
$12 + 4y = 0$	$-12 + 4y = 0$
$4y = -12$	$4y = 12$
$y = -3$	$y = 3$
Pares ordenados: $(-2, -3)$	$(2, 3)$

Los dos puntos adicionales en la gráfica son $(-2, -3)$ y $(2, 3)$. La gráfica de $-6x + 4y = 0$ se muestra en la **Figura 3.36**.

Comprendiendo el álgebra

La gráfica de toda ecuación lineal en la forma estándar con una constante de 0 (ecuaciones de la forma $ax + by = 0$) pasará por el origen. Ambas intersecciones, con el eje x y con el eje y, serán $(0, 0)$.

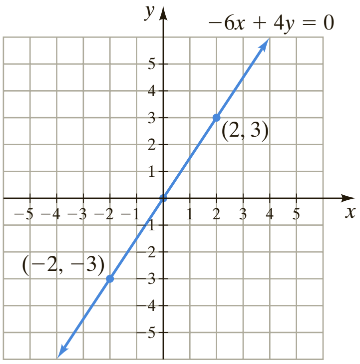


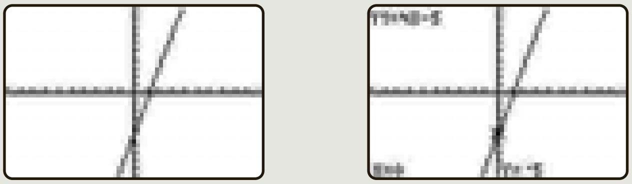
FIGURA 3.36

Resuelve ahora el ejercicio 35

Cómo utilizar tu calculadora graficadora

Encontraremos las intersecciones de la gráfica de $y = 4x - 5$. Primero grafica la función presionando las teclas que se muestran a continuación. La gráfica se muestra en la **Figura 3.37a**.

$$\boxed{\text{Y=}}\ \boxed{4}\ \boxed{\text{X,T,Q,n}}\ \boxed{-}\ \boxed{5}\ \boxed{\text{GRAPH}}$$



(a) (b)

FIGURA 3.37

Para obtener la intersección en y, presiona $\boxed{\text{TRACE}}$. La intersección es $(0, -5)$ como se ve en la **Figura 3.37b**. Para obtener la intersección en x, usamos la característica "cero", para lo cual presionamos las teclas

$$\boxed{\text{2nd}}\ \boxed{\text{TRACE}}\ \boxed{2}$$

Se te pide la dirección a la izquierda. Mueve el cursor a la izquierda o a la derecha usando las teclas $\boxed{<}$ o $\boxed{>}$**.** Mueve el cursor a la izquierda de la intersección en x y presiona $\boxed{\text{ENTER}}$.

Después se te pide la dirección a la derecha. Mueve el cursor a la derecha de la intersección con x y presiona $\boxed{\text{ENTER}}$. Finalmente se te pide que estimes. Mueve el cursor cerca de la intersección con x y presiona $\boxed{\text{ENTER}}$. La pantalla se muestra en la **Figura 3.38**. La intersección con x es $(1.25, 0)$.

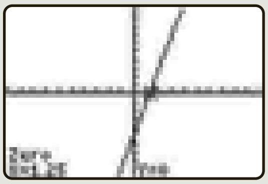


FIGURA 3.38

3 Graficar ecuaciones de la forma $x = a$ y $y = b$

Los ejemplos 5 y 6 ilustran cómo se grafican ecuaciones de la forma $x = a$ y $y = b$, donde a y b son constantes y están graficadas.

EJEMPLO 5 Grafica la ecuación $y = -3$.

Solución Esta ecuación se puede escribir como $y = -3 + 0x$. Entonces para cualquier valor de x que selecciones, y es -3. La gráfica de $y = -3$ se ilustra en la **Figura 3.39**.

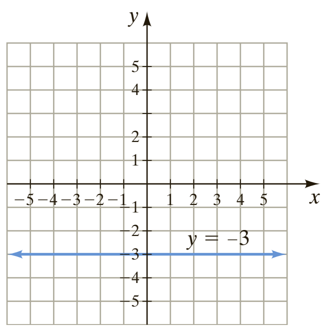


FIGURA 3.39

Resuelve ahora el ejercicio 43

Comprendiendo el álgebra

Toda ecuación de la forma $y = b$ o $f(x) = b$, donde b representa una constante, es una función constante cuya gráfica es una línea recta horizontal.

Ecuación de una línea recta horizontal

La gráfica de toda ecuación de la forma $y = b$ siempre será una línea recta horizontal para cualquier número b.

Observa que la gráfica de $y = -3$ es una función ya que pasa la prueba de la línea recta vertical. Para cada valor de x que seleccionemos, el valor de y, o el valor de la función, es -3. Esto es un ejemplo de una **función constante**. Podemos escribir

$$f(x) = -3$$

EJEMPLO 6 Grafica la ecuación $x = 2$.

Solución Esta ecuación se puede escribir como $x = 2 + 0y$. Entonces, para cada valor de y que seleccionemos, x tendrá el valor de 2 (**Figura 3.40**).

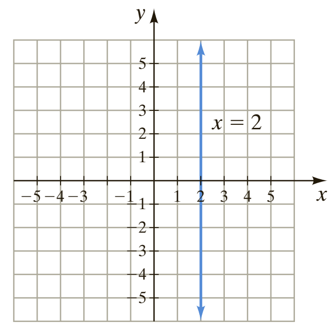


FIGURA 3.40

Resuelve ahora el ejercicio 41

Comprendiendo el álgebra

Una ecuación de la forma $x = a$ siempre será una línea recta vertical, y nunca definirá una función.

Ecuación de una línea recta vertical

La gráfica de toda ecuación de la forma $x = a$ siempre será una línea recta vertical para cualquier número real a.

Observa que la gráfica de $x = 2$ no representa una función, ya que no pasa la prueba de la línea recta vertical.

4 Estudiar aplicaciones de las funciones

Con frecuencia se usan las gráficas para mostrar las relaciones entre variables.

EJEMPLO 7 **Ganancias de una tienda de llantas** La ganancia anual, p, de una tienda de llantas se puede estimar mediante la función $p(n) = 20n - 30,000$, donde n es el número de llantas vendidas por año.

a) Traza una gráfica de la ganancia contra las llantas vendidas hasta 6000 llantas.

b) Calcula el número de llantas que se deben vender para que la compañía llegue a su punto de equilibrio.

c) Calcula el número de llantas que se deben vender para que la compañía tenga una ganancia de \$70, 000.

Comprendiendo el álgebra

El punto de equilibrio de una compañía es el punto donde la ganancia es igual a 0. En otras palabras, la compañía no gana ni pierde dinero.

Solución **a)** Entiende

p es función de n

p es la ganancia.
p es la variable dependiente.
El eje vertical se marcará como p.

n es el número de llantas vendidas.
n es la variable independiente.
El eje horizontal se marcará como n.

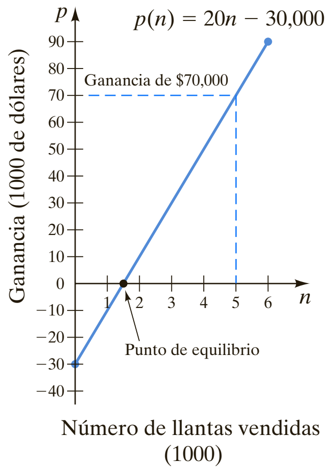


FIGURA 3.41

Como el número mínimo de llantas que se puede vender es 0, el eje horizontal irá de 0 a 6000 llantas. Graficaremos esta ecuación por determinación y trazado de intersecciones.

Traduce y realiza los cálculos Para encontrar la intersección con el eje p, hacemos $n = 0$ y resolvemos para $p(n)$.

$$p(n) = 20n - 30{,}000$$
$$p(n) = 20(0) - 30{,}000 = -30{,}000$$

Entonces la intersección con el eje p es $(0, -30{,}000)$.

Para encontrar la intersección con el eje n, hacemos $p(n) = 0$ y resolvemos para n.

$$\begin{aligned} p(n) &= 20n - 30{,}000 \\ 0 &= 20n - 30{,}000 \\ 30{,}000 &= 20n \\ 1500 &= n \end{aligned}$$

Entonces la intersección con el eje n es $(1500, 0)$.

Responde Ahora usamos las intersecciones con el eje n y con el eje p para trazar la gráfica (ver **Figura 3.41**).

b) El punto de equilibrio es donde la gráfica intersecta al eje n, ya que aquí es cuando la ganancia p es 0. Para cubrir los gastos, se deben vender alrededor de 1500 llantas.

c) Para ganar $70,000, se deben vender alrededor de 5000 llantas (que se representa con la línea recta punteada en azul claro de la **Figura 3.41**).

Ahora resuelve el ejercicio 51

Consejo útil

A veces es difícil leer una respuesta exacta a partir de una gráfica. Para determinar el número exacto de llantas que se deben vender para alcanzar el punto de equilibrio en el ejemplo 7, sustituye 0 por $p(n)$ en la función $p(n) = 20n - 30{,}000$ y resuelve para n. Para determinar el número exacto de llantas que se debe vender para obtener una ganancia de $70,000, sustituye 70,000 por $p(n)$ y resuelve la ecuación para n.

EJEMPLO 8 **Ventas de una juguetería**

Rob Kimball es el dueño de una juguetería. Su salario mensual es de $200 más 10% de las ventas de la tienda en el mes.

a) Escribe una función que exprese su salario mensual, m, en términos de las ventas de la juguetería, s.

b) Traza la gráfica de su salario mensual por ventas de hasta $20,000.

c) Si las ventas de la juguetería en el mes de abril son $15,000, ¿cuál será el salario de Rob para abril?

Solución

a) Como el salario mensual de Rob depende de las ventas de la juguetería, m depende de s, y m es una función de s.

$$\underbrace{\text{El salario mensual de Rob}}_{m(s)}\ \underbrace{\text{es de}}_{=}\ \underbrace{\$200}_{200}\ \underbrace{\text{más}}_{+}\ \underbrace{10\%}_{0.10}\ \underbrace{\text{de}}_{\cdot}\ \underbrace{\text{las ventas de la juguetería.}}_{s}$$

o $m(s) = 200 + 0.10s$

s	m
0	200
10,000	1200
20,000	2200

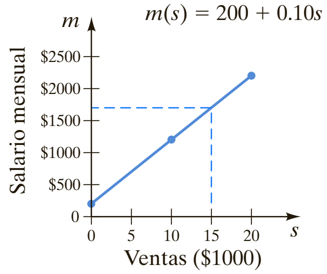


FIGURA 3.42

b) Como m es función de s, s estará en el eje horizontal y m en el eje vertical. Graficaremos esta función trazando los puntos. Seleccionamos valores de s y encontramos los valores correspondientes para m. La tabla al margen muestra tres pares ordenados que trazaremos y después dibujaremos la gráfica que se muestra en la **Figura 3.42**.

c) Si leemos nuestra gráfica cuidadosamente, podemos estimar que cuando las ventas de la juguetería son de $15,000, el salario mensual de Rob es de aproximadamente $1700.

Resuelve ahora el ejercicio 53

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.3

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

lineal	dominio	rango	intersección con x	intersección con y	horizontal
vertical	constante	forma estándar	pasará	fallará	números reales

1. El dominio, o conjunto de coordenadas x, de toda función lineal está compuesto por ________, simbolizado por $\mathbb{R}$.

2. El ________ o conjunto de coordenadas y, de toda función lineal $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, está compuesto por todos los números reales, simbolizados por $\mathbb{R}$.

3. La ________ es el punto donde la gráfica cruza el eje x.

4. La ________ es el punto donde la gráfica cruza el eje y.

5. La gráfica de una ecuación de la forma $y = b$, donde b es un número real, es una línea ________.

6. La gráfica de una ecuación de la forma $x = a$, donde a es un número real, es una línea ________.

7. Una ecuación de la forma $x = a$ siempre ________ la prueba de la línea vertical y, por lo tanto, nunca representará una función.

8. Una función de la forma $f(x) = b$, donde b es un número real, es conocida como función ________.

9. Una función de la forma $f(x) = ax + b$, donde a y b son números reales, es conocida como función ________.

10. La ________ de un ecuación lineal es $ax + by = c$.

Práctica tus habilidades

Escribe las ecuaciones en forma estándar.

11. $y = -4x + 3$

12. $7x = 3y - 6$

13. $3(x - 2) = 4(y - 5)$

14. $\frac{1}{2}y = 2(x - 3) + 4$

Grafica las ecuaciones usando las intersecciones en x y y.

15. $f(x) = 2x + 3$
16. $y = x - 5$
17. $y = -2x + 1$
18. $f(x) = -6x + 5$

19. $2y = 4x + 6$
20. $2x - 3y = 12$
21. $\frac{4}{3}x = y - 3$
22. $\frac{1}{4}x + y = 2$

23. $15x + 30y = 60$
24. $6x + 12y = 24$
25. $0.25x + 0.50y = 1.00$
26. $-1.6y = 0.4x + 9.6$

27. $120x - 360y = 720$
28. $250 = 50x - 50y$
29. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 12$
30. $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y = -3$

Grafica las ecuaciones.

31. $f(x) = \frac{1}{3}x$
32. $y = \frac{1}{2}x$
33. $y = -2x$
34. $g(x) = 4x$

35. $2x + 4y = 0$
36. $-10x + 5y = 0$
37. $6x - 9y = 0$
38. $18x + 6y = 0$

Grafica las ecuaciones.

39. $y = 4$
40. $y = -4$
41. $x = -4$
42. $x = 4$

43. $y = -1.5$
44. $f(x) = -3$
45. $x = 0$
46. $g(x) = 0$

47. $x = \frac{5}{2}$
48. $x = -3.25$

Resolución de problemas

49. Distancia Usando la fórmula de distancia

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \cdot \text{tiempo, o } d = vt$$

dibuja una gráfica de distancia contra tiempo para una velocidad constante de 30 millas por hora.

50. Interés simple Usando la fórmula de interés simple

$$\text{interés} = \text{capital} \cdot \text{tasa de interés} \cdot \text{tiempo, o } i = prt$$

realiza una gráfica de interés contra tiempo para un capital de \$1000 y una tasa de interés de 3%.

51. Ganancias de bicicletas Las ganancias de una fábrica de bicicletas pueden aproximarse por la función $p(x) = 60x - 80{,}000$, donde x es el número de bicicletas producidas y vendidas.

a) Realiza una gráfica de ganancia contra el número de bicicletas vendidas (hasta 5000 bicicletas).

b) Estima el número de bicicletas que debe vender la compañía para cubrir los gastos.

c) Estima el número de bicicletas que debe vender la compañía para tener una ganancia de \$150,000.

52. Costo para operar un taxi A Raúl Lopez le cuesta operar un taxi \$75 con 15¢ por milla, semanalmente.

a) Escribe una función que exprese el costo semanal de Raúl, c, en términos del número de millas, m.

b) Realiza una gráfica que ilustre el costo semanal contra el número de millas, hasta las 200 millas recorridas por semana.

c) Si durante una semana, Raúl manejó el taxi 150 millas, ¿cuál fue el costo?

d) ¿Cuántas millas debería manejar Raúl para que el costo semanal fuera de \$135?

53. Salario más comisión El salario semanal de Jayne Haydack en Charter Network es de \$500 más 15% por comisión en sus ventas semanales.

a) Escribe una función que exprese el salario semanal de Jayne, s, en términos de sus ventas semanales, x.

b) Realiza una gráfica del salario de Jayne contra sus ventas semanales, hasta \$5000 en ventas.

c) ¿Cuál será el salario semanal de Jayne si sus ventas fueron de \$3000?

d) Si el salario de Jayne esta semana fue de \$1100, ¿de cuánto fueron sus ventas semanales?

54. Salario más comisión Cristina Miller, una agente de bienes raíces, gana \$100 semanales más 3% de comisión por cada propiedad que vende.

a) Escribe una función que exprese su salario semanal, s, en términos de sus ventas, x.

b) Realiza una gráfica de su salario contra sus ventas semanales hasta los \$100,000.

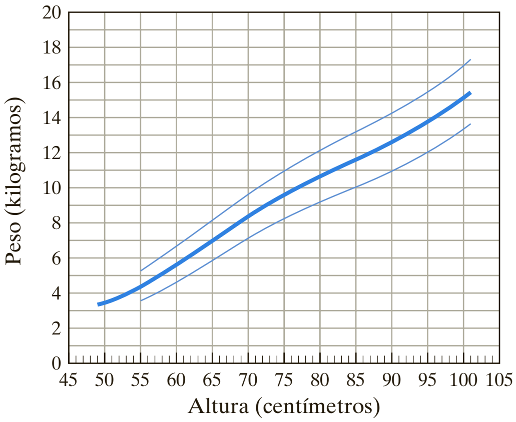
c) Si Cristina vende una casa a la semana por \$75,000, ¿cuál será su salario semanal?

© Morgan Lane Photography/Shutterstock

Ejercicios de conceptos y escritura

55. El peso de las niñas La siguiente gráfica muestra el peso, en kilogramos, de niñas (de hasta 36 meses de edad) contra altura (o largo), en centímetros. La línea del centro es el peso promedio para todas las niñas de la altura dada, y las líneas delgadas representan los límites mayor y menor en el rango normal.

Crecimiento de niñas de: 0 a 36 meses



Fuente: Centro Nacional de Estadísticas de Salud

a) Explica por qué la línea roja representa una función.

b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál es la variable dependiente?

c) ¿La gráfica de peso contra altura es aproximadamente lineal?

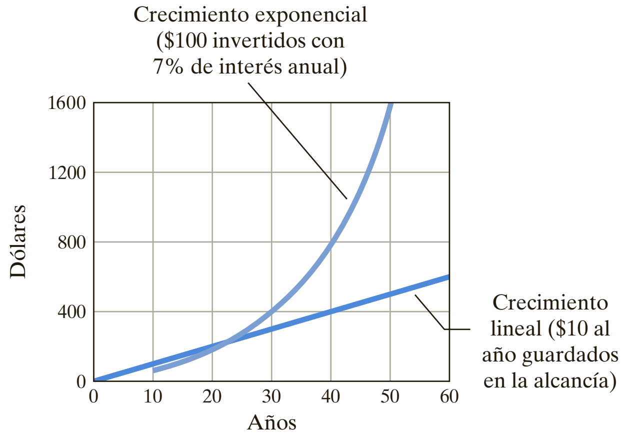
d) ¿Cuál es el peso en kilogramos de las niñas que en promedio miden 85 centímetros de altura?

e) ¿Cuál es la altura promedio en centímetros de las niñas que en promedio pesan 7 kilogramos?

f) ¿Qué peso se considera normal para una niña que mide 95 centímetros de altura?

g) ¿Qué le pasa al rango normal cuando la altura incrementa? ¿Es lo que esperarías que pasara? Explica.

56. Interés compuesto La siguiente gráfica muestra el efecto del interés compuesto.



Si un niño pone $10 cada año en una alcancía, el ahorro crecerá de manera lineal, como se muestra en la curva inferior. Si, al año 10 el niño invierte $100 con 7% de interés compuesto anual, estos $100 crecerán de manera exponencial.

a) Explica por qué ambas gráficas representan funciones.

b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál es la variable dependiente?

c) Usando la curva de crecimiento lineal, determina cuánto tiempo tomaría ahorrar $600.

d) Usando la curva de crecimiento exponencial, que comienza a los 10 años, ¿en cuánto tiempo después de que la cuenta se abrió la cantidad alcanzaría los $600?

e) Comenzando en el año 20, ¿cuánto tiempo sería necesario, creciendo a una taza lineal, para que el dinero se duplique?

f) Comenzando en el año 20, ¿cuánto tiempo sería necesario, creciendo exponencialmente, para que el dinero se duplique? (El crecimiento exponencial se discutirá en el capítulo 9).

57. ¿Cuándo, si ocurre, las intersecciones con el eje x y con el eje y de una gráfica serán las mismas? Explica.

58. Escribe dos funciones lineales cuyas intersecciones con el eje x y con el eje y sean para ambas (0, 0). Explica.

59. Escribe una función cuya gráfica no intersecte con el eje x pero sí con el eje y en (0, 4). Explica.

60. Escribe una ecuación cuya gráfica no intersecte con el eje y pero sí con el eje x en -5. Explica.

Problemas de desafío

61. Si las intersecciones con el eje x y con el eje y de una función lineal son 1 y -3, respectivamente, ¿cuáles serán sus nuevas intersecciones si la gráfica se mueve (o traslada) 3 unidades más?

62. Si las intersecciones con el eje x y con el eje y de una ecuación lineal son -1 y 3, respectivamente, ¿cuáles serán sus nuevas intersecciones si la gráfica se mueve (o traslada) 4 unidades menos?

Encuentra las intersecciones con x y y de la gráfica de cada ecuación utilizando tu calculadora graficadora.

63. $y = 2(x + 3.2)$

64. $5x - 2y = 7$

65. $-4x - 3.2y = 8$

66. $y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{2}$

Actividad de grupo

En los ejercicios 67 y 68, damos dos pares ordenados, localizados en una gráfica. **a)** *Grafica los puntos y traza una línea que los una.* **b)** *Encuentra el cambio en y, o cambio vertical, entre los puntos.* **c)** *Encuentra el cambio en x, o cambio horizontal, entre los puntos.* **d)** *Encuentra la relación entre el cambio vertical y el horizontal entre estos dos puntos. ¿Sabes lo que esta relación representa? (Lo discutiremos mas adelante en la sección 3.4).*

67. (0, 2) y (−4, 0)

68. (3, 5) y (−1, −1)

Ejercicios de repaso acumulados

[1.4] **69.** Evalúa $4\{2 - 3[(1 - 4) - 5]\} - 8$.

[2.1] **70.** Resuelve $\frac{1}{3}y - 3y = 6(y + 2)$.

[2.6] *En los ejercicios 71-73,* **a)** *explica el procedimiento para resolver la ecuación o desigualdad para x (asumiendo que b > 0), y* **b)** *resuelve la ecuación o desigualdad.*

71. $|x - a| = b$

72. $|x - a| < b$

73. $|x - a| > b$

74. Resuelve la ecuación $|x - 4| = |2x - 2|$.

3.4 La forma pendiente-intersección de una ecuación lineal

1 Entender el desplazamiento de las gráficas.

2 Determinar la pendiente de una recta.

3 Reconocer la pendiente como una razón de cambio.

4 Escribir ecuaciones lineales en la forma pendiente-intersección.

5 Graficar ecuaciones lineales por medio de la pendiente y la intersección en y.

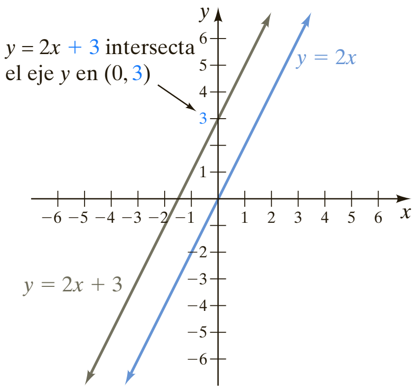
6 Usar la forma pendiente-intersección para construir modelos a partir de gráficas.

1 Entender el desplazamiento de las gráficas

Considera las tres ecuaciones

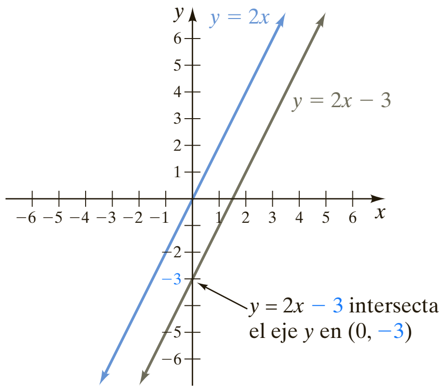
$$y = 2x + 3$$
$$y = 2x$$
$$y = 2x - 3$$

Observa las gráficas mostradas en las **Figuras 3.43a** y **3.43b**. La gráfica $y = 2x$ se muestra en color azul en ambas figuras, e intersecta el eje y en el punto (0, 0). Observa que la gráfica $y = 2x + 3$ intersecta el eje y en el punto (0, 3) y en la gráfica $y = 2x - 3$ intersecta el eje y en el punto (0, −3). Observa incluso que las líneas son **paralelas**, esto es, las líneas no se intersectan.



La gráfica $y = 2x + 3$ es la gráfica de $y = 2x$ desplazada hacia *arriba* 3 unidades.

(a)



La gráfica $y = 2x - 3$ es la gráfica de $y = 2x$ desplazada hacia *abajo* 3 unidades.

(b)

FIGURA 3.43

Comprendiendo el álgebra

En general, la gráfica $y = mx + b$ será paralela a la gráfica $y = mx$ e intersectará el eje y en $(0, b)$.

Las gráficas $y = 2x + 3$ y $y = 2x - 3$ son idénticas a $y = 2x$, excepto por la intersección en el eje y. Decimos que las gráficas $y = 2x + 3$ y $y = 2x - 3$ son **desplazamientos verticales** de la gráfica $y = 2x$.

Después de ver las gráficas mostradas en la **Figura 3.43**, ¿podrías predecir cómo se vería la gráfica $y = 2x + 4$? La gráfica $y = 2x + 4$ es paralela a $y = 2x$ e intersecta el eje y en el punto (0, 4). Decimos que la gráfica $y = 2x + 4$ es la gráfica $y = 2x$ desplazada o **trasladada** 4 unidades (ver **Figura 3.44**)

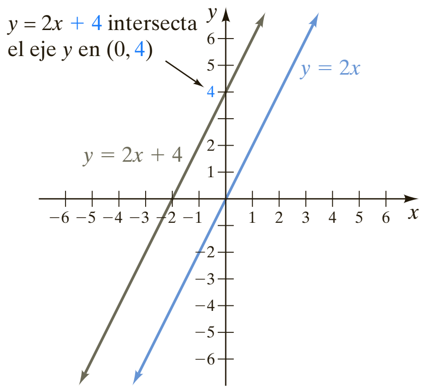


FIGURA 3.44

Observa en las ecuaciones $y = 2x$, $y = 2x + 3$, $y = 2x - 3$, y $y = 2x + 4$ que el coeficiente de x es 2 y que las cuatro líneas son paralelas. Cuando las líneas son paralelas tienen la misma *inclinación* o *pendiente*.

2 Determinar la pendiente de una recta

Comprendiendo el álgebra

La pendiente es descrita a menudo con la frase *inclinación de una línea*.

La *pendiente de una recta* es una medida de la *inclinación* de la recta. La pendiente de una recta es un concepto importante en muchas áreas de las matemáticas.

Pendiente de una reta

- La **pendiente de una recta**, $\boldsymbol{m}$, es la razón de cambio vertical, o *elevación*, al cambio horizontal, o *desplazamiento*, entre dos puntos cualesquiera de la recta.
- $\boldsymbol{m}^*$ = **pendiente** $= \dfrac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} = \dfrac{\text{elevación}}{\text{desplazamiento}}$

Como ejemplo, considera la gráfica $y = 2x$ de nuestro análisis previo. Esta recta pasa por dos puntos (1, 2) y (3, 6)(ver **Figura 3.45a**). De la **Figura 3.45b**, podemos observar que el cambio vertical (o elevación) es $6 - 2$, o 4 unidades. El cambio horizontal (o desplazamiento) es $3 - 1$, o 2 unidades.

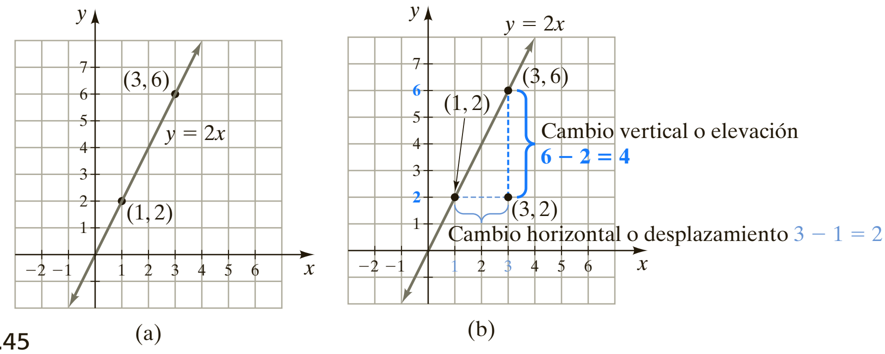


FIGURA 3.45

$$m = \text{pendiente} = \frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} = \frac{\text{elevación}}{\text{desplazamiento}} = \frac{4}{2} = 2$$

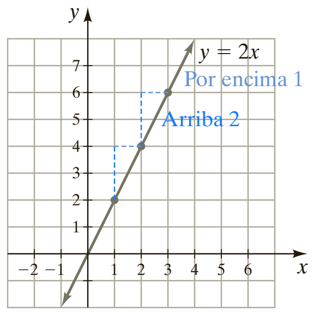


FIGURA 3.46

Por lo tanto, la pendiente de la recta que atraviesa estos dos puntos es 2. Examinando la recta que conecta estos dos puntos, podemos observar que por cada movimiento de la gráfica hacia arriba en 2 unidades, la gráfica se mueve hacia la derecha 1 unidad (**Figura 3.46**).

Hemos determinado que la pendiente de la gráfica de $y = 2x$ es 2. Si tuvieras que calcular la pendiente de las otras dos rectas en la **Figura 3.43** de la página 172, encontrarás que las gráficas de $y = 2x + 3$ y $y = 2x - 3$ también tienen una pendiente de 2.

Comprendiendo el álgebra

En general, la pendiente de una ecuación de la forma $y = mx + b$ es m.

¿Podrías estimar cuál es la pendiente de las gráficas de las ecuaciones $y = -3x + 2$, $y = -3x$, y $y = -3x - 2$? La pendiente de estas tres rectas es -3.

Ahora presentamos la fórmula para encontrar la pendiente de una recta que pasa por los dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en la recta. Observe la **Figura 3.47**. La *elevación* es la diferencia entre y_2 y y_1 y el *desplazamiento* es la diferencia entre x_2 y x_1.

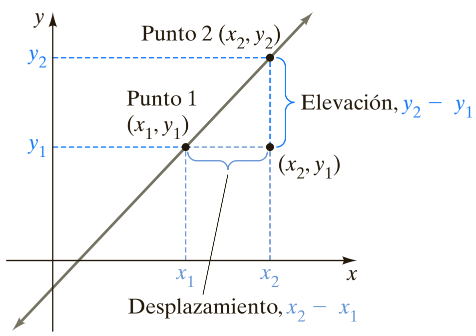


FIGURA 3.47

*La letra *m* se usa tradicionalmente para designar la pendiente. Se cree que la letra *m* proviene de la palabra francesa *m*onter, que significa “subir”.

Comprendiendo el álgebra

La letra griega delta, Δ, es a menudo utilizada para representar la frase "el cambio en." Así, Δy representa "el cambio en y" y Δx representa "el cambio en x" y la fórmula para la pendiente se puede dar como

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

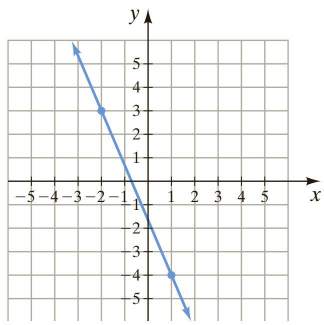


FIGURA 3.48

Pendiente de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2)

$$m = \text{pendiente} = \frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} = \frac{\text{elevación}}{\text{desplazamiento}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Consejo útil

No hay diferencia en cuáles de los dos puntos en la recta sean seleccionados cuando encontramos la pendiente. Tampoco hace diferencia que un punto se elija como (x_1, y_1) o (x_2, y_2).

EJEMPLO 1 Encuentra la pendiente de la recta en la **Figura 3.48**.

Solución Dos puntos en la recta son $(-2, 3)$ y $(1, -4)$. Sea $(x_2, y_2) = (-2, 3)$ y $(x_1, y_1) = (1, -4)$. Entonces

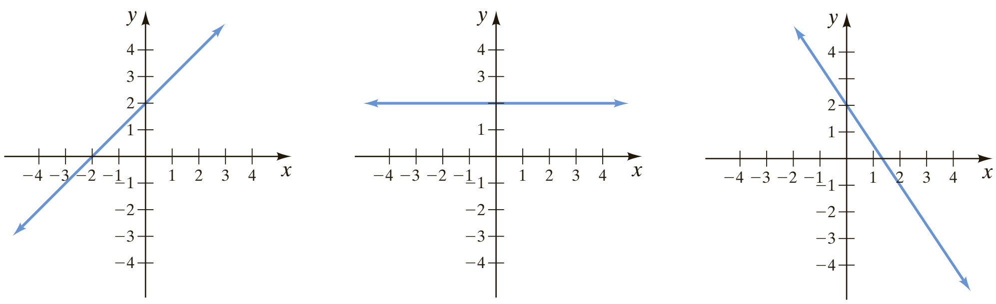
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-4)}{-2 - 1} = \frac{3 + 4}{-3} = -\frac{7}{3}$$

La pendiente de la recta es $-\frac{7}{3}$. Observa que de ser $(x_1, y_1) = (-2, 3)$ y $(x_2, y_2) = (1, -4)$, la pendiente seguirá siendo $-\frac{7}{3}$. Inténtalo y observa.

Resuelve ahora el ejercicio 35

Una recta que crece de izquierda a derecha (**Figura 3.49a**) tiene una **pendiente positiva**. Una recta que no crece ni decrece de izquierda a derecha (**Figura 3.49b**) tiene una **pendiente cero**. Una recta que decrece de izquierda a derecha (**Figura 3.49c**) tiene una **pendiente negativa**.

Pendiente positiva — Pendiente cero — Pendiente negativa



(a) (b) (c)

FIGURA 3.49

Comprendiendo el álgebra

- La pendiente de cualquier línea horizontal es cero.
- La pendiente de cualquier línea vertical es *indefinida.*

Considera la gráfica de $x = 3$ (**Figura 3.50**) ¿Cuál es la pendiente? La gráfica es una línea vertical que pasa por los puntos $(3, 2)$ y $(3, 5)$. Por lo tanto, la pendiente de la recta es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 2}{3 - 3} = \frac{3}{0}$$

Como no podemos dividir entre 0, decimos entonces que la pendiente es indefinida. *La pendiente de cualquier línea vertical es* **indefinida**.

Pendiente indefinida.

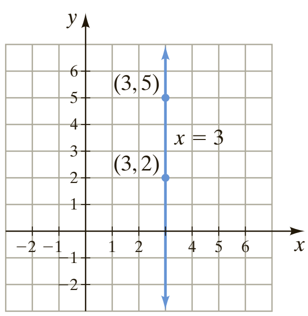


FIGURA 3.50

3 Reconocer la pendiente como una razón de cambio

En algunas ocasiones es de ayuda describir la pendiente como una *razón de cambio*. Considera una pendiente de $\frac{3}{4}$. Esto significa que el valor de y crece 3 unidades por cada 4 unidades que crece en x. De manera equivalente, podemos decir que el valor de y crece $\frac{3}{4}$ unidades, o 0.75 unidades, por cada unidad que crece en x.

Cuando damos el cambio en y por unidad de cambio en x estamos expresando la pendiente como una **razón de cambio**. Cuando analicemos situaciones de la vida real o cuando creemos modelos matemáticos, con frecuencia es útil analizar la pendiente como una razón de cambio. En estos modelos, la variable independiente por lo general es el *tiempo*.

EJEMPLO 2 **Deuda pública** La siguiente tabla y su correspondiente gráfica ilustran la deuda pública de Estados Unidos en trillones de dólares de 1980 hasta 2008.

Año	Deuda pública de Estados Unidos (trillones de dólares)
1980	0.91
1984	1.57
1988	2.60
1992	4.06
1996	5.22
2000	5.67
2004	7.38
2008	9.67

Fuente: Departamento de Tesorería de Estados Unidos

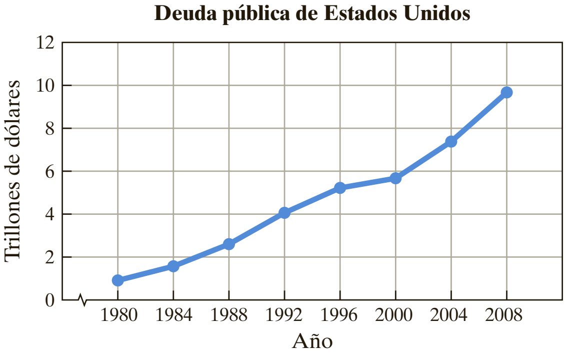


FIGURA 3.51

a) Determina la pendiente de los segmentos de recta entre el año 1996 y el año 2000 y entre el año 2004 y el año 2008.

b) Compara las dos pendientes encontradas en el inciso **a)** y explica el significado en términos de la deuda pública de Estados Unidos.

Solución **a)** Entiende Para encontrar la pendiente entre dos años cualesquiera, determina la razón de cambio en la deuda para el cambio en el tiempo.

Pendiente del año 1996 al año 2000

$$m = \frac{5.67 - 5.22}{2000 - 1996} = \frac{0.45}{4} = 0.1125$$

La deuda pública de Estados Unidos del año 1996 al año 2000 creció a una razón de \$0.1125 trillones (o \$112.5 billones) por año.

Pendiente del año 2004 al año 2008

$$m = \frac{9.67 - 7.38}{2008 - 2000} = \frac{2.29}{4} = 0.5725$$

La deuda pública de Estados Unidos del año 1996 al año 2000 crece a una razón de \$0.1125 trillones (o \$112.5 billones) por año.

b) La pendiente mide una razón de cambio. Hubo un crecimiento mucho mayor (más de 5 veces) en la razón de cambio promedio en la deuda pública del año 2004 al año 2008 que del año 1996 al año 2000.

Resuelve ahora el ejercicio 69

4 Escribir ecuaciones lineales en la forma pendiente-intersección

Una ecuación lineal escrita en la forma $y = mx + b$ se dice que está en la **forma pendiente-intersección**.

Forma pendiente-intersección

La **forma pendiente-intersección de una ecuación lineal** es

$$y = mx + b$$

Donde m **es la pendiente** de la recta y $(0, b)$ **es la intersección con** y de la recta.

Comprendiendo el álgebra

Para expresar una ecuación lineal en la forma pendiente-intersección, resuelve la ecuación para y.

Ejemplos de ecuaciones en la forma pendiente-intersección

$$y = 3x - 6 \qquad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Pendiente → Intersección en y es (0, b)

$$y = mx + b$$

Ecuación	Pendiente	Intersección con y
$y = 3x - 6$	3	$(0, -6)$
$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\left(0, \frac{3}{2}\right)$

EJEMPLO 3 Determina la pendiente y la intersección con el eje y en la gráfica de la ecuación $-5x + 2y = 8$.

Solución Escribe la ecuación en la forma pendiente-intersección resolviéndola para y.

$$\begin{aligned} -5x + 2y &= 8 \\ 2y &= 5x + 8 \\ y &= \frac{5x + 8}{2} \\ y &= \frac{5x}{2} + \frac{8}{2} \\ y &= \frac{5}{2}x + 4 \end{aligned}$$

La pendiente es $\frac{5}{2}$; la intersección en y es $(0, 4)$.

Resuelve ahora el ejercicio 43

5 Graficar ecuaciones lineales por medio de la pendiente y la intersección con el eje *y*

La forma pendiente-intersección de una recta es útil al dibujar la gráfica de una ecuación lineal, como se ilustra en el ejemplo 4.

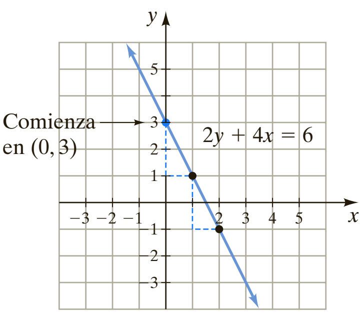


FIGURA 3.52

EJEMPLO 4 Grafica $2y + 4x = 6$ usando la intersección con y y la pendiente.

Solución Comienza despejando y para obtener una ecuación en la forma pendiente-intersección.

$$\begin{aligned} 2y + 4x &= 6 \\ 2y &= -4x + 6 \\ y &= -2x + 3 \end{aligned}$$

La pendiente es -2 y la intersección en y es $(0, 3)$. Coloca un punto en 3 en el eje y (**Figura 3.52**). Como la pendiente es $-2 = \frac{-2}{1}$, la razón de cambio vertical respecto del cambio horizontal debe ser -2 a 1. Por lo tanto, si comienzas en el punto $(0, 3)$ y te desplazas **2 unidades hacia abajo** y 1 unidad hacia la derecha, obtendrás un segundo punto sobre la gráfica.

Continúa este proceso de mover 2 unidades hacia abajo y 1 unidad a la derecha para obtener el tercer punto. Ahora dibuja una recta que cruce los tres puntos para obtener la gráfica.

Resuelve ahora el ejercicio 45

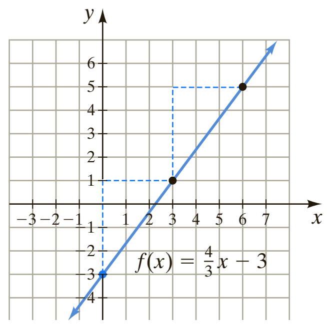


FIGURA 3.53

En el ejemplo 4, escogimos desplazarnos hacia abajo y a la derecha para obtener el segundo y el tercer puntos. Ya que -2 además es igual a $\frac{2}{-1}$, pudimos inclusive escoger desplazarnos hacia arriba y a la izquierda para obtener el segundo y tercer puntos.

EJEMPLO 5 Grafica $f(x) = \frac{4}{3}x - 3$ usando la intersección con y y la pendiente.

Solución Ya que $f(x)$ es lo mismo que y, esta función está en la forma pendiente-intersección. La intersección con y es $(0, -3)$ y la pendiente es $\frac{4}{3}$. Coloca un punto en -3 sobre el eje y. Entonces, como la pendiente es positiva, obtén el segundo y tercer puntos desplazándote 4 unidades hacia arriba y 3 unidades a la derecha. La gráfica se muestra en la **Figura 3.53**.

Resuelve ahora el ejercicio 51

6 Usar la forma pendiente-intersección para construir modelos a partir de gráficas

A menudo podemos utilizar la forma pendiente-intersección de una ecuación lineal para determinar la función que modele una situación de la vida real.

EJEMPLO 6 **Periódicos** Considera la gráfica en color gris en la **Figura 3.54**, la cual muestra la disminución numérica de adultos que leen diariamente el periódico. Observa que la gráfica es de algún modo lineal. La línea azul punteada es una función lineal, la cual se dibujó para aproximar la gráfica en color gris.

a) Escribe una función lineal que represente la línea azul punteada.

b) Suponiendo que esta tendencia continúa, usa la función determinada en el inciso **a)** para estimar el porcentaje de adultos que leerán un periódico en el año 2015.

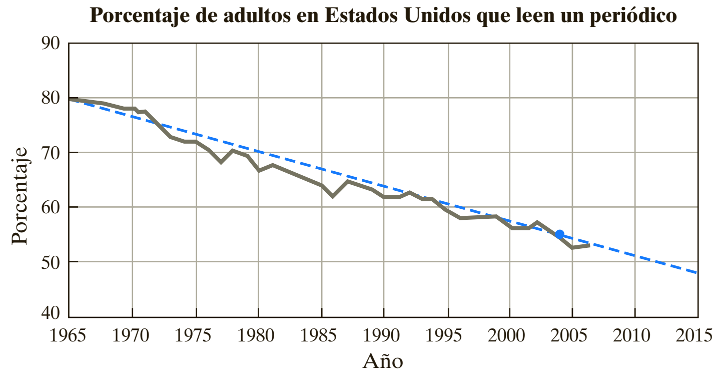


FIGURA 3.54

Fuente: Análisis de Negocios y Mercado NAA

Solución

a) Sea $x =$ el número de años desde 1965. Entonces en el eje x podemos reemplazar el año 1965 con 0, 1966 con 1, 1967 con 2 y así sucesivamente. Por lo tanto, el año 2004 sería 39 y el año 2005 sería 40 (ver **Figura 3.55**). Asignaremos $y =$ porcentaje.

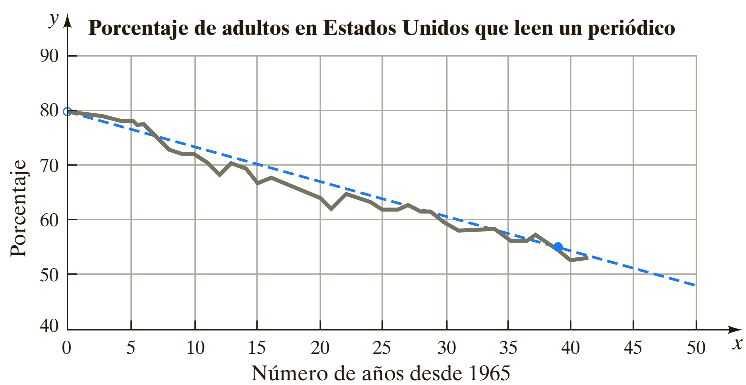


FIGURA 3.55

Fuente: Análisis de Negocios y Mercado NAA

Seleccionaremos dos puntos en la gráfica, los cuales nos permitirán calcular la pendiente de la gráfica. La intersección en y está en 80. Por lo tanto, un punto en la gráfica es (0, 80). En 2004, o año 39 en la **Figura 3.55**, parece que alrededor de 55% de la población adulta lee diariamente el periódico. Seleccionemos (39, 55) como segundo punto.

$$\text{pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{55 - 80}{39 - 0} = \frac{-25}{39} \approx -0.641$$

Como la pendiente es aproximadamente -0.641 y la intersección con el eje y es (0, 80), la ecuación de la línea recta es $y = -0.641x + 80$. Para usar esta función recuerda que $x = 0$ representa el año 1965, $x = 1$ representa el año 1966 y así sucesivamente. Observa que $f(x)$, el porcentaje, es una función de x, el número de años desde 1965.

b) Para determinar el porcentaje aproximado de lectores en 2015, sustituimos 2015 – 1965, o 50, por x en la función.

$$\begin{aligned} f(x) &= -0.641x + 80 \\ f(50) &= -0.641(50) + 80 \\ &= -32.05 + 80 \\ &= 47.95 \end{aligned}$$

Por lo tanto, si la tendencia actual continúa, alrededor de 47.95% de los adultos leerán diariamente un periódico en 2015.

Resuelve ahora el ejercicio 73

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.4

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

desplazamiento	paralelas	pendiente	vertical	horizontal	elevación vertical	recorrido horizontal
positiva	negativa	resuelve	función	forma estándar	forma pendiente-intersección	razón de cambio

1. La ____________ es una medida de la inclinación de una recta.
2. La gráfica de $y = 2x + 3$ es un ____________ de la gráfica de $y = 2x$.
3. Una ecuación lineal escrita de la forma $ax + by = c$ está en ____________.
4. Una ecuación lineal escrita de la forma $y = mx + b$ está en ____________.
5. La pendiente por lo general es descrita como la ____________ sobre el ____________.
6. Una recta que se eleva y va de izquierda a derecha tiene una pendiente ____________.
7. Una recta que baja y va de izquierda a derecha tiene una pendiente ____________.
8. Una recta ____________ tiene una pendiente cero.
9. Una recta ____________ tiene una pendiente indefinida.
10. Dos rectas que tienen la misma pendiente son rectas ____________.
11. Cuando escribimos el cambio en y por unidad de cambio en x estamos definiendo la pendiente como una ____________.
12. Para escribir una ecuación en la forma pendiente-intersección, ____________ la ecuación para y.

Practica tus habilidades

Encuentra la pendiente de la recta que pasa por los siguientes puntos. Si la pendiente de la recta es indefinida, indícalo.

13. (3, 5) y (1, 9)

14. (3, 4) y (6, 5)

15. (5, 2) y (1, 4)

16. $(-3, 7)$ y $(7, -3)$

17. $(-3, 5)$ y (1, 1)

18. (2, 6) y $(2, -3)$

19. (4, 2) y $(4, -6)$

20. $(8, -4)$ y $(-1, -2)$

21. $(-3, 4)$ y $(-1, 4)$

22. (2, 8) y $(-5, 8)$

23. (0, 3) y $(9, -3)$

24. $(0, -6)$ y $(-5, -3)$

Encuentra el valor de la variable si la línea a través de los dos puntos dados tiene la pendiente dada.

25. (3, 2) y $(4, j)$, $m = 1$

26. $(-4, 3)$ y $(-2, r)$, $m = -3$

27. (5, 0) y $(1, k)$, $m = \frac{1}{2}$

28. $(5, d)$ y (9, 2), $m = -\frac{3}{4}$

29. $(x, 2)$ y $(3, -4)$, $m = 2$

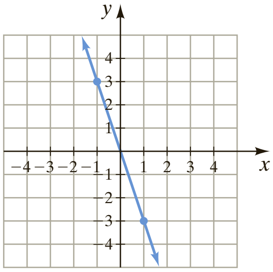
30. $(-2, -3)$ y $(x, 5)$, $m = \frac{1}{2}$

31. $(12, -4)$ y $(r, 2)$, $m = -\frac{1}{2}$

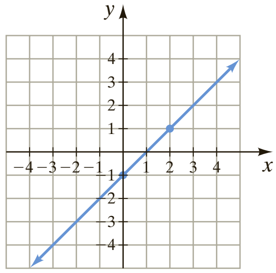
32. $(-4, -4)$ y $(x, -1)$, $m = -\frac{3}{5}$

Encuentra la pendiente de la recta en cada figura. Si la pendiente de la recta es indefinida, indícalo. Después escribe una ecuación para la recta dada.

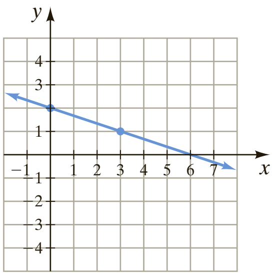
33.



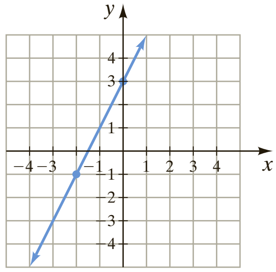
34.



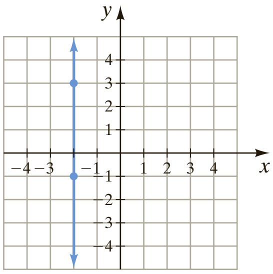
35.



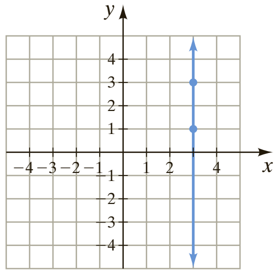
36.



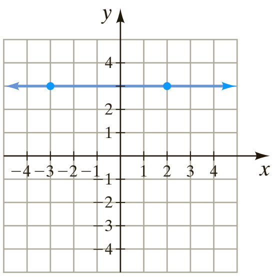
37.



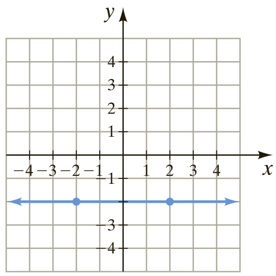
38.



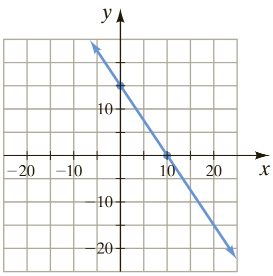
39.



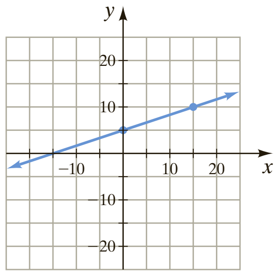
40.



41.



42.



Escribe cada ecuación en la forma pendiente-intersección (si no se da en esa forma). Determina la pendiente e identifica el valor en donde intersecta el eje y. Usa estos dos valores para elaborar la gráfica de la ecuación lineal.

43. $y = -x + 2$

44. $-2x + y = 6$

45. $5x + 15y = 30$

46. $-2x = 3y + 6$

47. $-50x + 20y = 40$

48. $60x = -30y + 60$

Usa la pendiente y el valor en donde se intersecta el eje y para graficar cada función.

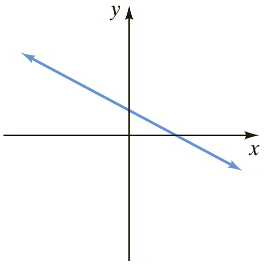
49. $f(x) = -2x + 1$ **50.** $g(x) = \frac{2}{3}x - 4$ **51.** $h(x) = -\frac{3}{4}x + 2$ **52.** $h(x) = -\frac{2}{5}x + 4$

Resolución de problemas

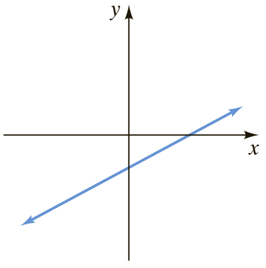
53. Dada la ecuación $y = mx + b$, para los valores m y b, relaciona los incisos **a)-d)** con las gráficas apropiadas rotuladas del 1-4.

a) $m > 0, b < 0$ **b)** $m < 0, b < 0$ **c)** $m < 0, b > 0$ **d)** $m > 0, b > 0$

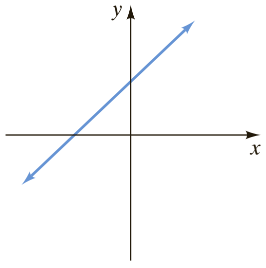
1.



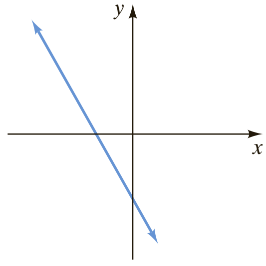
2.



3.



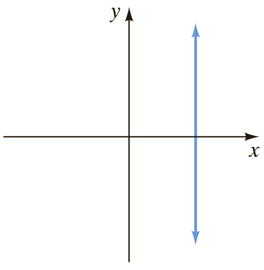
4.



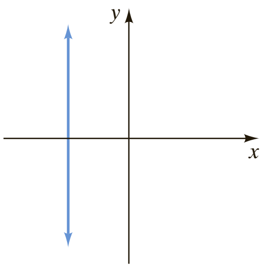
54. Dada la ecuación $y = mx + b$, para los valores m y b, relaciona los incisos **a)-d)** con las gráficas apropiadas rotuladas del 1-4.

a) $m = 0, b > 0$ **b)** $m = 0, b < 0$ **c)** m es indefinida, valor que intersecta el eje $x < 0$
d) m es indefinida, valor que intersecta el eje $x > 0$

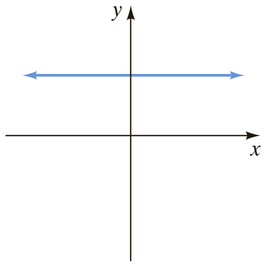
1.



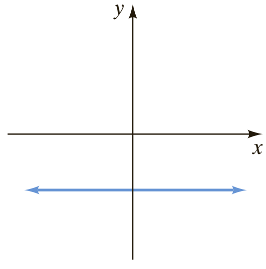
2.



3.



4.



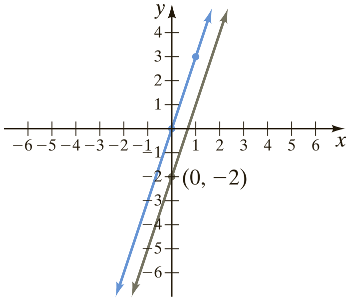
55. Explica cómo puedes determinar (sin graficar) que las gráficas de dos ecuaciones son paralelas.

56. ¿Cómo puedes determinar si dos rectas son paralelas?

57. Si un punto en una gráfica es $(6, 3)$ y la pendiente de la recta es $\frac{4}{3}$, determina el valor que intersecta al eje y en la gráfica.

58. Si un punto en una gráfica es $(9, 2)$ y la pendiente de la recta es $m = \frac{2}{3}$, determina el valor que intersecta al eje y en la gráfica.

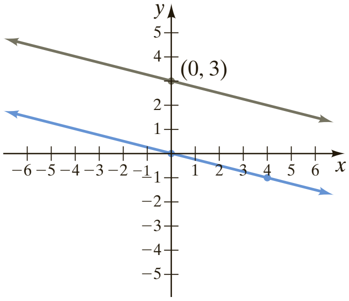
59. En la siguiente imagen, la recta en gris es el desplazamiento de la recta en azul.



a) Determina la ecuación de la recta en azul.

b) Usa la ecuación de la recta en azul para determinar la ecuación de la recta en gris.

60. En la siguiente imagen, la recta en gris es el desplazamiento de la recta en azul.



a) Determina la ecuación de la recta en azul.

b) Usa la ecuación de la recta en azul para determinar la ecuación de la recta en gris.

61. La gráfica de $y = x$ se desplaza hacia arriba 4 unidades. Determina

a) la pendiente de la gráfica desplazada.

b) el valor que intersecta al eje y en la gráfica desplazada.

c) la ecuación de la gráfica desplazada.

62. La gráfica de $y = -\frac{3}{2}x$ se desplaza hacia abajo 3 unidades. Determina

a) la pendiente de la gráfica desplazada.

b) el valor que intersecta el eje y en la gráfica desplazada.

c) la ecuación de la gráfica desplazada.

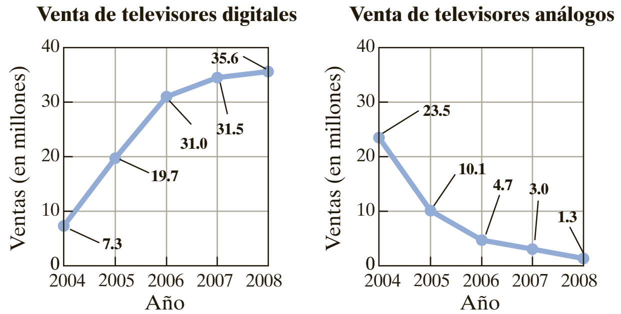
63. La gráfica de $3x - 2y = 6$ es desplaza hacia abajo 4 unidades. Determina la ecuación de la gráfica desplazada.

64. La gráfica de $-3x - 5y = 15$ se desplaza hacia arriba 3 unidades. Determina la ecuación de la gráfica desplazada.

65. Si la recta pasa por los puntos $(6, 4)$ y $(-4, 2)$, determina el cambio de y con respecto al cambio de una unidad en x.

66. Si la recta pasa por los puntos $(-3, -4)$ y $(5, 2)$, determina el cambio de y con respecto al cambio de una unidad en x.

Venta de televisores *En los ejercicios 67 y 68, utiliza las gráficas siguientes. La gráfica a la izquierda muestra las ventas de televisores digitales (en millones) y la gráfica a la derecha muestra las ventas de televisores análogos (en millones) del año 2004 al 2008.*



Fuente: Asociación de consumidores de electrónicos

67. a) Para la gráfica de venta de televisores digitales, determina la pendiente del segmento de recta de 2005 a 2006.

b) ¿Es positiva o negativa la pendiente del segmento de recta?

c) Determina la razón de cambio promedio de 2004 a 2008.

68. a) Para la gráfica de venta de televisores análogos, determina la pendiente del segmento de recta de 2005 a 2006.

b) ¿Es positiva o negativa la pendiente del segmento de recta?

c) Determina la razón de cambio promedio de 2004 a 2008.

69. Gastos de Amtrak La siguiente tabla muestra los gastos, en millones de dólares, de Amtrak para determinados años.

Año	Gastos de Amtrak (en millones de dólares)
1995	\$2257
2000	\$2876
2004	\$3133
2008	\$3260

Fuente: Amtrak

a) Traza estos puntos en una gráfica.

b) Conecta estos puntos usando segmentos de recta.

c) Determina las pendientes de cada uno de estos tres segmentos de recta.

d) ¿Durante qué periodo tuvo lugar la mayor razón de cambio promedio? Explica.

70. Demanda de acero La tabla de arriba a la derecha muestra la demanda mundial de acero, en millones de toneladas métricas, para los años de 2004 a 2007.

a) Traza estos puntos en una gráfica.

b) Determina la pendiente para cada segmento de recta.

c) ¿Es esta gráfica un ejemplo de una función lineal? Explica.

Año	Demanda mundial de acero (en millones de toneladas métricas)
2004	950
2005	1029
2006	1121
2007	1179

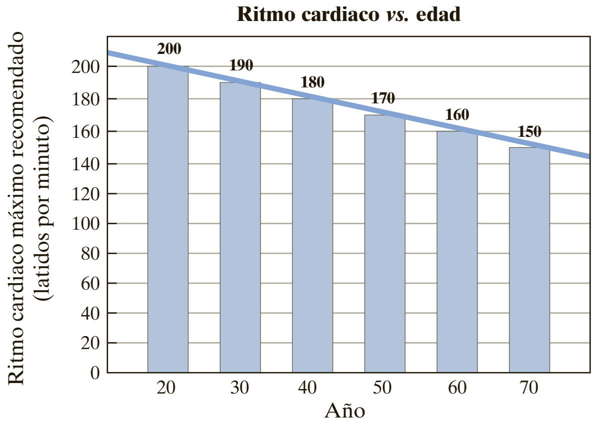
Fuente: Instituto Internacional del Hierro y el Acero

d) ¿Durante qué periodo tuvo lugar la mayor razón de cambio? Explica.

71. Ritmo cardiaco La siguiente gráfica de barras muestra el ritmo cardiaco máximo recomendado bajo estrés, en latidos por minuto, para hombres de diferentes edades. Las barras están conectadas por medio de una línea recta.

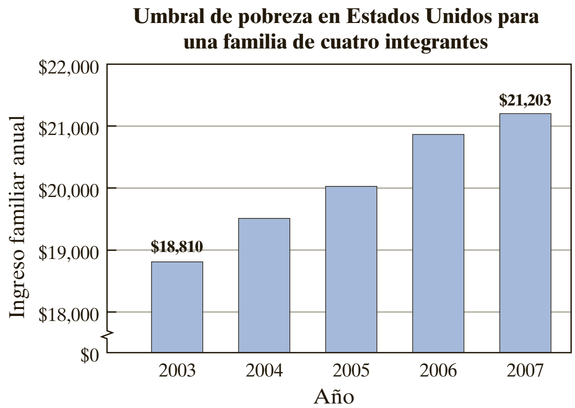
a) Usa la línea recta para determinar una función que pueda ser usada para estimar el ritmo cardiaco máximo recomendado, h, para $0 \leq x \leq 50$, donde x es el número de años a partir de la edad de 20.

b) Usando la función del inciso **a)**, determina el ritmo cardiaco máximo recomendado para un hombre de 34 años de edad.



Fuente: Sociedad Americana de Geriatría

72. Umbral de pobreza El umbral de pobreza es un estimado del ingreso familiar anual necesario para tener el estándar de vida mínimo aceptable. La siguiente gráfica de barras muestra el umbral de pobreza para una familia de cuatro integrantes para los años de 2003 a 2007.



Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos

a) Determina una función lineal que pueda usarse para estimar el umbral de pobreza para una familia de cuatro integrantes, P, de 2003 a 2007. Sea t el número de años desde 2003.

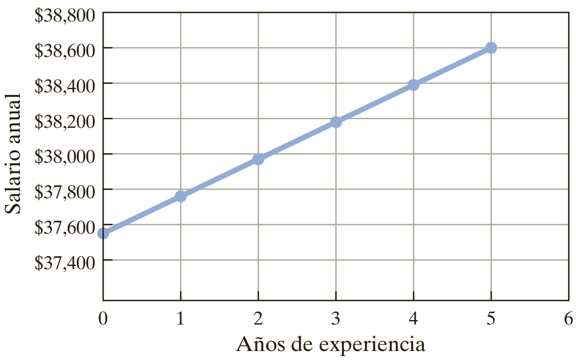
b) Usando la función del inciso **a)**, determina el umbral de pobreza en 2004. Compara tu respuesta con la gráfica para ver si la gráfica apoya tu respuesta.

c) Suponiendo que la tendencia continúe, determina el umbral de pobreza para una familia de cuatro integrantes en el año 2015.

d) Suponiendo que la tendencia continúe, ¿en qué año el umbral de pobreza para una familia de cuatro integrantes alcanzará los $22,997.75?

73. Salario de los profesores La siguiente gráfica muestra el salario de los profesores para el año escolar 2008-2009 en el sistema escolar del Condado Manatee, Florida, para profesores cuyo grado más alto es una licenciatura. Los profesores con 0 años de experiencia ganan $37,550 al año y los profesores con 5 años de experiencia ganan $38,600. Sean S el salario anual de un profesor y t los años de experiencia.

Escala salarial docente



Fuente: Junta escolar del condado de Manatee

a) Determina una función lineal $S(t)$ que coincida con estos datos.

b) Usando la función del inciso **a)**, estima el salario anual de un profesor con 3 años de experiencia. Compara tu respuesta con la gráfica para ver si la gráfica apoya tu respuesta.

c) Suponiendo que esta tendencia continúe, ¿cuál será el salario anual de un profesor con 10 años de experiencia?

d) Suponiendo que esta tendencia continúe, ¿cuántos años de experiencia debe tener un profesor para ganar $40,070 al año?

74. Salario de los bomberos En Lovonia, Michigan, los bomberos con 0 años de experiencia ganan un salario anual de $33,259 y los bomberos con 5 años de experiencia ganan un salario anual de $47,091. Sean S el salario anual de un bombero y t los años de experiencia.

Fuente: www.firehouse.com

© Monkey Business Images\Shutterstock

a) Determina una función lineal $S(t)$ que coincida con estos datos.

b) Usa la función del inciso **a)** para estimar el salario anual de un bombero con 3 años de experiencia.

c) Suponiendo que esta tendencia continúe, ¿cuál será el salario anual de un bombero con 10 años de experiencia?

d) Suponiendo que esta tendencia continúe, ¿cuántos años de experiencia debe tener un bombero para ganar un salario anual de $52,623.80?

75. Salario de un guardabosques En Maryland, los guardabosques con 0 años de experiencia ganan un salario anual de $37,855 y los guardabosques con 5 años de experiencia ganan un salario anual de $47,123. Sean S el salario anual de un guardabosques y t los años de experiencia.

Fuente: www.dbm.maryland.gov

a) Determina una función lineal $S(t)$ que coincida con estos datos.

b) Usa la función del inciso **a)** para estimar el salario anual de un guardabosques con 3 años de experiencia.

c) Suponiendo que esta tendencia continúe, ¿cuál será el salario anual de un guardabosques con 10 años de experiencia?

d) Suponiendo que esta tendencia continúe, ¿cuántos años de experiencia debe tener un guardabosques para ganar un salario anual de $52,683.80?

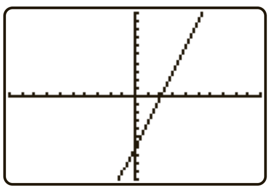
76. Seguro social El número de trabajadores beneficiarios del seguro social ha ido disminuyendo más o menos en forma lineal desde 1970. En 1970 había 3.7 trabajadores beneficiarios. En 2050 se proyecta que habrá 2.0 trabajadores beneficiarios. Sean W los trabajadores beneficiarios del seguro social y t el número de años desde 1970.

a) Determina una función $W(t)$ que coincida con los datos.

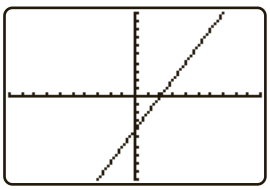
b) Estima el número de trabajadores beneficiarios en 2020.

Supón que estás intentando graficar las siguientes ecuaciones y obtienes las imágenes que se muestran. Explica cómo sabes si has cometido un error al introducir cada ecuación. Se usó la configuración de la ventana estándar en cada gráfica.

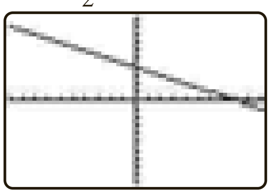
77. $y = 3x + 6$



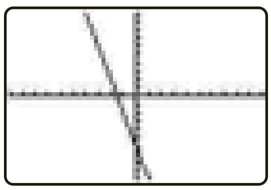
78. $y = -2x - 4$



79. $y = \frac{1}{2}x + 4$



80. $y = -4x - 1$



Problemas de desafío

81. El castillo La siguiente fotografía muestra El Castillo de Chichén Itzá, México. Cada lado del castillo tiene una escalinata que consta de 91 escalones, los cuales son difíciles de subir por ser muy estrechos y empinados. La distancia vertical total de los 91 escalones es de 1292.2 pulgadas. Si una línea recta se dibujara conectando los bordes de los escalones, el valor absoluto de la pendiente de esta recta sería de 2.21875. Determina la altura promedio y el ancho de un escalón.

© Allen R. Angel

82. Una **recta tangente** es una línea recta que toca una curva en un solo punto (la recta tangente puede cruzar la curva en un punto diferente si se extrapola). La **Figura 3.56** muestra tres rectas tangentes a la curva en los puntos a, b y c. Observa que la recta tangente en el punto a tiene una pendiente positiva, la recta tangente en el punto b tiene una pendiente de 0, y la recta tangente en el punto c tiene una pendiente negativa. Ahora considera la curva de la **Figura 3.57**. Imagina que las rectas tangentes están dibujadas en todos los puntos de la curva excepto en los puntos finales a y e. ¿En qué lugar en la curva de la **Figura 3.57** la recta tangente tendría una pendiente positiva, una pendiente de 0 y una pendiente negativa?

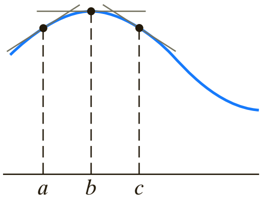


FIGURA 3.56

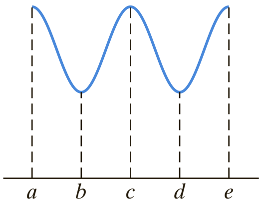


FIGURA 3.57

Actividad de grupo

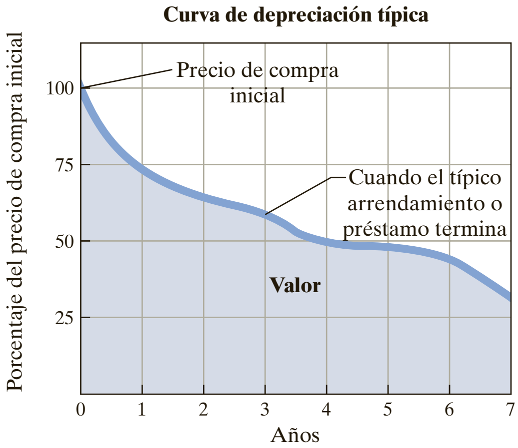
83. La siguiente gráfica de *Reportes de consumidores* muestra la depreciación de un típico automóvil. El precio de compra inicial se representa como 100%.

a) Integrante 1 del grupo: determina el periodo de un año en que un automóvil se deprecia más. Con base en la gráfica, estima el porcentaje que un automóvil se deprecia durante ese periodo.

b) Integrante 2 del grupo: determina entre qué años la depreciación parece lineal o casi lineal.

c) Integrante 3 del grupo: determina los 2 años en los que la depreciación es la más baja.

d) Como grupo, estimen la pendiente del segmento de recta del año 0 al año 1. Expliquen qué significa esto en términos de razón de cambio.



Ejercicios de repaso acumulados

[1.4] **84.** Evalúa $\dfrac{-6^2 - 32 \div 2 \div |-8|}{5 - 3 \cdot 2 - 4 \div 2^2}$.

Resuelve cada ecuación.

[2.1] **85.** $\frac{1}{4}(x + 3) + \frac{1}{5}x = \frac{2}{3}(x - 2) + 1$

86. $2.6x - (-1.4x + 3.4) = 6.2$

[2.4] **87. Trenes** Dos trenes salen de Chicago, Illinois, y viajan en la misma dirección en vías paralelas. El primer tren sale 3 horas antes que el segundo, y su velocidad es de 15 millas por hora más rápido que el segundo tren. Determina la velocidad de cada tren si se encuentran 270 millas alejados, 3 horas después de que el segundo tren sale de Chicago.

[2.6] **88.** Resuelve

a) $|2x + 1| > 5$. **b)** $|2x + 1| < 5$.

Prueba de mitad de capítulo: 3.1-3.4

Para determinar tu comprensión del material que se ha abordado hasta este momento, resuelve esta pequeña prueba. Las respuestas, y la sección en la que se trató el tema por primera vez, se proporcionan al final del libro. Revisa las preguntas que respondiste de manera incorrecta.

1. ¿En qué cuadrante se encuentra localizado el punto $(-3.5, -4.2)$?

Grafica cada ecuación de los ejercicios 2-5.

2. $y = 3x + 2$ **3.** $y = -x^2 + 3$

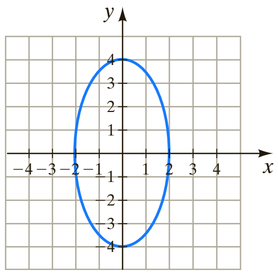
4. $y = |x| - 4$ **5.** $y = \sqrt{x - 4}$

6. **a)** ¿Qué es una relación?
b) ¿Qué es una función?
c) ¿Toda relación es una función? Explica.
d) ¿Toda función es una relación? Explica.

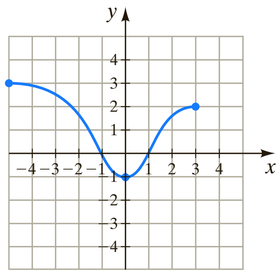
En los ejercicios 7-9, determina cuáles de las siguientes relaciones son también funciones. Escribe el dominio y el rango de cada relación o función.

7. $\{(1, 5), (2, -3), (7, -1), (-5, 6)\}$

8.



9.



10. Si $g(x) = 2x^2 + 8x - 13$, determina $g(-2)$.

11. La altura, h, en pies de una manzana que es lanzada desde el techo de un edificio es

$$h(t) = -6t^2 + 3t + 150$$

donde t es el tiempo en segundos. Determina la altura de la manzana 3 segundos después de que se lanzó.

12. Escribe la ecuación $7(x + 3) + 2y = 3(y - 1) + 18$ en forma estándar.

Grafica cada ecuación de los ejercicios 13-15.

13. $x + 3y = -3$ **14.** $x = -4$

15. $y = 5$

16. **Utilidad** La utilidad diaria, en dólares, de una compañía de zapatos es $p(x) = 30x - 660$, donde x es el número de pares de zapatos producidos y vendidos.

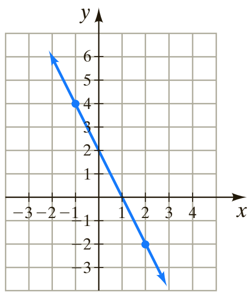
a) Elabora una gráfica de utilidad contra el número de pares de zapatos vendidos (hasta 40 pares).

b) Determina el número de pares de zapatos que deben venderse para que la compañía recupere los gastos.

c) Determina el número de pares de zapatos que deben venderse para que la compañía tenga una utilidad diaria de $360.

17. Determina la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(9, -2)$ y $(-7, 8)$.

18. Escribe la ecuación de la recta dada en la siguiente gráfica.



19. Escribe la ecuación $-3x + 2y = 18$ en la forma pendiente-intersección. Determina la pendiente y el valor que intersecta el eje y.

20. Si la gráfica de $y = 5x - 3$ se desplaza 4 unidades hacia arriba, determina

a) la pendiente de la gráfica desplazada.

b) el valor que intersecta el eje y de la gráfica desplazada.

c) la ecuación de la gráfica desplazada.

3.5 La forma punto-pendiente de una ecuación lineal

1 Entender la forma punto-pendiente de una ecuación lineal.

2 Utilizar la forma punto-pendiente para construir modelos a partir de gráficas.

3 Reconocer rectas paralelas y perpendiculares.

1 Entender la forma punto-pendiente de una ecuación lineal

La **forma punto-pendiente** de una recta se utiliza para determinar la ecuación de una recta cuando se conoce la *pendiente* y un *punto* de la recta. La forma punto-pendiente puede desarrollarse a partir de la ecuación para la pendiente entre dos puntos (x, y) y (x_1, y_1) en la recta, como se muestra en la **Figura 3.58**.

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

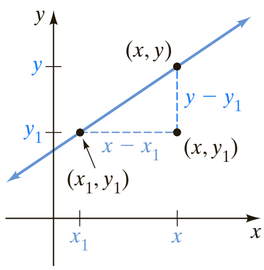


FIGURA 3.58

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $x - x_1$, obtenemos

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Forma punto-pendiente

La **forma punto-pendiente de una ecuación lineal** es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

donde m es la *pendiente* de la recta y (x_1, y_1) es un *punto específico* de la recta.

EJEMPLO 1 Escribe, en la forma pendiente-intersección, la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 4) y cuya pendiente es −3.

Solución Al conocer un punto específico y la pendiente de la recta, podemos escribir la ecuación en la forma punto-pendiente. Entonces podemos despejar y de la ecuación para escribir la ecuación de la forma pendiente-intersección. La pendiente es −3 y el punto de la recta es (1, 4), por lo que tenemos $m = -3$, $x_1 = 1$ y $y_1 = 4$.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = -3(x - 1) \quad \text{Forma punto-pendiente}$$

$$y - 4 = -3x + 3 \quad \text{Propiedad distributiva}$$

$$y = -3x + 7 \quad \text{Forma pendiente-intersección}$$

La gráfica de $y = -3x + 7$ tiene una pendiente de −3 y pasa por el punto (1, 4).

Resuelve ahora el ejercicio 5

Comprendiendo el álgebra

Formas de una ecuación lineal:

1. Forma estándar

   $ax + by = c$

2. Forma pendiente-intersección

   $y = mx + b$

3. Forma punto-pendiente

   $y - y_1 = m(x - x_1)$

La forma punto-pendiente puede ser utilizada para determinar la ecuación de una recta cuando se nos dan dos puntos en ella. En el ejemplo 2 mostramos cómo hacer esto.

EJEMPLO 2 Escribe, en la forma pendiente-intersección, la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2, 3) y (1, 4).

Solución Aunque no se nos dio la pendiente de la recta, podemos usar los dos puntos dados para determinarla. Después podemos proceder como lo hicimos en el ejemplo 1. Hacemos que (2, 3) sea (x_1, y_1) y (1, 4) sea (x_2, y_2).

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 3}{1 - 2} = \frac{1}{-1} = -1$$

La pendiente, m, es −1. Ahora elegimos uno de los dos puntos dados para utilizar como (x_1, y_1) en la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta. Seleccionamos (2, 3). Tenemos que $m = -1$, $x_1 = 2$ y $y_1 = 3$.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = -1(x - 2) \quad \text{Forma punto-pendiente}$$

$$y - 3 = -x + 2 \quad \text{Propiedad distributiva}$$

$$y = -x + 5 \quad \text{Forma pendiente-intersección}$$

La gráfica de $y = -x + 5$ se muestra en la **Figura 3.59**. Observa que la intersección con el eje y de esta recta es en 5, la pendiente es −1 y la recta pasa por los puntos (2, 3) y (1, 4).

Resuelve ahora el ejercicio 11

Comprendiendo el álgebra

Cuando usamos la fórmula punto-pendiente y debemos escoger alguno de los puntos, podemos escoger cualquiera de los puntos dados. Intentamos escoger aquel punto que facilite realizar los cálculos.

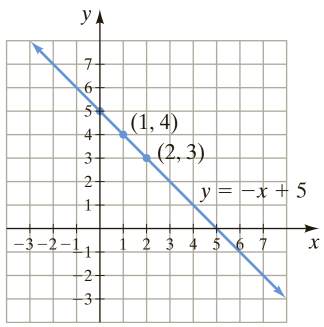


FIGURA 3.59

2 Utilizar la forma punto-pendiente para construir modelos a partir de gráficas

Ahora veamos una aplicación en la cual utilizamos la forma punto-pendiente para determinar una función que modele una situación dada.

EJEMPLO 3 **Quema de calorías** El número de calorías quemadas en 1 hora de conducir bicicleta es una función lineal de la velocidad de la bicicleta. Una persona que conduce a 12 mph quemará alrededor de 564 calorías en 1 hora y si conduce a 18 mph quemará alrededor de 846 calorías en 1 hora. Esta información se muestra en la **Figura 3.60**.

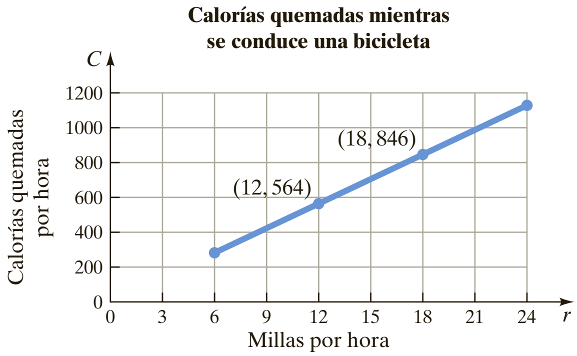


FIGURA 3.60 *Fuente:* Asociación Americana del Corazón

a) Determina una función lineal que pueda utilizarse para estimar el número de calorías, C, quemadas en 1 hora cuando una bicicleta se conduce a r mph, para $6 \le r \le 24$.

b) Utiliza la función determinada en el inciso **a)** para estimar el número de calorías quemadas en 1 hora cuando se conduce una bicicleta a 20 mph.

c) Utiliza la función determinada en el inciso **a)** para estimar a qué velocidad debe conducirse una bicicleta para quemar 800 calorías en 1 hora.

Solución

a) Entiende y traduce Usaremos las variables r (para velocidad) y C (para calorías) en lugar de x y y, respectivamente. Para determinar la función necesaria utilizaremos los puntos (12 564) y (18 846), y procedemos como en el ejemplo anterior. Primero se debe calcular la pendiente y después utilizaremos la forma punto-pendiente para determinar la ecuación de la recta.

Realiza los cálculos

$$m = \frac{C_2 - C_1}{r_2 - r_1}$$

$$= \frac{846 - 564}{18 - 12} = \frac{282}{6} = 47$$

Ahora escribimos la ecuación por medio de la forma punto-pendiente. Seleccionamos el punto (12 564) para (r_1, C_1).

$$C - C_1 = m(r - r_1)$$

$$C - 564 = 47(r - 12) \quad \text{Forma punto-pendiente}$$

$$C - 564 = 47r - 564$$

$$C = 47r \quad \text{Forma pendiente-intersección}$$

Responde Como el número de calorías quemadas, C, es una función de la velocidad, r, la función que buscamos es

$$C(r) = 47r$$

b) Para estimar el número de calorías quemadas en 1 hora mientras se conduce a 20 mph, sustituimos 20 por r en la función.

$$C(r) = 47r$$

$$C(20) = 47(20) = 940$$

Por lo tanto, cuando se conduce a 20 mph durante 1 hora se queman 940 calorías.

c) Para estimar la velocidad a la que debe conducirse una bicicleta para quemar 800 calorías en 1 hora, sustituimos 800 por $C(r)$ en la función.

$$C(r) = 47r$$
$$800 = 47r$$
$$\frac{800}{47} = r$$
$$r \approx 17.02$$

Para que la persona que conduce una bicicleta queme 800 calorías en 1 hora, se requiere una velocidad de 17.02 mph.

Resuelve ahora el ejercicio 53

Comprendiendo el álgebra

- Las rectas paralelas nunca se intersectan y tienen la misma pendiente.
- Las rectas perpendiculares se intersectan en ángulos rectos y tienen pendientes que son recíprocos negativos.

En el ejemplo 3, la función que se obtuvo fue $C(r) = 47r$. La gráfica de esta función tiene una pendiente de 47 e intersecta el eje y en (0, 0). Si la gráfica en la **Figura 3.60** de la página 186 se extendiera a la izquierda, intersectaría el origen. Esto tiene sentido ya que una velocidad de 0 millas por hora tendría como resultado que se quemasen 0 calorías.

3 Reconocer rectas paralelas y perpendiculares

La **Figura 3.61** ilustra dos rectas *paralelas*.

Rectas paralelas

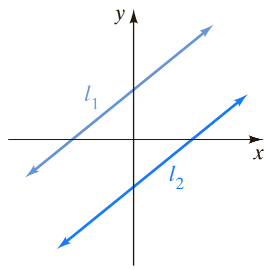


FIGURA 3.61

Rectas paralelas

Dos rectas son **paralelas** cuando tienen la misma pendiente. Cualquiera de las dos rectas verticales son paralelas entre sí.

Todas las rectas verticales son paralelas aunque su pendiente es indefinida.

La **Figura 3.62** ilustra rectas perpendiculares. Dos rectas son *perpendiculares* cuando se intersectan en ángulos rectos (90°).

Rectas perpendiculares

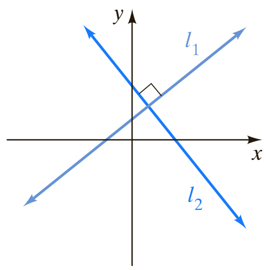


FIGURA 3.62

Rectas perpendiculares

Dos rectas son **perpendiculares** cuando sus pendientes son *recíprocos negativos*. Cualquier recta vertical es perpendicular a cualquier recta horizontal.

Para cualquier número a diferente de cero, su **recíproco negativo** es $\frac{-1}{a}$ o $-\frac{1}{a}$. Por ejemplo, el recíproco negativo de 2 es $\frac{-1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$. El producto de cualquier número diferente de cero y su recíproco negativo es -1.

EJEMPLO 4 Dos puntos en la recta l_1 son (0, 2) y (3, 4). Dos puntos en la recta l_2 son $(-2, 4)$ y $(2, -2)$. Por comparación de las pendientes, determina si l_1 y l_2 son rectas paralelas, perpendiculares o ninguna de ellas.

Solución Primero, determinamos la pendiente m_1 de l_1.

$$m_1 = \frac{4-2}{3-0} = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto, la pendiente de la primera recta es $\frac{2}{3}$. Ahora, determina la pendiente m_2 de l_2.

$$m_2 = \frac{-2-4}{2-(-2)} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Por lo tanto, la pendiente de la segunda recta es $-\frac{3}{2}$. Como las pendientes no son iguales, las rectas no son paralelas. Las pendientes son recíprocos negativos entre sí. Observa que

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$$

Como las pendientes son recíprocos negativos entre sí, las rectas son perpendiculares.

Resuelve ahora el ejercicio 15

Comprendiendo el álgebra

El producto de un número diferente de cero, a, y su recíproco negativo, $-\frac{1}{a}$ es siempre -1.

$$a\left(-\frac{1}{a}\right) = -1$$

EJEMPLO 5 Considera la ecuación $2x + 4y = 8$. Determina la ecuación de la recta que intersecta al eje y en 5 y si es **a)** paralela a la recta dada y **b)** perpendicular a la recta dada.

Solución

a) Si conocemos la pendiente, m, de una recta y su intersección con el eje y, $(0, b)$ podemos utilizar la forma pendiente-intersección, $y = mx + b$, para escribir la ecuación. Empezamos despejando y de la ecuación dada.

$$2x + 4y = 8$$
$$4y = -2x + 8$$
$$y = \frac{-2x + 8}{4}$$
$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma pendiente. Por lo tanto, la pendiente de la recta paralela a la línea dada deber ser $-\frac{1}{2}$. Como su pendiente es $-\frac{1}{2}$ y su intersección con el eje y es 5, la ecuación de la recta es

$$y = -\frac{1}{2}x + 5.$$

Las gráficas de $2x + 4y = 8$ (en azul) y $y = -\frac{1}{2}x + 5$ (en azul claro) se muestran en la **Figura 3.63**.

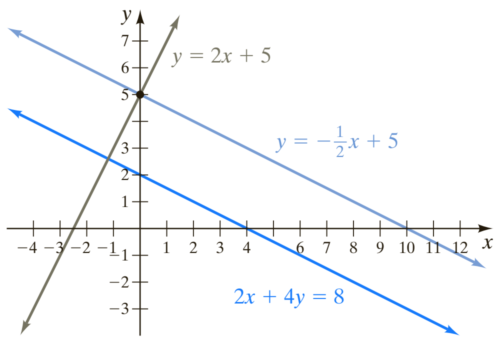


FIGURA 3.63

b) Dos rectas son perpendiculares cuando sus pendientes son recíprocos negativos. Sabemos que la pendiente de la recta es $-\frac{1}{2}$. Por lo tanto, la pendiente de la recta perpendicular deber ser $\dfrac{-1}{-\frac{1}{2}}$ o 2. La recta perpendicular a la línea dada tiene una intersección con el eje y en 5. Por lo tanto, la ecuación es

$$y = 2x + 5.$$

La **Figura 3.63** también muestra la gráfica de $y = 2x + 5$ (en gris).

Resuelve ahora el ejercicio 35

EJEMPLO 6 Considera la ecuación $5y = -10x + 7$.

a) Determina la ecuación de la recta que pasa por $\left(4, \frac{1}{3}\right)$ que es perpendicular a la gráfica de la ecuación dada. Escribe la ecuación en forma estándar.

b) Escribe la ecuación que se determinó en el inciso **a)** mediante el uso de la notación de función.

Solución

a) Determina la pendiente de la recta dada despejando y de la ecuación.

$$5y = -10x + 7$$
$$y = \frac{-10x + 7}{5}$$
$$y = -2x + \frac{7}{5}$$

Como la pendiente de la recta dada es -2, la pendiente de una recta perpendicular a ella debe ser el recíproco negativo de -2, que es $\frac{1}{2}$. La recta cuya ecuación buscamos debe pasar por el punto $\left(4, \frac{1}{3}\right)$, y su pendiente es $\frac{1}{2}$. Por medio de la forma punto-pendiente, obtenemos

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}(x - 4) \qquad \text{Forma punto-pendiente}$$

Ahora multiplicamos ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador, 6, para eliminar las fracciones.

$$6\left(y - \frac{1}{3}\right) = 6\left[\frac{1}{2}(x - 4)\right]$$
$$6y - 2 = 3(x - 4)$$
$$6y - 2 = 3x - 12$$

Escribimos la ecuación en forma estándar.

$$-3x + 6y - 2 = -12$$
$$-3x + 6y = -10 \qquad \text{Forma estándar}$$

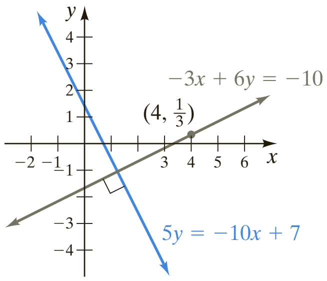


FIGURA 3.64

Observa que $3x - 6y = 10$ también es una respuesta aceptable. La **Figura 3.64** muestra la gráfica de la ecuación dada, $5y = -10x + 7$ (en azul) y la gráfica de la ecuación de la recta perpendicular, $-3x + 6y = -10$ (en gris).

b) Para escribir la ecuación utilizando la notación de función, despejamos y de la ecuación determinada en el inciso **a)** y luego remplazamos y con $f(x)$.

Te dejaremos demostrar que la función es $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{3}$.

Resuelve ahora el ejercicio 39

La tabla siguiente resume las tres formas de una ecuación lineal que hemos estudiado y menciona cuándo puede ser útil cada una.

Formas de las ecuaciones lineales

Forma general: $ax + by = c$	Se utiliza para graficar una ecuación lineal al encontrar las intersecciones de una gráfica.
Forma pendiente-intersección: $y = mx + b$	Se utiliza para determinar la pendiente e intersección con el eje y. Se utiliza para determinar la ecuación de una recta dada su pendiente y la intersección con el eje y. Se utiliza para determinar si dos rectas son paralelas o perpendiculares. Se utiliza para graficar la ecuación lineal usando la pendiente y la intersección con el eje y.
Forma punto-pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$	Se utiliza para determinar la ecuación de una recta cuando se da la pendiente y un punto (x_1, y_1) en la recta. Se utiliza para determinar la ecuación de una recta cuando se dan dos puntos de ella.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.5

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

forma estándar | forma punto-pendiente | forma pendiente-intersección | paralelas
perpendiculares | recíprocos negativos | el mismo

1. Dos rectas con la misma pendiente son rectas ______________.

2. Las líneas perpendiculares tienen pendientes que son _____ ______________ entre sí.

3. La ______________. de la ecuación de una recta es $y - y_1 = m(x - x_1)$.

4. La forma ______________. de la ecuación de una recta es $y = mx + b$.

Practica tus habilidades

Utiliza la forma punto-pendiente para encontrar la ecuación de una recta con las propiedades dadas. Después escribe la ecuación en la forma pendiente-intersección.

5. Pendiente = 3, cruza (2, 1)

6. Pendiente = −3, cruza (1, −2)

7. Pendiente $= -\frac{1}{2}$, cruza (4, −1)

8. Pendiente $= -\frac{7}{8}$, cruza (−8, −2)

9. Pendiente $= \frac{1}{2}$, cruza (−1, −5)

10. Pendiente $= -\frac{3}{2}$, cruza (7, −4)

11. Cruza (2, −3) y (−6, 9)

12. Cruza (4, −2) y (1, 9)

13. Cruza (4, −3) y (6, −2)

14. Cruza (1, 0) y (−4, −1)

Se dan dos puntos en l_1 y dos puntos en l_2. Determina si l_1 es paralela a l_2, l_1 es perpendicular a l_2 o ninguna de ellas.

15. l_1: (−2, 0) y (0, 2); l_2: (−3, 0) y (0, 3)

16. l_1: (7, 6) y (3, 9); l_2: (5, −1) y (9, −4)

17. l_1: (4, 6) y (5, 7); l_2: (−1, −1) y (1, 4)

18. l_1: (−3, 4) y (4, −3); l_2: (−5, −6) y (6, −5)

19. l_1: (3, 2) y (−1, −2); l_2: (2, 0) y (3, −1)

20. l_1: (3, 5) y (9, 1); l_2: (4, 0) y (6, 3)

Determina si ambas ecuaciones representan rectas que son paralelas, perpendiculares o ninguna de ellas.

21. $y = x + 9$; $y = -x + 2$

22. $2x + 3y = 11$; $y = -\frac{2}{3}x + 4$

23. $4x + 2y = 8$; $8x = 4 - 4y$

24. $2x - y = 4$; $3x + 6y = 18$

25. $2x - y = 4$; $-x + 4y = 4$

26. $6x + 2y = 8$; $4x - 5 = -y$

27. $y = \frac{1}{2}x - 6$; $-4y = 8x + 15$

28. $2y - 8 = -5x$; $y = -\frac{5}{2}x - 2$

29. $y = \frac{1}{2}x + 6$; $-2x + 4y = 8$

30. $-4x + 6y = 11$; $2x - 3y = 5$

31. $x - 2y = -9$; $y = x + 6$

32. $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = 1$; $\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y = -1$

Encuentra la ecuación de la recta con las propiedades dadas. Escribe la ecuación en la forma indicada.

33. Cruza (2, 5) y es paralela a la gráfica de $y = 2x + 4$ (forma pendiente-intersección)

34. Cruza (−1, 6) y es paralela a la gráfica de $4x - 2y = 6$ (forma pendiente-intersección)

35. Cruza (−3, −5) y es paralela a la gráfica de $2x - 5y = 7$ (forma estándar)

36. Cruza (−1, 4) y es perpendicular a la gráfica de $y = -2x - 1$ (forma estándar)

37. Con intersección en x (3, 0) e intersección en y (0, 5) (forma pendiente-intersección)

38. Cruza (−2, −1) y es perpendicular a la gráfica de $f(x) = -\frac{1}{5}x + 1$ (notación de función)

39. Cruza (1, 2) y es perpendicular a la gráfica de $y = -\frac{1}{4}x + 5$ (notación de función)

40. Cruza (−3, 5) y es perpendicular a la recta que intersecta al eje x en (2, 0) y el eje y en (0, 2) (forma estándar)

41. Cruza (6, 2) y es perpendicular a la recta que intersecta el eje x en (2, 0) y al eje y en (0, −3) (forma pendiente-intersección)

42. Cruza el punto (1, 2) y es paralela a la recta que cruza los puntos (3, 5) y (−2, 3) (notación de función)

Resolución de problemas

43. **Rutina en una caminadora** En una caminadora el número de calorías quemadas en 1 hora es una función de la velocidad de la caminadora. Una persona que camina a una velocidad de 2.5 millas por hora quemará cerca de 210 calorías. A 6 millas por hora la persona quemará 370 calorías. Sean C las calorías quemadas en 1 hora y s la velocidad de la caminadora.
   a) Determina una función lineal $C(s)$ que corresponda a los datos.
   b) Estima las calorías quemadas por una persona durante 1 hora en una caminadora a una velocidad de 5 millas por hora.

44. **Caminadora inclinada** El número de calorías quemadas durante 1 hora en una caminadora que va a velocidad constante es una función de la inclinación de la caminadora. A 4 millas por hora con 5° de inclinación, una persona quemará 525 calorías. A 4 mph con 15° de inclinación, la persona quemará 880 calorías. Sean C las calorías quemadas y d los grados de inclinación de la caminadora.
   a) Determina una función lineal $C(d)$ que corresponda a los datos.
   b) Determina el número de calorías quemadas por una persona durante 1 hora en una caminadora que va a 4 millas por hora y a 9° de inclinación.

45. **Demanda de reproductores de MP3** La *demanda* de un producto es el número de artículos que el público está dispuesto a comprar a un cierto precio. Supón que la demanda, d, para reproductores de MP3 vendidos en 1 mes es una función lineal del precio, p, para $\$150 \le p \le \$400$. Si el precio fuera \$200, entonces cada mes se venderían 50 reproductores de MP3. Si el precio fuera \$300, solo se venderían 30 reproductores de MP3.
   a) Usando pares ordenados de la forma (p, d), escribe una ecuación para la demanda, d, como función del precio, p.
   b) Usando la función del inciso **a)**, determina la demanda cuando el precio de los reproductores de MP3 sea de \$260.
   c) Usando la función del inciso **a)**, determina el precio de los reproductores de MP3 si la demanda es de 45.

© Jaimie Duplass/Shutterstock

46. **Demanda para nuevos sándwiches** El gerente de mercadotecnia de los restaurantes Arby´s determinó que la demanda, d, para un nuevo sándwich es una función lineal del precio, p, para $\$0.80 \le p \le \$4.00$. Si el precio es \$1.00, entonces 530 sándwiches se venderán cada mes. Si el precio es \$2.00, solo 400 sándwiches se venderán cada mes.
   a) Usando pares ordenados de la forma (p, d), escribe una ecuación para la demanda, d, como una función del precio, p.
   b) Usando la función del inciso **a)**, determina la demanda cuando el precio de los sándwiches sea de \$2.60.
   c) Usando la función del inciso **a)**, determina el precio de los sándwiches si la demanda es de 244.

47. **Oferta de cometas** La *oferta* de un producto es el número de artículos que un vendedor está dispuesto a vender a un cierto precio. El fabricante de un nuevo cometa para niños determina que el número de cometas que está dispuesto a ofertar, o, es una función lineal del precio de venta, p, para $\$2.00 \le p \le \$4.00$. Si un cometa se vende a \$2.00, entonces se proveerán 130 al mes. Si un cometa se vende a \$4.00, entonces se proveerán 320 al mes.
   a) Usando pares ordenados de la forma (p, o), escribe una ecuación para la oferta, o, como función del precio, p.
   b) Usando la función del inciso **a)**, determina la oferta cuando el precio de los cometas sea de \$2.80.
   c) Usando la función del inciso **a)**, determina el precio de los cometas si la oferta es de 225.

48. **Oferta de carriolas** El fabricante de carriolas determina que la oferta, o, es una función lineal del precio de venta, p, para $\$200 \le p \le \$300$. Si una carriola se vende a \$210.00, entonces se proveerán 20 carriolas al mes. Si una carriola se vende a \$230.00, entonces se proveerán 30 carriolas al mes.

© Ross Anania/Glowimages

   a) Usando pares ordenados de la forma (p, o), escribe una ecuación para la oferta, o, como función del precio, p.
   b) Usando la función del inciso **a)**, determina la oferta cuando el precio de una carriola sea de \$220.00.
   c) Usando la función del inciso **a)**, determina el precio de venta si la oferta es de 35 carriolas.

49. **Obra de teatro escolar** En una obra de teatro escolar el ingreso, i, es una función lineal del número de boletos vendidos, b. Si se venden 80 boletos, el ingreso es de \$1000. Si se venden 200 boletos, el ingreso es de \$2500.
   a) Utiliza estos datos para escribir el ingreso, i, como una función del número de boletos vendidos, b.
   b) Usando la función del inciso **a)**, determina el ingreso si se vendieron 120 boletos.
   c) Si el ingreso es de \$2200, ¿cuántos boletos se vendieron?

50. **Consumo de gasolina de un automóvil** El consumo de gasolina, c, de cierto automóvil es una función lineal de la velocidad, v, a la que se conduce el auto, para $30 \le v \le 60$. Si se conduce a 30 mph, el consumo de gasolina del auto es de 35 millas por galón. Si se conduce a 60 mph, el consumo de gasolina del auto es de 20 millas por galón.
   a) Utiliza estos datos para escribir el consumo de gasolina, c, como una función de la velocidad, v.
   b) Usando la función del inciso **a)**, determina el consumo de gasolina si se conduce a 48 mph.
   c) Usando la función del inciso **a)**, determina la velocidad a la que se debería conducir para tener un consumo de gasolina de 40 millas por galón.

51. Matriculación de un automóvil El costo por el derecho de matriculación, m, para un automóvil en cierta región es una función lineal del peso del vehículo, p, para $1000 \le v \le 6000$ libras. Si el peso es de 2000 libras, el derecho de matriculación cuesta \$30. Si el peso es de 4000 libras, el derecho de matriculación cuesta \$50.

a) Utiliza estos datos para escribir el derecho de matriculación, m, como una función del peso del vehículo, p.

b) Usando la función del inciso **a)**, determina el derecho de matriculación para un Ford Mustang 2006 si el peso del vehículo es de 3613 libras.

c) Si el costo de matriculación de un vehículo fuera de \$60, determina el peso del vehículo.

© Allen R. Angel

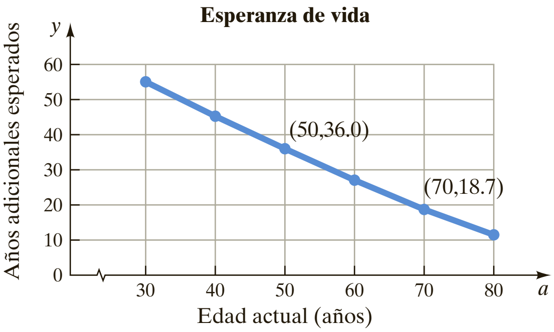
52. Salario de un profesor El salario anual de un profesor en la universidad de Chaumont es una función lineal del número de años de experiencia en docencia. Un profesor con 9 años de experiencia recibe \$41,350. Un profesor con 15 años de experiencia recibe \$46,687.

a) Utiliza estos datos para escribir el salario anual, s, de un profesor como una función del número de años de experiencia en docencia, n.

b) Usando la función del inciso **a)**, determina el salario anual de un profesor con 10 años de experiencia en docencia.

c) Usando la función del inciso **a)**, determina el número de años de experiencia que debe tener un profesor para obtener un salario anual de \$44,908.

53. Esperanza de vida Como se muestra en la siguiente gráfica, el número de años que se espera que viva un individuo, y, *se aproxima* a una función lineal. La esperanza de vida es una función de la edad actual, a, del individuo para $30 \le a \le 80$ años.



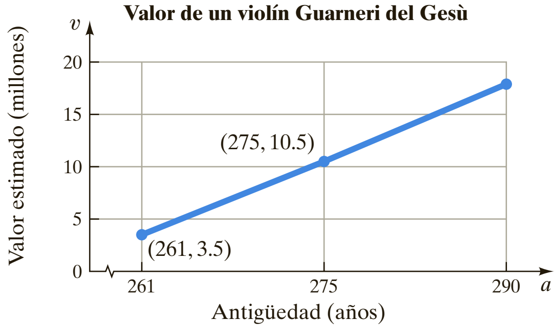
Fuente: TIAA/CREF

a) Utilizando los dos puntos de la gráfica, determina la función $y(a)$ que se puede utilizar para aproximar la gráfica.

b) Usando la función del inciso **a)**, determina la esperanza de vida de una persona de 37 años.

c) Usando la función del inciso **a)**, determina la edad actual de una persona con una esperanza de vida de 25 años.

54. Violín Guarneri del Gesù La gráfica muestra que el valor estimado, v, de un Violín Guarneri del Gesù es una función lineal de su antigüedad, a, en años para $261 \le a \le 290$.



Fuente: Violines raros Machold

a) Determina la función $v(a)$ que representa esta recta.

b) Usando la función del inciso **a)**, determina el valor estimado de un violín Guarneri del Gesù con 265 años de antigüedad.

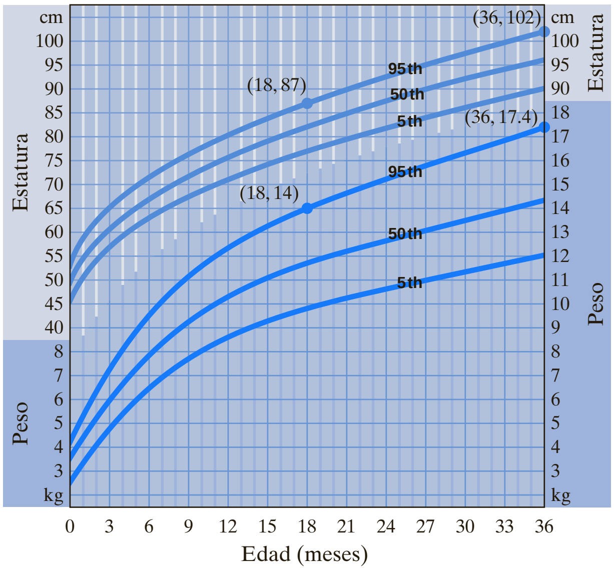
c) Usando la función del inciso **a)**, determina la antigüedad de un violín Guarneri del Gesù con un valor estimado de \$15 millones.

© Sibrikov Valery/Shutterstock

Guarneri del Gesù, “Sainton,” 1741

55. Peso de niños varones El siguiente diagrama muestra en percentiles la altura y el peso de niños varones, desde recién nacidos hasta los 36 meses de edad. Ciertas partes de las gráficas pueden calcularse con una función lineal. Por ejemplo, la gráfica que representa el percentil 95 del peso (la línea superior azul oscuro) entre 18 y 36 meses es más o menos lineal.

Niños: de 0 a 36 meses
Percentiles de estatura y peso por edad



Fuente: Centro Nacional de Estadísticas de Salud

a) Utiliza los puntos que se muestran en la gráfica del percentil 95° para escribir el peso, *p*, como una función lineal de la edad, *a*, para niños entre 18 y 36 meses.

b) Usando la función del inciso **a)**, determina el peso de un niño de 22 meses que forma parte del percentil 95° de peso. Compara tu respuesta con la gráfica para verificar si corresponden.

56. Altura de niños varones El diagrama del ejercicio 55 muestra que la gráfica que representa el percentil 95° de la estatura (la línea superior azul claro) de niños entre 18 y 36 meses es más o menos lineal.

a) Utiliza los puntos que se muestran en la gráfica del percentil 95° para escribir la estatura, *e*, como una función lineal de la edad, *a*, para niños entre 18 y 36 meses.

b) Usando la función del inciso **a)**, determina la estatura de un niño de 21 meses que forma parte del percentil 95°. Compara tu respuesta con la gráfica para verificar si corresponden.

Actividad de grupo

57. La gráfica de la derecha muestra un crecimiento en la circunferencia de la cabeza de un grupo de niñas. La línea gris representa el promedio de la circunferencia de la cabeza de las niñas para la edad dada, mientras que las líneas azules representan los límites superior e inferior del rango normal. Analiza y responde en grupo las siguientes preguntas.

a) Explica por qué la gráfica del promedio de la circunferencia de la cabeza representa una función.

b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál es la variable dependiente?

c) ¿Cuál es el dominio de la gráfica del promedio de la circunferencia de la cabeza? ¿Cuál es el rango de la gráfica del promedio de la circunferencia de la cabeza?

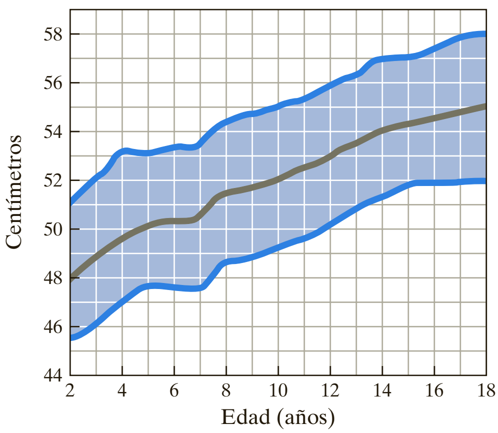
d) ¿Cuál es el intervalo considerado normal para niñas de 18 años?

e) En esta gráfica, ¿la circunferencia de la cabeza es función de la edad o la edad es función de la circunferencia de la cabeza? Justifica tu respuesta.

f) Determina el promedio de la circunferencia de la cabeza de las niñas a los 10 y a los 14 años.

g) Esta gráfica aparenta ser lineal. Determina una ecuación o función que se pueda utilizar para estimar la línea gris entre (2, 48) y (18, 55).

Circunferencia de la cabeza



Fuente: Centro Nacional de Estadísticas de Salud

Ejercicios de repaso acumulados

[2.5] **58.** Resuelve la desigualdad $6 - \frac{1}{2}x > 2x + 5$ y expresa la solución en notación de intervalo.

59. ¿Qué debes hacer cuando ambos lados de una desigualdad se multiplican o dividen entre un número negativo?

[3.2] **60.** **a)** ¿Qué es una relación?

b) ¿Qué es una función?

c) Dibuja una gráfica que represente una relación pero que no sea una función.

61. Encuentra el dominio y el rango de la función $\{(4, 7), (5, -4), (3, 2), (6, -1)\}$.

3.6 Álgebra de funciones

1 Determinar la suma, resta, producto y división de funciones.

2 Graficar la suma de funciones.

1 Determinar la suma, resta, producto y división de funciones

En esta sección analizaremos algunas formas de cómo se pueden combinar las funciones. Considera las funciones $f(x)= x - 3$ y $g(x) = x^2 + 2x$. Encontramos $f(5)$ y $g(5)$, como sigue

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x - 3 & \qquad g(x) &= x^2 + 2x \\
f(5) &= 5 - 3 = \mathbf{2} & \qquad g(5) &= 5^2 + 2(5) = \mathbf{35}
\end{aligned}
$$

En seguida, si sumamos las dos funciones, tenemos que

$$
\begin{array}{ccccc}
f(x) & + & g(x) & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
(x - 3) & + & (x^2 + 2x) & = & x^2 + 3x - 3
\end{array}
$$

Esta nueva función es designada como $(f + g)(x)$ y escribimos

$$(f + g)(x) = x^2 + 3x - 3$$

Determinamos $(f + g)(5)$ como sigue.

$$
\begin{aligned}
(f + g)(\ ) &= 5^2 + 3(5) - 3 \\
&= 25 + 15 - 3 = \mathbf{37}
\end{aligned}
$$

Observa que

$$
\begin{aligned}
f(5) + g(5) &= (f + g)(5) \\
\mathbf{2} + \mathbf{35} &= \mathbf{37} \qquad \text{Verdadero}
\end{aligned}
$$

De hecho, para cualquier número real sustituido por x encontramos que

$$f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

Existe una notación similar para la resta, multiplicación y división de funciones.

Operaciones de funciones

Si $f(x)$ representa una función, $g(x)$ representa una segunda función y x está en el dominio de ambas funciones, entonces pueden realizarse las siguientes operaciones sobre las funciones:

Suma de funciones: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

Resta de funciones: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

Multiplicación de funciones: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

División de funciones: $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, siempre que $g(x) \neq 0$

Comprendiendo el álgebra

El dominio de una función es el conjunto de valores que pueden ser usados por la variable independiente. Por ejemplo, el dominio de:

- $f(x) = 2x^2 - 6x + 5$ son todos los números reales, ya que cualquier número real puede sustituir a x.
- $g(x) = \dfrac{1}{x - 8}$ son todos los números reales excepto 8, ya que $x = 8$ nos da $\dfrac{1}{0}$, lo cual es indefinido.

EJEMPLO 1 Si $f(x) = x^2 + x - 6$ y $g(x) = x - 3$, determina

a) $(f + g)(x)$ **b)** $(f - g)(x)$

c) $(g - f)(x)$ **d)** ¿Es $(f - g)(x) = (g - f)(x)$?

Solución Para responder los incisos **a)-c)**, realizamos las operaciones indicadas.

a)
$$
\begin{aligned}
(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\
&= (x^2 + x - 6) + (x - 3) \\
&= x^2 + x - 6 + x - 3 \\
&= x^2 + 2x - 9
\end{aligned}
$$

b) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

$$= (x^2 + x - 6) - (x - 3)$$
$$= x^2 + x - 6 - x + 3$$
$$= x^2 - 3$$

c) $(g - f)(x) = g(x) - f(x)$

$$= (x - 3) - (x^2 + x - 6)$$
$$= x - 3 - x^2 - x + 6$$
$$= -x^2 + 3$$

d) Al comparar las respuestas de los incisos **b)** y **c)**, vemos que

$$(f - g)(x) \neq (g - f)(x)$$

Resuelve ahora el ejercicio 11

EJEMPLO 2 Si $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = x - 2$, determina

a) $(f - g)(6)$ **b)** $(f \cdot g)(5)$ **c)** $(f/g)(8)$

Solución

a) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

$$= (x^2 - 4) - (x - 2)$$
$$= x^2 - x - 2$$
$$(f - g)(6) = 6^2 - 6 - 2$$
$$= 36 - 6 - 2$$
$$= 28$$

También podríamos haber encontrado la solución como sigue:

$$f(x) = x^2 - 4 \qquad g(x) = x - 2$$
$$f(6) = 6^2 - 4 = 32 \qquad g(6) = 6 - 2 = 4$$
$$(f - g)(6) = f(6) - g(6)$$
$$= 32 - 4 = 28$$

b) Encontraremos $(f \cdot g)(5)$ utilizando el hecho de que

$$(f \cdot g)(5) = f(5) \cdot g(5)$$
$$f(x) = x^2 - 4 \qquad g(x) = x - 2$$
$$f(5) = 5^2 - 4 = 21 \qquad g(5) = 5 - 2 = 3$$

Entonces, $f(5) \cdot g(5) = 21 \cdot 3 = 63$. Por lo tanto, $(f \cdot g)(5) = 63$.

c) Determinaremos $(f/g)(8)$ utilizando el hecho

$$(f/g)(8) = f(8)/g(8)$$
$$f(x) = x^2 - 4 \qquad g(x) = x - 2$$
$$f(8) = 8^2 - 4 = 60 \qquad g(8) = 8 - 2 = 6$$

Entonces, $(f/g)(8) = f(8)/g(8) = 60/6 = 10$. Por lo tanto, $(f/g)(8) = 10$.

Resuelve ahora el ejercicio 31

2 Graficar la suma de funciones

Ahora explicaremos cómo podemos graficar la suma, resta, multiplicación (producto) o división (cociente) de dos funciones. La **Figura 3.65** de la página 196 muestra dos funciones, $f(x)$, ilustrada en azul y $g(x)$, ilustrada en gris.

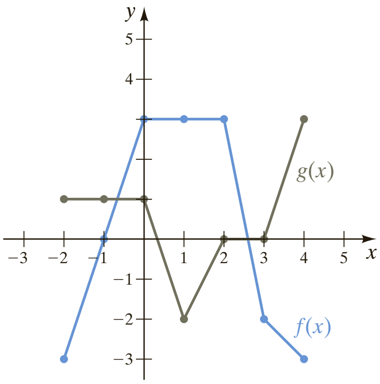


FIGURA 3.65

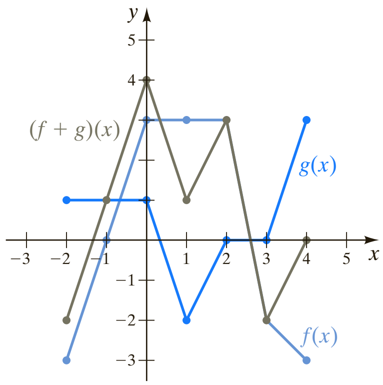


FIGURA 3.66

La tabla siguiente proporciona los valores enteros de x desde -2 hasta 4, los valores de $f(-2)$ a $f(4)$ y los valores de $g(-2)$ a $g(4)$. Estos valores se tomaron directamente de la **Figura 3.65**. Los valores de $(f+g)(-2)$ a $(f+g)(4)$ se determinaron sumando los valores de $f(x)$ y $g(x)$. La gráfica de $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, se ilustra en gris en la **Figura 3.66**.

x	$f(x)$	$g(x)$	$(f+g)(x)$
-2	-3	1	$-3+1=-2$
-1	0	1	$0+1=1$
0	3	1	$3+1=4$
1	3	-2	$3+(-2)=1$
2	3	0	$3+0=3$
3	-2	0	$-2+0=-2$
4	-3	3	$-3+3=0$

Podríamos graficar la resta, el producto o el cociente de dos funciones usando una técnica similar. Por ejemplo, para graficar la función producto $(f \cdot g)(x)$, podríamos evaluar $(f \cdot g)(-2)$ como sigue:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(-2) &= f(-2) \cdot g(-2)\\ &= (-3)(1) = -3\end{aligned}$$

Por lo tanto, la gráfica de $(f \cdot g)(x)$ tendría un par ordenado en $(-2, -3)$. Otros pares ordenados se determinarían por el mismo procedimiento.

En periódicos, revistas e Internet, con frecuencia encontramos gráficas que muestran la suma de dos o más funciones. Por lo general, las gráficas que muestran la suma de funciones se ilustran con una de tres formas: gráfica de líneas, gráfica de barras o gráfica lineal apilada (o acumulada). Los ejemplos 3 a 5 muestran los tres métodos generales. Cada uno de estos ejemplos utilizará la misma información referente al colesterol.

EJEMPLO 3 **Gráfica de líneas** Ray Hundley, desde 2006 a 2010, ha mantenido un registro de su colesterol malo (lipoproteínas de baja densidad o LBD) y de su colesterol bueno (lipoproteínas de alta densidad o LAD). La **Tabla 3.2** muestra su LBD y su LAD durante esos años.

TABLA 3.2 Colesterol

	2006	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**
LBD	220	240	140	235	130
LAD	30	40	70	35	40

a) Explica por qué los datos que consisten de los valores de LBD y de los años son una función, así como los datos que consisten de los valores para LAD y los años son también una función.

b) Dibuja una gráfica de líneas que muestre las LBD, LAD y el colesterol total de 2006 a 2010. EL colesterol total es la suma de LBD y LAD.

c) Si L representa la cantidad de LBD y H representa la cantidad de LAD, muestra que $(L + H)(2010) = 170$.

d) Observando la gráfica que dibujaste en el inciso **b)**, determina los años en que la LBD fue menor que 180.

Solución

a) Los datos que consisten de los valores de LBD y de los años marcados son una función ya que para cada año existe un valor de LBD. Observa que el año es la variable independiente y el valor de LBD es la variable dependiente. Por la misma razón, los datos consistentes en los valores de LAD y de los años son una función.

b) Para cualquier año dado, el colesterol total es la suma de LBD y LAD, para ese año. Por ejemplo, para 2009, a fin de determinar el colesterol, sumamos $235 + 35 = 270$. La gráfica en la **Figura 3.67** muestra LBD, LAD y el colesterol total de 2006 a 2010.

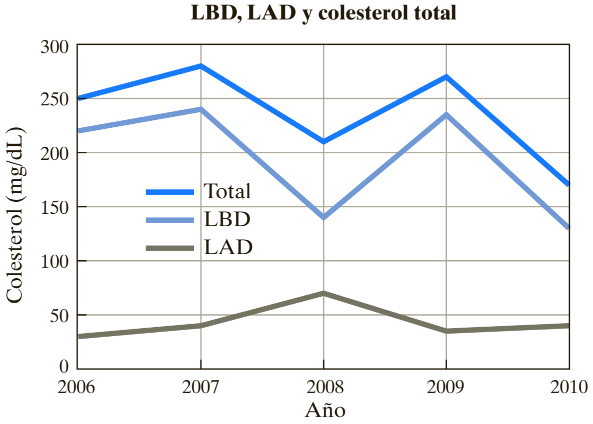


FIGURA 3.67

c) Para determinar LBD y LAD o el colesterol total, sumamos los dos valores para 2010.

$$\begin{aligned}(L + H)(2010) &= L(2010) + H(2010)\\ &= 130 + 40 = 170\end{aligned}$$

d) Observando la gráfica que se dibujó en el inciso **b)**, vemos que los años en que la LBD fue menor que 180 son 2008 y 2010.

Resuelve ahora el ejercicio 63a

EJEMPLO 4 Gráficas de barras

a) Con los datos de la **Tabla 3.2** de la página 196, dibuja una gráfica de barras que muestre la LBD, LAD y el colesterol total para los años 2006 a 2010.

b) Si L representa la cantidad de LBD y H representa la cantidad de LAD, utiliza la gráfica que se dibujó en el inciso **a)** para determinar $(L + H)(2007)$.

c) Observa la gráfica que dibujaste en el inciso **a)** y determina los años en que el colesterol total fue menor que 220.

d) Observa la gráfica que dibujaste en el inciso **a)** y estima el LAD en 2008.

Solución

a) Para obtener la gráfica de barras que muestre el colesterol total para cada año dado, sumamos la LAD a la LBD. Por ejemplo, para 2006 iniciamos dibujando una barra hasta 220, para representar la LBD. Directamente sobre esa barra agregamos una segunda barra de 30 unidades, para representar la LAD. Esto eleva la barra total a $220 + 30$ o 250 unidades. Utilizamos el mismo procedimiento para cada año desde 2006 a 2010. La gráfica de barras se muestra en la **Figura 3.68**.

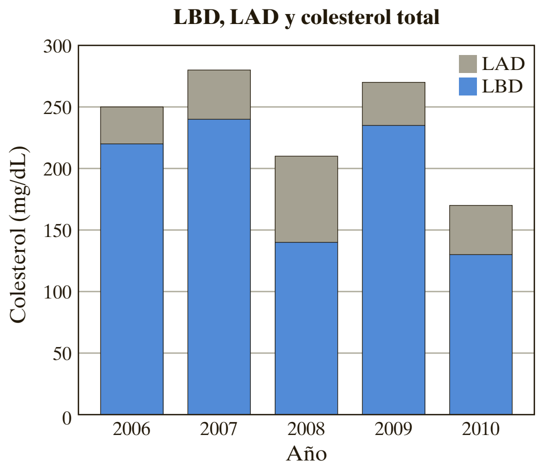


FIGURA 3.68

b) Al observar la gráfica en la **Figura 3.68**, vemos que $(L + H)(2007)$ o el colesterol total para 2007, es alrededor de 280.

c) Al observar la gráfica, vemos que el colesterol total fue menor que 220 en 2008 y 2010.

d) Para 2008, la barra de LAD inicia cerca de 140 y termina en casi 210. La diferencia de estas cantidades, $210 - 140 = 70$, representa la cantidad de LAD en 2008. Por lo tanto, la LAD en 2008 fue alrededor de 70.

Resuelve ahora el ejercicio 63b

EJEMPLO 5 Gráfica de líneas apiladas

a) Con los datos de la **Tabla 3.2** de la página 196, dibuja una gráfica de líneas apiladas (o acumuladas) que muestre la LBD, LAD y el colesterol total para los años 2006 a 2010.

b) Con la gráfica que se dibujó en el inciso **a)**, determina en qué años el colesterol total fue mayor o igual a 200.

c) Observa la gráfica que dibujaste en el inciso **a)** y estima la LAD en 2010.

d) Con la gráfica que se dibujó en el inciso **a)**, determina en qué años la LBD fue mayor o igual a 180 y el colesterol total fue menor o igual a 250.

Solución

a) Para obtener la gráfica de líneas apiladas, primero dibuja la línea que representa la LBD. Será la misma línea que se dibujó para representar la LBD en la **Figura 3.67** en la página 197. El área bajo esta línea de la gráfica (área azul en la **Figura 3.69**) representa la LBD. En seguida año por año sumamos la LAD a la LBD para crear una segunda línea en la gráfica. Por ejemplo, en el año 2006, la segunda línea de la gráfica tiene un valor de $220 + 30$ o 250. El área entre las dos líneas de la gráfica (área gris en la **Figura 3.69**) representa la LAD y el área total bajo la línea que se encuentra arriba en la gráfica representa el colesterol total.

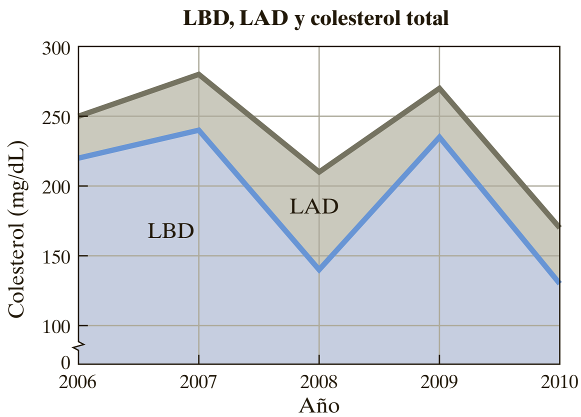


FIGURA 3.69

b) Al observar la gráfica, vemos que el colesterol total, indicado por la línea gris, fue mayor o igual que 200 en 2006, 2007, 2008 y 2009.

c) Al observar la gráfica en el área de LAD, podemos ver que en 2010 la LAD inicia alrededor de 130 y termina cerca de 170. Si restamos, obtenemos $170 - 130 = 40$. Por lo tanto, la LAD en 2010 fue casi 40. Si representamos con H la cantidad de LAD, tenemos que $H(2010) \approx 40$.

d) Como se observa en la gráfica, podemos determinar que el único año en el que la LBD fue mayor o igual a 180 y el colesterol total fue menor o igual a 250 fue 2006.

Resuelve ahora el ejercicio 63c

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.6

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

dominio	rango	$\dfrac{x^2}{2x-5}$	x^2+2x-5	x^2-2x+5	x^2-2x-5	
$2x^3-5x^2$	todos los números reales	3	5	7	todos los números reales excepto el 3	

En los ejercicios 1-6, considera $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x - 5$.

1. $(f - g)(x) =$ ____________.

2. $(f - g)(2) =$ ____________.

3. $(f + g)(x) =$ ____________.

4. $(f + g)(2) =$ ____________.

5. $(f \cdot g)(x) =$ ____________.

6. $(f / g)(x) =$ ____________.

7. El dominio de la función $f(x) = x - 3$ es ____________.

8. El dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ es ____________.

Practica tus habilidades

Para cada par de funciones, determina **a)** $(f + g)(x)$, **b)** $(f + g)(a)$, *y* **c)** $(f + g)(2)$.

9. $f(x) = x + 5, g(x) = 3x - 2$

10. $f(x) = x^2 - x - 8, g(x) = x^2 + 1$

11. $f(x) = -3x^2 + x - 4, g(x) = x^3 + 3x^2$

12. $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - x - 1, g(x) = x^3 - x^2 + 2x + 6$

13. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - x, g(x) = 3x^2 + 4$

14. $f(x) = 3x^2 - x + 2, g(x) = 6 - 4x^2$

Sea $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = -5x - 3$. Determina lo siguiente.

15. $f(3) + g(3)$

16. $f(5) + g(5)$

17. $f(4) - g(4)$

18. $f\left(\frac{1}{4}\right) - g\left(\frac{1}{4}\right)$

19. $f(3) \cdot g(3)$

20. $f(-1) \cdot g(-1)$

21. $\dfrac{f\left(\frac{3}{5}\right)}{g\left(\frac{3}{5}\right)}$

22. $f(-1) / g(-1)$

23. $g(-3) - f(-3)$

24. $g(6) \cdot f(6)$

25. $g(0) / f(0)$

26. $f(2) / g(2)$

Sea $f(x) = 2x^2 - x$ y $g(x) = x - 6$. Determina lo siguiente.

27. $(f + g)(x)$

28. $(f + g)(a)$

29. $(f + g)(1)$

30. $(f + g)(-3)$

31. $(f - g)(-2)$

32. $(f - g)(1)$

33. $(f \cdot g)(0)$

34. $(f \cdot g)(3)$

35. $(f / g)(-1)$

36. $(f / g)(6)$

37. $(g / f)(5)$

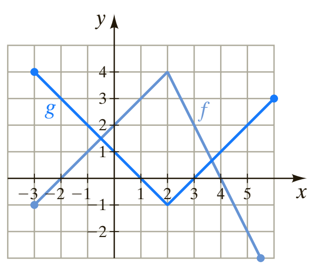
38. $(g - f)(4)$

39. $(g - f)(x)$

40. $(g - f)(r)$

Resolución de problemas

Usando la gráfica de la derecha, determina el valor de lo siguiente.



41. $(f + g)(0)$

42. $(f - g)(0)$

43. $(f \cdot g)(2)$

44. $(f / g)(1)$

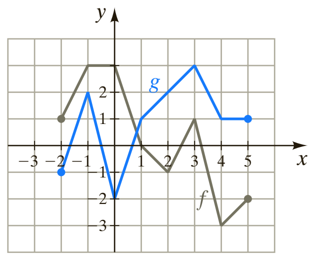
45. $(g - f)(-1)$

46. $(g + f)(-3)$

47. $(g / f)(4)$

48. $(g \cdot f)(-1)$

Usando la gráfica de la derecha, determina el valor de lo siguiente.



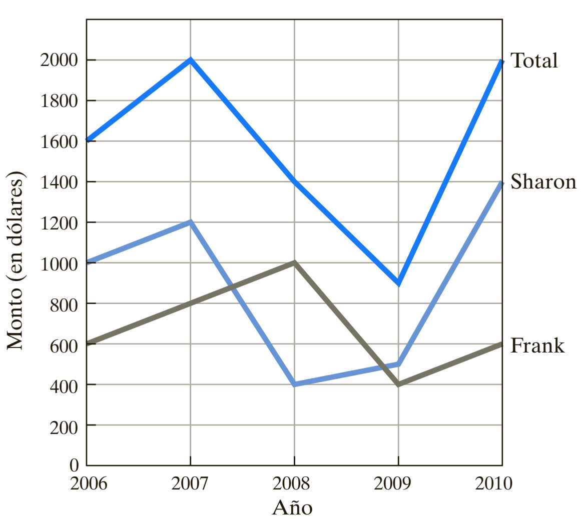
49. $(f+g)(-2)$ **50.** $(f-g)(-1)$

51. $(f \cdot g)(1)$ **52.** $(g-f)(3)$

53. $(f / g)(4)$ **54.** $(g / f)(5)$

55. $(g / f)(2)$ **56.** $(g \cdot f)(0)$

57. Cuenta de retiro La siguiente gráfica muestra el monto de dinero con el que Sharon y Frank Dangman han contribuido en conjunto para una cuenta de retiro de 2006 a 2010.



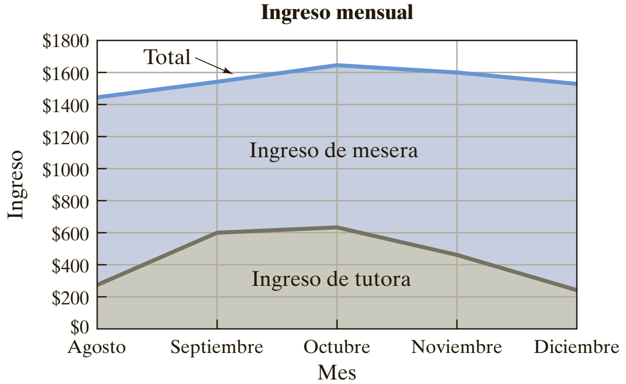
a) ¿En qué año Frank contribuyó con $1000?

b) En 2010, estima cuanto más contribuyó Sharon a la cuenta de retiro que lo que contribuyó Frank.

c) Para este periodo de 5 años, estima el monto total con el que contribuyeron Sharon y Frank para la cuenta de retiro.

d) Si el ingreso de Frank es una función $F(x)$ y el ingreso de Sharon es una función $S(x)$, estima $(F+S)(2009)$.

58. Empleos para universitarios Kelly Housman es una universitaria que trabaja como mesera los fines de semana y como tutora entre semana. La siguiente gráfica muestra su ingreso para los meses de agosto, septiembre, octubre, noviembre y diciembre.



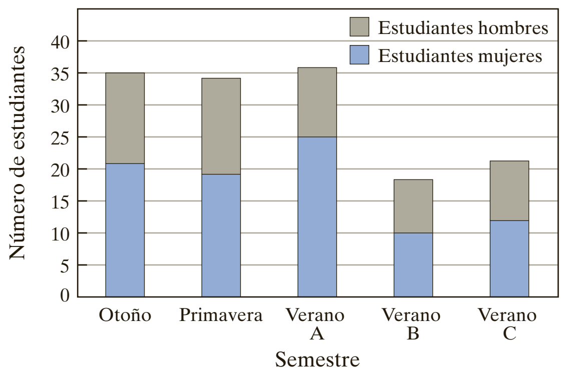
a) ¿En qué mes Kelly ganó un total de poco más de $1600?

b) Estima el ingreso de Kelly en septiembre por trabajar como mesera.

c) Para este periodo de 5 meses, estima el ingreso total de Kelly.

d) Si el ingreso por trabajar de tutora es una función $T(x)$ y el ingreso por trabajar de mesera es una función $W(x)$, estima $(W+T)(\text{Octubre})$.

59. Estudiantes de una clase La siguiente gráfica de barras muestra el número total de estudiantes en la clase de Álgebra Intermedia del Dr. James Condor por semestre. La parte inferior de cada barra representa el número de estudiantes mujeres, F, y la parte superior de cada barra representa el número de estudiantes hombres, M.



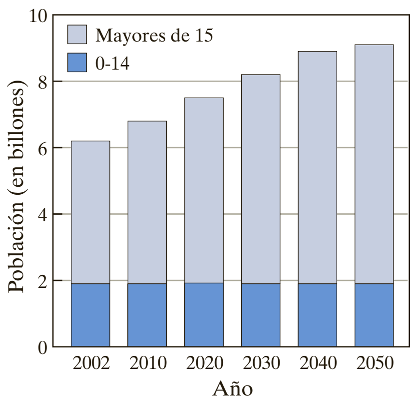
a) ¿En qué semestre el Dr. Condor tuvo el mayor número de estudiantes de Álgebra Intermedia? ¿Cuántos estudiantes estuvieron en esa clase?

b) ¿En qué semestre el Dr. Condor tuvo el menor número de estudiantes mujeres? ¿Cuántas estudiantes mujeres tuvo en clase ese semestre?

c) Estima M (*Verano A*)

d) Estima F (*Primavera*)

60. Población mundial La siguiente gráfica muestra el total de población mundial proyectada y la población de niños de 0-14 años de edad proyectada de 2002 a 2050.



Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos

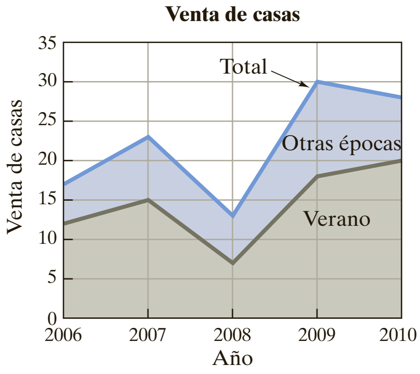
a) Estima la población mundial proyectada en 2050.

b) Estima el número proyectado de niños entre 0-14 años de edad en 2050.

c) Estima el número proyectado de personas mayores de 15 años en 2050.

d) Estima la diferencia proyectada del total de población mundial entre 2002 y 2050.

61. Venta de casas En muchas regiones del país, las casas se venden mejor durante el verano que en otras épocas del año. La siguiente gráfica muestra el total de ventas de casas en el poblado de Mineral Point de 2006 a 2010. La gráfica también muestra la venta de casas durante el verano, S, y durante otras épocas del año, Y.



Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos

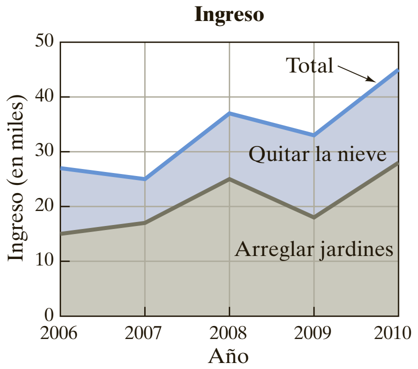
a) Estima el número de casas vendidas durante el verano de 2010.

b) Estime el número de casas vendidas durante otras épocas en 2010.

c) Estima $Y(2009)$.

d) Estima $(S + Y)(2007)$.

62. Ingreso Rod Sac deCrasse es dueño de un negocio que en verano arregla jardines y en invierno quita la nieve. La siguiente gráfica muestra el ingreso total, T, para los años 2006 a 2010 dividido entre arreglar jardines, L, y quitar la nieve, S.



a) Estima el ingreso total para 2010.

b) Estima $L(2006)$.

c) Estima $S(2009)$.

d) Estima $(L + S)(2007)$.

63. Ingreso La siguiente tabla muestra el ingreso del Sr. y la Sra. Abrams para los años de 2006 a 2010.

	2006	2007	2008	2009	2010
Sr. Abrams	\$15,500	\$17,000	\$8000	\$25,000	\$20,000
Sra. Abrams	\$4500	\$18,000	\$28,000	\$7000	\$22,500

a) Elabora una gráfica de línea que muestre el ingreso del Sr. Abrams, el ingreso de la Sra. Abrams y el ingreso total de 2006 a 2010. Ver ejemplo 3.

b) Elabora una gráfica de barras que muestre la información dada. Ver ejemplo 4.

c) Elabora una gráfica de línea apilada que muestre la información dada. Ver ejemplo 5.

64. Facturas telefónicas La siguiente tabla muestra las facturas telefónicas de casa y del celular de Kelly López (redondeados a los \$10 más cercanos) de 2006 a 2010.

	2006	2007	2008	2009	2010
Casa	\$40	\$50	\$60	\$50	\$0
Celular	\$80	\$50	\$20	\$50	\$60

a) Elabora una gráfica de línea que muestre las facturas telefónicas de la casa y del celular, además del total de facturas telefónicas de 2006 a 2010.

b) Elabora una gráfica de barras que muestre la información dada.

c) Elabora una gráfica de líneas apiladas que muestre la información dada.

65. Impuestos María Cisneros paga impuestos federales y estatales. La siguiente tabla muestra el monto de impuestos que pagó al gobierno federal y al gobierno estatal de 2006 a 2010.

	2006	2007	2008	2009	2010
Federal	\$4000	\$5000	\$3000	\$6000	\$6500
Estatal	\$1600	\$2000	\$0	\$1700	\$1200

a) Elabora una gráfica de líneas que muestre el monto que gastó en impuestos federales, el monto que gastó en impuestos estatales y el total del monto gastado en el pago de estos dos impuestos de 2006 a 2010.

b) Elabora una gráfica de barras que muestre la información dada.

c) Elabora una gráfica de líneas apiladas que muestre la información dada.

66. Colegiatura universitaria La familia Olmert tiene gemelos, Justin y Kelly, que asisten a universidades distintas. La colegiatura de Justin y Kelly se muestra en la siguiente tabla para los años de 2006 a 2009.

	2006	2007	2008	2009
Justin	\$12,000	\$6000	\$8000	\$9000
Kelly	\$2000	\$8000	\$8000	\$5000

a) Elabora una gráfica de línea que muestre la información dada, incluyendo la colegiatura que se gasta en total en las universidades de Justin y de Kelly de 2006 a 2009.

b) Elabora una gráfica de barras que muestre la información dada.

c) Elabora una gráfica de líneas apiladas que muestre la información dada.

Ejercicios de conceptos y escritura

En los ejercicios 67-76, considera f y g como dos funciones graficadas en el mismo plano cartesiano.

67. ¿Qué restricción tiene la propiedad $f(x)/g(x) = (f/g)(x)$? Explica.

68. ¿Se cumple $f(x) - g(x) = (f - g)(x)$ para todos los valores de x? Explica.

69. ¿Se cumple $(f - g)(x) = (g - f)(x)$ para todos los valores de x? Explica y da un ejemplo para apoyar tu respuesta.

70. ¿Se cumple $(f + g)(x) = (g + f)(x)$ para todos los valores de x? Explica y da un ejemplo para apoyar tu respuesta.

71. Si $(f + g)(a) = 0$, ¿qué debe cumplirse en $f(a)$ y $g(a)$?

72. Si para a, $(f \cdot g)(a) = 0$, ¿qué debe cumplirse en $f(a)$ y $g(a)$?

73. Si para a, $(f - g)(a) = 0$, ¿qué debe cumplirse en $f(a)$ y $g(a)$?

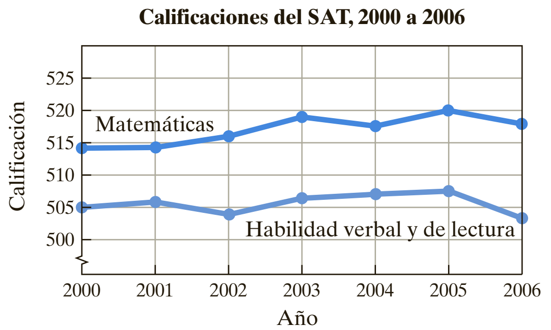
74. Si para a, $(f - g)(a) < 0$, ¿qué debe cumplirse en $f(a)$ y $g(a)$?

75. Si para a, $(f / g)(a) < 0$, ¿qué debe cumplirse en $f(a)$ y $g(a)$?

76. Si para a, $(f \cdot g)(a) < 0$, ¿qué debe cumplirse en $f(a)$ y $g(a)$?

Actividad de grupo

77. Calificaciones en el SAT La gráfica muestra las calificaciones promedio en matemáticas y en habilidades verbales y de lectura de estudiantes que presentaron el examen SAT de ingreso a la universidad de 2000 a 2006. Sean f las calificaciones en matemáticas, g las calificaciones en habilidad verbal y de lectura y t el año. En grupo, elaboren una gráfica que represente $(f + g)(t)$.



Ejercicios de repaso acumulados

[1.5] **78.** Evalúa $(-4)^{-3}$.

[1.6] **79.** Expresa 2,960,000 en notación científica.

[2.2] **80.** Despejar h de la fórmula $A = \frac{1}{2}bh$.

[2.3] **81. Lavadora** El costo de una lavadora, incluyendo 6% de impuesto, es de \$477. Determina el costo sin impuesto de una lavadora.

[3.1] **82.** Grafica $y = |x| - 2$.

[3.3] **83.** Grafica $3x - 4y = 12$.

3.7 Graficar desigualdades lineales

1 Graficar desigualdades lineales con dos variables.

Comprendiendo el álgebra

Los siguientes símbolos son usados en desigualdades lineales:

- $<$ es menor que
- $>$ es mayor que
- $\leq$ es menor o igual que
- $\geq$ es mayor o igual que

1 Graficar desigualdades lineales con dos variables

Desigualdades lineales con dos variables

Una **desigualdad lineal con dos variables** se puede escribir en una de las siguientes formas:

$$ax + by < c, ax + by > c, ax + by \leq c, ax + by \geq c$$

donde a, b y c son números reales, y a y b son diferentes de 0.

Ejemplos de desigualdades lineales con dos variables

$$2x + 3y > 2 \qquad 3y < 4x - 9$$

$$-x - 2y \leq 3 \qquad 5x \geq 2y - 7$$

Considera la gráfica de la ecuación $x + y = 3$ que se muestra en la **Figura 3.70**. La línea recta actúa como **frontera** entre los dos *semiplanos* y divide el plano en tres distintas regiones: la recta misma y los dos semiplanos, uno a cada lado de la recta.

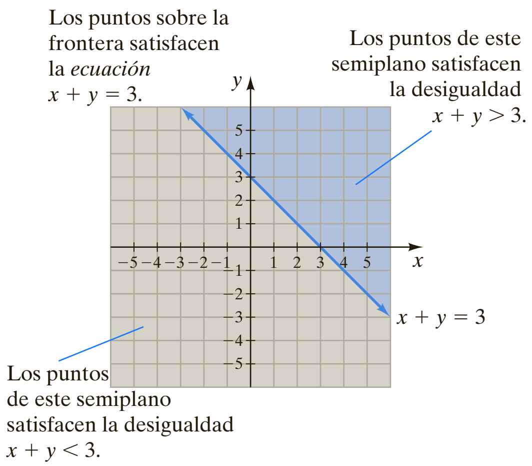


FIGURA 3.70

Comprendiendo el álgebra

Si una desigualdad lineal presenta

- $<$ o $>$, se dibuja una línea *punteada* como frontera.
- $\leq$ o $\geq$, se dibuja una línea *sólida* como frontera.

Cuando graficamos una desigualdad lineal, por lo general, se sombrea solo un lado de los dos semiplanos establecidos por la frontera. Si la desigualdad se escribe con el uso de $<$ o $>$, se dibuja una línea punteada, la cual indica que la frontera no es parte del conjunto solución. Si la desigualdad se escribe con el uso $\leq$ o $\geq$, se dibuja una línea sólida, la cual indica que la frontera forma parte del conjunto solución.

Para graficar una desigualdad lineal con dos variables

1. Para obtener la ecuación de la frontera, reemplaza el símbolo de la desigualdad con un signo de igual.
2. Traza la gráfica de la ecuación en el paso 1. Si la desigualdad contiene un símbolo $\geq$ o $\leq$, se traza una línea sólida. Si la desigualdad contiene un símbolo $>$ o $<$, se traza una línea punteada.
3. Selecciona un punto que no esté en la frontera y determina si este punto es una solución de la desigualdad original. Si el punto seleccionado es una solución, sombrea la región del lado de la línea que contiene este punto. Si el punto seleccionado no satisface la desigualdad, sombrea la región del lado de la línea que no contiene al punto.

En el paso 3, estamos decidiendo cuál de los semiplanos contiene los puntos que satisfacen la desigualdad dada.

EJEMPLO 1 Grafica la desigualdad $y < \frac{2}{3}x - 3$.

Solución Primero, grafica la ecuación $y = \frac{2}{3}x - 3$. Como la desigualdad original contiene un signo menor que, $<$, utilizamos una línea punteada al trazar la gráfica (ver **Figura 3.71**). La línea punteada indica que los puntos de esta línea no son soluciones de la desigualdad $y < \frac{2}{3}x - 3$. Selecciona un punto que no esté en la línea y determina si éste satisface la desigualdad. Con frecuencia, el punto más sencillo de utilizar es el origen (0, 0).

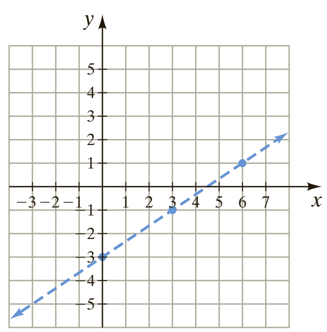


FIGURA 3.71

Punto de comprobación (0, 0)

$$y < \frac{2}{3}x - 3$$

$$0 \overset{?}{<} \frac{2}{3}(0) - 3$$

$$0 \overset{?}{<} 0 - 3$$

$$0 < -3 \qquad \text{Falso}$$

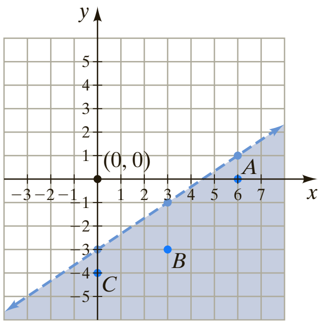


FIGURA 3.72

Como 0 no es menor que -3, el punto (0, 0) no satisface la desigualdad. La solución serán todos los puntos del semiplano que no contiene el punto (0, 0). Sombrea esta región del semiplano (ver **Figura 3.72**). Cada punto que esté en el área sombreada satisface la desigualdad dada. Verifiquemos con algunos puntos *A*, *B* y *C*.

Punto *A*	Punto *B*	Punto *C*
(6, 0)	(3, −3)	(0, −4)
$y < \frac{2}{3}x - 3$	$y < \frac{2}{3}x - 3$	$y < \frac{2}{3}x - 3$
$0 \overset{?}{<} \frac{2}{3}(6) - 3$	$-3 \overset{?}{<} \frac{2}{3}(3) - 3$	$-4 \overset{?}{<} \frac{2}{3}(0) - 3$
$0 \overset{?}{<} 4 - 3$	$-3 \overset{?}{<} 2 - 3$	$-4 \overset{?}{<} 0 - 3$
$0 < 1$ Verdadero	$-3 < -1$ Verdadero	$-4 < -3$ Verdadero

Resuelve ahora el ejercicio 9

EJEMPLO 2 Grafica la desigualdad $y \geq -\frac{1}{2}x$.

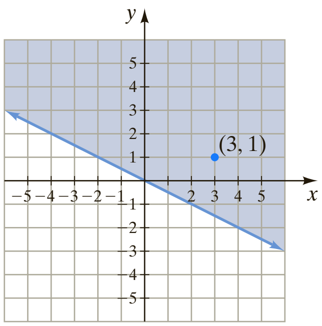


FIGURA 3.73

Solución Primero, grafica la ecuación $y = -\frac{1}{2}x$. Como la desigualdad original contiene $\geq$, utilizamos una línea sólida que indica que los puntos de esta línea son soluciones de la desigualdad (ver **Figura 3.73**). Como el punto (0, 0) está sobre la línea, no podemos seleccionar este punto para comprobar la solución. De forma arbitraria elegimos (3, 1).

Punto de comprobación (3, 1)

$$y \geq -\frac{1}{2}x$$

$$1 \overset{?}{\geq} -\frac{1}{2}(3)$$

$$1 \geq -\frac{3}{2} \qquad \text{Verdadero}$$

Como el punto (3, 1) satisface la desigualdad, todo punto en el mismo semiplano como (3, 1) también satisfará la desigualdad $y \geq -\frac{1}{2}x$. Sombrea esta región del semiplano como se indica. Todo punto que se encuentre en la región sombreada, así como todo punto sobre la recta, satisface la desigualdad.

Resuelve ahora el ejercicio 19

EJEMPLO 3 Grafica la desigualdad $3x - 2y < -6$.

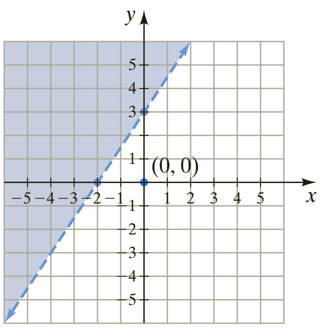


FIGURA 3.74

Solución Primero, grafica la ecuación $3x - 2y = -6$. Como la desigualdad original contiene $<$, utilizamos una línea punteada (ver **Figura 3.74**). Al sustituir el punto de comprobación (0, 0) en la desigualdad, obtenemos una proposición falsa.

Punto de comprobación (0, 0)

$$3x - 2y < -6$$

$$3(0) - 2(0) \overset{?}{<} -6$$

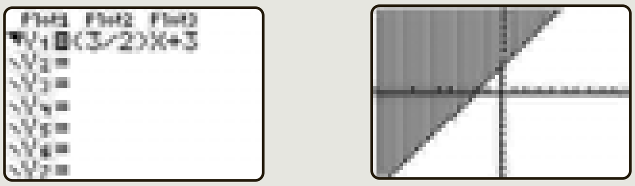
$$0 < -6 \qquad \text{Falso}$$

Por lo tanto, la solución es el semiplano que no contiene el origen.

Resuelve ahora el ejercicio 17

Cómo utilizar tu calculadora graficadora

Graficaremos la desigualdad $3x - 2y < -6$ como lo hicimos en el ejemplo 3. Primero, despejando y de la desigualdad, tenemos $y > \frac{3}{2}x + 3$. Comenzamos introduciendo la ecuación de la frontera $y = \frac{3}{2}x + 3$. En la **Figura 3.75a** se muestra la pantalla de la calculadora TI-84 Plus.



(a) (b)

FIGURA 3.75

Observa que el símbolo de la izquierda de Y_1 indica que la región sombreada pasará por encima de la frontera establecida por la desigualdad al usar el símbolo $>$. Para obtener este símbolo, utiliza la tecla de flecha izquierda hasta que el cursor esté en esta posición de la pantalla. Entonces presiona la tecla $\boxed{\text{ENTER}}$ hasta que el símbolo aparezca. Después presiona la tecla $\boxed{\text{GRAPH}}$, en la pantalla se mostrará la gráfica de la **Figura 3.75b**. Compara la **Figura 3.75b** y la **Figura 3.74**. Solo ten cuidado: observa que la pantalla no muestra la frontera con una línea punteada.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.7

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

sólida | punto de comprobación | de frontera | punteada | semiplano

1. Cuando se grafica una desigualdad, la línea ____________ divide el plano en dos semiplanos.
2. Si la desigualdad lineal contiene $<$ o $>$, se dibuja una línea ________________ de frontera.
3. Si se grafica una desigualdad que contiene $\leq$ o $\geq$, se dibuja una línea ________________ de frontera.
4. Para determinar cuál semiplano sombrear, se escoge un ________________ que no esté en la línea de frontera.

Practica tus habilidades

Grafica cada desigualdad.

5. $y < 2x + 1$
6. $y \geq 3x - 1$
7. $y > 2x - 1$
8. $y \leq -x + 4$
9. $y \geq \frac{1}{2}x - 3$
10. $y < 3x + 2$
11. $2x + 3y > 6$
12. $2x - 3y \geq 12$
13. $y \leq -3x + 5$
14. $y \leq \frac{2}{3}x + 3$
15. $2x + y < 4$
16. $3x - 4y \leq 12$
17. $10 \geq 5x - 2y$
18. $-x - 2y > 4$
19. $y \geq -\frac{1}{2}x$
20. $y < \frac{1}{2}x$
21. $y < \frac{2}{3}x$
22. $y \geq -\frac{3}{2}x$
23. $y < -2$
24. $y < x$
25. $x > 1$
26. $x \geq 4$

27. Carreras de autos de colección Patrick Cunningham lleva a algunos amigos y sus familias a las carreras de autos de colección. Los boletos cuestan \$8 para los niños y \$15 para los adultos, pero Patrick solo tiene \$175. x es el número de boletos de niño comprados y y el número de boletos de adulto comprados.

© Peter Albrektsen\Shutterstock

a) Escribe una desigualdad lineal donde el costo de los boletos sea menor o igual que \$175.

b) ¿Patrick tiene suficiente dinero para comprar boletos para 8 niños y 6 adultos?

c) ¿Patrick tiene suficiente dinero para comprar boletos para 10 niños y 6 adultos?

28. Carga en una canoa John y Robyn Paerse utilizan una canoa para transportar botellones de agua y cajas con alimentos a víctimas de las inundaciones. Su canoa tiene un peso máximo de carga de 800 libras. John pesa 175 libras y Robyn 145 libras. Cada botellón de agua pesa 8.5 libras y cada caja con alimentos, 12 libras. Sea x el número de botellones de agua y y el número de cajas con alimentos.

a) Escribe una desigualdad lineal donde el peso total en la canoa, incluyendo a John y Robyn, sea menor o igual que 800 libras.

b) Contando a John y Robyn en la canoa, ¿podrán llevar 20 botellones de agua y 20 cajas con alimento sin exceder el límite de carga?

c) Contando a John y Robyn en la canoa, ¿podrán llevar 25 botellones de agua y 25 cajas con alimento sin exceder el límite de carga?

29. a) Grafica $f(x) = 2x - 4$.

b) En la gráfica, sombrea la región limitada por $f(x)$, $x = 2$, $x = 4$ y el eje x.

30. a) Grafica $g(x) = -x + 4$.

b) En la gráfica, sombrea la región limitada por $g(x)$, $x = 1$ y los ejes x y y.

Ejercicios de conceptos y escritura

31. Cuando se grafica una desigualdad que contiene $>$ o $<$, ¿por qué los puntos en la línea no son solución de la desigualdad?

32. Cuando se grafica una desigualdad que contiene $\geq$ o $\leq$, ¿por qué los puntos en la línea sí son solución de la desigualdad?

33. Al graficar una desigualdad lineal, ¿cuándo no puede utilizarse el punto (0, 0) como punto de comprobación?

34. Cuando se grafica una desigualdad lineal con la forma $y > ax + b$, donde a y b son números reales, ¿la solución estará siempre sobre la linea? Explica.

Problemas de desafío

Grafica cada desigualdad.

35. $y < |x|$

36. $y \geq x^2$

37. $y < x^2 - 4$

Ejercicios de repaso acumulados

[2.1] **38.** Resuelve la ecuación $9 - \dfrac{5x}{3} = -6$.

[2.2] **39.** Si $C = \bar{x} + Z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, encuentra C cuando $\bar{x} = 80$, $Z = 1.96$, $\sigma = 3$ y $n = 25$.

[2.3] **40. Ofertas musicales** Una tienda de discos está a punto de cerrar sus puertas para siempre. La primera semana, el precio de todos los artículos se ha reducido 10%; la segunda semana se da un descuento adicional de \$2. Si durante la segunda semana Bob Frieble compra un CD por \$12.15, determina el precio original del CD.

[3.2] **41.** $f(x) = -x^2 + 5$; encuentra $f(-3)$

[3.3] **42.** Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto $(8, -2)$ y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $2x - y = 4$.

[3.4] **43.** Determina la pendiente de la recta que pasa por $(-2, 7)$ y $(2, -1)$.

Resumen del capítulo 3

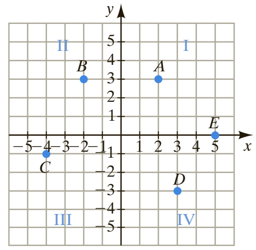
HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 3.1

El sistema de **coordenadas cartesianas** (o **rectangulares**) consiste en dos ejes dibujados de forma perpendicular entre sí. El **eje** de las $\boldsymbol{x}$ es el eje horizontal. El **eje** de las $\boldsymbol{y}$ es el eje vertical. El **origen** es el punto de intersección de los dos ejes. Los dos ejes forman cuatro **cuadrantes** (I, II, III y IV). Un **par ordenado** $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ se utiliza para dar las dos coordenadas de un punto.

Traza los siguientes puntos en el mismo conjunto de ejes.

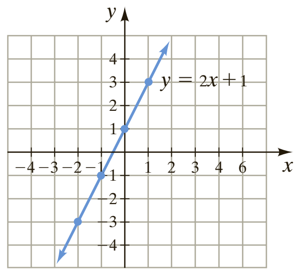
$$A(2, 3), B(-2, 3), C(-4, -1), D(3, -3), E(5, 0)$$



La **gráfica de una ecuación** es una ilustración del conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación. Los puntos sobre la misma línea recta se conocen como **colineales**.

Una **ecuación lineal** es una ecuación cuya gráfica es una línea recta. Una ecuación lineal también se conoce como **ecuación de primer grado**.

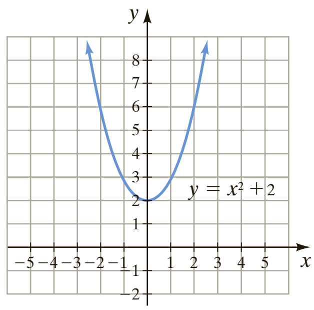
$y = 2x + 1$ es una ecuación lineal cuya gráfica se muestra a continuación.



Los puntos $(1, 3)$, $(0, 1)$, $(-1, -1)$ y $(-2, -3)$ son colineales.

Una **ecuación no lineal** es una ecuación cuya gráfica no es una línea recta.

$y = x^2 + 2$ es una ecuación no lineal cuya gráfica se muestra a continuación.



Sección 3.2

Para una ecuación con las variables x y y, si el valor de y depende del valor de x, entonces y es la **variable dependiente** y x es la **variable independiente**.

En la ecuación $y = 2x^2 + 3x - 4$, x es la variable independiente y y es la variable dependiente.

Una **relación** es cualquier conjunto de pares ordenados de la forma (x, y).

El conjunto de coordenadas x de una relación es el **dominio**. El conjunto de coordenadas y de una relación es el **rango**.

Una **función** en una relación en la cual cada elemento en el dominio corresponde exactamente a un elemento en el rango.

Definición alternativa:

Una **función** es un conjunto de pares ordenados en los que ninguna primera coordenada se repite.

$\{(1, 2), (2, 3), (1, 4)\}$ es una relación, pero no es una función.

$\{(1, 6), (2, 7), (3, 10)\}$ es una relación. También es una función ya que cada elemento en el dominio corresponde exactamente a un elemento en el rango.

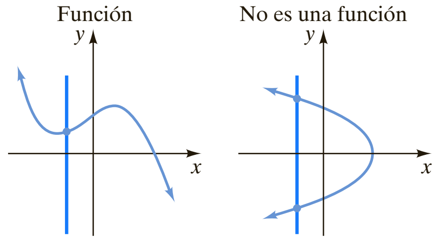
$$\text{dominio: } \{1, 2, 3\}, \text{ rango} = \{6, 7, 10\}$$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 3.2 (cont.)

El **criterio de la recta vertical** puede utilizarse para determinar si una gráfica representa una función.

Si en cualquier parte de la gráfica puede dibujarse una recta vertical que la intersecte en dos o más lugares, la gráfica no representa una función. Si no se puede dibujar una recta vertical que intersecte la gráfica en más de un punto, la gráfica representa una función.



La **notación de función** puede utilizarse para escribir una ecuación cuando y es una función de x. Para la notación de función se reemplaza y con $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, etcétera.

$y = 7x - 9$ puede escribirse como $f(x) = 7x - 9$.

Dada $y = f(x)$ para determinar $f(a)$, reemplaza cada x con a.

Sea $\qquad f(x) = x^2 + 2x - 8$

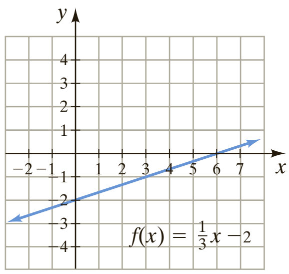
Entonces $\qquad f(1) = 1^2 + 2(1) - 8 = -5$

$\qquad f(a) = a^2 + 2a - 8$

Sección 3.3

Una **función lineal** es una función de la forma $f(x) = ax + b$. La gráfica de una función lineal es una línea recta.

Grafica $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$.



La **forma estándar de una ecuación lineal** es $ax + by = c$, donde a, b y c son números reales y a y b son diferentes de cero.

$$3x + 5y = 7, \qquad -2x + \frac{1}{3}y = \frac{1}{8}$$

La **intersección con el eje *x*** es el punto donde la gráfica cruza el eje x.

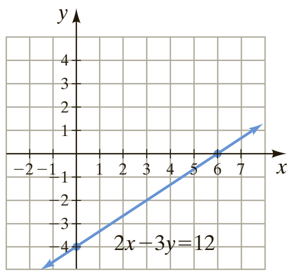
Para determinar la intersección con el eje x, haz $y = 0$ y resuelve para x.

La **intersección con el eje *y*** es el punto donde la gráfica cruza el eje y.

Para determinar la intersección con el eje y, haz $x = 0$ y resuelve para y.

Grafica $2x - 3y = 12$ mediante las intersecciones con los ejes x y y.
Para la intersección con el eje x, haz $y = 0$.

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 12 \\ 2x - 3(0) &= 12 \\ 2x &= 12 \\ x &= 6 \end{aligned}$$



Por lo tanto, la intersección con el eje x es $(6, 0)$.

Para la intersección con el eje y, haz $x = 0$.

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 12 \\ 2(0) - 3y &= 12 \\ -3y &= 12 \\ y &= -4 \end{aligned}$$

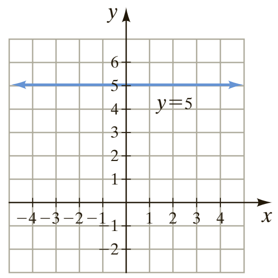
Por lo tanto, la intersección con el eje y es $(0, -4)$.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES | **EJEMPLOS**

Sección 3.3 (cont.)

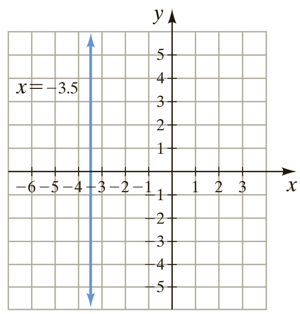
La gráfica de cualquier ecuación de la forma $y = b$ (o función de la forma $f(x) = b$) siempre será una recta horizontal para cualquier número real b. La función $f(x) = b$ se denomina **función constante**.

Grafica $y = 5$ (o $f(x) = 5$).



La gráfica de cualquier ecuación de la forma $x = a$ siempre será una recta vertical para cualquier número real a.

Grafica $x = -3.5$.



Sección 3.4

La **pendiente de una recta** es la razón del cambio vertical (o elevación) al cambio horizontal (o desplazamiento) entre dos puntos cualesquiera.

La pendiente de la recta que pasa por diferentes puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$m = \text{pendiente} = \frac{\text{elevación}}{\text{desplazamiento}} = \frac{\text{cambio en } y \text{ (cambio vertical)}}{\text{cambio en } x \text{ (cambio horizontal)}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

siempre que $x_1 \neq x_2$

La pendiente de la recta que pasa por $(-1, 3)$ y $(7, 5)$ es

$$m = \frac{5 - 3}{7 - (-1)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

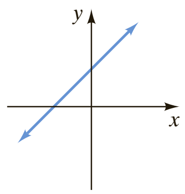
Una recta que se eleva de izquierda a derecha tiene una **pendiente positiva**.

Una recta que baja de izquierda a derecha tiene una **pendiente negativa**.

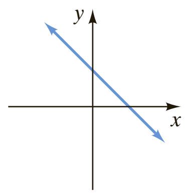
Una recta horizontal tiene **pendiente cero**.

La pendiente de una recta vertical es **indefinida**.

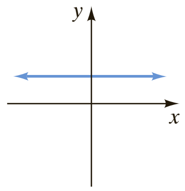
Pendiente positiva



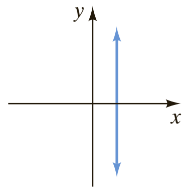
Pendiente negativa



Pendiente cero



Pendiente indefinida



La **forma pendiente-intersección de una ecuación lineal** es

$$y = mx + b$$

donde m es la pendiente de la recta y $(0, b)$ es la intersección en el eje y de la recta.

$y = 7x - 1$, $y = -3x + 10$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 3.5

La **forma punto-pendiente de una ecuación lineal** es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

donde m es la pendiente de la recta y (x_1, y_1) es un punto en la recta.

Si $m = 9$ y (x_1, y_1) es $(5, 2)$, entonces

$$y - 2 = 9(x - 5)$$

Dos rectas son **paralelas** si tienen la misma pendiente.

Dos rectas son **perpendiculares** si sus pendientes son recíprocos negativos. Para cualquier número real $a \neq 0$, su recíproco negativo es $-\frac{1}{a}$.

Las gráficas de $y = 2x + 4$ y $y = 2x + 7$ son paralelas, ya que ambas gráficas tienen la misma pendiente, 2, pero presentan diferentes intersecciones en el eje y.

Las gráficas de $y = 3x - 5$ y $y = -\frac{1}{3}x + 8$ son perpendiculares ya que una gráfica tiene pendiente de 3 y la otra gráfica tiene una pendiente de $-\frac{1}{3}$. El número $-\frac{1}{3}$ es el recíproco negativo de 3.

Sección 3.6

Operaciones con funciones

Suma de funciones: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

Resta de funciones: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

Multiplicación de funciones: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

División de funciones: $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

Si $f(x) = x^2 + 2x - 5$ y $g(x) = x - 3$, entonces

$$\begin{aligned}(f + g)(x) = f(x) + g(x) &= (x^2 + 2x - 5) + (x - 3)\\ &= x^2 + 3x - 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f - g)(x) = f(x) - g(x) &= (x^2 + 2x - 5) - (x - 3)\\ &= x^2 + x - 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x)\\ &= (x^2 + 2x - 5)(x - 3)\\ &= x^3 - x^2 - 11x + 15\end{aligned}$$

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 2x - 5}{x - 3}, \quad x \neq 3$$

Sección 3.7

Una **desigualdad lineal con dos variables** se puede escribir en una de las siguientes formas:

$$ax + by < c, ax + by > c, ax + by \leq c, ax + by \geq c$$

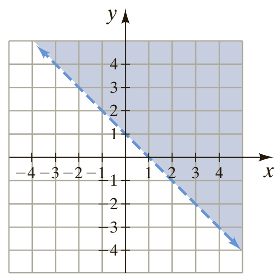
donde a, b y c son números reales y a y b son diferentes de 0.

$$3x - 4y > 1, \qquad 2x + 5y \leq -4$$

Para graficar una desigualdad lineal con dos variables

1. Para obtener la ecuación de la línea de frontera, reemplaza el símbolo de la desigualdad con un signo de igual.
2. Traza la gráfica de la ecuación del paso 1. Si la desigualdad original contiene un símbolo $\geq$ o $\leq$, se traza una línea sólida. Si la desigualdad contiene un símbolo $>$ o $<$, se traza una línea punteada.
3. Selecciona un punto que no esté en la línea de frontera. Si este punto es una solución, sombrea el semiplano del lado de la línea que contiene este punto. Si el punto seleccionado no satisface la desigualdad, sombrea el semiplano del lado de la línea que no contiene este punto.

Grafica $y > -x + 1$.



Ejercicios de repaso del capítulo 3

[3.1] **1.** Traza los pares ordenados en los mismos ejes.

a) $A(5, 3)$ **b)** $B(0, -3)$ **c)** $C(5, \frac{1}{2})$ **d)** $D(-4, 2)$ **e)** $E(-6, -1)$ **f)** $F(-2, 0)$

Grafica cada ecuación.

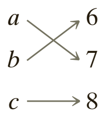
2. $y = \frac{1}{2}x$ **3.** $y = -2x - 1$ **4.** $y = \frac{1}{2}x + 3$ **5.** $y = -\frac{3}{2}x + 1$ **6.** $y = x^2$

7. $y = x^2 - 1$ **8.** $y = |x|$ **9.** $y = |x| - 1$ **10.** $y = x^3$ **11.** $y = x^3 + 4$

[3.2] **12.** Define qué es una función.

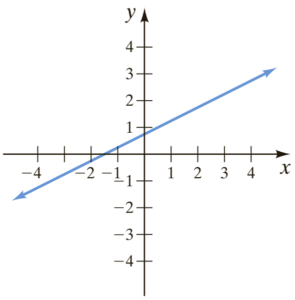
13. ¿Toda relación es una función? ¿Toda función es una relación? Explica.

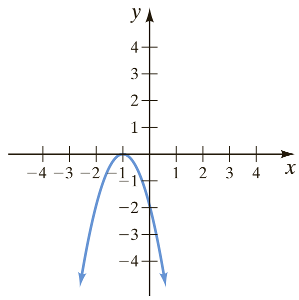
Determina si las siguientes relaciones son funciones.

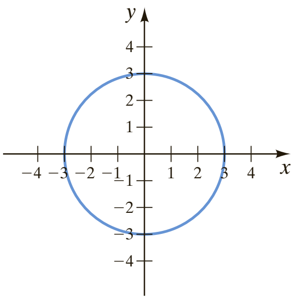
14. 

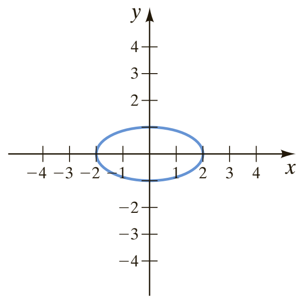
15. $\{(1, 1), (1, -1), (4, 2), (-4, -2)\}$

En los ejercicios 16-19, ***a)*** *determina si las gráficas representan funciones, y* ***b)*** *determina el dominio y el rango de cada relación o función.*

16. 

17. 

18. 

19. 

20. Si $f(x) = 3x - 7$, encuentra

a) $f(2)$ y

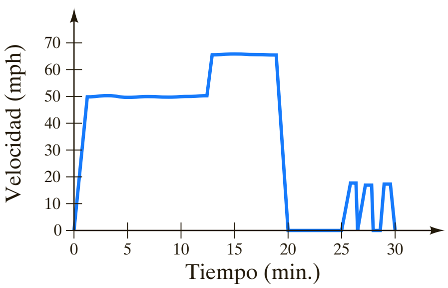
b) $f(h)$.

21. Si $g(t) = 2t^3 - 3t^2 + 6$, encuentra

a) $g(-1)$ y

b) $g(a)$.

22. **Velocidad de un automóvil** Deb Exum transita en un automóvil. La siguiente gráfica muestra la velocidad del automóvil como una función del tiempo. Crea una historia que corresponda con esta gráfica.



23. **Huerto de manzanas** El número de canastas de manzanas, N, que producen x árboles en un pequeño huerto ($x \leq 100$) está dado por la función $N(x) = 40x - 0.2x^2$. ¿Cuántas canastas de manzanas producen

a) 30 árboles?

b) 50 árboles?

24. **Caída de pelota** Si una pelota se deja caer desde lo alto de un edificio de 196 pies, su altura por encima del suelo, h, en cualquier momento, t, puede encontrarse por medio de la función $h(t) = -16t^2 + 196$, $0 \leq t \leq 3.5$. Determina la altura de la pelota

a) 1 segundo después de dejar caer la pelota.

b) 3 segundos después de dejar caer la pelota.

[3.3] *Grafica cada ecuación usando intersecciones.*

25. $3x - 4y = 6$

26. $\frac{1}{3}x = \frac{1}{8}y + 10$

Grafica cada ecuación o función.

27. $f(x) = 4$

28. $x = -2$

29. Compañía de rosquillas La utilidad anual, u, de una compañía productora de rosquillas puede calcularse por medio de la función $u(x) = 0.1x - 5000$, donde x es el número de rosquillas que se venden al año.

a) Haz una gráfica de las utilidades contra las rosquillas vendidas que llegue hasta 250,000 rosquillas.

b) Estima el número de rosquillas que deben venderse para que la compañía alcance el punto de equilibrio (es decir, que no gane ni pierda).

c) Estima el número de rosquillas vendidas si la compañía tiene una ganancia de $22,000.

30. Interés Haz una gráfica que ilustre el interés sobre un préstamo de $12,000 por un periodo de un año para diferentes tasas de interés, hasta de 20%. Utiliza la fórmula interés = capital · tasa · tiempo.

[3.4] *Determina la pendiente y la intersección con el eje y de la gráfica representada por cada ecuación.*

31. $y = \frac{1}{2}x + 6$

32. $f(x) = -2x + 3$

33. $3x + 5y = 13$

34. $3x + 4y = 10$

35. $x = -7$

36. $f(x) = 8$

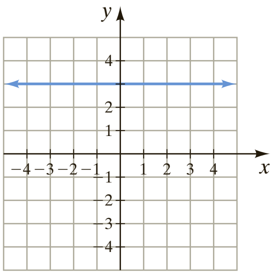
Determina la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados.

37. $(-1, 3), (2, 9)$

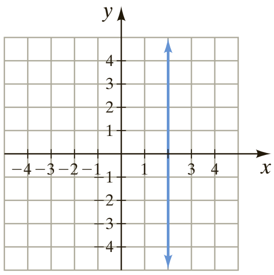
38. $(-2, 3), (4, 1)$

Determina la pendiente de cada recta. Si la pendiente es indefinida, indícalo. Luego escribe la ecuación de la recta.

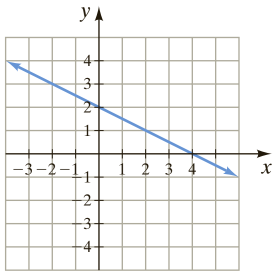
39.



40.



41.



42. Si la gráfica de $y = -2x + 5$ se desplaza 4 unidades abajo, determina

a) la pendiente de la gráfica desplazada.

b) la intersección con y de la gráfica desplazada.

c) la ecuación de la gráfica desplazada.

43. Si un punto en una gráfica es $(-6, -4)$ y su pendiente es $\frac{2}{3}$, encuentra su intersección con y.

44. Fiebre tifoidea La siguiente tabla muestra el número de casos reportados de fiebre tifoidea en Estados Unidos para años seleccionados entre 1970 y 2000.

a) Traza cada punto y dibuja segmentos de recta de punto a punto.

b) Calcula la pendiente de los segmentos de recta.

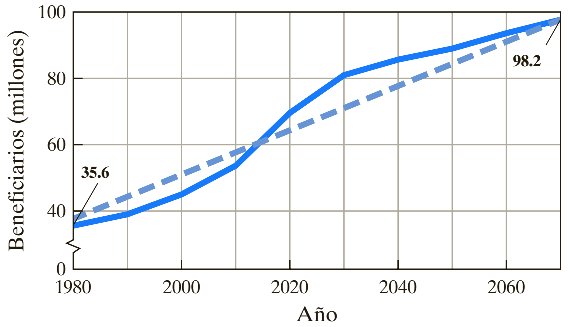
c) ¿Durante qué década aumentó más el número de casos de fiebre tifoidea?

Año	Número de casos reportados de fiebre tifoidea
1970	346
1980	510
1990	552
2000	317

Fuente: Departamento de Salud y Servicios Humanos de Estados Unidos

45. Seguridad social La siguiente gráfica muestra el número de beneficiarios de seguridad social desde 1980 proyectados hasta 2070. Utiliza la forma pendiente-intersección para encontrar la función $n(t)$ (representada por la línea punteada) que se pueda utilizar para aproximar estos datos.

Beneficiarios de seguridad social



[3.5] *Determina si las rectas dadas son paralelas, perpendiculares o ninguna de éstas.*

46. $-3x + 4y = 7$
$y = \frac{3}{4}x + 7$

47. $2x - 3y = 7$
$-3x - 2y = 8$

48. $4x - 2y = 13$
$-2x + 4y = -9$

Determina la ecuación de la recta con las propiedades dadas. Escribe cada respuesta en la forma pendiente-intersección.

49. Pendiente $= \frac{1}{2}$, cruza por $(-2, 1)$

50. Cruza por $(-3, 1)$ y $(4, -6)$

51. Cruza por $(0, 6)$ y es paralela a la gráfica de $y = -\frac{2}{3}x + 1$

52. Cruza por $(2, 8)$ y es paralela a la gráfica cuya ecuación es $5x - 2y = 7$

53. Cruza por $(-3, 1)$ y es perpendicular a la gráfica cuya ecuación es $y = \frac{3}{5}x + 5$

54. Cruza por $(4, 5)$ y es perpendicular a la gráfica cuya ecuación es $4x - 2y = 8$

Se dan dos puntos en l_1 y dos puntos en l_2. Determina si l_1 y l_2 son paralelas, perpendiculares o ninguna de éstas.

55. l_1: $(5, 3)$ y $(0, -3)$; l_2: $(1, -1)$ y $(2, -2)$

56. l_1: $(3, 2)$ y $(2, 3)$; l_2: $(4, 1)$ y $(1, 4)$

57. l_1: $(7, 3)$ y $(4, 6)$; l_2: $(5, 2)$ y $(6, 3)$

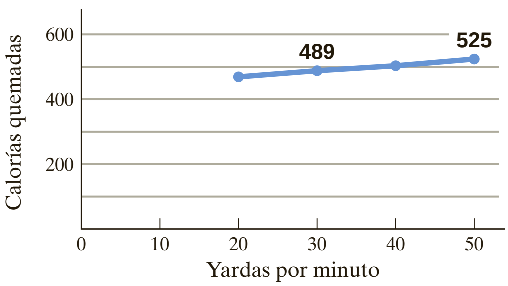
58. l_1: $(-3, 5)$ y $(2, 3)$; l_2: $(-4, -2)$ y $(-1, 2)$

59. **Tarifa de seguros** Las tarifas mensuales por un seguro de vida de \$100,000 del Grupo Financiero General para hombres de 35 a 50 años, aumenta de manera lineal. La tarifa para un hombre de 35 años es de \$10.76 al mes y para uno de 50 años es de \$19.91 al mes. Sean t la tarifa y e la edad de un hombre entre 35 y 50 años de edad.

- **a)** Determina una función lineal $t(e)$ que se ajuste a estos datos.
- **b)** Utilizando la función del inciso **a)**, estima la tarifa mensual para un hombre de 40 años de edad.

60. **Quemando calorías** Haciendo 1 hora de natación y nadando a una velocidad de entre 20 y 50 yardas por minuto, el número de calorías quemadas es una función lineal de la velocidad del nadador. Una persona que nada 30 yardas por minuto quemará alrededor de 489 calorías en 1 hora. Mientras que nadando a 50 yardas por minuto, una persona quemará al rededor de 525 calorías en 1 hora. Esta información se muestra en la siguiente gráfica.

Calorías quemadas al nadar



Fuente: Sitio Web Revista de Salud, www.health.com

- **a)** Determina una función lineal que pueda usarse para calcular el número de calorías, C, que se queman en 1 hora cuando una persona nada a una velocidad de v yardas por minuto.
- **b)** Utiliza la función determinada en el inciso **a)** para encontrar el número de calorías quemadas en 1 hora cuando una persona nada a 40 yardas por minuto.
- **c)** Utiliza la función determinada en el inciso **a)** para encontrar la velocidad a la que una persona necesita nadar para quemar 600 calorías en 1 hora.

[3.6] *Con las ecuaciones $f(x) = x^2 - 3x + 4$ y $g(x) = 2x - 5$ dadas, encuentra:*

61. $(f + g)(x)$

62. $(f + g)(4)$

63. $(g - f)(x)$

64. $(g - f)(-1)$

65. $(f \cdot g)(-1)$

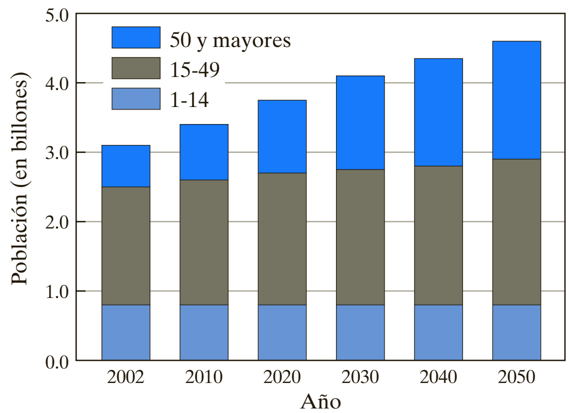
66. $(f \cdot g)(3)$

67. $(f/g)(1)$

68. $(f/g)(2)$

69. **Población femenina** De acuerdo con el censo de Estados Unidos, se espera que la población femenina crezca a nivel mundial. La siguiente gráfica muestra la población mundial femenina para los años seleccionados desde 2002 hasta 2050.

Población femenina a nivel mundial

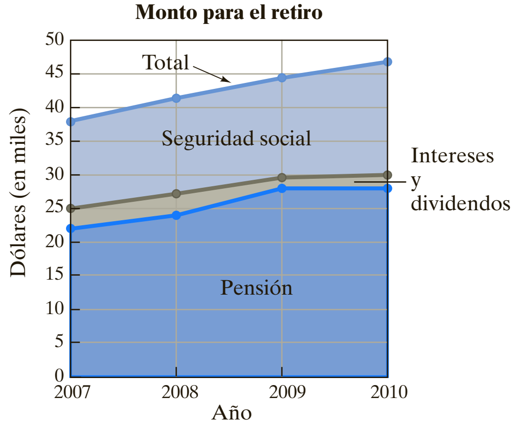


Fuente: Oficina de Censo de Estados Unidos

- **a)** Estima la población mundial femenina que habrá en 2050.
- **b)** Estima el número de mujeres de 15 a 49 años de edad en 2050.
- **c)** Estima el número de mujeres en el grupo de 50 años y mayores en 2010.
- **d)** Estima el aumento porcentual de mujeres de 50 años y mayores de 2002 a 2010.

70. **Monto para el retiro** Hace poco, Joni Burnette se jubiló de su trabajo de tiempo completo. La siguiente gráfica muestra su monto para el retiro de 2007 a 2010.

Monto para el retiro



- **a)** Determina el monto total de la jubilación de Joni en 2010.
- **b)** Determina el monto de la pensión de Joni en 2009.
- **c)** Determina el monto por intereses y dividendos de Joni en 2007.

[3.7] *Grafica cada desigualdad.*

71. $y \geq -5$ **72.** $x < 4$ **73.** $y \leq 4x - 3$ **74.** $y < \frac{1}{3}x - 2$

Prueba de práctica del capítulo 3

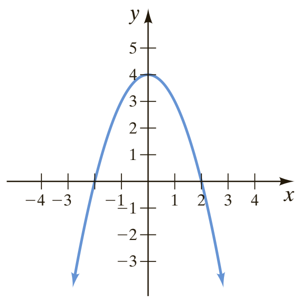
Los videos de la prueba de práctica del capítulo proporcionan soluciones totalmente resueltas para cualquiera de los ejercicios que quieras repasar. Los videos de la prueba de práctica del capítulo están disponibles vía MyMathLab, o en YouTube (busca "Angel Intermediate Algebra" y da click en "Channels")

1. Grafica $y = -2x + 1$.
2. Grafica $y = \sqrt{x}$.
3. Grafica $y = x^2 - 4$.
4. Grafica $y = |x|$.
5. Define qué es una *función*.
6. ¿El siguiente conjunto de pares ordenados es una función? Justifica tu respuesta.

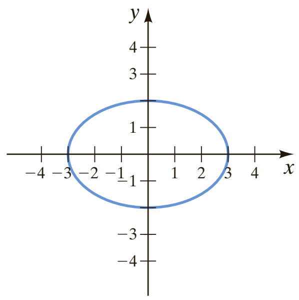
$$\{(3, 1), (-2, 6), (4, 6), (5, 2), (7, 3)\}$$

En los ejercicios 7 y 8, determina si las siguientes gráficas son funciones. Da el dominio y el rango de la relación o la función.

7.



8.



9. Si $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$, encuentra $f(-2)$.

En los ejercicios 10 y 11, grafica la ecuación usando las intersecciones de los ejes x e y.

10. $-20x + 10y = 40$.

11. $\frac{x}{5} - \frac{y}{4} = 1$

12. Grafica $f(x) = -3$.

13. Grafica $x = 4$.

14. **Gráfica de utilidad** La utilidad anual, u, de las ventas de un libro para una compañía editorial puede calcularse por medio de la función $u(x) = 10.2x - 50{,}000$, donde x es el número de libros producidos y vendidos.

a) Haz una gráfica de la utilidad contra los libros vendidos (hasta 30,000 libros).

b) Usa la función $u(x)$ para calcular el número de libros que deben venderse para que la compañía alcance el punto de equilibrio.

c) Usa la función $u(x)$ para calcular el número de libros que la compañía debe vender para obtener una utilidad de $100,000.

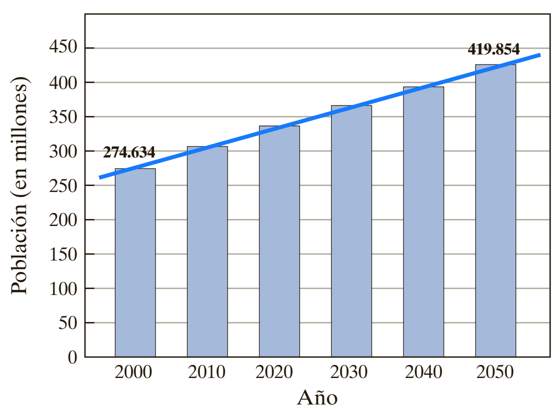
15. Determina la pendiente y la intersección con el eje y de la recta que se obtiene al graficar la ecuación $4x - 3y = 15$.

16. Escribe la ecuación de la recta, en la forma pendiente-intersección, que pasa por los puntos (3, 2) y (4, 5).

17. Determina la ecuación de la recta, en la forma pendiente-intersección, que pasa por el punto $(6, -5)$ y que es perpendicular a la gráfica de $y = \frac{1}{2}x + 1$.

18. **Población de Estados Unidos** Determina la función de la recta representada por la línea roja en la gráfica, que puede utilizarse para calcular la población en Estados Unidos estimada, p, de 2000 a 2050. Donde 2000 es el año de referencia que corresponde a $t = 0$.

Proyección de la población en Estados Unidos de 2000 a 2050



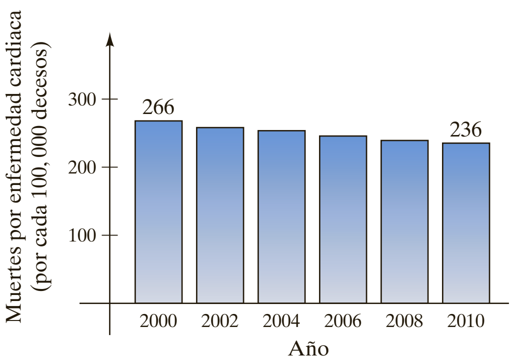
Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos

19. Determina si las rectas de las siguientes ecuaciones son paralelas, perpendiculares o ninguna de ellas. Justifica tu respuesta.

$$2x - 3y = 12$$
$$4x + 10 = 6y$$

20. Enfermedad cardiaca El índice de mortandad por enfermedades cardiacas ha descendido de forma lineal desde el año 2000. La siguiente gráfica de barras muestra el número de muertes provocadas por enfermedades cardiacas, por cada 100,000 decesos, cada dos años desde 2000 a 2010.

Índice de muertes por enfermedades cardiacas



Fuente: Departamento de Salud y Servicios Humanos de Estados Unidos.

a) Sean v el número de muertes provocadas por enfermedades cardiacas, por cada 100,000 decesos, y t los años desde el año 2000. Escribe una función lineal $v(t)$ que puede utilizarse para aproximar los datos.

b) Usando la función del inciso **a)**, estima el índice de muertes provocadas por enfermedades cardiacas en 2006.

c) Suponiendo que la tendencia continúa hasta el año 2020, determina la tasa de muertes provocadas por enfermedades cardiacas en 2020.

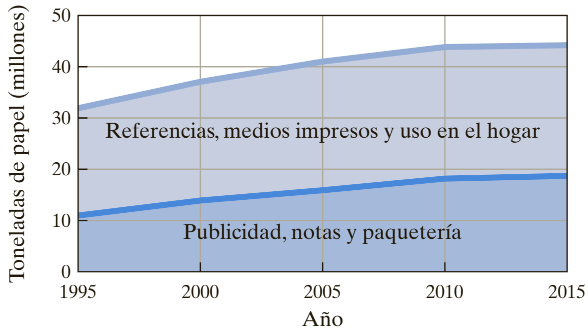
En los ejercicios 21-23, si $f(x) = 2x^2 - x$ y $g(x) = x - 6$, encuentra

21. $(f + g)(3)$ **22.** $(f/g)(-1)$

23. $f(a)$

24. Uso de papel La siguiente gráfica muestra el uso de papel desde 1995 y proyectado hasta 2015.

Uso de papel



Fuente: CAP Ventures

a) Estima el número total de toneladas de papel que se usaron en 2010.

b) EStima el número de toneladas de papel que se usaron en publicidad, notas y paquetería en 2010.

c) Determina el número de toneladas de papel que se usaron en referencias, medios de comunicación impresos y uso en el hogar en 2010.

25. Grafica $y < 3x - 2$

Prueba de repaso acumulada

Resuelve la siguiente prueba y verifica tus respuestas con las que aparecen al final del libro. Revisa las preguntas que hayas respondido incorrectamente. La sección donde se cubrió el tema correspondiente se indica después de cada respuesta.

1. Para $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $\{2, 3, 5, 7, 11, 14\}$, determina:

a) $A \cap B$.

b) $A \cup B$.

2. Considera el conjunto $\{-6, -4, \frac{1}{3}, 0, \sqrt{3}, 4.67, \frac{37}{2}, -\sqrt{5}\}$. Lista los elementos del conjunto que son:

a) números naturales.

b) números reales.

3. Evalúa $10 - \{3[6 - 4(6^2 \div 4)]\}$.

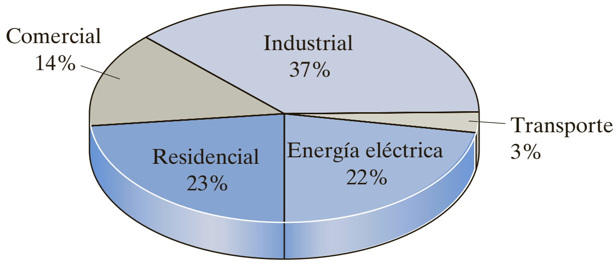
Simplifica.

4. $\left(\dfrac{5x^2}{y^{-3}}\right)^2$

5. $\left(\dfrac{3x^4y^{-2}}{6xy^3}\right)^3$

6. Consumo de gas natural El consumo total de gas natural en 2008 fue de 21.8 trillones de pies cúbicos (2.18×10^{13}). La siguiente gráfica de pastel muestra el desglose del consumo por sector.

Consumo de gas natural por sector
(2.18×10^{13} pies cúbicos)



(El total suma 99% debido al redondeo.)

Fuente: Administración de información energética.

Responde las siguientes preguntas usando notación científica.

a) ¿Cuál fue el consumo de gas natural en el sector comercial en 2008?

b) ¿Qué cantidad de gas natural consumió el sector industrial más que el sector de transporte en 2008?

c) Si se espera que el consumo de gas natural incremente 10% de 2008 a 2011, ¿cuál será el consumo de gas natural en 2011?

En los ejercicios 7 y 8, resuelve las ecuaciones.

7. $2(x + 4) - 5 = -3[x - (2x + 1)]$

8. $\frac{4}{5} - \frac{x}{3} = 10$

9. Simplifica $7x - \{4 - [2(x - 4)] - 5\}$.

10. Despejar b_1 de la fórmula, $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$.

11. Soluciones de peróxido de hidrógeno ¿Cuántos galones de una solución de peróxido de hidrógeno al 15% se deben mezclar con 10 galones de solución de peróxido de hidrógeno al 4% para obtener una solución de peróxido de hidrógeno al 10%?

12. Resuelve la desigualdad $4(x - 4) < 8(2x + 3)$.

13. Resuelve la desigualdad $-1 < 3x - 7 < 11$.

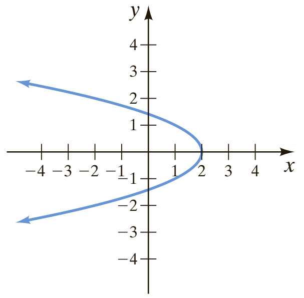
14. Determina el conjunto solución de $|3x + 5| = |2x - 10|$.

15. Determina el conjunto solución de $|2x - 1| \leq 3$.

16. Grafica $y = -\frac{3}{2}x - 4$.

17. a) Determina si la siguiente gráfica representa una función.

b) Encuentra el dominio y el rango de la gráfica.



18. Determina la pendiente de la recta que cruza los puntos $(-5, 3)$ y $(4, -1)$.

19. Determina si las gráficas de las dos ecuaciones dadas son paralelas, perpendiculares o ninguna de ellas.

$$2x - 5y = 8$$
$$5x - 2y = 12$$

20. $f(x) = x^2 + 3x - 2$ y $g(x) = 4x - 9$, encuentra $(f + g)(x)$.

4 Sistemas de ecuaciones y desigualdades

Objetivos de este capítulo

En este capítulo resolveremos sistemas de ecuaciones lineales mediante el uso de los siguientes métodos: graficación, sustitución, el método de suma, usando matrices y utilizando determinantes y la regla de Cramer. Además resolveremos sistemas de *desigualdades* lineales. A través del capítulo encontrarás muchas aplicaciones de la vida real. El capítulo cubre temas esenciales utilizados en los negocios para considerar las relaciones entre las variables involucradas en operaciones del día a día de un negocio.

© Allen R. Angel

Los sistemas de ecuaciones son utilizados con frecuencia para resolver problemas de la vida real. Por ejemplo, en el Ejemplo 6 de la página 240 utilizamos un sistema de ecuaciones para estudiar los préstamos adquiridos por una tienda de juguetes.

4.1 Solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables

1. Solución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales.
2. Solución de sistemas de ecuaciones lineales por sustitución.
3. Solución de sistemas de ecuaciones lineales usando el método de suma.

Comprendiendo el álgebra

- Una solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con variables *x* y *y* es un par ordenado (*x, y*) que satisface ambas ecuaciones.
- Una solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con variables *x, y* y *z* es una tríada ordenada de la forma (*x, y, z*) que satisface las tres ecuaciones.

Sistema de ecuaciones lineales

Cuando dos o más ecuaciones lineales son consideradas simultáneamente, las ecuaciones son llamadas **sistema de ecuaciones lineales**.

Por ejemplo,

$$\left.\begin{aligned}&(1)\ y = x + 5\\&(2)\ y = 2x + 4\end{aligned}\right\}\ \text{Sistema de ecuaciones lineales}$$

Solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables

Una **solución de un sistema de ecuaciones lineales de dos variables** es un par ordenado que satisface cada ecuación en el sistema.

La única solución del sistema mostrado arriba es (1, 6).

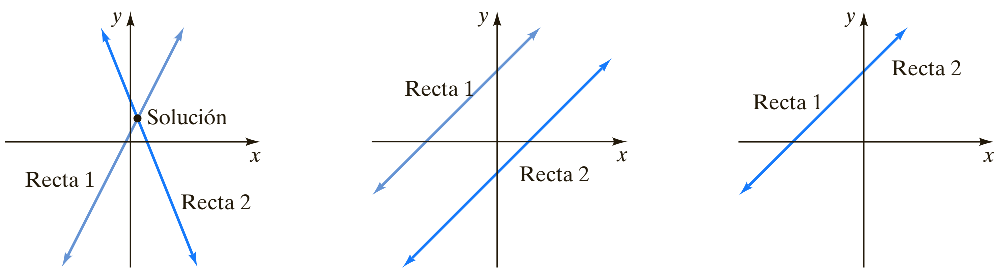
Verificación en la ecuación (1)		Verificación en la ecuación (2)	
$(1, 6)$		$(1, 6)$	
$y = x + 5$		$y = 2x + 4$	
$6 \stackrel{?}{=} 1 + 5$		$6 \stackrel{?}{=} 2(1) + 4$	
$6 = 6$	Verdadero	$6 = 6$	Verdadero

El par ordenado (1, 6) satisface *ambas* ecuaciones y es la solución del sistema de ecuaciones.

1 Solución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales

Para resolver de forma gráfica un sistema de ecuaciones lineales con dos variables, grafica ambas ecuaciones del sistema en los mismos ejes. Si el sistema tiene una solución única, entonces la solución será el par ordenado común de ambas rectas, es decir, el punto de intersección de ambas rectas en el sistema.

Cuando dos líneas se grafican, tres situaciones son posibles, como se ilustra en la **Figura 4.1**.



Recta 1 *intersecta* recta 2
- Exactamente una solución
- La solución es el punto de intersección
- **Sistema consistente**
- Las rectas tienen pendientes diferentes

Recta 1 es *paralela* a la recta 2
- No hay solución
- Ya que las rectas paralelas no se intersectan, no hay solución
- **Sistema inconsistente**
- Las rectas tienen la misma pendiente y diferentes intersecciones en el eje *y*

Recta 1 *es igual a la* recta 2
- Número infinito de soluciones
- Cada punto en la recta común es una solución
- **Sistema dependiente**
- Las rectas tiene la misma pendiente y el mismo punto de intersección en el eje *y*

FIGURA 4.1

Comprendiendo el álgebra

- Un *sistema consistente de ecuaciones* tiene al menos una solución.
- Un *sistema inconsistente de ecuaciones* no tiene solución.
- Un *sistema dependiente de ecuaciones* tiene un número infinito de soluciones.

Podemos determinar si un sistema de ecuaciones lineales es consistente, inconsistente o dependiente escribiendo cada ecuación en la forma pendiente-intersección, comparando las pendientes y las intersecciones en el eje y (ver **Figura 4.1**).

EJEMPLO 1 Sin graficar las ecuaciones, determina si el siguiente sistema de ecuaciones es consistente, inconsistente o dependiente.

$$3x - 4y = 8$$
$$-9x + 12y = -24$$

Solución Escribe cada ecuación en la forma pendiente-intersección.

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 8 \\ -4y &= -3x + 8 \\ y &= \frac{3}{4}x - 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -9x + 12y &= -24 \\ 12y &= 9x - 24 \\ y &= \frac{3}{4}x - 2 \end{aligned}$$

Como ambas ecuaciones tienen la misma pendiente, $\frac{3}{4}$, y la misma intersección en y, $(0, -2)$, las ecuaciones representan la misma recta. Por lo tanto, el sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones.

Resuelve ahora el ejercicio 19

EJEMPLO 2 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones gráficamente.

$$y = x + 2$$
$$y = -x + 4$$

Solución Grafica ambas ecuaciones en los mismos ejes (**Figura 4.2**). La solución es el punto de intersección de las dos rectas, (1, 3).

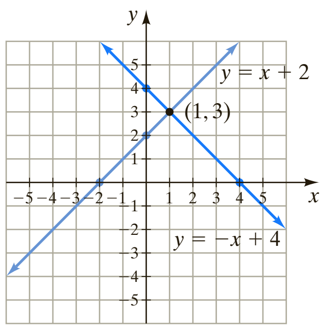


FIGURA 4.2

Resuelve ahora el ejercicio 25

Consejo útil

Cuando resuelves ecuaciones mediante gráficas, siempre es una buena idea comprobar la solución sustituyendo los valores para x y y en *cada una* de las ecuaciones originales. Ahora verifica la solución del ejemplo 2.

Cómo utilizar tu calculadora graficadora

En el capítulo 3 aprendimos cómo usar una calculadora graficadora para graficar las ecuaciones lineales. En este capítulo usaremos la calculadora graficadora para resolver de manera gráfica un sistema de ecuaciones lineales.

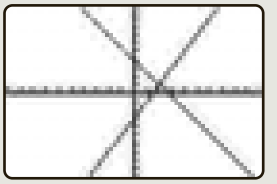


FIGURA 4.3

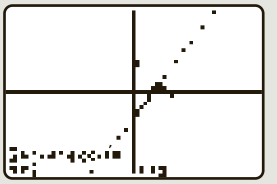


FIGURA 4.4

EJEMPLO Usa tu calculadora graficadora para resolver el sistema de ecuaciones.

$$y = 2x - 3$$
$$y = -\frac{3}{2}x + 4$$

Solución Presiona $\boxed{\text{Y=}}$ e introduce las ecuaciones como Y_1 y Y_2, respectivamente, y presiona $\boxed{\text{GRAPH}}$. Las gráficas de las ecuaciones se muestran en la **Figura 4.3**. La solución está en el punto de intersección de las dos rectas. Para determinar el punto, presiona $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{TRACE}}$ $\boxed{5}$ para activar la función "intersección". La calculadora te pedirá que escojas las curvas. Hazlo presionando $\boxed{\text{ENTER}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$. Ahora te solicitará que realices una selección. Presiona $\boxed{\blacktriangleleft}$ o $\boxed{\blacktriangleright}$ hasta que veas el cursor parpadear cerca del punto de intersección y entonces presiona $\boxed{\text{ENTER}}$. La **Figura 4.4** muestra que la intersección de las dos rectas está en el punto (2, 1). Sustituye $x = 2$ y $y = 1$ en cada una de las ecuaciones originales para confirmar que (2, 1) es la solución del sistema de ecuaciones.

2 Solución de sistemas de ecuaciones lineales por sustitución

A pesar de que resolver un sistema de ecuaciones gráficamente nos ayuda a visualizar un sistema de ecuaciones y la solución, una solución exacta en algunas ocasiones es difícil de determinar de la gráfica. Por esta razón introducimos dos métodos algebraicos para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales de dos variables. El primero de ellos es el método de **sustitución**.

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales por sustitución

1. Despeja una variable de cualquier ecuación (si es posible, despeja una variable con un coeficiente numérico igual a 1 para evitar trabajar con fracciones).
2. Sustituye la expresión encontrada para la variable en el paso 1 *dentro de la otra ecuación*. Esto resultará en una ecuación que solo contiene una variable.
3. Despeja la ecuación obtenida en el paso 2.
4. Sustituye el valor hallado en el paso 3 en la ecuación del paso 1. Resuelve la ecuación para encontrar la variable restante.
5. Verifica tu solución en *todas* las ecuaciones del sistema.

EJEMPLO 3 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por sustitución.

$$y = 3x - 5$$
$$y = -4x + 9$$

Solución Ya que en ambas ecuaciones y esta despejada, podemos sustituir $3x - 5$ para y en la segunda ecuación y entonces despejar la variable restante, x.

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= -4x + 9 \\ 7x - 5 &= 9 \\ 7x &= 14 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Ahora encuentra y sustituyendo $x = 2$ en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} y &= 3x - 5 \\ y &= 3(2) - 5 \\ y &= 6 - 5 = 1 \end{aligned}$$

Entonces, tenemos $x = 2$ y $y = 1$, o el par ordenado (2, 1). Una verificación mostrará que la solución del sistema de ecuaciones es (2, 1).

Resuelve ahora el ejercicio 39

Comprendiendo el álgebra

En el ejemplo 3, una vez que encontramos que $x = 2$, sustituimos $x = 2$ en *cualquiera* de las ecuaciones originales.

EJEMPLO 4 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por sustitución.

$$2x + y = 11$$
$$x + 34 = 18$$

Solución Comienza despejando una de las variables en cualquiera de las ecuaciones. Si es posible, deberás despejar la variable con un coeficiente numérico 1, así evitarás trabajar con fracciones.

Despejemos y en $2x + y = 11$.

$$2x + y = 11$$
$$y = -2x + 11$$

Posteriormente, sustituye y por $(-2x + 11)$ *en la otra ecuación*, $x + 3y = 18$, y despeja la variable restante, x.

$$\begin{aligned} x + 3y &= 18 \\ x + 3(\overbrace{-2x + 11}) &= 18 \quad \text{Sustituye } y \text{ por } (-2x + 11). \\ x - 6x + 33 &= 18 \\ -5x + 33 &= 18 \\ -5x &= -15 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Finalmente, sustituye $x = 3$ en la ecuación $y = -2x + 11$ y despeja y.

$$y = -2x + 11$$
$$y = -2(3) + 11 = 5$$

La solución es el par ordenado (3, 5). Verifica esta solución.

Resuelve ahora el ejercicio 41

Comprendiendo el álgebra

En el ejemplo 4, pudimos haber comenzado despejando x en la segunda ecuación.

Consejo útil

En algunas ocasiones los estudiantes despejan exitosamente una de las variables y olvidan despejar la otra. Recuerda que una solución debe contener un valor numérico para cada variable en el sistema.

3 Solución de sistemas de ecuaciones lineales usando el método de suma

El tercer método para solucionar un sistema de ecuaciones es el **método de suma** (o eliminación). El objetivo de este proceso es obtener dos ecuaciones cuya suma sea una ecuación que contenga una sola variable.

EJEMPLO 5 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones usando el método de suma.

$$2x + 5y = 3$$
$$3x - 5y = 17$$

Solución Observa que una ecuación tiene $+5y$ y la otra ecuación tiene $-5y$. Sumando las ecuaciones, podemos eliminar la variable y y obtener una ecuación con solo una variable, x.

$$\begin{array}{r} 2x + 5y = 3 \\ 3x - 5y = 17 \\ \hline 5x \quad\;\; = 20 \end{array}$$

Ahora despeja para la variable restante, x.

$$\frac{5x}{5} = \frac{20}{5}$$
$$x = 4$$

Finalmente, despeja y sustituyendo x por 4 en cualquiera de las ecuaciones originales.

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 3 \\ 2(4) + 5y &= 3 \\ 8 + 5y &= 3 \\ 5y &= -5 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Una comprobación mostrará que la solución es $(4, -1)$.

Resuelve ahora el ejercicio 53

Para resolver un sistema lineal de ecuaciones usando el método de suma (o eliminación)

1. En caso de ser necesario, reescribe cada ecuación en la forma general, $ax + by = c$.
2. Si es necesario, multiplica una o ambas ecuaciones por una constante (o constantes) para que al sumarlas, la suma contenga solo una variable.
3. Suma los lados respectivos de las ecuaciones. Esto resultará en una sola ecuación que contenga una sola variable.
4. Resuelve la ecuación obtenida en el paso 3.
5. Sustituye el valor encontrado en el paso 4 en cualquiera de las ecuaciones originales. Resuelve la ecuación para encontrar el valor de la variable restante.
6. Verifica tu solución en todas las ecuaciones del sistema.

En el paso 2 del procedimiento, indicamos que puede ser necesario multiplicar ambos lados de la ecuación por una constante. Para evitar confusiones, enumeraremos las ecuaciones usando paréntesis, como (*ec.* 1) o (*ec.* 2).

En el ejemplo 6 resolveremos el mismo sistema de ecuaciones resuelto en el ejemplo 4, pero esta vez usaremos el método de suma.

EJEMPLO 6 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones usando el método de suma.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 11 \quad (ec.\ 1) \\ x + 3y &= 18 \quad (ec.\ 2) \end{aligned}$$

Solución Nuestra meta es obtener dos ecuaciones que al sumarlas nos den una ecuación con solo una variable. Para eliminar la variable x, multiplicamos (*ec.* 2) por -2 y posteriormente sumamos las dos ecuaciones.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 11 \quad (ec.\ 1) \\ -2x - 6y &= -36 \quad (ec.\ 2) \qquad \text{Multiplicado por } -2 \end{aligned}$$

Ahora suma.

$$\begin{array}{r} 2x + y = 11 \\ -2x - 6y = -36 \\ \hline -5y = -25 \\ y = 5 \end{array}$$

Ahora despeja x sustituyendo y por 5 en cualquiera de las ecuaciones originales.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 11 \\ 2x + 5 &= 11 \qquad \text{Sustituye } y \text{ por } 5. \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

La solución es $(3, 5)$.

Resuelve ahora el ejercicio 61

En el ejemplo 6, podríamos haber eliminado primero la variable y multiplicando (*ec.* 1) por -3 y entonces sumar.

Algunas veces ambas ecuaciones se deben multiplicar por diferentes números para que una de las variables sea eliminada. Este procedimiento es ilustrado en el ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones usando el método de suma.

$$4x + 3y = 7 \quad (ec.\ 1)$$
$$3x - 7y = -3 \quad (ec.\ 2)$$

Solución Podemos eliminar la variable x multiplicando (*ec.* 1) por -3 y (*ec.* 2) por 4.

$$\begin{aligned} -12x - 9y &= -21 && (ec.\ 1) \text{ Multiplicada por } -3 \\ 12x - 28y &= 12 && (ec.\ 2) \text{ Multiplicada por } 4 \\ \hline -37y &= -33 && \text{Suma de ecuaciones} \\ y &= \frac{33}{37} \end{aligned}$$

Podemos encontrar x sustituyendo $\frac{33}{37}$ en y en una de las ecuaciones originales y despejar x. Un método más sencillo para despejar x es regresar a las ecuaciones originales y eliminar la variable y multiplicando (*ec.* 1) por 7 y (*ec.* 2) por 3.

$$\begin{aligned} 28x + 21y &= 49 && (ec.\ 1) \text{ Multiplicada por } 7 \\ 9x - 21y &= -9 && (ec.\ 2) \text{ Multiplicada por } 3 \\ \hline 37x \qquad &= 40 && \text{Suma de ecuaciones} \\ x &= \frac{40}{37} \end{aligned}$$

La solución es $\left(\frac{40}{37}, \frac{33}{37}\right)$.

Resuelve ahora el ejercicio 67

En el ejemplo 7, la misma solución pudo obtenerse multiplicando la (*ec.* 1) por 3 y a la (*ec.* 2) por -4 y entonces sumar. Inténtalo ahora y observa.

EJEMPLO 8 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones usando el método de suma.

$$2x + y = 11 \quad (ec.\ 1)$$
$$\frac{1}{18}x + \frac{1}{6}y = 1 \quad (ec.\ 2)$$

Solución Cuando un sistema de ecuaciones contiene una ecuación con fracciones, casi siempre lo mejor es eliminar las fracciones de la ecuación. En la (*ec.* 2), si multiplicamos ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador, 18, obtenemos

$$18\left(\frac{1}{18}x + \frac{1}{6}y\right) = 18(1)$$
$$18\left(\frac{1}{18}x\right) + 18\left(\frac{1}{6}y\right) = 18(1)$$
$$x + 3y = 18 \quad (ec.\ 3)$$

Ahora, el sistema es

$$2x + y = 11 \quad (ec.\ 1)$$
$$x + 3y = 18 \quad (ec.\ 3)$$

Éste es el mismo sistema de ecuaciones resuelto en el ejemplo 6. Por lo que la solución de este sistema es (3, 5), el mismo obtenido en el ejemplo 6.

Resuelve ahora el ejercicio 51

Comprendiendo el álgebra

- Si una ecuación contiene fracciones, quita las fracciones multiplicando ambos lados de la ecuación por el MCD de las fracciones.
- Si una ecuación contiene números decimales, quita el número decimal multiplicando ambos lados de la ecuación por un número de base 10.

EJEMPLO 9 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones usando el método de suma.

$$\begin{aligned} 0.2x + 0.1y &= 1.1 \qquad (ec.\ 1) \\ x + 3y &= 18 \qquad (ec.\ 2) \end{aligned}$$

Solución Cuando un sistema de ecuaciones contiene una ecuación con números decimales, casi siempre lo mejor es *quitar*, o eliminar, los números decimales de la ecuación. En (*ec.* 1), si multiplicamos ambos lados de la ecuación por 10, obtenemos

$$10(0.2x) + 10(0.1y) = 10(1.1)$$
$$2x + y = 11 \qquad (ec.\ 3)$$

Ahora el sistema es

$$\begin{aligned} 2x + y &= 11 \qquad (ec.\ 3) \\ x + 3y &= 18 \qquad (ec.\ 2) \end{aligned}$$

Éste es el mismo sistema de ecuaciones que resolvimos en el ejemplo 6. Por lo tanto, la solución de este sistema es (3, 5), la misma que obtuvimos en el ejemplo 6.

Resuelve ahora el ejercicio 69

EJEMPLO 10 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones usando el método de suma.

$$\begin{aligned} x - 3y &= 4 \qquad (ec.\ 1) \\ -2x + 6y &= 1 \qquad (ec.\ 2) \end{aligned}$$

Solución Comenzamos multiplicando (*ec.* 1) por 2.

$$\begin{aligned} 2x - 6y &= 8 \qquad (ec.\ 1)\ \text{Multiplicado por 2} \\ \underline{-2x + 6y} &\underline{= 1} \qquad (ec.\ 2) \\ 0 &= 9 \qquad \text{Falso} \end{aligned}$$

Ya que 0 = 9 es una proposición falsa, este sistema no tiene solución. El sistema es inconsistente y las gráficas de estas ecuaciones son líneas paralelas.

Resuelve ahora el ejercicio 59

Comprendiendo el álgebra

Si cuando se resuelve un sistema de ecuaciones por cualquiera de los métodos de sustitución o suma, obtienes una ecuación que es siempre

- *falso*, como $5 = 6$ o $0 = 9$, el sistema es inconsistente y no tiene solución.
- *verdadero*, como $6 = 6$ o $0 = 0$, el sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones.

EJEMPLO 11 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones usando el método de suma.

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{2}y &= 2 \\ y &= 2x - 4 \end{aligned}$$

Solución Primero, reescribe cada ecuación en la forma estándar.

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{2}y &= 2 \qquad (ec.\ 1) \\ -2x + y &= -4 \qquad (ec.\ 2) \end{aligned}$$

Ahora procede como en los ejemplos anteriores.

$$\begin{aligned} 2x - y &= 4 \qquad (ec.\ 1)\ \text{Multiplicado por 2} \\ -2x + y &= -4 \qquad (ec.\ 2) \\ 0 &= 0 \qquad \text{Verdadero} \end{aligned}$$

Como 0 = 0 es una proposición verdadera, el sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones. Ambas ecuaciones representan la misma recta. Observa que si multiplicas ambos lados de la (*ec.* 1) por −2 obtienes a la (*ec.* 2).

Resuelve ahora el ejercicio 63

Hemos ilustrado tres métodos que se pueden utilizar para resolver un sistema de ecuaciones lineales: graficación, sustitución y el método de suma. Cuando necesitas una solución exacta, graficar pudiera no ser la mejor opción. De los dos métodos algebraicos, el método de suma puede ser el más fácil de usar si no hay coeficientes numéricos de 1 en el sistema.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.1

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

solución única	dependiente	consistente	inconsistente	líneas que intersectan	tríada ordenada
una variable	dos variables	líneas paralelas	la misma línea	par ordenado	

1. El objetivo del método de suma es obtener una ecuación que solamente contenga ______________.

2. Para un sistema con tres ecuaciones y tres variables, la solución tiene una ______________.

3. Un sistema de ecuaciones que contiene un número infinito de soluciones es un sistema ______________.

4. Un sistema de ecuaciones que no tiene solución es un sistema ______________.

5. Un sistema de ecuaciones que tiene al menos una solución es un sistema ______________.

6. La ______________ de un sistema de dos ecuaciones lineales está localizada en el punto de intersección de las gráficas de las ecuaciones.

7. Las líneas que representan las ecuaciones en un sistema inconsistente de ecuaciones lineales son ______________.

8. Las líneas que representan las ecuaciones en un sistema dependiente de ecuaciones lineales son ______________.

9. Para un sistema lineal consistente con dos ecuaciones y dos variables, la solución es un ______________.

10. Las líneas que representan las ecuaciones en un sistema consistente de ecuaciones lineales son ______________.

Practica tus habilidades

Determina cuáles de los siguientes pares o tríadas ordenados satisfacen el sistema de ecuaciones lineales.

11. $y = 2x + 4$
$y = 2x - 1$
a) $(0, 4)$
b) $(3, 10)$

12. $4x + 3y = 30$
$y = \frac{3}{4}x - 3$
a) $(6, 2)$ **b)** $(4, 0)$

13. $x + y = 25$
$0.25x + 0.45y = 7.50$
a) $(5, 20)$
b) $(18.75, 6.25)$

14. $y = \frac{x}{3} - \frac{7}{3}$
$5x - 35 = 15y$
a) $(1, -2)$
b) $(7, 0)$

15. $x + 2y - z = -5$
$2x - y + 2z = 8$
$3x + 3y + 4z = 5$
a) $(3, 1, -2)$
b) $(1, -2, 2)$

16. $4x + y - 3z = 1$
$2x - 2y + 6z = 11$
$-6x + 3y + 12z = -4$
a) $(2, -1, -2)$
b) $\left(\frac{1}{2}, 2, 1\right)$

Escribe las ecuaciones en la forma pendiente-intersección. Sin graficar las ecuaciones, indica si el sistema de ecuaciones es consistente, inconsistente o dependiente. Además indica si el sistema tiene exactamente una solución, no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones.

17. $x + y = -2$
$3y + 12 = -6x$

18. $x - \frac{1}{2}y = 4$
$2x - y = 7$

19. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$
$4x + 3y = 12$

20. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$
$2x - 3y = 12$

21. $3x - 3y = 9$
$2x - 2y = -4$

22. $2x = 3y + 4$
$6x - 9y = 12$

23. $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$
$3x - 2y = -\frac{5}{2}$

24. $x - y = 3$
$\frac{1}{4}x - 2y = -6$

Determina gráficamente la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones. Indica si el sistema es inconsistente o dependiente.

25. $y = -x + 3$
$y = x + 5$

26. $y = 2x + 8$
$y = -3x - 12$

27. $y = 4x - 1$
$3y = 12x + 9$

28. $x + y = 1$
$3x - y = -5$

29. $2x + 3y = 6$
$4x = -6y + 12$

30. $y = -2x - 1$
$x + 2y = 4$

31. $5x + 3y = 13$
$x = 2$

32. $2x - 5y = 10$
$y = \frac{2}{5}x - 2$

33. $y = -5x + 5$
$y = 2x - 2$

34. $4x - y = 9$
$x - 3y = 16$

35. $x - \frac{1}{2}y = -2$
$2y = 4x - 6$

36. $y = -\frac{1}{3}x - 1$
$3y = 4x - 18$

Encuentra la solución por sustitución de los siguientes sistemas de ecuaciones.

37. $x - 3y = 1$
$y = -2x + 2$

38. $3x - 2y = -7$
$y = 2x + 6$

39. $x = 2y + 3$
$y = x$

40. $y = 3x - 16$
$x = y$

41. $a + 3b = 5$
$2a - b = 3$

42. $m + 2n = 4$
$m + \frac{1}{2}n = 4$

43. $5x + 6y = 6.7$
$3x - 2y = 0.1$

44. $x = 0.5y + 1.7$
$10x - y = 1$

45. $a - \frac{1}{2}b = 2$
$b = 2a - 4$

46. $x + 3y = -2$
$y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

47. $5x - 2y = -7$
$y = \frac{5}{2}x + 1$

48. $y = \frac{2}{3}x - 1$
$2x - 3y = 5$

49. $5x - 4y = -7$
$x - \frac{3}{5}y = -2$

50. $6s + 3t = 4$
$s = \frac{1}{2}t$

51. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 2$
$\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}y = 6$

52. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 3$
$\frac{1}{5}x + \frac{1}{8}y = 1$

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de suma.

53. $x + y = 7$
$x - y = 3$

54. $-x + y = 4$
$x - 2y = 6$

55. $4x - 3y = 1$
$5x + 3y = -10$

56. $2x - 5y = 6$
$-4x + 10y = -1$

57. $10m - 2n = 6$
$-5m + n = -3$

58. $4r - 3s = 2$
$2r + s = 6$

59. $2c - 5d = 1$
$-4c + 10d = 6$

60. $2v - 3w = 8$
$3v - 6w = 1$

61. $7p - 3q = 4$
$2p + 5q = 7$

62. $5s - 3t = 7$
$t = s + 1$

63. $5a - 10b = 15$
$a = 2b + 3$

64. $2x - 7y = 3$
$-5x + 3y = 7$

65. $2x - y = 8$
$3x + y = 6$

66. $5x + 4y = 6$
$2x = -5y - 1$

67. $3x - 4y = 5$
$2x = 5y - 3$

68. $4x + 5y = 3$
$2x - 3y = 4$

69. $0.2x - 0.5y = -0.4$
$-0.3x + 0.4y = -0.1$

70. $0.15x - 0.40y = 0.65$
$0.60x + 0.25y = -1.1$

71. $2.1m - 0.6n = 8.4$
$-1.5m - 0.3n = -6.0$

72. $-0.25x + 0.10y = 1.05$
$-0.40x - 0.625y = -0.675$

73. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1$
$\frac{1}{4}x - \frac{1}{9}y = \frac{2}{3}$

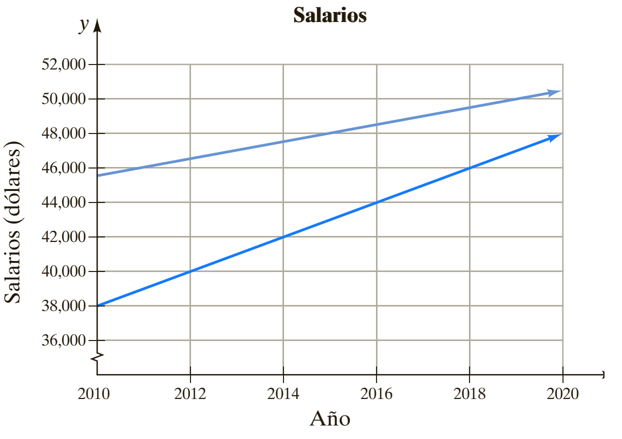
74. $\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y = 4$
$\frac{2}{3}x - y = \frac{8}{3}$

75. $\frac{1}{3}x = 4 - \frac{1}{4}y$
$3x = 4y$

76. $\frac{2}{3}x - 4 = \frac{1}{2}y$
$x - 3y = \frac{1}{3}$

Resolución de problemas

77. Salarios En enero de 2010, Mary Bennett comenzó un nuevo trabajo con un salario anual de $38,000. Su jefe acordó aumentar su salario $1000 cada enero en los próximos años. Su salario está determinado por la ecuación $y = 30{,}000 + 1000t$, donde t es el número de años desde 2010 (ver la línea azul oscuro en la gráfica).También en enero de 2010, Wynn Nguyen comenzó un nuevo trabajo con un salario anual de $45,500. Su jefe acordó aumentar su salario $500 cada enero en los próximos años. Su salario está determinado por la ecuación $y = 45{,}500 + 500t$, donde t es el número de años desde 2010 (ver la línea azul claro en la gráfica). Resuelve el sistema de ecuaciones para determinar el año en el que ambos salarios serán iguales. ¿Cuál será el salario en ese año?



78. Alquiler de camiones Hope Duncan planea mudarse y necesita rentar un camión de 24 pies por un día. Budget cobra \$50 más 79 centavos por milla. Ryder cobra \$40 más 99 centavos por milla. El costo de cada compañía se representa en el siguiente sistema de ecuaciones donde x es el número de millas conducidas y y, el costo total por la renta del camión por un día.

$$y = 50 + 0.79x$$
$$y = 40 + 0.99x$$

Resuelve el sistema de ecuaciones para determinar el número de millas para las que el costo de ambas compañías sea el mismo. ¿Cuál será el costo?

© Ron Chappie Stock/Glowimages

En los ejercicios 79 y 80, **a)** *crea un sistema de ecuaciones lineales que tenga la solución indicada, y* **b)** *explica cómo determinaste tu solución.*

79. (2, 5)

80. (−3, 4)

81. La solución del siguiente sistema de ecuaciones es (2, −3). Encuentra A y B.

$$Ax + 4y = -8$$
$$3x - By = 21$$

82. La solución del siguiente sistema de ecuaciones es (−5, 3). Encuentra A y B.

$$3x + Ay = -3$$
$$Bx - 2y = -16$$

83. Si (2, 6) y (−1, −6) son dos soluciones de $f(x) = mx + b$, encuentra m y b.

84. Si (3, −5) y (−2, 10) son dos soluciones de $f(x) = mx + b$, encuentra m y b.

Ejercicios de conceptos y escritura

85. Explica cómo puedes determinar, sin graficar o resolver, si un sistema de dos ecuaciones lineales es consistente, inconsistente o dependiente.

86. ¿Cuál es el objetivo del proceso de resolver un sistema de ecuaciones lineales usando el método de suma (o eliminación)?

87. Cuando resuelves un sistema lineal por suma, ¿cómo puedes decir si el sistema es dependiente?

88. Cuando resuelves un sistema lineal por suma, ¿cómo puedes decir si el sistema es inconsistente?

89. Explica cómo puedes decir que el siguiente sistema es dependiente solo por observación.

$$2x + 3y = 1$$
$$4x + 6y = 2$$

90. Explica cómo puedes decir que el siguiente sistema es inconsistente solo por observación.

$$-x + 3y = 5$$
$$2x - 6y = -13$$

91. a) Escribe un sistema de ecuaciones que sería más fácil de resolver por sustitución.

b) Explica por qué el método de sustitución sería el más fácil de usar.

c) Resuelve el sistema por sustitución.

92. a) Escribe un sistema de ecuaciones que sería más fácil de resolver por el método de suma.

b) Explica por qué el método de suma sería el más fácil de usar.

c) Resuelve el sistema usando el método de suma.

93. Las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales incluyen (−4, 3) y (−6, 11).

a) ¿Cuántas otras soluciones tiene el sistema? Explica.

b) Determina la pendiente de la recta que contiene (−4, 3) y (−6, 11). Determina la ecuación de la recta que contiene estos puntos. Luego determina la intersección con el eje y.

c) ¿Esta recta representa una función?

94. Las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales incluyen (−5, 1) y (−5, −4).

a) ¿Cuántas otras soluciones tiene el sistema? Explica.

b) Determina la pendiente de la recta que contiene (−5, 1) y (−5, −4). Determina la ecuación de la recta que contiene estos puntos. ¿Esta gráfica tiene intersección con el eje y? Explica.

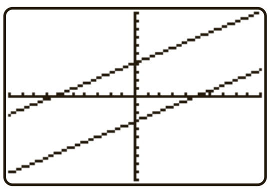
c) ¿Esta recta representa una función?

95. Construye un sistema de ecuaciones que sea dependiente. Explica cómo creaste tu sistema.

96. Construye un sistema de ecuaciones que sea inconsistente. Explica cómo creaste tu sistema.

97. Supón que graficas un sistema de dos ecuaciones lineales en tu calculadora graficadora, pero solo se muestra una recta en la pantalla. ¿Cuáles son las dos posibles explicaciones para esto?

98. Supón que graficas un sistema de dos ecuaciones lineales en tu calculadora graficadora y obtienes lo siguiente.



a) Observando la pantalla, ¿puedes asegurar que el sistema es inconsistente? Explica.

b) ¿Qué puedes hacer en tu calculadora graficadora para determinar si el sistema es inconsistente?

Problemas de desafío

Resuelve cada sistema de ecuaciones.

99. $\dfrac{x+2}{2} - \dfrac{y+4}{3} = 4$

$\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x-y}{3}$

100. $\dfrac{5x}{2} + 3y = \dfrac{9}{2} + y$

$\dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2}y = 6x + 12$

Resuelve cada sistema de ecuaciones. (Pista: Si $u = \dfrac{1}{a}$, *entonces* $\dfrac{3}{a} = 3 \cdot \dfrac{1}{a} = 3u$).

101. $\dfrac{3}{a} + \dfrac{4}{b} = -1$

$\dfrac{1}{a} + \dfrac{6}{b} = 2$

102. $\dfrac{6}{x} + \dfrac{1}{y} = -1$

$\dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{y} = -3$

Resolviendo para x y y, determina la solución de cada sistema de ecuaciones. En todas las ecuaciones $a \neq 0$ *y* $b \neq 0$. *La solución contendrá a, b, o ambas.*

103. $4ax + 3y = 19$

$-ax + y = 4$

104. $ax = 2 - by$

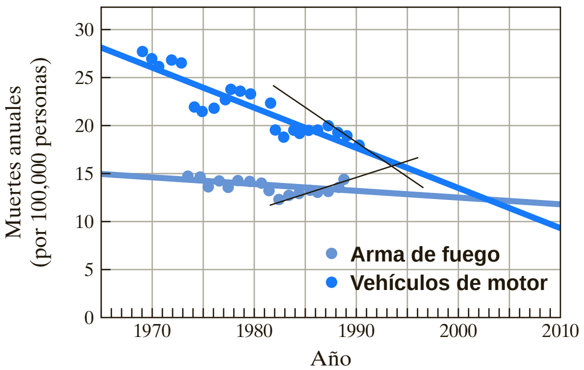
$-ax + 2by - 1 = 0$

Actividad de grupo

Discute y responde el ejercicio 105 en grupo.

105. Tendencias En la siguiente gráfica, la línea azul claro indica la tendencia a largo plazo en las muertes por arma de fuego, y la línea azul oscuro indica la tendencia a largo plazo en las muertes por accidentes de vehículos de motor. Las líneas negras indican las tendencias a corto plazo en muertes por arma de fuego y accidentes de vehículos de motor.

Tendencias de mortalidad



Fuente: Scientific American

a) Discutan la tendencia a largo plazo en las muertes por vehículos de motor.

b) Discutan la tendencia a largo plazo en las muertes por arma de fuego.

c) Discutan la tendencia a corto plazo en las muertes por vehículos de motor comparada con la tendencia a largo plazo en las muertes por vehículos de motor.

d) Discutan la tendencia a corto plazo en las muertes por armas de fuego comparada con la tendencia a largo plazo en las muertes por armas de fuego.

e) Usando las tendencias a largo plazo, estimen cuándo el número de muertes por armas de fuego será igual al número de muertes por accidentes automovilísticos.

f) Repitan el inciso **e)** usando las tendencias a corto plazo.

g) Determinen una función, $M(t)$, que pueda ser usada para estimar el número de muertes por cada 100,000 personas (a largo plazo) por vehículos de motor de 1965 a 2010.

h) Determinen una función, $F(t)$, que pueda ser usada para estimar el número de muertes por cada 100,000 personas (a largo plazo) por armas de fuego de 1965 a 2010.

i) Resuelvan el sistema de ecuaciones formado por los incisos **g)** y **h)**. ¿La solución coincide con la solución del inciso **e)**? Si no es así, expliquen por qué.

Ejercicios de repaso acumulados

[1.2] **106.** Explica la diferencia entre un número racional y un número irracional.

[1.2] **107.** **a)** ¿Todos los números racionales son números reales?
b) ¿Todos los números irracionales son números reales?

[2.1] **108.** Resuelve la ecuación $\dfrac{1}{2}(x-7) = \dfrac{3}{4}(2x+1)$.

[2.2] **109.** Encuentra todos los números que cumplan con $|x-6| = |6-x|$.

[2.2] **110.** Evalúa $A = p\left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^{nt}$, cuando $p = 500$, $r = 0.04$, $n = 2$, y $t = 1$.

[3.5] **111.** ¿La siguiente relación es una función? Explica tu respuesta $\{(-3, 4), (7, 2), (-4, 5), (5, 0), (-3, -1)\}$.

[3.6] **112.** Sea $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2 - 9$. Encuentra $(f/g)(3)$.

4.2 Solución de sistemas de ecuaciones lineales con tres variables

1 Solución de sistemas de ecuaciones lineales con tres variables.

2 Aprende la interpretación geométrica de un sistema de ecuaciones con tres variables.

3 Reconocer sistemas inconsistentes y dependientes.

1 Solución de sistemas de ecuaciones lineales con tres variables

La ecuación $2x - 3y + 4z = 8$ es un ejemplo de una **ecuación lineal con tres variables**. La solución de una ecuación lineal con tres variables es una *tríada ordenada* de la forma (x, y, z). Una solución de la ecuación dada es $(1, 2, 3)$. Comprueba ahora para verificar que $(1, 2, 3)$ es la solución de la ecuación.

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales con tres variables, podemos usar cualquiera de los métodos de sustitución o suma, ambos analizados en la sección 4.1.

EJEMPLO 1 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por sustitución.

$$\begin{aligned} x &= -3 \\ 3x + 4y &= 7 \\ -2x - 3y + 5z &= 19 \end{aligned}$$

Solución Ya que sabemos que $x = -3$, sustituimos x por -3 en la ecuación $3x + 4y = 7$ y despejamos y.

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 7 \\ 3(-3) + 4y &= 7 \\ -9 + 4y &= 7 \\ 4y &= 16 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Ahora sustituimos $x = -3$ y $y = 4$ en la última ecuación y despejamos z.

$$\begin{aligned} -2x - 3y + 5z &= 19 \\ -2(-3) - 3(4) + 5z &= 19 \\ 6 - 12 + 5z &= 19 \\ -6 + 5z &= 19 \\ 5z &= 25 \\ z &= 5 \end{aligned}$$

Verifica $x = -3$, $y = 4$, $z = 5$. La solución debe comprobarse en *las tres* ecuaciones originales.

$x = -3$

$-3 = -3$ Verdadero

$3x + 4y = 7$

$3(-3) + 4(4) \stackrel{?}{=} 7$

$7 = 7$ Verdadero

$-2x - 3y + 5z = 19$

$-2(-3) - 3(4) + 5(5) \stackrel{?}{=} 19$

$19 = 19$ Verdadero

La solución es la tríada ordenada $(-3, 4, 5)$. Recuerda que una tríada ordenada enlista el valor de x primero, el valor de y segundo y el valor de z tercero.

Resuelve ahora el ejercicio 5

No todos los sistemas de ecuaciones lineales de tres variables pueden ser resueltos fácilmente por sustitución. Podemos también encontrar la solución por el método de suma, como se ilustra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones usando el método de suma.

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \quad &(ec.\ 1) \\ 2x - 3y + 2z &= -7 \quad &(ec.\ 2) \\ x + 4y - z &= 10 \quad &(ec.\ 3) \end{aligned}$$

Comprendiendo el álgebra

Cuando resolvemos un sistema de ecuaciones con tres variables usando el método de suma, nuestro primer paso es escribir dos nuevas ecuaciones en donde haya las mismas dos variables. Hacemos esto eliminando una de las tres variables. Podemos resolver entonces este nuevo sistema de la misma forma en la que resolvimos los sistemas en la sección 4.1.

Solución Nuestro primer paso es usar el método de suma para escribir dos nuevas ecuaciones donde cada una tenga las mismas dos variables. Hacemos esto para eliminar una de las tres variables x, y o z. Aquí eliminaremos la variable z. Usa (*ec.* 1) y (*ec.* 3) para eliminar z y llama a esta nueva ecuación (*ec.* 4).

$$\begin{array}{rll} 3x + 2y + z = 4 & & (ec.\ 1) \\ x + 4y - z = 10 & & (ec.\ 3) \\ \hline 4x + 6y \qquad = 14 & & \text{Suma de ecuaciones, } (ec.\ 4) \end{array}$$

Ahora, usa (*ec.* 1) y (*ec.* 2) para eliminar z y llama a esta nueva ecuación (*ec.* 5). Observa que si multiplicamos (*ec.* 1) por -2 y después sumamos (*ec.* 1) y (*ec.* 2), se podría eliminar z en (*ec.* 5).

$$\begin{array}{rll} -6x - 4y - 2z = -8 & & (ec.\ 1) \text{ Multiplicado por } -2 \\ 2x - 3y + 2z = -7 & & (ec.\ 2) \\ \hline -4x - 7y \qquad = -15 & & \text{Suma de ecuaciones, } (ec.\ 5) \end{array}$$

Tenemos ahora un sistema de dos ecuaciones con dos variables, (*ec.* 4), y (*ec.* 5). Podemos resolver este sistema usando el método de suma.

$$\begin{array}{rll} 4x + 6y = 14 & & (ec.\ 4) \\ -4x - 7y = -15 & & (ec.\ 5) \\ \hline -y = -1 & & \text{Suma de ecuaciones} \\ y = 1 & & \end{array}$$

Posteriormente sustituimos $y = 1$ en cualquiera de las dos ecuaciones que contienen solo dos variables [(*ec.* 4) o (*ec.* 5)] y despejamos x.

$$\begin{array}{rll} 4x + 6y = 14 & & (ec.\ 4) \\ 4x + 6(1) = 14 & & \text{Sustituye } y \text{ por 1 en } (ec.\ 4) \\ 4x + 6 = 14 & & \\ 4x = 8 & & \\ x = 2 & & \end{array}$$

Por último, sustituimos $x = 2$ y $y = 1$ en cualquiera de las ecuaciones originales y despejamos z.

$$\begin{array}{rll} 3x + 2y + z = 4 & & (ec.\ 1). \\ 3(2) + 2(1) + z = 4 & & \text{Sustituye } x \text{ por 2 y } y \text{ por 1 en } (ec.\ 1). \\ 6 + 2 + z = 4 & & \\ 8 + z = 4 & & \\ z = -4 & & \end{array}$$

La solución es la tríada ordenada $(2, 1, -4)$. Comprueba esta solución en *las tres* ecuaciones originales.

Resuelve ahora el ejercicio 17

EJEMPLO 3 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{rll} 2x - 3y + 2z = -1 & & (ec.\ 1) \\ x + 2y \qquad = 14 & & (ec.\ 2) \\ x \qquad - 5z = -11 & & (ec.\ 3) \end{array}$$

Solución La tercera ecuación solo tiene las variables x y z. Por lo tanto, usa el método de suma para escribir una nueva ecuación que también solo tenga las variables x y z. Usamos (*ec.* 1) y (*ec.* 2). Multiplicaremos (*ec.* 1) por 2 y (*ec.* 2) por 3, así podemos eliminar la variable y cuando sumemos las ecuaciones. Llamaremos a esta nueva ecuación (*ec.* 4).

$$\begin{array}{rcrl}
4x - 6y + 4z &=& -2 & \text{(ec. 1) Multiplicado por 2} \\
3x + 6y \qquad\; &=& 42 & \text{(ec. 2) Multiplicado por 3} \\
\hline
7x \qquad\; + 4z &=& 40 & \text{Suma de ecuaciones, (ec. 4)}
\end{array}$$

Tenemos ahora dos ecuaciones que contienen solo las variables x y z.

$$\begin{array}{rcrl}
7x + 4z &=& 40 & \text{(ec. 4)} \\
x - 5z &=& -11 & \text{(ec. 3)}
\end{array}$$

Eliminemos ahora la variable x.

$$\begin{array}{rcrl}
7x + 4z &=& 40 & \text{(ec. 4)} \\
-7x + 35z &=& 77 & \text{(ec. 3) Multiplicada por } -7 \\
\hline
39z &=& 117 & \text{Suma de ecuaciones} \\
z &=& 3 &
\end{array}$$

Ahora despejamos x usando una de las ecuaciones que contienen solo las variables x y z. Sustituimos z por 3 en (*ec.* 3).

$$\begin{array}{rcrl}
x - 5z &=& -11 & \text{(ec. 3)} \\
x - 5(3) &=& -11 & \text{Sustituye } z \text{ por 3 en (ec. 3).} \\
x - 15 &=& -11 & \\
x &=& 4 &
\end{array}$$

Al final, despejamos y usando cualquiera de las ecuaciones originales que contenga y.

$$\begin{array}{rcrl}
x + 2y &=& 14 & \text{(ec. 2)} \\
4 + 2y &=& 14 & \text{Sustituye } x \text{ por 4 en (ec. 2).} \\
2y &=& 10 & \\
y &=& 5 &
\end{array}$$

La solución es la tríada ordenada (4, 5, 3).

Verifica

(ec. 1)	(ec. 2)	(ec. 3)
$2x - 3y + 2z = -1$	$x + 2y = 14$	$x - 5z = -11$
$(4) - 3(5) + 2(3) \stackrel{?}{=} -1$	$4 + 2(5) \stackrel{?}{=} 14$	$4 - 5(3) \stackrel{?}{=} -11$
$8 - 15 + 6 \stackrel{?}{=} -1$	$4 + 10 \stackrel{?}{=} 14$	$4 - 15 \stackrel{?}{=} -11$
$-1 = -1$	$14 = 14$	$-11 = -11$
Verdadero	Verdadero	Verdadero

Resuelve ahora el ejercicio 13

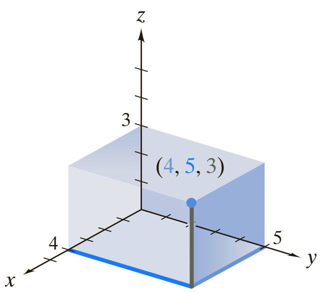


FIGURA 4.5

Comprendiendo el álgebra

En un sistema de ecuaciones lineales con tres variables, cada ecuación es representada por un plano en un sistema de coordenadas tridimensional. Una solución para el sistema es la tríada ordenada (x, y, z), que está representada por un punto en la intersección de los tres planos.

2 Aprende la interpretación geométrica de un sistema de ecuaciones lineales con tres variables

La solución a un sistema de ecuaciones lineales con *dos* variables ocurre en el punto de intersección de dos *rectas* que representan las ecuaciones en el sistema. Las rectas son dibujadas en el sistema de coordenadas cartesianas de dos dimensiones.

La solución a un sistema de ecuaciones lineales con *tres* variables ocurre en el punto de intersección de tres *planos* que representan las ecuaciones en el sistema. (Ver ejercicio 47 de la página 235). Los planos están dibujados en un sistema de coordenadas tridimensional en donde el eje x, el eje y y el eje z son todos perpendiculares entre sí (ver **Figura 4.5**).

En el ejemplo 3, la solución al sistema fue la tríada ordenada (4, 5, 3). El punto representado por esta tríada ordenada se muestra en la **Figura 4.5**. Graficar los planos en el sistema de coordenadas tridimensional va más allá del alcance de este libro.

3 Reconocer sistemas inconsistentes y dependientes

Recuerda *que un sistema inconsistente de ecuaciones es aquel que no tiene solución*. Si, mientras resuelves un sistema de ecuaciones lineales con tres variables, obtienes una proposición que es siempre falsa, como $3 = 0$, el sistema es inconsistente y no tiene solución. En dicho sistema, al menos dos de los planos que representan las ecuaciones son paralelos y, por lo tanto, un solo punto de intersección de los tres planos no existe. (Ver ejercicios 45 y 46 de la página 234).

Recuerda que un *sistema dependiente de ecuaciones es aquel que tiene un número infinito de soluciones*. Si mientras resuelves un sistema de ecuaciones lineales de tres variables obtienes una proposición que siempre es verdadera, como $0 = 0$, el sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones. En dicho sistema, cada uno de los planos que representan las ecuaciones se encontrarán en el mismo plano, es decir, los tres planos intersectan la recta. (Ver ejercicio 48 de la página 235).

EJEMPLO 4 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} -3x + 5y + z &= -3 \quad (ec.\ 1)\\ 6x - 10y - 2z &= 1 \quad (ec.\ 2)\\ 7x - 4y + 11z &= -6 \quad (ec.\ 3) \end{aligned}$$

Solución Comenzaremos eliminando la variable x de (*ec.* 1) y (*ec.* 2).

$$\begin{aligned} -6x + 10y + 2z &= -6 \quad (ec.\ 1) \quad \text{Multiplicada por 2}\\ \underline{6x - 10y - 2z} &= \underline{1} \quad (ec.\ 2)\\ 0 &= -5 \quad \text{Falso} \end{aligned}$$

Ya que obtuvimos una proposición falsa, $0 = -5$, este sistema es inconsistente y no tiene solución.

Resuelve ahora el ejercicio 33

EJEMPLO 5 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \quad (ec.\ 1)\\ x + 2y - z &= 1 \quad (ec.\ 2)\\ x - 4y + 3z &= 1 \quad (ec.\ 3) \end{aligned}$$

Solución Comenzaremos eliminando la variable x de (*ec.* 1) y (*ec.* 2) y después de (*ec.* 1) y (*ec.* 3).

$$\begin{aligned} -x + y - z &= -1 \quad (ec.\ 1) \quad \text{Multiplicada por } -1\\ \underline{x + 2y - z} &= \underline{1} \quad (ec.\ 2)\\ 3y - 2z &= 0 \quad \text{Suma de ecuaciones, } (ec.\ 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \quad (ec.\ 1)\\ \underline{-x + 4y - 3z} &= \underline{-1} \quad (ec.\ 3) \quad \text{Multiplicada por } -1\\ 3y - 2z &= 0 \quad \text{Suma de ecuaciones, } (ec.\ 5) \end{aligned}$$

Ahora eliminamos la variable y usando (*ec.* 4) y (*ec.* 5).

$$\begin{aligned} -3y + 2z &= 0 \quad (ec.\ 4) \quad \text{Multiplicada por } -1\\ \underline{3y - 2z} &= \underline{0} \quad (ec.\ 5)\\ 0 &= 0 \quad \text{Verdadero} \end{aligned}$$

Ya que obtuvimos una proposición verdadera, $0 = 0$, este sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones.

Recuerda de la sección 4.1 que los sistemas de ecuaciones que son dependientes son además consistentes, ya que tienen solución.

Resuelve ahora el ejercicio 35

Consejo útil

Si una ecuación en un sistema de ecuaciones contiene fracciones, se deben eliminar las fracciones multiplicando cada término de la ecuación por el mínimo común múltiplo. Después continúa resolviendo el sistema de ecuaciones. Por ejemplo, si una ecuación en el sistema es $\frac{3}{4}x - \frac{5}{8}y + z = \frac{1}{2}$, debes multiplicar ambos lados de la ecuación por 8 para obtener la ecuación equivalente, $6x - 5y + 8z = 4$.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.2

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

par ordenado   tríada ordenada   plano   recta   dependiente   inconsistente

1. La solución de un sistema de ecuaciones de tres variables es un/una ____________.
2. Una ecuación lineal de tres variables se representa por un/una ____________ en un sistema de coordenadas tridimensional.
3. Si al resolver un sistema de ecuaciones lineales con tres variables obtienes una afirmación que es siempre falsa, el sistema es ____________ y no tiene solución.
4. Si al resolver un sistema de ecuaciones lineales con tres variables obtienes una afirmación que es siempre verdadera, el sistema es ____________ y tiene un número infinito de soluciones.

Practica tus habilidades

Resuelve por sustitución.

5. $x = 2$, $2x - y = 4$, $3x + 2y - 2z = 4$
6. $-x + 3y - 5z = -7$, $2y - z = -1$, $z = 3$
7. $5x - 6z = -17$, $3x - 4y + 5z = -1$, $2z = -6$
8. $2x - 5y = 12$, $-3y = -9$, $2x - 3y + 4z = 8$
9. $x + 2y = 6$, $3y = 9$, $x + 2z = 12$
10. $x - y + 5z = -4$, $3x - 2z = 6$, $4z = 2$

Resuelve utilizando el método de suma.

11. $x - 2y = -1$, $3x + 2y = 5$, $2x - 4y + z = -1$
12. $x - y + 2z = 1$, $y - 4z = 2$, $-2x + 2y - 5z = 2$
13. $2y + 4z = 2$, $x + y + 2z = -2$, $2x + y + z = 2$
14. $2x + y - 8 = 0$, $3x - 4z = -3$, $2x - 3z = 1$
15. $3p + 2q = 11$, $4q - r = 6$, $6p + 7r = 4$
16. $3s + 5t = -12$, $2t - 2u = 2$, $-s + 6u = -2$
17. $p + q + r = 4$, $p - 2q - r = 1$, $2p - q - 2r = -1$
18. $x - 2y + 3z = -7$, $2x - y - z = 7$, $-4x + 3y + 2z = -14$
19. $2x - 2y + 3z = 5$, $2x + y - 2z = -1$, $4x - y - 3z = 0$
20. $2x - y - 2z = 3$, $x - 3y - 4z = 2$, $x + y + 2z = -1$
21. $r - 2s + t = 2$, $2r + 3s - t = -3$, $2r - s - 2t = 1$
22. $3a - 3b + 4c = -1$, $a - 2b + 2c = 2$, $2a - 2b - c = 3$
23. $2a + 2b - c = 2$, $3a + 4b + c = -4$, $5a - 2b - 3c = 5$
24. $x - 2y + 2z = 3$, $2x - 3y + 2z = 5$, $x + y + 6z = -2$
25. $-x + 3y + z = 0$, $-2x + 4y - z = 0$, $3x - y + 2z = 0$

26. $x + y + z = 0$
$-x - y + z = 0$
$-x + y + z = 0$

27. $-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = -2$
$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{4}z = 2$
$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = 1$

28. $\frac{2}{3}x + y - \frac{1}{3}z = \frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}x + y + z = \frac{5}{2}$
$\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = \frac{3}{2}$

29. $x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = -2$
$\frac{2}{3}x + y - \frac{2}{3}z = \frac{1}{3}$
$-\frac{1}{4}x + y - \frac{1}{4}z = \frac{3}{4}$

30. $\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y + z = 2$
$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + z = \frac{17}{6}$
$-\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{2}z = -\frac{5}{6}$

31. $0.2x + 0.3y + 0.3z = 1.1$
$0.4x - 0.2y + 0.1z = 0.4$
$-0.1x - 0.1y + 0.3z = 0.4$

32. $0.6x - 0.4y + 0.2z = 2.2$
$-0.1x - 0.2y + 0.3z = 0.9$
$-0.2x - 0.1y - 0.3z = -1.2$

Determina si los siguientes sistemas son inconsistentes, dependientes o ninguno de ellos.

33. $2x + y + 2z = 1$
$x - 2y - z = 0$
$3x - y + z = 2$

34. $2p - 4q + 6r = 5$
$-p + 2q - 3r = -3$
$3p + 4q + 5r = 8$

35. $x - 4y - 3z = -1$
$-3x + 12y + 9z = 3$
$2x - 10y - 7z = 5$

36. $5a - 4b + 2c = 5$
$-10a + 8b - 4c = -10$
$-7a - 4b + c = 7$

37. $x + 3y + 2z = 6$
$x - 2y - z = 8$
$-3x - 9y - 6z = -7$

38. $2x - 2y + 4z = 2$
$-3x + y = -9$
$2x - y + z = 5$

Resolución de problemas

39. Tres soluciones para la ecuación $Ax + By + Cz = 1$ son $(-1, 2, -1)$, $(-1, 1, 2)$, y $(1, -2, 2)$. Determina los valores de A, B y C y escribe la ecuación usando los valores numéricos encontrados.

40. Tres soluciones para la ecuación $Ax + By + Cz = 14$ son $(3, -1, 2)$, $(2, -2, 1)$, y $(-5, 3, -24)$. Encuentra los valores de A, B y C y escribe la ecuación usando los valores numéricos encontrados.

En los ejercicios 41 y 42, escribe un sistema de ecuaciones lineales con tres variables que tenga la solución dada.

41. $(3, 1, 6)$

42. $(-2, 5, 3)$

43. a) Encuentra los valores de a, b y c de tal manera que los puntos $(1, -1)$, $(-1, -5)$, y $(3, 11)$ se encuentren en la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$.

b) Encuentra la ecuación cuadrática cuya gráfica pase a través de los tres puntos indicados. Explica cómo determinaste tu respuesta.

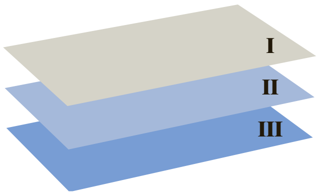
44. a) Encuentra los valores de a, b y c de tal manera que los puntos $(1, 7)$, $(-2, -5)$, y $(3, 5)$ se encuentren en la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$.

b) Encuentra la ecuación cuadrática cuya gráfica pase a través de los tres puntos indicados. Explica cómo determinaste tu respuesta.

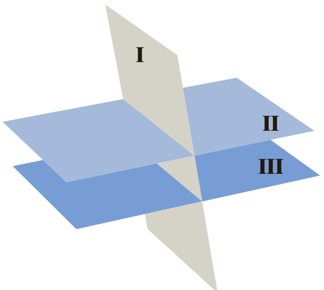
Ejercicios de conceptos y escritura

Una ecuación con tres variables representa un plano. Considera un sistema de ecuaciones que consista en tres ecuaciones con tres variables. Responde las siguientes preguntas.

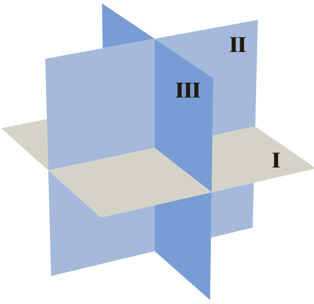
45. Si los tres planos son paralelos entre sí como se ilustra en la figura, ¿cuántos puntos tendrán en común estos tres planos? ¿El sistema es consistente o inconsistente? Justifica tu respuesta.



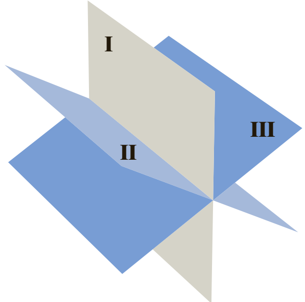
46. Si dos de los planos son paralelos entre sí y el tercer plano intersecta los otros dos planos, ¿cuántos puntos tendrán en común estos tres planos? ¿El sistema es consistente o inconsistente? Justifica tu respuesta.



47. Si tres planos son como se ilustra en la figura, ¿cuántos puntos tendrán en común? ¿El sistema es consistente o inconsistente? Justifica tu respuesta.



48. Si tres planos son como se ilustra en la figura, ¿cuántos puntos tendrán en común? ¿El sistema es dependiente? Justifica tu respuesta.



49. ¿Es posible que un sistema de ecuaciones lineales con tres variables

a) no tenga solución?

b) tenga una solución?

c) tenga dos soluciones? Explica tus respuestas.

50. En un sistema de ecuaciones lineales con tres variables, si las gráficas de dos ecuaciones son planos paralelos, ¿es posible que el sistema sea

a) consistente? **b)** dependiente?

c) inconsistente? Justifica tus respuestas.

Problemas de desafío

Encuentra la solución para los siguientes sistemas de ecuaciones.

51. $3p + 4q = 11$
$2p + r + s = 9$
$q - s = -2$
$p + 2q - r = 2$

52. $3a + 2b - c = 0$
$2a + 2c + d = 5$
$a + 2b - d = -2$
$2a - b + c + d = 2$

Ejercicios de repaso acumulados

[2.2] **53. Esquí a campo traviesa** Margie Steiner comienza a esquiar por un sendero a 3 millas por hora. Diez minutos $(\frac{1}{6}$ de hora) después, su esposo, David, comienza a esquiar por el mismo sendero a 5 millas por hora.

a) ¿Cuánto tiempo después de que David sale alcanzará a Margie?

b) ¿A que distancia del punto de partida estarán cuando se reúnan?

[2.6] *Determina cada conjunto solución*

54. $\left|4 - \frac{2x}{3}\right| > 5$

55. $\left|\frac{3x - 4}{2}\right| + 1 < 7$

56. $\left|3x + \frac{1}{5}\right| = -5$

4.3 Sistemas de ecuaciones lineales: aplicaciones y resolución de problemas

1 Utilizar sistemas de ecuaciones para resolver aplicaciones.

2 Utilizar sistemas lineales con tres variables para resolver aplicaciones.

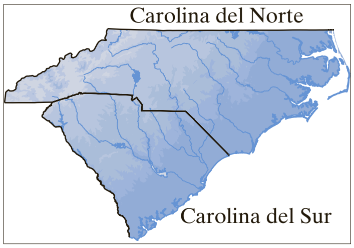
1 Utilizar sistemas de ecuaciones para resolver aplicaciones

Muchas de las aplicaciones que se resolvieron en capítulos anteriores utilizando una sola variable pueden resolverse utilizando dos variables. Cada vez que utilizamos dos variables para resolver un problema de aplicación, debemos escribir un sistema de dos ecuaciones.

EJEMPLO 1 **Área territorial de Carolina del Norte y Carolina del Sur** El área territorial combinada de Carolina del Norte y Carolina del Sur es de 78,820 millas cuadradas. La diferencia entre el área territorial de los dos estados es de 18,602 millas cuadradas. Si Carolina del Norte tiene un área territorial mayor, determina el área territorial de cada estado.

Comprendiendo el álgebra

Siempre que se utilicen *dos* variables para resolver un problema de aplicación, debemos determinar *dos* ecuaciones para resolver el problema.



Solución **Entiende** Debemos determinar el área territorial de Carolina del Norte y de Carolina del Sur. Usaremos dos variables, por lo tanto, necesitaremos determinar dos ecuaciones.

Traduce Sea N = al área territorial de Carolina del Norte.
Sea S = al área territorial de Carolina del Sur.

Como el área total de los dos estados es 78,820 millas cuadradas, la primera ecuación es

$$N + S = 78{,}820$$

Dado que Carolina del Norte tiene una mayor área territorial y que la diferencia en el área territorial es de 18,602 millas cuadradas, la segunda ecuación es

$$N - S = 18{,}602$$

El sistema de dos ecuaciones es

$$\begin{aligned} N + S &= 78{,}820 \quad (ec.\ 1)\\ N - S &= 18{,}602 \quad (ec.\ 2)\end{aligned}$$

Realiza los cálculos Resolveremos este sistema de ecuaciones utilizando el método de suma.

$$\begin{aligned} N + S &= 78{,}820\\ N - S &= 18{,}602\\ \hline 2N \qquad &= 97{,}422 && \text{Suma de las dos ecuaciones.}\\ N &= 48{,}711 && \text{Divididos ambos lados entre 2.}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $N = 48{,}711$. Para determinar el valor de S, sustituye 48,711 en la (*ec.* 1).

$$\begin{aligned} N + S &= 78{,}820\\ 48{,}711 + S &= 78{,}820\\ S &= 30{,}109 && \text{Restado 48,711 en ambos lados.}\end{aligned}$$

Responde El área territorial de Carolina del Norte es de 48,711 millas cuadradas y el área territorial de Carolina del Sur es de 30,109 millas cuadradas.

Resuelve ahora el ejercicio 1

EJEMPLO 2 **Velocidad de una canoa** Los Burnhams viajan en canoa en el río Suwannee. Viajan a una velocidad promedio de 4.75 millas por hora cuando reman con la corriente y 2.25 millas por hora cuando reman en contra de la corriente. Determina la velocidad de la canoa en aguas tranquilas y la velocidad de la corriente.

Solución **Entiende** Cuando viajan a favor de la corriente, la velocidad de la canoa es la velocidad de la canoa en aguas tranquilas *más* la velocidad de la corriente. Cuando viajan en contra de la corriente, la velocidad de la canoa es la velocidad de la canoa en aguas tranquilas *menos* la velocidad de la corriente.

Traduce Sea s = velocidad de la canoa en aguas tranquilas.
Sea c = velocidad de la corriente.

El sistema de ecuaciones es:

velocidad de la canoa viajando con la corriente: $s + c = 4.75$
velocidad de la canoa viajando contra la corriente: $s - c = 2.25$

Realiza los cálculos Utilizaremos el método de suma, como se analizó en la sección 4.1, para resolver este sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} s + c &= 4.75\\ s - c &= 2.25\\ \hline 2s \qquad &= 7.00\\ s &= 3.5\end{aligned}$$

La velocidad de la canoa en aguas tranquilas es de 3.5 millas por hora. Ahora determinaremos la velocidad de la corriente.

$$s + c = 4.75$$
$$3.5 + c = 4.75$$
$$c = 1.25$$

Responde La velocidad de la corriente es 1.25 millas por hora y la velocidad de la canoa en aguas tranquilas es 3.5 millas por hora.

Resuelve ahora el ejercicio 13

© Yuri Arcus/Glowimages

EJEMPLO 3 **Salario** Yamil Bermudez, un vendedor de Electrodomésticos Hancock, recibe un salario semanal más una comisión, la cual es un porcentaje de sus ventas. En una semana, por ventas de \$3000, su pago total fue de \$850. La semana siguiente, por ventas de \$4000, su pago total fue de \$1000. Encuentra su salario semanal y su porcentaje de comisión.

Solución **Entiende** El sueldo de Yamil consiste en un salario semanal más comisión. Se nos da información acerca de dos semanas específicas que podemos usar para determinar su salario semanal y el porcentaje de comisión.

Traduce Sea s = su salario semanal.

Sea r = su porcentaje de comisión.

En la semana uno, su comisión sobre \$3000 es $3000r$ y en la semana 2 su comisión sobre \$4000 es $4000r$. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones es

$$\text{salario} + \text{comisión} = \text{sueldo}$$

$$\left.\begin{array}{lr} \text{Primera semana} & s + 3000r = 850 \\ \text{Segunda semana} & s + 4000r = 1000 \end{array}\right\} \text{Sistema de ecuaciones}$$

Realiza los cálculos

$$\begin{array}{rll} -s + 3000r = & -850 & \text{Primera semana multiplicada por } -1 \\ s + 4000r = & 1000 & \text{Segunda semana} \\ \hline 1000r = & 150 & \text{Suma de ecuaciones} \end{array}$$

$$r = \frac{150}{1000}$$
$$r = 0.15$$

El porcentaje de comisión de Yamil es de 15%. Ahora determinaremos su salario semanal, sustituyendo r por 0.15 en cualquiera de las ecuaciones.

$$s + 3000r = 850 \qquad \text{Sustituye } r \text{ por } 0.15 \text{ en la ecuación de la primera semana.}$$
$$s + 3000(0.15) = 850$$
$$s + 450 = 850$$
$$s = 400$$

Responde El sueldo semanal de Yamil es de \$400 y su porcentaje de comisión es de 15%.

Resuelve ahora el ejercicio 15

© Christopher Meder\Shutterstock

EJEMPLO 4 **Paseo a caballo** Ben Campbell sale de su rancho montando su caballo a 5 millas por hora. Media hora más tarde, Joe Campbell sale del mismo rancho y se dirige por la misma ruta en su caballo a 8 millas por hora.

a) ¿Cuánto tiempo tardará Joe, desde que sale del rancho, en alcanzar a Ben?

b) Cuando Joe alcanza a Ben, ¿a qué distancia del rancho estarán?

Solución **Entiende** **a)** Cuando Joe alcanza a Ben, ambos habrán recorrido la misma distancia. Joe habrá cubierto la distancia en $\frac{1}{2}$ hora menos, ya que él salió $\frac{1}{2}$ hora después que Ben. Para resolver este problema, se utilizará la fórmula de distancia = velocidad · tiempo.

Traduce Sea b = tiempo recorrido por Ben.
Sea j = tiempo recorrido por Joe.

Construiremos una tabla para organizar la información dada.

	Velocidad	Tiempo	Distancia
Ben	5	b	$5b$
Joe	8	j	$8j$

Ya que tanto Ben como Joe cubren la misma distancia, escribimos

$$\text{distancia de Ben} = \text{distancia de Joe}$$
$$5b = 8j$$

Nuestra segunda ecuación proviene del hecho de que Joe está viajando $\frac{1}{2}$ hora menos que Ben. Por lo tanto, $j = b - \frac{1}{2}$. Así, nuestro sistema de ecuaciones es:

$$5b = 8j$$
$$j = b - \frac{1}{2}$$

Realiza los cálculos Resolveremos este sistema de ecuaciones utilizando el método de sustitución. Como $j = b - \frac{1}{2}$, sustituimos $b - \frac{1}{2}$ por j en la primera ecuación y resolvemos para b.

$$5b = 8j$$
$$5b = 8\left(b - \frac{1}{2}\right)$$
$$5b = 8b - 4$$
$$-3b = -4$$
$$b = \frac{-4}{-3} = 1\frac{1}{3}$$

Por lo tanto, el tiempo que Ben ha estado viajando es $1\frac{1}{3}$ horas. Para obtener el tiempo que Joe ha viajado, restaremos $\frac{1}{2}$ hora del tiempo de Ben.

$$j = b - \frac{1}{2}$$
$$j = 1\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$$
$$j = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{8}{6} - \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

Responde Joe alcanzará a Ben $\frac{5}{6}$ de una hora (o 50 minutos) después de que Joe salga del rancho.

b) Puedes utilizar ya sea la distancia de Ben o la de Joe para determinar la distancia recorrida desde el rancho. Utilizaremos la distancia de Joe.

$$d = 8j = 8\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{1} \cdot \frac{5}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$$

Responde Por lo tanto, Joe alcanzará a Ben cuando estén a $6\frac{2}{3}$ millas del rancho.

Resuelve ahora el ejercicio 33

EJEMPLO 5 **Mezcla de soluciones** Chung Song, un químico de Johnson y Johnson, desea crear un nuevo limpiador doméstico que contenga 30% de fosfato trisódico (TSP). Chung necesita mezclar una solución al 16% de TSP con una solución al 72% de TSP para obtener 6 litros de una solución al 30% de TSP. ¿Cuántos litros de la solución al 16% y de la solución al 72% necesita mezclar?

Solución **Entiende** Para resolver este problema usamos el hecho de que la cantidad de TSP en una solución se determina multiplicando el porcentaje de concentración de la solución por el número de litros (el volumen) de la solución. Chung necesita mezclar una solución al 16% con una solución al 72% para obtener 6 litros de una solución cuya concentración, 30%, esté entre las concentraciones de las dos soluciones que serán mezcladas.

Traduce Sea x = número de litros de la solución al 16%.
Sea y = número de litros de la solución al 72%.

Dibujaremos un diagrama (ver **Figura 4.7**) y después haremos una tabla que nos ayude a analizar el problema.

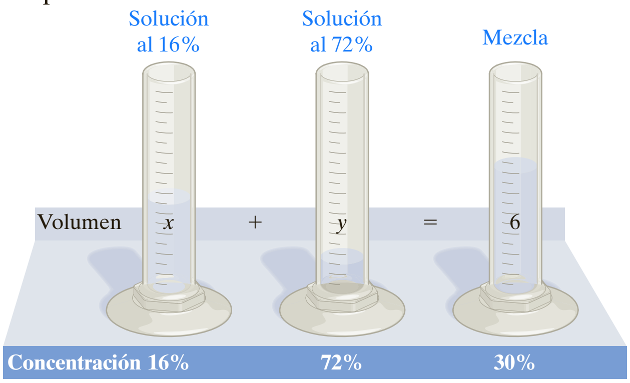


FIGURA 4.6

Solución	Concentración de la solución	Número de litros	Cantidad de TSP
Solución al 16%	0.16	x	$0.16x$
Solución al 72%	0.72	y	$0.72y$
Mezcla	0.30	6	0.30(6)

Como la suma de los volúmenes de la solución al 16% y la solución al 72% es de 6 litros, nuestra primera ecuación es

$$x + y = 6$$

La segunda ecuación viene del hecho de que se mezclan las soluciones.

$$\begin{pmatrix}\text{cantidad de TSP en}\\ \text{la solución al 16\%}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{cantidad de TSP en}\\ \text{la solución al 72\%}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{cantidad de TSP}\\ \text{en la mezcla}\end{pmatrix}$$

$$0.16x \qquad + \qquad 0.72y \qquad = \qquad 0.30(6)$$

Por lo que, el sistema de ecuaciones es

$$x + y = 6$$
$$0.16x + 0.72y = 0.30(6)$$

Realiza los cálculos Al despejar y en $x + y = 6$, obtenemos $y = -x + 6$. Al sustituir y por $-x + 6$ en la segunda ecuación, tenemos

$$\begin{aligned}0.16x + 0.72y &= 0.30(6)\\ 0.16x + 0.72(-x + 6) &= 0.30(6)\\ 0.16x - 0.72x + 4.32 &= 1.8\\ -0.56x + 4.32 &= 1.8\\ -0.56x &= -2.52\\ x &= \frac{-2.52}{-0.56} = 4.5\end{aligned}$$

Por lo tanto, Chung debe utilizar 4.5 litros de la solución al 16%. Como las dos soluciones deben sumar 6 litros, debe utilizar $6 - 4.5$ o 1.5 litros de la solución al 72%.

Resuelve ahora el ejercicio 17

Consejo útil

En el ejemplo 5, la ecuación $0.16x + 0.72y = 0.30(6)$ podría simplificarse multiplicando ambos lados de la ecuación por 100. Esto daría la ecuación $16x + 72y = 30(6)$ o $16x + 72y = 180$. Entonces el sistema de ecuaciones sería $x + y = 6$ y $16x + 72y = 180$. Si resuelves este sistema, debes obtener la misma solución. Inténtalo y verás.


© Losevsky Pavel/Shutterstock

2 Utilizar sistemas lineales con tres variables para resolver aplicaciones

Ahora veamos algunas aplicaciones que implican tres ecuaciones con tres variables.

EJEMPLO 6 **Préstamos bancarios** Juguetes Tiny Tots debe pedir prestados \$25,000 para costear una ampliación. No puede obtener todo el dinero prestado de un único banco, así que pide préstamos a tres diferentes bancos. El primero cobra 8% de interés. En el segundo banco pide prestados \$2000 más que la mitad de la cantidad solicitada al primer banco. La tasa de interés del segundo banco es de 10%. El resto de los \$25,000 lo presta un tercer banco, donde Juguetes Tiny Tots paga 9% de interés. El interés anual total que paga Juguetes Tiny Tots por los tres préstamos es de \$2220. ¿Cuánto dinero pidió prestado a cada tasa de interés?

Solución **Entiende** Nos piden determinar cuánto se pide prestado a cada una de las tres tasas de interés diferentes. Por lo que este problema tendrá tres variables, una por cada monto prestado. Como el problema tendrá tres variables, necesitaremos determinar tres ecuaciones para utilizar en nuestro sistema de ecuaciones.

Comprendiendo el álgebra

Cada vez que se usen *tres* variables para resolver un problema de aplicación, debemos determinar *tres* ecuaciones para resolver el problema.

Traduce Sea x = cantidad prestada por el primer banco.
Sea y = cantidad prestada por el segundo banco.
Sea z = cantidad prestada por el tercer banco.

Como la cantidad total prestada es de \$25,000, sabemos que

$$x + y + z = 25{,}000 \qquad \text{La cantidad total prestada es de \$25,000.}$$

En el segundo banco, Juguetes Tiny Tots pidió prestado \$2000 más que la mitad del dinero solicitado al primer banco. De tal forma, que la segunda ecuación es

$$y = \frac{1}{2}x + 2000 \qquad \text{La segunda, } y\text{, es \$2000 más que } \frac{1}{2} \text{ de la primera, } x.$$

Nuestra última ecuación proviene del hecho de que el interés anual total cobrado por los tres bancos es de \$2220. El interés de cada banco se determina multiplicando la tasa de interés por la cantidad prestada.

$$0.08x + 0.10y + 0.09z = 2220 \qquad \text{El interés total es \$2220.}$$

Por lo tanto, nuestro sistema de ecuaciones es

$$x + y + z = 25{,}000 \qquad (1)$$
$$y = \frac{1}{2}x + 2000 \qquad (2)$$
$$0.08x + 0.10y + 0.09z = 2220 \qquad (3)$$

Ambos lados de la ecuación (2) pueden multiplicarse por 2 para eliminar las fracciones.

$$2(y) = 2\left(\frac{1}{2}x + 2000\right)$$
$$2y = x + 4000 \qquad \text{Propiedad distributiva}$$
$$-x + 2y = 4000 \qquad \text{Resta } x \text{ a ambos lados.}$$

Podemos eliminar los decimales de la ecuación (3) multiplicando ambos lados por 100. Obtenemos

$$8x + 10y + 9z = 222{,}000$$

Por lo tanto, nuestro sistema de ecuaciones simplificado es

$$\begin{aligned} x + y + z &= 25{,}000 && (ec.\ 1)\\ -x + 2y &= 4000 && (ec.\ 2)\\ 8x + 10y + 9z &= 222{,}000 && (ec.\ 3)\end{aligned}$$

Realiza los cálculos Hay varias formas para resolver este sistema. Utilizamos (*ec.* 1) y (*ec.* 3) para eliminar la variable z.

$$\begin{aligned} -9x - 9y - 9z &= -225{,}000 && (ec.\ 1) \text{ Multiplicada por } -9\\ 8x + 10y + 9z &= 222{,}000 && (ec.\ 3)\\ \hline -x + y &= -3{,}000 && \text{Suma de ecuaciones, } (ec.\ 4)\end{aligned}$$

Ahora sumamos (*ec.* 2) y (*ec.* 4) para eliminar la variable x y obtenemos el valor de y.

$$\begin{aligned} x - 2y &= -4000 && (ec.\ 2) \text{ Multiplicada por } -1\\ -x + y &= -3000 && (ec.\ 4)\\ \hline -y &= -7000 && \text{Suma de ecuaciones}\\ y &= 7000 \end{aligned}$$

Ahora que conocemos el valor de y podemos obtener el valor de x.

$$\begin{aligned} -x + 2y &= 4000 && (ec.\ 2)\\ -x + 2(7000) &= 4000 && \text{Sustituye } y \text{ por 7000 en } (ec.\ 2).\\ -x + 14{,}000 &= 4000\\ -x &= -10{,}000\\ x &= 10{,}000\end{aligned}$$

Por último, obtenemos el valor de z.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 25{,}000 && (ec.\ 1)\\ 10{,}000 + 7000 + z &= 25{,}000\\ 17{,}000 + z &= 25{,}000\\ z &= 8000\end{aligned}$$

Responde Juguetes Tiny Tots pidió prestado \$10,000 a 8%, \$7000 a 10% y \$8000 a 9% de interés.

Resuelve ahora el ejercicio 55

EJEMPLO 7 **Botes inflables** Hobson, Inc., tiene una pequeña planta que fabrica tres tipos de botes inflables con modelos para: una, dos y cuatro personas. Cada bote requiere el servicio de tres departamentos: corte, ensamble y empaque. Los departamentos de corte, ensamble y empaque pueden utilizar un total de 380, 330 y 120 horas/hombre por semana, respectivamente. El tiempo requerido para cada bote y departamento está especificado en la tabla siguiente. Determina cuántos botes de cada tipo se pueden producir cada semana, si la planta opera a toda su capacidad.

	Tiempo (horas/hombre) por bote		
Departamento	Bote para una persona	Bote para dos personas	Bote para cuatro personas
Corte	0.6	1.0	1.5
Ensamble	0.6	0.9	1.2
Empaque	0.2	0.3	0.5


© Yanik Chauvin/Glowimages

Solución **Entiende** Nos dicen que se producen tres tipos diferentes de botes y nos piden determinar el número de botes de cada tipo producido. Como este problema implica tres cantidades por determinar, el sistema tendrá tres ecuaciones con tres variables.

Traduce Utilizaremos la información dada en la tabla.

Sea x = número de botes para una persona.

Sea y = número de botes para dos personas.

Sea z = número de botes para cuatro personas.

El número total de horas de corte para los tres tipos de botes debe ser igual a 380 horas/hombre.

$$0.6x + 1.0y + 1.5z = 380$$

El número total de horas de ensamble debe ser igual a 330 horas/hombre.

$$0.6x + 0.9y + 1.2z = 330$$

El número total de horas de empaque debe ser igual a 120 horas/hombre.

$$0.2x + 0.3y + 0.5z = 120$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned} 0.6x + 1.0y + 1.5z &= 380 \\ 0.6x + 0.9y + 1.2z &= 330 \\ 0.2x + 0.3y + 0.5z &= 120 \end{aligned}$$

Al multiplicar cada ecuación por 10 se eliminarán los números decimales y tendremos el sistema de ecuaciones simplificado siguiente.

$$\begin{aligned} 6x + 10y + 15z &= 3800 && (ec.\ 1) \\ 6x + 9y + 12z &= 3300 && (ec.\ 2) \\ 2x + 3y + 5z &= 1200 && (ec.\ 3) \end{aligned}$$

Realiza los cálculos Primero eliminamos la variable x utilizando (*ec.* 1) y (*ec.* 2) y después (*ec.* 1) y (*ec.* 3).

$$\begin{aligned} 6x + 10y + 15z &= 3800 && (ec.\ 1) \\ -6x - 9y - 12z &= -3300 && (ec.\ 2) \text{ Multiplicada por } -1 \\ \hline y + 3z &= 500 && \text{Suma de ecuaciones, } (ec.\ 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x + 10y + 15z &= 3800 && (ec.\ 1) \\ -6x - 9y - 15z &= -3600 && (ec.\ 3) \text{ Multiplicada por } -3 \\ \hline y &= 200 && \text{Suma de ecuaciones, } (ec.\ 5) \end{aligned}$$

Observa que al sumar las dos últimas ecuaciones, las variables x y z se eliminaron al mismo tiempo. Ahora conocemos el valor de y, por lo que podemos obtener el valor de z.

$$\begin{aligned} y + 3z &= 500 && (ec.\ 4) \\ 200 + 3z &= 500 && \text{Sustituye } y \text{ por 200.} \\ 3z &= 300 \\ z &= 100 \end{aligned}$$

Por último, encontramos el valor de x.

$$\begin{aligned} 6x + 10y + 15z &= 3800 && (ec.\ 1) \\ 6x + 10(200) + 15(100) &= 3800 \\ 6x + 2000 + 1500 &= 3800 \\ 6x + 3500 &= 3800 \\ 6x &= 300 \\ x &= 50 \end{aligned}$$

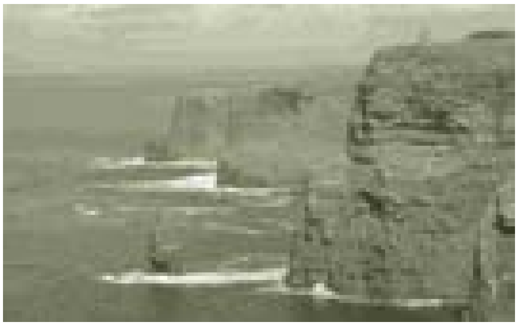
Responde Hobson debe producir 50 botes para una persona, 200 botes para dos personas y 100 botes para cuatro personas por semana.

Resuelve ahora el ejercicio 59

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.3

Practica tus habilidades/Resolución de problemas

1. **Superficie territorial** La superficie combinada de los países de Georgia e Irlanda es 139,973 kilómetros cuadrados. La diferencia entre la superficie de ambos países es 573 kilómetros cuadrados. Si Irlanda tiene la mayor superficie, determina la superficie de ambos países.



© Colin D. Young/Shutterstock

Acantilados de Moher, Irlanda

2. **Victorias en la carrera Daytona 500** Hasta la fecha, Richard Petty tiene el récord de victorias de Daytona 500 y Dale Yarborough tiene el segundo lugar en el número de victorias en la carrera Daytona 500. Las victorias de Petty son una menos que dos veces las victorias de Yarborough. El número total de victorias de ambos pilotos es de 11. Determina las victorias de Petty y de Yarborough.

© Wikicommons

Richard Petty

3. **Contenido en grasa** Un nutriólogo considera que una orden de papas fritas grandes en McDonald's tiene más grasa que una hamburguesa cuarto de libra de McDonald's. Las papas tienen 4 gramos más que tres veces la cantidad de grasa que tiene la hamburguesa. La diferencia en el contenido en grasa entre las papas y la hamburguesa es de 46 gramos. Encuentra el contenido en grasa de la hamburguesa y las papas.

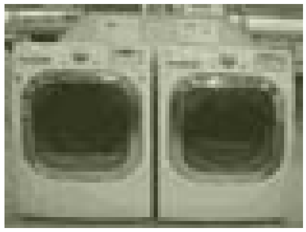
4. **Parques de diversiones** Los dos parques de diversiones más visitados en Estados Unidos en 2007 fueron Walt Disney's Magic Kingdom en Florida y Disneylandia en California. El número total de visitantes a estos dos parques fue de 31.8 millones de personas. El número de personas que visitaron Magic Kingdom fue de 2.2 millones más que el número de personas que visitaron Disneylandia. ¿Cuántas personas visitaron cada parque en 2007? *Fuente:* www.coastergrotto.com

5. **Puesto de hot dogs** En el puesto de hot dogs de Big Al, 2 hot dogs y 3 refrescos cuestan $7. El precio de 4 hot dogs y 2 refrescos es de $10. Determina el precio de un hot dog y el precio de un refresco.

6. **Agua y pretzel** En un partido de fútbol americano profesional, el costo de 2 botellas de agua y 3 pretzels es de $16.50. El costo de 4 botellas de agua y 1 pretzel es de $15.50. Determina el costo de una botella de agua y el costo de un pretzel.

7. **Tarjetas de memoria** Judy Ackerman compró una memoria de 512 MB y una memoria de 4 GB para su cámara digital. En total, ambas memorias pueden almacenar 996 fotografías. La memoria de 4 GB puede almacenar 15 más que ocho veces el número de fotografías que puede almacenar la memoria de 512 MB. ¿Cuántas fotografías puede almacenar cada memoria?

8. **Lavadora y secadora** Beth Rechsteiner adquirió una nueva lavadora y una secadora por el precio de $1650. La secadora cuesta $150 menos que la lavadora. Determina el precio de la lavadora y el precio de la secadora.



© Allen R. Angel

9. **Ángulos complementarios** Dos ángulos son **ángulos complementarios** si la suma de sus valores es de 90° (ver sección 2.3). Si el mayor de dos ángulos complementarios mide 15° más que dos veces el valor del ángulo más pequeño, determina cuánto mide cada ángulo.

10. **Ángulos complementarios** La diferencia entre las magnitudes de dos ángulos complementarios es de 46°. Determina cuánto mide cada ángulo.

11. **Ángulos suplementarios** Dos ángulos son **ángulos suplementarios** si la suma de sus magnitudes es de 180° (ver sección 2.3). Encuentra las magnitudes de dos ángulos suplementarios si uno de los ángulos mide 28° menos que tres veces la magnitud del otro.

12. **Ángulos suplementarios** Determina las magnitudes de dos ángulos suplementarios si uno de los ángulos es tres y media veces más grande que el otro ángulo.

13. **Velocidad en remo** Mientras el equipo de remo Heart O'Texas practicaba en Austin, Texas, remaba a una velocidad promedio de 15.6 millas por hora con corriente a favor y 8.8 millas por hora a contracorriente. Determina la velocidad del equipo de remo en aguas tranquilas y la velocidad de la corriente.

© Charlie Borland\Glowimages

14. Velocidad de vuelo Jung Lee, voló su aeroplano Piper Cub, a una velocidad promedio de 121 millas por hora con el viento a favor y 87 millas por hora con el viento en contra. Determina la velocidad del aeroplano con el aire en calma y la velocidad del viento.

15. Salario más comisión Don Lavigne, representante de ventas de equipo de oficina, percibe un salario semanal más comisión por sus ventas. Una semana su compensación total por ventas de $4000 fue de $660. La siguiente semana su compensación total por ventas de $6000 fue de $740. Encuentra el salario semanal de Don y su tasa de comisión.

16. Alquiler de camiones Una agencia de alquiler de camiones cobra una tarifa diaria más un cargo por millaje. Hugo cobró $85 por 2 días y 100 millas y Christina cobró $165 por 3 días y 400 millas. ¿Cuál es la tarifa diaria de la agencia y cuál es el cargo por millaje?

17. Aceite de lavanda Pola Sommers, una terapeuta de masaje, necesita 3 onzas de una solución de aceite de lavanda al 20%. Ella solo tiene soluciones disponibles de aceite de lavanda al 5% y al 30%. ¿Cuántas onzas de cada solución debe mezclar Pola para obtener la solución deseada?

18. Soluciones de fertilizante Frank Ditlman necesita aplicar una solución al 10% de nitrógeno líquido a su jardín de rosas, pero él solo tiene soluciones de nitrógeno líquido al 4 y 20%. ¿Cuánto de solución al 4% y cuánto de solución al 20% debe mezclar Frank para obtener 10 galones de solución al 10%?

19. Herbicida El herbicida concentrado para césped contiene 18% de ingrediente activo glifosato (y 82% de ingredientes inactivos). El concentrado debe ser mezclado con agua y la mezcla se debe aplicar a la hierba mala. Si la mezcla final contiene 0.9% del ingrediente activo, ¿cuánto concentrado y cuánta agua se deben mezclar para hacer 200 galones de la mezcla final?

20. Fertilizante de césped Fertilizante de Césped para Invierno Scott tiene 22% de nitrógeno. Cal de Schultz con Fertilizante de Césped tiene 4% de nitrógeno. William Weaver, dueño del Vivero Weaver, quiere mezclar estos dos fertilizantes para hacer 400 libras de una mezcla especial con 10% de nitrógeno para la alimentación del césped de mediados de temporada. ¿Qué cantidad de cada fertilizante debe mezclar?

21. Alpiste El alpiste cuesta $0.59 la libra y las semillas de girasol cuestan $0.89 la libra. La tienda de mascotas de Angela Leinenbach quiere hacer una mezcla de 40 libras de alpiste y semillas de girasol que se venda a $0.76 la libra. ¿Cuántas libras de cada tipo de semilla debe usar?

22. Café Franco Manue tiene una tienda de abarrotes. Él quiere mezclar 30 libras de café para venderlo a un costo total de $170. Para obtener la mezcla, combinará café que se vende a $5.20 la libra con café que se vende a $6.30 la libra. ¿Cuántas libras de cada tipo de café debe usar?

23. Tren Amtrak Ann Marie Whittle ha estado valorando las tarifas de Amtrak para un grupo que va a visitar Nueva York. Tres adultos y cuatro niños costarían un total de $159. Dos adultos y tres niños costarían un total de $112. Determina el precio de un boleto de adulto y el de un boleto de niño.


© Jeff Williams/Shutterstock

24. Alitas Buffalo La casa de alitas vende tanto el tamaño regular como el tamaño jumbo en las órdenes de alitas de pollo estilo Buffalo. Tres órdenes regulares y cinco órdenes jumbo de alitas cuestan $67. Cuatro órdenes regulares y cuatro órdenes jumbo de alitas cuestan $64. Determina el costo de una orden regular y de una orden jumbo de alitas.

25. Cuentas de ahorro El señor y la señora Gamton invierten un total de $10,000 en dos cuentas de ahorro. Una cuenta paga 5% de interés y la otra 6%. Determina el monto invertido en cada una si las cuentas reciben un total de $540 de interés después de un año. Utiliza interés = capital • tasa de interés • tiempo.

26. Inversiones Louis Okonkwo invirtió $30,000, una parte a 9% y otra parte a 5%. Si hubiera invertido el monto total a 6.5%, su interés anual debería ser el mismo que la suma del interés anual recibido de las otras dos cuentas. ¿Cuánto se invirtió en cada tasa de interés?

27. Leche Becky Slaats es una ingeniera de planta en Velda (cooperativa de granjas lecheras). Ella quiere mezclar leche entera, la cual contiene 3.25% de grasa, y leche descremada, que no tiene grasa, para obtener 260 galones de una mezcla de leche que contiene 2% de grasa. ¿Cuántos galones de leche entera y cuántos galones de leche descremada debe mezclar Becky para obtener la mezcla deseada?


© Allen R. Angel

28. Quiche Lorraine La receta de Lambert Marx para quiche lorraine requiere 2 tazas (16 onzas) de crema ligera que contiene 20% de grasa. A menudo es difícil encontrar crema ligera con 20% de grasa en el supermercado. Lo que normalmente se encuentra es crema espesa, que tiene 36% de grasa condensada, y crema semiespesa, que contiene 10.5% de grasa condensada. ¿Cuánto de crema espesa y cuánto de crema semiespesa debe mezclar Lambert para obtener la mezcla necesaria para la receta?

29. Alpiste Pidiendo directamente a través de www.birdseed.com, los Carter pueden comprar alpiste Season's Choice por $1.79 la libra y Garden Mix por $1.19 la libra. Si quieren comprar 20 libras y gastar $28 en alpiste, cuántas libras de cada tipo deben comprar?

30. Jugo La compañía de jugos Favorites Juice vende jugo de manzana por 8.3¢ la onza y jugo de frambuesa por 9.3¢ la onza. La compañía quiere comercializar y vender latas de 8 onzas de jugo de manzana-frambuesa por 8.7¢ la onza. ¿Cuántas onzas de cada jugo debe mezclar?

31. Viaje en automóvil Dos automóviles comienzan su viaje desde el mismo punto en Alejandría, Virginia, y viajan en direcciones opuestas. Un auto viaja 5 millas por hora más rápido que el otro auto. Después de 4 horas, ambos autos están alejados 420 millas uno del otro. Encuentra la velocidad de cada auto.

32. Construcción de carreteras Kip Ortiz conduce desde Atlanta a Louisville una distancia de 430 millas. Debido a la construcción de carreteras y el tránsito pesado, durante la primera parte de su viaje, Kip maneja a una velocidad promedio de 50 millas por hora. Durante el resto de su viaje maneja a una velocidad promedio de 70 millas por hora. Si su viaje dura 7 horas en total, ¿cuántas horas manejó a cada velocidad?

33. Conferencia de Avon Cabrina Wilson y Dabney Jeffersson son representantes de Avon que asisten a una conferencia en Seattle. Después de la conferencia, Cabrina conduce a su casa en Boise a una velocidad promedio de 65 millas por hora y Dabney conduce a su casa en Portland a una velocidad promedio de 50 millas por hora. Si la suma de sus tiempos conduciendo es de 11.4 horas y la suma de las distancias conducidas es de 690 millas, determina el tiempo representativo tomado por cada una para llegar a casa.

34. Ejercicio Para su rutina de ejercicio, Cynthia Harrison anda media hora en bicicleta y luego media hora en patines. Cynthia anda en bicicleta a una velocidad que es dos veces la velocidad a la que anda en patines. Si la distancia total cubierta es de 12 millas, determina la velocidad a la que ella anda en bicicleta y a la que anda en patines.

35. Dieta canina El perro de Bill Lutes está en una dieta estricta. El perro debe recibir, entre otros nutrientes, 20 gramos de proteína y 6 gramos de carbohidratos. Bill solo tiene dos mezclas de comida disponibles de las siguientes composiciones. ¿Cuántos gramos de cada mezcla deben usarse para obtener la dieta correcta para este perro?

Mezcla	Proteína (%)	Carbohidratos (%)
Mezcla A	10	6
Mezcla B	20	2

© Micimakin/Shutterstock

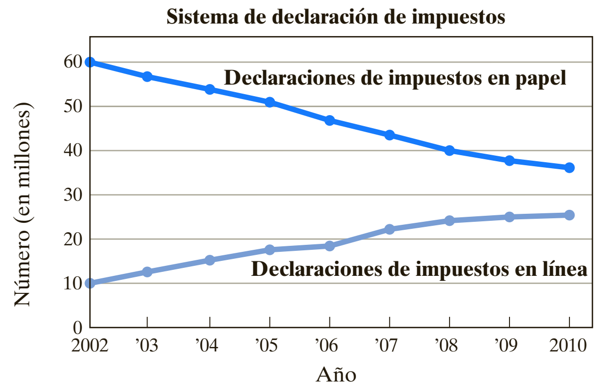
36. Fabricación de sillas Una compañía hace dos modelos de sillas. La información sobre la construcción de las sillas se da en la tabla de abajo. En un día particular, la compañía asigna 46.4 horas/hombre para armar y 8.8 horas/hombre para pintar. ¿Cuántas sillas de cada modelo se pueden hacer?

Modelo	Tiempo de armado	Tiempo de pintado
Modelo A	1 h	0.5 h
Modelo B	3.2 h	0.4 h

37. Aleación de latón En peso, una aleación de latón está compuesta por 70% cobre y 30% zinc. Otras aleaciones de latón están compuestas por 40% cobre y 60% zinc. ¿Cuántos gramos de cada una de estas aleaciones se necesitan fundir y combinar para obtener 300 gramos de una aleación de latón que tenga 60% cobre y 40% zinc?

38. Aleación de plata La plata esterlina está compuesta por 92.5% de plata pura. ¿Cuántos gramos de plata pura (100%) y cuántos gramos de plata esterlina se deben mezclar para obtener 250 g de una aleación de plata al 94%?

39. Servicio de Impuestos Internos (IRS) La siguiente gráfica muestra el número de declaraciones de impuestos y de declaraciones en línea presentadas ante IRS desde 2002 hasta 2010. Si t representa el número de años desde 2002, el número de declaraciones de impuestos, en millones, presentadas ante IRS se puede calcular con la función $P(t) = -2.73t + 58.37$, y el número de declaraciones en línea, en millones, presentadas ante IRS se puede calcular con la función $o(t) = 1.95t + 10.58$. Asumiendo que la tendencia se conserva, resuelve este sistema de ecuaciones para determinar el año en el que el número de declaraciones de impuestos en papel será el mismo que el número de declaraciones en línea.



Fuente: www.irs.gov/pubs

40. Caminar y trotar Cuong Tham pretende hacer ejercicio todos los días. Él camina a 3 millas por hora y luego trota a 5 millas por hora. Si le toma 0.9 horas recorrer un total de 3.5 millas, ¿cuánto tiempo trota?

41. Conduciendo en Texas Tom Johnson y Melissa Acino empezaron manejando al mismo tiempo en diferentes autos desde la ciudad de Oklahoma. Ambos viajaron hacia el sur por la carretera 35. Cuando Melissa llegó a la zona de Dallas/Ft. Worth, a una distancia de 150 millas, Tom solo había llegado a Denton, Texas, a una distancia de 120 millas. Si Melissa promedió 15 millas por hora más rápido que Tom, encuentra la velocidad promedio de cada auto.

42. Costo de fotocopias En un centro de copiado local existen dos planes de pago disponibles.

Plan 1: 10¢ la copia

Plan 2: un cargo anual de \$120 más 4¢ por copia

a) Representa esta información en un sistema de ecuaciones.

b) Grafica el sistema de ecuaciones hasta 4000 copias realizadas.

c) Con la gráfica, determina el número de copias que una persona debe hacer en un año para que los dos planes tengan el mismo costo.

d) Resuelve el sistema algebraicamente. Si tu respuesta no concuerda con el inciso **c)**, explica por qué.

En los ejercicios 43-62, resuelve cada problema utilizando un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

43. Volumen de correspondencia Un hogar estadounidense promedio recibe 24 cartas cada semana. El número de cuentas a pagar y estados de cuenta es dos menos que el doble del número de cartas personales. El número de publicidad es dos más que cinco veces el número de cartas personales. ¿Cuántas cartas personales, cuentas a pagar y estados de cuenta y publicidad recibe la familia promedio cada semana? *Fuente*: Arthur D. Little, Inc.

44. Submarino personal Una tripulación de 141 personas es el estándar en un submarino clase Los Ángeles. El número de suboficiales (enlistados) es cuatro más que el número de oficiales. El número de otros hombres enlistados es tres menos que ocho veces el número de oficiales. Determina el número de oficiales, suboficiales y de la demás gente enlistada en el submarino.

© Stefanie Broughton/Wikipedia, The Free Encyclopedia

USS *Greenville*

45. Juegos de tazón de fútbol universitario Hasta 2007, las universidades de Alabama, Tennessee y Texas han tenido más apariciones en los juegos de tazón de fútbol universitario. Estas tres escuelas han tenido un total de 147 apariciones en el tazón. Alabama ha tenido 8 apariciones más que Texas. Juntas, el número de apariciones de Tennessee y Texas es 39 más que el número de apariciones de Alabama. Determina el número de apariciones en tazones para cada escuela.

46. Juegos Olímpicos En el 2008 los Juegos Olímpicos en Beijing, China, los países que ganaron más medallas fueron Estados Unidos, China y Rusia. Juntos, estos tres países ganaron un total de 282 medallas. Estados Unidos ganó 10 medallas más que China. Juntos, el número de medallas ganadas por Estados Unidos y Rusia es 18 menos que dos veces el número de medallas ganadas por China. Determina el número de medallas que cada país ganó.
Fuente: en.beijing2008.cn

47. Softbol NPF Los tres equipos con el mayor número de victorias de la liga de softbol en la National Pro Fastpich (NPF) en el 2008 en temporada regular fueron los Bandidos de Chicago, la Fuerza de Filadelfia y la Gloria de Washington. Estos tres equipos tuvieron un total de 93 victorias. Los Bandidos tuvieron dos victorias más que la Gloria, y la Fuerza tuvo una victoria menos que los Bandidos. Determina el número de victorias que tuvo cada equipo.
Fuente: www.profastpitch.com

© Lori Carpenter/Shutterstock

48. Ciudades más húmedas Las tres ciudades dentro de Estados Unidos continental que reciben el mayor promedio anual de precipitaciones son Mobile, Alabama, Pensacola, Florida, y New Orleans, Louisiana. El promedio anual total de precipitaciones para las tres ciudades es de 196 pulgadas. Mobile tiene un promedio de precipitaciones que es 3 pulgadas más que para Nueva Orleans. Nueva Orleans tiene un promedio de precipitaciones que es 1 pulgada menos que para Pensacola. Determina el promedio anual de precipitaciones para cada una de las tres ciudades.
Fuente: www.livescience.com

49. Discos más vendidos en Estados Unidos Hasta el 2008, los álbumes más vendidos con base en ventas en Estados Unidos son The Eagles-*Their Greatest Hits 1971-1975*, Michael Jackson-*Thriller* y Pink Floyd-*The Wall*. De los tres álbumes, el número total de discos vendidos en Estados Unidos es de 79.5 millones. El número de discos vendidos de *Thriller* fue 2 millones menos que el número de discos vendidos de *Their Greatest Hits 1971-1975*. El número de discos vendidos de *The Wall* fue 3.5 millones menos que el número de discos vendidos de *Thriller*. Determina el número de cada disco vendido.
Fuente: Asociación de la Industria Discográfica de E.U.

© Allen R. Angel

The Eagles—*Their Greatest Hits 1971–1975*

50. Películas más taquilleras Las películas más exitosas hasta 2008, con base en las ventas en taquilla de todos los tiempos, son *Titanic*, *El Señor de los Anillos: El Retorno del Rey* y *Piratas del Caribe: El Cofre de la Muerte*. Las ventas totales recaudadas por las tres películas son \$4024 millones. Las ventas combinadas de *El Retorno del Rey* y *El cofre de la Muerte* son \$354 millones más que las ventas de *Titanic*. Las ventas de *El Retorno del Rey* son \$69 millones más que las ventas de *El Cofre de la Muerte*. Determina las ventas para cada una de las películas.
Fuente: Taquilla de todo el mundo en todos los tiempos

51. Súper Tazón Hasta 2010, los estados de Florida, California y Louisiana han sido sede de la mayoría de los Súper Tazones. Estos tres estados han sido sede de un total de 35 Súper Tazones. Florida ha sido sede de 6 Súper Tazones más que Louisiana. Juntos, Florida y Louisiana han sido sede dos ocasiones más que el doble de veces que California ha sido sede. Determina el número de Súper Tazones para los que han sido sede cada uno de estos tres estados.
Fuente: www.nfl.com

52. Entradas de concierto Para el concierto de Soggy Bottom Boys existen tres tipos de entradas: superior delantera, piso principal y gradas. Las entradas más caras corresponden a los boletos de la parte superior delantera y son el doble de caros que los boletos para las gradas. Los boletos para las gradas cuestan \$10 menos que los boletos para el piso principal y \$30 menos que para los boletos en la parte superior delantera. Determina el precio para cada tipo de boleto.

53. Triángulo La suma de las magnitudes de los ángulos de un triángulo es 180°. El ángulo más pequeño del triángulo tiene una magnitud que es $\frac{2}{3}$ la magnitud del segundo ángulo más pequeño. El ángulo mayor tiene una magnitud que es 30° menor que tres veces la magnitud del segundo ángulo más pequeño. Determina la magnitud de cada ángulo.

54. Triángulo El ángulo mayor de un triángulo tiene una magnitud que es 10° menos que tres veces la magnitud del segundo ángulo más pequeño. La magnitud del ángulo más pequeño es igual a la diferencia entre la magnitud del ángulo mayor y dos veces la magnitud del segundo ángulo más pequeño. Determina las magnitudes de los tres ángulos del triángulo.

55. Inversiones Tam Phan recibió un cheque por $10,000. Ella decidió dividir el dinero (no en partes iguales) en tres diferentes cuentas de inversión. Puso una parte de su dinero en una cuenta de ahorro que paga 3% de interés. La segunda parte, que era dos veces la primera, la puso en un certificado de depósito que paga 5% de interés. El resto lo puso en un fondo de mercado monetario que paga 6% de interés. Si el interés total de Tam en un periodo de 1 año fue $525.00, ¿cuánto puso en cada cuenta?

56. Aguinaldo Nick Pfaff, un abogado, dividió su cheque de aguinaldo de $15,000 en tres diferentes cuentas de inversión. Con una parte del dinero, compró un bono municipal que paga 5.5% de interés simple. Invirtió dos veces el monto de dinero que pagó por el bono municipal en un certificado de depósito que paga 4.5% de interés simple. Puso el resto en una cuenta de mercado monetario que paga 3.75% de interés simple. Si el total de intereses de Nick por 1 año fue $692.50, ¿cuánto puso en cada cuenta?

57. Peróxido de hidrógeno Deben mezclarse soluciones de peróxido de hidrógeno al 10, 12 y 20% para obtener 8 litros de una solución al 13%. ¿Cuántos litros de cada solución deben mezclarse si el volumen de la solución al 20% debe ser 2 litros menos que el volumen de la solución al 10%?

58. Ácido sulfúrico Deben mezclarse soluciones de ácido sulfúrico al 8, 10 y 20% para obtener 100 mililitros de una solución al 12%. Si el *volumen de ácido* de la solución al 8% es igual a la mitad del *volumen de ácido* de las otras dos soluciones, ¿cuánto se necesita de cada solución?

59. Fabricación de muebles La compañía de muebles Donaldson produce tres tipos de mecedoras: el modelo para niños, el modelo estándar y el modelo ejecutivo. Cada silla se fabrica en tres etapas: corte, construcción y acabado. El tiempo necesario por etapa para cada tipo de silla se muestra en la siguiente tabla. Durante una semana específica la compañía tiene disponible un máximo de 154 horas para el corte, 94 horas para la construcción y 76 horas para el acabado. Determina cuántas sillas de cada tipo debe hacer la compañía para operar a toda su capacidad.

Etapa	Para niños	Estándar	Ejecutiva
Corte	5 h	4 h	7 h
Construcción	3 h	2 h	5 h
Acabado	2 h	2 h	4 h

60. Fabricación de bicicletas La compañía de bicicletas Jamis produce tres modelos de bicicletas: Dakar, Komodo y Aragon. Cada bicicleta se fabrica en tres etapas: soldado, pintado y ensamblado. El tiempo necesario por etapa para cada tipo de bicicleta se muestra en la siguiente tabla. Durante una semana específica, la compañía tiene disponible un máximo de 133 horas para el soldado, 78 horas para el pintado y 96 horas para el ensamblado. Determina cuántas bicicletas de cada tipo debe hacer la compañía para operar a toda su capacidad.

Etapa	Dakar	Komodo	Aragon
Soldado	2	3	4
Pintado	1	2	2.5
Ensamblado	1.5	2	3

61. Flujo de corriente En electrónica es necesario analizar el flujo de corriente que pasa a través de un circuito. En tres rutas (A, B y C) de un circuito, la relación es la siguiente:

$$\begin{aligned} I_A + I_B + I_C &= 0 \\ -8I_B + 10I_C &= 0 \\ 4I_A - 8I_B &= 6 \end{aligned}$$

Donde I_A, I_B, e I_C representan la corriente en las rutas A, B y C, respectivamente. Determina la corriente en cada ruta del circuito.

62. Fuerza en una viga En física a menudo se estudian las fuerzas que actúan sobre un objeto. Para tres fuerzas, F_1, F_2 y F_3, que actúan sobre una viga, se obtuvieron las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} 3F_1 + F_2 - F_3 &= 2 \\ F_1 - 2F_2 + F_3 &= 0 \\ 4F_1 - F_2 + F_3 &= 3 \end{aligned}$$

Encuentra las tres fuerzas.

Actividad de grupo

Discute y responde el ejercicio 63 en grupo.

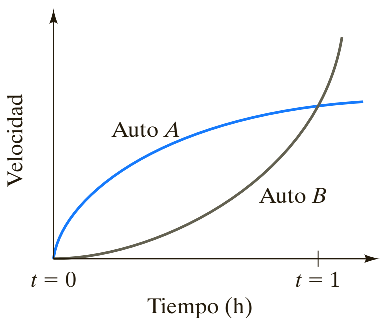
65. Dos autos Un *sistema no lineal de ecuaciones* es un sistema de ecuaciones que contiene al menos una ecuación que no es lineal (los sistemas no lineales de ecuaciones se discutirán en el capítulo 10). La gráfica muestra un sistema no lineal de ecuaciones. Las curvas representan velocidad contra tiempo para dos autos.

a) ¿Las dos curvas son funciones? Explica.

b) Discute el significado de esta gráfica.

c) En el tiempo $t = 0.5$ h, ¿qué auto está viajando a mayor velocidad? Justifica tu respuesta.

d) Asume que los dos autos empiezan en la misma posición y viajan en la misma dirección. ¿Qué auto, A o B, llegará más lejos en 1 hora? Justifica tu respuesta.



Ejercicios de repaso acumulados

[1.4] **64.** Evalúa $\frac{1}{2}x + \frac{2}{5}xy + \frac{1}{8}y$ cuando $x = -2$, $y = 5$.

[2.1] **65.** Resuelve $4 - 2[(x - 5) + 2x] = -(x + 6)$.

[3.2] **66.** Explica cómo determinas si una gráfica representa una función.

[3.5] **67.** Escribe una ecuación de la recta que pasa por los puntos $(6, -4)$ y $(2, -8)$.

Prueba de mitad de capítulo: 4.1-4.3

Para determinar tu comprensión de los temas que se han abordado hasta este momento, resuelve esta pequeña prueba. Las respuestas, y la sección en que se trató el tema por primera vez, se proporcionan al final del libro. Revisa las preguntas que respondiste de manera incorrecta.

1. Para los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) Escribe cada ecuación en la forma pendiente-intersección.

b) Sin graficar las ecuaciones indica si el sistema es consistente, inconsistente o dependiente.

c) Indica si el sistema tiene exactamente una solución, no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones.

$$7x - y = 13$$
$$2x + 3y = 9$$

Resuelve cada sistema de ecuaciones usando el método gráfico.

2. $y = 2x$
$y = -x + 3$

3. $x + y = -4$
$3x - 2y = 3$

Resuelve cada sistema de ecuaciones usando el método de sustitución.

4. $2x + 5y = -3$
$x - 2y = -6$

5. $4x - 3y = 8$
$2x + y = -1$

Resuelve cada sistema de ecuaciones usando el método de suma.

6. $x = 4y - 19$
$7x + 5y = -1$

7. $3x + 4y = 3$
$9x + 5y = \frac{11}{2}$

Resuelve cada sistema de ecuaciones por cualquier método. Indica si el sistema es inconsistente o dependiente.

8. $\frac{1}{3}a - \frac{1}{4}b = -1$
$\frac{1}{2}a + \frac{1}{6}b = 5$

9. $3m - 2n = 1$
$n = \frac{3}{2}m - 7$

10. $8x - 16y = 24$
$x = 2y + 3$

Resuelve cada sistema de ecuaciones.

11. $x + y + z = 2$
$2x - y + 2z = -2$
$3x + 2y + 6z = 1$

12. $2x - y - z = 1$
$3x + 5y + 2z = 12$
$-6x - 4y + 5z = 3$

13. Cuando se pidió resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ -x + 2y + 2z &= 5 \\ 7x + 5y - z &= -2 \end{aligned}$$

Frank Dumont afirmó que la solución solo era $x = 1$. Esto es incorrecto. ¿Por qué es incorrecto? Justifica tu respuesta. Luego resuelve el sistema.

14. Castañas y nueces Una tienda local de nueces vende castañas a \$12 la libra y nueces a \$6 la libra. ¿Cuántas libras de cada tipo debe comprar William Pritchard para tener una mezcla de 15 libras que se venda a \$10 la libra?

15. Suma de números La suma de tres números es 32. El número más grande es cuatro veces el número más pequeño. La suma de los dos números más pequeños es 8 veces menos que el número más grande. Encuentra los tres números.

4.4 Resolución de sistemas de ecuaciones mediante el uso de matrices

1. Escribir una matriz aumentada.
2. Resolver sistemas de ecuaciones lineales.
3. Resolver sistemas de ecuaciones lineales con tres variables.
4. Reconocer sistemas inconsistentes y sistemas dependientes.

1 Escribir una matriz aumentada

Matriz

- Una **matriz** es un arreglo rectangular de números que se escriben dentro de corchetes. El plural de *matriz* es **matrices**.
- Los números dentro de la matriz son llamados **elementos** de la matriz.
- Las **dimensiones** de una matriz son el número de filas por el número de columnas.

Un ejemplo de una matriz es

$$\begin{array}{cc} & \text{3 columnas} \\ & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \text{2 filas} \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Las dimensiones de esta matriz son 2 filas por 3 columnas. Escribimos 2×3 y se dice "2 por 3".

Una **matriz cuadrada** es una matriz con el mismo número de filas y columnas. Un ejemplo de una matriz cuadrada 2×2 es

$$\begin{array}{cc} & \text{2 columnas} \\ & \downarrow \quad \downarrow \\ \text{2 filas} \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Podemos resolver sistemas de ecuaciones lineales con el uso de *matrices aumentadas*. Una **matriz aumentada** es una matriz hecha de dos pequeñas matrices separadas por una línea vertical. Los números a la izquierda de la línea vertical de una matriz aumentada son los coeficientes de las variables del sistema de ecuaciones, y los números de la derecha son las constantes. Para el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 10 \\ 4x - 5y &= 9 \end{aligned}$$

la matriz aumentada se escribe

$$\begin{array}{ccc} \text{coeficientes de } x & & \text{constantes} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \multicolumn{3}{c}{\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 10 \\ 4 & -5 & 9 \end{array}\right]} \\ & \uparrow & \\ & \text{coeficientes de } y & \end{array}$$

La matriz 2×2 $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ es la **matriz de coeficientes**. La matriz 2×1 $\begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix}$ es la **matriz de constantes**. Entonces, la matriz que representa el sistema de ecuaciones $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 10 \\ 4 & -5 & 9 \end{array}\right]$ es la matriz de coeficientes aumentada por la matriz de constantes.

Cuando representamos un sistema de ecuaciones lineales con una matriz aumentada, cada ecuación debe tener la forma $ax + by = c$. Por ejemplo, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y &= -2x + 5 \\ x &= 7y - 4 \end{aligned} \qquad \text{puede reescribirse como} \qquad \begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ x - 7y &= -4 \end{aligned}$$

Este sistema puede ser representado con la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -7 & -4 \end{array}\right]$$

Cuando se usa una matriz aumentada para resolver un sistema de ecuaciones lineales, podemos usar un método muy similar al método de suma (o adición) que se discutió en la sección 4.1.

2 Resolver sistemas de ecuaciones lineales

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales mediante matrices, reescribimos la matriz aumentada en **forma escalonada por filas** (o **triangular**):

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & p \\ 0 & 1 & q \end{array}\right]$$

donde a, p y q representan constantes. A partir de este tipo de matriz aumentada podemos escribir un sistema de ecuaciones equivalente. Esta matriz representa el sistema lineal

$$\begin{aligned} 1x + ay &= p \\ 0x + 1y &= q \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} x + ay &= p \\ y &= q \end{aligned}$$

Por ejemplo,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \text{ representa } \begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

Observa que el sistema anterior, en el lado derecho, puede resolverse fácilmente por sustitución. Su solución es $(-6, 5)$.

Utilizamos **transformaciones de fila** para reescribir la matriz aumentada en forma escalonada por filas. Utilizaremos tres procedimientos de transformación de fila. En una transformación de fila se pueden realizar operaciones equivalentes como lo hemos realizado en los sistemas de ecuaciones.

Comprendiendo el álgebra

Cuando se trabaja con una matriz aumentada

- para obtener 1, se usa el primer paso del procedimiento de transformación de filas.
- para obtener 0, se usa el segundo paso del procedimiento de transformación de filas.

Procedimientos para la transformación de filas

1. Todos los números de una fila pueden multiplicarse por (o dividirse entre) cualquier número real diferente de cero (esto es lo mismo que multiplicar ambos lados de una ecuación por un número real diferente de cero).
2. Todos los números de una fila pueden multiplicarse por cualquier número real diferente de cero. Estos productos pueden entonces sumarse a los números correspondientes en cualquier otra fila (esto es equivalente a eliminar una variable del sistema de ecuaciones utilizando el método de suma).
3. El orden de las filas de una matriz puede intercambiarse (esto es lo mismo que intercambiar el orden de las ecuaciones en un sistema de ecuaciones).

Por lo general, al cambiar un elemento de la matriz aumentada por un 1, utilizamos el procedimiento 1 de las transformaciones de fila, y al cambiar un elemento por un 0, utilizamos el procedimiento 2 de las transformaciones de fila. *Se trabaja por columnas, comenzando por la izquierda*. Inicia con la primera columna, primera fila.

EJEMPLO 1 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones utilizando matrices.

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= -2 \\ 3x - 2y &= 5 \end{aligned}$$

Solución Primero escribimos la matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{array}\right]$$

Nuestro objetivo es obtener una matriz de la forma $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & p \\ 0 & 1 & q \end{array}\right]$. Comenzamos utilizando el procedimiento 1 de las transformaciones de fila para cambiar el 2 en la primera columna y la primera fila por 1. Para hacerlo, multiplicamos la primera fila de números por $\frac{1}{2}$. Abreviamos esta multiplicación como $\frac{1}{2}R_1$ y lo colocamos a la derecha de la matriz en la misma fila en que se realizó la operación.

$$\left[\begin{array}{cc|c} \left(\frac{1}{2}\right)2 & \left(\frac{1}{2}\right)4 & \left(\frac{1}{2}\right)(-2) \\ 3 & -2 & 5 \end{array}\right] \quad \frac{1}{2}R_1$$

o

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{array}\right]$$

El paso siguiente es obtener 0 en la primera columna, segunda fila, donde por el momento se encuentra un 3. Para hacerlo, multiplicamos los elementos de la primera fila por -3 y sumamos los productos a los números de la segunda fila. Abreviamos la transformación de fila como $-3R_1 + R_2$.

Los elementos de la primera fila multiplicados por -3 son:

$$-3(1) \qquad -3(2) \qquad -3(-1)$$
o
$$-3 \qquad -6 \qquad 3$$

Ahora sumamos estos productos a sus números respectivos de la segunda fila, se obtiene

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -3+3 & -6+(-2) & 3+5 \end{array}\right] \quad -3R_1 + R_2$$

o

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 8 \end{array}\right]$$

El paso siguiente es obtener 1 en la segunda columna, segunda fila, donde por el momento se encuentra un -8. Para hacerlo, multiplicamos los elementos de la segunda fila por $-\frac{1}{8}$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ \left(-\frac{1}{8}\right)0 & \left(-\frac{1}{8}\right)(-8) & \left(-\frac{1}{8}\right)8 \end{array}\right] \quad -\frac{1}{8}R_2$$

o

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Ahora la matriz se encuentra en la forma escalonada por filas y el sistema de ecuaciones equivalente es

$$\begin{aligned} x + 2y &= -1 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Ahora podemos obtener el valor de x utilizando el método de sustitución.

$$\begin{aligned} x + 2y &= -1 \\ x + 2(-1) &= -1 \\ x - 2 &= -1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Una verificación mostrará que la solución del sistema original es $(1, -1)$.

Resuelve ahora el ejercicio 19

Comprendiendo el álgebra

Cuando reescribas una matriz aumentada en la forma escalonada por filas, trabaja por columnas, desde la columna del extremo izquierdo hasta la columna del extremo derecho. Siempre termina una columna antes de pasar a la siguiente. En cada columna, obtén primero el 1 en la posición indicada y después obtén los ceros.

3 Resolver sistemas de ecuaciones lineales con tres variables

Ahora utilizaremos las matrices para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables. Utilizamos el mismo procedimiento de transformación de fila que se empleó para resolver un sistema lineal de dos ecuaciones. Nuestro objetivo es obtener una matriz aumentada en la forma escalonada por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & p \\ 0 & 1 & c & q \\ 0 & 0 & 1 & r \end{array}\right]$$

donde a, b, c, p, q y r representan números. Esta matriz representa el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 1x + ay + bz &= p \\ 0x + 1y + cz &= q \\ 0x + 0y + 1z &= r \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} x + ay + bz &= p \\ y + cz &= q \\ z &= r \end{aligned}$$

Consejo útil

Consejo de estudio

Al usar matrices ten cuidado de mantener todos los números alineados de forma ordenada, en filas y columnas. Un pequeño error al copiar números de una matriz a otra conducirá a un intento incorrecto de resolver un sistema de ecuaciones.

Por ejemplo, el sistema de ecuaciones $\begin{aligned} x - 3y + z &= 3 \\ 4x + 2y - 5z &= 20 \\ -5x - y - 4z &= 13 \end{aligned}$ cuando se representa de manera correcta con la matriz aumentada, $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 & 20 \\ -5 & -1 & -4 & 13 \end{array}\right]$, lleva a la solución $(1, -2, -4)$.

Sin embargo, una matriz que parece muy similar, $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & 20 \\ -5 & 2 & -4 & 13 \end{array}\right]$, conduce a la tríada ordenada incorrecta $\left(-\frac{25}{53}, -\frac{130}{53}, -\frac{206}{53}\right)$.

EJEMPLO 2 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones utilizando matrices.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= -7 \\ 2x - y - z &= 7 \\ -x + 3y + 2z &= -8 \end{aligned}$$

Solución Primero escribe la matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 2 & -1 & -1 & 7 \\ -1 & 3 & 2 & -8 \end{array}\right]$$

El siguiente paso es utilizar las transformaciones de fila para cambiar la primera columna a $\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$. Como el número de la primera columna, primera fila ya es 1, trabajaremos con el 2 de la primera columna, segunda fila. Multiplicamos los números respectivos de la primera fila por -2 y sumamos los productos a los números respectivos de la segunda fila, con lo que cambiarás el 2 por 0. Ahora la matriz es

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & -7 & 21 \\ -1 & 3 & 2 & -8 \end{array}\right] \quad -2R_1 + R_2$$

Continuamos hacia abajo en la primera columna y cambiamos el -1 de la tercera fila por un 0. Multiplicamos los números de la primera fila por 1 y sumamos los productos a la tercera fila para obtener

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & -7 & 21 \\ 0 & 1 & 5 & -15 \end{array}\right] \quad 1R_1 + R_3$$

Ahora trabajamos con la segunda columna. Queremos cambiar los números de la segunda columna a la forma $\begin{matrix} a \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$ donde a representa un número. Como hay un 1 en la tercera fila y segunda columna y queremos un 1 en la segunda fila, intercambiamos las filas dos y tres de la matriz. Esto da

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & -15 \\ 0 & 3 & -7 & 21 \end{array}\right] \quad \text{Intercambia } R_2 \text{ y } R_3.$$

Continuamos hacia abajo en la segunda columna; ahora cambiamos el 3 de la tercera fila por un 0, multiplicando los números de la segunda fila por −3 y sumando los productos a la tercera fila. Esto produce

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & -22 & 66 \end{array}\right] \quad -3R_2 + R_3$$

Ahora trabajamos con la tercera columna. Deseamos cambiar los números de la tercera columna a la forma $\begin{matrix} b \\ c \\ 1 \end{matrix}$ donde b y c representan números. Multiplicamos los números de la tercera fila por $-\frac{1}{22}$ para remplazar −22 con 1.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \quad -\tfrac{1}{22}R_3$$

Ahora la matriz tiene la forma escalonada por filas. De esta matriz obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= -7 \\ y + 5z &= -15 \\ z &= -3 \end{aligned}$$

La tercera ecuación nos da el valor de z en la solución. Ahora podemos resolver el valor para y sustituyendo z por −3 en la segunda ecuación.

$$\begin{aligned} y + 5z &= -15 \\ y + 5(-3) &= -15 \\ y - 15 &= -15 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Ahora obtenemos el valor para x sustituyendo y por 0 y z por −3 en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= -7 \\ x - 2(0) + 3(-3) &= -7 \\ x - 0 - 9 &= -7 \\ x - 9 &= -7 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

La solución es (2, 0, −3). Ahora, verifica esto mediante la sustitución de los valores apropiados en cada una de las ecuaciones originales.

Resuelve ahora el ejercicio 33

Comprendiendo el álgebra

Cuando trabajemos con matrices aumentadas para resolver un sistema de ecuaciones lineales y obtenemos

- Ceros en la fila del lado izquierdo de la línea vertical y un número distinto de cero a la derecha de la barra vertical, el sistema es inconsistente y no tiene solución.
- Ceros en toda la fila, el sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones.

4 Reconocer sistemas inconsistentes y sistemas dependientes

Cuando resolvemos un sistema de dos ecuaciones, si se obtiene una matriz aumentada en la que toda una fila de números en el lado izquierdo de la línea vertical contiene ceros, pero no aparece un cero en la misma fila del lado derecho de la línea vertical, el sistema es inconsistente y no tiene solución. Por ejemplo, un sistema de ecuaciones que genera la siguiente matriz aumentada es un sistema inconsistente.

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \longleftarrow \text{Sistema inconsistente}$$

La segunda fila de la matriz representa la ecuación

$$0x + 0y = 3$$

la cual nunca es verdadera.

Si obtienes una matriz en la cual aparecen ceros en toda una fila, el sistema de ecuaciones es dependiente. Por ejemplo, un sistema de ecuaciones que produce la siguiente matriz aumentada es un sistema dependiente.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longleftarrow \text{Sistema dependiente}$$

La segunda fila de la matriz representa la ecuación

$$0x + 0y = 0$$

la cual siempre es verdadera.

Reglas similares aplican para los sistemas con tres ecuaciones.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right] \longleftarrow \text{Sistema inconsistente}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & -4 \end{array}\right] \longleftarrow \text{Sistema dependiente}$$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.4

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

transformaciones de fila	matriz aumentada	matriz cuadrada	dimensiones	inconsistente	elementos
escalonada	funciones	forma rectangular	transformaciones de columna	dependiente	

1. Para resolver un sistema de ecuaciones lineales usando matrices, usamos ________ para volver a escribir la matriz aumentada en la forma escalonada.

2. Los números dentro de la matriz se llaman ________.

3. El número de filas por el número de columnas se refiere a las/los ________ de una matriz.

4. Cuando una matriz consta de dos matrices más pequeñas separadas por una línea vertical se llama ________.

5. Si produces la matriz $\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right]$, mientras resuelves un sistema de ecuaciones usando una matriz aumentada, puedes concluir (asumiendo que todos tus cálculos son correctos) que el sistema es ________ y no tiene solución.

6. Si produces la matriz $\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, mientras resuelves un sistema de ecuaciones usando una matriz aumentada, puedes concluir (asumiendo que todos tus cálculos son correctos) que el sistema es ________ y tiene un número infinito de soluciones.

7. La matriz $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ es un ejemplo de una ________.

8. La matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$ está en la forma ________.

Practica tus habilidades

Realiza cada transformación de fila indicada y escribe la nueva matriz.

9. $\left[\begin{array}{cc|c} 7 & -14 & -35 \\ 3 & -7 & -4 \end{array}\right]$ Multiplica los números en la primera fila por $\frac{1}{7}$.

10. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 8 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \end{array}\right]$ Multiplica los números en la segunda fila por $\frac{1}{4}$.

11. $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & -8 \end{array}\right]$ Intercambia la fila 1 y la fila 3.

12. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 8 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right]$ Intercambia la fila 2 y la fila 3.

13. $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & 12 \\ -4 & 11 & -6 \end{array}\right]$ Multiplica los números en la primera fila por 4 y suma los productos a la segunda fila.

14. $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 5 & 6 \\ \frac{1}{2} & 10 & -4 \end{array}\right]$ Multiplica los números en la primera fila por $-\frac{1}{2}$ y suma los productos a la segunda fila.

15. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 8 & \frac{1}{4} \\ 5 & 2 & 2 & -2 \\ 6 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right]$ Multiplica los números en la primera fila por -5 y suma los productos a la segunda fila.

16. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right]$ Multiplica los números en la tercera fila por $\frac{1}{3}$.

Resuelve cada sistema usando matrices.

17. $x + 3y = 3$
$-x + y = -3$

18. $x - 2y = 0$
$2x + 5y = 9$

19. $x + 3y = -2$
$-2x - 7y = 3$

20. $2x + 4y = -8$
$3x - 5y = -1$

21. $5a - 10b = -10$
$2a + b = 1$

22. $3s - 2t = 1$
$-2s + 4t = -6$

23. $2x - 5y = -6$
$-4x + 10y = 12$

24. $-2m - 4n = 7$
$3m + 6n = -8$

25. $12x + 2y = 2$
$6x - 3y = -11$

26. $4r + 2s = -10$
$-2r + s = -7$

27. $-3x + 6y = 5$
$2x - 4y = 7$

28. $8x = 4y + 12$
$-2x + y = -3$

29. $12x - 8y = 6$
$-3x + 4y = -1$

30. $2x - 3y = 3$
$-5x + 9y = -7$

31. $10m = 8n + 15$
$16n = -15m - 2$

32. $8x = 9y + 4$
$16x - 27y = 11$

Resuelve cada sistema usando matrices.

33. $x + 2y - 4z = 5$
$3x - y + z = 1$
$2x + 2y - 3z = 6$

34. $a - 3b + 4c = 7$
$4a + b + c = -2$
$-2a - 3b + 5c = 12$

35. $x + 2y = 5$
$y - z = -1$
$2x - 3z = 0$

36. $3a - 5c = 3$
$a + 2b = -6$
$7b - 4c = 5$

37. $x - 2y + 4z = 5$
$-3x + 4y - 2z = -8$
$4x + 5y - 4z = -3$

38. $3x + 5y + 2z = 3$
$-x - y - z = -2$
$2x - 2y + 5z = 11$

39. $2x - 5y + z = 1$
$3x - 5y + z = 3$
$-4x + 10y - 2z = -2$

40. $x + 2y + 3z = 1$
$4x + 5y + 6z = -3$
$7x + 8y + 9z = 0$

41. $4p - q + r = 4$
$-6p + 3q - 2r = -5$
$2p + 5q - r = 7$

42. $-4r + 3s - 6t = 14$
$4r + 2s - 2t = -3$
$2r - 5s - 8t = -23$

43. $2x - 4y + 3z = -12$
$3x - y + 2z = -3$
$-4x + 8y - 6z = 10$

44. $3x - 2y + 4z = -1$
$5x + 2y - 4z = 9$
$-6x + 4y - 8z = 2$

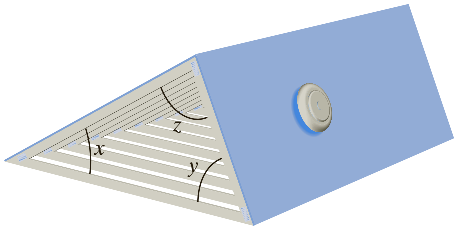
45. $5x - 3y + 4z = 22$
$-x - 15y + 10z = -15$
$-3x + 9y - 12z = -6$

46. $9x - 4y + 5z = -2$
$-9x + 5y - 10z = -1$
$9x + 3y + 10z = 1$

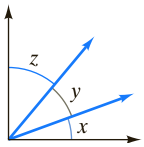
Resolución de problemas

Resuelve usando matrices.

47. Ángulos en un tejado En una sección transversal triangular de un tejado, el ángulo mayor es 55° más grande que el ángulo más pequeño. El ángulo mayor es 20° más grande que el ángulo faltante. Encuentra la magnitud de cada ángulo.



48. Ángulo recto Un ángulo recto está dividido en tres ángulos más pequeños. El mayor de los tres ángulos es dos veces el más pequeño. El ángulo restante es 10° más grande que el ángulo más pequeño. Encuentra la magnitud de cada ángulo.



49. Franquicias deportivas más valiosas A partir de 2008, las tres franquicias más valiosas de la National Football League están en Washington, D.C., Dallas y Houston, respectivamente. El valor total de las tres franquicias es de \$2928 millones. La franquicia de Washington vale \$177 millones más que la franquicia de Dallas. La franquicia de Houston vale \$18 millones menos que la franquicia de Dallas. Determina el valor de cada franquicia.

Fuente: www.espn.com

50. Colección de autógrafos de jugadores de béisbol Alex Runde tiene una gran colección de autógrafos de béisbol de jugadores de los Tampa Bay Rays, los Milwaukee Brewers y los Colorado Rockies. El número total de autógrafos de jugadores de los tres equipos es 42. El número de autógrafos de los Rays es 5 más que el doble del número de autógrafos de los Rockies. El número de autógrafos de los Brewers es 8 menos que el número de autógrafos de los Rays. Determina el número de autógrafos que Alex tiene de los jugadores de cada equipo.

© Dennis C. Runde

Ejercicios de conceptos y escritura

51. Cuando resuelves un sistema de ecuaciones lineales por matrices, si dos filas son idénticas, ¿el sistema será consistente, dependiente o inconsistente?

52. Cuando resuelves un sistema de ecuaciones usando matrices, ¿cómo puedes saber si el sistema es

a) dependiente?

b) inconsistente?

53. Cuando resuelves un sistema de ecuaciones lineales por matrices, si dos filas de la matriz se intercambian, ¿la solución del sistema cambiará? Explica.

54. Tú puedes decir si un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es consistente, dependiente o inconsistente comparando las pendientes y las intersecciones con el eje de las y de las gráficas de las ecuaciones. ¿Puedes decir, sin resolver, si un sistema de tres ecuaciones con tres variables es consistente, dependiente o inconsistente? Explica.

Ejercicios de repaso acumulados

[1.2] **55.** $A = \{1,2,4,6,9\}$; $B = \{3,4,5,6,10\}$. Determina

a) $A \cup B$;

b) $A \cap B$;

[2.5] **56.** Expresa la desigualdad $-1 < x \leq 4$

a) en una recta numérica.

b) como un conjunto solución.

c) en notación de intervalo.

[3.2] **57.** ¿Qué representa una gráfica?

[3.4] **58.** Si $f(x) = -2x^2 + 3x - 6$, determina $f(-5)$.

4.5 Resolución de sistemas de ecuaciones por medio de determinantes y la regla de Cramer

1 Evaluar el determinante de una matriz 2 × 2.

2 Utilizar la regla de Cramer.

3 Evaluar el determinante de una matriz 3 × 3.

4 Utilizar la regla de Cramer en sistemas con tres variables.

Comprendiendo el álgebra

Para evaluar un determinante de 2 × 2, restamos el producto de las dos diagonales como se muestra a continuación:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1b_2 - a_2b_1$$

1 Evaluar el determinante de una matriz 2 × 2

Asociado con cada matriz cuadrada está un número denominado **determinante**. Para una matriz de 2 × 2, su determinante se define como sigue.

Determinante

El **determinante** de una matriz 2 × 2 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ se denota por $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ y se evalúa como

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Un sistema de ecuaciones lineales con frecuencia se resuelve utilizando determinantes.

EJEMPLO 1 Evalúa cada determinante.

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$

Solución

a) $a_1 = 2, a_2 = 3, b_1 = -1, b_2 = -5$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2(-5) - (3)(-1) = -10 + 3 = -7$$

b)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (2)(4) - (-1)(3) = 8 + 3 = 11$$

Resuelve ahora el ejercicio 7

2 Utilizar la regla de Cramer

Si comenzamos por las ecuaciones

$$a_1x +_1b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

podemos utilizar el método de suma para demostrar que

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{y} \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

(ver problema de desafío 67 en la página 264). Observa que los *denominadores* de x y de y son ambos $a_1b_2 - a_2b_1$. A continuación está el determinante que produce este denominador. Hemos etiquetado este denominador como D.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Los *numeradores* de x y de y son diferentes. A continuación se encuentran dos determinantes, etiquetados con D_x y D_y, con los que se obtienen los numeradores de x y de y.

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1 \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

Utilizamos los determinantes D, D_x y D_y en la *regla de Cramer*. La **regla de Cramer** puede utilizarse para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Regla de Cramer para sistemas de ecuaciones lineales

Para un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

con

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \text{y} \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

entonces

$$x = \frac{D_x}{D} \quad \text{y} \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad D \neq 0.$$

Consejo útil

Los elementos del determinante D son los coeficientes numéricos de los términos x y y.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Para obtener el determinante D_x, se reemplazan los valores de la primera columna con las constantes de las dos ecuaciones dadas.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Para obtener el determinante D_y, se reemplazan los valores de la segunda columna con las constantes de las dos ecuaciones dadas.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

EJEMPLO 2 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones utilizando la regla de Cramer.

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 7 \\ 4x - y &= -6 \end{aligned}$$

Solución Ambas ecuaciones están en la forma deseada, $ax + by = c$. Cuando etiquetamos las constantes a, b y c nos referimos a $3x + 5y = 7$ como la ecuación 1 y $4x - y = -6$ como la ecuación 2 para los subíndices.

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & & b_1 & & c_1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 3x & + & 5y & = & 7 \\ 4x & - & 1y & = & -6 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ a_2 & & b_2 & & c_2 \end{array}$$

Ahora determinamos D, D_x y D_y.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - 4(5) = -3 - 20 = -23$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = 7(-1) - (-6)(5) = -7 + 30 = 23$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 3(-6) - 4(7) = -18 - 28 = -46$$

Ahora determinamos los valores de x y de y.

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{23}{-23} = -1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-46}{-23} = 2$$

Por lo tanto, la solución es $x = -1$, $y = 2$ o el par ordenado $(-1, 2)$. La verificación mostrará que este par ordenado satisface ambas ecuaciones.

Resuelve ahora el ejercicio 15

Cuando el determinante $D = 0$, la regla de Cramer no se puede aplicar ya que es indefinida la división entre cero. Entonces se debe utilizar un método diferente para resolver el sistema. O bien, puedes evaluar D_x y D_y para determinar si el sistema es dependiente o inconsistente.

Cuando $D = 0$

Para un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables,

si $D = 0$, $D_x = 0$ y $D_y = 0$, entonces el sistema es dependiente.

si $D = 0$ y ya sea $D_x \neq 0$ o $D_y \neq 0$, entonces el sistema es inconsistente.

3 Evaluar el determinante de una matriz 3 × 3

Para el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

el **determinante menor** de a_1 se encuentra por el cruce de los elementos de la misma fila y columna donde aparece el elemento a_1. Los demás elementos forman el determinante menor de a_1. El determinante menor de los otros elementos se determina de manera similar.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$
Determinante menor de a_1

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$
Determinante menor de a_2

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$
Determinante menor de a_3

Para evaluar los determinantes de una matriz 3×3, utilizamos los determinantes menores. El siguiente cuadro muestra cómo podemos evaluar **por la expansión de los menores de la primera columna** un determinante.

Expansión del determinante por los menores de la primera columna

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \underbrace{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{\text{Determinante menor de } a_1} - a_2 \underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{\text{Determinante menor de } a_2} + a_3 \underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}_{\text{Determinante menor de } a_3}$$

EJEMPLO 3 Evalúa $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$ utilizando expansión por los menores de la primera columna.

Solución Seguiremos el procedimiento dado en el recuadro.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} &= 4\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 4[5(-1) - (-3)0] - 3[(-2)(-1) - (-3)6] + 1[(-2)0 - 5(6)] \\
&= 4(-5 + 0) - 3(2 + 18) + 1(0 - 30) \\
&= 4(-5) - 3(20) + 1(-30) \\
&= -20 - 60 - 30 \\
&= -110
\end{aligned}$$

El determinante tiene un valor de -110.

Resuelve ahora el ejercicio 13

4 Utilizar la regla de Cramer en sistemas con tres variables

La regla de Cramer puede ser usada también para resolver sistemas de ecuaciones con tres variables como sigue.

Regla de Cramer para un sistema de ecuaciones con tres variables

Para resolver el sistema

$$\begin{aligned}
a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\
a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\
a_3x + b_3y + c_3z &= d_3
\end{aligned}$$

con

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

entonces

$$x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D} \quad z = \frac{D_z}{D}, \quad D \neq 0$$

Consejo útil

Observa que todos los denominadores de las expresiones para x, y y z son el mismo determinante, D. Observa que en D_x las constantes d reemplazan a las a, los coeficientes numéricos de los términos x. En D_y las constantes d reemplazan a las b, los coeficientes numéricos de los términos y. En D_z las constantes d reemplazan a las c, los coeficientes numéricos de los términos z.

EJEMPLO 4 Resuelve el sistema de ecuaciones siguiente utilizando determinantes.

$$\begin{aligned} 3x - 2y - z &= -6 \\ 2x + 3y - 2z &= 1 \\ x - 4y + z &= -3 \end{aligned}$$

Solución

$$\begin{array}{llll} a_1 = 3 & b_1 = -2 & c_1 = -1 & d_1 = -6 \\ a_2 = 2 & b_2 = 3 & c_2 = -2 & d_2 = 1 \\ a_3 = 1 & b_3 = -4 & c_3 = 1 & d_3 = -3 \end{array}$$

Utilizaremos expansión de los determinantes menores de la primera fila para evaluar D, D_x, D_y y D_z.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-5) - 2(-6) + 1(7)$$

$$= -15 + 12 + 7 = 4$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -6 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -6(-5) - 1(-6) - 3(7)$$

$$= 30 + 6 - 21 = 15$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-5) - 2(-9) + 1(13)$$

$$= -15 + 18 + 13 = 16$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-5) - 2(-18) + 1(16)$$

$$= -15 + 36 + 16 = 37$$

Determinamos que $D = 4$, $D_x = 15$, $D_y = 16$ y $D_z = 37$. Por lo tanto,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{15}{4} \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{16}{4} = 4 \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{37}{4}$$

La solución para el sistema es $\left(\frac{15}{4}, 4, \frac{37}{4}\right)$. Observa que la tríada ordenada muestra x, y y z en este orden.

Resuelve ahora el ejercicio 33

Comprendiendo el álgebra

Cuando tenemos un sistema de ecuaciones con tres variables, en el cual una o más ecuaciones no tienen una variable, insertamos la variable con el coeficiente 0. Así,

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= -1 \\ x + 2y \phantom{{}+ 2z} &= 14 \\ x \phantom{{}+ 2y} - 3z &= -5 \end{aligned}$$

se escribe

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= -1 \\ x + 2y + 0z &= 14 \\ x + 0y - 3z &= -5 \end{aligned}$$

Consejo útil

Al evaluar los determinantes, si dos filas (o columnas) son idénticas, o idénticas excepto por signos opuestos, el determinante tiene un valor de 0. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -5 & 3 & -4 \\ 6 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Como en el caso de los determinantes de una matriz de 2×2, cuando el determinante $D = 0$ no se puede utilizar la regla de Cramer, ya que la división entre 0 es indeterminada. Se debe entonces utilizar un método distinto para resolver el sistema. Sin embargo, es posible evaluar Dx, Dy y Dz para determinar si el sistema es dependiente o inconsistente.

Cuando $D = 0$

Para un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables,

si $D = 0$, $D_x = 0$, $D_y = 0$ y $D_z = 0$, entonces el sistema es dependiente.

si $D = 0$ y $D_x \neq 0$, $D_y \neq 0$ o $D_z \neq 0$, entonces el sistema es inconsistente.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.5

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

D $\quad D_x \quad D_y \quad D_z$ $\quad$ determinante $\quad$ dependiente $\quad$ inconsistente $\quad$ único

1. Asociado a cada matriz cuadrada hay un número llamado su ________.

Para los ejercicios 2-4, considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$2x - 3y = 2$$
$$x - 7y = 6$$

2. El determinante ________ $= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}$.

3. El determinante ________ $= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$.

4. El determinante ________ $= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -7 \end{vmatrix}$.

5. En un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, si $D = 0$, $D_x = 0$ y $D_y = 0$, entonces el sistema es ________ y tiene un número infinito de soluciones.

6. En un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, si $D = 0$, y ya sea $D_x \neq 0$ o $D_y \neq 0$, entonces el sistema es ________ y no tiene solución.

Practica tus habilidades

Evalúa cada determinante.

7. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 13 & -\frac{2}{3} \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 9 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 5 & -8 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

Resuelve cada sistema de ecuaciones usando determinantes.

15. $3x + 4y = 10$
$x + 3y = 5$

16. $2x + 4y = -2$
$-5x - 2y = 13$

17. $-x - 2y = 2$
$x + 3y = -6$

18. $2r + 3s = -9$
$3r + 5s = -16$

19. $6x = 4y + 7$
$8x - 1 = -3y$

20. $6x + 3y = -4$
$9x + 5y = -6$

21. $5p - 7q = -21$
$-4p + 3q = 22$

22. $4x = -5y - 2$
$-2x = y + 4$

23. $x + 5y = 3$
$2x - 6 = -10y$

24. $9x + 6y = -3$
$6x + 4y = -2$

25. $3r = -4s - 6$
$3s = -5r + 1$

26. $x = y - 1$
$3y = 2x + 9$

27. $5x - 5y = 3$
$-x + y = -4$

28. $2x - 5y = -3$
$-4x + 10y = 7$

29. $6.3x - 4.5y = -9.9$
$-9.1x + 3.2y = -2.2$

30. $-1.1x + 8.3y = 36.5$
$3.5x + 1.6y = -4.1$

Resuelve cada sistema usando determinantes.

31. $x + y - z = 2$
$2x + 3y - 2z = 6$
$5x - 2y + 3z = 4$

32. $2x + 3y = 4$
$3x + 7y - 4z = -3$
$x - y + 2z = 9$

33. $3x - 5y - 4z = -4$
$4x + 2y = 1$
$6y - 4z = -11$

34. $2x + 5y + 3z = 2$
$6x - 9y = 5$
$3y + 2z = 1$

35. $x + 4y - 3z = -6$
$2x - 8y + 5z = 12$
$3x + 4y - 2z = -3$

36. $2x + y - 2z = 4$
$2x + 2y - 4z = 1$
$-6x + 8y - 4z = 1$

37. $a - b + 2c = 3$
$a - b + c = 1$
$2a + b + 2c = 2$

38. $-2x + y + 8 = -2$
$3x + 2y + z = 3$
$x - 3y - 5z = 5$

39. $a + 2b + c = 1$
$a - b + 3c = 2$
$2a + b + 4c = 3$

40. $4x - 2y + 6z = 2$
$-6x + 3y - 9z = -3$
$2x - 7y + 11z = -5$

41. $1.1x + 2.3y - 4.0z = -9.2$
$-2.3x + 4.6z = 6.9$
$-8.2y - 7.5z = -6.8$

42. $4.6y - 2.1z = 24.3$
$-5.6x + 1.8y = -5.8$
$2.8x - 4.7y - 3.1z = 7.0$

43. $-6x + 3y - 12z = -13$
$5x + 2y - 3z = 1$
$2x - y + 4z = -5$

44. $x - 2y + z = 2$
$4x - 6y + 2z = 3$
$2x - 3y + z = 0$

45. $2x + \frac{1}{2}y - 3z = 5$
$-3x + 2y + 2z = 1$
$4x - \frac{1}{4}y - 7z = 4$

46. $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y + 3z = -3$
$2x - 3y + 2z = -1$
$\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = 1$

47. $0.3x - 0.1y - 0.3z = -0.2$
$0.2x - 0.1y + 0.1z = -0.9$
$0.1x + 0.2y - 0.4z = 1.7$

48. $0.6u - 0.4v + 0.5w = 3.1$
$0.5u + 0.2v + 0.2w = 1.3$
$0.1u + 0.1v + 0.1w = 0.2$

Resolución de problemas

Determina el valor de la letra dada en cada determinante.

49. $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & y \end{vmatrix} = 32$

50. $\begin{vmatrix} b - 3 & -4 \\ b + 2 & -6 \end{vmatrix} = 14$

51. $\begin{vmatrix} 4 & 7 & y \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -35$

52. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -6 \\ -1 & x & -7 \end{vmatrix} = -31$

Resuelve usando determinantes.

53. Precios de Boletos Dayton Sinkia compró 5 boletos de adulto y 8 boletos de estudiante para ver la obra *Un sirviente de dos amos* en el Colegio del estado de Florida por $90. Danielle Zoller compró 3 boletos de adulto y 7 boletos de estudiante por $65. Determina el precio de un boleto de adulto y el precio de un boleto de estudiante.

54. Precios de concesión de un *stand* de una liga infantil En la liga infantil de Braden River, Beth Van Vranken compró 3 hot dogs, 4 botellas de agua y 2 bolsas de semillas de girasol, todo por $11. Jeff Parrill compró 5 hot dogs, 3 botellas de agua y 4 bolsas de semillas de girasol, todo por $14.25. Dave Hauck compró 1 hot dog, 2 botellas de agua y 5 bolsas de semillas de girasol, todo por $7.75. Determina el precio de un hot dog, de una botella de agua y de una bolsa de semillas de girasol.

© Glowimages

Ejercicios de conceptos y escritura

55. Dado un determinante de la forma $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, ¿cómo podría cambiar el valor del determinante si las letras *a* se intercambian entre sí y las letras *b* se intercambian entre sí, $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$? Explica tu respuesta.

56. Dado un determinante de la forma $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, ¿cómo podría cambiar el valor del determinante si las letras *a* se intercambian con las letras *b*, $\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$? Explica tu respuesta.

57. En un determinante de 2×2, si las filas son iguales, ¿cuál es el valor del determinante?

58. Si todos los números en una fila o en una columna de un determinante de 2×2 son 0, ¿cuál es el valor del determinante?

59. Si todos los números en una fila o en una columna de un determinante de 3×3 son 0, ¿cuál es el valor del determinante?

60. Dado un determinante de 3×3, si todos los números de una fila se multiplican por -1, ¿el nuevo valor del determinante cambiará? Explica.

61. Dado un determinante de 3×3, si la primera y la segunda filas se intercambian, ¿el nuevo valor del determinante cambiará? Explica.

62. En un determinante de 3×3, si dos filas son iguales, ¿podrías hacer una generalización del valor del determinante?

63. En un determinante de 3×3, si los números de la primera y segunda filas se multiplican por -1, ¿el nuevo valor del determinante cambiará? Explica.

64. En un determinante de 3×3, si los números de la segunda y tercera filas se multiplican por -1, ¿el nuevo valor del determinante cambiará? Explica.

65. En un determinante de 3×3, si los números de la segunda fila se multiplican por 2, ¿el nuevo valor del determinante cambiará? Explica.

66. En un determinante de 3×3, si los números de la primera fila se multiplican por 3 y los números de la tercera fila se multiplican por 4, ¿el nuevo valor del determinante cambiará? Explica.

Problemas de desafío

67. Usa el método de suma para resolver el siguiente sistema para **a)** x y **b)** y.

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

Ejercicios de repaso acumulados

[2.5] **68.** Resuelve la desigualdad $3(x - 2) < \frac{4}{5}(x - 4)$ e indica la solución en notación de intervalo.

Grafica $3x + 4y = 8$ *usando el método indicado.*

[3.2] **69.** Por trazado de puntos.

70. Usando la intersección en el eje x y en el eje y.

[3.3] **71.** Usando la pendiente y la intersección en el eje y.

4.6 Resolución de sistemas de desigualdades lineales

1 Resolver sistemas de desigualdades lineales.

2 Resolver problemas de programación lineal.

3 Resolver sistemas de desigualdades lineales que contienen valor absoluto.

1 Resolver sistemas de desigualdades lineales

En la sección 3.7 mostramos cómo realizar una gráfica de desigualdades lineales con dos variables. En la sección 4.1 aprendimos a resolver de manera gráfica sistemas de ecuaciones. En esta sección mostramos cómo resolver **sistemas de desigualdades lineales** de manera gráfica.

Para resolver un sistema de desigualdades lineales

Graficar cada desigualdad en los mismos ejes. La solución es el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen todas las desigualdades del sistema.

EJEMPLO 1 Determina la solución para el sistema de desigualdades siguiente.

$$y < -\frac{1}{2}x + 2$$
$$x - y \leq 4$$

Solución Primero debes realizar la gráfica de la desigualdad $y < -\frac{1}{2}x + 2$ (ver **Figura 4.7** de la página 265). Ahora, en los mismos ejes, realiza la gráfica de la desigualdad $x - y \leq 4$ (ver **Figura 4.8** de la página 265). La solución es el conjunto de puntos comunes a las gráficas de ambas desigualdades. Ésta es la parte de la gráfica que contiene ambos sombreados. La línea punteada no es parte de la solución, pero la parte de la línea sólida que satisface ambas desigualdades sí lo es.

Comprendiendo el álgebra

Recuerda, de la sección 3.7, que la línea punteada se usa cuando la desigualdad es $<$ o $>$ y la línea sólida se usa cuando la desigualdad es $\leq$ o $\geq$. Y el sombreado se coloca del lado de la línea divisoria que contiene las soluciones de la desigualdad.

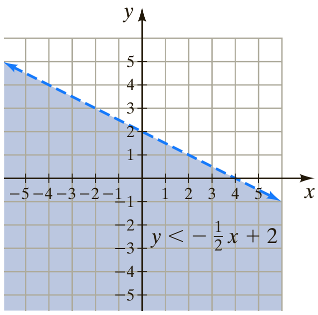


FIGURA 4.7

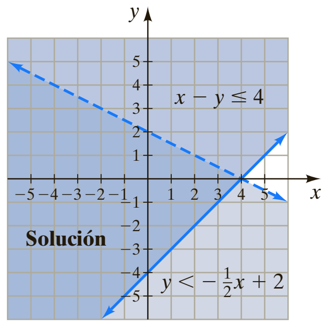


FIGURA 4.8

Resuelve ahora el ejercicio 5

EJEMPLO 2 Determina la solución para el sistema de desigualdades siguiente.

$$3x - y < 6$$
$$2x + 2y \geq 5$$

Solución Realiza la gráfica de la desigualdad $3x - y < 6$ (ver **Figura 4.9**). Realiza la gráfica de la desigualdad $2x + 2y \geq 5$ en los mismos ejes (**Figura 4.10**). La solución es la parte de la gráfica con los dos sombreados y la parte de la línea sólida que satisface ambas desigualdades.

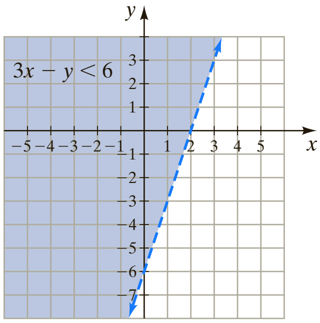


FIGURA 4.9

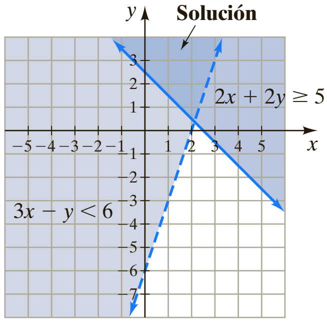


FIGURA 4.10

Resuelve ahora el ejercicio 7

EJEMPLO 3 Determina la solución para el sistema de desigualdades siguiente.

$$y > -1$$
$$x \leq 4$$

Solución La solución se ilustra en la **Figura 4.11**.

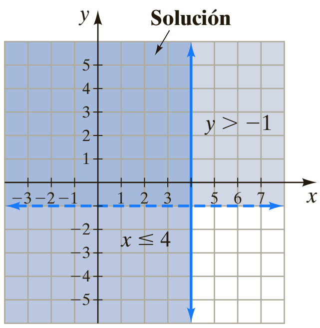


FIGURA 4.11

Resuelve ahora el ejercicio 15

2 Resolver problemas de programación lineal

Existe un proceso matemático llamado **programación lineal**, donde con frecuencia se deben realizar las gráficas de más de dos desigualdades lineales en los mismos ejes. Estas desigualdades que participan en la programación lineal se llaman **restricciones**.

EJEMPLO 4 Determina la solución para el sistema de desigualdades siguiente.

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ 2x + 3y &\leq 12 \\ 2x + y &\leq 8 \end{aligned}$$

Solución Las primeras dos desigualdades, $x \geq 0$ y $y \geq 0$, indican que la solución debe estar en el primer cuadrante, ya que es el único cuadrante donde x y y son positivas. La **Figura 4.12** ilustra las gráficas de las cuatro desigualdades.

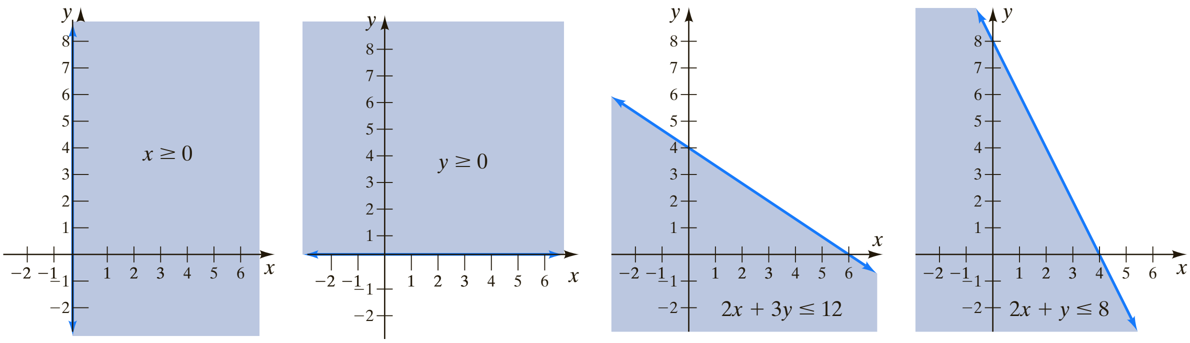


FIGURA 4.12

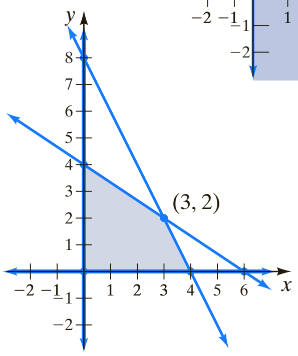


FIGURA 4.13

La **Figura 4.13** ilustra las gráficas en los mismos ejes y la solución para el sistema de desigualdades. Observa que todos los puntos que están en el área sombreada y todos los puntos sobre las rectas que forman la región poligonal son parte de la respuesta.

Resuelve ahora el ejercicio 23

EJEMPLO 5 Determina la solución para el sistema de desigualdades siguiente.

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ x &\leq 15 \\ 8x + 8y &\leq 160 \\ 4x + 12y &\leq 180 \end{aligned}$$

Solución Las primeras dos desigualdades indican que la solución debe estar en el primer cuadrante. La tercera desigualdad indica que x debe ser un valor menor o igual a 15. La **Figura 4.14a** muestra las gráficas de las ecuaciones correspondientes y la región que satisface todas las desigualdades del sistema. La **Figura 4.14b** indica la solución para el sistema de desigualdades.

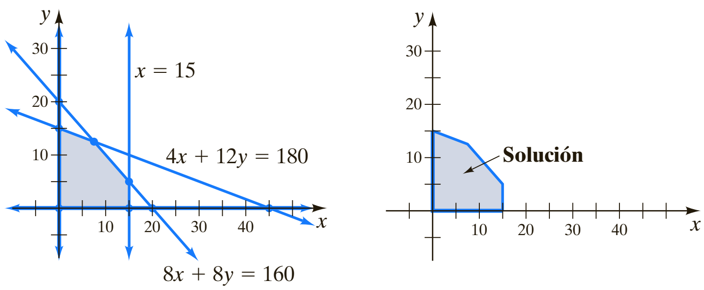


FIGURA 4.14 (a) (b)

Resuelve ahora el ejercicio 29

3 Resolver sistemas de desigualdades lineales que tienen valor absoluto

Ahora graficaremos, en el sistema de coordenadas cartesianas, los sistemas de desigualdades lineales que tienen valor absoluto. Antes de hacer algunos ejemplos, recordemos las reglas para las desigualdades con valor absoluto que aprendimos en la sección 2.6.

Resolución de desigualdades con valor absoluto

Si $|x| < a$ y $a > 0$, entonces $-a < x < a$.
Si $|x| > a$ y $a > 0$, entonces $x < -a$ o $x > a$.

EJEMPLO 6 Realiza la gráfica de $|x| < 3$ en el sistema de coordenadas cartesianas.

Solución A partir de las bases dadas, sabemos que $|x| < 3$ significa $-3 < x < 3$. Trazamos rectas verticales punteadas por -3 y 3 y sombreamos el área entre las dos (**Figura 4.15**).

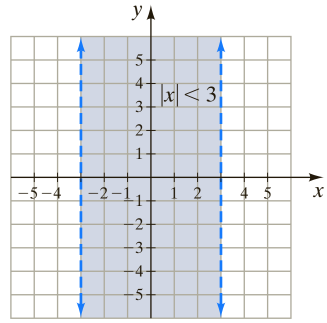


FIGURA 4.15

Resuelve ahora el ejercicio 33

EJEMPLO 7 Realiza la gráfica de $|y + 1| > 3$ en el sistema de coordenadas cartesianas.

Solución A partir de las reglas dadas anteriormente, sabemos que $|y + 1| > 3$ significa $y + 1 < -3$ o $y + 1 > 3$. Primero, resolvemos cada desigualdad.

$$y + 1 < -3 \qquad \text{o} \qquad y + 1 > 3$$
$$y < -4 \qquad\qquad\qquad y > 2$$

Ahora realizamos la gráfica de ambas desigualdades y consideramos la *unión* de las dos gráficas. La solución es el área sombreada de la **Figura 4.16**.

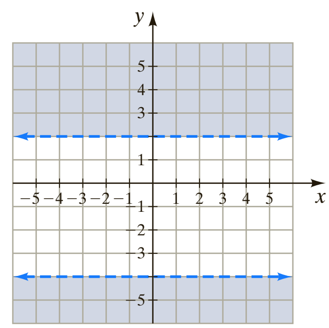


FIGURA 4.16

Resuelve ahora el ejercicio 35

EJEMPLO 8 Realiza la gráfica del sistema de desigualdades siguiente.

$$|x| < 3$$
$$|y + 1| > 3$$

Solución Realizamos las gráficas de ambas desigualdades en los mismos ejes. Por lo tanto, combinamos la gráfica del ejemplo 6 con la del ejemplo 7 (ver **Figura 4.17**). Los puntos comunes a ambas desigualdades forman la solución del sistema.

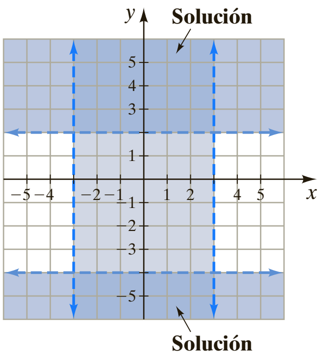


FIGURA 4.17

Resuelve ahora el ejercicio 41

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.6

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase, o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

sólida restricciones constantes punteada programación lineal satisfacen geometría

1. La solución de un sistema de desigualdades lineales es el conjunto de puntos cuyas coordenadas ________ todas las desigualdades en el sistema.

2. Al proceso matemático para el cuál normalmente debes graficar más de dos desigualdades lineales en los mismos ejes se le conoce como ________.

3. Las desigualdades en un problema de programación lineal se llaman ________.

4. Al graficar una desigualdad lineal, si la desigualdad es $<$ o $>$, utilizas una línea ________. Si la desigualdad es $\leq$ o $\geq$, utilizas una línea ________.

Practica tus habilidades

Determina la solución para cada sistema de desigualdades.

5. $2x - y < 4$; $y \geq -x + 2$

6. $y \leq -2x + 1$; $y > -3x$

7. $y < 3x - 2$; $y \leq -2x + 3$

8. $y \geq 2x - 5$; $y > -3x + 5$

9. $y < x$; $y \geq 3x + 2$

10. $-3x + 2y \geq -5$; $y \leq -4x + 7$

11. $-2x + 3y < -5$; $3x - 8y > 4$

12. $-4x + 3y \geq -4$; $y > -3x + 3$

13. $-4x + 5y < 20$; $x \geq -3$

14. $y \geq -\frac{2}{3}x + 1$; $y > -4$

15. $x \leq 4$; $y \geq -2$

16. $x \geq 0$; $x - 3y < 6$

17. $5x + 2y > 10$; $3x - y > 3$

18. $3x + 2y > 8$; $x - 5y < 5$

19. $-2x > y + 4$; $-x < \frac{1}{2}y - 1$

20. $y \leq 3x - 2$; $\frac{1}{3}y < x + 1$

21. $y < 3x - 4$; $6x \geq 2y + 8$

22. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \geq 2$; $2x - 3y \leq -6$

Determina la solución para cada sistema de desigualdades. Usa el método que se discutió en los ejemplos 4 y 5.

23. $x \geq 0$; $y \geq 0$; $2x + 3y \leq 6$; $4x + y \leq 4$

24. $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x + y \leq 6$; $7x + 4y \leq 28$

25. $x \geq 0$; $y \geq 0$; $2x + 3y \leq 8$; $4x + 2y \leq 8$

26. $x \geq 0$; $y \geq 0$; $3x + 2y \leq 18$; $2x + 4y \leq 20$

27. $x \geq 0$
$y \geq 0$
$3x + y \leq 9$
$2x + 5y \leq 10$

28. $x \geq 0$
$y \geq 0$
$5x + 4y \leq 16$
$x + 6y \leq 18$

29. $x \geq 0$
$y \geq 0$
$x \leq 4$
$x + y \leq 6$
$x + 2y \leq 8$

30. $x \geq 0$
$y \geq 0$
$x \leq 4$
$2x + 3y \leq 18$
$4x + 2y \leq 20$

31. $x \geq 0$
$y \geq 0$
$x \leq 15$
$30x + 25y \leq 750$
$10x + 40y \leq 800$

32. $x \geq 0$
$y \geq 0$
$x \leq 15$
$40x + 25y \leq 1000$
$5x + 30y \leq 900$

Determina la solución de cada desigualdad.

33. $|x| < 2$ **34.** $|x| > 1$ **35.** $|x - 2| \leq 4$ **36.** $|y| \leq 2$

Determina la solución para cada sistema de desigualdades.

37. $|y| > 2$
$y \leq x + 3$

38. $|x| > 1$
$y \leq 3x + 2$

39. $|y| < 4$
$y \geq -2x + 2$

40. $|x - 2| \leq 3$
$x - y > 2$

41. $|x + 2| < 3$
$|y| > 4$

42. $|x - 2| > 1$
$y > -2$

43. $|x - 3| \leq 4$
$|y + 2| \leq 1$

44. $|x + 1| \leq 2$
$|y - 3| \leq 1$

Ejercicios de conceptos y escritura

45. Si en un sistema de dos desigualdades, una desigualdad contiene $<$ y la otra desigualdad contiene $\geq$, ¿el punto de intersección entre las dos líneas de frontera de las desigualdades está en el conjunto solución? Explica.

46. Si en un sistema de dos desigualdades, una desigualdad contiene $\leq$ y la otra desigualdad contiene $\geq$, ¿el punto de intersección entre las dos líneas de frontera de las desigualdades está en el conjunto solución? Explica.

47. Si en un sistema de dos desigualdades, una desigualdad contiene $<$ y la otra desigualdad contiene $>$, ¿el punto de intersección entre las dos líneas de frontera de las desigualdades está en el conjunto solución? Explica.

48. a) ¿Podría ser posible para un sistema de desigualdades lineales no tener solución? Explica. Invento un ejemplo que apoye tu respuesta.

b) ¿Podría ser posible para un sistema de dos desigualdades lineales tener exactamente una solución? Explica. Si tu respuesta es afirmativa, inventa un ejemplo que apoye tu respuesta.

Sin graficar, determina el número de soluciones en cada sistema de desigualdades indicado. Explica tus respuestas.

49. $3x - y \leq 4$
$3x - y > 4$

50. $2x + y < 6$
$2x + y > 6$

51. $5x - 2y \leq 3$
$5x - 2y \geq 3$

52. $5x - 3y > 5$
$5x - 3y > -1$

53. $2x - y < 7$
$3x - y < -2$

54. $x + y \leq 0$
$x - y \geq 0$

Problemas de desafío

Determina la solución para cada sistema de desigualdades.

55. $y \geq x^2$
$y \leq 4$

56. $y < 4 - x^2$
$y > -5$

57. $y < |x|$
$y < 4$

58. $y \geq |x - 2|$
$y \leq -|x - 2|$

Ejercicios de repaso acumulados

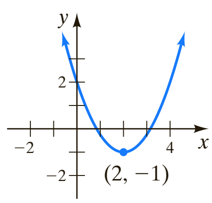
[2.2] **59.** Una fórmula aplicada a palancas en física es $f_1d_1 + f_2d_2 = f_3d_3$. Resuelve esta fórmula para f_2.

[3.2] *Expresa el dominio y el rango de cada función.*

60. $\{(4, 3), (5, -2), (-1, 2), (0, -5)\}$

61. $f(x) = \frac{2}{3}x - 4$

62.



Resumen del capítulo 4

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES | **EJEMPLOS**

Sección 4.1

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un sistema que tiene dos o más ecuaciones lineales.

Una **solución** para un sistema de ecuaciones lineales es el par ordenado o pares que satisfacen todas las ecuaciones del sistema.

Sistema de ecuaciones $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = \dfrac{1}{2}x + 6 \end{cases}$

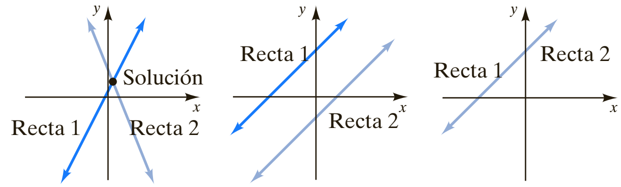
La solución del sistema de ecuaciones anterior es (2, 7).

Un **sistema consistente de ecuaciones** es un sistema de ecuaciones que tiene una solución.

Un **sistema inconsistente de ecuaciones** es un sistema de ecuaciones que no tiene solución.

Un **sistema dependiente de ecuaciones** es un sistema de ecuaciones que tiene un número infinito de soluciones.

Solución exactamente igual a 1 (intersección de rectas) | **No tiene solución** (rectas paralelas) | **Número infinito de soluciones** (la misma recta)



Consistente (a) | **Inconsistente** (b) | **Dependiente** (c)

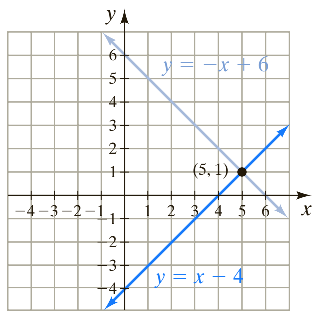
Para resolver gráficamente un sistema de ecuaciones lineales

1. Realiza una gráfica de ambas rectas sobre el mismo par de ejes.
2. Determina el(los) punto(s) de intersección, si existe(n).
3. Verifica la solución en todas las ecuaciones del sistema.

Resuelve el sistema de ecuaciones gráficamente.

$$y = x - 4$$
$$y = -x + 6$$

Realiza la gráfica de ambas rectas en el mismo conjunto de ejes.



Una verificación muestra que (5, 1) es una solución para el sistema de ecuaciones.

Para resolver por sustitución un sistema de ecuaciones lineales

1. Despeja la variable en cualquiera de las ecuaciones.
2. Sustituye la expresión que encontraste para la variable en el paso 1 en la otra ecuación.
3. Resuelve la ecuación que obtuviste en el paso 2 para determinar el valor de esta variable.
4. Sustituye el valor que encontraste en el paso 3 en la ecuación del paso 1. Resuelve la ecuación para determinar la variable restante.
5. Verifica la solución en todas las ecuaciones del sistema.

Resuelve el sistema de ecuaciones por el método de sustitución.

$$y = -2x - 1$$
$$5x + 6y = 8$$

Sustituye $y = -2x - 1$ en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 5x + 6y &= 8 \\ 5x + 6(-2x - 1) &= 8 \\ 5x - 12x - 6 &= 8 \\ -7x - 6 &= 8 \\ -7x &= 14 \\ x &= -2. \end{aligned}$$

Sustituye $x = -2$ en $y = -2x - 1$ para obtener

$$\begin{aligned} y &= -2x - 1 \\ y &= -2(-2) - 1 = 4 - 1 = 3 \end{aligned}$$

Una verificación muestra que $(-2, 3)$ es una solución para el sistema de ecuaciones.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES | **EJEMPLOS**

Sección 4.1 (cont.)

Para resolver por el método de suma (o adición) un sistema lineal de ecuaciones

1. Si es necesario, reescribe cada ecuación en la forma general.
2. Si es necesario, multiplica una o ambas ecuaciones por una constante para que cuando las ecuaciones se sumen, la suma tenga una sola variable.
3. Suma los lados respectivos de las ecuaciones.
4. Resuelve para la variable de la ecuación que obtuviste en el paso 3.
5. Sustituye el valor que encontraste en el paso 4 en cualquiera de las ecuaciones originales. Resuelve esa ecuación para determinar el valor de la variable restante.
6. Verifica la solución en todas las ecuaciones del sistema.

Resuelve el sistema de ecuaciones mediante el método de suma.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 4 && (ec.\ 1) \\ x - 2y &= 2 && (ec.\ 2) \\ 4x + 2y &= 8 && (ec.\ 1)\text{ Multiplicada por 2} \\ \underline{x - 2y} &\underline{= 2} && \\ 5x \quad &= 10 && \text{Suma de ecuaciones} \\ x &= 2 && \end{aligned}$$

Ahora despeja y mediante $(ec.\ 1)$.

$$\begin{aligned} 2(2) + y &= 4 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

La solución es $(2, 0)$.

Sección 4.2

Para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales, utiliza el método de sustitución o el método de suma.

Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= -1 && (ec.\ 1) \\ 4y - 7z &= 2 && (ec.\ 2) \\ z &= 0 && (ec.\ 3) \end{aligned}$$

Sustituye z por 2 en $(ec.\ 2)$ para obtener el valor de y.

$$\begin{aligned} 4y - 7z &= 2 \\ 4y - 7(2) &= 2 \\ 4y &= 16 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Sustituye y por 4 y z por 2 en $(ec.\ 1)$ para obtener el valor de x.

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= -1 \\ x - 4 + 3(2) &= -1 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Una verificación muestra que $(-3, 4, 2)$ es una solución para el sistema de ecuaciones.

Sección 4.3

Aplicaciones:

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

La suma de las áreas de dos círculos es 180 metros cuadrados. La diferencia de sus áreas es 20 metros cuadrados. Determina el área de cada círculo.

Solución

Sean x el área del círculo mayor y y el área del círculo menor. Las dos ecuaciones para este sistema son

$$\begin{aligned} x + y &= 180 && \text{Suma de áreas} \\ \underline{x - y} &\underline{= 20} && \text{Diferencia de áreas} \\ 2x \quad &= 200 && \\ x &= 100 && \end{aligned}$$

Sustituye x por 100 en la primera ecuación para obtener

$$\begin{aligned} x + y &= 180 \\ 100 + y &= 180 \\ y &= 80 \end{aligned}$$

El área del círculo mayor es $100\ m^2$ y el área del círculo menor es $80\ m^2$.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 4.4	
Una **matriz** es un arreglo rectangular de números entre corchetes. Los números dentro de los corchetes se denominan **elementos**. Una **matriz cuadrada** tiene el mismo número de filas y columnas.	$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 8 \\ 6 & -11 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 5 & 2 \\ 9 & 10 & -7 \end{bmatrix}$
Una **matriz aumentada** es una matriz separada por una línea vertical. Para un sistema de ecuaciones, en la matriz aumentada, los coeficientes de las variables se colocan del lado izquierdo de la línea vertical y las constantes del lado derecho. La **forma escalonada por filas** (o **triangular**) de una matriz aumentada es $\left[\begin{array}{cc\|c} 1 & a & p \\ 0 & 1 & q \end{array}\right]$	**Sistema** — **Matriz aumentada** $2x - 3y = 8$ $5x + 7y = -4$ — $\left[\begin{array}{cc\|c} 2 & -3 & 8 \\ 5 & 7 & -4 \end{array}\right]$ Forma escalonada por filas — $\left[\begin{array}{cc\|c} 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \end{array}\right]$
Las **transformaciones de fila** pueden utilizarse para reescribir una matriz en la forma triangular. **Procedimiento para las transformaciones de fila** **1.** Todos los números de una fila pueden multiplicarse por (o dividirse entre) cualquier número real diferente de cero. **2.** Todos los números de una fila pueden multiplicarse por cualquier número real diferente de cero. Estos productos pueden entonces sumarse a los números correspondientes en cualquier otra fila. **3.** Las filas de una matriz pueden intercambiarse.	Resuelve el sistema de ecuaciones $x + 4y = -7$ $6x - 5y = 16$ La matriz aumentada es $\left[\begin{array}{cc\|c} 1 & 4 & -7 \\ 6 & -5 & 16 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc\|c} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -29 & 58 \end{array}\right] \quad -6R_1 + R_2$ $= \left[\begin{array}{cc\|c} 1 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \quad -\frac{1}{29}R_2$ El sistema equivalente de ecuaciones es $x + 4y = -7$ $y = -2$ Sustituye y por -2 en la primera ecuación $x + 4(-2) = -7$ $x - 8 = -7$ $x = 1.$ La solución es $(1, -2)$.
Un sistema de ecuaciones es **inconsistente** y **no tiene solución** si obtienes una matriz aumentada en la que una fila de números tiene únicamente ceros del lado izquierdo de la línea vertical y un número diferente de cero en el lado derecho de la línea vertical. Un sistema de ecuaciones es **dependiente** y tiene un **número infinito de soluciones** si obtienes una matriz aumentada en la que aparece una fila con únicamente ceros.	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & -3 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ -1 & 7 & 6 & 9 \end{array}\right]$ La segunda fila muestra que este sistema es inconsistente y que no tiene solución. $\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 6 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & -12 \end{array}\right]$ La segunda fila muestra que este sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES | **EJEMPLOS**

Sección 4.5

El **determinante** de una matriz 2×2 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ se denota por $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ y se evalúa como

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (5)(-2) = 3 + 10 = 13$$

Regla de Cramer para sistemas de ecuaciones lineales

Para un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

con

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ y } D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

entonces $x = \dfrac{D_x}{D}$ y $y = \dfrac{D_y}{D}$, $D \neq 0$

Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ 4x - 3y &= -13 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -10$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -13 & -3 \end{vmatrix} = -5 \qquad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -13 \end{vmatrix} = -50$$

Entonces

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-50}{-10} = 5$$

La solución es $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$.

Para el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

el **determinante menor de a_1** se determina tachando los elementos de la misma fila y columna donde aparece el elemento a_1.

Expansión de determinantes mediante los menores de la primera columna

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\underbrace{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{\text{Determinante menor de } a_1} - a_2\underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{\text{Determinante menor de } a_2} + a_3\underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}_{\text{Determinante menor de } a_3}$$

Para $\begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 9 \end{vmatrix}$, el determinante menor de a_1 es $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}$.

Evalúa $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -5 & 2 \\ 3 & 6 & -4 \end{vmatrix}$ mediante el desarrollo de menores de la primera columna.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -5 & 2 \\ 3 & 6 & -4 \end{vmatrix} &= 2\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2(8) + 1(-18) + 3(15) \\ &= 16 - 18 + 45 \\ &= 43 \end{aligned}$$

Regla de Cramer para un sistema de ecuaciones con tres variables

Para resolver el sistema

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

con

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

entonces

$$x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D} \quad z = \frac{D_z}{D}, \quad D \neq 0$$

Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 0 \\ 4x - y + 3z &= -9 \\ 6x + 2y + 5z &= -8 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -10 \qquad D_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -9 & -1 & 3 \\ -8 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -5$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -9 & 3 \\ 6 & -8 & 5 \end{vmatrix} = -20 \qquad D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -9 \\ 6 & 2 & -8 \end{vmatrix} = 30$$

Entonces

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-20}{-10} = 2 \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{30}{-10} = -3$$

La solución es $\left(\frac{1}{2}, 2, -3\right)$.

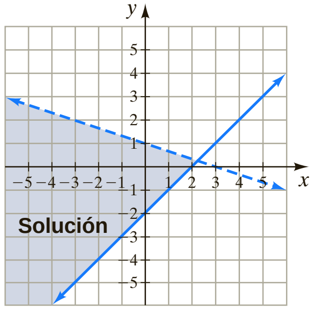
HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 4.6

Para resolver un sistema de desigualdades lineales, se realiza la gráfica de cada desigualdad en los mismos ejes coordenados. La solución es el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen todas las desigualdades del sistema.

Determina la solución para el sistema de desigualdades.

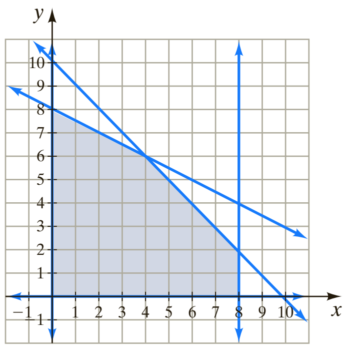
$$y < -\frac{1}{3}x + 1$$
$$x - y \leq 2$$



La **programación lineal** es un proceso donde más de dos desigualdades lineales se grafican en los mismo ejes coordenados.

Determina la solución para el sistema de desigualdades.

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$x \leq 8$$
$$x + y \leq 10$$
$$x + 2y \leq 16$$



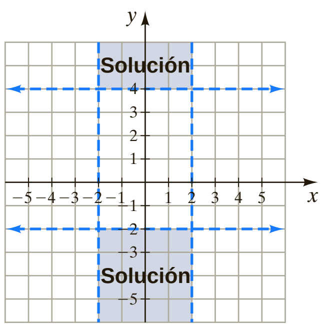
Para sistemas de desigualdades lineales con valor absoluto:

Si $|x| < a$ y $a > 0$, entonces $-a < x < a$.

Si $|x| > a$ y $a > 0$, entonces $x < -a$ o $x > a$.

Determina la solución para el sistema de desigualdades.

$$|x| < 2$$
$$|y - 1| > 3$$



Ejercicios de repaso del capítulo 4

[4.1] *Escribe cada ecuación en la forma pendiente-intersección. Sin graficar o resolver el sistema de ecuaciones, indica si el sistema de ecuaciones lineales es consistente, inconsistente o dependiente. También indica si el sistema tiene exactamente una solución, no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones.*

1. $x - 4y = -2$
$2x - 8y = 1$

2. $4x - 5y = 8$
$3x + 4y = 9$

3. $y = \frac{1}{3}x + 4$
$x + 2y = 8$

4. $6x = 5y - 8$
$4x = 6y + 10$

Determina gráficamente la solución de cada sistema de ecuaciones. Si el sistema es inconsistente o dependiente, indícalo.

5. $y = -2x - 3$
$y = 3x + 7$

6. $x = -5$
$y = 3$

7. $3x + 3y = 12$
$2x - y = -4$

8. $3y - 3x = -9$
$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}$

Determina la solución de cada sistema de ecuaciones por sustitución.

9. $4x + 7y = -3$
$x = 5y + 6$

10. $4x - 3y = -1$
$y = 2x + 1$

11. $a = 2b - 8$
$2b - 5a = 0$

12. $2x + y = 12$
$\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = 1$

Determina la solución de cada sistema de ecuaciones usando el método de suma.

13. $-3x + 4y = -2$
$x - 5y = -3$

14. $-2x - y = 5$
$2x + 2y = 6$

15. $2a + 3b = 7$
$a - 2b = -7$

16. $0.4x - 0.3y = 1.8$
$-0.7x + 0.5y = -3.1$

17. $4r - 3s = 8$
$2r + 5s = 8$

18. $-2m + 3n = 15$
$3m + 3n = 10$

19. $x + \frac{3}{5}y = \frac{11}{5}$
$x - \frac{3}{2}y = -2$

20. $4x + 4y = 16$
$y = 4x - 3$

21. $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$
$x + \frac{5}{4}y = \frac{7}{2}$

22. $2x - 5y = 12$
$x - \frac{4}{3}y = -2$

23. $2x + y = 4$
$3x + \frac{3}{2}y = 6$

24. $2x = 4y + 5$
$2y = x - 7$

[4.2] *Determina la solución de cada sistema de ecuaciones usando el método de sustitución o de suma.*

25. $5x - 9y + 2z = 12$
$4y - 3z = -3$
$5z = 5$

26. $2a + b - 2c = 5$
$3b + 4c = 1$
$3c = -6$

27. $x + 2y + 3z = 3$
$-2x - 3y - z = 5$
$3x + 3y + 7z = 2$

28. $-x - 4y + 2z = 1$
$2x + 2y + z = 0$
$-3x - 2y - 5z = 5$

29. $3y - 2z = -4$
$3x - 5z = -7$
$2x + y = 6$

30. $a + 2b - 5c = 19$
$2a - 3b + 3c = -15$
$5a - 4b - 2c = -2$

31. $x - y + 3z = 1$
$-x + 2y - 2z = 1$
$x - 3y + z = 2$

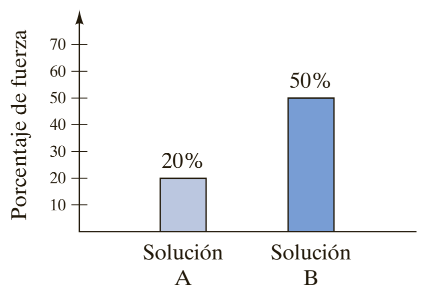
32. $-2x + 2y - 3z = 6$
$4x - y + 2z = -2$
$2x + y - z = 4$

[4.3] *Expresa cada problema como un sistema de ecuaciones lineales y usa el método de tu elección para determinar la solución del problema.*

33. Edades Luan Baker es 10 años más grande que su sobrina, Jennifer Miesen. Si la suma de sus edades es 66, determina la edad de Luan y la edad de Jennifer.

34. Velocidad del aire Un avión puede viajar 560 millas por hora en dirección del viento y 480 millas por hora en contra del viento. Determina la velocidad del avión en aire en calma y la velocidad del viento.

35. Mezcla de soluciones Sally Dove tiene dos soluciones ácidas, como se ilustra. ¿Qué cantidad de cada una debe mezclar para obtener 6 litros de una solución ácida al 40%?



Ver ejercicio 35.

36. **Hockey sobre hielo** La inscripción a un juego de hockey sobre hielo es de \$15 para adultos y \$11 para niños. Se vendió un total de 650 boletos. Determina cuántos boletos de niño y cuántos boletos de adulto se vendieron si se recolectaron en total \$8790.

37. **Regreso al espacio** John Glenn fue el primer astronauta norteamericano en entrar en órbita alrededor de la Tierra. Varios años después regresó al espacio. La segunda ocasión que regresó al espacio era 5 años más joven que dos veces la edad de cuando fue al espacio por primera vez. La suma de las edades de ambas ocasiones que estuvo en el espacio es 118. Determina la edad que tenía en cada ocasión que estuvo en el espacio.

38. **Cuentas de ahorro** Jorge Minez tiene un total de \$40,000 invertidos en tres diferentes cuentas de ahorro. Tiene algo de dinero invertido en una cuenta que le da 7% de interés. La segunda cuenta tiene \$5000 menos que la primera cuenta y le da 5% de interés. La tercera cuenta le da 3% de interés. Si el total de interés anual que Jorge recibe en un año es de \$2300, determina el monto en cada cuenta.


© NASA

Ver ejercicio 37.

[4.4] *Resuelve cada sistema de ecuaciones usando matrices.*

39. $x + 4y = -5$
$5x - 3y = 21$

40. $2x - 5y = 1$
$2x + 4y = 10$

41. $3y = 6x - 12$
$4x = 2y + 8$

42. $2x - y - z = 5$
$x + 2y + 3z = -2$
$3x - 2y + z = 2$

43. $3a - b + c = 2$
$2a - 3b + 4c = 4$
$a + 2b - 3c = -6$

44. $x + y + z = 3$
$3x + 4y = -1$
$y - 3z = -10$

[4.5] *Resuelve cada sistema de ecuaciones usando determinantes.*

45. $7x - 2y = -3$
$-8x + 3y = 7$

46. $x + 4y = 5$
$5x + 3y = -9$

47. $9m + 4n = -1$
$7m - 2n = -11$

48. $p + q + r = 5$
$2p + q - r = -5$
$3p + 2q - 3r = -12$

49. $-2a + 3b - 4c = -7$
$2a + b + c = 5$
$-2a - 3b + 4c = 3$

50. $y + 3z = 4$
$-x - y + 2z = 0$
$x + 2y + z = 1$

[4.6] *Grafica la solución de cada sistema de desigualdades.*

51. $-x + 3y > 6$
$2x - y \le 2$

52. $5x - 2y \le 10$
$3x + 2y > 6$

53. $y > 2x + 3$
$y < -x + 4$

54. $x > -2y + 4$
$y < -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

Determina la solución del sistema de desigualdades.

55. $x \ge 0$
$y \ge 0$
$x + y \le 6$
$4x + y \le 8$

56. $x \ge 0$
$y \ge 0$
$2x + y \le 6$
$4x + 5y \le 20$

57. $|x| \le 3$
$|y| > 2$

58. $|x| > 4$
$|y - 2| \le 3$

Prueba de práctica del capítulo 4

CHAPTER Test Prep VIDEOS

Los videos de la prueba de práctica del capítulo proporcionan soluciones totalmente resueltas para cualquiera de los ejercicios que quieras repasar. Los videos de la prueba de práctica del capítulo están disponibles vía MyMathLab, o en YouTube (busca "Angel Intermediate Algebra" y da click en "Channels").

1. Define **a)** un sistema de ecuaciones consistente, **b)** un sistema de ecuaciones dependiente, y **c)** un sistema de ecuaciones inconsistente.

Determina, sin resolver el sistema, si el sistema de ecuaciones es consistente, inconsistente o dependiente. Indica si el sistema tiene exactamente solo una solución, no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones.

2. $5x + 2y = 4$
   $6x = 3y - 7$

3. $5x + 3y = 9$
   $2y = -\frac{10}{3}x + 6$

4. $5x - 4y = 6$
   $-10x + 8y = -10$

Resuelve cada sistema de ecuaciones por el método indicado.

5. $y = 3x - 2$
   $y = -2x + 8$
   gráficamente

6. $y = -x + 6$
   $y = 2x + 3$
   gráficamente

7. $y = 4x - 3$
   $y = 5x - 4$
   sustitución

8. $4a + 7b = 2$
   $5a + b = -13$
   sustitución

9. $8x + 3y = 8$
   $6x + y = 1$
   suma

10. $0.3x = 0.2y + 0.4$
    $-1.2x + 0.8y = -1.6$
    suma

11. $\frac{3}{2}a + b = 6$
    $a - \frac{5}{2}b = -4$
    suma

12. $x + y + z = 2$
    $-2x - y + z = 1$
    $x - 2y - z = 1$
    suma

13. Escribe la matriz aumentada para el siguiente sistema de ecuaciones.

$$-2x + 3y + 7z = 5$$
$$3x - 2y + z = -2$$
$$x - 6y + 9z = -13$$

14. Considera la siguiente matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 6 & -2 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \end{array}\right]$$

Muestra los resultados obtenidos de multiplicar los elementos de la tercera fila por -2 y de sumar los productos a sus correspondientes elementos de la segunda fila.

Resuelve cada sistema de ecuaciones usando matrices.

15. $2x + 7y = 1$
    $3x + 5y = 7$

16. $x - 2y + z = 7$
    $-2x - y - z = -$
    $4x + 5y - 2z = 3$

Evalúa cada determinante.

17. $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 6 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

Resuelve cada sistema de ecuaciones usando determinantes y la regla de Cramer.

19. $4x + 3y = -6$
    $-2x + 5y = 16$

20. $2r - 4s + 3t = -1$
    $-3r + 5s - 4t = 0$
    $-2r + s - 3t = -2$

Usa el método de tu elección para determinar la solución de cada problema.

21. **Mezcla de semillas para pájaros** Jardines Agway tiene semillas de girasol, en un barril, que se venden a \$0.49 la libra y una mezcla de semillas gourmet para pájaros que se vende a \$0.89 la libra. ¿Cuánto debe mezclarse para obtener 20 libras de una mezcla que se venda a \$0.73 la libra?

© Allen R. Angel

22. **Mezclando soluciones** La química Tyesha Blackwell tiene soluciones de ácido sulfúrico al 6% y al 15%. ¿Qué cantidad de cada solución debe mezclar para obtener 10 litros de solución al 9%?

23. **Suma de números** La suma de tres números es 29. El número mayor es cuatro veces el número más pequeño. El número restante es una unidad más que dos veces el número más pequeño. Determina los tres números.

Determina la solución de cada sistema de desigualdades.

24. $3x + 2y < 9$
    $-2x + 5y \leq 10$

25. $|x| > 3$
    $|y| \leq 1$

Prueba de repaso acumulada

Resuelve la siguiente prueba y verifica tus respuestas con las que aparecen al final del libro. Revisa las preguntas que hayas respondido incorrectamente. La sección donde se analiza el tema correspondiente se indica después de cada respuesta.

1. Evalúa $48 \div \left\{4\left[3 + \left(\frac{5+10}{5}\right)^2\right] - 32\right\}$.

2. Considera el siguiente conjunto de números.

$$\left\{\frac{1}{2}, -4, 9, 0, \sqrt{3}, -4.63, 1\right\}$$

Lista los elementos del conjunto que son

a) números naturales.

b) números racionales.

c) números reales.

3. Escribe los siguientes números en orden de menor a mayor.

$$-1, |-4|, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, -|-8|, |-12|$$

Resuelve.

4. $-[3 - 2(x - 4)] = 3(x - 6)$

5. $\frac{2}{3}x - \frac{5}{6} = 2$

6. $|2x - 3| - 5 = 4$

7. Resuelve la fórmula $M = \frac{1}{2}(a + x)$ para x.

8. Determina el conjunto solución de la desigualdad.

$$0 < \frac{3x - 2}{4} \leq 8$$

9. Simplifica $\left(\frac{3x^2y^{-2}}{y^3}\right)^{-2}$.

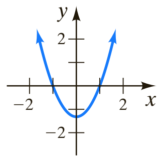
10. Grafica $2y = 3x - 8$.

11. Escribe en forma pendiente−intersección la ecuación de la línea paralela a la gráfica de $2x - 3y = 8$ y que cruza el punto $(2, 3)$.

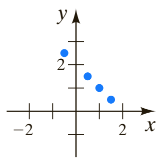
12. Grafica la desigualdad $6x - 3y < 12$.

13. Determina cuál de las siguientes gráficas representa funciones. Explica.

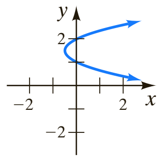
a)



b)



c)



14. Si $f(x) = \frac{x+3}{x^2 - 9}$, determina

a) $f(-4)$ **b)** $f(h)$ **c)** $f(3)$.

Resuelve cada sistema de ecuaciones.

15. $3x + y = 6$
$y = 4x - 1$

16. $2p + 3q = 11$
$-3p - 5q = -16$

17. $x - 2y = 0$
$2x + z = 7$
$y - 2z = -5$

18. **Ángulos de un triángulo** Si el ángulo más grande de un triángulo es nueve veces la magnitud del ángulo más pequeño, y el ángulo entre estos dos ángulos (en tamaño) es 70° mayor que la magnitud del ángulo más pequeño, determina las magnitudes de los tres ángulos.

19. **Caminar y trotar** Mark Simmons camina a una velocidad de 4 millas por hora y Judy Bolin trota a una velocidad de 6 millas por hora. Mark comienza a caminar $\frac{1}{2}$ hora antes de que Judy comience a trotar. Si Judy trota por el mismo camino que Mark camina, ¿cuánto tiempo después de que Judy comience a trotar alcanzará a Mark?

20. **Concierto de rock** Existen dos diferentes precios de asientos en un concierto de rock. El asiento costoso se vende en $20 y el asiento económico se vende en $16. Si se vendieron 1000 boletos y el total de la venta fue de $18,400, ¿cuántos boletos de cada tipo se vendieron?

5 Polinomios y funciones polinomiales

Objetivos de este capítulo

En la primera parte de este capítulo estudiaremos los polinomios y las funciones polinomiales. Después dirigiremos nuestra atención a la factorización. *Para resolver los problemas de muchos de los capítulos siguientes, será necesario que hayas comprendido bien el tema de factorización.* Pon particular atención en cómo utilizar la factorización para encontrar las intersecciones con el eje x de una función cuadrática. Más adelante haremos referencia a este tema.

© Dann Tardif/Latinstock

A menudo los estudiantes participan en competencias como concursos de deletreo de palabras, matemáticas o de ortografía. En el ejercicio 82 de la página 286, se utiliza una función polinómica para determinar el número de las diferentes maneras en que los estudiantes pueden terminar primero, segundo o tercero en un concurso de deletreo de palabras.

5.1 Suma y resta de polinomios

1 Determinar el grado de un polinomio.
2 Evaluar funciones polinomiales.
3 Entender las gráficas de funciones polinomiales.
4 Sumar y restar polinomios.

Comprendiendo el álgebra

Los signos + o − separan los términos en un polinomio.

1 Determinar el grado de un polinomio

Recuerda que, como se explicó en el capítulo 2, las partes que se suman o restan en una expresión matemática se denominan **términos**. El **grado de un término** con exponentes enteros no negativos es la suma de los exponentes de las variables, si las hay. Las constantes distintas de 0 tienen grado 0, y al término 0 no se le asigna grado.

Polinomio

Un **polinomio** es una suma finita de términos en la que todas las variables tienen exponentes enteros no negativos y donde los denominadores no incluyen variables.

- $3x^2 + 2x + 6$ es un *polinomio con una variable x.*
- $x^2y - 7x + 3$ es un *polinomio con dos variables, x* y *y.*
- $x^{1/2}$ *no* es un polinomio, porque el exponente de la variable no es un número entero.
- $\frac{1}{x}$ (o x^{-1}) *no* es un polinomio, porque el exponente de la variable no es un número entero positivo.
- $\frac{1}{x+1}$ *no* es un polinomio, porque la variable se encuentra en el denominador.

El **término principal** de un polinomio es el término de grado más alto. El **coeficiente principal** es el coeficiente del término principal.

EJEMPLO 1 Indica el número de términos, el grado, el término principal y el coeficiente principal de cada polinomio.

a) $2x^5 - 3x^2 + 6x - 9$ **b)** $8x^2y^4 - 6xy^3 + 3xy^2z^4$

Solución Organizaremos las respuestas en una tabla.

Polinomio	Número de términos	Grado del polinomio	Término principal	Coeficiente principal
a) $2x^5 - 3x^2 + 6x - 9$	4	5 (de $2x^5$)	$2x^5$	2
b) $8x^2y^4 - 6xy^3 + 3xy^2z^4$	3	7 (de $3xy^2z^4$)	$3xy^2z^4$	3

Resuelve ahora el ejercicio 23

Los polinomios se clasifican de acuerdo con el número de términos que tienen, como se indica en la tabla siguiente.

Comprendiendo el álgebra

El prefijo *mono* significa *uno*.
El prefijo *bi* significa *dos*.
El prefijo *poli* significa *muchos*.

Tipo de polinomio	Descripción	Ejemplos
Monomio	Un polinomio con un término	$4x^2, 6x^2y, 3, -2xyz^5, 7$
Binomio	Un polinomio con dos términos	$x^2 + 1, 2x^2 - y, 6x^3 - 5y^2$
Trinomio	Un polinomio con tres términos	$x^3 + 6x - 8, x^2y - 9x + y^2$

A los polinomios que contienen más de tres términos no se les da un nombre específico. *Poli* es un prefijo que significa *muchos.* Un polinomio se denomina **lineal** si su grado es 0 o 1. Un polinomio de una variable se denomina **cuadrático** si es de grado 2, y **cúbico** si es de grado 3.

Tipo de polinomio	Ejemplos
Lineal	$2x - 4,\quad 5$
Cuadrático	$3x^2 + x - 6,\quad 4x^2 - 8$
Cúbico	$-4x^3 + 3x^2 + 5,\quad 2x^3 + 7x$

Comprendiendo el álgebra

En *orden descendente*, los exponentes *descienden* o van *decreciendo*.

Los polinomios $2x^3 + 4x^2 - 6x + 3$ y $4x^2 - 3xy + 5y^2$ son ejemplos de polinomios en **orden descendente** de la variable x, ya que los exponentes de la variable x descienden (o van decreciendo) al recorrer los términos de izquierda a derecha. Por lo general, los polinomios se escriben en orden descendente respecto de alguna variable.

EJEMPLO 2 Escribe cada uno de los siguientes polinomios en orden descendente de la variable x.

a) $5x + 4x^2 - 6$ **b)** $xy - 6x^2 + 8y^2$

Solución

a) $5x + 4x^2 - 6 = 4x^2 + 5x - 6$

b) $xy - 6x^2 + 8y^2 = -6x^2 + xy + 8y^2$

Resuelve ahora el ejercicio 19

2 Evaluar funciones polinomiales

La expresión $2x^3 + 6x^2 + 3$ es un polinomio. Si escribimos $P(x) = 2x^3 + 6x^2 + 3$, entonces tenemos una función polinomial. En una **función polinomial**, la expresión usada para describir la función es un polinomio.

EJEMPLO 3 Para la función polinomial $P(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 9$, determina

a) $P(0)$ **b)** $P(3)$ **c)** $P(-2)$

Solución

a)
$$\begin{aligned} P(x) &= 4x^3 - 6x^2 - 2x + 9 \\ P(0) &= 4(0)^3 - 6(0)^2 - 2(0) + 9 \\ &= 0 - 0 - 0 + 9 = 9 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} P(3) &= 4(3)^3 - 6(3)^2 - 2(3) + 9 \\ &= 4(27) - 6(9) - 6 + 9 = 57 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} P(-2) &= 4(-2)^3 - 6(-2)^2 - 2(-2) + 9 \\ &= 4(-8) - 6(4) + 4 + 9 = -43 \end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 29

Con frecuencia las empresas, los gobiernos y otras organizaciones necesitan llevar registros y hacer proyecciones de ventas, utilidades, cambios en la población, efectividad de nuevos medicamentos, etc. Para realizar estas tareas, muchas veces se utilizan gráficas y funciones.

EJEMPLO 4 **Prescripciones vía Internet** Más y más médicos ordenan prescripciones en línea para sus pacientes. La **Figura 5.1** muestra el número de prescripciones vía Internet para los años 2004 a 2008. La función polinomial que puede usarse para aproximar el número de prescripciones, en millones, es

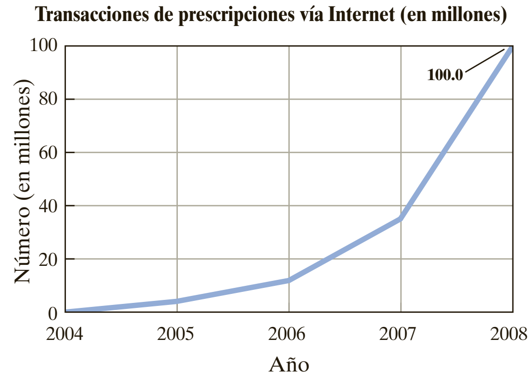
$$P(t) = 10.5t^2 - 18.3t + 3.4$$

donde t es el número de años desde 2004 y $0 \le t \le 4$.

a) Utiliza la función para estimar el número de prescripciones vía Internet en el año 2008.

b) Compara tu respuesta del inciso **a)** con la gráfica. ¿La gráfica apoya tu respuesta?

c) Si esta tendencia continúa más allá del 2008, estima el número de prescripciones vía Internet en el año 2010.



Fuente: Intercambio de información de la farmacia de salud

FIGURA 5.1

Solución

a) Entiende Necesitamos determinar el valor de t para sustituirlo en esta función. Como t es el número de años desde 2004, el año 2008 corresponde a $t = 4$. Por lo tanto, para estimar el número de prescripciones, calculamos $P(4)$.

Traduce y realiza los cálculos

$$\begin{aligned} P(t) &= 10.5t^2 - 18.3t + 3.4 \\ P(4) &= 10.5(4)^2 - 18.3(4) + 3.4 \\ &= 168 - 73.2 + 3.4 \\ &= 98.2 \end{aligned}$$

Verifica y responde El número de prescripciones en línea en 2008 fue de 98.2 millones, o 98,200,000.

b) En el inciso **a)** vimos que hubo 98.2 millones de prescripciones vía Internet en el año 2008. La gráfica de líneas de la **Figura 5.1** muestra que hubo 100 millones de prescripciones en el año 2008. Debido a que ambos valores son muy cercanos, podemos concluir que la gráfica apoya la respuesta del inciso **a)**.

c) Entiende Para estimar el número de prescripciones en 2010, observa que 2010 es 6 años después de 2004. Por lo tanto, $t = 6$, y sustituimos t por 6 en la función polinomial.

Traduce y realiza los cálculos

$$\begin{aligned} P(t) &= 10.5t^2 - 18.3t + 3.4 \\ P(6) &= 10.5(6)^2 - 18.3(6) + 3.4 \\ &= 271.6 \end{aligned}$$

Verifica y responde Si la tendencia continúa, en 2010 habrá cerca de 271.6 millones, o 271,600,000, de prescripciones vía Internet.

Resuelve ahora el ejercicio 93

3 Entender las gráficas de funciones polinomiales

Comprendiendo el álgebra

Una función *crece* si tu lápiz sube mientras trazas la gráfica de izquierda a derecha. Una función *decrece* si tu lápiz baja mientras trazas la gráfica de izquierda a derecha.

Las gráficas de todas las funciones polinomiales son suaves curvas continuas. La **Figura 5.2** muestra la gráfica de una función polinomial cuadrática. Las **Figuras 5.3** y **5.4** muestran las gráficas de funciones polinomiales cúbicas. Cada una de las funciones en estas gráficas tiene un *coeficiente principal positivo*. Observa que en cada gráfica, la función continúa *creciendo* (la parte negra en la gráfica) hacia la derecha para algún valor de x.

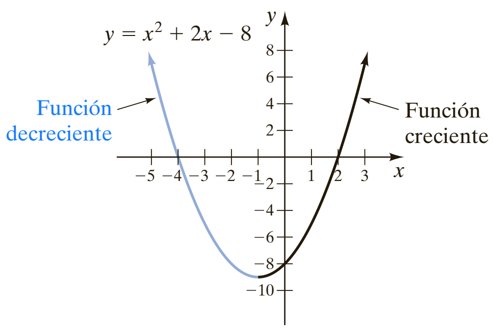


FIGURA 5.2

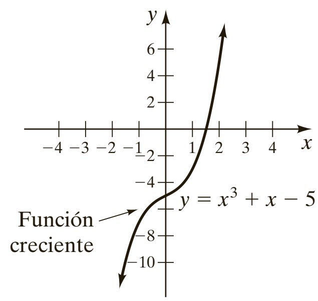


FIGURA 5.3

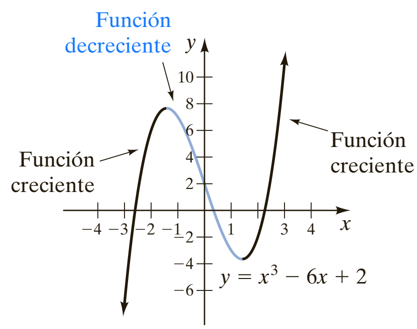


FIGURA 5.4

La **Figura 5.5** en la página 283 muestra la gráfica de una función polinomial cuadrática. Las **Figuras 5.6** y **5.7** muestran las gráficas de funciones polinomiales cúbicas. Cada una de las funciones en estas gráficas tiene un *coeficiente principal negativo*. Observa que en cada gráfica, la función continúa *decreciendo* (la parte azul en la gráfica) hacia la derecha para algún valor de x.

¿Por qué el coeficiente principal determina si una función polinomial crece o decrece hacia la derecha para algún valor de x? El coeficiente principal es el

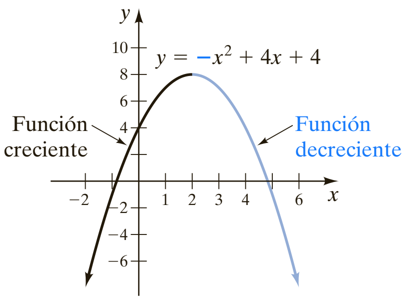


FIGURA 5.5

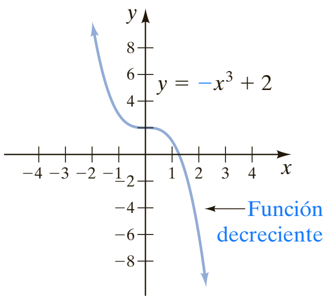


FIGURA 5.6

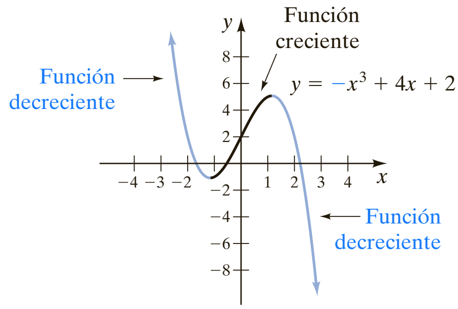


FIGURA 5.7

Comprendiendo el álgebra

Las funciones polinomiales con *coeficientes principales positivos crecerán* hacia la derecha para algún valor de *x*. Las funciones polinomiales con *coeficientes principales negativos decrecerán* hacia la derecha para algún valor de *x*.

coeficiente del término con el exponente de la variable con el valor más alto. Conforme el valor de x aumenta, este término acabará por dominar a todos los demás de la función. Por lo tanto, si el coeficiente de este término es positivo, *en algún momento* la función comenzará a crecer a medida que el valor de x aumente. Si el coeficiente de este término es negativo, *en algún momento* la función comenzará a decrecer a medida que el valor de x aumente. Esta información, junto con la verificación de la intersección en el eje y de la gráfica, puede ser de utilidad en la determinación de si una gráfica es correcta o si está completa.

Cómo utilizar tu calculadora graficadora

Siempre que grafiques una función polinomial en tu calculadora graficadora, asegúrate de que la pantalla muestre todos los cambios de dirección en tu gráfica. Por ejemplo, supón que graficas $y = 0.1x^3 - 2x^2 + 5x - 8$ en tu calculadora. Si empleas la ventana estándar, obtendrás la gráfica que se muestra en la **Figura 5.8**.

Sin embargo, a partir de lo que acabamos de analizar debes darte cuenta de que, como el coeficiente principal, 0.1, es positivo, la gráfica debe crecer hacia la derecha para algún valor de x. Esto no resulta claro en la gráfica de la **Figura 5.8**. Si ajustas tu ventana para que aparezca como en la **Figura 5.9**, obtendrás la gráfica que se muestra allí. Ahora puedes ver cómo crece ligeramente la gráfica hacia la derecha a partir de $x = 12$. Al graficar, muchas veces es útil determinar la intersección con el eje y para establecer qué valores se deben usar en un rango. Recuerda que para determinar la intersección con el eje y, establecemos $x = 0$ y despejamos y. Por ejemplo, si se grafica $y = 4x^3 + 6x^2 + x - 180$, la intersección con el eje y estará en -180, es decir, en el punto $(0, -180)$.

$y = 0.1x^3 - 2x^2 + 5x - 8$

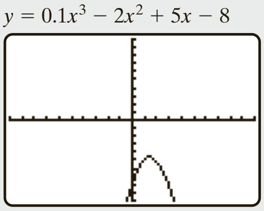
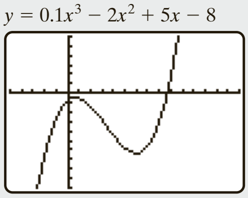


FIGURA 5.8

$y = 0.1x^3 - 2x^2 + 5x - 8$



$[-10, 30, 2, -100, 60, 10]$

FIGURA 5.9

4 Sumar y restar polinomios

Para *sumar o restar polinomios*, primero quitamos los paréntesis (si los hay) y después reducimos los términos semejantes.

EJEMPLO 5 Simplifica $(4x^2 - 6x + 8) + (2x^2 + 5x - 1)$.

Solución

$$(4x^2 - 6x + 8) + (2x^2 + 5x - 1)$$

$$= 4x^2 - 6x + 8 + 2x^2 + 5x - 1 \quad \text{Elimina los paréntesis.}$$

$$= \underbrace{4x^2 + 2x^2}_{} \underbrace{- 6x + 5x}_{} \underbrace{+ 8 - 1}_{} \quad \text{Reacomoda los términos.}$$

$$= \quad 6x^2 \qquad -x \qquad +7 \quad \text{Reduce los términos semejantes.}$$

Resuelve ahora el ejercicio 39

EJEMPLO 6 Simplifica $(3x^2y - 4xy + y) + (x^2y + 2xy + 8y - 5)$.

Solución

$$
\begin{aligned}
&(3x^2y - 4xy + y) + (x^2y + 2xy + 8y - 5) \\
&= 3x^2y - 4xy + y + x^2y + 2xy + 8y - 5 && \text{Elimina los paréntesis.} \\
&= \underbrace{3x^2y + x^2y}_{4x^2} \underbrace{- 4xy + 2xy}_{-2xy} \underbrace{+ y + 8y}_{+9y} - 5 && \text{Reacomoda los términos.} \\
&= \quad 4x^2 \qquad -2xy \qquad +9y \quad -5 && \text{Reduce los términos semejantes.}
\end{aligned}
$$

Resuelve ahora el ejercicio 45

Consejo útil

Recuerda que $-x$ significa $-1 \cdot x$. Por lo tanto, $-(2x^2 - 4x + 6)$ significa $-1(2x^2 - 4x + 6)$, y se aplica la propiedad distributiva. Cuando restas un polinomio de otro, los *signos de cada término* del polinomio que se resta deben cambiarse. Por ejemplo,

$$
\begin{aligned}
x^2 - 6x + 3 - (2x^2 - 4x + 6) &= x^2 - 6x + 3 - 1(2x^2 - 4x + 6) \\
&= x^2 - 6x + 3 - 2x^2 + 4x - 6 \\
&= -x^2 - 2x - 3
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 7 Resta $(-x^2 - 2x + 11)$ de $(x^3 + 4x + 6)$.

Solución

$$
\begin{aligned}
&(x^3 + 4x + 6) - (-x^2 - 2x + 11) \\
&= (x^3 + 4x + 6) - 1(-x^2 - 2x + 11) && \text{Inserta 1.} \\
&= x^3 + 4x + 6 + x^2 + 2x - 11 && \text{Propiedad distributiva} \\
&= x^3 + x^2 + 4x + 2x + 6 - 11 && \text{Reacomoda los términos.} \\
&= x^3 + x^2 + 6x - 5 && \text{Reduce los términos semejantes.}
\end{aligned}
$$

Resuelve ahora el ejercicio 61

EJEMPLO 8 Simplifica $x^2y - 4xy^2 + 5 - (2x^2y - 3y^2 + 11)$.

Solución

$$
\begin{aligned}
&x^2y - 4xy^2 + 5 - 1(2x^2y - 3y^2 + 11) && \text{Inserta 1.} \\
&= x^2y - 4xy^2 + 5 - 2x^2y + 3y^2 - 11 && \text{Propiedad distributiva} \\
&= x^2y - 2x^2y - 4xy^2 + 3y^2 + 5 - 11 && \text{Reacomoda los términos.} \\
&= -x^2y - 4xy^2 + 3y^2 - 6 && \text{Reduce los términos semejantes.}
\end{aligned}
$$

Observa que $-x^2y$ y $-4xy^2$ no son términos semejantes, ya que las variables tienen exponentes diferentes. Tampoco $-4xy^2$ y $3y^2$ son términos semejantes, ya que $3y^2$ no tiene la variable x.

Resuelve ahora el ejercicio 49

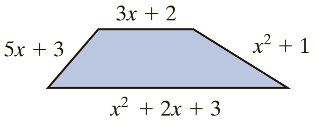


FIGURA 5.10

EJEMPLO 9 **Perímetro** Encuentra una expresión para el perímetro del cuadrilátero de la **Figura 5.10**.

Solución EL perímetro es la suma de las longitudes de los lados de la Figura.

$$
\begin{aligned}
\text{Perímetro} &= (x^2 + 2x + 3) + (x^2 + 1) + (5x + 3) + (3x + 2) && \text{Suma de los lados} \\
&= x^2 + 2x + 3 + x^2 + 1 + 5x + 3 + 3x + 2 && \text{Elimina los paréntesis.} \\
&= x^2 + x^2 + 2x + 5x + 3x + 3 + 1 + 3 + 2 && \text{Reacomoda los términos.} \\
&= 2x^2 + 10x + 9 && \text{Reduce los términos semejantes.}
\end{aligned}
$$

El perímetro del cuadrilátero es $2x^2 + 10x + 9$.

Resuelve ahora el ejercicio 73

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.1

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

principal polinomio grado trinomio términos 5 monomio factores binomio 7 1 0

1. Las partes que se suman o se restan en un polinomio se llaman _______________.
2. La suma de los exponentes de las variables de un término se conoce como el _______________ del término.
3. El grado de $-7x^3y^2$ es _______________.
4. El grado de $6x$ es _______________.
5. En un polinomio, el término de mayor grado se llama el término _______________.
6. Un polinomio con un solo término es un _______________.
7. Un polinomio con dos términos es un _______________.
8. Un polinomio con tres términos en un _______________.

Practica tus habilidades

Determina si cada expresión es un polinomio. Si el polinomio tiene un nombre en específico, por ejemplo, "monomio" o "binomio", escribe el nombre. Si la expresión no es un polinomio, explica por qué no lo es.

9. -4
10. $5z^{-3}$
11. $7z$
12. $5x^2 - 6x + 9$
13. $4x^{-1}$
14. $8x^2 - 4x + 9y^2$
15. $3x^{1/2} + 2xy$
16. $10xy + 5y^2$

Escribe cada polinomio en orden descendente de la variable x. Si el polinomio ya se encuentra en orden descendente, indícalo. Escribe el grado de cada polinomio.

17. $-5 + 2x - x^2$
18. $-3x - 9 + 8x^2$
19. $9y^2 + 3xy + 10x^2$
20. $-2 + x - 7x^2 + 4x^3$
21. $-2x^4 + 5x^2 - 4$
22. $15xy^2 + 3x^2y - 9 - 2x^3$

Escribe **a)** *el grado de cada polinomio y* **b)** *su coeficiente principal.*

23. $x^4 + 3x^6 - 2x - 13$
24. $17x^4 + 13x^5 - x^7 + 4x^3$
25. $4x^2y^3 + 6xy^4 + 9xy^5$
26. $-a^4b^3c^2 + 9a^8b^9c^4 - 8a^7c^{20}$
27. $-\frac{1}{3}m^4n^5p^8 + \frac{3}{5}m^3p^6 - \frac{5}{9}n^4p^6q$
28. $-0.6x^2y^3z^2 + 2.9xyz^9 - 1.7x^8y^4$

Evalúa cada función polinomial en el valor dado.

29. Determina $P(2)$ si $P(x) = x^2 - 6x + 3$.
30. Determina $P(-1)$ si $P(x) = 4x^2 + 6x - 21$.
31. Determina $P\left(\frac{1}{2}\right)$ si $P(x) = 2x^2 - 3x - 6$.
32. Determina $P\left(\frac{1}{3}\right)$ si $P(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 + 6$.
33. Determina $P(0.4)$ si $P(x) = 0.2x^3 + 1.6x^2 - 2.3$.
34. Determina $P(-1.2)$ si $P(x) = -1.6x^3 - 4.6x^2 - 0.1x$.

En los ejercicios 35-56, simplifica.

35. $(x^2 + 3x - 1) + (6x - 5)$
36. $(5b^2 - 8b + 7) - (2b^2 - 3b - 15)$
37. $(x^2 - 8x + 11) - (5x + 9)$
38. $(2x - 13) - (3x^2 - 4x + 26)$
39. $(4y^2 + 9y - 1) - (2y^2 + 10)$
40. $(5n^2 - 7) + (9n^2 + 8n + 12)$
41. $\left(-\frac{5}{9}a + 6\right) + \left(-\frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{4}a - 1\right)$
42. $(6y^2 - 9y + 14) - (-2y^2 - y - 8)$
43. $(1.4x^2 + 1.6x - 8.3) - (4.9x^2 + 3.7x + 11.3)$
44. $(-12.4x^2y - 6.2xy + 9.3y^2) - (-5.3x^2y + 1.6xy - 10.4y^2)$
45. $\left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2y + 8xy^2\right) + \left(-x^3 - \frac{1}{2}x^2y + xy^2\right)$
46. $\left(-\frac{3}{5}xy^2 + \frac{5}{8}\right) - \left(-\frac{1}{2}xy^2 + \frac{3}{5}\right)$
47. $(3a - 6b + 5c) - (-2a + 4b - 8c)$
48. $(9r + 7s - t) + (-2r - 6s - 3t)$
49. $(3a^2b - 6ab + 5b^2) - (4ab - 6b^2 + 5a^2b)$
50. $(3x^2 - 5y^2 - 2xy) - (4x^2 + 8y^2 - 9xy)$
51. $(8r^2 - 5t^2 + 2rt) + (-6rt + 2t^2 - r^2)$
52. $(a^2 - b^2 + 5ab) + (-3b^2 - 2ab + a^2)$
53. $6x^2 - 5x - [3x - (4x^2 - 9)]$
54. $3xy^2 - 2x - [-(4xy^2 + 3x) - 5xy]$
55. $5w - 6w^2 - [(3w - 2w^2) - (4w + w^2)]$
56. $-[-(5r^2 - 3r) - (2r - 3r^2) - 2r^2]$

57. Resta $(4x - 11)$ de $(7x + 8)$.

58. Resta $(-x^2 + 3x + 5)$ de $(4x^2 - 6x + 2)$.

59. Suma $-2x^2 - 4x - 12$ y $-x^2 - 2x$.

60. Resta $(5x^2 - 6)$ de $(2x^2 - 9x + 8)$.

61. Resta $0.2a^2 - 3.9a + 26.4$ de $-5.2a^2 - 9.6a$.

62. Suma $6x^2 + 12xy$ y $-2x^2 + 4xy + 3y$.

63. Resta $\left(5x^2y + \frac{5}{9}\right)$ de $\left(-\frac{1}{2}x^2y + xy^2 + \frac{3}{5}\right)$.

64. Resta $(6x^2y + 7xy)$ de $(2x^2y + 12xy)$.

Simplifica. Considera que todos los exponentes representan números naturales.

65. $(3x^{2r} - 7x^r + 1) + (2x^{2r} - 3x^r + 2)$

66. $(8x^{2r} - 5x^r + 4) + (6x^{2r} + x^r + 3)$

67. $(x^{2s} - 8x^s + 6) - (2x^{2s} - 4x^s - 13)$

68. $(5a^{2m} - 6a^m + 4) - (2a^{2m} + 7)$

69. $(7b^{4n} - 5b^{2n} + 1) - (3b^{3n} - b^{2n})$

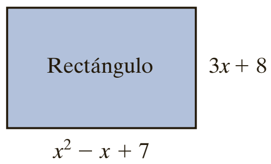
70. $(-3r^{3a} + r^a - 6) - (-2r^{3a} - 8r^{2a} + 6)$

Resolución de problemas

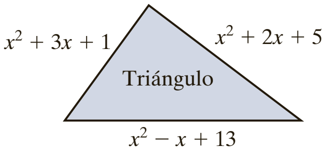
Perímetro *En los ejercicios 71 - 76, determina una expresión para el perímetro de cada figura. Ver ejemplo 9.*

71.

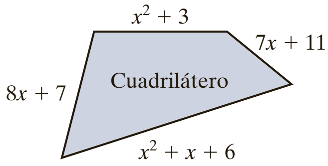
72.



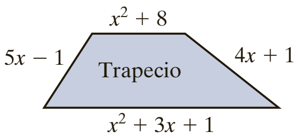
73.



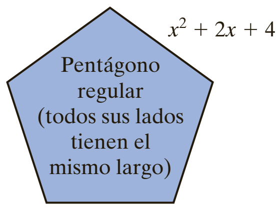
74.



75.



76.



En los ejercicios 77 - 86, si es necesario, redondea tus respuestas a centésimas.

77. Área El área de un cuadrado es una función de su lado, s, donde $A(s) = s^2$. Determina el área de un cuadrado si su lado mide 12 metros.

78. Volumen El volumen de un cubo es una función de su lado, s, donde $V(s) = s^3$. Determina el volumen de un cubo si su lado mide 7 centímetros.

79. Área El área de un círculo es una función de su radio, donde $A(r) = \pi r^2$. Determina el área de un círculo si su radio mide 6 pulgadas. Usa la tecla $\boxed{\pi}$ en tu calculadora.

80. Volumen El volumen de una esfera es una función de su radio, donde $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Determina el volumen de una esfera cuando su radio mide 4 pulgadas.

© Kirill R/Shutterstock

81. Altura Cuando se lanza un objeto desde el edificio Empire State (1250 pies de altura), la altura del objeto, h, en pies, desde el suelo al tiempo, t, en segundos, después de que se lanzó se puede determinar por

$$h = P(t) = -16t^2 + 1250$$

Determina la altura, desde el suelo, a la cual se encuentra un objeto 6 segundos después de que se lanzó.

82. Concurso de deletreo El número de formas en que los ganadores del primero, segundo y tercer lugares, en un concurso de deletreo, pueden ser seleccionados de n participantes está dado por $P(n) = n^3 - 3n^2 + 2n$. Si hay siete participantes, ¿de cuántas formas pueden ser seleccionados el primero, el segundo y tercer lugares?

83. Comités El número de comités diferentes de 2 estudiantes, donde los 2 estudiantes son seleccionados de una clase de n estudiantes, está dado por $c(n) = \frac{1}{2}(n^2 - n)$. Si una clase de biología tiene 15 estudiantes, ¿cuántos diferentes comités de 2 estudiantes pueden ser seleccionados?

84. Comités El número de diferentes comités de 3 estudiantes, donde los 3 estudiantes son seleccionados de una clase de n estudiantes, está dado por $c(n) = \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$. Si una clase de arte tiene 10 estudiantes, ¿cuántos diferentes comités de 3 estudiantes pueden ser seleccionados?

85. Cuenta de ahorros El 2 de enero de 2010, Jorge Sánchez depositó \$650 en una cuenta que paga un interés simple a una tasa de \$24 al año. El monto en la cuenta es una función del tiempo dado por $A(t) = 650 + 24t$, donde t es el número de años después de 2010. Determina el monto en la cuenta en **a)** 2011. **b)** 2025.

86. Financiamiento Frank Gunther acaba de comprar un Ford Edge nuevo. Después de realizar el pago inicial, el monto que se financiará es \$28,250. Usando un préstamo de 0% (o libre de interés), el pago mensual es \$387.50. El monto que sigue debiéndose del carro es una función del tiempo dado por $A(t) = \$28{,}250 - \$387.50t$, donde t es el número de meses después de que Frank comprara el automóvil. ¿Cuánto se debe todavía **a)** 2 meses, **b)** 15 meses después de que Frank comprara el automóvil?

© Wikipedia, The Free Encyclopedia

Ver ejercicio 86.

Utilidad *La utilidad de una compañía se determina restando el costo de su ingreso. En los ejercicios 87 a 88 R(x) representa el ingreso de la compañía cuando vende x productos y C(x) representa el costo de la compañía cuando produce x productos.* ***a)*** *Determina una función de utilidad P(x).* ***b)*** *Evalúa P(x) cuando x = 100.*

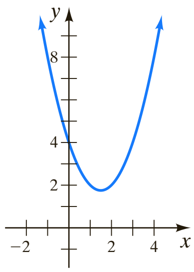
87. $R(x) = 2x^2 - 60x$,
$C(x) = 8050 - 420x$

88. $R(x) = 5.5x^2 - 80.3x$
$C(x) = 1.2x^2 + 16.3x + 12{,}040.6$

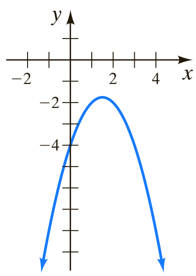
*En los ejercicios 89-92, determina cuál de las gráficas —***a), b),** *o* **c)***— corresponde a la ecuación dada. Explica cómo determinaste tu respuesta.*

89. $y = x^2 + 3x - 4$

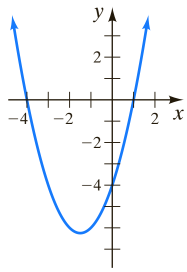
a)



b)

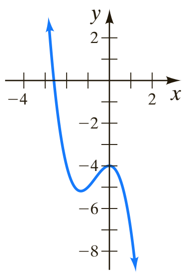


c)

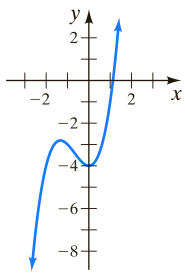


90. $y = x^3 + 2x^2 - 4$

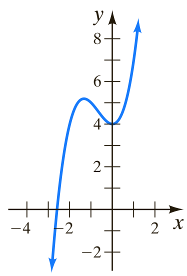
a)



b)

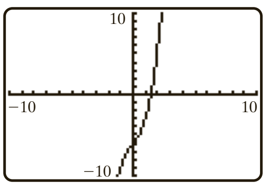


c)

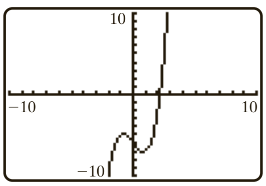


91. $y = -x^3 + 2x - 6$

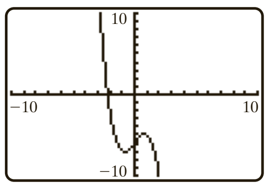
a)



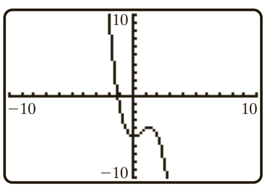
b)

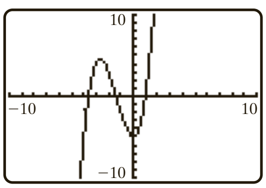


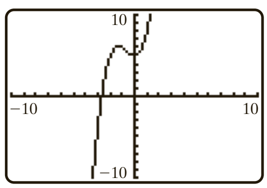
c)



92. $y = x^3 + 4x^2 - 5$







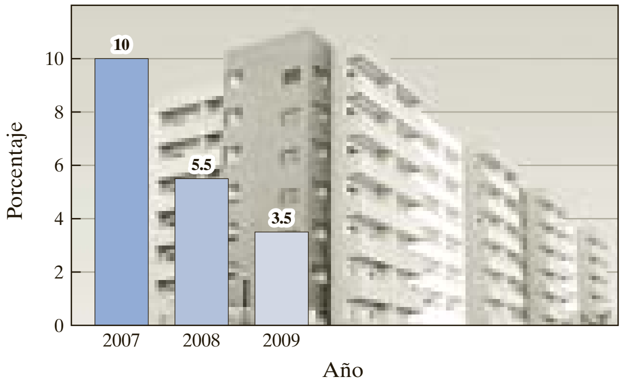
93. La gráfica muestra el porcentaje de incremento de los gastos de los condominios de la Asociación de Jardines Annandale para los años 2007 a 2009. El porcentaje de incremento, $P(t)$, puede aproximarse por la función

$$P(t) = 1.25t^2 - 5.75t + 10$$

donde t es el número de años desde 2007.

a) Utiliza esta función para estimar el porcentaje de incremento de los gastos de los condominios en 2009.
b) Compara tu respuesta del inciso **a)** con la gráfica. ¿La gráfica apoya tu respuesta?
c) Si esta tendencia continúa, estima el porcentaje de incremento de los gastos de los condominios en 2012.

Porcentaje de incremento de los gastos de los condominios



Fuente: Presupuesto de la Asociación de Jardines Annandale

94. Plano inclinado Una pelota rueda hacia abajo sobre un plano inclinado. La distancia, $d(t)$, en pies, que la pelota ha recorrido está dada por la función

$$d(t) = 2.36t^2$$

donde t es el tiempo en segundos $0 < t < 5$.

Determina la distancia que la pelota ha recorrido sobre el plano inclinado en

a) 1 segundo.
b) 3 segundos.
c) 5 segundos.

95. Inflación La función $C(t) = 0.31t^2 + 0.59t + 9.61$, donde t son los años desde 1997, aproxima el costo, en miles de dólares, para comprar lo que se podría adquirir con \$10,000 en 1997. Esta función se basa en 6% de tasa de inflación anual y $0 \le t \le 25$. Estima el costo en 2012 para bienes que costaban \$10,000 en 1997.

96. Población La población de una ciudad está determinada por la función $P(t) = 6t^2 + 7t + 6500$, donde t es el número de años desde 2001. Determina la población de la ciudad en 2011.

Responde los ejercicios 97 y 98 usando una calculadora graficadora, si tienes una. Si no tienes, dibuja las gráficas del inciso **a)** *trazando los puntos. Después responde los incisos* **b)** *a* **e)**.

97. a) Grafica

$$y_1 = x^3$$
$$y_2 = x^3 - 3x^2 - 3$$

b) En ambas gráficas, para los valores de $x > 3$, ¿las funciones aumentan o disminuyen mientras x aumenta?

c) Cuando el término principal de una función polinomial es x^3, el polinomio debe incrementar para $x > a$, donde a es cualquier número real mayor que 0. Explica por qué debe ser así.

d) En ambas gráficas, para valores de $x < -3$, ¿las funciones aumentan o disminuyen mientras x disminuye?

e) Cuando el término principal de una función polinomial es x^3, el polinomio debe disminuir para $x < a$, donde a es cualquier número real menor que 0. Explica por qué debe ser así.

98. a) Grafica

$$y_1 = x^4$$
$$y_2 = x^4 - 6x^2$$

b) En ambas gráficas, para valores de $x > 3$, ¿las funciones aumentan o disminuyen mientras x aumenta?

c) Cuando el término principal de una función polinomial es x^4, el polinomio debe incrementar para $x > a$, donde a es cualquier número real mayor que 0. Explica por qué debe ser así.

d) En ambas gráficas, para valores de $x < -3$, ¿las funciones aumentan o disminuyen mientras x aumenta?

e) Cuando el término principal de una función polinomial es x^4, el polinomio debe disminuir para $x < a$, donde a es cualquier número real menor que 0. Explica por qué debe ser así.

Ejercicios de conceptos y escritura

99. ¿Cuál es el grado de una constante diferente de cero?
100. ¿Cuál es el término principal de un polinomio?
101. ¿Cuál es el coeficiente principal de un polinomio?
102. a) ¿Cómo determinas el grado de un término?
b) ¿Cuál es el grado de $6x^4y^3z$?
103. a) ¿Cómo determinas el grado de un polinomio?
b) ¿Cuál es el grado de $-4x^4 + 6x^3y^4 + z^5$?
104. ¿Qué significa cuando un polinomio está en orden descendente de la variable x?
105. a) ¿Cuándo un polinomio es lineal?
b) Da un ejemplo de un polinomio lineal.
106. a) ¿Cuándo un polinomio es cuadrático?
b) Da un ejemplo de un polinomio cuadrático.
107. a) ¿Cuándo un polinomio es cúbico?
b) Da un ejemplo de un polinomio cúbico.
108. Cuando un polinomio se resta de otro, ¿qué pasa con los signos de todos los términos del polinomio restado?
109. Escribe un trinomio de quinto grado en x en orden descendente que no tenga términos de cuarto, tercer y segundo grados.

110. Escribe un polinomio de séptimo grado en y en orden descendente que no tenga términos de quinto, tercer y segundo grados.

111. ¿La suma de dos trinomios es siempre un trinomio? Explica y da un ejemplo que apoye tu respuesta.

112. ¿La suma de dos binomios es siempre un binomio? Explica y da un ejemplo que apoye tu respuesta.

113. ¿La suma de dos polinomios cuadráticos es siempre un polinomio cuadrático? Explica y da un ejemplo que apoye tu respuesta.

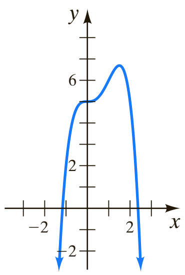
114. ¿La diferencia de dos polinomios cúbicos es siempre un polinomio cúbico? Explica y da un ejemplo que apoye tu respuesta.

Problemas de desafío

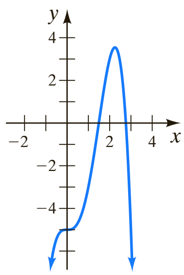
*Determina cuál de las gráficas —***a), b),** *o* **c)***— es la gráfica de la ecuación dada. Explica cómo determinaste tu respuesta.*

115. $y = -x^4 + 3x^3 - 5$

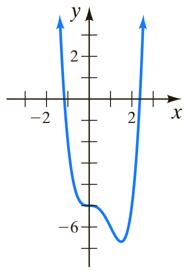
a)



b)

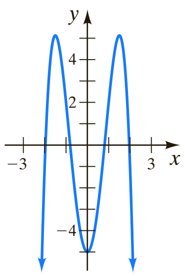


c)

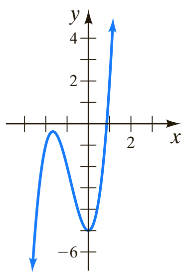


116. $y = 8x^2 + x - 5$

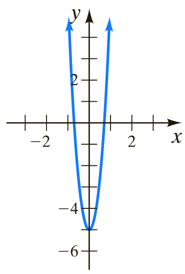
a)



b)



c)

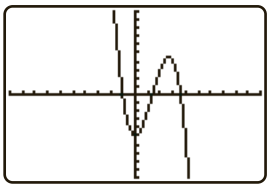


Actividad de grupo

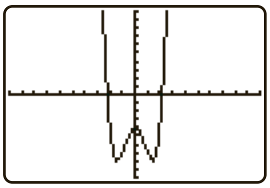
Comenten y respondan los ejercicios 117 y 118 con tu grupo.

117. Si el término principal de una función polinomial es $3x^3$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría representar el polinomio? Explica. Considera lo que pasa con valores positivos grandes de x y con valores negativos grandes de x.

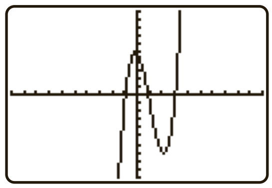
a)



b)

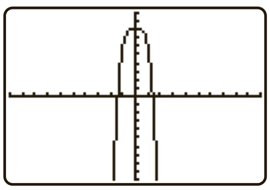


c)

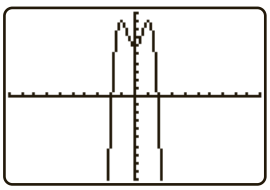


118. Si el término principal de un polinomio es $-2x^4$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría representar el polinomio? Explica.

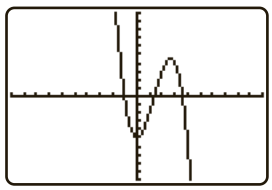
a)



b)



c)



Ejercicios de repaso acumulados

[1.4] **119.** Evalúa $\sqrt[4]{81}$.

[2.1] **120.** Resuelve $1 = \frac{8}{5}x - \frac{1}{2}$.

[2.4] **121.** **Máquinas de moldeado** Una máquina de moldeado antigua puede producir 40 cubetas de plástico en 1 hora. Una máquina de moldeado nueva puede producir 50 cubetas en 1 hora. ¿Cuánto tiempo le tomará a las dos máquinas producir un total de 540 cubetas?

[3.4] **122.** Determina la pendiente de una recta que cruza los puntos $(10,-4)$ y $(-1,-2)$.

[4.2] **123.** Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} -4s + 3t &= 16 \\ 4t - 2u &= 2 \\ -s + 6u &= -2 \end{aligned}$$

5.2 Multiplicación de polinomios

1 Multiplicar un monomio por un polinomio

Para multiplicar polinomios, debes recordar que *cada término de un polinomio debe multiplicarse por cada término del otro polinomio*. Esto resulta en monomios multiplicando monomios. Para multiplicar monomios, usamos la regla del producto para exponentes.

Regla del producto para exponentes

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

En el ejemplo 1, usamos la palabra *factores*. Recuerda que las expresiones que se *multiplican* se denominan *factores*.

Multiplicar un monomio por un monomio

EJEMPLO 1 Multiplica.

a) $(4x^2)(5x^3)$ **b)** $(3x^2y)(4x^5y^3)$ **c)** $(-2a^4b^7)(-3a^8b^3c^5)$

Solución Utilizamos la regla del producto para exponentes para multiplicar los factores.

a) $(4x^2)(5x^3) = 4 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot x^3$ Elimina paréntesis y reacomoda términos.

$= 20x^{2+3}$ Regla del producto, $x^2 \cdot x^3 = x^{2+3}$

$= 20x^5$

b) $(3x^2y)(4x^5y^3) = 3 \cdot 4 \cdot x^2 \cdot x^5 \cdot y \cdot y^3$ Elimina paréntesis y reacomoda términos.

$= 12x^{2+5}y^{1+3}$ Regla del producto

$= 12x^7y^4$

c) $(-2a^4b^7)(-3a^8b^3c^5) = (-2)(-3)a^4 \cdot a^8 \cdot b^7 \cdot b^3 \cdot c^5$ Elimina paréntesis y reacomoda términos.

$= 6a^{4+8}b^{7+3}c^5$ Regla del producto

$= 6a^{12}b^{10}c^5$

Resuelve ahora el ejercicio 9

En el ejemplo 1, inciso **a)**, $4x^2$ y $5x^3$ son *factores* del producto $20x^5$. En el inciso **b)**, $3x^2y$ y $4x^5y^3$ son *factores* del producto $12x^7y^4$. Y en el inciso **c)**, $-2a^4b^7$ y $-3a^8b^3c^5$ son *factores* del producto $6a^{12}b^{10}c^5$.

Multiplicar un monomio por un polinomio Al multiplicar un monomio por un binomio, podemos utilizar la propiedad distributiva. Al multiplicar un monomio por un polinomio que contiene más de dos términos, podemos usar la **forma desarrollada de la propiedad distributiva**.

Propiedad distributiva, forma desarrollada

$$a(b + c + d + \dots + n) = ab + ac + ad + \dots + an$$

En el inciso **a)** del ejemplo 2 multiplicamos un monomio por un binomio, y en los incisos **b)** y **c)** multiplicamos un monomio por un trinomio.

EJEMPLO 2 Multiplica.

a) $3x^2\left(\frac{1}{6}x^3 - 5x^2\right)$ **b)** $2xy(3x^2y + 6xy^2 + 9)$ **c)** $0.4x(0.3x^3 + 0.7xy^2 - 0.2y^4)$

Comprendiendo el álgebra

Cuando multiplicas expresiones con la misma base, *se suman los exponentes*.

Solución

a) $3x^2\left(\frac{1}{6}x^3 - 5x^2\right) = 3x^2\left(\frac{1}{6}x^3\right) - 3x^2(5x^2) = \frac{1}{2}x^5 - 15x^4$

b) $2xy(3x^2y + 6xy^2 + 9) = (2xy)(3x^2y) + (2xy)(6xy^2) + (2xy)(9)$
$= 6x^3y^2 + 12x^2y^3 + 18xy$

c) $0.4x(0.3x^3 + 0.7xy^2 - 0.2y^4)$
$= (0.4x)(0.3x^3) + (0.4x)(0.7xy^2) - (0.4x)(0.2y^4)$
$= 0.12x^4 + 0.28x^2y^2 - 0.08xy^4$

Resuelve ahora el ejercicio 13

2 Multiplicar un binomio por un binomio

En la multiplicación $(a + b)(c + d)$, trata $(a + b)$ como un solo término y utiliza la propiedad distributiva para obtener

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d) &= (a+b)c + (a+b)d \\ &= ac + bc + ad + bd\end{aligned}$$

Al multiplicar un binomio por un binomio, cada término del primer binomio debe multiplicarse por cada término del segundo binomio, para después sumar todos los términos semejantes.

Los binomios pueden multiplicarse tanto vertical como horizontalmente.

EJEMPLO 3 Multiplica $(3x + 2)(x - 5)$.

Solución Multiplicaremos de manera vertical. Lista los binomios en orden descendente de acuerdo con sus variables, uno debajo del otro. No importa cuál de ellos se coloque arriba. Después multiplica cada término del binomio de arriba por cada término del binomio de abajo, como se muestra. Recuerda alinear los términos semejantes para poder sumarlos.

$$\begin{array}{rcrrrl}
 & & & 3x & +\ 2 & \\
 & & & x & -\ 5 & \\ \hline
-5(3x+2) & \longrightarrow & & -\ 15x & -\ 10 & \text{Multiplica el binomio de arriba por } -5. \\
x\,(3x+2) & \longrightarrow & 3x^2 & +\ 2x & & \text{Multiplica el bonimio de arriba por } x. \\ \hline
 & & 3x^2 & -\ 13x & -\ 10 & \text{Suma términos semejantes en columnas.}
\end{array}$$

En el ejemplo 3, los binomios $3x + 2$ y $x - 5$ son *factores* del trinomio $3x^2 - 13x - 10$.

Resuelve ahora el ejercicio 21

Comprendiendo el álgebra

El acrónimo *PIES* te ayuda a recordar como multiplicar *dos binomios*. En este proceso hay *cuatro* productos:

- P rimeros
- I nternos
- E xternos
- S egundos

El método PIES La forma conveniente para multiplicar dos binomios se conoce como el **método PIES.** Para multiplicar dos binomios mediante este método, escribe los binomios uno a continuación del otro. La palabra **PIES** indica que multiplicas los **P**rimeros términos, los términos **I**nternos, los términos **E**xternos y los **S**egundos términos de los dos binomios. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 4, donde multiplicamos los mismos dos binomios del ejemplo 3.

EJEMPLO 4 Multiplica $(3x + 2)(x - 5)$ usando el método PIES.

Solución

S
P
$(3x + 2)\,(x - 5)$
E
I

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \text{P} & & \text{I} & & \text{E} & & \text{S} & \\
 & (3x)(x) & + & (3x)(-5) & + & (2)(x) & + & (2)(-5) & \\
= & 3x^2 & - & 15x & + & 2x & - & 10 & = 3x^2 - 13x - 10
\end{array}$$

Resuelve ahora el ejercicio 25

Consejo útil

Realizamos las multiplicaciones siguiendo el orden PIES. Sin embargo, es posible hacerlo siguiendo cualquier orden, siempre que cada término de un binomio se multiplique por cada término del otro binomio.

3 Multiplicar un polinomio por un polinomio

Cuando multiplicamos un trinomio por un binomio o un trinomio por un trinomio, cada término del primer polinomio debe multiplicarse por cada término del segundo polinomio.

EJEMPLO 5 Multiplica $x^2 + 1 - 4x$ por $2x^2 - 3$.

Solución Ya que el trinomio no está en orden descendente, reescríbelo como $x^2 - 4x + 1$. Antes de multiplicar, coloca el polinomio más largo arriba. Al hacer la multiplicación asegúrate de alinear los términos semejantes, de modo que puedas sumarlos con más facilidad.

$$\begin{array}{lrrrrrl}
 & & & x^2 & -\ 4x & +\ 1 & \text{Trinomio escrito en orden descendente.} \\
 & & & & 2x^2 & -\ 3 & \\ \hline
-3(x^2 - 4x + 1) \longrightarrow & & & -3x^2 & +\ 12x & -\ 3 & \text{Multiplica la expresión superior por } -3. \\
2x^2(x^2 - 4x + 1) \longrightarrow & 2x^4 & -\ 8x^3 & +\ 2x^2 & & & \text{Multiplica la expresión superior por } 2x^2. \\ \hline
 & 2x^4 & -\ 8x^3 & -\ \ x^2 & +\ 12x & -\ 3 & \text{Suma los términos semejantes en columnas.}
\end{array}$$

Resuelve ahora el ejercicio 35

EJEMPLO 6 Multiplica $3x^2 + 6xy - 5y^2$ por $x + 4y$.

Solución

$$\begin{array}{lrrrrl}
 & & 3x^2 & +\ 6xy & -\ 5y^2 & \\
 & & & x & +\ 4y & \\ \hline
4y(3x^2 + 6xy - 5y^2) \longrightarrow & & 12x^2y & +\ 24xy^2 & -\ 20y^3 & \text{Multiplica la expresión superior por } 4y. \\
x(3x^2 + 6xy - 5y^2) \longrightarrow & 3x^3 & +\ 6x^2y & -\ 5xy^2 & & \text{Multiplica la expresión superior por } x. \\ \hline
 & 3x^3 & +\ 18x^2y & +\ 19xy^2 & -\ 20y^3 & \text{Suma los términos semejantes en columnas.}
\end{array}$$

Resuelve ahora el ejercicio 31

Ahora estudiaremos algunas fórmulas especiales.

4 Determinar el cuadrado de un binomio

Con frecuencia necesitamos calcular el *cuadrado de un binomio*, así que contamos con fórmulas especiales para hacerlo.

Cuadrado de un binomio

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Si olvidas las fórmulas, puedes deducirlas fácilmente multiplicando $(a + b)(a + b)$ y $(a - b)(a - b)$.

Los ejemplos 7 y 8 ilustran el uso de la fórmula para el cuadrado de un binomio.

EJEMPLO 7 Desarrolla.

a) $(3x + 7)^2$ **b)** $(4x^2 - 5y)^2$

Solución

a) $(3x + 7)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(7) + (7)^2$

$= 9x^2 + 42x + 49$

b) $(4x^2 - 5y)^2 = (4x^2)^2 - 2(4x^2)(5y) + (5y)^2$
$= 16x^4 - 40x^2y + 25y^2$

Resuelve ahora el ejercicio 45

Consejo útil

El cuadrado de los binomios, como en el ejemplo 7, también se puede calcular mediante el método PIES.

Prevención de errores comunes

Recuerda el término de en medio al calcular el cuadrado de un binomio.

CORRECTO	INCORRECTO
$(x + 2)^2 = (x + 2)(x + 2)$ $= x^2 + 4x + 4$	$\cancel{(x + 2)^2 = x^2 + 4}$
$(x - 3)^2 = (x - 3)(x - 3)$ $= x^2 - 6x + 9$	$\cancel{(x - 3)^2 = x^2 + 9}$

EJEMPLO 8 Desarrolla $[x + (y - 1)]^2$.

Solución Este ejemplo se resuelve de la misma forma que cualquier otro cuadrado de un binomio. Trata x como el primer término y $(y - 1)$ como el segundo término.

$$\begin{aligned}[x + (y - 1)]^2 &= (x)^2 + 2(x)(y - 1) + (y - 1)^2 \\ &= x^2 + (2x)(y - 1) + y^2 - 2y + 1 \\ &= x^2 + 2xy - 2x + y^2 - 2y + 1\end{aligned}$$

Ninguno de los seis términos son términos semejantes, por lo que no se pueden reducir. Observa que $(y - 1)^2$ también es el cuadrado de un binomio y fue desarrollado como tal.

Resuelve ahora el ejercicio 51

5 Determinar el producto de la suma y resta de los mismos dos términos

A continuación multiplicaremos $(x + 6)(x - 6)$ usando el método PIES.

$$(x + 6)(x - 6) = x^2 - 6x + 6x - (6)(6) = x^2 - 6^2$$

Observa que los productos externos e internos suman 0. Al examinar este ejemplo, vemos que el producto de la suma y la resta de los mismos dos términos es la resta de los cuadrados de los dos términos.

Producto de la suma y resta de los mismos dos términos

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

En otras palabras, para multiplicar dos binomios que solo difieren en el signo entre sus dos términos, resta el cuadrado del primer término del cuadrado del segundo. Observa que $a^2 - b^2$ representa una **resta de dos cuadrados.**

EJEMPLO 9 Multiplica.

a) $\left(3x + \frac{4}{5}\right)\left(3x - \frac{4}{5}\right)$ **b)** $(0.2x + 0.3z^2)(0.2x - 0.3z^2)$

Solución Cada uno es un producto de la suma y resta de los mismos dos términos, es decir, son binomios conjugados. Por lo tanto,

a) $\left(3x + \frac{4}{5}\right)\left(3x - \frac{4}{5}\right) = (3x)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 9x^2 - \frac{16}{25}$

b) $(0.2x + 0.3z^2)(0.2x - 0.3z^2) = (0.2x)^2 - (0.3z^2)^2$
$= 0.04x^2 - 0.09z^4$

Resuelve ahora el ejercicio 27

EJEMPLO 10 Multiplica $(5x + y^4)(5x - y^4)$.

Solución $(5x + y^4)(5x - y^4) = (5x)^2 - (y^4)^2 = 25x^2 - y^8$

Resuelve ahora el ejercicio 49

EJEMPLO 11 Multiplica $[4x + (3y + 2)][4x - (3y + 2)]$.

Solución Consideramos $4x$ como el primer término y $3y + 2$ como el segundo término. Entonces tenemos la suma y resta de los mismos dos términos.

$$\begin{aligned}[4x + (3y + 2)][4x - (3y + 2)] &= (4x)^2 - (3y + 2)^2 \\ &= 16x^2 - (9y^2 + 12y + 4) \\ &= 16x^2 - 9y^2 - 12y - 4\end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 55

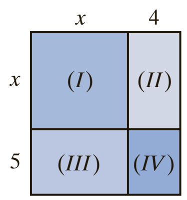


FIGURA 5.11

EJEMPLO 12 **Área** La **Figura 5.11** consta de un cuadrado y tres rectángulos. Determina la expresión polinomial para el área total de la figura.

Solución Para determinar el área total, determinamos las áreas de las cuatro regiones y luego las sumamos.

$$\begin{aligned}\text{Área del cuadrado } (I) &= x \cdot x = x^2 \\ \text{Área del rectángulo } (II) &= x \cdot 4 = 4x \\ \text{Área del rectángulo } (III) &= x \cdot 5 = 5x \\ \text{Área del rectángulo } (IV) &= 4 \cdot 5 = 20\end{aligned}$$

El área total es la suma de estas cuatro cantidades.

Área total $= x^2 + 4x + 5x + 20 = x^2 + 9x + 20$.

Resuelve ahora el ejercicio 85

Observa que la **Figura 5.11** muestra una representación geométrica de $(x + 4)(x + 5) = x^2 + 9x + 20$.

6 Determinar el producto de funciones polinomiales

Anteriormente aprendimos que para las funciones $f(x)$ y $g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Ahora resolveremos un ejemplo que incluye multiplicación de funciones polinomiales.

EJEMPLO 13 Sea $f(x) = x + 4$ y $g(x) = x - 2$. Determina

a) $f(3) \cdot g(3)$ **b)** $(f \cdot g)(x)$ **c)** $(f \cdot g)(3)$

Solución

a) $f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinomiales, ya que las expresiones a la derecha de los signos de igual son polinomios.

$$f(x) = x + 4 \qquad g(x) = x - 2$$
$$f(3) = 3 + 4 = \mathbf{7} \qquad g(3) = 3 - 2 = \mathbf{1}$$
$$f(3) \cdot g(3) = \mathbf{7} \cdot \mathbf{1} = 7$$

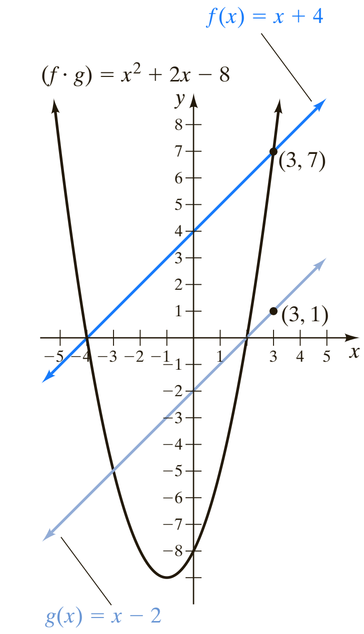


FIGURA 5.12

b) Sabemos que

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x)\\ &= (x + 4)(x - 2)\\ &= x^2 - 2x + 4x - 8\\ &= x^2 + 2x - 8\end{aligned}$$

c) Para evaluar $(f \cdot g)(3)$, sustituimos 3 en cada x en $(f \cdot g)(x)$.

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= x^2 + 2x - 8\\ (f \cdot g)(3) &= 3^2 + 2(3) - 8\\ &= 9 + 6 - 8 = 7\end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 79

En el ejemplo 13, encontramos que si $f(x) = x + 4$ y $g(x) = x - 2$, entonces $(f \cdot g)(x) = x^2 + 2x - 8$. Las gráficas de $y = f(x) = x + 4$, $y = g(x) = x - 2$, y $y = (f \cdot g)(x) = x^2 + 2x - 8$ se muestran en la **Figura 5.12**.

Podemos observar en las gráficas que $f(3) = 7$, $g(3) = 1$, y $(f \cdot g)(3) = 7$, que es lo que esperábamos del ejemplo 13. Observa en la **Figura 5.12** que el producto de dos funciones lineales $f(x) = x + 4$ y $g(x) = x - 2$ es la función cuadrática $(f \cdot g)(x) = x^2 + 2x - 8$.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.2

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

dentro	diferencia	asociativa	producto	distributiva	tercero	externos
final	cuadrado	suma	factores	segundo	conmutativa	primeros

1. Para multiplicar dos polinomios, cada término del primer polinomio debe multiplicarse por cada término del ________ polinomio.

2. La regla $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ se conoce como regla del ________ para exponentes.

3. Las expresiones que se multiplican son llamadas ________.

4. La regla $a(b + c + d + \dots + n) = ab + ac + ad + \dots + an$ se conoce como la forma desarrollada de la propiedad ________.

5. En el método PIES, P significa ________.

6. En el método PIES, E significa ________.

7. La regla $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ se conoce como el ________ de un binomio.

8. La expresión $a^2 - b^2$ representa la ________ de dos cuadrados.

Practica tus habilidades

Multiplica.

9. $(7xy)(6xy^4)$

10. $(-5xy^4)(9x^4y^6)$

11. $\left(\frac{5}{9}x^2y^5\right)\left(\frac{1}{5}x^5y^3z^2\right)$

12. $2y^3(3y^2 + 2y - 10)$

13. $-3x^2y(-2x^4y^2 + 5xy^3 + 6)$

14. $3x^4(2xy^2 + 5x^7 - 9y)$

15. $\frac{2}{3}yz(3x + 4y - 12y^2)$

16. $\frac{1}{2}x^2y(4x^5y^2 + 3x - 7y^2)$

17. $0.3(2x^2 - 5x + 11y)$

18. $0.8(0.2a + 0.9b - 1.3c)$

19. $0.3a^5b^4(9.5a^6b - 4.6a^4b^3 + 1.2ab^5)$

20. $4.6m^2n(1.3m^4n^2 - 2.6m^3n^3 + 5.9n^4)$

Multiplica los siguientes binomios.

21. $(4x - 6)(3x - 5)$

22. $(2x - 1)(7x + 5)$

23. $(4 - x)(3 + 2x^2)$

24. $(5x + y)(6x - y)$

25. $\left(\frac{1}{2}x + 2y\right)\left(2x - \frac{1}{3}y\right)$

26. $\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b\right)\left(\frac{1}{2}a - b\right)$

27. $(0.3a + 0.5b)(0.3a - 0.5b)$

28. $(4.6r - 5.8s)(0.2r - 2.3s)$

Multiplica los siguientes polinomios.

29. $(x^2 + 3x + 1)(x - 4)$

30. $(x + 3)(2x^2 - x - 8)$

31. $(a - 3b)(2a^2 - ab + 2b^2)$

32. $(7p - 3)(-2p^2 - 4p + 1)$

33. $(x^3 - x^2 + 3x + 7)(x + 1)$

34. $(2x - 1)(x^3 + 3x^2 - 5x + 6)$

35. $(5x^3 + 4x^2 - 6x + 2)(x + 5)$

36. $(a^3 - 2a^2 + 5a - 6)(2a^2 - 5a - 4)$

37. $(3m^2 - 2m + 4)(m^2 - 3m - 5)$

38. $(2a^2 - 6^a + 3)(3a^2 - 5a - 2)$

39. $(2x - 1)^3$

40. $(3x + y)^3$

41. $(5r^2 - rs + 2s^2)(2r^2 - s^2)$

42. $(4x^2 - 5xy + y^2)(x^2 - 2y^2)$

Multiplica usando la fórmula para el cuadrado de un binomio o para el producto de la suma y resta de los mismos dos términos.

43. $(x + 2)(x + 2)$

44. $(y - 6)(y - 6)$

45. $(2x - 9)(2x - 9)$

46. $(3z + 4)(3z + 4)$

47. $(4x - 3y)^2$

48. $(2a + 5b)^2$

49. $(5m^2 + 2n)(5m^2 - 2n)$

50. $(5p^2 + 6q^2)(5p^2 - 6q^2)$

51. $[y + (4 - 2x)]^2$

52. $[(a + b) + 6]^2$

53. $[5x + (2y + 1)]^2$

54. $[4 - (p - 3q)]^2$

55. $[a + (b + 4)][a - (b + 4)]$

56. $[2x + (y + 5)][2x - (y + 5)]$

Multiplica.

57. $2xy(x^2 + xy + 12y^2)$

58. $4a^2b^2\left(\frac{1}{4}ab - \frac{1}{9}b^6\right)$

59. $\frac{1}{2}xy^2(4x^2 + 3xy - 7y^4)$

60. $-\frac{3}{5}x^2y\left(-\frac{2}{3}xy^4 + \frac{1}{9}xy^2 + 8\right)$

61. $-\frac{3}{5}xy^3z^2\left(-xy^2z^5 - 5xy + \frac{1}{9}xz^7\right)$

62. $\frac{2}{3}x^2y^4\left(\frac{3}{5}xy^3 - \frac{1}{8}x^4y + 4xy^3z^5\right)$

63. $(3a + 4)(7a - 6)$

64. $(5p - 9q)(4p - 11q)$

65. $\left(8x + \frac{1}{5}\right)\left(8x - \frac{1}{5}\right)$

66. $\left(6a - \frac{1}{7}\right)\left(6a + \frac{1}{7}\right)$

67. $\left(x - \frac{1}{2}y\right)^3$

68. $\left(\frac{1}{2}m - n\right)^3$

69. $(x + 3)(2x^2 + 4x - 3)$

70. $(5a + 4)(a^2 - a + 2)$

71. $(2p - 3q)(3p^2 + 4pq - 2q^2)$

72. $(2m + n)(3m^2 - mn + 2n^2)$

73. $[(3x + 2) + y][(3x + 2) - y]$

74. $[a + (3b + 5)][a - (3b + 5)]$

75. $(a + b)(a - b)(a^2 - b^2)$

76. $(2a + 3)(2a - 3)(4a^2 + 9)$

77. $(x - 4)(6 + x)(2x - 8)$

78. $(3x - 5)(5 - 2x)(3x + 8)$

Para las funciones dadas, determina ***a)*** $(f \cdot g)(x)$ *y* ***b)*** $(f \cdot g)(4)$.

79. $f(x) = x - 5,\ g(x) = x + 6$

80. $f(x) = 2x - 3,\ g(x) = x - 1$

81. $f(x) = 2x^2 + 6x - 4,\ g(x) = 5x - 3$

82. $f(x) = 4x^2 + 7,\ g(x) = 2 - x$

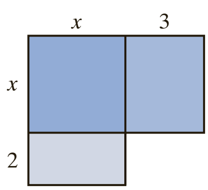
83. $f(x) = -x^2 + 3x,\ g(x) = x^2 + 2$

84. $f(x) = -x^2 + 2x + 7,\ g(x) = x^2 - 1$

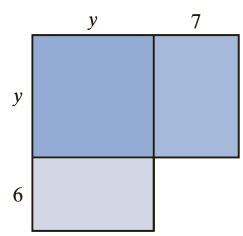
Resolución de problemas

Área *En los ejercicios 85-88, determina una expresión polinomial para el área total de cada figura.*

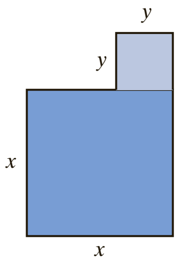
85.



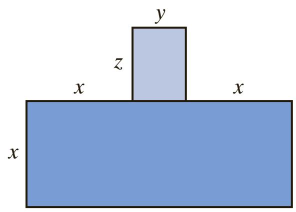
86.



87.

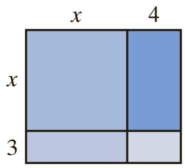


88.

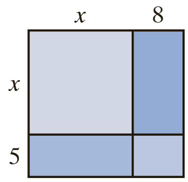


Área *En los ejercicios 89 y 90,* ***a)*** *determina el área del rectángulo calculando el área de las cuatro secciones y sumándolas, después* ***b)*** *multiplica los dos lados y compara el producto con tu respuesta del inciso* ***a)****.*

89.

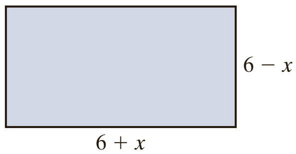


90.

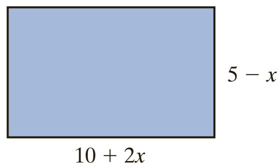


Área *Escribe una expresión polinomial para el área de cada figura. Todos los ángulos en las figuras son ángulos rectos.*

91.

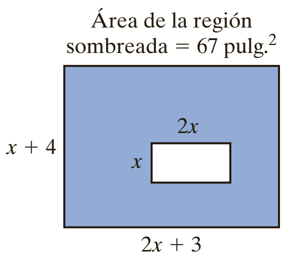


92.

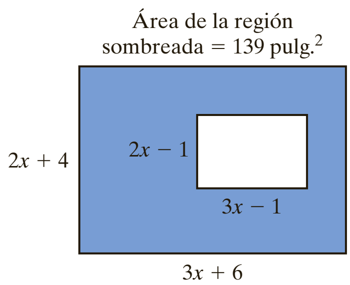


Área *En los ejercicios 93 y 94,* ***a)*** *escribe una expresión polinomial para el área de la parte sombreada de la figura.* ***b)*** *El área de la parte sombreada se indica arriba de cada figura. Determina el área de los rectángulos grandes y pequeños.*

93.



94.



95. Escribe dos binomios cuyo producto sea $x^2 - 49$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

96. Escribe dos binomios cuyo producto sea $4x^2 - 9$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

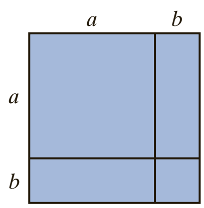
97. Escribe dos binomios cuyo producto sea $x^2 + 12x + 36$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

98. Escribe dos binomios cuyo producto sea $16y^2 - 8y + 1$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

99. Considera la expresión $a(x - n)^3$. Escribe esta expresión cómo un producto de factores.

100. Considera la expresión $P(1 - r)^4$. Escribe esta expresión cómo un producto de factores.

101. **Área** La expresión $(a + b)^2$ se puede representar por la siguiente figura.



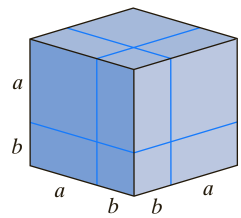
a) Explica por qué esta figura representa $(a + b)^2$.

b) Determina $(a + b)^2$ por medio del cálculo del área de cada una de las cuatro partes de la figura, después suma las cuatro áreas.

c) Simplifica $(a + b)^2$ multiplicando $(a + b)(a + b)$.

d) ¿Cómo se pueden comparar las respuestas de los incisos **b)** y **c)**? Si no son la misma respuesta, explica por qué.

102. **Volumen** La expresión $(a + b)^3$ se puede representar por la siguiente figura.



a) Explica por qué esta figura representa $(a + b)^3$.

b) Determina $(a + b)^3$ sumando el volumen de las ocho partes de la figura.

c) Simplifica $(a + b)^3$ multiplicando.

d) ¿Cómo se pueden comparar las respuestas de los incisos **b)** y **c)**? Si no son la misma respuesta, explica por qué.

103. Interés compuesto La fórmula del interés compuesto es

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

donde A es el monto, P es el principal (capital) invertido, r es la tasa de interés anual, n es el número de veces que el interés se capitaliza anualmente y t es el tiempo en años.

a) Simplifica esta fórmula para $n = 1$.

b) Determina el valor de A si $P = \$1000$, $n = 1$, $r = 6\%$ y $t = 2$ años.

104. Interés compuesto Utiliza la fórmula dada en el ejercicio 103 para determinar A si $P = \$4000$, $n = 2$, $r = 8\%$ y $t = 2$ años.

105. Premios El número de formas en que una maestra puede otorgar diferentes premios a 2 estudiantes en una clase con n estudiantes está dado por la fórmula $P(n) = n(n - 1)$.

a) Utiliza esta fórmula para determinar el número de formas en que una maestra puede otorgar diferentes premios a 2 estudiantes en una clase con 11 estudiantes.

b) Reescribe la fórmula multiplicando los factores.

c) Utiliza el resultado del inciso **b)** para determinar el número de formas en que una maestra puede otorgar diferentes premios a 2 estudiantes en una clase con 11 estudiantes.

d) ¿Son los resultados del inciso **a)** y **c)** iguales? Explica.

106. Carrera de caballos El número de formas en que los caballos pueden terminar en primero, segundo y tercer lugares en una carrera con n caballos está dado por la fórmula

$$P(n) = n(n - 1)(n - 2)$$

a) Utiliza esta fórmula para determinar el número de formas en que los caballos pueden terminar en primero, segundo y tercer lugares en una carrera con 7 caballos.

b) Reescribe la fórmula multiplicando los factores.

c) Utiliza el resultado del inciso **b)** para determinar el número de formas en que los caballos pueden terminar en primero, segundo y tercer lugares en una carrera con 7 caballos.

d) ¿Son los resultados del inciso **a)** y **c)** iguales? Explica.

© Cindy Haggerty\Shutterstock

107. Si $f(x) = x^2 - 3x + 5$, determina $f(a + b)$ sustituyendo $(a + b)$ por cada x en la función.

108. Si $f(x) = 2x^2 - x + 3$, determina $f(a + b)$.

En los ejercicios 109-114, simplifica. Considera que todas las variables representan números naturales.

109. $3x^t(5x^{2t-1} + 6x^{3t})$

110. $5k^{r+2}(4k^{r+2} - 3k^r - k)$

111. $(6x^m - 5)(2x^{2m} - 3)$

112. $(x^{3n} - y^{2n})(x^{2n} + 2y^{4n})$

113. $(y^{a-b})^{a+b}$

114. $(a^{m+n})^{m+n}$

En los ejercicios 115 y 116, desarrolla la multiplicación polinomial.

115. $(x - 3y)^4$

116. $(2a - 4b)^4$

117. a) Explica cómo una multiplicación con una variable, como $(x^2 + 2x + 3)(x + 2) = x^3 + 4x^2 + 7x + 6$, puede verificarse usando una calculadora graficadora.

b) Verifica la multiplicación dada en el inciso **a)** usando tu calculadora graficadora.

118. a) Muestra que la multiplicación $(x^2 - 4x - 5)(x - 1) \neq x^3 + 6x^2 - 5x + 5$ usando tu calculadora graficadora.

b) Multiplica $(x^2 - 4x - 5)(x - 1)$.

c) Verifica la respuesta del inciso **b)** en tu calculadora graficadora.

Ejercicios de conceptos y escritura

119. a) Explica cómo multiplicar dos binomios usando el método PIES.

b) Inventa dos binomios y multiplícalos usando el método PIES.

c) Multiplica los mismos dos binomios usando el método SEIP (segundos, externos, internos, primeros).

d) Compara los resultados de los incisos **b)** y **c)**. Si no son iguales, explica por qué.

120. a) Explica cómo multiplicar un monomio por un polinomio.

b) Multiplica $3x(4x^2 - 6x - 7)$ usando el procedimiento que utilizaste en el inciso **a)**.

121. a) Explica cómo multiplicar un polinomio por un polinomio.

b) Multiplica $4 + x$ por $x^2 - 6x + 3$ usando el procedimiento que utilizaste en el inciso **a)**.

122. a) Explica cómo desarrollar $(2x - 3)^2$ usando la fórmula para el cuadrado de un binomio.

b) Desarrolla $(2x - 3)^2$ usando el procedimiento que utilizaste en el inciso **a)**.

123. a) ¿Qué significa el producto de la suma y resta de los mismos dos términos?

b) Da un ejemplo de un problema que sea el producto de la suma y resta de los mismos dos términos.

c) ¿Cómo multiplicas el producto de la suma y resta de los mismos dos términos?

d) Multiplica el ejemplo que diste en el inciso **b)** usando el procedimiento del inciso **c)**.

124. ¿El producto de dos binomios siempre será un

a) binomio?

b) trinomio? Explica.

125. ¿El producto de dos polinomios de primer grado siempre será un polinomio de segundo grado?

126. a) Dados $f(x)$ y $g(x)$, explica cómo encontrarías $(f \cdot g)(x)$.
b) Si $f(x) = x - 8$ y $g(x) = x + 8$, determina $(f \cdot g)(x)$.

Problemas de desafío

Multiplica.

127. $[(y + 1) - (x + 2)]^2$

128. $[(a - 2) - (a + 3))]^2$

Ejercicios de repaso acumulados

[1.3] **129.** Evalúa $\frac{4}{5} - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)$.

[1.5] **130.** Simplifica $\left(\frac{2r^4s^5}{r^2}\right)^3$.

[2.5] **131.** Resuelve la desigualdad $-12 < 3x - 5 \leq -1$ y da la solución en notación de intervalo.

[3.2] **132.** Si $g(x) = -x^2 + 2x + 3$, determina $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

5.3 División de polinomios y división sintética

1. Dividir un polinomio entre un monomio.
2. Dividir un polinomio entre un binomio.
3. Dividir polinomios mediante la división sintética.
4. Utilizar el teorema del residuo.

1 Dividir un polinomio entre un monomio

Para dividir un polinomio entre un monomio, partimos del hecho de que

$$\frac{A + B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}$$

Si el polinomio tiene más de dos términos, ampliamos este procedimiento.

Debido a que la división entre cero es indefinida, cuando se da un problema de división que contiene una variable en el denominador *siempre consideraremos que el denominador es diferente de cero.*

Para dividir un polinomio entre un monomio

Divide cada término del polinomio entre el monomio.

Para dividir un polinomio entre un monomio, necesitaremos utilizar la regla del cociente para exponentes y la regla del exponente cero.

Regla del cociente para exponentes: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$

Regla del exponente cero: $a^0 = 1, \quad a \neq 0$

EJEMPLO 1 Divide.

a) $\frac{x^{10}}{x^4}$ **b)** $\frac{5x^3y^5}{4xy^2}$

Solución Usaremos la regla del cociente para dividir.

a) $\frac{x^{10}}{x^4} = x^{10-4}$ Regla del cociente

$= x^6$

b) $\frac{5x^3y^5}{4xy^2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{x^3}{x} \cdot \frac{y^5}{y^2}$

$= \frac{5}{4}x^{3-1}y^{5-2}$ Regla del cociente

$= \frac{5x^2y^3}{4}$

Resuelve ahora el ejercicio 11

EJEMPLO 2 Divide.

a) $\dfrac{p^4}{p^4}$ **b)** $\dfrac{8r^6s^7}{3rs^7}$

Solución Usa la regla del cociente y la regla del exponente cero para dividir.

a) $\dfrac{p^4}{p^4} = p^{4-4}$ Regla del cociente

$= p^0$

$= 1$ Regla del exponente cero

b) $\dfrac{8r^6s^7}{3rs^7} = \dfrac{8}{3} \cdot \dfrac{r^6}{r} \cdot \dfrac{s^7}{s^7}$

$= \dfrac{8}{3}r^{6-1}s^{7-7}$ Regla del cociente

$= \dfrac{8}{3}r^5s^0$

$= \dfrac{8}{3}r^5(1)$ Regla del exponente cero

$= \dfrac{8}{3}r^5$ o $\dfrac{8r^5}{3}$

Resuelve ahora el ejercicio 17

En el ejemplo 2 tanto $\dfrac{8}{3}r^5$ y $\dfrac{8r^5}{3}$ son respuestas aceptables. Ahora estás preparado para dividir un polinomio entre un monomio.

EJEMPLO 3 Divide $\dfrac{4x^2 - 8x - 7}{2x}$.

Solución $\dfrac{4x^2 - 8x - 7}{2x} = \dfrac{4x^2}{2x} - \dfrac{8x}{2x} - \dfrac{7}{2x}$

$= 2x - 4 - \dfrac{7}{2x}$

Resuelve ahora el ejercicio 25

EJEMPLO 4 Divide $\dfrac{4y - 6x^4y^3 - 3x^5y^2 + 5x}{2xy^2}$.

Solución $\dfrac{4y - 6x^4y^3 - 3x^5y^2 + 5x}{2xy^2} = \dfrac{4y}{2xy^2} - \dfrac{6x^4y^3}{2xy^2} - \dfrac{3x^5y^2}{2xy^2} + \dfrac{5x}{2xy^2}$

$= \dfrac{2}{xy} - 3x^3y - \dfrac{3x^4}{2} + \dfrac{5}{2y^2}$

Resuelve ahora el ejercicio 31

2 Dividir un polinomio entre un binomio

Para dividir un polinomio entre un binomio se sigue un procedimiento muy semejante al que se usa para realizar una división larga. En un problema de división la expresión que vamos a dividir se denomina *dividendo*, y la expresión que divide se llama *divisor*.

EJEMPLO 5 Divide $\dfrac{x^2 + 7x + 10}{x + 2}$. ← Dividendo ← Divisor

Solución Reescribe el problema de división como

Divisor → $x + 2\overline{)x^2 + 7x + 10}$ ← Dividendo

Comprendiendo el álgebra

En la división larga, sigue estos cuatro pasos:

- Divide
- Multiplica
- Resta
- Baja

Repite estos cuatro pasos hasta que el grado del residuo sea menor que el grado del divisor.

Divide x^2 (el primer término del dividendo $x^2 + 7x + 10$) entre x (el primer término del divisor $x + 2$).

$$\frac{x^2}{x} = x$$

Coloca el cociente, x, arriba del término del dividendo que contiene x.

$$\begin{array}{r} x\phantom{{}+7x+10} \\ x+2\,\overline{\big)\,x^2+7x+10} \end{array}$$

Ahora multiplica x por $x + 2$, tal como lo haría en una división larga, y coloca el producto debajo del dividendo, alineando los términos semejantes.

Por

$$\begin{array}{rl} \boxed{x}\phantom{{}+7x+10} & \\ \boxed{x+2}\,\overline{\big)\,x^2+7x+10} & \\ \text{Igual a}\quad \boxed{x^2+2x}\phantom{{}+10} & \longleftarrow x(x+2) \end{array}$$

Ahora resta $x^2 + 2x$ de $x^2 + 7x$.

$$\begin{array}{r} x\phantom{{}+7x+10} \\ x+2\,\overline{\big)\,x^2+7x\;+10} \\ \underline{-(x^2+2x)}\phantom{{}+10} \\ 5x\phantom{{}+10} \end{array}$$

Baja el término siguiente, $+10$.

$$\begin{array}{r} x\phantom{{}+7x+10} \\ x+2\,\overline{\big)\,x^2+7x+10} \\ \underline{x^2+2x}\phantom{{}+10} \\ 5x+10 \end{array}$$

Divide $5x$ entre x.

$$\frac{5x}{x} = +5$$

Coloca $+5$ arriba de la constante del dividendo y multiplica 5 por $x + 2$. Por último, resta.

Por

$$\begin{array}{rl} x\boxed{+5} & \\ \boxed{x+2}\,\overline{\big)\,x^2+7x+10} & \\ \underline{x^2+2x}\phantom{{}+10} & \\ 5x+10 & \\ \text{Igual a}\quad \underline{\boxed{5x+10}} & \longleftarrow 5(x+2) \\ 0 & \longleftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

Por lo tanto, $\dfrac{x^2 + 7x + 10}{x + 2} = x + 5.$

Resuelve ahora el ejercicio 35

En el ejemplo 5 el residuo es cero. Así que, $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$. Observa que $x + 2$ y $x + 5$ son *factores* de $x^2 + 7x + 10$. En un problema de división, si el residuo es cero, el divisor y el cociente son factores del dividendo.

Cuando la respuesta de un problema de división el residuo no es cero, escribe el residuo sobre el divisor y suma esta expresión al cociente. Por ejemplo, supón que en el ejemplo 5 tuviéramos un residuo de 4; la respuesta se escribiría $x + 5 + \dfrac{4}{x + 2}$. Si el residuo fuera -7, la respuesta se escribiría $x + 5 + \dfrac{-7}{x + 2}$, que puede reescribirse como $x + 5 - \dfrac{7}{x + 2}$.

EJEMPLO 6 Divide $\dfrac{6x^2 - 7x + 3}{2x + 1}$.

Solución En este ejemplo restaremos mentalmente y no mostraremos el cambio de signo en las restas.

$$
\begin{array}{rr@{\,}l}
 & 3x - 5 & \longleftarrow \text{Cociente} \\
\text{Divisor} \longrightarrow\ 2x + 1 & \overline{)\,6x^2 - 7x + 3} & \longleftarrow \text{Dividendo} \\
 & \underline{6x^2 + 3x\phantom{{}+3}} & \longleftarrow 3x(2x + 1) \\
 & -10x + 3 & \\
 & \underline{-10x - 5} & \longleftarrow -5(2x + 1) \\
 & 8 & \longleftarrow \text{Residuo}
\end{array}
$$

Por lo tanto, $\dfrac{6x^2 - 7x + 3}{2x + 1} = 3x - 5 + \dfrac{8}{2x + 1}$.

Resuelve ahora el ejercicio 45

Al dividir un polinomio entre un binomio, la respuesta puede *verificarse* multiplicando el divisor por el cociente y luego sumando el residuo. El resultado debe ser el dividendo, que es el polinomio con el que se empezó. Para comprobar el ejemplo 6, hacemos lo siguiente:

$$\underbrace{(2x + 1)}_{\text{Divisor}}\underbrace{(3x - 5)}_{\text{Cociente}} + \underbrace{8}_{\text{Residuo}} = 6x^2 - 10x + 3x - 5 + 8 = \underbrace{6x^2 - 7x + 3}_{\text{Dividendo}}$$

Como obtuvimos el dividendo, nuestra división es correcta.

Consejo útil

Cuando divides un polinomio entre un binomio, debes ordenar tanto el polinomio como el binomio en orden descendente. Si algún término de cualquier grado no aparece, suele ser útil incluir ese término con un coeficiente numérico de 0. Por ejemplo, cuando divides $(6x^2 + x^3 - 4) \div (x - 2)$, puedes reescribir el problema como $(x^3 + 6x + 0x - 4) \div (x - 2)$ antes de empezar la división.

EJEMPLO 7 Divide $(4x^2 - 12x + 3x^5 - 17)$ entre $(-2 + x^2)$.

Solución Escribe el dividendo y el divisor en potencias descendentes de la variable x. Esto da $(3x^5 + 4x^2 - 12x - 17) \div (x^2 - 2)$. Si una potencia de x no aparece, suma esa potencia de x con un coeficiente de 0; luego divide.

$$
\begin{array}{rr@{\,}l}
 & 3x^3 \phantom{{}+0x^4+0x^3+4x^2} + 6x + 4 & \\
x^2 + \boxed{0x} - 2 & \overline{)\,3x^5 + \boxed{0x^4} + \boxed{0x^3} + 4x^2 - 12x - 17} & \\
 & \underline{3x^5 + 0x^4 - 6x^3}\phantom{{}+4x^2 - 12x - 17} & \longleftarrow 3x^3(x^2 + 0x - 2) \\
 & 6x^3 + 4x^2 - 12x\phantom{{}-17} & \\
 & \underline{6x^3 + 0x^2 - 12x}\phantom{{}-17} & \longleftarrow 6x(x^2 + 0x - 2) \\
 & 4x^2 + 0x - 17 & \\
 & \underline{4x^2 + 0x - 8} & \longleftarrow 4(x^2 + 0x - 2) \\
 & -9 & \longleftarrow \text{Residuo}
\end{array}
$$

Para obtener la respuesta, realizamos las divisiones

$$\frac{3x^5}{x^2} = 3x^3 \qquad \frac{6x^3}{x^2} = 6x \qquad \frac{4x^2}{x^2} = 4$$

Los cocientes $3x^3$, $6x$ y 4 fueron colocados arriba de sus términos semejantes en el dividendo. La respuesta es $3x^3 + 6x + 4 - \dfrac{9}{x^2 - 2}$. Verifica la respuesta multiplicando el divisor por el cociente y sumando el residuo.

Resuelve ahora el ejercicio 55

3 Dividir polinomios mediante la división sintética

Cuando se divide un polinomio entre un binomio de la forma $x - a$, el procedimiento se puede reducir mucho gracias a un método llamado **división sintética**. Considera los siguientes ejemplos. En el ejemplo de la derecha solo utilizamos los coeficientes numéricos.

$$
\begin{array}{r}
2x^2 + 5x - 4 \\
x - 3\overline{)2x^3 - x^2 - 19x + 18} \\
\underline{2x^3 - 6x^2} \qquad\qquad\quad \\
5x^2 - 19x \qquad\;\; \\
\underline{5x^2 - 15x} \qquad\;\; \\
-4x + 18 \\
\underline{-4x + 12} \\
6
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
2 + 5 - 4 \\
1 - 3\overline{)2 - 1 - 19 + 18} \\
\underline{2 - 6} \qquad\qquad\quad \\
5 - 19 \qquad\;\; \\
\underline{5 - 15} \qquad\;\; \\
-4 + 18 \\
\underline{-4 + 12} \\
6
\end{array}
$$

Observa que las variables no desempeñan un papel en la determinación de los coeficientes numéricos del cociente. Este problema de división puede realizarse con mayor rapidez y facilidad mediante la división sintética.

A continuación se explica cómo utilizar la división sintética. Nuevamente considera la división

$$\frac{2x^3 - x^2 - 19x + 18}{x - 3}$$

1. Escribe el dividendo en potencias descendentes de x. Luego escribe los coeficientes numéricos de cada término en el dividendo. Si falta un término de cualquier grado, coloca 0 en la posición apropiada para que sirva como marcador de posición. En el problema anterior, los coeficientes numéricos del dividendo son:

$$2 \quad -1 \quad -19 \quad 18$$

2. Al dividir entre un binomio de la forma $x - a$, coloca a a la izquierda de la fila de números que se obtuvo en el paso 1. En este problema, dividimos entre $x - 3$; por lo tanto, $a = 3$, así que escribimos:

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -1 & -19 & 18 \end{array}$$

3. Deja un espacio debajo de la fila de los coeficientes; luego traza una linea horizontal. Copia debajo de ésta el primer coeficiente de la izquierda, como sigue:

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -1 & -19 & 18 \\ & & & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

4. Multiplica 3 por el número que colocaste debajo de la línea, 2, para obtener 6. Escribe el 6 debajo del siguiente coeficiente, -1. Luego suma $-1 + 6$ para obtener 5.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -1 & -19 & 18 \\ & & 6 & & \\ \hline & 2 & 5 & & \end{array}$$

5. Multiplica 3 por el resultado de la suma anterior, 5, para obtener 15. Escribe 15 debajo de -19. Luego suma ambos números para obtener -4. Repite este procedimiento como se ilustra.

$$\begin{array}{r|rrrrl} 3 & 2 & -1 & -19 & 18 & \longleftarrow \text{Coeficientes del dividendo} \\ & & 6 & 15 & -12 & \\ \hline & \underbrace{2 \quad\; 5 \quad -4}_{\text{Coeficientes del cociente}} & & & 6 & \longleftarrow \text{El residuo es 6} \end{array}$$

Los tres primeros números de la última fila son los coeficientes numéricos del cociente, como se mostró en la división larga. El último número, 6, es el residuo que se obtiene en la división larga. El grado del cociente debe ser una unidad menor al del dividendo. Por lo tanto, el cociente es $2x^2 + 5x - 4$ y el residuo es 6.

Tenemos $\dfrac{2x^3 - x^2 - 19x + 18}{x - 3} = 2x^2 + 5x - 4 + \dfrac{6}{x - 3}$.

Comprendiendo el álgebra

Cuando dividimos polinomios usando división sintética, el divisor debe ser de la forma $x - a$.

Cuando el divisor es	$a =$
$x - 1$	1
$x - 2$	2
$x - 3$	3
$x + 1$	-1
$x + 2$	-2
$x + 3$	-2

EJEMPLO 8 Utiliza la división sintética para dividir.

$$(5 - x^2 + x^3) \div (x + 2)$$

Solución Primero escribe los términos del dividendo en orden descendente de x.

$$(x^3 - x^2 + 5) \div (x + 2)$$

Como no hay término de primer grado, ocupa su lugar con un 0 cuando escribas los coeficientes numéricos. Ya que $x + 2 = x - (-2)$, $a = -2$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ & & -2 & 6 & -12 \\ \hline & 1 & -3 & 6 & -7 \end{array} \longleftarrow \text{El residuo es } -7$$

$$\underbrace{1 \quad -3 \quad 6}_{\text{Coeficientes del cociente}}$$

Como el dividendo es un polinomio de tercer grado, el cociente debe ser un polinomio de segundo grado. La respuesta es $x^2 - 3x + 6 - \dfrac{7}{x + 2}$.

Resuelve ahora el ejercicio 61

EJEMPLO 9 Utiliza la división sintética para dividir.

$$(3x^4 + 11x^3 - 20x^2 + 7x + 35) \div (x + 5)$$

Solución

$$\begin{array}{r|rrrrr} -5 & 3 & 11 & -20 & 7 & 35 \\ & & -15 & 20 & 0 & -35 \\ \hline & 3 & -4 & 0 & 7 & 0 \end{array}$$

Como el dividendo es de cuarto grado, el cociente debe ser de tercer grado. El cociente es $3x^3 - 4x^2 + 0x + 7$, con residuo de 0. Esto puede simplificarse como $3x^3 - 4x^2 + 7$.

Resuelve ahora el ejercicio 71

En el ejemplo 9, como el residuo es 0, $x + 5$ y $3x^3 - 4x^2 + 7$ son *factores* de $3x^4 + 11x^3 - 20x^2 + 7x + 35$. Además, como ambos son factores,

$$(x + 5)(3x^2 - 4x^2 + 7) = 3x^4 + 11x^3 - 20x^2 + 7x + 35$$

4 Utilizar el teorema del residuo

En el ejemplo 8, cuando dividimos $x^3 - x^2 + 5$ entre $x + 2$, encontramos que el residuo fue -7. Si escribimos $x + 2$ como $x - (-2)$ y evaluamos la función polinomial $P(x) = x^3 - x^2 + 5$ con -2, obtenemos -7.

$$P(x) = x^3 - x^2 + 5$$
$$P(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 + 5 = -8 - 4 + 5 = -7$$

Puede demostrarse que para cualquier función polinomial $P(x)$, el valor de la función en a, $P(a)$, tiene el mismo valor que el residuo cuando $P(x)$ se divide entre $x - a$.

Para obtener el residuo cuando un polinomio $P(x)$ se divide entre un binomio de la forma $x - a$, podemos utilizar el **teorema del residuo.**

Teorema del residuo

Si el polinomio $P(x)$ se divide entre $x - a$, el residuo es igual a $P(a)$.

Comprendiendo el álgebra

Recuerde que el residuo en la división sintetizada es igual a $P(a)$.

EJEMPLO 10 Utiliza el teorema del residuo para determinar el residuo cuando $3x^4 + 6x^3 - 2x + 4$ se divide entre $x + 4$.

Solución Primero escribimos el divisor $x + 4$ en la forma $x - a$. Como $x + 4 = x - (-4)$, evaluamos $P(-4)$.

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^4 + 6x^3 - 2x + 4 \\ P(-4) &= 3(-4)^4 + 6(-4)^3 - 2(-4) + 4 \\ &= 3(256) + 6(-64) + 8 + 4 \\ &= 768 - 384 + 8 + 4 = \mathbf{396} \end{aligned}$$

Así, cuando $3x^4 + 6x^3 - 2x + 4$ se divide entre $x + 4$, el residuo es 396.

Resuelve ahora el ejercicio 87

Mediante la división sintética, demostraremos que la respuesta del ejemplo 10 en realidad es 396.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -4 & 3 & 6 & 0 & -2 & 4 \\ & & -12 & 24 & -96 & 392 \\ \hline & 3 & -6 & 24 & -98 & 396 \end{array} \longleftarrow \text{Residuo}$$

Si graficáramos el polinomio $P(x) = 3x^4 + 6x^3 - 2x + 4$, el valor de $P(x)$, o y, en $x = -4$ sería 396.

EJEMPLO 11 Utiliza el teorema del residuo para determinar si $x - 5$ es un factor de $6x^2 - 25x - 25$.

Solución Sea $P(x) = 6x^2 - 25x - 25$. Si $P(5) = 0$, entonces el residuo de $(6x^2 - 25x - 25)/(x - 5)$ es 0, y $x - 5$ es un factor del polinomio. Si $P(5) \neq 0$, entonces hay un residuo y $x - 5$ no es un factor.

$$\begin{aligned} P(x) &= 6x^2 - 25x - 25 \\ P(5) &= 6(5)^2 - 25(5) - 25 \\ &= 6(25) - 25(5) - 25 \\ &= 150 - 125 - 25 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Como $P(5) = 0$, $x - 5$ es un factor de $6x^2 - 25x - 25$. Observa que $6x^2 - 25x - 25 = (x - 5)(6x + 5)$.

Resuelve ahora el ejercicio 89

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.3

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

primero	factores	artificial	regla del cociente	residuo	término	P(3)
cociente	$P(7)$	sintética	dividendo	exponente cero	divisor	

1. En un problema de división, la expresión que estamos dividiendo se llama _______________.

2. En un problema de división, la expresión entre la que estamos dividiendo se llama _______________.

3. La regla $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ se conoce como la _______________ para exponentes.

4. La regla $a^0 = 1$ se conoce como la regla del _______________.

5. Para dividir un polinomio entre un monomio, se divide cada _______________ del polinomio entre el monomio.

6. Para verificar la respuesta de un problema de división, multiplica el divisor por el cociente y súmale el _______________.

7. Cuando dividimos un polinomio entre $x - a$, en lugar de usar la división larga, puedes usar el procedimiento corto conocido como la división _______________.

8. En un problema de división, si el residuo es 0, entonces el cociente y el divisor son _______________ del dividendo.

9. Si el polinomio $P(x)$ se divide entre $x - 7$. Entonces el residuo es igual a _______________.

10. En el problema de división $\frac{x^2 - 9x + 18}{x - 3} = x - 6$, se conoce como el _______________.

Practica tus habilidades

Divide.

11. $\frac{x^9}{x^7}$ **12.** $\frac{m^{13}}{m^3}$ **13.** $\frac{a^{11}}{a^7}$ **14.** $\frac{b^{13}}{b^8}$ **15.** $\frac{z^{17}}{z^9}$

16. $\frac{q^6}{q^6}$ **17.** $\frac{12r^7s^{10}}{3rs^8}$ **18.** $\frac{7y^{14}z^7}{4y^{11}z}$ **19.** $\frac{25x^{18}y^{19}}{5x^{10}y^8}$ **20.** $\frac{21a^8b^{17}}{9a^7b^{10}}$

Divide.

21. $\frac{4x + 18}{2}$ **22.** $\frac{9x + 5}{3}$ **23.** $\frac{4x^2 + 2x}{2x}$

24. $\frac{12x^2 - 8x - 28}{4}$ **25.** $\frac{5y^3 + 6y^2 - 12y}{3y}$ **26.** $\frac{14y^5 + 21y^2}{7y^4}$

27. $\frac{4x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 8x^2}{4x^2}$ **28.** $\frac{15x^3y - 25xy^3}{5xy}$ **29.** $\frac{8x^2y^2 - 10xy^3 - 5y}{2y^2}$

30. $\frac{4x^{13} + 12x^9 - 11x^7}{4x^6}$ **31.** $\frac{9x^2y - 12x^3y^2 + 25y^3}{2xy^2}$ **32.** $\frac{a^2b^2c - 6abc^2 + 5a^3b^5}{2abc^2}$

33. $\frac{3xyz + 6xyz^2 - 9x^3y^5z^7}{6xy}$ **34.** $\frac{6abc^3 - 5a^2b^3c^4 + 8ab^5c}{3ab^2c^3}$

Divide usando división larga.

35. $\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$ **36.** $\frac{x^2 + x - 20}{x + 5}$ **37.** $\frac{6x^2 + 16x + 8}{3x + 2}$

38. $\frac{2x^2 + 3x - 20}{x + 4}$ **39.** $\frac{6x^2 + x - 2}{2x - 1}$ **40.** $\frac{12x^2 - 17x - 7}{3x + 1}$

41. $\frac{x^2 + 6x + 3}{x + 1}$ **42.** $\frac{a^2 - a - 27}{a + 3}$ **43.** $\frac{2b^2 + b - 8}{b - 2}$

44. $\frac{2c^2 + c + 3}{2c + 5}$ **45.** $\frac{8x^2 + 6x - 25}{2x - 3}$ **46.** $\frac{8z^2 - 18z - 11}{4z + 1}$

47. $\frac{4x^2 - 36}{2x - 6}$ **48.** $\frac{16p^2 - 25}{4p + 5}$ **49.** $\frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 9}{x + 1}$

50. $\frac{-a^3 - 6a^2 + 2a - 4}{a - 1}$ **51.** $\frac{4y^3 + 12y^2 + 7y - 9}{2y + 3}$ **52.** $\frac{9b^3 - 3b^2 - 3b + 6}{3b + 2}$

53. $(4a^3 - 5a) \div (2a - 1)$ **54.** $(2x^3 + 6x + 33) \div (x + 4)$ **55.** $\frac{3x^5 + 2x^2 - 12x - 4}{x^2 - 2}$

56. $\frac{4b^5 - 18b^3 + 14b^2 + 18b - 21}{2b^2 - 3}$ **57.** $\frac{3x^4 + 4x^3 - 32x^2 - 5x - 20}{3x^3 - 8x^2 - 5}$ **58.** $\frac{3a^4 - 9a^3 + 13a^2 - 11a + 4}{a^2 - 2a + 1}$

59. $\frac{2c^4 - 8c^3 + 19c^2 - 33c + 15}{c^2 - c + 5}$ **60.** $\frac{2y^5 + 2y^4 - 3y^3 - 17y^2 + 21}{2y^2 - 3}$

Usa la división sintética para dividir.

61. $(x^2 + 7x + 6) \div (x + 1)$ **62.** $(x^2 - 7x + 6) \div (x - 6)$

63. $(x^2 + 5x + 6) \div (x + 2)$ **64.** $(x^2 - 5x + 6) \div (x - 3)$

65. $(x^2 - 11x + 28) \div (x - 4)$ **66.** $(x^2 + 17x + 72) \div (x + 8)$

67. $(x^2 + 5x - 14) \div (x - 3)$ **68.** $(x^2 - 2x - 39) \div (x + 5)$

69. $(3x^2 - 7x - 10) \div (x - 4)$ **70.** $(2b^2 - 9b + 2) \div (b - 6)$

71. $(4x^3 - 3x^2 + 2x) \div (x - 1)$ **72.** $(z^3 - 7z^2 - 13z + 30) \div (z - 2)$

73. $(3c^3 + 7c^2 - 4c + 16) \div (c + 3)$ **74.** $(3y^4 - 25y^2 - 29) \div (y - 3)$

75. $(y^4 - 1) \div (y - 1)$ **76.** $(a^4 - 16) \div (a - 2)$

77. $\dfrac{x^4 + 16}{x + 4}$

78. $\dfrac{z^4 + 81}{z + 3}$

79. $\dfrac{x^5 + x^4 - 9}{x + 1}$

80. $\dfrac{a^7 - 2a^6 + 15}{a - 2}$

81. $\dfrac{b^5 + 4b^4 - 14}{b + 1}$

82. $\dfrac{z^5 - 3z^3 - 7z}{z - 2}$

83. $(3x^3 + 2x^2 - 4x + 1) \div \left(x - \dfrac{1}{3}\right)$

84. $(8x^3 - 6x^2 - 5x + 12) \div \left(x + \dfrac{3}{4}\right)$

85. $(2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 7) \div \left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

86. $(9y^3 + 9y^2 - y + 2) \div \left(y + \dfrac{2}{3}\right)$

Determina el residuo de las siguientes divisiones usando el teorema del residuo. Si el divisor es un factor del dividendo, exprésalo.

87. $(4x^2 - 5x + 6) \div (x - 2)$

88. $(-2x^2 + 3x - 2) \div (x + 3)$

89. $(x^3 - 2x^2 + 4x - 8) \div (x - 2)$

90. $(x^4 + 3x^3 + x^2 + 22x + 8) \div (x + 4)$

91. $(-2x^3 - 6x^2 + 2x - 4) \div \left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

92. $(-5x^3 - 6) \div \left(x - \dfrac{1}{5}\right)$

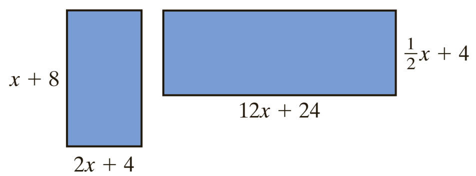
Resolución de problemas

93. Área El área de un rectángulo es $6x^2 - 8x - 8$. Si el largo es $2x - 4$, determina el ancho.

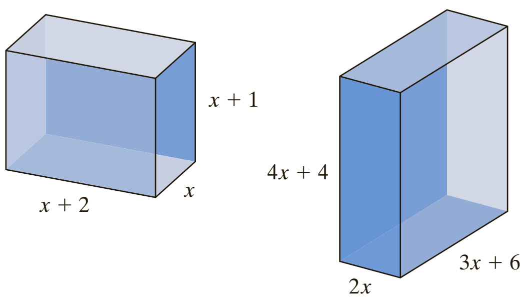
94. Área El área de un rectángulo es $15x^2 - 29x - 14$. Si el ancho es $5x + 2$, determina el largo.

Área y volumen *En los ejercicios 95 y 96, ¿cuántas veces es mayor el área o el volumen de la figura de la derecha que la figura de la izquierda? Explica cómo determinaste tu respuesta.*

95.



96.



97. Si $\dfrac{P(x)}{x - 4} = x + 2$, determina $P(x)$.

98. Si $\dfrac{P(x)}{2x + 4} = 2x - 3$, determina $P(x)$.

99. Si $\dfrac{P(x)}{x + 4} = x + 5 + \dfrac{6}{x + 4}$, determina $P(x)$.

100. Si $\dfrac{P(x)}{2x - 3} = 2x - 1 - \dfrac{8}{2x - 3}$, determina $P(x)$.

En los ejercicios 101 y 102, divide.

101. $\dfrac{2x^3 - x^2y - 7xy^2 + 2y^3}{x - 2y}$

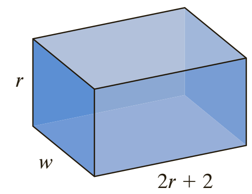
102. $\dfrac{x^3 + y^3}{x + y}$

En los ejercicios 103 y 104, divide. Las respuestas contienen fracciones.

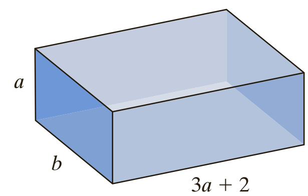
103. $\dfrac{2x^2 + 2x - 2}{2x - 3}$

104. $\dfrac{3x^3 - 7}{3x - 2}$

105. Volumen El volumen de la caja siguiente es $2r^3 + 4r^2 + 2r$. Determina w en términos de r.



106. Volumen El volumen de la caja siguiente es $6a^3 + a^2 - 2a$. Determina b en términos de a.



107. Cuando un polinomio se divide entre $x - 3$, el cociente es $x^2 - 3x + 4 + \dfrac{5}{x - 3}$. ¿Cuál es el polinomio? Explica cómo determinaste tu respuesta.

108. Cuando un polinomio se divide entre $2x - 3$, el cociente es $2x^2 + 6x - 5 + \dfrac{5}{2x - 3}$. ¿Cuál es el polinomio? Explica cómo determinaste tu respuesta.

En los ejercicios 109 y 110, divide. Considera que todas las variables en los exponentes son números naturales.

109. $\dfrac{4x^{n+1} + 2x^n - 3x^{n-1} - x^{n-2}}{2x^n}$

110. $\dfrac{3x^n + 6x^{n-1} - 2x^{n-2}}{2x^{n-1}}$

111. ¿Es $x - 1$ un factor de $x^{100} + x^{99} + \ldots + x^1 + 1$? Explica.

112. ¿Es $x + 1$ un factor de $x^{100} + x^{99} + \ldots + x^1 + 1$? Explica.

113. ¿Es $x + 1$ un factor de $x^{99} + x^{98} + \ldots + x^1 + 1$? Explica.

114. Divide $0.2x^3 - 4x^2 + 0.32x - 0.64$ entre $x - 0.4$.

115. **a)** Explica cómo dividir un polinomio entre un monomio.

b) Divide $\dfrac{5x^4 - 6x^3 - 4x^2 - 12x + 1}{3x}$ usando el procedimiento que diste en el inciso **a)**.

116. **a)** Explica cómo dividir un trinomio en x entre un binomio en x.

b) Divide $2x^2 - 12 + 5y$ entre $x + 4$ usando el procedimiento que diste en el inciso **a)**.

117. Un trinomio dividido entre un binomio tiene un residuo de 0. ¿Es el cociente un factor del trinomio? Explica.

118. **a)** Explica cómo tu respuesta se puede verificar cuando divides un polinomio entre un binomio.

b) Usa tu explicación del inciso **a)** para verificar si la división siguiente es correcta.

$$\frac{8x^2 + 2x - 15}{4x - 5} = 2x + 3$$

c) Verifica si la división siguiente es correcta.

$$\frac{6x^2 - 23x + 13}{3x - 4} = 2x - 5 - \frac{8}{3x - 4}$$

119. Cuando divides un polinomio entre un polinomio, antes de que empieces la división, ¿qué le debes hacer a los polinomios?

120. Explica por qué $\dfrac{x - 1}{x}$ no es un polinomio.

121. **a)** Describe cómo dividir un polinomio entre $(x - a)$ usando división sintética.

b) Divide $x^2 + 3x - 4$ entre $x - 5$ usando el procedimiento que describiste en el inciso **a)**.

122. **a)** Describe el teorema del residuo.

b) Determina el residuo cuando $x^2 - 6x - 4$ se divide entre $x - 1$, usando el procedimiento que describiste en el inciso **a)**.

123. En el problema de división $\dfrac{x^2 + 11x + 21}{x + 2} = x + 9 + \dfrac{3}{x + 2}$, ¿es $x + 9$ un factor de $x^2 + 11x + 21$? Explica.

124. En el problema de división $\dfrac{x^2 - 3x - 28}{x + 4} = x - 7$, ¿es $x - 7$ un factor de $x^2 - 3x - 28$? Explica.

125. ¿Es posible dividir un binomio entre un monomio y obtener como cociente un monomio? Explica.

126. **a)** ¿La suma, resta y multiplicación de dos polinomios es siempre un polinomio?

b) ¿El cociente de dos polinomios es siempre un polinomio? Explica.

127. Explica cómo puedes determinar, usando división sintética, si una expresión de la forma $x - a$ es un factor de un polinomio en x.

128. Dada $P(x) = ax^2 + bx + c$ y un valor d tal que $P(d) = 0$, explica por qué d es una solución de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Ejercicios de repaso acumulados

[1.6] **129.** Divide $\dfrac{8.45 \times 10^{23}}{4.225 \times 10^{13}}$ y expresa la respuesta en notación científica.

[2.3] **130. Triángulo** Determina los tres ángulos de un triángulo si un ángulo es dos veces el ángulo más pequeño y el tercer ángulo es 60° más grande que el ángulo más pequeño.

[2.6] **131.** Determina el conjunto solución de $\left|\dfrac{5x - 3}{2}\right| + 4 = 8$.

[3.6] **132.** Sea $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = -5x + 3$. Determina $f(6) \cdot g(6)$.

[5.1] **133.** Suma $(6r + 5s - t) + (-3r - 2s - 7t)$.

5.4 Factorizar un monomio de un polinomio y factorización por agrupación

1. Determinar el máximo factor común.
2. Factorizar un monomio de un polinomio.
3. Factorizar un factor binomial común.
4. Factorizar por agrupación.

La *factorización es la operación opuesta a la multiplicación.* Factorizar una expresión significa escribirla como un producto de otras expresiones. Por ejemplo, en la sección 5.2 aprendimos a realizar las multiplicaciones siguientes:

$$\underbrace{3x^2(6x + 3y + 4x^3) = 18x^3 + 9x^2y + 12x^5}_{\text{Multiplicando}}$$

y

$$\underbrace{(6x + 3y)(2x - 5y) = 12x^2 - 24xy - 15y^2}_{\text{Multiplicando}}$$

En esta sección, aprenderemos a determinar los *factores* de una expresión dada. Por ejemplo, aprenderemos cómo realizar cada una de las factorizaciones siguientes.

$$\underbrace{18x^3 + 9x^2y + 12x^5 = 3x^2(6x + 3y + 4x^3)}_{\text{Factorizando}}$$

y

$$\underbrace{12x^2 - 24xy - 15y^2 = (6x + 3y)(2x - 5y)}_{\text{Factorizando}}$$

1 Determinar el máximo factor común

Para factorizar un monomio de un polinomio, factorizamos al *máximo factor común* de cada término del polinomio. El **máximo factor común (MFC)** es el producto de los factores comunes a todos los términos del polinomio.

Por ejemplo, el MFC para $6x + 21$ es 3, ya que 3 es el número más grande que es factor tanto de $6x$ como de 21. Para factorizar utilizamos la propiedad distributiva.

$$6x + 21 = 3(2x + 7)$$

El 3 y el $2x + 7$ son *factores* del polinomio $6x + 21$.

Considera los términos x^3, x^4, x^5 y x^6. El MFC de estos términos es x^3, ya que x^3 es la potencia de x más alta que divide los cuatro términos.

El primer paso en cualquier problema de factorización es determinar si todos los términos tienen un factor común.

EJEMPLO 1 Determina el MFC de los términos siguientes.

a) y^{12}, y^4, y^9, y^7 **b)** x^3y^2, xy^4, x^5y^6 **c)** $6x^2y^3z, 9x^3y^4, 24x^2z^5$

Solución

a) Observa que y^4 es la mayor potencia de y común a los cuatro términos. Por lo tanto, el MFC es y^4.

b) La mayor potencia de x que es común a los tres términos es x (o x^1). La mayor potencia de y que es común a los tres términos es y^2. Así, el MFC de los tres términos es xy^2.

c) El MFC es $3x^2$. Como y no aparece en $24x^2z^5$, no es parte del MFC; como z no aparece en $9x^3y^4$, no es parte del MFC.

Resuelve ahora el ejercicio 93

EJEMPLO 2 Determina el MFC de los términos siguientes.

$$6(x - 2)^2, 5(x - 2), 18(x - 2)^7$$

Solución Los tres números 6, 5 y 18, no tienen factor común distinto de 1. La potencia más alta de $(x - 2)$ común a los tres términos es $(x - 2)$. Así, el MFC de los tres términos es $(x - 2)$.

Resuelve ahora el ejercicio 95

2 Factorizar un monomio de un polinomio

Cuando factorizamos un monomio de un polinomio, estamos factorizando el máximo factor común. *El primer paso en cualquier problema de factorización consiste en factorizar el MFC.*

Comprendiendo el álgebra

En cualquier problema de factorización, el primer paso es factorizar el MFC.

Para factorizar un monomio de un polinomio

1. Determina el máximo factor común de todos los términos del polinomio.
2. Escribe cada término como el producto del MFC y otro factor.
3. Usa la propiedad distributiva para *factorizar* el MFC.

EJEMPLO 3 Factoriza $15x^4 - 5x^3 + 25x^2$.

Solución El MFC es $5x^2$. Escribe cada término como producto del MFC y otro producto. Después factoriza el MFC.

$$\begin{aligned} 15x^4 - 5x^3 + 25x^2 &= 5x^2 \cdot 3x^2 - 5x^2 \cdot x + 5x^2 \cdot 5 \\ &= 5x^2(3x^2 - x + 5) \end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 15

Consejo útil

Para verificar el proceso de factorización, multiplica los factores usando la propiedad distributiva. El producto debe ser el polinomio con el que empezaste. Como se observa en el ejemplo 3,

Verifica
$$\begin{aligned} 5x^2(3x^2 - x + 5) &= 5x^2(3x^2) + 5x^2(-x) + 5x^2(5) \\ &= 15x^4 - 5x^3 + 25x^2 \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Factoriza $20x^3y^3 + 6x^2y^4 - 12xy^7$.

Solución El MFC es $2xy^3$. Escribe cada término como producto del MFC y otro producto. Después factoriza el MFC.

$$\begin{aligned} 20x^3y^3 + 6x^2y^4 - 12xy^7 &= 2xy^3 \cdot 10x^2 + 2xy^3 \cdot 3xy - 2xy^3 \cdot 6y^4 \\ &= 2xy^3(10x^2 + 3xy - 6y^4) \end{aligned}$$

Verifica $\quad 2xy^3(10x^2 + 3xy - 6y^4) = 20x^3y^3 + 6x^2y^4 - 12xy^7$

Resuelve ahora el ejercicio 19

Cuando el coeficiente principal de un polinomio es negativo, por lo general factorizamos un factor común con un coeficiente negativo. Esto da como resultado que el polinomio restante tenga un coeficiente principal positivo.

EJEMPLO 5 Factoriza.

a) $-12a - 18$ **b)** $-2b^3 + 6b^2 - 16b$

Solución Como los coeficientes principales en los incisos **a)** y **b)** son negativos, factorizamos factores comunes con un coeficiente negativo.

a) $-12a - 18 = -6(2a + 3)$ Factoriza -6.

b) $-2b^3 + 6b^2 - 16b = -2b(b^2 - 3b + 8)$ Factoriza $-2b$.

Resuelve ahora el ejercicio 27

EJEMPLO 6 **Lanzamiento de una pelota** Cuando se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad de 32 pies por segundo desde la parte más alta de un edificio de 160 pies de altura, su distancia, d, respecto del piso en cualquier instante t, puede determinarse mediante la función $d(t) = -16t^2 + 32t + 160$.

a) Determina la distancia de la pelota respecto del piso después de 3 segundos; es decir, determina $d(3)$.
b) Factoriza el MFC del lado derecho de la función.
c) Evalúa $d(3)$ en la forma factorizada.
d) Compara las respuestas de los incisos **a)** y **c)**.

Solución

a) $d(t) = -16t^2 + 32t + 160$

$$\begin{aligned} d(3) &= -16(3)^2 + 32(3) + 160 \qquad \text{Sustituye } t \text{ por 3.} \\ &= -16(9) + 96 + 160 \\ &= 112 \end{aligned}$$

La distancia es de 112 pies.

b) Factoriza -16 de los tres términos a la derecha del siglo igual.

$$d(t) = -16(t^2 - 2t - 10)$$

c)
$$\begin{aligned} d(t) &= -16(t^2 - 2t - 10) \\ d(3) &= -16[3^2 - 2(3) - 10] \quad \text{Sustituye } t \text{ por 3.} \\ &= -16(9 - 6 - 10) \\ &= -16(-7) \\ &= 112 \end{aligned}$$

d) Las respuestas son iguales. Puedes determinar los cálculos del inciso **c)** con mayor facilidad que los cálculos del inciso **a)**.

Resuelve ahora el ejercicio 65

3 Factorizar un factor binomial común

Algunas veces la factorización implica factorizar un binomio como el máximo factor común, como se ilustra en los ejemplos 7 a 10.

EJEMPLO 7 Factoriza $3x(5x - 6) + 4(5x - 6)$.

Solución El MFC es $(5x - 6)$. Al factorizar el MFC se obtiene

$$3x(5x - 6) + 4(5x - 6) = (5x - 6)(3x + 4)$$

Resuelve ahora el ejercicio 37

Comprendiendo el álgebra

En el ejemplo 7, el máximo factor común $(5x - 6)$ es un factor binomial.

En el ejemplo 7 también podrías haber colocado el factor común a la derecha para obtener

$$3x(5x - 6) + 4(5x - 6) = (3x + 4)(5x - 6)$$

Las formas factorizadas $(5x - 6)(3x + 4)$ y $(3x + 4)(5x - 6)$ son equivalentes de acuerdo con la propiedad conmutativa de la multiplicación, y ambas son correctas. Por lo general, cuando escribimos la respuesta a un ejemplo o ejercicio, colocamos el término común que se ha factorizado a la izquierda.

EJEMPLO 8 Factoriza $9(2x - 5) + 6(2x - 5)^2$.

Solución El MFC es $3(2x - 5)$. Reescribe cada término como producto del MFC y otro factor.

$$\begin{aligned} 9(2x - 5) + 6(2x - 5)^2 &= 3(2x - 5)\cdot 3 + 3(2x - 5)\cdot 2(2x - 5) \\ &= 3(2x - 5)[3 + 2(2x - 5)] \quad \text{Factoriza } 3(2x - 5). \\ &= 3(2x - 5)[3 + 4x - 10] \quad \text{Propiedad distributiva} \\ &= 3(2x - 5)(4x - 7) \quad \text{Simplifica.} \end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 39

EJEMPLO 9 Factoriza $(3x - 4)(a + b) - (x - 1)(a + b)$.

Solución El binomio $(a + b)$ es el MFC. Por lo tanto, lo factorizamos.

$$\begin{aligned} (3x - 4)(a + b) - (x - 1)(a + b) &= (a + b)[(3x - 4) - (x - 1)] \quad \text{Factoriza } (a + b). \\ &= (a + b)(3x - 4 - x + 1) \quad \text{Simplifica.} \\ &= (a + b)(2x - 3) \quad \text{Factores} \end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 43

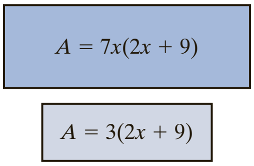


FIGURA 5.13

EJEMPLO 10 **Área** En la **Figura 5.13**, el área del rectángulo grande es $7x(2x + 9)$, y el área del rectángulo pequeño es $3(2x + 9)$. Determina una expresión, en forma factorizada, para calcular la diferencia entre las áreas de estos dos rectángulos.

Solución Para determinar la diferencia entre las áreas, resta el área del rectángulo pequeño del área del rectángulo grande.

$$7x(2x + 9) - 3(2x + 9) \qquad \text{Resta las áreas.}$$
$$= (2x + 9)(7x - 3) \qquad \text{Factoriza } (2x + 9).$$

La diferencia de las áreas para los dos rectángulos es $(2x + 9)(7x - 3)$.

Resuelve ahora el ejercicio 59

4 Factorizar por agrupación

Cuando un polinomio tiene *cuatro términos*, se le podría factorizar por agrupación. Para **factorizar por agrupación**, quitamos los factores comunes de grupos de términos. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 11 Factoriza $ax + ay + bx + by$.

Solución No hay factor común (diferente de 1) para los cuatro términos. Sin embargo, a es común a los primeros dos términos, y b es común a los últimos dos. Factoriza a de los primeros dos términos y b de los dos últimos.

$$ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y)$$

Ahora $(x + y)$ es común a ambos términos. Factoriza $(x + y)$.

$$a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$$

Así, $ax + ay + bx + by = (x + y)(a + b)$ o $(a + b)(x + y)$.

Resuelve ahora el ejercicio 49

Para factorizar cuatro términos por agrupación

1. Determina si los cuatro términos tienen un factor común. Si es así, factoriza el máximo factor común de cada término.
2. Acomoda los cuatro términos en dos grupos de dos términos cada uno. Cada grupo debe tener un MFC.
3. Factoriza el MFC de cada grupo de dos términos.
4. Si los dos términos formados en el paso 3 tienen un MFC, factorízalo.

EJEMPLO 12 Factoriza por agrupación $x^3 - 5x^2 + 2x - 10$.

Solución No hay factores comunes a los cuatro términos. Sin embargo, x^2 es común a los primeros dos términos, y 2 es común a los últimos dos términos. Factoriza x^2 de los primeros dos términos y *2* de los últimos dos términos.

$$x^3 - 5x^2 + 2x - 10 = x^2(x - 5) + 2(x - 5)$$
$$= (x - 5)(x^2 + 2)$$

Resuelve ahora el ejercicio 55

En el ejemplo 12, $(x^2 + 2)(x - 5)$ también es una respuesta aceptable. ¿Cambiaría la respuesta del ejemplo 12 si intercambiamos el orden de $2x$ y $-5x^2$? Inténtalo en el ejemplo 13.

EJEMPLO 13 Factoriza $x^3 + 2x - 5x^2 - 10$.

Solución No hay factor común para los cuatro términos. Factoriza x de los primeros dos términos y -5 de los últimos dos términos.

$$x^3 + 2x - 5x^2 - 10 = x(x^2 + 2) - 5(x^2 + 2)$$
$$= (x^2 + 2)(x - 5)$$

Observa que obtuvimos resultados equivalentes en los ejemplos 12 y 13.

Resuelve ahora el ejercicio 51

Consejo útil

Cuando factorizamos cuatro términos por agrupación, si los términos *primero* y *tercero* son positivos debemos factorizar una expresión positiva, tanto de los primeros dos términos como de los últimos dos términos, para obtener un factor común para los dos términos restantes (ver ejemplo 12). Si el *primer* término es positivo y el *tercero* es negativo, debemos factorizar una expresión positiva de los primeros dos términos y una expresión negativa de los últimos dos términos para obtener un factor común para los dos términos restantes (ver ejemplo 13).

Recuerda, el primer paso en cualquier problema de factorización consiste en determinar si los términos tienen un factor común. Si es así, empieza por factorizar el MFC. Por ejemplo, para factorizar $x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 10x$, primero factorizamos x de cada término. Después factorizamos los cuatro términos restantes por agrupación, como se hizo en el ejemplo 12.

$$x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 10x = x(x^3 - 5x^2 + 2x - 10)$$ Factoriza el MFC, x, de los cuatro términos.

$$= x(x - 5)(x^2 + 2)$$ Factores del ejemplo 12

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.4

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

asociativa	comunes	$6x^3y^4$	conmutativa	-2	$24(x-2)^4$	divisor
distributiva	agrupación	$4(x-2)^3$	-1	máximo factor común	multiplicación	$2x^2y$

1. Factorización es lo opuesto a ______________.
2. En un problema de factorización, el primer paso es factorizar el ______________.
3. Cuando un polinomio contiene cuatro términos, puede ser posible factorizar el polinomio por ______________.
4. El primer paso en la factorización de $-x^2 + 2x - 13$ es factorizar ______________.
5. Para factorizar por agrupación, elimina los factores ______________ de los grupos de términos.
6. El MFC de $2x^2y^4$ y $6x^3y$ es ______________.
7. El MFC de $12(x-2)^3$ y $8(x-2)^4$ es ______________.
8. Para verificar la respuesta de un problema de factorización, multiplica los factores usando la propiedad ______________.

Practica tus habilidades

Factoriza el máximo factor común.

9. $7n + 14$
10. $15p + 25$
11. $2x^2 - 4x + 16$
12. $6x^2 - 12x + 27$
13. $12y^2 - 16y + 28$
14. $12x^3 - 8x^2 - 10x$
15. $9x^4 - 3x^3 + 11x^2$
16. $45y^{12} + 60y^{10}$
17. $-24a^7 + 9a^6 - 3a^2$
18. $-16c^5 - 12c^4 + 6c^3$
19. $3x^2y + 6x^2y^2 + 3xy$
20. $24a^2b^2 + 16ab^4 + 72ab^3$
21. $80a^5b^4c - 16a^4b^2c^2 + 24a^2c$
22. $36xy^2z^3 + 36x^3y^2z + 9x^2yz$
23. $9p^4q^5r - 3p^2q^2r^2 + 12pq^5r^3$
24. $24m^6 + 8m^4 - 4m^3n$
25. $-22p^2q^2 - 16pq^3 + 26r$
26. $-15y^3z^5 - 28y^3z^6 + 9xy^2z^2$

Factoriza un factor con un coeficiente negativo.

27. $-8x + 4$
28. $-20a - 50$
29. $-x^2 - 4x + 23$
30. $-y^5 - 6y^2 - 7$
31. $-3r^2 - 6r + 9$
32. $-12t^2 + 48t - 72$
33. $-6r^4s^3 + 4r^2s^4 + 2rs^5$
34. $-5p^6q^3 - 10p^4q^4 + 25pq^7$
35. $-a^4b^2c + 5a^3bc^2 + 3a^2b$
36. $-20x^5y^3z - 4x^4yz^2 - 8x^2y^5$

Factoriza.

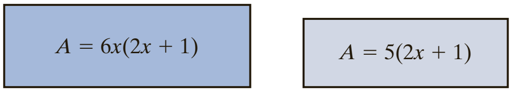
37. $x(a + 9) + 1(a + 9)$
38. $y(b - 2) - 6(b - 2)$
39. $7x(x - 4) + 2(x - 4)^2$
40. $4y(y + 1) - 7(y + 1)^2$
41. $(x - 2)(3x + 5) - (x - 2)(5x - 4)$
42. $(z + 4)(z + 3) + (z - 1)(z + 3)$

43. $(2a + 4)(a - 3) - (2a + 4)(2a - 1)$
44. $(6b - 1)(b + 4) + (6b - 1)(2b + 5)$
45. $x^2 + 4x - 5x - 20$
46. $a^2 + 3a - 6a - 18$
47. $8y^2 - 4y - 20y + 10$
48. $18m^2 + 30m + 9m + 15$
49. $am + an + bm + bn$
50. $cx - cy - dx + dy$
51. $x^3 - 3x^2 + 4x - 12$
52. $2z^3 + 4z^2 - 5z - 10$
53. $10m^2 - 12mn - 25mn + 30n^2$
54. $12x^2 + 9xy - 4xy - 3y^2$
55. $5a^3 + 15a^2 - 10a - 30$
56. $2r^4 - 2r^3 - 9r^2 + 9r$
57. $c^5 - c^4 + c^3 - c^2$
58. $b^4 - b^3 - b + b^2$

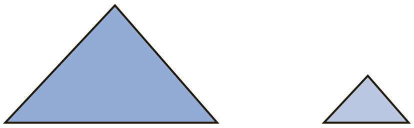
Resolución de problemas

Área *En los ejercicios 59-62, A representa una expresión para el área de la figura. Determina una expresión, en forma factorizada, para la diferencia de las áreas de las figuras geométricas. Ver ejemplo 10.*

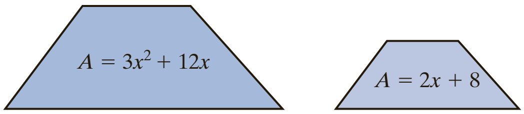
59.



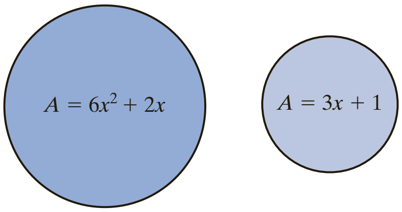
60.



61.

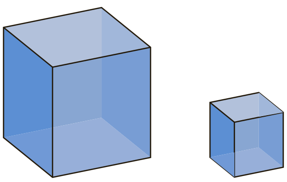


62.



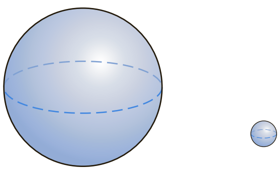
Volumen *En los ejercicios 63 y 64, V representa una expresión para el volumen de la figura. Determina una expresión, en forma factorizada, para la diferencia de los volúmenes de los sólidos geométricos.*

63.



$V = 9x(3x + 2)$ $\quad V = 5(3x + 2)$

64.



$V = 18x^2 + 24x$ $\quad V = 3x + 4$

65. Bengala Cuando se lanza una bengala hacia arriba con una velocidad de 80 pies por segundo, su altura, h, en pies, por encima del suelo a los t segundos se puede determinar por la función $h(t) = -16t^2 + 80t$.

a) Determina la altura de la bengala 3 segundos después de que se lanzó.

b) Expresa la función con el lado derecho en forma factorizada.

c) Evalúa $h(3)$ usando la forma factorizada del inciso **b)**.

66. Lanzamiento Cuando un jugador de basquetbol realiza un lanzamiento, la altura, h, en pies, del balón por encima del suelo a cualquier tiempo t, bajo ciertas circunstancias, puede ser determinada por la función


© Glowimages

$$h(t) = -16t^2 + 20t + 8.$$

a) Determina la altura del balón en el primer segundo.

b) Expresa la función con el lado derecho en forma factorizada.

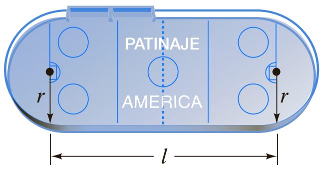
c) Evalúa $h(1)$ usando la forma factorizada del inciso **b)**.

67. Pista de patinaje El área de la pista de patinaje con extremos semicirculares mostrada es $A = \pi r^2 + 2rl$.

a) Determina A cuando $r = 20$ pies y $l = 40$ pies.

b) Escribe el área A en forma factorizada.

c) Determina A cuando $r = 20$ pies y $l = 40$ pies usando la forma factorizada del inciso **b)**.



68. Área La fórmula para determinar el área de un trapezoide está dada como $A = \frac{1}{2}hb_1 + \frac{1}{2}hb_2$. Expresa esta fórmula en forma factorizada.

69. Compra de un estéreo Fred Yang acaba de comprar un estéreo por \$975. Con un interés de 0% (interés–libre), Fred debe pagar \$75 cada mes hasta que el estéreo esté totalmente pagado. La cantidad que aún se debe es una función del tiempo, donde

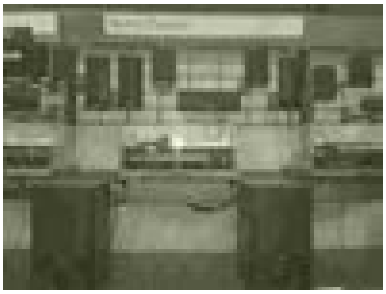
$$A(t) = 975 - 75t$$

y t es el número de meses después de que Fred comprara el estéreo.

a) Determina la cantidad que aún se debe 6 meses después de que Fred compra el estéreo.

b) Escribe la función en forma factorizada.

c) Usa el resultado del inciso **b)** para determinar la cantidad que aún se debe 6 meses después de que Fred comprara el estéreo.



© Allen R. Angel

70. Salario El 2 de enero de 2010, Jill Ferguson comenzó en un nuevo empleo con un salario anual de \$33,000. Su salario se incrementará \$1500 cada año. Por lo tanto, su salario es una función del número de años que trabaje, donde

$$S(n) = 33{,}000 + 1500n$$

y n es el número de años después de 2010.

a) Determina el salario de Jill en 2014.
b) Escribe la función en forma factorizada.
c) Usa el resultado del inciso **b)** para determinar el salario de Jill en 2014.

71. Precio de automóviles Cuando los automóviles de 2010 salieron, el precio de lista de un modelo se incrementó 6% por encima del precio de lista del modelo de 2009. Después, en la venta especial, los precios de todos los automóviles 2010 se redujeron 6%. El precio de venta puede ser representado por $(x + 0.06x) - 0.06(x + 0.06x)$, donde x es el precio de lista del modelo 2009.

a) Factoriza $(x + 0.06x)$ de cada término.
b) ¿El precio de venta es mayor o menor que el precio del modelo 2009?

Lee el ejercicio 71 antes de trabajar con los ejercicios 72-74.

72. Precio de un vestido El precio de un vestido se reduce 10%, después se reduce otro 10%.

a) Escribe una expresión para el precio final del vestido.
b) ¿Cómo se compara el precio final con el precio regular del vestido? Usa la factorización para llegar a tu respuesta.

73. Precio de una podadora El precio de una podadora de césped Toro se incrementa 15%. Después en una venta del cuatro de julio el precio se rebaja 20%.

a) Escribe una expresión para el precio final de la podadora de césped.
b) ¿Cómo se compara el precio final con el precio regular? Usa la factorización para llegar a tu respuesta.

74. Encuentra el precio ¿En cuál de los siguientes, **a)** o **b)**, será menor el precio final y por cuánto?

a) Disminuye 6% el precio de un artículo, después auméntalo 8%.
b) Incrementa 6% el precio de un artículo, después disminúyelo 8%.

Factoriza.

75. $5a(3x + 2)^5 + 4(3x + 2)^4$

76. $4p(2r - 3)^7 - 3(2r - 3)^6$

77. $4x^2(x - 3)^3 - 6x(x - 3)^2 + 4(x - 3)$

78. $12(p + 2q)^4 - 40(p + 2q)^3 + 12(p + 2q)^2$

79. $ax^2 + 2ax - 4a + bx^2 + 2bx - 4b$

80. $6a^2 - a^2c + 18a - 3ac + 6ab - abc$

Factoriza. Considera que todas las variables en los exponentes representan números naturales.

81. $x^{6m} - 5x^{4m}$

82. $x^{2mn} + x^{6mn}$

83. $3x^{4m} - 2x^{3m} + x^{2m}$

84. $r^{y+4} + r^{y+3} + r^{y+2}$

85. $a^r b^r + c^r b^r - a^r d^r - c^r d^r$

86. $6a^k b^k - 2a^k c^k - 9b^k + 3c^k$

87. a) ¿Es $6x^3 - 3x^2 + 9x = 3x(2x^2 - x + 3)$?
b) Si la factorización anterior es correcta, ¿cuál debe ser el valor de $6x^3 - 3x^2 + 9x - [3x(2x^2 - x + 3)]$ para cualquier valor de x? Explica.
c) Selecciona un valor para x y evalúa la expresión del inciso **b)**. ¿Obtuviste lo esperado? Si no, explica por qué.

88. a) Determina si la factorización siguiente es correcta.

$$\begin{aligned} 3(x - 2)^2 - 6(x - 2) &= 3(x - 2)[(x - 2) - 2] \\ &= 3(x - 2)(x - 4) \end{aligned}$$

b) Si la factorización anterior es correcta, ¿cuál debe ser el valor de $3(x - 2)^2 - 6(x - 2) - [3(x - 2)(x - 4)]$ para cualquier valor de x? Explica.
c) Selecciona un valor para x y evalúa la expresión del inciso **b)**. ¿Obtuviste lo esperado? Si no, explica por qué.

89. Considera la factorización $8x^3 - 16x^2 - 4x = 4x(2x^2 - 4x - 1)$.

a) Sea

$$y_1 = 8x^3 - 16x^2 - 4x$$
$$y_2 = 4x(2x^2 - 4x - 1)$$

Grafica cada función, ¿Qué debe pasar? Explica.

b) En tu calculadora graficadora, grafica y_1 y y_2, como se dieron en el inciso **a)**.
c) ¿Obtuviste los resultados que esperabas?
d) Cuando verificas un proceso de factorización con esta técnica, ¿qué significa que las gráficas no se superpongan? Explica.

90. Considera la factorización $2x^4 - 6x^3 - 8x^2 = 2x^2(x^2 - 3x - 4)$.

a) Introduce

$$y_1 = 2x^4 - 6x^3 - 8x^2$$
$$y_2 = 2x^2(x^2 - 3x - 4)$$

en tu calculadora.

b) Si usas la función TABLE de tu calculadora, ¿cómo esperas comparar las tablas de valores de y_1 y y_2? Explica.
c) Usa la función TABLE para mostrar los valores para y_1 y y_2 para valores de x de 0 a 6.
d) ¿Obtuviste los resultados esperados?
e) Cuando verificas un procedimiento de factorización utilizando la función TABLE, ¿qué significa que los valores de y_1 y y_2 sean diferentes?

Ejercicios de conceptos y escritura

91. ¿Cuál es el primer paso en *cualquier* problema de factorización?

92. ¿Cuál es el máximo factor común de los términos de una expresión?

93. **a)** Explica cómo determinas el máximo factor común de los términos de un polinomio.

b) Utilizando el procedimiento del inciso **a)**, determina el máximo factor común del polinomio

$$6x^2y^5 - 2x^3y + 12x^9y^3$$

c) Factoriza el polinomio del inciso **b)**.

94. Determina el MFC de los términos siguientes:

$$x^4y^6, x^3y^5, xy^6, x^2y^4$$

Explica cómo determinaste tu respuesta.

95. Determina el MFC de los términos siguientes:

$$12(x-4)^3, 6(x-4)^6, 3(x-4)^9$$

Explica cómo determinaste tu respuesta.

96. Cuando un término de un polinomio es el MFC, ¿qué se escribe en lugar de ese término cuando el MFC se factoriza? Explica.

97. **a)** Explica cómo factorizar un polinomio de cuatro términos por agrupación.

b) Factoriza $6x^3 - 2xy^3 + 3x^2y^2 - y^5$ con el procedimiento del inciso **a)**.

98. ¿Cuál es el primer paso en la factorización de $-x^2 + 8x - 15$? Explica tu respuesta.

Ejercicios de repaso acumulados

[1.4] **99.** Evalúa $\dfrac{\left(\left|\frac{1}{2}\right| - \left|-\frac{1}{3}\right|\right)^2}{-\left|\frac{1}{3}\right| \cdot \left|-\frac{2}{5}\right|}$.

[2.1] **100.** Resuelve $3(2x-4) + 3(x+1) = 9$.

[3.1] **101.** Grafica $y = x^2 - 1$.

[4.3] **102.** **Ejercicio** Jason Richter intenta ejercitarse todos los días. Camina a 3 mph y luego trota a 5 mph. Si le toma 0.9 horas viajar un total de 3.5 millas, ¿cuánto tiempo trota?

[5.2] **103.** Multiplica $(7a-3)(2a^2-4a+1)$.

Prueba de mitad de capítulo: 5.1 - 5.4

Para conocer tu comprensión de los temas que se han abordado hasta este momento, resuelve esta pequeña prueba. Las respuestas, y la sección en que se trató el tema por primera vez, se proporcionan al final del libro. Repasa el tema de las preguntas que respondiste de forma incorrecta.

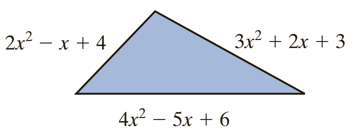
1. Escribe el polinomio $-7 + 2x + 5x^4 - 1.5x^3$ en orden descendente. Da el grado de este polinomio.

2. Evalúa $P\left(\frac{1}{2}\right)$ dado $P(x) = 8x^2 - 7x + 3$.

3. Simplifica $(2n^2 - n - 12) + (-3n^2 - 6n + 8)$.

4. Resta $(7x^2y - 10xy)$ de $(-9x^2y + 4xy)$.

5. Determina una expresión polinomial, en forma simplificada, para el perímetro del triángulo.



Multiplica.

6. $2x^5(3xy^4 + 5x^2 - 7x^3y)$

7. $(7x - 6y)(3x + 2y)$

8. $(3x+1)(2x^3 - x^2 + 5x + 9)$

9. $\left(8p - \frac{1}{5}\right)\left(8p + \frac{1}{5}\right)$

10. $(4m - 3n)(3m^2 + 2mn - 6n^2)$

11. Escribe $x^2 - 14x + 49$ como el cuadrado de un binomio. Explica cómo determinaste tu respuesta.

Divide.

12. $\dfrac{4x^4y^3 + 6x^2y^2 - 11x}{2x^2y^2}$

13. $\dfrac{12x^2 + 23x + 7}{4x + 1}$

14. $\dfrac{2y^3 - y^2 + 7y - 10}{2y - 3}$

Usa división sintética para dividir.

15. $\dfrac{x^2 - x - 72}{x + 8}$

16. $\dfrac{3a^4 - 2a^3 - 14a^2 + 11a + 2}{a - 2}$

17. Factoriza el máximo factor común en $32b^3c^3 + 16b^2c + 24b^5c^4$.

18. $7b(2x+9) - 3c(2x+9)$

19. $2b^4 - b^3c + 4b^3c - 2b^2c^2$

20. $5a(3x-2)^5 - 4(3x-2)^6$

5.5 Factorización de trinomios

1. Factorizar trinomios de la forma $x^2 + bx + c$.
2. Factorizar un factor común.
3. Factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$, usando el método de prueba y error.
4. Factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$, usando agrupación.
5. Factorizar trinomios mediante sustitución.

1 Factorizar trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

En esta sección aprenderemos cómo **factorizar trinomios** de la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Observa que a representa el coeficiente del término x al cuadrado, b representa el coeficiente del termino x y c representa el término constante.

Trinomios	Coeficientes
$3x^2 + 2x - 5$	$a = 3, b = 2, c = -5$
$-\frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$	$a = -\frac{1}{2}, \quad b = -4, \quad c = 3$

Para factorizar trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ (observa: $a = 1$)

1. Encuentra dos números (o factores) cuyo producto sea c y cuya suma sea b.
2. Los factores del trinomio serán de la forma

$$(x + \square)(x + \square)$$

Un factor determinado en el paso 1

Otro factor determinado en el paso 1

Si los número determinados en el paso 1 fueran, por ejemplo, 3 y -5, los factores se escribirían $(x + 3)(x - 5)$. Este procedimiento se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1 Factoriza $x^2 - x - 12$.

Solución $a = 1, b = -1, c = -12$. Debemos encontrar dos números cuyo producto sea c, que es -12, y cuya suma sea b, que es -1. Comenzamos por listar los factores de -12, intentando encontrar una par cuya suma sea -1.

Factores de -12	Suma de factores
$(1)(-12)$	$1 + (-12) = -11$
$(2)(-6)$	$2 + (-6) = -4$
$(3)(-4)$	$3 + (-4) = -1$
$(4)(-3)$	$4 + (-3) = 1$
$(6)(-2)$	$6 + (-2) = 4$
$(12)(-1)$	$12 + (-1) = 11$

Los números que estamos buscando son 3 y -4 porque su producto es -12 y su suma es -1. Ahora factorizamos el trinomio usando 3 y -4.

$$x^2 - x - 12 = (x \underbrace{+\,3}_{\text{Un factor de } -12})(x \underbrace{-\,4}_{\text{Otro factor de } -12})$$

Resuelve ahora el ejercicio 13

Observa en el ejemplo 1 que listamos todos los factores de -12. Sin embargo, después de que encontramos los dos factores cuyo producto es c y cuya suma es b, no hay necesidad de listar el resto de los factores. Los factores se listaron aquí para mostrar, por ejemplo, que $(2)(-6)$ es un conjunto de factores diferente que $(-2)(6)$. Observa que conforme el factor positivo aumenta la suma de los factores aumenta.

Consejo útil

Considera los factores $(2)(-6)$ y $(-2)(6)$ y las sumas de estos factores.

Factores	Suma de factores
$2(-6)$	$2 + (-6) = -4$
$-2(6)$	$-2 + 6 = 4$

Observa que si se cambian los signos en cada número del producto, el signo de la suma de los factores se modifica. Podemos usar este hecho para encontrar de forma más rápida los factores. Si, al buscar una suma en específico, obtienes el opuesto de esa suma, cambia el signo de cada factor para obtener la suma que buscas.

EJEMPLO 2 Factoriza $p^2 - 7p + 6$.

Solución Debemos encontrar dos números cuyo producto sea 6 y cuya suma sea -7. Ya que la suma de dos número negativos es un número negativo, y el producto de dos números negativos es un número positivo, ambos números deben ser números negativos. Los factores negativos de 6 son $(-1)(-6)$ y $(-2)(-3)$. Como se muestra a continuación, los números que buscamos son -1 y -6.

Factores de 6	Suma de factores
$(-1)(-6)$	$-1 + (-6) = -7$
$(-2)(-3)$	$-2 + (-3) = -5$

Por lo tanto,

$$p^2 - 7p + 6 = (p - 1)(p - 6)$$

Ya que los factores pueden ubicarse en cualquier orden, $(p - 6)(p - 1)$ es también una respuesta aceptable.

Resuelve ahora el ejercicio 23

Consejo útil

Comprobación de la factorización

Los problemas de factorización se pueden comprobar multiplicando los factores obtenidos. Si la factorización es correcta, obtendrás el polinomio con el que iniciaste. Para comprobar el ejemplo 2, multiplicaremos los factores usando el método PIES.

$$(p - 1)(p - 6) = p^2 - 6p - p + 6 = p^2 - 7p + 6$$

Ya que el producto de los factores es el trinomio con el que iniciamos, nuestra factorización es correcta. Siempre debes comprobar tu factorización.

El procedimiento utilizado para factorizar trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ se puede utilizar en otros trinomios, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Factoriza $x^2 + 2xy + 15y^2$.

Solución Debemos encontrar dos números cuyo producto es -15 y cuya suma es 2. Los dos números son 5 y -3.

Factores de -15	Suma de factores
$5(-3)$	$5 + (-3) = 2$

Ya que el último término del trinomio tiene y^2, el segundo término de cada factor debe tener y.

Verifica

$$x^2 + 2xy + 15y^2 = (x + 5y)(x - 3y)$$

$$\begin{aligned}(x + 5y)(x - 3y) &= x^2 - 3xy + 5xy - 15y^2 \\ &= x^2 + 2xy - 15y^2\end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 75

2 Factorizar un factor común

El primer paso para factorizar cualquier trinomio es determinar si tiene un factor común. Si es así, factoriza el máximo factor común y luego factoriza el polinomio restante.

EJEMPLO 4 Factoriza $3x^4 - 6x^3 - 72x^2$.

Solución El factor $3x^2$ es el máximo factor común de los tres términos del trinomio. Primero factorízalo.

$$3x^4 - 6x^3 - 72x^2 = 3x^2(x^2 - 2x - 24) \qquad \text{Factorizar } 3x^2.$$

Ahora continúa factorizando $x^2 - 2x - 24$. Encuentra dos números cuyo producto sea -24 y cuya suma sea -2. Los números son -6 y 4.

$$3x^2(x^2 - 2x - 24) = 3x^2\,(x - 6)(x + 4)$$

Por lo tanto, $3x^4 - 6x^3 - 72x^2 = 3x^2(x - 6)(x + 4)$

Resuelve ahora el ejercicio 33

3 Factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$, usando el método de prueba y error

El primer método que usaremos para factorizar trinomios de la forma

$$ax^2 + bx + c, a \neq 1$$

es el método de prueba y error. Este método es en algunas ocasiones el método PIES (o PIES inverso). Comenzaremos multiplicando $(2x + 3)(x + 1)$ usando el método PIES.

Producto de los primeros términos

Producto de los segundos términos

$$(2x + 3)(x + 1) = \overset{P}{2x(x)} + \overset{I}{2x(1)} + \overset{E}{3(x)} + \overset{S}{3(1)} = 2x^2 + 5x + 3$$

Suma de los productos de los términos externos e internos

Por lo tanto, si estás factorizando el trinomio $2x^2 + 5x + 3$, te darás cuenta de que el producto de los primeros términos de los factores debe ser $2x^2$, el producto de los últimos términos debe ser 3, y la suma de los productos de los términos externos e internos debe ser $5x$.

Para factorizar $2x^2 + 5x + 3$, comenzaremos como se muestra aquí.

$$2x^2 + 5x + 3 = (2x \qquad)(x \qquad) \qquad \text{El producto de los primeros términos es } 2x^2.$$

Ahora completaremos los segundos términos usando enteros positivos cuyo producto sea 3. Solo enteros positivos serán considerados ya que el producto de los últimos términos es positivo, y la suma de los productos de los términos externos e internos es también positiva. Las dos posibilidades son

$$\left.\begin{array}{l}(2x + 1)(x + 3)\\(2x + 3)(x + 1)\end{array}\right\} \text{El producto de los segundos términos es 3.}$$

Para determinar cuál factorización es correcta, determinaremos la suma de los productos de los términos externos e internos. Si alguna de las sumas es $5x$, en el término central del trinomio, la factorización es correcta.

$$(2x + 1)(x + 3) = 2x^2 + 6x + x + 3 = 2x^2 + 7x + 3 \qquad \text{Término medio incorrecto.}$$
$$(2x + 3)(x + 1) = 2x^2 + 2x + 3x + 3 = 2x^2 + 5x + 3 \qquad \text{Término medio correcto.}$$

Por lo tanto, los factores de $2x^2 + 5x + 3$ son $2x + 3$ y $x + 1$. Así,

$$2x^2 + 5x + 3 = (2x + 3)(x + 1).$$

Siguiendo las directrices del método de **prueba y error** de factorización del trinomio, donde $a \neq 1$ y los tres términos no tienen factor común.

Para factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$, usando el método de prueba y error

1. Escribe todos los pares de factores del coeficiente del término cuadrático, a.
2. Escribe todos los pares de factores de la constante, c.
3. Intenta varias combinaciones de estos factores hasta que encuentres el término medio correcto, bx.

Comprendiendo el álgebra

Cuando utilices el método de *prueba y error* para factorizar, es posible que tengas que probar varias posibilidades antes de que obtengas los *factores correctos*.

EJEMPLO 5 Factoriza $3t^2 - 13t + 10$.

Solución Primero determinamos que los tres términos no tienen un factor común. Posteriormente determinamos que a es 3 y los únicos factores de 3 son 1 y 3. Por lo tanto, escribimos

$$3t^2 - 13t + 10 = (3t \quad)(t \quad)$$

El número 10 tiene factores tanto positivos como negativos. Sin embargo, ya que el producto de los últimos términos debe ser positivo $(+10)$, y la suma de los productos de los términos externos e internos debe ser negativa (-13), los dos factores de 10 deben ser negativos. (¿Por qué?) Los factores negativos de 10 son $(-1)(-10)$ y $(-2)(-5)$. A continuación hay una lista de posibles factores. Buscamos los factores que nos den el término medio correcto, $-13t$.

Posibles factores	Suma de productos de términos externos e internos	
$(3t - 1)(t - 10)$	$-31t$	
$(3t - 10)(t - 1)$	$-13t$	Término medio, correcto
$(3t - 2)(t - 5)$	$-17t$	
$(3t - 5)(t - 2)$	$-11t$	

Así, $3t^2 - 13t + 10 = (3t - 10)(t - 1)$.

Resuelve ahora el ejercicio 35

El siguiente consejo útil es muy importante. Estúdialo cuidadosamente.

Consejo útil

Factorización por el método de prueba y error

Cuando factorizamos un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, el signo del término constante, c, es de mucha ayuda para encontrar la solución. Si $a > 0$, entonces:

1. Cuando el término constante, c, es positivo y el coeficiente numérico del término x, b, es positivo, ambos factores numéricos serán positivos.

   Ejemplo

$$x^2 \underset{\text{Positivo}}{\underset{\uparrow}{\boxed{+}}} 7x \underset{\text{Positivo}}{\underset{\uparrow}{+}} 12 = (x \underset{\text{Positivo}}{\underset{\uparrow}{\boxed{+}}} 3)(x \underset{\text{Positivo}}{\underset{\uparrow}{\boxed{+}}} 4)$$

2. Cuando c es positivo y b es negativo, ambos factores numéricos serán negativos.

   Ejemplo

$$x^2 \underset{\text{Negativo}}{\underset{\uparrow}{\boxed{-}}} 5x \underset{\text{Positivo}}{\underset{\uparrow}{+}} 6 = (x \underset{\text{Negativo}}{\underset{\uparrow}{\boxed{-}}} 2)(x \underset{\text{Negativo}}{\underset{\uparrow}{\boxed{-}}} 3)$$

   Siempre que la constante, c, sea positiva (como en los dos ejemplos anteriores) el signo de ambos factores será el mismo que el signo del término x del trinomio.

3. Cuando c es negativo, uno de los factores numéricos será positivo y el otro será negativo.

   Ejemplo

$$x^2 \boxed{+} x \underset{\text{Negativo}}{\underset{\uparrow}{-}} 6 = (x \underset{\text{Positivo}}{\underset{\uparrow}{\boxed{+}}} 2)(x \underset{\text{Negativo}}{\underset{\uparrow}{\boxed{-}}} 2)$$

Comprendiendo el álgebra

Cuando escogemos factores, generalmente comenzamos con los *factores que son la mitad*, ya que son los factores cuyos términos tienen coeficientes que son cercanos entre sí.

EJEMPLO 6 Factoriza $8x^2 + 8x - 30$.

Solución Primero observamos que el máximo factor común, 2, se puede factorizar.

$$8x^2 + 8x - 30 = 2(4x^2 + 4x - 15)$$

Los factores de 4, el coeficiente principal, son $4 \cdot 1$ y $2 \cdot 2$. Por lo tanto, la factorización será de la forma $(4x \quad)(x \quad)$ o $(2x \quad)(2x \quad)$.

Comencemos con $(2x \quad)(2x \quad)$. Los factores de -15 son $(1)(-15)$, $(3)(-5)$, $(5)(-3)$, y $(15)(-1)$. Queremos que el término central sea $4x$.

Posibles factores	Suma de productos de los términos externos e internos
$(2x + 1)(2x - 15)$	$-28x$
$(2x + 3)(2x - 5)$	$-4x$
$(2x + 5)(2x - 3)$	$4x$

Debido a que encontramos el conjunto de factores que proporciona el término correcto para x, podemos parar. Así,

$$8x^2 + 8x - 30 = 2(2x + 5)(2x - 3)$$

Resuelve ahora el ejercicio 37

En el ejemplo 6, si comparamos el segundo y el tercer conjuntos de factores observaremos que son los mismos, excepto por los signos de los segundos términos. Observa que cuando los signos del segundo término en cada factor se cambian, la suma de los productos de los términos externos e internos también cambia de signo.

Cómo utilizar tu calculadora graficadora

Se puede utilizar la calculadora graficadora para comprobar problemas de factorización. Para comprobar la factorización del ejemplo 6,

$$8x^2 + 8x - 30 = 2(2x + 5)(2x - 3)$$

hacemos $Y_1 = 8x^2 + 8x - 30$ y $Y_2 = 2(2x + 5)(2x - 3)$. Luego usamos la característica TABLE para comparar los resultados, como en la **Figura 5.14**.

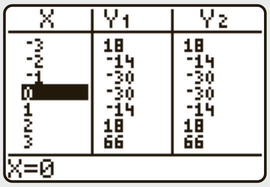


FIGURA 5.14

Como Y_1 y Y_2 tienen los mismos valores para cada valor de X, no se ha cometido ningún error. Este procedimiento solo puede decirte si se cometió un error, no puede decirte si has factorizado por completo. Por ejemplo, $8x^2 + 8x - 30$ y $(4x + 10)(2x - 3)$ darán el mismo conjunto de valores.

EJEMPLO 7 Factoriza $6x^2 - 11xy - 10y^2$.

Solución Los factores de 6 son $6 \cdot 1$ o $2 \cdot 3$. Por lo tanto, los factores del trinomio serán de la forma $(6x \quad)(x \quad)$ o $(2x \quad)(3x \quad)$. Comenzaremos de la siguiente manera.

$$6x^2 - 11xy - 10y^2 = (2x \quad)(3x \quad)$$

Los factores de -10 son $(-1)(10)$, $(1)(-10)$, $(-2)(5)$, y $(2)(-5)$. Ya que hay ocho factores de (-10), habrá ocho pares de posibles factores por probar.
La factorización correcta es

$$6x^2 - 11xy - 10y^2 = (2x - 5y)(3x + 2y)$$

Resuelve ahora el ejercicio 51

En el ejemplo 7 tuvimos suerte al encontrar los factores correctos usando la forma $(2x \quad)(3x \quad)$. De no haber encontrado los factores correctos usando esto, pudimos haber intentado con $(6x \quad)(x \quad)$.

Cuando se factoriza un trinomio cuyo coeficiente principal es negativo, comenzaremos factorizando un número negativo, por ejemplo,

$$\begin{aligned} -24x^3 - 60x^2 + 36x &= -12x(2x^2 + 5x - 3) && \text{Factorizar } -12x. \\ &= -12x(2x - 1)(x + 3) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -3x^2 + 8x + 16 &= -1(3x^2 - 8x - 16) && \text{Factorizar } -1. \\ &= -(3x + 4)(x - 4) \end{aligned}$$

EJEMPLO 8 **Área de región sombreada** En la **Figura 5.15**, determina una expresión, en forma factorizada, para el área de la región sombreada.

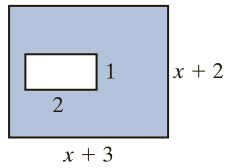


FIGURA 5.15

Solución Para determinar el área de la región sombreada, necesitaremos restar el área del rectángulo pequeño del área del rectángulo grande. Recuerda que el área del rectángulo es largo · ancho.

$$\begin{aligned} \text{Área del rectángulo grande} &= (x + 3)(x + 2) \\ &= x^2 + 2x + 3x + 6 \\ &= x^2 + 5x + 6 \\ \text{Área del rectángulo pequeño} &= (2)(1) = 2 \\ \text{Área de la región sombreada} &= \text{área grande} - \text{área pequeña} \\ &= x^2 + 5x + 6 - 2 \\ &= x^2 + 5x + 4 && \text{Simplificada.} \\ &= (x + 4)(x + 1) && \text{Factorizada.} \end{aligned}$$

El área de la región sombreada es $(x + 4)(x + 1)$.

Resuelve ahora el ejercicio 89

4 Factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$, mediante agrupación

Ahora estudiaremos el método por **agrupación** para factorizar trinomios con la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$.

Para factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$, mediante agrupación

1. Determina dos números cuyo producto sea $a \cdot c$, y cuya suma sea b.
2. Reescribe el término central, bx, mediante los números determinados en el paso 1.
3. Factoriza por agrupación.

EJEMPLO 9 Factoriza $2x^2 - 5x - 12$.

Solución Vemos que $a = 2$, $b = -5$ y $c = -12$. Debemos encontrar dos números cuyo producto sea $a \cdot c$ o $2(-12) = -24$, y cuya suma sea b, -5. Los dos números son -8 y 3, ya que $(-8)(3) = -24$, y $-8 + 3 = -5$. Ahora reescribe el término central, $-5x$, utilizando $-8x$ y $3x$.

$$2x^2 - 5x - 12 = 2x^2 \overbrace{- 8x + 3x}^{-5x} - 12$$

Ahora factoriza por agrupación como se explicó en la sección 5.4.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x - 12 &= 2x^2 - 8x + 3x - 12 \\ &= 2x(x - 4) + 3(x - 4) \\ &= (x - 4)(2x + 3) && \text{Factoriza } (x - 4). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $2x^2 - 5x - 12 = (x - 4)(2x + 3)$.

Resuelve ahora el ejercicio 61

Consejo útil

En el ejemplo 9 escribimos $-5x$ como $-8x + 3x$. Como se muestra en seguida, se obtendrían los mismos factores si escribiéramos $-5x$ como $3x - 8x$. Por lo tanto, cuando se factoriza por agrupación no importa cuál factor se escriba primero.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x - 12 &= 2x^2 + \overbrace{3x - 8x}^{-5x} - 12 \\ &= x(2x + 3) - 4(2x + 3) \\ &= (2x + 3)(x - 4) \qquad \text{Factoriza } (2x + 3). \end{aligned}$$

EJEMPLO 10 Factoriza $12a^2 - 19ab + 5b^2$.

Solución Debemos encontrar dos números cuyo producto sea $(12)(5) = 60$, y cuya suma sea -19. Como el producto de los números es positivo y su suma es negativa, los dos números deben ser negativos.

Los dos números son -15 y -4 ya que $(-15)(-4) = 60$ y $-15 + (-4) = -19$. Ahora reescribimos el término central, $-19ab$, utilizando $-15ab$ y $-4ab$. Luego factorizamos por agrupación.

$$\begin{aligned} 12a^2 - 19ab + 5b^2 &= 12a^2 \overbrace{- 15ab - 4ab}^{-19ab} + 5b^2 \\ &= 3a(4a - 5b) - b(4a - 5b) \\ &= (4a - 5b)(3a - b) \end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 45

Comprendiendo el álgebra

Si un polinomio no se puede factorizar, se dice que es *primo*.

Resuelve nuevamente el ejemplo 10, pero esta vez escribiendo $-19ab$ como $-4ab - 15ab$. Si lo haces de manera correcta, obtendrás los mismos factores.

Es importante que sepas que no todos los trinomios pueden factorizarse por los métodos presentados en esta sección. Un polinomio que no puede factorizarse (sobre un conjunto específico de números) se denomina **polinomio primo**.

EJEMPLO 11 Factorizar $2x^2 + 6x + 5$.

Solución Cuando intentes factorizar este polinomio verás que no es posible hacerlo por los métodos de prueba y error o agrupación. Éste es un polinomio primo sobre el conjunto de los números enteros.

Resuelve ahora el ejercicio 47

5 Factorizar trinomios mediante sustitución

En ocasiones un trinomio más complicado puede factorizarse sustituyendo una variable por otra. Los tres ejemplos siguientes son ejemplos de **factorización mediante sustitución.**

EJEMPLO 12 Factoriza $y^4 - y^2 - 6$.

Solución Si podemos reescribir esta expresión en la forma $ax^2 + bx + c$, será más fácil factorizarla. Como $(y^2)^2 = y^4$, si sustituimos y^2 por $\boldsymbol{x}$, el trinomio se convierte en

$$\begin{aligned} y^4 - y^2 - 6 &= (y^2)^2 - y^2 - 6 \\ &= \boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x} - 6 \qquad \text{Sustituye } y^2 \text{ por } x. \end{aligned}$$

Ahora factoriza $x^2 - x - 6$.

$$= (\boldsymbol{x} + 2)(\boldsymbol{x} - 3)$$

Por último, sustituye x por y^2 para obtener

$$= (y^2 + 2)(y^2 - 3) \qquad \text{Sustituye } x \text{ por } y^2.$$

Por lo tanto, $y^4 - y^2 - 6 = (y^2 + 2)(y^2 - 3)$. Observa que y^2 se sustituyó por x, y después x se sustituyó nuevamente por y^2.

Resuelve ahora el ejercicio 65

EJEMPLO 13 Factoriza $3z^4 - 17z^2 - 28$.

Solución Sea $x = z^2$. Entonces el trinomio puede escribirse

$$
\begin{aligned}
3z^4 - 17z^2 - 28 &= 3(z^2)^2 - 17z^2 - 28 \\
&= 3x^2 - 17x - 28 && \text{Sustituye } z^2 \text{ por } x. \\
&= (3x + 4)(x - 7) && \text{Factoriza.}
\end{aligned}
$$

Ahora sustituye x por z^2.

$$= (3z^2 + 4)(z^2 - 7) \qquad \text{Sustituye } x \text{ por } z^2.$$

Por lo tanto, $3z^4 - 17z^2 - 28 = (3z^2 + 4)(z^2 - 7)$.

Resuelve ahora el ejercicio 69

EJEMPLO 14 Factoriza $2(x + 5)^2 - 5(x + 5) - 12$.

Solución De nuevo usaremos una sustitución, como en los ejemplo 12 y 13. Al sustituir $a = x + 5$ en la ecuación, obtenemos

$$2(x + 5)^2 - 5(x + 5) - 12$$

$$= 2a^2 - 5a - 12 \qquad \text{Sustituye } (x + 5) \text{ por } a.$$

Ahora factoriza $2a^2 - 5a - 12$.

$$= (2a + 3)(a - 4)$$

Por último, reemplaza a con $x + 5$ para obtener

$$
\begin{aligned}
&= [2(x + 5) + 3][(x + 5) - 4] && \text{Sustituye } a \text{ por } (x + 5). \\
&= [2x + 10 + 3][x + 1] \\
&= (2x + 13)(x + 1)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $2(x + 5)^2 - 5(x + 5) - 12 = (2x + 13)(x + 1)$. Observa que $x + 5$ se sustituyó por a, y luego a se sustituyó por $x + 5$.

Resuelve ahora el ejercicio 73

En los ejemplos 12 y 13 usamos x en nuestra sustitución, mientras que en el ejemplo 14 utilizamos a. La letra seleccionada no afecta la respuesta final.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.5

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

$-1, x - 10$	$a = x - 6$	primos	compuesto	usando sustitución	$3x + 7$
centrales	prueba y error	MFC	-2	$x + 10$	-3

1. Un polinomio que no se puede factorizar se llama polinomio ________________.

2. En cualquier problema de factorización, el primer paso es factorizar el ________________.

3. Cuando factorizas usando el método de ________________, puede que debas probar muchas posibilidades para determinar los factores correctos.

4. Al escoger los factores para un problema de factorización, generalmente se prueba los factores ________________ primero.

5. Al método para factorizar un trinomio que se pueda factorizar por sustitución de una variable por otra se le conoce como factorización ________________.

6. Para factorizar $2(x - 6)^2 - 5(x - 6) - 12$, usa la sustitución ________________.

7. El primer paso en la factorización de $-3x^2 + 15x - 12$ es factorizar el MFC ________________.

8. Si un factor de $x^2 + 3x + 70$ es $x - 7$, el otro factor es ________________.

Practica tus habilidades

Cuando factorices un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, determina si los signos serán ambos +, ambos −, *o* uno + *y* uno −, *si:*

9. $a > 0, b > 0$, y $c > 0$

10. $a > 0, b > 0$, y $c < 0$

11. $a > 0, b < 0$, y $c < 0$

12. $a > 0, b < 0$, y $c > 0$

Factoriza cada trinomio por completo. Si el polinomio es primo, indícalo.

13. $x^2 + 7x + 12$
14. $a^2 + 2a - 15$
15. $b^2 + 8b - 9$
16. $y^2 - y - 20$
17. $z^2 + 4z + 4$
18. $c^2 - 14c + 49$
19. $r^2 + 24r + 144$
20. $y^2 - 18y + 81$
21. $x^2 + 30x - 64$
22. $x^2 - 11x - 210$
23. $x^2 - 13x - 30$
24. $p^2 - 6p - 24$
25. $-a^2 + 18a - 45$
26. $-x^2 - 15x - 56$
27. $x^2 + xy + 7y^2$
28. $a^2 + 10ab + 24b^2$
29. $-2m^2 - 14m - 20$
30. $-4x^2 - 16x - 12$
31. $4r^2 + 12r - 16$
32. $b^2 - 12bc - 45c^2$
33. $x^3 + 3x^2 - 18x$
34. $x^4 + 14x^3 + 33x^2$
35. $5a^2 - 8a + 3$
36. $5w^2 + 11w + 2$
37. $3x^2 - 3x - 6$
38. $-3b^2 - 14b + 5$
39. $6c^2 - 13c - 63$
40. $30z^2 - 71z + 35$
41. $8b^2 - 2b - 3$
42. $4a^2 + 47a + 33$
43. $6c^2 + 11c - 10$
44. $5z^2 - 16z + 12$
45. $16p^2 - 16pq - 12q^2$
46. $6r^4 + 5r^3 - 4r^2$
47. $4x^2 + 4xy + 9y^2$
48. $6r^2 + 7rs + 8s^2$
49. $18a^2 + 18ab - 8b^2$
50. $18y^2 - 28y - 16$
51. $8x^2 + 30xy - 27y^2$
52. $32x^2 - 22xy + 3y^2$
53. $100b^2 - 90b + 20$
54. $x^5y - 3x^4y - 18x^3y$
55. $a^3b^5 - a^2b^5 - 12ab^5$
56. $a^3b + 2a^2b - 35ab$
57. $3b^4c - 18b^3c^2 + 27b^2c^3$
58. $6p^3q^2 - 24p^2q^3 - 30pq^4$
59. $8m^8n^3 + 4m^7n^4 - 24m^6n^5$
60. $18x^2 + 27x - 35$
61. $30x^2 - x - 20$
62. $36x^2 - 23x - 8$
63. $8x^4y^5 + 24x^3y^5 - 32x^2y^5$
64. $8b^3c^2 + 25b^2c^3 + 12bc^4$

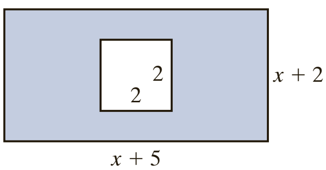
Factoriza cada trinomio por completo.

65. $x^4 + x^2 - 6$
66. $y^4 + y^2 - 12$
67. $b^4 + 9b^2 + 20$
68. $c^4 - 8c^2 + 12$
69. $6a^4 + 5a^2 - 25$
70. $(2x + 1)^2 + 2(2x + 1) - 15$
51. $4(x + 1)^2 + 8(x + 1) + 3$
72. $(2y + 3)^2 - (2y + 3) - 6$
73. $6(a + 2)^2 - 7(a + 2) - 5$
74. $6(p - 5)^2 + 11(p - 5) + 3$
75. $x^2y^2 + 9xy + 14$
76. $a^2b^2 + 8ab - 33$
77. $2x^2y^2 - 9xy - 11$
78. $3b^2c^2 - bc - 2$
79. $2y^2(2 - y) - 7y(2 - y) + 5(2 - y)$
80. $2y^2(y + 3) + 13y(y + 3) + 15(y + 3)$
81. $2p^2(p - 4) + 7p(p - 4) + 6(p - 4)$
82. $3x^2(x - 1) + 5x(x - 1) - 2(x - 1)$
83. $a^6 - 7a^3 - 30$
84. $2y^6 - 9y^3 - 5$
85. $x^2(x + 5) + 3x(x + 5) + 2(x + 5)$
86. $x^2(x + 6) - x(x + 6) - 30(x + 6)$
87. $5a^5b^2 - 8a^4b^3 + 3a^3b^4$
88. $2x^4y^6 + 3x^3y^5 - 9x^2y^4$

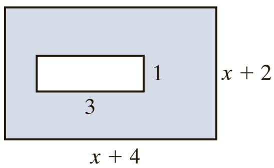
Resolución de problemas

Área *En los ejercicios 89 - 92, determina una expresión, en forma factorizada, para el área de la región sombreada. Ver ejemplo 8.*

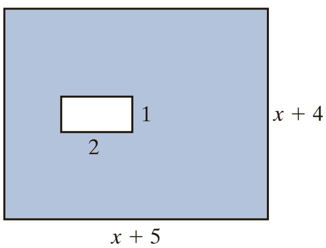
89.



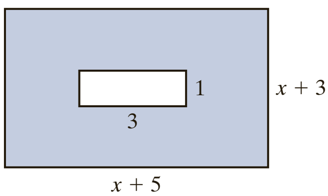
90.



91.



92.



93. Si los factores de un polinomio son $(2x + 3y)$ y $(x - 4y)$, determina el polinomio. Explica cómo determinaste tu respuesta.

94. Si los factores de un polinomio son 3, $(4x + 5)$ y $(2x + 3)$, determina el polinomio. Explica cómo determinaste tu respuesta.

95. Si sabemos que un factor del polinomio $x^2 + 4x - 21$ es $x - 3$, ¿cómo podemos determinar el otro factor? Determina el otro factor.

96. Si sabemos que un factor del polinomio $x^2 - xy - 6y^2$ es $x - 3y$, ¿cómo podemos determinar el otro factor? Determina el otro factor.

97. a) ¿Cuál de los siguientes trinomios crees que sería más difícil de factorizar por el método de prueba y error? Explica tu respuesta.

$$30x^2 + 23x - 40 \quad \text{o} \quad 49x^2 - 98x + 13$$

b) Factoriza ambos trinomios.

98. a) ¿Cuál de los siguientes trinomios crees que sería más difícil de factorizar por el método de prueba y error? Explica tu respuesta.

$$48x^2 + 26x - 35 \quad \text{o} \quad 35x^2 - 808x + 69$$

b) Factoriza ambos trinomios.

99. Determina todos los valores enteros de b para los cuáles $2x^2 + bx - 5$ es factorizable.

100. Determina todos los valores enteros de b para los cuáles $3x^2 + bx - 7$ es factorizable.

101. Si $x^2 + bx + 5$ es factorizable, ¿cuáles son los dos únicos valores posibles de b? Explica.

102. Si $x^2 + bx + c$ es factorizable y c es un número primo ¿cuáles son los dos únicos valores posibles de b? Explica.

Problemas de desafío

*Considera el trinomio $ax^2 + bx + c$. Si la expresión $b^2 - 4ac$, conocida como el **discriminante**, no es un cuadrado perfecto, el trinomio no puede ser factorizado sobre el conjunto de enteros. Los **cuadrados perfectos** son 1, 4, 9, 16, 25, 49, y así sucesivamente. Para los ejercicios 103-106,* **a)** *determina el valor de $b^2 - 4ac$.* **b)** *Si $b^2 - 4ac$ es un cuadrado perfecto, factoriza el polinomio; si $b^2 - 4ac$ no es un cuadrado perfecto, significa que el polinomio no puede ser factorizado.*

103. $x^2 - 8x + 15$

104. $6y^2 - 5y - 6$

105. $x^2 - 4x + 6$

106. $3t^2 - 6t + 2$

107. Construye un trinomio de la forma $x^2 + (c + 1)x + c$, donde c es un número real, que es factorizable.

108. Construye un trinomio de la forma $x^2 - (c + 1)x + c$, donde c es un número real, que es factorizable.

En los ejercicios 109-114, factoriza por completo. Considera que las variables en los exponentes representan enteros positivos.

109. $4a^{2n} - 4a^n - 15$

110. $a^2(a + b) - 2ab(a + b) - 3b^2(a + b)$

111. $x^2(x + y)^2 - 7xy(x + y)^2 + 12y^2(x + y)^2$

112. $3m^2(m - 2n) - 4mn(m - 2n) - 4n^2(m - 2n)$

113. $x^{2n} + 3x^n - 10$

114. $9r^{4y} + 3r^{2y} - 2$

115. Considera $x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$.

a) Explica cómo puedes verificar esta factorización usando gráficas en tu calculadora graficadora.

b) Verifica la factorización como lo explicaste en el inciso **a)** para ver si es correcta.

116. Considera $6x^3 - 11x^2 - 10x = x(2x - 5)(3x + 2)$.

a) Explica cómo puedes verificar esta factorización usando la función TABLE de tu calculadora graficadora.

b) Verifica la factorización como lo explicaste en el inciso **a)** para ver si es correcta.

Ejercicios de conceptos y escritura

117. Cuando factorizas cualquier trinomio, ¿cuál debe ser siempre el primer paso?

118. En una prueba, Tom Phu escribió la factorización siguiente y no recibió el punto completo del ejercicio. Explica por qué la factorización de Tom no está completa.

$$15x^2 - 21x - 18 = (5x + 3)(3x - 6)$$

119. a) Explica el procedimiento paso a paso para factorizar $6x^2 + x - 12$.

b) Factoriza $6x^2 + x - 12$ usando el procedimiento que explicaste en el inciso **a)**.

120. a) Explica el procedimiento paso a paso para factorizar $8x^2 - 20x - 12$.

b) Factoriza $8x^2 - 20x - 12$ usando el procedimiento que explicaste en el inciso **a)**.

121. ¿$2x^2 + 8x + 6 = (x + 3)(2x + 2)$ se factorizó por completo? Si no, escribe la factorización completa.

Explica.

122. ¿$x^3 - 3x^2 - 10x = (x^2 + 2x)(x - 5)$ se factorizó por completo? Si no, escribe la factorización completa.

Explica.

123. ¿$3x^3 + 6x^2 - 24x = x(x + 4)(3x - 6)$ se factorizó por completo? Si no, escribe la factorización completa.

Explica.

124. ¿$x^4 + 11x^3 + 30x^2 = x^2(x + 5)(x + 6)$ se factorizó por completo? Si no, escribe la factorización completa.

Explica.

Ejercicios de repaso acumulados

[2.2] **125.** Resuelve $F = \frac{9}{5}C + 32$ para C.

[3.3] **126.** Grafica $y = -3x + 4$.

[4.5] **127.** Evalúa el determinante $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$.

[5.2] **128.** Multiplica $[(x + y) + 6]^2$.

[5.3] **129.** Factoriza $2x^3 + 4x^2 - 5x - 10$.

5.6 Fórmulas especiales de factorización

1. Factorizar la diferencia de dos cuadrados.
2. Factorizar trinomios cuadrados perfectos.
3. Factorizar la suma y la diferencia de dos cubos.

En esta sección se presentan algunas fórmulas especiales para factorizar la diferencia de dos cuadrados, trinomios cuadrados perfectos, y la suma y diferencia de dos cubos. Es importante memorizar estas fórmulas.

1 Factorizar la diferencia de dos cuadrados

La expresión $x^2 - 9$ es un ejemplo de la diferencia de dos cuadrados.

$$x^2 - 9 = (x)^2 - (3)^2$$

Para factorizar la diferencia de dos cuadrados, es conveniente usar la **fórmula para la diferencia de dos cuadrados**.

Comprendiendo el álgebra

$a^2 - b^2$ es la *diferencia de dos cuadrados*, debido a que el *signo menos* está entre los dos cuadrados a^2 y b^2.

Diferencia de dos cuadrados

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

EJEMPLO 1 Factoriza las siguientes diferencias de cuadrados.

a) $x^2 - 16$ **b)** $25x^2 - 36y^2$

Solución Reescribe cada expresión como una diferencia de dos cuadrados. Luego utiliza la fórmula.

a) $x^2 - 16 = (x)^2 - (4)^2$
$$= (x + 4)(x - 4)$$

b) $25x^2 - 36y^2 = (5x)^2 - (6y)^2$
$$= (5x + 6y)(5x - 6y)$$

Resuelve ahora el ejercicio 13

EJEMPLO 2 Factoriza las siguientes diferencias de cuadrados.

a) $x^6 - y^4$ **b)** $2z^4 - 162x^6$

Solución Reescribe cada expresión como una diferencia de dos cuadrados. Luego utiliza la fórmula.

a) $x^6 - y^4 = (x^3)^2 - (y^2)^2$
$$= (x^3 + y^2)(x^3 - y^2)$$

b) $2z^2 - 162x^6 = 2(z^4 - 81x^6)$
$$= 2[(z^2)^2 - (9x^3)^2]$$
$$= 2(z^2 + 9x^3)(z^2 - 9x^3)$$

Resuelve ahora el ejercicio 21

EJEMPLO 3 Factoriza $x^4 - 81y^4$.

Solución

$$x^4 - 81y^4 = (x^2)^2 - (9y^2)^2$$
$$= (x^2 + 9y^2)(x^2 - 9y^2)$$

Observa que $(x^2 - 9y^2)$ también es una diferencia de dos cuadrados. Utilizamos la fórmula de la diferencia de dos cuadrados una segunda vez para obtener

$$= (x^2 + 9y^2)[(x)^2 - (3y)^2]$$
$$= (x^2 + 9y^2)(x + 3y)(x - 3y)$$

Resuelve ahora el ejercicio 69

EJEMPLO 4 Factoriza $(x - 5)^2 - 4$ utilizando la fórmula para la diferencia de dos cuadrados.

Solución Primero expresamos $(x - 5)^2 - 4$ como una diferencia de dos cuadrados.

$$(x - 5)^2 - 4 = (x - 5)^2 - 2^2$$
$$= [(x - 5) + 2][(x - 5) - 2]$$
$$= (x - 3)(x - 7)$$

Resuelve ahora el ejercicio 25

Comprendiendo el álgebra

La suma de dos cuadrados $a^2 + b^2$ no puede factorizarse usando números reales. Por lo tanto, los ejemplos siguientes son polinomios que no pueden factorizarse usando números reales.

$$x^2 + 9$$
$$4y^2 + 25$$
$$16z^2 + 49$$

Nota: *no es posible factorizar la suma de dos cuadrados con la forma $a^2 + b^2$ usando el conjunto de los números reales.*

Por ejemplo, no es posible factorizar $x^2 + 4$, ya que $x^2 + 4 = x^2 + 2^2$, la cual es una suma de dos.

2 Factorizar trinomios cuadrados perfectos

En la sección 5.2, vimos que

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Si invertimos los lados izquierdo y derecho de estas dos fórmulas, obtenemos dos **fórmulas especiales de factorización.**

Comprendiendo el álgebra

Un *trinomio cuadrado perfecto* ocurre cuando elevas al *cuadrado un binomio.*

$$\underbrace{(x + 4)^2}_{\text{cuadrado de un binomio}} = \underbrace{x^2 + 8x + 16}_{\text{trinomio cuadrado perfecto}}$$

Trinomios cuadrados perfectos

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Estos dos trinomios se denominan **trinomios cuadrados perfectos,** ya que cada uno es el cuadrado de un binomio. *Para ser un trinomio cuadrado perfecto, el primero y el último términos deben ser el cuadrado de alguna expresión, y el término central debe ser el doble del producto de esas dos expresiones.* Si un trinomio es un trinomio cuadrado perfecto, puedes factorizarlo usando las fórmulas dadas anteriormente.

Ejemplos de trinomios cuadrados perfectos

$$y^2 + 6y + 9 \quad \text{o} \quad y^2 + 2(y)(3) + 3^2$$
$$9a^2b^2 - 24ab + 16 \quad \text{o} \quad (3ab)^2 - 2(3ab)(4) + 4^2$$
$$(r + s)^2 + 10(r + s) + 25 \quad \text{o} \quad (r + s)^2 + 2(r + s)(5) + 5^2$$

Ahora factorizaremos algunos trinomios cuadrados perfectos.

EJEMPLO 5 Factoriza $x^2 - 8x + 16$.

Solución Como el primer término, x^2, y el último término, 16, o 4^2, son cuadrados, este trinomio podría ser un trinomio cuadrado perfecto. Para determinar si lo es, toma el doble del producto de x y 4 para ver si obtienes $8x$.

$$2(x)(4) = 8x$$

Como $8x$ es el término central, y como su signo es negativo, factoriza como sigue:

$$x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$$

Resuelve ahora el ejercicio 29

EJEMPLO 6 Factoriza $9x^4 - 12x^2 + 4$.

Solución El primer término es un cuadrado, $(3x^2)^2$, lo mismo que el último término, 2^2. Como $2(3x^2)(2) = 12x^2$, factorizamos como sigue:

$$9x^4 - 12x^2 + 4 = (3x^2 - 2)^2$$

Resuelve ahora el ejercicio 37

EJEMPLO 7 Factoriza $(a + b)^2 + 12(a + b) + 36$.

Solución El primer término, $(a + b)^2$, es un cuadrado. El último término, 36, o 6^2, también. El término central es $2(a + b)(6) = 12(a + b)$. Por lo tanto, éste es un trinomio cuadrado perfecto. Así,

$$(a + b)^2 + 12(a + b) + 36 = [(a + b) + 6]^2 = (a + b + 6)^2$$

Resuelve ahora el ejercicio 39

EJEMPLO 8 Factoriza $x^2 - 6x + 9 - y^2$.

Solución Como $x^2 - 6x + 9$ es un trinomio cuadrado perfecto que puede expresarse como $(x - 3)^2$, escribimos

$$(x - 3)^2 - y^2$$

Ahora $(x - 3)^2 - y^2$ es una diferencia de cuadrados; por lo tanto

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 - y^2 &= [(x - 3) + y][(x - 3) - y] \\ &= (x - 3 + y)(x - 3 - y)\end{aligned}$$

Así, $x^2 - 6x + 9 - y^2 = (x - 3 + y)(x - 3 - y)$.

Resuelve ahora el ejercicio 45

El polinomio del ejemplo 8 tiene cuatro términos. En la sección 5.4 aprendimos a factorizar por agrupación polinomios con cuatro términos. Si analizas el ejemplo 8, verás que, sin importar cuánto lo intentes, los cuatro términos no pueden acomodarse de modo que tanto los primeros dos términos como los últimos dos tengan un factor común.

Consejo útil

Siempre que un polinomio con cuatro términos no pueda factorizarse por agrupación, intenta reescribir tres de los términos como el recuadro de un binomio y luego factoriza mediante la fórmula de la diferencia de dos cuadrados.

EJEMPLO 9 Factoriza $4a^2 + 12ab + 9b^2 - 25$.

Solución Primero observamos que este polinomio de cuatro términos no se puede factorizar por agrupación. Después, lo analizamos para determinar si tres de los términos que lo conforman pueden expresarse como el cuadrado de un binomio. Para completar la factorización, utilizamos la fórmula de la diferencia de dos cuadrados.

$$\begin{aligned}4a^2 + 12ab + 9b^2 - 25 &= (2a + 3b)^2 - 5^2 \\ &= [(2a + 3b) + 5][(2a + 3b) - 5] \\ &= (2a + 3b + 5)(2a + 3b - 5)\end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 47

3 Factorizar la suma y la diferencia de dos cubos

Al principio de esta sección factorizamos la diferencia de dos cuadrados. Ahora factorizaremos la suma y la diferencia de dos cubos. Considera el producto de $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

$$\begin{array}{rrrr}
 & a^2 & -\,ab & +\,b^2 \\
 & & a & +\,b \\
\hline
 & a^2b & -\,ab^2 & +\,b^3 \\
a^3 & -\,a^2b & +\,ab^2 & \\
\hline
a^3 & & & +\,b^3
\end{array}$$

Por lo tanto, $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. También mediante la multiplicación podemos demostrar que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Las fórmulas para factorizar **la suma y la diferencia de dos cubos** aparecen en los siguientes recuadros.

Comprendiendo el álgebra

$a^3 + b^3$ es la *suma de dos cubos* debido a que el *signo más* se encuentra entre los dos cubos a^3 y b^3.

Suma de dos cubos

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Diferencia de dos cubos

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

EJEMPLO 10 Factoriza la suma de cubos $x^3 + 64$.

Solución Reescribe $x^3 + 64$ como una suma de dos cubos, $x^3 + 4^3$. Haz que x corresponda a a y 4 a b. Luego factoriza mediante la fórmula de la suma de dos cubos.

$$\begin{aligned}
a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\
&\quad \downarrow \\
x^3 + \mathbf{4}^3 &= (x + \mathbf{4})[x^2 - x(\mathbf{4}) + \mathbf{4}^2] \\
&= (x + 4)(x^2 - 4x + 16
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $x^3 + 64 = (x + 4)(x^2 - 4x + 16)$.

Resuelve ahora el ejercicio 51

EJEMPLO 11 Factoriza la siguiente diferencia de cubos $27x^3 - 8y^6$.

Solución Primero observamos que $27x^3$ y $8y^6$ no tienen factores comunes distintos de 1. Debido a que podemos expresar $27x^3$ y $8y^6$ como cubos, es posible factorizar mediante la fórmula para la diferencia de dos cubos.

$$\begin{aligned}
27x^3 - 8y^6 &= (3x)^3 - (\mathbf{2y^2})^3 \\
&= (3x - \mathbf{2y^2})[(3x)^2 + (3x)(\mathbf{2y^2}) + (\mathbf{2y^2})^2] \\
&= (3x - 2y^2)(9x^2 + 6xy^2 + 4y^4)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $27x^3 - 8y^6 = (3x - 2y^2)(9x^2 + 6xy^2 + 4y^4)$.

Resuelve ahora el ejercicio 57

EJEMPLO 12 Factoriza $8y^3 - 64x^6$.

Solución Primero factoriza 8, debido a que es el MFC.

$$8y^3 - 64x^6 = 8(y^3 - 8x^6)$$

Ahora factoriza $y^3 - 8x^6$ escribiéndolo como una diferencia de dos cubos.

$$\begin{aligned} 8(y^3 - 8x^6) &= 8[(y)^3 - (2x^2)^3] \\ &= 8(y - 2x^2)[y^2 + y(2x^2) + (2x^2)^2] \\ &= 8(y - 2x^2)(y^2 + 2x^2y + 4x^4) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $8y^3 - 64x^6 = 8(y - 2x^2)(y^2 + 2x^2y + 4x^4)$.

Resuelve ahora el ejercicio 59

EJEMPLO 13 Factoriza $(x - 2)^3 + 125$.

Solución Escribe $(x - 2)^3 + 125$ como una suma de dos cubos; luego factoriza utilizando la fórmula para la suma de dos cubos.

$$\begin{aligned} (x - 2)^3 + (5)^3 &= [(x - 2) + 5][(x - 2)^2 - (x - 2)(5) + (5)^2] \\ &= (x - 2 + 5)(x^2 - 4x + 4 - 5x + 10 + 25) \\ &= (x + 3)(x^2 - 9x + 39) \end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 65

Consejo útil

El cuadrado de un binomio tiene un 2 como parte del término central del trinomio.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

La suma o la diferencia de dos cubos tiene un factor similar al del trinomio en el cuadrado del binomio. Sin embargo, el término central no tiene un 2.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)\underbrace{(a^2 + ab + b^2)}_{\text{no es } 2ab}$$

EJEMPLO 14 **Volumen** Utilizando los cubos de la **Figura 5.16**, determina una expresión, en forma factorizada, para calcular la diferencia entre sus volúmenes.

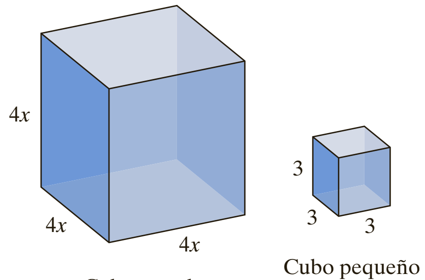


FIGURA 5.16

Solución Para encontrar la diferencia entre los volúmenes, resta el volumen del cubo pequeño del volumen del cubo grande.

$$\text{Volumen del cubo grande} = (4x)^3$$
$$\text{Volumen del cubo pequeño} = 3^3$$

$$\begin{aligned} \text{Diferencia entre los volúmenes} &= (4x)^3 - 3^3 && \text{Resta volúmenes.} \\ &= (4x - 3)[(4x)^2 + (4x)3 + 3^2] && \text{Factoriza.} \\ &= (4x - 3)(16x^2 + 12x + 9) && \text{Simplifica.} \end{aligned}$$

La diferencia entre los volúmenes de los dos cubos es $(4x - 3)(16x^2 + 12x + 9)$.

Resuelve ahora el ejercicio 87

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.6

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

perfecto	$(9x + 4y)$	$(x - 7)^2$	5	$(x + 7)^2$	diferencia	$(a - b)^2$
dos	10	$(a + b)^2$	-10	dos	$(9x + 4y)(9x - 4y)$	
suma	cuadrado perfecto	$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$	$(a^2 - b^2)$	$(a^2 + b^2)$	$(a - b)(a^2 + ab + b^2)$	

1. La fórmula $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ es la fórmula para factorizar la diferencia de __________ cuadrados.
2. $81x^2 - 16y^2$ se factoriza en __________.
3. Al trinomio $a^2 + 2ab + b^2$ se le llama trinomio __________.
4. $a^2 + 2ab + b^2$ se factoriza en __________.
5. El trinomio cuadrado perfecto $x^2 + 14x + 49$ se factoriza en __________.
6. Si $x^2 + bx + 25$ fuera un trinomio cuadrado perfecto, el valor de b sería __________.
7. La expresión $a^3 + b^3$ es la __________ de dos cubos.
8. La expresión $a^3 - b^3$ es la __________ de dos cubos.
9. $a^3 + b^3$ se factoriza en __________.
10. $a^3 - b^3$ se factoriza en __________.

Practica tus habilidades

Usa la fórmula de diferencia de dos cuadrados o la de trinomio cuadrado perfecto para factorizar cada polinomio.

11. $x^2 - 81$ **12.** $x^2 - 121$ **13.** $a^2 - 100$
14. $1 - 16x^2$ **15.** $1 - 49b^2$ **16.** $x^2 - 81z^2$
17. $25 - 16y^2$ **18.** $49 - 144b^4$ **19.** $\frac{1}{100} - y^2$
20. $\frac{1}{36} - z^2$ **21.** $x^2y^2 - 121c^2$ **22.** $6a^2c^2 - 24x^2y^2$
23. $0.04x^2 - 0.09$ **24.** $0.16p^2 - 0.81q^2$ **25.** $36 - (x - 6)^2$
26. $144 - (a + b)^2$ **27.** $a^2 - (3b + 2)^2$ **28.** $(2c + 3)^2 + 9$
29. $x^2 + 10x + 25$ **30.** $b^2 - 18b + 81$ **31.** $49 - 14t + t^2$
32. $4 + 4a + a^2$ **33.** $36p^2q^2 + 12pq + 1$ **34.** $9x^2 - 30xy + 25y^2$
35. $0.81x^2 - 0.36x + 0.04$ **36.** $0.25x^2 - 0.40x + 0.16$ **37.** $y^4 + 4y^2 + 4$
38. $b^4 - 16b^2 + 64$ **39.** $(a + b)^2 + 6(a + b) + 9$ **40.** $(x - y)^2 + 2(x - y) + 1$
41. $(y - 3)^2 + 8(y - 3) + 16$ **42.** $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ **43.** $x^2 + 6x + 9 - y^2$
44. $p^2 + 2pq + q^2 - 25r^2$ **45.** $25 - (x^2 + 4x + 4)$ **46.** $49 - (c^2 - 8c + 16)$
47. $9a^2 - 12ab + 4b^2 - 9$ **48.** $(4a - 3b)^2 - (2a + 5b)^2$ **49.** $y^4 - 6y^2 + 9$
50. $z^6 + 14z^3 + 49$

Factoriza usando la fórmula de suma o diferencia de dos cubos.

51. $a^3 + 125$ **52.** $x^3 - 8$ **53.** $64 - a^3$
54. $27 - b^3$ **55.** $p^3 - 27a^3$ **56.** $w^3 - 216$
57. $27y^3 - 8x^3$ **58.** $5x^3 + 40y^3$ **59.** $16a^3 - 54b^3$
60. $2b^3 - 250c^3$ **61.** $x^6 + y^9$ **62.** $16x^6 - 250y^3$
63. $(x + 1)^3 + 1$ **64.** $(a - 3)^3 + 8$ **65.** $(a - b)^3 - 27$
66. $(2x + y)^3 - 64$ **67.** $b^3 - (b + 3)^3$ **68.** $(m - n)^3 - (m + n)^3$

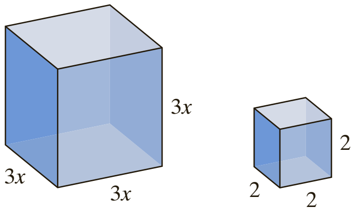
Factoriza usando una fórmula de factorización especial.

69. $a^4 - 4b^4$ **70.** $121y^4 - 49x^2$ **71.** $49 - 64x^2y^2$
72. $25y^2 - 81x^2$ **73.** $(x + y)^2 - 16$ **74.** $25x^4 - 81y^6$
75. $x^3 - 64$ **76.** $3a^2 - 36a + 108$ **77.** $9x^2y^2 + 24xy + 16$
78. $a^4 + 12a^2 + 36$ **79.** $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$ **80.** $8y^3 - 125x^6$
81. $x^2 - 2x + 1 - y^2$ **82.** $16x^2 - 8xy + y^2 - 4$ **83.** $(x + y)^3 + 1$
84. $4r^2 + 4rs + s^2 - 9$ **85.** $(m + n)^2 - (2m - n)^2$ **86.** $(r + p)^3 + (r - p)^3$

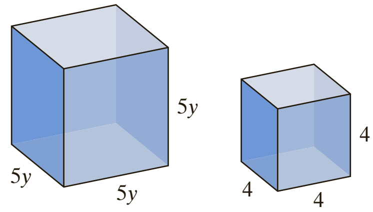
Resolución de problemas

Volumen *En los ejercicios 87 - 90, encuentra una expresión, en forma factorizada, para la diferencia de los volúmenes de los dos cubos. Ver ejemplo 14.*

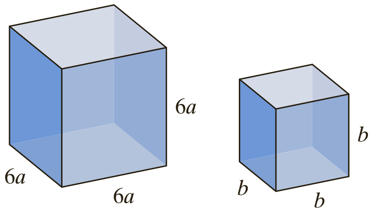
87.



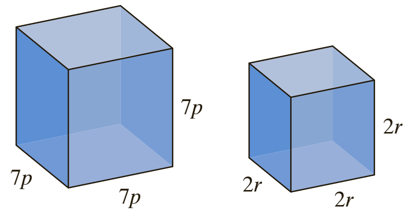
88.



89.

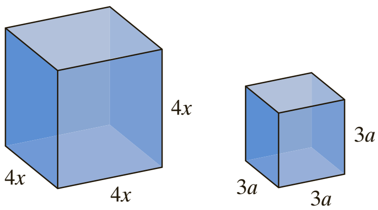


90.

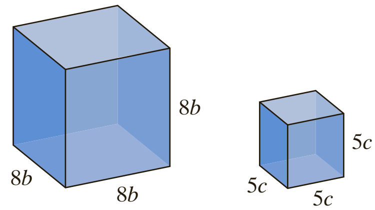


Volumen *En los ejercicios 91 y 92, encuentra una expresión, en forma factorizada, para la suma de los volúmenes de los dos cubos. Ver ejemplo 14.*

91.

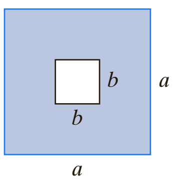


92.



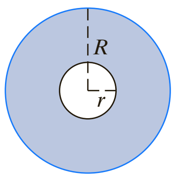
Área o volumen *En los ejercicios 93 a 97,* **a)** *encuentra el área o el volumen de la figura sombreada restando el área o el volumen más pequeño del más grande. Las fórmulas para encontrar el área o el volumen están dadas debajo de la figura.* **b)** *Escribe la expresión obtenida en el inciso* **a)** *en forma factorizada. Parte de que el MFC en los ejercicios 94, 96 y 97 es π.*

93. Cuadrados



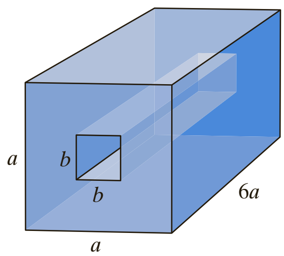
$A = s^2$

94. Círculos



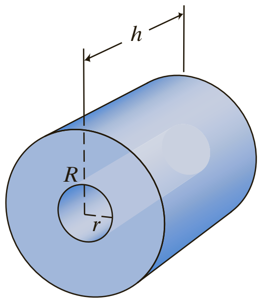
$A = \pi r^2$

95. Paralelepípedo rectangular



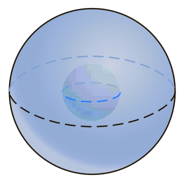
$V = lwh$

96. Cilindro



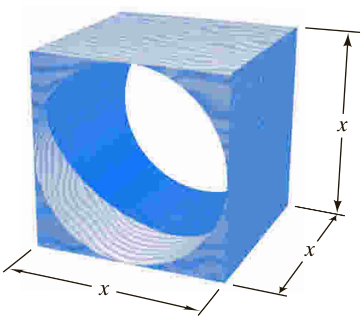
$V = \pi r^2 h$

97. Esfera



$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

98. Área y volumen Se corta un orificio circular en un cubo de madera como se muestra en la figura.



a) Escribe una expresión en forma factorizada en función de x para el área de la sección transversal de la madera restante.

b) Escribe una expresión en forma factorizada en función de x para el volumen de la madera restante.

99. Determina dos valores de b que hagan a $4x^2 + bx + 9$ un trinomio cuadrado perfecto. Explica cómo determinaste tu respuesta.

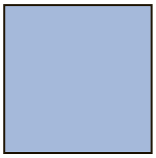
100. Determina dos valores de c que hagan a $16x^2 + cx + 4$ un trinomio cuadrado perfecto. Explica cómo determinaste tu respuesta.

101. Determina el valor de c que haga a $25x^2 + 20x + c$ un trinomio cuadrado perfecto. Explica cómo determinaste tu respuesta.

102. Determina el valor de d que haga a $49x^2 - 42x + d$ un trinomio cuadrado perfecto. Justifica cómo determinaste tu respuesta.

103. Área La fórmula para el área de un cuadrado es $A = l^2$, donde l es un lado. Considera el área de un cuadrado como se da a continuación.

$$A(x) = 25x^2 - 30x + 9$$



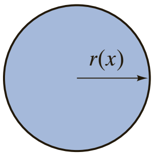
a) Explica cómo determinar la longitud del lado x, $l(x)$.

b) Determina $l(x)$.

c) Determina $l(2)$.

104. Área La fórmula para el área de un círculo es $A = \pi r^2$, donde r es el radio. Considera el área de un círculo como se da a continuación.

$$A(x) = 9\pi x^2 + 12\pi x + 4\pi$$



a) Explica cómo determinar el radio $r(x)$.

b) Determina $r(x)$.

c) Determina $r(4)$.

105. Factoriza $x^4 + 64$ escribiendo la expresión como $(x^4 + 16x^2 + 64) - 16x^2$, que es una diferencia de dos cuadrados.

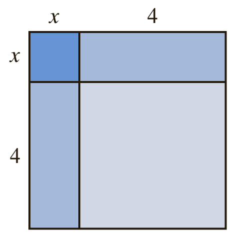
106. Factoriza $x^4 + 4$ sumando y restando $4x^2$ (ver ejercicio 5).

107. Si $P(x) = x^2$, usa la diferencia de dos cuadrados para simplificar $P(a + h) - P(a)$.

108. Si $P(x) = x^2$, usa la diferencia de dos cuadrados para simplificar $P(a + 1) - P(a)$.

109. Suma de áreas La figura muestra cómo *completamos el cuadrado*. La suma de las áreas de las tres partes del cuadrado que están sombreadas en azul fuerte y azul es

$$x^2 + 4x + 4x \text{ o } x^2 + 8x$$



a) Determina el área de la cuarta parte (en azul claro) para completar el cuadrado.

b) Determina la suma de las áreas de las cuatro partes del cuadrado.

c) Este proceso da como resultado un trinomio cuadrado perfecto en el inciso **b)**. Escribe este trinomio cuadrado perfecto como binomio al cuadrado.

110. Factoriza $(m - n)^3 - (9 - n)^3$.

Factoriza por completo.

111. $64x^{4a} - 9y^{6a}$

112. $16p^{8w} - 49p^{6w}$

113. $a^{2n} - 16a^n + 64$

114. $144r^{8k} + 48r^{4k} + 4$

115. $x^{3n} - 8$

116. $27x^{3m} + 64x^{6m}$

En los ejercicios 117 y 118, indica si la factorización es o no es correcta. Explica tus respuestas.

117. $2x^2 - 18 \stackrel{?}{=} 2(x + 3)(x - 3)$

118. $8x^3 + 27 \stackrel{?}{=} 2x(4x^2 + 5x + 9)$

Ejercicios de conceptos y escritura

119. a) Explica cómo factorizar la diferencia de dos cuadrados.

b) Factoriza $x^2 - 16$ usando el procedimiento que explicaste en el inciso **a)**.

120. a) Explica cómo factorizar un trinomio cuadrado perfecto.

b) Factoriza $x^2 + 12x + 36$ usando el procedimiento que explicaste en el inciso **a)**.

121. Escribe la fórmula para la factorización de la suma de dos cubos.

122. Escribe la fórmula para la factorización de la diferencia de dos cubos.

123. Explica por qué una suma de dos cuadrados, $a^2 + b^2$, no se puede factorizar en el conjunto de los números reales.

124. Explica cómo determinas cuándo un trinomio es un trinomio cuadrado perfecto.

125. $x^2 + 14x - 49 = (x + 7)(x - 7)$ ¿está factorizado correctamente? Explica.

126. $x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2$ ¿está factorizado correctamente? Explica.

127. $x^2 - 81 = (x - 9)^2$ ¿está factorizado correctamente? Explica.

128. $x^2 - 64 = (x + 8)(x - 8)$ ¿está factorizado correctamente? Explica.

Problemas de desafío

129. La expresión $x^6 - 1$ se puede factorizar usando diferencia de dos cuadrados o diferencia de dos cubos. A primera vista, los factores no tienen el mismo aspecto, pero con un poco de manipulación algebraica puede demostrarse que son iguales. Factoriza $x^6 - 1$ usando **a)** diferencia de dos cuadrados y **b)** diferencia de dos cubos. **c)** Demuestra que ambas respuestas son iguales factorizando la respuesta obtenida en el inciso **a)** completamente. Luego multiplica ambos binomios entre sí y ambos trinomios entre sí.

Actividad de grupo

Analiza y responde el ejercicio 130 en grupo.

130. Más adelante en el libro necesitaremos construir trinomios cuadrados perfectos. Analiza algunos trinomios cuadrados perfectos con un coeficiente principal de 1.

a) Explica cómo b y c están relacionados si el trinomio $x^2 + bx + c$ es un trinomio cuadrado perfecto.

b) Construye un trinomio cuadrado perfecto si los primeros dos términos son $x^2 + 6x$.

c) Construye un trinomio cuadrado perfecto si los primeros dos términos son $x^2 - 10x$.

d) Construye un trinomio cuadrado perfecto si los primeros dos términos son $x^2 - 14x$.

Ejercicios de repaso acumulados

[2.1] **131.** Simplifica $-2[3x - (2y - 1) - 5x] + 3y$.

[3.6] **132.** Si $f(x) = x^2 - 3x + 6$ y $g(x) = 5x - 2$, determina $(g - f)(-1)$.

[4.4] **133.** **Ángulos** Un ángulo recto está dividido en tres pequeños ángulos. El más grande de los tres ángulos es dos veces el más pequeño. El ángulo que sobra es 10° más grande que el ángulo más pequeño. Determina la magnitud de cada ángulo.

[5.4] **134.** Factoriza el máximo factor común de $45y^{12} + 60y^{10}$.

135. Factoriza $12x^2 - 9xy + 4xy - 3y^2$.

5.7 Repaso general de factorización

1 Factorizar polinomios mediante una combinación de técnicas.

1 Factorizar polinomios mediante una combinación de técnicas

Ahora presentaremos un procedimiento general para factorizar cualquier polinomio.

Para factorizar un polinomio

1. Determina si todos los términos del polinomio tienen un máximo factor común distinto de 1. Si es así, factoriza el MFC.
2. Si el polinomio tiene dos términos, determina si es una diferencia de dos cuadrados o una suma o diferencia de dos cubos. En cualquiera de estos casos, factoriza utilizando la fórmula adecuada de la Sección 5.6.
3. Si el polinomio tiene tres términos, determina si es un trinomio cuadrado perfecto. Si lo es, factorízalo como corresponde. De lo contrario, factoriza el trinomio utilizando los métodos de prueba y error, agrupación o sustitución como se explicó en la Sección 5.5.
4. Si el polinomio tiene más de tres términos, trata de factorizarlo mediante agrupación. Si eso no funciona, ve si tres de los términos son el cuadrado de un binomio.
5. Como paso final, examina el polinomio factorizado para ver si los factores encontrados tienen un factor común y se pueden factorizar más. Si encuentras un factor común, factorízalo.
6. Verifica la respuesta mediante multiplicación de factores.

Los ejemplos siguientes ilustran cómo utilizar este procedimiento.

EJEMPLO 1 Factoriza $2x^4 - 50x^2$.

Solución Primero verifica si existe un máximo factor común distinto de 1. Como $2x^2$ es común en ambos términos, factorízalo.

$$2x^4 - 50x^2 = 2x^2(x^2 - 25) = 2x^2(x + 5)(x - 5)$$

Observa que $x^2 - 25$ se factorizó como una diferencia de dos cuadrados.

Resuelve ahora el ejercicio 3

EJEMPLO 2 Factoriza $3x^2y^2 - 24xy^2 + 48y^2$.

Solución Comienza factorizando el MFC, $3y^2$, de cada término.

$$3x^2y^2 - 24xy^2 + 48y^2 = 3y^2(x^2 - 8x + 16) = 3y^2(x - 4)^2$$

Observa que $x^2 - 8x + 16$ es un trinomio cuadrado perfecto. Si no lo reconoces, también podrás obtener la respuesta correcta factorizando el trinomio en $(x - 4)(x - 4)$.

Resuelve ahora el ejercicio 27

EJEMPLO 3 Factoriza $24x^2 - 6xy + 40xy - 10y^2$.

Solución Como siempre, comienza por determinar si todos los términos del polinomio tienen un factor común. En este ejemplo, 2 es común a todos los términos. Factoriza el 2; después factoriza el polinomio de cuatro términos resultante mediante agrupación.

$$\begin{aligned} 24x^2 - 6xy + 40xy - 10y^2 &= 2(12x^2 - 3xy + 20xy - 5y^2) \\ &= 2[3x(4x - y) + 5y(4x - y)] \\ &= 2(4x - y)(3x + 5y) \end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 31

EJEMPLO 4 Factoriza $12a^2b - 18ab + 24b$.

Solución $12a^2b - 18ab + 24b = 6b(2a^2 - 3a + 4)$

Como $2a^2 - 3a + 4$ no puede factorizarse, concluimos aquí.

Resuelve ahora el ejercicio 7

EJEMPLO 5 Factoriza $2x^4y + 54xy$.

Solución

$$\begin{aligned} 2x^4y + 54xy &= 2xy(x^3 + 27) \\ &= 2xy(x + 3)(x^2 - 3x + 9) \end{aligned}$$

Observa que factorizamos $x^3 + 27$ como una suma de dos cubos.

Resuelve ahora el ejercicio 19

EJEMPLO 6 Factoriza $3x^2 - 18x + 27 - 3y^2$.

Solución Factorizamos 3 de los cuatro términos.

$$3x^2 - 18x + 27 - 3y^2 = 3(x^2 - 6x + 9 - y^2)$$

Ahora trataremos de factorizar los cuatro términos dentro de los paréntesis mediante agrupación. Como puedes ver, esto no es posible, así que analizaremos si podemos escribir tres de los términos como el cuadrado de un binomio. Como esto puede hacerse, expresamos $x^2 - 6x + 9$, como $(x - 3)^2$ y luego utilizamos la fórmula de la diferencia de dos cuadrados. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 3x^2 - 18x + 27 - 3y^2 &= 3[(x - 3)^2 - \mathbf{y}^2] \\ &= 3[(x - 3 + \mathbf{y})(x - 3 - \mathbf{y})] \\ &= 3(x - 3 + y)(x - 3 - y) \end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 43

Consejo útil

Consejo de estudio

En esta sección, hemos repasado todas las técnicas para la factorización de expresiones. Si todavía tienes problemas para factorizar, vuelve a estudiar los temas de las secciones 5.4 a 5.6.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.7

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

-1 $\quad$ -5 $\quad$ $21x^2y^3$ $\quad$ $7x^2y^3$ $\quad$ $7xy$

1. El primer paso para factorizar $-5x^3 + 40y^3$ es factorizar _______________.

2. El máximo factor común de $14x^2y + 21xy^3$ es _______________.

Practica tus habilidades

Factoriza cada polinomio por completo.

3. $3x^2 - 75$

4. $4x^2 - 24x + 36$

5. $10s^2 + 19s - 15$

6. $-8r^2 + 30r - 18$

7. $6x^3y^2 + 10x^2y^3 + 14x^2y^2$

8. $24m^3n - 12m^2n^2 + 16mn^3$

9. $0.8x^2 - 0.072$

10. $0.5x^2 - 0.32$

11. $6x^5 - 54x$

12. $7x^2y^2z^2 - 28x^2y^2$

13. $3x^6 - 3x^5 + 12x^5 - 12x^4$

14. $2x^2y^2 + 6xy^2 - 10xy^2 - 30y^2$

15. $5x^4y^2 + 20x^3y^2 + 15x^3y^2 + 60x^2y^2$

16. $6x^2 - 15x - 9$

17. $x^4 - x^2y^2$

18. $4x^3 + 108$

19. $x^7y^2 - x^4y^2$

20. $x^4 - 81$

21. $x^5 - 16x$

22. $20x^2y^2 + 55xy^2 - 15y^2$

23. $4x^6 + 32y^3$

24. $8x^4 - 4x^3 - 4x^3 + 2x^2$

25. $5(a + b)^2 - 20$

26. $12x^3y^2 + 4x^2y^2 - 40xy^2$

27. $6x^2 + 36xy + 54y^2$

28. $3x^2 - 30x + 75$

29. $(x + 2)^2 - 4$

30. $7y^4 - 63x^6$

31. $6x^2 + 24xy - 3xy - 12y^2$

32. $pq + 8q + pr + 8r$

33. $(y + 5)^2 + 4(y + 5) + 4$

34. $(x + 1)^2 - (x + 1) - 6$

35. $b^4 + 2b^2 + 1$

36. $45a^4 - 30a^3 + 5a^2$

37. $x^3 + \frac{1}{64}$

38. $27y^3 - \frac{1}{8}$

39. $6y^3 + 14y^2 + 4y$

40. $3x^3 + 2x^2 - 27x - 18$

41. $a^3b - 81ab^3$

42. $x^6 + y^6$

43. $49 - (x^2 + 2xy + y^2)$

44. $x^2 - 2xy + y^2 - 25$

45. $24x^2 - 34x + 12$

46. $40x^2 + 52x - 12$

47. $18x^2 + 39x - 15$

48. $7(a - b)^2 + 4(a - b) - 3$

49. $x^4 - 16$

50. $(x + 4)^2 - 12(x + 4) + 36$

51. $5bc - 10cx - 7by + 14xy$

52. $16y^4 - 9y^2$

53. $3x^4 - x^2 - 4$

54. $x^2 + 16x + 64 - 100y^2$

55. $z^2 - (x^2 - 12x + 36)$

56. $7a^3 + 56$

57. $2(y + 4)^2 + 5(y + 4) - 12$

58. $x^6 + 15x^3 + 54$

59. $a^2 + 12ab + 36b^2 - 16c^2$

60. $y^3 - y^5$

61. $10x^4y + 25x^3y - 15x^2y$

62. $4x^2y^2 + 12xy + 9$

63. $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

64. $12r^2s^2 + rs - 1$

Resolución de problemas

Relaciona los ejercicios 65 - 72 con los elementos marcados de **a)** *hasta* **h)** *a la derecha.*

65. $a^2 + b^2$

66. $a^2 - b^2$

67. $a^2 + 2ab + b^2$

68. $a^3 + b^3$

69. $a^3 - b^3$

70. $a^2 - 2ab + b^2$

71. un factor de $a^3 + b^3$

72. un factor de $a^3 - b^3$

a) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

b) $(a - b)^2$

c) $a^2 - ab + b^2$

d) $(a + b)^2$

e) no factorizable

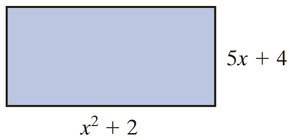
f) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

g) $(a + b)(a - b)$

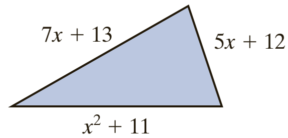
h) $a^2 + ab + b^2$

Perímetro *En los ejercicios 73 y 74, encuentra una expresión, en forma factorizada, para el perímetro de cada figura.*

73.

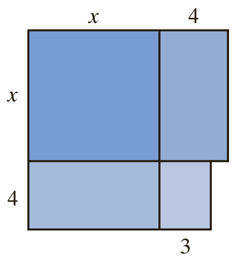


74.

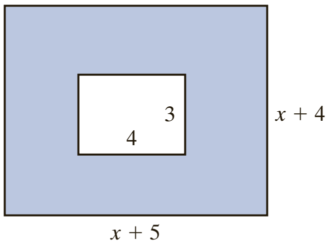


Área *En los ejercicios 75 - 78, encuentra una expresión, en forma factorizada, para el área de la región sombreada para cada figura.*

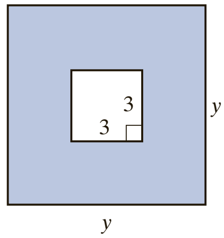
75.



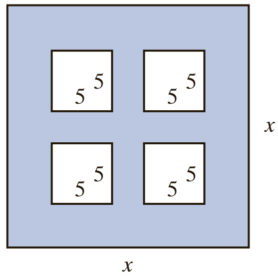
76.



77.

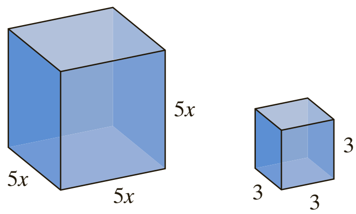


78.

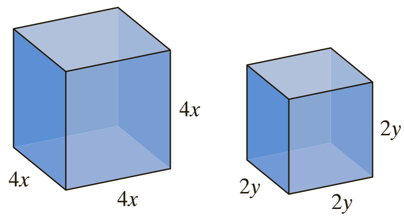


Volumen *En los ejercicios 79 y 80, encuentra una expresión, en forma factorial, para la diferencia en los volúmenes de los cubos.*

79.

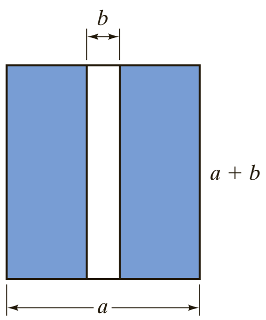


80.

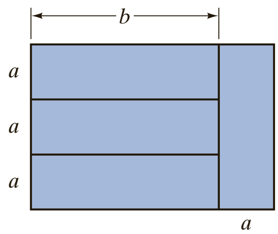


Área *En los ejercicios 81-84,* ***a)*** *escribe una expresión para el área sombreada de la figura, y* ***b)*** *escribe la expresión en forma factorizada.*

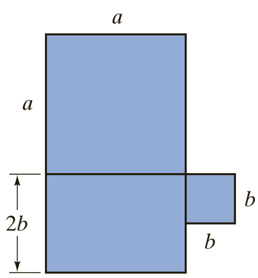
81.



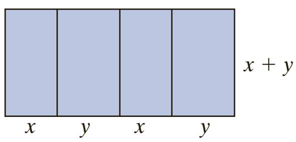
82.



83.



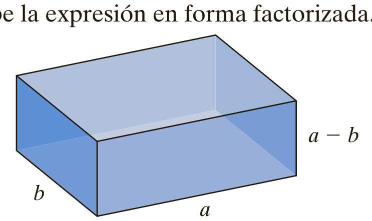
84.



85. Área superficial

a) Escribe una expresión para el área superficial de los cuatro lados de la caja mostrada (omite las partes superior e inferior).

b) Escribe la expresión en forma factorizada.



86. Explica cómo la fórmula para factorizar la *diferencia* de dos cubos puede usarse para factorizar $x^3 + 27$.

87. a) Explica cómo construir un trinomio cuadrado perfecto.

b) Construye un trinomio cuadrado perfecto y luego muestra sus factores.

Problemas de desafío

En este capítulo hemos trabajado solo con exponentes enteros positivos, sin embargo, en una expresión también pueden factorizarse los exponentes fraccionarios y los exponentes enteros negativos. Las expresiones siguientes no son polinomios. **a)** *En cada expresión factoriza la variable con el exponente menor (o más negativo). (Los exponentes fraccionarios se analizarán en la sección 7.2.)* **b)** *Factoriza por completo.*

88. $x^{-2} - 5x^{-3} + 6x^{-4}$, factoriza x^{-4}

89. $x^{-3} - 2x^{-4} - 3x^{-5}$, factoriza x^{-5}

90. $x^{5/2} + 3x^{3/2} - 4x^{1/2}$, factoriza $x^{1/2}$

91. $5x^{1/2} + 2x^{-1/2} - 3x^{-3/2}$, factoriza $x^{-3/2}$

Ejercicios de repaso acumulados

[2.1] **92.** Resuelve $6(x + 4) - 4(3x + 3) = 6$.

[2.6] **93.** Determina el conjunto solución para $\left|\frac{6 + 2z}{3}\right| > 2$.

[4.3] **94. Mezcla de café** Dennis Reissig dirige una tienda de abarrotes y desea mezclar 30 libras de café para vender a un costo total de \$170. Para obtener la mezcla, utilizará un café que vende a \$5.20 por libra y otro café que vende a \$6.30 por libra. ¿Cuántas libras de cada café debe utilizar?

[5.2] **95.** Multiplica $(5x + 4)(x^2 - x + 4)$.

[5.4] **96.** Factoriza $2x^3 + 6x^2 - 5x - 15$.

5.8 Ecuaciones polinomiales

1 Utilizar la propiedad del factor nulo para resolver ecuaciones.

2 Utilizar la factorización para resolver ecuaciones.

3 Utilizar la factorización para resolver problemas de aplicación.

4 Utilizar la factorización para determinar las intersecciones con el eje x de una función cuadrática.

Comprendiendo el álgebra

Recuerda que una *ecuación* debe contener un *signo de igualdad* (=). Para que una ecuación cuadrática esté en forma general, debe tener $ax^2 + bx + c$ de un lado del signo igual y 0 del otro lado.

Siempre que se establece que dos polinomios son iguales entre sí, tenemos una **ecuación polinomial**.

Ejemplos de ecuaciones polinomiales

$$x^2 + 2x = x - 5$$
$$y^3 + 3y - 2 = 0$$
$$4x^4 + 2x^2 = -3x + 2$$

El **grado de una ecuación polinomial** es el mismo que el del término con mayor grado. Por ejemplo, las tres ecuaciones anteriores tienen grados 2, 3 y 4, respectivamente.

Ecuación cuadrática

Una ecuación de segundo grado con una variable se denomina una **ecuación cuadrática**.

Ejemplos de ecuaciones cuadráticas

$$3x^2 + 6x - 4 = 0$$
$$5x = 2x^2 - 4$$
$$(x + 4)(x - 3) = 0$$

Cualquier ecuación cuadrática puede escribirse en la **forma general**.

Forma general de una ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$$

donde a, b y c son números reales.

Antes de continuar, asegúrate de que puedes reescribir cada una de las tres ecuaciones cuadráticas dadas anteriormente en su forma general, con $a > 0$.

1 Utilizar la propiedad del factor nulo para resolver ecuaciones

Para resolver ecuaciones utilizando factorización, empleamos la **propiedad del factor cero**.

Propiedad del factor nulo (factor cero)

Para todos los números reales a y b, si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$, o bien a y $b = 0$.

La propiedad del factor nulo indica que, *si el producto de dos factores es igual a 0, uno o ambos factores deben ser 0.*

EJEMPLO 1 Resuelve la ecuación $(x + 5)(x - 3) = 0$.

Solución Como el producto de los factores es igual a 0, de acuerdo con la propiedad del factor nulo, uno o ambos factores deben ser iguales a 0. Igualamos cada factor a 0 y resolvemos cada ecuación por separado.

$$x + 5 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$
$$x = -5 \qquad\qquad x = 3$$

Por lo tanto, si x es -5 o 3, la ecuación es una proposición verdadera.

Verifica $x = -5$

$$(x + 5)(x - 3) = 0$$
$$(-5 + 5)(-5 - 3) \stackrel{?}{=} 0$$
$$0(-8) \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \quad \text{Verdadero}$$

$x = 3$

$$(x + 5)(x - 3) = 0$$
$$(3 + 5)(3 - 3) \stackrel{?}{=} 0$$
$$8(0) \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \quad \text{Verdadero}$$

Resuelve ahora el ejercicio 11

2 Utilizar la factorización para resolver ecuaciones

A continuación se indica un procedimiento que se puede utilizar para obtener la solución de una ecuación mediante factorización.

Para resolver una ecuación mediante factorización

1. Utiliza la propiedad de la suma para eliminar todos los términos de un lado de la ecuación. Con esto se obtendrá un lado de la ecuación igual a 0.
2. Suma los términos semejantes en la ecuación y después factoriza.
3. Iguala a 0 cada factor que *contenga una variable*. Resuelve las ecuaciones y determina las soluciones.
4. Verifica las soluciones en la ecuación *original*.

Consejo útil

Si no recuerdas cómo factorizar, consulta las secciones 5.3-5.7.

EJEMPLO 2 Resuelve la ecuación $4x^2 = 24x$.

Solución Primero igualamos a 0 el lado derecho de la ecuación restando $24x$ en ambos lados. Después factorizamos el lado izquierdo de la ecuación.

$$4x^2 - 24x = 0$$
$$4x(x - 6) = 0$$

Ahora igualamos a 0 cada factor y despejamos x.

$$4x = 0 \quad \text{o} \quad x - 6 = 0$$
$$x = 0 \qquad\qquad x = 6$$

La verificación mostrará que los números 0 y 6 satisfacen la ecuación $4x^2 = 24x$.

Resuelve ahora el ejercicio 17

Prevención de errores comunes

La propiedad del factor nulo solo puede utilizarse cuando un lado de la ecuación es igual a 0.

CORRECTO	INCORRECTO
$(x-4)(x+3)=0$	$\cancel{(x-4)(x+3)=2}$
$x-4=0$ o $x+3=0$	$\cancel{x-4=2}$ o $\cancel{x+3=2}$
$x=4$ $\quad$ $x=-3$	$\cancel{x=6}$ $\quad$ $\cancel{x=-1}$

En el procedimiento incorrecto, ilustrado a la derecha, no se puede utilizar la propiedad del factor nulo, ya que el lado derecho de la ecuación no es igual a 0. El ejemplo 3 muestra cómo resolver estos problemas correctamente.

EJEMPLO 3 Resuelve la ecuación $(x-1)(3x+2)=4x$.

Solución Como el lado derecho de la ecuación no es igual a 0, no podemos utilizar la propiedad del factor nulo.

$$
\begin{aligned}
(x-1)(3x+2) &= 4x \\
3x^2-x-2 &= 4x && \text{Multiplica los factores.} \\
3x^2-5x-2 &= 0 && \text{Haz que un lado sea igual a 0.} \\
(3x+1)(x-2) &= 0 && \text{Factoriza el trinomio.} \\
3x+1=0 \quad \text{o} \quad x-2 &= 0 && \text{Propiedad del factor nulo} \\
3x=-1 \qquad\quad x &= 2 && \text{Resuelve las ecuaciones.} \\
x=-\frac{1}{3} &&
\end{aligned}
$$

Las soluciones son $-\frac{1}{3}$ y 2. Comprueba estos valores en la ecuación original.

Resuelve ahora el ejercicio 31

EJEMPLO 4 Resuelve la ecuación $3x^2+2x+12=-13x$.

Solución

$$
\begin{aligned}
3x^2+2x+12 &= -13x \\
3x^2+15x+12 &= 0 && \text{Haz que un lado sea igual a 0.} \\
3(x^2+5x+4) &= 0 && \text{Factoriza 3.} \\
3(x+4)(x+1) &= 0 && \text{Factoriza el trinomio.} \\
x+4=0 \quad \text{o} \quad x+1 &= 0 && \text{Propiedad del factor nulo} \\
x=-4 \qquad\quad x &= -1 && \text{Despeja } x.
\end{aligned}
$$

Como el factor 3 no tiene una variable, no tenemos que igualarlo a 0. Solo los números -4 y -1 satisfacen la ecuación $3x^2+2x+12=-13x$.

Resuelve ahora el ejercicio 35

Consejo útil

Al resolver una ecuación cuyo término principal tenga un coeficiente negativo, por lo general lo convertimos en positivo multiplicando ambos lados de la ecuación por -1. Esto facilita el procedimiento de factorización, como se muestra en el ejemplo siguiente.

$$
\begin{aligned}
-x^2+5x+6&=0\\
-1(-x^2+5x+6)&=-1\cdot 0\\
x^2-5x-6&=0
\end{aligned}
$$

Ahora podemos resolver la ecuación $x^2-5x-6=0$ factorizando.

$$
\begin{aligned}
(x-6)(x+1)&=0\\
x-6=0 \quad \text{o} \quad x+1&=0\\
x=6 \qquad\quad x&=-1
\end{aligned}
$$

Los números 6 y -1 satisfacen la ecuación original $-x^2+5x+6=0$.

La propiedad del factor nulo puede extenderse a tres o más factores, como se muestra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Resuelve la ecuación $2p^3 + 5p^2 - 3p = 0$.

Solución Primero factorizamos y después igualamos a 0 cada factor que tenga p.

$$2p^3 + 5p^2 - 3p = 0$$

$$p(2p^2 + 5p - 3) = 0 \qquad \text{Factoriza } p.$$

$$p(2p - 1)(p + 3) = 0 \qquad \text{Factoriza el trinomio.}$$

$$p = 0 \quad \text{o} \quad 2p - 1 = 0 \quad \text{o} \quad p + 3 = 0 \qquad \text{Propiedad del factor nulo.}$$

$$2p = 1 \qquad p = -3 \qquad \text{Despeja } p.$$

$$p = \frac{1}{2}$$

Los números 0, $\frac{1}{2}$ y -3 son soluciones de la ecuación.

Resuelve ahora el ejercicio 39

Observa que la ecuación del ejemplo 5 no es una ecuación cuadrática, ya que el exponente del término principal es 3, no 2. Ésta es una **ecuación cúbica** o de **tercer grado**.

EJEMPLO 6 En la función $f(x) = 2x^2 - 13x - 16$, determina todos los valores de a para los que $f(a) = 8$.

Solución Primero reescribimos la función como $f(a) = 2a^2 - 13a - 16$. Ya que $f(a) = 8$, escribimos

$$2a^2 - 13a - 16 = 8 \qquad \text{Determina } f(a) \text{ igual a 8.}$$

$$2a^2 - 13a - 24 = 0 \qquad \text{Haz que un lado sea igual a 0.}$$

$$(2a + 3)(a - 8) = 0 \qquad \text{Factoriza el trinomio.}$$

$$2a + 3 = 0 \quad \text{o} \quad a - 8 = 0 \qquad \text{Propiedad del factor nulo}$$

$$2a = -3 \qquad a = 8 \qquad \text{Despeja } a.$$

$$a = -\frac{3}{2}$$

Si compruebas estas respuestas, encontrarás que $f\left(-\frac{3}{2}\right) = 8$ y $f(8) = 8$.

Resuelve ahora el ejercicio 59

3 Utilizar la factorización para resolver problemas de aplicación

Ahora veamos algunos problemas de aplicación para cuya solución se utiliza la factorización.

EJEMPLO 7 **Triángulo** En una exhibición, una gran tienda de campaña tendrá una entrada en forma triangular (ver **Figura 5.17**).

Determina la base y la altura de la entrada si la altura medirá 3 pies menos que el doble de la base y el área total de la entrada es de 27 pies cuadrados.

Solución

Entiende Haz un dibujo de la entrada e incluye la información indicada (**Figura 5.18**).

FIGURA 5.17

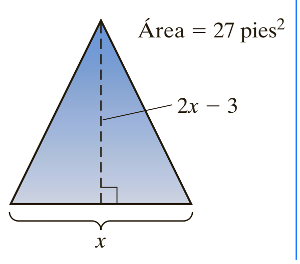


FIGURA 5.18

Traduce Para resolver el problema, usaremos la fórmula para calcular el área de un triángulo.

$$A = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura})$$

$$27 = \frac{1}{2}(x)(2x - 3) \qquad \text{Sustituye las expresiones para base, altura y área.}$$

Realiza los cálculos

$$2(27) = \cancel{2}\left[\frac{1}{\cancel{2}}(x)(2x - 3)\right] \qquad \text{Multiplica ambos lados por 2 para eliminar fracciones.}$$

$$54 = x(2x - 3)$$

$$54 = 2x^2 - 3x \qquad \text{Propiedad distributiva}$$

$$0 = 2x^2 - 3x - 54 \qquad \text{Haz que un lado sea igual a 0.}$$

$$\text{o} \quad 2x^2 - 3x - 54 = 0$$

$$(2x + 9)(x - 6) = 0 \qquad \text{Factoriza el trinomio.}$$

$$2x + 9 = 0 \quad \text{o} \quad x - 6 = 0 \qquad \text{Propiedad del factor nulo}$$

$$2x = -9 \qquad x = 6 \qquad \text{Despeja } x.$$

$$x = -\frac{9}{2}$$

Responde Como las dimensiones de una figura geométrica no pueden ser negativas, podemos eliminar $x = -\frac{9}{2}$ como una respuesta para nuestro problema. Por lo tanto,

$$\text{base} = x = 6 \text{ pies}$$
$$\text{altura} = 2x - 3 = 2(6) - 3 = 9 \text{ pies}$$

Resuelve ahora el ejercicio 89

EJEMPLO 8 **Altura de una bala de cañón** Un cañón se coloca en la cima de un risco cuya altura es de 288 pies sobre el nivel de un lago que se encuentra junto a su base. Se dispara una bala hacia arriba, con una velocidad de 112 pies por segundo. La altura h, en pies, en que se encuentra la bala de cañón respecto al nivel del lago en cualquier instante, t, se determina mediante la función

$$h(t) = -16t^2 + 112t + 288$$

Determina el tiempo que le toma a la bala de cañón golpear el agua después de haber sido disparada.

Solución

Entiende Necesitamos hacer un dibujo para analizar mejor el problema (ver **Figura 5.19**). Cuando la bala golpea el agua, su altura respecto del lago es 0 pies.

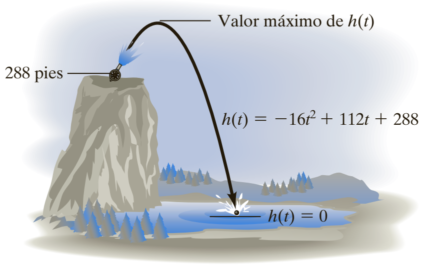


FIGURA 5.19

Traduce Para resolver el problema necesitamos determinar el tiempo, t, cuando $h(t) = 0$. Para ello establecemos que la función indicada sea igual a 0 y despejamos t.

$$-16t^2 + 112t + 288 = 0 \qquad \text{Determina } h(t) = 0.$$

$$-16(t^2 - 7t - 18) = 0 \qquad \text{Factoriza } -16.$$

$$-16(t + 2)(t - 9) = 0 \qquad \text{Factoriza el trinomio.}$$

$$t + 2 = 0 \quad \text{o} \quad t - 9 = 0 \qquad \text{Propiedad del factor nulo}$$

$$t = -2 \qquad t = 9 \qquad \text{Despeja } t.$$

Responde Como t es el número de segundos, -2 no es una respuesta posible. La bala de cañón golpeará el agua 9 segundos después de haber sido disparada.

Resuelve ahora el ejercicio 95

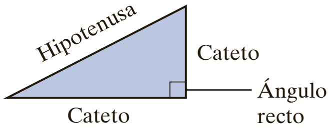


FIGURA 5.20

Teorema de Pitágoras Considera un triángulo rectángulo (ver **Figura 5.20**). Los dos lados más cortos de un triángulo rectángulo se denominan **catetos**, y el lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa**. El **teorema de Pitágoras** expresa la relación entre los catetos y la hipotenusa del triángulo.

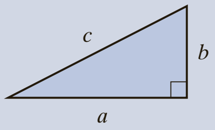
Teorema de Pitágoras

El cuadrado de la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus dos catetos; esto es

$$\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2$$

Si a y b representan las longitudes de los catetos y c representa la longitud de la hipotenusa, entonces

$$a^2 + b^2 = c^2$$



EJEMPLO 9 Cable para un árbol Para ayudarlo a crecer recto, Jack Keating coloca un cable tirante en un árbol. La localización de los puntos de donde se amarra el cable (una estaca sobre el suelo y la parte superior del árbol), se indican en la **Figura 5.21**. Determina la longitud del cable.

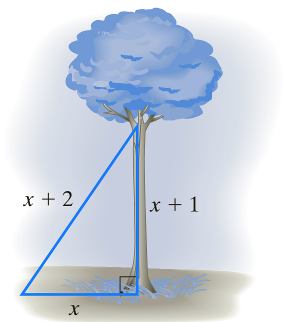


FIGURA 5.21

Solución

Entiende Observa que la longitud del cable es la hipotenusa de un triángulo rectángulo que se forma con el árbol y el piso. Para resolver este problema utilizamos el teorema de Pitágoras. De acuerdo con la figura, vemos que los catetos son x y $x + 1$, y que la hipotenusa es $x + 2$.

Traduce

$$\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2 \qquad \text{Teorema de Pitágoras.}$$

$$x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2 \qquad \text{Sustituye las expresiones para los catetos y la hipotenusa.}$$

Realiza los cálculos

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4 \qquad \text{Eleva al cuadrado los términos.}$$

$$2x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4 \qquad \text{Simplifica.}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad \text{Haz que un lado sea igual a 0.}$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0 \qquad \text{Factoriza.}$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0 \qquad \text{Resuelve.}$$

$$x = 3 \qquad\qquad x = -1$$

Responde Con base en la figura, sabemos que x no puede tener un valor negativo. Por lo tanto, la única respuesta posible es 3. La estaca está colocada a tres pies de distancia del árbol. En la parte superior, el cable se sujeta al árbol a $x + 1$ o 4 pies de altura del piso. La longitud del cable es igual a $x + 2$ o 5 pies.

Resuelve ahora el ejercicio 99

4 Utilizar la factorización para determinar las intersecciones con el eje *x* de una función cuadrática

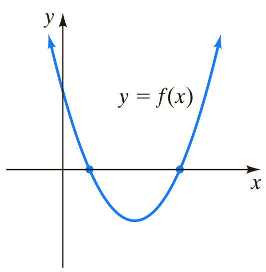


FIGURA 5.22

Considera la gráfica de la **Figura 5.22**.

En las intersecciones con el eje x, el valor de la función, o y, es 0. Por lo tanto, si deseamos determinar las **intersecciones con el eje x de una gráfica**, podemos establecer la función igual a 0 y despejar x.

EJEMPLO 10 Determina las intersecciones con el eje x de la gráfica de $y = x^2 - 2x - 8$.

Solución En las intersecciones con el eje x, y tiene valor de 0. Por lo tanto, para determinar las intersecciones con el eje x escribimos

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

$$x - 4 = 0 \quad \text{o} \quad x + 2 = 0$$

$$x = 4 \qquad\qquad x = -2$$

Las soluciones de $x^2 - 2x - 8 = 0$, son 4 y -2. Las intersecciones con el eje x de la gráfica de $y = x^2 - 2x - 8$ son $(4, 0)$ y $(-2, 0)$, como se ilustra en la **Figura 5.23**.

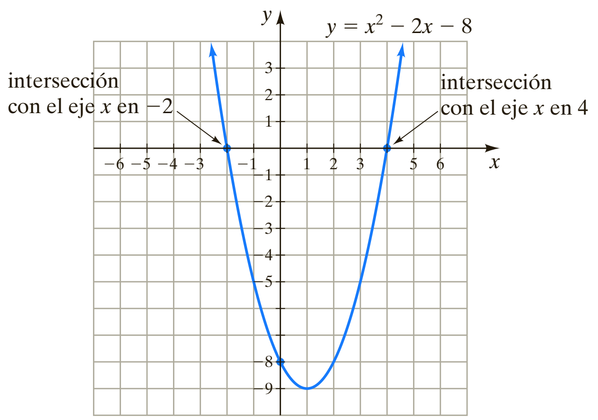


FIGURA 5.23

Resuelve ahora el ejercicio 65

Comprendiendo el álgebra

Una *intersección con el eje x* es el punto en donde la gráfica cruza el eje x. La coordenada y de una intersección con el eje x es siempre 0.

Si conocemos las intersecciones con el eje x de una gráfica, podemos trabajar hacia atrás para determinar la ecuación de la gráfica. Lee el siguiente recuadro para aprender cómo hacerlo con ayuda de tu calculadora graficadora.

Cómo utilizar tu calculadora graficadora

Determina la ecuación de la gráfica en la **Figura 5.24**.

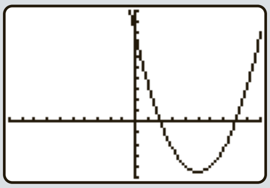


FIGURA 5.24 $[-10, 10, 1, -10, 20, 2]$

Si suponemos que las intersecciones son valores enteros, entonces las intersecciones con el eje x están en 2 y en 8. Por lo tanto,

Intersecciones con el eje x en	Factores	Posible ecuación de la gráfica
2 y 8	$(x - 2)(x - 8)$	$y = (x - 2)(x - 8)$
		o $y = x^2 - 10x + 16$

Como la intersección con el eje y de la gráfica en la **Figura 5.24** está en 16, $y = x^2 - 10x + 16$ es la ecuación de la gráfica. El ejemplo 11 explica por qué utilizamos las palabras *posible ecuación de la gráfica.*

EJEMPLO 11 Escribe una ecuación cuya gráfica tenga intersecciones con el eje x en -2 y en 4.

Solución Si las intersecciones están en -2 y en 4, entonces un conjunto de factores que producen estas intersecciones son $(x + 2)$ y $(x - 4)$, respectivamente. Por lo tanto, una ecuación que tendrá intersecciones con el eje x en -2 y 4 es

$$y = (x + 2)(x - 4) \text{ o } y = x^2 - 2x - 8.$$

Observa que otras ecuaciones pueden tener gráficas con las mismas intersecciones con el eje x. Por ejemplo, la gráfica de $y = 2(x^2 - 2x - 8)$ o $y = 2x^2 - 4x - 16$ también tiene intersecciones con el eje x en -2 y en 4. De hecho, la gráfica de $y = a(x^2 - 2x - 8)$, para cualquier número real a distinto de 0, tendrá intersecciones con el eje x en -2 y 4.

Resuelve ahora el ejercicio 83

En el ejemplo 11, aunque las intersecciones con el eje x de la gráfica de $y = a(x^2 - 2x - 8)$ siempre estarán en -2 y 4, la intersección con el eje y de la gráfica dependerá del valor de a. Por ejemplo, si $a = 1$, la intersección con el eje y estará en 1(8) u 8. Si $a = 2$, la intersección estará en 2(8) o 16, y así sucesivamente.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.8

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

$a = 0$	cateto	intersección con el eje x	$b = 0$	expresión	$ax^2 + bx = -c$
ecuación	hipotenusa	lado	término	intersección con el eje y	$ax^2 + bx + c = 0$

1. Cuando dos polinomios son iguales entre sí, tenemos una _______________ polinomial.
2. El grado de una ecuación polinomial es el grado del _______________ mayor del polinomio.
3. La forma general de una ecuación cuadrática es _______________.
4. La propiedad del factor cero establece que si $a \cdot b = 0$, $a = 0$ o _______________ o ambos $a = 0$ y $b = 0$.
5. El punto donde la gráfica cruza el eje x es conocido como una _______________.
6. En un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto es el/la _______________.

Practica tus habilidades

Resuelve.

7. $x(x + 3) = 0$
8. $x(x - 2) = 0$
9. $4x(x - 1) = 0$
10. $5x(x + 6) = 0$
11. $2(x + 1)(x - 7) = 0$
12. $3(a - 5)(a + 2) = 0$
13. $x(x - 9)(x - 4) = 0$
14. $2a(a + 3)(a + 10) = 0$
15. $(3x - 2)(7x - 1) = 0$
16. $(2x + 3)(4x + 5) = 0$
17. $4x^2 = 12x$
18. $3y^2 = -21y$
19. $x^2 + 5x = 0$
20. $4a^2 - 32a = 0$
21. $-x^2 + 6x = 0$
22. $-3x^2 - 24x = 0$
23. $3x^2 = 27x$
24. $18a^2 = -36a$
25. $a^2 + 6a + 5 = 0$
26. $x^2 - 6x + 5 = 0$
27. $x^2 + x - 12 = 0$
28. $b^2 + b - 72 = 0$
29. $x^2 + 8x + 16 = 0$
30. $c^2 - 12c = -36$
31. $(2x + 5)(x - 1) = 12x$
32. $a(a + 2) = 48$
33. $2y^2 = -y + 6$
34. $3a^2 = -a + 2$
35. $3x^2 - 6x - 72 = 0$
36. $2a^2 + 18a + 40 = 0$
37. $x^3 - 3x^2 = 18x$
38. $x^3 = -19x^2 + 42x$
39. $4c^3 + 4c^2 - 48c = 0$
40. $3b^3 - 8b^2 - 3b = 0$
41. $18z^3 = 15z^2 + 12z$
42. $12a^3 = 16a^2 + 3a$
43. $x^2 - 25 = 0$
44. $2y^2 = 72$
45. $16x^2 = 9$
46. $49c^2 = 81$
47. $4y^3 - 36y = 0$
48. $3x^4 - 48x^2 = 0$

49. $-x^2 = 2x - 99$

50. $-x^2 + 18x = 80$

51. $(x + 7)^2 - 16 = 0$

52. $(x - 6)^2 - 4 = 0$

53. $(2x + 5)^2 - 9 = 0$

54. $(x + 1)^2 - 3x = 7$

55. $6a^2 - 12 - 4a = 19a - 32$

56. $4(a^2 - 3) = 6a + 4(a + 3)$

57. $2b^3 + 16b^2 = -30b$

58. $(a - 1)(3a + 2) = 4a$

59. Para $f(x) = 3x^2 + 7x + 9$, encuentra todos los valores de a para los cuales $f(a) = 7$.

60. Para $f(x) = 4x^2 - 11x + 2$, encuentra todos los valores de a para los cuales $f(a) = -4$.

61. Para $g(x) = 10x^2 - 31x + 16$, encuentra todos los valores de a para los cuales $g(a) = 1$.

62. Para $g(x)$ $6x^2 + x - 3$, encuentra todos los valores de a para los cuales $g(a) = -2$.

63. Para $r(x) = x^2 - x$, encuentra todos los valores de a para los cuales $r(a) = 30$.

64. Para $r(x) = 10x^2 - 11x - 17$, encuentra todos los valores de a para los cuales $r(a) = -11$.

Usa la factorización para encontrar las intersecciones con el eje x de las gráficas de cada ecuación (ver ejemplo 10).

65. $y = x^2 - 10x + 24$

66. $y = x^2 - x - 42$

67. $y = x^2 + 16x + 64$

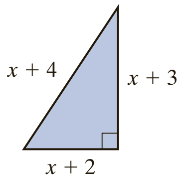
68. $y = 15x^2 - 14x - 8$

69. $y = 12x^3 - 46x^2 + 40x$

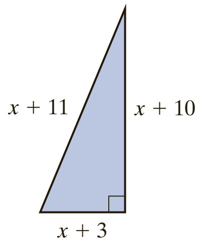
70. $y = 12x^3 - 39x^2 + 30x$

Triángulo rectángulo *En los ejercicios 71-76, usa el teorema de Pitágoras para encontrar x.*

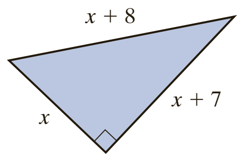
71.



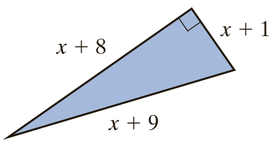
72.



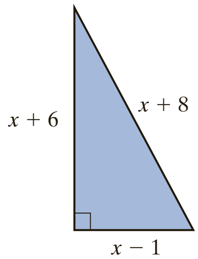
73.



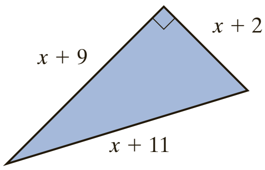
74.



75.



76.



Resolución de problemas

En los ejercicios 77-80, determina las intersecciones con el eje x de cada gráfica; después relaciona la ecuación con la gráfica apropiada marcada como **a)**−**d)**.

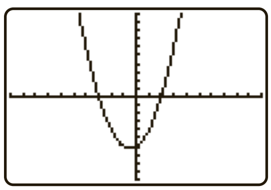
77. $y = x^2 - 5x + 6$

78. $y = x^2 - x - 6$

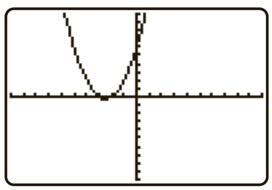
79. $y = x^2 + 5x + 6$

80. $y = x^2 + x - 6$

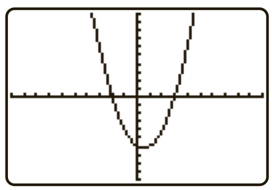
a)



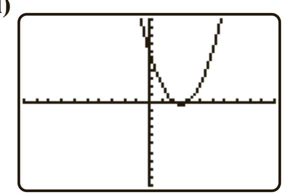
b)



c)



d)



Escribe una ecuación cuya gráfica intersecte el eje x en los siguientes valores.

81. 1 y 5

82. 3 y -7

83. 4 y -2

84. $\frac{3}{2}$ y 6

85. $-\frac{5}{6}$ y 2

86. -0.4 y 2.6

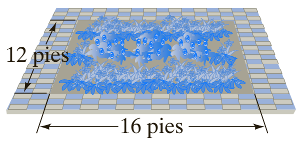
87. Mesa de centro rectangular Una mesa de centro rectangular. Si el largo de su área es 1 pie más grande que dos veces su ancho y el área de la mesa es de 10 pies cuadrados, determina su largo y ancho.

88. Cobertizo El piso de un cobertizo tiene un área de 60 pies cuadrados. Determina el largo y el ancho si el largo es 2 pies menos que dos veces su ancho.

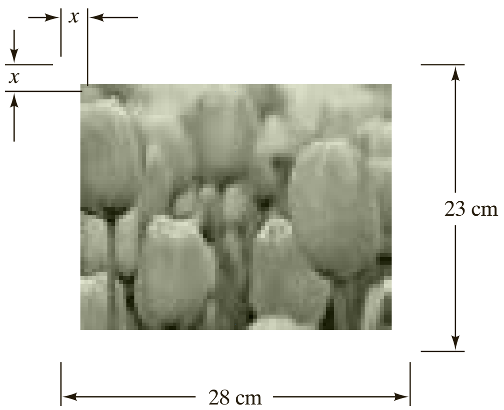
89. Vela triangular La vela de un velero es triangular con una altura 6 pies mayor que su base. Si el área de la vela es de 80 pies cuadrados, determina su base y altura.

90. Tienda de campaña triangular Una tienda triangular tiene una altura que es 4 pies menor que su base. Si el área de un lado es de 70 pies cuadrados, determina la base y la altura de la tienda.

91. Rectángulo El jardín de Frank Bullock está rodeado por un pasillo de anchura uniforme. El jardín y el pasillo juntos ocupan un área de 320 pies cuadrados. Si las dimensiones del jardín son 12 por 16 pies, determina el ancho del pasillo.



92. Marco de fotos Las dimensiones externas de un marco de fotos son 28 por 23 cm. El área de la foto es 414 centímetros cuadrados. Determina el ancho del marco.



© Beata Becla/Shutterstock

93. Jardín de vegetales El jardín rectangular de Sally Yang es de 20 por 30 pies. Además de fertilizar su jardín, ella quiere abonar la parte exterior del jardín con una anchura uniforme. Si ella tiene suficiente abono como para cubrir un área de 936 pies cuadrados. ¿Qué tan amplia debe ser la orilla del abono?

94. Jardín cuadrado Ronnie Tucker tiene un jardín cuadrado. Él añade un pasillo de 2 pies de ancho alrededor de su jardín. Si el área total del pasillo y el jardín es de 196 pies cuadrados, determina las dimensiones del jardín.

95. Escultura de agua En un edificio en Navy Pier en Chicago, una fuente dispara pequeños chorros de agua sobre un pasillo. Los chorros de agua alcanzan una altura máxima, luego bajan a un estanque de agua al otro lado del pasillo. La altura, h, de un chorro de agua t segundos después de que éste sale puede determinarse por la función $h(t) = -16t^2 + 32t$. Determina el tiempo que le toma al chorro de agua regresar a la altura de la válvula aspersora; esto es, cuando $h(t) = 0$.

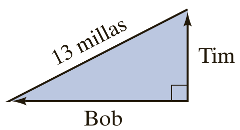
© Allen R. Angel

Ver ejercicio 95.

96. Proyectil Un modelo de cohete se lanzará desde una colina a 80 pies sobre el nivel del mar. El sitio de lanzamiento está junto al océano (a nivel del mar) y el cohete caerá dentro del mar. La distancia del cohete sobre el nivel del mar, s, en cualquier momento, t, se determina por la ecuación $s(t) = -16t^2 + 64t + 80$. Determina el tiempo que le toma al cohete chocar con el mar.

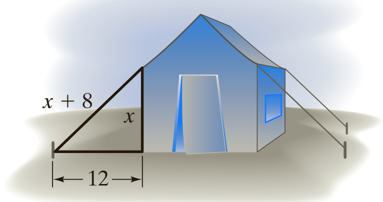
© Allen R. Angel

97. Paseos en bicicleta Dos ciclistas, Bob y Tim, comienzan su paseo en el mismo punto. Bob va hacia el oeste y Tim hacia el norte. En algún momento, están a 13 millas de distancia. Si Bob viajó 7 millas más lejos que Tim, determina qué tan lejos llegó cada uno de ellos.

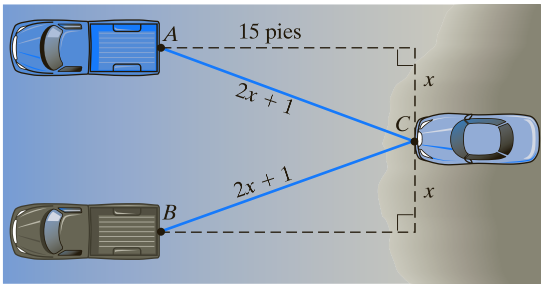


98. Cuadro April está haciendo un cuadro rectangular para su madre. La diagonal del cuadro mide 20 pulgadas. Determina las dimensiones del cuadro si su longitud es 4 pulgadas mayor que su ancho.

99. Cables de una tienda de acampar Una tienda tiene cables unidos a ella que ayudan a estabilizarla. Un cable está unido al suelo a 12 pies de la tienda. La longitud del cable usado es 8 pies mayor que la altura desde el piso hasta donde el cable está unido a la tienda. ¿Cuánto mide el cable?



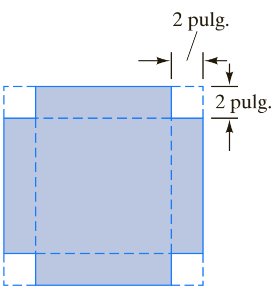
100. Auto en el lodo Supón que dos autos, marcados con los puntos A y B en la figura, están jalando un tercer auto, C. Determina la distancia del auto A al auto B.



101. Tienda de bicicletas La tienda Energy Conservatory Bicycle tiene una ecuación de ingresos mensuales $R(x) = 70x - x^2$ y una ecuación de costos mensuales $C(x) = 17x + 150$, donde x es el número de bicicletas vendidas y $x \geq 10$. Determina el número de bicicletas que debe vender la compañía para encontrar el punto de equilibrio; esto es, cuando los ingresos son iguales a los costos.

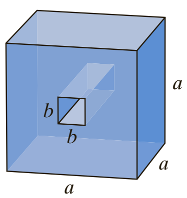
102. Planta de seda Edith Hall hace plantas de seda y las vende en diversos puntos de venta. Su compañía tiene una ecuación de ingresos $R(x) = 40x - x^2$ y una ecuación de costos $C(x) = 14x + 25$, donde x es el número de plantas vendidas y $x \geq 5$. Determina el número de plantas que debe vender la compañía para encontrar el punto de equilibrio.

103. Haciendo una caja Monique Siddiq está haciendo una caja cortando cuadrados de 2 por 2 pulgadas a partir de una pieza cuadrada de cartón y plegando los bordes para hacer la caja de 2 pulgadas de alto. ¿Qué tamaño debe tener la pieza de cartón para que Monique pueda hacer una caja de 2 pulgadas de alto con un volumen de 162 pulgadas cúbicas?



104. Haciendo una caja Se va a formar una caja cortando cuadrados de cada esquina de una pieza rectangular de aluminio y doblando los lados. La caja debe tener 3 pulgadas de alto, el largo debe ser dos veces el ancho y el volumen de la caja debe ser de 96 pulgadas cúbicas. Determina el largo y el ancho de la caja.

105. Cubo A un cubo sólido con dimensiones a^3 se le ha quitado un sólido rectangular con dimensiones ab^2.

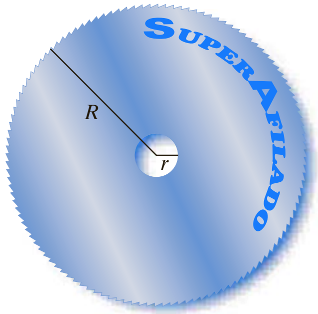


a) Escribe una fórmula para el volumen restante, V.

b) Factoriza el lado derecho de la fórmula del inciso **a)**.

c) Si el volumen es 1620 pulgadas cúbicas y a mide 12 pulgadas, determina b.

106. Cuchilla de acero circular Una cuchilla de acero circular tiene un agujero cortado en su centro como se muestra en la figura.

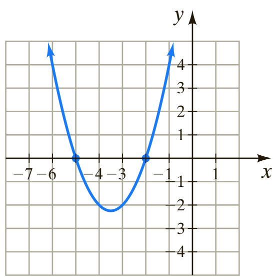


a) Escribe una fórmula para el área restante de la cuchilla.

b) Factoriza el lado derecho de la fórmula del inciso **a)**.

c) Determina A si $R = 10$ cm y $r = 3$ cm.

107. Considera la siguiente gráfica de una función cuadrática.



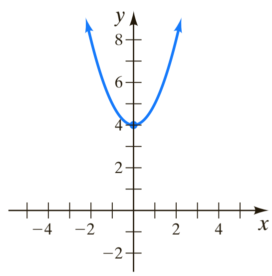
a) Escribe una función cuadrática que tenga indicadas las intersecciones con el eje x.

b) Escribe una función cuadrática con una variable que tenga como soluciones -2 y -5.

c) ¿Cuántas diferentes funciones cuadráticas pueden tener intersecciones con el eje x en -2 y -5? Explica.

d) ¿Cuántas diferentes ecuaciones cuadráticas con una variable pueden tener como soluciones -2 y -5? Explica.

108. La gráfica de la ecuación $y = x^2 + 4$ se ilustra a continuación.



a) ¿Cuántas intersecciones con el eje x tiene la gráfica?

b) ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $x^2 + 4 = 0$? Justifica tu respuesta.

109. Considera la función cuadrática

$$P(x) = ax^2 + bx + c, a > 0.$$

a) La gráfica de este tipo de función puede no tener intersección con el eje x, una intersección con el eje x o dos intersecciones con el eje x. Dibuja cada una de estas posibilidades.

b) ¿Cuántas posibles soluciones reales puede tener la ecuación $ax^2 + bx + c = 0, a > 0$? Justifica tu respuesta para el inciso **b)** usando los dibujos del inciso **a)**.

110. Distancia de frenado Una típica distancia de frenado de un automóvil en pavimento seco, d, en pies, se puede aproximar por la función $d(s) = 0.034s^2 + 0.56s - 17.11$, donde s es la velocidad del auto antes de frenar y $60 \leq s \leq 80$ millas por hora. ¿Qué tan rápido iba el auto si se requieren 190 pies para detenerse después de que se aplican los frenos?

111. Distancia de frenado Una típica distancia de frenado de un automóvil en pavimento mojado, d, en pies, se puede aproximar por la función $d(s) = -0.31s^2 + 59.82s - 2180.22$, donde s es la velocidad del auto antes de frenar y $60 \leq s \leq 80$ millas por hora. ¿Qué tan rápido iba el auto si se requieren 545 pies para que el auto se detenga después de que se aplican los frenos?

Ejercicios de conceptos y escritura

112. ¿Cómo determinas el grado de una función polinomial?

113. ¿Qué es una ecuación cuadrática?

114. ¿Cuál es la forma general de una ecuación cuadrática?

115. a) Explica la propiedad del factor cero.

b) Resuelve la ecuación $(3x - 7)(2x + 3) = 0$ usando la propiedad del factor cero.

116. a) Explica por qué la ecuación $(x + 3)(x + 4) = 2$ *no puede* resolverse escribiendo $x + 3 = 2$ o $x + 4 = 2$.

b) Resuelve la ecuación $(x + 3)(x + 4) = 2$.

117. Cuando una constante se factoriza en una ecuación, ¿por qué no es necesario igualar la constante a 0 cuando se resuelve la ecuación?

118. a) Explica cómo resolver una ecuación polinomial utilizando la factorización.

b) Resuelve la ecuación $-x - 20 = -12x^2$ usando el procedimiento del inciso **a)**.

119. a) ¿Cuál es el primer paso para resolver la ecuación $-x^2 + 2x + 35 = 0$?

b) Resuelve la ecuación del inciso **a)**.

120. a) ¿Cómo se les llama a los dos lados más cortos de un triángulo rectángulo?

b) ¿Cómo se le llama al lado más largo de un triángulo rectángulo?

121. Escribe el teorema de Pitágoras y explica su significado.

122. Si la gráfica de $y = x^2 + 10x + 16$ tiene intersección con el eje x en -8 y en -2, ¿cuál es la solución de la ecuación $x^2 + 10x + 16 = 0$? Explica.

123. Si las soluciones de la ecuación $2x^2 - 15x + 18 = 0$ son $\frac{3}{2}$ y 6, ¿cuáles son las intersecciones con el eje x de la gráfica de $y = 2x^2 - 15x + 18$? Explica.

124. Para una función cuadrática, ¿es posible no tener intersecciones con el eje x? Explica.

125. Para una función cuadrática, ¿es posible tener solo una intersección con el eje x? Explica.

126. Para una función cuadrática, ¿es posible tener dos intersecciones con el eje x? Explica.

127. Para una función cuadrática, ¿es posible tener 3 intersecciones con el eje x? Explica.

Problemas de desafío

Resuelve.

128. $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$

129. $x^4 - 13x^2 = -36$

130. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

Actividad de grupo

En cursos más avanzados de matemáticas puede que necesites resolver una ecuación para y′ (se lee "y prima"). Al hacerlo, trata la y′ como una variable diferente de y. Resuelve individualmente cada ecuación para y′. Comparen sus respuestas en grupo y obtengan las respuestas correctas.

131. $xy' + yy' = 1$

132. $xy - xy' = 3y' + 2$

133. $2xyy' - xy = x - 3y'$

Ejercicios de repaso acumulados

[1.5] **134.** Simplifica $(4x^{-2}y^3)^{-2}$.

[2.5] **135.** Resuelve la desigualdad y grafica la solución en la recta numérica.

$$-1 < \frac{4(3x - 2)}{3} \leq 5$$

[4.1] **136.** Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$3x + 4y = 2$$
$$2x = -5y - 1$$

[5.2] **137.** Si $f(x) = -x^2 + 3x$ y $g(x) = x^2 + 5$ determina $(f \cdot g)(4)$.

[5.7] **138.** Factoriza $(x + 1)^2 - (x + 1) - 6$.

Resumen del capítulo 5

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 5.1	
Términos son las partes que se suman o restan en una expresión matemática.	Los términos de $-3x^2 + 1.6x + 15$ son $-3x^2$, $1.6x$ y 15
Un **polinomio** es una suma finita de términos en la que todas las variables tienen exponentes enteros positivos y ninguna variable aparece en el denominador.	$9x^7 - 3x^5 + 4x - \frac{1}{2}$ es un polinomio.
El **grado de un término** es la suma de los exponentes de las variables.	El término $3x^2y^9$ es de grado 11.
El **término principal** de un polinomio es el término de mayor grado. El **coeficiente principal** es el coeficiente del término principal.	En el polinomio $9x^7 - 3x^5 + 4x - \frac{1}{2}$, el término principal es $9x^7$ y el coeficiente principal es 9.
Un **monomio** es un polinomio con un término. Un **binomio** es un polinomio con dos términos. Un **trinomio** es un polinomio con tres términos.	$-13mn^2p^3$ $x^4 - 1$ $1.9x^3 - 28.3x^2 - 101.5x$
Un polinomio es **lineal** si es de grado 0 o 1. Un polinomio con una variable es **cuadrático** si es de grado 2. Un polinomio con una variable es **cúbico** si es de grado 3.	19, $8y + 17$ $x^2 - 5x + 16$ $-4x^3 + 11x^2 - 9x + 6$
Una **función polinomial** tiene la forma $y = P(x)$. Para evaluar $P(a)$, reemplaza x por a.	$P(x) = 2x^2 - x + 3$ es una función polinomial. Para evaluar $P(x)$ en $x = 10$, $P(10) = 2(10)^2 - 10 + 3$ $= 200 - 10 + 3 = 193$
Para **sumar o restar polinomios** reduce los términos semejantes.	$(5x^2 - 9x + 10) + (2x^2 + 17x - 8)$ $= 5x^2 - 9x + 10 + 2x^2 + 17x - 8 = 7x^2 + 8x + 2$
Sección 5.2	
Para **multiplicar polinomios,** multiplica cada término de un polinomio por cada término del otro polinomio.	$3a(a - 2) = 3a \cdot a - 3a \cdot 2$ $= 3a^2 - 6a$
Propiedad distributiva, forma desarrollada $a(b + c + d + \ldots + n) = ab + ac + ad + \ldots + an$	$x(2x^2 + 8x - 5) = 2x^3 + 8x^2 - 5x$
Para **multiplicar dos binomios,** utiliza el **método PIES**: multiplica los términos **P**rimeros, **I**nternos, **E**xternos, **S**egundos.	$(3x - 1)(4x + 9) = 12x^2 + 27x - 4x - 9$ $= 12x^2 + 23x - 9$
Para multiplicar un polinomio por un polinomio, puedes utilizar el formato vertical.	Multiplica $(2x^2 - x + 8)(5x + 1)$ $\begin{array}{r} 2x^2 - x + 8 \\ 5x + 1 \\ \hline 2x^2 - x + 8 \\ 10x^3 - 5x^2 + 40x \phantom{{}+8} \\ \hline 10x^3 - 3x^2 + 39x + 8 \end{array}$
Cuadrado de un binomio $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(7x + 4)^2 = (7x)^2 + 2(7x)(4) + (4)^2 = 49x^2 + 56x + 16$ $\left(\frac{1}{2}m - 3\right)^2 = \left(\frac{1}{2}m\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}m\right)(3) + 3^2 = \frac{1}{4}m^2 - 3m + 9$
Producto de la suma y diferencia de los mismos dos términos (binomios conjugados) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	$(5c + 6)(5c - 6) = (5c)^2 - 6^2 = 25c^2 - 36$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 5.3	
Para dividir un polinomio entre un monomio divide cada término del polinomio entre el monomio.	$\frac{6y + 10x^2y^5 - 17x^9y^8}{2xy^2} = \frac{6y}{2xy^2} + \frac{10x^2y^5}{2xy^2} - \frac{17x^9y^8}{2xy^2}$ $= \frac{3}{xy} + 5xy^3 - \frac{17x^8y^6}{2}$
Para dividir dos polinomios, utiliza la división larga.	Divide $(8x^2 + 6x - 9) \div (2x + 1)$. $\begin{array}{r} 4x + 1 \\ 2x+1 \overline{)\,8x^2 + 6x - 9} \\ \underline{8x^2 + 4x} \\ 2x - 9 \\ \underline{2x + 1} \\ -10 \end{array}$ Por lo tanto, $\frac{8x^2 + 6x - 9}{2x + 1} = 4x + 1 - \frac{10}{2x + 1}$
Para dividir un polinomio entre un binomio de la forma $x - a$, utiliza la **división sintética.**	Utiliza la división sintética para dividir $(x^3 + 2x^2 - 11x + 5) \div (x + 4)$ $\begin{array}{r\|rrrr} -4 & 1 & 2 & -11 & 5 \\ & & -4 & 8 & 12 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 17 \end{array}$ Así, $\frac{x^3 + 2x^2 - 11x + 5}{x + 4} = x^2 - 2x - 3 + \frac{17}{x + 4}$
Teorema del residuo Si el polinomio $P(x)$ se divide entre $x - a$, el residuo es $P(a)$.	Determina el residuo cuando $2x^3 - 6x^2 - 11x + 29$ se divide entre $x + 2$. Sea $P(x) = 2x^3 - 6x^2 - 11x + 29$; entonces $P(-2) = 2(-2)^3 - 6(-2)^2 - 11(-2) + 29$ $= -16 - 24 + 22 + 29$ $= 11.$ El residuo es 11.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 5.4	
El **máximo factor común** (MFC) es el producto de los factores comunes de todos los términos en el polinomio.	El MFC de z^5, z^4, z^9, z^2 es z^2. El MFC de $9(x-4)^3, 6(x-4)^{10}$ es $3(x-4)^3$.
Para factorizar un monomio de un polinomio **1.** Determina el máximo factor común de todos los términos en el polinomio. **2.** Escribe cada término como el producto del MFC y otro factor. **3.** Utiliza la propiedad distributiva para *factorizar* el MFC.	$35x^6 + 15x^4 + 5x^3 = 5x^3(7x^3) + 5x^3(3x) + 5x^3(1)$ $= 5x^3(7x^3 + 3x + 1)$ $4n(7n + 10) - 13(7n + 10) = (7n + 10)(4n - 13)$
Para factorizar cuatro términos mediante agrupación **1.** Determina si los cuatro términos tienen un factor común. Si es así, factoriza el MFC de cada término. **2.** Acomoda los cuatro términos en dos grupos de dos términos cada uno. Cada grupo de dos términos debe tener un MFC. **3.** Factoriza el MFC de cada grupo de dos términos. **4.** Si los dos términos formados en el paso 3 tienen un MFC, factorízalo.	$cx + cy + dx + dy = c(x + y) + d(x + y)$ $= (x + y)(c + d)$ $x^3 + 6x^2 - 5x - 30 = x^2(x + 6) - 5(x + 6)$ $= (x + 6)(x^2 - 5)$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 5.5	
Para factorizar trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ **1.** Determina dos números (o factores) cuyo producto sea c y cuya suma sea b. **2.** Los factores del trinomio serán de la forma $(x + \square)(x + \square)$ ↑ Un factor determinado en el paso 1 — ↑ Otro factor determinado en el paso 1	Factoriza $m^2 - m - 42$. Los factores de -42 cuya suma es -1 son -7 y 6. Observa que $(-7)(6) = -42$ y $-7 + 6 = -1$. Por lo tanto, $m^2 - m - 42 = (m - 7)(m + 6)$
Para factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$, mediante el método de prueba y error **1.** Escribe todas los pares de factores del coeficiente del término cuadrado, a. **2.** Escribe todas los pares de factores de la constante, c. **3.** Prueba diferentes combinaciones de estos factores hasta que determines el término central, bx, correcto.	$4t^2 + 9t + 5 = (4t + 5)(t + 1)$ Observa que $4t + 5t = 9t$. $2a^2 - 15ab + 28b^2 = (2a - 7b)(a - 4b)$ Observa que $-8ab - 7ab = -15ab$.
Para factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$, mediante agrupación **1.** Determina dos números cuyo producto sea $a \cdot c$ y cuya suma sea b. **2.** Reescribe el término central, bx, mediante los números que encontraste en el paso 1. **3.** Factoriza por agrupación.	Factoriza mediante agrupación $2y^2 + 9y - 18$. Dos números cuyo producto es -36 y cuya suma es 9 son 12 y -3. Por lo tanto; $2y^2 + 9y - 18 = 2y^2 + 12y - 3y - 18$ $= 2y(y + 6) - 3(y + 6)$ $= (y + 6)(2y - 3)$
Un **polinomio primo** es un polinomio que no puede factorizarse.	$x^2 + 5x + 9$ es un polinomio primo.
La **factorización por sustitución** ocurre cuando se sustituye una variable por otra variable o expresión.	Factoriza $a^6 - 2a^3 - 3$ $a^6 - 2a^3 - 3 = (\boldsymbol{a^3})^2 - 2\boldsymbol{a^3} - 3$ $= x^2 - 2x - 3$ Sustituye a^3 por x. $= (x - 3)(x + 1)$ $= (\boldsymbol{a^3} - 3)(\boldsymbol{a^3} + 1)$ Sustituye x por a^3.
Sección 5.6	
Diferencia de dos cuadrados $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$	$x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x + 7)(x - 7)$
Trinomios cuadrados perfectos $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$	$d^2 + 8d + 16 = d^2 + 2(d)(4) + 4^2 = (d + 4)^2$ $4m^2 - 12m + 9 = (2m)^2 - 2(2m)(3) + 3^2 = (2m - 3)^2$
Suma de dos cubos $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	$y^3 + 8 = y^3 + 2^3 = (y + 2)(y^2 - 2y + 4)$
Diferencia de dos cubos $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	$27z^3 - 64x^3 = (3z)^3 - (4x)^3 = (3z - 4x)(9z^2 + 12xz + 16x^2)$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES | **EJEMPLOS**

Sección 5.7

Para factorizar un polinomio

1. Determina si todos los términos en el polinomio tienen un máximo factor común distinto de 1. Si es así, factoriza el MFC.
2. Si el polinomio tiene dos términos, determina si es una diferencia de dos cuadrados o una suma o diferencia de dos cubos. Si es así, factoriza mediante la fórmula apropiada.
3. Si el polinomio tiene tres términos, determina si es un trinomio cuadrado perfecto. De serlo, factorízalo como tal. Si no es así, factoriza el trinomio mediante los métodos de prueba y error, agrupación o sustitución como se explicó en la sección 5.5.
4. Si el polinomio tiene más de tres términos intenta factorizar mediante agrupación. Si no funciona, ve si tres de los términos son el cuadrado de un binomio.
5. Como paso final, examina tu polinomio factorizado para ver si alguno de los factores tiene un factor común que pueda factorizarse más. Si encuentras un factor común, factorízalo.
6. Verifica la respuesta multiplicando los factores.

$$\begin{aligned} 2x^7 + 16x^6 + 24x^5 &= 2x^5(x^2 + 8x + 12) \\ &= 2x^5(x + 6)(x + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 36a^6 - 100a^4b^2 &= 4a^4(9a^2 - 25b^2) \\ &= 4a^4[(3a)^2 - (5b)^2] \\ &= 4a^4(3a + 5b)(3a - 5b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 125m^3 - 64 &= (5m)^3 - 4^3 \\ &= (5m - 4)(25m^2 + 20m + 16) \end{aligned}$$

Sección 5.8

Una **ecuación polinomial** se forma cuando dos polinomios se igualan entre sí.

$$x^2 - 5x = 2x + 7$$

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación polinomial de segundo grado (con una variable).

$$2x^2 - 6x + 11 = 0$$

$$x^2 - 4 = x + 2$$

Forma general de una ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

donde a, b y c son números reales.

$x^2 - 3x + 5 = 0$ es una ecuación cuadrática en la forma general.

Propiedad del factor nulo

Para todos los números reales a y b, si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$, o bien, los dos a y b son iguales a 0.

Resuelve $(x + 6)(x - 1) = 0$.

$$\begin{aligned} x + 6 &= 0 \quad \text{o} \quad & x - 1 &= 0 \\ x &= -6 & x &= 1 \end{aligned}$$

Las soluciones son -6 y 1.

Para resolver una ecuación mediante factorización

1. Utiliza la propiedad de la suma para quitar todos los términos de un lado de la ecuación. Esto resultará en un lado de la ecuación igual a 0.
2. Reduce los términos semejantes de la ecuación y luego factoriza.
3. Iguala a 0 cada factor, *que tenga una variable*, resuelve las ecuaciones y determina las soluciones.
4. Comprueba las soluciones en la ecuación *original*.

Resuelve $3x^2 + 13x - 4 = 2x$.

$$3x^2 + 11x - 4 = 0$$

$$(3x - 1)(x + 4) = 0$$

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= 0 \quad \text{o} \quad & x + 4 &= 0 \\ x &= \frac{1}{3} \quad \text{o} & x &= -4 \end{aligned}$$

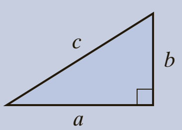
La comprobación muestra que $\frac{1}{3}$ y -4 son las soluciones.

Teorema de Pitágoras

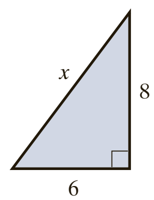
En un triángulo rectángulo, si a y b representan las longitudes de los catetos y c representa la longitud de la hipotenusa, entonces

$$\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Determina la longitud de la hipotenusa en el triángulo rectángulo siguiente.



$$\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2$$

$$\begin{aligned} 6^2 + 8^2 &= x^2 \\ 36 + 64 &= x^2 \\ 100 &= x^2 \\ 10 &= x \end{aligned}$$

Observación: -10 no es una respuesta posible.

Ejercicios de repaso del capítulo 5

[5.1]

Determina si cada expresión es un polinomio. Si la expresión es un polinomio, **a)** *da el nombre específico del polinomio si lo tuviera,* **b)** *escribe el polinomio en orden descendente considerando la variable x, y* **c)** *escribe el grado del polinomio.*

1. $3x^2 + 9$

2. $5x + 4x^3 - 7$

3. $8x - x^{-1} + 6$

4. $-3 - 10x^2y + 6xy^3 + 2x^4$

Realiza cada operación indicada.

5. $(x^2 - 5x + 8) + (2x + 6)$

6. $(7x^2 + 2x - 5) - (2x^2 - 9x - 1)$

7. $(2a - 3b - 2) - (-a + 5b - 9)$

8. $(4x^3 - 4x^2 - 2x) + (2x^3 + 4x^2 - 7x + 13)$

9. $(3x^2y + 6xy - 5y^2) - (4y^2 + 3xy)$

10. $(-8ab + 2b^2 - 3a) + (-b^2 + 5ab + a)$

11. Suma $x^2 - 3x + 12$ y $4x^2 + 10x - 9$

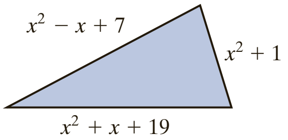
12. Resta $3a^2b - 2ab$ de $-7a^2b - ab$

13. Determina $P(2)$ si $P(x) = 2x^2 - 3x + 19$

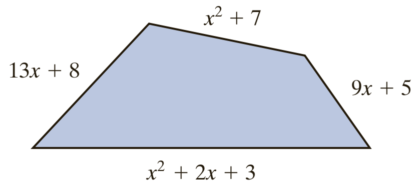
14. Determina $P(-3)$ si $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 10$

Perímetro *En los ejercicios 15 y 16, encuentra una expresión polinomial para el perímetro de cada figura.*

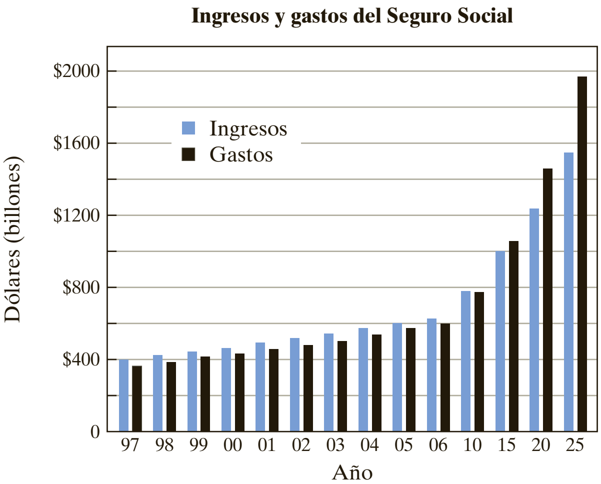
15.



16.



Utiliza la siguiente gráfica para trabajar en los ejercicios 17 y 18. La gráfica muestra los ingresos y gastos del Seguro Social desde 1997 hasta 2025.



Fuente: Administración del Seguro Social

17. Ingresos del Seguro Social La función $R(t) = 0.78t^2 + 20.28t + 385.0$, donde t son los años desde 1997 y $0 \le t \le 28$, proporciona una aproximación de los ingresos del Seguro Social, $R(t)$, en billones de dólares.

a) Usando la función proporcionada, determina los ingresos en 2010.

b) Compara tu respuesta del inciso **a)** con la gráfica. ¿La gráfica apoya tu respuesta?

18. Gastos del Seguro Social La función $G(t) = 1.74t^2 + 7.32t + 383.91$, donde t son los años desde 1997 y $0 \le t \le 28$, da una aproximación de los gastos del Seguro Social, $G(t)$, en billones de dólares.

a) Usando la función proporcionada, determina los gastos en 2010.

b) Compara tu respuesta del inciso **a)** con la gráfica. ¿La gráfica apoya tu respuesta?

[5.2]

Multiplica.

19. $2x(3x^2 - 7x + 5)$

20. $-3xy^2(x^3 + xy^4 - 4y^5)$

21. $(3x - 5)(2x + 9)$

22. $(5a + 1)(10a - 3)$

23. $(x + 8y)^2$

24. $(a - 11b)^2$

25. $(2xy - 1)(5x + 4y)$

26. $(2pq - r)(3pq + 7r)$

27. $(2a + 9b)^2$

28. $(4x - 3y)^2$

29. $(7x + 5y)(7x - 5y)$

30. $(2a - 5b^2)(2a + 5b^2)$

31. $(4xy + 6)(4xy - 6)$

32. $(9a^2 - 2b^2)(9a^2 + 2b^2)$

33. $[(x + 3y) + 2]^2$

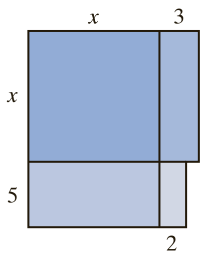
34. $[(2p - q) - 5]^2$

35. $(3x^2 + 4x - 6)(2x - 3)$

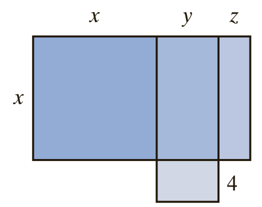
36. $(4x^3 + 6x - 2)(x + 3)$

Área *En los ejercicios 37 y 38, encuentra una expresión para el área total de cada figura.*

37.



38.



Para cada par de funciones, determina **a)** $(f \cdot g)(x)$ *y* **b)** $(f \cdot g)(3)$.

39. $f(x) = x + 1, g(x) = x - 3$

40. $f(x) = 2x - 4, g(x) = x^2 - 3$

41. $f(x) = x^2 + x - 3, g(x) = x - 2$

42. $f(x) = x^2 - 2, g(x) = x^2 + 2$

[5.3] *Divide.*

43. $\dfrac{4x^7y^5}{20xy^3}$

44. $\dfrac{3s^5t^8}{12s^5t^3}$

45. $\dfrac{45pq - 25q^2 - 15q}{5q}$

46. $\dfrac{7a^2 - 16a + 32}{4}$

47. $\dfrac{2x^3y^2 + 8x^2y^3 + 12}{8xy^3}$

48. $(8x^2 + 14x - 15) \div (2x + 5)$

49. $(2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 17x + 7) \div (2x + 1)$

50. $(4a^4 - 7a^2 - 5a + 4) \div (2a - 1)$

51. $(x^2 + x - 22) \div (x - 3)$

52. $(4x^3 + 12x^2 + x - 9) \div (2x + 3)$

Usa la división sintética para obtener cada cociente.

53. $(3x^3 - 2x^2 + 10) \div (x - 3)$

54. $(2y^5 - 10y^3 + y - 2) \div (y + 1)$

55. $(x^5 - 18) \div (x - 2)$

56. $(2x^3 + x^2 + 5x - 3) \div \left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

Determina el residuo de cada división usando el teorema del residuo. Si el divisor es factor del dividendo, indícalo.

57. $(x^2 - 4x + 13) \div (x - 3)$

58. $(2x^2 - 6x^2 + 3x) \div (x + 4)$

59. $(3x^3 - 6) \div \left(x - \dfrac{1}{3}\right)$

60. $(2x^4 - 6x^2 - 8) \div (x + 2)$

[5.4] *Factoriza el máximo factor común en cada expresión.*

61. $4x^2 + 8x + 32$

62. $15x^5 + 6x^4 - 12x^5y^3$

63. $10a^3b^3 - 14a^2b^6$

64. $24xy^4z^3 + 12x^2y^3z^2 - 30x^3y^2z^3$

Factoriza por agrupación.

65. $5x^2 - xy + 30xy - 6y^2$

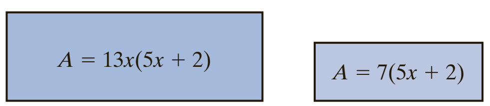
66. $12a^2 + 8ab + 15ab + 10b^2$

67. $(2x - 5)(2x + 1) - (2x - 5)(x - 8)$

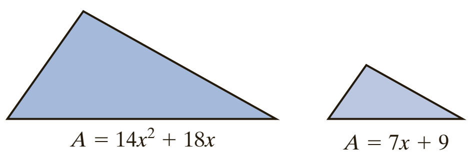
68. $7x(3x - 7) + 3(3x - 7)^2$

Área *En los ejercicios 69 y 70, A representa el área de la figura. Encuentra una expresión, en forma factorizada, para la diferencia de las áreas de las figuras geométricas.*

69.

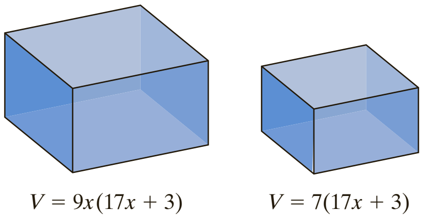


70.

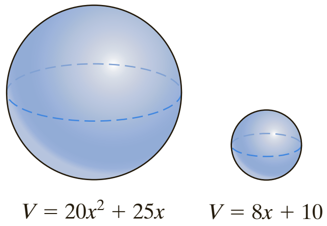


Volumen *En los ejercicios 71 y 72, V representa el volumen de la figura. Encuentra una expresión, en forma factorizada, para la diferencia de los volúmenes de las figuras geométricas.*

71.



72.



[5.5] *Factoriza cada trinomio.*

73. $x^2 + 9x + 18$

74. $x^2 + 3x - 10$

75. $x^2 - 3x - 28$

76. $x^2 - 10x + 16$

77. $-x^2 + 12x + 45$

78. $-x^2 + 13x - 12$

79. $2x^3 + 13x^2 + 6x$

80. $8x^4 + 10x^3 - 25x^2$

81. $4a^5 - 9a^4 + 5a^3$

82. $12y^5 + 61y^4 + 5y^3$

83. $x^2 - 15xy - 54y^2$

84. $6p^2 - 19pq + 10q^2$

85. $x^4 + 10x^2 + 21$

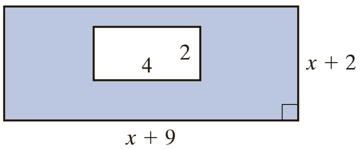
86. $x^4 + 2x^2 - 63$

87. $(x + 3)^2 + 10(x + 3) + 24$

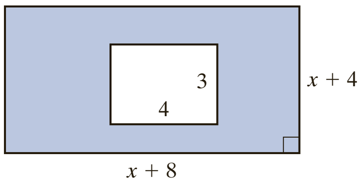
88. $(x - 4)^2 - (x - 4) - 20$

Área *En los ejercicios 89 y 90, encuentra una expresión, en forma factorizada, para el área de la región sombreada en cada figura.*

89.



90.



[5.6] *Utiliza una fórmula de factorización para factorizar lo siguiente.*

91. $x^2 - 36$

92. $x^2 - 121$

93. $x^4 - 81$

94. $x^4 - 16$

95. $4a^2 + 4a + 1$

96. $16y^2 - 24y + 9$

97. $(x + 2)^2 - 16$

98. $(3y - 1)^2 - 36$

99. $p^4 + 18p^2 + 81$

100. $m^4 - 20m^2 + 100$

101. $x^2 + 8x + 16 - y^2$

102. $a^2 + 6ab + 9b^2 - 36c^2$

103. $16x^2 + 8xy + y^2$

104. $36b^2 - 60bc + 25c^2$

105. $x^3 - 27$

106. $y^3 + 64z^3$

107. $125x^3 - 1$

108. $8a^3 + 27b^3$

109. $y^3 - 64z^3$

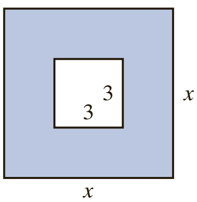
110. $(x - 2)^3 - 27$

111. $(x + 1)^3 - 8$

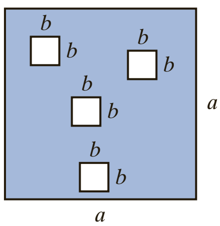
112. $(a + 4)^3 + 1$

Área *En los ejercicios 113 y 114, encuentra una expresión, en forma factorizada, para el área de la región sombreada en cada figura.*

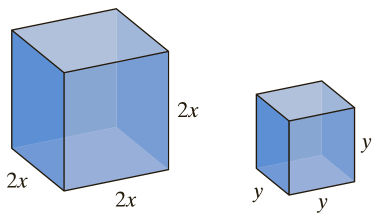
113.



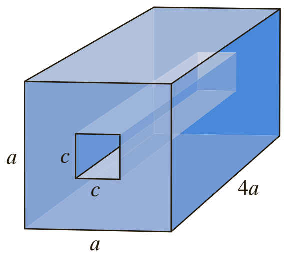
114.



115. Volumen Encuentra una expresión, en forma factorizada, para la diferencia de los volúmenes de los siguientes dos cubos.



116. Volumen Encuentra una expresión, en forma factorizada, para el volumen de la región sombreada de la siguiente figura.



[5.4-5.7]

Factoriza completamente.

117. $x^2y^4 - 2xy^4 - 15y^4$

118. $5x^3 - 30x^2 + 40x$

119. $3x^3y^4 + 18x^2y^4 - 6x^2y^4 - 36xy^4$

120. $3y^5 - 75y$

121. $4x^3y + 32y$

122. $5x^4y + 20x^3y + 20x^2y$

123. $6x^3 - 21x^2 - 12x$

124. $x^2 + 10x + 25 - z^2$

125. $5x^3 + 40y^3$

126. $x^2(x + 6) + 3x(x + 6) - 4(x + 6)$

127. $4(2x + 3)^2 - 12(2x + 3) + 5$

128. $4x^4 + 4x^2 - 3$

129. $(x + 1)x^2 - (x + 1)x - 2(x + 1)$

130. $9ax - 3bx + 21ay - 7by$

131. $6p^2q^2 - 5pq - 6$

132. $9x^4 - 12x^2 + 4$

133. $16y^2 - (x^2 + 4x + 4)$

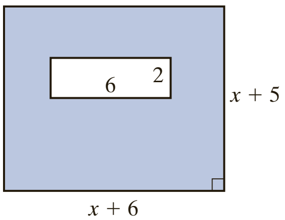
134. $6(2a + 3)^2 - 7(2a + 3) - 3$

135. $6x^4y^5 + 9x^3y^5 - 27x^2y^5$

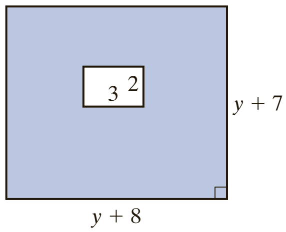
136. $x^3 - \frac{8}{27}y^6$

Área *En los ejercicios 137-142, encuentra una expresión, en forma factorizada, para el área de la región sombreada en cada figura.*

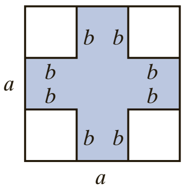
137.



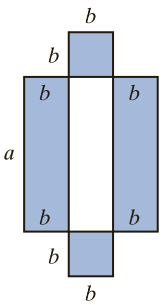
138.



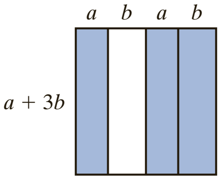
139.



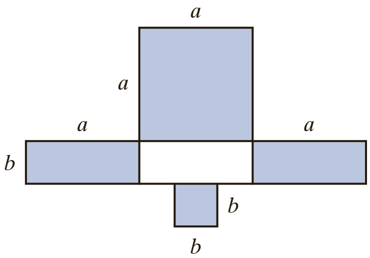
140.



141.



142.



[5.8] *Resuelve.*

143. $(x - 2)(4x + 1) = 0$

144. $(2x + 5)(3x + 10) = 0$

145. $4x^2 = 8x$

146. $12x^2 + 16x = 0$

147. $x^2 + 7x + 12 = 0$

148. $a^2 + a - 30 = 0$

149. $x^2 = 8x - 7$

150. $c^3 - 6c^2 + 8c = 0$

151. $5x^2 = 80$

152. $x(x + 3) = 2(x + 4) - 2$

153. $12d^2 = 13d + 4$

154. $20p^2 - 6 = 7p$

Utiliza la factorización para encontrar las intersecciones con el eje x de la gráfica de cada ecuación.

155. $y = 2x^2 - 6x - 36$

156. $y = 20x^2 - 49x + 30$

Escribe una ecuación cuya gráfica tendrá intersecciones con el eje x en los valores dados.

157. -4 y 6

158. $-\frac{5}{2}$ y $-\frac{1}{6}$

En los ejercicios 159-163, responde las preguntas.

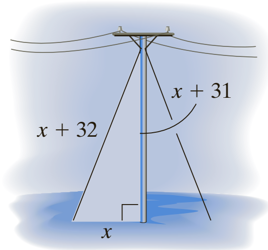
159. Alfombras El área de la alfombra rectangular de Fred Bank es de 108 pies cuadrados. Encuentra el largo y el ancho de la alfombra si el largo es 3 pies mayor que el ancho.

160. Señalamiento triangular La base de un amplio señalamiento triangular es 5 pies más que dos veces la altura. Encuentra la base y la altura si el área del triángulo es de 26 pies cuadrados.

161. Cuadrado Un cuadrado tiene un lado 4 pulgadas más largo que el lado de un segundo cuadrado. Si el área del cuadrado más grande es de 49 pulgadas cuadradas, encuentra la longitud de un lado de cada cuadrado.

162. Velocidad Un cohete se lanza hacia arriba desde la parte superior de un edificio de 144 pies de altura a una velocidad de 128 pies por segundo. La distancia del cohete desde el piso, s, en cualquier momento, t, en segundos está dada por la fórmula $s(t) = -16t^2 + 128t + 144$. Encuentra el tiempo que le toma al cohete chocar con el suelo.

163. Poste de teléfono Dos cables tensores se unen a un poste de teléfono para ayudar a estabilizarlo. Un cable se une al suelo x pies desde la base del poste. La altura del poste es $x + 31$ y la longitud del cable es $x + 32$. Determina x.



Prueba de práctica del capítulo 5

Los videos de la prueba de práctica del capítulo proporcionan soluciones totalmente resueltas para cualquiera de los ejercicios que quieras repasar. Los videos de la prueba de práctica del capítulo están disponibles vía MyMathLab *o en* YouTube *(busca "Angel Intermediate Algebra" y da click en "Channels").*

1. a) Da el nombre específico al siguiente polinomio.

$$-4x^2 + 3x - 6x^4$$

b) Escribe el polinomio en potencias descendentes de la variable x.

c) Indica el grado del polinomio.

d) ¿Cuál es el coeficiente principal del polinomio?

Realiza cada operación.

2. $(7x^2y - 5y^2 + 4x) - (3x^2y + 9y^2 - 6y)$

3. $2x^3y^2(-4x^5y + 12x^3y^2 - 6x)$

4. $(2a - 3b)(5a + b)$

5. $(2x^2 + 3xy - 6y^2)(2x + y)$

6. $(12x^6 - 15x^2y + 21) \div 3x^2$

7. $(2x^2 - 7x + 9) \div (2x + 3)$

8. Usa la división sintética para obtener el cociente.
$(3x^4 - 12x^3 - 60x + 1) \div (x - 5)$

9. Usa el teorema del residuo para encontrar el residuo cuando $2x^3 - 6x^2 - 5x + 8$ se divide entre $x + 3$.

Factoriza completamente.

10. $12x^3y + 10x^2y^4 - 14xy^3$

11. $x^3 - 2x^2 - 3x$

12. $2a^2 + 4ab + 3ab + 6b^2$

13. $2b^4 + 5b^2 - 18$

14. $4(x - 5)^2 + 20(x - 5)$

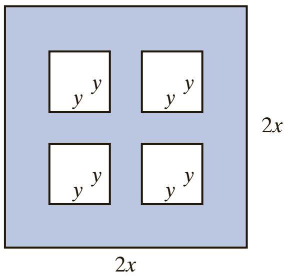
15. $(x + 4)^2 + 2(x + 4) - 3$

16. $27p^3q^6 - 8q^6$

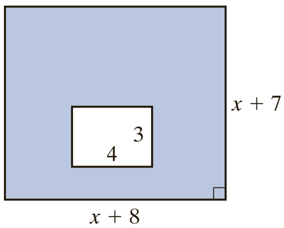
17. Si $f(x) = 3x - 4$ y $g(x) = x - 5$, encuentra **a)** $(f \cdot g)(x)$ y **b)** $(f \cdot g)(2)$

Área *En los ejercicios 18 y 19, encuentra una expresión, en forma factorizada, para el área de la región sombreada.*

18.



19.



Resuelve.

20. $7x^2 + 25x - 12 = 0$

21. $x^3 + 3x^2 - 10x = 0$

22. Usa la factorización para encontrar las intersecciones con el eje x de la gráfica de la ecuación $y = 8x^2 + 10x - 3$.

23. Encuentra una ecuación cuya gráfica tenga intersecciones con el eje x en 2 y 7.

24. Área El área de un triángulo es de 22 metros cuadrados. Si la base del triángulo es 3 metros más grande que dos veces la altura, determina la base y la altura del triángulo.

25. Béisbol Una pelota de béisbol se lanza hacia arriba desde la parte superior de un edificio de 448 pies de altura con una velocidad inicial de 48 pies por segundo. La distancia, s, de la pelota de béisbol desde el piso en cualquier momento, t, en segundos, está dada por la ecuación $s(t) = -16t^2 + 48t + 448$. Encuentra el tiempo que le toma a la pelota chocar con el suelo.

Prueba de repaso acumulada

Resuelve la siguiente prueba y verifica tus respuestas con las que aparecen al final del libro. Revisa las preguntas que hayas respondido incorrectamente. La sección donde se cubrió el tema correspondiente se indica después de cada respuesta.

1. Encuentra $A \cup B$ para $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{3, 5, 6, 8\}$.

2. Ilustra $\{x|x \leq -5\}$ en una recta numérica.

3. Divide $\left|\frac{3}{8}\right| \div (-4)$.

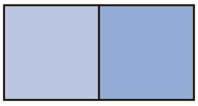
4. Evalúa $(-3)^3 - 2^2 - (-2)^2 + (9 - 8)^2$.

5. Simplifica $\left(\frac{2r^4s^5}{r^2}\right)^3$.

6. Resuelve $4(2x - 2) - 3(x + 7) = -4$.

7. Resuelve $k = 2(d + e)$ para e.

8. **Paisajismo** Craig Campanella, un arquitecto paisajista, desea cercar dos áreas iguales como se ilustra en la figura. Si ambas áreas son cuadrados y la longitud total del cercado usado es de 91 metros, determina las dimensiones de cada cuadrado.



9. **Sacando copias** Cecil Winthrop tiene un manuscrito. Necesita sacar 6 copias antes de enviárselo a su editor en Boston. La primera copia cuesta 15 centavos por página y cada copia adicional cuesta 5 centavos por página. Si la cuenta total antes de impuestos es de \$248, ¿cuántas páginas tiene el manuscrito?

10. **Promedio en exámenes** Las primeras cuatro calificaciones de Tod Garner en sus exámenes son 68, 72, 90 y 86. ¿Qué calificación debe alcanzar en su quinto examen para obtener un promedio mayor o igual a 70 y menor que 80?

11. ¿(4,1) es una solución para la ecuación $3x + 2y = 13$?

12. Escribe la ecuación $2 = 6x - 3y$ en la forma general.

13. Determina la pendiente que cruza los puntos $(8,-4)$ y $(-1,-2)$.

14. Si $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x + 16$, determina $f(-4)$.

15. Grafica la desigualdad $2x - y \leq 6$.

16. Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y = 4$$
$$\frac{2}{3}x - y = \frac{8}{3}$$

17. Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$x - 2y = 2$$
$$2x + 3y = 11$$
$$-y + 4z = 7$$

18. Evalúa el determinante.

$$\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

19. Divide $(2x^3 - 9x + 15) \div (x - 6)$.

20. Factoriza $64x^3 - 27y^3$.

6 Expresiones racionales y ecuaciones

Objetivos de este capítulo

Las *expresiones racionales* son expresiones que tienen fracciones, mientras que las *ecuaciones racionales* son ecuaciones que tienen expresiones racionales. En este capítulo aprenderás a trabajar con expresiones racionales y a resolver ecuaciones racionales. Para tener éxito en este capítulo, debes tener una plena comprensión de las técnicas de factorización analizadas en el capítulo 5.

© Glowimages

Cuando dos o más personas realizan una tarea, tardan menos tiempo que si la realiza de manera aislada cada una de ellas. Por ejemplo, en la página 405, determinaremos el tiempo que tardan dos personas, trabajando juntas, en cortar el césped (ejercicio 10), cosechar manzanas (ejercicio 11) o arar un campo (ejercicio 15), cuando sabemos el tiempo que cada persona tarda en completar la tarea si la realiza sola.

6.1 Dominios de funciones racionales y multiplicación y división de expresiones racionales

1. Determinar los dominios de funciones racionales.
2. Reducir expresiones racionales.
3. Multiplicar expresiones racionales.
4. Dividir expresiones racionales.

1 Determinar los dominios de funciones racionales

Expresiones racionales

Una **expresión racional** es una expresión de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son polinomios y $q \neq 0$.

Ejemplos de expresiones racionales

$$\frac{2}{x}, \quad \frac{t+3}{t}, \quad \frac{p^2+4p}{p-6}, \quad \frac{a}{a^2-4}$$

Observa que el denominador de una expresión racional no puede ser igual a 0, ya que la división entre 0 es indefinida. Por ejemplo,

- En la expresión $\frac{2}{x}$, $x \neq 0$.
- En la expresión $\frac{t+3}{t}$, $t \neq 0$.
- En la expresión $\frac{p^2+4p}{p-6}$, $p - 6 \neq 0$ o $p \neq 6$.
- En la expresión $\frac{a}{a^2-4}$, $a^2 - 4 \neq 0$ o $a \neq 2$ y $a \neq -2$.

Al escribir una expresión racional, siempre suponemos que el valor o valores de la variable que hacen el denominador igual a 0 están excluidos. Por ejemplo, si escribimos $\frac{5}{x-3}$, *suponemos que* $x \neq 3$, *aunque esto no se indique de manera específica.*

Comprendiendo el álgebra

Para entender las expresiones y funciones racionales, es preciso comprender las técnicas de factorización que se analizaron en el capítulo 5.

En el capítulo 3 estudiamos las funciones y en el capítulo 5 discutimos las funciones polinomiales. Ahora presentamos las funciones racionales.

Funciones racionales

Una **función racional** es de la forma $y = f(x) = \frac{p}{q}$ donde p y q son polinomios y $q \neq 0$.

Ejemplos de expresiones racionales

$$f(x) = \frac{4}{x} \qquad y = \frac{x^2+2}{x+3} \qquad T(a) = \frac{a+9}{a^2-4} \qquad h(x) = \frac{7x-8}{2x+1}$$

Comprendiendo el álgebra

La notación $y = f(x)$ significa que la ecuación define una función en la cual x es la variable independiente y y es la variable dependiente. Observa que $f(x)$ *no* significa f veces x.

Recuerda del capítulo 3 que el **dominio** de una función racional será el conjunto de valores que pueden utilizarse para reemplazar la variable independiente en la función, generalmente x. También recuerda del capítulo 5 que el dominio de una función polinomial es el conjunto de todos los números reales. Ya que no podemos dividir entre 0, tenemos la siguiente definición.

Dominio de una función racional

El **dominio de una función racional** $y = f(x) = \frac{p}{q}$ es el conjunto de valores de todos los números reales para los que el denominador, q, *es* diferente de 0.

Por ejemplo,

- Para la función $f(x) = \dfrac{2}{x}$, el dominio es $\{x|x \neq 0\}$.
- Para la función $f(t) = \dfrac{t+3}{t}$, el dominio es $\{t|t \neq 0\}$.
- Para la función $g(p) = \dfrac{p^2 + 4p}{p - 6}$, el dominio es $\{p|p \neq 6\}$.
- Para la función $h(a) = \dfrac{a}{a^2 - 4}$, el dominio es $\{a|a \neq 2 \quad \text{y } a \neq -2\}$.

EJEMPLO 1 Determina el dominio de las siguientes funciones racionales.

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-6}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2 + 2x - 15}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 8}$

Solución

a) Como *f(x)* es una función racional, el dominio son todos los números reales x para los que el denominador, $x - 6$, es diferente de 0. Por lo tanto, el dominio son todos los números reales excepto 6. El dominio se escribe

$$\{x|x \neq 6\}$$

b) El dominio es el conjunto de todos los números reales x para los que el denominador, *x*2 − 4, es diferente de 0. Primero, reescribimos el denominador en forma factorizada:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

$$= \frac{x^2}{(x+2)(x-2)} \quad \text{Factorizar el denominador de } f(x)$$

Observamos que x no puede ser -2 o 2. El dominio se escribe

$$\{x|x \neq -2 \quad \text{y} \quad x \neq 2\}$$

c) El dominio es el conjunto de todos los números reales x para los que el denominador, $x^2 + 2x - 15$, es diferente de 0. Primero, reescribimos el denominador en la forma factorizada:

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2 + 2x - 15}$$

$$= \frac{x-3}{(x+5)(x-3)} \quad \text{Factorizar el denominador de } f(x)$$

Aunque la función racional tiene el factor $(x - 3)$ común para numerador y denominador, un valor de $x = 3$ nos llevará a una función indefinida. Entonces, x no puede ser -5 o 3. El dominio se escribe

$$\{x|x \neq -5 \quad \text{y} \quad x \neq 3\}$$

d) El dominio son todos los números reales para los que el denominador, $x^2 + 8$, es diferente de 0. Como, $x^2 + 8$ es siempre positivo, el denominador nunca puede ser igual a 0 y el dominio son todos los números reales. El dominio se escribe

$$\{x|x \text{ es un número real}\}$$

Resuelve ahora el ejercicio 21

Cómo utilizar tu calculadora graficadora

Experimentar con una calculadora graficadora te dará una idea de la amplia variedad de gráficas que pueden producir las funciones racionales. Por ejemplo, la **Figura 6.1** muestra la gráfica de $f(x) = \dfrac{x+1}{x-6}$ del ejemplo 1 inciso **a)** sobre la TI-84 Plus. El dominio de $f(x)$ es $\{x|x \neq 6\}$. Observa que no hay punto sobre la gráfica que corresponda a $x = 6$.

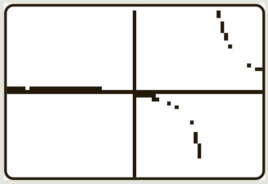


FIGURA 6.1

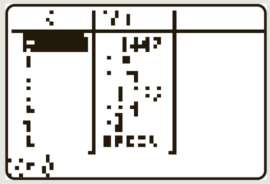


FIGURA 6.2

Otra manera para explorar el dominio de funciones racionales es usando la función TABLE. La **Figura 6.2** muestra los pares ordenados de la función. Observa que cuando $x = 6$ el valor de y mostrado en pantalla es ERROR. Esto es porque $f(6)$ es indefinida, entonces $x = 6$ está excluido del dominio de $f(x)$.

2 Simplificar expresiones racionales

Una expresión racional está **simplificada** cuando el numerador y el denominador no tienen factores comunes, distintos de 1. La fracción $\frac{6}{9}$ no está simplificada, ya que 6 y 9 tienen como factor común el número 3. Cuando se factoriza el número 3, la fracción simplificada es $\frac{2}{3}$.

$\frac{6}{9}$ no es una fracción simplificada $\longrightarrow$ $\dfrac{6}{9} = \dfrac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot 2}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot 3} = \dfrac{2}{3}$ $\longleftarrow$ $\frac{2}{3}$ es una fracción simplificada

La expresión racional $\dfrac{ab - b^2}{2b}$ no está simplificada, ya que el numerador y el denominador tienen un factor común, b. Para simplificar esta expresión, factoriza b en cada término del numerador y después divide.

$$\frac{ab - b^2}{2b} = \frac{\cancel{b}(a - b)}{2\cancel{b}} = \frac{a - b}{2}$$

Por lo tanto $\dfrac{ab - b^2}{2b}$ se convierte en $\dfrac{a - b}{2}$ cuando se simplifica.

Para simplificar expresiones racionales

1. Factoriza tanto el numerador como el denominador de la manera más completa posible.
2. Divide tanto el numerador como el denominador entre los factores comunes.

EJEMPLO 2 Simplifica. **a)** $\dfrac{x^2 + 5x + 4}{x + 4}$ **b)** $\dfrac{3x^3 - 3x^2}{x^3 - x}$

Solución

a)
$$\frac{x^2 + 5x + 4}{x + 4}$$
$$= \frac{(x + 4)(x + 1)}{x + 4} \quad \text{Factoriza el numerador.}$$
$$= \frac{\cancel{(x + 4)}(x + 1)}{\cancel{x + 4}} \quad \text{Divide el factor común.}$$
$$= x + 1$$

b) $\dfrac{3x^3 - 3x^2}{x^3 - x}$

$= \dfrac{3x^2(x-1)}{x(x^2-1)}$ Factoriza el MFC del numerador y denominador.

$= \dfrac{3x^2(x-1)}{x(x+1)(x-1)}$ Factoriza $x^2 - 1$ como la diferencia de dos cuadrados.

$= \dfrac{3\overset{x}{\cancel{x^2}}\cancel{(x-1)}}{\cancel{x}(x+1)\cancel{(x-1)}}$ Divide los factores comunes.

$= \dfrac{3x}{x+1}$

Resuelve ahora el ejercicio 33

Comprendiendo el álgebra

Cuando un factor en el numerador tiene términos que son *opuestos* a un factor en el denominador, esos dos factores tienen una relación de -1. Por ejemplo:

$$\frac{3x-2}{2-3x} = \frac{3x-2}{-1(-2+3x)} = \frac{\cancel{(3x-2)}}{-1\cancel{(3x-2)}} = \frac{1}{-1} = -1$$

Cuando los términos de un numerador solo difieren en el signo respecto de los términos en el denominador, podemos factorizar -1 del numerador o del denominador. Por ejemplo,

$$-2x + 3 = -1(2x - 3) = -(2x - 3)$$
$$6 - 5x = -1(-6 + 5x) = -(5x - 6)$$
$$-3x^2 + 8x - 6 = -1(3x^2 - 8x + 6) = -(3x^2 - 8x + 6)$$

EJEMPLO 3 Simplifica $\dfrac{27x^3 - 8}{2 - 3x}$.

Solución

$\dfrac{27x^3 - 8}{2 - 3x} = \dfrac{(3x)^3 - (2)^3}{2 - 3x}$ Escribe el numerador como una diferencia de dos cubos.

$= \dfrac{(3x-2)(9x^2+6x+4)}{2-3x}$ Factoriza; recuerda que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

$= \dfrac{\cancel{(3x-2)}(9x^2+6x+4)}{-1\cancel{(3x-2)}}$ Factoriza -1 del denominador divide entre los factores comunes.

$= \dfrac{9x^2+6x+4}{-1}$

$= -(9x^2 + 6x + 4)$ o $-9x^2 - 6x - 4$

Resuelve ahora el ejercicio 41

Prevención de errores comunes

INCORRECTO: $\dfrac{\overset{x}{\cancel{x^2}} + 6}{\underset{1}{\cancel{x}}}$

INCORRECTO: $\dfrac{x + \overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{4}}}$

Recuerda que solo se pueden dividir los factores comunes. Por lo tanto, las expresiones $\dfrac{x^2+6}{x}$ y $\dfrac{x+8}{4}$ no pueden simplificarse. Solamente cuando las expresiones están *multiplicadas* pueden factorizarse. Ninguna de las expresiones anteriores puede simplificarse de su forma original.

CORRECTO

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = x + 2$$

INCORRECTO

$$\frac{\overset{x}{\cancel{x^2}} - \overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{x}} - \underset{1}{\cancel{2}}}$$

3 Multiplicar expresiones racionales

Ahora que sabemos cómo simplificar una expresión racional, podemos analizar la multiplicación de expresiones racionales.

Para multiplicar expresiones racionales

Para multiplicar expresiones racionales, utiliza la siguiente regla:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d},\quad b\neq 0, d\neq 0$$

Para multiplicar expresiones racionales sigue estos pasos:.

1. Factoriza tanto como sea posible todos los numeradores y los denominadores.
2. Divide entre los factores comunes.
3. Multiplica usando la regla anterior.
4. Cuando sea posible, simplifica la respuesta.

Si se factorizaron todos los factores comunes en el paso 2, tu respuesta en el paso 4 debe estar en la forma simplificada. Sin embargo, si olvidaste un factor común en el paso 2, puedes factorizarlo en el paso 4 para obtener una respuesta más simplificada.

EJEMPLO 4 Multiplica. **a)** $\dfrac{x-5}{6x}\cdot\dfrac{x^2-2x}{x^2-7x+10}$ **b)** $\dfrac{2x-3}{x-4}\cdot\dfrac{x^2-8x+16}{3-2x}$

Solución

a) $$\frac{x-5}{6x}\cdot\frac{x^2-2x}{x^2-7x+10}=\frac{\cancel{x-5}}{6\cancel{x}}\cdot\frac{\cancel{x}\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x-5)}}$$

Factoriza; divide los factores comunes.

$$=\frac{1}{6}$$

b) $$\frac{2x-3}{x-4}\cdot\frac{x^2-8x+16}{3-2x}=\frac{2x-3}{x-4}\cdot\frac{(x-4)(x-4)}{3-2x}$$

Factoriza.

$$=\frac{\cancel{2x-3}}{\cancel{x-4}}\cdot\frac{\cancel{(x-4)}(x-4)}{-1\cancel{(2x-3)}}$$

Factoriza -1 del denominador; divide los factores comunes.

$$=\frac{x-4}{-1}$$

$$=-(x-4)\quad\text{o}\quad -x+4\quad\text{o}\quad 4-x$$

Resuelve ahora el ejercicio 61

EJEMPLO 5 Multiplica $\dfrac{x^2-y^2}{x+y}\cdot\dfrac{x+4y}{2x^2-xy-y^2}$.

Solución

$$\frac{x^2-y^2}{x+y}\cdot\frac{x+4y}{2x^2-xy-y^2}=\frac{\cancel{(x+y)}\cancel{(x-y)}}{\cancel{x+y}}\cdot\frac{x+4y}{(2x+y)\cancel{(x-y)}}$$

Factoriza; divide los factores comunes.

$$=\frac{x+4y}{2x+y}$$

Resuelve ahora el ejercicio 55

EJEMPLO 6 Multiplica $\dfrac{ab - ac + bd - cd}{ab + ac + bd + cd} \cdot \dfrac{b^2 + bc + bd + cd}{b^2 + bd - bc - cd}$.

Solución Factoriza los numeradores y denominadores mediante agrupación. Luego divide entre los factores comunes.

$$\frac{ab - ac + bd - cd}{ab + ac + bd + cd} \cdot \frac{b^2 + bc + bd + cd}{b^2 + bd - bc - cd}$$

$$= \frac{a(b - c) + d(b - c)}{a(b + c) + d(b + c)} \cdot \frac{b(b + c) + d(b + c)}{b(b + d) - c(b + d)}$$ Factoriza mediante agrupación.

$$= \frac{(b - c)(a + d)}{(b + c)(a + d)} \cdot \frac{(b + c)(b + d)}{(b + d)(b - c)}$$ Factoriza mediante agrupación (continua).

$$= \frac{\cancel{(b - c)}\,\cancel{(a + d)}}{\cancel{(b + c)}\,\cancel{(a + d)}} \cdot \frac{\cancel{(b + c)}\,\cancel{(b + d)}}{\cancel{(b + d)}\,\cancel{(b - c)}} = 1$$ Divide entre los factores comunes.

Resuelve ahora el ejercicio 75

4 Dividir expresiones racionales

A continuación analizaremos la división de expresiones racionales.

Para dividir expresiones racionales

Para dividir expresiones racionales, utiliza la siguiente regla:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}, \quad b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$$

Para dividir expresiones racionales, multiplicamos la primera expresión racional por el recíproco de la segunda expresión racional.

EJEMPLO 7 Divide $\dfrac{18x^4}{5y^3} \div \dfrac{3x^5}{25y}$.

Solución

$$\frac{18x^4}{5y^3} \div \frac{3x^5}{25y} = \frac{18x^4}{5y^3} \cdot \frac{25y}{3x^5}$$ Multiplica por el recíproco del divisor.

$$= \frac{\overset{6}{\cancel{18}}\,\cancel{x^4}}{\cancel{5}\,\underset{y^2}{\cancel{y^3}}} \cdot \frac{\overset{5}{\cancel{25}}\,\cancel{y}}{\cancel{3}\,\underset{x}{\cancel{x^5}}}$$ Divide entre los factores comunes.

$$= \frac{6 \cdot 5}{y^2 x} = \frac{30}{xy^2}$$

Resuelve ahora el ejercicio 51

En el ejemplo 7, todos los numeradores y denominadores fueron monomios. Cuando los numeradores o denominadores son binomios o trinomios, los factorizamos, si es posible, en orden para dividir entre factores comunes. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 8.

EJEMPLO 8 Divide.

a) $\dfrac{x^2 - 25}{x + 7} \div \dfrac{x - 5}{x + 7}$ **b)** $\dfrac{12a^2 - 22a + 8}{3a} \div \dfrac{3a^2 + 2a - 8}{8a^2 + 16a}$

Solución

a) $$\frac{x^2 - 25}{x + 7} \div \frac{x - 5}{x + 7} = \frac{x^2 - 25}{x + 7} \cdot \frac{x + 7}{x - 5}$$ Multiplica por el recíproco del divisor.

$$= \frac{(x + 5)\cancel{(x - 5)}}{\cancel{x + 7}} \cdot \frac{\cancel{x + 7}}{\cancel{x - 5}}$$ Factoriza; divide entre los factores comunes.

$$= x + 5$$

b)
$$\frac{12a^2 - 22a + 8}{3a} \div \frac{3a^2 + 2a - 8}{8a^2 + 16a}$$

$$= \frac{12a^2 - 22a + 8}{3a} \cdot \frac{8a^2 + 16a}{3a^2 + 2a - 8}$$ Multiplica por el recíproco del divisor.

$$= \frac{2(6a^2 - 11a + 4)}{3a} \cdot \frac{8a(a + 2)}{(3a - 4)(a + 2)}$$ Factoriza.

$$= \frac{2\cancel{(3a - 4)}(2a - 1)}{3\cancel{a}} \cdot \frac{8\cancel{a}\cancel{(a + 2)}}{\cancel{(3a - 4)}\cancel{(a + 2)}}$$ Factoriza de nuevo; divide entre los factores comunes.

$$= \frac{16(2a - 1)}{3}$$

Resuelve ahora el ejercicio 59

EJEMPLO 9 Divide $\dfrac{x^4 - y^4}{x - y} \div \dfrac{x^2 + xy}{x^2 - 2xy + y^2}$.

Solución

$$\frac{x^4 - y^4}{x - y} \div \frac{x^2 + xy}{x^2 - 2xy + y^2}$$

$$= \frac{x^4 - y^4}{x - y} \cdot \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + xy}$$ Multiplica por el recíproco del divisor.

$$= \frac{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}{x - y} \cdot \frac{(x - y)(x - y)}{x(x + y)}$$ Factoriza.

$$= \frac{(x^2 + y^2)\cancel{(x + y)}\cancel{(x - y)}}{\cancel{x - y}} \cdot \frac{(x - y)(x - y)}{x\cancel{(x + y)}}$$ Factoriza de nuevo; divide entre los factores comunes.

$$= \frac{(x^2 + y^2)(x - y)^2}{x}$$

Resuelve ahora el ejercicio 69

Consejo útil

Consejo de estudio

A lo largo de este capítulo necesitaremos factorizar polinomios. Es importante que entiendas las técnicas de factorización que se trataron en el capítulo 5.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.1

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

multiplicar dividir sumar dominio rango $\dfrac{y}{x^2}$ $\dfrac{x^3}{y^2}$ $\{x|x \neq -5\}$

$\{x|x \neq 4\}$ $\dfrac{x+3}{x+8}$ función racional expresión racional $\dfrac{-2x-15}{3x-40}$ simplificar

1. Una ________ es de la forma $\dfrac{p}{q}$, donde p y q son polinomios y $q \neq 0$.

2. Una ________ es de la forma $y = f(x) = \dfrac{p}{q}$ donde p y q son polinomios y $q \neq 0$.

3. El ________ de una función racional es el conjunto de todos los números reales para los que el denominador es *diferente* de 0.

4. Para ________ una expresión racional, primero se factorizan el numerador y el denominador y luego se divide entre los factores comunes.

5. Para ________ dos expresiones racionales, primero se factorizan todos los numeradores y denominadores y luego se divide entre los factores comunes.

6. Para ________ dos expresiones racionales, multiplicar la primera expresión racional por el recíproco de la segunda expresión racional.

7. La expresión racional $\dfrac{x^2 - 2x - 15}{x^2 + 3x - 40}$ se simplifica a ______________.

8. El producto $\dfrac{x^2}{y} \cdot \dfrac{y^2}{x^4}$ es ______________.

9. El cociente $\dfrac{x^5}{y^4} \div \dfrac{x^2}{y^2}$ es ______________.

10. El dominio de la función $f(x) = \dfrac{x+5}{x-4}$ es ______________.

Practica tus habilidades

Determina los valores que son excluidos en las siguientes expresiones.

11. $\dfrac{7}{x}$

12. $\dfrac{x+2}{x^2 - 64}$

13. $\dfrac{4}{2x^2 - 15x + 25}$

14. $\dfrac{2}{(x-6)^2}$

15. $\dfrac{x-3}{x^2 + 12}$

16. $\dfrac{-2}{49 - r^2}$

17. $\dfrac{x^2 + 81}{x^2 - 81}$

18. $\dfrac{x^2 - 36}{x^2 + 36}$

Determina el dominio de cada función.

19. $f(x) = \dfrac{x-4}{x-5}$

20. $f(z) = \dfrac{3}{-18z + 9}$

21. $y = \dfrac{5}{x^2 + x - 6}$

22. $y = \dfrac{9}{x^2 + 4x - 21}$

23. $f(a) = \dfrac{a^2 + 3a + 2}{a^2 + 4a + 3}$

24. $f(x) = \dfrac{10 - 3x}{x^3 + 8x}$

25. $g(x) = \dfrac{x^2 - x + 8}{x^2 + 4}$

26. $h(x) = \dfrac{x^3 - 64x}{x^2 + 81}$

27. $m(a) = \dfrac{a^2 + 36}{a^2 - 36}$

28. $k(b) = \dfrac{b^2 - 36}{b^2 + 36}$

Simplifica cada expresión racional.

29. $\dfrac{x^2 + x}{x}$

30. $\dfrac{x^2 - 5x}{x}$

31. $\dfrac{5x^2 - 20xy}{15x}$

32. $\dfrac{x^2 + 7x}{x^2 - 2x}$

33. $\dfrac{x^3 - x}{x^2 - 1}$

34. $\dfrac{4x^2y + 12xy + 18x^3y^3}{10xy^2}$

35. $\dfrac{5r - 8}{8 - 5r}$

36. $\dfrac{4x^2 - 16x^4 + 6x^5y}{14x^3y^2}$

37. $\dfrac{p^2 - 2p - 24}{6 - p}$

38. $\dfrac{4x^2 - 9}{2x^2 - x - 3}$

39. $\dfrac{a^2 - 3a - 10}{a^2 + 5a + 6}$

40. $\dfrac{y^2 - 10yz + 24z^2}{y^2 - 5yz + 4z^2}$

41. $\dfrac{8x^3 - 125y^3}{2x - 5y}$

42. $\dfrac{64x^3 - 27z^3}{3z - 4x}$

43. $\dfrac{(x+6)(x-3) + (x+6)(x-2)}{2(x+6)}$

44. $\dfrac{(2x-1)(x+4) + (2x-1)(x+1)}{3(2x-1)}$

45. $\dfrac{a^2 + 7a - ab - 7b}{a^2 - ab + 5a - 5b}$

46. $\dfrac{xy - yw + xz - zw}{xy + yw + xz + zw}$

47. $\dfrac{x^2 - x - 12}{x^3 + 27}$

48. $\dfrac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$

Multiplica o divide como se indica. Simplifica todas las respuestas.

49. $\dfrac{3x}{5y^2} \cdot \dfrac{y}{9}$

50. $\dfrac{32x^2}{y^4} \cdot \dfrac{5x^3}{8y^2}$

51. $\dfrac{9x^3}{4} \div \dfrac{3}{16y^2}$

52. $\dfrac{10m^4}{49x^5y^7} \div \dfrac{25m^5}{21x^{12}y^5}$

53. $\dfrac{3-r}{r-3} \cdot \dfrac{r-9}{9-r}$

54. $\dfrac{7a + 7b}{5} \div \dfrac{a^2 - b^2}{a - b}$

55. $\dfrac{x^2 + 3x - 10}{4x} \cdot \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 5x + 6}$

56. $\dfrac{p^2 + 7p + 10}{p + 5} \cdot \dfrac{1}{p + 2}$

57. $\dfrac{r^2 + 10r + 21}{r + 7} \div \dfrac{(r^2 - 5r - 24)}{r^3}$

58. $(x - 3) \div \dfrac{x^2 + 3x - 18}{x^3}$

59. $\dfrac{x^2 + 12x + 35}{x^2 + 4x - 5} \div \dfrac{x^2 + 3x - 28}{7x - 7}$

60. $\dfrac{x + 1}{x^2 - 17x + 30} \div \dfrac{8x + 8}{x^2 + 7x - 18}$

61. $\dfrac{a - b}{9a + 9b} \div \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + 2a + 1}$

62. $\dfrac{2x^2 + 8xy + 8y^2}{x^2 + 4xy + 4y^2} \cdot \dfrac{2x^2 + 7xy + 6y^2}{4x^2 + 14xy + 12y^2}$

63. $\dfrac{3x^2 - x - 4}{4x^2 + 5x + 1} \cdot \dfrac{2x^2 - 5x - 12}{6x^2 + x - 12}$

64. $\dfrac{6x^3 - x^2 - x}{2x^2 + x - 1} \cdot \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 + x}$

65. $\dfrac{x + 2}{x^3 - 8} \cdot \dfrac{(x - 2)^2}{x^2 + 4}$

66. $\dfrac{x^4 - y^8}{x^2 + y^4} \div \dfrac{x^2 - y^4}{x^2}$

67. $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy + y^2} \div \dfrac{(x + y)^2}{(x - y)^2}$

68. $\dfrac{(x^2 - y^2)^2}{(x^2 - y^2)^3} \div \dfrac{x^2 + y^2}{x^4 - y^4}$

69. $\dfrac{2x^4 + 4x^2}{6x^2 + 14x + 4} \div \dfrac{x^2 + 2}{3x^2 + x}$

70. $\dfrac{8a^3 - 1}{4a^2 + 2a + 1} \div \dfrac{a^2 - 2a + 1}{(a - 1)^2}$

71. $\dfrac{(a - b)^3}{a^3 - b^3} \cdot \dfrac{a^2 - b^2}{(a - b)^2}$

72. $\dfrac{r^2 - 16}{r^3 - 64} \div \dfrac{r^2 + 8r + 16}{r^2 + 4r + 16}$

73. $\dfrac{4x + y}{5x + 2y} \cdot \dfrac{10x^2 - xy - 2y^2}{8x^2 - 2xy - y^2}$

74. $\dfrac{2x^3 - 7x^2 + 3x}{x^2 + 2x - 3} \cdot \dfrac{x^2 + 3x}{(x - 3)^2}$

75. $\dfrac{ac - ad + bc - bd}{ac + ad + bc + bd} \cdot \dfrac{pc + pd - qc - qd}{pc - pd + qc - qd}$

76. $\dfrac{2p^2 + 2pq - pq^2 - q^3}{p^3 + p^2 + pq^2 + q^2} \div \dfrac{p^3 + p + p^2q + q}{p^3 + p + p^2 + 1}$

77. $\dfrac{3r^2 + 17rs + 10s^2}{6r^2 + 13rs - 5s^2} \div \dfrac{6r^2 + rs - 2s^2}{6r^2 - 5rs + s^2}$

78. $\dfrac{x^3 - 4x^2 + x - 4}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2} \cdot \dfrac{2x^3 + 2x^2 + x + 1}{2x^3 - 8x^2 + x - 4}$

Resolución de problemas

Determina el polinomio que debe colocarse en el área sombreada para obtener una proposición verdadera.

79. $\dfrac{\boxed{\qquad\qquad}}{x^2 + 2x - 15} = \dfrac{1}{x - 3}$

80. $\dfrac{\boxed{\qquad}}{3x + 2} = x - 3$

81. $\dfrac{y^2 - y - 20}{\boxed{\qquad\qquad}} = \dfrac{y + 4}{y + 1}$

82. $\dfrac{\boxed{\qquad\qquad}}{6p^2 + p - 15} = \dfrac{2p - 1}{2p - 3}$

Determina el polinomio que debe colocarse en el área sombreada para obtener una proposición verdadera.

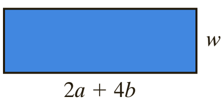
83. $\dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 3} \cdot \dfrac{\boxed{\qquad\qquad}}{x^2 - 2x - 8} = 1$

84. $\dfrac{x^2 - 4}{(x + 2)^2} \cdot \dfrac{2x^2 + x - 6}{\boxed{\qquad\qquad}} = \dfrac{x - 2}{2x + 5}$

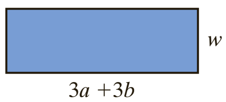
85. $\dfrac{x^2 - 9}{2x^2 + 3x - 2} \div \dfrac{2x^2 - 9x + 9}{\boxed{\qquad\qquad}} = \dfrac{x + 3}{2x - 1}$

86. $\dfrac{4r^2 - r - 18}{\boxed{\qquad\qquad}} \div \dfrac{4r^3 - 9r^2}{6r^2 - 9r + 3} = \dfrac{3(r - 1)}{r^2}$

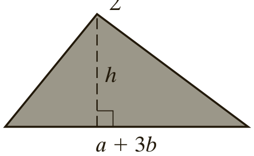
87. **Área** Considera el siguiente rectángulo. Su área es $3a^2 + 7ab + 2b^2$ y su longitud es $2a + 4b$. Determina su ancho, w, en términos de a y b, dividiendo su área entre su longitud.



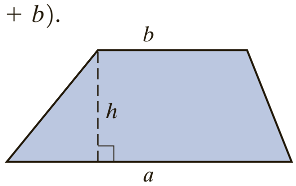
88. **Área** Considera el siguiente rectángulo. Su área es $a^2 + 2ab + b^2$ y su longitud es $3a + 3b$. Determina su ancho, w, en términos de a y b, dividiendo su área entre su longitud.



89. **Área** Considera el siguiente triángulo. Si su área es $a^2 + 4ab + 3b^2$ y su base es $a + 3b$, determina su altura h. Utiliza la fórmula área $= \dfrac{1}{2}(\text{base})(\text{altura})$.



90. **Área** Considera el siguiente trapecio. Si su área es $a^2 + 2ab + b^2$, determina su altura, h. Utiliza la fórmula área $= \dfrac{1}{2}h(a + b)$.



Problemas de desafío

Realiza cada operación indicada.

91. $\left(\dfrac{2x^2 - 3x - 14}{2x^2 - 9x + 7} \div \dfrac{6x^2 + x - 15}{3x^2 + 2x - 5}\right) \cdot \dfrac{6x^2 - 7x - 3}{2x^2 - x - 3}$

92. $\left(\dfrac{a^2 - b^2}{2a^2 - 3ab + b^2} \cdot \dfrac{2a^2 - 7ab + 3b^2}{a^2 + ab}\right) \div \dfrac{ab - 3b^2}{a^2 + 2ab + b^2}$

93. $\dfrac{5x^2(x - 1) - 3x(x - 1) - 2(x - 1)}{10x^2(x - 1) + 9x(x - 1) + 2(x - 1)} \cdot \dfrac{2x + 1}{x + 3}$

94. $\dfrac{x^2(3x - y) - 5x(3x - y) - 24(3x - y)}{x^2(3x - y) - 9x(3x - y) + 8(3x - y)} \cdot \dfrac{x - 1}{x + 3}$

95. $\dfrac{(x - p)^n}{x^{-2}} \div \dfrac{(x - p)^{2n}}{x^{-6}}$

96. $\dfrac{x^{-3}}{(a - b)^r} \div \dfrac{x^{-5}}{(a - b)^{r+2}}$

Simplifica.

97. $\dfrac{x^{5y}+3x^{4y}}{3x^{3y}+x^{4y}}$

98. $\dfrac{m^{2x}-m^{x}-2}{m^{2x}-4}$

Para los ejercicios 99-102,

a) *determina el dominio de la función.*

b) *traza la gráfica de la función en modo de conexión.*

99. $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

100. $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$

101. $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$

102. $f(x)=\dfrac{x-2}{x-2}$

103. Considera la función racional $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

a) Determina el dominio de la función.

b) Completa la siguiente tabla para la función.

x	-10	-1	-0.5	-0.1	-0.01	0.01	0.1	0.5	1	10
y										

c) Traza la gráfica de $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Considera qué le sucede a la función conforme x se aproxima a 0, tanto por el lado izquierdo como por el lado derecho.

d) ¿Esta gráfica puede tener un valor de 0? Explica tu respuesta.

Ejercicios de conceptos y escritura

104. Construye una expresión racional que esté indefinida en $x=4$ y $x=-5$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

105. Construye una expresión racional que esté indefinida en $x=2$ y $x=-3$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

106. Considera la función racional $g(x)=\dfrac{2}{x+3}$. Explica por qué esta función no puede ser igual a 0.

107. Considera la función racional $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Explica por qué esta función no puede ser igual a 0.

108. Considera la función $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-81}$. ¿Para qué valores de x, si los hay, esta función **a)** es igual a 0, **b)** no está definida? Explica.

109. Considera la función racional $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2-36}$. ¿Para qué valores de x, o si los hay, esta función **a)** es igual a 0, **b)** no está definida? Explica.

110. Proporciona una función que esté indefinida en $x=-4$ y $x=-2$, y tenga un valor de 0 en $x=5$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

111. Proporciona una función que esté indefinida en $x=3$ y $x=-1$, y tenga un valor de 0 en $x=2$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

Actividad de grupo

112. Consideren la función racional $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

a) Determina, en equipo, el dominio de esta función.

b) De manera individual cada miembro del grupo complete la siguiente tabla para la función.

x	-2	-1	0	1	1.9	1.99	2.01	2.1	3	4	5	6
y												

c) Comparen las respuestas del inciso **b)** y pónganse de acuerdo acerca de cuáles son los valores correctos de la tabla.

d) Tracen, en grupo, la gráfica de $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$. ¿La función está definida cuando $x=2$?

e) ¿Esta función puede tener algún valor de 0? Si es así, ¿para qué valor o valores de a es $f(a)=0$?

Ejercicios de repaso acumulados

[2.2] **113.** Despeja y de $6(x-2)+6y=12x$.

[2.5] **114.** Resuelve $4+\dfrac{4x}{3}<6$ y da la respuesta en notación de intervalo.

[2.6] **115.** Resuelve $\left|\dfrac{2x-4}{12}\right|=5$.

[3.2] **116.** Sea $f(x)=|6-3x|-2$. Determina $f(1.3)$.

[4.1] **117.** Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$3x+4y=2$$
$$2x+5y=-1$$

[5.6] **118.** Factoriza $9x^2+6xy+y^2-4$.

6.2 Suma y resta de expresiones racionales

1 Sumar y restar expresiones con un denominador común.

2 Determinar el mínimo común denominador (MCD).

3 Sumar y restar expresiones sin denominadores comunes.

4 Analizar una aplicación de expresiones racionales.

1 Sumar y restar expresiones con un denominador común

Al sumar o restar dos expresiones racionales con un denominador común, sumamos o restamos los numeradores mientras conservamos el denominador común.

Para sumar o restar expresiones racionales

Para sumar o restar expresiones racionales, utiliza las siguientes reglas.

SUMA

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \quad c \neq 0$$

RESTA

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}, \quad c \neq 0$$

Para sumar o restar expresiones racionales con un denominador común:

1. Suma o resta las expresiones, tal como indican las reglas anteriores.
2. Si es posible, simplifica las expresiones.

EJEMPLO 1 Suma.

a) $\dfrac{3}{x+6} + \dfrac{x-4}{x+6}$

b) $\dfrac{x^2+3x-2}{(x+5)(x-3)} + \dfrac{4x+12}{(x+5)(x-3)}$

Solución

a) Como los denominadores son iguales, sumamos los numeradores y conservamos el denominador común.

$$\frac{3}{x+6} + \frac{x-4}{x+6} = \frac{3+(x-4)}{x+6} \qquad \text{Suma numeradores.}$$

$$= \frac{x-1}{x+6}$$

b) $$\frac{x^2+3x-2}{(x+5)(x-3)} + \frac{4x+12}{(x+5)(x-3)} = \frac{x^2+3x-2+(4x+12)}{(x+5)(x-3)} \qquad \text{Suma numeradores.}$$

$$= \frac{x^2+7x+10}{(x+5)(x-3)} \qquad \text{Reduce términos semejantes.}$$

$$= \frac{\cancel{(x+5)}(x+2)}{\cancel{(x+5)}(x-3)} \qquad \text{Factoriza; divide entre los factores comunes.}$$

$$= \frac{x+2}{x-3}$$

Resuelve ahora el ejercicio 11

Prevención de errores comunes

¿Cómo simplificarías este problema? $\dfrac{4x}{x-2} - \dfrac{2x+1}{x-2}$

CORRECTO

$$\frac{4x}{x-2} - \frac{2x+1}{x-2} = \frac{4x-(2x+1)}{x-2}$$
$$= \frac{4x-2x-1}{x-2}$$
$$= \frac{2x-1}{x-2}$$

INCORRECTO

$$\cancel{\frac{4x}{x-2} - \frac{2x+1}{x-2} = \frac{4x-2x+1}{x-2} = \frac{2x+1}{x-2}}$$

El procedimiento del lado derecho es incorrecto, ya que hay que restar todo el *numerador*, $2x + 1$, de $4x$, y no solo $2x$. Observa que *debes cambiar el signo de cada término del numerador de la fracción restada (no solo el signo del primer término)*. Observa que, de acuerdo con la propiedad distributiva, $-(2x + 1) = -2x - 1$.

EJEMPLO 2 Resta $\dfrac{a}{a-6} - \dfrac{a^2-4a-6}{a-6}$.

Solución

$$\frac{a}{a-6} - \frac{a^2-4a-6}{a-6} = \frac{a-(a^2-4a-6)}{a-6} \qquad \text{Resta numeradores.}$$
$$= \frac{a-a^2+4a+6}{a-6} \qquad \text{Propiedad distributiva.}$$
$$= \frac{-a^2+5a+6}{a-6} \qquad \text{Reduce términos semejantes.}$$
$$= \frac{-(a^2-5a-6)}{a-6} \qquad \text{Factoriza } -1$$
$$= \frac{-\cancel{(a-6)}(a+1)}{\cancel{a-6}} \qquad \text{Factoriza, divide entre los factores comunes.}$$
$$= -(a+1) \text{ o } -a-1$$

Resuelve ahora el ejercicio 13

Comprendiendo el álgebra

Cuando se restan expresiones racionales, asegúrate de restar el numerador completo de la fracción a ser restada. Como se ve en el ejemplo 2, la propiedad distributiva se usa para cambiar el signo de cada término que se resta.

2 Determinar el mínimo común denominador (MCD)

Para sumar o restar dos fracciones numéricas con denominadores distintos, primero debemos obtener el mínimo común denominador (MCD). Para obtener el MCD, muchas veces es necesario escribir los valores numéricos como productos de números primos. Por ejemplo, los números 36 y 48 se pueden escribir como

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$
$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3$$

Podríamos necesitar escribir coeficientes numéricos como productos de números primos para encontrar el MCD.

Comprendiendo el álgebra

Un número *primo* es un número natural mayor que 1 y que solo tiene 2 divisores, él mismo y 1. Los primeros 10 números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, y 29.

Para determinar el mínimo común denominador (MCD) de expresiones racionales

1. Escribe como producto de números primos cada coeficiente no primo (distinto de 1) de los monomios del denominador.
2. Factoriza por completo cada denominador. Cualquier factor que aparezca más de una vez debe expresarse como potencia. Por ejemplo, $(x + 5)(x + 5)$ debe expresarse como $(x + 5)^2$.
3. Lista todos los factores diferentes (distintos de 1) que aparezcan en cualquiera de los denominadores. Cuando el mismo factor aparezca en más de un denominador, escribe el factor con la mayor potencia.
4. El mínimo común denominador es el producto de todos los factores encontrados en el paso 3.

EJEMPLO 3 Determina el MCD de cada expresión.

a) $\dfrac{3}{5x} - \dfrac{2}{x^2}$ **b)** $\dfrac{1}{18x^3y} + \dfrac{5}{27x^2y^3}$ **c)** $\dfrac{3}{x} - \dfrac{2y}{x+5}$ **d)** $\dfrac{7}{x^2(x+1)} + \dfrac{3z}{x(x+1)^3}$

Solución

a) Los factores que aparecen en los denominadores son 5 y x. Escribe cada factor con su máxima potencia. El MCD es el producto de estos factores.

Mayor potencia de 5 — Mayor potencia de x

$$\text{MCD} = 5^1 \cdot x^2 = 5x^2$$

b) Los coeficientes numéricos escritos como productos de números primos son $18 = 2 \cdot 3^2$ y $27 = 3^3$. Los factores variables que aparecen son x y y. Utilizamos las máximas potencias de los factores para obtener el MCD.

Mayor potencia de 3 — Mayor potencia de x

Mayor potencia de 2 — Mayor potencia de y

$$\text{MCD} = 2^1 \cdot 3^3 \cdot x^3 \cdot y^3 = 54x^3y^3$$

c) Los factores son x y $x + 5$. Observa que la x del segundo denominador, $x + 5$, no es un factor del denominador, ya que la operación es una suma y no una multiplicación.

$$\text{MCD} = x(x+5)$$

d) Los factores son x y $x + 1$. La mayor potencia de x es 2 y la mayor potencia de $x + 1$ es 3.

$$\text{MCD} = x^2(x+1)^3$$

Resuelve ahora el ejercicio 31

En ocasiones es necesario factorizar todos los denominadores para obtener el MCD. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Determina el MCD de cada expresión.

a) $\dfrac{3}{2x^2 - 4x} + \dfrac{8x}{x^2 - 4x + 4}$ **b)** $\dfrac{4x}{x^2 - x - 12} - \dfrac{6x^2}{x^2 - 7x + 12}$

Solución

a) Factoriza ambos denominadores.

$$\frac{3}{2x^2 - 4x} + \frac{8x}{x^2 - 4x + 4} = \frac{3}{2x(x-2)} + \frac{8x}{(x-2)^2}$$

Los factores son 2, x y $x - 2$. Multiplica los factores elevados a la mayor potencia que aparezca para cada uno.

$$\text{MCD} = 2 \cdot x \cdot (x-2)^2 = 2x(x-2)^2$$

b) Factoriza ambos denominadores.

$$\frac{4x}{x^2 - x - 12} - \frac{6x^2}{x^2 - 7x + 12} = \frac{4x}{(x+3)(x-4)} - \frac{6x^2}{(x-3)(x-4)}$$

$$\text{MCD} = (x+3)(x-4)(x-3)$$

Observa que aunque $x - 4$ es un factor común a cada denominador, la máxima potencia de ese factor que aparece en cada denominador es 1.

Resuelve ahora el ejercicio 29

3 Sumar y restar expresiones sin denominadores comunes

El procedimiento que se usa para sumar o restar expresiones racionales sin denominadores comunes se explica a continuación.

Para sumar o restar expresiones racionales con denominadores distintos

1. Determina el mínimo común denominador (MCD).
2. Reescribe cada fracción como una fracción equivalente con el MCD. Esto se hace multiplicando el numerador y el denominador de cada fracción por los factores necesarios para obtener el MCD.
3. Conserva el denominador en forma factorizada, pero multiplica el numerador.
4. Suma o resta los numeradores conservando el MCD.
5. Cuando sea posible, reduce la fracción factorizando el numerador.

EJEMPLO 5 Suma. **a)** $\frac{2}{x}+\frac{9}{y}$ **b)** $\frac{5}{4a^2}+\frac{3}{14ab^3}$

Solución

a) Primero determinamos el MCD.

$$\text{MCD} = xy$$

A continuación escribimos cada fracción con el MCD. Para esto, multiplicamos tanto el numerador como el denominador de cada fracción por los factores necesarios para obtener el MCD.

En este problema, la primera fracción debe multiplicarse por $\frac{y}{y}$ y la segunda por $\frac{x}{x}$.

$$\frac{2}{x}+\frac{9}{y}=\frac{y}{y}\cdot\frac{2}{x}+\frac{9}{y}\cdot\frac{x}{x}=\frac{2y}{xy}+\frac{9x}{xy}$$

Ahora sumamos los numeradores y dejamos solo al MCD.

$$\frac{2y}{xy}+\frac{9x}{xy}=\frac{2y+9x}{xy} \quad \text{o} \quad \frac{9x+2y}{xy}$$

Por lo tanto, $\frac{2}{x}+\frac{9}{y}=\frac{9x+2y}{xy}$.

b) El MCD de 4 y 14 es 28. El MCD de las dos fracciones es $28a^2b^3$. Primero, escribimos cada fracción con el denominador $28a^2b^3$. Para esto, multiplicamos la primera fracción por $\frac{7b^3}{7b^3}$ y la segunda por $\frac{2a}{2a}$.

$$\frac{5}{4a^2}+\frac{3}{14ab^3}=\frac{7b^3}{7b^3}\cdot\frac{5}{4a^2}+\frac{3}{14ab^3}\cdot\frac{2a}{2a} \qquad \text{Multiplica para obtener el MCD.}$$

$$=\frac{35b^3}{28a^2b^3}+\frac{6a}{28a^2b^3}$$

$$=\frac{35b^3+6a}{28a^2b^3} \qquad \text{Suma numeradores.}$$

Resuelve ahora el ejercicio 39

Comprendiendo el álgebra

Cuando multiplicamos el numerador y el denominador de una expresión racional por un mismo factor, estamos multiplicando por 1. Entonces, se obtiene una fracción equivalente pero el *valor* de la fracción no cambia. Observa el ejemplo 5 inciso **a)**,

$\frac{2}{x}$ es equivalente a $\frac{2y}{xy}$

y

$\frac{9}{y}$ es equivalente a $\frac{9x}{xy}$

EJEMPLO 6 Resta $\dfrac{x+2}{x-4}-\dfrac{x+5}{x+4}$.

Solución El MCD es $(x-4)(x+4)$. Escribe cada fracción con el denominador $(x-4)(x+4)$.

$$\frac{x+2}{x-4}-\frac{x+5}{x+4}=\boxed{\frac{x+4}{x+4}}\cdot\frac{x+2}{x-4}-\frac{x+5}{x+4}\cdot\boxed{\frac{x-4}{x-4}}$$ Multiplica para obtener el MCD.

$$=\frac{(x+4)(x+2)}{(x+4)(x-4)}-\frac{(x+5)(x-4)}{(x+4)(x-4)}$$

$$=\frac{x^2+6x+8}{(x+4)(x-4)}-\frac{x^2+x-20}{(x+4)(x-4)}$$ Multiplica los binomios en los numeradores.

$$=\frac{x^2+6x+8-(x^2+x-20)}{(x+4)(x-4)}$$ Resta numeradores.

$$=\frac{x^2+6x+8-x^2-x+20}{(x+4)(x-4)}$$ Propiedad distributiva.

$$=\frac{5x+28}{(x+4)(x-4)}$$ Reduce términos semejantes.

Resuelve ahora el ejercicio 45

EJEMPLO 7 Suma $\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{x+5}{3-x}$.

Solución Observa que cada denominador es el opuesto, o inverso aditivo, del otro. Podemos multiplicar el numerador y el denominador de cualquiera de las fracciones por −1 para obtener el MCD.

$$\frac{2}{x-3}+\frac{x+5}{3-x}=\frac{2}{x-3}+\boxed{\frac{-1}{-1}}\cdot\frac{(x+5)}{(3-x)}$$ Multiplica para obtener el MCD.

$$=\frac{2}{x-3}+\frac{-x-5}{x-3}$$ Propiedad distributiva.

$$=\frac{2-x-5}{x-3}$$ Suma los numeradores.

$$=\frac{-x-3}{x-3}$$ Reduce los términos semejantes.

Ya que no hay factores comunes en el numerador y en el denominador, $\dfrac{-x-3}{x-3}$ no puede simplificarse más.

Resuelve ahora el ejercicio 43

Comprendiendo el álgebra

Cuando dos expresiones racionales tienen denominadores que son *opuestos* entre sí, el MCD puede obtenerse multiplicando el numerador y el denominador de cualquiera de las fracciones por −1.

EJEMPLO 8 Resta $\dfrac{3x+4}{2x^2-5x-12}-\dfrac{2x-3}{5x^2-18x-8}$.

Solución Factoriza ambos denominadores.

$$\frac{3x+4}{2x^2-5x-12}-\frac{2x-3}{5x^2-18x-8}=\frac{3x+4}{(2x+3)(x-4)}-\frac{2x-3}{(5x+2)(x-4)}$$

El MCD es $(2x + 3)(x - 4)(5x + 2)$.

$$\frac{3x + 4}{(2x + 3)(x - 4)} - \frac{2x - 3}{(5x + 2)(x - 4)}$$

$$= \frac{5x + 2}{5x + 2} \cdot \frac{3x + 4}{(2x + 3)(x - 4)} - \frac{2x - 3}{(5x + 2)(x - 4)} \cdot \frac{2x + 3}{2x + 3}$$ Multiplica para obtener el MCD.

$$= \frac{15x^2 + 26x + 8}{(5x + 2)(2x + 3)(x - 4)} - \frac{4x^2 - 9}{(5x + 2)(2x + 3)(x - 4)}$$ Multiplica los numeradores.

$$= \frac{15x^2 + 26x + 8 - (4x^2 - 9)}{(5x + 2)(2x + 3)(x - 4)}$$ Resta los numeradores.

$$= \frac{15x^2 + 26x + 8 - 4x^2 + 9}{(5x + 2)(2x + 3)(x - 4)}$$ Propiedad distributiva

$$= \frac{11x^2 + 26x + 17}{(5x + 2)(2x + 3)(x - 4)}$$ Reduce los términos semejantes.

Resuelve ahora el ejercicio 49

EJEMPLO 9 Realiza las operaciones indicadas.

$$\frac{x - 1}{x - 2} - \frac{x + 1}{x + 2} + \frac{x - 6}{x^2 - 4}$$

Solución Primero, factorizamos $x^2 - 4$. El MCD de las tres fracciones es $(x + 2)(x - 2)$

$$\frac{x - 1}{x - 2} - \frac{x + 1}{x + 2} + \frac{x - 6}{x^2 - 4}$$

$$= \frac{x - 1}{x - 2} - \frac{x + 1}{x + 2} + \frac{x - 6}{(x + 2)(x - 2)}$$

$$= \frac{x + 2}{x + 2} \cdot \frac{x - 1}{x - 2} - \frac{x + 1}{x + 2} \cdot \frac{x - 2}{x - 2} + \frac{x - 6}{(x + 2)(x - 2)}$$ Multiplica para obtener el MCD.

$$= \frac{x^2 + x - 2}{(x + 2)(x - 2)} - \frac{x^2 - x - 2}{(x + 2)(x - 2)} + \frac{x - 6}{(x + 2)(x - 2)}$$ Multiplica los numeradores.

$$= \frac{x^2 + x - 2 - (x^2 - x - 2) + (x - 6)}{(x + 2)(x - 2)}$$ Resta y suma los numeradores.

$$= \frac{x^2 + x - 2 - x^2 + x + 2 + x - 6}{(x + 2)(x - 2)}$$ Propiedad distributiva.

$$= \frac{3x - 6}{(x + 2)(x - 2)}$$ Reduce los términos semejantes.

$$= \frac{3\cancel{(x - 2)}}{(x + 2)\cancel{(x - 2)}}$$ Factoriza, divide los factores comunes.

$$= \frac{3}{x + 2}$$

Resuelve ahora el ejercicio 67

Consejo útil

Consejo de estudio

Ahora que hemos analizado las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de expresiones racionales, hagamos un resumen rápido de los procedimientos.

Para sumar o restar expresiones racionales, obtén el MCD. Expresa cada fracción con el MCD. Luego suma o resta los numeradores y escribe el resultado sobre el MCD.

Para multiplicar expresiones racionales, factoriza cada expresión completamente, divide entre los factores comunes, multiplica los numeradores y multiplica los denominadores.

Para dividir expresiones racionales, multiplica la primera fracción (la superior) por el recíproco de la segunda fracción (la inferior). Luego factoriza cada expresión por completo, divide entre los factores comunes, multiplica los numeradores y multiplica los denominadores.

4 Analizar una aplicación de expresiones racionales

En economía se estudian conceptos como el ingreso, el costo y la utilidad. Si $R(x)$ es una función del ingreso y $C(x)$ es una función del costo, entonces la función de la utilidad, $P(x)$, es

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

donde x es el número de artículos fabricados y vendidos por una compañía.

EJEMPLO 10 **Botes de vela** La compañía de botes de vela Don Perrione fabrica y vende al menos seis botes cada semana.

Considera que $R(x) = \dfrac{6x - 7}{x + 2}$ y $C(x) = \dfrac{4x - 13}{x + 3}$

donde x es el número de botes de vela vendidos. Determina la función de la utilidad.

Solución **Entiende y traduce** Para determinar la función de la utilidad, restamos la función del costo de la función del ingreso.

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = \frac{6x - 7}{x + 2} - \frac{4x - 13}{x + 3}$$

El MCD es $(x + 2)(x + 3)$.

Realiza los cálculos

$$= \frac{x+3}{x+3} \cdot \frac{6x - 7}{x + 2} - \frac{4x - 13}{x + 3} \cdot \frac{x+2}{x+2}$$ Multiplica para obtener el MCD.

$$= \frac{6x^2 + 11x - 21}{(x + 3)(x + 2)} - \frac{4x^2 - 5x - 26}{(x + 3)(x + 2)}$$ Multiplica los numeradores.

$$= \frac{(6x^2 + 11x - 21) - (4x^2 - 5x - 26)}{(x + 3)(x + 2)}$$ Resta los numeradores.

$$= \frac{6x^2 + 11x - 21 - 4x^2 + 5x + 26}{(x + 3)(x + 2)}$$ Propiedad distributiva.

$$= \frac{2x^2 + 16x + 5}{(x + 3)(x + 2)}$$ Reduce los términos semejantes.

© Fuente: Elena Elisseeva/Shutterstock

Responde La función de utilidad es $P(x) = \dfrac{2x^2 + 16x + 5}{(x + 3)(x + 2)}$.

Resuelve ahora el ejercicio 77

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.2

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

$15(x + 1)^2$ mínimo común denominador opuestos $5(x + 1)$ máximo común divisor más alto más bajo

1. Para sumar o restar dos fracciones con diferentes denominadores, obtenemos primero el _______________.

2. El mínimo común denominador de $\dfrac{3}{5(x+1)^2}$ y $\dfrac{1}{15(x+1)}$ es _______________.

3. El MCD de las expresiones racionales tendrá la _______________ potencia de los factores comunes encontrados en los denominadores

4. Cuando dos expresiones racionales tienen denominadores que son _______________ entre sí, el MCD puede obtenerse multiplicando el numerador y el denominador de cada expresión racional por −1.

Practica tus habilidades

Suma o resta.

5. $\dfrac{4x}{x+7}+\dfrac{1}{x+7}$

6. $\dfrac{3x}{x+4}+\dfrac{12}{x+4}$

7. $\dfrac{7x}{x-5}-\dfrac{2}{x-5}$

8. $\dfrac{10x}{x-6}-\dfrac{60}{x-6}$

9. $\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{9}{x+3}-\dfrac{2}{x+3}$

10. $\dfrac{2x}{x+7}+\dfrac{17}{x+7}-\dfrac{3}{x+7}$

11. $\dfrac{5x-6}{x-8}+\dfrac{2x-5}{x-8}$

12. $\dfrac{-4x+6}{x^2+x-6}+\dfrac{5x-3}{x^2+x-6}$

13. $\dfrac{x^2-2}{x^2+6x-7}-\dfrac{-4x+19}{x^2+6x-7}$

14. $\dfrac{-x^2}{x^2+5xy-14y^2}+\dfrac{x^2+xy-2y^2}{x^2+5xy-14y^2}$

15. $\dfrac{x^3-12x^2+45x}{x(x-8)}-\dfrac{x^2+5x}{x(x-8)}$

16. $\dfrac{3r^2+15r}{r^3+2r^2-8r}+\dfrac{2r^2+5r}{r^3+2r^2-8r}$

17. $\dfrac{3x^2-x}{2x^2-x-21}+\dfrac{2x-8}{2x^2-x-21}-\dfrac{x^2-2x+27}{2x^2-x-21}$

18. $\dfrac{2x^2+9x-15}{2x^2-13x+20}-\dfrac{3x+10}{2x^2-13x+20}-\dfrac{3x-5}{2x^2-13x+20}$

Encuentra el mínimo común denominador.

19. $\dfrac{7}{6a^2}+\dfrac{3}{4a}$

20. $\dfrac{1}{9x^2}-\dfrac{8}{6x^5}$

21. $\dfrac{-4}{8x^2y^2}+\dfrac{7}{5x^4y^6}$

22. $\dfrac{x+12}{16x^2y}-\dfrac{x^2}{3x^3}$

23. $\dfrac{2}{3a^4b^2}+\dfrac{7}{2a^3b^5}$

24. $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x}{x-3}$

25. $\dfrac{4x}{x+3}+\dfrac{6}{x+9}$

26. $\dfrac{4}{(r-7)(r+2)}-\dfrac{r+8}{r-7}$

27. $5z^2+\dfrac{9z}{z-6}$

28. $\dfrac{b^2+3}{18b}-\dfrac{b-7}{12(b+8)}$

29. $\dfrac{x}{x^4(x-2)}-\dfrac{x+9}{x^2(x-2)^3}$

30. $\dfrac{x+2}{(x-3)^3(x+4)^2}+\dfrac{x-7}{(x+4)^4(x-9)}$

31. $\dfrac{a-2}{a^2-5a-24}+\dfrac{3}{a^2+11a+24}$

32. $\dfrac{3x-5}{6x^2+13xy+6y^2}+\dfrac{3}{3x^2+5xy+2y^2}$

33. $\dfrac{x}{2x^2-7x+3}+\dfrac{x-3}{4x^2+4x-3}-\dfrac{x^2+1}{2x^2-3x-9}$

34. $\dfrac{3}{x^2+3x-4}-\dfrac{4}{4x^2+5x-9}+\dfrac{x+2}{4x^2+25x+36}$

Suma o resta.

35. $\dfrac{3}{2x}+\dfrac{5}{x}$

36. $\dfrac{9}{x^2}+\dfrac{3}{2x}$

37. $\dfrac{5}{12x}-\dfrac{1}{4x^2}$

38. $\dfrac{5x}{4y}+\dfrac{7}{6xy}$

39. $\dfrac{3}{8x^4y}+\dfrac{1}{5x^2y^3}$

40. $\dfrac{7}{4xy^3}+\dfrac{1}{6x^2y}$

41. $\dfrac{b}{a-b}-\dfrac{a+b}{b}$

42. $\dfrac{4x}{3xy}+11$

43. $\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{a}{b-a}$

44. $\dfrac{9}{b-2}+\dfrac{3b}{2-b}$

45. $\dfrac{4x}{x-4}+\dfrac{x+3}{x+1}$

46. $\dfrac{x}{x^2-9}-\dfrac{4(x-3)}{x+3}$

47. $\dfrac{3}{a+2}+\dfrac{3a+1}{a^2+4a+4}$

48. $\dfrac{2m+9}{m-5}-\dfrac{4}{m^2-3m-10}$

49. $\dfrac{x}{x^2+2x-8}+\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$

50. $\dfrac{-x^2+5x}{(x-5)^2}+\dfrac{x+8}{x-5}$

51. $\dfrac{5x}{x^2-9x+8}-\dfrac{3(x+2)}{x^2-6x-16}$

52. $\dfrac{2}{(2p-3)(p+4)}-\dfrac{3}{(p+4)(p-4)}$

53. $4-\dfrac{x-1}{x^2+3x-10}$

54. $\dfrac{3x}{2x-3}+\dfrac{3x+6}{2x^2+x-6}$

55. $\dfrac{3a+2}{4a+1}-\dfrac{3a+6}{4a^2+9a+2}$

56. $\dfrac{7}{3q^2+q-4}+\dfrac{9q+2}{3q^2-2q-8}$

57. $\dfrac{x-y}{x^2-4xy+4y^2}+\dfrac{x-3y}{x^2-4y^2}$

58. $\dfrac{x+2y}{x^2-xy-2y^2}-\dfrac{y}{x^2-3xy+2y^2}$

59. $\dfrac{2r}{r-4} - \dfrac{2r}{r+4} + \dfrac{64}{r^2-16}$

60. $\dfrac{4}{p+1} + \dfrac{3}{p-1} + \dfrac{p+4}{p^2-1}$

61. $\dfrac{-4}{x^2+2x-3} - \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x-1}$

62. $\dfrac{2}{x^2-16} + \dfrac{x+1}{x^2+8x+16} + \dfrac{3}{x-4}$

63. $\dfrac{3}{3x-2} - \dfrac{1}{x-4} + 5$

64. $\dfrac{x}{3x+4} + \dfrac{3x+2}{x-5} - \dfrac{7x^2+24x+28}{3x^2-11x-20}$

65. $2 - \dfrac{1}{8r^2+2r-15} + \dfrac{r+2}{4r-5}$

66. $\dfrac{x}{x^2-10x+24} - \dfrac{3}{x-6} + 1$

67. $\dfrac{3}{5x+6} + \dfrac{x^2-x}{5x^2-4x-12} - \dfrac{4}{x-2}$

68. $\dfrac{3}{x^2-13x+36} + \dfrac{4}{2x^2-7x-4} + \dfrac{1}{2x^2-17x-9}$

69. $\dfrac{3m}{6m^2+13mn+6n^2} + \dfrac{2m}{4m^2+8mn+3n^2}$

70. $\dfrac{(x-y)^2}{x^3-y^3} + \dfrac{2}{x^2+xy+y^2}$

71. $\dfrac{5r-2s}{25r^2-4s^2} - \dfrac{2r-s}{10r^2-rs-2s^2}$

72. $\dfrac{6}{(2r-1)^2} + \dfrac{2}{2r-1} - 3$

73. $\dfrac{2}{2x+3y} - \dfrac{4x^2-6xy+9y^2}{8x^3+27y^3}$

74. $\dfrac{4}{4x-5y} - \dfrac{3x^2+2y^2}{64x^3-125y^3}$

Resolución de problemas

Para los ejercicios 75-76, recuerda que $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

75. Si $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ y $g(x) = \dfrac{x}{x+4}$, determina

a) el dominio de $f(x)$.

b) el dominio de $g(x)$.

c) $(f+g)(x)$.

d) el dominio de $(f+x)$.

76. Si $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-9}$ y $g(x) = \dfrac{x}{x-3}$, determina

a) el dominio de $f(x)$.

b) el dominio de $g(x)$.

c) $(f+g)(x)$.

d) el dominio de $(f+g)(x)$.

Utilidad *En los ejercicios 77-80, determina la función de utilidad, P(x). (Ver ejemplo 10.)*

77. $R(x) = \dfrac{4x-5}{x+1}$ y $C(x) = \dfrac{2x-7}{x+2}$

78. $R(x) = \dfrac{5x-2}{x+2}$ y $C(x) = \dfrac{3x-4}{x+1}$

79. $R(x) = \dfrac{8x-3}{x+2}$ y $C(x) = \dfrac{5x-8}{x+3}$

80. $R(x) = \dfrac{7x-10}{x+3}$ y $C(x) = \dfrac{5x-8}{x+4}$

En los ejercicios 81-84, utiliza $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$ *y* $g(x) = \dfrac{2}{x^2+x-6}$. *Determina lo siguiente.*

81. $(f+g)(x)$

82. $(f-g)(x)$

83. $(f \cdot g)(x)$

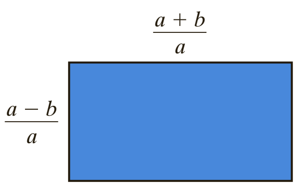
84. $(f/g)(x)$

85. Determina que $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$.

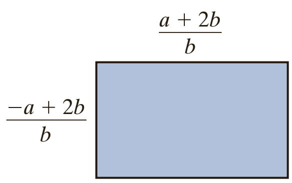
86. Determina que $x^{-1} + y^{-1} = \dfrac{x+y}{xy}$.

Área y perímetro *Considera los siguientes rectángulos. Determina* **a)** *el perímetro y* **b)** *el área.*

87.



88.



Determina el polinomio que se debe colocar en el área sombreada para dar una proposición verdadera.

89. $\dfrac{5x^2-6}{x^2-x-1} - \dfrac{\boxed{}}{x^2-x-1} = \dfrac{-2x^2+6x-12}{x^2-x-1}$

90. $\dfrac{r^2-6}{r^2-5r+6} - \dfrac{\boxed{}}{r^2-5r+6} = \dfrac{1}{r-2}$

Realiza las operaciones indicadas.

91. $\left(3 + \dfrac{1}{x+3}\right)\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)$

92. $\left(\dfrac{3}{r+1} - \dfrac{4}{r-2}\right)\left(\dfrac{r-2}{r+10}\right)$

93. $\left(\dfrac{5}{a-5} - \dfrac{2}{a+3}\right) \div (3a + 25)$

94. $\left(\dfrac{x^2+4x-5}{2x^2+x-3} \cdot \dfrac{2x+3}{x+1}\right) - \dfrac{2}{x+2}$

95. $\left(\dfrac{x+5}{x-3} - x\right) \div \dfrac{1}{x-3}$

96. $\left(\dfrac{x+5}{x^2-25} + \dfrac{1}{x+5}\right)\left(\dfrac{2x^2-13x+15}{4x^2-6x}\right)$

97. El promedio ponderado de dos valores a y b está dado por $a\left(\dfrac{x}{n}\right) + b\left(\dfrac{n-x}{n}\right)$, donde $\dfrac{x}{n}$ es el valor ponderado dado a a y $\dfrac{n-x}{n}$ el valor ponderado dado a b.

a) Expresa esta suma como una sola fracción.

b) En un examen a recibiste una calificación de 60 y en un examen b obtuviste 92. Si el examen a vale $\dfrac{2}{5}$ de tu calificación final y el examen b vale $\dfrac{3}{5}$, determina tu calificación promedio ponderado.

98. Demuestra que $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-1} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^{-1} + (xy)^{-1} = \dfrac{x^2+y^2+1}{xy}$.

En los ejercicios 99 y 100, realiza la operación indicada.

99. $(a-b)^{-1} + (a-b)^{-2}$

100. $\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^{-1} - \left(\dfrac{a+b}{a}\right)^{-1}$

Ejercicios de conceptos y escritura

En los ejercicios 101 y 102, **a)** *explica por qué la resta no es correcta y* **b)** *realiza la resta correcta.*

101. $\dfrac{x^2-4x}{(x+3)(x-2)} - \dfrac{x^2+x-2}{(x+3)(x-2)} \neq \dfrac{x^2-4x-x^2+x-2}{(x+3)(x-2)}$

102. $\dfrac{x-5}{(x+4)(x-3)} - \dfrac{x^2-6x+5}{(x+4)(x-3)} \neq \dfrac{x-5-x^2-6x+5}{(x+4)(x-3)}$

103. Cuando dos expresiones racionales se suman o se restan, ¿los numeradores de las expresiones que se van a sumar o restar, deberían ser factorizados? Explica.

104. ¿Son equivalentes las fracciones $\dfrac{x-3}{4-x}$ y $-\dfrac{x-3}{x-4}$? Explica.

105. ¿Son equivalentes las fracciones $\dfrac{8-x}{3-x}$ y $\dfrac{x-8}{x-3}$? Explica.

106. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones racionales, ¿será $(f+g)(x)$ siempre una función racional?

Problemas de desafío

107. Expresa cada suma como una sola fracción.

a) $1 + \dfrac{1}{x}$

b) $1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

c) $1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}$

d) $1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \cdots + \dfrac{1}{x^n}$

108. Dada $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Encuentra $f(a+h) - f(a)$.

109. Dada $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$. Encuentra $g(a+h) - g(a)$.

Ejercicios de repaso acumulados

[2.4] **110. Llenado de cajas** Una máquina llena cajas de cereal a una velocidad de 80 por minuto. Después, la máquina baja su velocidad a 60 cajas por minuto. Si la suma de los dos periodos es de 14 minutos y el número de cajas llenadas a alta velocidad es el mismo que el número resultante a baja velocidad, determina **a)** el tiempo que trabajó la máquina a alta velocidad, y **b)** cuántas cajas llenó durante los 14 minutos.

[2.6] **111.** Resuelve para x y proporciona la solución en notación de conjuntos. $|x-3| - 6 < -1$

[3.4] **112.** Determina la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, 3)$ y $(7, -3)$.

[4.5] **113.** Evalúa el determinante $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$.

© Wavebreak Media LTD/Glowimages

Ver ejercicio 110.

[5.3] **114.** Divide $\dfrac{6x^2-5x+6}{2x+3}$.

[5.8] **115.** Resuelve $3p^2 = 22p - 7$.

6.3 Fracciones complejas

1. Reconocer fracciones complejas.
2. Simplificar fracciones complejas multiplicando por el mínimo común denominador (MCD).
3. Simplificar fracciones complejas simplificando el numerador y el denominador.

1 Reconocer fracciones complejas

Fracción compleja

Una **fracción compleja** es una fracción que tiene una expresión racional en el numerador, en el denominador o en ambos.

Ejemplos de fracciones complejas

$$\frac{\frac{2}{3}}{5},\qquad \frac{\frac{x+1}{x}}{4x},\qquad \frac{\frac{x}{y}}{x+1},\qquad \frac{\frac{a+b}{a}}{\frac{a-b}{b}},\qquad \frac{9+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{8}{x}}$$

La expresión que se encuentra sobre la **línea principal de la fracción** es el numerador, y la expresión que está debajo de ella es el denominador de una fracción compleja.

$$\frac{\dfrac{a+b}{a}}{\dfrac{a-b}{b}}$$

$\dfrac{a+b}{a}$ } numerador de la fracción compleja

← línea principal de la fracción

$\dfrac{a-b}{b}$ } denominador de la fracción compleja

Simplificar una fracción compleja significa escribirla eliminando las fracciones de su numerador y de su denominador. Explicaremos dos métodos que se pueden utilizar para simplificar fracciones complejas: multiplicando por el mínimo común denominador (MCD) y simplificando el numerador y el denominador.

2 Simplificar fracciones complejas multiplicando por el mínimo común denominador

Para simplificar una fracción compleja multiplicando por el mínimo común denominador

1. Determina el mínimo común denominador de todas las fracciones que aparecen en la fracción compleja. Éste es el MCD de la fracción compleja.
2. Multiplica el numerador y el denominador de la fracción compleja por el MCD que se determinó en el paso 1.
3. Simplifica cuando sea posible.

En el paso 2, en realidad se multiplica la fracción compleja por $\dfrac{\text{MCD}}{\text{MCD}}$, lo cual es equivalente a multiplicarla por 1.

EJEMPLO 1 Simplifica $\dfrac{\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{3}{x}}{\dfrac{x^2}{5}}$.

Solución Los denominadores en la fracción compleja son x^2, x, y 5. Por lo tanto, el MCD de la fracción compleja es $5x^2$. Multiplicamos el numerador y el denominador por $5x^2$.

$$\frac{\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x}}{\frac{x^2}{5}} = \frac{\boxed{5x^2}\left(\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x}\right)}{\boxed{5x^2}\left(\frac{x^2}{5}\right)}$$

Multiplica el numerador y el denominador por $5x^2$.

$$= \frac{5\cancel{x^2}\left(\frac{4}{\cancel{x^2}}\right) - 5\overset{x}{\cancel{x^2}}\left(\frac{3}{\cancel{x}}\right)}{\cancel{5}x^2\left(\frac{x^2}{\cancel{5}}\right)}$$

Propiedad distributiva

$$= \frac{20-15x}{x^4}$$

Simplifica.

Resuelve ahora el ejercicio 13

EJEMPLO 2 Simplifica $\dfrac{a+\frac{3}{b}}{b+\frac{3}{a}}$.

Solución El MCD de la fracción compleja es ab.

$$\frac{a+\frac{3}{b}}{b+\frac{3}{a}} = \frac{\boxed{ab}\left(a+\frac{3}{b}\right)}{\boxed{ab}\left(b+\frac{3}{a}\right)}$$

Multiplica el numerador y el denominador por ab.

$$= \frac{a^2b+3a}{ab^2+3b}$$

Propiedad distributiva.

$$= \frac{a\cancel{(ab+3)}}{b\cancel{(ab+3)}} = \frac{a}{b}$$

Factoriza y simplifica.

Resuelve ahora el ejercicio 17

EJEMPLO 3 Simplifica $\dfrac{a^{-1}+ab^{-2}}{ab^{-2}-a^{-2}b^{-1}}$.

Solución Primero reescribimos cada expresión sin exponentes negativos.

$$\frac{a^{-1}+ab^{-2}}{ab^{-2}-a^{-2}b^{-1}} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}}{\frac{a}{b^2}-\frac{1}{a^2b}}$$

$$= \frac{\boxed{a^2b^2}\left(\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}\right)}{\boxed{a^2b^2}\left(\frac{a}{b^2}-\frac{1}{a^2b}\right)}$$

Multiplica el numerador y el denominador por a^2b^2, el MCD de la fracción compleja.

$$= \frac{\overset{a}{\cancel{a^2}}b^2\left(\frac{1}{\cancel{a}}\right) + a^2\cancel{b^2}\left(\frac{a}{\cancel{b^2}}\right)}{a^2\cancel{b^2}\left(\frac{a}{\cancel{b^2}}\right) - \cancel{a^2}\overset{b}{\cancel{b^2}}\left(\frac{1}{\cancel{a^2}\cancel{b}}\right)}$$

Propiedad distributiva.

$$= \frac{ab^2+a^3}{a^3-b}$$

Resuelve ahora el ejercicio 43

Aunque en el ejemplo 3 podríamos factorizar una a de ambos términos en el numerador de la respuesta, no seríamos capaces de simplificar más la respuesta dividiendo entre los factores comunes. De modo que dejamos la respuesta hasta ese punto.

3 Simplificar fracciones complejas simplificando el numerador y el denominador

Para simplificar una fracción compleja simplificando el numerador y el denominador

1. Suma o resta, lo que sea necesario, para obtener una expresión racional en el numerador.
2. Suma o resta, lo que sea necesario, para obtener una expresión racional en el denominador.
3. Multiplica por el numerador de la fracción compleja por el recíproco del denominador.
4. Simplifica cuando sea posible.

El ejemplo 4 nos mostrará cómo el ejemplo 1 se puede simplificar por este segundo método.

EJEMPLO 4 Simplifica $\dfrac{\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{3}{x}}{\dfrac{x^2}{5}}$.

Solución Restamos las fracciones del numerador para obtener una expresión racional. El denominador común de las fracciones del numerador es x^2.

$$\frac{\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{3}{x}}{\dfrac{x^2}{5}} = \frac{\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{3}{x}\cdot\boxed{\dfrac{x}{x}}}{\dfrac{x^2}{5}}$$

Obtén el común denominador en el numerador.

$$= \frac{\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{3x}{x^2}}{\dfrac{x^2}{5}}$$

$$= \frac{\dfrac{4-3x}{x^2}}{\dfrac{x^2}{5}}$$

$$= \frac{4-3x}{x^2}\cdot\frac{5}{x^2}$$

Multiplica el numerador por el recíproco del denominador.

$$= \frac{5(4-3x)}{x^4}$$

$$\text{o}\quad \frac{20-15x}{x^4}$$

Ésta es la misma respuesta que se obtuvo en el ejemplo 1.

Resuelve ahora el ejercicio 13

Comprendiendo el álgebra

Una fracción compleja de la forma $\dfrac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}}$ se puede simplificar multiplicando el numerador por el recíproco del denominador como sigue:

$$\frac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Consejo útil

Algunos estudiantes prefieren el segundo método cuando la fracción compleja consta de una sola fracción sobre otra sola fracción, tal como

$$\frac{\dfrac{x+3}{18}}{\dfrac{x-8}{6}}$$

Para fracciones más complejas, muchos estudiantes optan por el primer método, ya que de esta manera no tienen que sumar fracciones.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.3

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

numerador denominador fracción compleja recíproco opuesto

1. Una ______________ es una fracción que tiene una expresión racional en su numerador o en su denominador o en ambos.

2. La expresión que se encuentra sobre la línea principal de la fracción es el ______________ de la fracción compleja.

3. La expresión que se encuentra debajo de la línea principal de la fracción es el ______________ de la fracción compleja.

4. Una fracción compleja de la forma $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ se puede simplificar multiplicando el numerador por el ______________ del denominador.

Practica tus habilidades

Simplifica.

5. $\dfrac{\frac{15a}{b^2}}{\frac{b^3}{5}}$ **6.** $\dfrac{\frac{6x}{y^2}}{\frac{3y}{5}}$ **7.** $\dfrac{\frac{36x^4}{5y^4z^5}}{\frac{9xy^2}{15z^5}}$ **8.** $\dfrac{\frac{40x^3}{7y^5z^5}}{\frac{8x^2y^2}{28x^4z^5}}$

9. $\dfrac{\frac{10x^3y^2}{9yz^4}}{\frac{40x^4y^7}{27y^2z^8}}$ **10.** $\dfrac{\frac{3a^4b^3}{7b^4c}}{\frac{15a^2b^6}{14ac^7}}$ **11.** $\dfrac{x - \frac{x}{y}}{\frac{8+x}{y}}$ **12.** $\dfrac{a + \frac{2a}{b}}{\frac{7+a}{b}}$

13. $\dfrac{x + \frac{5}{y}}{1 + \frac{x}{y}}$ **14.** $\dfrac{\frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{1}{x}}$ **15.** $\dfrac{\frac{2}{a} + \frac{1}{2a}}{a + \frac{a}{2}}$ **16.** $\dfrac{3 - \frac{1}{y}}{2 - \frac{1}{y}}$

17. $\dfrac{\frac{a^2}{b} - b}{\frac{b^2}{a} - a}$ **18.** $\dfrac{x - \frac{4}{y}}{y - \frac{4}{x}}$ **19.** $\dfrac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{x+y}{x}}$ **20.** $\dfrac{\frac{1}{m} + \frac{9}{m^2}}{2 + \frac{1}{m^2}}$

21. $\dfrac{\frac{a}{b} - 6}{\frac{-a}{b} + 6}$ **22.** $\dfrac{7 - \frac{x}{y}}{\frac{x}{y} - 7}$ **23.** $\dfrac{\frac{4x+8}{3x^2}}{\frac{4x^3}{9}}$ **24.** $\dfrac{\frac{x^2-y^2}{x}}{\frac{x+y}{x^4}}$

25. $\dfrac{\frac{a}{a+1} - 1}{\frac{2a+1}{a-1}}$ **26.** $\dfrac{\frac{x}{4} - \frac{1}{x}}{1 + \frac{x+4}{x}}$ **27.** $\dfrac{1 + \frac{x}{x+1}}{\frac{2x+1}{x-1}}$ **28.** $\dfrac{\frac{2}{x-1} + 2}{\frac{2}{x+1} - 2}$

29. $\dfrac{\frac{a+1}{a-1} + \frac{a-1}{a+1}}{\frac{a+1}{a-1} - \frac{a-1}{a+1}}$ **30.** $\dfrac{\frac{a-2}{a+2} - \frac{a+2}{a-2}}{\frac{a-2}{a+2} + \frac{a+2}{a-2}}$ **31.** $\dfrac{\frac{5}{5-x} + \frac{6}{x-5}}{\frac{3}{x} + \frac{2}{x-5}}$

32. $\dfrac{\frac{2}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{3}{m-1}}{\frac{6}{m-1}}$ **33.** $\dfrac{\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x-2}}{\frac{1}{x}}$ **34.** $\dfrac{\frac{2}{x^2+x-20} + \frac{3}{x^2-6x+8}}{\frac{2}{x^2+3x-10} + \frac{3}{x^2+2x-24}}$

35. $\dfrac{\frac{2}{a^2-3a+2} + \frac{2}{a^2-a-2}}{\frac{2}{a^2-1} + \frac{2}{a^2+4a+3}}$ **36.** $\dfrac{\frac{1}{x^2+5x+4} + \frac{2}{x^2+2x-8}}{\frac{2}{x^2-x-2} + \frac{1}{x^2-5x+6}}$

Simplifica.

37. $(a^{-1} + b^{-1})^{-1}$

38. $(a^{-2} + b)^{-1}$

39. $\dfrac{\dfrac{2}{xy}}{x^{-1} - y^{-1}}$

40. $\dfrac{a^{-1} + b^{-1}}{\dfrac{5}{ab}}$

41. $\dfrac{a^{-1} + 1}{b^{-1} - 1}$

42. $\dfrac{x^{-1} - y^{-1}}{x^{-1} + y^{-1}}$

43. $\dfrac{a^{-2} - ab^{-1}}{ab^{-2} + a^{-1}b^{-1}}$

44. $\dfrac{xy^{-1} + x^{-1}y^{-2}}{x^{-1} - x^{-2}y^{-1}}$

45. $\dfrac{\dfrac{9a}{b} + a^{-1}}{\dfrac{b}{a} + a^{-1}}$

46. $\dfrac{x^{-2} + \dfrac{3}{x}}{3x^{-1} + x^{-2}}$

47. $\dfrac{a^{-1} + b^{-1}}{(a + b)^{-1}}$

48. $\dfrac{4a^{-1} - b^{-1}}{(a - b)^{-1}}$

49. $5x^{-1} - (3y)^{-1}$

50. $\dfrac{\dfrac{7}{x} + \dfrac{1}{y}}{(x - y)^{-1}}$

51. $\dfrac{\dfrac{2}{xy} - \dfrac{8}{y} + \dfrac{5}{x}}{3x^{-1} - 4y^{-2}}$

52. $\dfrac{4m^{-1} + 3n^{-1} + (2mn)^{-1}}{\dfrac{5}{m} + \dfrac{7}{n}}$

Resolución de problemas

Área *Para los ejercicios 53-56, se da el área y el ancho de cada rectángulo. En cada caso, determina la longitud, l, mediante la división del área, A, entre el ancho, w.*

53. $A = \dfrac{x^2 + 12x + 35}{x + 3}$ $\quad w = \dfrac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + 5x + 6}$ $\quad l$

54. $A = \dfrac{x^2 + 10x + 16}{x + 4}$ $(x > 1)$ $\quad w = \dfrac{x^2 + 11x + 24}{x^2 + 3x - 4}$ $\quad l$

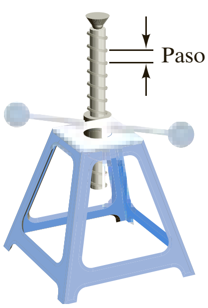
55. $A = \dfrac{x^2 + 11x + 28}{x + 5}$ $(x > 1)$ $\quad w = \dfrac{x^2 + 8x + 7}{x^2 + 4x - 5}$ $\quad l$

56. $A = \dfrac{x^2 + 17x + 72}{x + 3}$ $(x > 2)$ $\quad w = \dfrac{x^2 + 11x + 18}{x^2 + x - 6}$ $\quad l$

57. Gato mecánico La eficiencia de un gato mecánico, E, está dada por la fórmula

$$E = \frac{\frac{1}{2}h}{h + \frac{1}{2}}$$

donde h está determinada por el paso de la rosca del gato mecánico.



Determina la eficiencia de un gato mecánico cuyos valores de h son:

a) $\dfrac{2}{5}$ **b)** $\dfrac{1}{3}$

58. Resistores Si se conectan en paralelo dos resistores con resistencia R_1 y R_2, podemos determinar su resistencia combinada, R_T, mediante la fórmula

$$R_T = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Simplifica el lado derecho de la fórmula.

59. Resistores Si se conectan en paralelo tres resistores con resistencia R_1, R_2 y R_3, podemos determinar su resistencia combinada mediante la fórmula.

$$R_T = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Simplifica el lado derecho de la fórmula.

60. Óptica Una fórmula que se utiliza en el estudio de la óptica es

$$f = (p^{-1} + q^{-1})^{-1}$$

donde p es la distancia del objeto respecto de una lente, q es la distancia de la imagen respecto de la lente y f es la longitud focal de la lente. Expresa el lado derecho de la fórmula sin exponentes negativos.

61. Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, define $f(f(a))$.

62. Si $f(x) = \dfrac{2}{x + 2}$, define $f(f(a))$.

Problemas de desafío

Para cada función, determina $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

63. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

64. $f(x) = \dfrac{5}{x}$

65. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

66. $f(x) = \dfrac{6}{x-1}$

67. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

68. $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$

Simplifica.

69. $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}$

70. $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+1}}}$

71. $\dfrac{1}{2a+\dfrac{1}{2a+\dfrac{1}{2a}}}$

Ejercicios de repaso acumulados

[1.4] **72.** Evalúa $\dfrac{\left|-\frac{3}{9}\right| - \left(-\frac{5}{9}\right)\cdot\left|-\frac{3}{8}\right|}{|-5-(-3)|}$.

[2.5] **73.** Resuelve $\dfrac{3}{5} < \dfrac{-x-5}{3} < 6$ y proporciona la respuesta en notación de intervalo.

[2.6] **74.** Resuelve $|x-1| = |2x-4|$.

[3.5] **75.** Determina si las dos rectas representadas por las siguientes ecuaciones son paralelas, perpendiculares o ninguna de éstas.

$$6x + 2y = 5$$
$$4x - 9 = -2y$$

6.4 Resolución de ecuaciones racionales

1. Resolver ecuaciones racionales.
2. Verificar soluciones.
3. Resolver proporciones.
4. Resolver problemas que incluyen funciones racionales.
5. Resolver problemas de aplicación mediante expresiones racionales.
6. Despejar una variable en una fórmula con expresiones racionales.

1 Resolver ecuaciones racionales

Una **ecuación racional** es una ecuación que contiene al menos una expresión racional.

Para resolver ecuaciones racionales

1. Determina el MCD de todas las expresiones racionales de la ecuación.
2. Multiplica *ambos* lados de la ecuación por el MCD. Esto dará por resultado que todos los términos de la ecuación queden multiplicados por el MCD.
3. Elimina los paréntesis y reduce los términos semejantes de cada lado de la ecuación.
4. Resuelve la ecuación utilizando las propiedades analizadas en secciones anteriores.
5. Verifica la solución en la ecuación *original*.

En el paso 2, multiplicamos ambos lados de la ecuación por el MCD para eliminar fracciones.

EJEMPLO 1 Resuelve $\dfrac{3x}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2x-3}{4}$.

Solución Multiplicamos ambos lados de la ecuación por el MCD, 4. Después utilizamos la propiedad distributiva, lo que da como resultado fracciones eliminadas de la ecuación.

$$\boxed{4}\left(\frac{3x}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{2x-3}{4}\cdot\boxed{4} \qquad \text{Multiplica ambos lados por 4.}$$

$$4\left(\frac{3x}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2x - 3 \qquad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$3x + 2 = 2x - 3$$
$$x + 2 = -3 \qquad \text{Resta } 2x \text{ de ambos lados.}$$
$$x = -5 \qquad \text{Resta 2 de ambos lados.}$$

La comprobación mostrará que −5 es la solución.

Resuelve ahora el ejercicio 15

2 Verificar soluciones

Cuando resolvemos una ecuación racional con una variable en algún denominador, es posible obtener un valor que haga 0 al denominador. Dado que la división entre 0 es indefinida, el valor que hace 0 al denominador no es una solución y es llamada **solución extraña** o raíz extraña. *Siempre que aparezca una variable en algún denominador, deberás verificar el valor obtenido en la ecuación original.*

EJEMPLO 2 Resuelve $4 - \frac{3}{x} = \frac{5}{2}$.

Solución El MCD es $2x$.

$$4 - \frac{3}{x} = \frac{5}{2}$$

$$\boxed{2x}\left(4 - \frac{3}{x}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)\boxed{2x}$$ Multiplica ambos lados por el MCD, $2x$.

$$2x(4) - 2\cancel{x}\left(\frac{3}{\cancel{x}}\right) = \left(\frac{5}{\cancel{2}}\right)\cancel{2}x$$ Propiedad distributiva.

$$8x - 6 = 5x$$

$$3x - 6 = 0$$ Resta $5x$ de ambos lados.

$$3x = 6$$ Suma 6 en ambos lados.

$$x = 2$$ Divide ambos lados entre 3.

Verifica

$$4 - \frac{3}{x} = \frac{5}{2}$$

$$4 - \frac{3}{2} \stackrel{?}{=} \frac{5}{2}$$ Sustituye 2 por x.

$$\frac{8}{2} - \frac{3}{2} \stackrel{?}{=} \frac{5}{2}$$ Reescribe 4 como $\frac{8}{2}$

$$\frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$ Verdadero

Se verifica en la ecuación original que $x = 2$, por lo tanto, es una solución.

Resuelve ahora el ejercicio 21

EJEMPLO 3 Resuelve $x - \frac{6}{x} = -5$.

Solución

$$\boxed{x} \cdot \left(x - \frac{6}{x}\right) = -5 \cdot \boxed{x}$$ Multiplica ambos lados por el MCD, x.

$$x(x) - \cancel{x}\left(\frac{6}{\cancel{x}}\right) = -5x$$ Propiedad distributiva.

$$x^2 - 6 = -5x$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$(x - 1)(x + 6) = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x + 6 = 0$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = -6$$

Al verificar 1 y -6 se demostrará que ambos números son soluciones para la ecuación.

Resuelve ahora el ejercicio 35

EJEMPLO 4 Resuelve $\dfrac{3x}{x^2-4}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{2}{x+2}$.

Solución Primero factoriza el denominador x^2-4, y luego determina el MCD.

$$\frac{3x}{(x+2)(x-2)}+\frac{1}{x-2}=\frac{2}{x+2}$$

El MCD es $(x+2)(x-2)$. Multiplicamos ambos lados de la ecuación por el MCD y después utilizamos la propiedad distributiva. Este proceso eliminará las fracciones de la ecuación.

$$(x+2)(x-2)\cdot\left(\frac{3x}{(x+2)(x-2)}+\frac{1}{x-2}\right)=\frac{2}{x+2}\cdot(x+2)(x-2)$$

$$\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}\cdot\frac{3x}{\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}}+(x+2)\cancel{(x-2)}\cdot\frac{1}{\cancel{x-2}}=\frac{2}{\cancel{x+2}}\cdot\cancel{(x+2)}(x-2)$$

$$\begin{aligned}3x+(x+2)&=2(x-2)\\4x+2&=2x-4\\2x+2&=-4\\2x&=-6\\x&=-3\end{aligned}$$

La verificación mostrará que -3 es la solución.

Resuelve ahora el ejercicio 39

EJEMPLO 5 Resuelve la ecuación $\dfrac{22}{2p^2-9p-5}-\dfrac{3}{2p+1}=\dfrac{2}{p-5}$.

Solución Factorizamos el denominador y después determinamos el MCD.

$$\frac{22}{(2p+1)(p-5)}-\frac{3}{2p+1}=\frac{2}{p-5}$$

Multiplica ambos lados de la ecuación por el MCD, $(2p+1)(p-5)$.

$$\cancel{(2p+1)}\cancel{(p-5)}\cdot\frac{22}{\cancel{(2p+1)}\cancel{(p-5)}}-\cancel{(2p+1)}(p-5)\cdot\frac{3}{\cancel{2p+1}}=\frac{2}{\cancel{p-5}}\cdot(2p+1)\cancel{(p-5)}$$

$$\begin{aligned}22-3(p-5)&=2(2p+1)\\22-3p+15&=4p+2\\37-3p&=4p+2\\35&=7p\\5&=p\end{aligned}$$

Al parecer, la solución es 5. Sin embargo, debemos verificar, ya que aparece una variable en un denominador.

Verifica

$$\frac{22}{2p^2-9p-5}-\frac{3}{2p+1}=\frac{2}{p-5}$$

$$\frac{22}{2(5)^2-9(5)-5}-\frac{3}{2(5)+1}\stackrel{?}{=}\frac{2}{5-5}\qquad\text{Sustituye } p \text{ por } 5.$$

$$\text{Indefinido}\longrightarrow\ \frac{22}{0}-\frac{3}{11}=\frac{2}{0}\ \longleftarrow\text{Indefinido}$$

Como 5 hace que el denominador sea 0 y la división entre 0 es indefinida, 5 es una solución extraña. Por lo tanto, se debe escribir como respuesta “no existe solución”.

Resuelve ahora el ejercicio 43

Comprendiendo el álgebra

Cada vez que resuelvas una ecuación racional con una variable en algún denominador, debes verificar el valor obtenido en la ecuación original. En el ejemplo 5, el valor de $p = 5$ es una *solución extraña*.

Consejo útil

Recuerda, siempre que resuelvas una ecuación en la que aparezca una variable en algún denominador, debes verificar la solución para asegurar que no es una solución extraña. Si una aparente solución da por resultado en algún denominador 0, entonces es una solución extraña y no es una solución verdadera para la ecuación.

3 Resolver proporciones

Proporción

Una **proporción** es una ecuación de la forma $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $b \neq 0, d \neq 0$.

Comprendiendo el álgebra

Recuerda que las proporciones son ecuaciones racionales, por lo tanto, siempre que resuelvas una proporción que contiene una o más variables en algún denominador, debes verificar el resultado para asegurarte de que los valores que obtengas no son soluciones extrañas.

Las proporciones son ecuaciones racionales y por lo tanto pueden resolverse multiplicando ambos lados de la proporción por el MCD. Las proporciones también pueden resolverse mediante la **multiplicación cruzada** del siguiente modo:

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ entonces } ad = bc, b \neq 0, d \neq 0$$

Las proporciones son usadas al trabajar con figuras semejantes.

Figuras semejantes

Las **figuras semejantes** son aquellas cuyos ángulos correspondientes son iguales y cuyos lados correspondientes son proporcionales.

La **Figura 6.3** ilustra dos conjuntos de figuras semejantes.

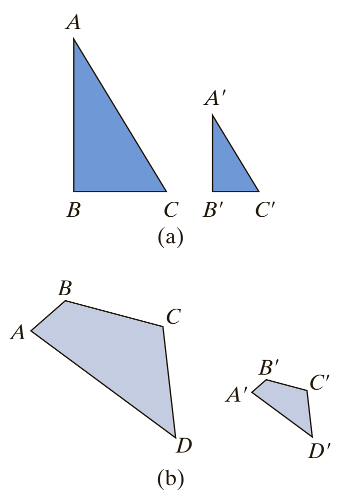


FIGURA 6.3

En la **Figura 6.3a**, la proporción de la longitud del lado AB respecto de la longitud del lado BC es igual a la proporción de la longitud del lado $A'B'$ respecto de la longitud del lado $B'C'$ Es decir,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

En un par de figuras semejantes, si la longitud de un lado se desconoce, éste puede determinarse utilizando proporciones.

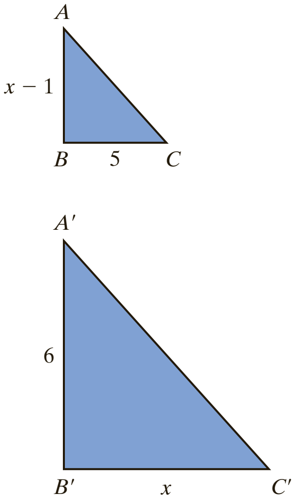


FIGURA 6.4

EJEMPLO 6 **Triángulos semejantes** Los triángulos ABC y $A'B'C'$ en la **Figura 6.4** son figuras semejantes. Determina la longitud de los lados AB y $B'C'$.

Solución Podemos establecer una proporción y despejar x. Entonces, podemos determinar las longitudes.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

$$\frac{x-1}{5} = \frac{6}{x}$$

$$5x \cdot \frac{x-1}{5} = \frac{6}{x} \cdot 5x \qquad \text{Multiplica ambos lados por el MCD, } 5x.$$

$$x(x-1) = 6 \cdot 5$$

$$x^2 - x = 30$$

$$x^2 - x - 30 = 0$$

$$(x-6)(x+5) = 0 \qquad \text{Factoriza el trinomio.}$$

$$x - 6 = 0 \quad \text{o} \quad x + 5 = 0$$

$$x = 6 \qquad\qquad x = -5$$

Como la longitud del lado de un triángulo no puede ser un número negativo, -5 no es una respuesta posible. Al sustituir x por 6, vemos que la longitud del lado $B'C'$ es 6 y la longitud del lado AB es $6 - 1$ o 5.

Verifica

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

$$\frac{5}{5} \stackrel{?}{=} \frac{6}{6}$$

$$1 = 1 \qquad \text{Verdadero}$$

Resuelve ahora el ejercicio 49

La respuesta al ejemplo 6 también podría obtenerse mediante multiplicación cruzada. Ahora trata de resolver el ejemplo 6 utilizando la multiplicación cruzada.

EJEMPLO 7 Resuelve $\dfrac{x^2}{x-3} = \dfrac{9}{x-3}$.

Solución Esta ecuación es una proporción. La resolveremos multiplicando ambos lados de la ecuación por el MCD, $x - 3$.

$$\cancel{(x-3)} \cdot \frac{x^2}{\cancel{x-3}} = \frac{9}{\cancel{x-3}} \cdot \cancel{(x-3)}$$

$$x^2 = 9$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$(x+3)(x-3) = 0 \qquad \text{Factoriza la diferencia de dos cuadrados.}$$

$$x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$

$$x = -3 \qquad\qquad x = 3$$

Verifica

$x = -3$

$$\frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{x-3}$$

$$\frac{(-3)^2}{-3-3} \stackrel{?}{=} \frac{9}{-3-3}$$

$$\frac{9}{-6} \stackrel{?}{=} \frac{9}{-6}$$

$$-\frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \qquad \text{Verdadero}$$

$x = 3$

$$\frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{x-3}$$

$$\frac{3^2}{3-3} \stackrel{?}{=} \frac{9}{3-3}$$

$$\frac{9}{0} \stackrel{?}{=} \frac{9}{0} \qquad \longleftarrow \text{Indefinido}$$

Como $x = 3$ hace que el denominador sea 0, entonces 3 no es solución de la ecuación. Ésta es una solución extraña. La única solución para la ecuación es -3.

Resuelve ahora el ejercicio 45

En el ejemplo 7, ¿qué se obtendría si comenzamos con la multiplicación cruzada? Resuélvelo así y observa.

4 Resolver problemas que incluyen funciones racionales

EJEMPLO 8 Considera la función $f(x) = x - \dfrac{2}{x}$. Determina todos los valores de a para los que $f(a) = 1$.

Solución Como $f(a) = a - \dfrac{2}{a}$, necesitamos encontrar todos los valores para los que $a - \dfrac{2}{a} = 1, a \neq 0$. Empezaremos por multiplicar ambos lados de la ecuación por a, el MCD.

$$a \cdot \left(a - \frac{2}{a}\right) = a \cdot 1$$

$$a^2 - 2 = a$$

$$a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a - 2)(a + 1) = 0$$

$$a - 2 = 0 \quad \text{o} \quad a + 1 = 0$$

$$a = 2 \qquad\qquad a = -1$$

Verifica

$$f(x) = x - \frac{2}{x}$$

$$f(2) = 2 - \frac{2}{2} = 2 - 1 = 1$$

$$f(-1) = -1 - \frac{2}{(-1)} = -1 + 2 = 1$$

Para $a = 2$ o $a = -1$, $f(a) = 1$.

Resuelve ahora el ejercicio 53

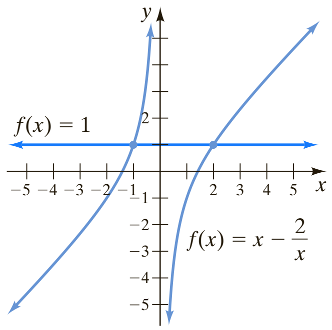


FIGURA 6.5

En la **Figura 6.5**, ilustramos la gráfica de $f(x) = x - \dfrac{2}{x}$ para mostrar las respuestas que se obtuvieron en el ejemplo 8. Observa que cuando $x = -1$ o $x = 2$ $f(x) = 1$.

5 Resolver problemas de aplicación mediante expresiones racionales

Ahora veremos un problema de aplicación que involucra ecuaciones racionales.

EJEMPLO 9 **Resistencia total** En electrónica, la resistencia total R_T, de los resistores conectados en un circuito paralelo, se determina mediante la fórmula

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

donde $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_n$ son las resistencias de los resistores individuales (medidos en ohms) en el circuito. Determina la resistencia total si dos resistores, uno de 100 ohms y el otro de 300 ohms, están conectados en un circuito paralelo. Ver **Figura 6.6**.

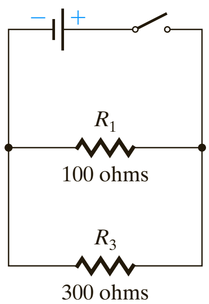


FIGURA 6.6

Solución Como solo hay dos resistencias, utilizamos la fórmula

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Sea R_1 =100 ohms y R_2 = 300 ohms; entonces

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{100} + \frac{1}{300}$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación por el MCD, $300R_T$.

$$300R_T \cdot \frac{1}{R_T} = 300R_T\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{300}\right)$$

$$300\cancel{R_T} \cdot \frac{1}{\cancel{R_T}} = \overset{3}{\cancel{300}}R_T\left(\frac{1}{\cancel{100}}\right) + \cancel{300}\,R_T\left(\frac{1}{\cancel{300}}\right)$$

$$300 = 3R_T + R_T$$

$$300 = 4R_T$$

$$R_T = \frac{300}{4} = 75$$

Por lo tanto, la resistencia total del circuito en paralelo de 75 ohms.

Resuelve ahora el ejercicio 93

6 Despejar una variable en una fórmula con expresiones racionales

Si mientras despejas una variable en una fórmula, dicha variable aparece en más de un término, es posible despejar la variable mediante factorización. Este proceso se demuestra en los ejemplos 10, 11 y 12.

EJEMPLO 10 **Óptica** Una fórmula que se utiliza en el estudio de la óptica es

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f},$$

donde

p es la distancia a la que se encuentra un objeto respecto de una lente o espejo,

q es la distancia de la imagen respecto de la lente o espejo, y

f es la longitud focal de la lente o espejo.

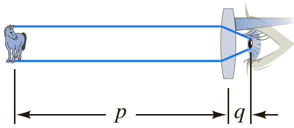


FIGURA 6.7

Para una persona que utiliza lentes, q es la distancia desde las lentes a su retina (ver **Figura 6.7**). Despeja f de esta fórmula.

Solución Nuestro objetivo es aislar la variable f. Comenzamos por multiplicar ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador, pqf, para eliminar fracciones.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

$$pqf\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = pqf\left(\frac{1}{f}\right) \quad \text{Multiplica ambos lados por el MCD, } pqf.$$

$$\cancel{p}qf\left(\frac{1}{\cancel{p}}\right) + p\cancel{q}f\left(\frac{1}{\cancel{q}}\right) = pq\cancel{f}\left(\frac{1}{\cancel{f}}\right) \quad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$qf + pf = pq \quad \text{Simplifica.}$$

$$f(q + p) = pq \quad \text{Factoriza } f.$$

$$\frac{f\cancel{(q + p)}}{\cancel{q + p}} = \frac{pq}{q + p} \quad \text{Divide ambos lados entre } q + p.$$

$$f = \frac{pq}{q + p} \quad \text{o} \quad f = \frac{pq}{p + q}$$

Resuelve ahora el ejercicio 69

EJEMPLO 11 Actividad bancaria Una fórmula que se utiliza en la banca es $A = P + Prt$, donde A representa la cantidad que se debe pagar al banco cuando se prestan P dólares a una tasa de interés simple, r, durante el tiempo, t, en años. Despeja P en esta ecuación.

Solución Como los dos términos que contienen la variable P están en el lado derecho de la ecuación, factorizamos P en ambos términos.

$$A = P + Prt \qquad P \text{ está en ambos términos.}$$
$$A = P(1 + rt) \qquad \text{Factoriza } P.$$
$$\frac{A}{1 + rt} = \frac{P\cancel{(1 + rt)}}{\cancel{1 + rt}} \qquad \text{Divide ambos lados entre } 1 + rt \text{ para aislar } P.$$
$$\frac{A}{1 + rt} = P$$

Entonces, $P = \dfrac{A}{1 + rt}$.

Resuelve ahora el ejercicio 73

EJEMPLO 12 Física Una fórmula que se usa en física para calcular la fuerza de las palancas es $d = \dfrac{fl}{f + w}$. Despeja f de esta fórmula.

Solución Empezamos por multiplicar ambos lados de la fórmula por $f + w$ para eliminar fracciones. Luego reescribimos la expresión con todos los términos que contienen f a un lado del signo igual, y todos los términos que no incluyen f, al otro lado del signo igual.

$$d = \frac{fl}{f + w}$$
$$d(f + w) = \frac{fl}{\cancel{(f + w)}}\cancel{(f + w)} \qquad \text{Multiplica por } f + w \text{ para eliminar fracciones.}$$
$$d(f + w) = fl$$
$$df + dw = fl \qquad \text{Propiedad distributiva.}$$
$$df - df + dw = fl - df \qquad \text{Aísla en el lado derecho de la ecuación los términos que contienen } f.$$
$$dw = fl - df$$
$$dw = f(l - d) \qquad \text{Factoriza } f.$$
$$\frac{dw}{l - d} = \frac{f\cancel{(l - d)}}{\cancel{l - d}} \qquad \text{Aísla dividiendo } f \text{ dividiendo ambos lados entre } l - d.$$
$$\frac{dw}{l - d} = f$$

Entonces, $f = \dfrac{dw}{l - d}$.

Resuelve ahora el ejercicio 79

Comprendiendo el álgebra

Algunas veces, cuando quieres despejar una variable de una fórmula, la variable aparece en dos o más términos que no están en el mismo lado de la ecuación. Cuando esto sucede, primero tienes que agrupar todos los términos que contienen la variable en el mismo lado de la ecuación. Entonces factorizas la variable que deseas despejar.

Prevención de errores comunes

Recuerda que cuando resolvemos ecuaciones que contienen fracciones, multiplicamos ambos lados de la *ecuación* por el MCD para eliminar las fracciones en la ecuación. Si *sumamos o restamos expresiones racionales*, escribimos las fracciones con el MCD y luego sumamos o restamos los numeradores *conservando el denominador común*.

Por ejemplo, considera el problema de suma

$$\frac{x}{x + 7} + \frac{3}{x + 7}$$

CORRECTO

$$\frac{x}{x + 7} + \frac{3}{x + 7} = \frac{x + 3}{x + 7}$$

INCORRECTO

$$\frac{x}{x + 7} + \frac{3}{x + 7} = (x + 7)\left(\frac{x}{x + 7} + \frac{3}{x + 7}\right)$$
$$= x + 3$$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.4

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

proporción	ecuación racional	solución extraña	figuras semejantes	mínimo común denominador
multiplicación cruzada	no tiene solución	factorización	un número infinito de soluciones	

1. Para eliminar una expresión racional de una ecuación, multiplicamos ambos lados de la ecuación por el ______.

2. Siempre que resuelves una ______ con una variable en el denominador, debes comprobar los valores obtenidos en la ecuación original.

3. Cuando resolvemos una ecuación racional con una variable en el denominador y el valor que se obtuvo hace que el denominador sea 0, llamamos a la solución ______.

4. Una ______ es una ecuación de la forma $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $b \neq 0, d \neq 0$.

5. Una proporción puede resolverse mediante ______ del siguiente modo:

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\text{, entonces } ad = bc, b \neq 0, d \neq 0.$$

6. Las figuras cuyos ángulos correspondientes son iguales y cuyos lados correspondientes son proporcionales se llaman ______.

7. Si mientras despejas una variable en una fórmula, dicha variable aparece en más de un término, necesitarás hacer uso de la ______ para despejar la variable.

8. Si el único valor que se obtiene al resolver una ecuación racional es una solución extraña, entonces la ecuación ______.

Practica tus habilidades

Resuelve cada ecuación y verifica tu solución.

9. $\frac{15}{x} = 3$

10. $\frac{12}{x} = 4$

11. $\frac{11}{b} = 2$

12. $\frac{1}{4} = \frac{z+2}{12}$

13. $\frac{6x+7}{5} = \frac{2x+9}{3}$

14. $\frac{a+2}{7} = \frac{a-3}{2}$

15. $\frac{3x}{8} + \frac{1}{4} = \frac{2x-3}{8}$

16. $\frac{3x}{10} + \frac{2}{5} = \frac{4x-3}{5}$

17. $\frac{z}{3} - \frac{3z}{4} = -\frac{5z}{12}$

18. $\frac{w}{2} + \frac{2w}{3} = \frac{7w}{6}$

19. $\frac{3}{4} - x = 2x$

20. $\frac{2}{y} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2y}$

21. $\frac{2}{r} + \frac{5}{3r} = 1$

22. $3 + \frac{2}{x} = \frac{1}{4}$

23. $\frac{x-2}{x-5} = \frac{3}{x-5}$

24. $\frac{c+3}{c+1} = \frac{5}{2}$

25. $\frac{5y-2}{7} = \frac{15y-2}{28}$

26. $\frac{3}{x+1} = \frac{2}{x-3}$

27. $\frac{5.6}{-p-6.2} = \frac{2}{p}$

28. $\frac{4.5}{y-3} = \frac{6.9}{y+3}$

29. $\frac{m+1}{m+10} = \frac{m-2}{m+4}$

30. $\frac{x-3}{x+1} = \frac{x-6}{x+5}$

31. $x - \frac{4}{3x} = -\frac{1}{3}$

32. $x + \frac{2}{x} = \frac{27}{x}$

33. $\frac{2x-1}{3} - \frac{x}{4} = \frac{7.4}{6}$

34. $\frac{15}{x} + \frac{9x-7}{x+2} = 9$

35. $x + \frac{6}{x} = -7$

36. $b - \frac{8}{b} = -7$

37. $2 - \frac{5}{2b} = \frac{2b}{b+1}$

38. $\frac{3z-2}{z+1} = 4 - \frac{z+2}{z-1}$

39. $\frac{1}{w-3} + \frac{1}{w+3} = \frac{-5}{w^2-9}$

40. $\frac{6}{x+3} + \frac{5}{x+4} = \frac{12x+31}{x^2+7x+12}$

41. $\frac{8}{x^2-9} = \frac{2}{x-3} - \frac{4}{x+3}$

42. $a - \frac{a}{4} + \frac{a}{5} = 19$

43. $\frac{y}{2y+2} + \frac{2y-16}{4y+4} = \frac{2y-3}{y+1}$

44. $\frac{2}{w-5} = \frac{22}{2w^2-9w-5} - \frac{3}{2w+1}$

45. $\frac{x^2}{x-5} = \frac{25}{x-5}$

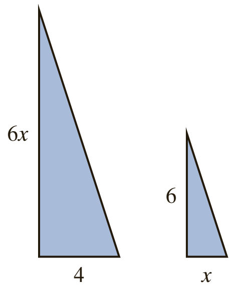
46. $\frac{x^2}{x-9} = \frac{81}{x-9}$

47. $\frac{5}{x^2+4x+3} + \frac{2}{x^2+x-6} = \frac{3}{x^2-x-2}$

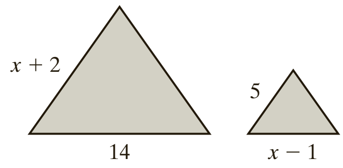
48. $\frac{2}{x^2+2x-8} - \frac{1}{x^2+9x+20} = \frac{4}{x^2+3x-10}$

Figuras semejantes *Para cada par de figuras semejantes, determina la longitud de los dos lados desconocidos (es decir, la longitud de los lados que incluyen la variable x).*

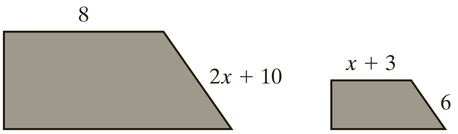
49.



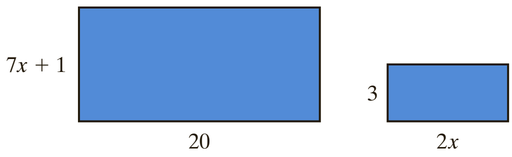
50.



51.



52.



Para cada función racional dada, determina todos los valores para los cuales f (a) tiene el valor indicado.

53. $f(x) = x - \dfrac{3}{x}, f(a) = 2$

54. $f(x) = 3x - \dfrac{5}{x}, f(a) = -14$

55. $f(x) = \dfrac{x-2}{x+5}, f(a) = \dfrac{3}{5}$

56. $f(x) = \dfrac{x+3}{x+5}, f(a) = \dfrac{4}{7}$

57. $f(x) = \dfrac{6}{x} + \dfrac{6}{2x}, f(a) = 6$

58. $f(x) = \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{2x}, f(a) = 4$

Despeja la variable indicada en cada fórmula.

59. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{P_2}{P_1}$, para P_1 (química)

60. $T_a = \dfrac{T_f}{1-f}$, para f (fórmula de inversión)

61. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{P_2}{P_1}$, para V_2 (química)

62. $S = \dfrac{a}{1-r}$, para r (matemáticas)

63. $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$, para y (pendiente)

64. $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$, para x_1 (pendiente)

65. $z = \dfrac{x - \overline{x}}{s}$, para x (estadística)

66. $z = \dfrac{x - \overline{x}}{s}$, para s (estadística)

67. $d = \dfrac{fl}{f + w}$, para w (física)

68. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{f}$, para p (óptica)

69. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{f}$, para q (óptica)

70. $\dfrac{1}{R_T} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$, para R_T (electrónica)

71. $at_2 - at_1 + v_1 = v_2$, para a (física)

72. $2P_1 - 2P_2 - P_1P_c = P_2P_c$, para P_c (economía)

73. $a_n = a_1 + nd - d$, para d (matemáticas)

74. $S_n - S_nr = a_1 - a_1r^n$, para S_n (matemáticas)

75. $F = \dfrac{Gm_1m_2}{d^2}$, para G (física)

76. $\dfrac{P_1V_1}{T_1} = \dfrac{P_2V_2}{T_2}$, para T_2 (física)

77. $\dfrac{P_1V_1}{T_1} = \dfrac{P_2V_2}{T_2}$, para T_1 (física)

78. $A = \dfrac{1}{2}h(a + b)$, para h (matemáticas)

79. $\dfrac{S - S_0}{V_0 + gt} = t$, para V_0 (física)

80. $\dfrac{E}{e} = \dfrac{R + r}{r}$, para e (ingeniería)

Simplifica cada expresión en **a)** *y resuelve cada ecuación en* **b)**.

81. a) $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{2}{x+1}$

b) $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{2}{x+1}=0$

82. a) $\dfrac{4}{x+3}+\dfrac{5}{2x+6}+\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{4}{x+3}+\dfrac{5}{2x+6}=\dfrac{1}{2}$

83. a) $\dfrac{b+3}{b}-\dfrac{b+4}{b+5}-\dfrac{15}{b^2+5b}$

b) $\dfrac{b+3}{b}-\dfrac{b+4}{b+5}=\dfrac{15}{b^2+5b}$

84. a) $\dfrac{4x+3}{x^2+11x+30}-\dfrac{3}{x+6}+\dfrac{2}{x+5}$

b) $\dfrac{4x+3}{x^2+11x+30}-\dfrac{3}{x+6}=\dfrac{2}{x+5}$

Resolución de problemas

85. Inversión libre de impuestos La fórmula $T_a=\dfrac{T_f}{1-f}$ puede usarse para determinar el rendimiento gravable equivalente, T_a, de una inversión libre de impuestos, T_f. En esta fórmula, f es el rango de impuesto federal sobre los ingresos. Lucy Alonso se encuentra en el rango de 28% de impuesto sobre los ingresos.

a) Determina el rendimiento gravable equivalente a una inversión libre de impuesto de 9% realizada por Lucy.

b) Despeja T_f en esta ecuación.

c) Determina el rendimiento libre de impuestos equivalente a una inversión gravable de 12% realizada por Lucy.

86. Inversión libre de impuestos Ve el ejercicio 85. Kim Ghiselin se encuentra en el rango de 25% de impuesto sobre los ingresos.

a) Determina el rendimiento gravable equivalente a una inversión libre de impuesto de 6% realizada por Kim.

b) Determina el rendimiento libre de impuestos equivalente a una inversión gravable de 10% realizada por Kim.

87. Seguro Cuando el propietario de una casa compra una póliza de seguro para asegurar su propiedad por un monto menor de 80% sobre su valor de reposición, la compañía de seguros no reembolsará al propietario el total de su pérdida. La siguiente fórmula se utiliza para determinar cuánto pagará la compañía de seguros, I, cuando la propiedad esté asegurada por menos de 80% sobre el valor de reposición.

$$I=\frac{AC}{0.80R}$$

En la fórmula, A es el monto asegurado, C es el costo de reparar el área dañada, y R es el valor de reposición de la propiedad (el uso de esta fórmula tiene ciertas excepciones).

a) Supón que un incendio en la cocina de Jan Burdett causó daños con valor de \$10,000. Si ella contrató un seguro por \$50,000 para una propiedad con valor de reposición de \$100,000, ¿cuánto pagaría la compañía de seguros por las reparaciones?

b) Despeja R en esta fórmula, que es el valor de reposición.

88. Velocidad promedio La velocidad promedio se define como un cambio en la distancia dividido entre el cambio en el tiempo, o

$$v=\frac{d_2-d_1}{t_2-t_1}$$

Esta fórmula puede usarse cuando un objeto a la distancia d_1 en el instante t_1 viaja a una distancia d_2 en el instante t_2.

a) Supón que $t_1=2$ horas, $d_1=118$ millas, $t_2=9$ horas y $d_2=412$ millas. Determina la velocidad promedio.

b) Despeja t_2 en la fórmula.

89. Aceleración promedio La aceleración promedio se define como el cambio en la velocidad dividido entre el cambio en el tiempo, o

$$a=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$$

Esta fórmula puede usarse cuando un objeto a la velocidad v_1 en el instante t_1 acelera (o desacelera) a la velocidad v_2 en el instante t_2.

© Glowimages

a) Supón que $v_1=20$ pies por minuto, $t_1=20$ minutos, $v_2=60$ pies por minuto y $t_2=22$ minutos. Determina la aceleración promedio. Las unidades son pies/min².

b) Despeja t_1 en la fórmula.

90. Economía Una fórmula para analizar el punto de equilibrio en economía es

$$Q=\frac{F+D}{R-V}$$

Esta fórmula se usa para determinar el número de unidades (departamentos), Q, en un edificio de departamentos que un inversionista debe alquilar para alcanzar el punto de equilibrio. En la fórmula, F son los gastos mensuales fijos de todo el edificio, D es el pago mensual de las deudas, R es el alquiler por unidad y V son los gastos variables por unidad. Asume que una persona está considerando invertir en un edificio de 50 unidades. Cada departamento de dos habitaciones puede alquilarse en \$500 al mes. Se estima que los gastos variables son de \$200 al mes por unidad, los gastos fijos son de \$2500 al mes y el pago mensual de la deuda es de \$8000. ¿Cuántos departamentos deben alquilarse para que el inversionista alcance el punto de equilibrio?

91. Tasa de descuento La tasa de descuento, P, expresada como una fracción o decimal, puede determinarse por medio de la fórmula

$$P = 1 - \frac{R - D}{R}$$

donde R es el precio regular de un artículo y D es el descuento (la cantidad que se ahorra respecto del precio normal).

a) Determina la tasa de descuento en un bolso con un precio regular de \$39.99 que se vende en \$30.99.

b) Despeja D en la fórmula anterior.

c) Despeja R en la fórmula anterior.

Para los ejercicios 92-94, consulta el ejemplo 9.

92. Resistencia total ¿Cuál es la resistencia total en un circuito si se conectan en paralelo resistencias de 300, 500 y 3000 ohms?

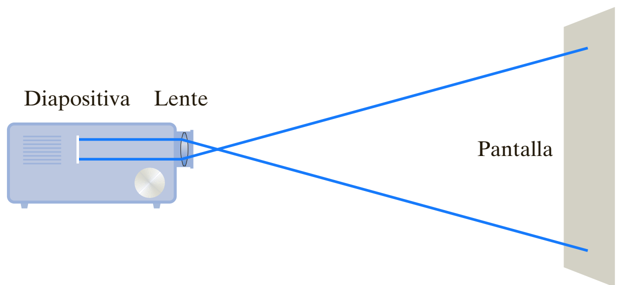
93. Resistencia total ¿Cuál es la resistencia total en un circuito si se conectan en paralelo resistencias de 200 y 600 ohms?

94. Resistencia total Tres resistencias idéntica se conectan en paralelo. ¿Cuál debe ser la resistencia de cada una si el circuito resultante tiene una resistencia total de 700 ohms?

Para los ejercicios 95 y 96, consulta el ejemplo 10.

95. Longitud focal En un proyector de películas o diapositivas, la película actúa como el objeto cuya imagen se proyecta sobre una pantalla. Si se usa una lente con longitud focal de 100 mm (0.10 metros) para proyectar una imagen sobre una pantalla ubicada a una distancia de 7.5 metros, ¿a qué distancia deben colocarse las lentes respecto de la película?

96.



Espejo cóncavo Un anillo de diamante se coloca a 20.0 cm de un espejo cóncavo (curvo hacia adentro) cuya longitud focal es de 15.0 cm. Determina la posición de la imagen (o la *distancia de la imagen*).

97. Inversiones Algunas inversiones, como ciertos bonos municipales y fondos sobre bonos municipales, no solo están libres de impuestos federales, sino también de impuestos estatales y municipales. Cuando se desea comparar una inversión gravable, T_a, con una inversión libre de impuesto federal, estatal y municipal, T_f, se puede utilizar la fórmula

$$T_a = \frac{T_f}{1 - [f + (s + c)(1 - f)]}$$

En la fórmula, s es el rango de impuesto estatal a pagar, c es el rango de impuestos municipales o locales a pagar y f es el rango de impuestos federales. Howard Levy, quien vive en Detroit, Michigan, está en el rango de 4.6% de impuesto estatal, en el rango de 3% de impuesto local y en el rango de impuesto federal de 33%. Él está eligiendo entre invertir en un portafolio bursátil libre de los tres impuestos, que produce 6.01%, y un fondo bursátil gravable que produce 7.68%.

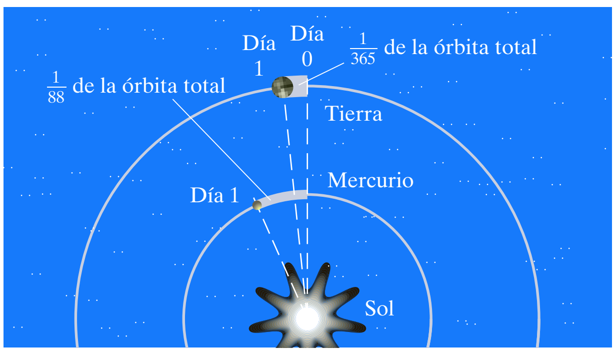
a) Tomando en cuenta su rango de impuestos, determina el equivalente gravable a 6.01% de rendimiento libre de impuestos.

b) ¿Cuál es la inversión que debe elegir Howard? Explica tu respuesta.

98. Periodos de planetas El periodo sinódico de Mercurio es el tiempo que dicho planeta necesita para llevar una vuelta de ventaja a la Tierra en sus órbitas alrededor del Sol. Si los periodos orbitales (en días terrestres) de los dos planetas son P_m y P_e, se verá que Mercurio se mueve en promedio a $1/P_m$ de una revolución por día, mientras que la Tierra se mueve a $1/P_e$ de una revolución por día. La ganancia diaria de Mercurio sobre la Tierra es $(1/P_m) - (1/P_e)$ de una revolución, de modo que el tiempo que tarda en aventajar a la Tierra en una revolución completa, el periodo sinódico, s, puede determinarse mediante la fórmula

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{P_m} - \frac{1}{P_e}$$

Si P_e es 365 días y P_m es 88 días, determina el periodo sinódico en días terrestres.

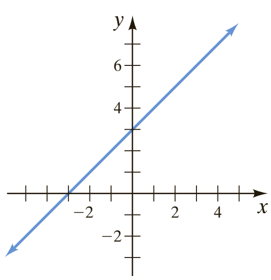


Ejercicios de conceptos y escritura

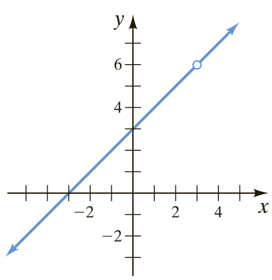
99. ¿Qué restricción debe agregarse al enunciado "Si $ac = bc$, entonces $a = b$."? Explica.

100. A la derecha se encuentran dos gráficas. Una es la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ y la otra es la gráfica de la función $g(x) = x + 3$. Determina qué gráfica es $f(x)$ y qué gráfica es $g(x)$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

a)



b)



101. Construye una ecuación que no pueda tener como solución 4 o -2. Explica cómo determinaste tu respuesta.

102. Construye una ecuación que contenga la suma de dos expresiones racionales en la variable x cuya solución sea el conjunto de los *números reales*. Explica cómo determinaste tu respuesta.

103. Construye una ecuación en la que la variable x que contenga la suma de dos expresiones racionales cuya solución sea el conjunto de los números reales excepto el 0. Explica cómo determinaste tu respuesta.

Actividad de grupo

104. Longitud focal Una lente con una longitud focal de 80 mm se utiliza para enfocar una imagen y fotografiarla con una cámara. La distancia máxima permitida entre la lente y la película plana es de 120 mm.

a) Miembro 1 del grupo: determina a que distancia debe estar la lente respecto de la película, si el objeto que será fotografiado está a 10 metros de distancia.

b) Miembro 2 del grupo: repite el inciso **a)** para una distancia de 3 metros.

c) Miembro 3 del grupo: repite el inciso **a)** para una distancia de 1 metro.

d) Determinen de manera individual cuál es la distancia más corta a la que debe estar un objeto para poder fotografiarlo claramente.

e) Comparen sus respuestas para ver si parecen razonables y consistentes.

Ejercicios de repaso acumulados

[2.5] **105.** Resuelve la desigualdad $-1 \le 5 - 2x \le 7$.

[3.4] **106.** Determina la pendiente y la intersección con el eje y de la gráfica de la ecuación $3(y - 4) = -(x - 2)$.

[5.1] **107.** Simplifica $3x^2y - 4xy + 2y^2 - (3xy + 6y^2 + 9x)$.

[5.8] **108. Jardinería** Se colocará un pasillo de ancho uniforme alrededor del jardín de Jessyca Nino Aquino. El jardín y el pasillo juntos cubren un área de 320 pies cuadrados. Si el jardín mide 12 por 16 pies, determina el ancho del pasillo.

Prueba de mitad de capítulo: 6.1-6.4

Para determinar la comprensión del tema que se ha abordado hasta el momento, resuelve esta breve prueba. Las respuestas y la sección donde se trató el tema por primera vez, se proporcionan al final del libro. Repasa el material de las preguntas que respondas de forma incorrecta.

1. Determina el dominio de $h(x) = \dfrac{2x + 13}{x^3 - 25x}$.

2. Simplifica la expresión racional $\dfrac{x^2 + 9x + 20}{2x^2 + 5x - 12}$.

Multiplica o divide como se indica.

3. $\dfrac{11a + 11b}{3} \div \dfrac{a^3 + b^3}{15b}$

4. $\dfrac{x^2 + 4x - 21}{x^2 - 5x - 6} \cdot \dfrac{x^2 - 2x - 24}{x^2 + 11x + 28}$

5. $\dfrac{4a^2 + 4a + 1}{4a^2 + 6a - 2a - 3} \div \dfrac{2a^2 - 17a - 9}{(2a + 3)^2}$

6. Rectángulo El área de un rectángulo es $12a^2 + 13ab + 13b^2$. Si el largo es $18a + 6b$, determina una expresión para el ancho dividiendo el área entre el largo.

7. Determina el mínimo común denominador para $\dfrac{x^2 - 5x - 7}{x^2 - x - 30} + \dfrac{3x^2 + 19}{x^2 - 4x - 12}$.

Suma o resta. Simplifica todas las respuestas.

8. $\dfrac{5x}{x - 5} - \dfrac{25}{x - 5}$

9. $\dfrac{10}{3x^2y} + \dfrac{a}{6xy^3}$

10. $\dfrac{4}{2x^2 + 5x - 12} - \dfrac{3}{x^2 - 16}$

Simplifica cada fracción compleja.

11. $\dfrac{9 + \dfrac{a}{b}}{\dfrac{3 - c}{b}}$

12. $\dfrac{\dfrac{5}{x} - \dfrac{8}{x^2}}{6 - \dfrac{1}{x}}$

13. $\dfrac{y^{-2} + 7y^{-1}}{7y^{-3} + y^{-4}}$

14. ¿Qué es una solución extraña? Explica bajo qué condiciones debes comprobar la existencia de soluciones extrañas.

Resuelve cada ecuación y comprueba tus soluciones.

15. $\dfrac{3x - 1}{7} = \dfrac{-x + 9}{2}$

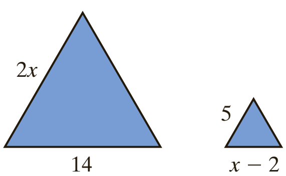
16. $\dfrac{m - 7}{m - 11} = \dfrac{4}{m - 11}$

17. $x = 1 + \dfrac{12}{x}$

18. Despeja a de $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$.

19. Despeja r de $x = \dfrac{4}{1 - r}$.

20. Triángulos Los dos triángulos son semejantes. Determina las longitudes de los dos lados desconocidos que tienen la variable x.



6.5 Ecuaciones racionales: aplicaciones y resolución de problemas

1 Resolver problemas de trabajo.

2 Resolver problemas numéricos.

3 Resolver problemas de movimiento.

Comprendiendo el álgebra

Problemas donde dos o más personas o máquinas trabajan juntas para completar una cierta tarea se conocen como *problemas de trabajo*.

Comprendiendo el álgebra

En general, si una persona (o máquina) puede terminar una tarea en x unidades de tiempo, la razón es $\frac{1}{x}$ de la tarea por unidad de tiempo.

En esta sección examinaremos algunas aplicaciones más, iniciando con problemas de trabajo.

1 Resolver problemas de trabajo

Para resolver problemas de trabajo utilizaremos los hechos resumidos en el diagrama siguiente:

$$\left(\begin{array}{c}\text{parte de la tarea hecha}\\ \text{por la primera persona}\\ \text{o máquina}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{parte de la tarea hecha}\\ \text{por la segunda}\\ \text{persona o máquina}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}1\\ \text{(una tarea completa}\\ \text{terminada)}\end{array}\right)$$

Para determinar la parte de la tarea realizada por cada persona o máquina, utilizamos la fórmula

$$\text{tasa de trabajo} \cdot \text{tiempo trabajado} = \text{parte de la tarea completada}$$

Para determinar la tasa de trabajo, considera los ejemplos siguientes.

- Si Joe puede realizar una tarea en 5 horas, su tasa es $\frac{1}{5}$ de la tarea por hora.
- Si Yoko puede realizar una tarea en 4 horas, su tasa es $\frac{1}{4}$ de la tarea por hora.
- De igual forma, si Julian puede realizar una tarea en x horas, su tasa es $\frac{1}{x}$ de la tarea por hora.

EJEMPLO 1 **Despejando una entrada para autos** Después de una nevada, le toma a Bud 3 horas despejar la entrada. A Tina le toma 5 horas despejar la misma entrada. Si Bud y Tina trabajan juntos, ¿cuánto tiempo les tomará despejar la entrada?

Solución Entiende Necesitamos determinar el número de horas que les toma a Bud y Tina despejar la entrada si trabajan juntos. Sea x igual al número de horas que necesitan Bud y Tina para despejar la entrada trabajando juntos.

Trabajador	Tasa de trabajo	Tiempo de trabajo	Parte de la tarea completada
Bud	$\frac{1}{3}$	x	$\frac{x}{3}$
Tina	$\frac{1}{5}$	x	$\frac{x}{5}$

Traduce

$$\left(\begin{array}{c}\text{parte de la entrada despejada}\\ \text{por Bud en } x \text{ horas}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{parte de la entrada despejada}\\ \text{por Tina en } x \text{ horas}\end{array}\right) = 1(\text{entrada completa despejada})$$

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 1$$

Realiza los cálculos Multiplicamos ambos lados de la ecuación por el MCD, 15. Luego despejamos x, para obtener el número de horas.

$$15\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{5}\right) = 15 \cdot 1 \qquad \text{Multiplica por el MCD, 15.}$$

$$15\left(\frac{x}{3}\right) + 15\left(\frac{x}{5}\right) = 15 \qquad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$5x + 3x = 15$$

$$8x = 15$$

$$x = \frac{15}{8}$$

Responde Bud y Tina juntos pueden despejar la entrada en $\frac{15}{8}$ horas, o aproximadamente 1.88 horas. Esta respuesta es razonable porque el tiempo es menor al que les toma a cada uno de manera individual despejar la entrada.

Resuelve ahora el ejercicio 15

EJEMPLO 2 **Llenado de una bañera** Jim McEnroy abre la llave del agua y abre el desagüe de la bañera al mismo tiempo. La llave puede llenar la bañera en 7.6 minutos y el drenaje puede vaciar la bañera en 10.3 minutos. Si la llave está abierta y el desagüe también, ¿cuánto tiempo tomará el llenado de la bañera?

Solución **Entiende** Mientras la llave del agua llena la bañera, el desagüe la vacía. Así la llave y el desagüe están trabajando uno en contra del otro. Sea x igual a la cantidad de tiempo necesario para llenar la bañera.

	Tasa de trabajo	Tiempo de trabajo	Parte de la bañera que se llena o se vacía
Llave llenando la bañera	$\frac{1}{7.6}$	x	$\frac{x}{7.6}$
Desagüe vaciando la bañera	$\frac{1}{10.3}$	x	$\frac{x}{10.3}$

Traduce Como la llave y el desagüe están trabajando uno contra el otro, *restamos* la parte de agua de la bañera que se está vaciando de la parte de agua de la bañera que se va llenando.

$$\begin{pmatrix}\text{parte de la bañera}\\ \text{llena en } x \text{ minutos}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{parte de la bañera}\\ \text{vacía en } x \text{ minutos}\end{pmatrix} = 1(\text{bañera llena completa})$$

$$\frac{x}{7.6} - \frac{x}{10.3} = 1$$

Realiza los cálculos Podemos eliminar fracciones al multiplicar ambos lados de la ecuación por el MCD, $(7.6)(10.3) = 78.28$.

$$\begin{aligned}
78.28\left(\frac{x}{7.6} - \frac{x}{10.3}\right) &= 78.28\,(1)\\
\overset{10.3}{\cancel{78.28}}\left(\frac{x}{\cancel{7.6}}\right) - \overset{7.6}{\cancel{78.28}}\left(\frac{x}{\cancel{10.3}}\right) &= 78.28(1)\\
10.3x - 7.6x &= 78.28\\
2.7x &= 78.28\\
x &\approx 28.99
\end{aligned}$$

Responde La bañera se llenará en aproximadamente 29 minutos.

Resuelve ahora el ejercicio 25

EJEMPLO 3 **Trabajo en un viñedo** Chris Burditt y Mark Greenhalgh trabajan en un viñedo. Cuando Chris y Mark trabajan juntos, pueden revisar todas las plantas en un terreno determinado en 24 minutos. Cuando Chris revisa las plantas solo, necesita 36 minutos. ¿Cuánto tardará Mark en revisar las plantas él solo?

Solución **Entiende** Sea x igual a la cantidad de tiempo que necesita Mark para revisar las plantas él solo. Sabemos que cuando trabajan juntos pueden hacer ese trabajo en 24 minutos. Organizamos esta información en una tabla como sigue.

© Allen R. Angel

Trabajador	Tasa de trabajo	Tiempo de trabajo	Parte de las plantas revisadas
Chris	$\frac{1}{36}$	24	$\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$
Mark	$\frac{1}{x}$	24	$\frac{24}{x}$

Traduce

$$\begin{pmatrix}\text{parte de las plantas}\\ \text{revisadas por Chris}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{parte de las plantas}\\ \text{revisadas por Mark}\end{pmatrix} = 1(\text{terreno completo revisado})$$

$$\frac{2}{3} + \frac{24}{x} = 1$$

Realiza los cálculos

$$\boxed{3x}\left(\frac{2}{3}+\frac{24}{x}\right) = \boxed{3x}\cdot 1 \quad \text{Multiplica ambos lados por el MCD, } 3x.$$

$$2x + 72 = 3x$$

$$72 = x$$

Responde Mark puede revisar las plantas, él solo, en 72 minutos.

Resuelve ahora el ejercicio 23

Observa que en el ejemplo 3 usamos $\frac{2}{3}$ en lugar de $\frac{24}{36}$ para la parte de las plantas revisada por Chris. Utiliza siempre fracciones simplificadas cuando plantees y resuelvas ecuaciones.

2 Resolver problemas numéricos

Veamos ahora un **problema numérico**, en el que se debe encontrar un número relacionado con uno o más números.

EJEMPLO 4 **Problema numérico** Cuando el recíproco del triple de un número se resta de 7, el resultado es el recíproco del doble del número. Determina el número.

Solución **Entiende** Sea x igual al número desconocido. Entonces $3x$ es el triple del número, y $\frac{1}{3x}$ es el recíproco del triple del número. El doble del número es $2x$, $\frac{1}{2x}$ es el recíproco del doble del número.

Traduce

$$7 - \frac{1}{3x} = \frac{1}{2x}$$

Realiza cálculos

$$\boxed{6x}\left(7 - \frac{1}{3x}\right) = \boxed{6x}\cdot\frac{1}{2x} \quad \text{Multiplica por el MCD, } 6x.$$

$$6x(7) - 6x\left(\frac{1}{3x}\right) = 6x\left(\frac{1}{2x}\right)$$

$$42x - 2 = 3$$

$$42x = 5$$

$$x = \frac{5}{42}$$

Responde Una comprobación verificará que el número es $\frac{5}{42}$.

Resuelve ahora el ejercicio 33

Comprendiendo el álgebra

Usualmente escribimos la fórmula de la distancia como

distancia = velocidad · tiempo

Sin embargo, en ocasiones es conveniente despejar el tiempo de la fórmula:

$$\frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \frac{\cancel{\text{velocidad}}\cdot\text{tiempo}}{\cancel{\text{velocidad}}}$$

o $$\frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \text{tiempo}$$

3 Resolver problemas de movimiento

El último tipo de problemas que veremos son los **problemas de movimiento**. Recuerda que distancia = velocidad · tiempo. En ocasiones es conveniente despejar el tiempo cuando resolvemos problemas de movimiento.

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$$

EJEMPLO 5 **Vuelo en aeroplano** Sally Sestani está realizando su plan de vuelo y ella determina que hay un viento de 20 millas por hora moviéndose de este a oeste a la misma altura a la que volará. Si ella viaja hacia el oeste (con el viento a favor), puede recorrer 400 millas en el mismo tiempo en el que podría recorrer 300 millas volando hacia el este (con el viento en contra) (ver **Figura 6.8**). Suponiendo que, si no hubiese viento, el aeroplano volaría a la misma velocidad viajando hacia el este o hacia el oeste, determina la velocidad a la que vuela con el viento en calma.

FIGURA 6.8

Solución **Entiende** Sea x = a la velocidad del avión con el viento en calma. Debemos construir una tabla que nos ayude a responder la pregunta.

Aeroplano	Distancia	Velocidad	Tiempo
Viento en contra	300	$x - 20$	$\frac{300}{x - 20}$
Viento a favor	400	$x + 20$	$\frac{400}{x + 20}$

Traduce Como los tiempos son los mismos planteamos y resolvemos la ecuación siguiente:

$$\frac{300}{x - 20} = \frac{400}{x + 20}$$

Realiza los cálculos

$$\begin{aligned} 300(x + 20) &= 400(x - 20) \quad \text{Multiplicación cruzada.} \\ 300x + 6000 &= 400x - 8000 \\ 6000 &= 100x - 8000 \\ 14{,}000 &= 100x \end{aligned}$$

Responde La velocidad del aeroplano con el viento en calma es de 140 millas por hora.

Resuelve ahora el ejercicio 41

EJEMPLO 6 **Paseo en bicicleta acuática** Marty y Betty McKane pasean en bicicleta acuática. Cuando viajan en contra de la corriente (alejándose de la costa), promedian 2 millas por hora. De regreso (acercándose a la costa), viajan con la corriente a favor y promedian 3 millas por hora. Si tardan $\frac{1}{4}$ de hora más de ida que de vuelta a la costa, ¿qué tanto se alejaron de la costa durante su paseo?

Solución **Entiende** En este problema, el tiempo de ida y de regreso no son iguales. Les tomó $\frac{1}{4}$ de hora más para alejarse de la costa que para el regreso. Por lo tanto, para igualar los tiempos podemos sumar $\frac{1}{4}$ de hora al tiempo que les tomó el regreso (o restar $\frac{1}{4}$ de hora del tiempo de ida). Sea x igual a la distancia que se alejaron de la costa.

© Allen R. Angel

Bicicleta	Distancia	Velocidad	Tiempo
Viaje de ida	x	2	$\frac{x}{2}$
Viaje de regreso	x	3	$\frac{x}{3}$

Traduce tiempo del viaje de regreso + $\frac{1}{4}$ de hora = tiempo del viaje de ida

$$\frac{x}{3} + \frac{1}{4} = \frac{x}{2}$$

Realiza los cálculos

$$\boxed{12}\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{4}\right) = \boxed{12}\cdot\frac{x}{2} \qquad \text{Multiplica por el MCD, 12.}$$

$$12\left(\frac{x}{3}\right)+12\left(\frac{1}{4}\right) = 12\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$4x + 3 = 6x$$

$$3 = 2x$$

$$1.5 = x$$

Responde Por lo tanto, la pareja se alejó 1.5 millas de la costa.

Resuelve ahora el ejercicio 53

EJEMPLO 7 **De viaje** Dawn Puppel vive en Buffalo, Nueva York, y viaja a la escuela en South Bend, Indiana. En algunas carreteras la velocidad límite es de 55 millas por hora, mientras que en otras es de 65 millas por hora. La distancia total que recorre Dawn para llegar a su escuela es de 490 millas. Si Dawn respeta los límites de velocidad y le toma 8 horas el recorrido, ¿cuánto tiempo maneja a 55 millas por hora y cuánto a 65 millas por hora?

Límite de velocidad	Distancia	Velocidad	Tiempo
55 mph	x	55	$\frac{x}{55}$
65 mph	$490 - x$	65	$\frac{490 - x}{65}$

Solución **Entiende y traduce** Sea x igual al número de millas recorridas a 55 mph. Entonces $490 - x =$ número de millas recorridas a 65 mph.

Como el tiempo total es de 8 horas, escribimos

$$\frac{x}{55}+\frac{490-x}{65} = 8$$

Realiza los cálculos El MCD de 55 y 65 es 715.

$$\boxed{715}\left(\frac{x}{55}+\frac{490-x}{65}\right) = \boxed{715}\cdot 8$$

$$715\left(\frac{x}{55}\right)+715\left(\frac{490-x}{65}\right) = 5720$$

$$13x + 11(490 - x) = 5720$$

$$13x + 5390 - 11x = 5720$$

$$2x + 5390 = 5720$$

$$2x = 330$$

$$x = 165$$

Responde El número de millas recorridas a 55 mph es 165. Por lo tanto, el tiempo transcurrido a 55 mph es $\frac{165}{55} = 3$ horas, y el tiempo transcurrido a 65 mph es $\frac{490 - 165}{65} = \frac{325}{65} = 5$ horas.

Resuelve ahora el ejercicio 59

Comprendiendo el álgebra

En el ejemplo 7, podríamos haber usado dos variables para resolver el problema. Sea x igual al número de millas recorridas a 55 mph y sea y igual al número de millas recorridas a 65 mph.

Entonces, nuestro sistema de dos ecuaciones sería

$$x + y = 490$$

$$\frac{x}{55}+\frac{y}{65} = 8$$

Este sistema puede resolverse por cualquiera de los métodos estudiados en el capítulo 4: sustitución o adición.

Consejo útil

Observa que en el ejemplo 7 la respuesta a la pregunta no fue el valor obtenido para x. El valor obtenido fue una distancia, y se nos pidió determinar el tiempo. *Al trabajar con problemas expresados con palabras, debes leer con atención y resolverlos con mucho cuidado, asegurándote de responder la pregunta planteada.*

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.5

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

parte de la tarea completada $\quad \frac{1}{7}$ de la tarea $\quad \frac{\text{velocidad}}{\text{distancia}} \quad$ una tarea completa $\quad \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} \quad$ 7 tareas

1. Para resolver problemas de trabajo utilizaremos el hecho de que la parte de la tarea finalizada por la primera persona (o máquina) más la parte de la tarea finalizada por la segunda persona (o máquina) es igual a ________________ terminada.

2. Si Paul puede completar una tarea en 7 horas, entonces su tasa de trabajo es de ________________ por hora.

3. Para determinar la parte de la tarea hecha por cada persona o máquina, utilizamos la fórmula *tasa de trabajo* · *tiempo trabajado* = ________________.

4. Si despejamos tiempo de la fórmula de distancia, tenemos que *tiempo* = ________________.

Resolución de problemas

Los ejercicios 5-30 involucran problemas de trabajo (ver ejemplos 1-3). Cuando sea necesario, redondea a la centésima más cercana.

5. Campo de béisbol A Richard Semmler le toma 2 horas preparar un campo de béisbol de ligas pequeñas. A Larry Gilligan le toma 6 horas preparar el mismo campo. ¿Cuánto tiempo le tomará a Richard y Larry, trabajando juntos, preparar un campo de béisbol de ligas pequeñas?


© Dennis C. Runde

6. Limpiadores de ventanas Fran Thompson puede lavar ventanas de la recepción del Days Inn en 3 horas. Jill Franks puede lavar las mismas ventanas en 4.5 horas. ¿Cuánto tiempo les tomará trabajando juntos lavar las ventanas?

7. Servicio de Limpieza Jason La Rue puede lavar la alfombra del piso principal del Hotel Sheraton en 3 horas. Tom Lockheart puede hacer el mismo trabajo en 6 horas. Si trabajan juntos, ¿cuánto tiempo les tomará lavar la alfombra?

8. Impresión de cheques En la Merck Corporation le toma 3 horas a una computadora imprimir los cheques de nómina de sus empleados y a una segunda computadora le toma 7 horas completar el mismo trabajo. ¿Cuánto tiempo les tomará a las dos computadoras, trabajando juntas, completar el trabajo?

9. Granja lechera En una pequeña granja lechera, Jin Chenge puede ordeñar 10 vacas en 30 minutos. Su hijo, Ming, puede ordeñar las mismas vacas en 50 minutos. ¿Cuánto tiempo les tomará, trabajando juntos, ordeñar las 10 vacas?

10. Podando el césped Julio y Marcella López podan el césped durante los meses de verano. Utilizando una podadora manual autopropulsada, Julio puede podar un área grande en 9 horas. Con un tractor podador, Marcella puede podar la misma área en 4 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en podar el césped del terreno si trabajan juntos?

11. Cosecha de manzanas Kevin Bamard puede cosechar 25 bushels de manzanas en 6 horas. Su hijo tarda el doble en cosechar 25 bushels. ¿Cuánto tardarán juntos en cosechar 25 bushels?

12. Recolección de fresas Amanda Heinl puede recolectar 80 cuartos de fresas en 10 horas. Su hermana Emily, puede recolectar los mismos 80 cuartos de fresas en 15 horas. ¿Cuánto tardarán en recolectar juntas 80 cuartos de fresas?


© Allen R. Angel

13. Limpieza de cañerías Olga Palmieri puede limpiar las cañerías de 28 casas en 4.5 días. Su compañero de trabajo, Jien-Ping, puede limpiar las mismas cañerías en 5.5 días. ¿Cuánto tiempo tardarán en limpiar las cañerías de las 28 casas trabajando juntos?

14. Desherbar Val Short puede desherbar un surco de papas en 70 minutos. Su amigo Jason, puede hacerlo en 80 minutos. ¿Cuánto tiempo les tomará, trabajando juntos, desherbar un surco de papas?

15. Arado de un campo Wanda Garner puede arar un campo en 4 horas. Shawn Robinson hace el mismo trabajo en 6 horas. ¿Cuánto tiempo les tomará, trabajando juntos, arar el campo?

16. Pintura Karen puede pintar la sala de una casa en 6 horas. Hephner puede pintar la misma sala en 4.5 horas. ¿Cuánto tiempo les tomará, trabajando juntos, pintar la sala?

17. Llenando una alberca Una manguera pequeña puede llenar una alberca en 8 horas. Una manguera grande puede llenar la misma alberca en 5 horas. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse la alberca si se usan juntas las dos mangueras?

18. Tanque de leche En una planta lechera, un tanque de leche puede llenarse en 6 horas (usando la válvula de llenado). Mediante una válvula de salida, el tanque puede vaciarse en 8 horas. Si las dos válvulas se abren al mismo tiempo, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse el tanque?

19. Tratamiento de agua En una planta de tratamiento de agua, una válvula de entrada puede llenar un tanque grande de agua en 20 horas y una válvula de salida puede vaciar el tanque en 25 horas. Si el tanque se vacía y ambas válvulas se abren al mismo tiempo, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse el tanque?

20. Fabricantes de armarios Laura puede fabricar una alacena para cocina en 10 horas. Si Laura y Marcia trabajan juntas, ellas pueden fabricar la misma alacena en 8 horas. ¿Cuánto tiempo le tomará a Marcia, trabajando sola, fabricar la alacena?

21. Arqueología El Dr. Indiana Jones y su padre, el Dr. Henry Jones, están trabajando en una excavación cerca del Foro romano. Indiana y su padre, trabajando juntos, pueden revisar un terreno específico en 2.6 meses. Indiana puede revisar el área entera en 3.9 meses. ¿Cuánto tiempo le tomará a Henry revisar el área entera?

© pippa west\Shutterstock

22. Excavación de una zanja Arthur Altshiller y Sally Choi trabajan para General Telephone. Juntos les toma 2.4 horas cavar una zanja en la que se colocarán ciertos cables. Si Arthur puede excavar la zanja en 3.2 horas, ¿cuánto tiempo le tomará a Sally excavar la zanja?

23. Tanque de medusas Wade Martin y Shane Wheeler trabajan juntos en el Monterey Aquarium. A Wade le toma 50 minutos limpiar los tanques de las medusas. Como Shane es nueva en el trabajo, le toma más tiempo realizar la misma tarea. Cuando trabajan juntos, pueden realizar la tarea en 30 minutos. ¿Cuánto tiempo le tomará a Shane realizar la tarea sola?

© Allen R. Angel

24. Plantío de flores María Vásquez y LaToya Johnson plantan petunias en un jardín botánico. María tarda el doble de tiempo que LaToya en plantar las flores. Trabajando juntas, ellas pueden plantar las flores en 10 horas. ¿Cuánto tardará LaToya en plantar las flores ella sola?

25. Llenado de una tina Cuando solo está abierta la llave del agua fría, una tina se llena en 8 minutos. Cuando solo está abierta la llave del agua caliente, la tina se llena en 12 minutos. Cuando el desagüe de la tina está abierto, la tina se vacía completamente en 7 minutos. Si ambas llaves están abiertas, la del agua caliente y la del agua fría, y también lo está el desagüe, ¿cuánto tardará la tina en llenarse?

26. Riego de cultivos Un tanque grande se utiliza para regar los cultivos en la granja de Jed Saifer's. El tanque tiene dos tubos de entrada y un tubo de salida. Los dos tubos de entrada pueden llenar el tanque en 8 y 12 horas, respectivamente. El tubo de salida puede vaciar el tanque en 15 horas. Si el tanque está vacío, ¿cuánto tiempo tomará llenar el tanque si las tres válvulas están abiertas?

27. Bombeo de agua El departamento de bomberos de Rushville utiliza tres bombas para drenar agua de los sótanos inundados. Las tres bombas pueden drenar el agua de un sótano inundado en 6, 5 y 4 horas, respectivamente. Si las tres bombas trabajan juntas, ¿cuánto tardarán en vaciar el sótano?

28. Instalación de ventanas Adam, Frank y Willy son expertos instalando ventanas en casas. Adam puede instalar cinco ventanas en la sala de una casa en 10 horas. Frank puede hacer el mismo trabajo en 8 horas y Willy puede hacerlo en 6 horas. Si los tres hombres trabajan juntos, ¿cuánto tiempo tardarán en instalar las ventanas?

29. Techando una casa Gary Glaze requiere 15 horas para poner un nuevo techo en una casa. Su aprendiz, Anna Gandy, puede colocar el techo de la casa en 20 horas. Después de trabajar solo en un techo durante 6 horas, Gary interrumpe la labor; Anna la retoma y completa el trabajo. ¿Cuánto tiempo le tomará a Anna completar el trabajo?

30. Llenado del tanque Se usan dos tubos para llenar un tanque de petróleo. Cuando se utiliza solo el tubo más grande, el tanque se llena en 60 horas. Cuando se utiliza solo el tubo más pequeño, el tanque se llena en 80 horas. El tubo grande comienza a llenar el tanque. Después de 20 horas, se cierra el tubo más grande y se abre el más pequeño. ¿Cuánto tiempo más se necesitará para terminar de llenar el tanque?

Los ejercicios 31-40 involucran problemas numéricos (ver ejemplo 4).

31. ¿Qué número multiplicado por el numerador y sumado al denominador de la fracción $\frac{2}{5}$ da por resultado la fracción $\frac{3}{4}$?

32. ¿Qué número sumado al numerador y multiplicado por el denominador de la fracción $\frac{4}{5}$ da por resultado la fracción $\frac{1}{15}$?

33. Un número es el doble de otro. La suma de sus recíprocos es $\frac{3}{4}$. Determina ambos números.

34. La suma de los recíprocos de dos enteros consecutivos es $\frac{11}{30}$. Determina los dos enteros.

35. La suma de los recíprocos de dos enteros pares consecutivos es $\frac{5}{12}$. Determina los dos enteros.

36. Cuando un número se suma al numerador y al denominador de la fracción $\frac{7}{9}$, la fracción resultante es $\frac{5}{6}$. Determina el número que se sumó.

37. Cuando el número 3 se suma al doble del recíproco de un número, la suma es $\frac{31}{10}$. Determina el número.

38. El recíproco de 3 menor que un cierto número es el doble del recíproco de 6 menor que el doble del número. Determina el o los números.

39. Si el triple de un número se suma al doble del recíproco del número, el resultado es 5. Determina el o los números.

40. Si el triple del recíproco de un número se resta del doble del recíproco del cuadrado del número, la diferencia es -1. Determina el o los números.

Los ejercicios 41-63 involucran problemas de movimiento (ve los ejemplos 5-7). Cuando sea necesario, redondea las respuestas a la centésima más cercana.

41. Góndola Cuando Angelo Burnini rema en su góndola por aguas tranquilas (sin corriente) en Venecia, Italia, viaja a 3 mph. Cuando rema con la misma intensidad en el Gran Canal, le toma el mismo tiempo viajar 2.4 millas con la corriente a favor que recorrer 2.3 millas con la corriente en contra. Determina la velocidad de la corriente del canal.

© Allen R. Angel

42. Conducir a Florida Christine Abbott vive en Bangor, Maine y su amiga Denise Brown vive en Sioux City, Iowa. Ellas conducen a Dade City, Florida, para pasar el invierno. Son 1600 millas de viaje para Christine y 1500 millas para Denise. Si Christine conduce 5 millas por hora más rápido que Denise, y si ellas realizan el viaje en la misma cantidad de tiempo. Determina la velocidad de Christine y la velocidad de Denise.

43. Banda transportadora El movimiento de una banda transportadora en el O'Hare International Airport de Chicago es 2.0 pies por segundo. Utilizando la banda, Nancy Killian recorre una distancia de 120 pies en el mismo tiempo que le tomaría recorrer 52 pies caminando. ¿Qué tan rápido camina Nancy?

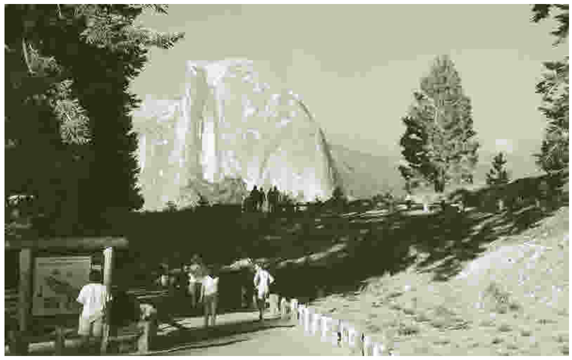
© Allen R. Angel

44. Banda transportadora Una banda transportadora del Aeropuerto Internacional de Filadelfia se mueve a una velocidad de 1.8 pies por segundo. Nathan Trotter recorre 100 pies sobre la banda transportadora, después da la vuelta sobre la misma banda y recorre 40 pies a la misma velocidad en dirección opuesta. Si el tiempo utilizado en el recorrido en cada dirección fue el mismo, determina la velocidad a la que camina Nathan.

45. Esquí Bonnie Hellier y Clide Vincent darán un paseo en esquí a campo traviesa en las montañas Adirondack. Clide es un esquiador experto, que promedia 10 millas por hora, mientras que Bonnie promedia 6 millas por hora. Si Bonnie necesita $\frac{1}{2}$ hora más que Clide para recorrer el mismo tramo, ¿cuál es la longitud del camino?

46. De excursión Ruth y Jerry Mackin salen a dar un paseo por el Memorial Park en Houston, Texas. Ruth trota mientras Jerry va en patines. Jerry patina 2.9 millas por hora más rápido de lo que Ruth trota. Cuando Jerry ha patinado 5.7 millas, Ruth ha trotado 3.4 millas. Determina la velocidad de trote de Ruth.

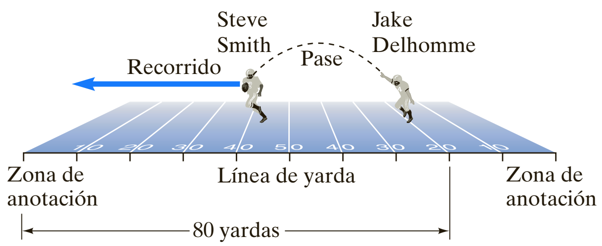
47. Visita a un centro turístico Phil Mahler condujo 60 millas hasta el Parque Nacional Yosemite. Empleó el doble de tiempo en recorrerlo que lo que necesitó para llegar a él. El tiempo total utilizado en conducir hasta el parque y recorrerlo fue de 5 horas. Determina la velocidad promedio a la que condujo hacia el Parque Nacional Yosemite.



© Allen R. Angel

48. Viaje en bote Ray Packerd inició un viaje en bote a las 8 a.m. El bote de Ray puede viajar a 20 millas por hora en aguas tranquilas. ¿Qué tan lejos río abajo puede ir Ray, si la corriente es de 5 millas por hora y él desea ir y regresar en 4 horas?

49. Partido de fútbol americano En un partido de fútbol americano, las Panteras de Carolina tienen el balón en la yarda 20 de su propio terreno. Jake Delhomme pasa el balón a Steve Smith, quien lo atrapa y corre hacia la zona de anotación. Supón que el balón viajó a 14.7 yardas por segundo en el pase y que, una vez que lo atrapó, Steve corrió a 5.8 yardas por segundo hasta la zona de anotación. Si la jugada completa, desde el momento en que Jake soltó el balón hasta el momento en que Steve llegó a la zona de anotación, duró 10.6 segundos, ¿qué tan lejos lanzó el balón Jake para que Steve lo atrapara? Supón que toda la jugada se llevó a cabo por el centro del campo.



50. Viaje En un día, Pauline Shannon condujo desde Front Royal, Virginia, hasta Asheville, North Carolina, una distancia de 492 millas. Parte del viaje condujo a una velocidad promedio de 50 millas por hora, pero en algunas áreas condujo a una velocidad promedio de 35 millas por hora. Si el tiempo total del viaje fue de 11.13 horas, ¿qué distancia recorrió a cada velocidad?

51. Trenes subterráneos El tren número 4 en el sistema de trenes subterráneos de Nueva York va de la avenida Woodlawn/Jerome en el Bronx a la avenida Flatbush en Brooklyn. La distancia entre estas dos paradas es de 24.2 millas. En esta ruta, hay dos vías paralelas, una para el tren local y otra para el tren expreso. Ambos trenes inician su recorrido al mismo tiempo, desde Woodland/Jerome. Cando el tren expreso llega al final de la ruta en Flatbush, el tren local se encuentra a 7.8 millas de Flatbush. Si el tren expreso es 5.2 millas en promedio más rápido que el local, determina las velocidades de los dos trenes.

52. Equitación Cada mañana, Daine Hauck toma su caballo, Beauty, para cabalgar en Pfeiffer Beach in Big Sur, California. Ella comúnmente cabalga a trote una distancia de 5.4 millas; luego, deja que Beauty camine a su propio ritmo 2.3 millas. La velocidad del caballo al trotar es 4.2 veces su velocidad al caminar. Si todo el paseo dura 1.5 horas, determina la velocidad a la que camina Beauty.


© Vibrant Image Studio/Shutterstock

53. Viaje Un automóvil y un tren inician su recorrido al mismo tiempo de la Union Station en Washington, D.C. hacia Rochester, Nueva York, el recorrido del viaje es de 390 millas de distancia. Si la velocidad del automóvil promedia el doble de la velocidad del tren y llega 6.5 horas antes que éste, determina la velocidad del automóvil y la velocidad del tren.

54. Viaje Un automóvil y un tren salen al mismo tiempo de la estación de trenes en Pasadena, California, hacia la feria estatal de Sacramento. El automóvil promedia 50 millas por hora y el tren promedia 70 millas por hora. Si el tren llega a la feria 2 horas antes que el automóvil, determina la distancia de la estación de trenes a la feria.

55. Viaje Dos amigos conducen una distancia de 600 millas desde Dallas hacia El Paso. Mary Ann Zilke viaja por autopista y llega al mismo destino dos horas antes que Carla Canola, quien tomó una ruta diferente. Si la velocidad promedio del automóvil de Marie Ann fue 10 millas por hora más rápida que la del automóvil de Carla, determina la velocidad promedio a la que viajó el automóvil de Mary Ann.

56. Carrera de veleros En una carrea de veleros de 30 millas, el bote ganador, Bucanero, terminó 10 minutos antes que el bote que llegó en segundo lugar, el Cuervo. Si la velocidad promedio de Bucanero fue de dos millas por hora más rápida que la del Cuervo, determina la velocidad promedio del velero ganador.

57. Viaje en helicóptero Kathy Ángel viajó en helicóptero hasta la cima del glaciar del monte Cook, en Nueva Zelanda. El recorrido fue de 60 kilómetros. Kathy permaneció en la cima del glaciar $\frac{1}{2}$ hora y después voló a la ciudad de Te Anu, a 140 kilómetros de distancia. El helicóptero voló en promedio 20 kilómetros por hora más rápido al ir a Te Anu que durante el vuelo hacia la cima del glaciar. El tiempo total del viaje fue de 2 horas. Determina la velocidad promedio a la que voló el helicóptero en su recorrido hacia el glaciar.


© Allen R. Angel

Ve el ejercicio 57.

58. Veleros Dos veleros, el *Serendipity* y el *Zerwilliker*, inician su recorrido en el mismo punto y al mismo tiempo en el lago Michigan, y se dirigen hacia el mismo restaurante en el lago. El *Serendipity* navega a un promedio de 5.2 millas por hora y el *Zerwilliker* lo hace a un promedio de 4.6 millas por hora. Si el Serendipity llega a su destino 0.4 horas antes que el *Zerwilliker*, determina la distancia que hay entre el punto en que iniciaron el recorrido y el restaurante.

59. Paseo en bicicleta Robert Wiggins pasea en su bicicleta desde DuPont Circle en Washington, D.C., a Mount Vernon en Virginia. Tarda $2\frac{1}{2}$ horas en completar el viaje de 17 millas. En la parte lenta del viaje, Robert pedalea a una velocidad de 6 millas por hora. En la parte rápida del viaje, pedalea a 10 millas por hora. ¿Cuánto tiempo viaja a 6 millas por hora y cuánto tiempo viaja a 10 millas por hora?

60. Patinaje y trote Sharon McGhee patina y trota en un camino que tiene una longitud de 38 millas. En la parte que está pavimentada, patina a una velocidad de 11 millas por hora. En la parte sin pavimentar, trota a 7 millas por hora. Le toma 4 horas terminar el recorrido. ¿Cuánto tiempo patina y cuánto trota?

61. Puente colgante El Capilano, un puente colgante en Vancouver, Canadá, tiene una longitud de 450 pies. Phil y Heim empiezan a cruzarlo a pie al mismo tiempo. La velocidad de Heim fue 2 pies por minuto más rápida que la de Phil. Si Heim terminó de cruzar el puente $2\frac{1}{2}$ minutos antes que Phil, determina la velocidad promedio, en pies por minuto, a la que lo cruzó Phil.

62. Vía de tren inclinada Un paseo por el monte Pilatus, cerca de Lucerna, Suiza, incluye un recorrido a lo largo de una vía de tren inclinada que sube hacia la cima; después, se pasa algún tiempo ahí y luego se regresa por el lado opuesto del monte, a bordo de un teleférico. La distancia que se recorre hacia la cima del monte es de 7.5 kilómetros y la distancia del descenso es de 8.7 kilómetros. La velocidad del teleférico es 1.2 veces la velocidad del tren sobre la vía inclinada. Si una familia permaneció en la cima del monte durante 3 horas y el tiempo total del paseo fue de 9 horas, determina la velocidad del recorrido por la vía inclinada.

3. Lanzamiento de cohetes Se lanzarán dos cohetes al mismo tiempo desde el principal centro de operaciones de la NASA en Houston, Texas, y se encontrarán en una estación espacial a muchas millas de distancia de la Tierra. El primer cohete viaja a 20,000 millas por hora y el segundo, a 18,000 millas por hora. Si el primer cohete llegará a la estación espacial 0.6 horas antes que el segundo, ¿qué tan lejos se encuentra la estación espacial del centro de operaciones de la NASA?

64. Construye tu propio problema de aplicación y determina la solución.

65. Construye tu propio problema de movimiento y determina la solución.

66. Construye tu propio problema numérico y determina la solución.

Problemas de desafío

67. Una oficial que pilota una aeronave de patrullaje determina que un automóvil, que está a una distancia de 10 millas, viaja a una velocidad de 90 millas por hora.

a) Si la aeronave vuela a 150 millas por hora, ¿cuántos minutos tardará en alcanzar el automóvil?

b) ¿Qué distancia recorrerá el automóvil antes de que la aeronave le dé alcance?

c) Si la oficial desea alcanzar el automóvil en exactamente 8 minutos, ¿qué tan rápido debe volar la aeronave?

Ejercicios de repaso acumulados

[1.5] **68.** Simplifica $\dfrac{(3x^4y^{-3})^{-2}}{(2x^{-1}y^6)^3}$.

[1.6] **69.** Expresa 9,260,000,000 en notación científica.

[2.3] **70.** **Salario semanal** Sandy Ivey recibe un salario semanal de $240, más 12% de comisión sobre el volumen de sus ventas totales. ¿Cuál debe ser su volumen de ventas en una semana para ganar $540?

[3.1] **71.** Grafica $y = |x| - 2$.

[5.4] **72.** Factoriza $2a^4 - 2a^3 - 5a^2 + 5a$.

6.6 Variación

1 Resolver problemas de variación directa.

2 Resolver problemas de variación inversa.

3 Resolver problemas de variación conjunta.

4 Resolver problemas de variación combinada.

La **ecuación de variación** muestra cómo una cantidad cambia en relación con otra cantidad o cantidades. En esta sección estudiaremos tres tipos de variación: *directa, inversa* y *conjunta*.

1 Resolver problemas de variación directa

La **variación directa** involucra dos variables que se incrementan juntas o disminuyen juntas. Por ejemplo, considera un automóvil que viaja a 80 millas por hora en una autopista interestatal. El automóvil viaja

- 80 millas en 1 hora,
- 160 millas en 2 horas,
- 240 millas en 3 horas, y así sucesivamente.

A medida que el *tiempo* se incrementa, la *distancia* también se incrementa.

La fórmula utilizada para calcular la distancia recorrida es

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \cdot \text{tiempo}$$

Como la velocidad en el ejemplo es constante, la fórmula puede escribirse

$$d = 80t$$

Decimos que la distancia *varía directamente* respecto del tiempo o que la distancia es *directamente proporcional* al tiempo.

Variación directa

Si una variable y varía directamente respecto de una variable x, entonces

$$y = kx$$

donde k es la **constante de proporcionalidad** o la **constante de variación**.

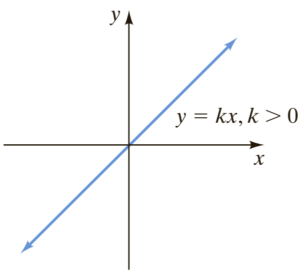


FIGURA 6.9

La gráfica de $y = kx, k > 0$, siempre da por resultado una recta que pasa por el origen (ver **Figura 6.9**). La pendiente de la recta depende del valor de k.

EJEMPLO 1 **Círculo** La circunferencia de un círculo, C, es directamente proporcional a (o varía directamente respecto de) su radio, r. Escribe la ecuación de la circunferencia de un círculo si la constante de proporcionalidad, k, es 2π.

Solución

$C = kr$ — C varía directamente respecto de r.

$C = 2\pi r$ — La constante de proporcionalidad es 2π.

Resuelve ahora el ejercicio 11

EJEMPLO 2 **Administración de medicamentos** La cantidad, a, del medicamento teofilina que se administra a un paciente es directamente proporcional a la masa corporal del paciente, m, en kilógramos.

a) Escribe la ecuación de variación.

b) Si le dan 150 mg a un chico cuya masa corporal es de 30 kg, determina la constante de proporcionalidad.

c) ¿Qué cantidad de este medicamento debe administrarse a un paciente cuya masa corporal es de 62 kg?

Solución

a) Dijimos que ésta es una variación directa. Es decir, a mayor masa corporal del paciente, mayor cantidad de medicamento tendrá que administrársele. Por lo tanto, planteamos una ecuación de variación directa

$$a = km$$

b) Entiende y traduce Para determinar el valor de la constante de proporcionalidad, sustituimos los valores dados por la cantidad del medicamento y la masa corporal del paciente. Después despejamos k.

$$a = km$$

$$150 = k(30) \qquad \text{Sustituye los valores dados.}$$

Realiza los cálculos $\quad 5 = k$

Responde Por lo tanto, $k = 5$ mg. Cinco miligramos del medicamento se deben administrar por cada kilógramo de masa corporal de un paciente.

c) Entiende y traduce Ahora que conocemos la constante de proporcionalidad, podemos usarla para determinar la cantidad de medicamento que se debe administrar según la masa corporal de un paciente. Planteamos la ecuación de la variación y sustituimos los valores para k y m.

$$a = km$$

$$a = 5(62) \qquad \text{Sustituye los valores dados.}$$

Realiza los cálculos $\quad a = 310$

Responde Por lo tanto, a un paciente con una masa corporal de 62 kg, se le deben administrar 310 mg de teofilina.

Resuelve ahora el ejercicio 57

Comprendiendo el álgebra

La variación directa involucra dos variables que se incrementan o disminuyen juntas.

Las frases

- y varía directamente respecto de x, y
- y es directamente proporcional a x,

se representan con la ecuación de la variación directa

$$y = kx$$

EJEMPLO 3 y varía directamente respecto del cuadrado de z. Si y es 80 cuando z es 20, determina y cuando z es 45.

Solución Como y varía directamente respecto del cuadrado de z, comenzamos con la fórmula $y = kz^2$. Como no nos dan la constante de proporcionalidad, primero debemos determinar k con la información dada.

$$y = kz^2$$

$$80 = k(20)^2 \qquad \text{Sustituye los valores dados.}$$

$$80 = 400k \qquad \text{Despeja } k.$$

$$\frac{80}{400} = \frac{400k}{400}$$

$$0.2 = k$$

Ahora utilizamos $k = 0.2$ para determinar y cuando z es 45.

$$y = kz^2$$
$$y = 0.2(45)^2 \qquad \text{Sustituye los valores dados.}$$
$$y = 405$$

Por lo tanto, cuando z es igual a 45, y es igual a 405.

Resuelve ahora el ejercicio 35

2 Resolver problemas de variación inversa

La **variación inversa** involucra dos variables en las que conforme una variable se incrementa la otra disminuye y viceversa. Por ejemplo, considera viajar 120 millas en automóvil. Si el automóvil viaja

- 30 millas por hora, el viaje toma 4 horas,
- 40 millas por hora, el viaje toma 3 horas,
- 60 millas por hora, el viaje toma 2 horas, y así sucesivamente.

Como la *velocidad* aumenta, el *tiempo* para viajar 120 millas disminuye.

La fórmula utilizada para calcular el tiempo dada la distancia y la velocidad es

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$$

Como la distancia en los ejemplos anteriores es constante, la fórmula puede reescribirse como

$$\text{tiempo} = \frac{120}{\text{velocidad}}$$

Podemos decir que el tiempo *varía inversamente* respecto de la velocidad o que el tiempo es *inversamente proporcional* a la velocidad.

Variación inversa

Si una variable y varía inversamente respecto de una variable x, entonces

$$y = \frac{k}{x} \qquad (\text{o } xy = k)$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

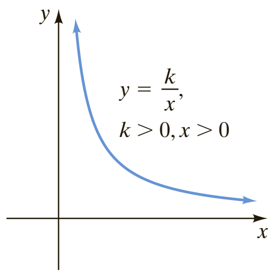


FIGURA 6.10

La gráfica de $y = \frac{k}{x}$, para $k > 0$ y $x > 0$, tendrá la forma que se ilustra en la **Figura 6.10**. La gráfica de la ecuación de una variación inversa no está definida en $x = 0$, ya que 0 no está en el dominio de la función $y = \frac{k}{x}$.

EJEMPLO 4 **Hielo derretido** La cantidad de tiempo, t, que tarda en derretirse un bloque de hielo cuando se sumerge en agua es inversamente proporcional a la temperatura del agua, T.

a) Escribe la ecuación de variación.

b) Si un bloque de hielo tarda 15 minutos en derretirse cuando se sumerge en agua que se encuentra a una temperatura de 60 °F, determina la constante de proporcionalidad.

c) Determina cuánto tiempo tardará en derretirse un bloque de hielo del mismo tamaño al sumergirse en agua que se encuentra a una temperatura de 50 °F.

Solución

a) Entre más caliente esté el agua, más rápido se derretirá el hielo. La variación inversa es

$$t = \frac{k}{T}$$

Comprendiendo el álgebra

La variación inversa involucra dos variables en las que conforme una variable se incrementa la otra disminuye y viceversa.

Las frases

- *y* varía inversamente respecto de *x*, *y*
- *y* es inversamente proporcional a *x*,

se representa con la ecuación de la variación inversa

$$y = \frac{k}{x}.$$

b) Entiende y traduce Para determinar la constante de proporcionalidad, sustituimos los valores de la temperatura y el tiempo y despejamos k.

$$t = \frac{k}{T}$$

$$15 = \frac{k}{60} \quad \text{Sustituye los valores dados.}$$

Realiza los cálculos $900 = k$

Responde El valor de la constante de proporcionalidad es 900.

c) Entiende y traduce Ahora que conocemos la constante de proporcionalidad, podemos utilizarla para determinar cuánto tiempo tardará en derretirse un bloque de hielo del mismo tamaño al sumergirse en agua que se encuentra a una temperatura de 50 °F. Para ello, establecemos la proporción, sustituimos los valores para k y T y despejamos t.

$$t = \frac{k}{T}$$

$$t = \frac{900}{50} \quad \text{Sustituye los valores dados.}$$

Realiza los cálculos $t = 18$

Responde El bloque de hielo sumergido en agua con la temperatura de 50 °F se derretirá en 18 minutos.

Resuelve ahora el ejercicio 61

EJEMPLO 5 **Alumbrado** La iluminación, I, que produce una fuente de luz varía inversamente respecto del cuadrado de la distancia, d, a la que se esté de la fuente. Suponiendo que la iluminación es de 75 unidades a una distancia de 4 metros, determina la fórmula que expresa la relación entre iluminación y distancia.

Solución Entiende y traduce Como la iluminación varía inversamente respecto del *cuadrado* de la distancia, la forma general de la ecuación es

$$I = \frac{k}{d^2}$$

Para determinar k, sustituimos los valores dados para I y d.

$$75 = \frac{k}{4^2} \quad \text{Sustituye los valores.}$$

Realiza los cálculos

$$75 = \frac{k}{16} \quad \text{Despeja } k.$$

$$(75)(16) = k$$

$$1200 = k$$

Responde La fórmula es $I = \dfrac{1200}{d^2}$.

Resuelve ahora el ejercicio 65

3 Resolver problemas de variación conjunta

La **variación conjunta** involucra una variable que varía directamente respecto del producto de dos o más variables.

Variación conjunta

Si y varía conjuntamente respecto de x y z, entonces

$$y = kxz$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

EJEMPLO 6 **Área de un triángulo** El área, A, de un triángulo varía conjuntamente respecto de su base, b, y su altura, h. Si el área de un triángulo es de 48 pulgadas cuadradas cuando su base es de 12 pulgadas y su altura es de 8 pulgadas, determina el área de un triángulo cuya base mide 15 pulgadas y cuya altura mide 40 pulgadas.

Solución **Entiende y traduce** Primero escribimos la ecuación de la variación conjunta y después sustituimos los valores conocidos y despejamos k.

$$A = kbh$$

$$48 = k(12)(8) \qquad \text{Sustituye los valores dados.}$$

Realiza los cálculos

$$48 = k(96) \qquad \text{Despeja } k.$$

$$\frac{48}{96} = k$$

$$k = \frac{1}{2}$$

Ahora resolvemos para el área desconocida usando los valores dados.

$$A = kbh$$

$$= \frac{1}{2}(15)(40) \qquad \text{Sustituye los valores dados.}$$

$$= 300$$

Responde El área del triángulo es de 300 pulgadas cuadradas.

Resuelve ahora el ejercicio 69

Resumen de ecuaciones de variación

DIRECTA	INVERSA	CONJUNTA
$y = kx$	$y = \dfrac{k}{x}$	$y = kxz$

4 Resolver problemas de variación combinada

En la **variación combinada**, las variaciones directa e inversa se producen entre tres o más variables al mismo tiempo.

© Allen R. Angel

EJEMPLO 7 **Tienda de galletas** Los propietarios de una tienda de galletas Auntie Anne determinaron que su venta semanal de galletas, S, varía directamente respecto de su presupuesto de publicidad, A, e inversamente respecto del precio de las galletas, P. Cuando el presupuesto de publicidad es de \$400 y el precio de las galletas es de \$1, se venden 6200 galletas.

a) Escribe una ecuación de variación que exprese S en términos de A y P. Incluye el valor de la constante.

b) Determina las ventas esperadas, si el presupuesto de publicidad es de \$600 y el precio de las galletas es de \$1.20.

Solución

a) Entiende y traduce Comenzamos con la ecuación

$$S = \frac{kA}{P}$$

$$6200 = \frac{k(400)}{1} \qquad \text{Sustituye los valores dados.}$$

Realiza los cálculos

$$6200 = 400k \qquad \text{Despeja } k.$$

$$15.5 = k$$

Responde Por lo tanto, la ecuación para la venta de galletas es $S = \dfrac{15.5A}{P}$.

b) Entiende y traduce Ahora que conocemos la ecuación de la variación combinada, podemos usarla para determinar las ventas esperadas para los valores dados.

$$S = \frac{15.5A}{P}$$

$$= \frac{15.5(600)}{1.20} \qquad \text{Sustituye los valores dados.}$$

Realiza los cálculos

$$= 7750$$

Responde Ellos pueden esperar vender 7750 galletas.

Resuelve ahora el ejercicio 71

EJEMPLO 8 **Fuerza electrostática** La fuerza electrostática, F, de repulsión entre dos cargas eléctricas positivas es conjuntamente proporcional a las dos cargas q_1 y q_2 e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, d, entre las dos cargas. Expresa F en términos de q_1, q_2 y d.

Solución

$$F = \frac{kq_1q_2}{d^2}$$

Resuelve ahora el ejercicio 75

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.6

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

conjunta directa combinada inversa constante $y = kx$ $y = \dfrac{k}{x}$

1. En la variación ______________ las variaciones directa e inversa se producen entre tres o más variables al mismo tiempo.
2. La variación ______________ involucra dos variables en las que conforme una variable se incrementa la otra disminuye y viceversa.
3. La variación ______________ involucra dos variables que se incrementan juntas o disminuyen juntas.
4. La variación ______________ involucra una variable que varía directamente respecto del producto de dos o más variables.
5. Cuando y varía directamente respecto de x, escribimos $y = kx$, donde k es la______________ de proporcionalidad.
6. Si y varía inversamente con respecto de x, entonces la ecuación de variación es ______________.

Practica tus habilidades

En los ejercicios 7-24, determina si la variación entre las cantidades indicadas es directa o inversa.

7. La velocidad y la distancia recorrida por un automóvil durante una hora.

8. El número de páginas que puede leer Tom en un periodo de 2 horas y su velocidad de lectura.

9. La velocidad de un atleta y el tiempo que tarda en recorrer la distancia de una carrera de 10 kilómetros.

© Lowe Llaguno/Shutterstock

10. El salario semanal de Bárbara y la cantidad de dinero que se le retiene por concepto de impuesto estatal sobre los ingresos.

11. El radio de un círculo y su área.

12. El lado de un cubo y su volumen.

13. El radio de un globo y su volumen.

14. El diámetro de un círculo y su circunferencia.

15. El diámetro de una manguera y el volumen de agua que sale de ella.

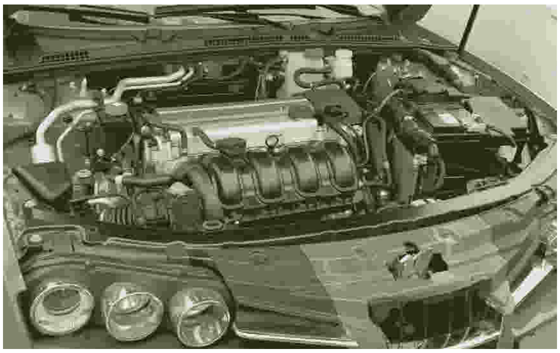
16. La temperatura del aire y el grosor que necesita tener la ropa para que una persona permanezca caliente.

17. El tiempo que tarda en deshacerse un cubo de hielo sumergido en agua y la temperatura del agua.

18. La distancia entre dos ciudades en un mapa y la distancia real entre ambas.

19. El área de un espacio cubierto de césped y el tiempo que uno tarda en cortarlo.

20. El desplazamiento, medido en litros, de un motor y los caballos de fuerza del motor.



© Selena/Shutterstock

21. La rapidez de un mecanógrafo y el tiempo que se tarda en escribir a máquina un ensayo de 500 palabras.

22. El número de calorías ingeridas y la cantidad de ejercicio necesario para quemarlas.

23. La luz que ilumina un objeto y la distancia entre la luz y el objeto.

24. El número de calorías que hay en una hamburguesa y el tamaño de la hamburguesa.

En los ejercicios 25-32, **a)** *escribe la ecuación de variación y* **b)** *determina la cantidad que se te pide.*

25. x varía directamente con respecto de y. Determina x cuando $y = 12$ y $k = 6$.

26. t varía inversamente con respecto de r. Determina t cuando $r = 20$ y $k = 60$.

27. y varía directamente con respecto de R. Determina y cuando $R = 180$ y $k = 1.7$.

28. x varía inversamente con respecto de y. Determina x cuando $y = 25$ y $k = 5$.

29. R varía inversamente con respecto de W. Determina R cuando $W = 160$ y $k = 8$.

30. L varía inversamente con respecto del cuadrado de P. Determina L cuando $P = 4$ y $k = 100$.

31. A varía directamente con respecto de B e inversamente respecto de C. Determina A cuando $B = 12$, $C = 14$ y $k = 3$.

32. A varía conjuntamente con respecto de R_1 y R_2, e inversamente respecto del cuadrado de L. Determina A cuando $R_1 = 120$, $R_2 = 8$, $L = 5$ y $k = \frac{3}{2}$.

En los ejercicios 33-42, **a)** *escribe la ecuación de variación y* **b)** *determina la cantidad que se te pide.*

33. x varía directamente con respecto de y. Si x es 12 cuando y es 3, determina x cuando y es 5.

34. Z varía directamente con respecto de W. Si Z es 7 cuando W es 28, determina Z cuando W es 140.

35. y varía directamente con respecto del cuadrado de R. Si y es 5 cuando R es 5, determina y cuando R es 10.

36. P varía directamente con respecto del cuadrado de Q. Si P es 32 cuando Q es 4, determina P cuando Q es 7.

37. S varía inversamente con respecto de G. Si S es 12 cuando G es 0.4, determina S cuando G es 5.

38. C varía inversamente con respecto de J. Si C es 7 cuando J es 0.7, determina C cuando J es 12.

39. x varía inversamente con respecto del cuadrado de P. Si x es 4 cuando P es 5, determina x cuando P es 2.

40. R varía inversamente con respecto del cuadrado de T. Si R es 3 cuando T es 6, determina R cuando T es 2.

41. F varía conjuntamente con respecto de M_1 y M_2, e inversamente respecto de d. Si F es 20 cuando $M_1 = 5$, $M_2 = 10$ y $d = 0.2$, determina F cuando $M_1 = 10$, $M_2 = 20$ y $d = 0.4$.

42. F varía conjuntamente con respecto de q_1 y q_2, e inversamente respecto del cuadrado de d. Si F es 8 cuando $q_1 = 2$, $q_2 = 8$ y $d = 4$, determina F cuando $q_1 = 28$, $q_2 = 12$ y $d = 2$.

Resolución de problemas

43. Considera que a varía directamente con respecto de b. Si b se duplica, ¿cómo afectará a a? Explica.

44. Considera que a varía directamente con respecto de b^2. Si b se duplica, ¿cómo afectará a a? Explica.

45. Considera que y varía inversamente con respecto de x. Si x se duplica, ¿cómo afectará a y? Explica.

46. Considera que y varía inversamente con respecto de a^2. Si a se duplica, ¿cómo afectará a y? Explica.

En los ejercicios del 47-52, usa la fórmula $F = \dfrac{km_1m_2}{d^2}$.

47. Si m_1 se duplica, ¿cómo afectará a F?

48. Si m_1 se cuadruplica y d se duplica, ¿cómo afectará a F?

49. Si m_1 se duplica, y m_2 se divide entre dos, ¿cómo afectará a F?

50. Si d se divide entre dos, ¿cómo afectará a F?

51. Si m_1 se divide entre dos, y m_2 se cuadruplica, ¿cómo afectará a F?

52. Si m_1 se duplica, m_2 se cuadruplica y d se cuadruplica, ¿cómo afectará a F?

En los ejercicios 53 y 54, determina si la variación es de la forma $y = kx$ *o* $y = \dfrac{k}{x}$, *y determina k.*

53.

x	y
2	$\frac{5}{2}$
5	1
10	$\frac{1}{2}$
20	$\frac{1}{4}$

54.

x	y
6	2
9	3
15	5
27	9

55. Utilidad La utilidad por la venta de lámparas es directamente proporcional al número de lámparas vendidas. Cuando se venden 150 lámparas, la utilidad es de \$2542.50. Determina la utilidad cuando se venden 520 lámparas.

56. Utilidad La utilidad por la venta de estéreos es directamente proporcional al número de estéreos vendidos. Cuando se venden 65 estéreos, la utilidad es de \$4056. Determina la utilidad cuando se venden 80 estéreos.

57. Antibiótico La dosis recomendada, d, de un medicamento antibiótico vancomicina, es directamente proporcional al peso de la persona. Si a Phuong Kim, que pesa 132 libras, se le administran 2376 miligramos, determina la dosis recomendada para Nathan Brown, que pesa 172 libras.

58. Dólares y pesos La conversión de dólares estadounidenses a pesos americanos es una variación directa. Entre más dólares se conviertan, más pesos se reciben. La semana pasada, Carlos Manuel convirtió 275 dólares en 3507 pesos. Hoy, su tía le dio 400 dólares. Si el tipo de cambio sigue siendo el mismo, cuando él convierta los 400 dólares, ¿cuántos pesos recibirá (redondea la cantidad a pesos)?


© Natalie Speliers Ufermann/Shutterstock

59. Ley de Hooke La ley de Hooke establece que la longitud de un resorte que se estira una cierta distancia, S, varía directamente con respecto de la fuerza (o peso), F, que se le aplica. Si un resorte se estira 1.4 pulgadas cuando se aplica un peso de 20 libras, ¿cuánto se estirará cuando se aplique un peso de 15 libras?

60. Distancia Cuando un automóvil viaja a una velocidad constante, la distancia recorrida, d, es directamente proporcional al tiempo, t. Si un automóvil recorre 150 millas en 2.5 horas, ¿qué tan lejos viajará el mismo automóvil en 4 horas?

61. Presión y volumen El volumen de un gas, V, varía inversamente con su presión, P. Si el volumen, V, es de 800 centímetros cúbicos cuando la presión es de 200 milímetros de mercurio (mm Hg), determina el volumen cuando la presión es de 25 mm Hg.

62. Construcción de un muro El tiempo, t, requerido para construir un muro varía inversamente con el número de personas, n, que trabajen en él. Si 5 albañiles necesitan 8 horas para construir un muro, ¿cuánto tardarán 4 albañiles en realizar la misma tarea?

63. Carrera El tiempo, t, que necesita un corredor para cubrir una distancia específica es inversamente proporcional a su velocidad. Si Jann Avery corre un promedio de 6 millas por hora, terminará una carrera en 2.6 horas. ¿Cuánto tiempo necesitará Jackie Donofrio, quien corre a 5 millas por hora, para terminar la misma carrera?

64. Lanzamiento de una pelota Cuando se lanza una pelota en un juego profesional de béisbol, el tiempo, t, que tarda en llegar al *home* (plato) varía inversamente con la velocidad, s, del lanzamiento*. Una pelota lanzada a 90 millas por hora tarda 0.459 segundos en llegar al *home*. ¿Cuánto tardará una pelota lanzada a 75 millas por hora en llegar al *home*?


© Richard Paul Kane/Shutterstock

*Una pelota se va deteniendo poco a poco a lo largo de su camino al home, debido a la resistencia del viento. Para un lanzamiento de 95 mph, la pelota es alrededor de 8 mph más rápida cuando sale de la mano del lanzador que cuando cruza el home.

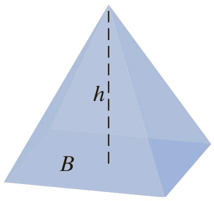
65. Intensidad de la luz La intensidad, I, de la luz emitida por una fuente de energía varía inversamente con el cuadrado de la distancia, d, a la que se encuentra dicha fuente. Si la intensidad de la luz es de 20 pies-candelas a 15 pies, determina la intensidad de la luz a 10 pies.

66. Pelota de tenis Cuando un tenista sirve una pelota, el tiempo que le toma a la pelota golpear el piso de la caja de servicio es inversamente proporcional a la velocidad a la que viaja. Si Andy Roddick sirve a 122 millas por hora, la pelota necesita 0.21 segundos para pegar en el piso después que la golpea con su raqueta. ¿Cuánto tardará la pelota en pegar en el piso si Andy sirve a 80 millas por hora?

67. Distancia para detenerse Supón que la distancia que una camioneta necesita para detenerse varía directamente con respecto del cuadrado de su velocidad. Una camioneta que viaja a 40 millas por horas puede detenerse en una distancia de 60 pies. Si la camioneta está viajando a 56 millas por hora, ¿qué distancia necesita para detenerse?

68. Rocas que caen Se deja caer una roca desde lo alto de un risco. La distancia que recorre al caer, en pies, es directamente proporcional al cuadrado del tiempo en segundos. Si la roca cae 4 pies en $\frac{1}{2}$ segundo, ¿a qué distancia caerá en 3 segundos?

69. Volumen de una pirámide El volumen, V, de una pirámide varía conjuntamente con respecto del área de su base, B, y su altura, h (ver figura). Si el volumen de la pirámide es de 160 metros cúbicos, cuando el área de su base es de 48 metros cuadrados y su altura es de 10 metros, determina el volumen de una pirámide cuando el área de su base es de 42 metros cuadrados y su altura es de 9 metros.



70. Pago de hipoteca El pago mensual de una hipoteca, P, varía conjuntamente con respecto de la tasa de interés, r, y el monto de la hipoteca, m. Si el pago mensual de la hipoteca sobre un monto de \$50,000 a 7% de tasa de interés es \$332.50, determina el pago mensual sobre una hipoteca de \$66,000 a 7%.

71. Alquiler de DVD El alquiler semanal de DVD, R, en una tienda especializada varía directamente respecto de su presupuesto de publicidad, A, e inversamente respecto del precio diario de alquiler, P. Cuando el presupuesto de publicidad es de \$400 y el precio diario del alquiler es de \$2, la tienda alquila 4600 DVD por semana. ¿Cuántos DVD alquilaría por semana si aumentara su presupuesto de publicidad a \$500 y subieran su precio de alquiler a \$2.50?

72. Resistencia eléctrica La resistencia eléctrica de un cable, R, varía directamente respecto de su longitud, L, e inversamente respecto del área de su sección transversal, A. Si la resistencia de un cable es de 0.2 ohms cuando la longitud es de 200 pies y el área de su sección transversal mide 0.05 pulgadas cuadradas, determina la resistencia de un cable cuya longitud es de 5000 pies y el área de su sección transversal mide 0.01 pulgadas cuadradas.

73. El peso de un objeto El peso, w, de un objeto en la atmósfera de la Tierra varía inversamente respecto del cuadrado de la distancia, d, entre el objeto y el centro de la Tierra. Una persona que pesa 140 libras se encuentra aproximadamente a 4000 millas de distancia del centro de la Tierra. Determina el peso (o fuerza de atracción gravitacional) de esta persona si estuviera a una distancia de 100 millas sobre la superficie de la Tierra.

74. Consumo de energía El consumo de energía, en watts, de un aparato electrodoméstico, W, varía conjuntamente con respecto del cuadrado de la corriente, I, y la resistencia, R. Si el consumo de energía es de 3 watts cuando la corriente es de 0.1 amperes y la resistencia es de 100 ohms, determina el consumo de energía cuando la corriente es de 0.4 amperes y la resistencia es de 250 ohms.

75. Llamadas telefónicas El número de llamadas telefónicas entre dos ciudades durante un periodo dado, N, varía directamente respecto al número de habitantes, p_1 y p_2, de las dos ciudades, e inversamente respecto de la distancia, d, entre ellas. Si se realizan 100,000 llamadas entre dos ciudades que se encuentran a una distancia de 300 millas y el número de habitantes de las ciudades es de 60,000 y 200,000, ¿cuántas llamadas se realizan entre dos ciudades con poblaciones de 125,000 y 175,000 habitantes que se encuentran a 450 millas de distancia?

© Elena Elisseeva/Glowimages

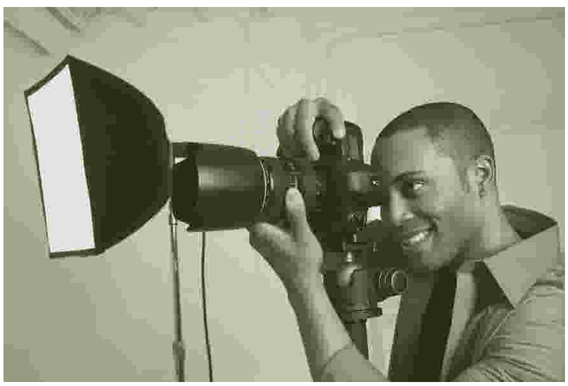
76. Cobro por consumo de agua En una región específica del país, el monto de la factura por consumo de agua de un cliente, W, es directamente proporcional a la temperatura diaria promedio durante el mes, T, el área del jardín, A, y la raíz cuadrada de F, donde F corresponde al tamaño de la familia, e inversamente proporcional al número de pulgadas de lluvia, R.

En un mes la temperatura promedio diaria es de 78 °F y el número de pulgadas de lluvia es de 5.6. Si una familia promedio de cuatro integrantes tiene un jardín de 1000 pies cuadrados y paga \$68 por consumo de agua, calcula cuánto pagará en el mismo mes una familia de seis miembros cuyo jardín mide 1500 pies cuadrados.

77. Intensidad de iluminación En un artículo de la revista *Outdoor and Travel Photography* se establece que: "Si una superficie se ilumina mediante una fuente de luz puntual (un flash), la intensidad de la iluminación producida es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa".

Si quieres fotografiar un objeto que está a 4 pies de distancia del flash, y la iluminación en su objetivo es $\frac{1}{16}$ de la luz del flash, ¿cuál es la intensidad de iluminación sobre un objeto que está a 7 pies de distancia del flash?

© Ron Chappie Stock/Glowimages



78. Fuerza de atracción Una de las leyes de Newton establece que la fuerza de atracción, F, entre dos masas, es directamente proporcional a las masas de los dos objetos, m_1 y m_2, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, d, entre las dos masas.

a) Escribe la fórmula que representa la ley de Newton.

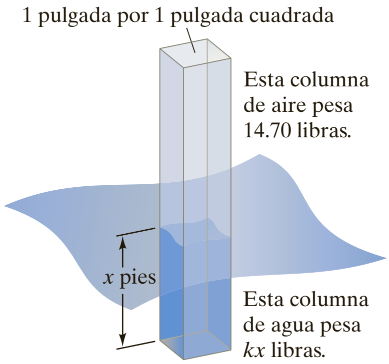
b) ¿Qué le sucede a la fuerza de atracción si una masa se duplica, la otra se triplica y la distancia entre los objetos se divide entre dos?

79. Presión sobre un objeto La presión P, en libras por pulgada cuadrada (psi), que se ejerce sobre un objeto a x pies bajo el nivel del mar es de 14.70 psi más el producto de una constante de proporcionalidad, k, y el número de pies, x, al que el objeto se encuentra por debajo del nivel del mar (ver figura). La cifra de 14.70 representa el peso, en libras, de la columna de aire (a partir del nivel del mar y hasta la parte superior de la atmósfera) que está sobre un área de 1 pulgada por 1 pulgada cuadrada de agua de mar. El producto kx representa el peso, en libras, de una columna de agua de 1 pulgada por 1 pulgada por x pies.

a) Escribe una fórmula para calcular la presión que se ejerce sobre un objeto que se encuentra a x pies por debajo del nivel del mar.

b) Si el barómetro de un submarino que se ubica a 60 pies de profundidad registra 40.5 psi, determina la constante k.

c) Si un submarino está construido para soportar una presión de 160 psi, ¿hasta qué profundidad puede descender?



Ejercicios de repaso acumulados

[2.2] **80.** Despeja h de la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^2 h$.

[3.6] **81.** Sea $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = -5x + 1$. Determina $f(-4) \cdot g(-2)$.

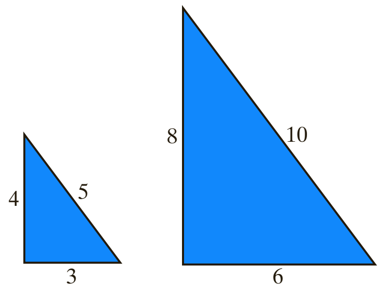
[5.2] **82.** Multiplica $(7x - 3)(-2x^2 - 4x + 5)$.

[5.7] **83.** Factoriza $(x + 1)^2 - (x + 1) - 6$.

Resumen del capítulo 6

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 6.1	
Una **expresión radical** es una expresión de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son polinomios y $q \neq 0$.	$\frac{7}{x}, \quad \frac{x^2 - 5}{x + 1}, \quad \frac{t^2 - t + 1}{3t^2 + 5t - 7}$
Una **función racional** es una función de la forma $y = f(x) = \frac{p}{q}$, donde p y q son polinomios y $q \neq 0$.	$y = \frac{x - 8}{x + 9}, \quad f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 1}{9x^2 - x + 3}$
El **dominio de una función racional** es el conjunto de números reales para los que el denominador no es igual a 0.	El dominio de $f(x) = \frac{x + 9}{x - 2}$ $x\|x \neq 2\}$.
Para simplificar expresiones racionales **1.** Factoriza completamente el numerador y el denominador. **2.** Divide el numerador y el denominador entre los factores comunes.	$\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \frac{\cancel{(x - 2)}(x^2 + 2x + 4)}{(x + 2)\cancel{(x - 2)}} = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$
Para multiplicar expresiones racionales Para multiplicar expresiones racionales, factoriza todos los numeradores y denominadores y luego utiliza la regla: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad b \neq 0, d \neq 0$	$\frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x + 1}{2x - 1} = \frac{\cancel{(x + 1)}\cancel{(2x - 1)}}{\cancel{(x + 1)}(x - 1)} \cdot \frac{x + 1}{\cancel{2x - 1}} = \frac{x + 1}{x - 1}$
Para dividir expresiones racionales $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}, \quad b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$	$\frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} \div \frac{x + 3}{x} = \frac{\cancel{(x + 3)}\cancel{(x + 1)}}{\cancel{x + 1}} \cdot \frac{x}{\cancel{x + 3}} = x$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 6.2	
Para sumar o restar expresiones racionales con un común denominador Suma $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c},\quad c\neq 0$ Resta $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c},\quad c\neq 0$	$\frac{x}{x^2-49}-\frac{7}{x^2-49}=\frac{x-7}{x^2-49}=\frac{\cancel{x-7}}{(x+7)\cancel{(x-7)}}=\frac{1}{x+7}$
Para determinar el mínimo común denominador (MCD) de expresiones racionales **1.** Escribe cada coeficiente no primo (diferente de 1) de monomios que aparezcan en los denominadores como un producto de números primos. **2.** Factoriza completamente cada denominador. **3.** Lista todos los factores diferentes de cada denominador. Cuando aparezca el mismo factor en más de un denominador, escribe el factor con la mayor potencia que aparezca. **4.** El mínimo común denominador es el producto de todos los factores que se encontraron en el paso 3.	El MCD de $\frac{7}{9x^2y}+\frac{17}{3xy^3}$ es $3\cdot 3\cdot x^2\cdot y^3=9x^2y^3$. El MCD de $\frac{1}{x^2-36}-\frac{4x+3}{x^2+13x+42}$ es $(x+6)(x-6)(x+7)$. Observa que $x^2-36=(x+6)(x-6)$ y $x^2+13x+42=(x+6)(x+7)$.
Para sumar o restar expresiones racionales con denominadores diferentes **1.** Determina el MCD. **2.** Reescribe cada fracción como una fracción equivalente con el MCD. **3.** Deja el denominador en forma factorizada, pero multiplica el numerador. **4.** Suma o resta los numeradores conservando el MCD. **5.** Cuando sea posible reducir la fracción factorizando el numerador, hazlo.	Suma $\frac{2a}{x^2y}+\frac{b}{xy^3}$. El MCD es x^2y^3. $\frac{2a}{x^2y}+\frac{b}{xy^3}=\boxed{\frac{y^2}{y^2}}\cdot\frac{2a}{x^2y}+\frac{b}{xy^3}\cdot\boxed{\frac{x}{x}}$ $=\frac{2ay^2}{x^2y^3}+\frac{bx}{x^2y^3}$ $=\frac{2ay^2+bx}{x^2y^3}$
Sección 6.3	
Una **fracción compleja** es aquella que tiene una expresión racional en su numerador o en su denominador o en ambos.	$\frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{x^2}{x+1}},\quad \frac{7-\frac{6}{y}}{\frac{1}{y^2}+\frac{8}{y^3}}$
Para simplificar una fracción compleja mediante la multiplicación por el mínimo común denominador **1.** Determina el MCD de todas las fracciones que aparezcan en la fracción compleja. **2.** Multiplica el numerador y el denominador de la fracción compleja por el MCD de la fracción compleja que determinaste en el paso 1. **3.** Si es posible, simplifica.	Simplifica $\frac{1+\frac{1}{x}}{x}$. El MCD es x. $\frac{1+\frac{1}{x}}{x}=\boxed{\frac{x}{x}}\cdot\frac{1+\frac{1}{x}}{x}=\frac{x(1)+x\left(\frac{1}{x}\right)}{x(x)}=\frac{x+1}{x^2}$
Para simplificar una fracción compleja mediante la simplificación del numerador y el denominador **1.** Cuando sea necesario, suma o resta, para obtener una expresión racional en el numerador. **2.** Cuando sea necesario, suma o resta, para obtener una expresión racional en el denominador. **3.** Multiplica el numerador de la fracción compleja por el recíproco del denominador. **4.** Si es posible, simplifica.	Simplifica $\frac{1+\frac{1}{x}}{x}$. $\frac{1+\frac{1}{x}}{x}=\frac{\frac{x+1}{x}}{x}=\frac{x+1}{x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x^2}$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 6.4	
Para resolver ecuaciones racionales **1.** Determina el MCD de todas las expresiones racionales en la ecuación. **2.** Multiplica *ambos* lados de la ecuación por el MCD. **3.** Elimina todos los paréntesis y reduce los términos semejantes en cada lado de la ecuación. **4.** Resuelve la ecuación mediante las propiedades que se estudiaron en las secciones anteriores. **5.** Comprueba la solución en la ecuación original.	Resuelve $\frac{5}{x} + 1 = \frac{11}{x}$. Multiplica ambos lados por el MCD, x. $\begin{aligned} x\left(\frac{5}{x} + 1\right) &= x\left(\frac{11}{x}\right) \\ x \cdot \frac{5}{x} + x \cdot 1 &= x \cdot \frac{11}{x} \\ 5 + x &= 11 \\ x &= 6 \end{aligned}$ La respuesta se comprueba.
Las **proporciones** son ecuaciones de la forma: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.	$\frac{2}{7} = \frac{9}{x}$ es una proporción.
Figuras semejantes son figuras cuyos ángulos correspondientes son iguales y cuyos lados correspondientes son proporcionales.	 son figuras semejantes.
Sección 6.5	
Aplicaciones **Problemas de trabajo:** Un problema de trabajo es aquel en donde dos o más máquinas o personas trabajan juntas para completar una tarea.	Carlos y Ali plantan flores en un jardín. Carlos puede plantar una maceta de flores en 30 minutos. Ali puede plantar la misma maceta en 20 minutos. ¿Cuánto tardarán en plantar la maceta de flores si trabajan juntos?
Problemas numéricos: Un problema numérico es un problema en donde un número está relacionado a otro número.	Cuando el recíproco de un número se resta de 5, el resultado es el recíproco del doble del número. Determina el número.
Problemas de movimiento: Un problema de movimiento es un problema que involucra tiempo, velocidad y distancia.	Tom inicia un viaje en canoa a mediodía. Él puede remar a 5 millas por hora en aguas tranquilas. ¿A qué distancia puede ir río abajo, si la corriente es de 2 millas por hora y va y regresa en 4 horas?
Sección 6.6	
Variación directa Si una variable y varía directamente con respecto de una variable x, entonces $y = kx$, en donde k es la constante de proporcionalidad.	$y = 3x$
Variación inversa Si una variable y varía inversamente con respecto a una variable x, entonces $y = \frac{k}{x} \quad (\text{o } xy = k)$ donde k es la constante de proporcionalidad.	$y = \frac{3}{x}$
Variación conjunta Si y varía conjuntamente con respecto de x y z, entonces $y = kxz$ donde k es la constante de proporcionalidad.	$y = 3xz$

Ejercicios de repaso del capítulo 6

[6.1] *Determina el valor o valores de la variable que debe excluirse en cada expresión racional.*

1. $\dfrac{2}{x-4}$ **2.** $\dfrac{x}{x+1}$ **3.** $\dfrac{-2x}{x^2+9}$

Determina el dominio de cada función racional.

4. $y = \dfrac{7}{(x-1)^2}$ **5.** $f(x) = \dfrac{x+6}{x^2}$ **6.** $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2+4x-12}$

Simplifica cada expresión.

7. $\dfrac{2x+6}{5x+15}$ **8.** $\dfrac{x^2-36}{x+6}$ **9.** $\dfrac{7-5x}{5x-7}$ **10.** $\dfrac{x^2+5x-6}{x^2+4x-12}$

11. $\dfrac{2x^2-6x+5x-15}{2x^2+7x+5}$ **12.** $\dfrac{a^3-8b^3}{a^2-4b^2}$ **13.** $\dfrac{27x^3+y^3}{9x^2-y^2}$ **14.** $\dfrac{2x^2+x-6}{x^3+8}$

[6.2] *Determina el mínimo común denominador de cada expresión.*

15. $\dfrac{x^2}{x-4} - \dfrac{3}{x}$ **16.** $\dfrac{3x+1}{x+2y} + \dfrac{7x-2y}{x^2-4y^2}$

17. $\dfrac{19x-5}{x^2+2x-35} + \dfrac{3x-2}{x^2-3x-10}$ **18.** $\dfrac{3}{(x+2)^2} - \dfrac{6(x+3)}{x^2-4} - \dfrac{4x}{x+3}$

[6.1, 6.2] *Realiza cada operación indicada.*

19. $\dfrac{10xy^2}{7z}\cdot\dfrac{14z^2}{15y}$ **20.** $\dfrac{x}{x-9}\cdot\dfrac{9-x}{6}$ **21.** $\dfrac{18x^2y^4}{xz^5} \div \dfrac{2x^2y^4}{x^4z^{10}}$

22. $\dfrac{11}{3x} + \dfrac{2}{x^2}$ **23.** $\dfrac{4x-4y}{x^2y}\cdot\dfrac{y^3}{16x}$ **24.** $\dfrac{4x^2-11x+4}{x-3} - \dfrac{x^2-4x+10}{x-3}$

25. $\dfrac{6}{xy} + \dfrac{3y}{5x^2}$ **26.** $\dfrac{x+2}{x-1}\cdot\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+6x+8}$ **27.** $\dfrac{3x^2-7x+4}{3x^2-14x-5} - \dfrac{x^2+2x+9}{3x^2-14x-5}$

28. $5 + \dfrac{a+2}{a+1}$ **29.** $7 - \dfrac{b+1}{b-1}$ **30.** $\dfrac{a^2-b^2}{a+b}\cdot\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^3+a^2b}$

31. $\dfrac{1}{a^2+8a+15} \div \dfrac{3}{a+5}$ **32.** $\dfrac{a+c}{c} - \dfrac{a-c}{a}$ **33.** $\dfrac{4x^2+8x-5}{2x+5}\cdot\dfrac{x+1}{4x^2-4x+1}$

34. $(a+b) \div \dfrac{a^2-2ab-3b^2}{a-3b}$ **35.** $\dfrac{x^2-3xy-10y^2}{6x} \div \dfrac{x+2y}{24x^2}$ **36.** $\dfrac{a+1}{2a} + \dfrac{3}{4a+8}$

37. $\dfrac{x-2}{x-5} - \dfrac{3}{x+5}$ **38.** $\dfrac{x+4}{x^2-4} - \dfrac{3}{x-2}$ **39.** $\dfrac{x+1}{x-3}\cdot\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+7x+6}$

40. $\dfrac{2}{x^2-x-6} - \dfrac{3}{x^2-4}$ **41.** $\dfrac{4x^2-16y^2}{9} \div \dfrac{(x+2y)^2}{12}$ **42.** $\dfrac{a^2+5a+6}{a^2+4a+4}\cdot\dfrac{3a+6}{a^4+3a^3}$

43. $\dfrac{x+5}{x^2-15x+50} - \dfrac{x-2}{x^2-25}$ **44.** $\dfrac{x+2}{x^2-x-6} + \dfrac{x-3}{x^2-8x+15}$ **45.** $\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{6}{x^2-9}$

46. $\dfrac{a-4}{a-5} - \dfrac{3}{a+5} - \dfrac{10}{a^2-25}$ **47.** $\dfrac{x^3+64}{2x^2-32} \div \dfrac{x^2-4x+16}{2x+12}$ **48.** $\dfrac{a^2-b^4}{a^2+2ab^2+b^4} \div \dfrac{3a-3b^2}{a^2+3ab^2+2b^4}$

49. $\left(\dfrac{x^2-x-56}{x^2+14x+49}\cdot\dfrac{x^2+4x-21}{x^2-9x+8}\right) + \dfrac{3}{x^2+8x-9}$ **50.** $\left(\dfrac{x^2-8x+16}{2x^2-x-6}\cdot\dfrac{2x^2-7x-15}{x^2-2x-24}\right) \div \dfrac{x^2-9x+20}{x^2+2x-8}$

51. Si $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ y $g(x) = \dfrac{x}{x+4}$, determina

a) el dominio de $f(x)$.
b) el dominio de $g(x)$.
c) $(f+g)(x)$.
d) El dominio de $(f+g)(x)$.

52. Si $f(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$ y $g(x) = \dfrac{x+4}{x-3}$, determina,

a) el dominio de $f(x)$.
b) el dominio de $g(x)$.
c) $(f+g)(x)$.
d) El dominio de $(f+g)(x)$.

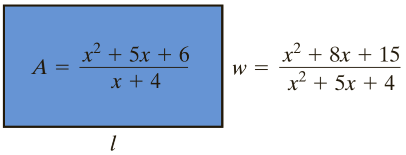
[6.3] *Simplifica cada fracción compleja.*

53. $\dfrac{\dfrac{9a^2b}{2c}}{\dfrac{6ab^4}{4c^3}}$ **54.** $\dfrac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y}}{\dfrac{x}{y}+y^2}$ **55.** $\dfrac{\dfrac{3}{y}-\dfrac{1}{y^2}}{7+\dfrac{1}{y^2}}$

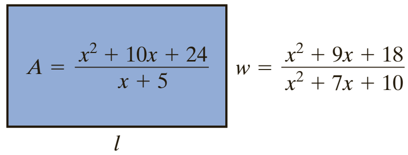
56. $\dfrac{a^{-1}+5}{a^{-1}+\dfrac{1}{a}}$ **57.** $\dfrac{x^{-2}+\dfrac{3}{x}}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}}$ **58.** $\dfrac{\dfrac{1}{x^2-3x-18}+\dfrac{2}{x^2-2x-15}}{\dfrac{3}{x^2-11x+30}+\dfrac{1}{x^2-9x+20}}$

Área *En los ejercicios 59 y 60 se indica el área y el ancho de cada rectángulo. Determina la longitud, l, dividiendo el área A, entre el ancho, w.*

59.



60.



[6.4] *En los ejercicios 61-70 resuelve cada ecuación.*

61. $\dfrac{3}{4}=\dfrac{12}{x}$ **62.** $\dfrac{x}{1.5}=\dfrac{x-4}{4.5}$ **63.** $\dfrac{3x+4}{5}=\dfrac{2x-8}{3}$ **64.** $\dfrac{x}{4.8}+\dfrac{x}{2}=1.7$

65. $\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{y}$ **66.** $\dfrac{2}{x+4}-\dfrac{3}{x-4}=\dfrac{-11}{x^2-16}$ **67.** $\dfrac{x}{x^2-9}+\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{4}{x-3}$

68. $\dfrac{7}{x^2-5}+\dfrac{3}{x+5}=\dfrac{4}{x-5}$ **69.** $\dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{x+1}{x+3}=\dfrac{2x^2+x+1}{x^2+x-6}$ **70.** $\dfrac{x+1}{x+3}+\dfrac{x+2}{x-4}=\dfrac{2x^2-18}{x^2-x-12}$

71. Despeja b de $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$.

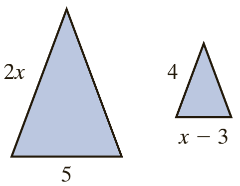
72. Despeja $z=\dfrac{x-\bar{x}}{s}$ de $\bar{x}$.

73. Resistores Tres resistores de 100, 200 y 600 ohms se conectan en paralelo. Determina la resistencia total del circuito. Utiliza la fórmula $\dfrac{1}{R_T}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}$.

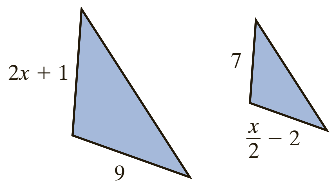
74. Longitud focal ¿Cuál es la longitud focal, f, de un espejo curvo, si la distancia respecto del objeto, p, es de 6 centímetros y la distancia respecto de la imagen, q, es de 3 centímetros? Utiliza la fórmula $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{f}$.

Triángulos *En los ejercicios 75 y 76, cada par de triángulos es semejante. Determina las longitudes de los lados desconocidos.*

75.



76.



[6.5] *En los ejercicios 77-82, responde la pregunta. Cuando sea necesario, redondea las respuestas a la centésima más cercana.*

77. Recolección de frijol Sanford y Jerome trabajan en una granja cerca de la ciudad de Oklahoma, Oklahoma. Sanford puede recolectar una canasta de frijol en 40 minutos, mientras que Jerome puede hacer la misma tarea en 30 minutos. Si trabajan juntos, ¿en cuánto tiempo recolectarán una canasta de frijol?

78. Jardín Sam y Fran quieren plantar un jardín de flores. Juntos pueden hacerlo en 4.2 horas. Si Sam puede plantar solo el mismo jardín en 6 horas, ¿cuánto tiempo le tomará a Fran hacerlo sola?

79. Fracciones ¿Qué número sumado al numerador y restado al denominador de la fracción $\dfrac{1}{11}$ da por resultado $\dfrac{1}{2}$?

80. Fracciones Cuando el recíproco del doble de un número se resta de 1, el resultado es el recíproco del triple del número. Determina el número.

81. Recorrido en bote El bote de motor de Paul Webster puede viajar a 15 millas por hora en aguas tranquilas. Viajando con la corriente del río, el bote puede viajar 20 millas en el mismo tiempo que necesita para recorrer 10 millas en contra de la corriente. Determina la velocidad de la corriente.

© Jupiter Unlimited

82. Vuelo en un aeroplano Un pequeño aeroplano y un automóvil inician su recorrido hacia la misma ciudad, que está a 450 millas de distancia, desde la misma posición y al mismo tiempo. La velocidad del aeroplano es el triple de la velocidad del automóvil, así que el aeroplano llega a la ciudad 6 horas antes que el automóvil. Determina la velocidad del automóvil y del aeroplano.

[6.6] *Determina cada cantidad indicada.*

83. x es directamente proporcional al cuadrado de y. Si $x = 45$ cuando $y = 3$, determina x cuando $y = 2$.

84. W es directamente proporcional al cuadrado de L e inversamente proporcional a A. Si $W = 4$ cuando $L = 2$ y $A = 10$, determina W cuando $L = 5$ y $A = 20$.

85. z es conjuntamente proporcional a x y y e inversamente proporcional al cuadrado de r. Si $z = 12$ cuando $x = 20$ y $y = 8$, y $r = 8$, determina z cuando $x = 10$, $y = 80$ y $r = 3$.

86. Cargo extra En sus facturas de electricidad, la compañía eléctrica Potomac, coloca un espacio para el cargo extra, s; dicho cargo es directamente proporcional a la cantidad de energía usada, e. Si el cargo extra es de \$7.20 cuando se consumen 3600 kilowatts por hora, ¿cuál es el cargo extra cuando se consumen 4200 kilowatts por hora?

87. Caída libre La distancia, d, que recorre un objeto en caída libre es directamente proporcional al cuadrado del tiempo, t. Si una persona cae 16 pies en 1 segundo, ¿qué distancia caerá en 10 segundos? No tomes en cuenta la resistencia del viento.

88. Área El área, A, de un círculo varía directamente con respecto del cuadrado de su radio, r. Si el área es 78.5 cuando el radio es 5, determina el área cuando el radio es 8.

89. Fusión de un cubo de hielo El tiempo, t, para que un cubo de hielo se derrita es inversamente proporcional a la temperatura del agua en que se sumerge. Si un cubo de hielo tarda 1.7 minutos en derretirse en agua con una temperatura de 70 °F, ¿cuánto tardará en derretirse un cubo de hielo del mismo tamaño en agua a 50 °F?

© Mark Aplet\ Shutterstock

Prueba de práctica del capítulo 6

Los videos de la prueba de práctica del capítulo proporcionan soluciones totalmente resueltas para cualquiera de los ejercicios que quieras repasar. Los videos de la prueba de práctica del capítulo están disponibles vía MyMathLab, o en YouTube (busca "Angel Intermediate Algebra" y da click en "Channels")

1. Determina los valores que están excluidos en la expresión $\dfrac{x + 4}{x^2 + 3x - 28}$.

2. Determina el dominio de la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 7}{2x^2 + 7x - 4}$.

Simplifica cada expresión.

3. $\dfrac{10x^7y^2 + 16x^2y + 22x^3y^3}{2x^2y}$

4. $\dfrac{x^2 - 4xy - 12y^2}{x^2 + 3xy + 2y^2}$

En los ejercicios 5-14, realiza la operación indicada.

5. $\dfrac{3xy^4}{6x^2y^3} \cdot \dfrac{2x^2y^4}{x^5y^7}$

6. $\dfrac{x + 1}{x^2 - 7x - 8} \cdot \dfrac{x^2 - x - 56}{x^2 + 9x + 14}$

7. $\dfrac{7a + 14b}{a^2 - 4b^2} \div \dfrac{a^3 + a^2b}{a^2 - 2ab}$

8. $\dfrac{x^3 + y^3}{x + y} \div \dfrac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2}$

9. $\dfrac{5}{x + 1} + \dfrac{2}{x^2}$

10. $\dfrac{x - 1}{x^2 - 9} - \dfrac{x}{x^2 - 2x - 3}$

11. $\dfrac{m}{12m^2 + 4mn - 5n^2} + \dfrac{2m}{12m^2 + 28mn + 15n^2}$

12. $\dfrac{x + 1}{4x^2 - 4x + 1} + \dfrac{3}{2x^2 + 5x - 3}$

13. $\dfrac{x^3 - 8}{x^2 + 5x - 14} \div \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + 10x + 21}$

14. Si $f(x) = \dfrac{x - 3}{x + 5}$ y $g(x) = \dfrac{x}{2x + 3}$, determina

a) $(f + g)(x)$

b) el dominio de $(f + g)(x)$.

15. Área Si el área de un rectángulo es $\dfrac{x^2 + 11x + 30}{x + 2}$ y su longitud es $\dfrac{x^2 + 9x + 18}{x + 3}$, determina su ancho.

En los ejercicios 16-18, simplifica.

16. $\dfrac{\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{y}}$

17. $\dfrac{\dfrac{a^2 - b^2}{ab}}{\dfrac{a + b}{b^2}}$

18. $\dfrac{\dfrac{7}{x} - \dfrac{6}{x^2}}{4 - \dfrac{1}{x}}$

Resuelve cada ecuación.

19. $\dfrac{x}{5} - \dfrac{x}{4} = -1$

20. $\dfrac{x}{x-8} + \dfrac{6}{x-2} = \dfrac{x^2}{x^2 - 10x + 16}$

21. Despeja C de $A = \dfrac{2b}{C - d}$.

22. Consumo de energía El consumo de energía, en watts, de un aparato electrodoméstico, W, varía conjuntamente con respecto del cuadrado de la corriente, I, y la resistencia, R. Si el consumo es de 10 watts cuando la corriente es de 1 ampere y la resistencia es de 1000 ohms, determina el consumo de energía cuando la corriente es de 0.5 amperes y la resistencia es de 300 ohms.

23. R varía directamente con respecto a P e inversamente al cuadrado de T. Si $R = 30$ cuando $P = 40$ y $T = 2$, determina R cuando $P = 50$ y $T = 5$.

24. Limpia ventanas Paul Weston puede lavar las ventanas de una casa en 10 horas. Su amiga, Nancy Delaney, puede lavar las mismas ventanas en 8 horas. ¿Cuánto tiempo les tomará lavar las ventanas de esta casa si trabajan juntos?

25. Patinadoras Cameron Barnette y Ashley Elliot comenzaron a patinar al mismo tiempo al inicio de un camino. Cameron patina a una velocidad promedio de 8 millas por hora, mientras que Ashley promedia 5 millas por hora. Si a Ashley le toma $\frac{1}{2}$ de hora más que a Cameron llegar al final del camino, ¿cuál es la longitud del camino?

© Allen R. Angel

Prueba de repaso acumulada

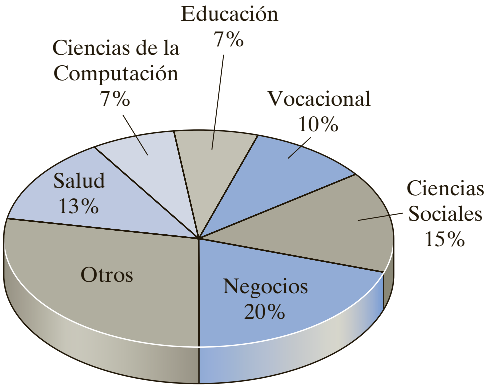
Realiza la siguiente prueba y verifica tus respuestas con aquellas que se dan al final del libro. Repasa cualquier pregunta que hayas contestado incorrectamente. La sección en donde se cubrió el tema se indica después de cada respuesta.

1. Ilustra el conjunto $\left\{x \,\middle|\, -\dfrac{5}{3} < x \leq \dfrac{19}{4}\right\}$ en la recta numérica.

2. Evalúa $-3x^3 - 2x^2y + \frac{1}{2}xy^2$ cuando $x = 2$ y $y = \frac{1}{2}$.

3. Resuelve la ecuación $2(x + 1) = \frac{1}{2}(x - 5)$.

4. Aprendizaje a distancia El Internet ha hecho posible que las escuelas ofrezcan títulos a través del aprendizaje a distancia en línea. El siguiente diagrama muestra los títulos que se otorgan más a menudo a través de los diferentes programas en línea ofrecidos en el 2003.



Fuente: El foro CEO (por sus siglas en inglés) y Dato de Investigación de Mercado.

a) ¿Cuál es el porcentaje que le corresponde a la categoría de "Otros"?

b) Si aproximadamente se otorgaron 220,000 títulos a través de programas en línea, ¿aproximadamente cuántos fueron otorgados a la categoría de negocios?

5. Evalúa $4x^2 - 3y - 8$ cuando $x = 4$ y $y = -2$.

6. Simplifica $\left(\dfrac{6x^5y^6}{12x^4y^7}\right)^3$.

7. Despeja m de $F = \dfrac{mv^2}{r}$.

8. Interés simple Carmalla Banjanie invirtió \$3000 en un certificado de depósito por un año. Cuando canjeó el certificado, recibió \$3180. ¿Cuál fue la tasa de interés simple?

9. Reunión de día de campo Dawn y Paula dejaron sus casas a las 8 a.m. esperando reunirse en un punto intermedio para ir juntos de día de campo. Dawn viaja a 60 millas por hora y Paula viaja a 50 millas por hora, si viven separados una distancia de 330 millas, ¿cuánto tiempo les tomará reunirse para irse de día de campo?

10. Resuelve $\left|\dfrac{3x + 5}{3}\right| - 3 = 6$.

11. Grafica $y = x^2 - 2$.

12. Sea $f(x) = \sqrt{2x + 7}$. Evalúa $f(9)$.

13. Determina la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(2, -4)$ y $(-5, -3)$.

14. Determina la ecuación de una recta que pasa por $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ que es paralelo a la gráfica de la ecuación $2x + 3y - 9 = 0$. Escribe la ecuación en la forma general.

15. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$10x - y = 2$$
$$4x + 3y = 11$$

16. Multiplica $(3x^2 - 5y)(3x^2 + 5y)$.

17. Factoriza $3x^2 - 30x + 75$.

18. Grafica $y = |x| + 2$.

19. Suma $\dfrac{7}{3x^2 + x - 4} + \dfrac{9x + 2}{3x^2 - 2x - 8}$.

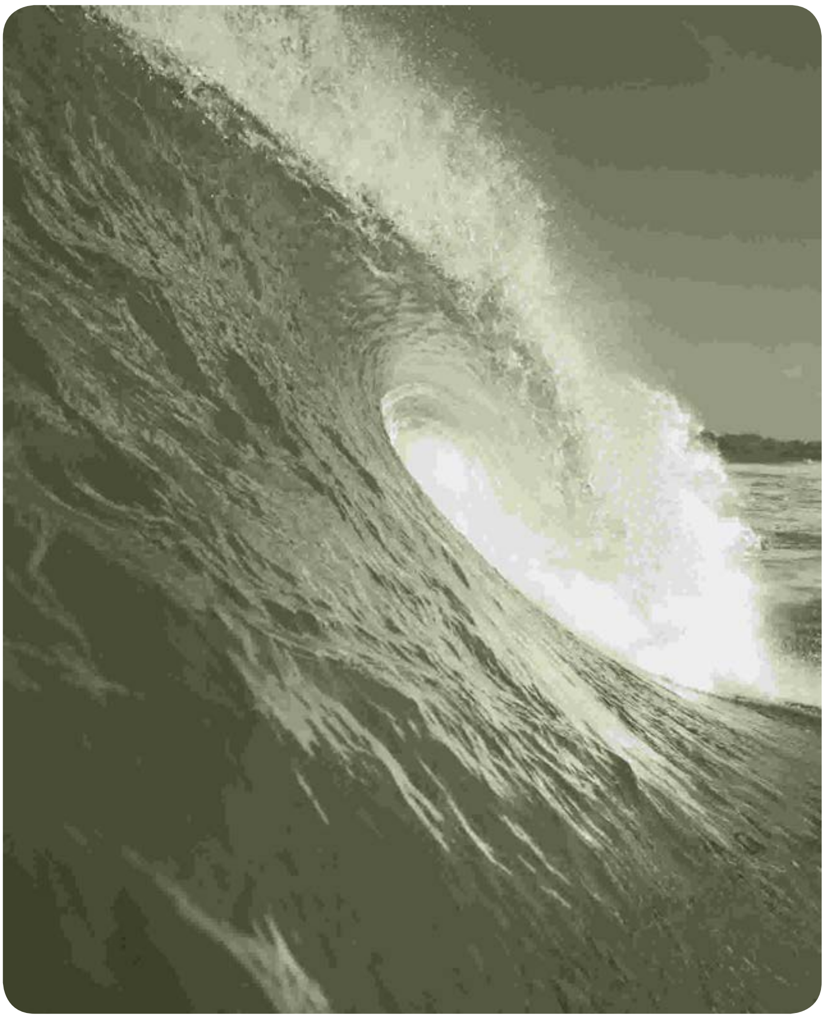
20. Resuelve $\dfrac{3y - 2}{y + 1} = 4 - \dfrac{y + 2}{y - 1}$.

7 Raíces, radicales y números complejos

Objetivos de este capítulo

En este capítulo explicaremos cómo sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones con radicales. También graficaremos funciones con radicales, resolveremos ecuaciones radicales y daremos una introducción a los números imaginarios y números complejos.

Asegúrate de entender los tres requisitos para simplificar expresiones con radicales que se analizan en la sección 7.5.



© Epic Stock /Shutterstock

Muchas fórmulas científicas, incluyendo gran parte de aquellas que tienen que ver con situaciones de la vida real, contienen expresiones con radicales. En el ejercicio 106 de la página 432 veremos cómo se utiliza un radical para determinar la relación entre la velocidad del viento y la altura de las olas en ciertas áreas del océano.

7.1 Raíces y radicales

1. Determinar raíces cuadradas.
2. Determinar raíces cúbicas.
3. Entender raíces pares e impares.
4. Evaluar radicales mediante el valor absoluto.

En este capítulo analizamos con más detalle el concepto de radicales que se presentó en el capítulo 1. Un ejemplo de una **expresión radical** es $\sqrt[3]{x}$

Signo radical

Índice $\longrightarrow \sqrt[3]{x}$

Radicando

El símbolo $\sqrt{\ }$ se denomina **signo radical** y está presente en todas las expresiones radicales. La expresión que está dentro del signo radical recibe el nombre de **radicando**. El número que está a la izquierda del signo radical se llama **índice** y nos da la "raíz" de la expresión.

Comprendiendo el álgebra

Cuando decimos "raíz cuadrada" nos referimos a una expresión radical con un índice de 2. Por lo general, no escribimos el índice 2. Por lo tanto, "*la raíz cuadrada de x*" significa

$$\sqrt[2]{x}$$

pero escribimos

$$\sqrt{x}$$

1 Determinar raíces cuadradas

Las **raíces cuadradas** tienen un índice de 2. Por lo general, el índice de las raíces cuadradas no se escribe. Por lo tanto,

$$\sqrt{x} \text{ significa } \sqrt[2]{x}$$

Todos los números reales positivos tienen dos raíces cuadradas: una positiva o principal y una negativa.

Raíces cuadradas

Para cualquier número real positivo a,

- La **raíz principal** o **raíz cuadrada positiva** de a, escrita como $\sqrt{a}$, es el número *positivo* b, tal que $b^2 = a$.
- La **raíz cuadrada negativa** de a, escrita como $-\sqrt{a}$, es la *opuesta de la raíz cuadrada principal de* a.

Por ejemplo, el número real 25 tiene dos raíces cuadradas:

- La raíz cuadrada principal o positiva de 25, escrita como $\sqrt{25}$, es 5, ya que 5 es un número positivo tal que $5^2 = 25$.
- La raíz cuadrada negativa de 25, escrita como $-\sqrt{25}$, es -5, ya que es la opuesta de la raíz cuadrada principal, 5. Observa que $(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$.

En este libro, siempre que se haga referencia al concepto de raíz cuadrada nos estamos refiriendo a la raíz cuadrada principal o positiva. Por lo tanto, si se te pide determinar la raíz cuadrada de 36, se te está pidiendo que determines la raíz cuadrada positiva de 36, $\sqrt{36}$, y tu respuesta deberá ser 6.

Cuando evaluamos raíces cuadradas usando nuestra calculadora, si obtenemos un número decimal, generalmente podemos ver si el número decimal es finito o si sus dígitos se repiten en series. En el capítulo 1 aprendimos que un número racional puede escribirse como un número decimal finito o cuyos dígitos se repiten en series. Si un número decimal no es finito y sus dígitos no se repiten en series, entonces es un número irracional. La siguiente tabla muestra algunos ejemplos.

Radical	Resultado de la calculadora	Finito, se repite o ninguno	Racional o irracional
$\sqrt{49}$	7	Finito	Racional
$\sqrt{0.01}$	.1	Finito	Racional
$\sqrt{\frac{25}{4}}$	2.5	Finito	Racional
$\sqrt{\frac{4}{9}}$	.6666666666	Se repite	Racional
$\sqrt{2}$	1.414213562	Ninguno	Irracional
$\sqrt{2.5}$	1.58113883	Ninguno	Irracional
$\sqrt{\frac{1}{2}}$	.7071067812	Ninguno	Irracional

Ahora considera la expresión radical $\sqrt{-25}$. Como el cuadrado de cualquier número real siempre será mayor o igual a 0, no existe número real tal que, elevado al cuadrado, sea igual a -25. Por esta razón, $\sqrt{-25}$ *no es un número real*. Ya que ningún número real elevado al cuadrado puede dar por resultado un número negativo, *la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real*. Si en una calculadora evalúas $\sqrt{-25}$ obtendrás un mensaje de error. Analizaremos las expresiones como $\sqrt{-25}$ más adelante en este capítulo.

Consejo útil

No confundas $-\sqrt{36}$ con $\sqrt{-36}$, ya que $\sqrt{36} = 6$, $-\sqrt{36} = -6$. Sin embargo, $\sqrt{-36}$ no es un número real y, tal como se mencionó antes, la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real.

$$\sqrt{36} = 6$$
$$-\sqrt{36} = -6$$
$$\sqrt{-36} \text{ no es un número real.}$$

La función raíz cuadrada Cuando representamos gráficamente funciones raíz cuadrada, es decir, funciones con la forma $f(x) = \sqrt{x}$, debemos recordar siempre que el radicando, x, no puede ser negativo. Por lo tanto, el dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es $\{x|x \geq 0\}$, o $[0, \infty)$ en notación de intervalo. Para graficar $f(x) = \sqrt{x}$, podemos seleccionar algunos valores convenientes de x y determinar los valores correspondientes de $f(x)$ o y, para luego trazar los puntos determinados por los pares ordenados, como se muestra en la **Figura 7.1**.

x	y
0	0
1	1
4	2
6	≈2.4
9	3

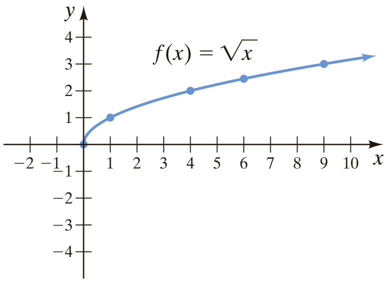


FIGURA 7.1

Como el valor de $f(x)$ nunca puede ser negativo, el rango de $f(x) = \sqrt{x}$ es $\{y|y \geq 0\}$, o $[0, \infty)$ en notación de intervalo.

EJEMPLO 1 Determina el o los valores que se indican en cada función.

a) $f(x) = \sqrt{11x - 2}$, $f(6)$ **b)** $g(r) = -\sqrt{-3r + 1}$, $g(-5)$ y $g(7)$

Solución

a) $f(6) = \sqrt{11(6) - 2}$ Sustituye x por 6.
$= \sqrt{64}$
$= 8$

b) $g(-5) = -\sqrt{-3(-5) + 1}$ Sustituye r por -5.
$= -\sqrt{16}$
$= -4$

$g(7) = -\sqrt{-3(7) + 1}$ Sustituye r por 7.
$= -\sqrt{-20}$ No es un número real.

Por lo tanto, $g(7)$ no es número real.

Resuelve ahora el ejercicio 77

Comprendiendo el álgebra

Cuando decimos "raíz cúbica" nos referimos a una expresión radical con un índice de 3. Así, "*raíz cúbica de x*" o "*raíz tercera de x*" significa:

$$\sqrt[3]{x}$$

Ejemplos de expresiones radicales con un índice mayor que 3 incluyen:

"*raíz cuarta de x*", $\sqrt[4]{x}$,

"*raíz quinta de x*", $\sqrt[5]{x}$,

Y así sucesivamente.

2 Determinar raíces cúbicas

El índice de una raíz cúbica es 3. En la sección 1.4 se habló de las raíces cúbicas y se explicó cómo determinarlas con ayuda de una calculadora. Si lo consideras conveniente, revisa ese material ahora.

Raíz cúbica

La **raíz cúbica** de un número a, escrita como $\sqrt[3]{a}$, es el número b, tal que $b^3 = a$.

Ejemplos

$\sqrt[3]{8} = 2$ ya que $2^3 = 8$

$\sqrt[3]{-27} = -3$ ya que $(-3)^3 = -27$

Para cada número real, solo existe una raíz cúbica. La raíz cúbica de un número positivo es positiva, y la raíz cúbica de un número negativo es negativa.

EJEMPLO 2 Determina el o los valores que se indican en cada función.

a) $f(x) = \sqrt[3]{10x + 34}, f(3)$ **b)** $g(r) = \sqrt[3]{12r - 20}, g(-4)$ y $g(1)$

Solución

a) $f(3) = \sqrt[3]{10(3) + 34}$ Sustituye x por 3.

$= \sqrt[3]{64} = 4$

b) $g(-4) = \sqrt[3]{12(-4) - 20}$ Sustituye r por -4.

$= \sqrt[3]{-68}$

≈ -4.081655102 Resultado de una calculadora

$g(1) = \sqrt[3]{12(1) - 20}$ Sustituir r por 1.

$= \sqrt[3]{-8}$

$= -2$

Resuelve ahora el ejercicio 83

La función raíz cúbica En la **Figura 7.2** se muestra la gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$. Para obtener la gráfica sustituimos los valores para x y determinamos los valores correspondientes de $f(x)$ o y.

x	y
-8	-2
-1	-1
0	0
1	1
8	2

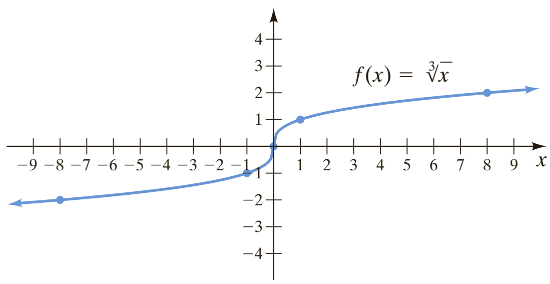


FIGURA 7.2

Observa que el dominio y el rango son todos los números reales, $\mathbb{R}$.

3 Entender raíces pares e impares

Hasta el momento hemos analizado raíces cuadradas y cúbicas, pero las expresiones radicales pueden tener otros índices. Por ejemplo, en la expresión $\sqrt[5]{xy}$, (se lee "raíz quinta de xy"), el índice es 5 y el radicando es xy.

Las expresiones radicales que tienen índices 2, 4, 6,… o cualquier número entero par, reciben el nombre de **raíces pares**. Las raíces cuadradas son raíces pares, ya que su índice es 2. Las expresiones radicales que tienen índices 3, 5, 7,… o cualquier número entero impar, se denominan **raíces impares**.

Raíz par

La raíz *enésima* de a, $\sqrt[n]{a}$, donde n es un *índice par* y a es un número real no negativo, es llamada **raíz par** y es el número real no negativo b, tal que $b^n = a$.

Ejemplos de raíces pares

$$\sqrt{9} = 3 \qquad \text{ya que } 3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$
$$\sqrt[4]{16} = 2 \qquad \text{ya que } 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$
$$\sqrt[6]{729} = 3 \qquad \text{ya que } 3^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$$
$$\sqrt[4]{\frac{1}{256}} = \frac{1}{4} \qquad \text{ya que } \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{256}$$

Cualquier número real elevado a una potencia par da por resultado un número real positivo. Por lo tanto, *la raíz par de un número negativo no es un número real.*

Consejo útil

Existe una diferencia importante entre $-\sqrt[4]{16}$ y $\sqrt[4]{-16}$. El número $-\sqrt[4]{16}$ es el opuesto de $\sqrt[4]{16}$, ya que $\sqrt[4]{16} = 2$, $-\sqrt[4]{16} = -2$. Sin embargo, $\sqrt[4]{-16}$ no es un número real, puesto que ningún número real elevado a la cuarta potencia da por resultado -16.

$$-\sqrt[4]{16} = -(\sqrt[4]{16}) = -2$$
$$\sqrt[4]{-16} \text{ no es un número real.}$$

Comprendiendo el álgebra

- Un radical con un índice par debe tener un radicando no negativo para que dé por resultado un número real.
- Un radical con un índice impar será un número real con cualquier número real como radicando.
- Observa que $\sqrt[n]{0} = 0$, sin importar si n es un índice par o impar.

Raíz impar

La raíz enésima de a, $\sqrt[n]{a}$, donde n es un *índice impar* y a es cualquier número real, es llamada **raíz impar** y es el número real b, tal que $b^n = a$.

Ejemplos de raíces impares

$$\sqrt[3]{8} = 2 \qquad \text{ya que } 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$
$$\sqrt[3]{-8} = -2 \qquad \text{ya que } (-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$$
$$\sqrt[5]{243} = 3 \qquad \text{ya que } 3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$$
$$\sqrt[5]{-243} = -3 \qquad \text{ya que } (-3) = (-3)(-3)(-3)(-3)(-3) = -243$$

La raíz impar de un número positivo es un número positivo, y la raíz impar de un número negativo es un número negativo.

EJEMPLO 3 Indica si la expresión radical es o no un número real. Si la expresión es un número real, determina su valor.

a) $\sqrt[4]{-81}$ **b)** $-\sqrt[4]{81}$ **c)** $\sqrt[5]{-32}$ **d)** $-\sqrt[5]{-32}$

Solución

a) No es un número real. Las raíces pares de números negativos no son números reales.

b) Número real $-\sqrt[4]{81} = -(\sqrt[4]{81}) = -(3) = -3$

c) Número real $\sqrt[5]{-32} = -2$ ya que $(-2)^5 = -32$

d) Número real $-\sqrt[5]{-32} = -(-2) = 2$

Resuelve ahora el ejercicio 21

En la **Tabla 7.1** se resume la información acerca de las raíces pares e impares.

TABLA 7.1

	***n* es par**	***n* es impar**
$a > 0$	$\sqrt[n]{a}$ es un número real positivo.	$\sqrt[n]{a}$ es un número real positivo.
$a < 0$	$\sqrt[n]{a}$ no es un número real.	$\sqrt[n]{a}$ es un número real negativo.
$a = 0$	$\sqrt[n]{0} = 0$	$\sqrt[n]{0} = 0$

4 Evaluar radicales mediante el valor absoluto

Se podría pensar que $\sqrt{a^2} = a$, pero esto no necesariamente es cierto. A continuación evaluamos $\sqrt{a^2}$ para $a = 2$ y $a = -2$. Verás que cuando $a = -2$, $\sqrt{a^2} \neq a$.

$a = 2$: $\sqrt{a^2} = \sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$ Observa que $\sqrt{2^2} = 2$.

$a = -2$: $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$ Observa que $\sqrt{(-2)^2} \neq -2$.

Al analizar estos ejemplos, podemos concluir que $\sqrt{a^2}$ *siempre será un número real positivo* para cualquier número real a diferente de cero. Recuerda que en la sección 1.3 se mencionó que el *valor absoluto* de cualquier número real a, o $|a|$, es también un número positivo para cualquier número diferente de cero. Utilizamos estos hechos para concluir que,

Radicales y valor absoluto

Para cualquier número real a,

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Esto indica que la raíz cuadrada principal de a^2 es el valor absoluto de a.

EJEMPLO 4 Utiliza el valor absoluto para evaluar.

a) $\sqrt{9^2}$ **b)** $\sqrt{0^2}$ **c)** $\sqrt{(-15.7)^2}$

Solución

a) $\sqrt{9^2} = |9| = 9$ **b)** $\sqrt{0^2} = |0| = 0$ **c)** $\sqrt{(-15.7)^2} = |-15.7| = 15.7$

Resuelve ahora el ejercicio 41

Cuando se simplifica una raíz cuadrada, si el radicando contiene una variable y no estamos seguros de que su valor sea positivo, debemos utilizar los signos de valor absoluto para simplificar.

EJEMPLO 5 Simplifica.

a) $\sqrt{(x+8)^2}$ **b)** $\sqrt{16x^2}$ **c)** $\sqrt{25y^6}$ **d)** $\sqrt{a^2 - 6a + 9}$

Solución Cada raíz cuadrada tiene un radicando que contiene una variable. Debido a que no sabemos el valor de la variable, no sabemos si es positiva o negativa. Por lo tanto, debemos usar los signos de valores absolutos cuando simplifiquemos.

a) $\sqrt{(x+8)^2} = |x+8|$

b) Escribe $16x^2$ como $(4x)^2$ y luego simplifica.

$$\sqrt{16x^2} = \sqrt{(4x)^2} = |4x|$$

c) Escribe $25y^6$ como $(5y^3)^2$ y luego simplifica.

$$\sqrt{25y^6} = \sqrt{(5y^3)^2} = |5y^3|$$

d) Observa que $a^2 - 6a + 9$ es un trinomio cuadrado perfecto. Escribe el trinomio como el cuadrado de un binomio; después simplifica.

$$\sqrt{a^2 - 6a + 9} = \sqrt{(a-3)^2} = |a-3|$$

Resuelve ahora el ejercicio 63

Si tienes una raíz cuadrada cuyo radicando contiene una variable y te dan una instrucción como: "Supón que todas las variables representan valores positivos y que el radicando es no negativo", no será necesario que utilices el signo de valor absoluto para simplificar.

EJEMPLO 6 Simplifica. Supón que todas las variables representan valores positivos y que el radicando es no negativo.

a) $\sqrt{64x^2}$ **b)** $\sqrt{81p^4}$ **c)** $\sqrt{49x^6}$ **d)** $\sqrt{4x^2 - 12xy + 9y^2}$

Solución

a) $\sqrt{64x^2} = \sqrt{(8x)^2} = 8x$ — Escribe $64x^2$ como $(8x)^2$.

b) $\sqrt{81p^4} = \sqrt{(9p^2)^2} = 9p^2$ — Escribe $81p^4$ como $(9p^2)^2$.

c) $\sqrt{49x^6} = \sqrt{(7x^3)^2} = 7x^3$ — Escribe $49x^6$ como $(7x^3)^2$.

d) $\sqrt{4x^2 - 12xy + 9y^2} = \sqrt{(2x - 3y)^2}$ — Escribe $4x^2 - 12xy + 9y^2$ como $(2x - 3y)^2$.
$= 2x - 3y$

Resuelve ahora el ejercicio 67

Solo nos preocupamos de agregar signos de valor absoluto cuando se trabaja con raíces cuadradas (y otras raíces pares), pero no cuando el índice es impar.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.1

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

impar	índice	principal	cúbica	racional	radical
cuadrada	radicando	par	irracional	negativa	

1. El símbolo $\sqrt{}$ se denomina como el signo __________.

2. En la expresión radical $\sqrt[3]{5}$ el 3 es el __________.

3. En la expresión radical $\sqrt[3]{5}$ el 5 es el __________.

4. Cuando decimos “raíz __________” nos referimos a una expresión radical con un índice de 2.

5. Cuando decimos “raíz __________” nos referimos a una expresión radical con un índice de 3.

6. La raíz cuadrada __________ de a, escrita como $\sqrt{a}$, es el número positivo b, tal que $b^2 = a$.

7. La raíz cuadrada __________ de a, escrita como $\sqrt{a}$, es la opuesta de la raíz cuadrada principal de a.

8. Un número __________ se puede escribir como un número decimal finito o periódico.

9. La raíz __________ de un número negativo no es un número real.

10. La raíz __________ de un número negativo es un número negativo.

Practica tus habilidades

Evalúa si cada expresión radical es un número real. Utiliza una calculadora para redondear los números irracionales hasta la centésima más cercana. Si la expresión no es un número real, indícalo.

11. a) $\sqrt{9}$ **b)** $-\sqrt{9}$ **c)** $\sqrt{-9}$ **d)** $-\sqrt{-9}$

12. a) $\sqrt{16}$ **b)** $-\sqrt{16}$ **c)** $\sqrt{-16}$ **d)** $-\sqrt{-16}$

13. $\sqrt[3]{-64}$ **14.** $\sqrt[3]{125}$ **15.** $\sqrt[3]{-125}$ **16.** $-\sqrt[3]{-125}$

17. $\sqrt[5]{-1}$ **18.** $-\sqrt[5]{-1}$ **19.** $\sqrt[5]{1}$ **20.** $\sqrt[6]{64}$

21. $\sqrt[6]{-64}$ **22.** $\sqrt[4]{-81}$ **23.** $\sqrt[3]{-343}$ **24.** $\sqrt{121}$

25. $\sqrt{-36}$ **26.** $\sqrt{45.3}$ **27.** $\sqrt{-45.3}$ **28.** $\sqrt{53.9}$

29. $\sqrt{\frac{1}{25}}$ **30.** $\sqrt{-\frac{1}{25}}$ **31.** $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ **32.** $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$

33. $\sqrt{\frac{4}{49}}$ **34.** $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ **35.** $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$ **36.** $\sqrt[4]{-8.9}$

37. $-\sqrt[4]{18.2}$ **38.** $\sqrt[5]{93}$

Utiliza el valor absoluto para evaluar.

39. $\sqrt{7^2}$ **40.** $\sqrt{(-7)^2}$ **41.** $\sqrt{(-3)^2}$ **42.** $\sqrt{3^2}$

43. $\sqrt{119^2}$ **44.** $\sqrt{(-119)^2}$ **45.** $\sqrt{(235.23)^2}$ **46.** $\sqrt{(-201.5)^2}$

47. $\sqrt{(0.06)^2}$ **48.** $\sqrt{(-0.19)^2}$ **49.** $\sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2}$ **50.** $\sqrt{\left(-\frac{101}{319}\right)^2}$

Escribe como un valor absoluto.

51. $\sqrt{(x-8)^2}$ **52.** $\sqrt{(a+10)^2}$ **53.** $\sqrt{(x-3)^2}$ **54.** $\sqrt{(7a-11b)^2}$

55. $\sqrt{(3x^2-1)^2}$ **56.** $\sqrt{(7y^2-3y)^2}$ **57.** $\sqrt{(6a^3-5b^4)^2}$ **58.** $\sqrt{(9y^4-2z^3)^2}$

Utiliza el valor absoluto para simplificar. Tal vez necesites factorizar primero.

59. $\sqrt{x^{10}}$ **60.** $\sqrt{y^{22}}$ **61.** $\sqrt{z^{32}}$ **62.** $\sqrt{x^{200}}$

63. $\sqrt{a^2-8a+16}$ **64.** $\sqrt{x^2-12x+36}$ **65.** $\sqrt{9a^2+12ab+4b^2}$ **66.** $\sqrt{4x^2+20xy+25y^2}$

Simplifica. Supón que todas las variables representan valores positivos y que el radicando es no negativo.

67. $\sqrt{25a^2}$ **68.** $\sqrt{100a^4}$ **69.** $\sqrt{16c^6}$ **70.** $\sqrt{121z^8}$

71. $\sqrt{x^2+4x+4}$ **72.** $\sqrt{9a^2-6a+1}$ **73.** $\sqrt{4x^2+4xy+y^2}$ **74.** $\sqrt{16b^2-40bc+25c^2}$

Determina el valor indicado en cada función. Utiliza tu calculadora para aproximar los números irracionales. Redondéalos a la milésima más cercana.

75. $f(x)=\sqrt{5x-6},\ f(2)$ **76.** $f(c)=\sqrt{7c+1},\ f(5)$ **77.** $q(x)=\sqrt{76-3x},\ q(4)$

78. $q(b)=\sqrt{9b+34},\ q(-1)$ **79.** $t(a)=\sqrt{-15a-9},\ t(-6)$ **80.** $f(a)=\sqrt{14a-36},\ f(4)$

81. $g(x)=\sqrt{64-8x},\ g(-3)$ **82.** $p(x)=\sqrt[3]{8x+9},\ p(2)$ **83.** $h(x)=\sqrt[3]{9x^2+4},\ h(4)$

84. $k(c)=\sqrt[4]{16c-5},\ k(6)$ **85.** $f(x)=\sqrt[3]{-2x^2+x-6},\ f(-3)$ **86.** $t(x)=\sqrt[4]{2x^3-3x^2+6x},\ t(2)$

Resolución de problemas

87. Determina $f(81)$ si $f(x)=x+\sqrt{x}+7$.

88. Determina $g(25)$ si $g(x)=x^2+\sqrt{x}-13$.

89. Determina $t(18)$ si $t(x)=\dfrac{x}{2}+\sqrt{2x}-4$.

90. Determina $m(36)$ si $m(x)=\dfrac{x}{3}+\sqrt{4x}+10$.

91. Determina $k(8)$ si $k(x)=x^2+\sqrt{\dfrac{x}{2}}-21$.

92. Determina $r(45)$ si $r(x)=\dfrac{x}{9}+\sqrt{\dfrac{x}{5}}+13$.

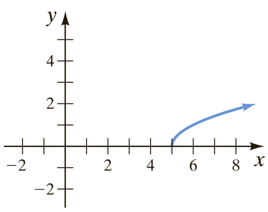
93. Selecciona un valor para x, de modo que $\sqrt{(2x+1)^2}\neq 2x+1$.

94. Selecciona un valor para x, de modo que $\sqrt{(5x-3)^2}\neq 5x-3$.

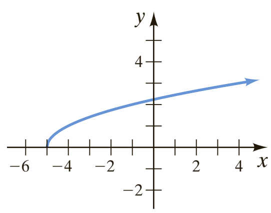
Considera los dominios de las funciones de los ejercicios 95 a 98, y relaciona cada función con su gráfica correspondiente.

95. $f(x)=\sqrt{x}$ **96.** $f(x)=\sqrt{x^2}$ **97.** $f(x)=\sqrt{x-5}$ **98.** $f(x)=\sqrt{x+5}$

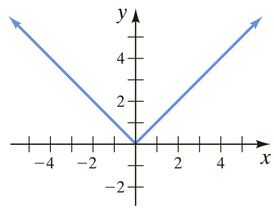
a)



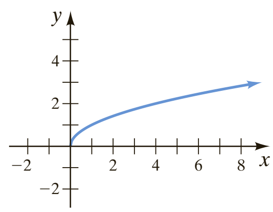
b)



c)



d)



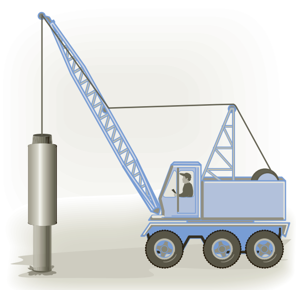
99. Grafica $f(x)=\sqrt{x+1}$. **100.** Grafica $g(x)=-\sqrt{x}$.

101. Grafica $g(x)=\sqrt{x}+1$. **102.** Grafica $f(x)=\sqrt{x}-2$.

103. Proporciona una función radical cuyo dominio sea $\{x|x\geq 8\}$.

104. Proporciona una función radical cuyo dominio sea $\{x|x\leq 5\}$.

105. **Velocidad de un objeto** La velocidad V, que alcanza un objeto, en pies por segundo, después de que ha caído cierta distancia h, en pies, puede determinarse mediante la fórmula $V=\sqrt{64.4h}$. Una grúa de percusión cuenta con un gran mazo que se usa como martillo para enterrar pilotes en una superficie suave, a fin de que sirvan de soporte para edificios u otras estructuras.



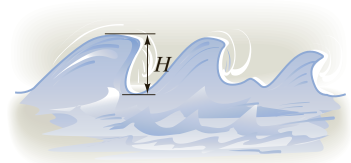
¿A qué velocidad golpeará el mazo al pilote si cae desde una altura de

a) 20 pies?

b) 40 pies?

106. **Oleaje** El instituto de oceanografía Scripps en La Jolla, California, desarrolló una fórmula para relacionar la velocidad del viento u, en nudos, con la altura H, en pies, de las olas que se producen en ciertas áreas del océano. Esta fórmula es

$$u=\sqrt{\frac{H}{0.026}}$$



Si las olas que produce una tormenta alcanzan una altura de 15 pies, ¿cuál es la velocidad del viento?

Ejercicios de conceptos y escritura

107. Explica por qué $\sqrt{-81}$ no es un número real.

108. Una expresión radical con índice impar y un número real como radicando, ¿siempre será un número real? Explica tu respuesta.

109. Una expresión radical con índice par y un número real como radicando, ¿siempre será un número real? Explica tu respuesta.

110. **a)** ¿A qué es igual $\sqrt{a^2}$?
b) ¿A qué es igual $\sqrt{a^2}$ si sabemos que $a \geq 0$?

111. **a)** Evalúa $\sqrt{a^2}$ para $a = 1.3$
b) Evalúa $\sqrt{a^2}$ para $a = -1.3$

112. **a)** Evalúa $\sqrt[4]{16}$
b) Evalúa $-\sqrt[4]{16}$
c) Evalúa $\sqrt[4]{-16}$

113. ¿Para qué valores de x, será $\sqrt{(x-1)^2} = x - 1$? Explica cómo determinaste tu respuesta

114. ¿Para qué valores de x, será $\sqrt{(x+3)^2} = x + 3$? Explica cómo determinaste tu respuesta.

115. ¿Para qué valores de x, será $\sqrt{(2x-6)^2} = 2x - 6$? Explica cómo determinaste tu respuesta.

116. ¿Para qué valores de x, será $\sqrt{(3x-8)^2} = 3x - 8$? Explica cómo determinaste tu respuesta.

117. **a)** ¿Para qué valores de a es $\sqrt{a^2} = |a|$?
b) ¿Para qué valores de a es $\sqrt{a^2} = a$?
c) ¿Para qué valores de a es $\sqrt[3]{a^3} = a$?

118. ¿En qué circunstancias la expresión $\sqrt[n]{x}$ no es número real?

119. Explica por qué la expresión $\sqrt[n]{x^m}$ es número real para cualquier número real x.

120. ¿En qué circunstancias la expresión $\sqrt[n]{x^m}$ no es número real?

121. Determina el dominio de $\dfrac{\sqrt{x+5}}{\sqrt[3]{x+5}}$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

122. Determina el dominio de $\dfrac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[6]{x+1}}$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

123. Si $f(x) = -\sqrt{x}$, ¿puede $f(x)$ ser
a) mayor que 0?
b) igual a 0?
c) menor que 0?
Explica tus respuestas.

124. Si $f(x) = \sqrt{x+5}$, ¿puede $f(x)$ ser
a) mayor que 0?
b) igual a 0?
c) menor que 0?
Explica tus respuestas.

Actividad de grupo

En esta actividad determinarán las condiciones en que ciertas propiedades de los radicales son verdaderas. Estudiarán estas propiedades más adelante en este capítulo. Analicen y respondan en grupo los ejercicios siguientes.

125. La propiedad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, denominada *propiedad de multiplicación para radicales*, es verdadera para ciertos números reales a y b. Por medio de sustitución de valores para a y b, determina en qué condiciones esta propiedad es verdadera.

126. La propiedad $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, denominada *propiedad de división para radicales*, es verdadera para ciertos números reales a y b. Por medio de sustitución de valores para a y b, determina en qué condiciones esta propiedad es verdadera.

Ejercicios de repaso acumulados

Factoriza.

[5.4] **127.** $9ax - 3bx + 12ay - 4by$

[5.5] **128.** $3x^3 - 18x^2 + 24x$

129. $8x^4 + 10x^2 - 3$

[5.6] **130.** $x^3 - \dfrac{8}{27}y^3$

7.2 Exponentes racionales

1 Convertir una expresión radical en una expresión exponencial.

2 Simplificar expresiones radicales.

3 Aplicar las reglas de los exponentes a los exponentes racionales y a los exponentes negativos.

4 Factorizar expresiones con exponentes racionales.

1 Convertir una expresión radical en una expresión exponencial

Hasta ahora, no hemos tratado las expresiones exponenciales con exponentes racionales como $5^{1/3}$, $x^{3/4}$ y $-27^{-4/3}$. En esta sección, discutiremos la relación entre dichas expresiones y las expresiones radicales.

Considera $x = 5^{1/3}$. Ahora eleva al cubo ambos lados de esta ecuación y simplifica usando las reglas de los exponentes.

$$x = 5^{1/3}$$
$$x^3 = (5^{1/3})^3 = 5^{(1/3)\cdot 3} = 5^1 = 5$$

Por lo tanto, $5^{1/3}$ es un número cuyo cubo es 5. Recuerda que $\sqrt[3]{5}$ también es un número cuyo cubo es 5. Por lo tanto, podemos concluir que

$$5^{1/3} = \sqrt[3]{5}$$

La siguiente regla muestra que una expresión radical se puede reescribir como una expresión con exponente racional.

Forma exponencial de $\sqrt[n]{a}$

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

Cuando a es un número no negativo, n puede ser cualquier índice.
Cuando a es un número negativo, n debe ser un número impar.

A menos que se indique lo contrario, en el resto de este capítulo supondremos que todas las variables en el radicando representan números reales no negativos, y que el radicando es un número no negativo. Esto nos permitirá escribir muchas respuestas sin signos de valor absoluto.

EJEMPLO 1 Escribe cada expresión en forma exponencial (con exponentes racionales).

a) $\sqrt{7}$ **b)** $\sqrt[3]{15ab}$ **c)** $\sqrt[7]{-4x^2y^5}$ **d)** $\sqrt[8]{\dfrac{5x^7}{2z^{11}}}$

Solución

a) $\sqrt{7} = 7^{1/2}$ Recuerda que el índice de cualquier raíz cuadrada es 2.

b) $\sqrt[3]{15ab} = (15ab)^{1/3}$ **c)** $\sqrt[7]{-4x^2y^5} = (-4x^2y^5)^{1/7}$ **d)** $\sqrt[8]{\dfrac{5x^7}{2z^{11}}} = \left(\dfrac{5x^7}{2z^{11}}\right)^{1/8}$

Resuelve ahora el ejercicio 19

Las expresiones exponenciales pueden convertirse en expresiones radicales invirtiendo el proceso.

EJEMPLO 2 Escribe cada expresión en forma radical (sin exponentes racionales).

a) $9^{1/2}$ **b)** $(-8)^{1/3}$ **c)** $y^{1/4}$ **d)** $(10x^2y)^{1/7}$ **e)** $5rs^{1/2}$

Solución

a) $9^{1/2} = \sqrt{9} = 3$ **b)** $(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$ **c)** $y^{1/4} = \sqrt[4]{y}$

d) $(10x^2y)^{1/7} = \sqrt[7]{10x^2y}$ **e)** $5rs^{1/2} = 5r\sqrt{s}$

Resuelve ahora el ejercicio 33

2 Simplificar expresiones radicales

Podemos ampliar la regla anterior, de modo que los radicales de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ puedan escribirse como expresiones exponenciales. Considera $a^{2/3}$. Podemos escribir $a^{2/3}$ como $(a^{1/3})^2$ o $(a^2)^{1/3}$. Esto sugiere que $a^{2/3} = (\sqrt[3]{a})^2 = \sqrt[3]{a^2}$.

Forma exponencial de $\sqrt[n]{a^m}$

Para cualquier número a no negativo, y enteros m y n,

Potencia

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{m/n}$$

Índice

Esta regla muestra la relación entre las expresiones radicales y las expresiones exponenciales con exponentes racionales.

Cuando cambiamos una expresión radical a una forma exponencial

La potencia del radicando se convierte en el numerador del exponente racional.

$$\sqrt[3]{x^4} = x^{4/3}$$

El índice del radical se convierte en el denominador del exponente racional.

Ejemplos

$$\sqrt{y^3} = y^{3/2} \qquad \sqrt[3]{z^2} = z^{2/3} \qquad \sqrt[5]{2^8} = 2^{8/5}$$

$$(\sqrt{p})^3 = p^{3/2} \qquad (\sqrt[4]{x})^3 = x^{3/4} \qquad (\sqrt[4]{7})^3 = 7^{3/4}$$

De acuerdo con esta regla, para valores no negativos de las variables podemos escribir

$$\sqrt{x^5} = (\sqrt{x})^5 \qquad (\sqrt[4]{p})^3 = \sqrt[4]{p^3}$$

EJEMPLO 3 Escribe cada expresión en forma exponencial (con exponentes racionales) y después simplifica.

a) $\sqrt[4]{x^{12}}$ **b)** $(\sqrt[3]{y})^{15}$ **c)** $(\sqrt[6]{x})^{12}$

Solución

a) $\sqrt[4]{x^{12}} = x^{12/4} = x^3$ **b)** $(\sqrt[3]{y})^{15} = y^{15/3} = y^5$ **c)** $(\sqrt[6]{x})^{12} = x^{12/6} = x^2$

Resuelve ahora el ejercicio 45

Cuando cambiamos una expresión exponencial con un exponente racional a una expresión radical

El numerador del exponente se convierte en la potencia del radicando.

$$x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}$$

El denominador del exponente se convierte en el índice del radical.

Ejemplos

$$x^{1/2} = \sqrt{x} \qquad 5^{1/3} = \sqrt[3]{5}$$

$$7^{2/3} = \sqrt[3]{7^2} \text{ o } (\sqrt[3]{7})^2 \qquad y^{3/10} = \sqrt[10]{y^3} \text{ o } (\sqrt[10]{y})^3$$

$$x^{9/5} = \sqrt[5]{x^9} \text{ o } (\sqrt[5]{x})^9 \qquad z^{10/3} = \sqrt[3]{z^{10}} \text{ o } (\sqrt[3]{z})^{10}$$

Observa que puedes seleccionar, por ejemplo, escribir $6^{2/3}$ como $\sqrt[3]{6^2}$ o $(\sqrt[3]{6})^2$.

EJEMPLO 4 Escribe cada expresión en forma radical (sin exponentes racionales).

a) $x^{2/5}$ **b)** $(3ab)^{5/4}$

Solución

a) $x^{2/5} = \sqrt[5]{x^2}$ o $(\sqrt[5]{x})^2$ **b)** $(3ab)^{5/4} = \sqrt[4]{(3ab)^5}$ o $(\sqrt[4]{3ab})^5$

Resuelve ahora el ejercicio 35

EJEMPLO 5 Simplifica.

a) $4^{3/2}$ **b)** $\sqrt[6]{(49)^3}$ **c)** $\sqrt[4]{(xy)^{20}}$ **d)** $(\sqrt[15]{z})^5$

Solución

a) Algunas veces una expresión con un exponente racional puede simplificarse con más facilidad escribiéndola como un radical, como se ilustra.

$$\begin{aligned} 4^{3/2} &= (\sqrt{4})^3 && \text{Escrito como un radical.} \\ &= (2)^3 \\ &= 8 \end{aligned}$$

b) A veces una expresión radical puede simplificarse con más facilidad escribiéndola con exponentes racionales, como se ilustra en los incisos **b)** a **d)**.

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{(49)^3} &= 49^{3/6} && \text{Escrito con un exponente racional.} \\ &= 49^{1/2} && \text{Exponente reducido.} \\ &= \sqrt{49} && \text{Escrito como un radical.} \\ &= 7 && \text{Simplificado.} \end{aligned}$$

c) $\sqrt[4]{(xy)^{20}} = (xy)^{20/4} = (xy)^5$

d) $(\sqrt[15]{z})^5 = z^{5/15} = z^{1/3}$ or $\sqrt[3]{z}$

Resuelve ahora el ejercicio 51

Veamos ahora la expresión $\sqrt[5]{x^5}$. Al escribirla en forma exponencial, se obtiene $x^{5/5} = x^1 = x$. Esto nos lleva a la siguiente regla.

Forma exponencial de $\sqrt[n]{a^n}$

Para cualquier número real a no negativo,

$$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a^{n/n} = a$$

Si n es un índice par y a es un número real negativo, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ y no a. Por ejemplo, $\sqrt[6]{(-5)^6} = |-5| = 5$. *Debido a que estamos suponiendo, excepto cuando se indique lo contrario, que las variables en los radicandos representan números reales no negativos*, podemos escribir $\sqrt[6]{x^6} = x$ y no $|x|$. Esta suposición también nos permite escribir $\sqrt{x^2} = x$ y $(\sqrt[4]{z})^4 = z$.

Ejemplos

$$\sqrt{3^2} = 3 \qquad \sqrt[4]{y^4} = y$$
$$\sqrt[6]{(xy)^6} = xy \qquad (\sqrt[5]{z})^5 = z$$

3 Aplicar las reglas de los exponentes a los exponentes racionales y a los exponentes negativos

En la sección 1.5 se analizaron y discutieron las reglas de los exponentes. En esa sección utilizamos como exponentes solo números enteros. No obstante, las reglas siguen siendo válidas cuando los exponentes son números racionales. Demos un repaso a dichas reglas.

Reglas de los exponentes

Para todos los números reales a y b y todos los números racionales m y n,

Regla del producto	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Regla del cociente	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$
Regla del exponente negativo	$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}, \quad a \neq 0$
Regla del exponente cero	$a^0 = 1, \quad a \neq 0$
Elevar una potencia a una potencia	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Elevar un producto a una potencia	$(ab)^m = a^m b^m$
Elevar un cociente a una potencia	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}, \quad b \neq 0$

Ahora utilizaremos estas reglas para resolver algunos problemas donde los exponentes son números racionales.

EJEMPLO 6 Evalúa. **a)** $8^{-2/3}$ **b)** $(-27)^{-5/3}$ **c)** $(-32)^{-6/5}$

Solución

a) Comienza por usar la regla de los exponentes negativos.

$$8^{-2/3} = \frac{1}{8^{2/3}} \quad \text{Regla del exponente negativo}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt[3]{8})^2} \quad \text{Escrito el denominador como un radical.}$$

$$= \frac{1}{2^2} \quad \text{Simplificado el denominador.}$$

$$= \frac{1}{4}$$

b) $(-27)^{-5/3} = \dfrac{1}{(-27)^{5/3}} = \dfrac{1}{(\sqrt[3]{-27})^5} = \dfrac{1}{(-3)^5} = -\dfrac{1}{243}$

c) $(-32)^{-6/5} = \dfrac{1}{(-32)^{6/5}} = \dfrac{1}{(\sqrt[5]{-32})^6} = \dfrac{1}{(-2)^6} = \dfrac{1}{64}$

Resuelve ahora el ejercicio 81

Observa que podríamos haber resuelto el ejemplo 6 **a)** como sigue:

$$8^{-2/3} = \frac{1}{8^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$$

Sin embargo, por lo general es más fácil evaluar la raíz antes de aplicar la potencia.

Considera la expresión $(-16)^{3/4}$; esta expresión puede reescribirse como $(\sqrt[4]{-16})^3$. Ya que $(\sqrt[4]{-16})^3$ no es un número real, la expresión $(-16)^{3/4}$ no es un número real.

En el capítulo 1 se mencionó que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Utilizaremos esto en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 7 Evalúa. **a)** $\left(\dfrac{9}{25}\right)^{-1/2}$ **b)** $\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-1/3}$

Solución

a) $\left(\dfrac{9}{25}\right)^{-1/2} = \left(\dfrac{25}{9}\right)^{1/2} = \sqrt{\dfrac{25}{9}} = \dfrac{5}{3}$ **b)** $\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-1/3} = \left(\dfrac{8}{27}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{\dfrac{8}{27}} = \dfrac{2}{3}$

Resuelve ahora el ejercicio 83

Consejo útil

¿En qué difieren las expresiones $-25^{1/2}$ y $(-25)^{1/2}$?
Recuerda que $-x^2$ significa $-(x^2)$. El mismo principio se aplica aquí.

$$-25^{1/2} = -(25)^{1/2} = -\sqrt{25} = -5$$

$$(-25)^{1/2} = \sqrt{-25}, \text{ el cual no es un número real.}$$

Comprendiendo el álgebra

Cuando se usan las reglas de los exponentes, hay muchas formas distintas de simplificar expresiones exponenciales. Siempre que uses las reglas correctamente, deberás llegar a la expresión simplificada correcta.

EJEMPLO 8 Simplifica cada expresión y escribe la respuesta sin exponentes negativos.

a) $a^{1/2} \cdot a^{-2/3}$ **b)** $(6x^2y^{-4})^{-1/2}$ **c)** $3.2x^{1/3}(2.4x^{1/2} + x^{-1/4})$ **d)** $\left(\dfrac{9x^{-4}z^{2/5}}{z^{-3/5}}\right)^{1/8}$

Solución

a) $a^{1/2} \cdot a^{-2/3} = a^{(1/2)-(2/3)}$ Regla del producto

$= a^{-1/6}$ Determina el MCD y resta los exponentes.

$= \dfrac{1}{a^{1/6}}$ Regla del exponente negativo

b) $(6x^2y^{-4})^{-1/2} = 6^{-1/2}x^{2(-1/2)}y^{-4(-1/2)}$ Eleva el producto a una potencia.

$= 6^{-1/2}x^{-1}y^2$ Multiplica los exponentes.

$= \dfrac{y^2}{6^{1/2}x}\left(\text{o } \dfrac{y^2}{x\sqrt{6}}\right)$ Regla del exponente negativo

c) Comienza aplicando la propiedad distributiva.

$3.2x^{1/3}(2.4x^{1/2} + x^{-1/4}) = (3.2x^{1/3})(2.4x^{1/2}) + (3.2x^{1/3})(x^{-1/4})$ Propiedad distributiva

$= (3.2)(2.4)(x^{(1/3)+(1/2)}) + 3.2x^{(1/3)-(1/4)}$ Regla del producto

$= 7.68x^{5/6} + 3.2x^{1/12}$

d) $\left(\dfrac{9x^{-4}z^{2/5}}{z^{-3/5}}\right)^{1/8} = (9x^{-4}z^{(2/5)-(-3/5)})^{1/8}$ Regla del cociente

$= (9x^{-4}z)^{1/8}$ Resta los exponentes.

$= 9^{1/8}x^{-4(1/8)}z^{1/8}$ Eleva el producto a una potencia.

$= 9^{1/8}x^{-4/8}z^{1/8}$ Multiplica los exponentes.

$= 9^{1/8}x^{-1/2}z^{1/8}$ Simplifica los exponentes.

$= \dfrac{9^{1/8}z^{1/8}}{x^{1/2}}$ Regla del exponente negativo

Resuelve ahora el ejercicio 105

EJEMPLO 9 Simplifica. **a)** $\sqrt[15]{(7y)^5}$ **b)** $\left(\sqrt[4]{a^2b^3c}\right)^{20}$ **c)** $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}$

Solución

a) $\sqrt[15]{(7y)^5} = (7y)^{5/15}$ Escribe como un exponente racional.

$= (7y)^{1/3}$ Simplifica el exponente.

$= \sqrt[3]{7y}$ Escribe como un radical.

b) $\left(\sqrt[4]{a^2b^3c}\right)^{20} = (a^2b^3c)^{20/4}$ Escribe como un exponente racional.

$= (a^2b^3c)^5$

$= a^{10}b^{15}c^5$ Eleva el producto a una potencia.

c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[4]{x^{1/3}}$ Escribe $\sqrt[3]{x}$ como $x^{1/3}$.

$= (x^{1/3})^{1/4}$ Escribe como un exponente racional.

$= x^{1/12}$ Eleva la potencia a una potencia.

$= \sqrt[12]{x}$ Escribe como un radical.

Resuelve ahora el ejercicio 53

Cómo utilizar tu calculadora

Determinación de raíces o expresiones con exponentes racionales en una calculadora graficadora o una calculadora científica

En general hay muchas formas de evaluar una expresión como $845^{-3/5}$ en una calculadora.*

Calculadora científica

Para evaluar $845^{-3/5}$, presiona

Respuesta obtenida

$845 \; \boxed{y^x} \; \boxed{(} \; 3 \; \boxed{+/-} \; \boxed{\div} \; 5 \; \boxed{)} \; \boxed{=} \; 0.017534201$

Calculadora graficadora

Para evaluar $845^{-3/5}$, presiona las siguientes teclas.

Respuesta obtenida

$845 \; \boxed{\wedge} \; \boxed{(} \; \boxed{(-)} \; 3 \; \boxed{\div} \; 5 \; \boxed{)} \; \boxed{\text{ENTER}} \; .0175342008$

*La secuencia de teclas que se utiliza varía según el modelo de la calculadora. Para calculadoras con modo REAL y COMPLEJO se asume que la calculadora está en modo REAL para obtener estos resultados. Lee el manual de tu calculadora para aprender a evaluar expresiones exponenciales con ella.

4 Factorizar expresiones con exponentes racionales

Para factorizar una expresión con exponentes racionales, factoriza el término con el exponente más pequeño.

EJEMPLO 10 Factoriza $x^{2/5} + x^{-3/5}$.

Solución El más pequeño de los dos exponentes es –3/5. Por lo tanto, factorizaremos $x^{-3/5}$ en ambos términos. Para determinar el nuevo exponente en la variable que tenía el exponente más grande, restamos el exponente que se factorizó del exponente original.

Exponente original

Exponente factorizado

$$x^{2/5} + x^{-3/5} = x^{-3/5}\left(x^{2/5-(-3/5)} + 1\right)$$
$$= x^{-3/5}(x^1 + 1)$$
$$= x^{-3/5}(x + 1)$$
$$= \frac{x+1}{x^{3/5}}$$

Podemos comprobar nuestra factorización por medio de la multiplicación.

$$x^{-3/5}(x + 1) = x^{-3/5} \cdot x + x^{-3/5} \cdot 1$$
$$= x^{(-3/5)+1} + x^{-3/5}$$
$$= x^{2/5} + x^{-3/5}$$

Como obtuvimos la expresión original, la factorización es correcta.

Resuelve ahora el ejercicio 135

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.2

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

multiplican denominador numerador suman índice potencia dividir función

1. Cuando se cambia una expresión radical, $\sqrt[n]{x^m}$, a una expresión exponencial, el exponente del radicando, m, se convierte en el ________________ del exponente racional.
2. Cuando se cambia una expresión radical, $\sqrt[n]{x^m}$, a una expresión exponencial, el índice del radical, n, se convierte en el ________________ del exponente racional.
3. Cuando se cambia una expresión exponencial con un exponente racional, $x^{m/n}$, a una expresión radical, el denominador, n, se convierte en el ________________ del radical.
4. Cuando se cambia una expresión exponencial con un exponente racional, $x^{m/n}$, a una expresión radical, el numerador, m, se convierte en la ________________ del radicando.
5. Para simplificar la expresión $x^{2/3} \cdot x^{1/4}$, se ________________ los exponentes.
6. Para simplificar la expresión $(x^{2/3})^{1/4}$, se ________________ los exponentes.

Practica tus habilidades

Escribe cada expresión en forma exponencial. Supón que todas las variables representan números reales positivos.

7. $\sqrt{x^5}$ 8. $\sqrt{b^3}$ 9. $\sqrt{9^5}$ 10. $\sqrt[3]{y}$
11. $\sqrt[3]{z^5}$ 12. $\sqrt[3]{x^{11}}$ 13. $\sqrt[3]{7^{10}}$ 14. $\sqrt[5]{9^{11}}$
15. $\sqrt[4]{9^7}$ 16. $(\sqrt{x})^9$ 17. $(\sqrt[3]{y})^{14}$ 18. $\sqrt{ab^5}$
19. $\sqrt[4]{a^3b}$ 20. $\sqrt[3]{x^4y}$ 21. $\sqrt[4]{x^9z^5}$ 22. $\sqrt[6]{y^{11}z}$
23. $\sqrt[6]{3a + 8b}$ 24. $\sqrt[9]{3x + 5z^4}$ 25. $\sqrt[5]{\dfrac{2x^6}{11y^7}}$ 26. $\sqrt[4]{\dfrac{3a^8}{11b^5}}$

Escribe cada expresión en forma radical. Supón que todas las variables representan números reales positivos.

27. $a^{1/2}$ 28. $a^{1/3}$ 29. $a^{2/3}$ 30. $19^{1/2}$
31. $18^{5/3}$ 32. $y^{17/6}$ 33. $(24x^3)^{1/2}$ 34. $(85a^3)^{5/2}$
35. $(11b^2c)^{3/5}$ 36. $(8x^3y^2)^{7/4}$ 37. $(6a + 5b)^{1/5}$ 38. $(8x^2 + 9y)^{7/3}$
39. $(b^3 - d)^{-1/3}$ 40. $(7x^2 - 2y^3)^{-1/6}$

Simplifica cada expresión radical, cambiándola a forma exponencial. Cuando sea apropiado, escribe la respuesta en forma radical cuando sea apropiado. Supón que todas las variables representan números reales positivos.

41. $\sqrt{a^2}$ 42. $\sqrt[3]{b^6}$* 43. $\sqrt[3]{x^9}$ 44. $\sqrt[4]{x^{12}}$
45. $\sqrt[6]{y^2}$ 46. $\sqrt[8]{b^4}$ 47. $\sqrt[6]{y^3}$ 48. $\sqrt[12]{z^4}$
49. $(\sqrt{19.3})^2$ 50. $\sqrt[4]{(6.83)^4}$ 51. $(\sqrt[3]{xy^2})^{15}$ 52. $(\sqrt[4]{a^4bc^3})^{40}$
53. $(\sqrt[8]{xyz})^4$ 54. $(\sqrt[9]{a^2bc^4})^3$ 55. $\sqrt{\sqrt{x}}$ 56. $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$
57. $\sqrt{\sqrt[4]{y}}$ 58. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{b}}$ 59. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^2y}}$ 60. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{7y}}$
61. $\sqrt{\sqrt[5]{a^9}}$ 62. $\sqrt[5]{\sqrt[4]{ab}}$

Evalúa, si es posible. Si la expresión no es un número real, indícalo.

63. $9^{1/2}$ 64. $100^{1/2}$ 65. $64^{1/3}$ 66. $81^{1/4}$
67. $64^{2/3}$ 68. $27^{2/3}$ 69. $(-49)^{1/2}$ 70. $(-64)^{1/4}$
71. $\left(\dfrac{25}{9}\right)^{1/2}$ 72. $\left(\dfrac{100}{49}\right)^{1/2}$ 73. $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{1/3}$ 74. $\left(\dfrac{1}{32}\right)^{1/5}$
75. $-81^{1/2}$ 76. $(-81)^{1/2}$ 77. $-64^{1/3}$ 78. $(-64)^{1/3}$
79. $64^{-1/3}$ 80. $49^{-1/2}$ 81. $16^{-3/2}$ 82. $64^{-2/3}$
83. $\left(\dfrac{64}{27}\right)^{-1/3}$ 84. $(-81)^{3/4}$ 85. $(-100)^{3/2}$ 86. $-\left(\dfrac{25}{49}\right)^{-1/2}$
87. $121^{1/2} + 169^{1/2}$ 88. $49^{-1/2} + 36^{-1/2}$ 89. $343^{-1/3} + 16^{-1/2}$ 90. $16^{-1/2} - 256^{-3/4}$

Simplifica. Escribe la respuesta en forma exponencial sin exponentes negativos. Supón que todas las variables representan números reales positivos.

91. $x^4 \cdot x^{1/2}$ **92.** $x^6 \cdot x^{1/2}$ **93.** $\dfrac{x^{1/2}}{x^{1/3}}$ **94.** $x^{-6/5}$

95. $(x^{1/2})^{-2}$ **96.** $(a^{-1/3})^{-1/2}$ **97.** $(9^{-1/3})^0$ **98.** $\dfrac{x^4}{x^{-1/2}}$

99. $\dfrac{5y^{-1/3}}{60y^{-2}}$ **100.** $x^{-1/2}x^{-2/5}$ **101.** $4x^{5/3}3x^{-7/2}$ **102.** $(x^{-4/5})^{1/3}$

103. $\left(\dfrac{3}{24x}\right)^{1/3}$ **104.** $\left(\dfrac{54}{2x^4}\right)^{1/3}$ **105.** $\left(\dfrac{22x^{3/7}}{2x^{1/2}}\right)^2$ **106.** $\left(\dfrac{x^{-1/3}}{x^{-2}}\right)^2$

107. $\left(\dfrac{a^4}{4a^{-2/5}}\right)^{-3}$ **108.** $\left(\dfrac{27z^{1/4}y^3}{3z^{1/4}}\right)^{1/2}$ **109.** $\left(\dfrac{x^{3/4}y^{-3}}{x^{1/2}y^2}\right)^4$ **110.** $\left(\dfrac{250a^{-3/4}b^5}{2a^{-2}b^2}\right)^{2/3}$

Multiplica. Supón que todas las variables representan números reales positivos.

111. $4z^{-1/2}(2z^4 - z^{1/2})$ **112.** $-3a^{-4/9}(5a^{1/9} - a^2)$ **113.** $5x^{-1}(x^{-4} + 4x^{-1/2})$

114. $-9z^{3/2}(z^{3/2} - z^{-3/2})$ **115.** $-6x^{5/3}(-2x^{1/2} + 3x^{1/3})$ **116.** $\dfrac{1}{2}x^{-2}(10x^{4/3} - 38x^{-1/2})$

Utiliza una calculadora para evaluar cada expresión. Redondea la respuesta al centésimo más cercano.

117. $\sqrt{180}$ **118.** $\sqrt[3]{168}$ **119.** $\sqrt[5]{402.83}$ **120.** $\sqrt[4]{1096}$

121. $93^{2/3}$ **122.** $38.2^{3/2}$ **123.** $1000^{-1/2}$ **124.** $8060^{-3/2}$

Resolución de problemas

125. ¿En qué condiciones se cumplirá $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$

126. Elige valores para a y b para demostrar que $(a^2 + b^2)^{1/2}$ *no es igual que* $a + b$.

127. Elige valores para a y b para demostrar que $(a^{1/2} + b^{1/2})^2$ *no es igual que* $a + b$.

128. Elige valores para a y b para demostrar que $(a^3 + b^3)^{1/3}$ no es igual que $a + b$.

129. Elige valores para a y b para demostrar que $(a^{1/3} + b^{1/3})^3$ no es igual que $a + b$.

130. Determina si $\sqrt[3]{\sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt[3]{x}}$, $x \geq 0$.

Factoriza. Escribe la respuesta sin exponentes negativos. Supón que todas las variables representan números reales positivos.

131. $x^{3/2} + x^{1/2}$ **132.** $x^{1/4} - x^{5/4}$ **133.** $y^{1/3} - y^{7/3}$

134. $x^{-1/2} + x^{1/2}$ **135.** $y^{-2/5} + y^{8/5}$ **136.** $a^{6/5} + a^{-4/5}$

En los ejercicios 137 a 142, utiliza una calculadora donde sea apropiado.

137. Crecimiento de bacterias La función $B(t) = 2^{10} \cdot 2^t$ sirve para aproximar el número de bacterias que hay en un cultivo después de t horas.

a) El número inicial de bacterias se determinó cuando $t = 0$. ¿Cuál es el número inicial de bacterias?

b) ¿Cuántas bacterias hay después de $\frac{1}{2}$ hora?

138. Datación por carbono Los científicos emplean un método denominado "datación por carbono" para determinar la antigüedad de fósiles, huesos y otros objetos. La fórmula que se usa es $P = P_0 2^{-t/5600}$, donde P_0 representa la cantidad original de carbono 14 (C_{14}) presente en un objeto y P representa la cantidad de C_{14} que hay en él después de t años. Si en un hueso de un animal recientemente desenterrado están presentes 10 mg de C_{14}, ¿cuántos mg estarán presentes dentro de 5000 años?

139. Velocidad metabólica en reposo La velocidad metabólica en reposo (VMR) de una persona es el número de calorías que una persona quema en un día de descanso. La VMR de una persona se puede estimar usando $R(x) = 70x^{3/4}$ donde $R(x)$ se mide en calorías por día y x es la masa de una persona en kilogramos. Si Ken Machol tiene una masa de 102 kg, estima su VMR a la caloría más cercana.

Fuente: www.bodybuilding.com

© Luc Ubaghs/Shutterstock

140. Velocidad metabólica en reposo Si Martin Alexander tiene una masa de 82 kg, estima su VMR a la caloría más cercana (ver ejercicio 139).

141. Determina el dominio de $f(x) = (x - 7)^{1/2}(x + 3)^{-1/2}$.

142. Determina el dominio de $f(x) = (x + 4)^{1/2}(x - 3)^{-1/2}$.

Determina el índice que debe colocarse en el área sombreada para que la expresión sea verdadera.

143. $\sqrt[4]{\sqrt[5]{\sqrt[\square]{\sqrt[3]{z}}}} = z^{1/120}$

144. $\sqrt[4]{\sqrt[\square]{\sqrt{x}}} = x^{1/24}$

Ejercicios de conceptos y escritura

145. **a)** ¿En qué condiciones $\sqrt[n]{a^n}$ es un número real?

b) Cuando $\sqrt[n]{a^n}$ es un número real, ¿cómo puede expresarse con exponentes racionales?

146. **a)** ¿En qué condiciones $\sqrt[n]{a^n}$ es un número real?

b) ¿En qué condiciones $\sqrt[m]{a^n}$ es un número real?

c) Cuando $\sqrt[m]{a^n}$ es un número real, ¿cómo puede expresarse con exponentes racionales?

147. **a)** ¿En qué condiciones $\sqrt[n]{a^n}$ es un número real?

b) Cuando n es un número par y $a \geq 0$, ¿a qué es igual $\sqrt[n]{a^n}$?

c) Cuando n es un número impar, ¿a qué es igual $\sqrt[n]{a^n}$?

d) Cuando n es un número par y a es cualquier número real, ¿a qué es igual $\sqrt[n]{a^n}$?

148. **a)** Explica la diferencia entre $-16^{1/2}$ y $(-16)^{1/2}$.

b) Evalúa cada expresión del inciso **a)**, si esto es posible.

149. **a)** ¿Es $(xy)^{1/2} = xy^{1/2}$? Explica.

b) ¿Es $(xy)^{-1/2} = \dfrac{x^{1/2}}{y^{-1/2}}$? Explica.

150. **a)** ¿Es $\sqrt[6]{(3y^3)} = (3y)^{6/3}$? Explica.

b) ¿Es $\sqrt{(ab)^4} = (ab)^2$? Explica.

151. Evalúa $(a^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

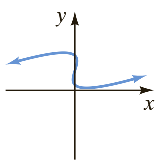
152. **a)** Evalúa en tu calculadora 3^{π}.

b) Explica por qué el valor que indicaste en el inciso **a)** tiene sentido o no.

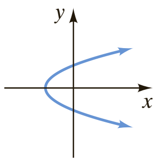
Ejercicios de repaso acumulados

[3.2] **153.** Determina cuáles de las siguientes relaciones también son funciones.

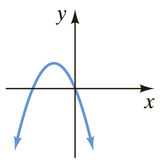
a)



b)



c)



[6.3] **154.** Simplifica $\dfrac{a^{-2} + ab^{-1}}{ab^{-2} - a^{-2}b^{-1}}$.

[6.4] **155.** Resuelve la ecuación $\dfrac{3x - 2}{x + 4} = \dfrac{2x + 1}{3x - 2}$.

[6.5] **156.** **Pilota un avión** Amy Mayfiel puede pilotar su avión en un trayecto de 500 millas con el viento en contra, en el mismo tiempo que le toma pilotarlo en un trayecto de 560 millas con el viento a favor. Si el viento sopla a 25 millas por hora, determina la velocidad del avión con viento en calma.

7.3 Simplificación de radicales

1 Entender potencias perfectas.

2 Simplificar radicales mediante la regla del producto para radicales.

3 Simplificar radicales mediante la regla del cociente para radicales.

1 Entender potencias perfectas

En esta sección simplificaremos expresiones radicales. Empezaremos con una explicación de potencias perfectas.

Potencia perfecta, cuadrado perfecto, cubo perfecto

- Una **potencia perfecta** es un número o expresión que puede ser escrito como una expresión elevada a una potencia, la cual es un número entero mayor a 1.
- Un número o expresión es un **cuadrado perfecto** si se puede escribir como el cuadrado de una expresión. Un cuadrado perfecto es una *segunda* potencia perfecta.
- Un número o expresión es un **cubo perfecto** si se puede escribir como el cubo de una expresión. Un cubo perfecto es una *tercera* potencia perfecta.

Los ejemplos de cuadrados perfectos se ilustran a continuación.

$$\begin{array}{lcccccc} \text{Cuadrados perfectos} & 1, & 4, & 9, & 16, & 25, & 36, \ldots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Cuadrado de un número} & 1^2, & 2^2, & 3^2, & 4^2, & 5^2, & 6^2, \ldots \end{array}$$

Las variables con exponentes también pueden ser cuadrados perfectos, como se ilustra a continuación.

$$\begin{array}{lccccc} \text{Cuadrados perfectos} & x^2, & x^4, & x^6, & x^8, & x^{10}, \ldots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Cuadrado de una expresión} & (x)^2, & (x^2)^2, & (x^3)^2, & (x^4)^2, & (x^5)^2, \ldots \end{array}$$

Observa que todos los exponentes de las variables de los cuadrados perfectos son múltiplos de 2.

Los ejemplos de cubos perfectos se ilustran a continuación.

Cubos perfectos	1,	8,	27,	64,	125,	216, . . .
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Cubo de un número	1^3,	2^3,	3^3,	4^3,	5^3,	6^3, . . .

Cubos perfectos	x^3,	x^6,	x^9,	x^{12},	x^{15}, . . .
	↓	↓	↓	↓	↓
Cubo de una expresión	$(x)^3$,	$(x^2)^3$,	$(x^3)^3$,	$(x^4)^3$,	$(x^5)^3$, . . .

Observa que todos los exponentes de las variables de los cubos perfectos son múltiplos de 3.

Cuando simplifiquemos radicales, estaremos buscando potencias perfectas en el radicando. Por ejemplo, si estamos simplificando una raíz cuadrada, entonces estaremos interesados en encontrar cuadrados perfectos. Si estamos simplificando una raíz cúbica, entonces estaremos interesados en encontrar cubos perfectos. Si estamos simplificando una raíz cuarta, entonces estaremos interesados en encontrar cuartas potencias perfectas, y así sucesivamente.

Comprendiendo el álgebra

Una variable con un exponente es un

- Cuadrado perfecto si el exponente es divisible entre 2. Por ejemplo, x^2, x^4, x^6,... son cuadrados perfectos.
- Cubo perfecto si el exponente es divisible entre 3. Por ejemplo, x^3, x^6, x^9,... son cubos perfectos.
- Cuarta potencia perfecta si el exponente es divisible entre 4. Por ejemplo, x^4, x^8, x^{12},... son cuartas potencias perfectas.

Este patrón continúa para las potencias perfectas superiores.

Consejo útil

Un método rápido para saber si un radicando x^m es una potencia perfecta para un índice, consiste en determinar si el exponente m es divisible entre el índice del radical. Por ejemplo, en $\sqrt[5]{x^{20}}$. Como el exponente 20 es divisible entre el índice 5, x^{20} es una quinta potencia perfecta. En cambio, en $\sqrt[6]{x^{20}}$. El exponente, 20 no es divisible entre el índice 6; entonces, x^{20} no es una sexta potencia perfecta. Sin embargo, x^{18} y x^{24} sí lo son, ya que 6 divide a 18 y a 24.

Observa que la raíz cuadrada de un cuadrado perfecto simplifica a una expresión sin signo radical; la raíz cúbica de un cubo perfecto simplifica a una expresión sin signo radical, y así sucesivamente.

Ejemplos

$$\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6^{2/2} = 6$$
$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3^{3/3} = 3$$
$$\sqrt{x^6} = x^{6/2} = x^3$$
$$\sqrt[3]{z^{12}} = z^{12/3} = z^4$$
$$\sqrt[5]{n^{35}} = n^{35/5} = n^7$$

Ahora estamos listos para discutir la regla del producto para radicales.

2 Simplificar radicales mediante la regla del producto para radicales

Para introducir la **regla del producto para radicales**, observa que $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$. También $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{36} = 6$. Vemos que $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{4 \cdot 9}$. Éste es un ejemplo de la regla del producto para radicales.

Regla del producto para radicales

Para números reales no negativos a y b,

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Ejemplos de la regla del producto para radicales

$$\sqrt{20} = \begin{cases} \sqrt{1} \cdot \sqrt{20} \\ \sqrt{2} \cdot \sqrt{10} \\ \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \end{cases} \qquad \sqrt[3]{20} = \begin{cases} \sqrt[3]{1} \cdot \sqrt[3]{20} \\ \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{10} \\ \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5} \end{cases}$$

$\sqrt{20}$ puede factorizarse en cualquiera de estas formas. $\sqrt[3]{20}$ puede factorizarse en cualquiera de estas formas.

$$\sqrt{x^7} = \begin{cases} \sqrt{x} \cdot \sqrt{x^6} \\ \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x^5} \\ \sqrt{x^3} \cdot \sqrt{x^4} \end{cases} \qquad \sqrt[3]{x^7} = \begin{cases} \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^6} \\ \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^5} \\ \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^4} \end{cases}$$

$\sqrt{x^7}$ puede factorizarse en cualquiera de estas formas. $\sqrt[3]{x^7}$ puede factorizarse en cualquiera de estas formas.

A continuación mostramos un procedimiento general que puede usarse para simplificar radicales mediante la regla del producto.

Para simplificar radicales mediante la regla del producto

1. Si el radicando contiene un coeficiente distinto de 1, escríbelo como el producto de dos números, uno de los cuales es la máxima potencia perfecta del índice.
2. Escribe cada factor variable como el producto de dos factores, donde uno de los cuales sea la máxima potencia perfecta de la variable del índice.
3. Utiliza la regla del producto para escribir la expresión radical como un producto de radicales. Coloca todas las potencias perfectas (números y variables) bajo el mismo radical.
4. Simplifica el radical que contiene las potencias perfectas.

Si simplificamos una *raíz cuadrada*, debemos escribir el radicando como el producto del *cuadrado perfecto* más grande y otra expresión. Si simplificamos una raíz cúbica, debemos escribir el radicando como el producto del *cubo perfecto* más grande y otra expresión, y así sucesivamente.

EJEMPLO 1 Simplifica. **a)** $\sqrt{32}$ **b)** $\sqrt{60}$ **c)** $\sqrt[3]{54}$ **d)** $\sqrt[4]{96}$

Solución En este ejemplo, los radicandos no tienen variables. Seguiremos el paso 1 del procedimiento.

a) Como estamos evaluando una raíz cuadrada, buscamos el cuadrado perfecto más grande que divida a (o sea un factor de) 32, en este caso, 16.

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16}\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

b) El cuadrado perfecto más grande que es factor de 60 es 4.

$$\sqrt{60} = \sqrt{4 \cdot 15} = \sqrt{4}\sqrt{15} = 2\sqrt{15}$$

c) El cubo perfecto más grande que es factor de 54 es 27.

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$$

d) La cuarta potencia perfecta más grande que es factor de 96 es 16.

$$\sqrt[4]{96} = \sqrt[4]{16 \cdot 6} = \sqrt[4]{16}\sqrt[4]{6} = 2\sqrt[4]{6}$$

Resuelve ahora el ejercicio 19

Comprendiendo el álgebra

Para simplificar $\sqrt{20}$ esto lo escribimos como $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5}$ porque 4 es el cuadrado perfecto más grande que divide a 20:

$$\sqrt{20} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

De manera similar, para simplificar $\sqrt[3]{24}$ esto lo escribimos como $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3}$ porque 8 es el cubo perfecto más grande que divide a 24:

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$$

Consejo útil

En el ejemplo 1 inciso **a)**, si primero pensaste que 4 era el cuadrado perfecto más grande que dividía a 32, podrías proceder como sigue:

$$\sqrt{32} = \sqrt{4 \cdot 8} = \sqrt{4}\sqrt{8} = 2\sqrt{8}$$
$$= 2\sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{4}\sqrt{2} = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Observa que el resultado final es el mismo, pero debes realizar más pasos. Las listas de cuadrados perfectos y cubos perfectos de las páginas 442-443 pueden ayudarte a determinar el cuadrado perfecto o el cubo perfecto más grande que son factores de un radicando.

El ejemplo 1 inciso **b)**, también $\sqrt{15}$ puede ser factorizado como $\sqrt{5 \cdot 3}$; sin embargo, como ni 5 ni 3 son cuadrados perfectos, $\sqrt{15}$ no puede simplificarse.

Cuando el radicando es una potencia perfecta del índice, el radical puede simplificarse escribiéndolo en forma exponencial, como en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Simplifica **a)** $\sqrt{x^4}$ **b)** $\sqrt[3]{x^{12}}$ **c)** $\sqrt[5]{z^{40}}$

Solución

a) $\sqrt{x^4} = x^{4/2} = x^2$ **b)** $\sqrt[3]{x^{12}} = x^{12/3} = x^4$ **c)** $\sqrt[5]{z^{40}} = z^{40/5} = z^8$

Resuelve ahora el ejercicio 33

EJEMPLO 3 Simplifica. **a)** $\sqrt{x^9}$ **b)** $\sqrt[5]{x^{23}}$ **c)** $\sqrt[4]{y^{33}}$

Solución Como los radicandos tienen coeficiente 1, iniciamos con el paso 2 del procedimiento.

a) El cuadrado perfecto más grande menor o igual a x^9 es x^8.

$$\sqrt{x^9} = \sqrt{x^8 \cdot x} = \sqrt{x^8} \cdot \sqrt{x} = x^{8/2}\sqrt{x} = x^4\sqrt{x}$$

b) La quinta potencia perfecta más grande menor o igual a x^{23} es x^{20}.

$$\sqrt[5]{x^{23}} = \sqrt[5]{x^{20} \cdot x^3} = \sqrt[5]{x^{20}}\,\sqrt[5]{x^3} = x^{20/5}\sqrt[5]{x^3} = x^4\sqrt[5]{x^3}$$

c) La cuarta potencia más grande menor o igual a y^{33} es y^{32}.

$$\sqrt[4]{y^{33}} = \sqrt[4]{y^{32} \cdot y} = \sqrt[4]{y^{32}}\,\sqrt[4]{y} = y^{32/4}\sqrt[4]{y} = y^8\sqrt[4]{y}$$

Resuelve ahora el ejercicio 39

Si observas las respuestas del ejemplo 3, verás que el exponente de la variable del radicando siempre es menor que el índice. *Cuando un radical se simplifica, el radicando no tiene una variable con un exponente mayor o igual al índice.*

En el ejemplo 3 inciso **b)** simplificamos $\sqrt[5]{x^{23}}$. Si dividimos 23, el exponente en el radicando, entre 5, el índice, obtenemos

$$\begin{array}{r l} 4 & \longleftarrow \text{Cociente} \\ 5\overline{)23} & \\ \underline{20} & \\ 3 & \longleftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

Observa que $\sqrt[5]{x^{23}}$ se simplifica a $x^4\sqrt[5]{x^3}$ y

$$\text{Cociente} \longrightarrow x^4\sqrt[5]{x^3} \longleftarrow \text{Residuo}$$

Cuando simplificamos un radical, si dividimos el exponente dentro del radical entre el índice, el cociente será el exponente de la variable fuera del signo radical, y el residuo será el exponente de la variable dentro del signo radical. Ahora, simplifica el ejemplo 3 **c)** mediante esta técnica.

EJEMPLO 4 Simplifica. **a)** $\sqrt{x^{12}y^{17}}$ **b)** $\sqrt[4]{x^6y^{23}}$

Solución

a) x^{12} es un cuadrado perfecto. El cuadrado perfecto más grande que es factor de y^{17} es y^{16}. Escribe y^{17} como $y^{16} \cdot y$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^{12}y^{17}} &= \sqrt{x^{12} \cdot y^{16} \cdot y} = \sqrt{x^{12}y^{16}}\,\sqrt{y} \\ &= \sqrt{x^{12}}\sqrt{y^{16}}\,\sqrt{y} \\ &= x^6y^8\sqrt{y} \end{aligned}$$

b) Empezamos por encontrar la cuarta potencia perfecta más grande que sea factor de x^6 y y^{23}. Para un índice de 4, la potencia perfecta más grande que es factor de x^6 es x^4. La potencia perfecta más grande que es factor de y^{23} es y^{20}.

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x^6y^{23}} &= \sqrt[4]{x^4 \cdot x^2 \cdot y^{20} \cdot y^3} \\ &= \sqrt[4]{x^4y^{20} \cdot x^2y^3} \\ &= \sqrt[4]{x^4y^{20}}\,\sqrt[4]{x^2y^3} \\ &= xy^5\sqrt[4]{x^2y^3} \end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 51

Comprendiendo el álgebra

Con frecuencia los pasos cuando simplificamos un radical se hacen mentalmente. Por ejemplo, en el ejemplo 4 inciso **a)** no mostramos $\sqrt{x^{12}} = x^{12/2} = x^6$ y $\sqrt{y^{16}} = y^{16/2} = y^8$.

Con frecuencia los pasos donde cambiamos la expresión radical a forma exponencial se realizan de forma mental y, por lo tanto, esos pasos no se ilustran.

Consejo útil

En el ejemplo 4 **b)**, mostramos que $\sqrt[4]{x^6y^{23}} = xy^5\sqrt[4]{x^2y^3}$. También se puede simplificar este radical dividiendo los exponentes de las variables del radicando, 6 y 23, entre el índice, 4. Observa la localización de los cocientes y residuos.

6 ÷ 4 da un coeficiente de 1 y un residuo de 2.

$$\sqrt[4]{x^6y^{23}} = x^1y^{\mathbf{5}}\sqrt[4]{x^2y^3}$$

23 ÷ 4 da un coeficiente de **5** y un residuo de 3.

EJEMPLO 5 Simplifica. **a)** $\sqrt{80x^5y^{12}z^3}$ **b)** $\sqrt[3]{54x^{17}y^{25}}$

Solución

a) El cuadrado perfecto más grande que es factor de 80 es 16. El cuadrado perfecto más grande que es un factor de x^5 es x^4. La expresión y^{12} es un cuadrado perfecto. El cuadrado perfecto más grande que es factor de z^3 es z^2. Coloca todos los cuadrados perfectos bajo el mismo radical y luego simplifica.

$$\begin{aligned}\sqrt{80x^5y^{12}z^3} &= \sqrt{16\cdot 5\cdot x^4\cdot x\cdot y^{12}\cdot z^2\cdot z}\\ &= \sqrt{16x^4y^{12}z^2\cdot 5xz}\\ &= \sqrt{16x^4y^{12}z^2}\cdot\sqrt{5xz}\\ &= 4x^2y^6z\sqrt{5xz}\end{aligned}$$

b) El cubo perfecto más grande que es factor de 54 es 27. El cubo perfecto más grande que es un factor de x^{17} es x^{15}. El cubo perfecto más grande que es factor de y^{25} es y^{24}.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{54x^{17}y^{25}} &= \sqrt[3]{27\cdot 2\cdot x^{15}\cdot x^2\cdot y^{24}\cdot y}\\ &= \sqrt[3]{27x^{15}y^{24}\cdot 2x^2y}\\ &= \sqrt[3]{27x^{15}y^{24}}\cdot\sqrt[3]{2x^2y}\\ &= 3x^5y^8\sqrt[3]{2x^2y}\end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 57

3 Simplificar radicales mediante la regla del cociente para radicales

A veces en matemáticas es necesario simplificar un cociente de dos radicales; para hacerlo se utiliza la **regla del cociente para radicales**.

Regla del cociente para radicales

Para números reales no negativos a y b,

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \qquad b \neq 0$$

Ejemplos de la regla del cociente para radicales

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{18}{3}} \qquad \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}$$

$$\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{x^3}{x}} \qquad \sqrt{\frac{x^4}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{y^2}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{y^5}}{\sqrt[3]{y^2}} = \sqrt[3]{\frac{y^5}{y^2}} \qquad \sqrt[3]{\frac{z^9}{27}} = \frac{\sqrt[3]{z^9}}{\sqrt[3]{27}}$$

Los ejemplos 6 y 7 ilustran cómo utilizar la regla del cociente para simplificar expresiones radicales.

EJEMPLO 6 Simplifica. **a)** $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{24x}}{\sqrt[3]{3x}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt[3]{x^4y^7}}{\sqrt[3]{xy^{-5}}}$

Solución En cada parte utilizamos la regla del cociente para escribir el cociente de radicales como un solo radical. Luego simplificamos.

a) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{24x}}{\sqrt[3]{3x}} = \sqrt[3]{\dfrac{24x}{3x}} = \sqrt[3]{8} = 2$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{x^4y^7}}{\sqrt[3]{xy^{-5}}} = \sqrt[3]{\dfrac{x^4y^7}{xy^{-5}}}$ Regla del cociente para radicales

$= \sqrt[3]{x^3y^{12}}$ Simplifica el radicando.

$= xy^4$

Resuelve ahora el ejercicio 93

Cuando se presentaron los radicales en la sección 7.1, se indicó que $\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$ ya que $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$. La regla del cociente puede ser útil en la evaluación de raíces cuadradas que tienen fracciones, como se ilustra en el ejemplo 7 **a)**.

EJEMPLO 7 Simplifica. **a)** $\sqrt{\dfrac{121}{25}}$ **b)** $\sqrt[3]{\dfrac{8x^4y}{27xy^{10}}}$ **c)** $\sqrt[4]{\dfrac{18xy^5}{3x^9y}}$

Solución En cada parte, primero simplificamos el radicando, si esto es posible. Luego utilizamos la regla del cociente para escribir el radical dado como cociente de radicales.

a) $\sqrt{\dfrac{121}{25}} = \dfrac{\sqrt{121}}{\sqrt{25}} = \dfrac{11}{5}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{8x^4y}{27xy^{10}}} = \sqrt[3]{\dfrac{8x^3}{27y^9}} = \dfrac{\sqrt[3]{8x^3}}{\sqrt[3]{27y^9}} = \dfrac{2x}{3y^3}$

c) $\sqrt[4]{\dfrac{18xy^5}{3x^9y}} = \sqrt[4]{\dfrac{6y^4}{x^8}} = \dfrac{\sqrt[4]{6y^4}}{\sqrt[4]{x^8}} = \dfrac{\sqrt[4]{y^4}\,\sqrt[4]{6}}{x^2} = \dfrac{y\sqrt[4]{6}}{x^2}$

Resuelve ahora el ejercicio 97

Cómo evitar errores comunes

Las siguientes simplificaciones son correctas, ya que los números y variables cancelados no están dentro de raíces cuadradas.

CORRECTO	CORRECTO
$\dfrac{\overset{2}{\cancel{6}}\sqrt{2}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 2\sqrt{2}$	$\dfrac{\cancel{x}\sqrt{2}}{\cancel{x}} = \sqrt{2}$

Cuando una expresión está dentro de una raíz cuadrada, no puede dividirse entre una expresión que está fuera de ella.

CORRECTO		INCORRECTO
$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	No puede simplificarse más.	$\dfrac{\sqrt{\cancel{2}^{\,1}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = \sqrt{1} = 1$
$\dfrac{\sqrt{x^3}}{x} = \dfrac{\sqrt{x^2}\,\sqrt{x}}{x} = \dfrac{\cancel{x}\sqrt{x}}{\cancel{x}} = \sqrt{x}$		$\dfrac{\sqrt{x^{\cancel{3}^{\,2}}}}{\cancel{x}} = \sqrt{x^2} = x$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.3

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

cociente cuadrado menores 3 cubo mayores 2 producto 4

1. Un número o expresión es un ______________ perfecto si es el cuadrado de una expresión.
2. Un número o expresión es un ______________ perfecto si puede escribirse como el cubo de una expresión.
3. Una variable con un exponente es un cubo perfecto si el exponente es divisible entre ______________.
4. Una variable con un exponente es un cuadrado perfecto si el exponente es divisible entre ______________.
5. Una variable con un exponente es una cuarta potencia perfecta si el exponente es divisible entre ______________.
6. Cuando se simplifica un radical, los exponentes de las variables del radicando son ______________ que el índice.
7. La regla del ______________ para radicales establece que para números reales no negativos, $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.
8. La regla del ______________ para radicales establece que para números reales no negativos, $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, $b \neq 0$.

Practica tus habilidades

Simplifica. Supón que todas las variables representan números reales positivos.

9. $\sqrt{49}$ **10.** $\sqrt{100}$ **11.** $\sqrt{24}$ **12.** $\sqrt{18}$

13. $\sqrt{32}$ **14.** $\sqrt{12}$ **15.** $\sqrt{50}$ **16.** $\sqrt{72}$

17. $\sqrt{75}$ **18.** $\sqrt{300}$ **19.** $\sqrt{40}$ **20.** $\sqrt{600}$

21. $\sqrt[3]{16}$ **22.** $\sqrt[3]{24}$ **23.** $\sqrt[3]{54}$ **24.** $\sqrt[3]{81}$

25. $\sqrt[3]{32}$ **26.** $\sqrt[3]{108}$ **27.** $\sqrt[3]{40}$ **28.** $\sqrt[4]{80}$

29. $\sqrt[4]{48}$ **30.** $\sqrt[4]{162}$ **31.** $-\sqrt[5]{64}$ **32.** $-\sqrt[5]{243}$

33. $\sqrt[3]{b^9}$ **34.** $6\sqrt{y^{12}}$ **35.** $\sqrt[3]{x^6}$ **36.** $\sqrt[5]{y^{20}}$

37. $\sqrt{x^3}$ **38.** $-\sqrt{x^5}$ **39.** $\sqrt{a^5}$ **40.** $\sqrt{b^7}$

41. $8\sqrt[3]{z^{32}}$ **42.** $\sqrt[3]{a^7}$ **43.** $\sqrt[4]{b^{23}}$ **44.** $\sqrt[5]{z^7}$

45. $\sqrt[6]{x^9}$ **46.** $\sqrt[7]{y^{15}}$ **47.** $3\sqrt[5]{y^{23}}$ **48.** $\sqrt{24x^3}$

49. $2\sqrt{50y^9}$ **50.** $\sqrt{75a^7b^{11}}$ **51.** $\sqrt[3]{x^3y^7}$ **52.** $\sqrt{x^5y^9}$

53. $\sqrt[5]{a^6b^{23}}$ **54.** $-\sqrt{20x^6y^7z^{12}}$ **55.** $\sqrt{24x^{15}y^{20}z^{27}}$ **56.** $\sqrt[3]{16x^3y^6}$

57. $\sqrt[3]{81a^6b^8}$ **58.** $\sqrt[3]{128a^{10}b^{11}c^{12}}$ **59.** $\sqrt[4]{32x^8y^9z^{19}}$ **60.** $\sqrt[4]{48x^{11}y^{21}}$

61. $\sqrt[4]{81a^8b^9}$ **62.** $-\sqrt[4]{32x^{18}y^{31}}$ **63.** $\sqrt[5]{32a^{10}b^{12}}$ **64.** $\sqrt[6]{64x^{12}y^{23}z^{50}}$

Simplifica. Supón que todas las variables representan números reales positivos.

65. $\sqrt{\dfrac{18}{2}}$ **66.** $\sqrt{\dfrac{45}{5}}$ **67.** $\sqrt{\dfrac{81}{100}}$ **68.** $\sqrt{\dfrac{8}{50}}$

69. $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ **70.** $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ **71.** $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}}$ **72.** $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{60}}$

73. $\sqrt[3]{\dfrac{3}{24}}$ **74.** $\sqrt[3]{\dfrac{2}{54}}$ **75.** $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}}$ **76.** $\dfrac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}}$

77. $\sqrt[4]{\dfrac{3}{48}}$ **78.** $\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$ **79.** $\sqrt[5]{\dfrac{96}{3}}$ **80.** $\dfrac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{64}}$

81. $\sqrt{\dfrac{x^2}{9}}$ **82.** $\sqrt{\dfrac{9y^4}{z^2}}$ **83.** $\sqrt{\dfrac{16x^4}{25y^{10}}}$ **84.** $\sqrt{\dfrac{49a^8b^{10}}{121c^{14}}}$

85. $\sqrt[3]{\dfrac{c^6}{64}}$ **86.** $\sqrt[3]{\dfrac{27x^6}{y^{12}}}$ **87.** $\sqrt[3]{\dfrac{a^8b^{12}}{b^{-8}}}$ **88.** $\sqrt[4]{\dfrac{16x^{16}y^{32}}{81x^{-4}}}$

89. $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}$ **90.** $\dfrac{\sqrt{64x^5}}{\sqrt{2x^3}}$ **91.** $\dfrac{\sqrt{27x^6}}{\sqrt{3x^2}}$ **92.** $\dfrac{\sqrt{72x^3y^5}}{\sqrt{8x^3y^7}}$

93. $\dfrac{\sqrt{48x^6y^9}}{\sqrt{6x^2y^6}}$ **94.** $\dfrac{\sqrt{300a^{10}b^{11}}}{\sqrt{2ab^4}}$ **95.** $\sqrt[3]{\dfrac{5xy}{8x^{13}}}$ **96.** $\sqrt[3]{\dfrac{64a^5b^{12}}{27a^{14}b^5}}$

97. $\sqrt[3]{\dfrac{25x^2y^9}{5x^8y^2}}$ **98.** $\sqrt[3]{\dfrac{54xy^4z^{17}}{18x^{13}z^4}}$ **99.** $\sqrt[4]{\dfrac{10x^4y}{81x^{-8}}}$ **100.** $\sqrt[4]{\dfrac{3a^6b^5}{16a^{-6}b^{13}}}$

Ejercicios de conceptos y escritura

101. a) ¿Cómo se obtienen los números que son cuadrados perfectos?

b) Escribe los primeros seis cuadrados perfectos.

102. a) ¿Cómo se obtienen los números que son cubos perfectos?

b) Escribe los primeros seis cubos perfectos.

103. Cuando proporcionamos la regla del producto, establecimos que para números reales no negativos a y b, $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. ¿Por qué es necesario especificar que a y b son números reales no negativos?

104. Cuando proporcionamos la regla del cociente, establecimos que para números reales no negativos a y b, $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, $b \neq 0$. ¿Por qué es necesario especificar que a y b son números reales no negativos?

105. Prueba que $\sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$ convirtiendo $\sqrt{a\cdot b}$ a forma exponencial.

106. El producto de dos radicales ¿siempre será un radical? Proporciona un ejemplo para apoyar tu respuesta.

107. El cociente de dos radicales ¿siempre será un radical? Proporciona un ejemplo para apoyar tu respuesta.

108. Prueba que $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ convirtiendo $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ a forma exponencial.

109. a) La expresión $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}}$ ¿siempre será igual a 1?

b) Si tu respuesta al inciso **a)** fue no, ¿en qué condiciones $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}}$ será igual a 1?

Ejercicios de repaso acumulados

[2.2] **110.** Despeja C de la fórmula $F = \dfrac{9}{5}C + 32$.

[2.6] **111.** Resuelve para x: $\left|\dfrac{2x-4}{5}\right| = 12$.

[5.3] **112.** Divide $\dfrac{15x^{12} - 5x^9 + 20x^6}{5x^6}$.

[5.6] **113.** Factoriza $(x-3)^3 + 8$.

7.4 Suma, resta y multiplicación de radicales

1 Sumar y restar radicales.

2 Multiplicar radicales.

1 Sumar y restar radicales

Radicales semejantes y no semejantes

- Los **radicales semejantes** son aquellos que tienen el mismo radicando y el mismo índice.
- Los **radicales no semejantes** son los que difieren en el radicando o en el índice.

Comprendiendo el álgebra

Sumamos radicales semejantes usando la propiedad distributiva de la misma forma que cuando sumamos términos semejantes.

Por ejemplo, sumamos los términos semejantes $3x$ y $4x$ como sigue:

$$3x + 4x = (3+4)x = 7x$$

Sumamos los radicales semejantes $3\sqrt{2}$ y $4\sqrt{2}$ como sigue:

$$3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = (3+4)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

Ejemplos de radicales semejantes	Ejemplos de radicales no semejantes	
$\sqrt{5}, 3\sqrt{5}$	$\sqrt{5}, \sqrt[3]{5}$	Los índices difieren.
$6\sqrt{7}, -2\sqrt{7}$	$\sqrt{6}, \sqrt{7}$	Los radicandos difieren.
$\sqrt{x}, 5\sqrt{x}$	$\sqrt{x}, \sqrt{2x}$	Los radicandos difieren.
$\sqrt[3]{2x}, -4\sqrt[3]{2x}$	$\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}$	Los índices difieren.
$\sqrt[4]{x^2y^5}, -\sqrt[4]{x^2y^5}$	$\sqrt[3]{xy}, \sqrt[3]{x^2y}$	Los radicandos difieren.

La propiedad distributiva se usa para sumar o restar radicales semejantes de la misma forma en la que se suman o restan términos semejantes.

Ejemplos de sumas y restas de radicales semejantes

$$3\sqrt{6} + 2\sqrt{6} = (3+2)\sqrt{6} = 5\sqrt{6}$$

$$5\sqrt{x} - 7\sqrt{x} = (5-7)\sqrt{x} = -2\sqrt{x}$$

$$\sqrt[3]{4x^2} + 5\sqrt[3]{4x^2} = (1+5)\sqrt[3]{4x^2} = 6\sqrt[3]{4x^2}$$

$$4\sqrt{5x} - y\sqrt{5x} = (4-y)\sqrt{5x}$$

EJEMPLO 1 Simplifica.

a) $6 + 4\sqrt{2} - \sqrt{2} + 7$ **b)** $2\sqrt[3]{x} + 8x + 4\sqrt[3]{x} - 3$

Solución

a) $6 + 4\sqrt{2} - \sqrt{2} + 7 = 6 + 7 + 4\sqrt{2} - \sqrt{2}$ Coloca juntos los términos semejantes.

$$= 13 + (4 - 1)\sqrt{2}$$
$$= 13 + 3\sqrt{2} \quad (\text{o } 3\sqrt{2} + 13)$$

b) $2\sqrt[3]{x} + 8x + 4\sqrt[3]{x} - 3 = 6\sqrt[3]{x} + 8x - 3$

Resuelve ahora el ejercicio 15

Como se mencionó en la sección 7.3, a veces es posible convertir radicales no semejantes a radicales semejantes simplificando uno o más de ellos.

EJEMPLO 2 Simplifica $\sqrt{3} + \sqrt{27}$.

Solución Como $\sqrt{3}$ y $\sqrt{27}$ son radicales no semejantes, no se pueden sumar como están ahora. Sin embargo, podemos simplificar $\sqrt{27}$ para obtener radicales semejantes.

$$\sqrt{3} + \sqrt{27} = \sqrt{3} + \sqrt{9}\sqrt{3}$$
$$= \sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

Resuelve ahora el ejercicio 19

Para sumar o restar radicales

1. Simplifica cada expresión radical.
2. Combina (suma o resta) los radicales semejantes (si existen).

EJEMPLO 3 Simplifica.

a) $5\sqrt{24} + \sqrt{54}$ **b)** $2\sqrt{45} - \sqrt{80} + \sqrt{20}$ **c)** $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{81} - 7\sqrt[3]{3}$

Solución

a) $5\sqrt{24} + \sqrt{54} = 5 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{6}$

$$= 5 \cdot 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6}$$
$$= 10\sqrt{6} + 3\sqrt{6} = 13\sqrt{6}$$

b) $2\sqrt{45} - \sqrt{80} + \sqrt{20} = 2 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{5}$

$$= 2 \cdot 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$$
$$= 6\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

c) $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{81} - 7\sqrt[3]{3} = 3 + \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{3} - 7\sqrt[3]{3}$

$$= 3 + 3\sqrt[3]{3} - 7\sqrt[3]{3} = 3 - 4\sqrt[3]{3}$$

Resuelve ahora el ejercicio 23

EJEMPLO 4 Simplifica. **a)** $\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2 y} + x\sqrt{y}$ **b)** $\sqrt[3]{x^{13}y^2} - \sqrt[3]{x^4 y^8}$

Solución

a) $\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2 y} + x\sqrt{y} = x - \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y} + x\sqrt{y}$

$$= x - x\sqrt{y} + x\sqrt{y}$$
$$= x$$

b) $\sqrt[3]{x^{13}y^2} - \sqrt[3]{x^4 y^8} = \sqrt[3]{x^{12}} \cdot \sqrt[3]{xy^2} - \sqrt[3]{x^3 y^6} \cdot \sqrt[3]{xy^2}$

$$= x^4\sqrt[3]{xy^2} - xy^2\sqrt[3]{xy^2}$$

Ahora factoriza el factor común, $\sqrt[3]{xy^2}$.

$$= (x^4 - xy^2)\sqrt[3]{xy^2}$$

Resuelve ahora el ejercicio 35

Consejo útil

La regla del producto y la regla del cociente para radicales que se presentaron en la sección 7.3 son

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Con frecuencia los estudiantes suponen, erróneamente, que existen propiedades semejantes para la suma y la resta, pero esto no es así. Para comprobarlo, sea n una raíz cuadrada (índice 2), $a = 9$ y $b = 16$.

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} &\neq \sqrt[n]{a+b}\\ \sqrt{9} + \sqrt{16} &\neq \sqrt{9+16}\\ 3 + 4 &\neq \sqrt{25}\\ 7 &\neq 5\end{aligned}$$

2 Multiplicar radicales

Para multiplicar radicales se utiliza la regla del producto que se indicó anteriormente. Después de la multiplicación, con frecuencia se simplifica el nuevo radical (ver ejemplos 5 y 6).

EJEMPLO 5 Multiplica y simplifica.

a) $\sqrt{6x^3}\,\sqrt{8x^6}$ **b)** $\sqrt[3]{2x}\,\sqrt[3]{4x^2}$ **c)** $\sqrt[4]{4x^{11}y}\,\sqrt[4]{16x^6y^{22}}$

Solución

a)
$$\begin{aligned}\sqrt{6x^3}\,\sqrt{8x^6} &= \sqrt{6x^3\cdot 8x^6} && \text{Regla del producto para radicales}\\ &= \sqrt{48x^9}\\ &= \sqrt{16x^8}\sqrt{3x} && 16x^8 \text{ es un cuadrado perfecto.}\\ &= 4x^4\sqrt{3x}\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2x}\,\sqrt[3]{4x^2} &= \sqrt[3]{2x\cdot 4x^2} && \text{Regla del producto para radicales}\\ &= \sqrt[3]{8x^3} && 8x^3 \text{ es un cubo perfecto.}\\ &= 2x\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\sqrt[4]{4x^{11}y}\,\sqrt[4]{16x^6y^{22}} &= \sqrt[4]{4x^{11}y\cdot 16x^6y^{22}} && \text{Regla del producto para radicales}\\ &= \sqrt[4]{64x^{17}y^{23}}\\ &= \sqrt[4]{16x^{16}y^{20}}\,\sqrt[4]{4xy^3} && \text{Las raíces cuartas perfectas más grandes que son factores, son 16, } x^{16} \text{ y } y^{20}.\\ &= 2x^4y^5\sqrt[4]{4xy^3}\end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 47

Como se indicó antes, cuando se simplifica un radical, los exponentes de las variables de los radicandos son menores que el índice.

EJEMPLO 6 Multiplica y simplifica $\sqrt{2x}\,(\sqrt{8x} - \sqrt{50})$.

Solución Empieza por utilizar la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned}\sqrt{2x}\,(\sqrt{8x} - \sqrt{50}) &= (\sqrt{2x})(\sqrt{8x}) + (\sqrt{2x})(-\sqrt{50})\\ &= \sqrt{16x^2} - \sqrt{100x}\\ &= 4x - \sqrt{100}\,\sqrt{x}\\ &= 4x - 10\sqrt{x}\end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 53

Comprendiendo el álgebra

Recuerda que PIES es un acrónimo para **P**rimeros, **I**nteriores, **E**xteriores, **S**egundos. El método PIES se utiliza para multiplicar dos binomios como sigue:

$$(a+b)(c+d) = \overset{\overset{P}{\downarrow}}{ac} + \overset{\overset{I}{\downarrow}}{ad} + \overset{\overset{E}{\downarrow}}{bc} + \overset{\overset{S}{\downarrow}}{bd}$$

También usamos el método PIES para multiplicar expresiones radicales como:

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{d})$.

En el ejemplo 6, observa que podría haberse obtenido el mismo resultado simplificando primero $\sqrt{8x}$ y $\sqrt{50}$ y después multiplicando. Intenta resolver dicho ejemplo de esta manera.

A continuación multiplicaremos expresiones radicales con sumas o diferencias en los radicales como $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c} + \sqrt{d}\right)$. Utilizaremos el método PIES que se utilizó para multiplicar dos binomios.

EJEMPLO 7 Multiplica $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} - y)$.

Solución Multiplicaremos utilizando el método PIES.

$$\begin{aligned}
&\overset{\overset{P}{\downarrow}}{(\sqrt{x})(\sqrt{x})} + \overset{\overset{I}{\downarrow}}{(\sqrt{x})(-y)} + \overset{\overset{E}{\downarrow}}{(-\sqrt{y})(\sqrt{x})} + \overset{\overset{S}{\downarrow}}{(-\sqrt{y})(-y)}\\
&= \sqrt{x^2} - y\sqrt{x} - \sqrt{xy} + y\sqrt{y}\\
&= x - y\sqrt{x} - \sqrt{xy} + y\sqrt{y}
\end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 63

EJEMPLO 8 Simplifica. **a)** $(2\sqrt{6} - \sqrt{3})^2$ **b)** $\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2y^2}\right)\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{8y}\right)$

Solución

a) $(2\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 = (2\sqrt{6} - \sqrt{3})(2\sqrt{6} - \sqrt{3})$

Ahora multiplica los factores usando el método PIES.

$$\begin{aligned}
&\overset{P}{(2\sqrt{6})(2\sqrt{6})} + \overset{I}{(2\sqrt{6})(-\sqrt{3})} + \overset{E}{(-\sqrt{3})(2\sqrt{6})} + \overset{S}{(-\sqrt{3})(-\sqrt{3})}\\
&= 4(6) - 2\sqrt{18} - 2\sqrt{18} + 3\\
&= 24 - 2\sqrt{18} - 2\sqrt{18} + 3\\
&= 27 - 4\sqrt{18}\\
&= 27 - 4\sqrt{9}\sqrt{2}\\
&= 27 - 12\sqrt{2}
\end{aligned}$$

b) Multiplica los factores usando el método PIES

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2y^2}\right)\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{8y}\right) &= \overset{P}{(\sqrt[3]{x})\left(\sqrt[3]{x^2}\right)} + \overset{I}{(\sqrt[3]{x})(-\sqrt[3]{8y})} + \overset{E}{\left(-\sqrt[3]{2y^2}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}\right)} + \overset{S}{\left(-\sqrt[3]{2y^2}\right)(-\sqrt[3]{8y})}\\
&= \sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{8xy} - \sqrt[3]{2x^2y^2} + \sqrt[3]{16y^3}\\
&= \sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{8}\,\sqrt[3]{xy} - \sqrt[3]{2x^2y^2} + \sqrt[3]{8y^3}\,\sqrt[3]{2}\\
&= x - 2\sqrt[3]{xy} - \sqrt[3]{2x^2y^2} + 2y\sqrt[3]{2}
\end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 99

EJEMPLO 9 Multiplica $(3 + \sqrt{6})(3 - \sqrt{6})$.

Solución Podemos multiplicar mediante el método PIES.

$$\begin{aligned}
(3 + \sqrt{6})(3 - \sqrt{6}) &= \overset{P}{3(3)} + \overset{I}{3(-\sqrt{6})} + \overset{E}{(\sqrt{6})(3)} + \overset{S}{(\sqrt{6})(-\sqrt{6})}.\\
&= 9 - 3\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - \sqrt{36}\\
&= 9 - \sqrt{36}\\
&= 9 - 6 = 3
\end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 59

En el ejemplo 9, observa que multiplicamos *la suma y la diferencia de las mismas dos expresiones radicales*. Recuerda de la sección 5.6 que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Si hacemos $a = 3$ y $b = \sqrt{6}$, podemos multiplicar como sigue.

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= a^2 - b^2\\(3 + \sqrt{6})(3 - \sqrt{6}) &= 3^2 - (\sqrt{6})^2\\&= 9 - 6\\&= 3\end{aligned}$$

Cuando multiplicamos la suma y la diferencia de las mismas dos expresiones radicales, podemos obtener la respuesta mediante la diferencia de los cuadrados de las dos expresiones radicales.

EJEMPLO 10 Si $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ y $g(x) = \sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2}$, determina **a)** $(f \cdot g)(x)$ y **b)** $(f \cdot g)(6)$.

Solución

a) De la sección 3.6, sabemos que $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x)\\&= \sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2}\right) && \text{Sustituidos los valores dados.}\\&= \sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{x^2} && \text{Propiedad distributiva}\\&= \sqrt[3]{x^6} + \sqrt[3]{x^4} && \text{Regla del producto para radicales}\\&= x^2 + x\sqrt[3]{x} && \text{Radicales simplificados.}\end{aligned}$$

b) Para calcular $(f \cdot g)(6)$, sustituye x por 6 en la respuesta que obtuviste en el inciso **a)**.

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= x^2 + x\sqrt[3]{x}\\(f \cdot g)(6) &= 6^2 + 6\sqrt[3]{6} && \text{Sustituye } x \text{ por 6.}\\&= 36 + 6\sqrt[3]{6}\end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 77

Como se indicó antes en este capítulo, a menos de que se indique lo contrario, suponemos que las expresiones variables en los radicandos representan números reales no negativos. En el ejemplo 11 demostramos cómo se debe usar el valor absoluto para los casos en los que el radicando puede representar cualquier número real.

EJEMPLO 11 Simplifica $f(x)$ si

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$ suponiendo que $x \geq -3$.

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$ suponiendo que x puede ser cualquier número real.

Solución

a)
$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{x^2 + 6x + 9}\\&= \sqrt{(x + 3)^2} && x^2 + 6x + 9 \text{ se factorizó como } (x + 3)^2.\\&= x + 3 && \text{Como } x \geq -3,\ x + 3 \geq 0 \text{ no se necesitan barras de valor absoluto.}\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{x^2 + 6x + 9}\\&= \sqrt{(x + 3)^2} && x^2 + 6x + 9 \text{ se factorizó como } (x + 3)^2.\\&= |x + 3| && \text{Como } x \text{ puede ser cualquier número real, } x + 3 \text{ puede ser negativo son necesarias barras de valor absoluto.}\end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 105

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.4

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

conmutativa   distributiva   menores   semejantes   PIES   primeros   mayores   no semejantes

1. Los radicales que tienen el mismo radicando e índice son radicales ________________.

2. Los radicales que difieren en el radicando o en el índice son radicales ________________.

3. La propiedad ________________ se usa para sumar o restar radicales semejantes de la misma forma en la que se suman o restan términos semejantes.

4. Cuando un radical se simplifica, los exponentes de las variables en el radicando son ________________ que el índice.

5. Cuando multiplicamos expresiones radicales que tienen sumas o restas de radicales, como $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{d})$, usamos el método ________________.

6. PIES es un acrónimo para ________________, interiores, exteriores, segundos.

Practica tus habilidades

En este conjunto de ejercicios, supón que todas las variables representan números reales positivos.

Simplifica.

7. $\sqrt{2} - \sqrt{2}$
8. $4\sqrt{3} - \sqrt{3}$
9. $6\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$
10. $3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 11$
11. $2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 5$
12. $6\sqrt[3]{7} - 8\sqrt[3]{7}$
13. $2\sqrt[4]{y} - 9\sqrt[4]{y}$
14. $3\sqrt[5]{a} + 7 + 5\sqrt[5]{a} - 2$
15. $3\sqrt{5} - \sqrt[3]{x} + 6\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{x}$
16. $9 + 4\sqrt[4]{a} - 7\sqrt[4]{a} + 5$
17. $5\sqrt{x} - 8\sqrt{y} + 3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} - \sqrt{x}$
18. $8\sqrt{a} + 4\sqrt[3]{b} + 7\sqrt{a} - 12\sqrt[3]{b}$

Simplifica.

19. $\sqrt{3} + \sqrt{12}$
20. $\sqrt{8} + \sqrt{18}$
21. $-6\sqrt{75} + 5\sqrt{125}$
22. $3\sqrt{250} + 4\sqrt{160}$
23. $-4\sqrt{90} + 3\sqrt{40} + 2\sqrt{10}$
24. $3\sqrt{40x^2y} + 2x\sqrt{490y}$
25. $\sqrt{500xy^2} + y\sqrt{320x}$
26. $5\sqrt{8} + 2\sqrt{50} - 3\sqrt{72}$
27. $2\sqrt{5x} - 3\sqrt{20x} - 4\sqrt{45x}$
28. $3\sqrt{27c^2} - 2\sqrt{108c^2} - \sqrt{48c^2}$
29. $3\sqrt{50a^2} - 3\sqrt{72a^2} - 8a\sqrt{18}$
30. $4\sqrt[3]{5} - 5\sqrt[3]{40}$
31. $\sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{32}$
32. $3\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}$
33. $\sqrt[3]{27} - 5\sqrt[3]{8}$
34. $3\sqrt{45x^3} + \sqrt{5x}$
35. $2\sqrt[3]{a^4b^2} + 4a\sqrt[3]{ab^2}$
36. $5y\sqrt[4]{48x^5} - x\sqrt[4]{3x^5y^4}$
37. $\sqrt{4r^7s^5} + 3r^2\sqrt{r^3s^5} - 2rs\sqrt{r^5s^3}$
38. $x\sqrt[3]{27x^5y^2} - x^2\sqrt[3]{x^2y^2} + 4\sqrt[3]{x^8y^2}$
39. $\sqrt[3]{128x^8y^{10}} - 2x^2y\sqrt[3]{16x^2y^7}$
40. $5\sqrt[3]{320x^5y^8} + 3x\sqrt[3]{135x^2y^8}$

Simplifica.

41. $\sqrt{2}\sqrt{8}$
42. $\sqrt{3}\,\sqrt{27}$
43. $\sqrt[3]{4}\,\sqrt[3]{14}$
44. $\sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{54}$
45. $\sqrt{9m^3n^7}\,\sqrt{3mn^4}$
46. $\sqrt[3]{5ab^2}\,\sqrt[3]{25a^4b^{12}}$
47. $\sqrt[3]{9x^7y^{10}}\,\sqrt[3]{6x^4y^3}$
48. $\sqrt[4]{3x^9y^{12}}\,\sqrt[4]{54x^4y^7}$
49. $\sqrt[5]{x^{24}y^{30}z^9}\,\sqrt[5]{x^{13}y^8z^7}$
50. $\sqrt[4]{8x^4yz^3}\,\sqrt[4]{2x^2y^3z^7}$
51. $\left(\sqrt[3]{2x^3y^4}\right)^2$
52. $\sqrt{2}(\sqrt{6} + \sqrt{18})$
53. $\sqrt{5}(\sqrt{5} - \sqrt{3})$
54. $\sqrt{3}(\sqrt{12} + \sqrt{8})$
55. $\sqrt[3]{y}\left(2\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{y^8}\right)$
56. $\sqrt{3y}\left(\sqrt{27y^2} - \sqrt{y}\right)$
57. $2\sqrt[3]{x^4y^5}\left(\sqrt[3]{8x^{12}y^4} + \sqrt[3]{16xy^9}\right)$
58. $\sqrt[5]{16x^7y^6}\left(\sqrt[5]{2x^6y^9} - \sqrt[5]{10x^3y^7}\right)$
59. $(8 + \sqrt{5})(8 - \sqrt{5})$
60. $(9 - \sqrt{5})(9 + \sqrt{5})$
61. $(\sqrt{6} + x)(\sqrt{6} - x)$
62. $(\sqrt{x} + y)(\sqrt{x} - y)$
63. $(\sqrt{7} - \sqrt{z})(\sqrt{7} + \sqrt{z})$
64. $(3\sqrt{a} - 5\sqrt{b})(3\sqrt{a} + 5\sqrt{b})$
65. $(\sqrt{3} + 4)(\sqrt{3} + 5)$
66. $(1 + \sqrt{5})(8 + \sqrt{5})$
67. $(3 - \sqrt{2})(4 - \sqrt{8})$
68. $(5\sqrt{6} + 3)(4\sqrt{6} - 1)$
69. $(4\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$
70. $(\sqrt{3} + 7)^2$
71. $(2\sqrt{5} - 3)^2$
72. $(\sqrt{y} + \sqrt{6z})(\sqrt{2z} - \sqrt{8y})$
73. $(2\sqrt{3x} - \sqrt{y})(3\sqrt{3x} + \sqrt{y})$
74. $(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4})$
75. $(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6})(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{36})$
76. $(\sqrt[3]{4x} - \sqrt[3]{2y})(\sqrt[3]{4x} + \sqrt[3]{10})$

En los ejercicios 77-82, f(x) y g(x) están dadas. Determina $(f \cdot g)(x)$.

77. $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{3}$
78. $f(x) = \sqrt{6x}, g(x) = \sqrt{6x} - \sqrt{10x}$
79. $f(x) = \sqrt[3]{x}, g(x) = \sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{x^4}$
80. $f(x) = \sqrt[3]{2x^2}, g(x) = \sqrt[3]{4x} + \sqrt[3]{32x^2}$
81. $f(x) = \sqrt[4]{3x^2}, g(x) = \sqrt[4]{9x^4} - \sqrt[4]{x^7}$
82. $f(x) = \sqrt[4]{2x^3}, g(x) = \sqrt[4]{8x^5} - \sqrt[4]{5x^6}$

Simplifica. Estos ejercicios son una combinación de los que se presentaron antes en esta sección.

83. $\sqrt{18}$

84. $\sqrt{300}$

85. $\sqrt{125} - \sqrt{20}$

86. $4\sqrt{7} + 2\sqrt{63} - 2\sqrt{28}$

87. $(3\sqrt{2} - 4)(\sqrt{2} + 5)$

88. $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{2} + \sqrt{20})$

89. $\sqrt{6}(5 - \sqrt{2})$

90. $3\sqrt[3]{81} + 4\sqrt[3]{24}$

91. $\sqrt{150}\sqrt{3}$

92. $\sqrt[4]{2}\,\sqrt[4]{40}$

93. $\sqrt[3]{80x^{11}}$

94. $\sqrt[3]{x^9y^{11}z}$

95. $\sqrt[6]{128ab^{17}c^9}$

96. $\sqrt[5]{14x^4y^2}\,\sqrt[5]{3x^4y^3}$

97. $2b\sqrt[4]{a^4b} + ab\sqrt[4]{16b}$

98. $2\sqrt[3]{24a^3y^4} + 4a\sqrt[3]{81y^4}$

99. $\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{y^2}\right)$

100. $(\sqrt[3]{a} + 5)\left(\sqrt[3]{a^2} - 6\right)$

101. $\sqrt[3]{3ab^2}\left(\sqrt[3]{4a^4b^3} - \sqrt[3]{8a^5b^4}\right)$

102. $\sqrt[4]{4st^2}\left(\sqrt[4]{2s^5t^6} + \sqrt[4]{5s^9t^2}\right)$

Simplifica las siguientes expresiones. En los ejercicios 105 y 106, supón que las variables pueden ser cualquier número real. Ver ejemplo 11.

103. $f(x) = \sqrt{2x - 5}\sqrt{2x - 5},\ x \geq \dfrac{5}{2}$

104. $g(a) = \sqrt{3a + 7}\,\sqrt{3a + 7},\ a \geq -\dfrac{7}{3}$

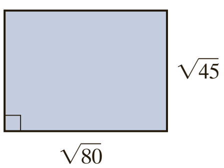
105. $h(r) = \sqrt{4r^2 - 32r + 64}$

106. $f(b) = \sqrt{20b^2 + 60b + 45}$

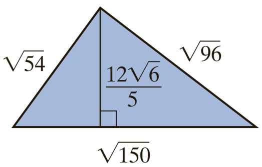
Resolución de problemas

Determina el perímetro y el área de las siguientes figuras. Da tu respuesta en forma radical con los radicales simplificados (Sugerencia: ver la página 711 para las fórmulas que necesites).

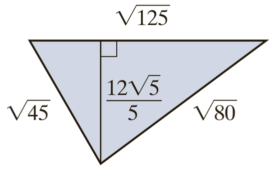
107.



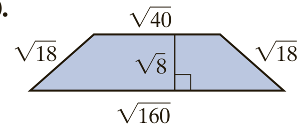
108.



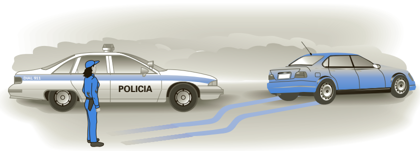
109.



110.



111. Marcas de derrape A veces los agentes de tránsito utilizan la fórmula $s = \sqrt{30FB}$ para determinar la velocidad de un auto, s, en millas por hora, con base en las marcas de derrape que dejó sobre el camino. En la fórmula, la letra F representa "el factor del camino", que se determina según el material y las condiciones de la superficie del camino, y la letra B representa la distancia de frenado, en pies. El oficial Jenkins investiga un accidente. Determina la velocidad del automóvil si las marcas de derrape son de 80 pies de longitud, y **a)** el camino era asfalto seco, cuyo factor de camino es de 0.85, y **b)** el camino era grava mojada, cuyo factor de camino es 0.52.



112. Manguera contra incendio La velocidad a la que fluye el agua R, en galones por minuto, a través de una manguera contra incendios puede calcularse mediante la fórmula $R = 28d^2\sqrt{P}$, donde d es el diámetro de la boquilla de la manguera, en pulgadas, y P es la presión de salida, en libras por pulgada cuadrada. Si la boquilla de la manguera tiene un diámetro de 2.5 pulgadas y la presión de salida es de 80 libras por pulgada cuadrada, determina la velocidad del flujo de agua.

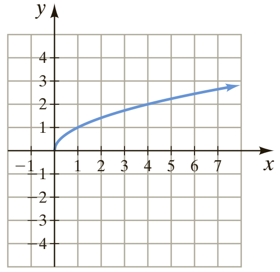
© Mishella/Shutterstock

113. Estatura de niñas La fórmula $f(t) = 3\sqrt{t} + 19$ puede usarse para calcular la estatura media $f(t)$, en pulgadas, de niñas de edad t, en meses, donde $1 \leq t \leq 60$. Calcula la estatura promedio de niñas de **a)** 36 meses y **b)** 40 meses.

114. Desviación estándar En estadística, la desviación estándar de la población, σ (se lee "sigma"), es una medida de la dispersión de un conjunto de datos respecto de su valor medio. Cuanto mayor sea la dispersión, mayor será la desviación estándar. Una fórmula que se utiliza para determinar sigma es $\sigma = \sqrt{npq}$, donde n representa el tamaño de la muestra, p representa el porcentaje (o probabilidad) de que algo específico ocurra, y q el porcentaje (o probabilidad) de que no ocurra. En una muestra de 600 personas que compraron boletos para viajar en avión, el porcentaje que se presentó a su vuelo, p, fue 0.93, y el porcentaje que no lo hizo, q, fue 0.07. Utiliza esta información para determinar σ.

© Radu Razvan/Shutterstock

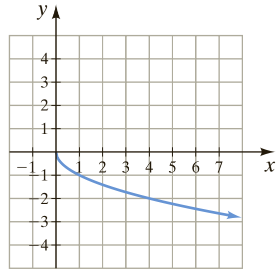
115. A continuación se muestra la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.



a) Si $g(x) = 2$, traza la gráfica de $(f + g)(x)$.

b) ¿Qué sucede si se suma 2 a la gráfica de $f(x)$?

116. La gráfica de $f(x) = -\sqrt{x}$ es la siguiente.



a) Si $g(x) = 3$, traza la gráfica de $(f + g)(x)$.

b) ¿Qué sucede si se suma 3 a la gráfica de $f(x)$?

117. Si te indican que $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{x} - 2$.

a) Traza la gráfica de $(f - g)(x)$.

b) ¿Cuál es el dominio de $(f - g)(x)$?

118. Si te indican que $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = -\sqrt{x} - 3$.

a) Traza la gráfica de $(f + g)(x)$.

b) ¿Cuál es el dominio de $(f + g)(x)$?

119. Realiza la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x^2}$.

120. Realiza la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x^2} - 4$.

Ejercicios de conceptos y escritura

121. ¿Puede ser $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b}$? Explica tu respuesta y proporciona un ejemplo que la apoye.

122. Como $64 + 36 = 100$, ¿puede ser $\sqrt{64} + \sqrt{36} = \sqrt{100}$? Explica tu respuesta.

123. ¿La suma de dos radicales siempre dará por resultado un radical? Proporciona un ejemplo para apoyar tu respuesta.

124. ¿La resta de dos radicales siempre dará por resultado un radical? Proporciona un ejemplo para apoyar tu respuesta.

Ejercicios de repaso acumulados

[1.2] **125.** ¿Qué es un número racional?

[1.3] **126.** ¿Qué es un número real?

127. ¿Qué es un número irracional?

128. ¿Cuál es la definición de $|a|$?

[2.2] **129.** Despeja m de la fórmula $E = \frac{1}{2}mv^2$.

[2.5] **130.** Resuelve la desigualdad $-4 < 2x - 3 \leq 7$ e indica la solución **a)** en la recta numérica; **b)** en notación de intervalo; **c)** en notación constructiva de conjuntos.

Prueba de mitad de capítulo: 7.1-7.4

Para saber tu comprensión de los temas que se han abordado hasta este momento, resuelve este breve examen. Las respuestas, y la sección en que se trató el tema por primera vez, se proporcionan al final del libro. Repasa el tema de las preguntas que respondiste de forma incorrecta.

Determina la raíz que se indica.

1. $\sqrt{121}$

2. $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$

Utiliza el valor absoluto para evaluar.

3. $\sqrt{(-16.3)^2}$

4. $\sqrt{(3a^2 - 4b^3)^2}$

5. Determina $g(16)$ si $g(x) = \frac{x}{8} + \sqrt{4x} - 7$.

6. Escribe $\sqrt[5]{7a^4b^3}$ en forma exponencial.

7. Evalúa $-49^{1/2} + 81^{3/4}$.

Simplifica cada expresión.

8. $\left(\sqrt[4]{a^2b^3c}\right)^{20}$

9. $7x^{-5/2} \cdot 2x^{3/2}$

10. Multiplica $8x^{-2}(x^3 + 2x^{-1/2})$.

Simplifica cada radical.

11. $\sqrt{32x^4y^9}$

12. $\sqrt[6]{64a^{13}b^{23}c^{15}}$

13. $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}}$

14. $\dfrac{\sqrt{20x^5y^{12}}}{\sqrt{180x^{15}y^7}}$

Simplifica. Considera que todas las variables representan números reales positivos.

15. $2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} + 9\sqrt{x} + 15\sqrt{y}$

16. $2\sqrt{90x^2y} + 3x\sqrt{490y}$

17. $(x + \sqrt{5})(2x - 3\sqrt{5})$

18. $2\sqrt{3a}\left(\sqrt{27a^2} - 5\sqrt{4a}\right)$

19. $3b\sqrt[4]{a^5b} + 2ab\sqrt[4]{16ab}$

20. Al simplificar las siguientes raíces cuadradas, ¿en qué incisos la respuesta tiene un valor absoluto? Explica tu respuesta y simplifica los incisos **a)** y **b)**.

a) $\sqrt{(x - 3)^2}$

b) $\sqrt{64x^2}, x \geq 0$

7.5 División de radicales

1 Racionalizar denominadores.
2 Racionalizar un denominador mediante el conjugado.
3 Entender cuándo un radical está simplificado.
4 Utilizar la racionalización del denominador en un problema de adición.
5 Dividir expresiones radicales con índices diferentes.

1 Racionalizar denominadores

Cuando el denominador de una fracción contiene radicales, por lo general se reescribe la fracción como una fracción equivalente en la cual el denominador no contenga radicales. El proceso que utilizamos para reescribir la fracción se conoce como **racionalización del denominador**. En esta sección usaremos la regla del cociente para radicales, presentada en la sección 7.3, para racionalizar denominadores.

Para racionalizar un denominador

Multiplica el numerador y el denominador de la fracción por un radical, que producirá un radicando en el denominador que es una potencia perfecta para el índice.

Cuando el numerador y el denominador se multiplican por la misma expresión radical, en realidad se está multiplicando la fracción por 1, con lo cual no se modifica su valor. Recordemos también que vamos a suponer que todas las variables en los radicandos representarán números reales no negativos.

EJEMPLO 1 Simplifica. **a)** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ **b)** $\dfrac{x}{4\sqrt{3}}$ **c)** $\dfrac{11}{\sqrt{2x}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt[3]{16a^4}}{\sqrt[3]{b}}$

Solución Para simplificar cada expresión debemos racionalizar los denominadores. Para ello, multiplicamos el numerador y el denominador por un radical que haga que el denominador se convierta en una potencia perfecta para el índice dado.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ **b)** $\dfrac{x}{4\sqrt{3}} = \dfrac{x}{4\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{x\sqrt{3}}{4 \cdot 3} = \dfrac{x\sqrt{3}}{12}$

c) Hay dos factores en el radicando, 2 y x. Como 2^2 o 4 es un cuadrado perfecto, y x^2 también es un cuadrado perfecto, multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{2x}$.

$$\frac{11}{\sqrt{2x}} = \frac{11}{\sqrt{2x}} \cdot \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}} = \frac{11\sqrt{2x}}{\sqrt{4x^2}} = \frac{11\sqrt{2x}}{2x}$$

d) El numerador y el denominador carecen de factores comunes. Antes de racionalizar el denominador, simplifiquemos el numerador.

$$\frac{\sqrt[3]{16a^4}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{8a^3}\,\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{b}} \quad \text{Regla del producto para radicales}$$

$$= \frac{2a\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{b}} \quad \text{Simplifica el numerador.}$$

Ahora racionalicemos el denominador. Como el denominador es una raíz cúbica, necesitamos convertir el radicando en un cubo perfecto. En vista de que el denominador contiene b y requerimos b^3, necesitamos dos factores más de b, o b^2. Por tanto, multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt[3]{b^2}$.

$$= \frac{2a\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b^2}} = \frac{2a\sqrt[3]{2ab^2}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{2a\sqrt[3]{2ab^2}}{b}$$

Resuelve ahora el ejercicio 15

Comprendiendo el álgebra

Históricamente, los denominadores han sido racionalizados para poder obtener más fácil una aproximación decimal. En el ejemplo 1 inciso **a)** se demostró que $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Una aproximación de $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ necesitaría una división complicada ya que implicaría que dividieras 1 entre una aproximación de $\sqrt{5}$ que es 2.236.

Sin embargo, aproximar $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ necesita que dividas 2.236 entre 5, ¡lo cual es una tarea mucho más fácil!

EJEMPLO 2 Simplifica. **a)** $\sqrt{\dfrac{5}{7}}$ **b)** $\sqrt[3]{\dfrac{x}{2y^2}}$ **c)** $\sqrt[4]{\dfrac{32x^9y^6}{3z^2}}$

Solución En cada inciso, utilizaremos la regla del cociente para reescribir el radical como un cociente de dos radicales.

a) $\sqrt{\dfrac{5}{7}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{49}} = \dfrac{\sqrt{35}}{7}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{x}{2y^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2y^2}}$

El denominador es $\sqrt[3]{2y^2}$. Multiplicando el numerador y el denominador por la raíz cúbica de una expresión que haga que el radicando del denominador sea $\sqrt[3]{2^3y^3}$. Como $2 \cdot 2^2 = 2^3$ y $y^2 \cdot y = y^3$, multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt[3]{2^2y}$.

$$\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2y^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2y^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2^2y}}{\sqrt[3]{2^2y}}$$

$$= \dfrac{\sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{4y}}{\sqrt[3]{2^3y^3}}$$

$$= \dfrac{\sqrt[3]{4xy}}{2y}$$

c) Después de usar la regla del cociente, simplificamos el numerador.

$$\sqrt[4]{\dfrac{32x^9y^6}{3z^2}} = \dfrac{\sqrt[4]{32x^9y^6}}{\sqrt[4]{3z^2}} \quad \text{Regla del cociente para radicales}$$

$$= \dfrac{\sqrt[4]{16x^8y^4}\,\sqrt[4]{2xy^2}}{\sqrt[4]{3z^2}} \quad \text{Regla del producto para radicales}$$

$$= \dfrac{2x^2y\sqrt[4]{2xy^2}}{\sqrt[4]{3z^2}} \quad \text{Simplificado el numerador.}$$

Ahora racionalicemos el denominador. Necesitamos multiplicar tanto el numerador como el denominador por una raíz cuarta para producir un radicando que sea una cuarta potencia perfecta. Como el denominador tiene un factor de 3, necesitamos tres factores más de 3, o 3^3. Ya que hay dos factores de z, necesitamos dos factores más de z, o z^2. Por tanto, multiplicaremos el numerador y el denominador por $\sqrt[4]{3^3z^2}$.

$$= \dfrac{2x^2y\sqrt[4]{2xy^2}}{\sqrt[4]{3z^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{3^3z^2}}{\sqrt[4]{3^3z^2}}$$

$$= \dfrac{2x^2y\sqrt[4]{2xy^2}\,\sqrt[4]{27z^2}}{\sqrt[4]{3z^2}\,\sqrt[4]{3^3z^2}}$$

$$= \dfrac{2x^2y\sqrt[4]{54xy^2z^2}}{\sqrt[4]{3^4z^4}} \quad \text{Regla del producto para radicales}$$

$$= \dfrac{2x^2y\sqrt[4]{54xy^2z^2}}{3z}$$

Nota: no hay factores de 54 que sean cuartas potencias perfectas, y cada exponente del radicando es menor que el índice.

Resuelve ahora el ejercicio 53

2 Racionalizar un denominador mediante el conjugado

El denominador de algunas fracciones es una suma o resta que involucra radicales que no pueden ser simplificados, por ejemplo una fracción como: $\frac{13}{4+\sqrt{3}}$. Para racionalizar el denominador de esta fracción, multiplicamos el numerador y el denominador por $4-\sqrt{3}$. Las expresiones $4+\sqrt{3}$ y $4-\sqrt{3}$ son **conjugados** uno del otro. Otros ejemplos de conjugados se muestran a continuación.

Expresión radical	Conjugado
$9+\sqrt{2}$	$9-\sqrt{2}$
$8\sqrt{3}-\sqrt{5}$	$8\sqrt{3}+\sqrt{5}$
$\sqrt{x}+\sqrt{y}$	$\sqrt{x}-\sqrt{y}$
$-6a-\sqrt{b}$	$-6a+\sqrt{b}$

Cuando una expresión radical se multiplica por su conjugado utilizando el método PIES, el resultado será una expresión más sencilla que no contiene raíces cuadradas. El siguiente ejemplo muestra el producto de una expresión radical y su conjugado.

EJEMPLO 3 Multiplica $(6+\sqrt{3})(6-\sqrt{3})$.

Solución Multiplica usando el método PIES.

$$\begin{aligned}
(6+\sqrt{3})(6-\sqrt{3}) &= \overset{\text{P}}{6(6)} + \overset{\text{I}}{6(-\sqrt{3})} + \overset{\text{E}}{6(\sqrt{3})} + \overset{\text{S}}{\sqrt{3}(-\sqrt{3})}\\
&= 36 \boxed{-6\sqrt{3}+6\sqrt{3}} - \sqrt{9}\\
&= 36-\sqrt{9}\\
&= 36-3\\
&= 33
\end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 57

> **Comprendiendo el álgebra**
>
> En el capítulo 5 discutimos el producto.
>
> $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
>
> Observa cómo la suma de los productos tanto externo como interno, $-ab+ab$, siempre es 0. Este mismo procedimiento puede utilizarse cuando multipliquemos una expresión radical por su conjugado. Por ejemplo,
>
> $$\begin{aligned}(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) &= 3^2-(\sqrt{2})^2\\ &= 9-2=7\end{aligned}$$

En el ejemplo 3, se obtendría el mismo resultado usando la fórmula para el producto de la suma y resta de los mismos dos términos. El producto resulta de la resta de dos cuadrados $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. En el ejemplo 3, si hacemos que $a=6$ y $b=\sqrt{3}$, usando la fórmula obtenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned}
(a+\ \ b)(a-\ \ b) &= a^2-\ \ b^2\\
\downarrow\quad\ \downarrow\ \ \downarrow\quad\ \downarrow\ \ &\quad\ \downarrow\qquad\downarrow\\
(6+\sqrt{3})(6-\sqrt{3}) &= 6^2-(\sqrt{3})^2\\
&= 36-3\\
&= 33
\end{aligned}$$

> **Para racionalizar un denominador mediante el conjugado**
>
> Multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del denominador. Simplifica utilizando la propiedad distributiva, el método PIES o el producto especial $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Resolvamos ahora un ejemplo donde racionalizaremos un denominador usando su conjugado.

EJEMPLO 4 Simplifica. **a)** $\dfrac{13}{4+\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ **c)** $\dfrac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}$

Solución Racionalizamos el denominador de cada expresión multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

a)

$$\begin{aligned}\frac{13}{4+\sqrt{3}} &= \frac{13}{4+\sqrt{3}}\cdot\frac{4-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}\\ &= \frac{13(4-\sqrt{3})}{(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}\\ &= \frac{13(4-\sqrt{3})}{16-3}\\ &= \frac{\overset{1}{\cancel{13}}(4-\sqrt{3})}{\underset{1}{\cancel{13}}} \text{ o } 4-\sqrt{3}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} &= \frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\\ &= \frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2}\\ &= \frac{\overset{2}{\cancel{6}}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{\underset{1}{\cancel{3}}}\\ &= 2(\sqrt{5}+\sqrt{2}) \quad \text{o} \quad 2\sqrt{5}+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}} &= \frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}\cdot\frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}\\ &= \frac{a^2-a\sqrt{b}-a\sqrt{b}+\sqrt{b^2}}{a^2-b}\\ &= \frac{a^2-2a\sqrt{b}+b}{a^2-b}\end{aligned}$$

Recuerda que no se puede dividir entre a^2 o b, ya que se trata de términos, no de factores.

Resuelve ahora el ejercicio 75

Ahora que se ha demostrado cómo racionalizar denominadores, analicemos los criterios que debe cumplir un radical para considerar que está simplificado.

3 Entender cuándo un radical está simplificado

Después de simplificar una expresión radical, debemos comprobar para asegurar que se ha simplificado lo más posible.

Una expresión radical está simplificada cuando se cumplen estas tres condiciones.

1. No hay potencias perfectas que sean factores del radicando y todos los exponentes del radicando son menores que el índice.
2. Ningún radicando tiene una fracción.
3. Ningún denominador tiene radicales.

EJEMPLO 5 Determina si las siguientes expresiones están simplificadas. Si no es así, explica por qué; si no están simplificadas, simplifícalas.

a) $\sqrt{48x^5}$ **b)** $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

Solución

a) Esta expresión no está simplificada, ya que 16 es un cuadrado perfecto que es factor de 48, y x^4 es un cuadrado perfecto que es factor de x^5. Simplificando el radical tenemos que:

$$\sqrt{48x^5} = \sqrt{16x^4 \cdot 3x} = \sqrt{16x^4} \cdot \sqrt{3x} = 4x^2\sqrt{3x}$$

b) Esta expresión no está simplificada, ya que el radicando contiene la fracción $\dfrac{1}{2}$. Para simplificarla, utilizaremos primero la regla del cociente y luego racionalizamos el denominador.

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) Esta expresión no está simplificada, ya que el denominador, $\sqrt{6}$ tiene un radical. Para simplificarla, racionalicemos el denominador.

$$\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Resuelve ahora el ejercicio 7

Comprendiendo el álgebra

Cuando escribimos en forma simplificada deben cumplirse los siguientes puntos con respecto al radicando:

- El coeficiente del radicando no tiene factores de potencia perfectos.
- Los exponentes de las variables son todos menores que el índice del radical.

4 Utilizar la racionalización del denominador en un problema de adición

Resolvamos ahora un problema de adición que requiere racionalizar el denominador. En este ejemplo se utilizan los métodos para sumar y restar radicales que analizamos en las secciones 7.3 y 7.4.

EJEMPLO 6 Simplifica $4\sqrt{2} - \dfrac{3}{\sqrt{8}} + \sqrt{32}$.

Solución Empecemos por racionalizar el denominador y simplificar $\sqrt{32}$.

$$\begin{aligned}
4\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{8}} + \sqrt{32} &= 4\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \sqrt{16}\,\sqrt{2} && \text{Racionaliza el denominador.}\\
&= 4\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{16}} + 4\sqrt{2} && \text{Regla del producto}\\
&= 4\sqrt{2} - \frac{3}{4}\sqrt{2} + 4\sqrt{2} && \text{Escribe } \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{16}} \text{ como } \frac{3}{4}\sqrt{2}.\\
&= \left(4 - \frac{3}{4} + 4\right)\sqrt{2} && \text{Simplifica.}\\
&= \frac{29\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 115

5 Dividir expresiones radicales con índices diferentes

Dividiremos ahora expresiones radicales donde los radicales tienen índices diferentes. Para resolver este tipo de problemas, escribe cada radical en forma exponencial; luego, utiliza las reglas de los exponentes con los exponentes racionales, como se explicó en la sección 7.2, para simplificar la expresión. El ejemplo 7 ilustra este procedimiento.

EJEMPLO 7 Simplifica. **a)** $\dfrac{\sqrt[5]{(m+n)^7}}{\sqrt[3]{(m+n)^4}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{a^5b^4}}{\sqrt{a^2b}}$

Solución Empieza escribiendo el numerador y el denominador con exponentes racionales.

a)
$$\frac{\sqrt[5]{(m+n)^7}}{\sqrt[3]{(m+n)^4}} = \frac{(m+n)^{7/5}}{(m+n)^{4/3}} \qquad \text{Escribe con exponentes racionales.}$$
$$= (m+n)^{(7/5)-(4/3)} \qquad \text{Regla del cociente para exponentes.}$$
$$= (m+n)^{1/15}$$
$$= \sqrt[15]{m+n} \qquad \text{Escribe como un radical.}$$

b)
$$\frac{\sqrt[3]{a^5b^4}}{\sqrt{a^2b}} = \frac{(a^5b^4)^{1/3}}{(a^2b)^{1/2}} \qquad \text{Escribe con exponentes racionales.}$$
$$= \frac{a^{5/3}b^{4/3}}{ab^{1/2}} \qquad \text{Eleva el producto a una potencia.}$$
$$= a^{(5/3)-1}b^{(4/3)-(1/2)} \qquad \text{Regla del cociente para exponentes.}$$
$$= a^{2/3}b^{5/6} \qquad \text{Escribe las fracciones con denominador 6.}$$
$$= a^{4/6}b^{5/6} \qquad \text{Reescribe mediante las leyes de exponentes.}$$
$$= (a^4b^5)^{1/6}$$
$$= \sqrt[6]{a^4b^5} \qquad \text{Escribe como un radical.}$$

Resuelve ahora el ejercicio 133

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.5

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

conjugado suma potencia producto racionalizando radicando denominador numerador

1. El proceso que se utiliza para reescribir una fracción y lograr que ésta no tenga radicales en el denominador se conoce como ______ el denominador.
2. Cuando se usa el método PIES en el producto $(a+b)(a-b)$, la ______ de los productos externo e interno siempre sumarán 0.
3. Para racionalizar el denominador de una fracción que contenga una expresión radical, multiplica el numerador y el denominador de la fracción por un radical, de tal manera que se obtenga en el denominador un radicando que sea una ______ perfecta para el índice.
4. Para racionalizar el denominador usando el conjugado, basta con multiplicar el numerador y el denominador por el ______ del denominador.
5. La expresión $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ no se considera que esté simplificada debido a que el ______ contiene una fracción.
6. La expresión $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ no se considera que esté simplificada debido a que el ______ contiene un radical.

Practica tus habilidades

Simplifica. Considera que todas las variables representan números reales positivos en este conjunto de ejercicios.

7. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
8. $\dfrac{1}{\sqrt{11}}$
9. $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$
10. $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$
11. $\dfrac{6}{\sqrt{6}}$
12. $\dfrac{17}{\sqrt{17}}$
13. $\dfrac{1}{\sqrt{z}}$
14. $\dfrac{y}{\sqrt{y}}$
15. $\dfrac{p}{\sqrt{2}}$
16. $\dfrac{m}{\sqrt{13}}$
17. $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{7}}$
18. $\dfrac{\sqrt{19}}{\sqrt{q}}$
19. $\dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$
20. $\dfrac{15x}{\sqrt{x}}$
21. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$
22. $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{a}}$
23. $\sqrt{\dfrac{5m}{8}}$
24. $\dfrac{9\sqrt{3}}{\sqrt{y^3}}$
25. $\dfrac{2n}{\sqrt{18n}}$
26. $\sqrt{\dfrac{120x}{4y^3}}$

27. $\sqrt{\dfrac{18x^4y^3}{2z^3}}$ **28.** $\sqrt{\dfrac{7pq^4}{2r}}$ **29.** $\sqrt{\dfrac{20y^4z^3}{3xy^{-4}}}$ **30.** $\sqrt{\dfrac{5xy^6}{3z}}$

31. $\sqrt{\dfrac{48x^6y^5}{3z^3}}$ **32.** $\sqrt{\dfrac{45y^{12}z^{10}}{2x}}$

Simplifica.

33. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ **34.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ **35.** $\dfrac{8}{\sqrt[3]{y}}$ **36.** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{a^2}}$

37. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ **38.** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{4}}$ **39.** $\dfrac{a}{\sqrt[4]{8}}$ **40.** $\dfrac{8}{\sqrt[4]{z}}$

41. $\dfrac{5}{\sqrt[4]{z^2}}$ **42.** $\dfrac{13}{\sqrt[4]{z^3}}$ **43.** $\dfrac{10}{\sqrt[5]{y^3}}$ **44.** $\dfrac{x}{\sqrt[5]{y^4}}$

45. $\dfrac{2}{\sqrt[7]{a^4}}$ **46.** $\sqrt[3]{\dfrac{4x}{y}}$ **47.** $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2x}}$ **48.** $\sqrt[3]{\dfrac{7c}{9y^2}}$

49. $\dfrac{5m}{\sqrt[4]{2}}$ **50.** $\dfrac{3}{\sqrt[4]{a}}$ **51.** $\sqrt[4]{\dfrac{5}{3x^3}}$ **52.** $\sqrt[4]{\dfrac{2x^3}{4y^2}}$

53. $\sqrt[3]{\dfrac{3x^2}{2y^2}}$ **54.** $\sqrt[3]{\dfrac{15x^6y^7}{2z^2}}$ **55.** $\sqrt[3]{\dfrac{14xy^2}{2z^2}}$ **56.** $\sqrt[6]{\dfrac{r^4s^9}{2r^5}}$

Multiplica.

57. $(4 + \sqrt{5})(4 - \sqrt{5})$ **58.** $(2 + \sqrt{7})(2 - \sqrt{7})$ **59.** $(8 + \sqrt{2})(8 - \sqrt{2})$ **60.** $(6 - \sqrt{7})(6 + \sqrt{7})$

61. $(2 - \sqrt{10})(2 + \sqrt{10})$ **62.** $(3 + \sqrt{17})(3 - \sqrt{17})$ **63.** $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ **64.** $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

65. $(2\sqrt{x} - 3\sqrt{y})(2\sqrt{x} + 3\sqrt{y})$ **66.** $(5\sqrt{c} - 4\sqrt{d})(5\sqrt{c} + 4\sqrt{d})$

Simplifica mediante la racionalización del denominador.

67. $\dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}$ **68.** $\dfrac{4}{\sqrt{3} - 1}$ **69.** $\dfrac{1}{2 + \sqrt{3}}$ **70.** $\dfrac{3}{5 - \sqrt{7}}$

71. $\dfrac{5}{\sqrt{2} - 7}$ **72.** $\dfrac{6}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ **73.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - \sqrt{6}}$ **74.** $\dfrac{1}{\sqrt{17} - \sqrt{8}}$

75. $\dfrac{3}{6 + \sqrt{x}}$ **76.** $\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{a} - 3}$ **77.** $\dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x} - y}$ **78.** $\dfrac{\sqrt{8x}}{x + \sqrt{y}}$

79. $\dfrac{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{2} + 4\sqrt{3}}$ **80.** $\dfrac{\sqrt{c} - \sqrt{2d}}{\sqrt{c} - \sqrt{d}}$ **81.** $\dfrac{\sqrt{a^3} + \sqrt{a^7}}{\sqrt{a}}$ **82.** $\dfrac{2\sqrt{xy} - \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

83. $\dfrac{4}{\sqrt{x + 2} - 3}$ **84.** $\dfrac{8}{\sqrt{y - 3} + 6}$

Simplifica. Estos ejercicios son una combinación de los que ya se presentaron antes en esta sección.

85. $\sqrt{\dfrac{a^2}{25}}$ **86.** $\sqrt[3]{\dfrac{a^3}{8}}$ **87.** $\sqrt{\dfrac{2}{9}}$ **88.** $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

89. $(\sqrt{7} + \sqrt{6})(\sqrt{7} - \sqrt{6})$ **90.** $\sqrt[3]{\dfrac{1}{16}}$ **91.** $\sqrt{\dfrac{24x^3y^6}{5z}}$ **92.** $\dfrac{5}{4 - \sqrt{y}}$

93. $\sqrt{\dfrac{28xy^4}{2x^3y^4}}$ **94.** $\dfrac{8x}{\sqrt[3]{5y}}$ **95.** $\dfrac{1}{\sqrt{a} + 7}$ **96.** $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 6\sqrt{y}}$

97. $-\dfrac{7\sqrt{x}}{\sqrt{98}}$ **98.** $\sqrt{\dfrac{2xy^4}{50xy^2}}$ **99.** $\sqrt[4]{\dfrac{3y^2}{2x}}$ **100.** $\sqrt{\dfrac{49x^2y^5}{3z}}$

101. $\sqrt[3]{\dfrac{32y^{12}z^{10}}{2x}}$ **102.** $\dfrac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ **103.** $\dfrac{\sqrt{ar}}{\sqrt{a} - 2\sqrt{r}}$ **104.** $\sqrt[4]{\dfrac{2}{9x}}$

105. $\dfrac{\sqrt[3]{6x}}{\sqrt[3]{5xy}}$ **106.** $\dfrac{\sqrt[3]{16m^2n}}{\sqrt[3]{2mn^2}}$ **107.** $\sqrt[4]{\dfrac{2x^7y^{12}z^4}{3x^9}}$ **108.** $\dfrac{9}{\sqrt{y + 9} - \sqrt{y}}$

Simplifica.

109. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **110.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **111.** $\sqrt{5} - \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

112. $\dfrac{\sqrt{6}}{2} - \dfrac{2}{\sqrt{6}}$ **113.** $4\sqrt{\dfrac{1}{6}} + \sqrt{24}$ **114.** $5\sqrt{3} - \dfrac{3}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{18}$

115. $5\sqrt{2} - \dfrac{2}{\sqrt{8}} + \sqrt{50}$

116. $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{75}$

117. $\sqrt{\dfrac{1}{2}} + 7\sqrt{2} + \sqrt{18}$

118. $\dfrac{1}{2}\sqrt{18} - \dfrac{3}{\sqrt{2}} - 9\sqrt{50}$

119. $\dfrac{2}{\sqrt{50}} - 3\sqrt{50} - \dfrac{1}{\sqrt{8}}$

120. $\dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{5}{\sqrt{3}} + \sqrt{12}$

121. $\sqrt{\dfrac{3}{8}} + \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

122. $2\sqrt{\dfrac{8}{3}} - 4\sqrt{\dfrac{100}{6}}$

123. $-2\sqrt{\dfrac{x}{y}} + 3\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

124. $-5x\sqrt{\dfrac{y}{y^2}} + 9x\sqrt{\dfrac{1}{y}}$

125. $\dfrac{3}{\sqrt{a}} - \sqrt{\dfrac{9}{a}} + 2\sqrt{a}$

126. $6\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{\dfrac{1}{x}}$

Simplifica.

127. $\dfrac{\sqrt{(a+b)^4}}{\sqrt[3]{a+b}}$

128. $\dfrac{\sqrt[3]{c+2}}{\sqrt[4]{(c+2)^3}}$

129. $\dfrac{\sqrt[5]{(a+2b)^4}}{\sqrt[3]{(a+2b)^2}}$

130. $\dfrac{\sqrt[6]{(r+3)^5}}{\sqrt[3]{(r+3)^5}}$

131. $\dfrac{\sqrt[3]{r^2s^4}}{\sqrt{rs}}$

132. $\dfrac{\sqrt{a^2b^4}}{\sqrt[3]{ab^2}}$

133. $\dfrac{\sqrt[5]{x^4y^6}}{\sqrt[3]{(xy)^2}}$

134. $\dfrac{\sqrt[6]{4m^8n^4}}{\sqrt[4]{m^4n^2}}$

Resolución de problemas

135. Iluminación de una luz En determinadas condiciones, la fórmula

$$d = \sqrt{\frac{72}{I}}$$

se usa para mostrar la relación entre la iluminación sobre un objeto I, en lúmenes por metro, y la distancia d, en metros, que hay entre el objeto y la fuente de luz. Si la iluminación sobre una persona que está cerca de una fuente de luz es de 5.3 lúmenes por metro, ¿a qué distancia de la fuente de luz se encuentra la persona?

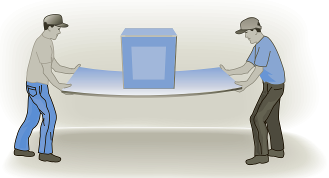
© Allen R. Angel

136. Resistencia de una tabla Cuando se aplica suficiente presión sobre una tabla, ésta se rompe. Cuanto mayor sea el grosor de la tabla, mayor será la presión que se necesite aplicar para que se rompa. La fórmula

$$T = \sqrt{\frac{0.05\,LB}{M}}$$

relaciona el grosor de una tabla T, en pulgadas, su longitud L, en pulgadas, la carga que causará la ruptura B, en libras, y el módulo de ruptura M, en libras por pulgada cuadrada. El módulo de ruptura es una constante que se determina por las pruebas con el tipo específico de tabla.

Determina el grosor de una tabla de 36 pulgadas de largo, si el módulo de ruptura es de 2560 libras por pulgada cuadrada y la tabla se rompe cuando se le aplica una carga de 800 libras.



137. Volumen de una pecera Un restaurante quiere colocar una pecera esférica en su vestíbulo. El radio r, en pulgadas, de un tanque esférico se determina mediante la fórmula

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

donde V es el volumen del tanque en pulgadas cúbicas. Determina el radio de un tanque esférico cuyo volumen es de 7238.23 pulgadas cúbicas.

138. Números consecutivos Si consideramos el conjunto de números naturales consecutivos 1, 2, 3, 4,…, n como la muestra, la desviación estándar, σ, que es una medida de la dispersión de los datos de la media, puede calcularse mediante la fórmula

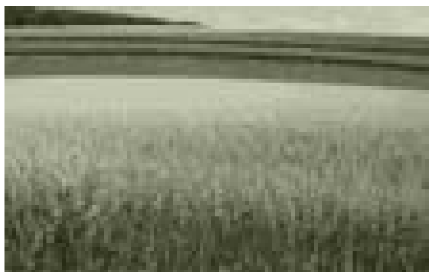
$$\sigma = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}}$$

donde n representa la cantidad de números naturales en la muestra. Determina la desviación estándar para los primeros 100 números naturales consecutivos.

139. Granjas en Estados Unidos El número de granjas en Estados Unidos está disminuyendo anualmente (aunque el tamaño de las que quedan ha aumentado). Una función que puede usarse para estimar el número de granjas $N(t)$, en millones, es

$$N(t) = \frac{6.21}{\sqrt[4]{t}}$$

donde t son los años desde 1959 y $1 \le t \le 50$. Estima el número de granjas en Estados Unidos en **a)** 1960, y **b)** 2008.



© Allen R. Angel

140. Tasa de mortalidad infantil la tasa de mortalidad infantil, en Estados Unidos, ha disminuido de manera constante. La tasa de mortalidad infantil $N(t)$, definida como muertes por 1000 niños nacidos vivos, puede estimarse mediante la función

$$N(t) = \frac{28.46}{\sqrt[3]{t^2}}$$

donde t son los años desde 1969 y $1 \le t \le 37$. Estima la tasa de mortalidad infantil en **a)** 1970 y **b)** 2006.

En cursos superiores de matemáticas, puede ser necesario racionalizar los numeradores de las expresiones radicales. Racionaliza los numeradores de las expresiones siguientes (tus respuestas contendrán radicales en los denominadores).

141. $\dfrac{5 - \sqrt{5}}{6}$ **142.** $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ **143.** $\dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$ **144.** $\dfrac{6\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x}$

Ejercicios de conceptos y escritura

145. ¿Cuál es mayor, $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ o $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$? Explica.

146. ¿Cuál es mayor, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ o $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$? Explica.

147. ¿Cuál es mayor, $\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$ o $2 + \sqrt{3}$? (No utilices calculadora). Explica cómo determinaste tu respuesta.

148. ¿Cuál es mayor, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{75}$ o $\dfrac{2}{\sqrt{12}} + \sqrt{48} + 2\sqrt{3}$? (No utilices calculadora). Explica cómo determinaste tu respuesta.

149. Considera las funciones $f(x) = x^{a/2}$ y $g(x) = x^{b/3}$.

a) Escribe tres valores para a, de tal manera que $x^{a/2}$ sea un cuadrado perfecto.

b) Escribe tres valores para b, de tal manera que $x^{b/3}$ sea un cubo perfecto.

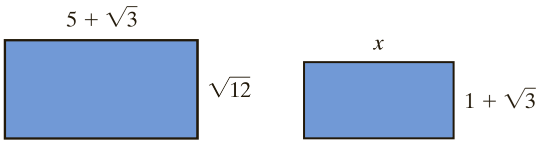
c) Si $x \geq 0$, determina $(f \cdot g)(x)$.

d) Si $x \geq 0$, determina $(f/g)(x)$.

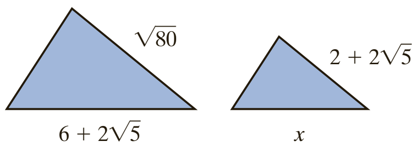
Actividad de grupo

Figuras semejantes *Los dos ejercicios siguientes reforzarán muchos de los conceptos que se han presentado en este capítulo. Resuélvanlos en grupo. Asegúrense de que todos los miembros del equipo entiendan cada paso para obtener la solución. Las figuras de cada ejercicio son semejantes; utilicen una proporción para determinar la longitud del lado x en cada caso. Escriban la respuesta en forma radical con un denominador racionalizado.*

150.



151.



Ejercicios de repaso acumulados

[2.2] **152.** Despeja b^2 de la ecuación $A = \dfrac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ por b^2.

[2.4] **153. Vehículos en movimiento** Dos automóviles comienzan un recorrido al mismo tiempo desde West Point viajando en direcciones opuestas. Uno viaja 10 millas por hora más rápido que el otro. Si entre ambos automóviles hay 270 millas de distancia después de 3 horas, determina la velocidad de cada vehículo.

[5.2] **154.** Multiplica $(x - 2)(4x^2 + 9x - 2)$.

[6.4] **155.** Resuelve $\dfrac{x}{2} - \dfrac{4}{x} = -\dfrac{7}{2}$.

7.6 Resolución de ecuaciones con radicales

1 Resolver ecuaciones que contienen un radical.

2 Resolver ecuaciones que contienen dos radicales.

3 Resolver ecuaciones que contienen dos términos radicales y un término no radical.

4 Resolver problemas de aplicación mediante ecuaciones con radicales.

5 Despejar una variable en un radicando.

1 Resolver ecuaciones que contienen un radical

Ecuación radical

Una **ecuación radical** es aquella que contiene una variable en un radicando.

Ejemplos de ecuaciones con radicales

$$\sqrt{x} = 5, \qquad \sqrt[3]{y+4} = 9, \qquad \sqrt{x-2} = 7 + \sqrt{x+8}$$

Para resolver ecuaciones con radicales

1. Reescribe la ecuación de modo que el radical que contiene a la variable quede solo (aislado) en un lado de la ecuación.
2. Eleva cada lado de la ecuación a una potencia igual al índice del radical.
3. Combina (agrupa y suma) los términos semejantes.
4. Si la ecuación aún contiene un término con una variable en un radicando, repite los pasos 1 a 3.
5. Despeja la variable en la ecuación resultante.
6. Verifica todas las soluciones en la ecuación original para evitar soluciones extrañas.

Cada vez que elevamos cada lado de la ecuación a una potencia, se corre el riesgo de introducir una solución extraña o falsa, es por ello que deben comprobarse los resultados en la ecuacion original.

EJEMPLO 1 Resuelve la ecuación $\sqrt{x} = 5$.

Solución La raíz cuadrada que contiene la variable se encuentra sola en un lado de la ecuación. A continuación elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= 5 \\ (\sqrt{x})^2 &= (5)^2 \\ x &= 25 \end{aligned}$$

Verifica

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= 5 \\ \sqrt{25} &\stackrel{?}{=} 5 \\ 5 &= 5 \quad \text{Verdadero} \end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 11

EJEMPLO 2 Resuelve.

a) $\sqrt{x-4} - 6 = 0$ **b)** $\sqrt[3]{x} + 10 = 8$ **c)** $\sqrt{x} + 3 = 0$

Solución El primer paso en cada inciso consistirá en aislar el término que contiene el radical.

a)

$$\begin{aligned} \sqrt{x-4} - 6 &= 0 \\ \sqrt{x-4} &= 6 && \text{Aísla el radical que contiene la variable.} \\ (\sqrt{x-4})^2 &= 6^2 && \text{Eleva al cuadrado ambos lados.} \\ x - 4 &= 36 && \text{Despeja la variable.} \\ x &= 40 \end{aligned}$$

Al verificar se demostrará que 40 es la solución.

b)

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x} + 10 &= 8 \\ \sqrt[3]{x} &= -2 && \text{Aísla el radical que contiene la variable.} \\ (\sqrt[3]{x})^3 &= (-2)^3 && \text{Eleva al cubo ambos lados.} \\ x &= -8 \end{aligned}$$

Al verificar se demostrará que -8 es la solución.

c)

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + 3 &= 0 \\ \sqrt{x} &= -3 && \text{Aísla el radical que contiene la variable.} \\ (\sqrt{x})^2 &= (-3)^2 && \text{Eleva al cuadrado ambos lados.} \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Verifica

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + 3 &= 0 \\ \sqrt{9} + 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 3 + 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 6 &= 0 \quad \text{Falso} \end{aligned}$$

Al verificar se demostrará que 9 no es una solución. La respuesta al inciso **c)** es “no hay solución real”. Podrías haberte dado cuenta de que no hay solución real para el problema dado cuando obtuviste la ecuación $\sqrt{x} = -3$, debido a que $\sqrt{x}$ no puede ser igual a un número real negativo.

Resuelve ahora el ejercicio 17

Comprendiendo el álgebra

Cada vez que elevamos cada lado de la ecuación a una potencia par, se corre el riesgo de introducir una solución extraña o falsa, es por ello que deben comprobarse las respuestas en la ecuacion original.
El ejemplo 2 **c)** muestra que cuando elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación $\sqrt{x} = -3$ obtenemos el resultado $x = 9$. Sin embargo, si comprobamos el resultado en la ecuación original se observa que 9 es una solución extraña.

EJEMPLO 3 Resuelva. $\sqrt{2x - 3} = x - 3$.

Solución Como el radical ya se encuentra aislado, elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación, resultando una ecuación cuadrática.

$$\begin{aligned}(\sqrt{2x - 3})^2 &= (x - 3)^2\\ 2x - 3 &= (x - 3)(x - 3)\\ 2x - 3 &= x^2 - 6x + 9\\ 0 &= x^2 - 8x + 12\end{aligned}$$

Ahora factorizamos y utilizamos la propiedad del factor cero para resolver la ecuación cuadrática.

$$\begin{aligned}x^2 - 8x + 12 &= 0\\ (x - 6)(x - 2) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x - 6 &= 0 \quad \text{o} \quad & x - 2 &= 0\\ x &= 6 & x &= 2\end{aligned}$$

Verifica

$x = 6$

$$\begin{aligned}\sqrt{2x - 3} &= x - 3\\ \sqrt{2(6) - 3} &\stackrel{?}{=} 6 - 3\\ \sqrt{9} &\stackrel{?}{=} 3\\ 3 &= 3 \quad \text{Verdadero}\end{aligned}$$

$x = 2$

$$\begin{aligned}\sqrt{2x - 3} &= x - 3\\ \sqrt{2(2) - 3} &\stackrel{?}{=} 2 - 3\\ \sqrt{1} &\stackrel{?}{=} -1\\ 1 &= -1 \quad \text{Falso}\end{aligned}$$

Por lo tanto, 6 es una solución para la ecuación, pero 2 no lo es. El 2 es una solución extraña, ya que satisface la ecuación $(\sqrt{2x - 3})^2 = (x - 3)^2$ pero no la ecuación original, $\sqrt{2x - 3} = x - 3$.

Resuelve ahora el ejercicio 43

Cómo utilizar tu calculadora graficadora

Es posible utilizar la calculadora graficadora para resolver o comprobar ecuaciones radicales. En el ejemplo 3 encontramos que la solución de $\sqrt{2x - 3} = x - 3$. Si graficamos en la calculadora Y_1 y Y_2, tal que

$$Y_1 = \sqrt{2x - 3} \qquad \text{y} \qquad Y_2 = x - 3$$

En una calculadora graficadora, obtendremos la **Figura 7.3**. Observa que las gráficas parecen intersecarse en $x = 6$, tal como lo esperábamos.

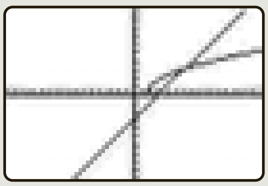


FIGURA 7.3

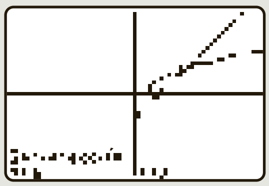


FIGURA 7.4

También podemos utilizar la característica de *intersección* para determinar las soluciones a las ecuaciones radicales. La **Figura 7.4** muestra que ambas gráficas se intersecan en $x = 6$ y $y = 3$.

EJEMPLO 4 Resuelve $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$.

Solución En primer lugar, aislamos el término con el radical dejándolo solo en un lado de la ecuación.

$$\begin{aligned}2\sqrt{x} - 3 &= 0\\ -2\sqrt{x} &= -x +\\ 2\sqrt{x} &= x - 3\end{aligned}$$

Ahora elevemos al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$
\begin{aligned}
(2\sqrt{x})^2 &= (x-3)^2 \\
4x &= x^2 - 6x + 9 \\
0 &= x^2 - 10x + 9 \\
0 &= (x-1)(x-9) \\
x - 1 = 0 \quad &\text{o} \quad x - 9 = 0 \\
x = 1 \quad & \quad\quad\;\; x = 9
\end{aligned}
$$

Verifica

$x = 1$

$$
\begin{aligned}
x - 2\sqrt{x} - 3 &= 0 \\
1 - 2\sqrt{1} - 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\
1 - 2(1) - 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\
1 - 2 - 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\
-4 &= 0 \quad \text{Falso}
\end{aligned}
$$

$x = 9$

$$
\begin{aligned}
x - 2\sqrt{x} - 3 &= 0 \\
9 - 2\sqrt{9} - 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\
9 - 2(3) - 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\
9 - 6 - 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\
3 - 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\
0 &= 0 \quad \text{Verdadero}
\end{aligned}
$$

La solución es 9. El valor 1 es una solución extraña.

Resuelve ahora el ejercicio 41

2 Resolver ecuaciones que contienen dos radicales

A continuación analizaremos ecuaciones que contienen dos radicales.

EJEMPLO 5 Resuelve $\sqrt{9x^2 + 6} = 3\sqrt{x^2 + x - 2}$.

Solución Como los dos radicales aparecen en cada lado de la ecuación, elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{9x^2 + 6}\right)^2 &= \left(3\sqrt{x^2 + x - 2}\right)^2 && \text{Eleva al cuadrado ambos lados.} \\
9x^2 + 6 &= 9(x^2 + x - 2) \\
9x^2 + 6 &= 9x^2 + 9x - 18 && \text{Propiedad distributiva.} \\
6 &= 9x - 18 && \text{Se resta } 9x^2 \text{ de ambos lados.} \\
24 &= 9x \\
\frac{8}{3} &= x
\end{aligned}
$$

Una comprobación mostrará que $\frac{8}{3}$ es la solución.

Resuelve ahora el ejercicio 27

En cursos superiores de matemáticas, en ocasiones las ecuaciones utilizan exponentes en lugar de radicales. El ejemplo 6 ilustra una de tales ocasiones.

EJEMPLO 6 Para $f(x) = 3(x-2)^{1/3}$ y $g(x) = (17x - 14)^{1/3}$, determina todos los valores de x para los que se cumple $f(x) = g(x)$.

Solución Igualamos las dos funciones y despejamos x.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \\
3(x-2)^{1/3} &= (17x - 14)^{1/3} \\
[3(x-2)^{1/3}]^3 &= [(17x - 14)^{1/3}]^3 && \text{Eleva al cubo ambos lados.} \\
3^3(x-2) &= 17x - 14 \\
27(x-2) &= 17x - 14 \\
27x - 54 &= 17x - 14 \\
10x - 54 &= -14 \\
10x &= 40 \\
x &= 4
\end{aligned}
$$

Comprendiendo el álgebra

Las funciones en el ejemplo 6 también pueden escribirse utilizando radicales. Por consiguiente, podemos resolver el ejercicio si resolvemos la ecuación

$$3\sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{17x - 14}$$

Una comprobación mostrará que la solución es 4. Si sustituyeras 4 tanto en $f(x)$ como en $g(x)$, descubrirías que ambas ecuaciones se simplifican a $3\sqrt[3]{2}$. Compruébalo.

Resuelve ahora el ejercicio 69

3 Resolver ecuaciones que contienen dos términos radicales y un término no radical

Cuando una ecuación radical contiene dos términos radicales y un tercer término no radical, a veces es necesario elevar ambos lados de la ecuación a una determinada potencia dos veces para obtener la solución. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Resuelve $\sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-2} = 1$.

Solución Debemos aislar un término radical en un lado de la ecuación. Comenzaremos por sumar $\sqrt{3x-2}$ en ambos lados de la ecuación para aislar $\sqrt{5x-1}$. Después elevaremos al cuadrado ambos lados de la ecuación y combinamos los términos semejantes.

$$\sqrt{5x-1} = 1 + \sqrt{3x-2} \qquad \text{Aísla } \sqrt{5x-1}.$$

$$(\sqrt{5x-1})^2 = (1 + \sqrt{3x-2})^2 \qquad \text{Eleva ambos lados al cuadrado.}$$

$$5x - 1 = (1 + \sqrt{3x-2})(1 + \sqrt{3x-2}) \qquad \text{Escribe como un producto.}$$

$$5x - 1 = 1 + \sqrt{3x-2} + \sqrt{3x-2} + (\sqrt{3x-2})^2 \qquad \text{Multiplica.}$$

$$5x - 1 = 1 + 2\sqrt{3x-2} + 3x - 2 \qquad \text{Reduce términos semejantes; simplifica.}$$

$$5x - 1 = 3x - 1 + 2\sqrt{3x-2} \qquad \text{Reduce términos semejantes.}$$

$$2x = 2\sqrt{3x-2} \qquad \text{Aísla el término radical.}$$

$$x = \sqrt{3x-2} \qquad \text{Ambos lados se dividieron entre 2.}$$

Hemos aislado el término radical restante. Después de esto elevaremos al cuadrado ambos lados de la ecuación y despejaremos x.

$$x = \sqrt{3x-2}$$

$$x^2 = (\sqrt{3x-2})^2 \qquad \text{Eleva al cuadrado ambos lados.}$$

$$x^2 = 3x - 2$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-2)(x-1) = 0$$

$$x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0$$

$$x = 2 \qquad\qquad x = 1$$

La comprobación mostrará que 2 y 1 son soluciones de la ecuación.

Resuelve ahora el ejercicio 61

EJEMPLO 8 Para $f(x) = \sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-2}$ determina todos los valores de x para los que se cumple $f(x) = 1$.

Solución Sustituye $f(x)$ por 1. Esto da

$$1 = \sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-2}$$

Como esta es la misma ecuación que resolvimos en el ejemplo 7, las respuestas son $x = 2$ y $x = 1$. Verifiqua que $f(2) = 1$ y $f(1) = 1$.

Resuelve ahora el ejercicio 121

Prevención de errores comunes

En el capítulo 5 establecimos que $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$. Sé cuidadoso cuando eleves al cuadrado un binomio como $1 + \sqrt{x}$. Analiza con atención los siguientes cálculos, para que no cometas el error que se muestra a la derecha.

CORRECTO

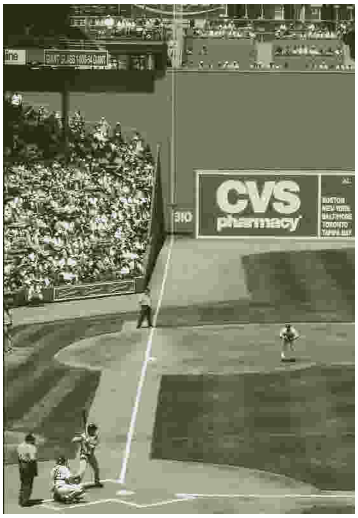
$$
\begin{aligned}
(1 + \sqrt{x})^2 &= (1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt{x}) \\
&\quad \text{P} \quad \text{I} \quad \text{E} \quad \text{S} \\
&= 1 + \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x}\sqrt{x} \\
&= 1 + 2\sqrt{x} + x
\end{aligned}
$$

INCORRECTO

$$
\begin{aligned}
(1 + \sqrt{x})^2 &= 1^2 + (\sqrt{x})^2 \\
&= 1 + x
\end{aligned}
$$

4 Resolver problemas de aplicación mediante ecuaciones con radicales

Ahora veremos algunas de las muchas aplicaciones de los radicales para resolver problemas.



© Allen R. Angel

EJEMPLO 9 **El monstruo verde** En el parque Fenway, donde juegan béisbol los Medias Rojas de Boston, la distancia de *home* a la pared de jardín izquierdo, por la línea de tercera base, es de 310 pies. En el jardín izquierdo al final de la línea base existe una barda perpendicular al jardín que tiene una altura de 37 pies. A esta barda se le conoce como *El Monstruo Verde* (ver fotografía). Determina la distancia del *home* a la parte superior del Monstruo Verde a lo largo de la línea de la tercera base.

Solución **Entiende** En la **Figura 7.5** se ilustra el problema. Necesitamos determinar la distancia que hay del *home* a parte alta de la pared del jardín izquierdo.

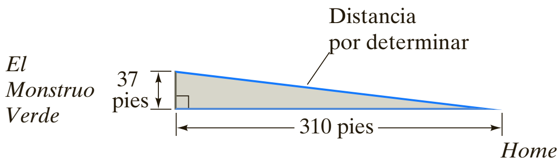


FIGURA 7.5

Traduce Para resolver el problema utilizaremos el teorema de Pitágoras que se comentó anteriormente: $\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2$, o $a^2 + b^2 = c^2$.

$$310^2 + 37^2 = c^2 \qquad \text{Sustituye los valores conocidos.}$$

Realiza los cálculos

$$
\begin{aligned}
96{,}100 + 1369 &= c^2 \\
97{,}469 &= c^2 \\
\sqrt{97{,}469} &= \sqrt{c^2} && \text{Toma la raíz cuadrada de ambos lados.} \\
\sqrt{97{,}469} &= c && \text{* Ver nota al pie de página.} \\
312.20 &\approx c
\end{aligned}
$$

Responde La distancia entre el *home* y la parte alta de la barda es de alrededor de 312.20 pies.

Resuelve ahora el ejercicio 99

EJEMPLO 10 **Periodo de un péndulo** El tiempo que tarda un péndulo en realizar una oscilación completa se denomina *periodo*. Ver **Figura 7.6**. El periodo de un péndulo T, en segundos, puede calcularse mediante la fórmula $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{32}}$, donde L es la longitud del péndulo, en pies. Determina el periodo de un péndulo si su longitud es de 5 pies.

---

*$c^2 = 97{,}469$ tiene dos soluciones: $c = \sqrt{97{,}469}$ y $c = -\sqrt{97{,}469}$. Como lo que estamos tratando de determinar es una longitud, que debe ser una cantidad positiva, utilizamos la raíz positiva.

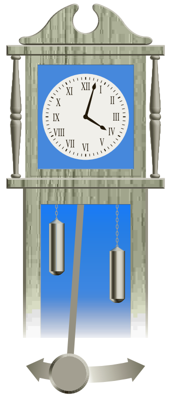


FIGURA 7.6

Solución Sustituye L por 5 y π por 3.14 en la fórmula. Si tu calculadora tiene la tecla $\boxed{\pi}$, utilízala para introducir π.

$$
\begin{aligned}
T &= 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}} \\
&\approx 2(3.14)\sqrt{\frac{5}{32}} \\
&\approx 2(3.14)\sqrt{0.15625} \approx 2.48
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el periodo es de más o menos 2.48 segundos. Si tienes un reloj de pared con un péndulo de 5 pies, le tomará alrededor de 2.48 segundos dar una oscilación completa.

Resuelve ahora el ejercicio 103

5 Despejar una variable en un radicando

Muchas fórmulas involucran radicales que contienen variables. Algunas veces es necesario despejar una variable que es parte de un radicando. Para hacerlo, sigue el mismo procedimiento general que usaste para resolver una ecuación radical.

EJEMPLO 11 **Error de estimación** Una fórmula estadística para determinar el error máximo de estimación es $E = t\dfrac{s}{\sqrt{n}}$.

a) Determina E si $t = 2.064$, $s = 15$, y $n = 25$.

b) Despeja n de esta ecuación.

Solución

a) $E = t\dfrac{s}{\sqrt{n}} = 2.064\left(\dfrac{15}{\sqrt{25}}\right) = 2.064\left(\dfrac{15}{5}\right) = 6.192$

b) Primero multiplica ambos lados de la ecuación por $\sqrt{n}$ para eliminar fracciones.

$$
\begin{aligned}
E &= t\frac{s}{\sqrt{n}} \\
E\sqrt{n} &= \left(t\frac{s}{\cancel{\sqrt{n}}}\right)\cancel{\sqrt{n}} && \text{Elimina fracciones.} \\
E\sqrt{n} &= ts \\
\sqrt{n} &= \frac{ts}{E} && \text{Aísla el término con radical, dividiendo ambos lados entre } E. \\
(\sqrt{n})^2 &= \left(\frac{ts}{E}\right)^2 && \text{Eleva ambos lados al cuadrado.} \\
n &= \left(\frac{ts}{E}\right)^2 \quad \text{o} \quad n = \frac{t^2s^2}{E^2}
\end{aligned}
$$

Resuelve ahora el ejercicio 75

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.6

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

original radical aislado elevar cuadrado índice cubo extraño (a) raíz radicando

1. Una ecuación ________________ es una ecuación que posee una variable en el radicando.

2. Cada vez que elevamos ambos lados de la ecuación a una potencia par, se corre el riesgo de introducir una solución ________________, o falsa.

3. Para determinar si el resultado de resolver una ecuación es una solución extraña o no, debemos comprobar el resultado en la ecuación ________________.

4. Cuando resolvemos una ecuación radical, reescribimos la ecuación para que el radical que contiene la variable quede ________________.

5. Para eliminar un radical aislado de una ecuación, elevamos ambos lados de la ecuación al mismo ________________ del radical.

6. Para eliminar el radical en la ecuación $\sqrt{2x-5}=7$, elevamos al ________________ ambos lados de la ecuación.

7. Para eliminar el radical en la ecuación $\sqrt[3]{x+1}=2$, ________________ ambos lados de la ecuación a la cuarta potencia.

8. Para eliminar el radical en la ecuación $\sqrt[4]{x-1}=3$, ________________ ambos lados de la ecuación a la cuarta potencia.

Practica tus habilidades

Resuelve y comprueba tu o tus soluciones. Si la ecuación no tiene solucion real, indícalo.

9. $\sqrt{x}=4$
10. $\sqrt{x}=2$
11. $\sqrt{x}=-2$
12. $\sqrt[3]{x}=2$
13. $\sqrt[3]{x}=-4$
14. $\sqrt{a}+5=0$
15. $\sqrt{2x+3}=5$
16. $\sqrt[3]{7x-6}=4$
17. $\sqrt[3]{3x}+4=7$
18. $2\sqrt{4x+5}=14$
19. $\sqrt[3]{2x+29}=3$
20. $\sqrt[3]{6x+2}=-4$
21. $\sqrt[4]{x}=3$
22. $\sqrt[4]{x}=-3$
23. $\sqrt[4]{x+10}=3$
24. $\sqrt[4]{3x-2}=2$
25. $\sqrt{x-1}+3=8$
26. $\sqrt{x+3}+4=5$
27. $\sqrt{x+8}=\sqrt{x-8}$
28. $\sqrt{r+5}+7=10$
29. $2\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{x^2+2x}$
30. $\sqrt[3]{6t-1}=\sqrt[3]{2t+3}$
31. $\sqrt[4]{x+8}=\sqrt[4]{2x}$
32. $\sqrt[4]{3x-1}+4=0$
33. $\sqrt{5x+1}-6=0$
34. $\sqrt{x^2+12x+3}=-x$
35. $\sqrt{m^2+6m-4}=m$
36. $\sqrt{x^2+3x+12}=x$
37. $\sqrt{5c+1}-9=0$
38. $\sqrt{b^2-2}=b+4$
39. $\sqrt{z^2+5}=z+1$
40. $\sqrt{x}+6x=1$
41. $\sqrt{2y+5}+5-y=0$
42. $\sqrt{4x+1}=\frac{1}{2}x+2$
43. $\sqrt{5x+6}=2x-6$
44. $\sqrt{4b+5}+b=10$
45. $(2a+9)^{1/2}-a+3=0$
46. $(3x+4)^{1/2}-x=-2$
47. $(2x^2+4x+9)^{1/2}=(2x^2+9)^{1/2}$
48. $(2x+1)^{1/2}+7=x$
49. $(r+4)^{1/3}=(3r+10)^{1/3}$
50. $(7x+6)^{1/3}+4=0$
51. $(5x+7)^{1/4}=(9x+1)^{1/4}$
52. $(5b+3)^{1/4}=(2b+17)^{1/4}$
53. $\sqrt[4]{x+5}=-2$
54. $\sqrt{x^2+x-1}=-\sqrt{x+3}$

Resuelve. Tendrás que elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación dos veces para eliminar todos los radicales.

55. $\sqrt{x}+1=\sqrt{x+1}$
56. $\sqrt{x}-1=\sqrt{x-1}$
57. $\sqrt{3a+1}=\sqrt{a-4}+3$
58. $\sqrt{x+1}=2-\sqrt{x}$
59. $\sqrt{x+3}=\sqrt{x}-3$
60. $\sqrt{y+1}=2+\sqrt{y-7}$
61. $\sqrt{x+7}=6-\sqrt{x-5}$
62. $\sqrt{b-3}=4-\sqrt{b+5}$
63. $\sqrt{4x-3}=2+\sqrt{2x-5}$
64. $\sqrt{r+10}+2+\sqrt{r-5}=0$
65. $\sqrt{y+1}=\sqrt{y+10}-3$
66. $3+\sqrt{x+1}=\sqrt{3x+12}$

Determina todos los valores reales de x donde f(x) = g(x) en cada par de funciones.

67. $f(x)=\sqrt{2x+3},\ g(x)=\sqrt{x+5}$
68. $f(x)=\sqrt{x^2-2x},\ g(x)=\sqrt{x-2}$
69. $f(x)=\sqrt[3]{5x-19},\ g(x)=\sqrt[3]{6x-23}$
70. $f(x)=(14x-8)^{1/2},\ g(x)=2(3x+2)^{1/2}$
71. $f(x)=2(8x+24)^{1/3},\ g(x)=4(2x-2)^{1/3}$
72. $f(x)=2\sqrt{x+2},\ g(x)=8-\sqrt{x+14}$

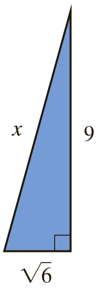
Despeja la variable indicada en cada fórmula.

73. $p=\sqrt{2v}$, para v
74. $l=\sqrt{4r}$, para r
75. $v=\sqrt{2gh}$, para g
76. $v=\sqrt{\frac{2E}{m}}$, para E
77. $v=\sqrt{\frac{FR}{M}}$, para F
78. $\omega=\sqrt{\frac{a_0}{b_0}}$, para b_0
79. $x=\sqrt{\frac{m}{k}}V$ para m
80. $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$, para L
81. $r=\sqrt{\frac{A}{\pi}}$, para A
82. $r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$, para V

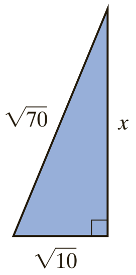
Resolución de problemas

Utiliza el teorema de Pitágoras para determinar la longitud del lado desconocido de cada triángulo. Escribe la respuesta como un radical en forma simplificada.

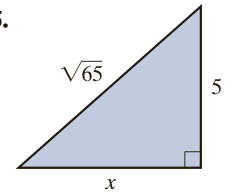
83.



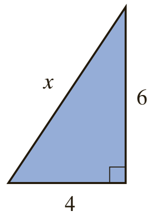
84.



85.



86.



Resuelve. Necesitarás elevar al cuadrado dos veces ambos lados de la ecuación.

87. $\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = \sqrt{x+8}$

88. $\sqrt{2x} - \sqrt{x-4} = \sqrt{12-x}$

89. $\sqrt{4y+6} + \sqrt{y+5} = \sqrt{y+1}$

90. $\sqrt{2b-2} + \sqrt{b-5} = \sqrt{4b}$

91. $\sqrt{c+1} + \sqrt{c-2} = \sqrt{3c}$

92. $\sqrt{2t-1} + \sqrt{t-4} = \sqrt{3t+1}$

93. $\sqrt{a+2} - \sqrt{a-3} = \sqrt{a-6}$

94. $\sqrt{r-1} - \sqrt{r+6} = \sqrt{r-9}$

Resuelve. Necesitarás elevar al cuadrado dos veces ambos lados de la ecuación.

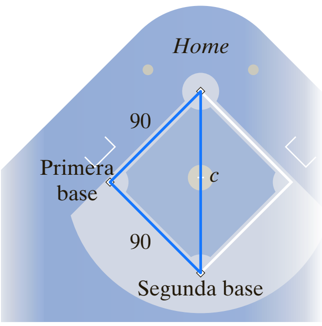
95. $\sqrt{2-\sqrt{x}} = \sqrt{x}$

96. $\sqrt{6+\sqrt{x+4}} = \sqrt{2x-1}$

97. $\sqrt{2+\sqrt{x+1}} = \sqrt{7-x}$

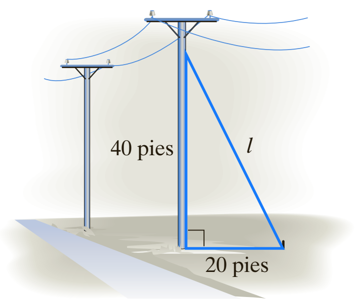
98. $\sqrt{1+\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-6}$

99. Diamante de béisbol Un diamante de béisbol, por reglamento, es un cuadrado con 90 pies de base a base. ¿A qué distancia está la segunda base del *home*?



100. Diamante de béisbol de ligas menores Un diamante de las ligas menores es un cuadrado con 60 pies de base a base (ver ejercicio 99). ¿A qué distancia está la segunda base del *home*?

101. Cable del poste telefónico Como se muestra en la figura, un poste telefónico forma un ángulo recto de 90° respecto del piso. Determina la longitud del cable que conecta al poste a 40 pies del piso, y que está anclado al piso a 20 pies desde la base del poste.



102. Radio de un aro de baloncesto Si se conoce el área de un círculo, es posible determinar su radio mediante la fórmula $r = \sqrt{A/\pi}$.

a) Determina el radio de un aro de baloncesto, si su área mide 254.47 pulgadas cuadradas.

b) Si un balón de baloncesto tiene 9 pulgadas de diámetro, ¿cuál es la distancia mínima posible entre el aro y el balón cuando el centro de este último está en el centro del aro?

103. Periodo de un péndulo La fórmula para determinar el periodo de un péndulo es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

donde T es el periodo en segundos, l es la longitud del péndulo en pies, y g es la aceleración de la gravedad. En la Tierra, la gravedad es de 32 pies/segundo². La fórmula, cuando se utiliza para la Tierra, se convierte en

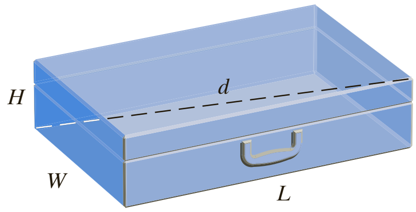
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{32}}$$

a) Determina el periodo del péndulo que mide 8 pies de longitud.

b) Si la longitud de un péndulo se duplica, ¿qué efecto tiene en el periodo?

c) La gravedad en la Luna es 1/6 de la terrestre. Si un péndulo tiene un periodo de 2 segundos en la Tierra, ¿cuál será el periodo del mismo péndulo en la Luna?

104. Diagonal de un portafolio Una fórmula para determinar la longitud de la diagonal de una caja (es decir, la distancia que hay entre su esquina superior y su esquina inferior opuesta) es $d = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2}$, donde L, W y H son el largo, ancho y altura de la caja, respectivamente.



a) Determina la longitud de la diagonal de un portafolio que mide 22 pulgadas de largo, 15 pulgadas de ancho y 12 pulgadas de altura.

b) Si el largo, ancho y altura se duplican, ¿cómo cambia la diagonal?

c) Despeja W en la fórmula.

105. Flujo de sangre en la arteria La fórmula

$$r = \sqrt[4]{\frac{8\mu l}{\pi R}}$$

se utiliza para determinar el flujo de sangre que pasa a través de las arterias. En la fórmula, R representa la resistencia que ofrece la arteria al paso de la sangre, μ es la viscosidad de la sangre, l es la longitud de la arteria y r es el radio de la arteria. Despeje R de esta ecuación.

106. Objeto que cae La fórmula

$$t = \frac{\sqrt{19.6s}}{9.8}$$

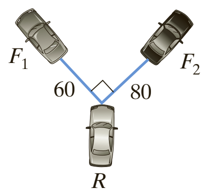
puede usarse para conocer el tiempo t, en segundos, de un objeto que cae, si se sabe que ha caído s metros. Supón que se ha dejado caer un objeto desde un helicóptero y ha caído 100 metros. ¿Cuánto tiempo ha estado en caída libre?

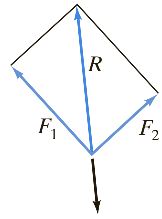
107. Días terrestres Un "año" es el tiempo que tarda cualquiera de los planetas de nuestro sistema solar en dar una vuelta completa alrededor del Sol. El número de días terrestres a que equivale un año de otro planeta, N, se calcula mediante la fórmula $N = 0.2(\sqrt{R})^3$, donde R es la distancia media que hay entre el planeta y el Sol, en millones de kilómetros. Determina el número de días terrestres que dura el año del planeta Tierra, cuya distancia media al Sol es de 149.4 millones de kilómetros.

© Ragnarock/Shutterstock

108. Días terrestres Determina el número de días terrestres que dura el año del planeta Mercurio, cuya distancia media al Sol es de 58 millones de kilómetros. Ver el ejercicio 107.

109. Fuerza sobre un automóvil Cuando dos fuerzas F_1 y F_2 jalan formando un ángulo recto entre sí, como se muestra en la siguiente figura, podemos determinar la fuerza resultante o fuerza efectiva R mediante la fórmula $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$. Dos automóviles intentan sacar a otro del fango como se muestra a continuación. Si el automóvil A ejerce una fuerza de 60 libras y el automóvil B ejerce una fuerza de 80 libras, determina la fuerza resultante sobre el automóvil atascado en el fango.





110. Velocidad de escape La velocidad de escape es la velocidad que necesita una nave espacial para escapar del campo gravitacional de un planeta, y se determina mediante la fórmula $v_e = \sqrt{2gR}$, donde g es la fuerza de gravedad del planeta, y R es el radio del planeta. Determina la velocidad de escape de la Tierra, en metros por segundo, donde $g = 9.75$ m/s^2 y $R = 6{,}370{,}000$ metros.

111. Oleaje Una fórmula que se utiliza para estudiar el movimiento de las olas en aguas poco profundas es $c = \sqrt{gH}$, donde c es la velocidad de la ola, H es la profundidad del agua, y g es la aceleración provocada por la gravedad. Determina la velocidad de la ola si la profundidad del agua es de 10 pies. (Utiliza $g = 32$ pies/segundo^2).

112. Diagonal de una caja La parte superior de una caja rectangular mide 20 por 32 pulgadas. Determina la longitud de su diagonal.

113. Jardín floral Un jardín floral con forma rectangular mide 25 por 32 metros. Determina la longitud de la diagonal del jardín.

114. Velocidad del sonido Cuando el sonido recorre el aire (o cualquier gas), la velocidad de la onda sonora depende de la temperatura del aire (o gas). La velocidad v, en metros por segundo, a la temperatura del aire t, en grados Celsius, puede determinarse mediante la fórmula

$$v = 331.3\sqrt{1 + \frac{t}{273}}$$

Determina la velocidad del sonido en el aire, cuya temperatura es de 20 °C (equivalente a 68 °F).

Una fórmula que ya hemos mencionado, y que analizaremos pronto con más detalle, es la fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

115. Determina x cuando $a = 1, b = 0, c = -4$.

116. Determina x cuando $a = 1, b = 1, c = -12$.

117. Determina x cuando $a = -1, b = 4, c = 5$.

118. Determina x cuando $a = 2, b = 5, c = -12$.

Dada $f(x)$, determina todos los valores de x para los que $f(x)$ es el valor indicado.

119. $f(x) = \sqrt{x-5},\ f(x) = 5$

120. $f(x) = \sqrt[3]{2x+3},\ f(x) = 3$

121. $f(x) = \sqrt{3x^2 - 11} + 7,\ f(x) = 15$

122. $f(x) = 8 + \sqrt[3]{x^2 + 152},\ f(x) = 14$

En los ejercicios 123 y 124, resuelve la ecuación.

123. $\sqrt{x^2 + 49} = (x^2 + 49)^{1/2}$

124. $\sqrt{x^2 - 16} = (x^2 - 16)^{1/2}$

Ejercicios de conceptos y escritura

125. Considera la ecuación $\sqrt{x+3} = -\sqrt{2x-1}$. Explica por qué esta ecuación puede no tener una solución real.

126. Considera la ecuación $-\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2}$. Si estudias la ecuación, ¿puedes determinar su solución? Explica.

127. Considera la ecuación $\sqrt[3]{x^2} = -\sqrt[3]{x^2}$. Si estudias la ecuación, ¿puede determinar su solución? Explica.

128. Explica sin resolver la ecuación cómo puede afirmarse que $\sqrt{x-3} + 4 = 0$ no tiene solución.

129. La ecuación $\sqrt{x} = 5$ ¿tiene una o dos soluciones? Explica.

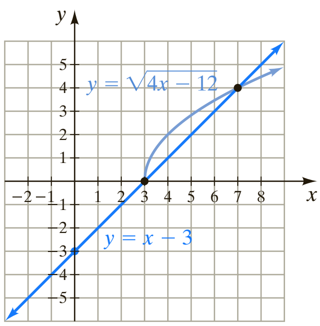
130. La ecuación $x^2 = 9$ ¿tiene una o dos soluciones? Explica.

131. **a)** Considera la ecuación $\sqrt{4x-12} = x - 3$. Si igualamos cada lado de la ecuación con y, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$y = \sqrt{4x - 12}$$

$$y = x - 3$$

En la figura siguiente se muestran las gráficas de las ecuaciones del sistema.



A partir de la gráfica, determina los valores que parecen ser soluciones de la ecuación $\sqrt{4x-12} = x - 3$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

b) Sustituye los valores determinados en el inciso **a)** de la ecuación original y determina si son soluciones para la ecuación.

c) Resuelve la ecuación $\sqrt{4x-12} = x - 3$ en forma algebraica e indica si su solución concuerda con los valores obtenidos en el inciso **a)**.

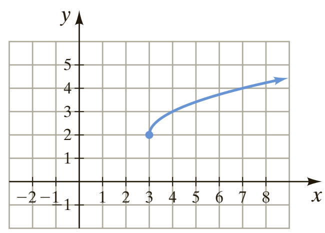
132. Si la gráfica de una función radical $f(x)$ no interseca al eje x, entonces la ecuación $f(x) = 0$ no tiene soluciones reales. Explica por qué.

133. Supón que se nos da una función racional $g(x)$. Si $g(4) = 0$, entonces la gráfica $g(x)$ debe intersecar al eje x en 4. Explica por qué.

134. La gráfica de la ecuación $y = \sqrt{x-3} + 2$ se ilustra en la siguiente figura.

a) ¿Cuál es el dominio de la función?

b) ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $\sqrt{x-3} + 2 = 0$. Escribe todas las soluciones reales. Explica cómo determinaste tu respuesta.



Problemas de desafío

Resuelve.

135. $\sqrt{\sqrt{x+25} - \sqrt{x}} = 5$

136. $\sqrt{\sqrt{x+9} + \sqrt{x}} = 3$

Despeja n en cada ecuación.

137. $z = \dfrac{\overline{x} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

138. $z = \dfrac{p' - p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$

139. **Intervalo de confianza** En estadística un "intervalo de confianza" es un conjunto de valores donde es probable encontrar el valor verdadero de la población. Para un "intervalo de confianza de 95%", el límite inferior L_1 y el límite superior L_2 del intervalo pueden determinarse mediante las fórmulas

$$L_1 = p - 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$L_2 = p + 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

donde p representa el porcentaje obtenido de una muestra y n es el tamaño de la muestra. Francesco, un estadístico, realiza una encuesta en una muestra de 36 familias y determina que 60% de ellas utiliza una máquina contestadora en su casa. Él puede estar 95% seguro de que el porcentaje verdadero de familias que utilizan una máquina contestadora está entre L_1 y L_2. Determina los valores de L_1 y L_2. Utiliza $p = 0.60$ y $n = 36$ en las fórmulas.

140. Media cuadrática La *media cuadrática* (o *raíz cuadrada media, RCM*) con frecuencia se utiliza en la solución de problemas de física. Por ejemplo, en sistemas de distribución de potencia, muchas veces se hace referencia a los voltajes y las corrientes en términos de sus valores RCM. La media cuadrática de un conjunto de valores se obtiene elevando al cuadrado cada valor y sumando los resultados (representados por (Σx^2)), luego se divide el valor obtenido entre el número de valores, n, y se toma la raíz cuadrada de estos valores. Podemos expresar esta fórmula como

$$\text{Media cuadrática} = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}}$$

Determina la media cuadrática de los puntos 2, 4 y 10.

Actividad de grupo

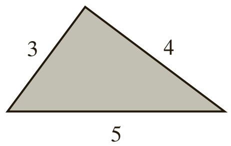
Analicen y respondan en grupo el ejercicio 141.

141. Fórmula de Herón El área de un triángulo es $A = \frac{1}{2}bh$. Si se desconoce la altura pero se sabe cuánto miden sus tres lados, podemos utilizar la fórmula de Herón para determinar el área, A. La fórmula de Herón es

$$A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

donde a, b y c son las longitudes de los tres lados y

$$S = \frac{a+b+c}{2}$$

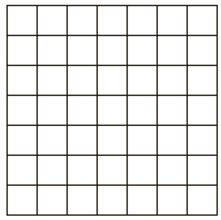


a) Cada miembro del grupo utilizará la fórmula de Herón para determinar el área de un triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 pulgadas.

b) Comparen las respuestas que dieron al inciso **a)**. Si algún miembro del grupo obtuvo una respuesta incorrecta, analicen en qué consistió el error.

c) Que cada miembro del grupo realice los pasos siguientes:

1. Dibuja un triángulo en la cuadrícula siguiente. Coloca cada vértice del triángulo en la intersección de dos líneas de la cuadrícula.



2. Mide con una regla la longitud de cada lado del triángulo.

3. Utiliza la fórmula de Herón para determinar el área del triángulo.

d) Comparen y analicen los resultados del inciso **c)**.

Ejercicios de repaso acumulados

[2.2] **142.** Despeja P_2 de la fórmula $P_1P_2 - P_1P_3 = P_2P_3$

[6.1] **143.** Simplifica $\dfrac{x(x-5)+x(x-2)}{2x-7}$.

Realiza cada operación indicada.

[6.1] **144.** $\dfrac{4a^2-9b^2}{4a^2+12ab+9b^2} \cdot \dfrac{6a^2b}{8a^2b^2-12ab^3}$

145. $(t^2-2t-15) \div \dfrac{t^2-9}{t^2-3t}$

[6.2] **146.** $\dfrac{2}{x+3} - \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{2x}{x^2-9}$

[6.4] **147.** Resuelve $2 + \dfrac{3x}{x-1} = \dfrac{8}{x-1}$.

7.7 Números complejos

1 Reconocer un número complejo.

2 Sumar y restar números complejos.

3 Multiplicar números complejos.

4 Dividir números complejos.

5 Determinar potencias de i.

1 Reconocer un número complejo

En la sección 7.1 mencionamos que las raíces cuadradas de números negativos, como $\sqrt{-4}$, no son números reales. Números como $\sqrt{-4}$ se denominan **números imaginarios**. Aunque no pertenecen al conjunto de los números reales, los números imaginarios existen y son muy útiles en matemáticas y ciencias.

Todo número imaginario tiene a $\sqrt{-1}$ como factor. El número $\sqrt{-1}$ llamado **unidad imaginaria**, se denota con la letra i.

Unidad imaginaria

$$i = \sqrt{-1}$$

Comprendiendo el álgebra

La raíz cuadrada de cualquier número negativo es un número imaginario. Por ejemplo, $\sqrt{-25}$ es un número imaginario que escribimos del modo siguiente:

$$\begin{aligned}\sqrt{-25} &= \sqrt{-1\cdot 25}\\ &= \sqrt{-1}\cdot\sqrt{25}\\ &= i\cdot 5 \text{ o } 5i\end{aligned}$$

$\sqrt{-3}$ es un número imaginario que escribimos como sigue:

$$\begin{aligned}\sqrt{-3} &= \sqrt{-1\cdot 3}\\ &= \sqrt{-1}\cdot\sqrt{3}\\ &= i\sqrt{3}\end{aligned}$$

Para escribir la raíz cuadrada de un número negativo en términos de i, se usa la siguiente propiedad.

Raíz cuadrada de un número negativo

Para cualquier número real positivo n,

$$\sqrt{-n} = \sqrt{-1\cdot n} = \sqrt{-1}\,\sqrt{n} = i\sqrt{n}$$

Por lo tanto, podemos escribir

$$\begin{aligned}\sqrt{-4} &= \sqrt{-1}\,\sqrt{4} = i2 \quad \text{o} \quad 2i\\ \sqrt{-9} &= \sqrt{-1}\,\sqrt{9} = i3 \quad \text{o} \quad 3i\\ \sqrt{-7} &= \sqrt{-1}\,\sqrt{7} = i\sqrt{7}\end{aligned}$$

Por lo general, en este libro escribiremos $i\sqrt{7}$ en vez de $\sqrt{7}i$ para evitar confusiones con $\sqrt{7i}$. También $3\sqrt{5}i$ se escribirá como $3i\sqrt{5}$.

Ejemplos

$$\sqrt{-81} = 9i \qquad \sqrt{-6} = i\sqrt{6}$$
$$\sqrt{-49} = 7i \qquad \sqrt{-10} = i\sqrt{10}$$

El sistema de números reales es parte de un sistema de números más grande, denominado *sistema de números complejos*. A continuación analizaremos los **números complejos**.

Número complejo

Todo número de la forma

$$a + bi$$

donde a y b son números reales, e i es la unidad imaginaria, es un **número complejo**.

Todos los números reales y todos los números imaginarios son también números complejos. Un número complejo tiene dos partes: una parte real, a, y una parte imaginaria, b.

$$\underbrace{a}_{\text{Parte real}} + \underbrace{b}_{\text{Parte imaginaria}}i$$

Si $b = 0$, el número complejo es un número real. Si $a = 0$, el número complejo es un **número imaginario puro**.

Ejemplos de números complejos

$3 + 2i$	$a = 3, b = 2$	
$5 - i\sqrt{6}$	$a = 5, b = -\sqrt{6}$	
4	$a = 4, b = 0$	(número real, $b = 0$)
$8i$	$a = 0, b = 8$	(número imaginario, $a = 0$)
$-i\sqrt{7}$	$a = 0, b = -\sqrt{7}$	(número imaginario, $a = 0$)

Hemos dicho que todos los números reales e imaginarios son también números complejos. En la **Figura 7.7** se muestra la relación entre los diversos conjuntos de números.

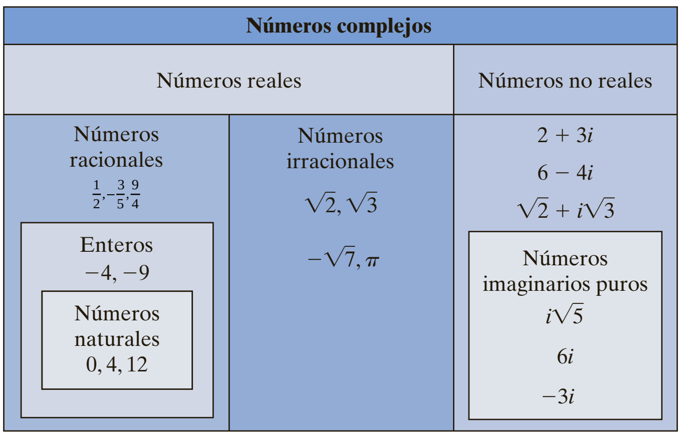


FIGURA 7.7

EJEMPLO 1 Escribe cada uno de los siguientes números complejos en la forma $a + bi$.

a) $7 + \sqrt{-36}$ **b)** $4 - \sqrt{-12}$ **c)** 19 **d)** $\sqrt{-50}$ **e)** $6 + \sqrt{10}$

Solución

a) $7 + \sqrt{-36} = 7 + \sqrt{-1}\sqrt{36}$
$= 7 + i6 \quad \text{o} \quad 7 + 6i$

b) $4 - \sqrt{-12} = 4 - \sqrt{-1}\sqrt{12}$
$= 4 - \sqrt{-1}\sqrt{4}\sqrt{3}$
$= 4 - i(2)\sqrt{3} \quad \text{o} \quad 4 - 2i\sqrt{3}$

c) $19 = 19 + 0i$

d) $\sqrt{-50} = 0 + \sqrt{-50}$
$= 0 + \sqrt{-1}\sqrt{25}\sqrt{2}$
$= 0 + i(5)\sqrt{2} \quad \text{o} \quad 0 + 5i\sqrt{2}$

e) Tanto 6 como $\sqrt{10}$ son números reales. Si escribimos la expresión como un número complejo, la respuesta es $(6 + \sqrt{10}) + 0i$.

Resuelve ahora el ejercicio 23

Los números complejos pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse. Para realizar estas operaciones, utilizaremos las definiciones que nos indican que $i = \sqrt{-1}$ e $i^2 = -1$.

Definición de i^2

Si $i = \sqrt{-1}$, entonces

$$i^2 = -1$$

2 Sumar y restar números complejos

A continuación se explica cómo sumar y restar números complejos.

Para sumar y restar números complejos

1. Cambia todos los números imaginarios a la forma bi.
2. Suma (o resta) las partes reales de los números complejos.
3. Suma (o resta) las partes imaginarias de los números complejos.
4. Escribe la respuesta en la forma $a + bi$

EJEMPLO 2 Suma $(9 + 15i) + (-6 - 2i) + 18$.

Solución

$$\begin{aligned}(9 + 15i) + (-6 - 2i) + 18 &= 9 + 15i - 6 - 2i + 18 \\ &= 9 - 6 + 18 + 15i - 2i \\ &= 21 + 13i\end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 27

EJEMPLO 3 Resta $(8 - \sqrt{-27}) - (-3 + \sqrt{-48})$.

Solución

$$\begin{aligned}(8-\sqrt{-27}) - (-3 + \sqrt{-48}) &= (8 - \sqrt{-1}\sqrt{27}) - (-3 + \sqrt{-1}\sqrt{48}) \\ &= (8-\sqrt{-1}\sqrt{9}\sqrt{3}) - (-3 + \sqrt{-1}\sqrt{16}\sqrt{3}) \\ &= (8 - 3i\sqrt{3}) - (-3 + 4i\sqrt{3}) \\ &= 8 - 3i\sqrt{3} + 3 - 4i\sqrt{3} \\ &= 8 + 3 - 3i\sqrt{3} - 4i\sqrt{3} \\ &= 11 - 7i\sqrt{3}\end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 35

3 Multiplicar números complejos

Veamos ahora cómo multiplicar números complejos.

Para multiplicar números complejos

1. Cambia todos los números imaginarios a la forma bi.
2. Multiplica los números complejos como si multiplicaras polinomios.
3. Sustituye cada aparición de i^2 por -1.
4. Reduce las partes reales e imaginarias. Escribe la respuesta en la forma $a + bi$.

EJEMPLO 4 Multiplica.

a) $5i(6 - 2i)$ **b)** $\sqrt{-9}(\sqrt{-3} + 8)$ **c)** $2 - \sqrt{-18}\ \ \sqrt{-2} + 5)$

Solución

a)
$$\begin{aligned} 5i(6 - 2i) &= 5i(6) + 5i(-2i) && \text{Propiedad distributiva} \\ &= 30i - 10i^2 \\ &= 30i - 10(-1) && \text{Reemplaza } i^2 \text{ por } -1. \\ &= 30i + 10 \quad \text{o} \quad 10 + 30i \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \sqrt{-9}(\sqrt{-3} + 8) &= 3i(i\sqrt{3} + 8) && \text{Cambia los números imaginarios a la forma } bi. \\ &= 3i(i\sqrt{3}) + 3i(8) && \text{Propiedad distributiva} \\ &= 3i^2\sqrt{3} + 24i \\ &= 3(-1)\sqrt{3} + 24i && \text{Reemplaza } i^2 \text{ por } -1. \\ &= -3\sqrt{3} + 24i \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} (2 - \sqrt{-18})(\sqrt{-2} + 5) &= (2 - \sqrt{-1}\ \sqrt{18})(\sqrt{-1}\ \sqrt{2} + 5) \\ &= (2 - \sqrt{-1}\ \sqrt{9}\ \sqrt{2})(\sqrt{-1}\ \sqrt{2} + 5) \\ &= (2 - 3i\sqrt{2})(i\sqrt{2} + 5) \end{aligned}$$

Utiliza ahora el método PIES para multiplicar.

$$\begin{aligned} (2 - 3i\sqrt{2})(i\sqrt{2} + 5) &= (2)(i\sqrt{2}) + (2)(5) + (-3i\sqrt{2})(i\sqrt{2}) + (-3i\sqrt{2})(5) \\ &= 2i\sqrt{2} + 10 - 3i^2(2) - 15i\sqrt{2} \\ &= 2i\sqrt{2} + 10 - 3(-1)(2) - 15i\sqrt{2} \\ &= 2i\sqrt{2} + 10 + 6 - 15i\sqrt{2} \\ &= 16 - 13i\sqrt{2} \end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 45

Prevención de errores comunes

¿Qué es $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-2}$?

CORRECTO

$$\begin{aligned} \sqrt{-4} \cdot \sqrt{-2} &= 2i \cdot i\sqrt{2} \\ &= 2i^2\sqrt{2} \\ &= 2(-1)\sqrt{2} \\ &= -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

INCORRECTO

$$\begin{aligned} \sqrt{-4} \cdot \sqrt{-2} &= \sqrt{8} \\ &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Recuerda que $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ solo si a y b son números reales *no negativos*.

4 Dividir números complejos

El **conjugado de un número complejo** $a + bi$ es $a - bi$. Por ejemplo,

Número complejo	Conjugado
$3 + 7i$	$3 - 7i$
$1 - i\sqrt{3}$	$1 + i\sqrt{3}$
$2i$ (o $0 + 2i$)	$-2i$ (o $0 - 2i$)

Cuando un número complejo se multiplica por su conjugado utilizando el método PIES, los productos interno y externo suman cero y el resultado es un número real. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}(5+3i)(5-3i) &= 25 - 15i + 15i - 9i^2\\ &= 25 - 9i^2\\ &= 25 - 9(-1)\\ &= 25 + 9 = 34\end{aligned}$$

Veamos ahora cómo dividir números complejos.

Para dividir números complejos

1. Cambia todos los números imaginarios a la forma bi.
2. Multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.
3. Escribe la respuesta en la forma $a + bi$.

EJEMPLO 5 Divide $\dfrac{9+i}{i}$.

Solución Comienza multiplicando el numerador y el denominador por $-i$, el conjugado de i.

$$\begin{aligned}\frac{9+i}{i}\cdot\frac{-i}{-i} &= \frac{(9+i)(-i)}{-i^2}\\ &= \frac{-9i - i^2}{-i^2} && \text{Propiedad distributiva}\\ &= \frac{-9i-(-1)}{-(-1)} && \text{Reemplaza } i^2 \text{ por } -1.\\ &= \frac{-9i+1}{1}\\ &= 1 - 9i\end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 59

EJEMPLO 6 Divide $\dfrac{3+2i}{4-i}$.

Solución Multiplica el numerador y el denominador por $4 + i$, el conjugado de $4 - i$.

$$\begin{aligned}\frac{3+2i}{4-i}\cdot\frac{4+i}{4+i} &= \frac{12+3i+8i+2i^2}{16-i^2}\\ &= \frac{12+11i+2(-1)}{16-(-1)}\\ &= \frac{10+11i}{17} = \frac{10}{17}+\frac{11}{17}i\end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 65

EJEMPLO 7 **Impedancia** Un concepto necesario en el estudio de la electrónica es la impedancia. La impedancia afecta la corriente en un circuito. La impedancia, Z, en un circuito se determina mediante la fórmula $Z = \dfrac{V}{I}$, donde V es el voltaje e I es la corriente. Determina Z cuando $V = 1.6 - 0.3i$ e $I = -0.2i$, donde $i = \sqrt{-1}$.

Solución $Z = \dfrac{V}{I} = \dfrac{1.6 - 0.3i}{-0.2i}$. Multiplica ahora el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, $0.2i$.

$$\begin{aligned} Z = \frac{1.6 - 0.3i}{-0.2i} \cdot \frac{0.2i}{0.2i} &= \frac{0.32i - 0.06i^2}{-0.04i^2} \\ &= \frac{0.32i + 0.06}{0.04} \\ &= \frac{0.32i}{0.04} + \frac{0.06}{0.04} \\ &= 8i + 1.5 = 1.5 + 8i \end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 121

5 Determinar potencias de i

Utilizando $i = \sqrt{-1}$ e $i^2 = -1$, podemos determinar otras ***potencias de i***. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} i^3 &= i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i & \qquad i^6 &= i^4 \cdot i^2 = 1(-1) = -1 \\ i^4 &= i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1 & \qquad i^7 &= i^4 \cdot i^3 = 1(-i) = -i \\ i^5 &= i^4 \cdot i^1 = 1 \cdot i = i & \qquad i^8 &= i^4 \cdot i^4 = (1)(1) = 1 \end{aligned}$$

Observa que las potencias sucesivas de i rotan por los cuatro valores i, -1, $-i$ y 1 (ver **Figura 7.8**).

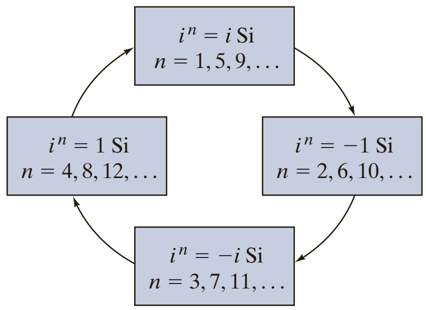


FIGURA 7.8

EJEMPLO 8 Evalúa. **a)** i^{35} **b)** i^{101}

Solución Escribimos cada expresión como un producto de factores tales que el exponente de un factor sea el máximo múltiplo de 4 menor o igual que el exponente dado. Después escribimos este factor como i^4 elevado a alguna potencia. Como i^4 tiene un valor de 1, la expresión i^4 elevada a una potencia también tendrá un valor de 1.

a) $i^{35} = i^{32} \cdot i^3 = (i^4)^8 \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = 1(-i) = -i$

b) $i^{101} = i^{100} \cdot i^1 = (i^4)^{25} \cdot i = 1 \cdot i = i$

Resuelve ahora el ejercicio 101

Consejo útil

Una forma rápida para evaluar i^n consiste en dividir el exponente entre 4 y analizar el residuo.

Si el residuo es 0, el valor es 1.
Si el residuo es 1, el valor es i.
Si el residuo es 2, el valor es -1.
Si el residuo es 3, el valor es $-i$.

Para el ejemplo 8 **a)**

$$\begin{array}{r} 8 \\ 4\overline{)35} \\ \underline{32} \\ 3 \end{array} \quad \text{La respuesta es } -i.$$

$i^{35} = (i^4)^8 \cdot i^3 = (1)^8 \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = i^3 = -i$

Para el ejemplo 8 **b)**

$$\begin{array}{r} 25 \\ 4\overline{)101} \\ \underline{8} \\ 21 \\ \underline{20} \\ 1 \end{array} \quad \text{La respuesta es } i.$$

EJEMPLO 9 Sea $f(x) = x^2$. Determina **a)** $f(6i)$ **b)** $f(3 + 7i)$.

Solución

a) $f(x) = x^2$

$f(6i) = (6i)^2 = 36i^2 = 36(-1) = -36$

b) $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} f(3 + 7i) = (3 + 7i)^2 &= (3)^2 + 2(3)(7i) + (7i)^2 \\ &= 9 + 42i + 49i^2 \\ &= 9 + 42i + 49(-1) \\ &= 9 + 42i - 49 \\ &= -40 + 42i \end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 111

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.7

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

-1	puro	real	complejo	número	$-i$
unidad	parte	1	conjugado	imaginario	racional

1. La raíz cuadrada de cualquier número negativo es un número ________ .

2. La ________ imaginaria se denota con la letra i.

3. Todo número de la forma $a + bi$ donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria, es un número ________.

4. En un número complejo $a + bi$, a se conoce como la parte ________.

5. En un número complejo $a + bi$, b se conoce como la ________ imaginaria.

6. Si $a = 0$, el número complejo $a + bi$ es un número imaginario ________.

7. Si $b = 0$, el número complejo $a + bi$ es un ________ real.

8. Para un número complejo $a + bi$ el ________ es $a - bi$.

9. Si i es la unidad imaginaria, entonces $i^2 =$ ________.

10. Si i es la unidad imaginaria, entonces $i^3 =$ ________.

Practica tus habilidades

Escribe cada expresión como un número complejo en la forma $a + bi$.

11. 4 **12.** $2i$ **13.** $\sqrt{25}$ **14.** $\sqrt{-100}$

15. $21 - \sqrt{-36}$ **16.** $\sqrt{3} + \sqrt{-3}$ **17.** $\sqrt{-24}$ **18.** $\sqrt{49} - \sqrt{-49}$

19. $8 - \sqrt{-12}$ **20.** $\sqrt{-9} + \sqrt{-81}$ **21.** $3 + \sqrt{-98}$ **22.** $\sqrt{-9} + 7i$

23. $12 - \sqrt{-25}$ **24.** $10 + \sqrt{-32}$ **25.** $7i - \sqrt{-45}$ **26.** $\sqrt{144} + \sqrt{-96}$

Suma o resta.

27. $(3 + 7i) + (1 - 3i)$ **28.** $(-4 + 5i) + (2 - 4i)$

29. $(3 + 7i) - (1 - 3i)$ **30.** $(7 - \sqrt{-4}) - (-1 - \sqrt{-16})$

31. $(1 + \sqrt{-1}) + (-18 - \sqrt{-169})$ **32.** $(16 - i\sqrt{3}) + (17 - \sqrt{-3})$

33. $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + (3\sqrt{2} - \sqrt{-8})$ **34.** $(8 - \sqrt{2}) - (5 + \sqrt{-15})$

35. $(5 - \sqrt{-72}) + (6 + \sqrt{-8})$ **36.** $(29 + \sqrt{-75}) + (\sqrt{-147})$

37. $(\sqrt{4} - \sqrt{-45}) + (-\sqrt{25} + \sqrt{-5})$ **38.** $(\sqrt{20} - \sqrt{-12} + (2\sqrt{5} + \sqrt{-75})$

Multiplica.

39. $3(2 - 4i)$ **40.** $-2(-3 + i)$ **41.** $i(4 + 9i)$

42. $3i(6 - i)$ **43.** $\sqrt{-9}(6 + 11i)$ **44.** $\frac{1}{2}i\left(\frac{1}{3} - 18i\right)$

45. $\sqrt{-16}(\sqrt{3} - 7i)$ **46.** $-\sqrt{-24}(\sqrt{6} - \sqrt{-3})$ **47.** $\sqrt{-27}(\sqrt{3} - \sqrt{-3})$

48. $\sqrt{-32}(\sqrt{2}+\sqrt{-8})$
49. $(3+2i)(1+i)$
50. $(6-2i)(3+i)$
51. $(10-3i)(10+3i)$
52. $(-4+3i)(2-5i)$
53. $(7+\sqrt{-2})(5-\sqrt{-8})$
54. $(\sqrt{4}-3i)(4+\sqrt{-4})$
55. $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}i\right)$
56. $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{4}i\right)\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{5}i\right)$

Divide.

57. $\frac{2}{3i}$
58. $\frac{-3}{4i}$
59. $\frac{2+3i}{2i}$
60. $\frac{7-3i}{2i}$
61. $\frac{6}{2-i}$
62. $\frac{9}{5+i}$
63. $\frac{3}{1-2i}$
64. $\frac{13}{-3-4i}$
65. $\frac{6-3i}{4+2i}$
66. $\frac{4-3i}{4+3i}$
67. $\frac{4}{6-\sqrt{-4}}$
68. $\frac{2}{3+\sqrt{-5}}$
69. $\frac{\sqrt{2}}{5+\sqrt{-12}}$
70. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{-9}}$
71. $\frac{5+\sqrt{-4}}{4-\sqrt{-16}}$
72. $\frac{2+\sqrt{-25}}{4-\sqrt{-9}}$
73. $\frac{\sqrt{-75}}{\sqrt{-3}}$
74. $\frac{\sqrt{-30}}{\sqrt{-2}}$
75. $\frac{\sqrt{-32}}{\sqrt{-18}\sqrt{8}}$
76. $\frac{\sqrt{-40}\sqrt{-20}}{\sqrt{-4}}$

Realiza las operaciones indicadas. Estos ejercicios son una combinación de los que se presentaron antes en esta sección.

77. $(-5+7i)+(5-7i)$
78. $\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}i\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i\right)$
79. $(\sqrt{50}-\sqrt{2})-(\sqrt{-12}-\sqrt{-48})$
80. $(8-\sqrt{-6})-(2-\sqrt{-24})$
81. $5.2(4-3.2i)$
82. $\sqrt{-6}(\sqrt{3}-\sqrt{-10})$
83. $(9+2i)(3-5i)$
84. $(\sqrt{3}+2i)(\sqrt{6}-\sqrt{-8})$
85. $\frac{11+4i}{2i}$
86. $\frac{1}{4+3i}$
87. $\frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{-4}}$
88. $\frac{5-2i}{3+2i}$
89. $\left(11-\frac{5}{9}i\right)-\left(4-\frac{3}{5}i\right)$
90. $\frac{8}{7}\left(4-\frac{2}{5}i\right)$
91. $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}i\right)\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{4}i\right)$
92. $\sqrt{\frac{4}{9}}\left(\sqrt{\frac{25}{36}}-\sqrt{-\frac{4}{25}}\right)$
93. $\frac{\sqrt{-48}}{\sqrt{-12}}$
94. $\frac{2-\sqrt{-9}}{4+\sqrt{-49}}$
95. $(5.23-6.41i)-(9.56+4.5i)$
96. $(7+\sqrt{-9})(4-\sqrt{-4})$

Indica si el valor de cada número imaginario es i, −1, −i o 1.

97. i^{6}
98. i^{63}
99. i^{160}
100. i^{231}
101. i^{93}
102. i^{103}
103. i^{811}
104. i^{1213}

Resolución de problemas

105. Considera el número complejo $2+3i$.
a) Determina su inverso aditivo.
b) Determina su inverso multiplicativo. Escribe la respuesta en forma simplificada.

106. Considera el número complejo $4-5i$.
a) Determina su inverso aditivo.
b) Determina su inverso multiplicativo. Escribe la respuesta en forma simplificada.

107. Si $f(x)=x^2$, determina $f(2i)$.

108. Si $f(x)=x^2$, determina $f(4i)$.

109. Si $f(x)=x^4-2x$, determina $f(2i)$.

110. Si $f(x)=x^3-4x^2$, determina $f(5i)$.

111. Si $f(x)=x^2+2x$, determina $f(3+i)$.

112. Si $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$, determina $f(4-i)$.

Evalúa cada expresión para el valor dado de x.

113. $x^2-2x+5,\ x=1+2i$

114. $x^2-2x+5,\ x=1-2i$

115. $x^2+2x+7,\ x=-1+i\sqrt{5}$

116. $x^2+2x+9,\ x=-1-i\sqrt{5}$

En los ejercicios 117-120, determina si el valor dado de x es una solución a la ecuación.

117. $x^2-4x+5=0,\ x=2-i$

118. $x^2-4x+5=0,\ x=2+i$

119. $x^2-6x+11=0,\ x=-3+i\sqrt{3}$

120. $x^2-6x+15=0,\ x=3-i\sqrt{3}$

121. **Impedancia** Determina la impedancia, Z, mediante la fórmula $Z = \frac{V}{I}$ cuando $V = 1.8 + 0.5i$ e $I = 0.6i$. Ver ejemplo 7.

122. **Impedancia** Consulta el ejercicio 121. Determina la impedancia cuando $V = 2.4 - 0.6i$ e $I = -0.4i$.

123. **Impedancia** En determinadas condiciones, la impedancia total, Z_T, de un circuito se determina mediante la fórmula

$$Z_T = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Determina Z_T cuando $Z_1 = 2 - i$ y $Z_2 = 4 - i$.

124. **Impedancia** Consulta el ejercicio 129. Determina Z_T cuando $Z_1 = 3 - i$ y $Z_2 = 5 + i$.

125. Determina si i^{-1} es igual a i, -1, $-i$ o 1. Demuestra cómo llegaste al resultado.

126. Determina si i^{-5} es igual a i, -1, $-i$ o 1. Demuestra cómo llegaste al resultado.

En el capítulo 8 utilizaremos la fórmula cuadrática $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ *para resolver ecuaciones de la forma* $ax^2 + bx + c = 0$. **(a)** *Utiliza la fórmula cuadrática para resolver las ecuaciones cuadráticas siguientes.* **(b)** *Comprueba cada una de las soluciones sustituyendo los valores encontrados para x (uno a la vez) en la ecuación original. En estos ejercicios, el símbolo ± (se lee "más, menos") genera dos respuestas complejas distintas.*

127. $x^2 - 2x + 6 = 0$

128. $x^2 - 4x + 6 = 0$

Dados los números complejos $a = 5 + 2i\sqrt{3}$, $b = 1 + i\sqrt{3}$, *evalúa cada expresión.*

129. $a + b$

130. $a - b$

131. ab

132. $\dfrac{a}{b}$

Ejercicios de conceptos y escritura

133. En las expresiones siguientes, ¿son todas números complejos? Si alguna no es, explica por qué.

a) 9 **b)** $-\frac{1}{2}$ **c)** $4 - \sqrt{-2}$
d) $7 - 3i$ **e)** $4.2i$ **f)** $11 + \sqrt{3}$

134. ¿Son todos los números reales y todos los números imaginarios números complejos?

135. ¿Son todos los números complejos números reales?

136. **a)** ¿Es $i \cdot i$ un número real? Explica.

b) ¿Es $i \cdot i \cdot i$ un número real? Explica.

En los ejercicios 137-140, responde verdadero o falso. Apoya tu respuesta con un ejemplo.

137. El producto de dos números imaginarios puros siempre es un número real.

138. La suma de dos números imaginarios puros siempre es un número imaginario.

139. El producto de dos números complejos siempre es un número real.

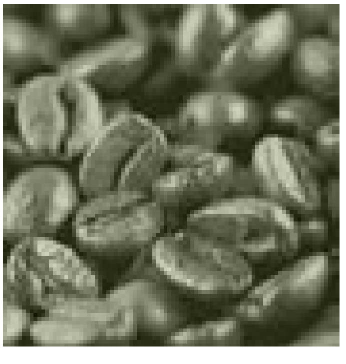
140. La suma de dos números complejos siempre es un número complejo.

141. ¿Qué valores de n hacen que i^n sea un número real? Explica.

142. ¿Qué valores de n hacen que i^{2n} sea un número real? Explica.

Ejercicios de repaso acumulados

[4.3] **143.** **Mezcla** Berreda Coughlin, un abarrotero de Dallas, tiene dos tipos de café, uno lo vende a \$5.50 por libra y el otro en \$6.30 por libra. ¿Cuántas libras de cada tipo debe mezclar para producir 40 libras de café para vender a \$6.00 por libra?



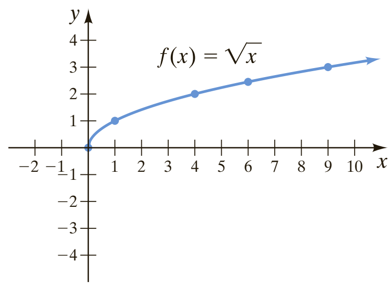
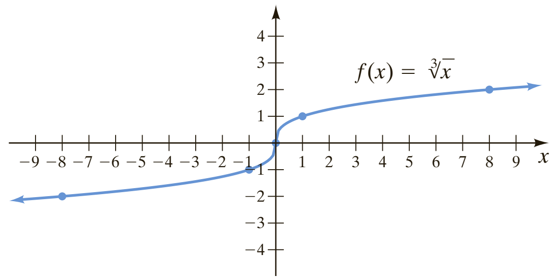
© Andrey Armyagov/Shutterstock

[5.3] **144.** Divide $\dfrac{8c^2 + 6c - 35}{4c + 9}$.

[6.2] **145.** Suma $\dfrac{b}{a - b} + \dfrac{a + b}{b}$.

[6.4] **146.** Resuelve $\dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{x - 1}{2}$.

Resumen del capítulo 7

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 7.1	
Una **expresión radical** tiene la forma $\sqrt[n]{x}$, donde n es el índice y x es el radicando.	En la expresión radical $\sqrt[3]{x}$, 3 es el índice y x es el radicando.
La **raíz cuadrada principal** de un número positivo a, escrita $\sqrt{a}$, es el número positivo b, tal que $b^2 = a$.	$\sqrt{81} = 9$, ya que $9^2 = 81$ $\sqrt{0.36} = 0.6$ ya que $(0.6)^2 = 0.36$
La **función raíz cuadrada** es $f(x) = \sqrt{x}$. Su dominio es $[0, \infty)$ y su rango es $[0, \infty)$.	
La **raíz cúbica** de un número a, escrita $\sqrt[3]{a}$, es el número b, tal que $b^3 = a$.	$\sqrt[3]{27} = 3$ ya que $3^3 = 27$ $\sqrt[3]{-125} = -5$ ya que $(-5)^3 = -125$
La **función raíz cúbica** es $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Su dominio es $(-\infty, \infty)$ o $\mathbb{R}$ y su rango es $(-\infty, \infty)$ o $\mathbb{R}$.	
La raíz *enésima* de a, $\sqrt[n]{a}$, donde n es un *índice par* y a es un número real no negativo, se llama **raíz par**, y es el número no negativo b, tal que $b^n = a$. La raíz enésima de a, $\sqrt[n]{a}$, donde n es un índice impar y a es un número real, se llama **raíz impar**, y es el número real b, tal que $b^n = a$.	$\sqrt{4} = 2$ ya que $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$ $\sqrt[4]{81} = 3$ ya que $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ $\sqrt[3]{27} = 3$ ya que $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ $\sqrt[5]{-32} = -2$ ya que $(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$
Para cualquier número real a, a, $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$.	$\sqrt{(-6)^2} = \lvert -6 \rvert = 6$ $\sqrt{(y+8)^2} = \lvert y + 8 \rvert$
Sección 7.2	
Exponente racional $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ Cuando a es no negativo, n puede ser cualquier índice. Cuando a es negativo, n debe ser impar.	$\sqrt{17} = 17^{1/2}$ $\sqrt[4]{21x^3y^2} = (21x^3y^2)^{1/4}$
Para cualquier número no negativo a y enteros m y n, $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\overset{\text{Potencia}}{m}/\underset{\text{Índice}}{n}}$	$\sqrt[4]{z^9} = (\sqrt[4]{z})^9 = z^{9/4}$
Para cualquier número real no negativo a, $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a^{n/n} = a$	$\sqrt[4]{y^4} = y$, $\sqrt[8]{14^8} = 14$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 7.2 (cont.)	
Reglas de los exponentes Para todos los números reales a y b y todos los números racionales m y n,	
Regla del producto $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$x^{1/3} \cdot x^{4/3} = x^{(1/3)+(4/3)} = x^{5/3}$
Regla del cociente $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$	$\dfrac{x^{4/5}}{x^{1/2}} = x^{(4/5)-(1/2)} = x^{(8/10)-(5/10)} = x^{3/10}$
Regla del exponente negativo $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}, \quad a \neq 0$	$x^{-1/7} = \dfrac{1}{x^{1/7}}$
Regla del exponente cero $a^0 = 1, \quad a \neq 0$	$m^0 = 1$
Elevar una potencia a una potencia $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(c^{1/8})^{16} = c^{(1/8) \cdot 16} = c^2$
Elevar un producto a una potencia $(ab)^m = a^m b^m$	$(p^3 q^4)^{1/8} = p^{3/8} q^{1/2}$
Elevar un cociente a una potencia $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}, \quad b \neq 0$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n = \dfrac{b^n}{a^n}, \quad a \neq 0, b \neq 0$	$\left(\dfrac{81}{49}\right)^{-1/2} = \left(\dfrac{49}{81}\right)^{1/2} = \dfrac{49^{1/2}}{81^{1/2}} = \dfrac{7}{9}$
Sección 7.3	
Un número o expresión es un **cuadrado perfecto** si es el cuadrado de una expresión. Un número o expresión es un **cubo perfecto** si es el cubo de una expresión.	Cuadrados perfectos: $49 \downarrow 7^2$, $81 \downarrow 9^2$, $x^{12} \downarrow (x^6)^2$, $y^{50} \downarrow (y^{25})^2$ (Cuadrado de un número o expresión) Cubos perfectos: $27 \downarrow 3^3$, $-27 \downarrow (-3)^3$, $y^{18} \downarrow (y^6)^3$, $z^{30} \downarrow (z^{10})^3$ (Cubo de un número o expresión)
Regla del producto para radicales Para números reales no negativos a y b, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4, \quad \sqrt[3]{2x^3} = \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{2} = x\sqrt[3]{2}$
Para simplificar radicales mediante la regla del producto **1.** Si el radicando tiene un coeficiente diferente de 1, escríbelo como un producto de dos números, uno de los cuales sea la mayor potencia perfecta para el índice. **2.** Escribe cada factor variable como un producto de dos factores, uno de los cuales sea la mayor potencia perfecta de la variable para el índice. **3.** Utiliza la regla del producto para escribir la expresión radical como un producto de radicales. Coloca todas las potencias perfectas (números y variables) bajo el mismo radical. **4.** Simplifica el radical que tiene las potencias perfectas.	$\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{4}\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$ $\sqrt[3]{16x^5y^9} = \sqrt[3]{8x^3y^9 \cdot 2x^2}$ $= \sqrt[3]{8x^3y^9}\sqrt[3]{2x^2}$ $= 2xy^3\sqrt[3]{2x^2}$
Regla del cociente para radicales Para números reales no negativos a y b, $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}, \quad b \neq 0$	$\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{32}{2}} = \sqrt{16} = 4, \quad \sqrt[3]{\dfrac{x^6}{y^{12}}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{y^{12}}} = \dfrac{x^2}{y^4}$
Sección 7.4	
Radicales semejantes son radicales con el mismo radicando y el mismo índice. **Radicales diferentes** son radicales con un radicando o el índice diferente.	Radicales semejantes: $\sqrt{3}, \ 12\sqrt{3}$; $2\sqrt[4]{xy^3}, \ -3\sqrt[4]{xy^3}$ Radicales no semejantes: $\sqrt{3}, \ 7\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[5]{xy^3}, \ x\sqrt[5]{y^3}$
Para sumar o restar radicales **1.** Simplifica cada expresión radical. **2.** Combina los radicales semejantes (si los hay).	$\sqrt{27} + \sqrt{48} - 2\sqrt{75} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{3}$ $= 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 10\sqrt{3}$ $= -3\sqrt{3}$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 7.4 (cont.)	
Para multiplicar radicales Utiliza la regla del producto $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\sqrt[4]{8c^2}\,\sqrt[4]{4c^3} = \sqrt[4]{32c^5} = \sqrt[4]{16c^4}\,\sqrt[4]{2c}$ $= 2c\,\sqrt[4]{2c}$
Sección 7.5	
Para **racionalizar un denominador** multiplica el numerador y el denominador de la fracción por el radical que dé como resultado que el radicando en el denominador sea una potencia perfecta.	$\dfrac{6}{\sqrt{3x}} \cdot \dfrac{\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}} = \dfrac{6\sqrt{3x}}{\sqrt{9x^2}} = \dfrac{6\sqrt{3x}}{3x} = \dfrac{2\sqrt{3x}}{x}$
Una expresión radical está simplificada cuando se cumple lo siguiente: **1.** No hay potencias perfectas que sean factores del radicando y todos los exponentes en el radicando son menores que el índice. **2.** Ningún radicando tiene fracciones. **3.** Ningún denominador tiene radicales.	No está simplificada — Simplificada **1.** $\sqrt{x^3}$ — $x\sqrt{x}$ **2.** $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ — $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **3.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ — $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
Sección 7.6	
Para resolver ecuaciones con radicales **1.** Reescribe la ecuación de modo que un radical con una variable quede solo (aislado) en un lado de la ecuación. **2.** Eleva cada lado de la ecuación a una potencia igual al índice del radical. **3.** Reduce los términos semejantes. **4.** Si la ecuación aún tiene un término con una variable en un radicando, repite los pasos 1 a 3. **5.** Despeja la variable de la ecuación resultante. **6.** Comprueba todas las soluciones en la ecuación original, para detectar soluciones extrañas.	Resuelve $\sqrt{x} - 8 = 0$. $\sqrt{x} - 8 = 0$ $\sqrt{x} = 8$ $(\sqrt{x})^2 = 8^2$ $x = 64$ Una verificación muestra que 64 es la solución.
Sección 7.7	
La **unidad imaginaria** i se define como $i = \sqrt{-1}$. (También, $i^2 = -1$.)	$\sqrt{-25} = \sqrt{25}\,\sqrt{-1} = 5i$
Número imaginario Para cualquier número positivo n, $\sqrt{-n} = i\sqrt{n}$.	$\sqrt{-19} = i\sqrt{19}$
Un **número complejo** es un número de la forma $a + bi$ donde a y b son números reales.	$3 + 2i$ y $26 - 15i$ son números complejos.
Para sumar o restar números complejos **1.** Cambia todos los números imaginarios a la forma bi. **2.** Suma (o resta) las partes reales de los números complejos. **3.** Suma (o resta) las partes imaginarias de los números complejos. **4.** Escribe la respuesta en la forma $a + bi$.	Suma $(8 - 3i) + (12 + 5i)$. $(8 - 3i) + (12 + 5i)$ $= 8 + 12 - 3i + 5i$ $= 20 + 2i$
Para multiplicar números complejos **1.** Cambia todos los números imaginarios a la forma bi. **2.** Multiplica los números complejos como multiplicarías polinomios. **3.** Sustituye i^2 por -1. **4.** Reduce las partes reales y las partes imaginarias. Escribe la respuesta en la forma $a + bi$.	Multiplica $(7 + 2i\sqrt{3})(5 - 4i\sqrt{3})$. $(7 + 2i\sqrt{3})(5 - 4i\sqrt{3})$ $= 35 - 28i\sqrt{3} + 10i\sqrt{3} - 8(i^2)(3)$ $= 35 - 28i\sqrt{3} + 10i\sqrt{3} + 24$ $= 59 - 18i\sqrt{3}$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 7.7 (cont.)	
El **conjugado de un número complejo** $a + bi$ es $a - bi$.	Número complejo: $14 + 2i$, Conjugado: $14 - 2i$ Número complejo: $-17 - 8i$, Conjugado: $-17 + 8i$
Para dividir números complejos **1.** Cambia todos los números imaginarios a la forma bi. **2.** Racionaliza el denominador, multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador. **3.** Escribe la respuesta en la forma $a + bi$.	Divide $\dfrac{2-i}{5+3i}$. $\dfrac{2-i}{5+3i}\cdot\dfrac{5-3i}{5-3i}=\dfrac{10-6i-5i+3i^2}{25-9i^2}=\dfrac{7-11i}{34}$
Potencias de *i* $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i$	$i^{38} = i^{36}\cdot i^2 = (i^4)^9\cdot i^2 = 1^9\cdot(-1) = -1$ $i^{63} = i^{60}\cdot i^3 = (i^4)^{15}\cdot i^3 = 1^{15}(-i) = -i$

Ejercicios de repaso del capítulo 7

[7.1] *Evalúa.*

1. $\sqrt{9}$ **2.** $\sqrt[3]{-27}$ **3.** $\sqrt[3]{-125}$ **4.** $\sqrt[4]{256}$

Utiliza el valor absoluto para evaluar.

5. $\sqrt{(-5)^2}$ **6.** $\sqrt{(38.2)^2}$

Escribe como un valor absoluto.

7. $\sqrt{x^2}$ **8.** $\sqrt{(x+7)^2}$ **9.** $\sqrt{(x-y)^2}$ **10.** $\sqrt{(x^2-4x+12)^2}$

11. Sea $f(x) = \sqrt{10x+9}$. Determina $f(4)$.

12. Sea $k(x) = 2x + \sqrt{\dfrac{x}{3}}$. Determina $k(27)$.

13. Sea $g(x) = \sqrt[3]{2x+3}$. Determina $g(4)$ y redondea la respuesta al decimal más cercano.

14. **Área** El área de un cuadrado son 144 metros cuadrados. Determina la longitud de sus lados.

Para el resto de los ejercicios de repaso, considera que todas las variables representan números reales positivos.

[7.2] *Escribe en forma exponencial.*

15. $\sqrt{x^3}$ **16.** $\sqrt[3]{x^5}$ **17.** $(\sqrt[4]{y})^{13}$ **18.** $\sqrt[7]{6^{-2}}$

Escribe en forma radical.

19. $x^{1/2}$ **20.** $a^{2/3}$ **21.** $(8m^2n)^{7/4}$ **22.** $(x+y)^{-5/3}$

Simplifica cada expresión radical cambiándola a forma exponencial. Escribe la respuesta en forma radical cuando sea apropiado.

23. $\sqrt[3]{4^6}$ **24.** $\sqrt{x^{12}}$ **25.** $(\sqrt[4]{9})^8$ **26.** $\sqrt[20]{a^5}$

Evalúa, si es posible. Si la expresión no es un número real, indícalo.

27. $-36^{1/2}$ **28.** $(-36)^{1/2}$ **29.** $\left(\dfrac{64}{27}\right)^{-1/3}$ **30.** $64^{-1/2} + 8^{-2/3}$

Simplifica. Escribe la respuesta sin exponentes negativos.

31. $x^{3/5}\cdot x^{-1/3}$ **32.** $\left(\dfrac{64}{y^9}\right)^{1/3}$ **33.** $\left(\dfrac{a^{-6/5}}{a^{2/5}}\right)^{2/3}$ **34.** $\left(\dfrac{20x^5y^{-3}}{4y^{1/2}}\right)^2$

Multiplica.

35. $a^{1/2}(5a^{3/2} - 3a^2)$ **36.** $4x^{-2/3}\left(x^{-1/2} + \dfrac{11}{4}x^{2/3}\right)$

Factoriza cada expresión. Escribe la respuesta sin exponentes negativos.

37. $x^{2/5} + x^{7/5}$ **38.** $a^{-1/2} + a^{3/2}$

Determina el valor indicado para cada función. Utiliza tu calculadora para evaluar los números irracionales. Redondea los números irracionales a la milésima más cercana.

39. Si $f(x) = \sqrt{6x-11}$, determina $f(6)$.

40. Si $g(x) = \sqrt[3]{9x-17}$, determina $g(4)$.

Realiza la gráfica de las siguientes funciones.

41. $(x) = \sqrt{x}$ **42.** $f(x) = \sqrt{x} - 4$

[7.2-7.5] *Simplifica.*

43. $\sqrt{18}$ **44.** $\sqrt[3]{16}$ **45.** $\sqrt{\dfrac{49}{9}}$ **46.** $\sqrt[3]{\dfrac{8}{125}}$

47. $-\sqrt{\dfrac{81}{49}}$ **48.** $\sqrt[3]{-\dfrac{27}{125}}$ **49.** $\sqrt{32}\,\sqrt{2}$ **50.** $\sqrt[3]{32}\,\sqrt[3]{2}$

51. $\sqrt{18x^2y^3z^4}$ **52.** $\sqrt{75x^3y^7}$ **53.** $\sqrt[3]{54a^7b^{10}}$ **54.** $\sqrt[3]{125x^8y^9z^{16}}$

55. $\left(\sqrt[6]{x^2y^3z^5}\right)^{42}$ **56.** $\left(\sqrt[5]{2ab^4c^6}\right)^{15}$ **57.** $\sqrt{5x}\,\sqrt{8x^5}$ **58.** $\sqrt[3]{2x^2y}\,\sqrt[3]{4x^9y^4}$

59. $\sqrt[3]{2x^4y^5}\,\sqrt[3]{16x^4y^4}$ **60.** $\sqrt[4]{4x^4y^7}\,\sqrt[4]{4x^5y^9}$ **61.** $\sqrt{3x}\,(\sqrt{12x} - \sqrt{20})$ **62.** $\sqrt[3]{2x^2y}\left(\sqrt[3]{4x^4y^7} + \sqrt[3]{9x}\right)$

63. $\sqrt{\sqrt{a^3b^2}}$ **64.** $\sqrt{\sqrt[3]{x^5y^2}}$ **65.** $\left(\dfrac{4r^2p^{1/3}}{r^{1/2}p^{4/3}}\right)^3$ **66.** $\left(\dfrac{6y^{2/5}z^{1/3}}{x^{-1}y^{3/5}}\right)^{-1}$

67. $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ **68.** $\sqrt[3]{\dfrac{7}{9}}$ **69.** $\sqrt[4]{\dfrac{5}{4}}$ **70.** $\dfrac{x}{\sqrt{10}}$

71. $\dfrac{8}{\sqrt{x}}$ **72.** $\dfrac{m}{\sqrt[3]{25}}$ **73.** $\dfrac{10}{\sqrt[3]{y^2}}$ **74.** $\dfrac{9}{\sqrt[4]{z}}$

75. $\sqrt[3]{\dfrac{x^3}{27}}$ **76.** $\dfrac{\sqrt[3]{2x^{10}}}{\sqrt[3]{16x^7}}$ **77.** $\sqrt{\dfrac{32x^2y^5}{2x^8y}}$ **78.** $\sqrt[4]{\dfrac{48x^9y^{15}}{3xy^3}}$

79. $\sqrt{\dfrac{6x^4}{y}}$ **80.** $\sqrt{\dfrac{12a}{7b}}$ **81.** $\sqrt{\dfrac{18x^4y^5}{3z}}$ **82.** $\sqrt{\dfrac{125x^2y^5}{3z}}$

83. $\sqrt[3]{\dfrac{108x^3y^7}{2y^3}}$ **84.** $\sqrt[3]{\dfrac{3x}{5y}}$ **85.** $\sqrt[3]{\dfrac{9x^5y^3}{x^6}}$ **86.** $\sqrt[3]{\dfrac{y^6}{5x^2}}$

87. $\sqrt[4]{\dfrac{2a^2b^{11}}{a^5b}}$ **88.** $\sqrt[4]{\dfrac{3x^2y^6}{8x^3}}$ **89.** $(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}$ **90.** $(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})$

91. $(x - \sqrt{y})(x + \sqrt{y})$ **92.** $(\sqrt{3} + 2)^2$ **93.** $(\sqrt{x} - \sqrt{3y})(\sqrt{x} + \sqrt{5y})$

94. $(\sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{3y})(\sqrt[3]{3x} - \sqrt[3]{2y})$ **95.** $\dfrac{6}{2 + \sqrt{5}}$ **96.** $\dfrac{x}{4 + \sqrt{x}}$

97. $\dfrac{a}{4 - \sqrt{b}}$ **98.** $\dfrac{x}{\sqrt{y} - 7}$ **99.** $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

100. $\dfrac{\sqrt{x} - 3\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ **101.** $\dfrac{2}{\sqrt{a-1} - 2}$ **102.** $\dfrac{5}{\sqrt{y+2} - 3}$

103. $\sqrt[3]{x} + 10\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{x}$ **104.** $\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{192}$ **105.** $\sqrt[3]{16} - 5\sqrt[3]{54} + 3\sqrt[3]{64}$

106. $\sqrt{2} - \dfrac{3}{\sqrt{32}} + \sqrt{50}$ **107.** $9\sqrt{x^5y^6} - \sqrt{16x^7y^8}$ **108.** $8\sqrt[3]{x^7y^8} - \sqrt[3]{x^4y^2} + 3\sqrt[3]{x^{10}y^2}$

Dadas las funciones f(x) y g(x) en los ejercicios 109 y 110, determina $(f \cdot g)(x)$.

109. $f(x) = \sqrt{3x},\ g(x) = \sqrt{6x} - \sqrt{15}$ **110.** $f(x) = \sqrt[3]{2x^2},\ g(x) = \sqrt[3]{4x^4} + \sqrt[3]{16x^5}$

Simplifica. En el ejercicio 112, supón que la variable puede ser cualquier número real.

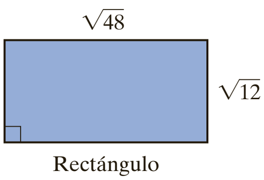
111. $f(x) = \sqrt{2x+7}\,\sqrt{2x+7},\ x \geq -\dfrac{7}{2}$ **112.** $g(a) = \sqrt{20a^2 + 100a + 125}$

Simplifica.

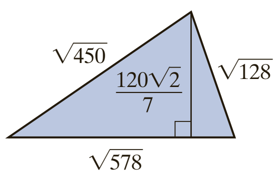
113. $\dfrac{\sqrt[3]{(x+5)^5}}{\sqrt{(x+5)^3}}$ **114.** $\dfrac{\sqrt[3]{a^3b^2}}{\sqrt[4]{a^4b}}$

Perímetro y área *Para cada figura, determina* **a)** *el perímetro y* **b)** *el área. Escribe sus respuestas en forma radical, con los radicales simplificados.*

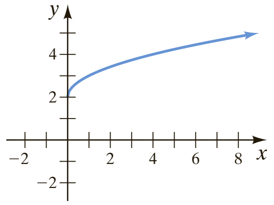
115.



116.



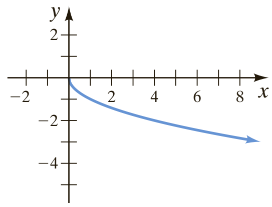
117. Considera la gráfica siguiente perteneciente a la ecuación $f(x) = \sqrt{x} + 2$.



a) Para $g(x) = -3$, traza la gráfica de $(f + g)(x)$.

b) ¿Cuál es el dominio de $(f + g)(x)$?

118. Considera la gráfica siguiente perteneciente a la ecuación $f(x) = -\sqrt{x}$.



a) Para $g(x) = \sqrt{x} + 2$, traza la gráfica de $(f + g)(x)$.

b) ¿Cuál es el dominio de $(f + g)(x)$?

[7.6] *Resuelve cada ecuación y comprueba tus soluciones.*

119. $\sqrt{x} = 4$

120. $\sqrt{x} = -4$

121. $\sqrt[3]{x} = 4$

122. $\sqrt[3]{x} = -5$

123. $7 + \sqrt{x} = 10$

124. $7 + \sqrt[3]{x} = 12$

125. $\sqrt{3x + 4} = \sqrt{5x + 14}$

126. $\sqrt{x^2 + 2x - 8} = x$

127. $\sqrt[3]{x - 9} = \sqrt[3]{5x + 3}$

128. $(x^2 + 7)^{1/2} = x + 1$

129. $\sqrt{x} + 3 = \sqrt{3x + 9}$

130. $\sqrt{6x - 5} - \sqrt{2x + 6} - 1 = 0$

Para cada par de funciones, determina todos los valores de x para los que $f(x) = g(x)$.

131. $f(x) = \sqrt{3x + 4}, g(x) = 2\sqrt{2x - 4}$

132. $f(x) = (4x + 5)^{1/3}, g(x) = (6x - 7)^{1/3}$

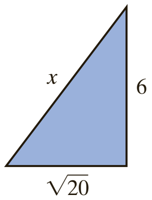
Despeja la variable que se indica.

133. $V = \sqrt{\dfrac{2L}{w}}$, para L

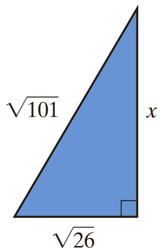
134. $r = \sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$, para A

Determina la longitud del lado desconocido de cada triángulo rectángulo. Escribe la respuesta como un radical en forma simplificada.

135.



136.



Resuelve.

137. Poste telefónico ¿Cuál es la longitud del cable que necesita utilizar una compañía telefónica para alcanzar la parte superior de un poste telefónico de 5 metros desde un punto a 2 metros de la base del poste?

138. Velocidad Utiliza la fórmula $v = \sqrt{2gh}$ para determinar la velocidad de un objeto después de haber caído 20 pies ($g = 32$ pies/s^2).

139. Péndulo Utiliza la fórmula

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$$

para determinar el periodo de un péndulo, T, si su longitud, L, es de 64 pies.

140. Energía cinética La energía cinética es la energía que tiene un objeto en movimiento. Su fórmula

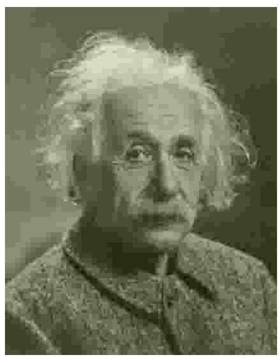
$$V = \sqrt{\frac{2K}{m}}$$

puede usarse para determinar la velocidad V, en metros por segundo, cuando una masa m, en kilogramos, tiene una energía cinética K, en Joules. Se lanza una pelota de béisbol de 0.145 kg. Si la energía cinética de la pelota en movimiento es de 45 Joules, ¿a qué velocidad se está moviendo la pelota?

141. Velocidad de la luz Albert Einstein determinó que si un objeto en reposo, con una masa m_0, se hace viajar a una velocidad cercana a la de la luz, su masa aumenta a m, donde

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

En la fórmula, v es la velocidad del objeto en movimiento y c es la velocidad de la luz.* En un acelerador usado para terapia contra el cáncer, las partículas viajan a velocidades de $0.98c$, esto es, a 98% de la velocidad de la luz. A una velocidad de $0.98c$, determina la masa m de la partícula en términos de su masa en reposo, m_0. Utiliza $v = 0.98c$ en la fórmula anterior.



© Wikicommons

Albert Einstein

*La velocidad de la luz es 3.00×10^8 metros por segundo. Sin embargo, no necesitamos esta información para resolver el problema.

[7.7] *Escribe cada expresión como un número complejo en la forma $a + bi$.*

142. 1 **143.** -8 **144.** $7 - \sqrt{-256}$ **145.** $9 + \sqrt{-16}$

Realiza cada operación que se indica.

146. $(3 + 2i) + (10 - i)$ **147.** $(4 + i) - (7 - 2i)$ **148.** $(\sqrt{3} + \sqrt{-5}) + (11\sqrt{3} - \sqrt{-7})$

149. $\sqrt{-6}(\sqrt{6} + \sqrt{-6})$ **150.** $(4 + 3i)(2 - 3i)$ **151.** $(6 + \sqrt{-3})(4 - \sqrt{-15})$

152. $\dfrac{8}{3i}$ **153.** $\dfrac{2 + \sqrt{3}}{2i}$ **154.** $\dfrac{4}{3 + 2i}$

155. $\dfrac{\sqrt{3}}{5 - \sqrt{-6}}$

Evalúa cada expresión para el valor dado de x.

156. $x^2 - 2x + 9,\ x = 1 + 2i\sqrt{2}$ **157.** $x^2 - 2x + 12,\ x = 1 - 2i$

Indica si el valor de cada número imaginario es i, -1, $-i$ o 1.

158. i^{33} **159.** i^{59} **160.** i^{404} **161.** i^{802}

Prueba de práctica del capítulo 7

Los videos de la prueba de práctica del capítulo proporcionan soluciones totalmente resueltas para cualquiera de los ejercicios que quieras repasar. Los videos de la prueba de práctica del capítulo están disponibles vía MyMathLab, o en YouTube (busca "Angel Intermediate Algebra" y da click en "Channels")

1. Escribe $\sqrt{(5x - 3)^2}$ como un valor absoluto.

2. Simplifica $\left(\dfrac{x^{2/5} \cdot x^{-1}}{x^{3/5}}\right)^2$.

3. Factoriza $x^{-2/3} + x^{4/3}$.

4. Grafica $g(x) = \sqrt{x} + 1$.

Simplifica en los ejercicios del 5 al 14. Considera que todas las variables representan números reales positivos.

5. $\sqrt{54x^7y^{10}}$

6. $\sqrt[3]{25x^5y^2}\,\sqrt[3]{10x^6y^8}$

7. $\sqrt{\dfrac{7x^6y^3}{8z}}$

8. $\dfrac{9}{\sqrt[3]{x}}$

9. $\dfrac{\sqrt{3}}{3 + \sqrt{27}}$

10. $2\sqrt{24} - 6\sqrt{6} + 3\sqrt{54}$

11. $\sqrt[3]{8x^3y^5} + 4\sqrt[3]{x^6y^8}$

12. $(\sqrt{3} - 2)(6 - \sqrt{8})$

13. $\sqrt[4]{\sqrt{x^5y^3}}$

14. $\dfrac{\sqrt[4]{(7x + 2)^5}}{\sqrt[3]{(7x + 2)^2}}$

Resuelve la ecuación en los ejercicios 15-17.

15. $\sqrt{2x + 19} = 3$

16. $\sqrt{x^2 - x - 12} = x + 3$

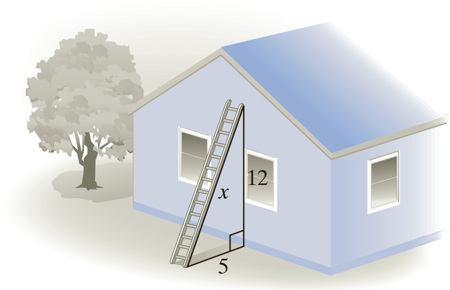
17. $\sqrt{a - 8} = \sqrt{a} - 2$

18. Para $f(x) = (9x + 37)^{1/3}$ y $g(x) = 2(2x + 2)^{1/3}$, determina todos los valores de x, tales que $f(x) = g(x)$.

19. Despeja g de la fórmula $w = \dfrac{\sqrt{2gh}}{4}$.

20. Objeto en caída La velocidad V, medida en pies por segundo, después de que un objeto ha caído una distancia h, medida en pies, puede determinarse mediante la fórmula $V = \sqrt{64.4h}$. Determina la velocidad de un bolígrafo después de que ha caído 200 pies.

21. Escalera Una escalera se recarga contra una casa. Si la base de la escalera está a 5 pies de la casa y su parte superior descansa sobre la casa a 12 pies desde el piso, determina la longitud de la escalera.



22. Resortes Una fórmula utilizada en el estudio del resorte es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

donde T es el periodo del resorte (el tiempo necesario para que el resorte se alargue y regrese a su punto de reposo), m es la masa en el resorte, en kilogramos, y k es la constante del resorte, medida en newtons/metro. Una masa de 1400 kilogramos descansa sobre un resorte. Determina el periodo del resorte si la constante del resorte es de 65,000 newtons/metro.

23. Multiplica $(6 - \sqrt{-4})(2 + \sqrt{-16})$.

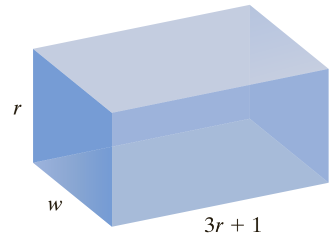
24. Divide $\dfrac{5 - i}{7 + 2i}$.

25. Evalúa $x^2 + 6x + 12$ para $x = -3 + i$.

Prueba de repaso acumulada

Realiza la siguiente prueba y verifica tus respuestas con aquellas que se dan al final del libro. Repasa cualquier pregunta que hayas contestado incorrectamente. La sección en donde se cubrió el tema se indica después de cada respuesta.

1. Resuelve $\frac{1}{5}(x - 3) = \frac{3}{4}(x + 3) - x$.
2. Resuelve $3(x - 4) = 6x - (4 - 5x)$.
3. **Suéter** Cuando el precio de un suéter se rebaja 60%, cuesta \$16. Determina el precio original del suéter.
4. Determina el conjunto solución de $|3 - 2x| < 5$.
5. Grafica $y = \frac{3}{2}x - 3$.
6. Determina si las gráficas de las ecuaciones siguientes son rectas paralelas, perpendiculares o ninguna de éstas.
$$y = 3x - 8$$
$$6y = 18x + 12$$
7. Dadas las ecuaciones $f(x) = x^2 - 3x + 4$ y $g(x) = 2x - 9$, determina $(g - f)(x)$.
8. Determina la ecuación de la recta que pasa por $(-1, 4)$ y que es perpendicular a la gráfica de $3x - 2y = 6$.
9. Resuelve el sistema de ecuaciones siguiente.
$$\begin{aligned} x + 2y &= 12 \\ 4x &= 8 \\ 3x - 4y + 5z &= 20 \end{aligned}$$
10. Evalúa el siguiente determinante.
$$\begin{vmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$
11. **Volumen** El volumen de la caja que se ilustra a continuación es $6r^3 + 5r^2 + r$. Determina ω en términos de r.

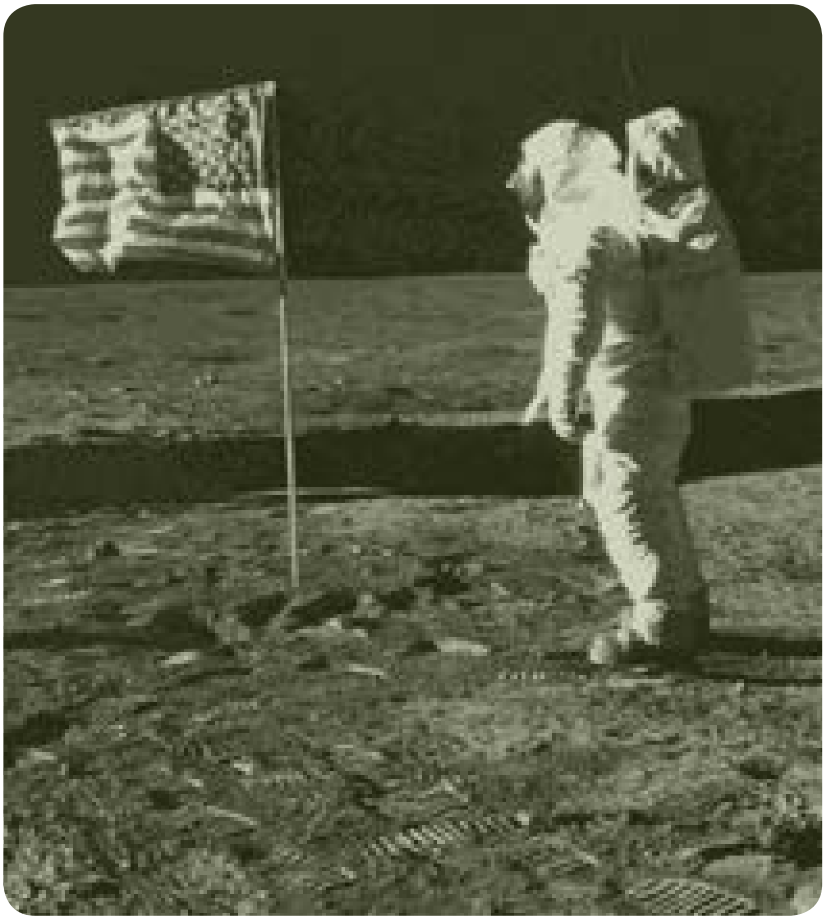


12. Multiplica $(5xy - 3)(5xy + 3)$.
13. Resuelve $\sqrt{2x^2 + 7} + 3 = 8$.
14. Factoriza $4x^3 - 9x^2 + 5x$.
15. Factoriza $(x + 1)^3 - 27$.
16. Resuelve $8x^2 - 3 = -10x$.
17. Multiplica $\frac{4x + 4y}{x^2y} \cdot \frac{y^3}{12x}$.
18. Suma $\frac{x - 4}{x - 5} - \frac{3}{x + 5} - \frac{10}{x^2 - 25}$.
19. Resuelve $\frac{4}{x} - \frac{1}{6} = \frac{1}{x}$.
20. **Objeto en caída** La distancia d, de un objeto en caída libre es directamente proporcional al cuadrado del tiempo t. Si un objeto cae 16 pies en 1 segundo, ¿qué distancia recorrerá un objeto que cae durante 5 segundos?

8 Funciones cuadráticas

Objetivos de este capítulo

En la sección 5.1 presentamos las funciones cuadráticas, ahora ampliaremos los conceptos. Explicaremos cómo completar el cuadrado y la fórmula cuadrática. Después de estudiar estas secciones, conoceremos tres técnicas para la resolución de ecuaciones cuadráticas: factorización (cuando sea posible), completar el cuadrado y la fórmula cuadrática. Además, analizaremos técnicas para representar gráficamente funciones cuadráticas y estudiaremos desigualdades no lineales con una variable.



© NASA/Johnson Space Center

Existen muchas situaciones de la vida real que pueden representarse o aproximarse con ecuaciones cuadráticas. Conforme leas este capítulo, encontrarás diversas aplicaciones interesantes de las ecuaciones cuadráticas y funciones cuadráticas. Por ejemplo, en los ejercicios 99 y 100 de la página 514, utilizaremos ecuaciones cuadráticas y la fórmula cuadrática para analizar la gravedad en la Luna.

8.1 Solución de ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

1 Uso de la propiedad de la raíz cuadrada para resolver ecuaciones.

2 Entender los trinomios cuadrados perfectos.

3 Solución de ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado.

Comprendiendo el álgebra

Recuerda que una ecuación cuadrática es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

Comprendiendo el álgebra

Una forma conveniente de escribir tanto la raíz cuadrada positiva como negativa es usar el símbolo $\pm$, el cual se lee "más menos". La solución para la ecuación $x^2 = 25$ puede ser escrita como $\pm\sqrt{25} = \pm 5$. Por lo tanto, las soluciones son 5 y -5.

En el capítulo 5 resolvimos ecuaciones cuadráticas mediante la factorización. Sin embargo, no todas las ecuaciones cuadráticas pueden resolverse mediante factorización. En esta sección introduciremos dos procedimientos adicionales utilizados para resolver ecuaciones cuadráticas: la propiedad de la raíz cuadrada y completar el cuadrado.

1 Uso de la propiedad de la raíz cuadrada para resolver ecuaciones

En el capítulo 7 aprendimos que todo número positivo tiene dos raíces cuadradas: una raíz cuadrada positiva y una raíz cuadrada negativa. Por ejemplo, 25 tiene dos raíces cuadradas:

Raíz cuadrada positiva de 25	Raíz cuadrada negativa de 25
$\sqrt{25} = 5$	$-\sqrt{25} = -5$

Podemos referirnos a las dos raíces cuadradas de 25 utilizando el símbolo $\pm$, el cual se lee "más menos". Por lo tanto, ± 5 hace referencia a ambos, 5 y -5.

Considera la ecuación cuadrática $x^2 = 25$. Ya que $5^2 = 25$ y $(-5)^2 = 25$, ambos $x = 5$ y $x = -5$ son soluciones de la ecuación. Podemos resumir el proceso de solución como sigue:

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm\sqrt{25} \qquad \pm \text{ significa tomar las raíces cuadradas positiva y negativa.}$$

$$x = \pm 5 \qquad \text{Las soluciones son 5 y } -5.$$

En general, cuando resolvemos ecuaciones de la forma $x^2 = a$, podemos utilizar la *propiedad de la raíz cuadrada.*

Propiedad de la raíz cuadrada

Si $x^2 = a$, donde a es un número real, entonces $x = \pm\sqrt{a}$.

EJEMPLO 1 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 = 49$ **b)** $x^2 - 9 = 0$ **c)** $x^2 + 10 = 85$

Solución

a) Utiliza la propiedad de la raíz cuadrada para resolver la ecuación.

$$x^2 = 49 \qquad \text{Utiliza la propiedad de la raíz cuadrada.}$$

$$x = \pm\sqrt{49} \qquad \text{Las raíces cuadradas positiva y negativa de 49.}$$

$$x = \pm 7 \qquad \text{Las soluciones son 7 y } -7.$$

Comprueba las soluciones en la ecuación original.

$x = 7$	$x = -7$
$x^2 = 49$	$x^2 = 49$
$(7)^2 = 49$	$(-7)^2 = 49$
$49 = 49$ Verdadero	$49 = 49$ Verdadero

En ambos casos tenemos expresiones verdaderas. Por lo tanto, 7 y -7 son soluciones de la ecuación.

b)
$$x^2 - 9 = 0 \qquad \text{Suma 9 en ambos lados.}$$
$$x^2 = 9 \qquad \text{Utiliza la propiedad de la raíz cuadrada.}$$
$$x = \pm\sqrt{9}$$
$$= \pm 3 \qquad \text{Las soluciones son 3 y } -3.$$

Comprueba las soluciones en la ecuación original.

$x = 3$		$x = -3$	
$x^2 - 9 = 0$		$x^2 - 9 = 0$	
$3^2 - 9 \stackrel{?}{=} 0$		$(-3)^2 - 9 \stackrel{?}{=} 0$	
$0 = 0$	Verdadero	$0 = 0$	Verdadero

En ambos casos la comprobación es verdadera, lo que significa que tanto 3 como -3 son soluciones de la ecuación.

c)
$$x^2 + 10 = 85 \qquad \text{Resta 10 en ambos lados.}$$
$$x^2 = 75 \qquad \text{Utiliza la propiedad de la raíz cuadrada.}$$
$$x = \pm\sqrt{75} \qquad \text{Simplifica } \sqrt{75}.$$
$$= \pm\sqrt{25}\sqrt{3}$$
$$= \pm 5\sqrt{3}$$

Las soluciones son $5\sqrt{3}$ y $-5\sqrt{3}$.

Resuelve ahora el ejercicio 13

No todas las ecuaciones cuadráticas tienen soluciones con números reales, como se ilustra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Resuelve la ecuación $x^2 + 7 = 0$.

Solución
$$x^2 + 7 = 0 \qquad \text{Resta 7 en ambos lados.}$$
$$x^2 = -7 \qquad \text{Utiliza la propiedad de la raíz cuadrada.}$$
$$x = \pm\sqrt{-7} \qquad \text{Simplifica las soluciones imaginarias.}$$
$$x = \pm i\sqrt{7}$$

Las soluciones son $i\sqrt{7}$ y $-i\sqrt{7}$, ambos son números imaginarios.

Resuelve ahora el ejercicio 15

Comprendiendo el álgebra

Recuerda del capítulo 7 que la raíz cuadrada de un número negativo es un *número imaginario*. En general, para cualquier número real positivo, n,

$$\sqrt{-n} = \sqrt{-1}\,\sqrt{-n} = i\sqrt{-1}$$

donde $i = \sqrt{-1}$.

EJEMPLO 3 Resuelve **a)** $(a - 5)^2 = 32$ **b)** $(z + 3)^2 + 28 = 0$.

Solución

a) Comienza utilizando la propiedad de la raíz cuadrada.
$$(a-5)^2 = 32$$
$$a - 5 = \pm\sqrt{32} \qquad \text{Utiliza la propiedad de la raíz cuadrada.}$$
$$a = 5 \pm \sqrt{32} \qquad \text{Suma 5 en ambos lados.}$$
$$= 5 \pm \sqrt{16}\sqrt{2} \qquad \text{Simplifica } \sqrt{32}.$$
$$= 5 \pm 4\sqrt{2}$$

Las soluciones son $5 + 4\sqrt{2}$ y $5 - 4\sqrt{2}$.

b) Comienza restando 28 en ambos lados de la ecuación para aislar el término que contiene la variable.
$$(z+3)^2 + 28 = 0 \qquad \text{Resta 28 en ambos lados.}$$
$$(z+3)^2 + 28 = -28 \qquad \text{Utiliza la propiedad de la raíz cuadrada.}$$
$$z + 3 = \pm\sqrt{-28} \qquad \text{Resta 3 en ambos lados.}$$
$$z = -3 \pm \sqrt{-28} \qquad \text{Simplifica } \sqrt{-28}.$$
$$= -3 \pm \sqrt{28}\sqrt{-1}$$
$$= -3 \pm i\sqrt{4}\sqrt{7}$$
$$= -3 \pm 2i\sqrt{7}$$

Las soluciones son $-3 \pm 2i\sqrt{7}$ y $-3 - 2i\sqrt{7}$. Observa que las soluciones de la ecuación $(z + 3)^2 + 28 = 0$ son números complejos.

Resuelve ahora el ejercicio 23

Comprendiendo el álgebra

Recuerda que los *números complejos* son números de la forma

$$a + bi$$

donde a y b son números reales y

$$i = \sqrt{-1}.$$

2 Entender los trinomios cuadrados perfectos

Recuerda que un **trinomio cuadrado perfecto** es un trinomio que puede ser expresado como el cuadrado de un binomio. Algunos ejemplos son los siguientes.

Trinomios cuadrados perfectos		Factores		Cuadrado de un binomio
$x^2 + 8x + 16$	$=$	$(x + 4)(x + 4)$	$=$	$(x + 4)^2$
$x^2 - 8x + 16$	$=$	$(x - 4)(x - 4)$	$=$	$(x - 4)^2$
$x^2 + 10x + 25$	$=$	$(x + 5)(x + 5)$	$=$	$(x + 5)^2$
$x^2 - 10x + 25$	$=$	$(x - 5)(x - 5)$	$=$	$(x - 5)^2$

En un trinomio cuadrado perfecto con coeficiente principal de 1, el término constante es el cuadrado de la mitad del coeficiente del término de primer grado.

Examinemos algunos trinomios cuadrados perfectos para los que el coeficiente principal es 1.

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$$

$$\left[\tfrac{1}{2}(8)\right]^2 = (4)^2$$

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$$

$$\left[\tfrac{1}{2}(-10)\right]^2 = (-5)^2$$

Cuando un trinomio cuadrado perfecto con coeficiente principal de 1 se escribe como el cuadrado de un binomio, la constante del binomio es la mitad del coeficiente del término de primer grado en el trinomio. Por ejemplo,

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$$

$$\tfrac{1}{2}(8)$$

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$$

$$\tfrac{1}{2}(-10)$$

3 Solución de ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

Para resolver una ecuación cuadrática **completando el cuadrado**, sumamos una constante en ambos lados de la ecuación, así el trinomio resultante es un trinomio cuadrado perfecto. Después utilizamos la propiedad de la raíz cuadrada para resolver la ecuación resultante.

Para resolver una ecuación cuadrática completando el cuadrado

1. Si es necesario, utiliza la propiedad de la multiplicación (o división) de la igualdad para hacer que el coeficiente principal sea 1.
2. Reescribe la ecuación aislando la constante en el lado derecho de la ecuación.
3. Toma la mitad del coeficiente numérico del término de primer grado, elévala al cuadrado y suma esta cantidad en ambos lados de la ecuación.
4. Factoriza el trinomio como el cuadrado de un binomio.
5. Utiliza la propiedad de la raíz cuadrada para tomar la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación.
6. Resuelve para la variable.
7. Verifica tus soluciones en la ecuación *original*.

EJEMPLO 4 Resuelve la ecuación $x^2 + 6x + 5 = 0$ completando el cuadrado.

Solución Dado que el coeficiente principal es 1, el paso 1 ya no es necesario.

Paso 2 Resta 5 en ambos lados de la ecuación.

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$
$$x^2 + 6x = -5$$

Paso 3 Determina el cuadrado de la mitad del coeficiente numérico del término de primer grado, 6.

$$\frac{1}{2}(6) = 3, \qquad 3^2 = \boxed{9}$$

Suma este valor en ambos lados de la ecuación.

$$x^2 + 6x + 9 = -5 + 9$$
$$x^2 + 6x + 9 = 4$$

Paso 4 Siguiendo este procedimiento, producimos un trinomio cuadrado perfecto en el lado izquierdo de la ecuación. La expresión $x^2 + 6x + 9$ es un trinomio cuadrado perfecto que se puede factorizar como $(x + 3)^2$.

$\frac{1}{2}$ el coeficiente numérico del término de primer grado es $\frac{1}{2}(6) = +3$

$$(x + 3)^2 = 4$$

Paso 5 Utiliza la propiedad de la raíz cuadrada.

$$x + 3 = \pm\sqrt{4}$$
$$x + 3 = \pm 2$$

Paso 6 Finalmente, resuelve para x restando 3 en ambos lados de la ecuación.

$$x + 3 - 3 = -3 \pm 2$$
$$x = -3 \pm 2$$
$$x = -3 + 2 \quad \text{o} \quad x = -3 - 2$$
$$x = 1 \qquad\qquad x = -5$$

Paso 7 Verifica ambas soluciones en la ecuación original.

$x = -1$

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$
$$(-1)^2 + 6(-1) + 5 \stackrel{?}{=} 0$$
$$1 - 6 + 5 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \quad \text{Verdadero}$$

$x = -5$

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$
$$(-5)^2 + 6(-5) + 5 \stackrel{?}{=} 0$$
$$25 - 30 + 5 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \quad \text{Verdadero}$$

Como ambos números cumplen, tanto -1 como -5 son soluciones de la ecuación original.

Resuelve ahora el ejercicio 49

EJEMPLO 5 Resuelve la ecuación $-x^2 = -3x - 18$ completando el cuadrado.

Solución Comienza multiplicando ambos lados de la ecuación por -1 para hacer que el coeficiente del término al cuadrado sea igual a 1.

$$-x^2 = -3x - 18$$
$$-1(-x^2) = -1(-3x - 18) \qquad \text{Multiplica ambos lados por } -1.$$
$$x^2 = 3x + 18 \qquad \text{Resta } 3x \text{ en ambos lados.}$$
$$x^2 - 3x = 18$$

Toma la mitad del coeficiente numérico del término de primer grado, elévalo al cuadrado y suma este producto en ambos lados de la ecuación.

$$\frac{1}{2}(-3) = -\frac{3}{2} \qquad \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{9}{4}}$$

$$
\begin{aligned}
x^2 - 3x + \boxed{\frac{9}{4}} &= 18 + \boxed{\frac{9}{4}} && \text{Completa el cuadrado.}\\
\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 &= 18 + \frac{9}{4} && \text{Factoriza el trinomio como el cuadrado de un binomio.}\\
\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{72}{4} + \frac{9}{4}\\
\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{81}{4}\\
x - \frac{3}{2} &= \pm\sqrt{\frac{81}{4}} && \text{Propiedad de la raíz cuadrada}\\
x - \frac{3}{2} &= \pm\frac{9}{2} && \text{Simplifica.}\\
x &= \frac{3}{2} \pm \frac{9}{2} && \text{Suma } \frac{3}{2} \text{ en ambos lados.}
\end{aligned}
$$

$$x = \frac{3}{2} + \frac{9}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{3}{2} - \frac{9}{2}$$

$$x = \frac{12}{2} = 6 \qquad x = -\frac{6}{2} = -3$$

Las soluciones son 6 y -3.

Resuelve ahora el ejercicio 53

Comprendiendo el álgebra

Cuando una ecuación cuadrática tiene un coeficiente principal que no es 1, puedes multiplicar cada término en ambos lados de la ecuación por el recíproco del coeficiente principal. Esto resultará en una ecuación equivalente con un coeficiente principal de 1. Por ejemplo, la ecuación

$$-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 8 = 0$$

se puede multiplicar por -4 para obtener la ecuación equivalente

$$x^2 - 8x + 32 = 0$$

la cual tiene un coeficiente principal de 1.

En los ejemplos siguientes no mostraremos algunos de los pasos intermedios.

EJEMPLO 6 Resuelve $x^2 - 8x + 34 = 0$ completando el cuadrado.

Solución

$$
\begin{aligned}
x^2 - 8x + 34 &= 0 && \text{Resta 34 en ambos lados.}\\
x^2 - 8x &= -34\\
x^2 - 8x \boxed{+\,16} &= -34 \boxed{+\,16} && \text{Completa el cuadrado.}\\
(x - 4)^2 &= -18 && \text{Factoriza el trinomio como el cuadrado de un binomio.}\\
x - 4 &= \pm\sqrt{-18} && \text{Propiedad de la raíz cuadrada}\\
x - 4 &= \pm 3i\sqrt{2} && \text{Simplifica.}\\
x &= 4 \pm 3i\sqrt{2} && \text{Resuelve para } x.
\end{aligned}
$$

Las soluciones son $4 + 3i\sqrt{2}$ y $4 \pm 3i\sqrt{2}$.

Resuelve ahora el ejercicio 61

EJEMPLO 7 Resuelve la ecuación $-4x^2 + 8x + 32 = 0$ completando el cuadrado.

Solución

$$
\begin{aligned}
-4x^2 + 8x + 32 &= 0\\
\boxed{-\frac{1}{4}}(-4x^2 + 8x + 32) &= \boxed{-\frac{1}{4}}(0) && \text{Multiplica por } -1/4 \text{ para obtener un coeficiente principal de 1.}\\
x^2 - 2x - 8 &= 0\\
x^2 - 2x &= 8 && \text{Suma 8 en ambos lados.}\\
x^2 - 2x \boxed{+1} &= 8 \boxed{+1} && \text{Completa el cuadrado.}\\
(x - 1)^2 &= 9 && \text{Factoriza el trinomio como el cuadrado de un binomio.}\\
x - 1 &= \pm 3 && \text{Propiedad de la raíz cuadrada}\\
x &= 1 \pm 3 && \text{Resuelve para } x.
\end{aligned}
$$

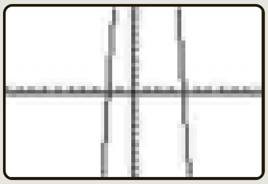
$$x = 1 + 3 \quad \text{o} \quad x = 1 - 3$$

$$x = 4 \qquad x = -2$$

Resuelve ahora el ejercicio 75

Cómo utilizar tu calculadora graficadora

Podemos verificar las soluciones *reales* para una ecuación cuadrática utilizando una calculadora graficadora. Recuerda que la intersección de una función con el eje x ocurre cuando $y = 0$. De este modo, para verificar las soluciones de la ecuación en el ejemplo 7, $-4x^2 + 8x + 32 = 0$, observaremos la intersección con x de la función $y = -4x^2 + 8x + 32$.



La figura de arriba confirma que la solución para $-4x^2 + 8x + 32 = 0$ son -2 y 4. Recuerda que las intersecciones con el eje x solo representan soluciones *reales* para una ecuación. De este modo, no podemos utilizar una calculadora graficadora para verificar las soluciones para la ecuación en el ejemplo 6, dado que las soluciones son números complejos.

Por lo general, las ecuaciones cuadráticas que no pueden resolverse con facilidad por medio de factorización se resolverán mediante la *fórmula cuadrática*, la cual presentamos en la próxima sección.

EJEMPLO 8 **Interés compuesto** La fórmula del interés compuesto $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ puede utilizarse para determinar el monto, A, cuando un capital inicial, P, se invierte a una tasa de interés anual, r, capitalizable n veces en un año durante t años.

a) Josh Adams inicialmente invirtió $1000 en una cuenta de ahorros cuyo interés compuesto se paga anualmente (una vez al año). Si después de dos años el monto, o saldo, en la cuenta es de $1102.50, determina la tasa de interés anual r.

b) Trisha McDowel inicialmente invirtió $1000 en una cuenta de ahorros cuyo interés compuesto se paga trimestralmente (cuatro veces por año). Si después de 3 años el monto en la cuenta es de $1195.62, determina la tasa de interés anual, r.

Solución

a) Entiende Tenemos la información siguiente:

$$p = \$1000, \qquad A = \$1102.50, \qquad n = 1, \qquad t = 2$$

Se nos pide determinar la tasa de interés anual, r. Para hacerlo, sustituimos los valores apropiados en la fórmula y resolvemos para r.

Traduce

$$A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$1102.50 = 1000\left(1 + \frac{r}{1}\right)^{1(2)}$$

Realiza los cálculos

$$1102.50 = 1000(1 + r)^2 \quad \text{Divide ambos lados entre 1000.}$$

$$1.10250 = (1 + r)^2 \quad \text{Propiedad de la raíz cuadrada}$$

$$\pm\sqrt{1.10250} = 1 + r \quad \text{Solo utilizaremos la raíz cuadrada positiva dado que } r \text{ debe ser positiva.}$$

$$1.05 = 1 + r \quad \text{Resta 1 en ambos lados.}$$

$$0.05 = r$$

Responde La tasa de interés anual es 0.05 o 5%.

Comprendiendo el álgebra

Recuerda del capítulo 7 que

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}.$$

Por lo tanto, para el ejemplo 8,

$$\sqrt[12]{1.19562} = 1.19562^{1/12}$$

b) Entiende Tenemos

$$p = 1000, \quad A = \$1195.62, \quad n = 4, \quad t = 3$$

Para determinar r, sustituimos los valores apropiados en la fórmula y resolvemos para r.

Traduce

$$A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$1195.62 = 1000\left(1 + \frac{r}{4}\right)^{4(3)}$$

Realiza los cálculos

$$1.19562 = \left(1 + \frac{r}{4}\right)^{12} \quad \text{Divide ambos lados entre 1000.}$$

$$\sqrt[12]{1.19562} = 1 + \frac{r}{4} \quad \text{Saca la raíz 12 a en ambos lados (o eleva ambos lados a la potencia 1/12).}$$

$$1.015 \approx 1 + \frac{r}{4} \quad \text{Aproxima } 1.19562^{1/12} \text{ en una calculadora.}$$

$$0.015 \approx \frac{r}{4} \quad \text{Resta 1 en ambos lados.}$$

$$0.06 \approx r \quad \text{Multiplica ambos lados por 4.}$$

Responde La tasa de interés anual es aproximadamente 0.06 o 6%.

Resuelve ahora el ejercicio 103

Consejo útil

Consejo de estudio

En este capítulo, trabajaras con raíces y radicales. Este material se estudió en el capítulo 7. Si no recuerdas cómo evaluar o simplificar radicales, repasa el capítulo 7 ahora.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.1

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

recíproco	imaginario	cuadrática	propiedad de la raíz cuadrada	trinomio cuadrado perfecto	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$
25	10	100	mitad	complejo	binomio	

1. Una ecuación ______________ es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

2. La raíz cuadrada de un número negativo es un número ______________.

3. Un número de la forma $a + bi$ es un número ______________.

4. Un trinomio cuadrado perfecto es un trinomio que puede expresarse como el cuadrado de un ______________.

5. Para resolver una ecuación cuadrática completando el cuadrado, sumamos una constante en ambos lados de la ecuación, por lo que el trinomio resultante es un ______________.

6. Una vez que un lado de una ecuación cuadrática es reescrito como un trinomio cuadrado perfecto, la ecuación puede resolverse utilizando la ______________.

7. Cuando una ecuación cuadrática tiene un coeficiente principal que no es 1, puedes multiplicar cada término en ambos lados de la ecuación por el ______________ del coeficiente principal.

8. En un trinomio cuadrado perfecto con un coeficiente principal de 1, el término constante es el cuadrado de la ______________ del coeficiente del término de primer grado.

9. Para resolver la ecuación cuadrática $x^2 - 10x = 24$ completando el cuadrado, deberás sumar ______________ en ambos lados de la ecuación.

10. Para obtener una ecuación equivalente con un coeficiente principal de 1, debes multiplicar ambos lados de la ecuación $\frac{2}{3}x^2 + 3x - 5 = 0$ por ______________.

Practica tus habilidades

Para los ejercicios 11-36, utiliza la propiedad de la raíz cuadrada para resolver cada ecuación.

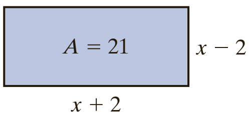
11. $x^2 = 81$
12. $x^2 = 100$
13. $x^2 - 25 = 0$
14. $x^2 - 49 = 0$
15. $x^2 + 49 = 0$
16. $x^2 - 24 = 0$
17. $x^2 + 24 = 0$
18. $y^2 - 10 = 51$
19. $y^2 + 10 = -51$
20. $(x - 3)^2 = 49$
21. $(p - 4)^2 = 16$
22. $(x + 3)^2 = 49$
23. $(x + 3)^2 + 25 = 0$
24. $(a - 3)^2 = 45$
25. $(a - 2)^2 + 45 = 0$
26. $(a + 2)^2 + 45 = 0$
27. $\left(b + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
28. $\left(b - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
29. $\left(b - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{9} = 0$
30. $(x - 0.2)^2 = 0.64$
31. $(x + 0.8)^2 = 0.81$
32. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{16}{9}$
33. $(2a - 5)^2 = 18$
34. $(4y + 1)^2 = 12$
35. $\left(2y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{25}$
36. $\left(3x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{25}$

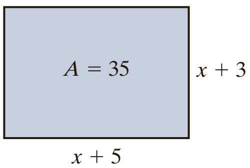
Resuelve cada ecuación completando el cuadrado.

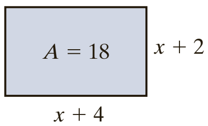
37. $x^2 + 6x + 5 = 0$
38. $x^2 - 2x - 3 = 0$
39. $x^2 + 8x + 15 = 0$
40. $x^2 - 8x + 15 = 0$
41. $x^2 + 6x + 8 = 0$
42. $x^2 - 6x + 8 = 0$
43. $x^2 - 7x + 6 = 0$
44. $x^2 + 9x + 18 = 0$
45. $2x^2 + x - 1 = 0$
46. $3c^2 - 4c - 4 = 0$
47. $2z^2 - 7z - 4 = 0$
48. $4a^2 + 9a = 9$
49. $x^2 - 13x + 40 = 0$
50. $x^2 + x - 12 = 0$
51. $-x^2 + 6x + 7 = 0$
52. $-a^2 - 5a + 14 = 0$
53. $-z^2 + 9z - 20 = 0$
54. $-z^2 - 4z + 12 = 0$
55. $b^2 = 3b + 28$
56. $-x^2 = 6x - 27$
57. $x^2 + 10x = 11$
58. $-x^2 + 40 = -3x$
59. $x^2 - 4x - 10 = 0$
60. $x^2 - 6x + 2 = 0$
61. $r^2 + 8r + 5 = 0$
62. $a^2 + 4a - 8 = 0$
63. $c^2 - c - 3 = 0$
64. $p^2 - 5p = 4$
65. $x^2 + 3x + 6 = 0$
66. $z^2 - 5z + 7 = 0$
67. $9x^2 - 9x = 0$
68. $4y^2 + 12y = 0$
69. $-\frac{3}{4}b^2 - \frac{1}{2}b = 0$
70. $\frac{1}{3}a^2 - \frac{5}{3}a = 0$
71. $36z^2 - 6z = 0$
72. $x^2 = \frac{9}{2}x$
73. $-\frac{1}{2}p^2 - p + \frac{3}{2} = 0$
74. $2x^2 + 6x = 20$
75. $2x^2 = 8x + 64$
76. $3x^2 + 33x + 72 = 0$
77. $2x^2 + 18x + 4 = 0$
78. $\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1 = 0$
79. $\frac{3}{4}w^2 + \frac{1}{2}w - \frac{1}{4} = 0$
80. $\frac{3}{4}c^2 - 2c + 1 = 0$
81. $2x^2 - x = -5$
82. $\frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} = 0$
83. $-3x^2 + 6x = 6$
84. $x^2 + 2x = -5$

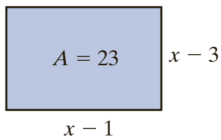
Resolución de problemas

Área *En los ejercicios 85-88, se da el área,* A, *de cada rectángulo.* ***a)*** *Escribe una ecuación para determinar el área.* ***b)*** *Resuelve la ecuación para x.*

85.


86.


87.


88.


89. Distancia necesaria para detenerse en la nieve La fórmula para calcular la distancia de frenado, d, en pies, para un automóvil específico sobre una superficie con nieve es $d = \frac{1}{6}x^2$, donde x es la velocidad del automóvil, en millas por hora, antes de que se apliquen los frenos. Si la distancia necesaria para detener un automóvil fue de 24 pies, ¿cuál era la velocidad del automóvil antes de que se aplicaran los frenos?

90. Distancia necesaria para detenerse en el pavimento seco La fórmula para calcular la distancia de frenado, d, en pies, para un automóvil específico sobre una superficie de pavimento seco es $d = \frac{1}{10}x^2$, donde x es la velocidad del automóvil, en millas por hora, antes de que se apliquen los frenos. Si la distancia de frenado fue de 90 pies, ¿cuál era la velocidad del automóvil antes de que se aplicaran los frenos?

91. Enteros El producto de dos números enteros impares positivos consecutivos es 35. Determina los dos números enteros impares.

92. Enteros El mayor de dos números enteros es 2 veces mayor que el doble del más pequeño. Si el producto de ambos enteros es 12, determina ambos números.

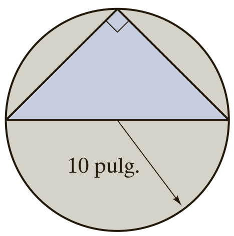
93. Jardín rectangular Donna Simm delimitó un área de su jardín para destinarla a plantar tomates. Determina las dimensiones del área rectangular, si el largo es 2 pies mayor que el doble del ancho y el área mide 60 pies cuadrados.

94. Entrada de cochera Manuel Cortez planea asfaltar la entrada de su cochera. Determina las dimensiones del camino rectangular, si su área es de 381.25 pies cuadrados y el largo es 18 pies mayor que su ancho.

95. Patio Bill Justice diseña un patio cuadrado, cuya diagonal es 6 pies mayor que el largo de un lado. Determina las dimensiones del patio.

96. Piscina para niños El hotel Lakeside planea construir una piscina poco profunda para niños. Si la piscina será un cuadrado cuya diagonal mide 7 pies más que un lado, determina las dimensiones de la piscina.

97. Triángulo inscrito Cuando se inscribe un triángulo en un semicírculo, donde el diámetro del círculo es un lado del triángulo, éste siempre es un triángulo rectángulo. Si un triángulo isósceles (dos lados iguales) se inscribe en un semicírculo con radio de 10 pulgadas, determina la longitud de los otros dos lados del triángulo.



98. Triángulo inscrito Consulta el ejercicio 97. Supón que un triángulo está inscrito en un semicírculo, cuyo diámetro es de 12 metros. Si un lado del triángulo inscrito es de 6 metros, determina cuánto mide el tercer lado.

99. Área de un círculo El área de un círculo es 24π pies cuadrados. Utiliza la fórmula $A = \pi r^2$ para determinar el radio del círculo.

100. Área de un círculo El área de un círculo es 16.4π metros cuadrados. Determina el radio del círculo.

Para responder los ejercicios 101-104, utiliza la fórmula

$$A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

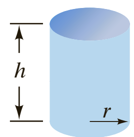
101. Cuenta de ahorros Frank Dipalo invirtió inicialmente \$500 en una cuenta de ahorros cuyo interés se capitaliza anualmente. Si después de 2 años el saldo de la cuenta es de \$540.80, determina la tasa de interés anual.

102. Cuenta de ahorros Margret Chang invirtió inicialmente \$1500 en una cuenta de ahorros cuyo interés se capitaliza cada año. Si después de 3 años el saldo de la cuenta es de \$1687.30, determina la tasa de interés anual.

103. Cuenta de ahorros Steve Rodi invirtió inicialmente \$1200 en una cuenta de ahorros cuyo interés se capitaliza semestralmente. Si después de 3 años el saldo de la cuenta es de \$1432.86, determina la tasa de interés anual.

104. Cuenta de ahorros Ángela Reyes invirtió inicialmente \$1500 en una cuenta de ahorros cuyo interés se capitaliza cada semestre. Si después de 4 años el saldo de la cuenta es de \$2052.85, determina la tasa de interés anual.

105. Volumen y área de la superficie El área de la superficie, S, y el volumen, V, de un cilindro circular recto de radio, r, y altura, h, están dados por las fórmulas



$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh, \qquad V = \pi r^2 h$$

a) Determina el área de la superficie del cilindro, si su altura es de 10 pulgadas y su volumen es de 160 pulgadas cúbicas.

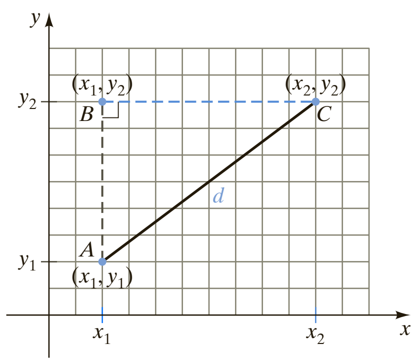
b) Determina el radio si la altura es de 10 pulgadas y el volumen es de 160 pulgadas cúbicas.

c) Determina el radio si la altura es de 10 pulgadas y el área de la superficie es de 160 pulgadas cuadradas.

Actividad de grupo

Comenten y respondan en grupo el ejercicio 106.

106. En la cuadrícula siguiente se señalan los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_1, y_2).



a) Explica por qué el punto (x_1, y_2) se colocó donde está y no en algún otro lugar de la gráfica.

b) Expresa la longitud de la línea punteada en color negro en términos de y_2 y y_1. Explica cómo determinaste tu respuesta.

c) Expresa la longitud de la línea punteada en color gris en términos de x_2 y x_1.

d) Mediante el teorema de Pitágoras y el triángulo rectángulo ABC, deduce una fórmula para determinar la distancia, d, entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).* Explica cómo determinaste la fórmula.

e) Utiliza la fórmula que determinaste en el inciso **d)** para calcular la distancia del segmento de recta entre los puntos (1, 4) y (3, 7).

*La fórmula para calcular la distancia se estudiará en un capítulo posterior.

Ejercicios de repaso acumulados

[2.1] **107.** Resuelve $-4(2z - 6) = -3(z - 4) + z$.

[2.4] **108.** **Inversión** Thea Prettyman invirtió $10,000 durante un año, parte a 7% y parte a $6\frac{1}{4}\%$. Si ganó un interés total de $656.50, ¿qué cantidad invirtió en cada tasa?

[2.6] **109.** Resuelve $|x + 3| = |2x - 7|$.

[3.4] **110.** Determina la pendiente de la recta que pasa por $(-2, 5)$ y $(0, 5)$.

[5.2] **111.** Multiplica $(x - 2)(4x^2 + 9x - 3)$.

8.2 Solución de ecuaciones cuadráticas mediante la fórmula cuadrática

1. Deducir la fórmula cuadrática.
2. Utilizar la fórmula cuadrática para resolver ecuaciones.
3. Determinar una ecuación cuadrática dadas sus soluciones.
4. Utilizar el discriminante para determinar el número de soluciones reales para una ecuación cuadrática.
5. Estudiar problemas de aplicación que utilicen ecuaciones cuadráticas.

Comprendiendo el álgebra

Aunque cualquier ecuación cuadrática se puede resolver completando el cuadrado, generalmente preferimos utilizar la fórmula cuadrática porque es más fácil y más eficiente. Sin embargo, completar el cuadrado es una herramienta útil que puedes usar en otras áreas del algebra, incluyendo el estudio de las secciones cónicas en el capítulo 10.

1 Deducir la fórmula cuadrática

La fórmula cuadrática puede utilizarse para resolver cualquier ecuación cuadrática. *Es el método más útil y versátil para resolver ecuaciones cuadráticas.*

La forma general de una ecuación cuadrática es $ax^2 + bx + c = 0$, donde a es el coeficiente del término cuadrático, b es el coeficiente del término de primer grado y c es la constante.

Ecuación cuadrática en forma general	Valores de los coeficientes		
$x^2 - 3x + 4 = 0$	$a = 1,$	$b = -3,$	$c = 4$
$1.3x^2 - 7.9 = 0$	$a = 1.3,$	$b = 0,$	$c = -7.9$
$-\frac{5}{6}x^2 + \frac{3}{8}x = 0$	$a = -\frac{5}{6},$	$b = \frac{3}{8},$	$c = 0$

Podemos deducir la fórmula cuadrática empezando con una ecuación cuadrática en la forma general y completando el cuadrado, como se explicó en la sección anterior.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \qquad \text{Divide ambos lados entre } a.$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \qquad \text{Resta } c/a \text{, en ambos lados.}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Toma 1/2 de b/a (esto es, $b/2a$) y elévalo al cuadrado para obtener $b^2/4a^2$. Luego suma esta expresión en ambos lados.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Reescribe el lado izquierdo de la ecuación como el cuadrado de un binomio.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Escribe el lado derecho con un denominador común.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad \text{Propiedad de la raíz cuadrada}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{Regla del cociente para radicales}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{Resta } b/2a \text{ en ambos lados.}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Escribe con un denominador común para obtener la fórmula cuadrática.

2 Utilizar la fórmula cuadrática para resolver ecuaciones

Ahora que ya sabemos cómo deducir la fórmula cuadrática, la utilizaremos para resolver ecuaciones.

Para resolver una ecuación cuadrática mediante la fórmula cuadrática

1. Escribe la ecuación cuadrática en la forma general, $ax^2 + bx + c = 0$, y determina los valores numéricos de a, b y c.
2. Sustituye los valores para a, b y c dentro de la fórmula cuadrática y posteriormente evalúa la fórmula para obtener la solución.

La fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EJEMPLO 1 Resuelve la ecuación $x^2 + 2x - 8 = 0$ mediante el uso de la fórmula cuadrática.

Solución En esta ecuación $a = 1$, $b = 2$ y $c = -8$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-8)}}{2(1)} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 6}{2} \end{aligned}$$

$$x = \frac{-2 + 6}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{-2 - 6}{2}$$

$$x = \frac{4}{2} = 2 \qquad x = \frac{-8}{2} = -4$$

Una verificación mostrará que tanto 2 como -4 son soluciones de la ecuación. Observa que las soluciones de la ecuación $x^2 + 2x - 8 = 0$ son dos números reales.

Resuelve ahora el ejercicio 23

Consejo útil

La solución para el ejemplo 1 también pudo obtenerse mediante factorización, como sigue:

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

$$x + 4 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$

$$x = -4 \qquad x = 2$$

Cuando tienes una ecuación cuadrática para resolver y el método para resolverla no ha sido especificado, podrías intentar resolverla primero mediante factorización (como se estudió en la sección 5.8). Si la ecuación no se puede factorizar fácilmente, utiliza la fórmula cuadrática.

EJEMPLO 2 Resuelve $-9x^2 = -6x + 1$ mediante la fórmula cuadrática.

Solución Comienza sumando $9x^2$ en ambos lados de la ecuación para obtener

$$0 = 9x^2 - 6x + 1$$

$$\text{o} \quad 9x^2 - 6x + 1 = 0$$

Comprendiendo el álgebra

Cuando se utiliza la fórmula cuadrática, los cálculos son más fáciles si el coeficiente principal, a, es un entero positivo. Por consiguiente, si resolvemos la ecuación

$$-x^2 + 3x = 2,$$

podemos sumar x^2 en ambos lados y restar $3x$ en ambos lados para obtener la ecuación equivalente

$$0 = x^2 - 3x + 2$$

o $\quad x^2 - 3x + 2 = 0$

$$a = 9, \qquad b = -6, \qquad c = 1$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(9)(1)}}{2(9)} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Observa que la solución de la ecuación $-9x^2 = -6x + 1$ es un solo valor, $\frac{1}{3}$. Algunas ecuaciones cuadráticas tienen como solución un solo valor.

Resuelve ahora el ejercicio 39

Prevención de errores comunes

Todo el numerador de la fórmula cuadrática debe dividirse entre $2a$.

CORRECTO	INCORRECTO
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	~~$x = -b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$~~ ~~$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$~~

EJEMPLO 3 Resuelve $p^2 + \frac{1}{3}p + \frac{5}{6} = 0$ mediante la fórmula cuadrática.

Solución Comienza por eliminar las fracciones de la ecuación multiplicando ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador, 6.

$$6\left(p^2 + \frac{1}{3}p + \frac{5}{6}\right) = 6(0)$$

$$6p^2 + 2p + 5 = 0$$

Ahora podemos utilizar la fórmula cuadrática con $a = 6$, $b = 2$ y $c = 5$.

$$\begin{aligned} p &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(6)(5)}}{2(6)} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-116}}{12} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}\sqrt{29}}{12} \\ &= \frac{-2 \pm 2i\sqrt{29}}{12} \\ &= \frac{\overset{1}{\cancel{2}}(-1 \pm i\sqrt{29})}{\underset{6}{\cancel{12}}} \\ &= \frac{-1 \pm i\sqrt{29}}{6} \end{aligned}$$

Las soluciones son $\frac{-1 + i\sqrt{29}}{6}$ y $\frac{-1 - i\sqrt{29}}{6}$. Observa que ninguna solución es un número real, ambas soluciones son números complejos.

Resuelve ahora el ejercicio 53

Prevención de errores comunes

Algunos estudiantes aplican la fórmula cuadrática correctamente, pero al llegar al último paso cometen un error. A continuación se ilustran ambos procedimientos, el correcto e incorrecto para simplificar una respuesta.

Cuando *ambos* términos del numerador *y* el denominador tienen un factor común, ese factor común puede dividirse, como sigue:

CORRECTO

$$\frac{2+4\sqrt{3}}{2}=\frac{\overset{1}{\cancel{2}}(1+2\sqrt{3})}{\underset{1}{\cancel{2}}}=1+2\sqrt{3}$$

$$\frac{6+3\sqrt{3}}{6}=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}(2+\sqrt{3})}{\underset{2}{\cancel{6}}}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

A continuación se presentan algunos errores comunes. Estúdialos con cuidado para no cometerlos. ¿Puedes explicar por qué cada uno de los procedimientos siguientes es incorrecto?

INCORRECTO

$$\frac{2+3}{2}=\frac{\overset{1}{\cancel{2}}+3}{\underset{1}{\cancel{2}}} \qquad \frac{3+2\sqrt{5}}{2}=\frac{3+\overset{1}{\cancel{2}}\sqrt{5}}{\underset{1}{\cancel{2}}}$$

$$\frac{3+\sqrt{6}}{2}=\frac{3+\sqrt{\cancel{6}^{\,3}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} \qquad \frac{4+3\sqrt{5}}{2}=\frac{\overset{2}{\cancel{4}}+3\sqrt{5}}{\underset{1}{\cancel{2}}}$$

Observa que $\frac{2+3}{2}$ se simplifica a $\frac{5}{2}$. Sin embargo, $\frac{3+2\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3+\sqrt{6}}{2}$, y $\frac{4+3\sqrt{5}}{2}$ no pueden simplificarse más.

EJEMPLO 4 Dada $f(x)=2x^2+4x$, determina todos los valores reales de x para los que $f(x)=5$.

Solución Deseamos determinar todos los valores reales de x para los que

$$2x^2+4x=5$$

$$\begin{aligned}
f(x) \;&= 5\\
\downarrow \quad &\quad \downarrow\\
\overbrace{2x^2+4x} &= 5 && \text{Resta 5 en ambos lados.}\\
2x^2+4x-5 &= 0 && \text{Utiliza la fórmula cuadrática con } a=2,\ b=4,\ c=-5.\\
x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
&= \frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(2)(-5)}}{2(2)}=\frac{-4\pm\sqrt{56}}{4}=\frac{-4\pm2\sqrt{14}}{4}
\end{aligned}$$

Luego factoriza el 2 en ambos términos del numerador y posteriormente divide entre el factor común.

$$x=\frac{\overset{1}{\cancel{2}}(-2\pm\sqrt{14})}{\underset{2}{\cancel{4}}}=\frac{-2\pm\sqrt{14}}{2}^{*}$$

Por lo tanto, las soluciones son $\frac{-2+\sqrt{14}}{2}$ y $\frac{-2-\sqrt{14}}{2}$.

Observa que la expresión en el ejemplo 4, $2x^2+4x-5$, no es factorizable. Por lo tanto, el ejemplo 4 no podría resolverse mediante factorización.

Resuelve ahora el ejercicio 69

Comprendiendo el álgebra

Si los coeficientes numéricos de una ecuación cuadrática tienen un factor común, divide cada término entre el factor común. Por ejemplo, para la ecuación $3x^2 = 12x + 3 = 0$, primero divide cada término por el factor común, 3, y simplifica:

$$\frac{3x^2}{3}+\frac{12x}{3}+\frac{3}{3}=\frac{0}{3}$$
$$x^2+4x+1=0$$

Esta nueva ecuación es equivalente a la ecuación original y más fácil de resolver.

* Las soluciones serán proporcionadas en esta forma en la sección de respuestas.

3 Determinar una ecuación cuadrática dadas sus soluciones

Si nos dan las soluciones de una ecuación, podemos encontrar la ecuación trabajando a la inversa. Este procedimiento se muestra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Determina una ecuación que tenga las siguientes soluciones:

a) -5 y 1 **b)** $3 + 2i$ y $3 - 2i$

Solución

a) Si las soluciones son -5 y 1, escribimos

$$\begin{aligned} x = -5 \quad &\text{o} \quad x = 1 \\ x + 5 = 0 \quad & \quad x - 1 = 0 && \text{Iguala las ecuaciones a 0.} \\ (x+5)(x-1) &= 0 && \text{Propiedad del factor cero.} \\ x^2 - x + 5x - 5 &= 0 && \text{Multiplica los factores.} \\ x^2 + 4x - 5 &= 0 && \text{Reduce términos semejantes.} \end{aligned}$$

Así, la ecuación es $x^2 + 4x - 5 = 0$. Muchas otras ecuaciones tienen soluciones -5 y 1. De hecho, cualquier ecuación de la forma $k(x^2 + 4x - 5) = 0$, donde k es una constante diferente de cero, tiene esas soluciones.

b)

$$\begin{aligned} x = 3 + 2i \quad &\text{o} \quad x = 3 - 2i \\ x - (3 + 2i) = 0 \quad & \quad x - (3 - 2i) = 0 && \text{Iguala las ecuaciones a 0.} \\ [x - (3 + 2i)][x - (3 - 2i)] &= 0 && \text{Propiedad del factor cero.} \\ x \cdot x - x(3 - 2i) - x(3 + 2i) + (3 + 2i)(3 - 2i) &= 0 && \text{Multiplica.} \\ x^2 - 3x + 2xi - 3x - 2xi + (9 - 4i^2) &= 0 && \text{Propiedad distributiva; multiplica.} \\ x^2 - 6x + 9 - 4i^2 &= 0 && \text{Reduce términos semejantes.} \\ x^2 - 6x + 9 - 4(-1) &= 0 && \text{Sustituye } i^2 = -1. \\ x^2 - 6x + 13 &= 0 && \text{Simplifica.} \end{aligned}$$

La ecuación $x^2 - 6x + 13 = 0$ tiene las soluciones complejas $3 + 2i$ y $3 - 2i$.

Resuelve ahora el ejercicio 75

En el ejemplo 5 **a)**, la ecuación $x^2 + 4x - 5 = 0$ tiene como soluciones los números reales -5 y 1. Las soluciones corresponden a las intersecciones con el eje x $(-5, 0)$ y $(1, 0)$ de la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 4x - 5$, como se muestra en la **Figura 8.1**.

Comprendiendo el álgebra

Recuerda del capítulo 3 que una intersección con el eje x de una gráfica es un punto $(x, 0)$ donde un gráfico cruza el eje x. Para determinar la intersección de un gráfico con el eje x, establecemos $y = 0$ o el conjunto $f(x) = 0$ y resolvemos para x. Si x es un número real entonces el punto $(x, 0)$ es una intersección con el eje x.

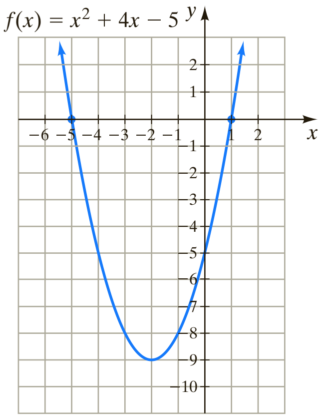


FIGURA 8.1

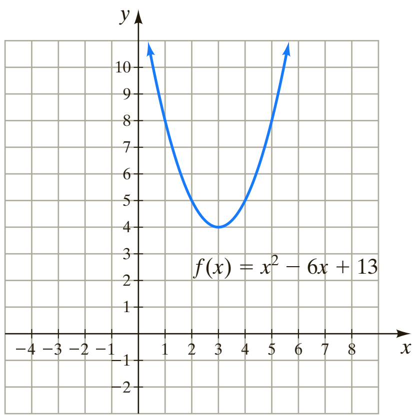


FIGURA 8.2

En el ejemplo 5 **b)**, la ecuación $x^2 - 6x + 13 = 0$ tiene solo soluciones complejas y no soluciones con números reales. Por lo tanto, la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 6x + 13$ no tiene intersecciones con el eje x, como se muestra en la **Figura 8.2**.

4 Utilizar el discriminante para determinar el número de soluciones reales para una ecuación cuadrática

Discriminante

El **discriminante** de una ecuación cuadrática es la expresión bajo el signo radical en la fórmula cuadrática.

$$\underbrace{b^2 - 4ac}_{\text{Discriminante}}$$

El discriminante proporciona información para determinar el número y tipos de soluciones de una ecuación cuadrática.

Soluciones de una ecuación cuadrática

Para una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$:

Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación cuadrática tiene dos soluciones distintas numéricas reales.

Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación cuadrática tiene una única solución numérica real.

Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación cuadrática no tiene solución real.

EJEMPLO 6

a) Determina el discriminante de la ecuación $x^2 - 8x + 16 = 0$.

b) ¿Cuántas soluciones numéricas reales tiene la ecuación dada?

c) Utiliza la fórmula cuadrática para determinar la (s) solución (es).

Solución

a) $a = 1, \qquad b = -8, \qquad c = 16$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (-8)^2 - 4(1)(16) \\ &= 64 - 64 = 0 \end{aligned}$$

b) Como el discriminante es igual a 0, tiene una solución única numérica real.

c)
$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{8 \pm 0}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{aligned}$$

La única solución es 4.

Resuelve ahora el ejercicio 9

EJEMPLO 7

Sin proporcionar las soluciones, determina si las siguientes ecuaciones tienen dos diferentes soluciones numéricas reales, una solución única numérica real o ninguna solución numérica real.

a) $2x^2 - 4x + 6 = 0$ **b)** $x^2 - 5x - 3 = 0$ **c)** $4x^2 - 12x = -9$

Solución Utilizamos el discriminante de la fórmula cuadrática para responder estas preguntas.

a) $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(2)(6) = 16 - 48 = -32$

Como el discriminante es negativo, esta ecuación no tiene soluciones numéricas reales.

b) $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(-3) = 25 + 12 = 37$

Como el discriminante es positivo, esta ecuación tiene dos soluciones numéricas reales distintas.

c) Primero reescribe $4x^2 - 12x = -9$ como $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

$$b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(4)(9) = 144 - 144 = 0$$

Como el discriminante es 0, esta ecuación tiene una sola solución numérica real.

Resuelve ahora el ejercicio 15

El discriminante puede utilizarse para determinar el número de soluciones reales de una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Como las intersecciones con el eje x de una función cuadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, ocurren en donde $f(x) = 0$, el discriminante también puede utilizarse para determinar el número de intersecciones con el eje x de una función cuadrática. La **Figura 8.3** muestra la relación entre el discriminante y el número de intersecciones con el eje x para una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Gráficas de $f(x) = ax^2 + bx + c$

Si $b^2 - 4ac > 0$, $f(x)$ tiene dos distintas intersecciones con el eje x.

Si $b^2 - 4ac = 0$, $f(x)$ tiene una sola intersección con el eje x.

Si $b^2 - 4ac < 0$, $f(x)$ no tiene intersecciones con el eje x.

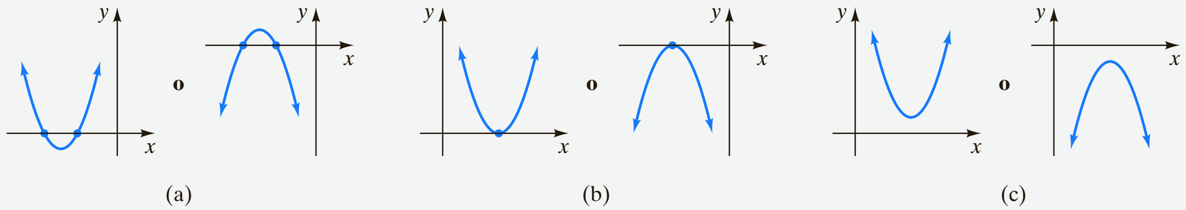


FIGURA 8.3

5 Estudiar problemas de aplicación que utilicen ecuaciones cuadráticas

Ahora veremos algunas aplicaciones de las ecuaciones cuadráticas.

EJEMPLO 8 **Teléfonos celulares** Mary Olson es propietaria de un negocio que vende teléfonos celulares. El ingreso, $R(n)$, de la venta de teléfonos celulares se determina multiplicando el número de teléfonos celulares por el precio por teléfono. Supón que el ingreso por la venta de n teléfonos celulares, $n \leq 50$, es

$$R(n) = n(50 - 0.2n)$$

donde $(50 - 0.2n)$ es el precio por el teléfono celular, en dólares.

a) Determina el ingreso cuando se venden 30 teléfonos celulares.

b) ¿Cuántos teléfonos celulares deben venderse para tener un ingreso de \$480?

Solución

a) Para calcular el ingreso cuando se venden 30 teléfonos celulares, evaluamos la función de ingreso para $n = 30$.

$$\begin{aligned} R(n) &= n(50 - 0.2n) \\ R(30) &= 30[50 - 0.2(30)] \\ &= 30(50 - 6) \\ &= 30(44) \\ &= 1320 \end{aligned}$$

El ingreso por la venta de 30 teléfonos celulares es de \$1320.

b) Entiende Queremos determinar el número de teléfonos celulares que deben venderse para tener un ingreso de \$480. Por lo tanto, necesitamos hacer $R(n) = 480$ y resolver para n.

$$\begin{aligned} R(n) &= n(50 - 0.2n) \\ 480 &= n(50 - 0.2n) \\ 480 &= 50n - 0.2n^2 \\ 0.2n^2 - 50n + 480 &= 0 \end{aligned}$$

Ahora podemos utilizar la fórmula cuadrática para resolver la ecuación.

Traduce $a = 0.2, \quad b = -50, \quad c = 480$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-50) \pm \sqrt{(-50)^2 - 4(0.2)(480)}}{2(0.2)}$$

Realiza los cálculos

$$= \frac{50 \pm \sqrt{2500 - 384}}{0.4}$$

$$= \frac{50 \pm \sqrt{2116}}{0.4}$$

$$= \frac{50 \pm 46}{0.4}$$

$$n = \frac{50 + 46}{0.4} = 240 \quad \text{o} \quad n = \frac{50 - 46}{0.4} = 10$$

Responde Como el problema especifica que $n \leq 50$, la única solución aceptable es $n = 10$. Por lo tanto, para obtener un ingreso de \$480, Mary debe vender 10 teléfonos celulares.

Resuelve ahora el ejercicio 87

Comprendiendo el álgebra

En la ecuación del movimiento de un proyectil, las variables v_0 y h_0 tienen *subíndices* de 0. Subíndices de 0 por lo general se refieren al valor *inicial* de la variable. Así, v_0 se refiere a la velocidad *inicial* con la que el objeto se proyecta hacia arriba, y h_0 se refiere a la altura *inicial* desde la que el objeto se proyecta.

Una ecuación importante en física relaciona la altura de un objeto con el tiempo después de que el objeto se proyecta hacia arriba.

Ecuación del movimiento de un proyectil

La altura, h, de un objeto t segundos después de ser proyectado hacia arriba puede encontrarse al resolver la ecuación

$$h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0, \text{ donde}$$

- g es la aceleración debido a la gravedad,
- v_0 es la velocidad inicial del objeto, y
- h_0 es la altura inicial a la que se encuentra el objeto.

Antes de que utilicemos la ecuación, tomemos en cuenta algunas observaciones acerca de g, la aceleración de la gravedad.

- Cuando medimos la altura de un objeto en pies, la aceleración de la gravedad en la Tierra es -32 pies/s² o $g = -32$.
- Cuando medimos la altura de un objeto en metros, la aceleración de la gravedad en la Tierra es -9.8 m/s² o $g = -9.8$.
- El valor de g será diferente en la Luna o en otro planeta que no sea la Tierra, pero todavía podemos utilizar la fórmula de movimiento de proyectiles.

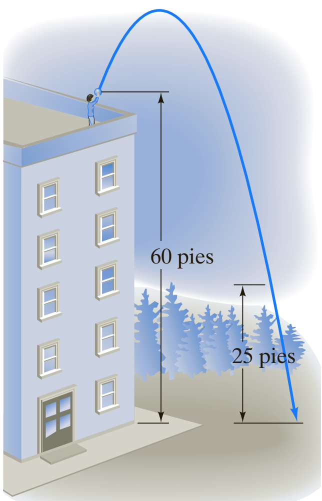


FIGURA 8.4

EJEMPLO 9 **Lanzamiento de una pelota** Betty Heller se encuentra en la parte superior de una edificio y lanza una pelota hacia arriba desde una altura inicial de 60 pies, con una velocidad inicial de 30 pies por segundo. Utiliza la ecuación de movimiento de proyectiles para responder las siguientes preguntas.

a) A partir de que Betty lanza la pelota, ¿cuánto tiempo tardará la pelota en estar a 25 pies respecto del piso?

b) A partir de que Betty lanza la pelota, ¿cuánto tiempo tardará la pelota en golpear el suelo?

c) ¿Cuál es la altura de la pelota después de 2 segundos?

Solución

a) **Entiende** El problema se ilustra en la **Figura 8.4**. Se nos pide determinar el tiempo, t, que tarda la pelota en alcanzar la altura, h, de 25 pies. De este modo, tenemos los valores siguientes para sustituirlos en la ecuación de movimiento de proyectiles: $h = 25$, $g = -32$, $v_0 = 30$ y $h_0 = 60$.

Traduce

$$h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0,$$

$$25 = \frac{1}{2}(-32)t^2 + (30)t + 60$$

Realiza los calculos

$$25 = -16t^2 + 30t + 60$$

$$16t^2 - 30t - 35 = 0$$

Suma $16t^2$, resta $30t$ y resta 60 en ambos lados para obtener una ecuación cuadrática en la forma general con un coeficiente principal positivo.

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Resuelve utilizando la fórmula cuadrática con $a = 16$, $b = -30$ y $c = -35$.

$$= \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(16)(-35)}}{2(16)}$$

$$= \frac{30 \pm \sqrt{3140}}{32}$$

$$t = \frac{30 + \sqrt{3140}}{32} \approx 2.7 \quad \text{o} \quad t = \frac{30 - \sqrt{3140}}{32} \approx -0.8$$

Responde Ya que el tiempo no puede ser negativo, la única solución razonable es 2.7 segundos. Por consiguiente, alrededor de 2.7 segundos después de su lanzamiento, la pelota estará a 25 pies del piso.

b) **Entiende** Cuando la pelota toca el suelo, su distancia sobre el suelo es 0. Sustituimos $h = 0$ en la fórmula y resolvemos para t.

Traduce

$$h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$$

$$0 = \frac{1}{2}(-32)t^2 + 30t + 60$$

Realiza los cálculos

$$0 = -16t^2 + 30t + 60$$

$$16t^2 - 30t - 60 = 0$$

Multiplica ambos lados de la ecuación por -1 para obtener un coeficiente principal positivo.

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(16)(-60)}}{2(16)}$$

Resuelve utilizando la fórmula cuadrática con $a = 16$, $b = -30$ y $c = -60$.

$$= \frac{30 \pm \sqrt{4740}}{32}$$

$$t = \frac{30 + \sqrt{4740}}{32} \approx 3.1 \quad \text{o} \quad t = \frac{30 - \sqrt{4740}}{32} \approx -1.2$$

Responde Como el tiempo no puede ser negativo, la única solución razonable es 3.1 segundos. Por consiguiente, la pelota golpea el piso alrededor de 3.1 segundos después de su lanzamiento.

c) **Entiende** Se nos pide determinar la altura, h, después de 2 segundos. Sustituiremos $t = 2$ en la ecuación de movimiento de proyectiles y resolvemos para h.

$$h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$$

Traduce y realiza los cálculos

$$h = \frac{1}{2}(-32)(2)^2 + 30(2) + 60$$

$$= -64 + 60 + 60 = 56$$

Responde Por lo tanto, la pelota estará a una altura de 56 pies después de 2 segundos de su lanzamiento.

Resuelve ahora el ejercicio 97

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.2

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

no	una	dos	completando el cuadrado	discriminante	entero positivo
movimiento de un proyectil		dividimos	multiplicamos	factorizamos	lineal

1. Aunque cualquier ecuación cuadrática puede resolverse ________________, en general preferimos utilizar la fórmula cuadrática porque es más eficiente y fácil de utilizar.
2. Cuando utilizamos la fórmula cuadrática, los cálculos son por lo general fáciles si el coeficiente principal, a, es un ________________.
3. Si los coeficientes numéricos de todos los términos en una ecuación cuadrática tienen un factor común, ________________ cada uno de los términos por el factor común.
4. El ________________ de una ecuación cuadrática es la expresión bajo el signo radical en la fórmula cuadrática: $b^2 - 4ac$.
5. Si el discriminante de una ecuación cuadrática es positivo, la ecuación tiene ________________ soluciones reales distintas.
6. Si el discriminante de una ecuación cuadrática es igual a cero, la ecuación tiene ________________ sola solución real.
7. Si el discriminante de una ecuación cuadrática es negativo, la ecuación ________________ tiene soluciones reales.
8. La altura, h, de un objeto después de t segundos de ser proyectado hacia arriba puede encontrarse al resolver la ecuación de ________________.

Practica tus habilidades

Utiliza el discriminante para determinar si cada ecuación tiene dos soluciones reales distintas, una sola solución real o no tiene solución real.

9. $x^2 + 6x + 2 = 0$
10. $2x^2 + x + 3 = 0$
11. $4z^2 + 6z + 5 = 0$
12. $-a^2 + 3a - 6 = 0$
13. $5p^2 + 3p - 7 = 0$
14. $2x^2 = 16x - 32$
15. $-5x^2 + 5x - 8 = 0$
16. $4.1x^2 - 3.1x - 2.8 = 0$
17. $x^2 + 10.2x + 26.01 = 0$
18. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x + 10 = 0$
19. $b^2 = -3b - \frac{9}{4}$
20. $\frac{x^2}{3} = \frac{2x}{7}$

Resuelve cada ecuación mediante la fórmula cuadrática.

21. $x^2 + 7x + 10 = 0$
22. $x^2 + 9x + 18 = 0$
23. $a^2 - 6a + 8 = 0$
24. $a^2 + 6a + 8 = 0$
25. $x^2 = -6x + 7$
26. $-a^2 - 9a + 10 = 0$
27. $-b^2 = 4b - 20$
28. $a^2 - 16 = 0$
29. $b^2 - 64 = 0$
30. $2x^2 = 4x + 1$
31. $3w^2 - 4w + 5 = 0$
32. $x^2 - 6x = 0$
33. $c^2 - 5c = 0$
34. $-t^2 - t - 1 = 0$
35. $4s^2 - 8s + 6 = 0$
36. $-3r^2 = 9r + 6$
37. $a^2 + 2a + 1 = 0$
38. $y^2 + 16y + 64 = 0$
39. $16x^2 - 8x + 1 = 0$
40. $100m^2 + 20m + 1 = 0$
41. $x^2 - 2x - 1 = 0$
42. $2 - 3r^2 = -4r$
43. $-n^2 = 3n + 6$
44. $-9d - 3d^2 = 5$
45. $2x^2 + 5x - 3 = 0$
46. $(r - 3)(3r + 4) = -10$
47. $(2a + 3)(3a - 1) = 2$
48. $6x^2 = 21x + 27$
49. $\frac{1}{2}t^2 + t - 12 = 0$
50. $\frac{2}{3}x^2 = 8x - 18$
51. $9r^2 + 3r - 2 = 0$
52. $2x^2 - 4x - 2 = 0$
53. $\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{2}{3} = 0$
54. $x^2 - \frac{11}{3}x = \frac{10}{3}$
55. $a^2 - \frac{a}{5} - \frac{1}{3} = 0$
56. $b^2 = -\frac{b}{2} + \frac{2}{3}$
57. $c = \frac{c - 6}{4 - c}$
58. $3y = \frac{5y + 6}{2y + 3}$
59. $2x^2 - 4x + 5 = 0$
60. $3a^2 - 4a = -5$
61. $y^2 + \frac{y}{2} = -\frac{3}{2}$
62. $2b^2 - \frac{7}{3}b + \frac{4}{3} = 0$
63. $0.1x^2 + 0.6x - 1.2 = 0$
64. $2.3x^2 - 5.6x - 0.4 = 0$

Para cada función, determina todos los valores reales de la variable para los que la función tiene el valor indicado.

65. $f(x) = 2x^2 - 3x + 7, f(x) = 7$

66. $g(x) = x^2 + 3x + 8, g(x) = 8$

67. $k(x) = x^2 - x - 15, k(x) = 15$

68. $p(r) = r^2 + 17r + 81, p(r) = 9$

69. $h(t) = 2t^2 - 7t + 6, h(t) = 2$

70. $t(x) = x^2 + 5x - 4, t(x) = 3$

71. $g(a) = 2a^2 - 3a + 16, g(a) = 14$

72. $h(x) = 6x^2 + 3x + 1, h(x) = -7$

Determina una ecuación cuadrática que tenga las soluciones dadas.

73. $1, 6$

74. $-3, 4$

75. $1, -9$

76. $-2, -6$

77. $-\frac{3}{5}, \frac{2}{3}$

78. $-\frac{1}{3}, -\frac{3}{4}$

79. $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$

80. $\sqrt{5}, -\sqrt{5}$

81. $3i, -3i$

82. $8i, -8i$

83. $3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}$

84. $5 - \sqrt{3}, 5 + \sqrt{3}$

85. $2 + 3i, 2 - 3i$

86. $5 - 4i, 5 + 4i$

Resolución de problemas

En los ejercicios 87-90, **a)** *plantea una función de ingreso, $R(n)$, que pueda utilizarse para resolver el problema, y* **b)** *resuelve el problema. Ver ejemplo 8.*

87. Venta de lámparas Un negocio vende n lámparas, $n \le 65$, a un precio de $(10 - 0.02n)$ dólares por lámpara. ¿Cuántas lámparas deben venderse para obtener una ganancia de \$450?

88. Venta de pilas Un negocio vende n pilas, $n \le 26$, a un precio de $(25 - 0.1n)$ dólares por pila. ¿Cuántas pilas deben venderse para obtener una ganancia de \$460?

89. Venta de sillas Un negocio vende n sillas, $n \le 50$, a un precio de $(50 - 0.4n)$ dólares por silla. ¿Cuántas sillas deben venderse para obtener una ganancia de \$660?

90. Venta de relojes Un negocio vende n relojes, $n \le 75$, a un precio de $(30 - 0.15n)$ dólares por reloj. ¿Cuántos relojes deben venderse para obtener una ganancia de \$1260?

© Tatiana Popova/Shutterstock

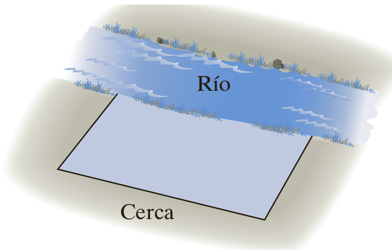
En los ejercicios 91-108, utiliza una calculadora cuando sea necesario para dar una solución en forma decimal. Redondea los números irracionales a la centésima más cercana.

91. Números El doble del cuadrado de un número positivo aumentado tres veces el número original es igual a 27. Determina el número.

92. Números El triple del cuadrado de un número positivo menos el doble del mismo número es igual a 21. Determina el número.

93. Jardín rectangular La longitud de un jardín rectangular es 1 pie menor que el triple de su ancho. Si el área del jardín es de 24 pies cuadrados, determina el largo y el ancho.

94. Área rectangular Lora Wallman desea cercar un área rectangular ubicada a lo largo de la ribera de un río como se muestra en el diagrama. Si solo tiene 400 pies de cerca y desea encerrar un área de 15,000 pies cuadrados, determina las dimensiones del área rectangular.



95. Fotografía John Williams, un fotógrafo profesional, tiene una fotografía de 6 por 8 pulgadas. Desea reducir la misma cantidad de cada lado, de modo que la fotografía resultante tenga la mitad del área de la fotografía original. ¿Cuánto debe reducir en cada lado?

96. Jardín rectangular Bart Simmons tiene un jardín floral de 12 por 9 metros. Quiere construir un camino de grava de ancho uniforme a lo largo de la parte interior del jardín en cada lado, de modo que el espacio resultante tendrá la mitad del área del jardín original. ¿Qué ancho tendrá el camino de grava?

En los ejercicios 97-100, utiliza la ecuación del movimiento de proyectiles $h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$. Si es necesario, redondea tu respuesta a la décima de segundo más cercana. Ve el ejemplo 9.

97. Golpeando una pelota de tenis Se golpea una pelota de tenis hacia arriba desde una altura inicial de 4 pies con una velocidad inicial de 40 pies por segundo.

a) Después de golpeada, ¿cuánto tarda la pelota en estar a 20 pies por encima del suelo?

b) Después de golpeada, ¿cuánto tarda la pelota en golpear el suelo?

c) ¿Cuál es la altura de la pelota después de 1 segundo?

98. Lanzamiento de una herradura Una herradura se lanza hacia arriba desde una altura inicial de 3 pies con una velocidad inicial de 25 pies por segundo.

a) Después de lanzada, ¿cuánto tarda la herradura en estar a 10 pies por encima del suelo?

b) Después de lanzada, ¿cuánto tarda la herradura en golpear el suelo?

c) ¿Cuál es la altura de la herradura después de 1 segundo?

99. Jugando golf en la Luna El 6 de febrero de 1971, el astronauta Alan Shepard golpeo una pelota de golf mientras se encontraba en la Luna. La aceleración de la gravedad, g, en la Luna es aproximadamente -5.3 pies/s². Supón que se golpeó la pelota hacia arriba desde una altura inicial de 0 pies y con una velocidad inicial de 26.5 pies/s.

a) Después del golpe, ¿en cuánto tiempo alcanzaría la pelota de golf una altura de 23.85 pies?
(*Sugerencia:* sustituye los valores apropiados en la ecuación de movimiento de un proyectil y entonces divide cada término entre el coeficiente principal).

b) Después del golpe, ¿en cuánto tiempo volvería la pelota de golf a la superficie de la Luna?

c) ¿Cuál sería la altura de la pelota de golf después de 5 segundos?

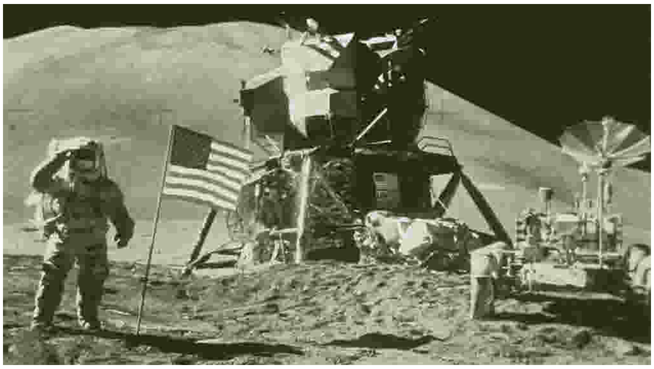
100. Jugando béisbol en la Luna Supón que Neil Armstrong hubiera golpeado una pelota de béisbol cuando puso el primer pie en la Luna el 20 de julio de 1969. Asume que golpeó la pelota hacia arriba desde una altura inicial de 2.65 pies y con una velocidad inicial de 132.5 pies/s. Ver ejercicio 99.

a) Después del golpe, ¿en cuánto tiempo alcanzaría la pelota de béisbol una altura de 132.5 pies?

b) Después del golpe, ¿en cuánto tiempo tocaría el suelo la pelota de béisbol?

c) ¿Cuál sería la altura de la pelota de béisbol después de 25 segundos?

© NASA/Masterfile Royalty Free Division



Neil Armstrong en la Luna

Ejercicios de conceptos y escritura

101. Considera las dos ecuaciones $-6x^2 + \frac{1}{2}x - 5 = 0$ y $6x^2 - \frac{1}{2}x + 5 = 0$. ¿Las soluciones para estas dos ecuaciones deben ser iguales? Explica tu respuesta.

102. Considera $12x^2 - 15x - 6 = 0$ y $3(4x^2 - 5x - 2) = 0$.

a) ¿Será igual la solución para las dos ecuaciones? Explica.

b) Resuelve $12x^2 - 15x - 6 = 0$.

c) Resuelve $3(4x^2 - 5x - 2) = 0$.

103. a) Explica cómo encontrar el discriminante.

b) ¿Cuál es el discriminante de la ecuación $3x^2 - 6x + 10 = 0$?

c) Escribe uno o dos párrafos donde expliques la relación entre el valor del discriminante y el número de soluciones reales para una ecuación cuadrática. Explica *por qué* el valor del discriminante determina el número de soluciones reales.

104. Escribe uno o dos párrafos para explicar la relación entre el valor del discriminante y el número de intersecciones con el eje x de $f(x) = ax^2 + bx + c$. Explica cuándo la función tendrá 0, 1 y 2 intersecciones con el eje x.

105. Da tu propio ejemplo de una ecuación cuadrática que pueda resolverse mediante la fórmula cuadrática, pero no mediante factorización.

106. ¿Hay alguna ecuación cuadrática que **a)** pueda resolverse mediante la fórmula cuadrática, pero que no pueda resolverse mediante el método de completar el cuadrado? **b)** pueda resolverse mediante el método de completar el cuadrado, pero que no pueda resolverse mediante factorización sobre el conjunto de los números enteros?

107. Cuando resolvemos una ecuación cuadrática mediante la fórmula cuadrática, si el discriminante es un cuadrado perfecto, ¿será factorizable la ecuación sobre el conjunto de los números enteros?

108. Cuando resolvemos una ecuación cuadrática mediante la fórmula cuadrática, si el discriminante es un número natural, ¿será factorizable la ecuación sobre el conjunto de los números enteros?

Problemas de desafío

109. Calentamiento de un cubo metálico Un cubo de metal se expande cuando se calienta. Si cada lado aumenta 0.20 milímetros después de que se calienta y el volumen total aumenta 6 milímetros cúbicos, determina la longitud original de un lado del cubo.

110. Seis soluciones La ecuación $x^n = 1$ tiene n soluciones (incluyendo las soluciones complejas). Determina las seis soluciones para $x^6 = 1$. (*Sugerencia:* reescribe la ecuación como $x^6 - 1 = 0$, luego factoriza utilizando la fórmula para la diferencia de dos cuadrados).

111. Lanzamiento de una piedra Travis Hawley se encuentra en el cuarto nivel de un edificio de ocho pisos y Courtney Prenzlow está en la azotea. Travis se encuentra a 60 pies de distancia respecto del suelo mientras que Courtney está a 120 pies del suelo.

a) Si Travis deja caer una piedra desde una ventana, determina el tiempo que tardará ésta en chocar contra el suelo.

b) Si Courtney deja caer una piedra desde la azotea, determina el tiempo que tardará ésta en chocar contra el suelo.

c) Si Travis lanza una piedra hacia arriba con una velocidad inicial de 100 pies por segundo, y Courtney lanza al mismo tiempo una piedra hacia arriba a 60 pies por segundo, ¿cuál de las piedras caerá primero al suelo? Explica.

d) ¿En algún instante las piedras estarán a la misma distancia respecto del suelo? Si es así, ¿en que momento?

Ejercicios de repaso acumulados

[1.6] **112.** Evalúa $\dfrac{5.55 \times 10^3}{1.11 \times 10^1}$.

[3.2] **113.** Si $f(x) = x^2 + 2x - 8$, determina $f(3)$.

[4.1] **114.** Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$3x + 4y = 2$$
$$2x = -5y - 1$$

[6.3] **115.** Simplifica $2x^{-1} - (3y)^{-1}$.

[7.6] **116.** Resuelve $\sqrt{x^2 - 6x - 4} = x$.

8.3 Ecuaciones cuadráticas: aplicaciones y resolución de problemas

1 Solución de aplicaciones adicionales.

2 Despejar una variable de una fórmula.

1 Solución de aplicaciones adicionales

En esta sección, exploraremos diversos problemas de aplicación de ecuaciones cuadráticas. Empezaremos investigando las utilidades de una compañía nueva.

EJEMPLO 1 **Utilidades de una compañía** Laserox, una compañía de nueva creación, proyecta que su utilidad anual, $p(t)$, en miles de dólares, durante los primeros 6 años de operación, puede aproximarse por la función $p(t) = 1.2t^2 + 4t - 8$ donde t es el número de años cumplidos.

a) Calcula la utilidad (o pérdida) de la compañía después del primer año.

b) Calcula la utilidad (o pérdida) de la compañía después de 6 años.

c) Calcula el tiempo necesario para que la compañía alcance el punto de equilibrio.

Solución

a) Para calcular la utilidad al final del primer año, evaluamos la función en 1.

$$p(t) = 1.2t^2 + 4t - 8$$
$$p(1) = 1.2(1)^2 - 4(1) - 8 = -2.8$$

Así, al final del primer año, la compañía proyecta una pérdida de \$2.8 en miles o \$2800.

b) $p(6) = 1.2(6)^2 + 4(6) - 8 = 59.2$

Así, al final del sexto año, la utilidad proyectada por la compañía es de \$59.2 en miles, o \$59,200.

c) Entiende La compañía alcanzará el punto de equilibrio cuando la utilidad sea 0. Por lo tanto, para determinar el punto de equilibrio (sin pérdidas o ganancias), resolvemos la ecuación

$$1.2t^2 + 4t - 8 = 0$$

Podemos utilizar la fórmula cuadrática para resolver la ecuación.

Traduce $a = 1.2, \quad b = 4, \quad c = -8$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1.2)(-8)}}{2(1.2)}$$

Realiza los cálculos

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 38.4}}{2.4}$$
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{54.4}}{2.4}$$
$$\approx \frac{-4 \pm 7.376}{2.4}$$

$$t \approx \frac{-4 + 7.376}{2.4} \approx 1.4 \qquad \text{o} \qquad t \approx \frac{-4 - 7.376}{2.4} \approx -4.74$$

Responde Como el tiempo no puede ser negativo, el punto de equilibrio lo alcanzará aproximadamente en 1.4 años.

Resuelve ahora el ejercicio 29

EJEMPLO 2 **Esperanza de vida** La función $N(t) = 0.0054t^2 - 1.46t + 95.11$ puede usarse para calcular el promedio de número de años de esperanza de vida restante para una persona de t años de edad, donde $30 \leq t \leq 100$

a) Calcula la esperanza de vida restante para una persona de 40 años de edad.
b) Si una persona tiene una esperanza de vida restante de 14.3 años, calcula su edad.

Solución

a) Entiende Para determinar la esperanza de vida de una persona de 40 años de edad, sustituimos t por 40 en la función y evaluamos.

Traduce
$$N(t) = 0.0054t^2 - 1.46t + 95.11$$
$$N(40) = 0.0054(40)^2 - 1.46(40) + 95.11$$

Realiza los cálculos
$$= 0.0054(1600) - 58.4 + 95.11$$
$$= 8.64 - 58.4 + 95.11$$
$$= 45.35$$

Responde y verifica La respuesta parece razonable. Por lo tanto, en promedio, una persona de 40 años de edad puede esperar vivir otros 45.35 años, para llegar a una edad de 85.35 años.

b) Entiende Aquí se nos da la esperanza de vida restante, $N(t)$, y se nos pide determinar la edad actual de la persona, t. Para resolver este problema, sustituimos $N(t)$ por 14.3 y despejamos t; para ello utilizaremos la fórmula cuadrática.

Traduce
$$N(t) = 0.0054t^2 - 1.46t + 95.11$$
$$14.3 = 0.0054t^2 - 1.46t + 95.11$$

Realiza los cálculos
$$0 = 0.0054t^2 - 1.46t + 80.81$$
$$a = 0.0054, \quad b = -1.46, \quad c = 80.81$$
$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-(-1.46) \pm \sqrt{(-1.46)^2 - 4(0.0054)(80.81)}}{2(0.0054)}$$
$$= \frac{1.46 \pm \sqrt{2.1316 - 1.745496}}{0.0108}$$
$$= \frac{1.46 \pm \sqrt{0.386104}}{0.0108}$$
$$\approx \frac{1.46 \pm 0.6214}{0.0108}$$
$$t \approx \frac{1.46 + 0.6214}{0.0108} \approx 192.72 \quad \text{o} \quad t \approx \frac{1.46 - 0.6214}{0.0108} \approx 77.65$$

Responde Como 192.72 no es una edad razonable, podemos omitir este resultado. Por lo tanto, en promedio, la persona con una expectativa de vida de 14.3 años, tiene alrededor de 77.65 años de edad.

Resuelve ahora el ejercicio 33

Problemas de movimiento En la sección 2.4 estudiamos por primera vez los problemas de movimiento.

EJEMPLO 3 **Paseo en una lancha de motor** Charles Curtis viaja 12 millas en su lancha de motor a favor de la corriente. Luego decide regresar al punto de partida en contra de la corriente. Su viaje tuvo una duración total de 5 horas y la corriente del río es de 2 millas por hora. Si durante todo el trayecto no tocó el acelerador para cambiar la velocidad, determina la velocidad de la lancha en aguas tranquilas.

Comprendiendo el álgebra

La fórmula de la distancia se escribe usualmente como

distancia = velocidad · tiempo

Sin embargo, algunas veces es conveniente despejar el *tiempo* de la fórmula:

$$\frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \frac{\text{velocidad} \cdot \text{tiempo}}{\text{velocidad}}$$

$$\frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \text{tiempo}$$

$$\text{o} \quad \text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$$

Solución **Entiende** Nos piden determinar la velocidad de la lancha en aguas tranquilas. Siendo r igual a la velocidad de la lancha en aguas tranquilas. Sabemos que el viaje duró 5 horas, por lo tanto, el tiempo en que recorrió el trayecto de ida y el de regreso debe sumar 5 horas. Como distancia = velocidad · tiempo, podemos determinar el tiempo dividiendo la distancia entre la velocidad.

Dirección	Distancia	Velocidad	Tiempo
Trayecto de ida (a favor de la corriente)	12	$r + 2$	$\frac{12}{r+2}$
Trayecto de vuelta (en contra de la corriente))	12	$r - 2$	$\frac{12}{r-2}$

Traduce tiempo de ida + tiempo de vuelta = tiempo total

$$\frac{12}{r+2} + \frac{12}{r-2} = 5$$

Realiza los cálculos

$$(r+2)(r-2)\left(\frac{12}{r+2} + \frac{12}{r-2}\right) = (r+2)(r-2)(5) \quad \text{Multiplica por el MCD.}$$

$$(\cancel{r+2})(r-2)\left(\frac{12}{\cancel{r+2}}\right) + (r+2)(\cancel{r-2})\left(\frac{12}{\cancel{r-2}}\right) = (r+2)(r-2)(5) \quad \text{Propiedad distributiva}$$

$$12(r-2) + 12(r+2) = 5(r^2 - 4)$$

$$12r - 24 + 12r + 24 = 5r^2 - 20 \quad \text{Propiedad distributiva}$$

$$24r = 5r^2 - 20 \quad \text{Simplifica.}$$

$$\text{o} \quad 5r^2 - 24r - 20 = 0$$

Utilizando la fórmula cuadrática con $a = 5$, $b = -24$ y $c = -20$, obtenemos

$$r = \frac{24 \pm \sqrt{976}}{10}$$

$$r \approx 5.5 \quad \text{o} \quad r \approx -0.7$$

Responde Como la velocidad no puede ser negativa, la velocidad o rapidez de la lancha en aguas tranquilas es de alrededor de 5.5 millas por hora.

Resuelve ahora el ejercicio 43

Problemas de trabajo Resolveremos un ejemplo que incluye un problema de trabajo, comentado por primera vez en la sección 6.5. Tal vez desees repasar esa sección antes de estudiar el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 Bombeo de agua Los Durals necesitan bombear agua desde su sótano inundado. Ellos tienen una bomba y además pidieron prestada otra a sus vecinos los Sullivans. Con ambas bombas trabajando juntas, el trabajo puede realizarse en 6 horas. La bomba de los Sullivans, trabajando sola, puede realizar el trabajo en 2 horas menos que la bomba de los Durals trabajando sola. ¿Cuánto tiempo necesitará cada bomba, trabajando sola, para realizar el trabajo?

Solución **Entiende** Recuerda de la sección 6.5 que la tasa de trabajo multiplicada por el tiempo trabajado da como resultado la parte de la tarea completada. Sea t = número de horas que tarda la bomba de los Durals (lenta) en realizar el trabajo por sí misma, entonces, $t - 2$ = número de horas que tarda la bomba de los Sullivans en realizar el trabajo por sí misma.

Bomba	Tasa de trabajo	Tiempo trabajado	Parte de la tarea realizada
Bomba de los Durals	$\frac{1}{t}$	6	$\frac{6}{t}$
Bomba de los Sullivans	$\frac{1}{t-2}$	6	$\frac{6}{t-2}$

Comprendiendo el álgebra

Generalmete, si una persona (o máquina) puede terminar un trabajo en unidades de x tiempo, la velocidad es $\frac{1}{x}$ de la tarea por la unidad de tiempo.

Traduce $\left(\begin{array}{c}\text{Parte de la tarea realizada}\\ \text{por la bomba de los Durals}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{Parte de la tarea realizada}\\ \text{por la bomba de los Sullivans}\end{array}\right) = 1$

$$\frac{6}{t} + \frac{6}{t-2} = 1$$

Realiza los cálculos

$$t(t-2)\left(\frac{6}{t} + \frac{6}{t-2}\right) = t(t-2)(1) \qquad \text{Multiplica ambos lados por el MCD, } t(t-2).$$

$$\cancel{t}(t-2)\left(\frac{6}{\cancel{t}}\right) + t(\cancel{t-2})\left(\frac{6}{\cancel{t-2}}\right) = t^2 - 2t \qquad \text{Propiedad distributiva}$$

$$6(t-2) + 6t = t^2 - 2t$$

$$6t - 12 + 6t = t^2 - 2t$$

$$t^2 - 14t + 12 = 0$$

Usando la fórmula cuadrática, obtenemos

$$t = \frac{14 \pm \sqrt{148}}{2}$$

$$t \approx 13.1 \quad \text{o} \quad t \approx 0.9$$

Responde Ambos $t = 13.1$ y $t = 0.9$ satisfacen la ecuación original. Sin embargo, si $t = 0.9$ entonces la bomba de los Durals realizaría el trabajo en 0.9 horas y la bomba de los Sullivans realizaría el trabajo en $0.9 - 2$ o -1.1 horas, lo cual no es posible. Por lo tanto, la única solución aceptable es $t = 13.1$. Por lo tanto, la bomba de los Durals tardará alrededor de 13.1 horas en realizar el trabajo por sí misma y la bomba de los Sullivans tardará alrededor de $13.1 - 2$ u 11.1 horas en realizar el trabajo sola.

Resuelve ahora el ejercicio 45

2 Despejar una variable de una fórmula

Comprendiendo el álgebra

Recuerda de la sección 8.1 la propiedad de la raíz cuadrada: Si $x^2 = a$, donde a es un número real, entonces $x = \pm\sqrt{a}$. Cuando resolvemos fórmulas para una variable, con frecuencia la variable solo puede representar un número no negativo, por lo tanto, en aquellas soluciones usaremos el signo $\pm$.

Cuando despejamos una variable de una fórmula, tal vez sea necesario utilizar la propiedad de la raíz cuadrada para aislar la variable. Sin embargo, con frecuencia la variable puede representar únicamente un número no negativo. Por lo tanto, *cuando utilizamos la propiedad de la raíz cuadrada para despejar una variable, en la mayoría de las fórmulas solo utilizaremos la raíz cuadrada positiva.* Esto se demostrará en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5

a) La fórmula para el área de un círculo es $A = \pi r^2$. Despeja el radio, r, de esta ecuación.

b) *La ley de la gravitación universal de Newton es* $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$

Despeja r de la ecuación, la cual mide la distancia.

Solución

a)

$$A = \pi r^2$$

$$\frac{A}{\pi} = r^2 \qquad \text{Aísla } r^2 \text{ dividiendo ambos lados entre } \pi.$$

$$\sqrt{\frac{A}{\pi}} = r \qquad \text{Propiedad de la raíz cuadrada; } r \text{ debe ser positiva.}$$

b)

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$r^2 F = G m_1 m_2 \qquad \text{Multiplica ambos lados de la fórmula por } r^2.$$

$$r^2 = \frac{G m_1 m_2}{F} \qquad \text{Aísla } r^2 \text{ dividiendo ambos lados entre } F.$$

$$r = \sqrt{\frac{G m_1 m_2}{F}} \qquad \text{Propiedad de la raíz cuadrada; } r \text{ debe ser positiva.}$$

Resuelve ahora el ejercicio 23

En ambas partes del ejemplo 5, como r debe ser mayor que 0, cuando utilizamos la propiedad de la raíz cuadrada, solo utilizamos la raíz cuadrada positiva.

EJEMPLO 6 **Diagonal de una maleta** La diagonal de una caja puede calcularse mediante la fórmula

$$d = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2}$$

donde L es la longitud, W es el ancho y H es la altura de la caja. Ver **Figura 8.5**.

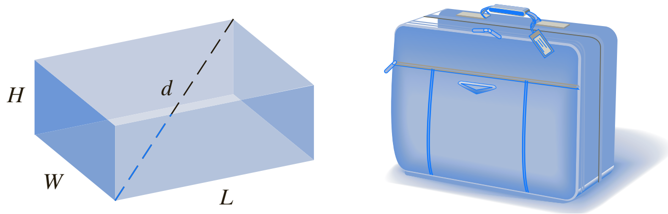


FIGURA 8.5

a) Determina la diagonal de una maleta con longitud de 30 pulgadas, ancho de 15 pulgadas y altura de 10 pulgadas.

b) Resuelve la ecuación para el ancho, W.

Comprendiendo el álgebra

Recuerda de la sección 7.6 que cuando necesitamos eliminar una raíz cuadrada de una ecuación, podemos aislar la raíz cuadrada y entonces elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación. Simplificamos utilizando la propiedad

$$(\sqrt{a})^2 = a, a \geq 0$$

Solución

a) Entiende Para determinar la diagonal, necesitamos sustituir los valores apropiados en la fórmula y resolver para la diagonal, d.

Traduce

$$d = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2}$$
$$d = \sqrt{(30)^2 + (15)^2 + (10)^2}$$

Realiza los cálculos

$$= \sqrt{900 + 225 + 100}$$
$$= \sqrt{1225}$$
$$= 35$$

Responde Por lo tanto, la diagonal de la maleta mide 35 pulgadas.

b) Nuestro primer paso para despejar W es elevar al cuadrado ambos lados de la fórmula.

$$d = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2}$$
$$d^2 = \left(\sqrt{L^2 + W^2 + H^2}\right)^2 \quad \text{Eleva al cuadrado ambos lados.}$$
$$d^2 = L^2 + W^2 + H^2 \quad \text{Utiliza } (\sqrt{a})^2 = a, a \geq 0.$$
$$d^2 - L^2 - H^2 = W^2 \quad \text{Aísla } W^2.$$
$$\sqrt{d^2 - L^2 - H^2} = W \quad \text{Propiedad de la raíz cuadrada.}$$

Resuelve ahora el ejercicio 15

EJEMPLO 7 **Conos de tráfico** El área de la superficie de un cono circular recto es

$$s = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$

© Stephen Aaron Rees/Shutterstock

a) Un cono de tráfico que se utiliza en las carreteras mide 18 pulgadas de alto y tiene un radio de 12 pulgadas. Determina el área de la superficie del cono.

b) Despeja h de la fórmula.

Solución

a) Entiende y traduce Para determinar el área de la superficie, sustituimos los valores apropiados en la fórmula.

$$\begin{aligned} s &= \pi r\sqrt{r^2 + h^2} \\ &= \pi(12)\sqrt{(12)^2 + (18)^2} \end{aligned}$$

Realiza los cálculos

$$\begin{aligned} &= 12\pi\sqrt{144 + 324} \\ &= 12\pi\sqrt{468} \\ &\approx 815.56 \end{aligned}$$

Responde El área de la superficie es de alrededor de 815.56 pulgadas cuadradas.

b) Para despejar h, necesitamos aislarla en un lado de la ecuación. Existen varias formas de resolver la ecuación para h.

$$s = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$

$$\frac{s}{\pi r} = \sqrt{r^2 + h^2} \qquad \text{Divide ambos lados entre } \pi r.$$

$$\left(\frac{s}{\pi r}\right)^2 = \left(\sqrt{r^2 + h^2}\right)^2 \qquad \text{Eleva al cuadrado ambos lados.}$$

$$\frac{s^2}{\pi^2 r^2} = r^2 + h^2 \qquad \text{Utiliza } (\sqrt{a})^2 = a, a \geq 0.$$

$$\frac{s^2}{\pi^2 r^2} - r^2 = h^2 \qquad \text{Resta } r^2 \text{ en ambos lados.}$$

$$\sqrt{\frac{s^2}{\pi^2 r^2} - r^2} = h \qquad \text{Propiedad de la raíz cuadrada}$$

Otras respuestas aceptables son $h = \sqrt{\dfrac{s^2 - \pi^2 r^4}{\pi^2 r^2}}$ y $h = \dfrac{\sqrt{s^2 - \pi^2 r^4}}{\pi r}$.

Resuelve ahora el ejercicio 27

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.3

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

raíz cuadrada utilidades elevar al cuadrado $\dfrac{\text{velocidad}}{\text{distancia}}$ $\dfrac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$ ingresos una tarea completa una parte de la tarea

1. Una compañía alcanza su punto de equilibrio cuando tiene ________________ de 0.
2. Si despejamos el *tiempo* de la fórmula de la distancia, obtenemos que tiempo = ________________.
3. Para resolver problemas de trabajo utilizamos el hecho de que la parte de la tarea realizada por la primera persona (o máquina) más la parte de la tarea realizada por la segunda persona (o máquina) es igual a ________________ terminada.
4. Cuando necesitamos eliminar una raíz cuadrada de una ecuación, podemos aislar la raíz cuadrada y entonces ________________ ambos lados de la ecuación.

Practica tus habilidades

Despeja la variable indicada. Supón que la variable que se despeja debe ser mayor que 0.

5. $A = s^2$, para s (área de un cuadrado)

6. $A = (s + 1)^2$, para s (área de un cuadrado)

7. $E = i^2 r$, para i (corriente en electrónica)

8. $A = 4\pi r^2$, para r (área de la superficie de una esfera)

9. $d = 16t^2$, para t (distancia de un objeto que cae)

10. $d = \dfrac{1}{9}x^2$, para x (distancia de frenado sobre pavimento)

11. $E = mc^2$, para c (famosa fórmula de la energía, propuesta por Einstein)

12. $V = \pi r^2 h$, para r (volumen de un cilindro circular recto)

13. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, para r (volumen de un cono circular recto)

14. $d = \sqrt{L^2 + W^2}$, para L (diagonal de un rectángulo)

15. $d = \sqrt{L^2 + W^2}$, para W (diagonal de un rectángulo)

16. $a^2 + b^2 = c^2$, para a (teorema de Pitágoras)

17. $a^2 + b^2 = c^2$, para b (teorema de Pitágoras)

18. $d = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2}$, para L (diagonal de una caja)

19. $d = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2}$, para H (diagonal de una caja)

20. $A = P(1 + r)^2$, para r (fórmula de interés compuesto)

21. $h = -16t^2 + s_0$, para t (altura de un objeto)

22. $h = -4.9t^2 + s_0$, para t (altura de un objeto)

23. $E = \frac{1}{2}mv^2$, para v (energía cinética)

24. $f_x^2 + f_y^2 = f^2$, para f_x (fuerza que actúa sobre un objeto)

25. $a = \dfrac{v_2^2 - v_1^2}{2d}$, para v_1 (aceleración de un vehículo)

26. $A = 4\pi(R^2 - r^2)$, para R (área de la superficie de dos esferas)

27. $v' = \sqrt{c^2 - v^2}$, para c (relatividad; v' se lee "v prima")

28. $L = L_0\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$, para v (arte, concentración de una pintura)

Resolución de problemas

29. Utilidades de una cafetería Benny's Beans, una nueva cafetería, proyecta que sus utilidades anuales, $p(t)$, en miles de dólares, durante los primeros 6 años en el negocio pueden aproximarse mediante la función $p(t) = 0.2t^2 + 5.4t - 8$, donde t se mide en años.

© Hannamariah/Shutterstock

a) Calcula las utilidades (o pérdidas) de la cafetería después del primer año.

b) Calcula las utilidades (o pérdidas) de la cafetería después del quinto año.

c) Calcula el tiempo necesario para que la cafetería alcance el punto de equilibrio.

30. Utilidades de una tienda de comida orgánica Hatty's Health Foods, una tienda de comida orgánica, proyecta que sus utilidades anuales, $p(t)$, en miles de dólares, durante los primeros 6 años en el negocio pueden aproximarse mediante la función $p(t) = 0.3t^2 + 4.8t - 9$, donde t se mide en años.

a) Calcula las utilidades (o pérdidas) de la tienda de comida después del primer año.

b) Calcula las utilidades (o pérdidas) de la tienda de comida después del quinto año.

c) Calcula el tiempo necesario para que la tienda de comida alcance el punto de equilibrio.

31. Utilidades de una tienda de *souvenirs* Bull Snort, una tienda de *souvenirs* de la Universidad del Sur de Florida, proyecta que sus utilidades anuales, $p(t)$, en miles de dólares, durante los primeros 7 años en el negocio pueden aproximarse mediante la función $p(t) = 0.1t^2 + 3.9t - 6$, donde t se mide en años.

a) Calcula las utilidades (o pérdidas) de la tienda de *souvenirs* después del primer año.

b) Calcula las utilidades (o pérdidas) de la tienda de *souvenirs* después del sexto año.

c) Calcula el tiempo necesario para que la tienda de *souvenirs* alcance el punto de equilibrio.

32. Utilidades de una relojería Tiempo de reparación, una relojería, proyecta que sus utilidades anuales, $p(t)$, en miles de dólares, durante los primeros 7 años en el negocio pueden aproximarse mediante la función $p(t) = 0.4t^2 + 4.4t - 8$, donde t se mide en años.

a) Calcula las utilidades (o pérdidas) de la relojería después del primer año.

b) Calcula las utilidades (o pérdidas) de la relojería después del sexto año.

c) Calcula el tiempo necesario para que la relojería alcance el punto de equilibrio.

33. Temperatura La temperatura, T, en grados Fahrenheit, del radiador de un automóvil durante los primeros 4 minutos de conducción es una función del tiempo, t. La temperatura puede determinarse mediante la fórmula $T = 6.2t^2 + 12t + 32$, $0 \le t \le 4$.

a) En el instante que se enciende el automóvil, ¿cuál es la temperatura del radiador?

b) Después de 2 minutos de conducir el automóvil, ¿cuál es la temperatura del radiador?

c) ¿Cuánto tiempo después de que se arrancó el automóvil la temperatura del radiador alcanza los 120 °F?

34. Calificación promedio En un colegio, los registros muestran que la calificación promedio, G, de un alumno promedio es una función del número de horas que él o ella estudia y realiza tareas por semana, h. La calificación promedio puede calcularse con la ecuación $G = 0.01h^2 + 0.2h + 1.2$, $0 \le h \le 8$.

a) ¿Cuál es la calificación promedio de un alumno que estudia 0 horas a la semana?

b) ¿Cuál es la calificación promedio de un alumno que dedica 3 horas a la semana a estudiar?

c) Para obtener una calificación promedio de 3.2, ¿cuántas horas a la semana debería dedicar un alumno promedio al estudio?

35. Edad de conductores y accidentes El número de accidentes automovilísticos fatales en Estados Unidos por cada 100 millones de millas recorridas, $A(t)$, por conductores de t años de edad, puede ser calculado mediante la función $A(t) = 0.013t^2 - 1.19t + 28.24$.

Fuente: Instituto de seguros para seguridad en carretera

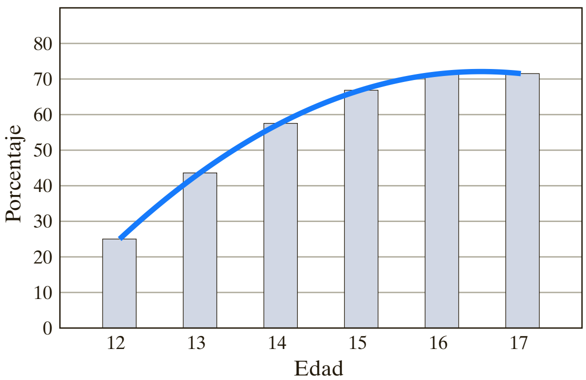
a) Calcula el número de accidentes fatales por cada 100 millones de millas recorridas por conductores de edad $t = 20$ años de edad.

b) Calcula el número de accidentes fatales por cada 100 millones de millas recorridas por conductores de edad $t = 75$ años de edad.

c) Calcula la edad en la cual ocurren 10 accidentes fatales por cada 100 millones de millas recorridas.

36. Escuela libre de drogas En la gráfica siguiente se muestra el porcentaje de estudiantes de varias edades que afirman que en sus escuelas se consumen drogas.

Estudiantes que afirman que en sus escuelas se consumen drogas



Fuente: Centro Nacional de Adiccion y Abuso de Sustancias

La función $f(a) = -2.32a^2 + 76.58a - 559.87$ puede emplearse para calcular el porcentaje de estudiantes que afirma que en sus escuelas se consumen drogas. En la función, a representa la edad del estudiante, donde $12 \leq a \leq 17$. Utiliza la función para responder lo siguiente.

a) Calcula el porcentaje de estudiantes de 14 años que afirma que en sus escuelas se consumen drogas.

b) ¿A qué edad 70% de los estudiantes afirma que en sus escuelas se consumen drogas?

37. Los activos de la seguridad social La activos previstos para la seguridad social pueden calcularse mediante la función $f(t) = -20.57t^2 + 758.9t - 3140$ donde $f(t)$ es la cantidad total de activos en billones de dólares y t representa el número de años desde 2000.

Fuente: Administración del Seguro Social

a) Calcula los activos previstos para la seguridad social en 2015.

b) Calcula los activos previstos para la seguridad social en 2030.

c) ¿Durante qué años los activos previstos para la seguridad social serán alrededor de $2000 billones?

38. Utilidad La utilidad semanal de una tienda de videos, P, en miles de dólares, es una función del precio de alquiler de las películas, t, es decir, $P = 0.2t^2 + 1.5t - 1.2, 0 \leq t \leq 5$.

a) Si la tienda cobra $3 por película, ¿cuál es la utilidad o pérdida semanal de la tienda?

b) Si cobra $5 por película, ¿cuál es la utilidad semanal?

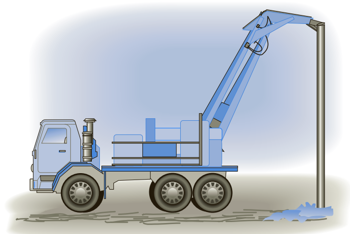
c) ¿Cuál debe ser el precio de alquiler de cada película para que la utilidad semanal sea de $1400?

39. Patio de juegos El área de un patio infantil rectangular es de 600 metros cuadrados. La longitud es 10 metros mayor que el ancho. Determina la longitud y el ancho del patio.

© Glowimages

40. Viaje Hana Juarez condujo 80 millas en medio del tránsito pesado, hasta llegar a una autopista, por la que viajó 260 millas a una velocidad promedio de 25 millas por hora más que la velocidad promedio en el tránsito pesado. Si el viaje total duró 6 horas, determina su velocidad promedio en el tránsito pesado y en la autopista.

41. Perforación de un pozo Paul y Rima Jones contrataron a la Ruth Cardiff Drilling Company para perforar un pozo. La compañía tuvo que perforar 64 pies para encontrar agua. La compañía informó a los Jones que acaba de pedir un nuevo equipo que perfora en promedio 1 pie por hora más rápido, lo cual les permitiría llegar al agua 3.2 horas antes que con el equipo que tienen actualmente. Determina la velocidad a la que perfora el equipo actual.



42. Transportación de automóviles Frank Sims, un chofer de camión, transportó un lote de automóviles nuevos desde Detroit, Michigan, hasta Indianapolis, Indiana. En su viaje de regreso el camión estaba más ligero, así que la velocidad de Frank fue en promedio 10 millas más rápida que en su viaje de ida. Si la distancia total recorrida fue de 300 millas y el tiempo total empleado en la conducción fue de 11 horas, determina la velocidad promedio de ida y la velocidad promedio de regreso.

43. Corredor Latoya Williams, corredora de fondo, sale de su casa, trota 6 millas y regresa. La mayor parte del recorrido de ida es cuesta arriba, por lo que su velocidad promedio es de 2 millas por hora menos que su velocidad de regreso. Si el tiempo total que dura su recorrido es $1\frac{3}{4}$ horas, determina su velocidad de ida y su velocidad de regreso.

44. Red Rock Canyon Kathy Nickell viajó desde el Gran Cañón, a las afueras de las Vegas, hasta Phoenix, Arizona. La distancia total que recorrió fue de 300 millas. Al llegar a Phoenix calculó que si hubiera viajado 10 millas por hora más rápido, en promedio, habría llegado a su destino 1 hora antes. Determina la velocidad promedio a la que viajó Kathy.

© Allen R. Angel

Gran Cañón

45. Construcción de un motor Trabajando juntas, dos mecánicas, Bonita Rich y Pamela Pearson, tardan 6 horas en reconstruir un motor. Si cada una trabaja sola, Bonita, la más experimentada, podría completar la tarea 1 hora antes que Pamela. ¿Cuánto tiempo tardaría cada una de ellas en reconstruir el motor por su cuenta?

46. Paseo en bicicleta Ricky Bullock disfruta pasear en bicicleta de ida y regreso desde Washington, D.C., hasta Bethesda, Maryland; el trayecto total es de 30 millas en la ruta capital de la Media Luna. La mayor parte del viaje a Bethesda es cuesta arriba. La velocidad promedio al ir a Bethesda es 5 millas por hora más lenta que la velocidad promedio de regreso a D.C. Si el viaje completo dura 4.5 horas, determina la velocidad promedio en cada dirección.

47. Vuelo en aeroplano Dole Rohm voló su aeroplano monomotor Cessna una distancia de 80 millas con el viento a favor, desde Jackson Hole, Wyoming, hasta Blackfoot, Idaho. En ese momento dio vuelta y voló de regreso a Jackson Hole con el viento en contra. Si la velocidad del viento era constante de 30 millas por hora y el tiempo total del recorrido fue de 1.3 horas, determina la velocidad del aeroplano con el viento en calma.

© Margo Harrison/Shutterstock

48. Barcos Después de un leve derrame petrolero, se envían dos barcos para limpiar la bahía de Baffin. El barco nuevo puede limpiar todo el derrame en 3 horas menos que el barco más antiguo. Si ambos barcos trabajan juntos, pueden limpiar el derrame de petróleo en 8 horas. ¿Cuánto tardaría el barco más nuevo en limpiar el petróleo derramado si trabajara solo?

49. Servicio de limpieza Los O'Connors ofrecen servicios de limpieza. Si trabaja solo, John necesita $\frac{1}{2}$ hora más que Chris para limpiar el Moose Club. Si trabajan juntos, John y Chris pueden limpiar el club en 6 horas. Determina el tiempo requerido por cada uno para limpiar el club.

50. Calentador eléctrico Un calentador eléctrico pequeño requiere 6 minutos más que un calentador más grande para elevar la temperatura de una cochera sin calefacción hasta alcanzar una temperatura agradable. Juntos, los dos calentadores pueden elevar la temperatura de la cochera hasta un nivel agradable en 42 minutos. ¿Cuánto tiempo tardaría en elevar la temperatura de la cochera hasta un nivel agradable cada uno de los calentadores?

51. Viaje Shywanda Moore viajó de San Antonio, Texas, a Austin, Texas, una distancia de 75 millas. Ella se detuvo 2 horas en Austin para visitar a un amigo antes de continuar su viaje de Austin a Dallas, Texas, que se encuentra a una distancia de 195 millas. Si condujo 10 millas por hora más rápido de San Antonio a Austin y el tiempo total del viaje fue de 6 horas, determina su velocidad promedio de San Antonio a Austin.

© Allen R. Angel

River Walk, San Antonio, Texas

52. Viaje Lewis y su amigo George viajan desde Nashville hasta Baltimore. Lewis viaja en un automóvil y George en tren. El tren y el automóvil salen de Nashville al mismo tiempo. Durante el viaje, Lewis y George hablan por teléfono celular, y Lewis informa a George que se detuvo al anochecer después de haber recorrido 500 millas. Una hora y dos tercios después, George le habla a Lewis para informarle que el tren acaba de llegar a Baltimore, ciudad que se encuentra a 800 millas de Nashville. Suponiendo que, en promedio, el tren viaja 20 millas por hora más rápido que el automóvil, determina la velocidad promedio del automóvil y del tren.

53. Televisores de pantalla ancha Un televisor de pantalla ancha (ver figura) tiene una proporción de aspecto de 16:9. Esto significa que la proporción del largo a la altura de la pantalla es de 16 a 9. La figura muestra cómo pueden determinarse el largo y el ancho de una televisión de pantalla ancha de 40 pulgadas. Determina el largo y la altura de dicho televisor.

© Allen R. Angel

54. Televisor estándar Muchos televisores de tubos de rayos catódicos tienen una pantalla con una proporción de aspecto de 4:3. Determina el largo y la altura de la pantalla de una televisión que tiene una proporción de aspecto de 4:3 y cuya diagonal es de 36 pulgadas. Ve el ejercicio 53.

Ejercicios de conceptos y escritura

55. Escribe un problema de movimiento y resuélvelo.

56. Escribe un problema de trabajo y resuélvelo.

57. En general, si utilizamos la propiedad de la raíz cuadrada o la fórmula cuadrática para despejar una variable de una fórmula, solo utilizaremos la raíz cuadrada positiva. Explica por qué.

58. Supón que $P = ☺^2 + \boxdot^2$ es una fórmula real. Al despejar ☺ se obtiene $☺ = \sqrt{P - \boxdot^2}$. Si ☺ representa un número real, ¿qué relación debe existir entre P y $\boxdot$?

Problemas de desafío

59. Área El área de un rectángulo es de 18 metros cuadrados. Cuando la longitud se incrementa en 2 metros y el ancho en 3, el área es de 48 metros cuadrados. Determina las dimensiones del rectángulo más pequeño.

60. Área El área de un rectángulo es de 35 pulgadas cuadradas. Cuando la longitud se disminuye en 1 pulgada y el ancho se aumenta en 1 pulgada, el área del nuevo rectángulo es de 36 pulgadas cuadradas. Determina las dimensiones del rectángulo original.

Ejercicios de repaso acumulados

[1.4] **61.** Evalúa $-[4(5-3)^3] + 2^4$.

[2.2] **62.** Despeja R de $IR + Ir = E$.

[6.2] **63.** Suma $\dfrac{r}{r-4} - \dfrac{r}{r+4} + \dfrac{32}{r^2-16}$.

[7.2] **64.** Simplifica $\left(\dfrac{x^{3/4}y^{-2}}{x^{1/2}y^2}\right)^8$.

[7.6] **65.** Resuelve $\sqrt{x^2 + 3x + 12} = x$.

Prueba de mitad de capítulo: 5.1-5.4

Para determinar tu comprensión del tema que se ha abordado hasta el momento, resuelve esta pequeña prueba. Las respuestas y la sección en donde se trató el tema por primera vez, se proporcionan al final del libro. Repasa el tema de las preguntas que respondiste de forma incorrecta.

Utiliza la propiedad de la raíz cuadrada para resolver cada ecuación.

1. $x^2 - 12 = 86$

2. $(a-3)^2 + 20 = 0$

3. $(2m+7)^2 = 36$

Resuelve la ecuación completando el cuadrado.

4. $y^2 + 4y - 12 = 0$

5. $3a^2 - 12a - 30 = 0$

6. $4c^2 + c = -9$

7. Patio El patio de una casa es un cuadrado, donde la diagonal es 6 metros mayor que un lado. Determina la longitud de un lado del patio.

8. a) Proporciona la fórmula para el discriminante de una ecuación cuadrática.

b) Explica cómo determinar si una ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales, una solución real o ninguna solución real.

9. Utiliza el discriminante para determinar si la ecuación $2b^2 - 6b - 11 = 0$ tiene dos distintas soluciones reales, una solución real o ninguna solución real.

Resuelve cada ecuación mediante la fórmula cuadrática.

10. $6n^2 + n = 15$

11. $p^2 = -4p + 8$

12. $3d^2 - 2d + 5 = 0$

En los ejercicios 13 y 14, determina una ecuación que tenga las soluciones dadas.

13. $7, -2$

14. $2 + \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5}$

15. Lámparas Una empresa vende n lámparas, $n \leq 20$, a un precio de $(60 - 0.5n)$ dólares por lámpara. ¿Cuántas lámparas deben venderse para tener un ingreso de \$550?

En los ejercicios 16-18, despeja la variable que se indica. Supón que todas las variables son positivas.

16. $y = x^2 - r^2$ para r

17. $A = \dfrac{1}{3}kx^2$ para x

18. $D = \sqrt{x^2 + y^2}$ para y

19. Área La longitud de un rectángulo es dos pies mayor que el doble del ancho. Determina las dimensiones, si su área es de 60 pies cuadrados.

20. Relojes La utilidad de una compañía que vende n relojes es $p(n) = 2n^2 + n - 35$, donde $p(n)$ está en cientos de dólares. ¿Cuántos relojes deben venderse para tener una utilidad de \$2000?

8.4 Expresar ecuaciones en forma cuadrática

1 Solución de ecuaciones con forma cuadrática.

2 Solución de ecuaciones con exponentes racionales.

1 Solución de ecuaciones con forma cuadrática

En esta sección, resolveremos ecuaciones que no son cuadráticas, pero pueden ser reescritas en la forma de una ecuación cuadrática.

Ecuaciones en la forma cuadrática

Una ecuación que puede reescribirse en la forma $au^2 + bu + c = 0$ para $a \neq 0$, en donde u es una expresión algebraica, se dice que está en la **forma cuadrática**.

Comprendiendo el álgebra

En general, cuando reescribimos una ecuación que está en la forma cuadrática, hacemos u igual a la variable de "en medio", sin el coeficiente numérico. Por ejemplo, en la ecuación $4a - 5\sqrt{a} + 1 = 0$, hacemos $u = \sqrt{a}$. Como $u^2 = (\sqrt{a})^2 = a$, la ecuación se transforma en $4u^2 - 5u + 1 = 0$.

Dada una ecuación en la forma cuadrática, haremos una sustitución para reescribir la ecuación en la forma $au^2 + bu + c = 0$. Por ejemplo, considera la ecuación $2(x - 3)^2 + 5(x - 3) - 7 = 0$.

Haremos $u = x - 3$. Entonces, $u^2 = (x - 3)^2$, y la ecuación puede reescribirse como sigue

$$2\underbrace{(x-3)}^2 + 5\underbrace{(x-3)} - 7 = 0$$

$$2\;u^2 + 5\;u - 7 = 0$$

La ecuación $2u^2 + 5u - 7 = 0$ se puede resolver mediante factorización, completando el cuadrado o utilizando la fórmula cuadrática. Otros ejemplos se muestran en la siguiente tabla.

Ecuación en la forma cuadrática	Sustitución	Ecuación con la sustitución
$y^4 - y^2 - 6 = 0$	$u = y^2$	$u^2 - u - 6 = 0$
$2(x + 5)^2 - 5(x + 5) - 12 = 0$	$u = x + 5$	$2u^2 - 5u - 12 = 0$
$x^{2/3} + 4x^{1/3} - 3 = 0$	$u = x^{1/3}$	$u^2 + 4u - 3 = 0$

Para solucionar las ecuaciones en la forma cuadrática, utilizamos el procedimiento siguiente.

Para resolver ecuaciones con la forma cuadrática

1. Realiza una sustitución que resulte en una ecuación de la forma $au^2 + bu + c = 0$, $a \neq 0$, donde u es una función de la variable original.
2. Despeja u en la ecuación $au^2 + bu + c = 0$.
3. Reemplaza u con la función de la variable original del paso 1 y resuelve la ecuación resultante para la variable original.
4. Comprueba si hay soluciones extrañas, sustituyendo las soluciones aparentes en la ecuación original.

EJEMPLO 1

a) Resuelve $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

b) Determina las intersecciones con el eje x de la gráfica de la función $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Solución

a) Para obtener una ecuación en la forma cuadrática, hacemos $u = x^2$. Entonces $u^2 = (x^2)^2 = x^4$.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$(x^2)^2 - 5x^2 + 4 = 0 \qquad \text{se reemplazó por } (x^2)^2.$$

$$u^2 - 5u + 4 = 0 \qquad \text{se reemplazó por } u.$$

Ahora tenemos una ecuación cuadrática que podemos solucionar por factorización

$$\begin{aligned} u^2 - 5u + 4 &= 0 \\ (u-4)(u-1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u - 4 &= 0 \quad \text{o} \quad & u - 1 &= 0 \\ u &= 4 & u &= 1 \end{aligned}$$

A continuación, reemplazamos u por x^2 y resolvemos para x.

$$\begin{aligned} u &= 4 & u &= 1 & \\ &\downarrow & &\downarrow & \\ x^2 &= 4 & x^2 &= 1 & &u \text{ se reemplazó por } x^2. \\ x &= \pm\sqrt{4} & x &= \pm\sqrt{1} & &\text{Propiedad de la raíz cuadrada} \\ x &= \pm 2 & x &= \pm 1 & \end{aligned}$$

Comprueba las cuatro soluciones posibles en la ecuación original.

$x = 2$

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 4 &= 0 \\ 2^4 - 5(2)^2 + 4 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 16 - 20 + 4 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Verdadero

$x = -2$

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 4 &= 0 \\ (-2)^4 - 5(-2)^2 + 4 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 16 - 20 + 4 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Verdadero

$x = 1$

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 4 &= 0 \\ 1^4 - 5(1)^2 + 4 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 1 - 5 + 4 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Verdadero

$x = -1$

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 4 &= 0 \\ (-1)^4 - 5(-1)^2 + 4 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 1 - 5 + 4 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Verdadero

Comprendiendo el álgebra

Recuerda que las intersecciones con el eje x de una función son los puntos en que la gráfica cruza el eje x. Las intersecciones con el eje x siempre tienen una coordenada y igual a 0. Para determinar las intersecciones con el eje x de una función, establecemos el valor de y o $f(x) = 0$ y resolvemos para x.

Por lo tanto, las soluciones son 2, -2, 1 y -1.

b) Las intersecciones con el eje x ocurren donde $f(x) = 0$. Por consiguiente, la gráfica cruzará el eje x en las soluciones de la ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

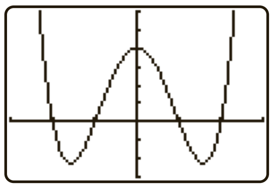


FIGURA 8.6 $-3, 3, 1, -3, 6, 1$

Del inciso **a)**, sabemos que las soluciones son 2, -2, 1 y -1. Por lo tanto, las intersecciones con el eje x son $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. La **Figura 8.6** es la gráfica de $f(x)= x^4 - 5x^2 + 4x = 0$ como se ilustra en una calculadora graficadora. Observa que la gráfica cruza el eje x en $x = 2$, $x = -2$, $x = 1$ y $x = -1$.

Resuelve ahora el ejercicio 7

EJEMPLO 2 Resuelve $p^4 + 2p^2 = 8$.

Solución Haremos $u = p^2$, entonces $u^2 = (p^2)^2 = p^4$.

$$\begin{aligned} p^4 + 2p^2 - 8 &= 0 & &\text{se igualó la ecuación a 0.} \\ (p^2)^2 + 2p^2 - 8 &= 0 & &p^4 \text{ se escribió como } (p^2)^2. \\ u^2 + 2u - 8 &= 0 & &p^2 \text{ se sustituyó por } u. \\ (u+4)(u-2) &= 0 & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u + 4 &= 0 \quad \text{o} \quad & u - 2 &= 0 \\ u &= -4 & u &= 2 \end{aligned}$$

A continuación, sustituimos de nuevo u por p^2 y resolvemos para p.

$$\begin{aligned} p^2 &= -4 & p^2 &= 2 & &u \text{ se reemplazó por } p^2. \\ p &= \pm\sqrt{-4} & p &= \pm\sqrt{2} & &\text{Propiedad de la raíz cuadrada.} \\ p &= \pm 2i \end{aligned}$$

Verifica las cuatro soluciones posibles en la ecuación *original*.

$p = 2i$

$$\begin{aligned} p^4 + 2p^2 &= 8 \\ (2i)^4 + 2(2i)^2 &\stackrel{?}{=} 8 \\ 2^4 i^4 + 2(2^2)(i^2) &\stackrel{?}{=} 8 \\ 16(1) + 8(-1) &\stackrel{?}{=} 8 \\ 16 - 8 &= 8 \end{aligned}$$

Verdadero

$p = -2i$

$$\begin{aligned} p^4 + 2p^2 &= 8 \\ (-2i)^4 + 2(-2i)^2 &\stackrel{?}{=} 8 \\ (-2)^4 i^4 + 2(-2)^2 i^2 &\stackrel{?}{=} 8 \\ 16(1) + 8(-1) &\stackrel{?}{=} 8 \\ 16 - 8 &= 8 \end{aligned}$$

Verdadero

$p = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} p^4 + 2p^2 &= 8 \\ (\sqrt{2})^4 + 2(\sqrt{2})^2 &\stackrel{?}{=} 8 \\ 4 + 2(2) &\stackrel{?}{=} 8 \\ 8 &= 8 \end{aligned}$$

Verdadero

$p = -\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} p^4 + 2p^2 &= 8 \\ (-\sqrt{2})^4 + 2(-\sqrt{2})^2 &\stackrel{?}{=} 8 \\ 4 + 2(2) &\stackrel{?}{=} 8 \\ 8 &= 8 \end{aligned}$$

Verdadero

Por lo tanto, las soluciones son $2i$, $-2i$, $\sqrt{2}$, y $-\sqrt{2}$.

Resuelve ahora el ejercicio 17

Consejo útil

En ocasiones los estudiantes despejan u en la ecuación, pero luego olvidan terminar el problema despejando la variable original. Recuerda que si la ecuación original está en términos de x, debes obtener los valores para x.

EJEMPLO 3 Resuelve $4(2w + 1)^2 - 16(2w + 1) + 15 = 0$.

Solución Haremos $u = 2w + 1$, entonces, $u^2 = (2w + 1)^2$ y la ecuación se convierte en

$$\begin{aligned} 4(2w + 1)^2 - 16(2w + 1) + 15 &= 0 \\ 4u^2 - 16u + 15 &= 0 \qquad 2w + 1 \text{ se sustituyó por } u. \end{aligned}$$

Ahora podemos factorizar y resolver.

$$(2u - 3)(2u - 5) = 0$$

$$\begin{aligned} 2u - 3 &= 0 & \quad \text{o} \quad 2u - 5 &= 0 \\ 2u &= 3 & 2u &= 5 \\ u &= \frac{3}{2} & u &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

A continuación, sustituimos u por $2w + 1$ y despejamos w.

$$\begin{aligned} 2w + 1 &= \frac{3}{2} & 2w + 1 &= \frac{5}{2} & &u \text{ se sustituyó por } 2w + 1. \\ 2w &= \frac{1}{2} & 2w &= \frac{3}{2} \\ w &= \frac{1}{4} & w &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Una comprobación mostrará que $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$ son soluciones de la ecuación original.

Resuelve ahora el ejercicio 29

EJEMPLO 4 Determina las intersecciones con el eje x de la gráfica de la función $f(x) = 2x^{-2} + x^{-1} - 1$.

Solución Las intersecciones con el eje x ocurren donde $f(x) = 0$. Por lo tanto, para determinar las intersecciones con el eje x debemos resolver la ecuación

$$2x^{-2} + x^{-1} - 1 = 0$$

Haremos $u = x^{-1}$, entonces, $u^2 = (x^{-1})^2 = x^{-2}$.

$$2(x^{-1})^2 + x^{-1} - 1 = 0$$

$$2u^2 + u - 1 = 0 \qquad x^{-1} \text{ se sustituyó por } u.$$

$$(2u - 1)(u + 1) = 0$$

$$2u - 1 = 0 \quad \text{o} \quad u + 1 = 0$$

$$u = \frac{1}{2} \qquad\qquad u = -1$$

Ahora sustituimos u por x^{-1}.

$$x^{-1} = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad x^{-1} = -1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \qquad\qquad \frac{1}{x} = -1$$

$$x = 2 \qquad\qquad x = -1$$

Una comprobación mostrará que 2 y -1 son soluciones de la ecuación original. Por lo tanto, las intersecciones con el eje x son (2,0) y $(-1,0)$.

Resuelve ahora el ejercicio 61

Comprendiendo el álgebra

Recuerda del capítulo 1 que una expresión elevada a un exponente negativo puede escribirse del modo siguiente:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m},\ a \neq 0$$

2 Solución de ecuaciones con exponentes racionales

En nuestros siguientes dos ejemplos, mientras resolvemos las ecuaciones que están en forma cuadrática, elevaremos ambos lados de la ecuación a una potencia para eliminar los exponentes racionales (o radicales). Recuerda del capítulo 7, que cada vez que elevamos ambos lados de una ecuación a una potencia, es posible introducir soluciones extrañas. *Por lo tanto, siempre que elevemos ambos lados de una ecuación con exponentes racionales a una potencia, debes comprobar todas las soluciones aparentes en la ecuación original.*

EJEMPLO 5 Resuelve $x^{2/5} + x^{1/5} - 6 = 0$.

Solución Hacemos $u = x^{1/5}$, entonces, $u^2 = (x^{1/5})^2 = x^{2/5}$. La ecuación se transforma en

$$(x^{1/5})^2 + x^{1/5} - 6 = 0$$

$$u^2 + u - 6 = 0 \qquad \text{Sustituimos } x^{1/5} \text{ por } u.$$

$$(u + 3)(u - 2) = 0$$

$$u + 3 = 0 \quad \text{o} \quad u - 2 = 0$$

$$u = -3 \qquad\qquad u = 2$$

Ahora sustituimos u por $x^{1/5}$ y elevamos ambos lados de la ecuación a la quinta potencia para eliminar los exponentes racionales.

$$x^{1/5} = -3 \quad \text{o} \quad x^{1/5} = 2$$

$$(x^{1/5})^5 = (-3)^5 \qquad (x^{1/5})^5 = 2^5$$

$$x = -243 \qquad\qquad x = 32$$

Las dos *posibles* soluciones son -243 y 32. Recuerda que siempre que elevas ambos lados de una ecuación a una potencia, como hiciste aquí, necesitas comprobar si hay soluciones extrañas.

Verifica

$x = -243$

$$x^{2/5} + x^{1/5} - 6 = 0$$

$$(-243)^{2/5} + (-243)^{1/5} - 6 \stackrel{?}{=} 0$$

$$(\sqrt[5]{-243})^2 + \sqrt[5]{-243} - 6 \stackrel{?}{=} 0$$

$$(-3)^2 - 3 - 6 \stackrel{?}{=} 0$$

$$9 - 3 - 6 \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0 \quad \text{Verdadero}$$

$x = 32$

$$x^{2/5} + x^{1/5} - 6 = 0$$

$$(32)^{2/5} + (32)^{1/5} - 6 \stackrel{?}{=} 0$$

$$(\sqrt[5]{32})^2 + \sqrt[5]{32} - 6 \stackrel{?}{=} 0$$

$$2^2 + 2 - 6 \stackrel{?}{=} 0$$

$$4 + 2 - 6 \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0 \quad \text{Verdadero}$$

Como ambos valores satisfacen la ecuación, las soluciones son -243 y 32.

Resuelve ahora el ejercicio 63

Comprendiendo el álgebra

Recuerda del capítulo 7 que una expresión con exponentes racionales puede reescribirse como una expresión radical utilizando la regla siguiente:

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$$

EJEMPLO 6 Resuelve $2p - \sqrt{p} - 10 = 0$.

Solución Como $\sqrt{p} = p^{1/2}$ podemos expresar la ecuación como:

$$2p - p^{1/2} - 10 = 0$$

Hacemos $u = p^{1/2}$, entonces $u^2 = \left(p^{1/2}\right)^2 = p$ y la ecuación se transforma en

$$\begin{aligned} 2p - p^{1/2} - 10 &= 0 \\ 2\left(p^{1/2}\right)^2 - p^{1/2} - 10 &= 0 \end{aligned}$$

Si hacemos $u = p^{1/2}$, esta ecuación está en la forma cuadrática.

$$\begin{aligned} 2u^2 - u - 10 &= 0 \\ (2u - 5)(u + 2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2u - 5 &= 0 \quad \text{o} \quad & u + 2 &= 0 \\ 2u &= 5 & u &= -2 \\ u &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

A continuación, sustituimos u por $p^{1/2}$.

$$p^{1/2} = \frac{5}{2} \qquad\qquad p^{1/2} = -2$$

Ahora elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$\begin{aligned} \left(p^{1/2}\right)^2 &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 & \left(p^{1/2}\right)^2 &= (-2)^2 \\ p &= \frac{25}{4} & p &= 4 \end{aligned}$$

Debemos comprobar las dos soluciones aparentes en la ecuación original.

Verifica

$$p = \frac{25}{4} \qquad\qquad\qquad p = 4$$

$$\begin{aligned} 2p - \sqrt{p} - 10 &= 0 & 2p - \sqrt{p} - 10 &= 0 \\ 2\left(\frac{25}{4}\right) - \sqrt{\frac{25}{4}} - 10 &\stackrel{?}{=} 0 & 2(4) - \sqrt{4} - 10 &\stackrel{?}{=} 0 \\ \frac{25}{2} - \frac{5}{2} - 10 &\stackrel{?}{=} 0 & 8 - 2 - 10 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \quad \text{Verdadero} & -4 &= 0 \quad \text{Falso} \end{aligned}$$

Como 4 no satisface la ecuación, es una solución extraña; la única solución es $\frac{25}{4}$.

Resuelve ahora el ejercicio 25

Comprendiendo el álgebra

Cuando resolvemos una ecuación que involucra variables con exponentes racionales o radicales, con frecuencia elevaremos ambos lados de la ecuación a una potencia con el fin de eliminar los exponentes racionales o radicales. Cada vez que hacemos esto, es posible que introduzcamos una solución extraña o falsa. Por lo tanto, debemos comprobar con cuidado nuestras respuestas en la ecuación original.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.4

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

$u = h - 2$ solución extraña v en la forma cuadrática $u = \sqrt{v}$ $(h - 2)^2$ intersección con el eje x $u = c^2$

1. Una ecuación que puede escribirse en la forma $au^2 + bu + c = 0$ para $a \neq 0$, donde u es una expresión algebraica, es una ecuación ________________.
2. Las ________________ de una función son los puntos donde la gráfica cruza al eje x.
3. Siempre que resolvemos una ecuación elevando ambos lados de ésta a una potencia, podemos introducir una ________________.
4. Para resolver la ecuación $c^4 + c^2 - 2 = 0$, la mejor opción para u para obtener la ecuación en la forma cuadrática es ________________.
5. Para resolver la ecuación $(h - 2)^2 + (h - 2) - 42 = 0$, la mejor opción para u para obtener la ecuación en la forma cuadrática es ________________.
6. Para resolver la ecuación $v - 3\sqrt{v} - 28 = 0$, la mejor opción para u para obtener la ecuación en la forma cuadrática es ________________.

Practica tus habilidades

Resuelve cada ecuación.

7. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
8. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
9. $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$
10. $x^4 + 50x^2 + 49 = 0$
11. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
12. $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$
13. $a^4 - 7a^2 + 12 = 0$
14. $b^4 + 7b^2 + 12 = 0$
15. $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$
16. $9d^4 - 13d^2 + 4 = 0$
17. $r^4 - 8r^2 = -15$
18. $p^4 - 8p^2 = -12$
19. $z^4 - 7z^2 = 18$
20. $a^4 + a^2 = 42$
21. $-c^4 = 4c^2 - 5$
22. $9b^4 = 57b^2 - 18$
23. $\sqrt{x} = 2x - 6$
24. $x - 2\sqrt{x} = 8$
25. $x - \sqrt{x} = 6$
26. $x - 4 = -3\sqrt{x}$
27. $9x + 3\sqrt{x} = 2$
28. $8x + 2\sqrt{x} = 1$
29. $(x + 3)^2 + 2(x + 3) = 24$
30. $(x + 1)^2 + 4(x + 1) + 3 = 0$
31. $6(a - 2)^2 = -19(a - 2) - 10$
32. $10(z + 2)^2 = 3(z + 2) + 1$
33. $(x^2 - 3)^2 - (x^2 - 3) - 6 = 0$
34. $(a^2 - 1)^2 - 5(a^2 - 1) - 14 = 0$
35. $2(b + 3)^2 + 5(b + 3) - 3 = 0$
36. $(z^2 - 6)^2 + 2(z^2 - 6) - 24 = 0$
37. $18(x^2 - 5)^2 + 27(x^2 - 5) + 10 = 0$
38. $28(x^2 - 8)^2 - 23(x^2 - 8) - 15 = 0$
39. $a^{-2} + 4a^{-1} + 4 = 0$
40. $x^{-2} + 10x^{-1} + 25 = 0$
41. $12b^{-2} - 7b^{-1} + 1 = 0$
42. $5x^{-2} + 4x^{-1} - 1 = 0$
43. $2b^{-2} = 7b^{-1} - 3$
44. $10z^{-2} - 3z^{-1} - 1 = 0$
45. $x^{-2} + 9x^{-1} = 10$
46. $6a^{-2} = a^{-1} + 12$
47. $x^{-2} = 4x^{-1} + 12$
48. $x^{2/3} - 5x^{1/3} + 6 = 0$
49. $x^{2/3} - 4x^{1/3} = -3$
50. $x^{2/3} = 3x^{1/3} + 4$
51. $b^{2/3} - 9b^{1/3} + 18 = 0$
52. $c^{2/3} - 4 = 0$
53. $-2a - 5a^{1/2} + 3 = 0$
54. $r^{2/3} - 7r^{1/3} + 10 = 0$
55. $c^{2/5} + 3c^{1/5} + 2 = 0$
56. $x^{2/5} - 5x^{1/5} + 6 = 0$

Determina todas las intersecciones con el eje x de cada función.

57. $f(x) = x - 5\sqrt{x} + 6$
58. $g(x) = x - 15\sqrt{x} + 56$
59. $h(x) = x + 14\sqrt{x} + 45$
60. $k(x) = x + 7\sqrt{x} + 12$
61. $p(x) = 4x^{-2} - 19x^{-1} - 5$
62. $g(x) = 4x^{-2} + 12x^{-1} + 9$
63. $f(x) = x^{2/3} - x^{1/3} - 6$
64. $f(x) = x^{1/2} + 6x^{1/4} - 7$
65. $g(x) = (x^2 - 3x)^2 + 2(x^2 - 3x) - 24$
66. $g(x) = (x^2 - 6x)^2 - 5(x^2 - 6x) - 24$
67. $f(x) = x^4 - 29x^2 + 100$
68. $h(x) = x^4 - 4x^2 + 3$

Resolución de problemas

69. Resuelve la ecuación $\dfrac{3}{x^2} - \dfrac{3}{x} = 60$

a) Multiplicando ambos lados de la ecuación por el MCD.
b) Escribiendo la ecuación con exponentes negativos.

70. Resuelve la ecuación $1 = \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^2}$

a) Multiplicando ambos lados de la ecuación por el MCD.
b) Escribiendo la ecuación con exponentes negativos.

Determina todas las soluciones reales de cada ecuación.

71. $15(r + 2) + 22 = -\dfrac{8}{r + 2}$
72. $2(p + 3) + 5 = \dfrac{3}{p + 3}$
73. $4 - (x - 1)^{-1} = 3(x - 1)^{-2}$
74. $3(x - 4)^{-2} = 16(x - 4)^{-1} + 12$
75. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$
76. $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$
77. $(x^2 + 2x - 2)^2 - 7(x^2 + 2x - 2) + 6 = 0$
78. $(x^2 + 3x - 2)^2 - 10(x^2 + 3x - 2) + 16 = 0$

Determina todas las soluciones de cada ecuación.

79. $2n^4 - 6n^2 - 3 = 0$
80. $3x^4 + 8x^2 - 1 = 0$

Ejercicios de conceptos y escritura

81. Da un procedimiento general para resolver una ecuación de la forma $ax^4 + bx^n + c = 0$.

82. Da un procedimiento general para resolver una ecuación de la forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$.

83. Da un procedimiento general para resolver una ecuación de la forma $ax^{-2} + bx^{-1} + c = 0$.

84. Da un procedimiento general para resolver una ecuación de la forma $a(x - r)^2 + b(x - r) - c = 0$

85. Escribe una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ que tenga como soluciones ± 2 y ± 1. Explica cómo obtuviste la respuesta.

86. Detemina una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ que tenga como soluciones ± 3 y $\pm 2i$. Explica cómo obtuviste la respuesta.

87. Determina una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ que tenga como soluciones $\pm\sqrt{2}$ y $\pm\sqrt{5}$. Explica cómo obtuviste la respuesta.

88. Determina una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ que tenga como soluciones $\pm 2i$ y $\pm 5i$. Explica cómo obtuviste la respuesta.

89. ¿Es posible que una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ tenga exactamente una solución imaginaria? Explica.

90. ¿Es posible que una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ tenga exactamente una solución real? Explica.

Ejercicios de repaso acumulados

[1.3] **91.** Evalúa $\frac{4}{5} - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)$.

[2.1] **92.** Resuelve $3(x + 2) - 2(3x + 3) = -3$.

[3.2] **93.** Establece el dominio y el rango de $y = (x - 3)^2$.

[7.3] **94.** Simplifica $\sqrt[3]{16x^3y^6}$.

[7.4] **95.** Suma $\sqrt{75} + \sqrt{48}$.

8.5 Graficación de funciones cuadráticas

1. Determinar cuándo una parábola abre hacia arriba o hacia abajo.
2. Determinar el eje de simetría, el vértice y las intersecciones con el eje x de una parábola.
3. Graficar funciones cuadráticas por medio del eje de simetría, el vértice y las intersecciones.
4. Resolver problemas de máximos y mínimos.
5. Entender el desplazamiento de las parábolas.
6. Escribir funciones en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

En los capítulos 3 y 5 se comentaron brevemente las gráficas de las funciones cuadráticas. En esta sección estudiaremos cómo graficar las funciones cuadráticas usando el eje de simetría, el vértice y las intersecciones. También utilizaremos las traslaciones para graficar funciones cuadráticas.

1 Determinar cuándo una parábola abre hacia arriba o hacia abajo

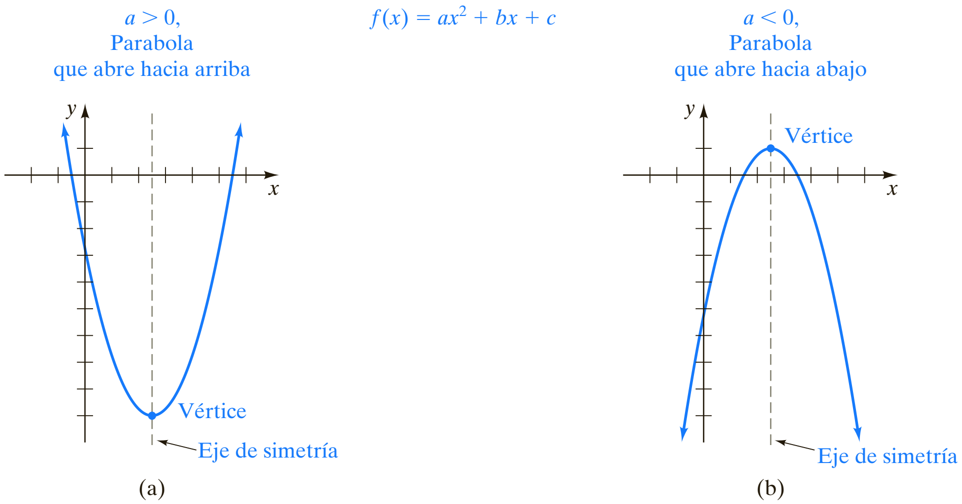
Comencemos con la definición de una función cuadrática.

Función cuadrática

Una **función cuadrática** es una función que se puede escribir en la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{para todos los números reales } a, b \text{ y } c, \text{ con } a \neq 0.$$

La gráfica de una función cuadrática es una **parábola**. Una parábola tiene una forma que se asemeja a la letra U, pero no es idéntica. Para una función cuadrática, el signo del coeficiente principal, a, determina si la parábola abre hacia arriba (ver **Figura 8.7a**) o hacia abajo (ver **Figura 8.7b**).



- Cuando $a > 0$, la parábola abre hacia arriba.
- El **vértice** es el punto más bajo en la curva.
- El **valor mínimo de la función** es la coordenada y del vértice.

- Cuando $a < 0$, la parábola abre hacia abajo.
- El **vértice** es el punto más alto en la curva.
- El **valor máximo de la función** es la coordenada y del vértice.

FIGURA 8.7

2 Determinar el eje de simetría, el vértice y las intersecciones con el eje *x* de una parábola

Las gráficas de funciones cuadráticas tendrán **simetría** con respecto a una línea vertical, denominada **eje de simetría**, que pasa por el vértice. Esto significa que si dobláramos el papel a lo largo de esta línea imaginaria, el lado derecho e izquierdo de la parábola coincidirían (ver ambas gráficas en la **Figura 8.7**, de la página 531).

Ahora deduciremos la fórmula del eje de simetría y determinaremos las coordenadas del vértice de una parábola, comenzando con una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ y completando el cuadrado de los primeros dos términos.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \qquad \text{Factoriza} \end{aligned}$$

Un medio del coeficiente de x es $\frac{b}{2a}$, y su cuadrado es $\frac{b^2}{4a^2}$. Suma y resta este término dentro del paréntesis. La suma de estos dos términos es cero.

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \boxed{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}}\right) + c$$

Ahora reescribe la función como se muestra:

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c && \text{Reemplazado el trinomio con e cuadrado de un binomio.} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} && \text{Escribe fracciones con un denominador común.} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} && \text{Reduce los dos últimos términc escribe primero con la variable} \\ &= a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

Ahora considera lo siguiente.

- La expresión $\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2$ siempre será mayor o igual a cero.
- Si $a > 0$, la parábola abrirá hacia arriba y la función tendrá un valor mínimo. Este valor mínimo ocurrirá cuando $x = -\frac{b}{2a}$.
- Si $a < 0$, la parábola abrirá hacia abajo y la función tendrá un valor máximo. Este valor máximo ocurrirá cuando $x = -\frac{b}{2a}$.
- Por tanto, la coordenada del eje x del vértice puede determinarse usando la fórmula $x = -\frac{b}{2a}$. Para determinar la coordenada del eje y del vértice, evalúa $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. Encontramos que la coordenada del eje y del vértice es $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Vértice de una parábola

La parábola representada por la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tendrá como vértice

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

Ya que con frecuencia determinamos la coordenada y del vértice sustituyendo la coordenada x del vértice en $f(x)$, el vértice también puede designarse como

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

Debido a que el eje de simetría es la línea vertical que pasa a través del vértice, su ecuación se determina utilizando la misma fórmula que usamos para encontrar la coordenada x del vértice.

Eje de simetría de una parábola

Para una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ la ecuación del **eje de simetría** de la parábola es

$$x = -\frac{b}{2a}$$

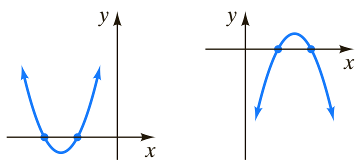
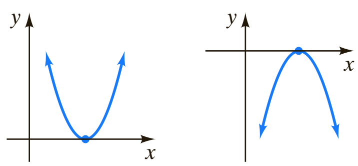
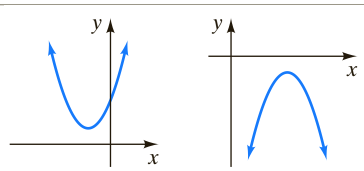
Recuerda que para determinar la intersección con el eje x de una función, hacemos y o $f(x) = 0$ y resolvemos para x.

Eje de simetría de una parábola

Para determinar la intersección con el eje x (si existe alguna) de una función cuadrática, resolvemos la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ para x.

Esta ecuación puede resolverse por factorización, mediante la fórmula cuadrática o completando el cuadrado.

Como se mencionó en la sección 8.2, el discriminante $b^2 - 4ac$ puede usarse para determinar el *número de intersecciones con el eje x*. La tabla siguiente resume la información acerca del discriminante.

Discriminante $b^2 - 4ac$	Número de intersecciones con el eje x	Posibles gráficas de $f(x) = ax^2 + bx + c$
> 0	Dos	
$= 0$	Una	
< 0	Ninguna	

3 Graficar funciones cuadráticas por medio del eje de simetría, el vértice y las intersecciones

Ahora trazaremos gráficas de funciones cuadráticas.

EJEMPLO 1 Considera la función cuadrática $y = -x^2 + 8x - 12$.

a) Determina si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.
b) Determina la intersección con el eje y.
c) Determina el vértice.
d) Determina las intersecciones con el eje x, si las hay.
e) Traza la gráfica.

Solución

a) Como a es -1, es decir menor que 0, la parábola abre hacia abajo.

b) Para determinar la intersección con el eje y, hacemos $x = 0$ y resolvemos para y.

$$y = -(0)^2 + 8(0) - 12 = -12$$

La intersección con el eje y se da en el punto $(0, -12)$.

c) Primero determina la coordenada del eje x y luego la coordenada del eje y del vértice. De la función, $a = -1$, $b = 8$ y $c = -12$.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2(-1)} = 4$$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-1)(-12) - 8^2}{4(-1)} = \frac{48 - 64}{-4} = 4$$

El vértice está en (4, 4). La coordenada y del vértice podría haberse obtenido también sustituyendo x por 4 en la función, y determinando el valor de y correspondiente, que es 4.

d) Para determinar las intersecciones con el eje x, hacemos $y = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= -x^2 + 8x - 12 \\ \text{o} \quad x^2 - 8x + 12 &= 0 \\ (x - 6)(x - 2) &= 0 \\ x - 6 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 &= 0 \\ x = 6 \quad \text{o} \quad x &= 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, las intersecciones con el eje x se dan en (2,0) y (6,0). Estos valores también podrían determinarse por medio de la fórmula cuadrática (o completando el cuadrado).

e) Utiliza toda esta información para trazar la gráfica (**Figura 8.8**).

Resuelve ahora el ejercicio 15

Comprendiendo el álgebra

Recuerda del capítulo 3 que y es una función de x, y se escribe como y 5 $f(x)$. Por lo tanto, cuando graficamos la función en el ejemplo 1, podemos escribir

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 12,$$

o su equivalente

$$y = -2x^2 + 8x - 12.$$

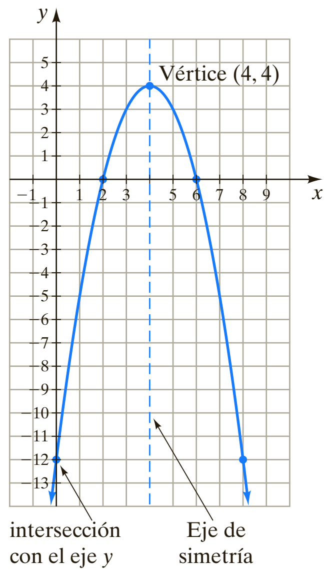


FIGURA 8.8

Observa que en el ejemplo 1 la ecuación es $y = -x^2 + 8x - 12$ y la intersección con el eje y es $(0, -12)$. En general, para cualquier ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$ la intersección con el eje y será $(0, c)$.

Si al determinar las intersecciones con el eje x mediante la fórmula cuadrática obtienes valores irracionales, utiliza tu calculadora para estimar estos valores, y luego traza los valores decimales. Por ejemplo, si obtuvieras $x = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$, evaluarías $\frac{2 + \sqrt{10}}{2}$ y $\frac{2 - \sqrt{10}}{2}$ en tu calculadora para obtener 2.58 y -0.58, respectivamente redondeados a la centésima más cercana. Las intersecciones con el eje x se darían en $(2.58, 0)$ y $(-0.58, 0)$.

EJEMPLO 2 Considera la función cuadrática $f(x) = 2x^2 + 6x + 5$.

a) Determina si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.
b) Determina la intersección con el eje y.
c) Determina el vértice.
d) Determina las intersecciones con el eje x, si las hay.
e) Traza la gráfica.

Solución

a) Como a es 2, es decir mayor que 0, la parábola abre hacia arriba.

b) Ya que $f(x)$ es lo mismo que y, para determinar la intersección con el eje y, hacemos $x = 0$ y despejamos $f(x)$ o y.

$$f(0) = 2(0)^2 + 6(0) + 5 = 5$$

La intersección con el eje y es en el punto $(0, 5)$.

c) Aquí $a = 2$, $b = 6$ y $c = 5$.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(2)} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(2)(5) - 6^2}{4(2)} = \frac{40 - 36}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

El vértice está en $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. La coordenada y del vértice también puede determinarse evaluando $f\left(-\frac{3}{2}\right)$.

d) Para determina las intersecciones con el eje x, hacemos $f(x) = 0$.

$$0 = 2x^2 + 6x + 5$$

Este trinomio no puede factorizarse. Para determinar si esta ecuación tiene alguna solución real, evaluamos el discriminante.

$$b^2 - 4ac = 6^2 - 4(2)(5) = 36 - 40 = -4$$

Como el discriminante es menor que 0, esta ecuación no tiene soluciones reales y la gráfica no intersecta el eje x.

e) La gráfica se muestra en la **Figura 8.9**.

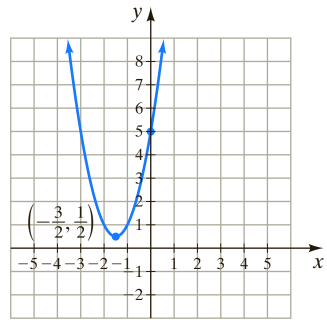


FIGURA 8.9

Resuelve ahora el ejercicio 39

4 Resolver problemas de máximos y mínimos

Una parábola que abre hacia arriba tiene un **valor mínimo** en su vértice, como se ilustra en la **Figura 8.10a**. Una parábola que abre hacia abajo tiene un **valor máximo** en su vértice, como se ilustra en la **Figura 8.10b**. Si tienes una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, el máximo o mínimo valor estará en $-\frac{b}{2a}$, y será $\frac{4ac - b^2}{4a}$. Existen muchos problemas de la vida real en los que se requiere determinar los valores máximo y mínimo.

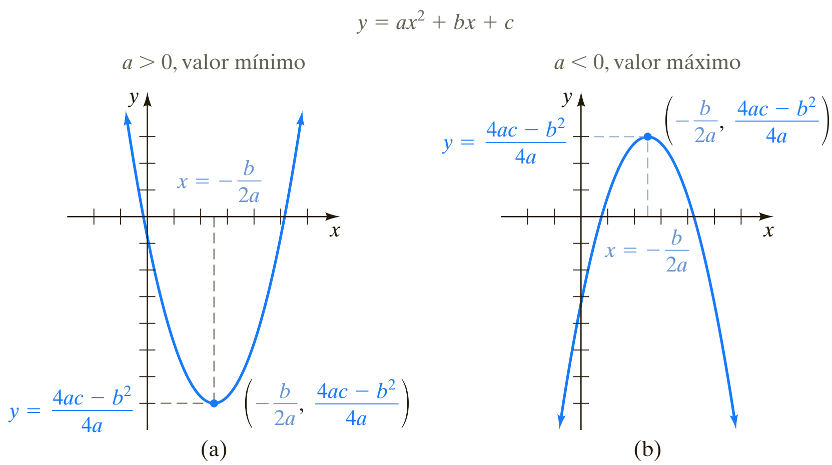
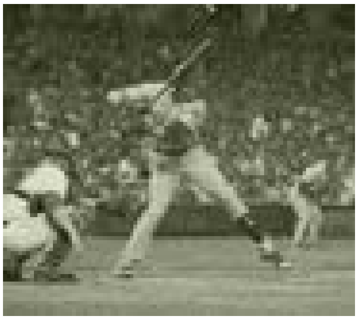


FIGURA 8.10



© Todd Taulman/Shutterstock

EJEMPLO 3 Béisbol Mark DeRosa le pega con su bate a una bola a 3 pies del suelo. La altura de la bola respecto del suelo, $f(t)$, en pies, en el instante t, en segundos, puede calcularse mediante la función

$$f(t) = -16t^2 + 52t + 3$$

a) Determina la altura máxima que alcanza la bola de béisbol.

b) Determina el tiempo que tarda la bola en alcanzar su altura máxima.

c) Determina el tiempo que tarda la bola en chocar contra el suelo.

Solución

a) **Entiende** La bola de béisbol seguirá la trayectoria de una parábola que abre hacia abajo ($a < 0$). La bola se elevará hasta una altura máxima para luego caer hacia el suelo debido a la gravedad. Para determinar la altura máxima que alcanza la bola, usaremos la fórmula $y = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

Traduce $a = -16, \quad b = 52, \quad c = 3$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Realiza los cálculos

$$= \frac{4(-16)(3) - (52)^2}{4(-16)}$$

$$= \frac{-192 - 2704}{-64}$$

$$= \frac{-2896}{-64}$$

$$= 45.25$$

Responde La bola de béisbol alcanza una altura máxima de 45.25 pies.

b) La bola de béisbol llega a su altura máxima en

$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{52}{2(-16)} = -\frac{52}{-32} = \frac{13}{8} \quad \text{o} \quad 1\frac{5}{8} \quad \text{o} \quad 1.625 \text{ segundos}$$

c) **Entiende y traduce** Cuando la bola de béisbol choca contra el suelo, su altura, y, respecto del suelo es 0. Por tanto, para determinar cuando golpea la bola el suelo, resolvemos la ecuación

$$-16t^2 + 52t + 3 = 0$$

Usaremos la fórmula cuadrática para resolverla.

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-52 \pm \sqrt{(52)^2 - 4(-16)(3)}}{2(-16)}$$

Realiza los cálculos

$$= \frac{-52 \pm \sqrt{2704 + 192}}{-32}$$

$$= \frac{-52 \pm \sqrt{2896}}{-32}$$

$$\approx \frac{-52 \pm 53.81}{-32}$$

$$t \approx \frac{-52 + 53.81}{-32} \quad \text{o} \quad t \approx \frac{-52 - 53.81}{-32}$$

$$\approx -0.06 \text{ segundo} \qquad \approx 3.31 \text{ segundos}$$

Responde El único valor aceptable es 3.31 segundos. La bola de béisbol choca contra el suelo en aproximadamente 3.31 segundos. Observa en el inciso **b)** que el tiempo que tarda la bola en alcanzar su altura máxima, 1.625 segundos, no es exactamente la mitad del tiempo total que está en el aire, 3.31 segundos. La razón es que fue golpeada a una altura de 3 pies y no al nivel del suelo.

Resuelve ahora el ejercicio 93

EJEMPLO 4 Área de un rectángulo Considera el rectángulo siguiente, cuya longitud es $x + 3$ y el ancho es $10 - x$.

a) Determina una ecuación para el área, $A(x)$.

b) Determina el valor de x que proporciona el área más grande (máxima).

c) Determina el área máxima.

Solución

a) El área se obtiene al multiplicar la longitud por el ancho. La función para el área es

$$\begin{aligned} A(x) &= (x+3)(10-x) \\ &= -x^2 + 7x + 30 \end{aligned}$$

b) **Entiende y traduce** La gráfica de la función es una parábola que abre hacia abajo. Así, el valor máximo se alcanza en el vértice. Por lo tanto, el área máxima se da en $x = -\dfrac{b}{2a}$, en donde $a = -1$ y $b = 7$.

Realiza los cálculos $$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2(-1)} = \frac{7}{2} = 3.5$$

Responde El área máxima se alcanza cuando x es 3.5 unidades.

c) Para determinar el área máxima, sustituye 3.5 por cada x en la ecuación que se obtuvo en el inciso **a)**.

$$\begin{aligned} A(x) &= -x^2 + 7x + 30 \\ A(3.5) &= -(3.5)^2 + 7(3.5) + 30 \\ &= -12.25 + 24.5 + 30 \\ &= 42.25 \end{aligned}$$

Observa que para este rectángulo la longitud es $x + 3 = 3.5 + 3 = 6.5$ unidades, y el ancho es $10 - x = 10 - 3.5 = 6.5$ unidades. En realidad, el rectángulo es un cuadrado, y su área es $(6.5)(6.5) = 42.25$ unidades cuadradas. Por consiguiente, el área máxima es 42.25 unidades cuadradas.

Resuelve ahora el ejercicio 75

En el ejemplo 4 **c)**, el área máxima pudo haberse determinado utilizando la fórmula $y = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$. Determina el área máxima ahora utilizando esta fórmula. Deberás obtener la misma respuesta, 42.25 unidades cuadradas.

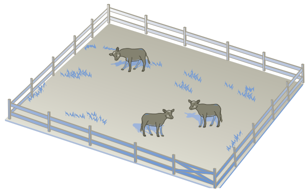


FIGURA 8.11

EJEMPLO 5 Corral rectangular Greg Fierro construye un corral rectangular para unos terneros recién nacidos (ver **Figura 8.11**). Si planea utilizar 160 metros de cerca, determina las dimensiones del corral con la mayor área.

Solución **Entiende** Tenemos el perímetro del corral, 160 metros. La fórmula para el perímetro de un rectángulo es $P = 2l + 2w$. Para este problema tenemos que $160 = 2l + 2w$. Nos piden maximizar el área, A, donde

$$A = l$$

Necesitamos expresar el área en términos de una sola variable, no de dos. Despejamos w de la fórmula del perímetro, $160 = 2l + 2w$, y posteriormente hacemos la sustitución.

Traduce

$$\begin{aligned} 160 &= 2l + 2w \\ 160 - 2l &= 2w \\ 80 - l &= w \end{aligned}$$

Realiza los cálculos Ahora sustituimos w por $80 - l$ en $A = lw$. Esto da

$$\begin{aligned} A &= lw \\ A &= l(80 - l) \\ A &= -l^2 + 80l \end{aligned}$$

En esta ecuación cuadrática, $a = -1$, $b = 80$ y $c = 0$. El área máxima se obtendrá cuando

$$l = -\frac{b}{2a} = -\frac{80}{2(-1)} = 40$$

Responde La longitud que dará el área máxima es 40 metros. El ancho, $w = 80 - l$ también será igual a 40 metros. Por lo tanto, un cuadrado con dimensiones de 40 por 40 metros dará el área máxima.

El área máxima también puede determinarse sustituyendo $l = 40$ en la fórmula $A = l(80 - l)$ o mediante $A = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$. En cualquier caso, obtenemos un área de 1600 metros cuadrados.

Resuelve ahora el ejercicio 91

5 Entender el desplazamiento de las parábolas

Nuestro siguiente método para graficar parábolas comienza con las gráficas de funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2$. Considera las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$ y $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ mostradas en la **Figura 8.12**. Observa que el *valor* de a determina el ancho de la parábola.

Ahora, considera las funciones $f(x) = -x^2$, $g(x) = -2x^2$ y $h(x) = -\frac{1}{2}x^2$ mostradas en la **Figura 8.13**. A pesar de que las parábolas abren hacia abajo, el valor de a sigue determinando el ancho de la parábola.

Comprendiendo el álgebra

En general, cuando graficamos una parábola que corresponde a una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2$, conforme $|a|$ aumenta, la parábola se hace más angosta. conforme $|a|$ disminuye, la parábola se hace más ancha.

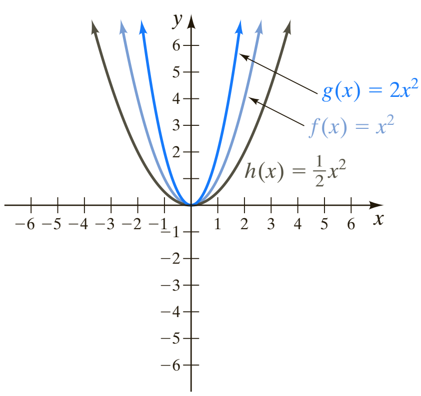


FIGURA 8.12

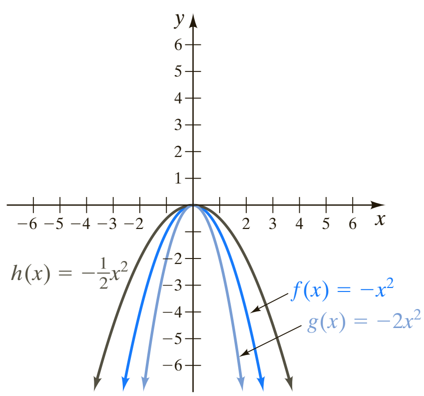


FIGURA 8.13

De las **Figuras 8.12** y **8.13** podemos ver que, *en general, conforme* $|a|$ *aumenta, la parábola se hace más angosta y conforme* $|a|$ *disminuye, la parábola se hace más ancha.*

Ahora **trasladaremos**, o desplazaremos, la posición de las gráficas de la forma $f(x) = ax^2$ para obtener las gráficas de otras funciones cuadráticas. Por ejemplo, considera las tres funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = (x - 2)^2$ y $h(x) = (x + 2)^2$ que se ilustran en la **Figura 8.14**. Observa que las tres gráficas son idénticas en la *forma* pero tienen posiciones diferentes.

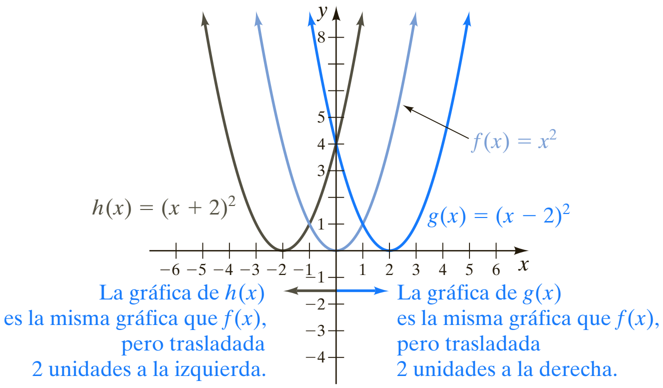


FIGURA 8.14

Observa también que la gráfica de $g(x)$ se traslada, o desplaza, 2 unidades a la derecha de la gráfica de $f(x)$. La gráfica de $h(x)$ se traslada 2 unidades a la izquierda de la gráfica de $f(x)$.

En general, la gráfica de $g(x) = a(x - h)^2$ *tendrá la misma forma que la gráfica de* $f(x) = ax^2$. *Si h es positiva, entonces la gráfica* $g(x)$ *se desplazará h unidades hacia la derecha de la gráfica de* $f(x)$. *Si h es negativa, entonces la gráfica de* $g(x)$ *se trasladará* $|h|$ *unidades hacia la izquierda de la gráfica de* $f(x)$.

A continuación, considera las gráficas de $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 3$, y $h(x) = x^2 - 3$ mostradas en la **Figura 8.15**. Observa nuevamente que las tres gráficas son idénticas en *forma* pero en posiciones diferentes.

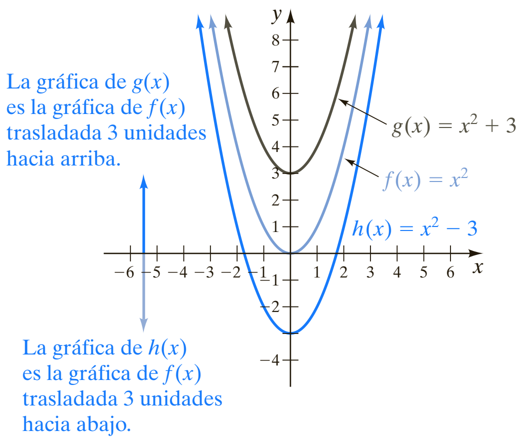


FIGURA 8.15

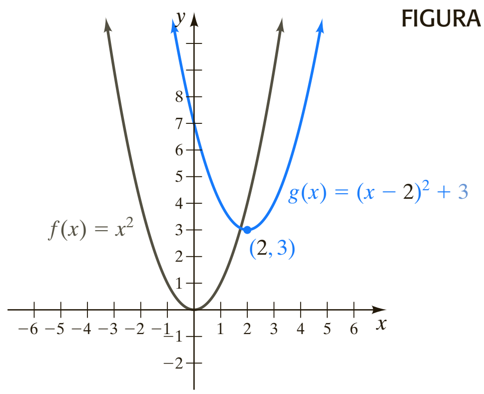


FIGURA 8.16

Observa que la gráfica de $g(x)$ se traslada, hacia arriba de la gráfica de $f(x)$. La gráfica de $h(x)$ se traslada 3 unidades hacia abajo de la gráfica de $f(x)$.

En general, la gráfica de $g(x) = ax^2 + k$ *tendrá la misma forma que la gráfica de* $f(x) = ax^2$. *Si k es positiva, entonces la gráfica de* $g(x)$ *será desplazada k unidades hacia arriba de la gráfica de* $f(x)$. *Si k es negativa, entonces la gráfica de* $g(x)$ *será desplazada* $|k|$ *unidades hacia abajo de la gráfica de* $f(x)$.

Ahora considera las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = (x - 2)^2 + 3$, mostradas en la **Figura 8.16**. Observa que la gráfica de $g(x)$ tiene idéntica forma que $f(x)$. La gráfica de $g(x)$ es la gráfica de $f(x)$ trasladada 2 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba. Esta gráfica y el análisis anterior conducen a los siguientes hechos importantes.

Desplazamientos de parábolas

Para cualquier función $f(x) = ax^2$, la gráfica de $g(x) = a(x - h)^2 + k$ tendrá la misma forma que la gráfica de $f(x)$. La gráfica de $g(x)$ será la gráfica de $f(x)$, pero desplazada como sigue:

- Si h es un número real positivo, la gráfica se desplazará h unidades hacia la derecha.
- Si h es un número real negativo, la gráfica se desplazará $|h|$ unidades hacia la izquierda.
- Si k es un número real positivo, la gráfica se desplazará k unidades hacia arriba.
- Si k es un número real negativo, la gráfica se desplazará $|k|$ unidades hacia abajo.

Examina la gráfica de $g(x) = (x - 2)^2 + 3$ en la **Figura 8.16** de la página 539. Observa que su eje de simetría está en $x = 2$ y su vértice está en $(2, 3)$.

Eje de simetría y vértice de una parábola

La gráfica de cualquier función de la forma

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

Será una parábola con eje de simetría en $x = h$ y vértice en (h, k).

Ejemplo	Eje de simetría	Vértice	La parábola abre hacia
$f(x) = 2(x - 5)^2 + 7$	$x = 5$	$(5, 7)$	arriba, $a > 0$
$f(x) = -\frac{1}{2}(x - 6)^2 - 3$	$x = 6$	$(6, -3)$	abajo, $a < 0$

Ahora considera $f(x) = 2(x + 5)^2 + 3$. Podemos reescribir esta función como $f(x) = 2[x - (-5)]^2 + 3$. Por lo tanto, h tiene un valor de -5 y k tiene un valor de 3. La gráfica de esta función tiene su eje de simetría en $x = -5$ y su vértice en $(-5, 3)$.

Ejemplo	Eje de simetría	Vértice	La parábola abre hacia
$f(x) = 3(x + 4)^2 - 2$	$x = -4$	$(-4, -2)$	arriba, $a > 0$
$f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{4}$	$x = -\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$	abajo, $a < 0$

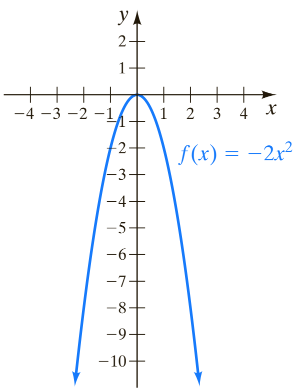


FIGURA 8.17

Ahora estamos preparados para graficar parábolas utilizando las traslaciones.

EJEMPLO 6 La gráfica de $f(x) = -2x^2$ se ilustra en la **Figura 8.17**. Utilizando esta gráfica como guía, grafica $g(x) = -2(x + 3)^2 - 4$.

Solución La función $g(x)$ puede escribirse como $g(x) = -2[x - (-3)]^2 - 4$. Por tanto, en la función, h tiene un valor de -3 y k tiene un valor de -4. La gráfica de $g(x)$ será, por lo tanto, la gráfica de $f(x)$ trasladada 3 unidades hacia la izquierda (ya que $h = -3$) y 4 unidades hacia abajo (ya que $k = -4$). Las gráficas $f(x)$ y $g(x)$ se muestran en la **Figura 8.18**.

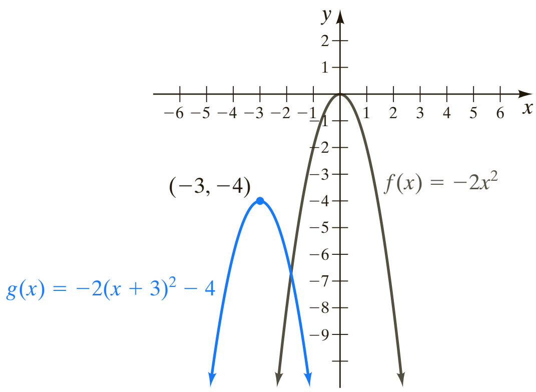


FIGURA 8.18

Resuelve ahora el ejercicio 49

En el objetivo 2, iniciamos con una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ y completamos el cuadrado para obtener

$$f(x) = a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Además, hemos dicho que el vértice de esta parábola es $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

Supongamos que en la función sustituimos h por $-\frac{b}{2a}$ y k por $\frac{4ac - b^2}{4a}$. Entonces obtendremos

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

que sabemos es una parábola con vértice en (h, k). Por lo tanto, ambas funciones $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $f(x) = a(x - h)^2 + k$ dan por resultado el mismo vértice y el mismo eje de simetría para cualquier función dada.

6 Escribir funciones en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$

Si deseamos graficar parábolas utilizando desplazamientos, necesitamos cambiar la forma de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ a $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Para hacerlo, *completamos el cuadrado* como se estudió en la sección 8.1.

EJEMPLO 7 Dada $f(x) = x^2 - 6x + 10$,

a) Escribe $f(x)$ en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

b) Grafica $f(x)$.

Solución

a) Utilizamos los términos x^2 y $-6x$ para obtener un trinomio cuadrado perfecto.

$$f(x) = (x^2 - 6x) + 10$$

Ahora tomamos la mitad del coeficiente del término en x y lo elevamos al cuadrado.

$$\left[\frac{1}{2}(-6)\right]^2 = 9$$

Luego sumamos este valor, 9, dentro del paréntesis. Como sumamos 9 dentro del paréntesis, sumamos -9 fuera del paréntesis. Sumamos 9 y -9 a una expresión es lo mismo que si sumáramos 0, es decir, no cambia el valor de la expresión.

$$f(x) = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 10$$

Al hacer esto, estamos creando un trinomio cuadrado perfecto dentro del paréntesis más una constante fuera de ellos. Expresamos el trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un binomio.

$$f(x) = (x - 3)^2 + 1$$

Ahora la función está en la forma que la necesitamos.

b) Como $a = 1$, es mayor que 0, la parábola abre hacia arriba. El eje de simetría de la parábola está en $x = 3$, y el vértice está en (3,1). La intersección con el eje y puede obtenerse sustituyendo $x = 0$ y determinando el valor de $f(x)$. Cuando $x = 0$, $f(x) = (-3)^2 + 1 = 10$. Por lo tanto, la intersección con el eje y se da en 10. Trazando el vértice, la intersección con el eje y y unos cuantos puntos más, obtenemos la gráfica de la **Figura 8.19**. La figura también muestra la gráfica de $y = x^2$ para compararlas.

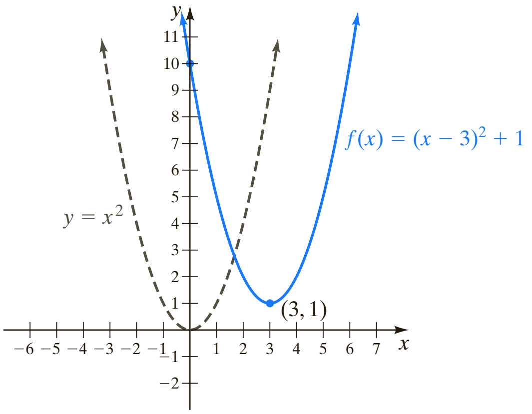


FIGURA 8.19

Resuelve ahora el ejercicio 59

EJEMPLO 8 Dada $f(x) = -2x^2 - 10x - 13$,

a) Escribe $f(x)$ en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$

b) Grafica $f(x)$.

Solución

a) Cuando el coeficiente principal no es 1, lo factorizamos de los términos que contienen la variable.

$$f(x) = -2(x^2 + 5x) - 13$$

Ahora completamos el cuadrado.

La mitad del coeficiente del término de primer grado al cuadrado

$$\left[\frac{1}{2}(5)\right]^2 = \frac{25}{4}$$

Si sumamos $\frac{25}{4}$ dentro de los paréntesis, en realidad sumamos $-2\left(\frac{25}{4}\right)$ o $-\frac{25}{2}$, ya que cada término dentro de los paréntesis se multiplica por -2. Por lo tanto, para compensar lo que hacemos dentro de los paréntesis, debemos sumar $\frac{25}{2}$ fuera de los paréntesis.

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) + \frac{25}{2} - 13 \\ &= -2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) Como $a = -2$, la parábola abre hacia abajo. El eje de simetría está en $x = -\frac{5}{2}$ y el vértice está en $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. La intersección con el eje y está en $f(0) = -13$.

Trazamos unos cuantos puntos y dibujamos la gráfica de la **Figura 8.20** en la página 453. Para comparar, en la figura también se muestra la gráfica de $y = -2x^2$.

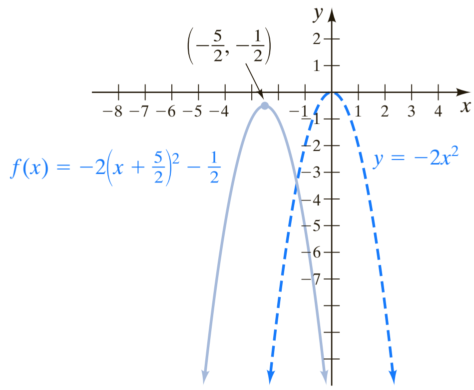


FIGURA 8.20

Observa que $f(x) = -2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$ no tiene intersecciones con el eje x. Por lo tanto, no hay valores reales de x para los que $f(x) = 0$.

Resuelve ahora el ejercicio 63

Una segunda manera de cambiar la ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$ a la forma $f(x) = a(x - h)^2$ es hacer $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Determina los valores para h y k, y luego sustituye los valores obtenidos en $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Por ejemplo, para la función $f(x) = -2x^2 - 10x - 13$ del ejemplo 8, $a = -2$, $b = -10$ y $c = -13$. Entonces

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{-10}{2(-2)} = -\frac{5}{2}$$

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-2)(-13) - (-10)^2}{4(-2)} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - h)^2 + k \\ &= -2\left[x - \left(-\frac{5}{2}\right)\right]^2 - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \\ &= -2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Esta respuesta coincide con la que se obtuvo en el ejemplo 8.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.5

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

abajo	eje de simetría	intersección con el eje y	$-\frac{b}{2a}$	abre hacia abajo
vértice	más angosta	derecha	izquierda	intersección con el eje x
$\frac{4ac - b^2}{4a}$	parábola	arriba	línea	

1. La gráfica de una función cuadrática es una ______________.

2. Cuando $a > 0$, la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola que abre hacia arriba, y el ______________ es el punto más bajo en la curva.

3. Cuando $a < 0$, la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola que ______________ y el vértice es el punto más alto en la curva.

4. Las gráficas de las funciones cuadráticas tendrán simetría alrededor de una línea vertical llamada ______________.

5. La ecuación $x =$ _______________ proporciona la ecuación del eje de simetría y la coordenada x del vértice.

6. Para obtener la _______________ de una función cuadrática (si existiese alguna), iguala a 0 y o $f(x)$ y resuelve para x.

7. Para obtener la _______________ de una función cuadrática, haz $x = 0$ y resuelve para y o $f(x)$.

8. En general, cuando graficamos una parábola que corresponde a una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2$, conforme $|a|$ aumenta, la parábola se hace _______________.

9. Si h es positiva, entonces la gráfica de $g(x) = a(x - h)^2$ tendrá la misma forma que la gráfica de $f(x) = ax^2$ pero estará desplazada h unidades a la _______________ de la gráfica de $f(x)$.

10. Si h es negativa, entonces la gráfica de $g(x) = a(x - h)^2$ tendrá la misma forma que la gráfica de $f(x) = ax^2$ pero estará desplazada $|h|$ unidades a la _______________ de la gráfica de $f(x)$.

11. Si k es positiva, entonces la gráfica de $g(x) = ax^2 + k$ tendrá la misma forma que la gráfica de $f(x) = ax^2$ pero estará desplazada k unidades hacia _______________ con respecto a la gráfica de $f(x)$.

12. Si k es negativa, entonces la gráfica de $g(x) = ax^2 + k$ tendrá la misma forma que la gráfica de $f(x) = ax^2$ pero estará desplazada $|k|$ unidades hacia _______________ con respecto a la gráfica de $f(x)$.

Practica tus habilidades

Determina: **a)** *si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo,* **b)** *la intersección con el eje* y, **c)** *el vértice,* **d)** *las intersecciones con el eje* x *(si las hay), y* **e)** *traza la gráfica.*

13. $f(x) = x^2 + 6x + 8$

14. $f(x) = x^2 - 6x + 5$

15. $f(x) = x^2 + 8x + 15$

16. $g(x) = x^2 + 2x - 3$

17. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

18. $h(x) = x^2 - 2x - 8$

19. $f(x) = -x^2 - 2x + 8$

20. $p(x) = -x^2 + 8x - 15$

21. $g(x) = -x^2 + 4x + 5$

22. $n(x) = -x^2 - 2x + 24$

23. $t(x) = -x^2 + 4x - 5$

24. $g(x) = x^2 + 6x + 13$

25. $f(x) = x^2 - 4x + 4$

26. $r(x) = -x^2 + 10x - 25$

27. $r(x) = x^2 + 2$

28. $f(x) = x^2 + 4x$

29. $l(x) = -x^2 + 5$

30. $g(x) = -x^2 + 6x$

31. $f(x) = -2x^2 + 4x - 8$

32. $g(x) = -2x^2 - 6x + 4$

33. $m(x) = 3x^2 + 4x + 3$

34. $p(x) = -2x^2 + 5x + 4$

35. $y = 3x^2 + 4x - 6$

36. $y = x^2 - 6x + 4$

37. $y = 2x^2 - x - 6$

38. $g(x) = -4x^2 + 6x - 9$

39. $f(x) = -x^2 + 3x - 5$

40. $h(x) = -2x^2 + 4x - 5$

Utilizando como guía las gráficas de la **Figura 8.12** *a la* **8.16**, *grafica cada función y marca el vértice.*

41. $f(x) = (x - 3)^2$ **42.** $f(x) = (x - 4)^2$ **43.** $f(x) = (x + 1)^2$ **44.** $f(x) = (x + 2)^2$

45. $f(x) = x^2 + 3$ **46.** $f(x) = x^2 + 5$ **47.** $f(x) = x^2 - 1$ **48.** $f(x) = x^2 - 4$

49. $f(x) = (x - 2)^2 + 3$ **50.** $f(x) = (x - 3)^2 - 4$ **51.** $f(x) = (x + 4)^2 + 4$ **52.** $h(x) = (x + 4)^2 - 1$

53. $g(x) = -(x + 3)^2 - 2$ **54.** $g(x) = (x - 1)^2 + 4$ **55.** $y = -2(x - 2)^2 + 2$ **56.** $y = -2(x - 3)^2 + 1$

57. $h(x) = -2(x + 1)^2 - 3$ **58.** $f(x) = -(x - 5)^2 + 2$

En los ejercicios 59-68 **a)** *expresa cada función en la forma* $f(x) = a(x - h)^2 + k$ y **b)** *dibuja la gráfica de cada función y marca el vértice.*

59. $f(x) = x^2 - 6x + 8$ **60.** $g(x) = x^2 + 6x + 2$

61. $g(x) = x^2 - x - 3$ **62.** $f(x) = x^2 - x + 1$

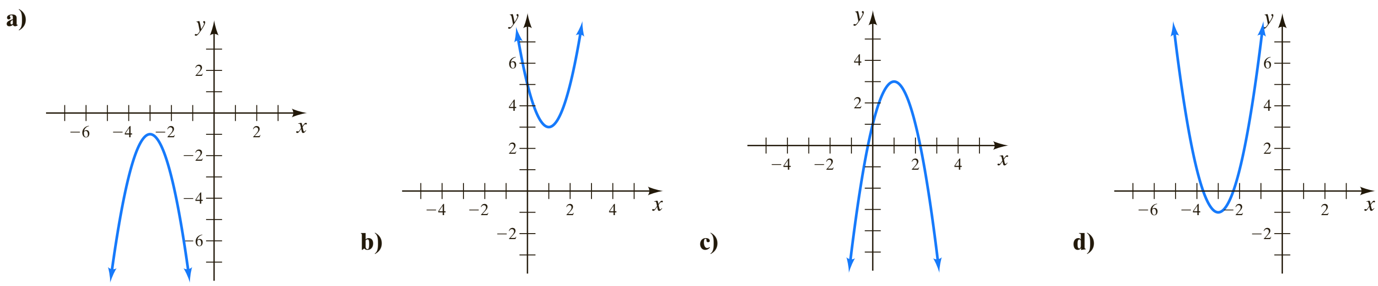
63. $f(x) = -x^2 - 4x - 6$ **64.** $h(x) = -x^2 + 6x + 1$

65. $g(x) = x^2 - 4x - 1$ **66.** $p(x) = x^2 - 2x - 6$

67. $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ **68.** $k(x) = 2x^2 + 7x - 4$

Resolución de problemas

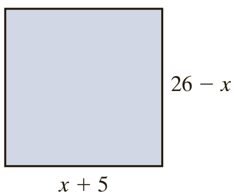
De las funciones de los ejercicios 69-72, identifica cuál corresponde a cada una de las gráficas marcadas de la **a)** *a la* **d)**.



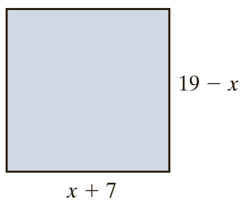
69. $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$ **70.** $f(x) = -2(x + 3)^2 - 1$ **71.** $f(x) = 2(x + 3)^2 - 1$ **72.** $f(x) = -2(x - 1)^2 + 3$

Área *Para cada rectángulo,* **a)** *determina el valor de x que da el área máxima, y* **b)** *determina el área máxima.*

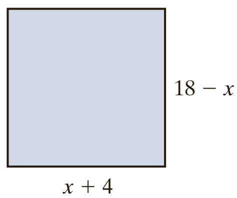
73.



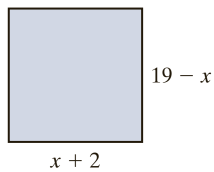
74.



75.



76.



77. Venta de pilas La función para calcular el ingreso por la venta de n pilas es $R(n) = n(8 - 0.02n) = -0.02n^2 + 8n$. Determina **a)** el número de pilas que deben venderse para obtener el ingreso máximo, y **b)** el ingreso máximo.

© Allen R. Angel

78. Venta de relojes La función para calcular el ingreso por la venta de n relojes es $R(n) = n(25 - 0.1n) = -0.1n^2 + 25n$. Determina **a)** el número de relojes que deben venderse para obtener el ingreso máximo, y **b)** el ingreso máximo.

79. Matrícula escolar El número de alumnos inscritos en la escuela del distrito de Naplewood puede aproximarse mediante la función

$$N(t) = -0.043t^2 + 1.82t + 46.0$$

donde t es el número de años desde 1989, y $1 \le t \le 22$. ¿En qué año se obtendrá el máximo de alumnos inscritos?

© Michael Chamberlin/Shutterstock

80. Escuelas libres de drogas En Estados Unidos, el porcentaje de estudiantes que afirman que en sus escuelas se consumen drogas puede calcularse mediante la función

$$f(a) = -2.32a^2 + 76.58a - 559.87$$

donde a es la edad del estudiante, y $12 < a < 20$. ¿A qué grupo de edad pertenecen los estudiantes que representan el porcentaje más alto entre los que afirman que en sus escuelas se consumen drogas?

81. ¿Cuál es la distancia entre los vértices de las gráficas de $f(x) = (x - 2)^2 + \frac{5}{2}$ y $g(x) = (x - 2)^2 - \frac{3}{2}$?

82. ¿Cuál es la distancia entre los vértices de las gráficas de $f(x) = 2(x - 4)^2 - 3$ y $g(x) = -3(x - 4)^2 + 2$?

83. ¿Cuál es la distancia entre los vértices de las gráficas de $f(x) = 2(x + 4)^2 - 3$ y $g(x) = -(x + 1)^2 - 3$?

84. ¿Cuál es la distancia entre los vértices de las gráficas de $f(x) = -\frac{1}{3}(x - 3)^2 - 2$ y $g(x) = 2(x + 5)^2 - 2$?

85. Escribe la función cuya gráfica tiene la forma de la gráfica de $f(x) = 2x^2$ y su vértice está en $(3, -2)$.

86. Escribe la función cuya gráfica tiene la forma de la gráfica de $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ y tiene el vértice en $\left(\frac{2}{3}, -5\right)$.

87. Escribe la función cuya gráfica tiene la forma de la gráfica de $f(x) = -4x^2$ y tiene su vértice en $\left(-\frac{3}{5}, -\sqrt{2}\right)$.

88. Escribe la función cuya gráfica tiene la forma de la gráfica de $f(x) = \frac{3}{5}x^2$ y tiene el vértice en $(-\sqrt{3}, \sqrt{5})$.

89. Venta de boletos El club de teatro de la preparatoria Johnson trata de establecer el precio de los boletos para una obra. Si el precio es muy bajo no recolectará suficiente dinero para cubrir los gastos, y si es muy alto no habrá suficiente gente que pague el precio del boleto. Ellos creen que su ingreso total por presentación, I, en cientos de dólares, puede calcularse mediante la fórmula

$$I = -x^2 + 24x - 44, 0 \le x \le 24$$

donde x es el costo de un boleto.

a) Dibuja una gráfica del ingreso contra el costo de un boleto.

b) Determina el costo mínimo de un boleto para que el club de teatro llegue al punto de equilibrio.

c) Determina el costo máximo que puede cobrar el club de teatro por cada boleto para llegar al punto de equilibrio.

d) ¿Cuánto deben cobrar para obtener el ingreso máximo?

e) Determina el ingreso máximo.

90. Lanzamiento de un objeto Un objeto se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 192 pies por segundo. La distancia a la que se encuentra el objeto con respecto del piso, d, después de t segundos, puede calcularse mediante la fórmula $d = -16t^2 + 192t$.

a) Determina la distancia que habrá entre el objeto y el piso después de 3 segundos.

b) Dibuja una gráfica de la distancia contra el tiempo.

c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el objeto?

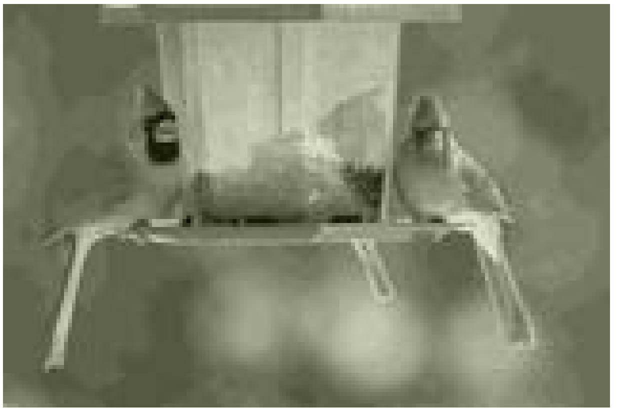
d) ¿En qué instante alcanzará su altura máxima?

e) ¿En qué instante el objeto chocará contra el piso?

91. Utilidades La compañía Fulton Bird House obtiene una utilidad semanal con la función $f(x) = -0.4x^2 + 80x - 200$ donde x es el número de bolsas de alimento para aves fabricadas y vendidas.

a) Determina el número de bolsas de alimento para aves que debe vender en una semana la compañía para obtener la utilidad máxima.

b) Determina la utilidad máxima.



© Chris Alcock/Shutterstock

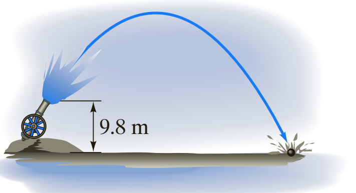
92. Ganancia La compañía A. B. Bronson obtiene una ganancia semanal con la función $f(x) = -1.2x^2 + 180x - 280$ donde x es el número de mecedoras fabricadas y vendidas.

a) Determina el número de mecedoras que la mueblería debe vender en una semana para obtener la ganancia máxima.

b) Determina la ganancia máxima.

93. Disparo de un cañón Si un cañón se dispara desde una altura de 9.8 metros por arriba del suelo, a cierto ángulo, la altura de la bala respecto del suelo, h, en metros, en el instante t, en segundos, se determina por medio de la función.

$$h(t) = -4.9t^2 + 24.5t + 9.8$$



a) Determina la altura máxima que alcanza la bala de cañón.

b) Determina el tiempo que tarda la bala para llegar a su altura máxima.

c) Determina el tiempo que tarda la bala en chocar contra el suelo.

94. Lanzamiento de un balón Ramon Loomis lanza un balón al aire con una velocidad inicial de 32 pies por segundo. La altura del balón en cualquier instante, t, está dada por la fórmula $h = 96t - 16t^2$. ¿En qué instante el balón llega a su altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima?

95. Diseño de interiores Jake Kishner está diseñando los planos de su casa. ¿Cuál es el área máxima posible de una habitación si su perímetro será de 80 pies?

96. Área máxima ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener un jardín rectangular para alcanzar su área máxima, si el perímetro será de 70 pies?


© Imageman/Shutterstock

97. Producto mínimo ¿Cuál es el producto mínimo de dos números que difieren en 8 unidades? ¿Cuáles son los números?

98. Producto mínimo ¿Cuál es el producto mínimo de dos números que difieren en 10 unidades? ¿Cuáles son los números?

99. Producto máximo ¿Cuál es el producto máximo de dos números cuya suma da como resultado 60? ¿Cuáles son los números?

100. Producto máximo ¿Cuál es el producto máximo de dos números cuya suma da como resultado 5? ¿Cuáles son los números?

La ganancia de una compañía, en dólares, es la diferencia entre sus ingresos y sus gastos. En los ejercicios 101 y 102 se dieron las funciones de gastos C(x), y de ingresos R(x) para una compañía particular. La x representa el número de artículos producidos y vendidos a los distribuidores. Determina **a)** *la ganancia máxima de la compañía y* **b)** *el número de artículos que deben producir y vender para obtener la ganancia máxima.*

101. $C(x) = 2000 + 40x$

$R(x) = 800x - x^2$

102. $C(x) = 5000 + 12x$

$R(x) = 2000x - x^2$

Ejercicios de conceptos y escritura

103. Considera la gráfica de $f(x) = ax^2$. ¿Cuál es la forma general de $f(x)$, si **a)** $a > 0$, **b)** $a < 0$?

104. Considera la gráfica de $f(x) = ax^2$. Explica cómo cambia la forma de $f(x)$ conforme $|a|$ aumenta y conforme $|a|$ disminuye.

105. ¿La función $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ tiene un valor máximo o mínimo? Explica.

106. ¿La función $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 7$ tiene un valor máximo o mínimo? Explica.

107. Considera $f(x) = x^2 - 8x + 12$ y $g(x) = -x^2 + 8x - 12$.

a) Sin graficar, ¿podrías describir cómo esperas que sean las gráficas de ambas funciones y compararlas?

b) ¿Las gráficas tendrán las mismas intersecciones con el eje x? Explica.

c) ¿Las gráficas tendrán el mismo vértice? Explica.

d) Grafica ambas funciones en los mismos ejes.

108. Si observas el coeficiente principal en una función cuadrática y determinas las coordenadas del vértice de su gráfica, explica: ¿cómo se puede determinar el número de intersecciones con el eje de las x que tiene la parábola?

Problemas de desafío

109. Béisbol En el ejemplo 3 de esta sección usamos la función $f(t) = -16t^2 + 52t + 3$ para determinar la altura máxima, f, alcanzada por una bola de béisbol golpeada por Mark DeRosa, que fue de 45.25 pies. La bola alcanzó esta altura a los 1.625 segundos después de que fue bateada.

Repasa el ejemplo 3 ahora.

a) Completando el cuadrado, escribe $f(t)$ en la forma $f(t) = a(t - h)^2 + k$.

b) Mediante la función que obtuviste en el inciso **a)**, determina la altura máxima que alcanza la bola de béisbol y el tiempo que tarda en llegar a ella a partir de que fue bateada.

c) ¿Las respuestas que obtuviste en el inciso **b)**, son las mismas que se obtuvieron en el ejemplo 3? Si no es así, explica por qué.

Actividad de grupo

Comenten y respondan en grupo el ejercicio 110.

110. a) Miembro 1 del grupo: escribe dos funciones cuadráticas $f(x)$ y $g(x)$ de modo que no se intersecten.

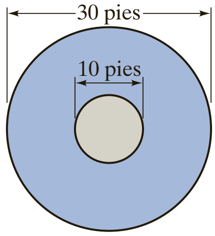
b) Miembro 2 del grupo: escribe dos funciones cuadráticas $f(x)$ y $g(x)$ de modo que ninguna de ellas tenga intersecciones con el eje x y los vértices de ambas encuentren en lados opuestos del eje x.

c) Miembro 3 del grupo: escribe dos funciones cuadráticas $f(x)$ y $g(x)$ de modo que ambas tengan el mismo vértice, pero una función que abra hacia arriba y la otra abra hacia abajo.

d) Revisen en grupo sus respuestas a los incisos **a)-c)** y decidan si son correctas. Si hay alguna incorrecta, corríjanla.

Ejercicios de repaso acumulados

[2.2] **111.** Encuentra el área sombreada en azul de la figura.



[3.7] **112.** Grafica $y \leq \frac{2}{3}x + 3$.

[4.2] **113.** Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x - y &= -5 \\ 2x + 2y - z &= 0 \\ x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

[4.5] **114.** Evalúa el determinante.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

[6.1] **115.** Divide $(x - 3) \div \dfrac{x^2 + 3x - 18}{x}$.

8.6 Desigualdades cuadráticas y de otros tipos con una variable

1 Resolver desigualdades cuadráticas.

2 Resolver otras desigualdades polinomiales.

3 Resolver desigualdades racionales.

En la sección 2.5 se analizaron las desigualdades lineales con una variable. Ahora estudiaremos las desigualdades cuadráticas con una variable.

Desigualdad cuadrática

Una **desigualdad cuadrática*** es una desigualdad que se puede escribir en alguna de las siguientes formas

$$ax^2 + bx + c < 0 \qquad ax^2 + bx + c > 0$$
$$ax^2 + bx + c \leq 0 \qquad ax^2 + bx + c \geq 0$$

donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$.

Ejemplos de desigualdades cuadráticas

$$x^2 + x - 12 > 0, \qquad 2x^2 - 9x - 5 \leq 0$$

Solución de una desigualdad cuadrática

La **solución de una desigualdad cuadrática** es el conjunto de todos los valores que hacen a la desigualdad una proposición verdadera.

Por ejemplo, si sustituimos x por 5 en $x^2 + x - 12 > 0$.

$$x^2 + x - 12 > 0$$
$$5^2 + 5 - 12 \overset{?}{>} 0$$
$$18 > 0 \quad \text{Verdadero}$$

La desigualdad es verdadera cuando x es 5, por lo que 5 es una solución de (o satisface) la desigualdad. Sin embargo, 5 no es la única solución, existen otros valores que son soluciones de la desigualdad.

* Una desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c \neq 0$ también se considera una desigualdad cuadrática, pero no se estudiará en este libro.

1 Resolver desigualdades cuadráticas

Comenzaremos nuestro estudio de las desigualdades cuadráticas por medio del estudio de las gráficas de las funciones cuadráticas. Por ejemplo, considera una vez más la desigualdad $x^2 + x - 12 > 0$. En la **Figura 8.21a** se muestra la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x - 12$. Observa que cuando $x < -4$ o $x > 3$, tenemos que f$(x) > 0$ (resaltado en azul claro en la **Figura 8.21b**). Por lo tanto, cuando $x < -4$ o $x > 3$, $x^2 + x - 12 > 0$.

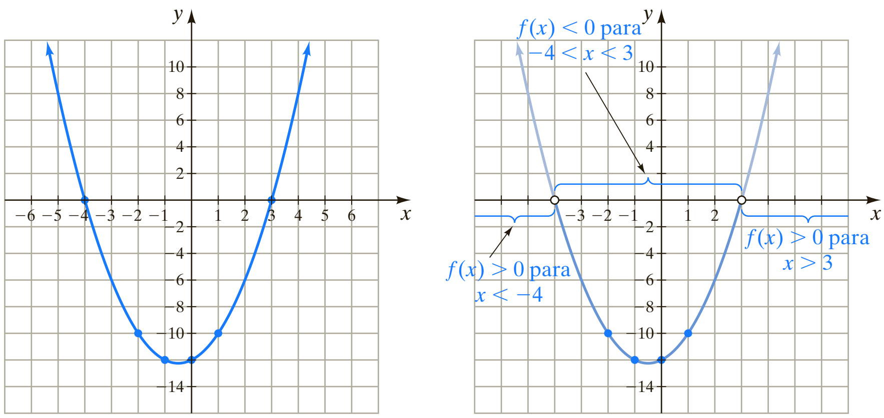


FIGURA 8.21 (a) (b)

Además observa que cuando $-4 < x < 3$, $f(x) < 0$ (mostrada en azul oscuro en la **Figura 8.21b**). Por lo tanto, cuando $-4 < x < 3$, $x^2 + x - 12 < 0$.

Aunque el método que acabamos de describir para resolver desigualdades cuadráticas funcionará para cualquier desigualdad cuadrática, para muchas desigualdades podrá ser inconveniente o tomará mucho tiempo graficar la función. En el siguiente ejemplo, describiremos un procedimiento más eficiente para resolver desigualdades cuadráticas.

EJEMPLO 1 Resuelve la desigualdad $x^2 + x - 12 > 0$. Da la solución **a)** en una recta numérica, **b)** en notación de intervalos, y **c)** en notación constructiva de conjuntos.

Solución Primero, haz la desigualdad igual a 0 y resuelve la ecuación.

$$x^2 + x - 12 = 0$$
$$(x + 4)(x - 3) = 0$$
$$x + 4 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$
$$x = -4 \qquad\qquad x = 3$$

Los valores $x = -4$ y $x = 3$ se denominan **valores frontera**, ya que se encuentran en la frontera de los intervalos del conjunto de números que forman parte de la solución a la desigualdad. Los valores frontera se utilizan para dividir una recta numérica en intervalos. Siempre que la desigualdad original tenga los símbolos $<$ o $>$, indicaremos los valores frontera en la recta numérica como círculos abiertos, ○. Esto indica que los valores frontera no son parte de la solución. Sin embargo, si en la desigualdad original tenemos los símbolos $\leq$ o $\geq$, los valores frontera se indicarán en la recta numérica como círculos cerrados, ●. Lo anterior significa que los valores frontera forman parte de la solución.

Comprendiendo el álgebra

Mientras resuelves desigualdades cuadráticas en la recta numérica, utiliza la siguiente notación para marcar tus valores frontera:

- Si el símbolo de desigualdad es $<$ o $>$, utiliza un círculo abierto, ○.
- Si el símbolo de desigualdad es $\leq$ o $\geq$, utiliza un círculo cerrado, ●.

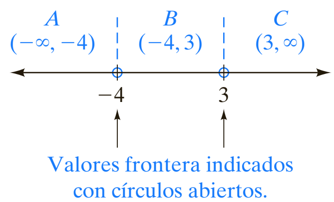


FIGURA 8.22

En la **Figura 8.22**, se identifican los intervalos A, B y C. A continuación seleccionamos un valor de prueba en *cada uno* de los intervalos. Luego sustituimos cada uno de estos números, uno a la vez, en la *desigualdad* $x^2 + x - 12 > 0$. Si el valor de la

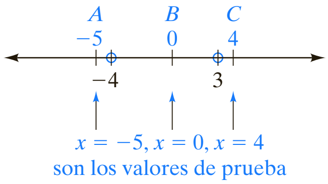


FIGURA 8.23

prueba satisface la desigualdad, significa que todos los demás valores de ese intervalo también lo harán. Si el valor de la prueba no satisface la desigualdad, ningún número del intervalo lo hará.

En este ejemplo usaremos los valores de prueba -5 en el intervalo A, 0 en el intervalo B y 4 en el intervalo C (ver **Figura 8.23**).

Intervalo A	Intervalo B	Intervalo C
$(-\infty, -4)$	$(-4, 3)$	$(3, \infty)$
Valor de prueba, -5	Valor de prueba, 0	Valor de prueba, 4
¿Es $x^2 + x - 12 > 0$?	¿Es $x^2 + x - 12 > 0$?	¿Es $x^2 + x - 12 > 0$?
$(-5)^2 - 5 - 12 \overset{?}{>} 0$	$0^2 + 0 - 12 \overset{?}{>} 0$	$4^2 + 4 - 12 \overset{?}{>} 0$
$8 > 0$	$-12 > 0$	$8 > 0$
Verdadero	Falso	Verdadero

Como los valores de prueba en los intervalos A y C satisfacen la desigualdad, la solución es todos los números reales en los intervalos A o C. Ya que el símbolo de desigualdad es $>$, los valores -4 y 3 no se incluyen en la solución, ya que hacen que la desigualdad sea igual a 0.

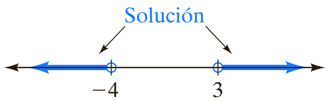


FIGURA 8.24

Las respuestas a los incisos **a)**, **b)** y **c)** son las siguientes.

a) La solución se ilustra en la recta numérica de la **Figura 8.24**.
b) La solución en notación de intervalos es $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$.
c) La solución en notación constructiva de conjuntos es $\{x | x < -4 \text{ o } x > 3\}$.

Observa que la solución, en cualquier forma, es consistente con la porción azul claro de la gráfica en la **Figura 8.21b**.

Resuelve ahora el ejercicio 15

Para resolver desigualdades cuadráticas y de otros tipos

1. Escribe la desigualdad como una ecuación y resuélvela. Las soluciones son los valores frontera.
2. Construye una recta numérica y marca cada valor frontera del paso 1 como sigue:
   - Si el símbolo de desigualdad es $<$ o $>$, utiliza un círculo abierto ○.
   - Si el símbolo de desigualdad es $\leq$ o $\geq$, utiliza un círculo cerrado ●.
3. Si resuelves una desigualdad racional, determina los valores que hacen que el denominador sea igual a 0. Estos valores también son valores frontera. Indica estos valores frontera en tu recta numérica con un círculo abierto ○.
4. Selecciona un valor de prueba en cada intervalo y determina si satisface la desigualdad.
5. La solución es el conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad.
6. Escribe la solución en la forma solicitada.

EJEMPLO 2 Resuelve la desigualdad $x^2 - 4x \geq -4$. Da la solución **a)** en una recta numérica, **b)** en notación de intervalos y **c)** en notación constructiva de conjuntos.

Solución Escribe la desigualdad como ecuación y resuélvela.

$$x^2 - 4x = -4$$
$$x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$(x - 2)(x - 2) = 0$$
$$x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$
$$x = 2 \qquad\qquad x = 2$$

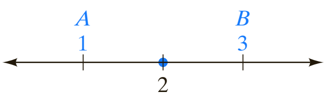


FIGURA 8.25

Como ambos factores son iguales, existe un solo valor frontera, 2, como se indica en la **Figura 8.25** con un círculo cerrado. Ambos valores de prueba, 1 y 3, hacen que la desigualdad sea verdadera.

Intervalo *A*	Intervalo *B*
$(-\infty, 2]$	$[2, \infty)$
Valor de prueba, 1	Valor de prueba, 3
$x^2 - 4x \geq -4$	$x^2 - 4x \geq -4$
$1^2 - 4(1) \overset{?}{\geq} -4$	$3^2 - 4(3) \overset{?}{\geq} -4$
$1 - 4 \overset{?}{\geq} -4$	$9 - 12 \overset{?}{\geq} -4$
$-3 \geq -4$ Verdadero	$-3 \geq -4$ Verdadero

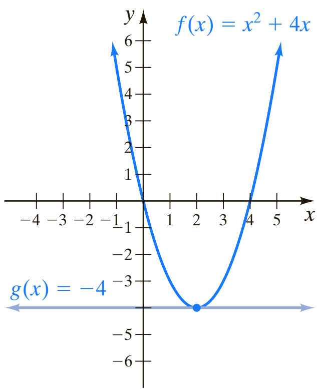
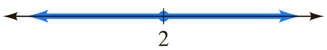


FIGURA 8.26

El conjunto solución incluye ambos intervalos y el valor frontera, 2. Por lo tanto, el conjunto solución es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$. Las respuestas a los incisos **a)**, **b)** y **c)** son:

a) 

b) $(-\infty, \infty)$ **c)** $\{x \mid -\infty < x < \infty\}$.

Resuelve ahora el ejercicio 11

Podemos comprobar la solución del ejemplo 2 mediante una gráfica. Sea $f(x) = x^2 - 4x$ y $g(x) = -4$. Para que $x^2 - 4x \geq -4$ sea verdadero, queremos que $f(x) \geq g(x)$. Las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ se ilustran en la **Figura 8.26**.

Observa que $f(x) = g(x)$ en $x = 2$ y $f(x) > g(x)$ para todos los demás valores de x. Por lo tanto, $f(x) \geq g(x)$ para todos los valores de x, y el conjunto solución es el conjunto de los números reales.

En el ejemplo 2 reescribimos la desigualdad $x^2 - 4x \geq -4$ como $x^2 - 4x + 4 \geq 0$ y luego como $(x - 2)^2 \geq 0$, podemos ver que la solución debe ser el conjunto de los números reales, ya que $(x - 2)^2$ debe ser mayor o igual a 0 para cualquier número real x.

EJEMPLO 3 Resuelve la desigualdad $x^2 - 2x - 4 \leq 0$. Expresa la solución en notación de intervalos.

Solución Primero necesitamos resolver la ecuación $x^2 - 2x - 4 = 0$. Debido a que esta ecuación no se puede factorizar, utilizamos la fórmula cuadrática para resolverla, sea $a = 1$, $b = -2$ y $c = -4$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

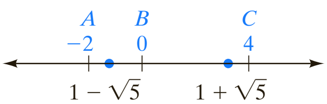


FIGURA 8.27

Los valores frontera son $1 - \sqrt{5}$ y $1 + \sqrt{5}$. El valor de $1 - \sqrt{5}$ es aproximadamente -1.24 y el valor de $1 + \sqrt{5}$ es alrededor de 3.24. Indicamos los valores frontera en la recta numérica con círculos cerrados y seleccionamos como los valores de prueba -2, 0 y 4 (ver **Figura 8.27**).

Intervalo *A*	Intervalo *B*	Intervalo *C*
$(-\infty, 1 - \sqrt{5}]$	$[1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}]$	$[1 + \sqrt{5}, \infty)$
Valor de prueba, -2	Valor de prueba, 0	Valor de prueba, 4
$x^2 - 2x - 4 \leq 0$	$x^2 - 2x - 4 \leq 0$	$x^2 - 2x - 4 \leq 0$
$(-2)^2 - 2(-2) - 4 \overset{?}{\leq} 0$	$0^2 - 2(0) - 4 \overset{?}{\leq} 0$	$4^2 - 2(4) - 4 \overset{?}{\leq} 0$
$4 + 4 - 4 \overset{?}{\leq} 0$	$0 - 0 - 4 \overset{?}{\leq} 0$	$16 - 8 - 4 \overset{?}{\leq} 0$
$4 \leq 0$	$-4 \leq 0$	$4 \leq 0$
Verdadero	Verdadero	Falso

FIGURA 8.28

Los valores frontera son parte de la solución debido a que el símbolo de la desigualdad es $\leq$ y los valores frontera hacen que la desigualdad sea igual a 0. Por lo tanto, la solución en notación de intervalos es $[1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}]$. La solución se ilustra en la recta numérica de la **Figura 8.28**.

Resuelve ahora el ejercicio 19

Consejo útil

Si $ax^2 + bx + c = 0$ con $a > 0$, tiene dos soluciones reales distintas, entonces:

Desigualdad de la forma	La solución es	Solución en la recta numérica
$ax^2 + bx + c \geq 0$	Intervalos en los extremos	
$ax^2 + bx + c \leq 0$	Intervalo central	

El ejemplo 1 es una desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c > 0$ y el ejemplo 3 es una desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c \leq 0$. Como el ejemplo 2 no tiene dos soluciones reales distintas, este consejo útil no aplica.

2 Resolver otras desigualdades polinomiales

El mismo procedimiento que utilizamos para resolver desigualdades cuadráticas puede utilizarse para resolver otras **desigualdades polinomiales**, como se ilustra en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 4 Resuelve la desigualdad polinomial $(3x-2)(x+3)(x+5) < 0$. Ilustra la solución en una recta numérica y escríbela en notación de intervalos y en notación constructiva de conjuntos.

Solución Utilizamos la propiedad del factor nulo para resolver la ecuación $(3x-2)(x+3)(x+5) = 0$.

$$3x - 2 = 0 \qquad \text{o} \qquad x + 3 = 0 \qquad \text{o} \qquad x + 5 = 0$$

$$x = \frac{2}{3} \qquad\qquad x = -3 \qquad\qquad x = -5$$

Las soluciones -5, -3 y $\frac{2}{3}$ se indican con círculos abiertos y dividen la recta numérica en cuatro intervalos (ver **Figura 8.29**). Los valores de prueba que usaremos son -6, -4, 0 y 1. En la tabla siguiente se muestran los resultados.

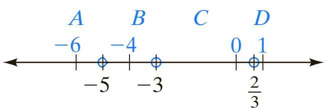


FIGURA 8.29

Intervalo	Valor de prueba	$(3x-2)(x+3)(x+5)$	< 0
$A: (-\infty, -5)$	-6	-60	Verdadero
$B: (-5, -3)$	-4	14	Falso
$C: \left(-3, \frac{2}{3}\right)$	0	-30	Verdadero
$D: \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$	1	24	Falso

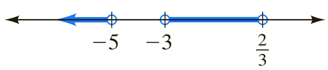


FIGURA 8.30

Como el símbolo de la desigualdad original es <, los valores frontera no son parte de la solución. La solución, los intervalos A y C, se ilustra en la recta numérica de la **Figura 8.30**. La solución en notación de intervalos es $(-\infty, -5) \cup \left(-3, \frac{2}{3}\right)$ y en notación constructiva de conjuntos es $\left\{x \,\middle|\, x < -5 \text{ o } -3 < x < \frac{2}{3}\right\}$.

Resuelve ahora el ejercicio 27

EJEMPLO 5 Dada $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 6x$, determina todos los valores de x para los que $f(x) \geq 0$. Ilustra la solución en una recta numérica y da la solución en notación de intervalos.

Solución Necesitamos resolver la desigualdad

$$3x^3 - 3x^2 - 6x \geq 0$$

Comenzamos resolviendo la ecuación $3x^3 - 3x^2 - 6x = 0$.

$$3x(x^2 - x - 2) = 0$$
$$3x(x - 2)(x + 1) = 0$$
$$3x = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$
$$x = 0 \qquad\qquad x = 2 \qquad\qquad x = -1$$

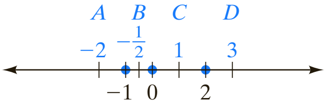


FIGURA 8.31

Las soluciones -1, 0 y 2 se indican con círculos cerrados y dividen la recta numérica en cuatro intervalos (ver **Figura 8.31**). Los valores de prueba que usaremos son -2, $-\frac{1}{2}$, 1 y 3.

Intervalo	Valor de prueba	$3x^3 - 3x^2 - 6x$	≥ 0
A: $(-\infty, -1]$	-2	-24	Falso
B: $[-1, 0]$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{15}{8}$	Verdadero
C: $[0, 2]$	1	-6	Falso
D: $[2, \infty)$	3	36	Verdadero

Como la desigualdad original es $\geq$, los valores frontera son parte de la solución. La solución, intervalos B y D, se ilustran en la recta numérica en la **Figura 8.32a**. La solución en notación de intervalos es $[-1, 0] \cup [2, \infty)$. La **Figura 8.32b** muestra la gráfica de $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 6x$. Observa que $f(x) \geq 0$ para $-1 \leq x \leq 0$ y para $x \geq 2$, lo cual coincide con nuestra solución.

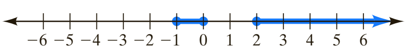


FIGURA 8.32A

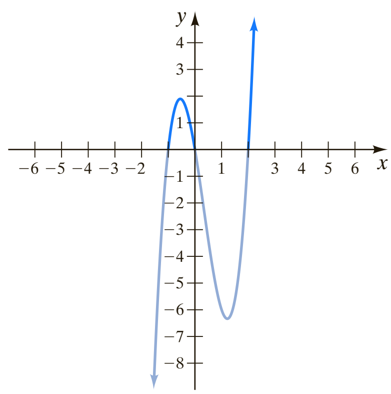


FIGURA 8.32B

Comprendiendo el álgebra

Considera la desigualdad $-3x^3 + 3x^2 + 6x \leq 0$. Por lo general, es más sencillo resolver una desigualdad polinomial con un coeficiente principal positivo. Es posible cambiar este coeficiente a un número positivo multiplicando ambos lados de la desigualdad por -1. Cuando hagas esto, recuerda que debemos invertir la dirección del símbolo de la desigualdad.

$$-3x^3 + 3x^2 + 6x \leq 0$$
$$-1(-3x^3 + 3x^2 + 6x) \geq -1(0)$$
$$3x^3 - 3x^2 - 6x \geq 0$$

Esta desigualdad se resolvió en el ejemplo 5.

Resuelve ahora el ejercicio 41

3 Resolver desigualdades racionales

En los ejemplos 6 y 7 resolveremos **desigualdades racionales**, que son aquellas desigualdades que tienen al menos una expresión racional.

EJEMPLO 6 Resuelve la desigualdad $\dfrac{x-1}{x+3} \geq 2$ y grafica la solución en una recta numérica.

Solución Cambia $\geq$ por $=$ y resuelve la ecuación resultante.

$$
\begin{aligned}
\frac{x-1}{x+3} &= 2 \\
\cancel{x+3} \cdot \frac{x-1}{\cancel{x+3}} &= 2(x+3) \qquad \text{Multiplica ambos lados por } x+3. \\
x-1 &= 2x+6 \\
-1 &= x+6 \\
-7 &= x
\end{aligned}
$$

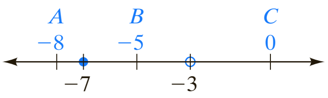


FIGURA 8.33

La solución -7 es un valor frontera y se indica con un círculo cerrado en la recta numérica (ver **Figura 8.33**).

Al resolver desigualdades racionales, también necesitamos determinar el valor o valores que hacen al denominador igual a 0. Para ello igualamos a 0 el denominador y resolvemos.

$$
\begin{aligned}
x+3 &= 0 \\
x &= -3
\end{aligned}
$$

Debido a que -3 no puede ser una solución, se indica con un círculo abierto en la recta numérica (ver **Figura 8.33**).

Utilizamos la solución de la ecuación, -7, y el valor que hace al denominador 0, -3, para determinar los intervalos como se muestra en la **Figura 8.33**. Como valores de prueba utilizaremos -8, -5 y 0.

Intervalo *A*	Intervalo *B*	Intervalo *C*
$(-\infty, -7]$	$[-7, -3)$	$(-3, \infty)$
Valor de prueba, -8	Valor de prueba, -5	Valor de prueba, 0
$\dfrac{x-1}{x+3} \geq 2$	$\dfrac{x-1}{x+3} \geq 2$	$\dfrac{x-1}{x+3} \geq 2$
$\dfrac{-8-1}{-8+3} \overset{?}{\geq} 2$	$\dfrac{-5-1}{-5+3} \overset{?}{\geq} 2$	$\dfrac{0-1}{0+3} \overset{?}{\geq} 2$
$\dfrac{9}{5} \geq 2$ Falso	$3 \geq 2$ Verdadero	$-\dfrac{1}{3} \geq 2$ Falso

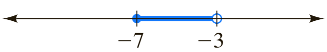


FIGURA 8.34

Ahora verificamos los valores frontera -7 y -3. Como -7 da por resultado la desigualdad $-2 \geq -2$, que es verdadera, -7 es una solución. Puesto que no está permitida la división entre 0, -3 no es una solución. La solución se ilustra en la recta numérica de la **Figura 8.34** y es $[-7, -3)$.

Resuelve ahora el ejercicio 81

En el ejemplo 6 resolvimos $\dfrac{x-1}{x+3} \geq 2$. Supongamos que graficamos $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$. En la **Figura 8.35** se muestran las gráficas de $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$ y de $y = 2$. Observa que $f(x) \geq 2$ cuando $-7 \leq x < -3$.

Comprendiendo el álgebra

Cuando resolvemos una desigualdad racional, cualquier valor que haga que el denominador sea igual a 0 es un valor frontera. Sin embargo, debido a que un valor que hace que el denominador sea igual a 0 nunca puede ser una solución, *siempre* indicaremos estos valores con un círculo abierto. Lo anterior significa que los valores frontera así encontrados no forman parte del conjunto solución.

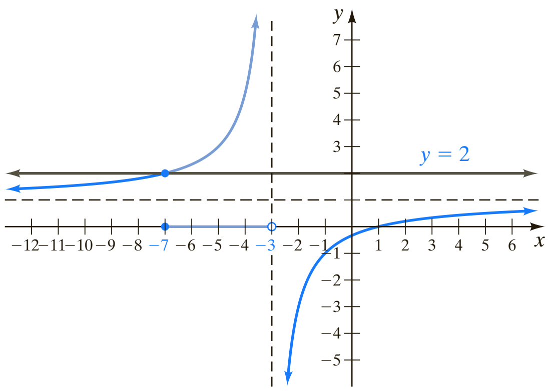


FIGURA 8.35

EJEMPLO 7 Resuelve la desigualdad $\dfrac{(x-3)(x+4)}{x+1} \geq 0$. Grafica la solución en una recta numérica y proporciona la solución en notación de intervalos.

Solución Las soluciones de la desigualdad $\dfrac{(x-3)(x+4)}{x+1} = 0$ son 3 y −4. Indicamos las soluciones en una recta numérica con círculos cerrados (ver **Figura 8.36**) debido a que el símbolo de la desigualdad es $\geq$. La desigualdad no está definida en −1, así que indicamos este valor en la recta numérica con un círculo abierto (ver **Figura 8.36**) ya que −1 no puede ser una solución de la desigualdad.

Por lo tanto utilizamos los valores −4, −1 y 3 para determinar los intervalos en la recta numérica (ver **Figura 8.36**). Al comprobar los valores de prueba −5, −2, 0 y 4, encontramos que los valores en los intervalos B y D, $-4 \leq x < -1$ y $x \geq 3$, satisfacen la desigualdad. Comprueba los valores de prueba para verificarlo. Los valores 3 y −4 igualan a 0 la desigualdad y, por tanto, son parte de la solución. La desigualdad no está definida en −1, así que −1 no es parte de la solución. La solución es $[-4, -1) \cup [3, \infty)$. La solución se ilustra en la recta numérica de la **Figura 8.37**.

Resuelve ahora el ejercicio 71

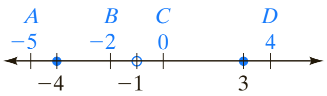


FIGURA 8.36

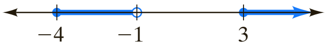


FIGURA 8.37

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.6

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

no incluido valores frontera cerrado incluido solución abierto vértices divisor

1. La _______________ de una desigualdad es el conjunto de todos los valores que la hacen verdadera.

2. Considere la desigualdad $x^2 - 3x - 4 \leq 0$. Las soluciones a la ecuación $x^2 - 3x - 4 = 0$ se denominan _______________.

3. Si resolvemos la desigualdad $(x-5)(x+3) \geq 0$, los valores frontera 5 y −3 son valores _______________ en el conjunto solución.

4. Si resolvemos la desigualdad $(x-2)(x+4) < 0$, los valores frontera 2 y −4 son valores _______________ en el conjunto solución.

5. Si resolvemos la desigualdad $\dfrac{1}{x-3} \leq 0$, el valor frontera 3 se indica en la recta numérica con un círculo _______________.

6. Si resolvemos la desigualdad $\dfrac{x+1}{x-3} \leq 0$, el valor frontera −1 se indica en la recta numérica con un círculo _______________.

Practica tus habilidades

Resuelve cada desigualdad cuadrática y grafica la solución en una recta numérica.

7. $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

8. $x^2 - 2x - 3 < 0$

9. $x^2 + 7x + 6 > 0$

10. $x^2 + 8x + 7 < 0$

11. $n^2 - 6n + 9 \geq 0$

12. $x^2 - 8x \geq 0$

13. $x^2 - 16 < 0$

14. $r^2 - 5r < 0$

15. $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$

16. $3n^2 - 7n \leq 6$

17. $5x^2 + 6x \leq 8$

18. $3x^2 + 5x - 3 \leq 0$

19. $2x^2 - 12x + 9 \leq 0$

20. $5x^2 \leq -20x - 4$

Resuelve cada desigualdad y da la solución en notación de intervalos.

21. $(x-1)(x+2)(x-3) \leq 0$

22. $(x-2)(x+2)(x+5) \leq 0$

23. $(a-3)(a+2)(a+4) < 0$

24. $(r-1)(r+2)(r+7) < 0$

25. $(2c + 5)(3c - 6)(c + 6) > 0$

26. $(a - 4)(a - 2)(a + 8) > 0$

27. $(3x + 5)(x - 3)(x + 1) > 0$

28. $(3c - 1)(c + 4)(3c + 6) \leq 0$

29. $(x + 2)(x + 2)(3x - 8) \geq 0$

30. $(x + 3)^2(4x - 7) \leq 0$

31. $x^3 - 6x^2 + 9x < 0$

32. $x^3 + 3x^2 - 40x > 0$

Determina todos los valores de x para los que f(x) satisface las condiciones que se indican en cada una de las siguientes funciones. Grafica la solución en una recta numérica.

33. $f(x) = x^2 - 2x, f(x) \geq 0$

34. $f(x) = x^2 - 7x, f(x) > 0$

35. $f(x) = x^2 + 4x, f(x) > 0$

36. $f(x) = x^2 + 8x, f(x) \leq 0$

37. $f(x) = x^2 - 14x + 48, f(x) < 0$

38. $f(x) = x^2 - 2x - 15, f(x) < 0$

39. $f(x) = 2x^2 + 9x - 1, f(x) \leq 5$

40. $f(x) = x^2 + 5x - 3, f(x) \leq 4$

41. $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 35x, f(x) \geq 0$

42. $f(x) = x^3 - 9x, f(x) \leq 0$

Resuelve cada desigualdad y da la solución en notación constructiva de conjuntos.

43. $\dfrac{x + 1}{x - 3} \leq 0$

44. $\dfrac{x + 2}{x - 4} \geq 0$

45. $\dfrac{x - 1}{x + 5} < 0$

46. $\dfrac{x - 1}{x + 5} \leq 0$

47. $\dfrac{x + 3}{x - 2} \geq 0$

48. $\dfrac{x - 4}{x + 6} > 0$

49. $\dfrac{a - 9}{a + 5} < 0$

50. $\dfrac{b + 7}{b + 1} \leq 0$

51. $\dfrac{c - 10}{c - 4} > 0$

52. $\dfrac{2d - 6}{d - 1} < 0$

53. $\dfrac{3y + 6}{y + 4} \leq 0$

54. $\dfrac{4z - 8}{z - 9} \geq 0$

55. $\dfrac{5a + 10}{3a - 1} \geq 0$

56. $\dfrac{x + 4}{x - 4} \leq 0$

57. $\dfrac{3x + 4}{2x - 1} < 0$

58. $\dfrac{k + 3}{k} \geq 0$

59. $\dfrac{3x + 8}{x - 2} \leq 0$

60. $\dfrac{4x - 2}{2x - 8} > 0$

Resuelve cada desigualdad y da la solución en notación de intervalos.

61. $\dfrac{(x - 2)(x - 4)}{x + 1} < 0$

62. $\dfrac{(x + 1)(x - 6)}{x + 3} \leq 0$

63. $\dfrac{(x - 2)(x + 3)}{x - 5} > 0$

64. $\dfrac{(x - 2)(x + 3)}{x - 5} \geq 0$

65. $\dfrac{(a - 1)(a - 7)}{a + 2} \geq 0$

66. $\dfrac{(b - 2)(b + 4)}{b} < 0$

67. $\dfrac{c}{(c - 3)(c + 8)} \leq 0$

68. $\dfrac{z - 5}{(z + 6)(z - 9)} \geq 0$

69. $\dfrac{x - 6}{(x + 4)(x - 1)} \leq 0$

70. $\dfrac{x + 9}{(x - 2)(x + 4)} > 0$

71. $\dfrac{(x - 3)(2x + 5)}{x - 4} \geq 0$

72. $\dfrac{r(r - 8)}{2r + 6} < 0$

Resuelve cada desigualdad y grafica la solución en una recta numérica.

73. $\dfrac{2}{x - 4} \geq 1$

74. $\dfrac{2}{x - 4} > 1$

75. $\dfrac{3}{x - 1} > -1$

76. $\dfrac{3}{x + 1} \geq -1$

77. $\dfrac{5}{x + 2} \leq 1$

78. $\dfrac{5}{x + 2} < 1$

79. $\dfrac{2p-5}{p-4} \le 1$

80. $\dfrac{2}{2a-1} > 2$

81. $\dfrac{4}{x+2} \ge 2$

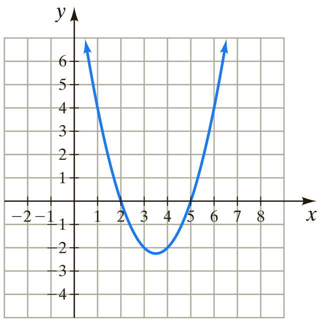
82. $\dfrac{x+6}{x+2} > 1$

83. $\dfrac{w}{3w-2} > -2$

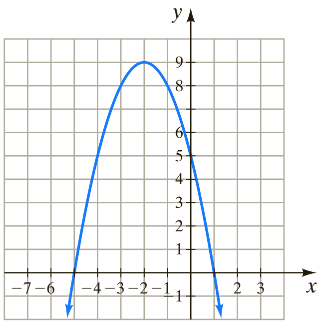
84. $\dfrac{x-1}{2x+6} \le -3$

Ejercicios de conceptos y escritura

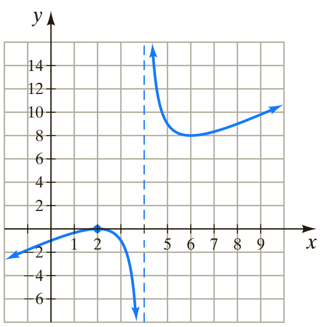
85. A continuación se da la gráfica de $f(x) = x^2 - 7x + 10$. Determina la solución de **a)** $f(x) > 0$ y **b)** $f(x) < 0$.



86. Dada la gráfica de $f(x) = -x^2 - 4x + 5$. Determina la solución de **a)** $f(x) \ge 0$ y **b)** $f(x) \le 0$.



87. A continuación se ilustra la gráfica de $y = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 4}$. Determina la solución de las desigualdades siguientes.

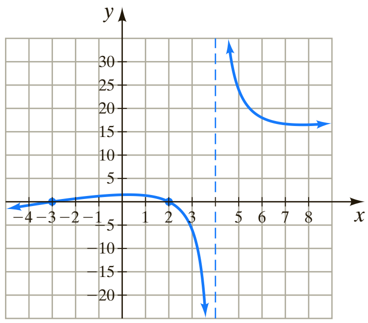


a) $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 4} > 0$

b) $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 4} < 0$

Explica cómo determinaste tu respuesta.

88. A continuación se ilustra la gráfica de $y = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 4}$. Determina la solución de las desigualdades siguientes.



a) $\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 4} \ge 0$

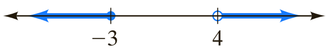
b) $\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 4} < 0$

Explica cómo determinaste tu respuesta.

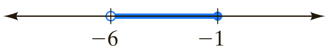
89. Escribe una desigualdad cuadrática cuya solución sea

90. Escribe una desigualdad cuadrática cuya solución sea

91. Escribe una desigualdad racional cuya solución sea



92. Escribe una desigualdad racional cuya solución sea



93. ¿Cuál es la solución de la desigualdad $(x + 3)^2(x - 1)^2 \ge 0$? Explica tu respuesta.

94. ¿Cuál es la solución de la desigualdad $x^2(x - 3)^2(x + 4)^2 < 0$? Explica tu respuesta.

95. ¿Cuál es la solución de la desigualdad $\dfrac{x^2}{(x+2)^2} \ge 0$? Explica tu respuesta.

96. ¿Cuál es la solución de la desigualdad $\dfrac{x^2}{(x-3)^2} > 0$? Explica tu respuesta.

97. Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde $a > 0$ y el discriminante es negativo, ¿cuál es la solución de $f(x) < 0$? Explica tu respuesta.

98. Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde $a < 0$ y el discriminante es negativo, ¿cuál es la solución de $f(x) > 2$? Explica tu respuesta.

Problemas de desafío

Resuelve cada desigualdad y grafica la solución en una recta numérica.

99. $(x + 1)(x - 3)(x + 5)(x + 8) \geq 0$

100. $\dfrac{(x - 4)(x + 2)}{x(x + 9)} \geq 0$

Escribe una desigualdad cuadrática con las soluciones siguientes; para cada problema existen diferentes respuestas posibles, explica cómo determinaste tus respuestas.

101. $(-\infty, 0) \cup (3, \infty)$

102. $\{2\}$

103. $\emptyset$

104. $\mathbb{R}$

En los ejercicios 105 y 106, resuelve cada desigualdad y da la solución en notación de intervalos. Para determinar la solución, utiliza las técnicas analizadas en la sección 8.5.

105. $x^4 - 10x^2 + 9 > 0$

106. $x^4 - 26x^2 + 25 \leq 0$

En los ejercicios 107 y 108, resuelve cada desigualdad factorizando por agrupación. Da la solución en notación de intervalos.

107. $x^3 + x^2 - 4x - 4 \geq 0$

108. $2x^3 + x^2 - 32x - 16 < 0$

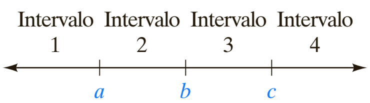
Actividad de grupo

Comenten y respondan en grupo los ejercicios 109 y 110.

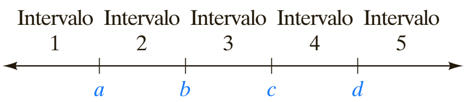
109. Consideren la siguiente recta numérica, donde a, b y c son números reales distintos.

a) ¿En qué intervalos los números reales satisfacen la desigualdad $(x - a)(x - b)(x - c) > 0$? Expliquen.

b) ¿En qué intervalos los números reales satisfacen la desigualdad $(x - a)(x - b)(x - c) < 0$? Expliquen.



110. Consideren la siguiente recta numérica, donde a, b, c y d son números reales distintos.



a) ¿En qué intervalos los números reales satisfacen la desigualdad $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) > 0$? Expliquen.

b) ¿En qué intervalos los números reales satisfacen la desigualdad $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) < 0$? Expliquen.

Ejercicios de repaso acumulados

[2.4] **111. Anticongelante** Paul Simmons desea obtener una solución de anticongelante con concentración de 50%. ¿Cuántos cuartos de galón de anticongelante con una concentración de 100% debe agregar a 10 cuartos de galón de anticongelante con una concentración de 20%?

© Allen R. Angel

[3.2] **112.** Si $h(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x + 9}$, determina $h(-3)$.

[5.1] **113.** Suma $(6r + 5s - t) + (-3r - 2s - 8t)$.

[6.3] **114.** Simplifica $\dfrac{1 + \dfrac{x}{x + 1}}{\dfrac{2x + 1}{x - 3}}$.

[7.7] **115.** Multiplica $(3 - 4i)(6 + 5i)$.

Resumen del capítulo 8

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 8.1	
Propiedad de la raíz cuadrada Si $x^2 = a$, donde a es un número real, entonces $x = \pm\sqrt{a}$.	Resuelve $x^2 - 36 = 0$. $x^2 - 36 = 0$ $x^2 = 36$ $x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$ Las soluciones son -6 y 6.
Un **trinomio cuadrado perfecto** es un trinomio que puede expresarse como el cuadrado de un binomio.	$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$
Para resolver una ecuación cuadrática completando el cuadrado **1.** Utiliza la propiedad de la multiplicación (o división) de la igualdad, a fin de hacer que el coeficiente principal sea 1. **2.** Reescribe la ecuación con el término constante, solo, en el lado derecho de la ecuación. **3.** Toma un medio del coeficiente numérico del término de primer grado, elévalo al cuadrado y suma esta cantidad a ambos lados de la ecuación. **4.** Factoriza el trinomio como el cuadrado de un binomio. **5.** Utiliza la propiedad de la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación. **6.** Despeja la variable.	Resuelve $x^2 + 4x - 12 = 0$ mediante el método de completar el cuadrado. $x^2 + 4x - 12 = 0$ $x^2 + 4x = 12$ $x^2 + 4x + 4 = 12 + 4$ $(x + 2)^2 = 16$ $x + 2 = \pm\sqrt{16}$ $x + 2 = \pm 4$ $x = -2 \pm 4$ $x = -2 - 4 = -6$ o $x = -2 + 4 = 2$ Las soluciones son -6 y 2.
Section 8.2	
La **forma general de una ecuación cuadrática** es $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.	$x^2 - 5x + 17 = 0$
Para resolver una ecuación cuadrática mediante la fórmula cuadrática **1.** Escribe la ecuación cuadrática en la forma general, $ax^2 + bx + c = 0$ y determina los valores numéricos para a, b y c. **2.** Sustituye los valores para a, b y c en la fórmula cuadrática y luego evalúa la fórmula para obtener la solución. Fórmula cuadrática $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Resuelve $x^2 - 2x - 15 = 0$ mediante la fórmula cuadrática. $a = 1, \quad b = -2, \quad c = -15$ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $= \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-15)}}{2(1)}$ $= \dfrac{2 \pm \sqrt{64}}{2}$ $= \dfrac{2 \pm 8}{2}$ $= \dfrac{2 + 8}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$ o $x = \dfrac{2 - 8}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3$ Las soluciones son 5 y -3.
Soluciones de una ecuación cuadrática Para una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, el **discriminante** es $b^2 - 4ac$. Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación cuadrática tiene dos soluciones numéricas reales distintas. Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación cuadrática tiene una única solución numérica real. Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación cuadrática no tiene soluciones numéricas reales.	Determina el número de soluciones de $3x^2 - x + 7 = 0$. $a = 3, b = -1, c = 7$ $b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(3)(7)$ $= 1 - 84$ $= -83$ Como el discriminante es negativo, la ecuación no tiene soluciones reales.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES | **EJEMPLOS**

Sección 8.4

Una ecuación que puede escribirse en la forma $au^2 + bu + c = 0$, con $a \neq 0$ donde u es una expresión algebraica, se denomina ecuación de **forma cuadrática**.

Para resolver ecuaciones en forma cuadrática

1. Haz una sustitución que tenga por resultado una ecuación de la forma $au^2 + bu + c = 0$, con $a \neq 0$, donde u es una función de la variable original.
2. Resuelve la ecuación $au^2 + bu + c = 0$ para u.
3. Reemplaza u con la función de la variable original del paso 1 y resuelve la ecuación resultante para la variable original.
4. Comprueba si hay soluciones extrañas sustituyendo las soluciones aparentes en la ecuación original.

Resuelve $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$.

Sea $u = x^2$.

Entonces
$$u^2 - 17u + 16 = 0$$
$$(u - 16)(u - 1) = 0$$
$$u - 16 = 0 \quad \text{o} \quad u - 1 = 0$$
$$u = 16 \qquad u = 1$$
$$x^2 = 16 \qquad x^2 = 1$$
$$x = \pm 4 \qquad x = \pm 1$$

La comprobación mostrará que las soluciones son 4, -4, 1 y -1.

Sección 8.5

Funciones cuadráticas

Las funciones de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ se denominan **funciones cuadráticas**, y tiene gráficas que son parábolas.

a) La parábola abre hacia arriba cuando $a > 0$ y hacia abajo cuando $a < 0$.

b) El eje de simetría es la recta $x = -\dfrac{b}{2a}$.

c) El vértice es el punto $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$ o $\left[-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right]$.

d) La intersección con el eje y es el punto $(0, c)$.

e) Para obtener la(s) intersección(es) con el eje x (si existiese alguna), resuelve la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ para x.

La gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2 - 2x - 3$ es una parábola.

a) Abre hacia arriba ya que $a > 0$.

b) El eje de simetría es $x = -\dfrac{-2}{2(1)} = 1$.

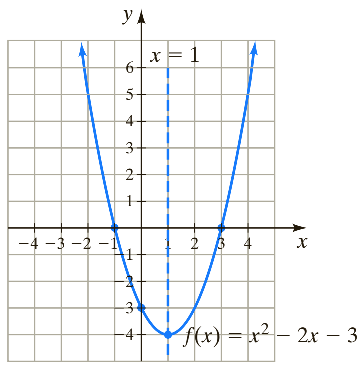
c) El vértice es $(1, -4)$.

d) La intersección con el eje y es $(0, -3)$.

e)
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$(x - 3)(x + 1) = 0$$
$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$
$$x = 3 \qquad x = -1$$

La intersección con el eje x son los puntos $(3, 0)$ y $(-1, 0)$.

La gráfica de $f(x) = x^2 - 2x - 3$ se muestra a continuación.



Sección 8.6

Una **desigualdad cuadrática** es una desigualdad que puede expresarse de las siguientes formas:

$$ax^2 + bx + c < 0 \qquad ax^2 + bx + c > 0$$
$$ax^2 + bx + c \leq 0 \qquad ax^2 + bx + c \geq 0$$

en donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

La **solución de una desigualdad cuadrática** es el conjunto de todos los valores que hacen verdadera la desigualdad.

$$x^2 - 5x + 7 > 0$$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 8.6 (cont.)

Para resolver desigualdades cuadráticas, polinomiales y racionales

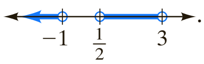
1. Escribe la desigualdad como una ecuación y resuelve la ecuación. Las soluciones serán los valores frontera.
2. Traza una recta numérica y marca cada valor frontera obtenido en el paso 1 como se indica a continuación:
   - Si el símbolo de desigualdad es $<$ o $>$, utiliza un círculo abierto, ○.
   - Si el símbolo de desigualdad es $\le$ o $\ge$, utiliza un círculo cerrado, ●.
3. Si se resuelve una desigualdad racional, determina los valores que hacen el denominador 0. Estos valores también son valores frontera. Indica estos valores frontera en tu recta numérica con un círculo abierto, ○.
4. Selecciona un valor de prueba en cada intervalo y determina si satisface la desigualdad.
5. La solución es el conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad.
6. Escribe la solución en la forma que se te solicite.

Resuelve $(2x - 1)(x - 3)(x + 1) < 0$.

$$(2x - 1)(x - 3)(x + 1) < 0$$
$$(2x - 1)(x - 3)(x + 1) = 0$$
$$2x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$
$$x = \frac{1}{2} \qquad\qquad x = 3 \qquad\qquad x = -1$$

Los intervalos y los valores de prueba seleccionados se muestran a continuación.

Intervalo	Valor de prueba	$(2x-1)(x-3)(x+1) < 0$	
$(-\infty, -1)$	-2	-25	Verdadero
$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$	0	3	Falso
$\left(\frac{1}{2}, 3\right)$	1	-4	Verdadero
$(3, \infty)$	5	108	Falso

La solución en una recta numérica: .

La solución en notación de intervalo: $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, 3\right)$.

La solución en notación constructiva de conjuntos:

$$\left\{x \,\middle|\, x < -1 \quad \text{o} \quad \frac{1}{2} < x < 3\right\}$$

Ejercicios de repaso del capítulo 8

[8.1] *Utiliza la propiedad de la raíz cuadrada para resolver cada ecuación.*

1. $(x - 5)^2 = 16$ **2.** $(2x + 1)^2 = 60$ **3.** $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ **4.** $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 = 4$

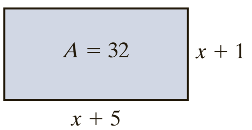
Completa el cuadrado para resolver cada ecuación.

5. $x^2 - 8x + 12 = 0$ **6.** $x^2 + 4x - 32 = 0$ **7.** $a^2 + 2a - 9 = 0$

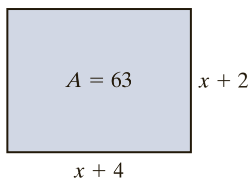
8. $z^2 + 6z = 12$ **9.** $x^2 - 2x + 10 = 0$ **10.** $2r^2 - 8r = -64$

Área *En los ejercicios 11 y 12 se indica el área, A, de cada rectángulo.* **a)** *Escribe una ecuación para determinar el área.* **b)** *Despeja x en la ecuación.*

11.



12.



13. Enteros consecutivos El producto de dos enteros positivos consecutivos es 56. Determina los dos enteros.

14. Sala de estar Nedal Williams se acaba de mudar a una casa nueva, cuya sala es una habitación cuadrada cuya diagonal tiene una longitud 7 pies mayor que la longitud de uno de los lados. Determina las dimensiones de la habitación.

[8.2] *Determina si cada una de las siguientes ecuaciones tiene dos soluciones reales distintas, una única solución o no tiene soluciones reales.*

15. $3x^2 - 7x + 1 = 0$ **16.** $3x^2 + 2x = -6$ **17.** $r^2 + 16r = -64$

18. $5x^2 - x + 2 = 0$ **19.** $a^2 - 14a = -49$ **20.** $\frac{1}{2}x^2 - 3x = 8$

Resuelve cada ecuación por medio de la fórmula cuadrática.

21. $6x^2 - 5x - 50 = 0$ **22.** $x^2 - 11x = -18$ **23.** $r^2 = 3r + 40$

24. $7x^2 = 9x$ **25.** $6a^2 + a - 15 = 0$ **26.** $4x^2 + 11x = 3$

27. $x^2 + 8x + 5 = 0$ **28.** $b^2 + 4b = 8$ **29.** $2x^2 + 4x - 3 = 0$

30. $3y^2 - 6y = 8$ **31.** $x^2 - x + 13 = 0$ **32.** $x^2 - 2x + 11 = 0$

33. $2x^2 - \frac{5}{3}x = \frac{25}{3}$ **34.** $4x^2 + 5x - \frac{3}{2} = 0$

Determina todos los valores reales de la variable para los que cada una de las siguientes funciones tiene el valor que se indica.

35. $f(x) = x^2 - 4x - 35, f(x) = 25$ **36.** $g(x) = 6x^2 + 5x, g(x) = 6$

37. $h(r) = 5r^2 - 7r - 10, h(r) = -8$ **38.** $f(x) = -2x^2 + 6x + 7, f(x) = -2$

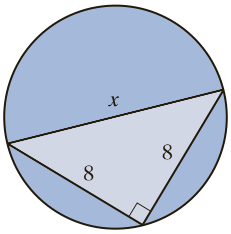
Determina una ecuación que tenga las soluciones dadas.

39. $3, -1$ **40.** $\frac{2}{3}, -2$ **41.** $-\sqrt{11}, \sqrt{11}$ **42.** $3 - 2i, 3 + 2i$

[8.1-8.3]

43. Jardín rectangular Sophia Yang está diseñando un jardín rectangular. Si el área debe medir 96 pies cuadrados y el largo debe ser 4 pies mayor que el ancho, determina las dimensiones del jardín.

44. Triángulo y círculo Determina la longitud del lado x en la figura siguiente.



45. Cuenta de ahorros Samuel Rivera invirtió \$1000 en una cuenta de ahorros que paga el interés compuesto una vez al año. Si al cabo de 2 años el saldo de la cuenta es \$1081.60, determina la tasa de interés anual.

46. Números El mayor de dos números positivos es 4 unidades mayor que el menor. Determina los dos números si su producto es 77.

47. Rectángulo La longitud de un rectángulo es 4 pulgadas menor que el doble de su ancho. Determina las dimensiones si su área mide 96 pulgadas cuadradas.

48. Cultivo de trigo El valor, V, en dólares por acre de un plantío de trigo d días después de que se siembran las semillas está dado por la fórmula $V = 12d - 0.05d^2$, $20 < d < 80$. Determina el valor de un acre de trigo después de 60 días de que se sembraron las semillas.

49. Crecimiento de secuoyas El crecimiento, $f(x)$, en pulgadas por año, de un árbol de secuoya menor de 30 años está dado en función de $f(x) = -0.02x^2 + x + 1$, en donde x representa el número de pulgadas de precipitación pluvial por año.

Fuente: www.humboldtredwoods.org

a) Determina el crecimiento por año de un árbol de secuoya en un año donde hubo una precipitación de 12 pulgadas de lluvia.

b) Si el crecimiento de un árbol de secuoyas en un año es de 10 pulgadas, encuentra el número de pulgadas de lluvia que se tuvo en ese año (redondea tu respuesta a decimales).

50. Objeto en caída La distancia del suelo, d, en pies, a la que un objeto está t segundos a partir de que se dejó caer desde un aeroplano, está dada por la fórmula $d = -16t^2 + 784$.

a) Determina la distancia a la que el objeto está del suelo, 2 segundos después de que se dejó caer.

b) ¿En qué instante el objeto chocará con el suelo?

51. Fuga de aceite Un tractor tiene una fuga de aceite. La cantidad de aceite, $L(t)$ en mililitros por hora que pierde está una función de la temperatura de operación que alcanza el tractor, t, en grados Celsius. La función es

$$L(t) = 0.0004t^2 + 0.16t + 20{,}100\ °\text{C} \leq t \leq 160\ °\text{C}$$

a) ¿Cuántos mililitros de aceite perderá el tractor en 1 hora si su temperatura de operación es de 100 °C?

b) Si el aceite está saliendo a 53 mililitros por hora, ¿cuál es la temperatura de operación del tractor?

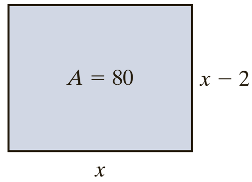
© Ilja Masik/Shutterstock

52. Máquinas moldeadoras Dos máquinas moldeadoras pueden completar un pedido en 12 horas. Si trabaja sola, la máquina más grande puede terminar el pedido en 1 hora menos que el tiempo que tardaría una máquina más pequeña trabajando sola. Si cada máquina trabaja sola, ¿cuánto tiempo tardaría cada una en terminar el pedido?

53. Tiempo recorrido Steve Forrester manejó 25 millas a velocidad constante y luego aumentó su velocidad en 15 millas por hora durante las siguientes 65 millas. Si el tiempo del recorrido de 90 millas fue de 1.5 horas, determina la velocidad a la que Steve manejó durante las primeras 25 millas.

54. Paseo en canoa Joan Banker viajó en canoa río abajo, 3 millas a favor de la corriente, luego dio la vuelta y remó río arriba, en contra de la corriente, hasta llegar al punto en donde inició su recorrido. Si el tiempo total que empleó en el trayecto fue de 4 horas y la corriente del río tenía una velocidad de 0.4 millas por hora, ¿a qué velocidad rema Joan en aguas tranquilas?

55. Área El área de un rectángulo mide 80 unidades cuadradas. Si la longitud es de x unidades y el ancho es de $x - 2$ unidades, determina la longitud y el ancho. Redondea tu respuesta a la décima más cercana.



56. Venta de mesas Una mueblería vende n mesas, donde $n \leq 40$, a un precio de $(60 - 0.3n)$ dólares cada una. ¿Cuántas mesas debe vender para tener un ingreso de $1080?

En los ejercicios 57-60, despeja la variable que se indica en cada ecuación.

57. Despeja a en $a^2 + b^2 = c^2$, (teorema de Pitágoras)

58. Despeja t en $h = -4.9t^2 + c$, (altura de un objeto)

59. Despeja v_y en $v_x{}^2 + v_y{}^2 = v^2$, (vectores)

60. Despeja v_2 en $a = \dfrac{v_2^2 - v_1^2}{2d}$.

[8.4] *Resuelve cada ecuación.*

61. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

62. $x^4 - 21x^2 + 80 = 0$

63. $a^4 = 5a^2 + 24$

64. $3y^{-2} + 16y^{-1} = 12$

65. $3r + 11\sqrt{r} - 4 = 0$

66. $2p^{2/3} - 7p^{1/3} + 6 = 0$

67. $6(x - 2)^{-2} = -13(x - 2)^{-1} + 8$

68. $10(r + 1) = \dfrac{12}{r + 1} - 7$

Determina todas las intersecciones con el eje x de cada función dada.

69. $f(x) = x^4 - 82x^2 + 81$

70. $f(x) = 30x + 13\sqrt{x} - 10$

71. $f(x) = x - 6\sqrt{x} + 12$

72. $f(x) = (x^2 - 6x)^2 - 5(x^2 - 6x) - 24$

[8.5] **a)** *Determina si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.* **b)** *Determina la intersección con el eje y.* **c)** *Determina el vértice.* **d)** *Determina las intersecciones con el eje x (si las hay).* **e)** *Traza la gráfica.*

73. $f(x) = x^2 + 5x$

74. $f(x) = x^2 - 2x - 8$

75. $g(x) = -x^2 - 2$

76. $g(x) = -2x^2 - x + 15$

77. Venta de boletos La compañía teatral Hamilton considera que el ingreso total, I, en cientos de dólares, que obtendrá por una puesta en escena, puede calcularse con la fórmula $I = -x^2 + 22x - 45$, $2 \leq x \leq 20$, donde x es el costo de un boleto.

© Maureen Plainfield/Shutterstock

a) ¿Cuánto deben cobrar para obtener el ingreso máximo?

b) ¿Cuál es el ingreso máximo?

78. Lanzamiento de una pelota Josh Vincent lanza una pelota hacia arriba desde lo alto de un edificio de 75 pies. La altura, $s(t)$, de la pelota en cualquier instante t, puede determinarse mediante la función $s(t) = -16t^2 + 80t + 75$.

a) ¿En qué instante la pelota llegará a su máxima altura?

b) ¿Cuál es la altura máxima?

Grafica cada función.

79. $f(x) = (x - 3)^2$ **80.** $f(x) = -(x + 2)^2 - 3$ **81.** $g(x) = -2(x + 4)^2 - 1$ **82.** $h(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + 3$

[8.6] Grafica en una recta numérica la solución de cada desigualdad.

83. $x^2 + 4x + 3 \geq 0$

84. $x^2 + 3x - 10 \leq 0$

85. $x^2 \leq 11x - 20$

86. $3x^2 + 8x > 16$

87. $4x^2 - 9 \leq 0$

88. $6x^2 - 30 > 0$

Resuelve cada desigualdad y da la solución en notación constructiva de conjuntos.

89. $\dfrac{x + 1}{x - 5} > 0$ **90.** $\dfrac{x - 3}{x + 2} \leq 0$ **91.** $\dfrac{2x - 4}{x + 3} \geq 0$

92. $\dfrac{3x + 5}{x - 6} < 0$ **93.** $(x + 4)(x + 1)(x - 2) > 0$ **94.** $x(x - 3)(x - 6) \leq 0$

Resuelve cada desigualdad y da la solución en notación de intervalos.

95. $(3x + 4)(x - 1)(x - 3) \geq 0$

96. $2x(x + 2)(x + 4) < 0$

97. $\dfrac{x(x - 4)}{x + 2} > 0$

98. $\dfrac{(x - 2)(x - 8)}{x + 3} < 0$

99. $\dfrac{x - 3}{(x + 2)(x - 7)} \geq 0$

100. $\dfrac{x(x - 6)}{x + 3} \leq 0$

Resuelve cada desigualdad y grafica la solución en una recta numérica.

101. $\dfrac{5}{x + 4} \geq -1$ **102.** $\dfrac{2x}{x - 2} \leq 1$ **103.** $\dfrac{2x + 3}{3x - 5} < 4$

Prueba de práctica del capítulo 8

Los videos de la prueba de práctica del capítulo proporcionan soluciones totalmente resueltas para cualquiera de los ejercicios que quieras repasar. Los videos de la prueba de práctica del capítulo están disponibles vía o en *(busca "Angel Intermediate Algebra" y da click en "Channels").*

Resuelve completando el cuadrado.

1. $x^2 + 2x - 15 = 0$ **2.** $a^2 + 7 = 6a$

Resuelve utilizando la fórmula cuadrática.

3. $x^2 - 6x - 16 = 0$ **4.** $x^2 - 4x = -11$

Resuelve utilizando el método de tu preferencia.

5. $3r^2 + r = 2$ **6.** $p^2 + 4 = -7p$

7. Escribe una función cuyas intersecciones con el eje x sean 4, $-\frac{2}{5}$.

8. Despeja v de la fórmula $K = \frac{1}{2}mv^2$.

9. **Costo** El costo, c, de una casa en Du Quoin, Illinois, es una función del número de pies cuadrados, s, de la casa. El costo de la casa puede calcularse mediante

$$c(s) = -0.01s^2 + 78s + 22{,}000,\ 1300 \leq s \leq 3900$$

a) Calcula el costo de una casa de 1600 pies cuadrados.

b) Si Sharon Hamsa quiere gastar \$160,000 en una casa, ¿qué tan grande puede ser ésta?

10. **Viaje a un parque** David Price condujo su Jeep desde Anchorage, Alaska, hasta el Parque Recreativo Estatal Chena River, que se encuentra a 520 millas de distancia. Si hubiera manejado en promedio 15 millas por hora más rápido, el viaje habría durado 2.4 horas menos. Determina la velocidad promedio a la que condujo David.

© Michael Klenetsky/Shutterstock

Parque Recreativo Estatal *Chena River*

Resuelve.

11. $2x^4 + 15x^2 - 50 = 0$

12. $3r^{2/3} + 11r^{1/3} - 42 = 0$

13. Determina todas las intersecciones con el eje x de $f(x) = 16x - 24\sqrt{x} + 9$.

Grafica cada función.

14. $f(x) = (x - 3)^2 + 2$

15. $h(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 - 2$

16. Determina si $6x^2 = 2x + 3$ tiene dos soluciones reales distintas, una única solución real o no tiene soluciones reales. Explica tu respuesta.

17. Considera la ecuación cuadrática $y = x^2 + 2x - 8$.

a) Determina si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.

b) Determina la intersección con el eje y.

c) Determina el vértice.

d) Determina las intersecciones con el eje x (si las hay).

e) Traza la gráfica.

18. Escribe una ecuación cuadrática cuyas intersecciones con el eje x sean $(-7, 0), \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Resuelve cada desigualdad y grafica la solución en una recta numérica.

19. $x^2 - x \geq 42$

20. $\dfrac{(x + 5)(x - 4)}{x + 1} \geq 0$

Resuelve la desigualdad siguiente. Escribe la respuesta en **a)** *notación de intervalos y* **b)** *notación constructiva de conjuntos.*

21. $\dfrac{x + 3}{x + 2} \leq -1$

22. Alfombra La longitud de una alfombra persa es de 3 pies mayor que el doble de su ancho. Determina la longitud y el ancho de la alfombra, si su área mide 65 pies cuadrados.

23. Lanzamiento de una pelota José Ramírez lanza una pelota hacia arriba desde lo alto de un edificio. La distancia, d, de la pelota respecto del piso en cualquier instante, t, es $d = -16t^2 + 80t + 96$. ¿Cuánto tardará la pelota en chocar contra el piso?

24. Utilidad La compañía Leigh Ann Sims obtiene una utilidad semanal de acuerdo con la función $f(x) = -1.4x^2 + 56x - 70$, donde x es el número de esculturas que fabrica y vende cada semana.

a) Determina el número de esculturas que la compañía debe vender cada semana para maximizar su utilidad.

b) ¿Cuál es la utilidad semanal máxima?

25. Venta de escobas Un negocio vende n escobas, $n \leq 32$, a un precio de $(10 - 0.1n)$ dólares cada una. ¿Cuántas escobas debe vender para tener un ingreso de \$210?

© Vladislav Gajic/Shutterstock

Prueba de repaso acumulada

Realiza la siguiente prueba y verifica tu respuesta con aquellas que se dan al final del libro. Repasa cualquier pregunta que hayas contestado incorrectamente. La sección en donde se revisó el tema se indica después de cada respuesta.

1. Evalúa $-4 \div (-2) + 18 - \sqrt{49}$.

2. Evalúa $2x^2 + 3x + 4$ cuando $x = 2$.

3. Expresa 2,540,000 en notación científica.

4. Determina el conjunto de soluciones para la ecuación $|4 - 2x| = 5$.

5. Simplifica $6x - \{3 - [2(x - 2) - 5x]\}$.

6. Resuelve la ecuación $-\frac{1}{2}(4x - 6) = \frac{1}{3}(3 - 6x) + 2$.

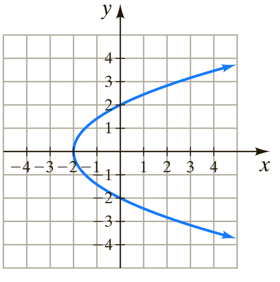
7. Resuelve la desigualdad $-4 < \dfrac{x + 4}{2} < 6$. Escribe la solución en notación de intervalos.

8. Determina la pendiente y la intersección con el eje y de la gráfica de $9x + 7y = 15$.

9. Huerta El número de canastas de manzanas, N, que se producen por x árboles de un pequeño huerto está dado por la ecuación $N(x) = -0.2x^2 + 40x$. ¿Cuántas canastas de manzanas producen 50 árboles?

10. Escribe la ecuación, en la forma pendiente-intersección, de una recta que pasa por los puntos (6, 5) y (4, 3).

11. a) Determina si la gráfica siguiente representa una función. Explica tu respuesta.



b) Determina el dominio y el rango de la función o relación.

12. Grafica cada una de las ecuaciones siguientes.

a) $x = -4$ **b)** $y = 2$

13. Evalúa el siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

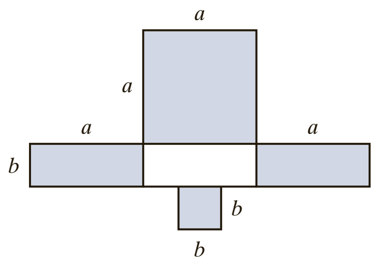
14. Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 10 \\ 2x + y &= 5 \end{aligned}$$

15. Factoriza $(x + 3)^2 + 10(x + 3) + 24$.

16. **a)** Escribe una expresión para determinar el área sombreada de la figura siguiente, y

b) escribe la expresión en forma factorizada.



17. Suma $\dfrac{x + 2}{x^2 - x - 6} + \dfrac{x - 3}{x^2 - 8x + 15}$.

18. Resuelve la ecuación

$$\frac{1}{a - 2} = \frac{4a - 1}{a^2 + 5a - 14} + \frac{2}{a + 7}.$$

19. **Consumo en watts** El consumo en watts, w, de un aparato electrodoméstico varía conjuntamente con el cuadrado de la corriente, l, y la resistencia, R. Si un aparato consume 12 watts cuando la corriente es de 2 amperes y la resistencia es de 100 ohms, determina su consumo en watts cuando la corriente es de 0.8 amperes y la resistencia de 600 ohms.

20. Simplifica $\dfrac{3 - 4i}{2 + 5i}$.

9 Funciones exponenciales y logarítmicas

Objetivos de este capítulo

Las funciones exponencial y logarítmica tienen una amplia variedad de aplicaciones, algunas de las cuales se analizarán a lo largo de este capítulo. A menudo se lee en artículos de periódicos y revistas que algunas cosas, como el gasto en servicios de salud, el uso de Internet y la población mundial, por ejemplo, crecen a un ritmo exponencial. Cuando termines de estudiar este capítulo entenderás con claridad lo que esto significa.

También introduciremos dos funciones especiales, la función exponencial natural y la función logarítmica natural. Muchos fenómenos naturales, como el fechado con carbono, el decaimiento radiactivo y el crecimiento de los ahorros invertidos en una cuenta en la que el interés se capitaliza de forma continua, pueden describirse por medio de funciones exponenciales naturales.

© Katrina Brown/Shutterstock

Las poblaciones de muchas especies pueden modelarse utilizando las funciones exponenciales o las funciones logarítmicas. Ejemplos específicos incluyen el modelado de las poblaciones humanas de las ciudades, los países y del mundo entero. Otros ejemplos involucran la población de osos en un bosque, manatíes en un estuario y águilas calvas en un parque nacional. En el ejercicio 74 de la página 622, se utiliza una función exponencial para modelar la población de truchas en un lago.

9.1 Funciones compuestas e inversas

1. Determinar funciones compuestas.
2. Entender las funciones uno a uno.
3. Determinar las funciones inversas.
4. Determinar la composición de una función y su inversa.

Empezaremos con las funciones compuestas, las funciones uno a uno y las funciones inversas. Estos conceptos los utilizaremos en el análisis de las funciones logarítmicas y las funciones exponenciales.

1 Determinar funciones compuestas

A menudo, una variable es una función de otra variable que a su vez es una función de una tercera variable. Describimos la relación entre tales funciones como una **composición de funciones**. Por ejemplo, supón que 1 dólar estadounidense puede cambiarse por 1.20 dólares canadienses, y que 1 dólar canadiense puede cambiarse por 11.40 pesos mexicanos. Utilizando esta información, podemos convertir 20 dólares estadounidenses a pesos mexicanos utilizando las funciones siguientes.

$$g(x) = 1.20x \qquad (x \text{ dólares estadounidenses a dólares canadienses})$$
$$f(x) = 11.40x \qquad (x \text{ dólares canadienses a pesos mexicanos})$$

Si hacemos $x = 20$, es decir, \$20 dólares estadounidenses, entonces, podemos convertirlos en \$24 dólares canadienses mediante la función g:

$$g(x) = 1.20x$$
$$g(20) = 1.20(20) = \$24 \text{ dólares canadienses}$$

A su vez, los \$24 dólares canadienses se convierten en 273.60 pesos mexicanos mediante la fórmula f:

$$f(x) = 11.40x$$
$$f(24) = 11.40(24) = 273.60 \text{ pesos mexicanos}$$

Esta conversión puede encontrarse directamente sin llevar a cabo esta serie de cálculos. Un dólar estadounidense puede convertirse a pesos mexicanos sustituyendo la x de la función $f(x)$ por $1.20x$, encontrado en la función $g(x)$. Esto da una nueva función, h, con la que podemos convertir directamente dólares estadounidenses en pesos mexicanos.

$$g(x) = 1.20x \qquad f(x) = 11.40x$$
$$\begin{aligned} h(x) &= f[g(x)] \\ &= 11.40(1.20x) && \text{Sustituye } x \text{ por } g(x) \text{ en } f(x). \\ &= 13.68x \end{aligned}$$

Por lo tanto, por cada dólar estadounidense, x, obtenemos 13.68 pesos mexicanos. Si sustituimos x por \$20, obtenemos 273.60 pesos, que es lo que esperábamos.

$$h(x) = 13.68x$$
$$h(20) = 13.68(20) = 273.60$$

La función h se denomina **composición de f con g** o **función compuesta de f con g**. Denotamos la función compuesta $(f \circ g)(x)$ y se lee "f de g de x" o "f compuesta con g de x". La **Figura 9.1** muestra cómo la función compuesta h relaciona las funciones f y g.

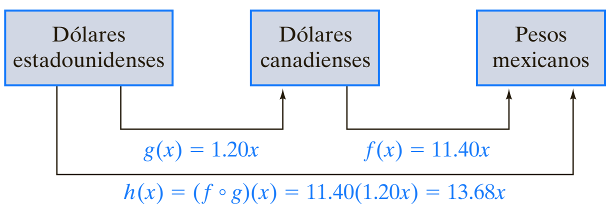


FIGURA 9.1

Comprendiendo el álgebra

Observamos funciones compuestas en nuestra vida diaria. Por ejemplo, tu presupuesto semanal es una función del precio de la gasolina. El precio de la gasolina es una función del precio del petróleo. Así, en un panorama general, vemos que tu presupuesto semanal es una función del precio del petróleo. Esto es un ejemplo de una función compuesta.

Ahora definiremos la **función compuesta**.

Función compuesta

La **función compuesta** $(f \circ g)(x)$ se define como

$$(f \circ g)(x) = f\,[g(x)]$$

Cuando nos dan $f(x)$ y $g(x)$, para determinar $(f \circ g)(x)$, sustituimos la x por $g(x)$ en $f(x)$, para obtener $f[g(x)]$.

EJEMPLO 1 Dada $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = x - 5$, determina

a) $f(4)$ **b)** $f(a)$ **c)** $(f \circ g)(x)$ **d)** $(f \circ g)(3)$

Solución

a) Para determinar $f(4)$, sustituimos cada x en $f(x)$ por 4.

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$
$$f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 16 - 8 + 3 = 11$$

b) Para determinar $f(a)$, sustituimos cada x de $f(x)$ por a.

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$
$$f(a) = a^2 - 2a + 3$$

c) $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$. Para determinar $(f \circ g)(x)$ sustituimos cada x en $f(x)$ por $g(x)$, la cual es $x - 5$.

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$
$$f[g(x)] = [g(x)]^2 - 2[g(x)] + 3$$

Como $g(x) = x - 5$, sustituimos del modo siguiente

$$\begin{aligned} f[g(x)] &= (x - 5)^2 - 2(x - 5) + 3 \\ &= (x - 5)(x - 5) - 2x + 10 + 3 \\ &= x^2 - 10x + 25 - 2x + 13 \\ &= x^2 - 12x + 38 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función compuesta de f con g es $x^2 - 12x + 38$.

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = x^2 - 12x + 38$$

d) Para determinar $(f \circ g)(3)$, sustituimos x en $(f \circ g)(x)$ por 3.

$$(f \circ g)(x) = x^2 - 12x + 38$$
$$(f \circ g)(3) = 3^2 - 12(3) + 38 = 11$$

Resuelve ahora el ejercicio 9

Comprendiendo el álgebra

Varios ejemplos y ejercicios de esta sección nos muestran que la composición de funciones no es una operación conmutativa. Esto es, en general

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

Para determinar $(g \circ f)(x)$ o $g[f(x)]$, sustituimos cada x de $g(x)$ por $f(x)$. A partir de los valores que se dieron para $f(x)$ y $g(x)$ en el ejemplo 1, determinamos $(g \circ f)(x)$ del modo siguiente:

$$g(x) = x - 5, \qquad f(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$\begin{aligned} g[f(x)] &= f(x) - 5 \\ g[f(x)] &= (x^2 - 2x + 3) - 5 \\ &= x^2 - 2x + 3 - 5 \\ &= x^2 - 2x - 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función compuesta de g con f es $x^2 - 2x - 2$.

$$(g \circ f)(x)\ g[f(x)] = x^2 - 2x - 2$$

Mediante la comparación de los resultados anteriores, vemos que en este ejemplo $f[g(x)] \neq g[f(x)]$.

EJEMPLO 2 Dada $f(x) = x^2 + 4$ y $g(x) = \sqrt{x-1}$, determina

a) $(f \circ g)(x)$ **b)** $(g \circ f)(x)$

Solución

a) Para determinar $(f \circ g)(x)$, sustituimos cada x de $f(x)$ por $g(x)$, que es $\sqrt{x-1}$. Debes darte cuenta de que $\sqrt{x-1}$ es un número real solo cuando $x \geq 1$.

$$f(x) = \boxed{x}^2 + 4$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = (\boxed{\sqrt{x-1}})^2 + 4 = x - 1 + 4 = x + 3, x \geq 1$$

Como los valores de $x < 1$ no están en el dominio de $g(x)$, tampoco pertenecen al dominio de $(f \circ g)(x)$.

b) Para determinar $(g \circ f)(x)$, sustituimos cada x de $g(x)$ por $f(x)$, la cual $x^2 + 4$.

$$g(x) = \sqrt{\boxed{x} - 1}$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x^2 + 4)] = \sqrt{\boxed{(x^2+4)} - 1} = \sqrt{x^2 + 3}$$

Resuelve ahora el ejercicio 19

EJEMPLO 3 Dada $f(x) = x - 3$ y $g(x) = x + 7$, determina

a) $(f \circ g)(x)$ **b)** $(f \circ g)(2)$ **c)** $(g \circ f)(x)$ **d)** $(g \circ f)(2)$

Solución

a)
$$f(x) = \boxed{x} - 3$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = (\boxed{x+7}) - 3 = x + 4$$

b) Determinamos $(f \circ g)(2)$ sustituyendo cada x de $(f \circ g)(x)$ por 2.

$$(f \circ g)(x) = x + 4$$

$$(f \circ g)(2) = 2 + 4 = 6$$

c)
$$g(x) = \boxed{x} + 7$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = (\boxed{x-3}) + 7 = x + 4$$

d) Como $(g \circ f) = x + 4$, $(g \circ f)(2) = 2 + 4 = 6$.

Resuelve ahora el ejercicio 11

En general, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ como vimos al final del ejemplo 1. En el ejemplo 3, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$, pero esto es solo debido a las funciones específicas que se utilizaron.

Consejo útil

No confundas determinar el producto de dos funciones con determinar la función compuesta.

Producto de las funciones f y g: $(fg)(x) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Función compuesta de f con g: $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$

Para indicar que se deben multiplicar las funciones f y g, se usa un punto entre f y g. Para indicar que se debe determinar la función compuesta de f con g, se utiliza un pequeño círculo *vacío*.

2 Entender las funciones uno a uno

Comprendiendo el álgebra

Recuerda de capítulos anteriores las definiciones siguientes. Una *relación* es un conjunto de pares ordenados de la forma (x, y). Al conjunto de coordenadas x se le llama *dominio*, y al conjunto de coordenadas y se le llama *rango* de la relación. Una *función* es una relación en la que cada elemento en el dominio corresponde a exactamente un elemento en el rango.

Antes de analizar las funciones uno a uno, toma un momento para repasar las definiciones de relación, dominio, rango y función que se muestran en el recuadro Comprendiendo el álgebra.

Función uno a uno

Una función es una **función uno a uno** si cada elemento en el rango corresponde a exactamente un elemento en el dominio.

Considera los dos conjuntos de pares ordenados siguientes.

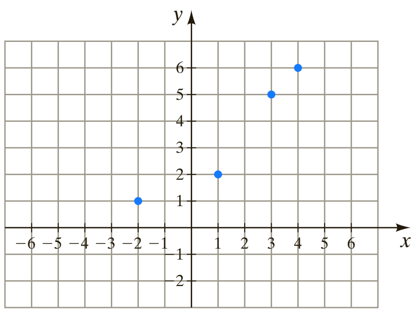
$$A = \{(1, 2), (3, 5), (4, 6), (-2, 1)\}$$

$$B = \{(1, 2), (3, 5), (4, 6), (-2, 5)\}$$

- Ambos conjuntos A y B representan funciones, ya que cada valor de la coordenada x corresponde a exactamente un valor de la coordenada y.
- El conjunto A es también una función uno a uno, ya que cada valor de la coordenada y también corresponde a exactamente un valor de la coordenada x.
- El conjunto B no es una función uno a uno, ya que la coordenada y con valor de 5 corresponde a dos coordenadas x, con valor de 3 y -2 cada una.

La **Figura 9.2** muestra la gráfica de la función A y la **Figura 9.3** muestra la gráfica de la función B.

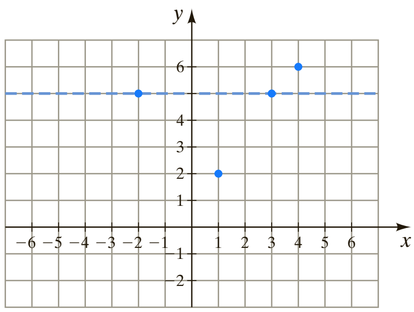
Función A



- Cada coordenada x corresponde a exactamente un único valor de la coordenada y. *Por lo tanto, el conjunto A es una función.*
- Cada coordenada y también corresponde a exactamente un único valor de la coordenada x. *Por lo tanto, el conjunto A es una función uno a uno.*

FIGURA 9.2

Función B



- Cada coordenada x corresponde exactamente a un único valor de la coordenada y. *Por lo tanto, el conjunto B es una función.*
- La coordenada y con valor de 5 corresponde a dos coordenadas x, con valor de 3 y 22 cada una. *Por lo tanto, el conjunto B no es una función uno a uno.*

FIGURA 9.3

Comprendiendo el álgebra

El *criterio de la recta vertical* establece que si se traza una recta vertical de modo que interseque una gráfica en más de un punto, entonces la gráfica *no es la gráfica de una función.*

El criterio *de la recta horizontal* establece que si se traza una recta horizontal de modo que interseque la gráfica de una función en más de un punto, la función *no es una función uno a uno.*

Para que una gráfica represente una función, debe cumplir el criterio de *la recta vertical* (ver recuadro Comprendiendo el álgebra). Para que una gráfica represente una función uno a uno, debe cumplir también el *criterio de la recta horizontal*.

Criterio de la recta horizontal

Si se traza una recta horizontal de modo que interseque la gráfica de una función en más de un punto, la gráfica no es una función uno a uno.

Observa la gráfica de la función $f(x) = x^2$ que se muestra en la **Figura 9.4**. Primero, es una función, ya que su gráfica cumple el criterio de la recta *vertical*. Sin embargo, no es una función uno a uno, ya que no cumple el criterio de la recta *horizontal*. La **Figura 9.5** muestra que $f(x) = x^2$ tiene un valor de y al que corresponden dos valores diferentes de x.

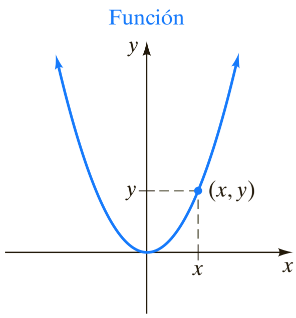


FIGURA 9.4

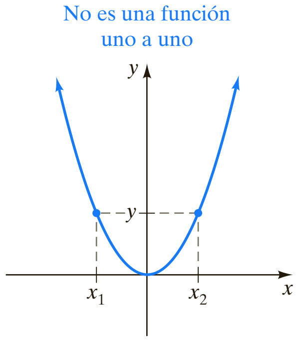


FIGURA 9.5

A menudo, podemos limitar el dominio de una función que no es una función uno a uno, de manera que la función que resulte sea una función uno a uno. Por ejemplo, ambas funciones $f(x) = x^2, x \geq 0$ (**Figura 9.6a**) y $f(x) = x^2, x \leq 0$ (**Figura 9.6b**) son ejemplos de funciones uno a uno. Observa que ambas gráficas cumplen el criterio de la recta horizontal.

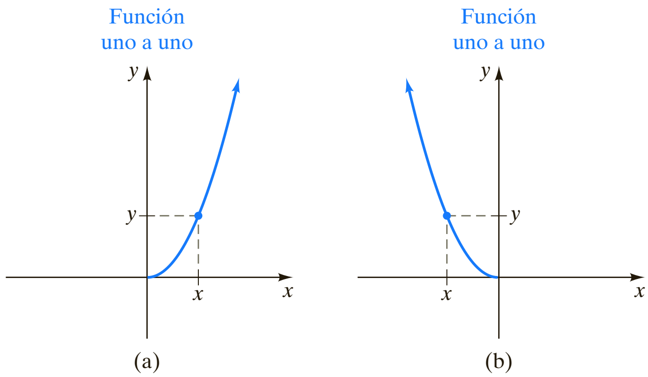


FIGURA 9.6

La **Figura 9.7** muestra varias gráficas, que representan o no funciones uno a uno. Observa que la gráfica del inciso (f) no representa una función, ya que no cumple el criterio de la recta vertical. Sin embargo, aunque cumple el criterio de la recta horizontal, esta gráfica no puede representar una función uno a uno.

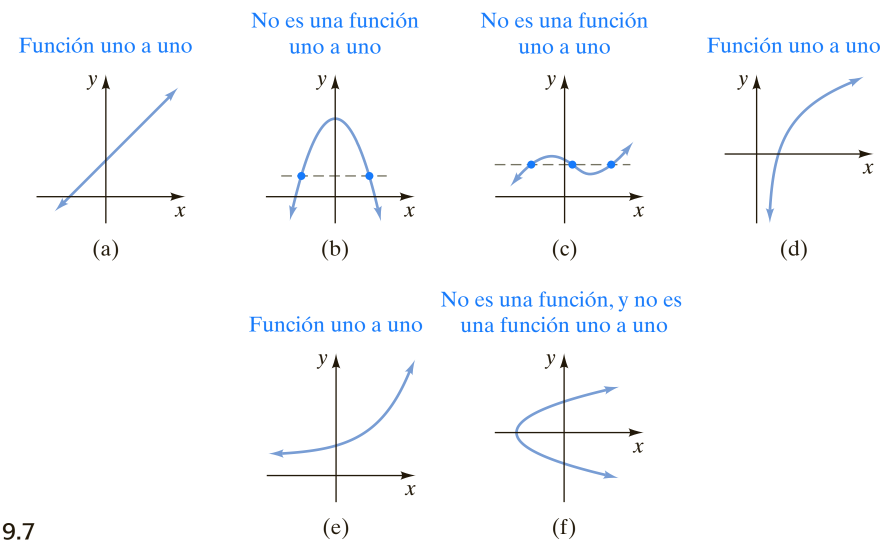


FIGURA 9.7

3 Determinar las funciones inversas

Las funciones uno a uno consisten en pares ordenados en los que a cada valor de x le corresponde un único valor de y, y a cada valor de y le corresponde un único valor de x. Esta relación nos permite crear una nueva función llamada función *inversa*. *Solo las funciones uno a uno tienen inversas*.

Comprendiendo el álgebra

Es importante observar que la notación $f^{-1}(x)$ se utiliza para representar la función inversa de una función $f(x)$ dada. En la notación, el -1 *no es* un exponente. Por lo tanto,

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$$

Función inversa

Si $f(x)$ es una función uno a uno con pares ordenados de la forma (x, y), su **función inversa**, $f^{-1}(x)$ es una función uno a uno con pares ordenados de la forma (y, x).

Empezaremos con un ejemplo.

Función $f(x)$: $\{(1, 4), (2, 0), (3, 7), (-2, 1), (-1, -5)\}$

Función inversa $f^{-1}(x)$: $\{(4, 1), (0, 2), (7, 3), (1, -2), (-5, -1)\}$

Si graficamos los puntos de la función y los puntos de la función inversa (**Figura 9.8**), vemos que éstos son simétricos respecto a la recta $y = x$.

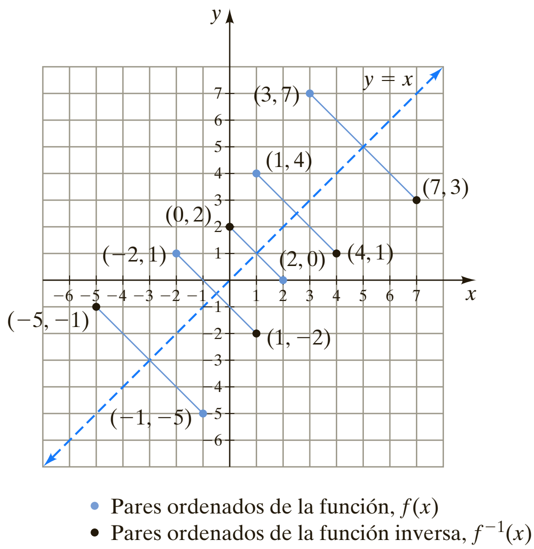


FIGURA 9.8

Información importante acerca de la función inversa:

- Solo las funciones uno a uno tienen funciones inversas.
- El dominio de $f(x)$ es el rango de $f^{-1}(x)$.
- El rango de $f(x)$ es el dominio de $f^{-1}(x)$.
- Cuando se grafican la función $f(x)$ y su función inversa, $f^{-1}(x)$, en los mismos ejes, las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son simétricas respecto de la recta $y = x$.

Si una función uno a uno se da como una ecuación, su función inversa puede determinarse mediante el procedimiento siguiente.

Para determinar la función inversa de una función uno a uno

1. Reemplaza $f(x)$ con y.
2. Intercambia las dos variables, x y y.
3. Despeja y en la ecuación.
4. Reemplaza y con $f^{-1}(x)$ (esto proporciona la función inversa utilizando la notación de función inversa).

EJEMPLO 4

a) Determina la función inversa de $f(x) = 4x + 2$.

b) Grafica $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en los mismos ejes.

Solución

a) Ésta es una función uno a uno, por lo tanto, seguiremos el procedimiento de cuatro pasos que se acaba de explicar.

	$f(x) = 4x + 2$	Función original.
Paso 1	$y = 4x + 2$	Reemplaza $f(x)$ con y.
Paso 2	$x = 4y + 2$	Intercambia x con y.
Paso 3	$x - 2 = 4y$	Despeja y.
	$\dfrac{x-2}{4} = y$	
	o $\quad y = \dfrac{x-2}{4}$	
Paso 4	$f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{4}$	Reemplaza y con $f^{-1}(x)$.

b) A continuación se muestran tablas de valores para $f(x)$ y $f^{-1}(x)$. Las gráficas correspondientes se muestran en la **Figura 9.9**.

x	$y = f(x)$
0	2
1	6

x	$y = f^{-1}(x)$
2	0
6	1

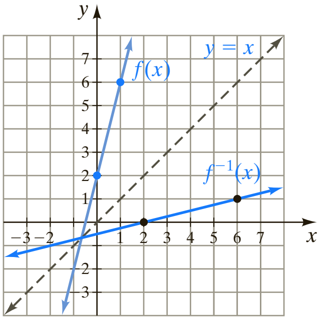


FIGURA 9.9

Observa la simetría de $f(x)$ y de $f^{-1}(x)$ respecto a la recta $y = x$. También observa que tanto el dominio como el rango de $f(x)$ y de $f^{-1}(x)$ son el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$.

Resuelve ahora el ejercicio 67

EJEMPLO 5

a) Determina la función inversa de $f(x) = x^3 + 2$.

b) Grafica $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en los mismos ejes.

Solución

a) Ésta es una función uno a uno; por lo tanto, seguiremos el procedimiento de cuatro pasos que se acaba de explicar para determinar su inversa.

	$f(x) = x^3 + 2$	Función original.
Paso 1	$y = x^3 + 2$	Reemplaza $f(x)$ con y.
Paso 2	$x = y^3 + 2$	Intercambia x con y.
Paso 3	$x - 2 = y^3$	Despeja y.
	$\sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{y^3}$	Saca la raíz cúbica de ambos lados.
	$\sqrt[3]{x-2} = y$	
	o $\quad y = \sqrt[3]{x-2}$	
Paso 4	$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$	Reemplaza y con $f^{-1}(x)$.

b) A continuación se muestran las tablas de valores para $f(x)$ y $f^{-1}(x)$.

x	$y = f(x)$
-2	-6
-1	1
0	2
1	3
2	10

x	$y = f^{-1}(x)$
-6	-2
1	-1
2	0
3	1
10	2

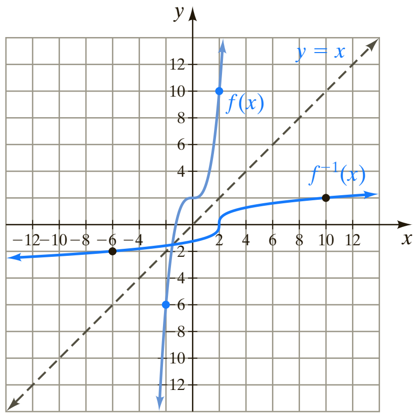


FIGURA 9.10

En la **Figura 9.10** se muestran las gráficas de $f(x)$ y de $f^{-1}(x)$. Observa que para cada punto (a, b) en la gráfica de $f(x)$, el punto (b, a) aparece en la gráfica de $f^{-1}(x)$. Por ejemplo, los puntos $(2, 10)$ y $(-2, -6)$, marcados en azul, aparecen en la gráfica de $f(x)$, y los puntos $(10, 2)$ y $(-6, -2)$, marcados en negro, aparecen en la gráfica de $f^{-1}(x)$.

Resuelve ahora el ejercicio 61

4 Determinar la composición de una función y su inversa

Para ayudar a fortalecer la relación entre una función y su inversa, evaluaremos la composición de $f^{-1}(x)$ y $f(x)$ a partir del ejemplo 5 para los valores de $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$.

$$(f^{-1} \circ f)(-2) = f^{-1}[f(-2)] = f^{-1}(-6) = -2$$

$$(f^{-1} \circ f)(0) = f^{-1}[f(0)] = f^{-1}(2) = 0$$

$$(f^{-1} \circ f)(2) = f^{-1}[f(2)] = f^{-1}(10) = 2$$

Observa que el resultado de la composición de una función y su inversa es siempre igual al valor dado. De manera similar, evaluaremos la composición de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ a partir del ejemplo 5 para los valores de $x = -6$, $x = 2$ y $x = 10$.

$$(f \circ f^{-1})(-6) = f[f^{-1}(-6)] = f(-2) = -6$$

$$(f \circ f^{-1})(2) = f[f^{-1}(2)] = f(0) = 2$$

$$(f \circ f^{-1})(10) = f[f^{-1}(10)] = f(2) = 10$$

Observa de nuevo, que el resultado siempre es igual al valor dado. Esta relación se resume del modo siguiente.

La composición de una función y su inversa

Para cualquier función uno a uno $f(x)$ y su inversa $f^{-1}(x)$,

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad \text{y} \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x.$$

EJEMPLO 6 En el ejemplo 4, determinamos que para $f(x) = 4x + 2$, $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{4}$. Demuestra que

a) $(f \circ f^{-1})(x) = x$ **b)** $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

Solución

a) Para determinar $(f \circ f^{-1})(x)$, sustituye cada x de $f(x)$ por $f^{-1}(x)$.

$$f(x) = 4x + 2$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = 4\left(\frac{x-2}{4}\right) + 2$$

$$= x - 2 + 2 = x$$

b) Para determinar $(f \circ f^{-1})(x)$, sustituye cada x de $f^{-1}(x)$ por $f(x)$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{4}$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = \frac{4x + 2 - 2}{4}$$

$$= \frac{4x}{4} = x$$

Por lo tanto, $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$

Resuelve ahora el ejercicio 77

EJEMPLO 7 En el ejemplo 5, determinamos que $f(x) = x^3 + 2$ y $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$ son funciones inversas. Demuestra que

a) $(f \circ f^{-1})(x) = x$ **b)** $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

Solución

a) Para determinar $(f \circ f^{-1})(x)$, sustituye cada x de $f(x)$ por $f^{-1}(x)$.

$$f(x) = x^3 + 2$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = (\sqrt[3]{x-2})^3 + 2$$

$$= x - 2 + 2 = x$$

b) Para determinar $(f^{-1} \circ f)(x)$, sustituye cada x de $f^{-1}(x)$ por $f(x)$.

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = \sqrt[3]{(x^3 + 2) - 2}$$

$$= \sqrt[3]{x^3} = x$$

Por lo tanto, $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$

Resuelve ahora el ejercicio 79

Como una función y su inversa “se anulan” entre ellas, la función compuesta de una función con su inversa tiene como resultado el valor dado en el dominio. Por ejemplo, para cualquier función $f(x)$ y su inversa $f^{-1}(x)$, $(f^{-1} \circ f)(3) = 3$ y $(f \circ f^{-1})\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.1

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

inversa	*dominio*	*horizontal*	*x*	*f(x)*
vertical	rango	uno a uno	composición	*y*

1. Cuando una variable es una función de otra variable, que a su vez es una función de una tercera variable, describimos la relación entre tales funciones como una ______________ de funciones.

2. Una función es una función ______________ si a cada elemento del rango le corresponde un único elemento del dominio.

3. La prueba de la recta ______________ establece que si se traza una recta ______________ de modo que interseque una gráfica en más de un punto, entonces la gráfica no es la gráfica de una función.

4. La prueba de la recta ______________ establece que si se traza una recta ______________ de modo que interseque la gráfica de una función en más de un punto, la función no es una función uno a uno.

5. Si una función uno a uno tiene pares ordenados de la forma (x, y), la función ______________ es una función uno a uno con pares ordenados de la forma (y, x).

6. Para una función uno a uno $f(x)$ y su función inversa $f^{-1}(x)$, el dominio de $f(x)$ es el ______________ de $f^{-1}(x)$.

7. Para una función uno a uno $f(x)$ y su función inversa $f^{-1}(x)$, el rango de $f(x)$ es el ______________ de $f^{-1}(x)$.

8. Para cualquier función uno a uno $f(x)$ y su inversa $f^{-1}(x)$, $(f \circ f^{-1})(x) =$ ______________ y $(f^{-1} \circ f)(x) =$ ______________.

Practica tus habilidades

Para cada par de funciones, determina **a)** $(f \circ g)(x)$, **b)** $(f \circ g)(4)$, **c)** $(g \circ f)(x)$ *y* **d)** $(g \circ f)(4)$.

9. $f(x) = x + 4, g(x) = 2x - 3$

10. $f(x) = 3x - 2, g(x) = x + 1$

11. $f(x) = x + 3, g(x) = x^2 + x - 4$

12. $f(x) = x + 2, g(x) = x^2 + 4x - 2$

13. $f(x) = \dfrac{1}{x}, g(x) = 2x + 3$

14. $f(x) = \dfrac{2}{x}, g(x) = x^2 + 1$

15. $f(x) = 3x + 1, g(x) = \dfrac{3}{x}$

16. $f(x) = x^2 - 5, g(x) = \dfrac{4}{x}$

17. $f(x) = x^2 + 1, g(x) = x^2 + 5$

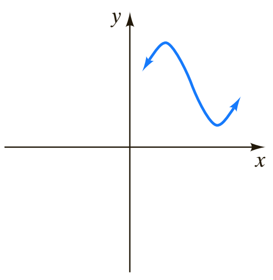
18. $f(x) = x^2 - 4, g(x) = x^2 + 3$

19. $f(x) = x - 4, g(x) = \sqrt{x + 5}, x \geq -5$

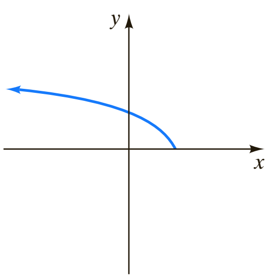
20. $f(x) = \sqrt{x + 6}, x \geq -6, g(x) = x + 7$

En los ejercicios 21–42, determina si cada función es una función uno a uno.

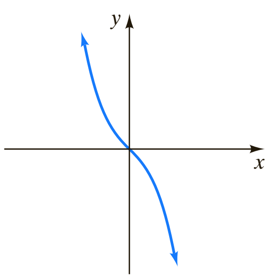
21.



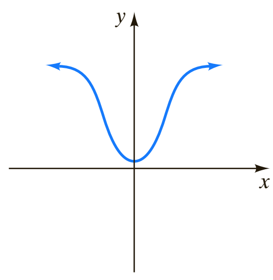
22.



23.



24.



25. $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$

26. $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

27. $\{(-4, 2), (5, 3), (0, 2), (4, 8)\}$

28. $\{(0, 5), (1, 4), (-3, 5), (4, 2)\}$

29. $y = 2x + 5$

30. $y = 3x - 8$

31. $y = x^2 - 1$

32. $y = -x^2 + 3$

33. $y = x^2 - 2x + 5$

34. $y = x^2 - 2x + 6, x \geq 1$

35. $y = x^2 - 9, x \geq 0$

36. $y = x^2 - 9, x \leq 0$

37. $y = \sqrt{x}$

38. $y = -\sqrt{x}$

39. $y = |x|$

40. $y = -|x|$

41. $y = \sqrt[3]{x}$

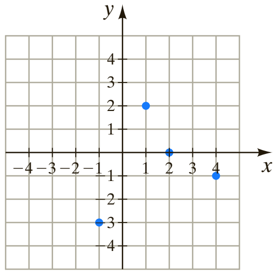
42. $y = x^3$

En los ejercicios 43-48, para la función dada, determina el dominio y el rango tanto de $f(x)$ como de $f^{-1}(x)$.

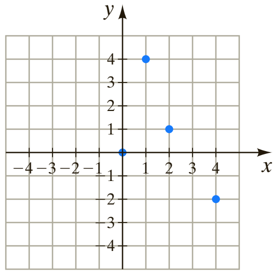
43. $\{(4, 0), (8, 9), (2, 7), (-1, 6), (-2, 4)\}$

44. $\left\{(-2, -3), (-4, 0), (5, 3), (6, 2), \left(2, \dfrac{1}{2}\right)\right\}$

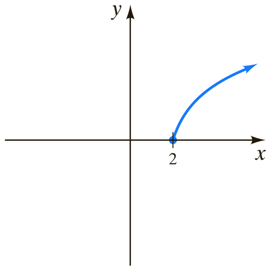
45.



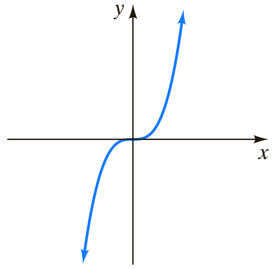
46.



47.



48.



Para cada función, ***a)*** *determina si es uno a uno;* ***b)*** *si es uno a uno, determina su función inversa.*

49. $f(x) = x + 3$

50. $f(x) = x - 4$

51. $h(x) = 4x$

52. $k(x) = 2x - 7$

53. $p(x) = 3x^2$

54. $r(x) = |x|$

55. $t(x) = x^2 + 3$

56. $m(x) = -x^2 + x + 8$

57. $g(x) = \dfrac{1}{x}$

58. $h(x) = \dfrac{5}{x}$

59. $f(x) = x^2 + 10$

60. $g(x) = x^3 + 9$

61. $g(x) = x^3 - 6$

62. $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$

63. $g(x) = \sqrt{x + 2}, x \geq -2$

64. $f(x) = x^2 - 3, x \geq 0$

65. $h(x) = x^2 - 4, x \geq 0$

66. $h(x) = |x|$

Para cada función uno a uno, ***a)*** *determina $f^{-1}(x)$ y* ***b)*** *grafica $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en los mismos ejes.*

67. $f(x) = 2x + 8$

68. $f(x) = -3x + 6$

69. $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$

70. $f(x) = -\sqrt{x}, x \geq 0$

71. $f(x) = \sqrt{x - 1}, x \geq 1$

72. $f(x) = \sqrt{x + 4}, x \geq -4$

73. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

74. $f(x) = \sqrt[3]{x + 3}$

75. $f(x) = \dfrac{1}{x}, x > 0$

76. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Para cada par de funciones inversas, demuestra que $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

77. $f(x) = x + 5, f^{-1}(x) = x - 5$

78. $f(x) = 3x, f^{-1}(x) = \dfrac{x}{3}$

79. $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 3, f^{-1}(x) = 2x - 6$

80. $f(x) = -\dfrac{1}{3}x + 2, f^{-1}(x) = -3x + 6$

81. $f(x) = \sqrt[3]{x - 2}, f^{-1}(x) = x^3 + 2$

82. $f(x) = \sqrt[3]{x + 9}, f^{-1}(x) = x^3 - 9$

83. $f(x) = \dfrac{3}{x}, f^{-1}(x) = \dfrac{3}{x}$

84. $f(x) = \sqrt{x + 5}, f^{-1}(x) = x^2 - 5, x \geq 0$

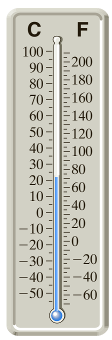
Resolución de problemas

85. La función $f(x) = 3x$ convierte yardas, x, en pies. Determina la función inversa para convertir pies en yardas. ¿Qué representan x y $f^{-1}(x)$ en la función inversa?

86. La función $f(x) = 12x$ convierte pies, x, en pulgadas. Determina la función inversa para convertir pulgadas en pies. ¿Qué representan x y $f^{-1}(x)$ en la función inversa?

87. La función $f(x) = \dfrac{5}{9}(x - 32)$ convierte grados Fahrenheit, x, en grados Celsius. Determina la función inversa para convertir grados Celsius en grados Fahrenheit.

88. La función $f(x) = \dfrac{22}{15}x$ convierte millas por hora, x, en pies por segundo. Determina la función inversa para convertir pies por segundo en millas por hora.



Ver ejercicio 87.

En los ejercicios 89-92, se dan las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Determina la composición $(f \circ g)(x)$. Para la función composición, ¿qué representan x y $(f \circ g)(x)$?

89. $f(x) = 16x$ convierte libras, x, en onzas. $g(x) = 28.35x$ convierte onzas, x, en gramos.

90. $f(x) = 2000x$ convierte toneladas, x, en libras. $g(x) = 16x$ convierte libras, x, en onzas.

91. $f(x) = 3x$ convierte yardas, x, en pies. $g(x) = 0.305x$ convierte pies, x, en metros.

92. $f(x) = 1760x$ convierte millas, x, en yardas. $g(x) = 0.915x$ convierte yardas, x, en metros.

Ejercicios de conceptos y escritura

93. ¿Es $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ para todos los valores de x? Explica y proporciona un ejemplo que apoye tu respuesta.

94. Considera las funciones $f(x) = \sqrt{x + 5}, x \geq -5$, y $g(x) = x^2 - 5, x \geq 0$.

a) Demuestra que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ para $x \geq 0$.

b) Explica por qué es necesario estipular que $x \geq 0$ para que el inciso **a)** sea verdadero.

95. Considera las funciones $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = \sqrt[3]{x - 2}$.

a) Demuestra que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

b) ¿Cuáles son los dominios de $f(x)$, $g(x)$,$(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$? Explica.

96. Para la función $f(x) = x^3$, $f(2) = 2^3 = 8$. Explica por qué $f^{-1}(8) = 2$.

97. Para la función $f(x) = x^4$, $x > 0$, $f(2) = 16$. Explica por qué $f^{-1}(16) = 2$.

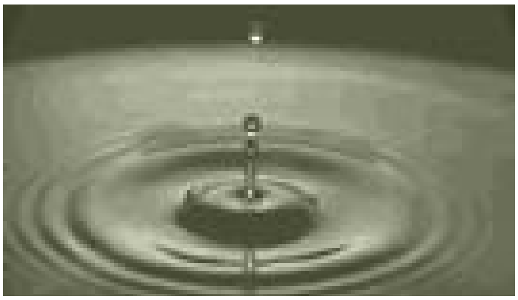
98. a) ¿La función $f(x) = |x|$ tiene inversa? Explica.

b) Si el dominio está limitado a $x \geq 0$, ¿La función tiene inversa? Explica.

c) Determina la función inversa de $f(x) = |x|$, $x \geq 0$.

Problemas de desafío

99. Área Cuando se arroja una piedra a un estanque, el círculo (onda) que se forma con el golpe de la piedra en el agua se expande con el tiempo. El área del círculo en expansión puede determinarse mediante la fórmula $A = \pi r^2$. El radio del círculo, r, en pies, es una función del tiempo, t, en segundos. Supón que la función es $r(t) = 2t$.



© Daniel Rybkin/Shutterstock

a) Determina el radio del círculo 3 segundos después de que la piedra golpea el agua.

b) Determina el área del círculo 3 segundos después de que la piedra golpea el agua.

c) Expresa el área como una función del tiempo, determina $A \circ r$.

d) Mediante la función que encontraste en el inciso **c)**, determina el área del círculo 3 segundos después de que la piedra golpea el agua.

e) ¿Las respuestas a los incisos **b)** y **d)** coinciden? Si no es así, explica por qué.

100. Área de la superficie El área de la superficie, S, de un globo esférico de radio, r, en pulgadas, se determina mediante $S(r) = 4\pi r^2$. Si el globo se está inflando con una máquina a una velocidad constante, entonces el radio del globo es una función del tiempo. Supongamos que esta función es $r(t) = 1.2t$, donde t está en segundos.

a) Determina el radio del globo a los 2 segundos.

b) Determina el área de la superficie a los 2 segundos.

c) Expresa el área de la superficie como una función del tiempo, determina $S \circ r$.

d) Mediante la función que encontraste en el inciso **c)**, determina el área de la superficie después de 2 segundos.

e) ¿Las respuestas a los incisos **b)** y **d)** coinciden? Si no es así, explica por qué.

Actividad de grupo

Analicen y respondan en grupo el ejercicio 101.

101. Consideren la función $f(x) = 2^x$. Éste es un ejemplo de una *función exponencial*, de la cual hablaremos en la sección siguiente.

a) Grafiquen esta función sustituyendo valores para x y determinando los valores correspondientes de $f(x)$.

b) ¿Ustedes creen que esta función tenga inversa? Expliquen su respuesta.

c) Con la gráfica obtenida en el inciso **a)**, tracen la función inversa, $f^{-1}(x)$ en los mismos ejes.

d) Expliquen cómo obtuvieron la gráfica $f^{-1}(x)$.

Ejercicios de repaso acumulados

[1.3] **102.** Divide $\left|\frac{-9}{4}\right| \div \left|\frac{-4}{9}\right|$.

[3.5] **103.** Determina, en la forma general, la ecuación de una recta que pase por $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ y que sea paralela a la gráfica de $2x + 3y - 9 = 0$.

[6.3] **104.** Simplifica $\dfrac{\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x}}{\frac{x}{6}}$.

[6.4] **105.** Despeja p de $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

[8.1] **106.** Resuelve la ecuación $x^2 + 2x - 10 = 0$ completando el cuadrado.

9.2 Funciones exponenciales

1 Graficar funciones exponenciales.

2 Resolver problemas de aplicación con funciones exponenciales.

1 Graficar funciones exponenciales

Existen muchas aplicaciones para las funciones exponenciales. Algunos ejemplos incluyen el crecimiento de poblaciones, la duplicación de una bacteria en un experimento biológico, el valor del dinero en una cuenta de banco con interés compuesto, el decaimiento de la cantidad de carbono 14 en los restos de un fósil y muchos otros. Las gráficas que se muestran en la **Figura 9.11** y la **Figura 9.12** muestran dos ejemplos de funciones exponenciales.

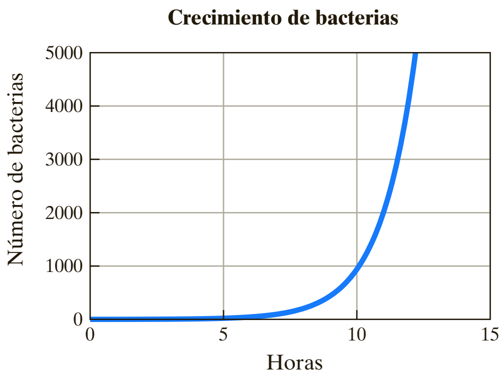


FIGURA 9.11

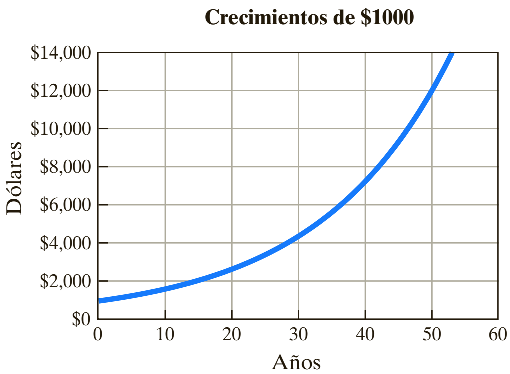


FIGURA 9.12

Como se ve en la definición siguiente, una función exponencial siempre tendrá a la variable como exponente.

Comprendiendo el álgebra

¿Cuál es la diferencia entre las dos funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = x^2$?

Función exponencial

$f(x) = 2^x$ la variable es el *exponente*

Observa la localización de la variable x. En una función *exponencial*, la variable está en la posición del *exponente*.

Función polinomial (cuadrática)

$g(x) = x^2$ la variable es la *base*

En una función polinomial (en este caso cuadrática), la variable está en la posición de la *base*.

Función exponencial

Para cualquier número real $a > 0$ y $a \neq 1$,

$$f(x) = a^x \quad \text{o} \quad y = a^x$$

es una **función exponencial**.

Una función exponencial es una función de la forma $f(x) = a^x$ o $y = a^x$, donde a es un número real positivo distinto de 1. Observa que la variable está en el exponente.

Ejemplos de funciones exponenciales

$$f(x) = 2^x, \qquad y = 5^x, \qquad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Las funciones exponenciales pueden graficarse seleccionando valores para x, determinando los correspondientes valores de y [o $f(x)$], y trazando los puntos.

Antes de graficar funciones exponenciales, analizaremos algunas de sus características.

Gráficas de funciones exponenciales

Para toda función exponencial de la forma $y = a^x$ o $f(x) = a^x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$,

1. El dominio de la función es $(-\infty, \infty)$.
2. El rango de la función es $(0, \infty)$.
3. La gráfica pasa por los puntos $\left(-1, \frac{1}{a}\right)$, $(0, 1)$, y $(1, a)$.

EJEMPLO 1 Grafica la función exponencial $y = 2^x$. Establece el dominio y el rango de la función.

Solución La función es de la forma $y = a^x$, donde $a = 2$. Primero construimos una tabla de valores. En ella, los tres puntos del paso 3 en el recuadro de la página 580 se muestran en azul.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

Ahora trazamos estos puntos y los conectamos mediante una curva suave (**Figura 9.13**). Los tres pares ordenados en azul en la tabla están marcados en azul en la gráfica.

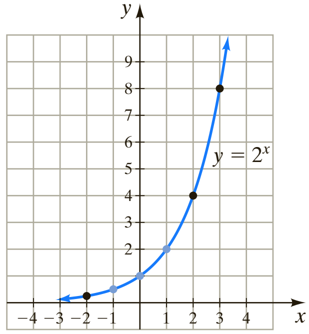


FIGURA 9.13

El dominio de esta función es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El rango es $\{y|y > 0\}$.

Resuelve ahora el ejercicio 7

EJEMPLO 2 Grafica $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Establece el dominio y el rango de la función.

Solución Esta función es de la forma $y = a^x$, donde $a = \frac{1}{2}$. Construimos una tabla de valores para trazar la curva (**Figura 9.14**).

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

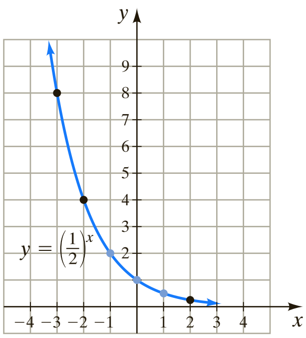


FIGURA 9.14

El dominio es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El rango es $\{y|y > 0\}$.

Resuelve ahora el ejercicio 13

Observa que las gráficas en las **Figuras 9.13** y **9.14** representan funciones uno a uno, ya que cada gráfica cumple el criterio de la recta horizontal.

Consejo útil

Cuando graficamos funciones exponenciales de la forma $y = a^x$ donde $x > 0$, si

- $a > 1$, la grafica ascenderá de izquierda a derecha. Ve la gráfica de $y = 2^x$ en la **Figura 9.13**.
- $0 < a < 1$, la gráfica descenderá de izquierda a derecha. Ve la gráfica de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en la **Figura 9.14**.

Comprendiendo el álgebra

Cuando graficamos funciones de la forma $y = a^x$ o $f(x) = a^x$, podemos predecir la forma de la gráfica al observar los tres puntos $\left(-1, \frac{1}{a}\right)$, $(0, 1)$ y $(1, a)$

- Cuando $a > 1$, la gráfica se vuelve casi horizontal a la izquierda de $\left(-1, \frac{1}{a}\right)$, y casi vertical a la derecha de $(1, a)$; ver ejemplo 1.
- Cuando $0 < a < 1$, la gráfica es casi horizontal a la derecha de $(1, a)$ y casi vertical a la izquierda de $\left(-1, \frac{1}{a}\right)$; ver ejemplo 2.

Siempre que encontremos una función exponencial con un exponente negativo como $y = 2^{-x}$, podemos recordar nuestras reglas de los exponentes para ver que

$$\begin{aligned} y &= 2^{-x} \\ &= \frac{1}{2^x} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^x \end{aligned}$$

Por lo tanto, la gráfica de $y = 2^{-x}$ es la gráfica de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ que se muestra en la **Figura 9.14** de la página 581.

De manera similar, cuando encontramos una función como $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$, podemos utilizar las reglas de los exponentes para ver que

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} \\ &= \left(\frac{2}{1}\right)^x \\ &= 2^x \end{aligned}$$

Por lo tanto, la gráfica de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ es la gráfica de $y = 2^x$ que se muestra en la **Figura 9.13** de la página 581.

2 Resolver problemas de aplicación con funciones exponenciales

Las funciones exponenciales se utilizan a menudo para describir el incremento y el decremento de ciertas cantidades. Ilustramos las funciones exponenciales en los cinco ejemplos siguientes.

EJEMPLO 3 **Aumento de centavos** Jennifer Hewlett le dijo a su hijo que si hacía los quehaceres domésticos ella le daría 2 centavos la primera semana y duplicaría la cantidad cada semana, durante las 10 semanas siguientes. El número de centavos que recibiría su hijo en cualquier semana, w, puede determinarse mediante la función $n(w)=2^w$. Determina el número de centavos que Jennifer daría a su hijo en la semana 8.

Solución Al evaluar 2^8, determinamos que en la semana 8 Jennifer daría a su hijo 256 centavos, o $2.56.

Resuelve ahora el ejercicio 29


© IFCAR/Wikipedia

EJEMPLO 4 **Valor de un Jeep** Ronald Yates se compró un Jeep Compass por $22,000. Supón que el valor del Jeep se deprecia a una tasa de 20% por año. Así, el valor del Jeep será 80% del valor del año anterior. Es decir, dentro de un año su valor será $22,000(0.80). Dentro de dos años su valor será $22,000(0.80)(0.80) = $22,000(0.80)^2$, y así sucesivamente. Por lo tanto, la fórmula para determinar el valor del Jeep en un momento dado es

$$v(t)=22{,}000(0.80)^t$$

donde t es el tiempo en años. Determina el valor del Jeep **a)** dentro de un año, y **b)** dentro de 5 años.

Solución

a) Para determinar el valor que tendrá el Jeep dentro de un año, sustituye t por 1.

$$\begin{aligned} v(t) &= 22{,}000(0.80)^t \\ v(1) &= 22{,}000(0.80)^1 \quad \text{Sustituye } t \text{ por 1.} \\ &= 17{,}600 \end{aligned}$$

Dentro de un año, el valor del Jeep será $17,600.

b) Para determinar el valor que tendrá el Jeep dentro de 5 años, sustituye t por 5.

$$v(t) = 22{,}000(0.80)^t$$
$$v(5) = 22{,}000(0.80)^5 \qquad \text{Sustituye } t \text{ por 5.}$$
$$= 22{,}000(0.32768)$$
$$= 7208.96$$

Dentro de cinco años, el valor del Jeep será \$7208.96.

Resuelve ahora el ejercicio 45

Antes hemos utilizado la fórmula de interés compuesto para determinar el monto o saldo que acumulamos en una cuenta de ahorro o inversión.

Fórmula de interés compuesto

La cantidad acumulada, A, en una cuenta de interés compuesto puede determinarse utilizando la fórmula

$$A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Donde p es el capital o el monto de la inversión inicial, r es la tasa de interés como un decimal, n es el número de periodos de capitalización por año y t es el tiempo en años.

Comprendiendo el álgebra

Cuando utilices la fórmula de interés compuesto necesitas tener cuidado de escribir la tasa de interés como un decimal. Por ejemplo, una tasa de interés de 5% significa que $r = 0.05$. Una tasa de interés de 2.75% significa que $r = 0.0275$, y así sucesivamente.

Cuando escribas n, el número de periodos de capitalización por año, aquí están los valores más comúnmente utilizados:

semestral: $n = 2$

trimestral: $n = 4$

mensual: $n = 12$

EJEMPLO 5 **Interés compuesto** Nancy Johnson invierte \$10,000 en un certificado de depósito (CD) con 5% de interés compuesto que capitalizará trimestralmente durante 6 años. Determina el valor del CD después de 6 años.

Solución Entiende Se nos da el capital inicial, p, que son \$10,000. También se nos da la tasa de interés, r, que es 5%. Debido a que el interés se capitaliza cada trimestre, el número de periodos de capitalización por año, n, es 4. El dinero se invierte durante 6 años, por lo tanto, t es 6.

Traduce Ahora sustituimos estos valores en la fórmula.

$$A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$
$$= 10{,}000\left(1 + \frac{0.05}{4}\right)^{4(6)}$$

Realiza los cálculos
$$= 10{,}000(1 + 0.0125)^{24}$$
$$= 10{,}000(1.0125)^{24}$$
$$\approx 10{,}000(1.347351) \qquad \text{Obtenido con una calculadora.}$$
$$\approx 13{,}473.51$$

Responde Después de 6 años, los \$10,000 originales habrán crecido a casi \$13,473.51.

Resuelve ahora el ejercicio 33

EJEMPLO 6 **Datación con carbono 14** Los científicos utilizan la datación por carbono 14 para calcular la edad de los fósiles y objetos. La fórmula que se emplea en el datado con carbono 14 es

$$A = A_0 \cdot 2^{-t/5600}$$

donde A_0 representa la cantidad de carbono 14 cuando el fósil se formó, y A representa la cantidad de carbono 14 que contiene después de t años. Si 500 gramos de carbono 14 estaban presentes cuando un organismo murió, ¿cuántos gramos se encuentran en el fósil 2000 años más tarde?

© Wikicommons

Solución **Entiende** Cuando el fósil murió, tenía 500 gramos de carbono 14. Por lo tanto, $A_0 = 500$. Para determinar cuántos gramos de carbono 14 estarán presentes después de 2000 años, sustituimos 2000 por t en la fórmula.

Traduce

$$A = A_0 \cdot 2^{-t/5600}$$
$$= 500(2)^{-2000/5600}$$

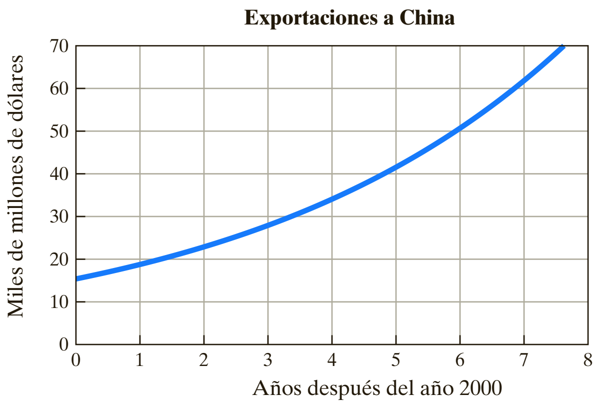
Realiza los cálculos

$$\approx 500(0.7807092) \qquad \text{Obtenido con una calculadora.}$$
$$\approx 390.35 \text{ gramos}$$

Responde Después de 2000 años, en el fósil todavía estarían presentes 390.35 de los 500 gramos de carbono 14 originales.

Resuelve ahora el ejercicio 39

EJEMPLO 7 **Exportaciones a China** La **Figura 9.5** muestra el monto anual de las exportaciones de Estados Unidos a China para los años 2000 a 2007 en miles de millones de dólares.



Fuente: Departamento de Comercio de Estados Unidos.

FIGURA 9.15

Una función exponencial que se aproxima mucho a esta curva es $f(t) = 15.35(1.22)^t$. En esta función, $f(t)$ es el valor total de las exportaciones de Estados Unidos a China y t es el número de años desde el año 2000. Supongamos que esta tendencia continúa. Utiliza esta función para estimar el valor de las exportaciones a China en el año **a)** 2010 y **b)** 2015. Redondea tus respuestas a los mil millones de dólares más cercanos.

Solución

a) **Entiende** En esta función, t son los años desde el 2000. Así, el año 2010 está representado por $t = 10$. Para estimar el valor de las exportaciones a China en el año 2010, tenemos que evaluar esta función para $t = 10$.

Traduce y realiza los cálculos

$$f(t) = 15.37(1.22)^t$$
$$f(10) = 15.37(1.22)^{10} \approx 112.27$$

Responde Por lo tanto, si esta tendencia continúa, las exportaciones a China en el año 2010 serán de cerca de $112 mil millones de dólares.

b) El año 2015 está representado por $t = 15$ y tenemos que evaluar $f(15)$.

$$f(t) = 15.37(1.22)^t$$
$$f(15) = 15.37(1.22)^{15} \approx 303.44$$

Responde Por lo tanto, si esta tendencia continúa, las exportaciones a China en el año 2015 serán de cerca de $303 mil millones de dólares.

Resuelve ahora el ejercicio 47

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.2

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

periodos   de la base   descenderá   del exponente   capital   ascenderá   tasa   tiempo

1. En una función exponencial, la variable está en la posición _______________.
2. En una función cuadrática, la variable está en la posición _______________.
3. Cuando graficamos funciones exponenciales de la forma $y = a^x$, si $a > 1$, la gráfica _______________ de izquierda a derecha.
4. Cuando graficamos funciones exponenciales de la forma $y = a^x$, si $0 < a < 1$, la gráfica _______________ de izquierda a derecha.
5. En la fórmula del interés compuesto $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$, p es el _______________ o monto de la inversión inicial.
6. En la fórmula del interés compuesto $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$, n es el número de _______________ de capitalización por año.

Practica tus habilidades

Grafica cada función exponencial.

7. $y = 2^x$
8. $y = 3^x$
9. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
10. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
11. $y = 4^x$
12. $y = 5^x$
13. $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
14. $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$
15. $y = 3^{-x}$
16. $y = 4^{-x}$
17. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$
18. $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$
19. $y = 2^{x-1}$
20. $y = 2^{x+1}$
21. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$
22. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$
23. $y = 2^x + 1$
24. $y = 2^x - 1$
25. $y = 3^x - 1$
26. $y = 3^x + 2$

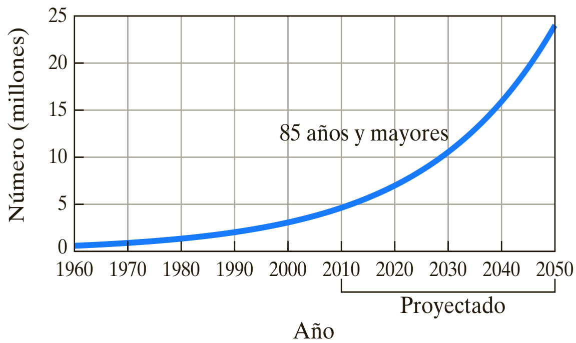
Resolución de problemas

27. **Población de Estados Unidos** La gráfica siguiente muestra el crecimiento de la población de personas de 85 años y mayores en Estados Unidos, para los años de 1960 a 2000 y la proyección hasta el año 2050. La función exponencial que aproxima a esta gráfica es

$$f(t) = 0.592(1.042)^t$$

En la función, $f(t)$ es la población, en millones, de personas de 85 años y mayores, y t es el número de años desde 1960. Suponiendo que esta tendencia continúa, utiliza esta función para estimar el número de personas de 85 años y mayores en Estados Unidos en los años **a)** 2060 y **b)** 2100.

Población en Estados Unidos de personas mayores de 85 años



Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos

28. **Población mundial** La población mundial ha crecido de forma exponencial desde alrededor del año 1650. La función exponencial que se aproxima mucho a la población mundial desde el año 1650 y con proyección al año 2015 es

$$f(t) = \frac{1}{2}(2.718)^{0.0072t}$$

En la función, $f(t)$ es la población mundial, en miles de millones de personas y t es el número de años contados a partir del año 1650. Si esta tendencia continúa, estima la población mundial en los años **a)** 2010 y **b)** 2015.

29. **Duplicación** Si inicia con \$2 y cada día se duplica la cantidad del día anterior, durante 9 días; determina la cantidad el día 9.

30. **Duplicación** Si tienes \$2 y cada día duplicas la cantidad del día anterior durante 12 días, determina la cantidad en el día 12.

31. **Bacterias en una placa de Petri** Se colocan cinco bacterias en una placa de Petri. La población se triplica diariamente. La fórmula para calcular el número de bacterias que hay en la placa el día t es

$$N(t) = 5(3)^t$$

donde t es el número de días, contados a partir de que se colocaron las cinco bacterias en la placa. ¿Cuántas bacterias habrá en la placa 2 días después de que se colocaron las cinco bacterias?

32. **Bacterias en una caja de Petri** Consulta el ejercicio 31. ¿Cuántas bacterias habrá en la caja 6 días después que se colocaron las cinco bacterias en la caja?

33. Interés compuesto Si Don Gacewicz invierte \$5000 a 6% de interés compuesto, capitalizable cada trimestre, determina el monto que tendrá después de 4 años (ver ejemplo 5).

34. Interés compuesto Si Don Treadwell invierte \$8000 a 4% de interés compuesto, capitalizable cada trimestre, determina el monto que tendrá después de 5 años.

35. Certificado de depósito Joni Burnette recibe un bono de \$5000 por cumplir con su cuota anual de ventas. Ella invierte el bono en un certificado de depósito (CD) que paga 4.2% de interés compuesto, capitalizable cada mes. Determina el valor del CD después de 5 años.

36. Cuenta del mercado financiero Martha Goshaw invierte \$2500 en una cuenta del mercado financiero que paga 3.6% de interés compuesto, capitalizable cada trimestre. Determina el monto acumulado después de 2 años.

37. Cuenta de ahorro Byron Dyce deposita \$3000 en una cuenta de ahorro que paga 2.4% de interés compuesto, capitalizable cada trimestre. Determina el monto acumulado después de 2 años.

38. Cuenta de retiro Para invertir en su retiro, John Salak invierte \$10,000 en una cuenta que paga 6% de interés compuesto, capitalizable cada semestre. Determina el monto acumulado después de 25 años.

39. Datación con carbono 14 Si en el hueso de cierto animal había originalmente 12 gramos de carbono 14, ¿cuánto quedará de este elemento al cabo de 1000 años? Utiliza $A = A_0 \cdot 2^{-t/5600}$ (ver ejemplo 6).

40. Datación con carbono 14 Tim Jonas encontró un fósil en un sitio arqueológico. Si originalmente en este fósil había 60 gramos de carbono 14, ¿cuánto quedará del elemento al cabo de 10,000 años?

41. Sustancia radiactiva La cantidad de una sustancia radiactiva presente, en gramos, en el tiempo t, en años, está dada por la fórmula $y = 80(2)^{-0.4t}$. Determina el número de gramos presentes después de **a)** 10 y **b)** 100 años.

42. Sustancia radiactiva La cantidad de una sustancia radiactiva presente, en gramos, en el tiempo t, en años, está dada por la fórmula $y = 20(3)^{-0.6t}$. Determina el número de gramos presentes después de 4 años.

43. Población La población esperada de Ackworth, que ahora tiene 2000 residentes, puede aproximarse mediante la fórmula $y = 2000(1.2)^{0.1t}$, donde t es el número de años en el futuro. Determina la población esperada en la ciudad dentro de **a)** 10 y **b)** 50 años.

44. Población La población esperada en Antwerp, que actualmente tiene 6800 residentes, puede aproximarse mediante la fórmula $y = 6800(1.4)^{-0.2t}$, donde t es el número de años en el futuro. Determina la población esperada en la ciudad dentro de 30 años.

45. Valor de un automóvil deportivo El costo de un automóvil deportivo nuevo es de \$24,000. Si se deprecia a una tasa de 18% anual, su valor dentro de t años puede aproximarse mediante la fórmula

$$V(t) = 24{,}000(0.82)^t$$

Determina el valor que tendrá el automóvil deportivo dentro de 4 años.

46. Valor de un vehículo todoterreno El costo de un vehículo todoterreno nuevo es de \$6200. Si se deprecia a una tasa de 15% por año, su valor dentro de t años puede aproximarse mediante la fórmula

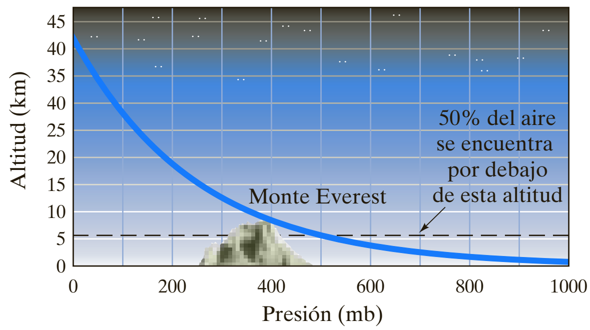
$$V(t) = 6200(0.85)^t$$

Determina el valor que tendrá el vehículo todoterreno dentro de 10 años.

© Allen R. Angel

Ver ejercicio 46.

47. Presión atmosférica La presión atmosférica varía según la altitud. Cuanto mayor sea la altitud menor será la presión, como se muestra en la gráfica siguiente.



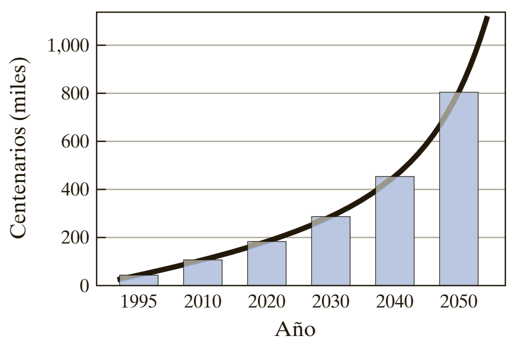
La ecuación $A = 41.97(0.996)^x$ puede utilizarse para estimar la altitud, A, en kilómetros, para una presión dada, x, en milibares (mb). Si la presión atmosférica en la cima del monte Everest es de aproximadamente 389 mb, estima la altura de la cima del monte Everest.

48. Centenarios Basado en las proyecciones del U.S. Census Bureau, el número de centenarios (personas de 100 años o mayores) aumentó de manera exponencial a partir del año 1995 (ver gráfica siguiente). La función

$$f(t) = 71.24(1.045)^t$$

puede utilizarse para calcular el número de estas personas, en miles, donde t es el tiempo, en años, a partir del año 1995. Utiliza esta función para cualcular el número de centenarios en el año **a)** 2060 y **b)** 2070.

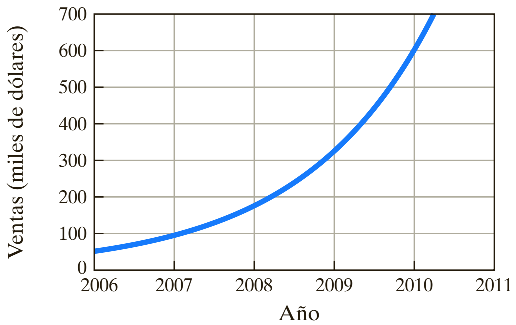
Número de centenarios en Estados Unidos



Fuente: Oficina de Censo de Estados Unidos

49. Tienda de bicicletas Spokes for Folks, una tienda de bicicletas, tuvo ventas anuales en los años 2006-2010 (en miles de dólares) como se muestra en la gráfica siguiente.

Ventas de Spokes for Folks



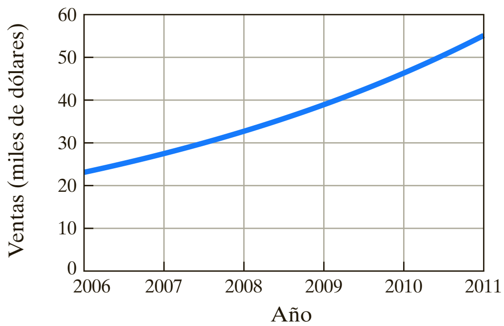
Fuente: Departamento de Comercio de Estados Unidos

Las ventas anuales pueden estimarse mediante la función $S(t) = 51.4(1.85)^t$, donde $S(t)$ son las ventas anuales, en miles de dólares, y t es el número de años después del año 2006. Supongamos que esta tendencia continúa; determina las ventas anuales para los años siguientes. Redondea tu respuesta con una aproximación de miles de dólares.

a) 2015 **b)** 2020

50. Venta de anuncios Signs 2 Go, una imprenta, tuvo ventas anuales en los años 2006−2010 (en miles de dólares) como se muestra en la gráfica de abajo.

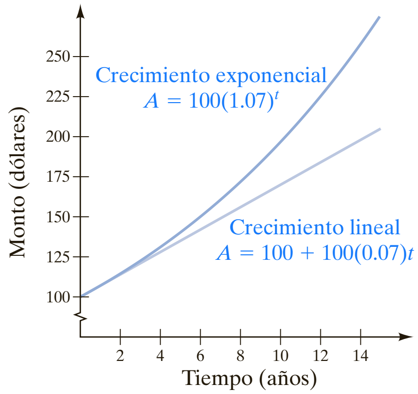
Ventas de Signs 2 Go



Las ventas anuales pueden estimarse mediante la función $S(t) = 23.1(1.19)^t$, donde $S(t)$ son las ventas anuales, en miles de dólares, y t es el número de años después del año 2006. Supongamos que esta tendencia continúa; determina las ventas anuales para los años siguientes. Redondea tu respuesta con una aproximación de miles de dólares.

a) 2015 **b)** 2020

51. Interés simple y compuesto La gráfica siguiente muestra el crecimiento lineal de \$100 invertidos a 7% de interés simple, y el crecimiento exponencial de la misma cantidad invertida a 7% de interés compuesto, capitalizable cada año. En las fórmulas, A representa la cantidad en dólares y t representa el tiempo, en años.



a) Utiliza la gráfica para calcular el tiempo de duplicación para \$100 invertidos a 7% de interés simple.

b) Calcula el tiempo de duplicación para \$100 invertidos a 7% de interés compuesto, capitalizable cada año.

c) Calcula la diferencia entre los montos resultantes después de 10 años sobre una cantidad de \$100 invertida en cada método.

d) En Estados Unidos, casi todos los bancos capitalizan el interés diariamente en lugar de hacerlo cada año. ¿Qué efecto tiene esto sobre el monto total? Explica.

52. En el ejercicio 51, graficamos la cantidad de varios años cuando se invierten \$100 a 7% de interés simple y a 7% de interés compuesto, capitalizable cada año.

a) Utiliza la fórmula del interés compuesto para determinar el monto si \$100 se capitalizan cada día a 7% por 10 años (supón 365 días por año).

b) Calcula la diferencia en el monto en 10 años por los \$100 invertidos a 7% de interés simple contra 7% de interés compuesto, capitalizable cada día.

Ejercicios de conceptos y escritura

53. Considera la función exponencial $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

a) ¿Qué le sucede a y conforme x crece?

b) ¿El valor de y puede ser 0? Explica.

c) ¿El valor de y puede ser negativo? Explica.

54. Considera la función exponencial $y = 2^x$.

a) ¿Qué le sucede a y conforme x crece?

b) ¿El valor de y puede ser 0? Explica.

c) ¿El valor de y puede ser negativo? Explica.

55. Considera las ecuaciones $y = 2^x$ y $y = 3^x$.

a) ¿Sus gráficas tienen la misma intersección con el eje y o es distinta en cada caso? Determina la intersección con el eje y en cada caso.

b) Compara las gráficas de las dos funciones. ¿Cómo son?

56. Considera las ecuaciones $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

a) ¿Sus gráficas tienen la misma intersección con el eje y o es distinta en cada caso? Determina la intersección con el eje y en cada caso.

b) Compara las gráficas de las dos funciones, ¿cómo son?

57. Ya antes establecimos que, para funciones exponenciales $f(x) = a^x$, el valor de a no puede ser igual a 1.

a) Cuando $a = 1$, ¿cómo se ve la gráfica de $f(x) = a^x$?

b) Cuando $a = 1$, ¿$f(x) = a^x$ es una función?

c) Cuando $a = 1$, ¿$f(x) = a^x$ tiene función inversa? Explica tu respuesta.

58. Compara las gráficas de $y = a^x$ y $y = a^x + k$, cuando $k > 0$, ¿cómo son?

59. Compara las gráficas de $y = a^x$ y $y = a^x - k$, cuando $k > 0$, ¿cómo son?

60. Compara las gráficas de $y = a^x$ y $y = a^{x+1}$, cuando $a > 1$, ¿cómo son?

61. Compara las gráficas de $y = a^x$ y $y = a^{x+2}$, cuando $a > 1$ ¿cómo son?

62. a) ¿$y = x^{\pi}$ es una función exponencial? Explica.

b) ¿$y = \pi^x$ es una función exponencial? Explica.

Problemas de desafío

63. Supongamos que Bob Jenkins le da a Carol Dantuma \$1 en el día 1, \$2 en el día 2, \$4 en el día 3, \$8 en el día 4, y continúa este proceso de duplicación durante 30 días.

a) Determina cuánto le dará Bob a Carol en el día 15.

b) Determina cuánto le dará Bob a Carol en el día 20.

c) Usando la forma exponencial, expresa el monto que Bob le da a Carol en el día n.

d) ¿Cuánto le dará Bob a Carol, en dólares, en el día 30? Escribe el monto en forma exponencial. Luego utiliza tu calculadora para evaluar.

e) Expresa el monto total que Bob le da a Carol durante los 30 días como una suma de términos exponenciales (no determines el valor real).

Actividad de grupo

64. Las funciones exponenciales o aproximadamente exponenciales son muy comunes.

a) Que cada miembro del grupo determine, de manera individual, una función que no haya sido dada en esta sección y que pueda aproximarse a una función exponencial. Pueden utilizar periódicos, libros y otras fuentes.

b) Analicen en grupo las funciones de todos los miembros. Determinen si cada función presentada es una función exponencial.

c) Escriban en grupo un ensayo en el que analicen cada una de las funciones y establezcan por qué creen que cada una de ellas es exponencial.

Ejercicios de repaso acumulados

[5.1] **65.** Considera el polinomio

$$2.3x^4y - 6.2x^6y^2 + 9.2x^5y^2$$

a) Escribe el polinomio en orden descendente de la variable x.

b) ¿Cuál es el grado del polinomio?

c) ¿Cuál es el coeficiente principal?

[5.2] **66.** Si $f(x) = x + 5$ y $g(x) = x^2 - 2x + 4$, determina $(f \cdot g)(x)$.

[7.1] **67.** Escribe $\sqrt{a^2 - 8a + 16}$ como un valor absoluto.

[7.3] **68.** Simplifica $\sqrt[4]{\dfrac{32x^5y^9}{2y^3z}}$.

9.3 Funciones logarítmicas

1 Definir un logaritmo.
2 Convertir de forma exponencial a forma logarítmica.
3 Graficar funciones logarítmicas.
4 Comparar gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas.
5 Resolver problemas de aplicación con funciones logarítmicas.

1 Definir un logaritmo

Considera la función exponencial $y = 2^x$. En la **Figura 9.13** de la página 581, observamos que la gráfica de esta función cumple el criterio de la recta horizontal y, por lo tanto, esta función es una función uno a uno y tiene una inversa. Para determinar la inversa de $y = 2^x$ intercambiamos x y y para obtener la ecuación $x = 2^y$. Para despejar y de esta ecuación, introducimos una nueva definición.

Logaritmo

Para $x > 0$ y $a > 0$, $a \neq 1$

$$y = \log_a x \text{ significa } x = a^y$$

La expresión $\log_a x$ se lee como "el logaritmo de x en la base a", o simplemente "log, base a, de x".

Utilizando esta definición, podemos despejar y de la ecuación $x = 2^y$ reescribiendo la ecuación exponencial como una ecuación que implica un logaritmo.

$$\underbrace{x = 2^y}_{\text{Forma exponencial}} \quad \text{es una ecuación equivalente a} \quad \underbrace{y = \log_2 x}_{\text{Forma logarítmica}}$$

Por lo tanto, $y = 2^x$ y $y = \log_2 x$ son funciones inversas. En general, $y = a^x$ y $y = \log_a x$ son funciones inversas.

2 Convertir de forma exponencial a forma logarítmica

Para convertir una ecuación en la forma exponencial a una ecuación logarítmica considera el diagrama siguiente:

Exponente

$$a^y = x \quad \text{es equivalente a} \quad \log_a x = y$$

Base

Forma exponencial **Forma logarítmica**

Por ejemplo:

Exponente

$$2^3 = 8 \qquad\qquad \log_2 8 = 3$$

Base

Por lo tanto, la ecuación exponencial $2^3 = 8$ es equivalente a la ecuación logarítmica $\log_2 8 = 3$, o $3 = \log_2 8$.

A continuación se presentan algunos ejemplos de cómo una expresión exponencial puede convertirse en una expresión logarítmica.

Forma exponencial	Forma logarítmica
$10^0 = 1$	$\log_{10} 1 = 0$
$4^2 = 16$	$\log_4 16 = 2$
$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$	$\log_{1/2} \frac{1}{32} = 5$
$5^{-2} = \frac{1}{25}$	$\log_5 \frac{1}{25} = -2$

Resolvamos algunos ejemplos relacionados con la conversión de la forma exponencial a la forma logarítmica, y viceversa.

> **Comprendiendo el álgebra**
>
> Una frase útil cuando trabajamos con logaritmos es: *Un logaritmo es un exponente.*
>
> La expresión $\log_a x$ representa el exponente al que la base a debe elevarse para obtener x.
>
> Por ejemplo, $\log_2 8$ representa el exponente al que 2 debe elevarse para obtener 8. Por lo tanto,
>
> $\log_2 8 = 3$ ya que $2^3 = 8$

EJEMPLO 1 Escribe cada ecuación en forma logarítmica.

a) $3^4 = 81$ **b)** $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$ **c)** $2^{-5} = \frac{1}{32}$

Solución

a) $\log_3 81 = 4$ **b)** $\log_{1/5} \frac{1}{125} = 3$ **c)** $\log_2 \frac{1}{32} = -5$

Resuelve ahora el ejercicio 19

EJEMPLO 2 Escribe cada ecuación en forma exponencial.

a) $\log_7 49 = 2$ **b)** $\log_4 64 = 3$ **c)** $\log_{1/3} \frac{1}{81} = 4$

Solución

a) $7^2 = 49$ **b)** $4^3 = 64$ **c)** $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

Resuelve ahora el ejercicio 35

EJEMPLO 3 Escribe cada ecuación en forma exponencial; luego determina el valor desconocido.

a) $y = \log_5 25$ **b)** $2 = \log_a 16$ **c)** $3 = \log_{1/2} x$

Solución

a) $5^y = 25$. Ya que $5^2 = 25$, $y = 2$.

b) $a^2 = 16$. Ya que $4^2 = 16$, $a = 4$. Observa que a debe ser mayor que 0, por lo que -4 no es una respuesta posible para a.

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = x$. Ya que $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, $x = \frac{1}{8}$.

Resuelve ahora el ejercicio 53

EJEMPLO 4 Evalúa lo siguiente.

a) $\log_5 25$ **b)** $\log_5 625$ **c)** $\log_5 5$

d) $\log_5 1$ **e)** $\log_5\left(\frac{1}{5}\right)$ **f)** $\log_5 \sqrt{5}$

Solución

a) $\log_5 25 = 2$ ya que $5^2 = 25$.

b) $\log_5 625 = 4$ ya que $5^4 = 625$.

c) $\log_5 5 = 1$ ya que $5^1 = 5$.

d) $\log_5 1 = 0$ ya que $5^0 = 1$.

e) $\log_5\left(\frac{1}{5}\right) = -1$ ya que $5^{-1} = \frac{1}{5}$.

f) $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$ ya que $5^{1/2} = \sqrt{5}$.

Resuelve ahora el ejercicio 75

Consejo útil

Ya que un logaritmo es un exponente, es muy importante conocer las reglas de los exponentes cuando evaluamos expresiones logarítmicas. Sería útil repasar las reglas de los exponentes de la sección 1.5 de la página 45, así como la relación entre radicales y exponentes racionales de la sección 7.2 de la página 435.

3 Graficar funciones logarítmicas

Ahora estamos listos para introducir funciones logarítmicas.

Función logarítmica

Para cualquier número real $a > 0$, $a \neq 1$ y $x > 0$,

$$f(x) = \log_a x \text{ o } y = \log_a x$$

es una **función logarítmica**.

Ejemplos de funciones logarítmicas

$f(x) = \log_5 x$ $y = \log_{1/2} x$ $g(x) = \log_5 x$

Las funciones logarítmicas pueden graficarse mediante la conversión de la ecuación logarítmica a una ecuación exponencial y luego trazando los puntos.

Antes de graficar funciones logarítmicas analizaremos algunas características de las gráficas.

Gráficas de funciones logarítmicas

Para todas las funciones logarítmicas de la forma $y = \log_a x$ o $f(x) = \log_a x$, donde $a > 0$, $a \neq 1$ y $x > 0$

1. El dominio de la función es $(0, \infty)$.
2. El rango de la función es $(-\infty, \infty)$.
3. La gráfica pasa por los puntos $\left(\frac{1}{a}, -1\right)$, $(1, 0)$ y $(a, 1)$.

EJEMPLO 5 Grafica $y = \log_2 x$. Establece el dominio y el rango de la función.

Solución Ésta es una ecuación de la forma $y = \log_a x$, donde $a = 2$. $y = \log_2 x$ significa $x = 2^y$. Por lo tanto, para empezar construimos la tabla de valores usando $x = 2^y$. La tabla se desarrollará con mayor facilidad seleccionando valores para y y determinando los valores correspondientes de x. Los tres puntos listados en el paso 3 del recuadro aparecen en azul en la tabla.

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
y	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4

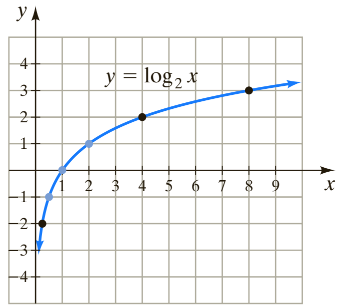


FIGURA 9.16

Ahora trazamos la gráfica (**Figura 9.16**). Los tres pares ordenados en azul en la tabla también se resaltan en azul en la gráfica. El dominio, es decir, el conjunto de valores de x, es $\{x|x > 0\}$. El rango, o conjunto de valores de y, es el conjunto de todos los números reales, $\mathbb{R}$.

Resuelve ahora el ejercicio 91

EJEMPLO 6 Grafica $y = \log_{1/2} x$. Indica el dominio y el rango de la función.

Solución Ésta es una ecuación de la forma $y = \log_a x$, donde $a = \frac{1}{2}$. $y = \log_{1/2} x$ significa $x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$. Primero construimos una tabla de valores seleccionando valores para y y determinando los valores correspondientes de x.

x	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
y	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4

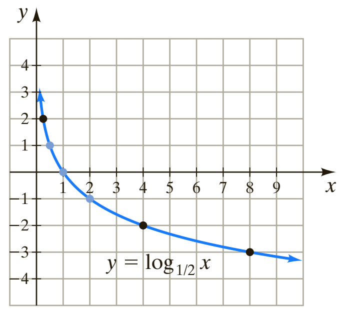


FIGURA 9.17

La gráfica se ilustra en la **Figura 9.17**. El dominio es $\{x|x > 0\}$. El rango es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$.

Resuelve ahora el ejercicio 93

Comprendiendo el álgebra

Cuando graficamos funciones de la forma $y = \log_a x$ o $f(x) = \log_a x$, podemos predecir la forma de la gráfica mediante la observación de tres puntos:

$\left(\frac{1}{a}, -1\right)$, $(1, 0)$ y $(a, 1)$.

- Cuando $a > 1$, la gráfica resulta casi vertical a la izquierda de $\left(\frac{1}{a}, -1\right)$ y un tanto horizontal a la derecha de $(a, 1)$; ve el ejemplo 5.
- Cuando $0 < a < 1$, la gráfica resulta casi vertical a la izquierda de $(a, 1)$ y un tanto horizontal a la derecha de $\left(\frac{1}{a}, -1\right)$; ve el ejemplo 6.

Si analizamos los dominios en los ejemplos 5 y 6, veremos que los dominios tanto de $y = \log_2 x$ como de $y = \log_{1/2} x$ son $\{x|x > 0\}$. De hecho, *para cualquier función logarítmica $y = \log_a x$, el dominio es $\{x|x > 0\}$*. Observa también que las gráficas de los ejemplos 5 y 6 son gráficas de funciones uno a uno.

4 Comparar gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas

Recuerda que $y = a^x$ y $y = \log_a x$ son *funciones inversas*. Por lo tanto, podemos escribir: si $f(x) = a^x$, entonces $f^{-1}(x) = \log_a x$. En el recuadro de abajo se destacan algunas de las características de las gráficas de la función exponencial general $y = a^x$ y la función logarítmica general $y = \log_a x$.

Características de las gráficas

	FUNCIÓN EXPONENCIAL $y = a^x\ (a > 0, a \neq 1)$		FUNCIÓN LOGARÍTMICA $y = \log_a x\ (a > 0, a \neq 1)$
Dominio:	$(-\infty, \infty)$		$(0, \infty)$
Rango:	$(0, \infty)$		$(-\infty, \infty)$
Puntos en la gráfica:	$\left(-1, \frac{1}{a}\right)$, $(0, 1)$, $(1, a)$	x se transforma en y, y se transforma en x	$\left(\frac{1}{a}, -1\right)$, $(1, 0)$, $(a, 1)$

En la **Figura 9.18** se muestran las graficas de $y = a^x$ y $y = \log_a x$ para $a > 1$. Observa que las gráficas son simétricas respecto de la recta $y = x$.

Comprendiendo el álgebra

Puesto que $y = a^x$ y $y = \log_a x$ son funciones inversas, podemos señalar lo siguiente:

- El rango de la función exponencial es el dominio de la función logarítmica y viceversa.
- Si (a, b) es un punto en la gráfica de la función exponencial, entonces (b, a) es un punto en la gráfica de la función logarítmica.

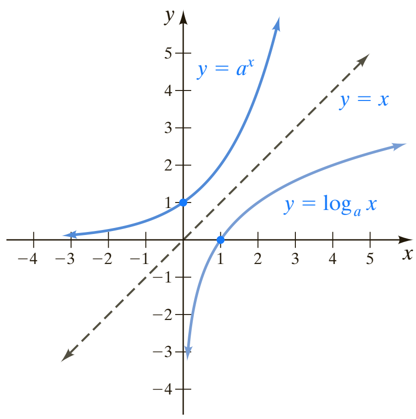


FIGURA 9.18

En la **Figura 9.19** se ilustran las gráficas de $y = 2^x$ y $y = \log_2 x$. En la **Figura 9.20** se ilustran las gráficas de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $y = \log_{1/2} x$. En cada figura, las gráficas son inversas entre sí y simétricas respecto de la recta $y = x$.

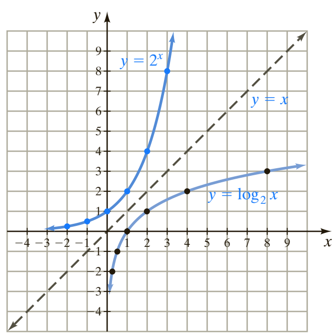


FIGURA 9.19

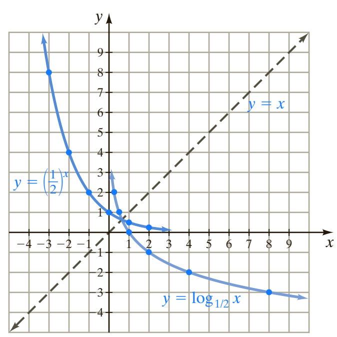


FIGURA 9.20

5 Resolver problemas de aplicación con funciones logarítmicas

Más adelante veremos muchos problemas de aplicación que involucran logaritmos; ahora solo analizaremos una de sus aplicaciones más importantes.

EJEMPLO 7 **Terremotos** Los logaritmos se utilizan para medir la magnitud de los terremotos. En la escala Richter, desarrollada por el sismólogo Charles F. Richter, la magnitud, R, de un terremoto está dada por la fórmula

$$R = \log_{10} I$$

donde I representa el número de veces que el terremoto es más intenso respecto de la actividad sísmica más pequeña que se puede medir con un sismógrafo.

a) Si un terremoto mide 4 grados en la escala Richter, ¿cuántas veces es más intenso respecto de la actividad sísmica más pequeña que se puede medir?

b) ¿Cuántas veces es más intenso un terremoto que mide 5 grados en la escala Richter que uno que mide 4?

Solución

© robert paul van beets/Shutterstock

a) Entiende El número en la escala Richter, R, es 4. Para determinar cuántas veces es más intenso el terremoto respecto de la actividad sísmica más pequeña que puede medirse, I, sustituimos $R = 4$ en la fórmula y despejamos I.

Traduce
$$R = \log_{10} I$$
$$4 = \log_{10} I$$

Realiza los cálculos
$$10^4 = I \qquad \text{Cambia a la forma exponencial.}$$
$$10{,}000 = I$$

Responde Por lo tanto, un terremoto que mide 4 grados en la escala Richter es 10,000 veces más intenso respecto de la actividad sísmica más pequeña que se puede medir.

b)
$$5 = \log_{10} I$$
$$10^5 = I \qquad \text{Cambia a la forma exponencial.}$$
$$100{,}000 = \mathrm{I}$$

Como $(10{,}000)(10) = 100{,}000$, un terremoto que mide 5 grados en la escala Richter es 10 veces más intenso que un terremoto que mide 4 grados en la escala Richter.

Resuelve ahora el ejercicio 99

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.3

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

logarítmica exponente simétricas base inversas dominio rango compuesta

1. La expresión $\log_a x$ representa el _______________ al que la base a debe elevarse para obtener x.
2. En general, $y = a^x$ y $y = \log_a x$ son funciones _____________.
3. En ambas ecuaciones $a^y = x$ y $\log_a x = y$, a se denomina como la _______________.
4. $f(x) = \log_5 x$ es un ejemplo de una función ______________.
5. Para cualquier función logarítmica, el _______________ es $\{x|x > 0\}$.
6. Las gráficas de $y = a^x$ y $y = \log_a x$ son _______________ con respecto a la recta $y = x$.

Practica tus habilidades

Escribe cada ecuación en forma logarítmica.

7. $5^2 = 25$
8. $4^2 = 16$
9. $3^2 = 9$
10. $2^6 = 64$
11. $16^{1/2} = 4$
12. $49^{1/2} = 7$
13. $8^{1/3} = 2$
14. $16^{1/4} = 2$
15. $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$
16. $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$
17. $2^{-3} = \frac{1}{8}$
18. $6^{-3} = \frac{1}{216}$
19. $4^{-3} = \frac{1}{64}$
20. $81^{1/2} = 9$
21. $64^{1/3} = 4$
22. $5^{-4} = \frac{1}{625}$
23. $8^{-1/3} = \frac{1}{2}$
24. $16^{-1/2} = \frac{1}{4}$
25. $81^{-1/4} = \frac{1}{3}$
26. $32^{-1/5} = \frac{1}{2}$
27. $10^{0.8451} = 7$
28. $10^{1.0792} = 12$
29. $e^2 = 7.3891$
30. $e^{-1/2} = 0.6065$
31. $a^n = b$
32. $c^b = w$

Escribe cada ecuación en forma exponencial.

33. $\log_3 9 = 2$
34. $\log_4 64 = 3$
35. $\log_{1/3} \frac{1}{27} = 3$
36. $\log_{1/2} \frac{1}{64} = 6$
37. $\log_5 \frac{1}{25} = -2$
38. $\log_5 \frac{1}{625} = -4$
39. $\log_{49} 7 = \frac{1}{2}$
40. $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$
41. $\log_9 \frac{1}{81} = -2$
42. $\log_{10} \frac{1}{100} = -2$
43. $\log_{10} \frac{1}{1000} = -3$
44. $\log_{10} 1000 = 3$
45. $\log_6 216 = 3$
46. $\log_4 1024 = 5$
47. $\log_{10} 0.62 = -0.2076$
48. $\log_{10} 8 = 0.9031$
49. $\log_e 6.52 = 1.8749$
50. $\log_e 30 = 3.4012$
51. $\log_w s = -p$
52. $\log_r c = -a$

Escribe cada ecuación en forma exponencial; luego determina el valor desconocido.

53. $\log_4 64 = y$
54. $\log_5 25 = y$
55. $\log_a 125 = 3$
56. $\log_a 81 = 4$
57. $\log_3 x = 3$
58. $\log_2 x = 5$
59. $\log_2 \frac{1}{16} = y$
60. $\log_8 \frac{1}{64} = y$
61. $\log_{1/2} x = 6$
62. $\log_{1/3} x = 4$
63. $\log_a \frac{1}{27} = -3$
64. $\log_9 \frac{1}{81} = y$
65. $\log_{25} 5 = y$
66. $\log_{36} 6 = y$

Evalúa lo siguiente.

67. $\log_{10} 1$
68. $\log_{10} 10$
69. $\log_{10} 100$
70. $\log_{10} 1000$
71. $\log_{10} \frac{1}{100}$
72. $\log_{10} \frac{1}{1000}$
73. $\log_{10} 10{,}000$
74. $\log_{10} 100{,}000$
75. $\log_4 256$
76. $\log_{13} 169$
77. $\log_3 \frac{1}{81}$
78. $\log_5 \frac{1}{125}$
79. $\log_8 \frac{1}{64}$
80. $\log_{14} \frac{1}{14}$
81. $\log_7 \sqrt{7}$
82. $\log_7 \sqrt[3]{7}$
83. $\log_9 9$
84. $\log_{12} 12$
85. $\log_{100} 10$
86. $\log_{1000} 10$

Grafica la función logarítmica.

87. $y = \log_2 x$
88. $y = \log_3 x$
89. $y = \log_{1/2} x$
90. $y = \log_{1/3} x$
91. $y = \log_5 x$
92. $y = \log_4 x$
93. $y = \log_{1/5} x$
94. $y = \log_{1/4} x$

Grafica cada par de funciones en los mismos ejes.

95. $y = 2^x, y = \log_{1/2} x$
96. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = \log_2 x$
97. $y = 2^x, y = \log_2 x$
98. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = \log_{1/2} x$

Resolución de problemas

99. **Terremoto** Si la magnitud de un terremoto es de 7 grados en la escala Richter, ¿cuántas veces es más intenso respecto de la actividad sísmica más pequeña que puede medirse? Utiliza $R = \log_{10} I$ (ver ejemplo 7).

100. **Terremoto** Si la magnitud de un terremoto es de 5 grados en la escala Richter, ¿cuántas veces es más intenso respecto de la actividad sísmica más pequeña que puede medirse? Utiliza $R = \log_{10} I$.

101. **Terremoto** ¿Cuántas veces es más intenso un terremoto que mide 6 grados en la escala Richter que uno que mide 2 grados?

102. **Terremoto** ¿Cuántas veces es más intenso un terremoto que mide 4 grados en la escala Richter que uno que mide 1 grado?

103. Grafica $y = \log_2 (x - 1)$.

104. Grafica $y = \log_3 (x - 2)$.

Ejercicios de conceptos y escritura

105. Considera la función logarítmica $y = \log_a x$.

a) ¿Cuáles son las restricciones en a?

b) ¿Cuál es el dominio de la función?

c) ¿Cuál es el rango de la función?

106. Para la función logarítmica $y = \log_a (x - 3)$, ¿cuál debe ser el valor que hace verdadera x? Explica.

107. Si algunos puntos en la gráfica de la función exponencial $f(x) = a^x$ son $\left(-3, \frac{1}{27}\right)$, $\left(-2, \frac{1}{9}\right)$, $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 9)$, y $(3, 27)$, haz una lista de los puntos en la gráfica de la función logarítmica $g(x) = \log_a x$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

108. ¿Cuál es la intersección con el eje x de la gráfica de una ecuación de la forma $y = \log_a x$?

109. Si $f(x) = 5^x$, ¿cuál es el valor de $f^{-1}(x)$?

110. Si $f(x) = \log_6 x$, ¿cuál es el valor de $f^{-1}(x)$?

111. ¿Entre cuáles dos enteros debe estar $\log_3 62$? Explica.

112. ¿Entre cuáles dos enteros debe estar $\log_{10} 0.672$? Explica.

113. ¿Entre cuáles dos enteros debe estar $\log_{10} 425$? Explica.

114. ¿Entre cuáles dos enteros debe estar $\log_5 0.3256$? Explica.

115. Para $x > 1$, ¿qué valor aumenta más rápido conforme x se incrementa, 2^x o $\log_{10} x$? Explica.

116. Para $x > 1$, ¿qué valor aumenta más rápido conforme x se incrementa, x o $\log_{10} x$? Explica.

Ejercicios de repaso acumulados

[5.4-5.7] *Factoriza.*

117. $2x^3 - 6x^2 - 36x$

118. $x^4 - 16$

119. $40x^2 + 52x - 12$

120. $6r^2s^2 + rs - 1$

9.4 Propiedades de los logaritmos

1 Utilizar la regla del producto para logaritmos.

2 Utilizar la regla del cociente para logaritmos.

3 Utilizar la regla de la potencia para logaritmos.

4 Utilizar propiedades adicionales de los logaritmos.

En esta sección vamos a estudiar varias propiedades de los logaritmos. Comenzamos con una definición importante.

Argumento

En la expresión logarítmica $\log_a x$, a x se le denomina el **argumento** del logaritmo.

Expresión logarítmica	Argumento
$\log_{10} 3$	3
$\log_2 (x - 5)$	$x - 5$
$\log_7 (x^2 - 4x + 2)$	$x^2 - 4x + 2$

Ya que solo podemos aceptar el logaritmo de un número positivo, cuando un argumento contiene una variable, vamos a suponer que el argumento representa un número positivo.

1 Utilizar la regla del producto para logaritmos

Regla del producto para logaritmos

Para números reales positivos x, y y a, $a \neq 1$,

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \qquad \text{Propiedad 1}$$

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

Ejemplos de la propiedad 1

$$\log_3 (6 \cdot 7) = \log_3 6 + \log_3 7$$

$$\log_4 3z = \log_4 3 + \log_4 z$$

$$\log_8 x^2 = \log_8 (x \cdot x) = \log_8 x + \log_8 x \text{ o } 2 \log_8 x$$

La propiedad 1, la regla del producto, puede extenderse a tres o más factores, por ejemplo, $\log_a xyz = \log_a x + \log_a y + \log_a z$.

2 Utilizar la regla del cociente para logaritmos

Comprendiendo el álgebra

Recuerda que *un logaritmo es un exponente.* Por lo tanto, las reglas de los exponentes que estudiamos anteriormente están relacionadas con las reglas para logaritmos que aquí presentamos.

- La regla del exponente

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

está relacionada con la regla para logaritmos

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

- La regla del exponente

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

está relacionada con la regla para logaritmos

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

- La regla del exponente

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

está relacionada con la regla para logaritmos

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

Regla del cociente para logaritmos

Para números reales positivos x, y y a, $a \neq 1$,

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad \text{Propiedad 2}$$

El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

Ejemplos de la propiedad 2

$$\log_3 \frac{19}{4} = \log_3 19 - \log_3 4$$

$$\log_6 \frac{x}{3} = \log_6 x - \log_6 3$$

$$\log_5 \frac{z}{z + 2} = \log_5 z - \log_5 (z + 2)$$

3 Utilizar la regla de la potencia para logaritmos

Regla de la potencia para logaritmos

Si x y a son números reales positivos, $a \neq 1$, y n es cualquier número real, entonces

$$\log_a x^n = n \log_a x \qquad \text{Propiedad 3}$$

El logaritmo de un número elevado a una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo del número.

Ejemplos de la propiedad 3

$$\log_2 4^3 = 3\log_2 4$$

$$\log_3 x^2 = 2\log_3 x$$

$$\log_5 \sqrt{12} = \log_5 (12)^{1/2} = \frac{1}{2}\log_5 12$$

$$\log_8 \sqrt[5]{z+3} = \log_8 (z+3)^{1/5} = \frac{1}{5}\log_8 (z+3)$$

EJEMPLO 1 Utiliza las propiedades 1 a 3 para desarrollar.

a) $\log_8 \frac{29}{43}$ **b)** $\log_4 (64 \cdot 180)$ **c)** $\log_{10} (22)^{1/5}$

Solución

a) $\log_8 \frac{29}{43} = \log_8 29 - \log_8 43$ Regla del cociente

b) $\log_4(64 \cdot 180) = \log_4 64 + \log_4 180$ Regla del producto

c) $\log_{10}(22)^{1/5} = \frac{1}{5}\log_{10} 22$ Regla de la potencia

Resuelve ahora el ejercicio 11

Con frecuencia tendremos que utilizar dos o más de estas propiedades en el mismo problema.

EJEMPLO 2 Desarrolla.

a) $\log_{10} 4(x+2)^3$ **b)** $\log_5 \frac{(4-a)^2}{3}$

c) $\log_5 \left(\frac{4-a}{3}\right)^2$ **d)** $\log_5 \frac{[x(x+4)]^3}{8}$

Solución

a)
$$\begin{aligned} \log_{10} 4(x+2)^3 &= \log_{10} 4 + \log_{10}(x+2)^3 && \text{Regla del producto} \\ &= \log_{10} 4 + 3\log_{10}(x+2) && \text{Regla de la potencia} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \log_5 \frac{(4-a)^2}{3} &= \log_5 (4-a)^2 - \log_5 3 && \text{Regla del cociente} \\ &= 2\log_5 (4-a) - \log_5 3 && \text{Regla de la potencia} \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \log_5 \left(\frac{4-a}{3}\right)^2 &= 2\log_5 \left(\frac{4-a}{3}\right) && \text{Regla de la potencia} \\ &= 2[\log_5 (4-a) - \log_5 3] && \text{Regla del cociente} \\ &= 2\log_5 (4-a) - 2\log_5 3 && \text{Propiedad distributiva} \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} \log_5 \frac{[x(x+4)]^3}{8} &= \log_5 [x(x+4)]^3 - \log_5 8 && \text{Regla del cociente} \\ &= 3\log_5 x(x+4) - \log_5 8 && \text{Regla de la potencia} \\ &= 3[\log_5 x + \log_5 (x+4)] - \log_5 8 && \text{Regla del producto} \\ &= 3\log_5 x + 3\log_5 (x+4) - \log_5 8 && \text{Propiedad distributiva} \end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 21

Consejo útil

En el ejemplo 2 inciso **b)**, cuando desarrollamos $\log_5 \frac{(4-a)^2}{3}$, primero usamos la regla del cociente. En el ejemplo 2 inciso **c)**, cuando desarrollamos $\log_5 \left(\frac{4-a}{3}\right)^2$, primero usamos la regla de la potencia. ¿Notas la diferencia en ambos problemas? En $\log_5 \frac{(4-a)^2}{3}$, solo el numerador del argumento está elevado al cuadrado, por lo tanto, primero utilizamos la regla del cociente. En $\log_5 \left(\frac{4-a}{3}\right)^2$, todo el argumento está elevado al cuadrado, de modo que primero usamos la regla de la potencia.

EJEMPLO 3 Escribe cada una de las siguientes expresiones como el logaritmo de una sola expresión.

a) $3\log_8(z+2) - \log_8 z$

b) $\log_7(x+1) + 2\log_7(x+4) - 3\log_7(x-5)$

Solución

a)
$$\begin{aligned} 3\log_8(z+2) - \log_8 z &= \log_8(z+2)^3 - \log_8 z && \text{Regla de la potencia} \\ &= \log_8 \frac{(z+2)^3}{z} && \text{Regla del cociente} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} &\log_7(x+1) + 2\log_7(x+4) - 3\log_7(x-5) \\ &= \log_7(x+1) + \log_7(x+4)^2 - \log_7(x-5)^3 && \text{Regla de la potencia} \\ &= \log_7(x+1)(x+4)^2 - \log_7(x-5)^3 && \text{Regla del cociente} \\ &= \log_7 \frac{(x+1)(x+4)^2}{(x-5)^3} && \text{Regla del cociente} \end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 39

Comprendiendo el álgebra

Nuestras dos últimas propiedades de logaritmos están relacionadas con las propiedades de las funciones inversas.

Al principio de este capítulo encontramos que si dos funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son inversas entre sí, entonces

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

y

$$(f \circ f^{-1})(x) = x$$

También analizamos que las funciones $f(x) = a^x$ y $f^{-1}(x) = \log_a x$ son funciones inversas. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(x) &= f^{-1}[f(x)] \\ &= f^{-1}(a)^x \\ &= \log_a a^x = x \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (f \circ f^{-1})(x) &= f[f^{-1}(x)] \\ &= f(\log_a x) \\ &= a^{\log_a x} = x \end{aligned}$$

Prevención de errores comunes

LAS REGLAS CORRECTAS SON

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Observa que

$$\log_a(x+y) \neq \log_a x + \log_a y \qquad \log_a xy \neq (\log_a x)(\log_a y)$$

$$\log_a(x-y) \neq \log_a x - \log_a y \qquad \log_a \frac{x}{y} \neq \frac{\log_a x}{\log_a y}$$

4 Utilizar propiedades adicionales de los logaritmos

Las últimas propiedades que analizaremos en esta sección se utilizarán para resolver ecuaciones en la sección 9.6.

Propiedades adicionales de los logaritmos

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces

$$\log_a a^x = x \qquad \text{Propiedad 4}$$

y $$a^{\log_a x} = x \quad (x > 0) \qquad \text{Propiedad 5}$$

Ejemplos de la propiedad 4	Ejemplos de la propiedad 5
$\log_6 6^5 = 5$	$3^{\log_3 7} = 7$
$\log_9 9^x = x$	$5^{\log_5 x} = x \quad (x > 0)$

EJEMPLO 4 Evalúa. **a)** $\log_5 25$ **b)** $\sqrt{16}^{\,\log_4 9}$

Solución

a) $\log_5 25$ puede escribirse como $\log_5 5^2$. De acuerdo con la propiedad 4,

$$\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$$

b) $\sqrt{16}^{\,\log_4 9}$ puede escribirse como $4^{\log_4 9}$. De acuerdo con la propiedad 5,

$$\sqrt{16}^{\,\log_4 9} = 4^{\log_4 9} = 9$$

Resuelve ahora el ejercicio 55

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.4

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

multiplicado más menos positivos inversas argumento suma compuestas

1. Podemos aceptar únicamente los logaritmos de números ________________.
2. En la expresión logarítmica $\log_a x$, a x se le denomina el ________________ del logaritmo.
3. El logaritmo de un producto es igual a la ________________ de los logaritmos de los factores.
4. El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador ________________ el logaritmo del denominador.
5. El logaritmo de un número elevado a una potencia es igual al exponente ________________ por el logaritmo del número.
6. Si dos funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son ________________ entre sí, entonces $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ y $(f \circ f^{-1})(x) = x$.

Practica tus habilidades

Utiliza las propiedades 1-3 para desarrollar.

7. $\log_2 (3 \cdot 5)$
8. $\log_3 (2 \cdot 11)$
9. $\log_8 7(x + 3)$
10. $\log_9 x(x + 2)$
11. $\log_2 \dfrac{27}{11}$
12. $\log_5 (41 \cdot 9)$
13. $\log_{10} \dfrac{\sqrt{x}}{x - 9}$
14. $\log_5 3^8$
15. $\log_6 x^7$
16. $\log_9 12(4)^6$
17. $\log_4 (r + 7)^5$
18. $\log_8 b^3(b - 2)$
19. $\log_4 \sqrt{\dfrac{a^3}{a + 2}}$
20. $\log_9 (x - 6)^3 x^2$
21. $\log_3 \dfrac{d^6}{(a - 8)^4}$
22. $\log_7 x^2(x - 13)$
23. $\log_8 \dfrac{y(y + 4)}{y^3}$
24. $\log_{10} \left(\dfrac{z}{6}\right)^2$
25. $\log_{10} \dfrac{9m}{8n}$
26. $\log_5 \dfrac{\sqrt{a}\,\sqrt[3]{b}}{\sqrt[4]{c}}$

Escribe como logaritmo de una sola expresión.

27. $\log_2 3 + \log_2 7$
28. $\log_7 4 + \log_7 3$
29. $\log_2 9 - \log_2 5$
30. $\log_7 17 - \log_7 3$
31. $6 \log_4 2$
32. $\dfrac{1}{3} \log_8 7$
33. $\log_{10} x + \log_{10} (x + 3)$
34. $\log_5 (a + 1) - \log_5 (a + 10)$
35. $2 \log_9 z - \log_9 (z - 2)$
36. $3 \log_8 y + 2 \log_8 (y - 9)$
37. $4(\log_5 p - \log_5 3)$
38. $\dfrac{1}{2} [\log_6 (r - 1) - \log_6 r]$

39. $\log_2 n + \log_2(n + 4) - \log_2(n - 3)$

40. $2\log_5 t + 5\log_5(t - 6) + \log_5(3t + 7)$

41. $\frac{1}{2}[\log_5(x - 8) - \log_5 x]$

42. $6\log_7(a + 3) + 2\log_7(a - 1) - \frac{1}{2}\log_7 a$

43. $2\log_9 4 + \frac{1}{3}\log_9(r - 6) - \frac{1}{2}\log_9 r$

44. $5\log_6(x + 3) - [2\log_6(7x + 1) + 3\log_6 x]$

45. $4\log_6 3 - [2\log_6(x + 3) + 4\log_6 x]$

46. $2\log_7(m - 4) + 3\log_7(m + 3) - [5\log_7 2 + 3\log_7(m - 2)]$

Determina el valor escribiendo cada argumento usando los números 2 y/o 5 y usando los valores $\log_a 2 = 0.3010$ y $\log_a 5 = 0.6990$.

47. $\log_a 10$

48. $\log_a 2.5$

49. $\log_a 0.4$

50. $\log_a \frac{1}{8}$

51. $\log_a 25$

52. $\log_a \sqrt[3]{5}$

Evalúa (ver ejemplo 4).

53. $7^{\log_7 2}$

54. $\log_4 4$

55. $(2^3)^{\log_8 7}$

56. $\log_8 64$

57. $\log_3 27$

58. $2\log_9 \sqrt{9}$

59. $5(\sqrt[3]{27})^{\log_3 5}$

60. $\frac{1}{2}\log_6 \sqrt[3]{6}$

Resolución de problemas

61. Expresa $\log_a(x^2 - 4) - \log_a(x + 2)$ como un solo logaritmo y simplifica.

62. Expresa $\log_a(x - 3) - \log_a(x^2 + 5x - 24)$ como un solo logaritmo y simplifica.

Utiliza las propiedades 1–3 para desarrollar.

63. $\log_2 \dfrac{\sqrt[4]{xy}\,\sqrt[3]{a}}{\sqrt[5]{a - b}}$

64. $\log_3\left[\dfrac{(a^2 + b^2)(c^2)}{(a - b)(b + c)(c + d)}\right]^2$

Si $\log_{10} x = 0.4320$, determina el valor de las expresiones siguientes.

65. $\log_{10} x^2$

66. $\log_{10} \sqrt[3]{x}$

67. $\log_{10} \sqrt[4]{x}$

68. $\log_{10} x^{11}$

Si $\log_{10} x = 0.5000$ y $\log_{10} y = 0.2000$, determina el valor de las expresiones siguientes.

69. $\log_{10} xy$

70. $\log_{10}\left(\dfrac{x}{y}\right)$

71. Usando la información dada en las instrucciones para los ejercicios 69 y 70, ¿es posible determinar $\log_{10}(x + y)$? Explica.

72. ¿Son iguales las gráficas de $y = \log_b x^2$ y $y = 2\log_b x$? Explica tu respuesta analizando el dominio de cada ecuación.

Ejercicios de conceptos y escritura

73. ¿Es $\log_a(xyz) = \log_a x + \log_a y + \log_a z$? Explica.

74. ¿Es $\log_b(x + y + z) = \log_b x + \log_b y + \log_b z$? Explica.

75. ¿Es $\log_a(x^2 + 8x + 16) = 2\log_a(x + 4)$? Explica.

76. ¿Es $\log_a(4x^2 - 20x + 25) = 2\log_a(2x - 5)$? Explica.

Problemas de desafío

77. Para $x > 0$ y $y > 0$, ¿se cumple

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a xy^{-1} = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x + \log_a \frac{1}{y}?$$

78. Lee el ejercicio 77. De acuerdo con la regla del cociente, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$. ¿Podemos concluir por lo tanto que $\log_a x - \log_a y = \log_a x + \log_a \frac{1}{y}$?

79. Utiliza la regla del producto para demostrar que

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x + \log_a \frac{1}{y}$$

80. **a)** Explica por qué

$$\log_a \frac{3}{xy} \neq \log_a 3 - \log_a x + \log_a y$$

b) Desarrolla de forma correcta $\log_a \frac{3}{xy}$.

81. Considera $\log_a \dfrac{\sqrt{x^4 y}}{\sqrt{xy^3}}$, donde $x > 0$ y $y > 0$.

a) Miembro 1: desarrolla la expresión mediante la regla del cociente.

b) Miembro 2: desarrolla la expresión mediante la regla del producto.

Actividad de grupo

En grupo, analicen y respondan el ejercicio 81.

c) Miembro 3: simplifica primero $\dfrac{\sqrt{x^4y}}{\sqrt{xy^3}}$, luego desarrolla el logaritmo resultante.

d) Verifiquen cada uno el trabajo de los demás y asegúrense de que todas las respuestas sean correctas. ¿Estas expresiones pueden simplificarse por los tres métodos?

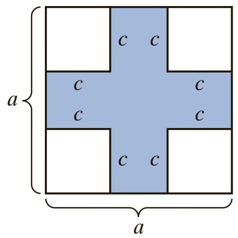
Ejercicios de repaso acumulados

[2.5] **82.** Resuelve la desigualdad $\dfrac{x-4}{2} - \dfrac{2x-5}{5} > 3$ e indica la solución en

a) notación constructiva de conjuntos.

b) notación de intervalos.

[5.7] **83. a)** Escribe una expresión para determinar el área sombreada de la figura.



b) Escribe la expresión del inciso **a)** en forma factorizada.

[6.4] **84.** Despeja x en $\dfrac{15}{x} + \dfrac{9x-7}{x+2} = 9$.

[7.7] **85.** Multiplica $(3i + 4)(2i - 5)$.

[8.4] **86.** Despeja a en $a - 6\sqrt{a} = 7$.

Prueba de mitad de capítulo: 9.1-9.4

Para determinar la comprensión del tema que se ha abordado hasta este momento, resuelve esta pequeña prueba. Las respuestas y la sección en donde se trató el tema por primera vez, se proporcionan al final del libro. Repasa el tema de las preguntas que respondiste de forma incorrecta.

1. a) Explica cómo determinar $(f \circ g)(x)$.

b) Si $f(x) = 3x + 3$ y $g(x) = 2x + 5$, determina $(f \circ g)(x)$.

2. Sea $f(x) = x^2 + 5$ y $g(x) = \dfrac{6}{x}$; determina

a) $(f \circ g)(x)$

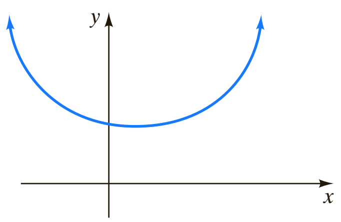
b) $(f \circ g)(3)$

c) $(g \circ f)(x)$

d) $(g \circ f)(3)$

3. a) Explica lo que significa que una función sea uno a uno.

b) ¿La función representada mediante la gráfica siguiente es uno a uno? Explica.



En los ejercicios 4-6, para cada función, ***a)*** *determina si es una función uno a uno;* ***b)*** *si es una función uno a uno, determina su función inversa.*

4. $\{(-3,2), (2,3), (5,1), (6,8)\}$

5. $p(x) = \dfrac{1}{3}x - 5$

6. $k(x) = \sqrt{x-4}, \quad x \geq 4$

7. Sea $m(x) = -2x + 4$. Determina $m^{-1}(x)$ y luego, en los mismos ejes, grafica $m(x)$ y $m^{-1}(x)$.

Grafica cada función exponencial.

8. $y = 2^x$

9. $y = 3^{-x}$

10. Grafica la función logarítmica $y = \log_2 x$.

11. Bacterias El número de bacterias en una caja de Petri es $N(t) = 5(2)^t$, donde t es el número de horas a partir de que se colocaron las 5 bacterias originales en la caja. ¿Cuántas bacterias hay en la caja

a) al cabo de una hora?

b) 6 horas después?

12. Escribe en forma logarítmica $27^{2/3} = 9$.

13. Escribe en forma exponencial $\log_2 \dfrac{1}{64} = -6$.

14. Evalúa $\log_5 125$.

15. Resuelve la ecuación $\log_{1/4} \dfrac{1}{16} = x$ para x.

16. Resuelve la ecuación $\log_x 64 = 3$ para x.

Utiliza las propiedades 1-3 para escribir como una suma o diferencia de logaritmos.

17. $\log_9 x^2(x-5)$

18. $\log_5 \dfrac{7m}{\sqrt{n}}$

Escribe como un solo logaritmo.

19. $3\log_2 x + \log_2 (x+7) - 4\log_2 (x+1)$

20. $\dfrac{1}{2}[\log_7 (x+2) - \log_7 x]$

9.5 Logaritmos comunes

1 Determinar logaritmos comunes de potencias de 10.

2 Aproximar logaritmos comunes.

3 Aproximar potencias de 10.

Las propiedades de los logaritmos que analizamos en la sección 9.4 se aplican a cualquier logaritmo con un número real en la base a, con $a > 0$ y $a \neq 1$. Como nuestro sistema numérico está basado en el número 10, con frecuencia utilizamos logaritmos con una base 10, los cuales se denominan *logaritmos comunes*.

Logaritmo común

Un **logaritmo común** es un logaritmo con una base 10. Cuando la base de un logaritmo no se indica, suponemos que la base es 10. Por lo tanto

$$\log x = \log_{10} x \quad (x > 0)$$

Las cinco propiedades que analizamos en la sección 9.4 pueden reescribirse como propiedades de logaritmos comunes.

Propiedades de logaritmos comunes

1. $\log xy = \log x + \log y$
2. $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$
3. $\log x^n = n \log x$
4. $\log 10^x = x$
5. $10^{\log x} = x$

1 Determinar logaritmos comunes de potencias de 10

Podemos utilizar la cuarta propiedad de los logaritmos comunes para evaluar logaritmos comunes de números que son potencias de 10. Comenzaremos con algunos ejemplos de logaritmos comunes de potencias no negativas de 10.

Comprendiendo el álgebra

Recuerda que un *logaritmo es un exponente*. Un logaritmo común es el exponente al que elevarías 10 con el fin de obtener el argumento. Por ejemplo, log 100 es el exponente al que elevarías 10 para obtener 100. Por lo tanto, log 100 = 2.

Logaritmos comunes de potencias no negativas de 10

$\log 1 = \log 10^0 = 0$	$\log 10 = \log 10^1 = 1$
$\log 100 = \log 10^2 = 2$	$\log 1000 = \log 10^3 = 3$
$\log 10{,}000 = \log 10^4 = 4$	$\log 100{,}000 = \log 10^5 = 5$

Comprendiendo el álgebra

Para determinar logaritmos comunes de 10 elevados a una potencia negativa, necesitamos recordar la siguiente regla de los exponentes:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

También podemos evaluar logaritmos comunes de potencias negativas de 10.

Logaritmos comunes de potencias negativas de 10

$$\log 0.1 = \log \frac{1}{10} = \log 10^{-1} = -1$$

$$\log 0.01 = \log \frac{1}{100} = \log 10^{-2} = -2$$

$$\log 0.001 = \log \frac{1}{1000} = \log 10^{-3} = -3$$

$$\log 0.0001 = \log \frac{1}{10{,}000} = \log 10^{-4} = -4$$

$$\log 0.00001 = \log \frac{1}{100{,}000} = \log 10^{-5} = -5$$

2 Aproximar logaritmos comunes

Vamos a utilizar una calculadora científica o graficadora para aproximar logaritmos comunes. Antes de hacer esto, introduciremos un método para estimar el valor de un logaritmo común entre dos números enteros. Por ejemplo, supongamos que queremos estimar el valor de log 5. Como 5 está entre 1 y 10, podemos concluir que log 5 está entre log 1 y log 10 y vemos lo siguiente:

$$1 < 5 < 10$$
$$\log 1 < \log 5 < \log 10$$
$$0 < \log 5 < 1$$

Por lo tanto, podemos concluir que log 5 es un número entre 0 y 1.

EJEMPLO 1 Sin usar tu calculadora, estima los dos números enteros entre los cuales estará cada logaritmo común.

a) log 82 **b)** log 5091

c) log 0.7 **d)** log 0.03

Solución

a) Como 82 está entre 10 y 100, tenemos lo siguiente

$$10 < 82 < 100$$
$$\log 10 < \log 82 < \log 100$$
$$1 < \log 82 < 2$$

Por lo tanto, log 82 es un número entre 1 y 2.

b) Como 5091 está entre 1000 y 10,000, tenemos lo siguiente

$$1000 < 5091 < 10{,}000$$
$$\log 1000 < \log 5091 < \log 10{,}000$$
$$3 < \log 5091 < 4$$

Por lo tanto, log 5091 es un número entre 3 y 4.

c) Como 0.7 está entre 0.1 y 1, tenemos lo siguiente

$$0.1 < 0.7 < 1$$
$$\log 0.1 < \log 0.7 < \log 1$$
$$-1 < \log 0.7 < 0$$

Por lo tanto, log 0.7 es un número entre -1 y 0.

d) Como 0.03 está entre 0.01 y 0.1, tenemos lo siguiente

$$0.01 < 0.03 < 0.1$$
$$\log 0.01 < \log 0.03 < \log 0.1$$
$$-2 < \log 0.03 < -1$$

Por lo tanto, log 0.03 es un número entre -2 y -1.

Resuelve ahora el ejercicio 15

Ahora aproximaremos logaritmos comunes utilizando una calculadora científica o graficadora utilizando la tecla $\boxed{\text{LOG}}$ como se muestra en la página 604.

Cómo utilizar tu calculadora graficadora

Aproximación de logaritmos comunes

Calculadora científica

Para aproximar logaritmos comunes en muchas calculadoras científicas, ingresa el argumento y luego presiona la tecla de logaritmo.

EJEMPLO	TECLAS A PRESIONAR	RESPUESTA MOSTRADA
Aproximar log 400.	400 $\boxed{\text{LOG}}$	2.60206

Calculadora graficadora

En las calculadoras graficadoras y en muchas calculadoras científicas, primero tienes que presionar la tecla $\boxed{\text{LOG}}$ y luego ingresar el número. Por ejemplo, en la TI-84 Plus, debes hacer lo siguiente.

EJEMPLO	TECLAS A PRESIONAR	RESPUESTA MOSTRADA
Aproximar log 400.	$\boxed{\text{LOG}}$ (400 $\boxed{)}$ $\boxed{\text{ENTER}}$	2.602059991

↑
Generado por la calculadora

EJEMPLO 2 Utiliza tu calculadora para aproximar los siguientes logaritmos comunes. Redondea tu respuesta a 4 cifras decimales. Compara tus respuestas con las del ejemplo 1 de la página 603.

a) log 82 **b)** log 5091

c) log 0.7 **d)** log 0.03

Solución Utilizando tu calculadora como se mostró anteriormente, obtenemos lo siguiente.

a) $\log 82 \approx 1.9138$. Observa que en el ejemplo 1 **a)** estimamos correctamente que log 82 es un número entre 1 y 2.

b) $\log 5091 \approx 3.7068$. Observa que en el ejemplo 1 **b)** estimamos correctamente que log 5091 es un número entre 3 y 4.

c) $\log 0.7 \approx -0.1549$. Observa que en el ejemplo 1 **c)** estimamos correctamente que log 0.7 es un número entre -1 y 0.

d) $\log 0.03 \approx -1.5229$. Observa que en el ejemplo 1 **d)** estimamos correctamente que log 0.03 es un número entre -2 y -1.

Resuelve ahora el ejercicio 27

Recuerda de nuestra definición de logaritmo de la sección 9.3 que $y = \log_a x$ significa que $x = a^y$. Replantearemos esta definición para logaritmos comunes.

Definición de un logaritmo común

Para todos los números positivos x

$$y = \log x \quad \text{significa} \quad x = 10^y$$

El **logaritmo común** de un número positivo x es el exponente al que se debe elevar la base 10 para obtener el número x.

EJEMPLO 3 Determina el exponente al que se debe elevar 10 para obtener cada uno de los siguientes números. Redondea tu respuesta a 4 cifras decimales.

a) 75 **b)** 3594 **c)** 0.00324

Solución Se nos ha pedido encontrar el *exponente* de 10. Utilizando la definición de un logaritmo común, podemos ver que se nos ha pedido hallar el logaritmo común de cada uno de estos números.

a) $\log 75 \approx 1.8751$ Observa: $10^{1.8751} \approx 75$

b) $\log 3594 \approx 3.5556$ Observa: $10^{3.5556} \approx 3594$

c) $\log 0.00324 \approx -2.4895$ Observa: $10^{-2.4895} \approx 0.00324$

Resuelve ahora el ejercicio 37

3 Aproximar potencias de 10

Mientras resolvamos ecuaciones que involucren logaritmos comunes, con frecuencia necesitaremos evaluar una potencia de 10. Por ejemplo, si $\log x = 3$, entonces, utilizando la definición de logaritmo común, vemos que $x = 10^3$ o 1000. En muchas ecuaciones la potencia de 10 no será un número entero. Utilizaremos una calculadora graficadora o científica para aproximar tales potencias de 10.

Cómo utilizar tu calculadora

Aproximar potencias de 10

Para aproximar potencias de 10 en tu calculadora, utiliza la función 10^x, la cual se localiza directamente arriba de la tecla $\boxed{\text{LOG}}$. Para acceder a esta función, presiona la tecla $\boxed{\text{2ND}}$, $\boxed{\text{INV}}$ o $\boxed{\text{Shift}}$ antes de presionar la tecla $\boxed{\text{LOG}}$.

EJEMPLO 4 Aproxima las siguientes potencias de 10. Redondea tus respuestas a cuatro cifras decimales.

a) $10^{1.394}$ **b)** $10^{2.827}$ **c)** $10^{-0.356}$

Solución Utiliza una calculadora para aproximar cada una de las potencias de 10.

a) $10^{1.394} \approx 24.7742$

b) $10^{2.827} \approx 671.4289$

c) $10^{-0.356} \approx 0.4406$

Resuelve ahora el ejercicio 49

Cuando evaluamos una potencia de 10, al número que obtenemos podemos denominarlo como un **antilogaritmo** o un **antilog**. Por ejemplo, en el ejemplo 4 inciso **a)**, determinamos que $10^{1.394} \approx 24.7742$. Por lo tanto, podemos escribir antilog $1.394 \approx 24.7742$. Observa que $\log 24.7742 \approx 1.394$.

EJEMPLO 5 Resuelve para x en cada una de las siguientes ecuaciones. Redondea tu respuesta a cuatro cifras decimales.

a) $\log x = 0.132$ **b)** $\log x = -1.203$

Solución

a) Utilizando la definición de un logaritmo común, sabemos que

$$\log x = 0.132 \text{ significa } x = 10^{0.132} \approx 1.3552$$

b)

$$\log x = -1.203 \text{ significa } x = 10^{-1.203} \approx 0.0627$$

Resuelve ahora el ejercicio 65

En el ejemplo 5 inciso **a)**, resolvimos la ecuación $\log x = 0.132$ para obtener la solución $x = 100.132 \approx 1.3552$. También podíamos haber escrito $x =$ antilog $0.132 \approx 1.3552$. Observa que $\log 1.3552 \approx 0.132$.

EJEMPLO 6 **Terremoto** En la escala Richter, la magnitud de un terremoto está dada por la fórmula $R = \log I$, donde I es el número de veces que es más intenso el sismo respecto de la actividad sísmica más pequeña que puede medirse. ¿Cuántas veces es más intenso un terremoto que mide 6.2 grados en la escala Richter que la actividad sísmica más pequeña que puede medirse?

Solución Queremos determinar el valor de I. Tenemos que $R = 6.2$. Sustituye R por 6.2 en la fórmula $R = \log I$ y después despeja I.

$$R = \log I$$
$$6.2 = \log I \quad \text{Sustituye } R \text{ por } 6.2.$$

Para encontrar I, reescribiremos la ecuación logarítmica como una ecuación exponencial utilizando la definición de un logaritmo común.

$$6.2 = \log I \text{ significa } I = 106.2$$
$$\text{y obtenemos } I \approx 1{,}584{,}893$$

Por lo tanto, este terremoto es aproximadamente 1,584,893 veces más intenso que la actividad sísmica más pequeña que puede medirse.

Resuelve ahora el ejercicio 89

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.5

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

10^y común 4 y^{10} exponente 2 10^x

1. Un logaritmo _______________ es un logaritmo con una base de 10.

2. Un logaritmo común es el _______________ al que elevarías 10 con el fin de obtener el argumento.

3. Utilizando la definición de un logaritmo común, $y = \log x$ significa $x =$ _______________.

4. Ya que 2010 está entre 1000 y 10,000, log 2010 está entre 3 y _______________.

Practica tus habilidades

Evalúa el logaritmo común de cada potencia de 10 sin el uso de una calculadora.

5. log 1	**6.** log 100	**7.** log 0.1	**8.** log 1000
9. log 0.01	**10.** log 10	**11.** log 0.001	**12.** 0.0001

Sin utilizar una calculadora, estima los dos números enteros entre los cuales estará cada logaritmo. Ver ejemplo 1.

13. 86	**14.** 352	**15.** 19,200	**16.** 1001
17. 0.0613	**18.** 941,000	**19.** 101	**20.** 0.000835
21. 3.75	**22.** 0.375	**23.** 0.0173	**24.** 0.00872

Utiliza una calculadora para aproximar los siguientes logaritmos comunes. Redondea tus respuestas a cuatro cifras decimales. Compara tus respuestas con las de los ejercicios 13-24. Ver ejemplo 2.

25. 86	**26.** 352	**27.** 19,200	**28.** 1001
29. 0.0613	**30.** 941,000	**31.** 101	**32.** 0.000835
33. 3.75	**34.** 0.375	**35.** 0.0173	**36.** 0.00872

Determina el exponente al que debe elevarse la base 10 para obtener cada uno de los siguientes números. Redondea tus respuestas a cuatro cifras decimales. Ver ejemplo 3.

37. 3560	**38.** 817,000	**39.** 0.0727	**40.** 0.00612
41. 243	**42.** 8.16	**43.** 0.00592	**44.** 73,700,000
45. 0.0098	**46.** 0.0037	**47.** 15.491	**48.** 10.892

Determina las siguientes potencias de base 10. Redondea tus respuestas a cuatro cifras decimales. Ver ejemplo 4.

49. $10^{0.2137}$	**50.** $10^{1.3845}$	**51.** $10^{4.6283}$	**52.** $10^{3.5527}$
53. $10^{-1.7086}$	**54.** $10^{-2.7431}$	**55.** $10^{0.001}$	**56.** $10^{-0.001}$
57. $10^{2.7625}$	**58.** $10^{-0.1543}$	**59.** $10^{-2.014}$	**60.** $10^{5.5922}$

Resuelve para x en cada una de las siguientes ecuaciones. Si es necesario, redondea tus respuestas a cuatro cifras decimales. Ver ejemplo 5.

61. $\log x = 2.0000$	**62.** $\log x = 1.4612$	**63.** $\log x = 3.3817$	**64.** $\log x = 1.9330$
65. $\log x = 4.1409$	**66.** $\log x = -2.103$	**67.** $\log x = -1.06$	**68.** $\log x = -3.1469$
69. $\log x = -0.6218$	**70.** $\log x = 1.5177$	**71.** $\log x = -0.1256$	**72.** $\log x = -1.3206$

Utiliza las propiedades 4 y 5 del logaritmo común, que se encuentran en la página 602, para evaluar lo siguiente.

73. $\log 10^7$ **74.** $\log 10^{3.4}$ **75.** $10^{\log 7}$ **76.** $10^{\log 3.4}$

77. $4 \log 10^{5.2}$ **78.** $8 \log 10^{1.2}$ **79.** $5(10^{\log 8.3})$ **80.** $2.3(10^{\log 5.2})$

Resolución de problemas

Resuelve los ejercicios 81-84 mediante $R = \log I$ (ver ejemplo 6). Redondea tus respuestas a cuatro cifras decimales.

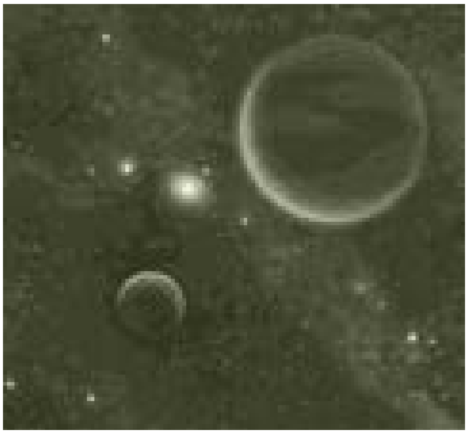
81. Determina I si $R = 3.4$

82. Determina I si $R = 4.9$

83. Determina I si $R = 5.7$

84. Determina I si $R = 0.1$

85. Astronomía En astronomía, una fórmula utilizada para determinar el diámetro, en kilómetros, de planetas menores (también llamados asteroides) es $\log d = 3.7 - 0.2g$, donde g es una cantidad llamada magnitud absoluta del planeta menor. Determina el diámetro de un planeta menor si su magnitud absoluta es **a)** 11 y **b)** 20. **c)** Determina la magnitud absoluta del planeta menor cuyo diámetro es de 5.8 kilómetros.



© serjoe/Shutterstock

86. Prueba estandarizada La puntuación promedio en una prueba estandarizada es una función del número de horas dedicadas a estudiar para la prueba. La puntuación promedio, $f(x)$, en puntos, puede ser aproximada por $f(x) = \log 0.3x + 1.8$, donde x es el número de horas dedicadas a estudiar para la prueba. La máxima puntuación posible en la prueba es 4.0. Determina la puntuación recibida por una persona promedio que estudia **a)** 15 horas y **b)** 55 horas.

87. Retención de aprendizaje Sammy Barcia recién ha terminado un curso de física. El porcentaje del curso que él recordará dentro de t meses puede ser aproximado mediante la función

$$R(t) = 94 - 46.8 \log (t + 1)$$

para $0 \le t \le 48$. Determina el porcentaje del curso que Sammy recordará, dentro de **a)** 2 meses y **b)** 48 meses.

88. Retención de aprendizaje Karen Frye recién ha terminado un curso de psicología. El porcentaje del curso que ella recordará dentro de t meses puede ser aproximada mediante la función

$$R(t) = 85 - 41.9 \log (t + 1)$$

para $0 \le t \le 48$. Determina el porcentaje del curso que ella recordará, dentro de **a)** 10 meses y **b)** 25 meses.

89. Terremoto ¿Cuántas veces es más intenso un terremoto de 3.8 grados en la escala Richter, respecto de la actividad sísmica más pequeña que puede medirse? Ver ejemplo 6.

90. Terremoto El terremoto más fuerte del que se tiene registro ocurrió en Chile el 22 de mayo de 1960. Fue de 9.5 grados en la escala Richter. ¿Cuántas veces fue más intenso este terremoto, respecto de la actividad sísmica más pequeña que puede medirse?

91. Energía de un terremoto Una fórmula que se utiliza en ocasiones para estimar la energía sísmica liberada por un terremoto es $\log E = 11.8 + 15m_s$, donde E es la energía sísmica y m_s es la magnitud de la onda supeficial.

a) Determina la energía liberada por un terremoto cuya magnitud de la onda superficial es 6.

b) Si la energía liberada durante un terremoto es 1.2×10^{15}, ¿cuál es la magnitud de la onda superficial?

92. Presión del sonido El nivel de la presión del sonido, s_p, está dado por la fórmula $s_p = 20 \log \frac{p_r}{0.0002}$, donde p_r es la presión del sonido en dinas/cm^2.

a) Determina el nivel de presión del sonido si la presión es de 0.0036 dinas/cm^2.

b) Si el nivel de presión del sonido es 10.0, determina la presión del sonido.

93. Terremoto La escala Richter, usada para medir la intensidad de los terremotos, relaciona la magnitud, M, del terremoto con la energía que libera, E, en ergios, mediante la fórmula

$$M = \frac{\log E - 11.8}{1.5}$$

Si un terremoto libera 1.259×10^{21} ergios de energía, ¿cuál es su magnitud en la escala Richter?

94. pH de una solución El pH es una medida de la acidez o la alcalinidad de una solución. Por ejemplo, el pH del agua es 7. En general, las soluciones ácidas tienen números de pH menores que 7, y las soluciones alcalinas mayores que 7. El pH de una solución se define como $\text{pH} = -\log [H_3O^+]$, donde H_3O^+ representa la concentración del ion hidronio en la solución. Determina el pH de una solución cuya concentración de iones hidronio es 2.8×10^{-3}

© Jason Stitt/Shutterstock

Ejercicios de conceptos y escritura

95. En tu calculadora calculaste log 462 y obtuviste el valor 1.6646. ¿Este valor puede ser correcto? Explica.

96. En tu calculadora calculaste log 6250 y obtuviste el valor 2.7589. ¿Este valor puede ser correcto? Explica.

97. En tu calculadora calculaste log 0.163 y obtuviste el valor −2.7878. ¿Este valor puede ser correcto? Explica.

98. En tu calculadora calculaste log (−1.23) y obtuviste el valor 0.08991. ¿Este valor puede ser correcto? Explica.

99. ¿Es $\log \dfrac{y}{4x} = \log y - \log 4 + \log x$? Explica.

100. ¿Es $\log \dfrac{5x^2}{3} = 2(\log 5 + \log x) - \log 3$? Explica.

Problemas de desafío

101. Despeja I de la fórmula $R = \log I$

102. Despeja E de la fórmula $\log E = 11.8 + 1.5m$

103. Despeja t de la fórmula $R = 26 - 41.9 \log (t + 1)$.

104. Despeja x de la fórmula $f = 76 - \log x$.

Actividad de grupo

105. En la sección 9.7 introdujimos la *fórmula de cambio de base*, $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, donde a y b son bases, y x es un número positivo.

a) Miembro 1 del grupo: Utiliza la fórmula de cambio de base para evaluar $\log_3 45$ (*Sugerencia:* Haz $b = 10$).

b) Miembro 2 del grupo: repite el inciso **a)** para $\log_5 30$.

c) Miembro 3 del grupo: repite el inciso **a)** para $\log_6 40$.

d) Como grupo, utilicen el hecho de que $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, donde $b = 10$, para graficar la ecuación $y = \log_2 x$ para $x > 0$. Si tienen una calculadora graficadora, utilícenla.

Ejercicios de repaso acumulados

[4.3] **106. Automóviles** Dos automóviles parten del mismo punto en Alexandria, Virginia, y viajan en direcciones opuestas. Uno viaja 5 millas por hora más rápido que el otro. Al cabo de 4 horas, los dos automóviles están separados por una distancia de 420 millas. Determina la velocidad de cada automóvil.

[4.5] **107.** Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$3r = -4s - 6$$
$$3s = -5r + 1$$

[5.8] **108.** Despeja x en $3x^3 + 3x^2 - 36x = 0$.

[7.1] **109.** Escribe $\sqrt{(3x^2 - y)^2}$ como valor absoluto.

[8.6] **110.** Resuelve $(x - 5)(x + 4)(x - 2) \le 0$ y proporciona las soluciones en notación de intervalos.

9.6 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

1 Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

2 Resolver problemas de aplicación.

1 Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas

En esta sección, estudiaremos más a fondo las *ecuaciones exponenciales* y *ecuaciones logarítmicas*. A continuación listamos algunas de las propiedades que se utilizarán en la resolución de tales ecuaciones.

Propiedades para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas

a. Si $x = y$, entonces $a^x = a^y$.

b. Si $a^x = a^y$, entonces $x = y$.

c. Si $x = y$, entonces $\log_b x = \log_b y \quad (x > 0, y > 0)$.

d. Si $\log_b x = \log_b y$, entonces $x = y \quad (x > 0, y > 0)$. Propiedades *6a-6d.*

EJEMPLO 1 Resuelve la ecuación $8^x = \frac{1}{2}$.

Solución Para resolver esta ecuación, vamos a escribir ambos lados de la ecuación con la misma base, 2 y luego utilizamos la propiedad 6b.

$$8^x = \frac{1}{2}$$

$$(2^3)^x = \frac{1}{2} \qquad \text{Se escribe 8 como } 2^3.$$

$$2^{3x} = 2^{-1} \qquad \text{Se escribe } \frac{1}{2} \text{ como } 2^{-1}.$$

Utilizando la propiedad 6b, podemos escribir

$$3x = -1$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

Resuelve ahora el ejercicio 7

Cuando ambos lados de la ecuación exponencial no se pueden escribir como una potencia de la misma base, con frecuencia empezamos tomando logaritmos de ambos lados de la ecuación, como en el ejemplo 2. En los siguientes ejemplos redondearemos los logaritmos a cuatro cifras decimales.

EJEMPLO 2 Resuelve la ecuación $5^n = 28$.

Solución Toma el logaritmo de ambos lados de la ecuación y despeja n.

$$\log 5^n = \log 28$$

$$n \log 5 = \log 28 \qquad \text{Regla de la potencia}$$

$$n = \frac{\log 28}{\log 5} \qquad \text{Divididos ambos lados entre log 5.}$$

$$\approx \frac{1.4472}{0.6990} \approx 2.0704$$

Resuelve ahora el ejercicio 23

Comprendiendo el álgebra

Para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas, recuerda que todo lo que hagas en un lado de la ecuación debes hacerlo para el otro. Así, en el ejemplo 2, hay que tomar el logaritmo común de ambos lados de la ecuación.

Algunas ecuaciones logarítmicas pueden resolverse expresándolas en forma exponencial. *Es necesario comprobar las ecuaciones logarítmicas para ver si tienen soluciones extrañas*, si al verificar una solución se obtiene el logaritmo de un número negativo, la solución es extraña.

EJEMPLO 3 Resuelve la ecuación $\log_2 (x + 3)^3 = 4$.

Solución Escribe la ecuación en forma exponencial.

$$(x + 3)^3 = 2^4 \qquad \text{Escribe en forma exponencial.}$$

$$(x + 3)^3 = 16$$

$$x + 3 = \sqrt[3]{16} \qquad \text{Toma la raíz cúbica de ambos lados.}$$

$$x = -3 + \sqrt[3]{16} \qquad \text{Despeja } x.$$

Verifica

$$\log_2 (x + 3)^3 = 4$$

$$\log_2 [(-3 + \sqrt[3]{16}) + 3]^3 \stackrel{?}{=} 4$$

$$\log_2 (\sqrt[3]{16})^3 \stackrel{?}{=} 4$$

$$\log_2 16 \stackrel{?}{=} 4 \qquad (\sqrt[3]{16})^3 = 16$$

$$2^4 \stackrel{?}{=} 16 \qquad \text{Escribe en la forma exponencial.}$$

$$16 = 16 \qquad \text{Verdadero}$$

Resuelve ahora el ejercicio 43

Otras ecuaciones logarítmicas pueden resolverse mediante las propiedades de los logaritmos dadas en las secciones anteriores.

EJEMPLO 4 Resuelve la ecuación $\log(3x + 2) + \log 9 = \log(x + 5)$.

Solución

$$\begin{aligned}
\log(3x + 2) + \log 9 &= \log(x + 5) \\
\log[(3x + 2)(9)] &= \log(x + 5) && \text{Regla del producto} \\
(3x + 2)(9) &= (x + 5) && \text{Propiedad 6d} \\
27x + 18 &= x + 5 \\
26x + 18 &= 5 \\
26x &= -13 \\
x &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Verifica que la solución sea $-\frac{1}{2}$.

Resuelve ahora el ejercicio 51

EJEMPLO 5 Resuelve la ecuación $\log x + \log(x + 1) = \log 12$.

Solución

$$\begin{aligned}
\log x + \log(x + 1) &= \log 12 \\
\log x(x + 1) &= \log 12 && \text{Regla del producto.} \\
x(x + 1) &= 12 && \text{Propiedad 6d.} \\
x^2 + x &= 12 \\
x^2 + x - 12 &= 0 \\
(x + 4)(x - 3) &= 0
\end{aligned}$$

$$x + 4 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$
$$x = -4 \qquad\qquad x = 3$$

Verifica $x = -4$

$$\begin{aligned}
\log x + \log(x + 1) &= \log 12 \\
\log(-4) + \log(-4 + 1) &\stackrel{?}{=} \log 12 \\
\log(-4) + \log(-3) &\stackrel{?}{=} \log 12
\end{aligned}$$

Alto.
Los logaritmos de números negativos no son números reales.

$x = 3$

$$\begin{aligned}
\log x + \log(x + 1) &= \log 12 \\
\log 3 + \log(3 + 1) &\stackrel{?}{=} \log 12 \\
\log 3 + \log 4 &\stackrel{?}{=} \log 12 \\
\log[(3)(4)] &\stackrel{?}{=} \log 12 \\
\log 12 &= \log 12 && \text{Verdadero}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, -4 es una solución extraña. La única solución es 3.

Resuelve ahora el ejercicio 65

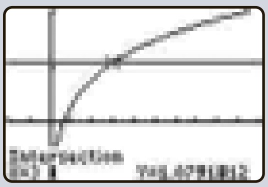
Comprendiendo el álgebra

Recuerda de la sección 9.3 que el dominio de una función logarítmica es $(0, \infty)$. En otras palabras, *no podemos tomar el logaritmo de cero o de un número negativo*. Por lo tanto, debemos comprobar nuestros resultados después de resolver ecuaciones logarítmicas para cerciorarnos de que el argumento del logaritmo es positivo.

Cómo utilizar tu calculadora graficadora

Antes demostramos cómo resolver ecuaciones de una variable usando una calculadora graficadora. Para resolver la ecuación $\log x + \log(x + 1) - \log 12$ (ver ejemplo 5) utilizando una TI-84 plus, podemos graficar

$$Y_1 = \log(x) + \log(x + 1)$$
$$Y_2 = \log(12)$$



$-2, 10, 1, -1, 2, 1$

FIGURA 9.21

El punto de intersección de estas gráficas se puede encontrar utilizando la función *instersect* en el menú CALC. La **Figura 9.21** muestra que la coordenada x del punto de intersección, 3, es la solución a la ecuación.

EJEMPLO 6 Resuelve la ecuación $\log(5x-3) - \log(2x) = 1$.

Solución

$$\log(5x-3) - \log(2x) = 1$$

$$\log\left(\frac{5x-3}{2x}\right) = 1 \qquad \text{Regla del cociente}$$

$$\left(\frac{5x-3}{2x}\right) = 10^1 \qquad \text{Escribe en forma exponencial.}$$

$$\frac{5x-3}{2x} = 10$$

$$5x - 3 = 20x \qquad \text{Multiplica ambos lados por } 2x.$$

$$-3 = 15x \qquad \text{Resta } 5x \text{ en ambos lados.}$$

$$x = -\frac{3}{15} = -\frac{1}{5} = -0.2$$

Verifica

$$\log(5x-3) - \log(2x) = 1$$

$$\log[5(-0.2) - 3] - \log[2(-0.2)] = 1$$

$$\log(-4) - \log(-0.4) = 1$$

Como tenemos logaritmos de números negativos, -0.2 es una solución extraña. Por lo tanto, la ecuación no tiene solución. Su solución es el conjunto vacío, $\varnothing$.

Resuelve ahora el ejercicio 57

2 Resolver problemas de aplicación

Ahora veremos un problema de aplicación que implica una ecuación exponencial.

EJEMPLO 7 **Bacteria** Si en un inicio hay 1000 bacterias en un cultivo y este número se duplica cada hora, entonces el número de bacterias al cabo de t horas puede calcularse mediante la fórmula

$$N = 1000(2)^t.$$

¿Cuánto tiempo tardará el cultivo en tener 30,000 bacterias?

Solución

$$N = 1000(2)^t$$

$$30{,}000 = 1000(2)^t \qquad \text{Sustituye } N \text{ por } 30{,}000.$$

$$30 = (2)^t \qquad \text{Divide ambos lados entre } 1000.$$

Queremos determinar el valor de t. Para hacerlo utilizamos logaritmos. Comienza tomando el logaritmo de ambos lados de la ecuación.

$$\log 30 = \log(2)^t$$

$$\log 30 = t \log 2 \qquad \text{Regla de la potencia}$$

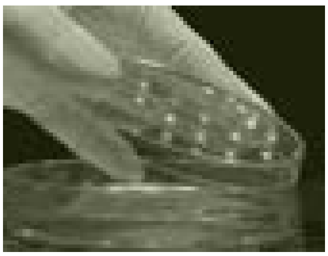
$$\frac{\log 30}{\log 2} = t \qquad \text{Divide ambos lados entre } \log 2.$$

$$\frac{1.4771}{0.3010} \approx t$$

$$4.91 \approx t$$

Será necesario que transcurran casi 4.91 horas para que el cultivo tenga 30,000 bacterias.

Resuelve ahora el ejercicio 69



© Olivier Le Queinec/Shutterstock

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.6

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

extrañas exponencial base logaritmo cociente suma producto diferencia

1. Para resolver la ecuación $9^x = \frac{1}{3}$, escribe ambos lados con la misma ________________, 3, y luego utiliza la propiedad 6b.

2. Para resolver la ecuación $3^x = 41$ toma el ________________ común de ambos lados.

3. Es necesario comprobar las ecuaciones logarítmicas para ver si tienen soluciones ________________.

4. Para resolver la ecuación $\log_3 (x + 1) = 2$ primero escribe la ecuación en forma ________________.

5. Para resolver la ecuación $\log_3 x + \log_3 (x - 2) = 1$, primero reescribe el lado izquierdo de la ecuación como un solo logaritmo usando la regla del ________________, para logaritmos.

6. Para resolver la ecuación $\log_3 x - \log_3 (x - 2) = 1$, primero reescribe el lado izquierdo de la ecuación como un solo logaritmo usando la regla del ________________, para logaritmos.

Practica tus habilidades

Resuelve cada ecuación exponencial sin el uso de una calculadora.

7. $5^x = 125$
8. $2^x = 128$
9. $3^x = 81$
10. $4^x = 256$
11. $64^x = 8$
12. $81^x = 3$
13. $7^{-x} = \frac{1}{49}$
14. $6^{-x} = \frac{1}{216}$
15. $27^x = \frac{1}{3}$
16. $25^x = \frac{1}{5}$
17. $2^{x+2} = 64$
18. $3^{x-6} = 81$
19. $2^{3x-2} = 128$
20. $64^x = 4^{4x+1}$
21. $27^x = 3^{2x+3}$
22. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$

Resuelve cada ecuación exponencial. Utiliza una calculadora y redondea tus respuestas a la centésima más cercana.

23. $7^x = 50$
24. $1.05^x = 23$
25. $4^{x-1} = 35$
26. $2.3^{x-1} = 26.2$
27. $1.63^{x+1} = 25$
28. $4^x = 9^{x-2}$
29. $3^{x+4} = 6^x$
30. $5^x = 2^{x+5}$

Resuelve cada ecuación logarítmica. Cuando consideres apropiado, utiliza una calculadora. Si la respuesta es irracional, redondea la respuesta a la centésima más cercana.

31. $\log_{36} x = \frac{1}{2}$
32. $\log_{81} x = \frac{1}{2}$
33. $\log_{125} x = \frac{1}{3}$
34. $\log_{81} x = \frac{1}{4}$
35. $\log_2 x = -4$
36. $\log_7 x = -2$
37. $\log x = 2$
38. $\log x = 4$
39. $\log_2 (5 - 3x) = 3$
40. $\log_4 (3x + 7) = 3$
41. $\log_5 (x + 1)^2 = 2$
42. $\log_3 (a - 2)^2 = 2$
43. $\log_2 (r + 4)^2 = 4$
44. $\log_2 (p - 3)^2 = 6$
45. $\log (x + 8) = 2$
46. $\log (3x - 8) = 1$
47. $\log_2 x + \log_2 5 = 2$
48. $\log_3 2x + \log_3 x = 4$
49. $\log (r + 2) = \log (3r - 1)$
50. $\log 2a = \log (1 - a)$
51. $\log (2x + 1) + \log 4 = \log (7x + 8)$
52. $\log (x - 5) + \log 3 = \log (2x)$
53. $\log n + \log (3n - 5) = \log 2$
54. $\log (x + 4) - \log x = \log (x + 1)$
55. $\log 6 + \log y = 0.72$
56. $\log (x + 4) - \log x = 1.22$
57. $2 \log x - \log 9 = 2$
58. $\log 6000 - \log (x + 2) = 3.15$
59. $\log x + \log (x - 3) = 1$
60. $2 \log_2 x = 4$
61. $\log x = \frac{1}{3} \log 64$
62. $\log_7 x = \frac{3}{2} \log_7 9$
63. $\log_8 x = 4 \log_8 2 - \log_8 8$
64. $\log_4 x + \log_4 (6x - 7) = \log_4 5$
65. $\log_5 (x + 3) + \log_5 (x - 2) = \log_5 6$
66. $\log_7 (x + 6) - \log_7 (x - 3) = \log_7 4$
67. $\log_2 \; x + 3 \; - \log_2 \; x - 6 \; = \log_2 4$
68. $\log (x - 7) - \log (x + 3) = \log 6$

Resolución de problemas

Resuelve cada problema. Redondea tu respuesta a la centésima más cercana.

69. **Bacterias** Si el número inicial de bacterias, en el cultivo del ejemplo 7, es 4500, ¿cuándo habrá en él 50,000 bacterias? Utiliza $N = 4500(2)^t$.

70. **Bacterias** Si después de 4 horas en el cultivo del ejemplo 7, hay 2224 bacterias, ¿cuántas bacterias había al principio?

71. **Decaimiento radiactivo** La cantidad, A, de material radiactivo que queda al cabo de t años en una muestra de 200 gramos, puede determinarse mediante la ecuación $A = 200(0.75)^t$. ¿Cuándo quedarán 80 gramos?

72. **Decaimiento radiactivo** La cantidad, A, de material radiactivo que queda al cabo de t años en una muestra de 70 gramos, puede determinarse mediante la ecuación $A = 70(0.62)^t$. ¿Cuándo quedarán 10 gramos?

73. **Cuenta de ahorros** Paul Trapper invierte \$2000 en una cuenta de ahorros que genera interés a una tasa de 5% capitalizable anualmente. ¿Cuánto tiempo pasará para que los \$2000 se conviertan en \$4600? Utiliza la fórmula de interés compuesto, $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$, que se analizó en la página 583.

74. **Cuenta de ahorros** Si Tekar Werner invierte \$600 en una cuenta de ahorros que genera interés a una tasa de 6% capitalizable semestralmente, ¿cuánto tiempo pasará para que los \$600 se conviertan en \$1800?

75. **Cuenta en el mercado financiero** Si Jacci White invierte \$2500 en una cuenta en el mercado financiero que genera interés a una tasa de 4% capitalizable trimestralmente, ¿cuánto tiempo pasará para que los \$2500 se conviertan en \$4000?

76. **Cuenta en una unión de crédito** Charlotte Newsome invierte \$1000 en una cuenta de ahorro compartida en su unión de crédito. Si su dinero genera un interés a una tasa de 3% capitalizable mensualmente, ¿cuánto tiempo pasará para que los \$1000 se conviertan en \$1500?

© Allen R. Angel

77. **Depreciación** Una máquina comprada para el uso del negocio puede ser depreciada para reducir el pago de impuestos. El valor que tiene la maquina al final de su vida útil se denomina *valor de desecho*. Cuando la máquina se deprecia anualmente en un porcentaje fijo, su valor de desecho, S, es $S = c(1 - r)^n$, donde c es el costo original, r es la tasa anual de depreciación, dada en forma decimal, y n es la vida útil en años. Determina el valor de desecho de una máquina que cuesta \$50,000, tiene una vida útil de 12 años y su tasa de depreciación anual es de 15%.

78. **Depreciación** Si la máquina del ejercicio 77 cuesta \$100,000, tiene una vida útil de 15 años y su tasa de depreciación anual es de 8%, determine su valor de desecho.

79. **Ganancia de potencia de un amplificador** La ganancia de potencia, P, de un amplificador se define como

$$P = 10 \log \left(\frac{P_{salida}}{P_{entrada}}\right)$$

donde P_{salida} es la potencia de salida y $P_{entrada}$ es la potencia de entrada, ambas en watts. Si un amplificador tiene una potencia de salida de 12.6 watts y una potencia de entrada de 0.146 watts, determina la ganancia de potencia.


© Narcis Parfenti/Shutterstock

80. **Terremoto** Medida en la escala Richter, la magnitud, R, de un terremoto de intensidad I esta definida por $R = \log I$, donde I es el número de veces que es más intenso el terremoto que el nivel mínimo de comparación.

    a) ¿Cuántas veces fue más intenso el terremoto de San Francisco en 1906, que midió 8.25 grados en la escala Richter, que el nivel mínimo de comparación?

    b) ¿Cuántas veces es más intenso un terremoto que mide 8.3 grados en la escala Richter que uno que mide 4.7?

81. **Magnitud del sonido** La escala de decibeles se utiliza para medir la magnitud del sonido. La magnitud d, en decibeles, de un sonido se define como $d = 10 \log I$, donde I es el número de veces que el sonido es mayor (o más intenso) respecto del mínimo de intensidad de sonido audible.

    a) El sonido del motor de un aeroplano tiene una intensidad de 120 decibeles. ¿Cuántas veces es más intenso ese sonido que el nivel mínimo de sonido audible?

    b) La intensidad de ruido en un concurrida calle de la ciudad es de 50 decibeles. ¿Cuántas veces es más intenso el sonido del motor de un aeroplano que el sonido de la calle de la ciudad?

© Ioana Drutu/Shutterstock

82. En el siguiente procedimiento empezamos con una proposición verdadera y terminamos con una falsa. ¿Puedes encontrar el error?

$2 < 3$	Verdadero
$2 \log(0.1) < 3 \log(0.1)$	Multiplica ambos lados por log (0.1).
$\log(0.1)^2 < \log(0.1)^3$	Propiedad 3
$(0.1)^2 < (0.1)^3$	Propiedad 6d
$0.01 < 0.001$	Falso

83. Resuelve $8x = 16^{x-2}$.

84. Resuelve $27^x = 81^{x-3}$.

85. Utiliza ecuaciones de forma cuadrática para resolver la ecuación $2^{2x} - 6(2x) + 8 = 0$

86. Utiliza ecuaciones de forma cuadrática para resolver la ecuación $2^{2x} - 18(2x) + 32 = 0$

Cambia la ecuación exponencial o logarítmica a la forma $ax + by = c$, y luego resuelve el sistema de ecuaciones.

87. $2^x = 8^y$
$x + y = 4$

88. $3^{2x} = 9^{y+1}$
$x - 2y = -3$

89. $\log(x + y) = 2$
$x - y = 8$

90. $\log(x + y) = 3$
$2x - y = 5$

Utiliza tu calculadora para determinar las soluciones a la décima más cercana. Si no existe solución real, indícalo.

91. $\log(x + 3) + \log x = \log 16$

92. $\log(3x + 5) = 2.3x - 6.4$

93. $5.6 \log(5x - 12) = 2.3 \log(x - 5.4)$

94. $5.6 \log(x + 12.2) - 1.6 \log(x - 4) = 20.3 \log(2x - 6)$

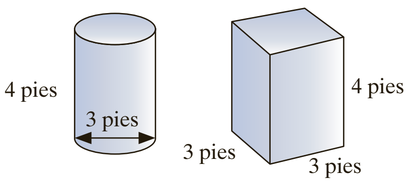
Ejercicios de conceptos y escritura

95. ¿Cómo puedes determinar rápidamente que $\log(x + 4) = \log(-2)$ no tiene una solución real?

96. En las propiedades 6c y 6d, especificamos que tanto x como y deben ser positivas. Explica por qué.

Ejercicios de repaso acumulados

[2.2] **97.** Considera las dos figuras siguientes. ¿Cuál tiene mayor volumen y por cuánto es mayor?



[3.6] **98.** Sea $f(x) = x^2 - x$ y $g(x) = x - 1$. Determina $(g - f)(3)$.

[4.6] **99.** Determina el conjunto solución del sistema de desigualdades.

$$3x - 4y \le 6$$
$$y > -x + 4$$

[7.5] **100.** Simplifica $\dfrac{2\sqrt{xy} - \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$.

[8.3] **101.** Despeja c en $E = mc^2$

[8.5] **102.** Determina la función para la parábola que tiene la forma de $f(x) = 2x^2$ y vértice en $(3, -5)$.

9.7 Función exponencial natural y función logaritmo natural

1 Identificar la función exponencial natural.
2 Identificar la función logaritmo natural.
3 Aproximar logaritmos naturales y potencias de e en una calculadora.
4 Utilizar la fórmula de cambio de base.
5 Resolver ecuaciones logarítmicas naturales y exponenciales naturales.
6 Resolver problemas de aplicaciones.

En esta sección analizaremos la *función exponencial natural* y su inversa, la *función logaritmo natural*. Estas funciones con frecuencia se usan para describir sucesos que ocurren naturalmente, de ahí su adjetivo de *natural*. Ambas funciones se basan en un número irracional designado por la letra e.

La base natural, *e*

La **base natural**, ***e***, es un número irracional que sirve como base para *la función exponencial natural* y la *función logaritmo natural*.

$$e \approx 2.7183$$

1 Identificar la función exponencial natural

En la sección 9.2 analizamos las funciones exponenciales. Recordemos que las funciones exponenciales son de la forma $f(x) = a^x$, $a > 0$ y $a \neq 1$. A continuación se define la función exponencial natural.

Comprendiendo el álgebra

Existen dos tipos importantes de logaritmos cuya notación difiere de otros logaritmos.

- Los logaritmos *comunes* tienen una base 10 y se escriben utilizando la notación log x. De este modo tenemos que

$$\log_{10} x = \log x$$

- Los logaritmos *naturales* tienen una base e, la base natural, y se escriben utilizando la notación ln x. Por consiguiente, tenemos que

$$\log_e x = \ln x$$

La función exponencial natural

La **función exponencial** natural es

$$f(x) = e^x$$

donde e es la base natural.

2 Identificar la función logaritmo natural

Comencemos definiendo los logaritmos naturales.

Logaritmos naturales

Los **logaritmos naturales** son logaritmos de base e, la base natural. Se indica que son logaritmos naturales mediante la notación ln.

$$\log_e x = \ln x \quad (x > 0)$$

$\ln x$ se lee como el "logaritmo natural de x".

En la sección 9.3, analizamos las funciones logarítmicas. Recordemos que las funciones logarítmicas son de la forma $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. A continuación se define la *función logaritmo natural*.

Función logaritmo natural

La **función logaritmo natural** es

$$f(x) = \ln x \ (x > 0)$$

donde $\ln x = \log_e x$ y e es la base natural.

Cuando cambiamos un logaritmo natural a la forma exponencial, la base de la expresión exponencial es la base natural, e.

Logaritmo natural en forma exponencial

Para $x > 0$, si $y = \ln x$, entonces $e^y = x$.

EJEMPLO 1 Determina el valor de la expresión mediante el cambio de la forma logarítmica natural a la forma exponencial.

a) $\ln 1$ **b)** $\ln e$

Solución

a) Sea $y = \ln 1$; entonces $e^y = 1$. Ya que cualquier valor diferente de cero elevado a la potencia cero es igual a 1, y debe ser igual a 0. Por lo tanto, $\ln 1 = 0$

b) Sea $y = \ln e$; entonces $e^y = e$, Para $e^y = e$, y debe ser igual a 1. Por lo tanto, $\ln e = 1$.

Resuelve ahora el ejercicio 1

Recordemos de la sección 9.3 que las funciones $y = a^x$ y $y = \log_a x$ son funciones inversas. De manera análoga, $y = e^x$ y $y = \ln x$ son funciones inversas. Las gráficas se muestran en la **Figura 9.22**. Observa que las gráficas son simétricas respecto de la recta $y = x$. Observa también que la gráfica de $y = e^x$ es similar a la gráfica $y = a^x$, donde $a > 1$, y que la gráfica de $y = \ln x$ es similar a la gráfica de $y = \log_a x$ donde $a > 1$.

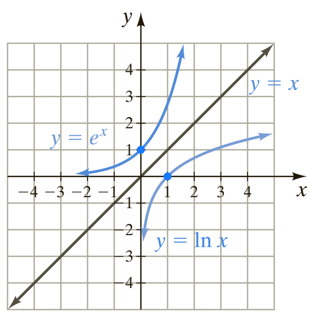


FIGURA 9.22

3 Aproximar logaritmos naturales y potencias de *e* en una calculadora

De manera similar a como hemos aproximado logaritmos comunes y potencias de 10 en la sección 9.5, podemos usar una calculadora científica o una graficadora para aproximar logaritmos naturales y potencias de *e*.

Cómo utilizar tu calculadora

Aproximando logaritmos naturales

Calculadora científica

Para aproximar logaritmos naturales, en la mayoría de las calculadoras científicas se introduce el argumento y después se presiona la tecla $\boxed{\text{LN}}$.

EJEMPLO	TECLAS A PRESIONAR	RESPUESTA MOSTRADA
Aproximar ln 31	31 $\boxed{\text{LN}}$	3.433987204

Cómo utilizar tu calculadora graficadora

Para determinar logaritmos naturales, en las calculadoras graficadoras, y en muchas calculadoras científicas, primero presionamos la tecla $\boxed{\text{LN}}$ y luego introducimos el número. Por ejemplo, en la TI-84 Plus se haría lo siguiente:

EJEMPLO	TECLAS A PRESIONAR	RESPUESTA MOSTRADA
Aproximar ln 31	$\boxed{\text{LN}}$ (31) $\boxed{\text{ENTER}}$	3.433987204

↑ Generado por la calculadora

Recuerda que un *logaritmo es un exponente*, es decir, el logaritmo natural de un número es el exponente al que debe elevarse la base natural *e* para obtener ese número. Por ejemplo:

$\ln 242 \approx 5.488937726$ por lo tanto, $e^{5.488937726} \approx 242$

$\ln 0.85 \approx -0.1625189295$ por lo tanto, $e^{-0.1625189295} \approx 0.85$

Cómo utilizar tu calculadora

Aproximando potencias de *e*

Para evaluar potencias de la base natural *e* en tu calculadora, utilizamos la función e^x, la cual está localizada encima de la tecla $\boxed{\text{LN}}$. Para accesar esta función, presiona $\boxed{\text{2ND}}$, $\boxed{\text{INV}}$, o $\boxed{\text{SHIFT}}$ antes de pulsar la tecla $\boxed{\text{LN}}$.

EJEMPLO 2 Aproxima las siguientes potencias de la base natural *e*. Redondea tus respuestas a cuatro decimales.

a) $e^{1.394}$ **b)** $e^{2.827}$ **c)** $e^{-0.356}$

Solución Utiliza la calculadora para aproximar cada potencia de *e*.

a) $e^{1.394} \approx 4.0309$ **b)** $e^{2.827} \approx 16.8947$ **c)** $e^{-0.356} \approx 0.7005$

Resuelve ahora el ejercicio 15

EJEMPLO 3 Despeja *x* en cada una de las siguientes ecuaciones. Redondea tus respuestas a cuatro decimales.

a) $\ln x = 0.132$ **b)** $\ln x = -1.203$

Solución

a) Utilizando la definición de logaritmo, sabemos que

$\ln x = 0.132$ significa que $x = e^{0.132} \approx 1.1411$

b) $\ln x = -1.203$ significa que $x = e^{-1.203} \approx 0.3002$

Resuelve ahora el ejercicio 21

4 Utilizar la fórmula de cambio de base

Si te dan un logaritmo en una base diferente a 10 o e, no podrás evaluarlo directamente en tu calculadora. Cuando esto ocurra, puedes utilizar la **fórmula de cambio de base**.

Comprendiendo el álgebra

La fórmula de cambio de base nos permite aproximar logaritmos utilizando la calculadora.

Fórmula de cambio de base

Para cualesquiera bases de logaritmos a y b, y cualquier número positivo x,

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

En la fórmula de cambio de base, con frecuencia se utiliza 10 como valor de b, ya que podemos aproximar más fácilmente los logaritmos comunes en una calculadora. Al reemplazar b con 10, obtenemos

$$\log_a x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} a} \quad \text{o} \quad \log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

EJEMPLO 4 Utiliza el cambio de base para aproximar $\log_3 24$.

Solución Si sustituimos a por 3 y x por 24 en $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$, obtenemos

$$\log_3 24 = \frac{\log 24}{\log 3} \approx 2.8928$$

Observa que $3^{2.8928} \approx 24$

Resuelve ahora el ejercicio 27

5 Resolver ecuaciones logarítmicas naturales y exponenciales naturales

Las propiedades de los logaritmos que analizamos en la sección 9.4 son válidas también para los logaritmos naturales.

Propiedades para logaritmos naturales

$\ln xy + \ln x + \ln y$	$(x > 0 \text{ y } y > 0)$	Regla del producto
$\ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$	$(x > 0 \text{ y } y > 0)$	Regla del cociente
$\ln x^n = n \ln x$	$(x > 0)$	Regla de la potencia

Las propiedades 4 y 5 de la página 598 pueden también escribirse utilizando logaritmos naturales. Por consiguiente, $\ln e^x = x$ y $e^{\ln x} = x$. Nos referiremos a estas propiedades como propiedades 7 y 8, respectivamente.

Propiedades adicionales para los logaritmos naturales y expresiones exponenciales naturales

$\ln e^x = x$		Propiedad 7
$e^{\ln x} = x,$	$x > 0$	Propiedad 8

Utilizando la propiedad 7, $\ln e^x = x$ podemos establecer, por ejemplo, que $\ln e^{kt} = kt$, y $\ln e^{-2.06t} = -2.06t$. Usando la propiedad 8, $e^{\ln x} = x$, podemos establecer, por ejemplo, que $e^{\ln (t+2)} = t + 2$ y $e^{\ln kt} = kt$.

EJEMPLO 5 Despeja y de la ecuación $\ln y - \ln(x + 9) = t$.

Solución

$$\ln y - \ln(x+9) = t$$

$$\ln \frac{y}{x+9} = t \qquad \text{Regla del cociente}$$

$$\frac{y}{x+9} = e^t \qquad \text{Escribe en la forma exponencial}$$

$$y = e^t(x+9) \qquad \text{Despeja } y.$$

Resuelve ahora el ejercicio 63

EJEMPLO 6 Despeja t de la ecuación $225 = 450e^{-0.4t}$.

Solución Comienza dividiendo ambos lados de la ecuación entre 450 para aislar $e^{-0.4t}$.

$$\frac{225}{450} = \frac{\cancel{450}e^{-0.4t}}{\cancel{450}}$$

$$0.5 = e^{-0.4t}$$

Ahora tomamos el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación para eliminar la expresión exponencial del lado derecho.

$$\ln 0.5 = \ln e^{-0.4t}$$

$$\ln 0.5 = -0.4t \qquad \text{Propiedad 7}$$

$$-0.6931472 = -0.4t$$

$$\frac{-0.6931472}{-0.4} = t$$

$$1.732868 = t$$

Resuelve ahora el ejercicio 49

EJEMPLO 7 Despeja t de la ecuación $P = P_0e^{kt}$.

Solución Podemos seguir el mismo procedimiento que se utilizó en el ejemplo 6.

$$P = P_0e^{kt}$$

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\cancel{P_0}e^{kt}}{\cancel{P_0}} \qquad \text{Divide ambos lados entre } P_0.$$

$$\frac{P}{P_0} = e^{kt}$$

$$\ln \frac{P}{P_0} = \ln e^{kt} \qquad \text{Toma el logaritmo natural de ambos lados.}$$

$$\ln P - \ln P_0 = \ln e^{kt} \qquad \text{Regla del cociente}$$

$$\ln P - \ln P_0 = kt \qquad \text{Propiedad 7}$$

$$\frac{\ln P - \ln P_0}{k} = t \qquad \text{Despeja } t.$$

Resuelve ahora el ejercicio 59

6 Resolver problemas de aplicaciones

Veamos algunas aplicaciones que incluyen el uso de la base natural y de los logaritmos naturales. Comenzaremos con una fórmula utilizada cuando una cantidad aumenta o disminuye a una *tasa exponencial*.

Crecimiento exponencial o fórmula de decaimiento

Cuando una cantidad P aumenta (crece) o disminuye (decae) a una tasa exponencial, el valor de P después del tiempo t puede encontrarse utilizando la fórmula

$$P = P_0 e^{kt},$$

donde P_0 es el valor inicial de la cantidad P, y k es la constante de crecimiento o disminución de la tasa.

Cuando $k > 0$, P aumenta conforme t aumenta.

Cuando $k < 0$, P disminuye y se acerca más a 0 conforme t aumenta.

EJEMPLO 8 **Interés capitalizable de forma continua** Cuando el interés se capitaliza de forma continua, el balance, P, en la cuenta a lo largo del tiempo, t, puede calcularse mediante la fórmula de crecimiento exponencial $P = P_0 e^{kt}$, donde P_0 es el capital inicial que se invirtió y k es la tasa de interés.

a) Considera que la tasa de interés es 6% capitalizable de manera continua e inicialmente se invirtieron \$1000. Determina el saldo que tendrá la cuenta al cabo de 3 años.

b) ¿Cuánto tiempo pasará para que la cuenta duplique el saldo inicial?

Solución

a) Entiende y traduce Se nos ha dicho que el capital inicial que se invirtió, P_0, es de \$1000. También se dice que el tiempo, t, es de 3 años y que la tasa de interés, k, es de 6% o 0.06. Sustituimos estos valores en la fórmula dada y despejamos P.

$$P = P_0 e^{kt}$$
$$P = 1000e^{(0.06)(3)}$$

Realiza los cálculos

$$= 1000e^{0.18} = 1000(1.1972174) \quad \text{obtenido con una calculadora}$$
$$\approx 1197.22$$

Responde Al cabo de 3 años, el saldo de la cuenta es de ≈ \$1197.22.

b) Entiende y traduce Para que el valor de la cuenta se duplique, el saldo tendría que llegar a ser de \$2000. Por lo tanto, sustituimos P por 2000 y despejamos t.

$$P = P_0 e^{kt}$$
$$2000 = 1000e^{0.06t}$$
$$2 = e^{0.06t} \quad \text{Divide ambos lados entre 1000.}$$
$$\ln 2 = \ln e^{0.06t} \quad \text{Toma el logaritmo natural de ambos lados.}$$

Realiza los cálculos

$$\ln 2 = 0.06t \quad \text{Propiedad 7}$$
$$\frac{\ln 2}{0.06} = t$$
$$\frac{0.6931472}{0.06} = t$$
$$11.552453 \approx t$$

Responde Así, con una tasa de interés de 6% capitalizable de manera continua, la cuenta se duplicará en aproximadamente 11.6 años.

Resuelve ahora el ejercicio 69

EJEMPLO 9 **Decaimiento radiactivo** El estroncio 90 es un isótopo radiactivo que decae exponencialmente 2.8% cada año. Considera que al inicio hay 1000 gramos de estroncio 90 en una sustancia.

a) Determina el número de gramos de estroncio 90 que quedarán después de 50 años.

b) Determina la vida media del estroncio 90.

© Allen R. Angel

Solución

a) Entiende Como el estroncio 90 decae al paso del tiempo, el valor de k en la fórmula $P = P_0e^{kt}$ es negativo. Como la tasa de decaimiento es de 2.8% anual, usamos $k = -0.028$. Por lo tanto, la fórmula que usaremos es $P = P_0e^{-0.028t}$.

Traduce
$$\begin{aligned} P &= P_0e^{-0.028t} \\ &= 1000e^{-0.028(50)} \end{aligned}$$

Realiza los cálculos
$$= 1000e^{-1.4} = 1000(0.246597) = 246.597$$

Responde Por lo tanto, al cabo de 50 años quedarán 246.597 gramos de estroncio 90.

b) Para encontrar la vida media, necesitamos determinar cuándo quedarán 500 gramos de estroncio 90.

$$\begin{aligned} P &= P_0e^{-0.028t} \\ 500 &= 1000e^{-0.028t} \\ 0.5 &= e^{-0.028t} && \text{Divide ambos lados entre 1000.} \\ \ln 0.5 &= \ln e^{-0.028t} && \text{Toma el logaritmo natural de ambos lados.} \\ -0.6931472 &= -0.028t && \text{Propiedad 7} \\ \frac{-0.6931472}{-0.028} &= t \\ 24.755257 &\approx t \end{aligned}$$

Por lo tanto, la vida media del estroncio 90 es de aproximadamente 24.8 años.

Resuelve ahora el ejercicio 71

EJEMPLO 10 **Venta de juguetes** La fórmula para calcular la cantidad de dinero, A, que se gasta en la publicidad de ciertos juguetes es $A = 350 + 650 \ln n$, en donde n es el número estimado de juguetes que se venderán.

a) Si la compañía desea vender 2200 juguetes, ¿cuánto dinero deberá gastar en publicidad?

b) ¿Cuántos juguetes puede vender si destina $6000 a la publicidad?

Solución

a)
$$\begin{aligned} A &= 350 + 650 \ln n \\ &= 350 + 650 \ln 2200 && \text{Sustituye } n \text{ por 2200.} \\ &= 350 + 650(7.6962126) \\ &= 5352.54 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la compañía gastará $5352.54 en publicidad.

b) Entiende y traduce Nos piden determinar el número de juguetes, n, que la compañía puede vender si destina $6000 en publicidad. Sustituimos los valores dados en la ecuación y despejemos n.

Realiza los cálculos
$$\begin{aligned} A &= 350 + 650 \ln n \\ 6000 &= 350 + 650 \ln n && \text{Sustituye A por 6000.} \\ 5650 &= 650 \ln n && \text{Resta 350 en ambos lados.} \\ \frac{5650}{650} &= \ln n && \text{Divide ambos lados entre 650.} \\ 8.69231 &\approx \ln n \\ e^{8.69231} &\approx n && \text{Cambia a forma exponencial.} \\ 5957 &\approx n && \text{Obtén la respuesta con una calculadora.} \end{aligned}$$

Responde Por lo tanto, si se destinan $6000 a publicidad, la compañía puede esperar vender alrededor de 5957 juguetes.

Resuelve ahora el ejercicio 75

Cómo utilizar tu calculadora graficadora

Para aproximar las soluciones de la ecuación $4e^{0.3x} - 5 = x + 3$ utilizando la TI-84 Plus, podemos graficar

$$Y_1 = 4e\hat{}(0.3x) - 5$$
$$Y_2 = x + 3$$

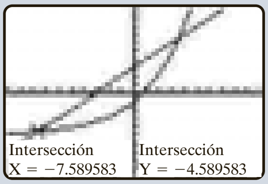


FIGURA 9.23

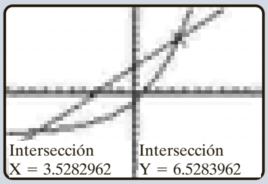


FIGURA 9.24

Los puntos de intersección en estas gráficas pueden encontrarse usando la función *intersect* del menú CALC. La **Figura 9.23** muestra que la coordenada del eje x en un punto de intersección, $x \approx -7.5896$, es una solución. La **Figura 9.24** muestra que la coordenada del eje x en el otro punto de intersección, $x \approx 3.5284$, es la otra solución.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.7

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

escribe	natural	inversas	trimestral	exponencial	compuesto
logaritmo	continua	base	cambio	comunes	crecimiento

1. La ______________ natural, e, es un número irracional que sirve como la base para la función exponencial natural y la función logaritmo natural.

2. La función exponencial natural y la función logaritmo natural son funciones ______________.

3. La función ______________ natural es $f(x) = e^x$, donde e es la base natural.

4. La función ______________ natural es $f(x) = \ln x$, con $x > 0$, donde e es la base natural.

5. La fórmula $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ es la fórmula de ______________ de base.

6. En la fórmula de cambio de base, con frecuencia se coloca 10 como valor de b, ya que podemos aproximar logaritmos ______________ en una calculadora.

7. Para resolver la ecuación $5.7 = e^x$ tomamos el logaritmo ______________ de ambos lados de la ecuación.

8. Para resolver la ecuación $\ln x = 1.239$, ______________ la ecuación en forma exponencial.

9. El ______________ exponencial, o fórmula de decaimiento, establece que cuando una cantidad P aumenta o disminuye a una tasa exponencial, el valor de P después de cierto tiempo t puede encontrarse utilizando la fórmula $P = P_0e^{kt}$.

10. Cuando el interés se capitaliza de forma ______________, el saldo en la cuenta puede calcularse mediante la fórmula de crecimiento exponencial.

Practica tus habilidades

Aproxima los siguientes valores. Redondea tus respuestas a cuatro decimales.

11. $\ln 27$ 12. $\ln 810$ 13. $\ln 0.415$ 14. $\ln 0.000176$

Aproxima los siguientes valores. Redondea tus respuestas a cuatro decimales.

15. $e^{1.2}$ 16. $e^{4.8}$ 17. $e^{-0.56}$ 18. $e^{-2.6}$

Aproxima el valor de x. Redondea tus respuestas a cuatro decimales.

19. $\ln x = 1.6$ 20. $\ln x = 5.2$ 21. $\ln x = -2.85$ 22. $\ln x = -0.674$

Aproxima el valor de x. Redondea tus respuestas a cuatro decimales.

23. $e^x = 98$ 24. $e^x = 2010$ 25. $e^x = 0.0574$ 26. $e^x = 0.000231$

Utiliza la fórmula de cambio de base para aproximar el valor de los siguientes logaritmos. Redondea tus respuestas a cuatro decimales.

27. $\log_2 21$ 28. $\log_2 89$ 29. $\log_4 11$ 30. $\log_4 316$

31. $\log_5 82$ **32.** $\log_5 1893$ **33.** $\log_6 185$ **34.** $\log_6 806$

35. $\log_5 0.463$ **36.** $\log_3 0.0365$

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

37. $\ln x + \ln (x - 1) = \ln 12$ **38.** $\ln (x + 4) + \ln (x - 2) = \ln 16$ **39.** $\ln x + \ln (x + 4) = \ln 5$

40. $\ln (x + 3) + \ln (x - 3) = \ln 40$ **41.** $\ln x = 5 \ln 2 - \ln 8$ **42.** $\ln x = \frac{3}{2}\ln 16$

43. $\ln (x^2 - 4) - \ln (x + 2) = \ln 4$ **44.** $\ln (x + 12) - \ln (x - 4) = \ln 5$

Cada una de las siguientes ecuaciones está en la forma $P = P_0e^{kt}$. Resuelve para la variable que queda. Recuerda, e es una constante. Escribe la respuesta redondeada a cuatro decimales.

45. $P = 120e^{2.3(1.6)}$ **46.** $900 = P_0e^{(0.4)(3)}$ **47.** $50 = P_0e^{-0.5(3)}$

48. $18 = 9e^{2t}$ **49.** $60 = 20e^{1.4t}$ **50.** $29 = 58e^{-0.5t}$

51. $86 = 43e^{k(3)}$ **52.** $15 = 75e^{k(4)}$ **53.** $20 = 40e^{k(2.4)}$

54. $100 = A_0e^{-0.02(3)}$ **55.** $A = 6000e^{-0.08(3)}$ **56.** $51 = 68e^{-0.04t}$

Despeja para la variable que se indica.

57. Despeja V_0 en, $V = V_0e^{kt}$. **58.** Despeja P_0 en, $P = P_0e^{kt}$. **59.** Despeja t en, $P = 150e^{7t}$.

60. Despeja t en, $361 = P = P_0e^{kt}$. **61.** 61. Despeja k en, $A = A_0e^{kt}$. **62.** Despeja k en, $167 = R_0ekt$.

63. Despeja y en, $\ln y - \ln x = 2.3$. **64.** Despeja y en, $\ln y + 9 \ln x = \ln 2$. **65.** Despeja y en, $\ln y - \ln (x + 6) = 5$.

66. Despeja y en, $\ln (x + 2) - \ln (y - 1) = \ln 5$.

Resolución de problemas

Utiliza una calculadora para resolver los siguientes problemas.

67. Interés capitalizable de manera continua Si \$5000 se invierten a 6% capitalizable de manera continua,
a) determina el saldo de la cuenta después de 2 años.
b) ¿En cuánto tiempo se duplicará el valor de la cuenta? (Ver ejemplo 8).

68. Interés capitalizable de manera continua Si \$3000 se invierten a 3% capitalizable de manera continua,
a) determina el saldo de la cuenta después de 30 años.
b) ¿En cuánto tiempo se duplicará el valor la cuenta?

69. Cuenta en una unión de crédito Lucy Alfonso invierte \$2500 en su cuenta de ahorro que tiene en una unión de crédito ganando un interés capitalizable de manera continua de 4%.
a) Determina el saldo de la cuenta de Lucy después de 3 años.
b) ¿En cuánto tiempo duplicará su valor la cuenta de Lucy?

70. Cuenta de retiro Kristie Paulson invierte \$10,000 en una cuenta de retiro ganando un interés capitalizable de manera continua de 5%.
a) Determina el saldo de la cuenta de Kristie después de 25 años.
b) ¿En cuánto tiempo triplicará su valor la cuenta de Kristie?

71. Decaimiento radiactivo Consulta el ejemplo 9. Si en un inicio había 70 gramos, determina la cantidad de estroncio 90 que queda después de 20 años.

72. Estroncio 90 Consulta el ejemplo 9. Si en un inicio había 200 gramos, determina la cantidad de estroncio 90 que queda después de 40 años.

73. Bebidas dulces Para cierta bebida dulce, el porcentaje del mercado objetivo, $f(t)$ que compra la bebida dulce es una función del número de días, t, que se le hace publicidad a ésta. La función que describe esta relación es $f(t) = 1 - e^{-0.4t}$.
a) Después de 50 días de publicidad, ¿qué porcentaje del mercado objetivo compra la bebida?
b) ¿Cuántos días de publicidad se necesitan si se quiere que 75% del mercado objetivo compre bebida?

© Allen R. Angel

74. Truchas en un lago En el 2010, el Lago Thomas Pearse tenía 300 truchas. El aumento del número de truchas se estima por medio de la función $g(t) = 300e^{0.07t}$, donde t es el número de años a partir de 2010. ¿Cuántas truchas habrá en el lago en **a)** 2015, **b)** 2020?

© Allen R. Angel

75. Velocidad al caminar En un estudio psicológico se determinó que la velocidad promedio al caminar, $f(P)$, de una persona citadina es una función de la población de la ciudad. Para una ciudad con una población P, la velocidad promedio al caminar, en pies por segundo, está dada por $f(P) = 0.37 \ln P + 0.05$. Nashville Tennessee, tiene una población de 972,000 habitantes.

a) ¿Cuál es la velocidad promedio al caminar de una persona que vive en Nashville?

b) En la ciudad de Nueva York habitan 8,567,000 personas; ¿cuál es la velocidad promedio al caminar de una persona de esta ciudad?

c) Si la velocidad promedio al caminar de una persona en cierta ciudad es de 5.0 pies por segundo, ¿cuál es la población de la ciudad?

76. Publicidad Para cierto tipo de corbata, el número de corbatas que se venden, $N(a)$, es una función de la cantidad de dólares destinados a publicitarlas, a, (en miles de dólares). La función que describe esta relación es $N(a) = 800 + 300 \ln a$.

a) ¿Cuántas corbatas se vendieron después de gastar \$1500 (o 1.5 miles de dólares) en publicidad?

b) ¿Cuánto dinero se debe invertir en publicidad para vender 1000 corbatas?

77. Considera que el valor de la isla de Manhattan ha crecido a una razón exponencial de 8% por año desde 1626, cuando Peter Minuet, de la Dutch West India Company, la compró por \$24. El valor de Manhattan puede determinarse mediante la ecuación $V = 24e^{0.08t}$, donde t es el número de años a partir de 1626. Determina el valor de la isla de Manhattan en el 2010, esto es, cuando $t = 384$ años.

© Allen R. Angel

Times Square en Manhattan

78. Prescripción de un medicamento El porcentaje de médicos que aceptan y prescriben un medicamento nuevo está dado por la función $P(t) = 1 - e^{-0.22t}$ donde t es el tiempo en meses desde que el medicamento sale al mercado. ¿Qué porcentaje de médicos acepta prescribir un nuevo medicamento 2 meses después de que éste sale al mercado?

79. Población mundial En febrero de 2009 se calculaba que la población mundial era de aproximadamente 6.76 mil millones de personas. Asume que la población mundial continuará creciendo exponencialmente a la tasa actual de casi 1.2% por año. La población mundial esperada, en miles de millones de personas, en t años, estaría dada por la función $P(t) = 6.76e^{0.012t}$, donde t es el número de años a partir de 2009.

a) Usa esta función para estimar la población mundial en el 2015.

b) Con la tasa de crecimiento actual ¿Dentro de cuántos años se duplicará la población mundial?

80. Población de Estados Unidos En febrero de 2009 se calculaba que la población de Estados Unidos era de aproximadamente 305.8 millones de personas. Asume que la población de Estados Unidos continuará creciendo exponencialmente a la tasa actual de casi 1.0% por año. La población esperada en Estados Unidos, en millones de personas, en t años, está dada por la función $P(t) = 305.8e^{0.010t}$, donde t es el número de años a partir de 2009.

a) Utiliza esta función para estimar la población de Estados Unidos en el 2015.

b) Con la tasa de crecimiento actual, ¿dentro de cuántos años se duplicará la población de Estados Unidos?

81. Población de China En febrero de 2009 se calculaba que la población de China era de aproximadamente 1.34 mil millones de personas. Considera que la población de China continuará creciendo exponencialmente a la tasa actual de casi 0.6% por año. Así, la población esperada de China, en miles de millones de personas, en t años, estaría dada por la función $P(t) = 1.34e^{0.006t}$, donde t es el número de años a partir de 2009.

a) Utiliza esta función para estimar la población de China en el 2015.

b) Con la tasa de crecimiento actual, ¿dentro de cuántos años se duplicará la población de China?

82. Población de México En febrero de 2009 se calculaba que la población de México era de aproximadamente 111.2 millones de personas. Considera que la población de México continuará creciendo exponencialmente a la tasa actual de casi 1.1% por año. Así, la población esperada de México, en millones de personas, en t años, estaría dada por la función $P(t) = 111.2e^{0.011t}$ donde t es el número de años a partir de 2009.

a) Utiliza esta función para estimar la población de México en el 2015.

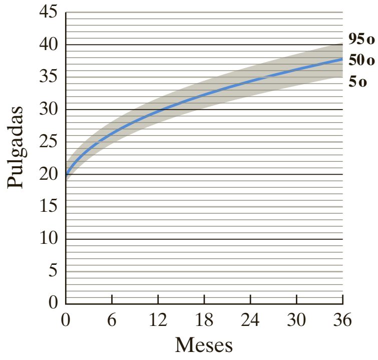
b) Con la tasa de crecimiento actual, ¿dentro de cuántos años se duplicará la población de México?

© Allen R. Angel

Ciudad de México

83. Estaturas de niños El área sombreada de la siguiente gráfica muestra el intervalo normal (del percentil 5 al 95) de las estaturas para niños de hasta 36 meses de edad. La mediana, o percentil 50, de estaturas se indica con una línea verde. La función $y = 15.29 + 5.93 \ln x$ se puede usar para estimar la mediana de la estatura de niños con edades de 3 a 36 meses. Utiliza esta función para calcular la mediana de la estatura de niños con edades de **a)** 18 y **b)** 30 meses.

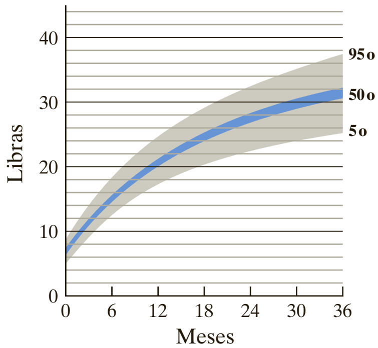
Niños



Fuente: Newsweek

84. Pesos de las niñas El área sombreada de la siguiente gráfica muestra el intervalo normal (del percentil 5 al 95) de peso para niñas de hasta 36 meses de edad. La mediana, o percentil 50, de pesos se indica con una línea azul. La función $y = 3.17 + 7.32 \ln x$ se puede utilizar para estimar la mediana del peso de niñas con edades de 3 a 36 meses. Usa esta función para estimar la mediana del peso de niñas con edades de **a)** 18 y **b)** 30 meses.

Niñas



Fuente: Newsweek

85. Decaimiento radiactivo El uranio 234 (U-234) decae exponencialmente a una tasa de 0.0003% por año. Así, la fórmula $A = A_0 e^{-0.000003t}$ se puede usar para determinar la cantidad de U-234 restante a partir de una cantidad inicial A_0, después de t años.

a) Si se tenían 1000 gramos de U-234 en el 2010, ¿cuántos gramos quedarán en el 2110, 100 años después?

b) Determina la vida media del U-234.

86. Decaimiento radiactivo El plutonio, el cual se usa comúnmente en los reactores nucleares, decae exponencialmente a una tasa de 0.003% por año. La fórmula $A = A_0 e^{kt}$ se puede utilizar para determinar la cantidad de plutonio restante a partir de una cantidad inicial A_0, después de t años. En la fórmula, la k se reemplaza por -0.00003.

a) Si en el 2009 había 1000 gramos de plutonio, ¿cuántos gramos quedarán en el 2109, es decir, al cabo de 100 años?

b) Determina la vida media del plutonio.

87. Datación de carbono La datación de carbono se usa para estimar la edad de plantas y objetos antiguos. El carbono 14 es el elemento radiactivo que más comúnmente se utiliza para este propósito. El carbono 14 decae exponencialmente a una tasa de 0.01205% por año. La cantidad de carbono 14 que queda en un objeto después de t años se puede determinar mediante la función $f(t) = \upsilon_0 e^{0.0001205t}$, donde υ_0 es la cantidad inicial presente.

a) Si originalmente el hueso de un animal antiguo posee 20 gramos de carbono 14, y cuando es encontrado solamente posee 9 gramos de carbono 14, ¿cuál es la edad del hueso?

b) ¿Cuál es la edad de un objeto que conserva 50% del total de carbono 14 que poseía originalmente?

88. Interés compuesto ¿A qué tasa de interés compuesto de forma continua debe invertirse una suma de dinero para que se tenga el doble de la cantidad en 13 años?

89. Interés compuesto ¿Cuánto dinero debe depositarse hoy para obtener \$20,000 en 18 años a una tasa de 6% de interés compuesto de forma continua?

90. Radioisótopo La fuente de energía de un satélite es un radioisótopo. La potencia P, en watts, que le resta a la fuente de energía es una función del tiempo que el satélite ha estado en el espacio.

a) Si en un inicio había 50 gramos del radioisótopo, la potencia restante después de t días es $P = 50^{e^{-0.002t}}$. Determina la potencia restante después de 50 días.

b) ¿Cuándo la potencia restante en la fuente caerá a 10 watts?

91. Decaimiento radiactivo Durante el accidente nuclear en Chernobyl, Ucrania, en 1986, dos de los materiales radiactivos que escaparon a la atmósfera fueron cesio 137, con tasa de decaimiento de 2.3%, y estroncio 90, con tasa de decaimiento de 2.8%.

a) ¿Qué material se descompone más rápido? Explica.

b) ¿Cuál es el porcentaje de cesio que quedará en 2036, es decir, a 50 años del accidente?

92. Datación radiométrica En un estudio de datación radiométrica (que utiliza isótopos radiactivos para determinar la edad de los objetos), con frecuencia se utiliza la fórmula

$$t = \frac{t_h}{0.693} \ln\left(\frac{N_0}{N}\right)$$

En la fórmula, t es la edad del objeto, t_h es la vida media del isótopo radiactivo usado N_0 es el número original de los átomos radiactivos presentes y N es el número de átomos restantes después de transcurrido un tiempo t. Supón que una roca originalmente contenía 5×10^{12} átomos de uranio 238. Uranio 238 tiene una vida media de 4.5×10^9 años. Si en la época actual la roca solo tiene 4×10^{12} átomos, ¿cuál es la edad de la roca?

Problemas de desafío

En los ejercicios 93-96, cuando despejes para la variable, dada, escribe la respuesta sin utilizar el logaritmo natural.

93. Velocidad La distancia recorrida por un tren que originalmente se mueve a una velocidad υ_0 después de que su motor se apaga se puede calcular por la fórmula $x = \frac{1}{k}\ln(k\upsilon_0 t + 1)$. Despeja υ_0 de la ecuación.

94. Intensidad de la luz La intensidad de la luz conforme pasa a través de ciertos medios puede determinarse mediante la fórmula $x = k(\ln I_0 - \ln I)$. Despeja I_0 de la ecuación.

95. Circuito eléctrico Una ecuación relacionada con la corriente y el tiempo en un circuito eléctrico es $\ln i - \ln I = \frac{-t}{RC}$. Despeja i de la ecuación.

96. Molécula Una fórmula utilizada en el estudio de la acción de una molécula de proteína es $\ln M = \ln Q - \ln(1 - Q)$. Despeja Q de la ecuación.

Ejercicios de repaso acumulados

[3.3] **97.** Sea $h(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x + 6}$. Determina **a)** $h(-4)$ y **b)** $h\left(\dfrac{2}{5}\right)$.

[4.3] **98. Boletos** El boleto de admisión para un juego de hockey sobre hielo cuesta $15 para adultos y $11 para niños. Si se vendieron un total de 550 boletos, determina cuántos boletos para niño y cuántos para adulto se vendieron, si la recaudación total fue de $7290.

[5.2] **99.** Multiplica $(3xy^2 + y)(4x - 3xy)$.

[5.6] **100.** Determina dos valores de b para que $4x^2 + bx + 25$ sea un trinomio cuadrado perfecto.

[7.4] **101.** Multiplica $\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^5}\right)$.

Resumen del capítulo 9

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES | **EJEMPLOS**

Sección 9.1

La **función compuesta** $(f \circ g)(x)$, está definida como

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

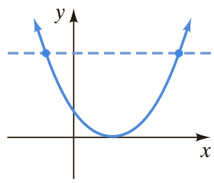
Dada $f(x) = x^2 + 3x - 1$ y $g(x) = x - 4$, entonces

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) = f[g(x)] &= (x - 4)^2 + 3(x - 4) - 1\\ &= x^2 - 8x + 16 + 3x - 12 - 1\\ &= x^2 - 5x + 3\\ (g \circ f)(x) = g[f(x)] &= (x^2 + 3x - 1) - 4\\ &= x^2 + 3x - 5\end{aligned}$$

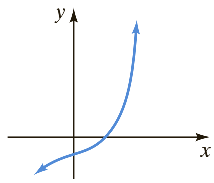
Una función es una **función uno a uno**, si cada elemento en el rango corresponde con exactamente un elemento en el dominio.

El conjunto $\{(1, 3), (-2, 5), (6, 2), (4, -1)\}$ es una función uno a uno, ya que cada elemento en el rango corresponde con exactamente un elemento en el dominio.

Para que una función sea uno a uno, su gráfica debe cumplir el criterio de **la recta vertical** (para asegurar que sea una función) y el **criterio de la recta horizontal** (para comprobar el criterio de uno a uno).



No es una función uno a uno



Función uno a uno

Si $f(x)$ es una función uno a uno con pares ordenados de la forma (x, y), su **función inversa**, $f^{-1}(x)$, es una función uno a uno con pares ordenados de la forma (y, x). Solo las funciones uno a uno tienen funciones inversas.

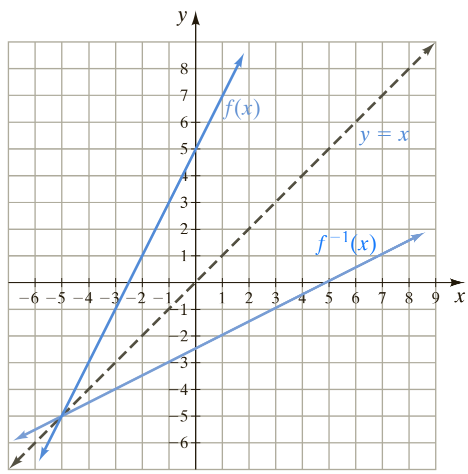
Para determinar la función inversa de una función uno a uno

1. Reemplaza $f(x)$ por y.
2. Intercambia las dos variables x y y.
3. Despeja y de la ecuación.
4. Reemplaza y por $f^{-1}(x)$ (esto proporciona la función inversa mediante la notación de función inversa).

Determina la función inversa para $f(x) = 2x + 5$. Grafica $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en el mismo conjunto de ejes.

Solución:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + 5\\ y &= 2x + 5\\ x &= 2y + 5\\ x - 5 &= 2y\\ \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} &= y\\ \text{o} \quad f^{-1}(x) &= \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\end{aligned}$$



HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES | **EJEMPLOS**

Sección 9.1 (cont.)

Si dos funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son inversas una de la otra, $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

Dado el ejemplo anterior con $f(x) = 2x + 5$ y $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$, entonces

$$(f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = 2\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right) + 5$$
$$= x - 5 + 5 = x$$

y

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = \frac{1}{2}(2x + 5) - \frac{5}{2}$$
$$= x + \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = x$$

Sección 9.2

Para cualquier número real $a > 0$ y $a \neq 1$,

$$f(x) = a^x \quad \text{o} \quad y = a^x$$

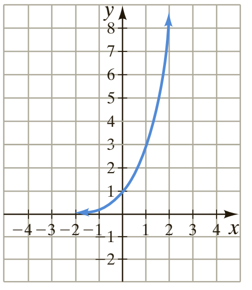
es una **función exponencial**.

Para todas las funciones exponenciales de la forma $y = a^x$ o $f(x) = a^x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$,

1. El dominio de la función es $(-\infty, \infty)$.
2. El rango de la función es $(0, \infty)$.
3. La gráfica de la función pasa por los puntos $\left(-1, \frac{1}{a}\right)$, $(0, 1)$ y $(1, a)$.

Gráfica $y = 3x$.

x	y
−2	1/9
−1	1/3
0	1
1	3
2	9



Sección 9.3

Logaritmos

Para $x > 0$ y $a > 0$, $a \neq 1$

$$\boldsymbol{y = \log_a x} \text{ significa } \boldsymbol{x = a^y}$$

logaritmo (exponente) → y; número → x; base → a

$$y = \log_a x \quad \text{significa} \quad x = a^y$$

exponente → y; número → x; base → a

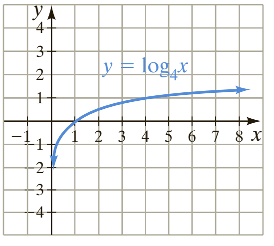
Forma exponencial	Forma logarítmica
$9^2 = 81$	$\log_9 81 = 2$
$\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$	$\log_{1/4} \frac{1}{64} = 3$

Funciones logarítmicas

Para todas las funciones logarítmicas de la forma $y = \log_a x$ o $f(x) = \log_a x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$ y $x > 0$,

1. El dominio de la función es $(0, \infty)$.
2. El rango de la función es $(-\infty, \infty)$.
3. La gráfica de la función pasa por los puntos $\left(\frac{1}{a}, -1\right)$, $(1, 0)$, y $(a, 1)$.

Gráfica $y = \log_4 x$.



HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 9.3 (cont.)

Características de las funciones exponenciales y logarítmicas

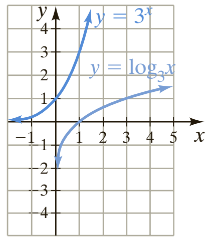
$y = a^x$ y $y = \log_a x$ son funciones inversas.

	Función exponencial	Función logarítmica
	$y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$	$y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$
Dominio:	$(-\infty, \infty)$	$(0, \infty)$
Rango:	$(0, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
Puntos en la gráfica:	$\left(-1, \frac{1}{a}\right)$, $(0, 1)$, $(1, a)$	$\left(\frac{1}{a}, -1\right)$, $(1, 0)$, $(a, 1)$

x se transforma en y

x se transforma en y

Gráfica $y = 3x$ y $y = \log_3 x$ en el mismo conjunto de ejes.



Sección 9.4

Regla del producto para logaritmos

Para números reales positivos x, y y a, $a \neq 1$,

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \qquad \text{Propiedad 1}$$

$$\log_5 (9 \cdot 13) = \log_5 9 + \log_5 13$$
$$\log_7 mn = \log_7 m + \log_7 n$$

Regla del cociente para logaritmos

Para números reales positivos x, y y a, $a \neq 1$,

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad \text{Propiedad 2}$$

$$\log_3 \frac{15}{4} = \log_3 15 - \log_3 4$$
$$\log_8 \frac{z+1}{z+3} = \log_8 (z+1) - \log_8 (z+3)$$

Regla de la potencia para logaritmos

Si x y a son números reales positivos, $a \neq 1$, y n es cualquier número real, entonces

$$\log_a x^n = n \log_a x \qquad \text{Propiedad 3}$$

$$\log_9 23^5 = 5 \log_9 23$$
$$\log_6 \sqrt[3]{x+4} = \log_6 (x+4)^{1/3} = \frac{1}{3} \log_6 (x+4)$$

Propiedades adicionales de los logaritmos

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces

$$\log_a a^x = x \qquad \text{Propiedad 4}$$

y $$a^{\log_a x} = x \ (x > 0) \qquad \text{Propiedad 5}$$

$$\log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$$
$$7^{\log_7 3} = 3$$

Sección 9.5

Logaritmo común

Los logaritmos de base 10 se denominan logaritmos comunes.

$\log x$ significa $\log_{10} x$.

El **logaritmo común** de un número real positivo es el *exponente* al cual la base 10 se eleva para obtener el número.

Si $\log N = L$, entonces $10^L = N$.

Para determinar un logaritmo común, utiliza una calculadora científica o graficadora. Te sugerimos redondear la respuesta a cuatro decimales.

$\log 17$ significa $\log_{10} 17$

$\log (b + c)$ significa $\log_{10} (b + c)$

Si $\log 14 \approx 1.1461$, entonces $10^{1.1461} \approx 14$.

Si $\log 0.6 \approx -0.2218$, entonces $10^{-0.2218} \approx 0.6$.

$\log 183 \approx 2.2625$

$\log 0.42 \approx -0.3768$

Potencias de 10

Si $\log x = y$ entonces $x = 10^y$

Para determinar potencias de 10, utiliza una calculadora científica o graficadora.

Si $\log 1890.1662 \approx 3.2765$, entonces $10^{3.2765} \approx 1{,}890.1662$.
Si $\log 0.0143 \approx -1.8447$, entonces $10^{-1.8447} \approx 0.0143$.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 9.6

Propiedades para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas

a) Si $x = y$, entonces $a^x = a^y$.
b) Si $a^x = a^y$, entonces $x = y$.
c) Si $x = y$, entonces $\log_b x = \log_b y \quad (x > 0, y > 0)$.
d) Si $\log_b x = \log_b y$, entonces $x = y \quad (x > 0, y > 0)$.

Propiedades 6a-6d

a) Si $x = 5$, entonces $3^x = 35$.
b) Si $3^x = 35$, entonces $x = 5$.
c) Si $x = 2$, entonces $\log x = \log 2$.
d) Si $\log x = \log 2$, entonces $x = 2$.

Sección 9.7

La **función exponente natural** es

$$f(x) = e^x$$

donde $e \approx 2.7183$

Logaritmos naturales son los logaritmos con base e. Los logaritmos naturales se indican mediante la notación ln.

$$\text{Log}_e\, x = \ln x$$

Para $x > 0$, si $y = \ln x$, entonces $e^y = x$.

La **función logaritmo natural** es

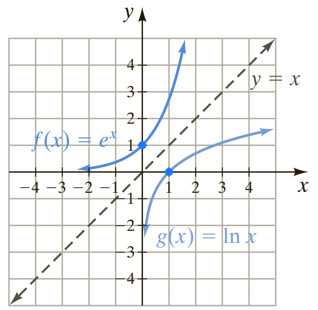
$$g(x) = \ln x$$

donde la base $e \approx 2.7183$.

Para aproximar los valores de exponentes naturales y de logaritmos naturales, utiliza una calculadora científica o graficadora.

La función exponencial natural, $f(x) = e^x$, y la función logaritmo natural, $f(x) = \ln x$, son inversas una de la otra.

Gráfica $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$ en el mismo conjunto de ejes.



$\ln 5.83 \approx 1.7630$
Si $\ln x = -2.09$, entonces $x = e^{-2.09} = 0.1237$.

Fórmula de cambio de base

Para cualquier logaritmo con bases a y b y número positivo x,

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_5 98 = \frac{\log 98}{\log 5} \approx 2.8488$$

Propiedades de los logaritmos naturales

$\ln xy = \ln x + \ln y \quad (x > 0 \text{ y } y > 0)$ Regla del producto.

$\ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y \quad (x > 0 \text{ y } y > 0)$ Regla del cociente

$\ln x^n = n \ln x \quad (x > 0)$ Regla de la potencia

$$\ln 7 \cdot 30 = \ln 7 + \ln 30$$

$$\ln \frac{x+1}{x+8} = \ln(x+1) - \ln(x+8)$$

$$\ln m^5 = 5 \ln m$$

Propiedades adicionales para expresiones con logaritmos naturales y exponenciales naturales

$\ln e^x = x$ Propiedad 7

$e^{\ln x} = x, \quad x > 0$ Propiedad 8

$$\ln e^{19} = 19$$

$$e^{\ln 2} = 2$$

Ejercicios de repaso del capítulo 9

[9.1] *Dadas $f(x) = x^2 - 3x + 4$ y $g(x) = 2x - 5$, determina lo siguiente.*

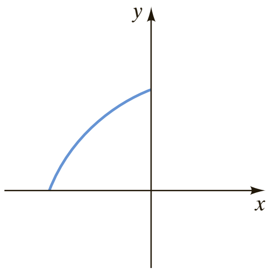
1. $(f \circ g)(x)$ **2.** $(f \circ g)(3)$ **3.** $(g \circ f)(x)$ **4.** $(g \circ f)(-3)$

Dadas $f(x) = 6x + 7$ y $g(x) = \sqrt{x-3}$, $x \geq 3$, determina lo siguiente.

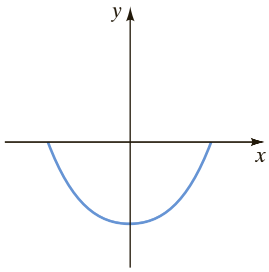
5. $(f \circ g)(x)$ **6.** $(g \circ f)(x)$

Determina si cada función es una función uno a uno.

7.



8.



9. $\{(6, 2), (4, 0), (-5, 7), (3, 8)\}$

10. $\left\{(0, -2), (6, 1), (3, -2), \left(\frac{1}{2}, 4\right)\right\}$

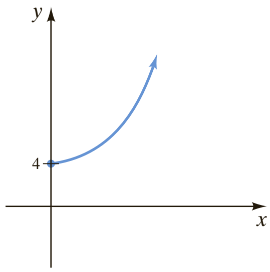
11. $y = \sqrt{x + 8}, x \geq -8$

12. $y = x^2 - 9$

En los ejercicios 13 y 14, para cada función, determina el dominio y el rango de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$.

13. $\{(5, 3), (6, 2), (-4, -3), (-1, 8)\}$

14.



En los ejercicios 15 y 16, determina $f^{-1}(x)$ y grafica $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en los mismos ejes.

15. $y = f(x) = 4x - 2$

16. $y = f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

17. Yardas a pulgadas La función $f(x) = 36x$ convierte yardas, x, en pulgadas. Determina la función inversa que convierte pulgadas en yardas. En la función inversa, ¿qué representan x y $f^{-1}(x)$?

18. Galones a cuartos de galón La función $f(x) = 4x$ convierte galones, x, en cuartos de galón (o simplemente cuartos). Determina la función inversa que convierte cuartos en galones. En la función inversa, ¿qué representan x y $f^{-1}(x)$?

[9.2] *Grafica las siguientes funciones.*

19. $y = 2^x$

20. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

21. Interés compuesto Jim Marino invirtió \$1500 en una cuenta de ahorro que gana 4% de interés compuesto trimestral. Usa la fórmula de interés compuesto $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ para determinar la cantidad total que tendrá Jim en su cuenta después de 5 años.

© Glowimages

[9.3] *Escribe cada ecuación en forma logarítmica.*

22. $8^2 = 64$

23. $81^{1/4} = 3$

24. $5^{-3} = \frac{1}{125}$

Escribe cada ecuación en forma exponencial.

25. $\log_2 32 = 5$

26. $\log_{1/4} \frac{1}{16} = 2$

27. $\log_6 \frac{1}{36} = -2$

Escribe cada ecuación en forma exponencial y determina el valor que falta.

28. $3 = \log_4 x$

29. $4 = \log_a 81$

30. $-3 = \log_{1/5} x$

Grafica las siguientes funciones.

31. $y = \log_3 x$

32. $y = \log_{1/2} x$

[9.4] *Utiliza las propiedades de los logaritmos para desarrollar cada expresión.*

33. $\log_5 17^8$

34. $\log_3 \sqrt{x-9}$

35. $\log \dfrac{6(a+1)}{19}$

36. $\log \dfrac{x^4}{7(2x+3)^5}$

Escribe las siguientes expresiones como el logaritmo de una sola expresión.

37. $5 \log x - 3 \log (x+1)$

38. $4(\log 2 + \log x) - \log y$

39. $\dfrac{1}{3}[\ln x - \ln (x+2)] - \ln 2$

40. $3 \ln x + \dfrac{1}{2} \ln (x+1) - 6 \ln (x+4)$

Evalúa.

41. $8^{\log_8 10}$

42. $\log_4 4^5$

43. $11^{\log_9 81}$

44. $9^{\log_8 \sqrt{8}}$

[9.5, 9.7] *Utiliza una calculadora para determinar cada logaritmo. Redondea tus respuestas a la diezmilésima más cercana.*

45. $\log 819$

46. $\ln 0.0281$

Utiliza una calculadora para aproximar cada potencia de 10. Redondea tus respuestas a la diezmilésima más cercana.

47. $10^{3.159}$

48. $10^{-3.157}$

Utiliza una calculadora para determinar x. Redondea tus respuestas a la diezmilésima más cercana.

49. $\log x = 4.063$

50. $\log x = -1.2262$

Evalúa.

51. $\log 10^5$

52. $10^{\log 9}$

53. $7 \log 10^{3.2}$

54. $2(10^{\log 4.7})$

[9.6] *Resuelve sin utilizar la calculadora.*

55. $625 = 5^x$

56. $49^x = \dfrac{1}{7}$

57. $2^{3x-1} = 32$

58. $27^x = 3^{2x+5}$

Utiliza una calculadora para resolver las siguientes ecuaciones. Redondea tus respuestas a la diezmilésima más cercana.

59. $7^x = 152$

60. $3.1^x = 856$

61. $12.5^{x+1} = 381$

62. $3^{x+2} = 8^x$

Resuelve la ecuación logarítmica.

63. $\log_7 (2x-3) = 2$

64. $\log x + \log (4x-19) = \log 5$

65. $\log_3 x + \log_3 (2x+1) = 1$

66. $\ln (x+1) - \ln (x-2) = \ln 4$

[9.7] *Despeja la variable restante en cada ecuación exponencial. Redondea tus respuestas a la diezmilésima más cercana.*

67. $50 = 25e^{0.6t}$

68. $100 = A_0 e^{-0.42(3)}$

Despeja la variable indicada.

69. $A = A_0 e^{kt}$, para t

70. $200 = 800e^{kt}$, para k

71. $\ln y - \ln x = 6$, para y

72. $\ln (y+1) - \ln (x+8) = \ln 3$, para y

Utiliza la fórmula de cambio de base para evaluar. Escribe tus respuestas redondeadas a la diezmilésima más cercana.

73. $\log_2 196$

74. $\log_3 47$

[9.2-9.7]

75. Interés compuesto Determina el monto del dinero acumulado, si Justine Elwood invierte $12,000 durante un periodo de 8 años, en una cuenta de ahorros que produce 6% de interés compuesto anual. Utiliza

$$A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

76. Interés compuesto de manera continua Si se depositan $6000 en una cuenta de ahorros que paga 4% de interés compuesto de manera continua, determina el tiempo que se necesita para que la cuenta duplique su saldo.

77. Bacterias La bacteria *Escherichia coli* por lo regular se encuentra en la vejiga de los humanos. Si suponemos que hay 2000 bacterias en el instante 0, y que el número de bacterias presentes t minutos después puede determinarse mediante la función $N(t) = 2000(2)^{0.05t}$.

a) ¿Cuándo habrá 50,000 bacterias?

b) Suponiendo que una infección de la vejiga humana que contenga 120,000 bacterias; ¿cuánto tardará en desarrollar una infección de este tipo una persona cuya vejiga contiene inicialmente 2000 bacterias?

78. Presión atmosférica La presión atmosférica, P, en libras por pulgada cuadrada, a una altura de x pies por arriba del nivel del mar, puede determinarse mediante la fórmula $P = 14.7e^{-0.00004x}$. Calcula la presión atmosférica en la cima de Half Dome en el Parque Nacional Yosemite, si tiene una elevación de 8842 pies.

© Allen R. Angel

Parque Nacional Yosemite

79. Retención de conocimientos Al final de un curso de historia, los alumnos se sometieron a un examen. Como parte de un proyecto de investigación, los estudiantes seguirán respondiendo exámenes semejantes cada mes durante n meses. La calificación promedio del grupo después de n meses puede determinarse mediante la función $A(n) = 72 - 18 \log(n + 1), n \geq 0$.

a) ¿Cuál fue la calificación promedio del grupo cuando se aplicó el examen original ($n = 0$)?

b) ¿Cuál fue la calificación promedio del grupo del examen realizado a los 3 meses?

c) ¿Después de cuántos meses la calificación promedio del grupo fue 58.0?

Prueba de práctica del capítulo 9

Los videos del capítulo de la prueba de práctica proporcionan soluciones totalmente resueltas para cualquiera de los ejercicios que quieras repasar. Los videos del capítulo de la prueba de práctica están disponibles vía MyMathLab, o en YouTube (busca "Angel Intermediate Algebra" y da click en "Channels")

1. a) Determina si la siguiente función es una función uno a uno.

$$\{(4, 2), (-3, 8), (-1,3), (6, -7)\}$$

b) Lista el conjunto de pares ordenados de la función inversa.

2. Dadas $f(x) = x^2 - 3$ y $g(x) = x + 2$, determina **a)** $(f \circ g)(x)$ y **b)** $(f \circ g)(6)$.

3. Dadas $f(x) = x^2 + 8$ y $g(x) = \sqrt{x - 5}, x \geq 5$, determina **a)** $(g \circ f)(x)$. **b)** $(g \circ f)(7)$.

En los ejercicios 4 y 5, **a)** *determina $f^{-1}(x)$ y* **b)** *grafica $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en los mismos ejes.*

4. $y = f(x) = -3x - 5$

5. $y = f(x) = \sqrt{x - 1}, x \geq 1$

6. ¿Cuál es el dominio de $y = \log_5 x$?

7. Evalúa $\log_4 \frac{1}{256}$.

8. Grafica $y = 3x$.

9. Grafica $y = \log_2 x$.

10. Escribe $2^{-5} = \frac{1}{32}$ en forma logarítmica.

11. Escribe $\log_5 125 = 3$ en forma exponencial.

Escribe los ejercicios 12 y 13 en forma exponencial y determina el valor que falta.

12. $4 = \log_2(x + 3)$

13. $y = \log_{64} 16$

14. Desarrolla $\log_2 \dfrac{x^3(x - 4)}{x + 2}$.

15. Escribe como el logaritmo de una sola expresión

$$7 \log_6 (x - 4) + 2 \log_6 (x + 3) - \frac{1}{2} \log_6 x.$$

16. Evalúa $10 \log_9 \sqrt{9}$.

17. a) Determina log 4620 redondeando a cuatro decimales.

b) Determina log 0.0692 redondeando a cuatro decimales.

18. Despeja x de $3x = 19$.

19. Despeja x de $\log 4x = \log(x + 3) + \log 2$.

20. Despeja x de $\log(x + 5) - \log(x - 2) = \log 6$.

21. Si $\ln N = 2.79$, determina N; redondea tu respuesta a cuatro decimales.

22. Evalúa $\log_6 40$. Utiliza la fórmula de cambio de base y redondea tu respuesta a cuatro decimales.

23. Despeja t de $100 = 250e^{-0.03t}$. Redondea tu respuesta a cuatro decimales.

24. Cuenta de ahorros Si Kim Lee invierte \$3500 en una cuenta de ahorros que genera 4% de interés compuesto cada trimestre, ¿cuánto dinero tendrá después de 10 años?

25. Carbono 14 La cantidad de carbono 14 que queda después de t años se determina mediante la fórmula $v = v_0 e^{-0.0001205t}$, en donde v_0 es la cantidad original de carbono 14. Si al principio un fósil tenía 60 gramos de carbono 14 y ahora tiene 40 gramos, ¿cuál es la edad del fósil?

Prueba de repaso acumulada

Realiza la siguiente prueba y verifica tus respuestas con aquellas que se dan al final del libro. Repasa cualquier pregunta que hayas contestado incorrectamente. La sección en donde se revisó el tema se indica después de cada respuesta.

1. Simplifica $\dfrac{(2xy^2z^{-3})^2}{(3x^{-1}yz^2)^{-1}}$

2. Evalúa $5^2 - (2 - 3^2)^2 + 4^3$.

3. **Cena** Thomas Furgeson salió a cenar con su esposa. El costo de los alimentos antes de impuestos fue de \$92. Si el precio total con impuestos incluidos fue de \$98.90, determina la tasa de impuesto.

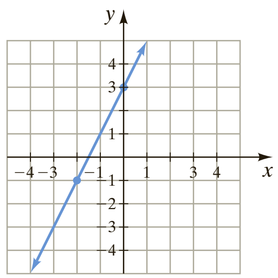
© Allen R. Angel

4. Resuelve la desigualdad $-3 \leq 2x - 7 < 8$ y escribe la respuesta como un conjunto solución y en notación de intervalos.

5. Despeja y de $2x - 3y = 8$.

6. Sea $h(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x + 6}$. Determina $h(-4)$.

7. Determina la pendiente de la recta que se muestra en la siguiente figura. Después escribe la ecuación de la recta dada.



8. Grafica $4x = 3y - 3$.

9. Grafica $y \leq \dfrac{1}{3}x + 6$.

10. Resuelve el sistema de ecuaciones

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 13$$
$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{8}y = 5$$

11. Divide $\dfrac{x^3 + 3x^2 + 5x + 9}{x + 1}$.

12. Factoriza $x^2 - 2xy + y^2 - 64$.

13. Resuelve $(2x + 1)^2 - 9 = 0$.

14. Resuelve $\dfrac{2x + 3}{x + 1} = \dfrac{3}{2}$.

15. Despeja d en $a_n = a_1 + nd - d$.

16. Si L varía inversamente respecto del cuadrado de P, determina L, cuando $P = 4$ y $k = 100$.

17. Simplifica $4\sqrt{45x^3} + \sqrt{5x}$.

18. Resuelve $\sqrt{2a + 9} - a + 3 = 0$.

19. Resuelve $(x^2 - 5)^2 + 3(x^2 - 5) - 10 = 0$.

20. Sea $g(x) = x^2 - 4x - 5$.

a) Expresa $g(x)$ en la forma $g(x) = a(x - h)^2 + k$.

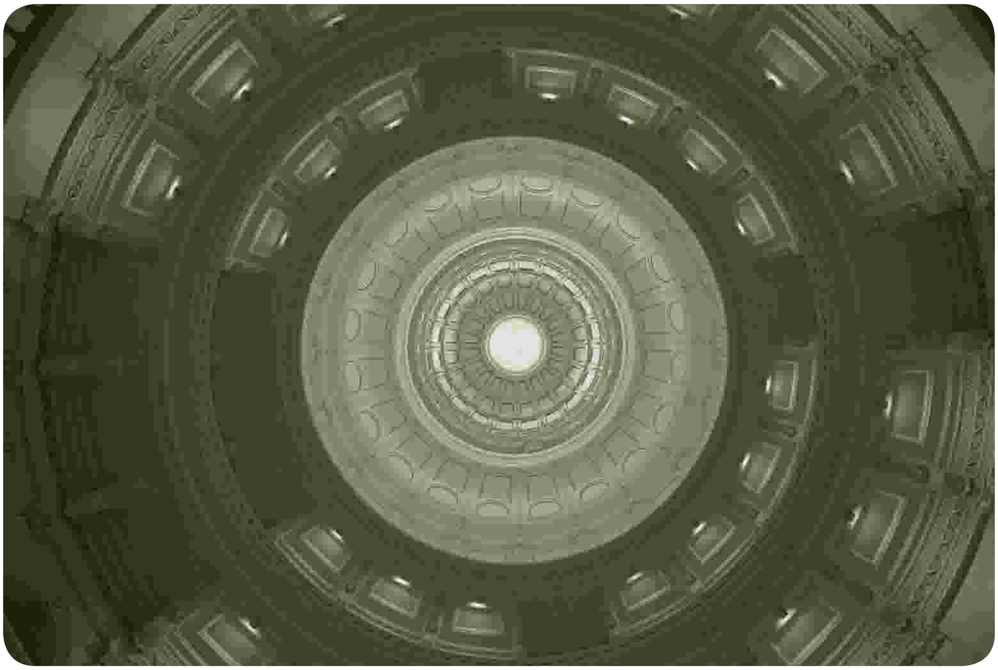
b) Traza la gráfica y marca el vértice.

10 Secciones cónicas

Objetivos de este capítulo

En este capítulo nos concentraremos en graficar secciones cónicas. Éstas incluyen la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola. Ya hemos hablado de parábolas. En este capítulo aprenderemos más acerca de ellas. También resolveremos sistemas de ecuaciones no lineales de forma algebraica y de forma gráfica.

La forma de una elipse le da una característica poco común. Cualquier objeto que se lance desde un punto focal hacia una pared con forma elíptica rebotará hacia el otro punto focal. Esta característica se ha utilizado en arquitectura y medicina. Un ejemplo es el Salón Nacional de las Estatuas en el edificio del Capitolio, que tiene una cúpula, o domo, de forma elíptica. Si hablas suavemente en un punto focal, el murmullo se puede oír en el otro punto focal. De manera similar, si una bola pega en un punto focal de una mesa de billar con forma elíptica, la bola rebotará al otro punto focal. En el ejercicio 54 de la página 649 determinarás la ubicación de los puntos focales en una mesa de billar elíptica.



© Latinstock

10.1 La parábola y la circunferencia

1. Identificar y describir las secciones cónicas.
2. Repasar las parábolas.
3. Graficar parábolas de la forma $x = a(y - k)^2 + h$.
4. Aprender las fórmulas de la distancia y el punto medio.
5. Graficar circunferencias con centros en el origen.
6. Graficar circunferencias con centros en (h, k).

1 Identificar y describir las secciones cónicas

Una *parábola* es un tipo de sección cónica. Otras secciones cónicas son la circunferencia, la elipse y la hipérbola. Cada una de estas formas se denomina sección cónica porque se puede obtener al cortar un cono y observar la forma de la rebanada. Los métodos que se usan para cortar el cono y obtener cada sección cónica se muestran en la **Figura 10.1**.

FIGURA 10.1

2 Repasar las parábolas

En la sección 8.5 se estudiaron las parábolas. En este capítulo las seguiremos analizando. El ejemplo 1 te recordará cómo graficar parábolas de las formas $y = ax^2 + bx + c$ y $y = a(x - h)^2 + k$.

EJEMPLO 1 Considera $y = 2x^2 + 4x - 6$.

a) Escribe la ecuación en la forma $y = a(x - h)^2 + k$.
b) Determina si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.
c) Determina el vértice de la parábola.
d) Determina la intersección en y de la parábola.
e) Determina las intersecciones en x de la parábola.
f) Grafica la parábola.

Solución

a) Primero factoriza el 2 en los dos términos que contienen la variable para que el coeficiente del término cuadrado sea 1 (no factorices el 2 en la constante, -6).

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 4x - 6 \\ &= 2(x^2 + 2x) - 6 && \text{Se factorizó el 2 en los primeros dos términos.} \\ &= 2(x^2 + 2x + 1) - 2 - 6 && \text{Completa el cuadrado.} \\ &= 2(x + 1)^2 - 8 && \text{Simplifica.} \end{aligned}$$

b) La parábola se abre hacia arriba porque $a = 2$, que es mayor que 0.

c) El vértice de la gráfica de una ecuación de la forma $y = a(x - h)^2 + k$ es (h, k). Por lo tanto, el vértice de la gráfica de $y = 2(x + 1)^2 - 8$ es $(-1, -8)$. El vértice de una parábola también se puede determinar usando

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) \quad \text{o} \quad \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

Muestra ahora que ambos procedimientos dan $(-1, -8)$ como el vértice de la parábola.

d) Para determinar la intersección con el eje y, haz $x = 0$ y resuelve para y.

$$\begin{aligned} y &= 2(x+1)^2 - 8 \\ &= 2(0+1)^2 - 8 \\ &= -6 \end{aligned}$$

La intersección con el eje y es $(0, -6)$.

e) Para determinar las intersecciones con el eje x, haz $y = 0$ y resuelve para x.

$$\begin{aligned} y &= 2(x+1)^2 - 8 & & \\ 0 &= 2(x+1)^2 - 8 & & \text{Se sustituyó } y \text{ por 0.} \\ 8 &= 2(x+1)^2 & & \text{Se sumó 8 en ambos lados.} \\ 4 &= (x+1)^2 & & \text{Ambos lados se dividieron entre 2.} \\ \pm 2 &= x+1 & & \text{Propiedad de la raíz cuadrada.} \\ -1 \pm 2 &= x & & \text{Se restó 1 en ambos lados.} \end{aligned}$$

$$x = -1 - 2 \quad \text{o} \quad x = -1 + 2$$
$$x = -3 \qquad\qquad x = 1$$

Las intersecciones con el eje x son $(-3, 0)$ y $(1, 0)$. Las intersecciones con el eje x también se pueden determinar si sustituimos y por 0 en $y = 2x^2 + 4x - 6$ y resolvemos para x usando factorización o la fórmula cuadrática. Resuélvelo ahora de esta manera y observa que obtienes las mismas intersecciones en x.

f) Utilizamos el vértice y las intersecciones con el eje x y con el eje y para trazar la gráfica, que se muestra en la **Figura 10.2**.

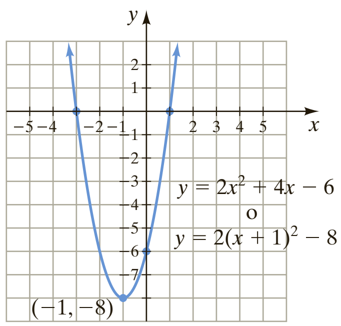


FIGURA 10.2

Resuelve ahora el ejercicio 9

3 Graficar parábolas de la forma $x = a(y - k)^2 + h$

Las parábolas también se pueden abrir hacia la derecha o hacia la izquierda. La gráfica de una ecuación de la forma $x = a(y - k)^2 + h$ será una parábola cuyo vértice está en el punto (h,k). Si a es un número positivo, la parábola se abrirá hacia la derecha, y si a es un número negativo, la parábola se abrirá hacia la izquierda.

En la **Figura 10.3** se muestran las cuatro formas diferentes de una parábola.

Comprendiendo el álgebra

Para una parábola de la forma $x = a(y - k)^2 + h$

- Si $a > 0$, la parábola *se abre hacia la derecha.*
- Si $a < 0$, la parábola *se abre hacia la izquierda.*

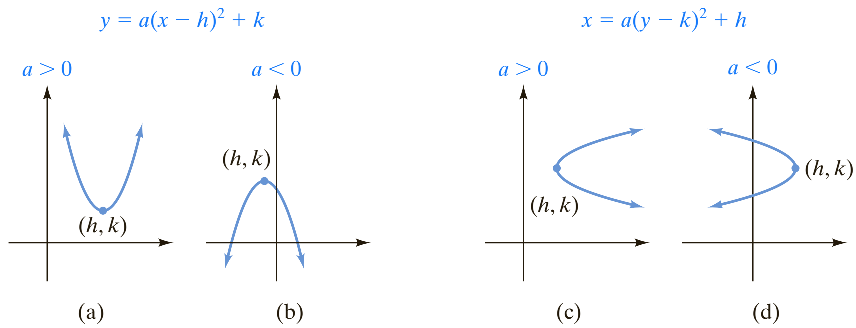


FIGURA 10.1

Parábola con vértice en (h, k)

1. Si $y = a(x - h)^2 + k$, $a > 0$ (se abre hacia arriba) Figura 10.3a
2. Si $y = a(x - h)^2 + k$, $a < 0$ (se abre hacia abajo) Figura 10.3b
3. Si $x = a(y - k)^2 + h$, $a > 0$ (se abre hacia la derecha) Figura 10.3c
4. Si $x = a(y - k)^2 + h$, $a < 0$ (se abre hacia la izquierda) Figura 10.3d

Observa que las ecuaciones de la forma $y = a(x - h)^2 + k$ son funciones debido a que sus gráficas cumplen el criterio de la recta vertical. Sin embargo, las ecuaciones de la forma $x = a(y - k)^2 + h$ no son funciones debido a que sus gráficas no cumplen el criterio de la recta vertical.

EJEMPLO 2 Dibuja la gráfica de $x = -2(y + 4)^2 - 1$.

Solución La gráfica se abre hacia la izquierda porque la ecuación es de la forma $x = a(y - k)^2 + h$ y $a = -2$, que es menor que 0. La ecuación se puede expresar como $x = 2[y - (-4)]^2 - 1$. Entonces $h = -1$ y $k = -4$. El vértice de la gráfica es $(-1, -4)$. Ver **Figura 10.4**.

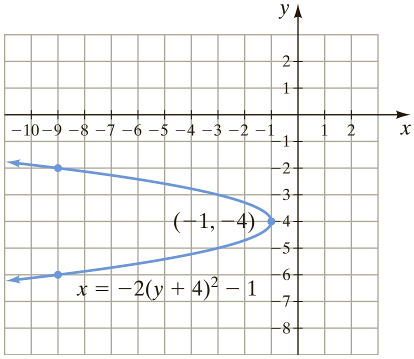


FIGURA 10.4

Si hacemos $y = 0$, vemos que la intersección con el eje x está en $-2(0 + 4)^2 - 1 = -2(16) - 1$ o -33. Puedes determinar los valores correspondientes de x si sustituyes los valores para y. Cuando $y = -2$, $x = -9$, y cuando $y = -6$, $x = -9$. Estos puntos están marcados en la gráfica. Observa que esta gráfica no tiene intersección con el eje y.

Resuelve ahora el ejercicio 21

EJEMPLO 3

a) Escribe la ecuación $x = 2y^2 + 12y + 13$ en la forma $x = a(y - k)^2 + h$.

b) Grafica $x = 2y^2 + 12y + 13$.

Solución

a) Primero factoriza el 2 en los primeros dos términos. Después completa el cuadrado en la expresión que está entre paréntesis.

$$\begin{aligned} x &= 2y^2 + 12y + 13 \\ &= 2(y^2 + 6y) + 13 && \text{Se factorizó en los primeros dos términos.} \\ &= 2(y^2 + 6y + 9) + (2)(-9) + 13 && \text{Completa el cuadrado.} \\ &= 2(y^2 + 6y + 9) - 18 + 13 && \text{Simplifica.} \\ &= 2(y + 3)^2 - 5 \end{aligned}$$

b) Como $a > 0$, la parábola se abre hacia la derecha. Observa que cuando $y = 0$, $x = 2(0)^2 + 12(0) + 13 = 13$. Por lo tanto, la intersección con el eje x es $(13, 0)$.

El vértice de la parábola es $(-5, -3)$. Cuando $y = -6$, podemos ver que $x = 13$. Entonces otro punto en la gráfica es $(13, -6)$.

Si usamos la fórmula cuadrática podemos determinar que las intersecciones con el eje y están aproximadamente en $(0, -4.6)$ y $(0, -1.4)$. La gráfica se muestra en la **Figura 10.5**.

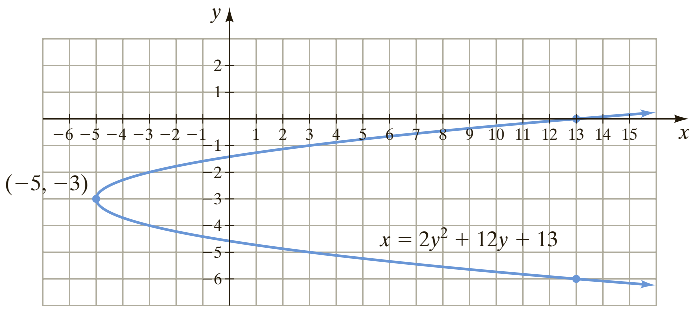


FIGURA 10.5

Resuelve ahora el ejercicio 35

4 Aprender las fórmulas de la distancia y el punto medio

Ahora derivaremos una fórmula para determinar la *distancia* entre dos puntos en una recta. Considera la **Figura 10.6**.

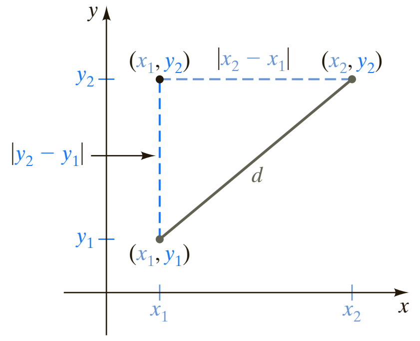


FIGURA 10.6

La distancia horizontal entre los dos puntos (x_1, y_2) y (x_2, y_2), que se indica con la línea punteada azul, es $|x_2 - x_1|$.

La distancia vertical entre los puntos (x_1, y_1) y (x_1, y_2), que se indica con la línea gris, es $|y_2 - y_1|$.

Si usamos el teorema de Pitágoras, donde d es la distancia entre los dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), obtenemos

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

Como cualquier número diferente de cero elevado al cuadrado es positivo, no necesitamos los signos de valor absoluto. Por lo tanto podemos escribir

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Si usamos la propiedad de la raíz cuadrada, con la raíz cuadrada principal, obtenemos la distancia entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), que es $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Fórmula de distancia

La distancia, d, entre dos puntos cualesquiera (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se puede determinar por la fórmula de la distancia:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Consejo útil

La distancia entre dos puntos cualesquiera siempre será un número positivo. Al determinar la distancia, no importa qué punto designemos como el punto 1, (x_1, y_1), o como el punto 2, (x_2, y_2). Observa que el cuadrado de cualquier número real siempre será mayor o igual a 0. Por ejemplo, $(5 - 2)^2 = (2 - 5)^2 = 9$.

EJEMPLO 4 Determina la distancia entre los puntos (4, 5) y (−2, 3).

Solución Trazamos los puntos (**Figura 10.7**). Marca (4, 5) como el punto 1 y (−2, 3) como el punto 2. Entonces, (x_2, y_2) representa (−2, 3) y (x_1, y_1) representa (4, 5). Ahora usa la fórmula de la distancia para determinar la distancia, d.

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(-2 - 4)^2 + (3 - 5)^2} \\ &= \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{36 + 4} \\ &= \sqrt{40} \quad \text{o} \quad \approx 6.32 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la distancia entre los puntos (4, 5) y (−2, 3) es $\sqrt{40}$ o aproximadamente 6.32 unidades.

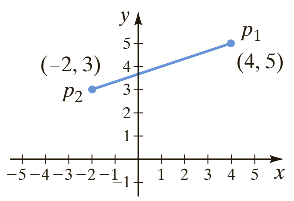


FIGURA 10.7

Resuelve ahora el ejercicio 47

Prevención de errores comunes

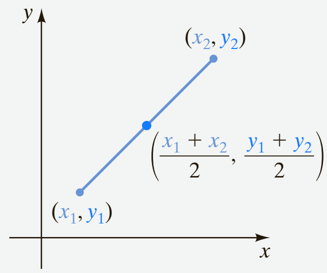
Los estudiantes a veces empiezan a determinar la distancia de manera correcta usando la fórmula de la distancia, pero olvidan tomar la raíz cuadrada de la suma $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ para obtener la respuesta correcta. Cuando tomes la raíz cuadrada, recuerda que $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$.

Con frecuencia es necesario determinar el **punto medio** de un segmento de recta entre dos puntos finales dados.

Fórmula del punto medio

Dados dos puntos cualesquiera (x_1, y_1) y (x_2, y_2), el punto medio entre ellos se puede determinar usando la fórmula del punto medio:

$$\text{punto medio} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



Para determinar el punto medio, tomamos el promedio (la media) de las coordenadas x y de las coordenadas y.

EJEMPLO 5 Un segmento de recta que pasa por el centro de una circunferencia la intersecta en los puntos $(-3, 6)$ y $(4, 1)$. Determina el centro de la circunferencia.

Solución Para determinar el centro de la circunferencia, encontramos el punto medio del segmento de recta entre $(-3, 6)$ y $(4, 1)$. No tiene importancia qué puntos marquemos como (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Designaremos $(-3, 6)$ como (x_1, y_1) y $(4, 1)$ como (x_2, y_2). Ver **Figura 10.8**.

$$\text{punto medio} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{-3 + 4}{2}, \frac{6 + 1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

El punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ está a la mitad de los puntos $(-3, 6)$ y $(4, 1)$. Es también el centro de la circunferencia.

Resuelve ahora el ejercicio 59

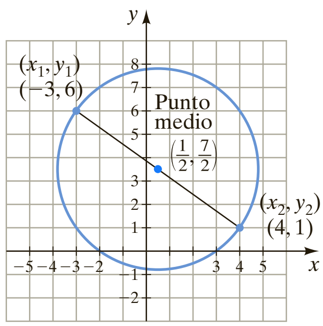


FIGURA 10.8

5 Graficar circunferencias con centros en el origen

Circunferencia

Una **circunferencia** es el conjunto de puntos en un plano que están a la misma distancia, llamada **radio**, de un punto fijo, llamado **centro**.

La *forma general* de la ecuación de una circunferencia cuyo centro está en el origen se puede derivar usando la fórmula de la distancia. Sea (x, y) un punto en una circunferencia de radio r con centro en $(0, 0)$. Ver **Figura 10.9**. Al usar la fórmula de la distancia obtenemos

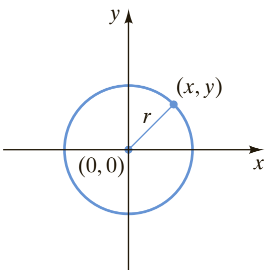


FIGURA 10.9

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{Fórmula de la distancia}$$

$$\text{o} \quad r = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} \quad \text{Sustituye } d \text{ por } r, (x_2, y_2) \text{ por } (x, y), \text{ y } (x_1, y_1) \text{ por } (0,0).$$

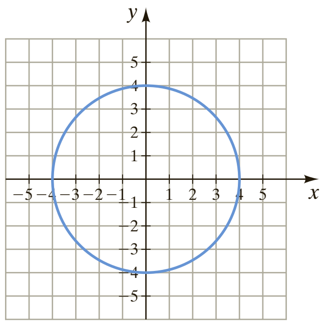
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{Simplifica el radicando.}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{Eleva ambos lados al cuadrado.}$$

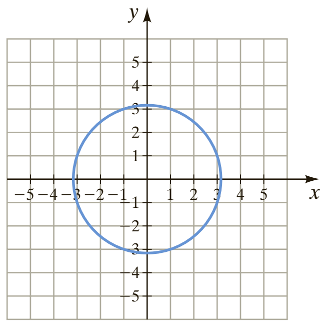
Circunferencia con centro en el origen y radio r

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Por ejemplo, $x^2 + y^2 = 16$ es una circunferencia cuyo centro se encuentra en el origen y su radio es 4, y $x^2 + y^2 = 10$ es una circunferencia con centro en el origen y radio $\sqrt{10}$. Observa que $4^2 = 16$ y $(\sqrt{10})^2 = 10$. A continuación se muestran ambas circunferencias.



$x^2 + y^2 = 16$



$x^2 + y^2 = 10$

EJEMPLO 6 Grafica las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 + y^2 = 64$ **b)** $y = \sqrt{64 - x^2}$ **c)** $y = -\sqrt{64 - x^2}$

Solución

a) Si reescribimos la ecuación como

$$x^2 + y^2 = 8^2$$

podemos ver que ésta es la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio 8. La gráfica se muestra en la **Figura 10.10**.

b) Si resolvemos la ecuación $x^2 + y^2 = 64$ para y, obtenemos

$$y^2 = 64 - x^2$$
$$y = \pm\sqrt{64 - x^2}$$

En la ecuación $y = \pm\sqrt{64 - x^2}$, la ecuación $y = +\sqrt{64 - x^2}$ o, simplemente $y = \sqrt{64 - x^2}$, representa la mitad superior de la circunferencia, mientras que la ecuación $y = -\sqrt{64 - x^2}$ representa la mitad inferior de la circunferencia. Entonces la gráfica de $y = \sqrt{64 - x^2}$, donde y es la raíz cuadrada principal, está por encima y en el eje x. La gráfica es la semicircunferencia que se muestra en la **Figura 10.11**.

c) La gráfica de $y = -\sqrt{64 - x^2}$ también es una semicircunferencia. Sin embargo, esta gráfica está por debajo y en el eje x. La gráfica se muestra en la **Figura 10.12**.

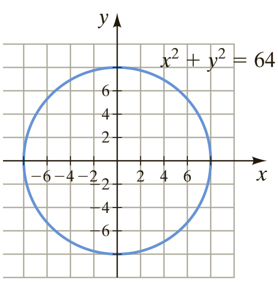


FIGURA 10.10

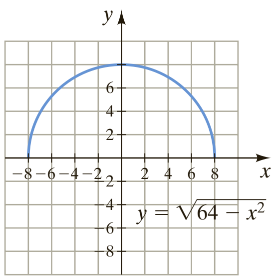


FIGURA 10.11

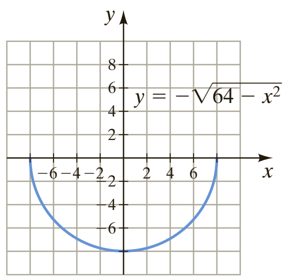


FIGURA 10.12

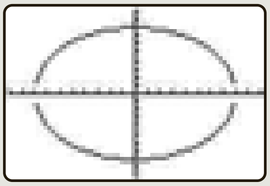
Resuelve ahora el ejercicio 91

Considera las ecuaciones $y = \sqrt{64 - x^2}$ y $y = -\sqrt{64 - x^2}$ del ejemplo **6** inciso **b)** y **6** inciso **c)**. Si elevas ambos lados de las ecuaciones al cuadrado y reordenas los términos, obtendrás $x^2 + y^2 = 64$.

Cómo utilizar tu calculadora graficadora

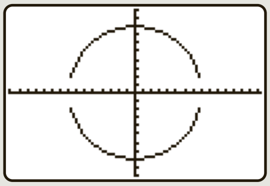
Cuando usas tu calculadora, ingresas la función que deseas graficar a la derecha de $y =$. Las circunferencias no son funciones porque no cumplen el criterio de la recta vertical. Para graficar la ecuación $x^2 + y^2 = 64$, la cual es una circunferencia de radio 8, resolvemos la ecuación para y para obtener $y = \pm\sqrt{64 - x^2}$. Después graficamos las dos funciones $Y_1 \sqrt{64 - x^2}$ y $Y_2 = -\sqrt{64 - x^2}$ en los mismos ejes para obtener la circunferencia. Estas gráficas se muestran en la **Figura 10.13**.

Debido a la distorsión que se da por las escalas diferentes en los ejes, la gráfica no parece ser una circunferencia. Cuando usas la característica Z Square de tu calculadora, la cual se encuentra en el menú ZOOM, la figura aparece como una circunferencia (ver **Figura 10.14**).



$-10, 10, 1, -10, 10, 1$

FIGURA 10.13



$\approx -15.2, \approx 15.2, 1, -10, 10, 1$

FIGURA 10.14

6 Graficar circunferencias con centros en (h, k)

La forma general de una circunferencia con centro en (h, k) y radio r se puede derivar usando la fórmula de la distancia. Sea (h, k) el centro de la circunferencia y sea (x, y) cualquier punto en la circunferencia (ver **Figura 10.15**). Si el radio, r, representa la distancia entre un punto, (x, y), en la circunferencia y su centro, (h, k), entonces, por la fórmula de la distancia

$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

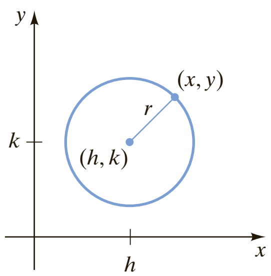


FIGURA 10.15

Ahora elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación para obtener la forma general de una circunferencia con centro en (h, k) y radio r.

$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$$

Circunferencia con centro en (h, k) y radio r

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

EJEMPLO 7 Determina la ecuación de la circunferencia que se muestra en la **Figura 10.16**.

Solución El centro es $(-3, 2)$ y el radio es 3.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$[x - (-3)]^2 + (y - 2)^2 = 3^2$$

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

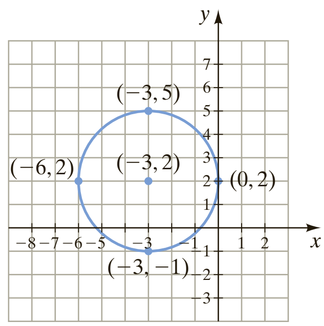


FIGURA 10.16

Resuelve ahora el ejercicio 77

EJEMPLO 8

a) Demuestra que la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$ es una circunferencia.

b) Determina el centro y el radio de la circunferencia y después trázalo.

c) Determina el área de la circunferencia.

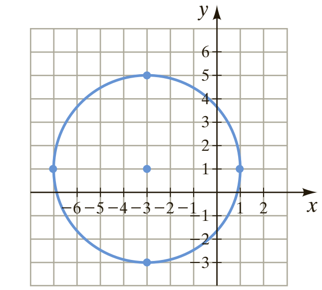
Solución

a) Al completar el cuadrado podemos escribir esta ecuación en la forma general. Primero reescribimos la ecuación, colocando todos los términos que contengan x juntos y los términos que contengan y juntos.

$$x^2 + 6x + y^2 - 2y - 6 = 0$$

Comprendiendo el álgebra

El área de una circunferencia es $A = \pi r^2$.



$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$

FIGURA 10.17

Después reescribimos la ecuación con la constante en el lado derecho de la ecuación.

$$x^2 + 6x + y^2 - 2y = 6 \qquad \text{Reescribe la ecuación.}$$

Ahora completamos el cuadrado dos veces, una vez para cada variable.

$$x^2 + 6x \boxed{+ 9} + y^2 - 2y = 6 \boxed{+ 9} \qquad \text{Completa el cuadrado en términos de } x.$$
$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y \boxed{+ 1} = 6 + 9 \boxed{+ 1} \qquad \text{Completa el cuadrado en términos de } y.$$

o

$$\underbrace{x^2 + 6x + 9}_{(x+3)^2} + \underbrace{y^2 - 2y + 1}_{(y-1)^2} = 16$$
$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$$
$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4^2$$

b) El centro de la circunferencia está en $(-3, 1)$ y el radio es 4. El dibujo de la circunferencia esta en la **Figura 10.17**.

c) El área es

$$A = \pi r^2 = \pi(4)^2 = 16\pi \approx 50.3 \text{ unidades cuadradas}$$

Resuelve ahora el ejercicio 101

CONJUNTO DE EJERCICIOS 10.1

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

distancia (0, 0) parábola circunferencia (k, h) (h, k) (x, y) punto medio

1. La fórmula, punto medio $= \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$, se conoce como la fórmula del ________________ .
2. La fórmula $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, se conoce como la fórmula de la ________________ .
3. La ecuación $y = a(x - h)^2 + k$ es la ecuación de una ________________.
4. La ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ es la ecuación de una circunferencia con centro en ________________ y radio r.
5. La ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r$ es la ecuación de una circunferencia con centro en ________________ y radio r.
6. Las cuatro secciones cónicas son la parábola, la ________________, la elipse y la hipérbola.

Practica tus habilidades

Grafica cada ecuación.

7. $y = (x - 2)^2 + 3$
8. $y = (x - 2)^2 - 3$
9. $y = (x + 3)^2 + 2$
10. $y = (x + 3)^2 - 4$
11. $y = (x - 2)^2 - 1$
12. $y = (x + 2)^2 + 1$
13. $y = -(x - 1)^2 + 1$
14. $y = -(x + 4)^2 - 5$
15. $y = -(x + 3)^2 + 4$
16. $y = 2(x + 1)^2 - 3$
17. $y = -3(x - 5)^2 + 3$
18. $x = (y - 1)^2 + 1$
19. $x = (y - 4)^2 - 3$
20. $x = -(y - 2)^2 + 1$
21. $x = -(y - 5)^2 + 4$
22. $x = -2(y + 4)^2 - 3$
23. $x = -5(y + 3)^2 - 6$
24. $x = 3(y + 1)^2 + 5$
25. $y = -2\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + 6$
26. $y = -\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}$

En los ejercicios 27-40, **a)** *escribe la ecuación en la forma $y = a(x - h)^2 + k$ o $x = a(y - k)^2 + h$.* **b)** *Grafica la ecuación.*

27. $y = x^2 + 2x$
28. $y = x^2 - 2x$
29. $y = x^2 + 6x$
30. $y = x^2 - 4x$
31. $x = y^2 + 4y$
32. $x = y^2 - 6y$
33. $y = x^2 + 7x + 10$
34. $y = x^2 + 2x - 7$
35. $x = -y^2 + 6y - 9$
36. $x = -y^2 - 2y + 5$
37. $y = -x^2 + 4x - 4$
38. $y = 2x^2 - 4x - 4$
39. $x = -y^2 + 3y - 4$
40. $x = 3y^2 - 12y - 36$

Determina la distancia entre cada par de puntos. Usa una calculadora donde sea apropiado y redondea tus respuestas a la centésima más cercana.

41. $(5, -1)$ y $(5, -6)$
42. $(-7, 2)$ y $(-3, 2)$
43. $(-1, 6)$ y $(8, 6)$
44. $(1, 11)$ y $(4, 15)$
45. $(-1, -3)$ y $(4, 9)$
46. $(-4, -7)$ y $(2, 1)$

47. $(-4, -5)$ y $(5, -2)$ **48.** $(6, 7)$ y $(11, 0)$ **49.** $(3, -1)$ y $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$

50. $\left(-\frac{1}{4}, 2\right)$ y $\left(-\frac{3}{2}, 6\right)$ **51.** $(-1.6, 3.5)$ y $(-4.3, -1.7)$ **52.** $(5.2, -3.6)$ y $(-1.6, 2.3)$

53. $(\sqrt{7}, \sqrt{3})$ y $(0, 0)$ **54.** $(-\sqrt{2}, -\sqrt{5})$ y $(0, 0)$

Determina el punto medio del segmento de recta entre cada par de puntos.

55. $(1, 3)$ y $(5, 7)$ **56.** $(0, 8)$ y $(4, -6)$ **57.** $(-7, 3)$ y $(7, -3)$

58. $(4, 9)$ y $(1, -5)$ **59.** $(-1, 4)$ y $(4, 6)$ **60.** $(-8, -9)$ y $(-6, -3)$

61. $\left(3, \frac{1}{2}\right)$ y $(2, -4)$ **62.** $\left(\frac{5}{2}, 1\right)$ y $\left(2, \frac{9}{2}\right)$ **63.** $(\sqrt{3}, 2)$ y $(\sqrt{2}, 5)$

64. $(-\sqrt{7}, 8)$ y $(\sqrt{5}, \sqrt{3})$

Escribe la ecuación de cada circunferencia con el centro y el radio que se dan.

65. Centro $(0, 0)$, radio 5 **66.** Centro $(0, 0)$, radio 9 **67.** Centro $(2, 0)$, radio 8

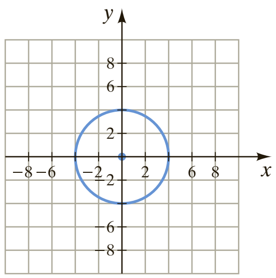
68. Centro $(-3, 0)$ radio 7 **69.** Centro $(0, 5)$, radio 2 **70.** Centro $(0, -6)$ radio 10

71. Centro $(3, 4)$, radio 4 **72.** Centro $(-5, 2)$ radio 3 **73.** Centro $(7, -6)$ radio 12

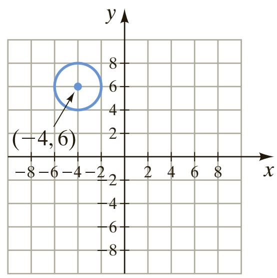
74. Centro $(-6, -1)$ radio 15 **75.** Centro $(1, 2)$, radio $\sqrt{5}$ **76.** Centro $(-7, -2)$ radio $\sqrt{13}$

Escribe la ecuación de cada circunferencia. Considera que el radio es un número entero positivo.

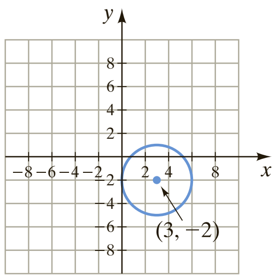
77.



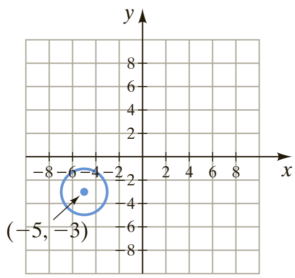
78.



79.



80.



Grafica cada ecuación.

81. $x^2 + y^2 = 16$ **82.** $x^2 + y^2 = 5$ **83.** $x^2 + y^2 = 10$ **84.** $(x - 1)^2 + y^2 = 7$

85. $(x + 4)^2 + y^2 = 25$ **86.** $x^2 + (y + 1)^2 = 9$ **87.** $x^2 + (y - 3)^2 = 4$ **88.** $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$

89. $(x + 8)^2 + (y + 2)^2 = 9$ **90.** $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 36$ **91.** $y = \sqrt{25 - x^2}$ **92.** $y = \sqrt{16 - x^2}$

93. $y = -\sqrt{4 - x^2}$ **94.** $y = -\sqrt{49 - x^2}$

En los ejercicios 95-102, **a)** *usa el método de completar el cuadrado para escribir cada ecuación en la forma general, y* **b)** *traza la gráfica.*

95. $x^2 + y^2 + 8x + 15 = 0$ **96.** $x^2 + y^2 + 4y = 0$

97. $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$ **98.** $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$

99. $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$ **100.** $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

101. $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 13 = 0$ **102.** $x^2 + y^2 - x + 3y - \frac{3}{2} = 0$

Resolución de problemas

103. Determina el área de la circunferencia del ejercicio 85. **104.** Determina el área de la circunferencia del ejercicio 87.

En los ejercicios 105-108 determina, si las hay, las intersecciones con los ejes x y y de la gráfica de cada ecuación.

105. $x = y^2 - 6y - 7$

106. $x = -y^2 + 8y - 12$

107. $x = 2(y - 3)^2 + 6$

108. $x = -(y + 2)^2 - 8$

109. Si conoces el punto medio de un segmento de recta, ¿es posible determinar la longitud del segmento de recta? Explica.

110. Si conoces un extremo de un segmento de recta y la longitud del segmento, ¿es posible determinar el otro extremo? Explica.

111. Determina la longitud del segmento de recta cuyo punto medio es $(4,-6)$ y uno de sus extremos está en $(7,-2)$.

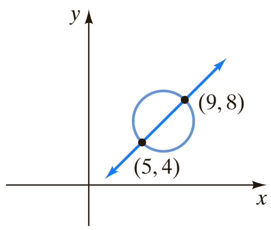
112. Determina la longitud del segmento de recta cuyo punto medio está en $(-2, 4)$ y uno de sus extremos está en $(3, 6)$.

113. Determina la ecuación de una circunferencia con centro en $(-6, 2)$ que es tangente al eje x (esto es, la circunferencia toca al eje x en un solo punto).

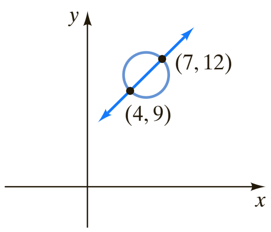
114. Determina la ecuación de una circunferencia con centro en $(-3, 5)$ que es tangente al eje y.

En los ejercicios 115 y 116 determina **a)** *el radio de la circunferencia cuyo diámetro está en la línea que se muestra,* **b)** *el centro de la circunferencia, y* **c)** *la ecuación de la circunferencia.*

115.

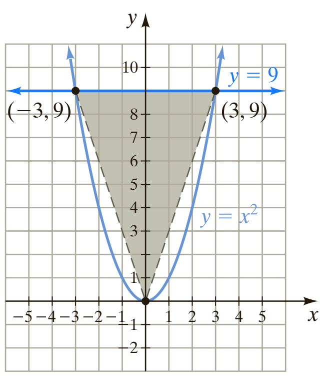


116.



117. Puntos de intersección ¿Cuál es el máximo número y el mínimo número de puntos de intersección posibles para las gráficas de $y = a(x - h_1)^2 + k_1$ y $x = a(y - k_2)^2 + h_2$? Explica tu respuesta.

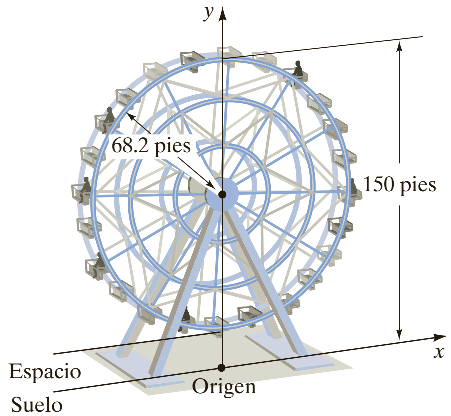
118. Triángulo inscrito Considera la figura siguiente.



a) Determina el área del triángulo en gris.

b) Cuando se inscribe un triángulo en una parábola, como en la figura, el área dentro de la parábola desde la base del triángulo es $\frac{4}{3}$ del área del triángulo. Determina el área dentro de la parábola desde $x = -3$ a $x = 3$.

119. Rueda de la fortuna La rueda de la fortuna en el muelle Navy en Chicago tiene 150 pies de altura. El radio de la rueda es de 68.2 pies.

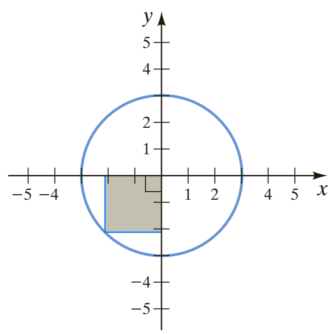


a) ¿Cuánto espacio hay debajo de la rueda?

b) ¿A qué altura del suelo está el centro de la rueda?

c) Determina la ecuación de la rueda. Considera que el origen está en el suelo directamente debajo del centro de la rueda.

120. Área sombreada Determina el área sombreada del cuadrado de la figura. La ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = 9$.



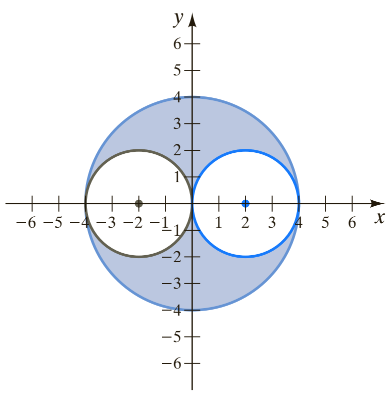
121. Área sombreada Considera la siguiente figura. Escribe una ecuación para

a) la circunferencia sombreada en azul,

b) la circunferencia azul oscuro y

c) la circunferencia gris.

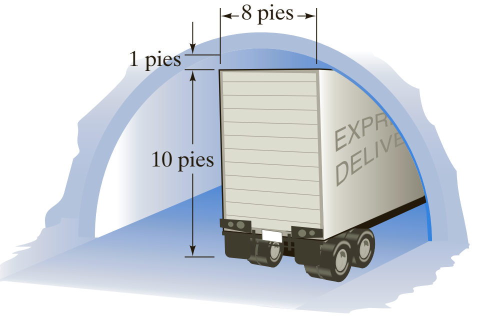
d) Determina el área sombreada.



122. Puntos de intersección Considera las ecuaciones $x^2 + y^2 = 16$ y $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$. Considera el centro y el radio de cada circunferencia para determinar el número de puntos de intersección de las dos circunferencias.

123. Circunferencias concéntricas Determina el área entre las dos circunferencias concéntricas cuyas ecuaciones se expresan como $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 16$ y $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 64$. Las *circunferencias concéntricas* son circunferencias que tienen el mismo centro.

124. Túnel Un departamento de caminos planea construir un túnel semicircular de un solo sentido a través de una montaña. El túnel debe ser lo suficientemente grade para que un camión de 8 pies de ancho y 10 de alto pase por el centro del túnel y que le sobre 1 pie directamente por encima de la esquina del camión cuando maneje por el centro del túnel (como se ve en la siguiente figura). Determina el radio mínimo del túnel.



Ejercicios de conceptos y escritura

125. Todas las parábolas de la forma $y = a(x - h)^2 + k$, $a > 0$, ¿serán funciones? Explica tu respuesta. ¿Cuál será el dominio y el rango de $y = a(x - h)^2 + k$, $a > 0$?

126. Todas las parábolas de la forma $x = a(y - k)^2 + h$, $a > 0$, ¿serán funciones? Explica tu respuesta. ¿Cuál será el dominio y el rango de $x = a(y - k)^2 + h$, $a > 0$?

127. ¿Cómo se comparan las gráficas de $y = 2(x - 3)^2 + 4$ y $y = -2(x - 3)^2 + 4$?

128. ¿Cuál es la definición de una circunferencia?

129. ¿Es $x^2 - y^2 = 9$ la ecuación de una circunferencia? Explica tu respuesta.

130. ¿Es $-x^2 + y^2 = 25$ la ecuación de una circunferencia? Explica tu respuesta.

131. ¿Es $2x^2 + 3y^2 = 6$ la ecuación de una circunferencia? Explica tu respuesta.

132. ¿Es $x = y^2 - 6y + 3$ la ecuación de una parábola? Explica tu respuesta.

133. ¿Es $x^2 = y^2 - 6y + 3$ la ecuación de una parábola? Explica tu respuesta.

134. ¿Es $x = y + 2$ la ecuación de una parábola? Explica tu respuesta.

Actividad de grupo

Comenta y responde el ejercicio 135 en grupo.

135. Ecuación de una parábola La ecuación de una parábola se puede determinar si se conocen tres de sus puntos. Para hacer esto, empieza con $y = ax^2 + bx + c$. Después sustituye las coordenadas en x y en y del primer punto en la ecuación. Esto dará como resultado una ecuación en a, b y c. Repite el procedimiento para los otros dos puntos. Este proceso genera un sistema de tres ecuaciones con tres variables. Después resuelve el sistema para a, b y c. Para determinar la ecuación de la parábola, sustituye los valores que obtuviste para a, b y c en la ecuación $y = ax^2 + bx + c$.

Tres puntos en la parábola son $(0, 12)$, $(3, -3)$ y $(-2, 32)$.

a) De manera individual, determina un sistema de ecuaciones con tres variables que se pueda usar para determinar la ecuación de la parábola. Después compara tus respuestas. Si cada miembro del grupo no tiene el mismo sistema, determina por qué.

b) De manera individual, resuelve el sistema y determina los valores de a, b y c. Después compara tus respuestas.

c) De manera individual, escribe la ecuación de la parábola que pasa por $(0, 12)$, $(3, -3)$ y $(-2, 32)$. Después compara tus respuestas.

d) De manera individual, escribe la ecuación en la forma

$$y = a(x - h)^2 + k$$

Después compara tus respuestas.

e) De manera individual, grafica la ecuación del inciso **d)**. Después compara tus respuestas.

Ejercicios de repaso acumulados

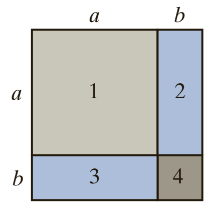
[1.5] **136.** Simplifica $\dfrac{6x^{-3}y^4}{18x^{-2}y^3}$.

[2.5] **137.** Resuelve la desigualdad $-4 < 3x - 4 < 17$. Escribe la solución en notación de intervalos.

[4.5] **138.** Evalúa el determinante

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

[5.2] **139. a)** Escribe expresiones que representen cada una de las cuatro áreas que se muestran en la figura.



b) Expresa como el cuadrado de un binomio el área total mostrada.

[10.1] **140.** Grafica $y = (x - 4)^2 + 1$.

10.2 La elipse

1 Graficar elipses.

2 Graficar elipses con centros en (h, k).

1 Graficar elipses

La elipse

Una **elipse** es un conjunto de puntos en un plano, cuya suma de las distancias desde dos puntos fijos es una constante. Los dos puntos fijos se llaman **focos** (cada uno es un **foco**) de la elipse.

En la **Figura 10.18**, F_1 y F_2 representan los dos focos de una elipse.

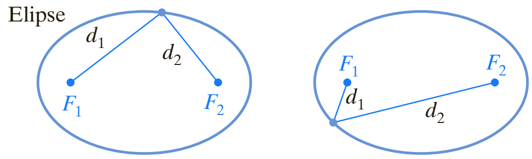


FIGURA 10.18

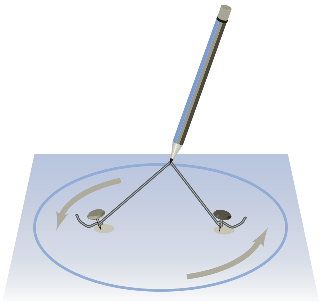


FIGURA 10.19

Podemos construir una elipse usando un pedazo de cordón y dos tachuelas. Coloca las dos tachuelas bastante cerca una de la otra (**Figura 10.19**). Después fija los extremos del cordón a las tachuelas. Con un lápiz o pluma, tensa el cordón, y, manteniéndolo tenso, traza la elipse moviendo el lápiz alrededor de las tachuelas.

En la **Figura 10.20**, el segmento de recta desde $-a$ a a en el eje x es el eje *más largo* o el **eje mayor** y el segmento de recta de $-b$ a b es el eje *más corto* o el **eje menor** de la elipse. El eje mayor de una elipse también puede estar en el eje y. La **Figura 10.20** también muestra el *centro* de la elipse y los dos vértices (los puntos rojos). Los vértices son los puntos finales del eje mayor.

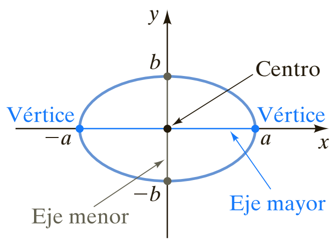


FIGURA 10.20

Elipse con centro en el origen

La forma general de una elipse con centro en el origen es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ son las intersecciones con el eje x y $(0, b)$ y $(0, -b)$ son las intersecciones con el eje y.

Observa que:

- Las intersecciones con el eje x se obtienen de la constante en el denominador del término en x.
- Las intersecciones con el eje y se obtienen de la constante en el denominador del término en y.
- Si $a^2 > b^2$, el eje mayor está sobre el eje x.
- Si $b^2 > a^2$, el eje mayor está sobre el eje y.

En el ejemplo 1, el eje mayor de la elipse está sobre el eje x.

EJEMPLO 1 Grafica $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Solución Podemos reescribir la ecuación como

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

Entonces, $a = 3$ y las intersecciones con el eje x son $(3, 0)$ y $(-3, 0)$. Como $b = 2$, las intersecciones con el eje y son $(0, 2)$ y $(0, -2)$. La elipse se muestra en la **Figura 10.21**.

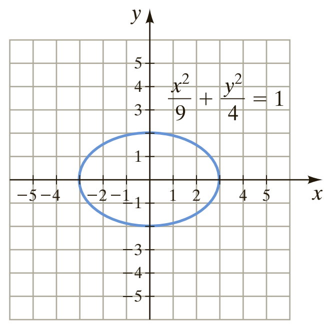


FIGURA 10.21

Resuelve ahora el ejercicio 15

Una ecuación puede estar expresada de manera que no sea tan obvio que su gráfica es una elipse, como se ilustra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Grafica $20x^2 + 9y^2 = 180$.

Solución

$$20x^2 + 9y^2 = 180$$

$$\frac{20x^2 + 9y^2}{180} = \frac{180}{180} \qquad \text{Se dividieron ambos lados entre 180.}$$

$$\frac{20x^2}{180} + \frac{9y^2}{180} = 1 \qquad \text{Simplifica.}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{20} = 1 \qquad \text{Ecuación de la elipse.}$$

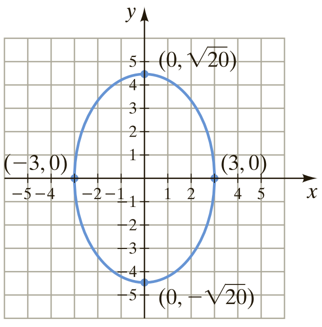
Ahora se puede reconocer la ecuación como una elipse en forma general.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como $a^2 = 9$, $a = 3$. Sabemos que $b^2 = 20$; entonces $b = \sqrt{20}$ (o aproximadamente 4.47).

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{20})^2} = 1$$

Las intersecciones con el eje x son $(3, 0)$ y $(-3, 0)$. Las intersecciones con el eje y son $(0, -\sqrt{20})$ y $(0, \sqrt{20})$. La gráfica se muestra en la **Figura 10.22**. Observa que el eje mayor está sobre el eje y.



$20x^2 + 9y^2 = 180$

FIGURA 10.22

Resuelve ahora el ejercicio 19

En el ejemplo 1, como $a^2 = 9$, $b^2 = 4$ y $a^2 > b^2$, el eje mayor está sobre el eje x. En el ejemplo 2, como $a^2 = 9$, $b^2 = 20$ y $b^2 > a^2$, el eje mayor está sobre el eje y. En el caso específico donde $a^2 = b^2$, la figura es una circunferencia. *Por lo tanto, la circunferencia es un caso especial de la elipse.*

EJEMPLO 3 Escribe la ecuación de la elipse que se muestra en la **Figura 10.23**.

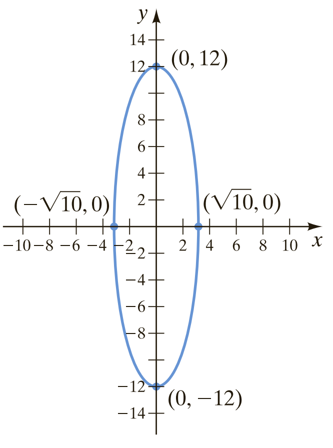


FIGURA 10.23

Solución Las intersecciones con el eje x se encuentran en $(-\sqrt{10}, 0)$ y $(\sqrt{10}, 0)$; entonces, $a = \sqrt{10}$ y $a^2 = 10$. Las intersecciones con el eje y son $(0, -12)$ y $(0, 12)$; tal que, $b = 12$ y $b^2 = 144$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{144} = 1$$

Resuelve ahora el ejercicio 45

Comprendiendo el álgebra

El área de una elipse es

$A = \pi ab$.

La fórmula del **área de una elipse** es $A = \pi ab$. En el ejemplo 1, donde $a = 3$ y $b = 2$, el área es $A = \pi(3)(2) = 6\pi \approx 18.8$ unidades cuadradas.

En el ejemplo 2, donde $a = 3$ y $b = \sqrt{20}$, el área es $A = \pi(3)(\sqrt{20}) = \pi(3)(2\sqrt{5}) = 6\pi\sqrt{5} \approx 42.1$ unidades cuadradas.

2 Graficar elipses con centros en (h, k)

Se pueden usar traslaciones horizontales y vértices similares a las que usamos en el capítulo 8 para obtener la ecuación de una elipse con centro en (h, k).

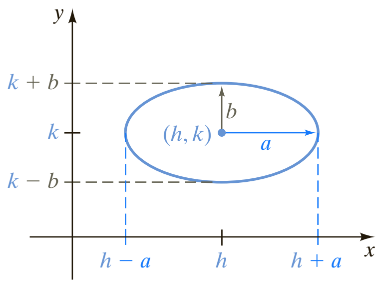


FIGURA 10.24

Elipse con centro en (h, k)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

En la fórmula, la h desplaza la gráfica a la izquierda o a la derecha del origen, y k desplaza la gráfica hacia arriba o hacia abajo del origen, como se muestra en la **Figura 10.24**.

EJEMPLO 4 Grafica $\dfrac{(x-2)^2}{25} + \dfrac{(y+3)^2}{16} = 1$.

Solución Ésta es la gráfica de $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ o $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$ trasladada de manera que su centro esté en $(2, -3)$. Observa que $a = 5$ y $b = 4$. La gráfica se muestra en la **Figura 10.25**.

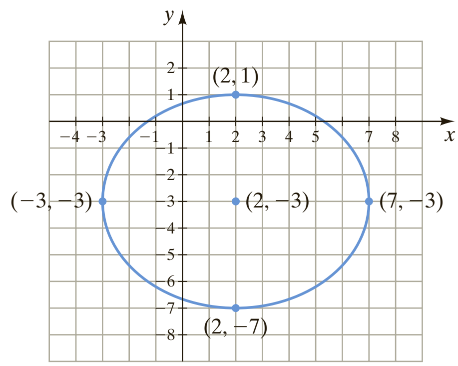


FIGURA 10.25

Resuelve ahora el ejercicio 33

El entendimiento de las elipses es útil en muchas áreas. Los astrónomos saben que los planetas giran alrededor del Sol en órbitas elípticas. Los satélites de comunicaciones se mueven alrededor de la Tierra en órbitas elípticas (ver **Figura 10.26**).

Las elipses se usan en medicina para destruir piedras en los riñones. Cuando emerge una señal de uno de los focos de una elipse, la señal se refleja en el otro foco. En las máquinas de piedras en los riñones, la persona se coloca de manera que la piedra que se quiere destruir esté en uno de los focos de una cámara con forma elíptica llamada litotriptor (ver **Figura 10.27** y los ejercicios 55 y 56).

En ciertos edificios con techos elipsoidales, una persona que está parada en uno de los focos puede murmurar algo y la persona que está en el otro foco puede oír claramente lo que la persona murmuró. Existen muchos otros usos para las elipses, incluyendo lámparas que están hechas para concentrar la luz en un punto específico.

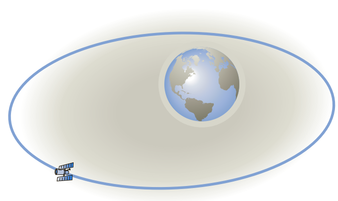


FIGURA 10.26

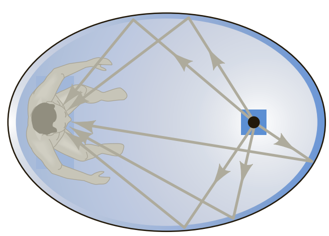


FIGURA 10.27

Cómo utilizar tu calculadora graficadora

Las elipses no son funciones. Para graficar elipses en una calculadora graficadora, resolvemos la ecuación para y. Esto nos dará las dos ecuaciones que usaremos para grafica la elipse.

En el ejemplo 1, graficamos $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Al resolver esta ecuación para y, obtenemos

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\boxed{36} \cdot \frac{x^2}{9} + \boxed{36} \cdot \frac{y^2}{4} = 1 \cdot \boxed{36} \qquad \text{Multiplica por el MCD.}$$

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

$$9y^2 = 36 - 4x^2$$

$$y^2 = \frac{36 - 4x^2}{9}$$

$$y^2 = \frac{4(9 - x^2)}{9} \qquad \text{Factoriza el 4 en el numerador.}$$

$$y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} \qquad \text{Propiedad de la raíz cuadrada.}$$

Para graficar la elipse, hacemos $Y_1 = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$ y $Y_2 = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$ y graficamos ambas ecuaciones. Las gráficas de Y_1 y Y_2 se muestran en la **Figura 10.28**.

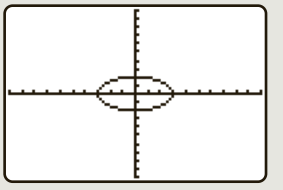


FIGURA 10.28

CONJUNTO DE EJERCICIOS 10.2

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

mayor	*intersecciones con el eje y*	foco	dividir	restar	(0, 0)
multiplicar	menor	*intersecciones con el eje x*	(k, h)	elipse	(h, k)

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es una ecuación de una elipse con centro en ________________.

2. $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ es una ecuación de una elipse con centro en ________________.

3. Un conjunto de puntos cuya suma de las distancias desde dos puntos fijos es una constante es una ________________.

4. Una elipse es el conjunto de puntos en un plano cuya distancia desde dos puntos fijos, llamada ________________, es una constante.

5. Para la elipse $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{16} = 1$, los puntos $(-9, 0)$ y $(9, 0)$ son las ________________.

6. Para la elipse $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{16} = 1$, los puntos $(0, -4)$ y $(0, 4)$ son las ________________.

7. Para la elipse $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$, la recta que va de -7 a 7 en el eje x es el eje ________________.

8. Para la elipse $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$, la recta que va de -5 a 5 en el eje y es el eje ________________.

9. El primero paso para graficar la elipse $25x^2 + 50y^2 = 100$ es ________________ ambos lados entre 100.

10. El primero paso para graficar la elipse $-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$ es ________________ ambos lados por -1.

Practica tus habilidades

Grafica cada ecuación.

11. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$
12. $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$
13. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
14. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
15. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
16. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{16} = 1$
17. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$
18. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{64} = 1$
19. $x^2 + 16y^2 = 16$
20. $x^2 + 25y^2 = 25$
21. $49x^2 + y^2 = 49$
22. $9x^2 + 25y^2 = 225$
23. $4x^2 + 9y^2 = 36$
24. $9x^2 + 16y^2 = 144$
25. $25x^2 + 100y^2 = 400$
26. $100x^2 + 25y^2 = 400$
27. $x^2 + 2y^2 = 8$
28. $x^2 + 36y^2 = 36$
29. $\frac{x^2}{16} + \frac{(y - 2)^2}{9} = 1$
30. $\frac{(x - 1)^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1$

31. $\dfrac{(x+3)^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ **32.** $\dfrac{(x-3)^2}{25} + \dfrac{(y+2)^2}{49} = 1$ **33.** $\dfrac{(x+1)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$ **34.** $\dfrac{(x-3)^2}{16} + \dfrac{(y-4)^2}{25} = 1$

35. $(x+3)^2 + 9(y+1)^2 = 81$ **36.** $18(x-1)^2 + 2(y+3)^2 = 72$ **37.** $(x-5)^2 + 4(y+4)^2 = 4$

38. $4(x-2)^2 + 9(y+2)^2 = 36$ **39.** $12(x+4)^2 + 3(y-1)^2 = 48$ **40.** $25(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 225$

Resolución de problemas

41. Determina el área de la elipse del ejercicio 11.

42. Determina el área de la elipse del ejercicio 15.

43. Determina el área de la elipse del ejercicio 17.

44. Determina el área de la elipse del ejercicio 29.

En los ejercicios 45-48, determina la ecuación de la elipse que tiene los cuatro puntos como puntos finales de los ejes mayor y menor.

45. $(5, 0), (-5, 0), (0, 4), (0, -4)$

46. $(6, 0), (-6, 0), (0, 5), (0, -5)$

47. $(2, 0), (-2, 0), (0, 3), (0, -3)$

48. $(1, 0), (-1, 0), (0, 9), (0, -9)$

En los ejercicios 49 y 50, escribe la ecuación en la forma general. Determina el centro de cada elipse.

49. $x^2 + 4y^2 + 6x + 16y - 11 = 0$

50. $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 92 = 0$

51. Galería de arte Una galería de arte tiene un salón elíptico. La distancia máxima de uno de sus focos a la pared es de 90.2 pies y la distancia mínima es de 20.7 pies. Determina la distancia entre los focos.

52. Comunicaciones por satélite Un transbordador espacial transportó un satélite de comunicaciones al espacio. El satélite viaja en una órbita elíptica alrededor de la Tierra. La distancia máxima del satélite a la Tierra es de 23,200 millas y la distancia mínima es de 22,800 millas. La Tierra está en uno de los focos de la elipse. Determina la distancia de la Tierra al otro foco.

53. Túnel a través de una montaña El túnel que se muestra en la fotografía es la parte media superior de una elipse. El túnel tiene 20 pies de ancho y 24 pies de alto.

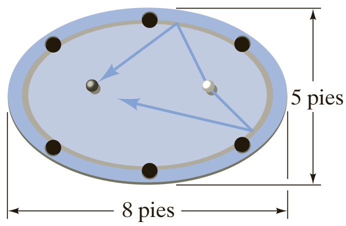
© Allen R. Angel

a) Si piensas en una elipse completa con centro en el centro del camino, determina la ecuación de la elipse.

b) Determina el área de la elipse que obtuviste en el inciso **a)**.

c) Determina el área de la abertura del túnel.

54. Mesa de billar Una mesa de billar elíptica tiene 8 pies de largo por 5 pies de ancho. Determina la ubicación de los focos. Si se coloca una bola en cada foco de dicha mesa y se golpea una de las bolas con suficiente fuerza, ésta golpeará la bola en el otro foco, sin importar en dónde rebote en la mesa.



55. Litotriptor Considera que el litotriptor que se describió en la página 647 tiene 6 pies de largo y 4 pies de ancho. Describe la ubicación de los focos.

56. Litotriptor En la página 647 dimos una breve introducción acerca del litotriptor, que usa ondas ultrasónicas para deshacer piedras en los riñones. Investiga y escribe un reporte detallado que describa el procedimiento que se usa para deshacer piedras en los riñones. Asegúrate de explicar cómo se dirigen las ondas a la piedra.

57. Galería de murmullos El National Statuary Hall en el edificio del Capitolio en Washington, D.C., es una “galería de murmullos”. Investiga y explica por qué una persona que esté parada en cierto punto puede murmurar algo y alguien que esté parado a una distancia considerable de ella lo puede oír.

58. Verifica tu respuesta del ejercicio 11 en tu calculadora graficadora.

59. Verifica tu respuesta del ejercicio 17 en tu calculadora graficadora.

Ejercicios de conceptos y escritura

60. Comenta las gráficas de $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ cuando $a > b$, $a < b$ y $a = b$.

61. Explica por qué la circunferencia es un caso especial de la elipse.

62. ¿Es $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{49} = 1$ la ecuación de una elipse? Explica tu respuesta.

63. ¿Es $-\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{81} = 1$ la ecuación de una elipse? Explica tu respuesta.

64. ¿Cuántos puntos existen en la gráfica de $16x^2 + 25y^2 = 0$? Explica tu respuesta.

65. Considera la gráfica de la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Explica qué pasará con la forma de la gráfica conforme el valor de b se acerca al valor de a. ¿Cuál es la forma de la gráfica cuando $a = b$?

66. ¿Cuántos puntos de intersección tienen las gráficas de las ecuaciones $x^2 + y^2 = 49$ y $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$? Explica tu respuesta.

67. ¿Cuántos puntos de intersección tienen las gráficas de las ecuaciones $y = 2(x-2)^2 - 3$ y $\dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(y+3)^2}{9} = 1$? Explica tu respuesta.

Problemas de desafío

Determina la ecuación de la elipse que tiene los siguientes cuatro puntos como puntos finales de los ejes mayor y menor.

68. $(-7, 3), (5, 3), (-1, 5), (-1, 1)$

69. $(-3, 2), (11, 2), (4, 5), (4, -1)$

Actividad de grupo

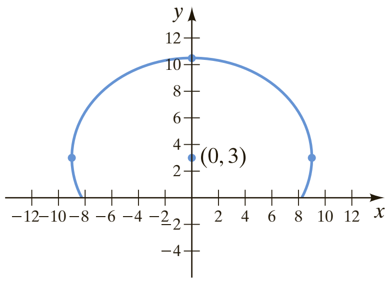
Trabaja en el ejercicio 70 de manera individual. Después compara tus respuestas.

70. Túnel La fotografía muestra un túnel elíptico (donde no se muestra la parte inferior de la elipse) cerca del Rockefeller Center en la ciudad de Nueva York. El túnel tiene un ancho máximo de 18 pies y la altura mínima *desde el suelo hasta la parte superior* es de 10.5 pies.

© Allen R. Angel

a) Si la *elipse completa* tuviera una altura máxima de 15 pies, ¿a qué altura del suelo estaría el centro del túnel elíptico?

b) Considera la siguiente gráfica, que se puede usar para representar el túnel.



Si se continuara la elipse, ¿cuál sería la otra intersección con el eje y de la gráfica?

c) Escribe la ecuación de la elipse del inciso **b)**, si se completa.

Ejercicios de repaso acumulados

[2.2] **71.** Resuelve la fórmula $S = \frac{n}{2}(f + l)$ para l.

[5.4] **72.** Divide $\frac{2x^2 + 2x - 7}{2x - 3}$.

[7.6] **73.** Resuelve $\sqrt{3b - 2} = 10 - b$.

[8.6] **74.** Resuelve $\frac{3x + 5}{x - 4} \leq 0$ y da la solución en notación de intervalos.

[9.7] **75.** Determina $\log_8 321$.

Prueba de mitad de capítulo: 10.1-10.2

Para determinar qué tan bien entiendes el tema del capítulo hasta este punto, resuelve esta breve prueba. Las respuestas, y la sección en que se estudió inicialmente el tema, se dan al final del libro. Repasa cualquier pregunta que hayas respondido incorrectamente.

Grafica cada ecuación.

1. $y = (x - 2)^2 - 1$

2. $y = -(x + 1)^2 + 3$

3. $x = -(y - 4)^2 + 1$

4. $x = 2(y + 3)^2 - 2$

5. $y = x^2 + 6x + 10$

Determina la distancia entre cada par de puntos. Donde sea apropiado, redondea tus respuestas a la centésima más cercana.

6. $(-7, 4)$ y $(-2, -8)$

7. $(5, -3)$ y $(2, 9)$

Determina el punto medio del segmento de recta entre cada par de puntos.

8. $(9, -1)$ y $(-11, 6)$

9. $\left(-\frac{5}{2}, 7\right)$ y $\left(8, \frac{1}{2}\right)$

10. Escribe la ecuación de la circunferencia con centro en $(-3, 2)$ y radio de 5 unidades.

Grafica cada ecuación.

11. $x^2 + (y - 1)^2 = 16$

12. $y = \sqrt{36 - x^2}$

13. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

14. ¿Cuál es la definición de una circunferencia?

Grafica cada ecuación.

15. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

16. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} = 1$

17. $\frac{(x - 1)^2}{49} + \frac{(y + 2)^2}{4} = 1$

18. $36(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 36$

19. Determina el área de la elipse del ejercicio 15.

20. Determina la ecuación de la elipse que tiene los cuatro puntos $(8, 0)$, $(-8, 0)$, $(0, 5)$ y $(0, -5)$ como puntos finales de los ejes mayor y menor.

10.3 La hipérbola

1 Graficar hipérbolas.

2 Repasar secciones cónicas.

1 Graficar hipérbolas

La hipérbola

Una **hipérbola** es el conjunto de puntos en el plano, cuya diferencia de las distancias de dos puntos fijos, llamados **focos**, es una constante.

En la **Figura 10.29a** se muestra una hipérbola. En la figura, para cada punto de la hipérbola, la diferencia $M - N$ es la misma constante. Una hipérbola se puede ver como un par de parábolas. Sin embargo, las formas son en realidad muy diferentes. Una hipérbola tiene dos **vértices**. Los vértices son los puntos donde la gráfica cruza el eje x (**Figura 10.29b**) o el eje y (**Figura 10.29c**). El punto que está a la mitad de los dos vértices es el **centro** de la hipérbola. La recta que pasa por los vértices se llama **eje transversal**. En la **Figura 10.29b** el eje transversal está sobre el eje x, y en la **Figura 10.29c**, el eje transversal está sobre el eje y.

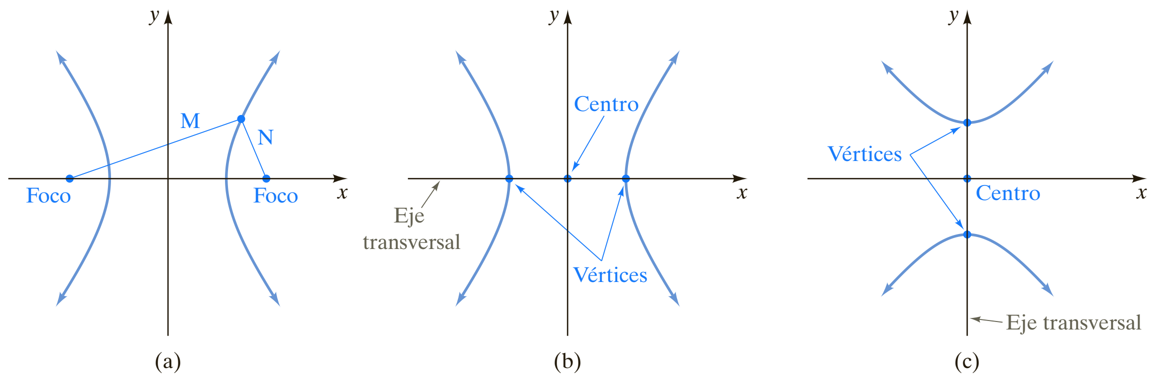
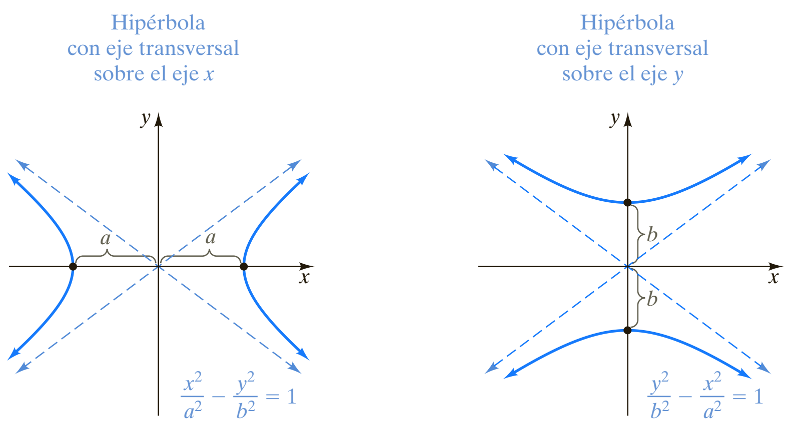


FIGURA 10.29

La **Figura 10.30** muestra las gráficas de la forma general de las ecuaciones para ambas hipérbolas. En la **Figura 10.30a**, ambos vértices están a a unidades del origen. En la **Figura 10.30b**, ambos vértices están a b unidades del origen. Observa que en la forma general de la ecuación, el denominador del término en x^2 siempre es a^2 y el denominador del término en y^2 siempre es b^2.



- Hipérbola con centro en el origen.
- Vértices $(-a, 0)$ y $(a, 0)$.
- El eje transversal está sobre el eje x.

- Hipérbola con centro en el origen.
- Vértices $(0, -b)$ y $(0, b)$.
- El eje transversal está sobre el eje y.

FIGURA 10.30

Cuando la ecuación está escrita en la forma general, las intersecciones estarán en el eje que se indica por la variable con el coeficiente positivo. Las intersecciones estarán en la raíz cuadrada positiva y negativa del denominador del término positivo.

Ejemplos	Intersecciones con	Intersecciones
$\dfrac{x^2}{49} - \dfrac{y^2}{16} = 1$	eje x	$(-7, 0)$ y $(7, 0)$
$\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{49} = 1$	eje y	$(0, -4)$ y $(0, 4)$

Comprendiendo el álgebra

Las asíntotas *no* forman parte de la gráfica, pero se usan para mostrar los valores a los que se acerca la gráfica, pero no la tocan.

Las líneas punteadas en la **Figura 10.30** se llaman **asíntotas**. Las asíntotas no forman parte de la hipérbola pero se usan como ayuda para graficar las hipérbolas. Las asíntotas son dos rectas que pasan por el centro de la hipérbola (ver **Figura 10.30**). Conforme crecen los valores de x y de y, la gráfica de la hipérbola se acerca a las asíntotas. Las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola cuyo centro es el origen son

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

Las asíntotas se pueden trazar rápidamente si graficas los cuatro puntos (a, b), $(-a, b)$, $(a, -b)$ y $(-a, -b)$ y después conectas estos puntos con líneas punteadas para formar un rectángulo. Después traza líneas punteadas a través de las esquinas opuestas del rectángulo para obtener las asíntotas.

Hipérbola con centro en el origen

EJE TRANSVERSAL SOBRE EL EJE *X* (SE ABRE HACIA LA DERECHA Y HACIA LA IZQUIERDA)	EJE TRANSVERSAL SOBRE EL EJE *Y* (SE ABRE HACIA ARRIBA Y HACIA ABAJO)
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$

ASÍNTOTAS

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

EJEMPLO 1

a) Determina las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola con ecuación

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

b) Traza la hipérbola usando las asíntotas.

Solución

a) El valor de a^2 es 9; la raíz cuadrada positiva de 9 es 3. El valor de b^2 es 16; la raíz cuadrada positiva de 16 es 4. Las asíntotas son

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

o

$$y = \frac{4}{3}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{4}{3}x$$

b) Para graficar la hipérbola, primero graficamos las asíntotas. Primero traza los puntos $(3, 4)$, $(-3, 4)$, $(3, -4)$ y $(-3, -4)$ y dibuja el rectángulo como se muestra en la **Figura 10.31**. Las asíntotas son las líneas punteadas que pasan a través de las esquinas opuestas del rectángulo.

Como el término en x de la ecuación original es positivo, la gráfica intersecta el eje x. Como el denominador del término positivo es 9, los vértices están en $(3, 0)$ y $(-3, 0)$. Ahora traza la hipérbola dejando que se aproxime a sus asíntotas (**Figura 10.32**). Las asíntotas se trazan usando líneas punteadas porque no son parte de la hipérbola. Se usan simplemente como ayuda para trazar la gráfica.

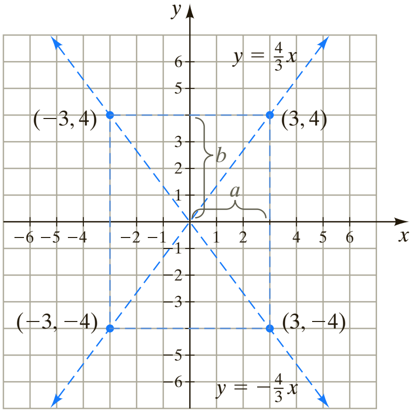
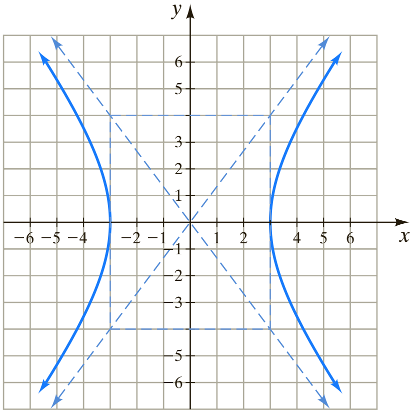


FIGURA 10.31



$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

FIGURA 10.32

Resuelve ahora el ejercicio 21

EJEMPLO 2

a) Demuestra que la ecuación $-25x^2 + 4y^2 = 100$ es una hipérbola, expresando la ecuación en la forma general.

b) Determina las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica.

c) Traza la gráfica.

Solución

a) Dividimos ambos lados de la ecuación entre 100 para obtener un 1 en el lado derecho de la ecuación.

$$\frac{-25x^2 + 4y^2}{100} = \frac{100}{100}$$

$$\frac{-25x^2}{100} + \frac{4y^2}{100} = 1$$

$$\frac{-x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Si reescribimos la ecuación en la forma general (primero el término positivo), obtenemos

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{4} = 1$$

b) Como $a = 2$ y $b = 5$, las ecuaciones de las asíntotas son

$$y = \frac{5}{2}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{5}{2}x$$

c) La gráfica intersecta con el eje y en $(0, 5)$ y $(0, -5)$. La **Figura 10.33a** muestra las asíntotas, y la **Figura 10.33b** muestra la hipérbola.

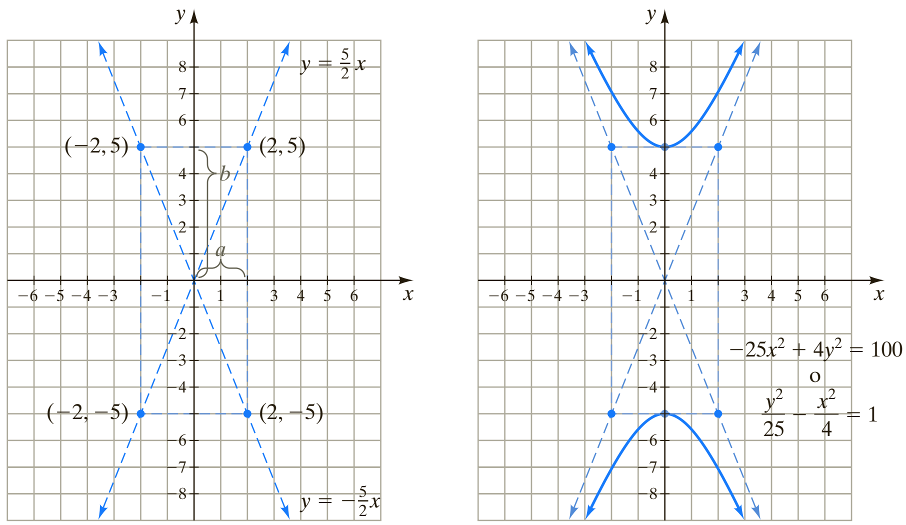


FIGURA 10.33 (a) (b)

Resuelve ahora el ejercicio 29

Hemos estudiado hipérbolas con centros en el origen. Las hipérbolas no necesariamente deben tener su centro en el origen. En este libro no estudiaremos tales hipérbolas.

Cómo utilizar tu calculadora graficadora

Para graficar hipérbolas en una calculadora graficadora, resuelve la ecuación para y y grafica cada parte. Considera el ejemplo 1,

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Demuestra que si resuelves esta ecuación para y obtienes $y = \pm\frac{4}{3}\sqrt{x^2 - 9}$. Sea $Y_1 = \frac{4}{3}\sqrt{x^2 - 9}$ y $Y_2 = -\frac{4}{3}\sqrt{x^2 - 9}$. Las **Figuras 10.34a**, **10.34b**, **10.34c** y **10.34d** que se muestran a continuación, dan las gráficas de Y_1 y Y_2 para diferentes configuraciones de la ventana. Las configuraciones de la ventana que se usan se indican en la parte superior de cada gráfica.

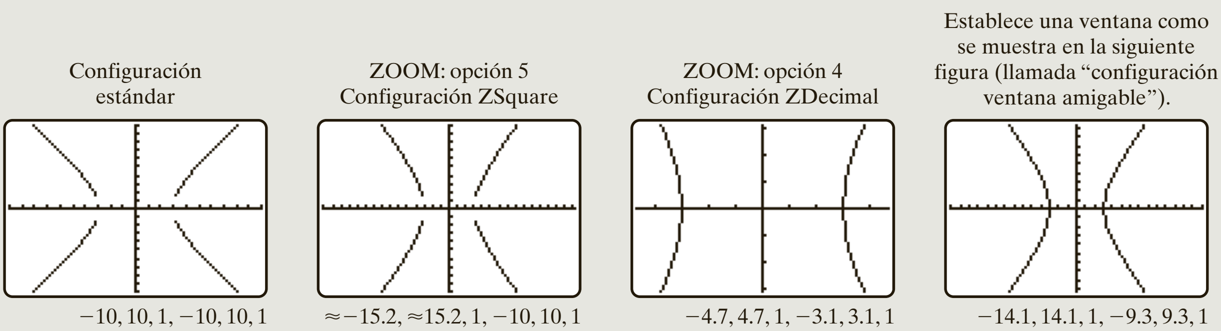
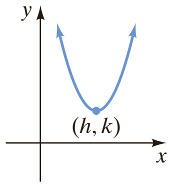
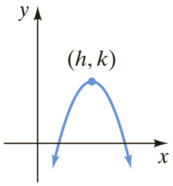
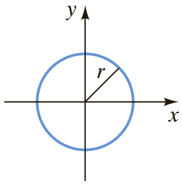
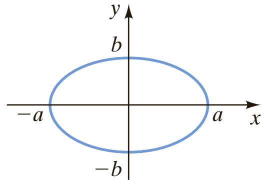
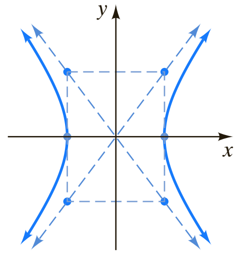
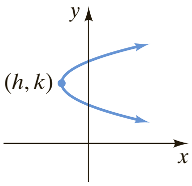
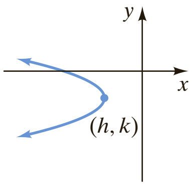
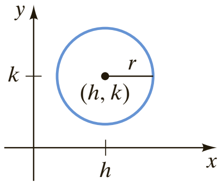
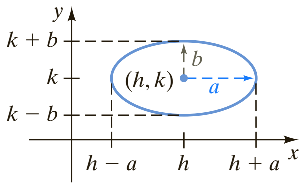
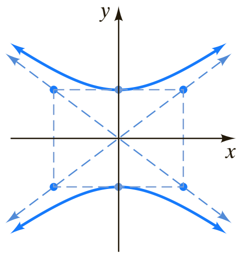


FIGURA 10.34 (a) (b) (c) (d)

En el inciso (d), la "configuración ventana amigable", la razón de la longitud del eje x (28.2 unidades) a la longitud del eje y (18.6 unidades) es aproximadamente 1.516. Ésta es la misma razón que la longitud del ancho de la ventana de visualización de la calculadora TI-84 Plus.

2 Repasar secciones cónicas

La siguiente tabla resume las secciones cónicas.

Parábola	Circunferencia	Elipse	Hipérbola
$y = a(x-h)^2 + k$ o $y = ax^2 + bx + c$ $a > 0$  $a < 0$ 	$x^2 + y^2 = r^2$ 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 
$x = a(y-k)^2 + h$ o $x = ay^2 + by + c$ $a > 0$  $a < 0$ 	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ 	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ 	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$  *Asíntotas* $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$

EJEMPLO 3 Indica si cada ecuación representa una parábola, una circunferencia, una elipse o una hipérbola.

a) $6x^2 = -6y^2 + 48$ **b)** $x - y^2 = 9y + 3$ **c)** $2x^2 = 8y^2 + 72$

Solución

a) Esta ecuación tiene un término cuadrado en x y un término cuadrado en y. Coloquemos todos los términos cuadrados en el lado izquierdo de la ecuación.

$$6x^2 = -6y^2 + 48$$

$$6x^2 + 6y^2 = 48 \qquad \text{Suma } 6y^2 \text{ en ambos lados.}$$

Como los coeficientes de ambos términos cuadrados son el mismo número, dividimos ambos lados de la ecuación entre este número. Divide ambos lados entre 6.

$$\frac{6x^2 + 6y^2}{6} = \frac{48}{6}$$

$$x^2 + y^2 = 8$$

Esta ecuación es de la forma $x^2 + y^2 = r^2$ donde $r^2 = 8$.

La ecuación $6x^2 = -6y^2 + 48$ representa una circunferencia.

b) Esta ecuación tiene un término cuadrado en y pero no tiene término cuadrado en x. Resolvamos la ecuación para x.

$$x - y^2 = 9y + 3$$
$$x = y^2 + 9y + 3 \qquad \text{Suma } y^2 \text{ en ambos lados.}$$

Esta ecuación es de la forma $x = ay^2 + by + c$ donde $a = 1$, $b = 9$ y $c = 3$.

La ecuación $x - y^2 = 9y + 3$ representa una parábola que se abre hacia la derecha.

c) Esta ecuación tiene un término cuadrado en x y un término cuadrado en y. Coloquemos todos los términos cuadrados en el lado izquierdo de la ecuación.

$$2x^2 = 8y^2 + 72$$
$$2x^2 - 8y^2 = 72 \qquad \text{Resta } 8y^2 \text{ de ambos lados.}$$

Como los coeficientes de ambos términos cuadrados son números diferentes, queremos dividir la ecuación entre la constante del lado derecho. Divide ambos lados entre 72.

$$\frac{2x^2 - 8y^2}{72} = \frac{72}{72}$$
$$\frac{2x^2}{72} - \frac{8y^2}{72} = 1$$
$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Esta ecuación es de la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ donde $a^2 = 36$ (o $a = 6$) y $b^2 = 9$ (o $b = 3$).

La ecuación $2x^2 = 8y^2 + 72$ representa una hipérbola.

Resuelve ahora el ejercicio 53.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 10.3

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

dividir	asíntotas	x	y	focos	transversal
horizontal	centro	vertical	vértices	hipérbola	multiplicar

1. Un conjunto de puntos cuya diferencia de las distancias desde dos puntos fijos es una constante es una ________________.
2. Los puntos fijos de una hipérbola se llaman ________________.
3. Para la hipérbola $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{100} = 1$, el ________________ está en (0, 0).
4. Para la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$, los ________________ son los puntos $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.
5. La recta que pasa por los vértices de una hipérbola es el eje ________________.
6. Para la hipérbola $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{4} = 1$, los vértices están en el eje ________________.
7. Para la hipérbola $\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{121} = 1$, los vértices están en el eje ________________.
8. Para la hipérbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$, las rectas $y = \frac{5}{2}x$ y $y = -\frac{5}{2}x$ son las ________________.
9. El primer paso para graficar la hipérbola $25x^2 - 9y^2 = 225$ es ________________ ambos lados entre 25.
10. El primer paso para graficar la hipérbola $-\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{50} = -\frac{1}{2}$ es ________________ ambos lados por -2.

Practica tus habilidades

a) *Determina las ecuaciones de las asíntotas para cada ecuación.* **b)** *Grafica la ecuación.*

11. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ **12.** $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$ **13.** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ **14.** $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{4} = 1$

15. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ **16.** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ **17.** $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ **18.** $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{25} = 1$

19. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{36} = 1$ **20.** $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$ **21.** $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{36} = 1$ **22.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

23. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{4} = 1$ **24.** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$ **25.** $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{16} = 1$ **26.** $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{81} = 1$

En los ejercicios 27-36, **a)** *escribe cada ecuación en la forma estándar y determina las ecuaciones de las asíntotas.* **b)** *Traza la gráfica.*

27. $25y^2 - x^2 = 25$ **28.** $x^2 - 25y^2 = 25$

29. $4y^2 - 16x^2 = 64$ **30.** $16x^2 - 4y^2 = 64$

31. $9y^2 - x^2 = 9$ **32.** $x^2 - 9y^2 = 9$

33. $25x^2 - 9y^2 = 225$ **34.** $4y^2 - 25x^2 = 100$

35. $4y^2 - 36x^2 = 144$ **36.** $25x^2 - 16y^2 = 400$

En los ejercicios 37-60, indica si la ecuación representa una parábola, una circunferencia, una elipse o una hipérbola. Ver ejemplo 3.

37. $10x^2 + 10y^2 = 40$ **38.** $30x^2 - 6y^2 = 180$ **39.** $x^2 + 16y^2 = 64$

40. $x = 5y^2 + 15y + 1$ **41.** $4x^2 - 4y^2 = 29$ **42.** $1.2x^2 + 1.2y^2 = 24$

43. $2y = 12x^2 - 8x + 16$ **44.** $3y^2 - 9x^2 = 54$ **45.** $5x^2 + 12y^2 = 60$

46. $9.2x^2 + 9.2y^2 = 46$ **47.** $3x = -2y^2 + 9y - 30$ **48.** $12x^2 - 3y^2 = 48$

49. $6x^2 + 6y^2 = 36$ **50.** $11x^2 = -11y^2 + 77$ **51.** $14y^2 = 7x^2 + 35$

52. $9x^2 = -18y^2 + 36$ **53.** $x + y = 2y^2 + 6$ **54.** $4x^2 = -4y^2 + 400$

55. $13x^2 = 7y^2 + 91$ **56.** $-8x^2 = -9y^2 - 72$ **57.** $y - x + 12 = x^2$

58. $17x^2 = -2y^2 + 34$ **59.** $-3x^2 - 3y^2 = -27$ **60.** $x - y^2 = 49$

Resolución de problemas

61. Determina una ecuación de la hipérbola cuyos vértices son $(0, 2)$ y $(0, -2)$ y cuyas asíntotas son $y = \frac{1}{2}x$ y $y = -\frac{1}{2}x$.

62. Determina una ecuación de la hipérbola cuyos vértices son $(0, 6)$ y $(0, -6)$ y cuyas asíntotas son $y = \frac{3}{2}x$ y $y = -\frac{3}{2}x$.

63. Determina una ecuación de la hipérbola cuyos vértices son $(-3, 0)$ y $(3, 0)$ y cuyas asíntotas son $y = 2x$ y $y = -2x$.

64. Determina una ecuación de la hipérbola cuyos vértices son $(7, 0)$ y $(-7, 0)$ y cuyas asíntotas son $y = \frac{4}{7}x$ y $y = -\frac{4}{7}x$.

65. Determina una ecuación de la hipérbola cuyo eje transversal está sobre el eje x y cuyas ecuaciones de las asíntotas son $y = \frac{5}{3}x$ y $y = -\frac{5}{3}x$. ¿Es ésta la única respuesta posible? Explica tu respuesta.

66. Determina una ecuación de la hipérbola cuyo eje transversal está sobre el eje y y cuyas ecuaciones de las asíntotas son $y = \frac{2}{3}x$ y $y = -\frac{2}{3}x$. ¿Es ésta la única respuesta posible? Explica tu respuesta.

67. Considera la gráfica de $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$, y determina el dominio y el rango de la relación.

68. Considera la gráfica de $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{9} = 1$, y determina el dominio y el rango de la relación.

69. Verifica tus respuestas del ejercicio 15 en tu calculadora graficadora.

70. Verifica tus respuestas del ejercicio 21 en tu calculadora graficadora.

71. ¿Las hipérbolas de la forma $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ son funciones? Explica tu respuesta.

72. ¿Las hipérbolas de la forma $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ son funciones? Explica tu respuesta.

73. Si se grafica la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a > b$, y después se intercambian los valores de a y b y se grafica la nueva ecuación, ¿cómo se comparan las dos gráficas? Explica tu respuesta.

74. Si se grafica la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a > b$, y después se cambian los signos de cada término en el lado izquierdo de la ecuación, y se grafica la nueva ecuación, ¿cómo se comparan las dos gráficas? Explica tu respuesta.

Ejercicios de conceptos y escritura

75. Analiza la gráfica de $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ para números reales a y b diferentes de cero. Incluye el eje transversal, los vértices y las asíntotas.

76. Analiza la gráfica de $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ para números reales a y b diferentes de cero. Incluye el eje transversal, los vértices y las asíntotas.

77. ¿Es $\dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{64} = 1$ una ecuación de una hipérbola? Explica tu respuesta.

78. ¿Es $-\dfrac{x^2}{81} - \dfrac{y^2}{64} = 1$ una ecuación de una hipérbola? Explica tu respuesta.

79. ¿Es $4x^2 \;\; 25y = 100$ una ecuación de una hipérbola? Explica tu respuesta.

80. ¿Es $36x^2 - 9y^2 = -324$ una ecuación de una hipérbola? Explica tu respuesta.

Ejercicios de repaso acumulados

[3.4] **81.** Escribe la ecuación, en forma pendiente-ordenada, de la recta que pasa por los puntos $(-6, 4)$ y $(-2, 2)$.

[3.6] **82.** Sea $f(x) = 3x^2 - x + 5$ y $g(x) = 6 - 4x^2$. Determina $(f + g)(x)$.

[4.4] **83.** Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$-4x + 9y = 7$$
$$5x + 6y = -3$$

[6.2] **84.** Suma $\dfrac{3x}{2x - 3} + \dfrac{2x + 4}{2x^2 + x - 6}$.

[8.3] **85.** Resuelve la fórmula $E = \dfrac{1}{2}mv^2$ para v.

[9.6] **86.** Resuelve la ecuación $\log(x + 4) = \log 5 - \log x$.

10.4 Sistemas de ecuaciones no lineales y sus aplicaciones

1. Resolver sistemas de ecuaciones no lineales por sustitución.
2. Resolver sistemas de ecuaciones no lineales usando la suma.
3. Resolver aplicaciones.

1 Resolver sistemas de ecuaciones no lineales por sustitución

En el capítulo 4, analizamos sistemas de ecuaciones lineales. Ahora analizaremos sistemas de ecuaciones no lineales.

Sistema de ecuaciones no lineales

Un **sistema de ecuaciones no lineales** es un sistema de ecuaciones en el que al menos una ecuación es no lineal (es decir, una cuya gráfica no es una recta).

La solución de un sistema de ecuaciones es el punto o puntos que satisfacen todas las ecuaciones en el sistema. Considera el sistema de ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$3x + 4y = 0$$

En la **Figura 10.35** se grafican ambas ecuaciones en el mismo par de ejes. Observa que parece que las gráficas se intersectan en los puntos $(-4, 3)$ y $(4, -3)$. La verificación muestra que estos puntos satisfacen ambas ecuaciones en el sistema y, por lo tanto, son soluciones del sistema.

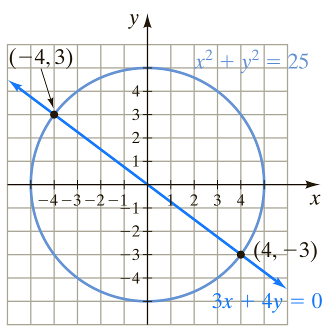


FIGURA 10.35

Verifica $(-4, 3)$

$x^2 + y^2 = 25$	$3x + 4y = 0$
$(-4)^2 + 3^2 \stackrel{?}{=} 25$	$3(-4) + 4(3) \stackrel{?}{=} 0$
$16 + 9 \stackrel{?}{=} 25$	$-12 + 12 \stackrel{?}{=} 0$
$25 = 25$ Verdadera	$0 = 0$ Verdadera

Verifica $(4, -3)$

$$4^2 + (-3)^2 = 25 \qquad 3(4) + 4(-3) = 0$$
$$16 + 9 \stackrel{?}{=} 25 \qquad 12 - 12 \stackrel{?}{=} 0$$
$$25 = 25 \quad \text{Verdadera} \qquad 0 = 0 \quad \text{Verdadera}$$

El procedimiento gráfico para resolver un sistema de ecuaciones puede ser impreciso porque tenemos que estimar el punto o puntos de intersección. Se puede obtener una respuesta exacta de manera algebraica.

Para resolver un sistema de ecuaciones de manera algebraica, frecuentemente resolvemos una o más de las ecuaciones para una de las variables y luego sustituimos.

EJEMPLO 1 Resuelve el sistema de ecuaciones anterior de manera algebraica usando el método de sustitución.

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$3x + 4y = 0$$

Solución Primero resolvemos la ecuación lineal $3x + 4y = 0$ ya sea para x o para y. La resolveremos para y.

$$3x + 4y = 0$$
$$4y = -3x$$
$$y = -\frac{3x}{4}$$

Ahora sustituimos y por $-\dfrac{3x}{4}$ en la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ y resolvemos para la variable restante x.

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$x^2 + \left(-\frac{3x}{4}\right)^2 = 25 \qquad \text{Sustituye } y \text{ por } -\frac{3x}{4}.$$
$$x^2 + \frac{9x^2}{16} = 25$$
$$16\left(x^2 + \frac{9x^2}{16}\right) = 16(25) \qquad \text{Multiplica ambos lados por 16.}$$
$$16x^2 + 9x^2 = 400$$
$$25x^2 = 400$$
$$x^2 = \frac{400}{25} = 16 \qquad \text{Se dividieron ambos lados entre 25.}$$
$$x = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \qquad \text{Propiedad de la raíz cuadrada.}$$

Ahora determinamos el valor correspondiente de y para cada valor de x, al sustituir cada valor de x (uno a la vez) en la ecuación que se resolvió para y.

$$x = 4 \qquad\qquad x = -4$$
$$y = -\frac{3x}{4} \qquad\qquad y = -\frac{3x}{4}$$
$$= -\frac{3(4)}{4} \qquad\qquad = -\frac{3(-4)}{4}$$
$$= -3 \qquad\qquad = 3$$

Las soluciones son $(4, -3)$ y $(-4, 3)$. Esto concuerda con la solución que se obtuvo gráficamente en la **Figura 10.35** en la página 658.

Resuelve ahora el ejercicio 9

Comprendiendo el álgebra

Recuerda que la gráfica de una ecuación es el conjunto de pares ordenados que son soluciones de la ecuación. Por lo tanto, las soluciones de un sistema de ecuaciones son los pares ordenados que corresponden a los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones del sistema.

Nuestro objetivo al usar sustitución es obtener una sola ecuación que contenga únicamente una variable.

Consejo útil

Consejo de estudio

En esta sección usaremos el método de sustitución y el método de la suma para resolver sistemas de ecuaciones no lineales. Si no recuerdas cómo usar ambos métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, ahora es un buen momento para repasar el capítulo 4.

En los ejemplos 1 y 2, resolveremos sistemas usando el método de sustitución, mientras que en los ejemplos 3 y 4, resolveremos sistemas usando el método de la suma.

Puedes escoger resolver un sistema por el método de sustitución si la suma de las dos ecuaciones no da como resultado una ecuación que se pueda resolver fácilmente, como es el caso de los sistemas en los ejemplos 1 y 2.

EJEMPLO 2 Resuelve el sistema de ecuaciones usando el método de sustitución.

$$y = x^2 - 3$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

Solución Como ambas ecuaciones contienen x^2, resolveremos una de las ecuaciones para x^2. Escogemos resolver $y = x^2 - 3$ para x^2.

$$y = x^2 - 3$$
$$y + 3 = x^2$$

Ahora sustituye x^2 por $y + 3$ en la ecuación $x^2 + y^2 = 9$.

$$x^2 + y^2 = 9$$
$$y + 3 + y^2 = 9 \quad \text{Sustituye } x^2 \text{ por } y + 3.$$
$$y^2 + y + 3 = 9 \quad \text{Reescribe.}$$
$$y^2 + y - 6 = 0$$
$$(y + 3)(y - 2) = 0 \quad \text{Factoriza.}$$
$$y + 3 = 0 \quad \text{o} \quad y - 2 = 0$$
$$y = -3 \qquad\qquad y = 2$$

Ahora determina los valores correspondientes de x sustituyendo los valores que obtuviste para y.

$y = -3$	$y = 2$
$y = x^2 - 3$	$y = x^2 - 3$
$-3 = x^2 - 3$	$2 = x^2 - 3$
$0 = x^2$	$5 = x^2$
$0 = x$	$\pm\sqrt{5} = x$

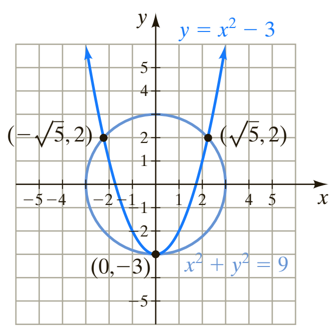


FIGURA 10.36

Este sistema tiene tres soluciones: $(0, -3)$, $(\sqrt{5}, 2)$ y $(-\sqrt{5}, 2)$.

Observa que la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 3$ es una parábola y la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ es una circunferencia. Las gráficas de ambas ecuaciones se muestran en la **Figura 10.36**.

Resuelve ahora el ejercicio 19

Consejo útil

A veces los estudiantes resuelven para una variable y creen que ya tienen la solución. Recuerda que la solución de un sistema de ecuaciones con dos variables, si existe, consiste en uno o más pares ordenados.

2 Resolver sistemas de ecuaciones no lineales usando la suma

Con frecuencia podemos resolver sistemas de ecuaciones de manera más sencilla usando el método de la suma. Al igual que con el método de sustitución, nuestro objetivo es obtener una sola ecuación que contenga una única variable.

EJEMPLO 3 Resuelve el sistema de ecuaciones usando el método de la suma.

$$x^2 + y^2 = 9$$
$$2x^2 - y^2 = -6$$

Solución Si sumamos las dos ecuaciones, obtendremos una ecuación con una sola variable.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 9 \\ 2x^2 - y^2 &= -6 \\ \hline 3x^2 \quad\quad &= 3 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Ahora resolvemos para la variable y sustituyendo $x = \pm 1$ en *cualquiera* de las ecuaciones originales.

$x = 1$	$x = -1$
$x^2 + y^2 = 9$	$x^2 + y^2 = 9$
$1^2 + y^2 = 9$	$(-1)^2 + y^2 = 9$
$1 + y^2 = 9$	$1 + y^2 = 9$
$y^2 = 8$	$y^2 = 8$
$y = \pm\sqrt{8}$	$y = \pm\sqrt{8}$
$= \pm 2\sqrt{2}$	$= \pm 2\sqrt{2}$

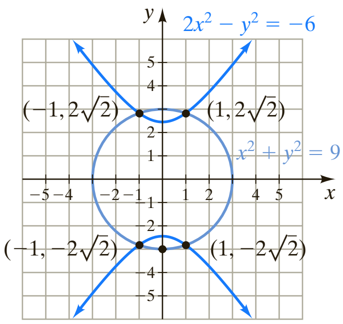


FIGURA 10.37

Este sistema de ecuaciones tiene cuatro soluciones:

$$(1, 2\sqrt{2}), (1, -2\sqrt{2}), (-1, 2\sqrt{2}), \text{y } (-1, -2\sqrt{2})$$

Las gráficas de las ecuaciones del sistema se muestran en la **Figura 10.37**. Observa los cuatro puntos de intersección de las dos gráficas.

Resuelve ahora el ejercicio 25

Es posible que un sistema de ecuaciones no tenga solución (por lo tanto, las gráficas no se intersectan).

EJEMPLO 4 Resuelve el sistema de ecuaciones usando el método de la suma.

$$x^2 + 4y^2 = 16 \quad \text{(ec. 1)}$$
$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{(ec. 2)}$$

Solución Multiplica (ec. 2) por -1 y suma la ecuación resultante a (ec. 1).

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 &= 16 \\ -x^2 - y^2 &= -1 \quad \text{(ec. 2) multiplicada por } -1. \\ \hline 3y^2 &= 15 \\ y^2 &= 5 \\ y &= \pm\sqrt{5} \end{aligned}$$

Ahora resuelve para x.

$$\begin{array}{rlrl} y &= \sqrt{5} & y &= -\sqrt{5} \\ x^2 + y^2 &= 1 & x^2 + y^2 &= 1 \\ x^2 + (\sqrt{5})^2 &= 1 & x^2 + (-\sqrt{5})^2 &= 1 \\ x^2 + 5 &= 1 & x^2 + 5 &= 1 \\ x^2 &= -4 & x^2 &= -4 \\ x &= \pm\sqrt{-4} & x &= \pm\sqrt{-4} \\ x &= \pm 2i & x &= \pm 2i \end{array}$$

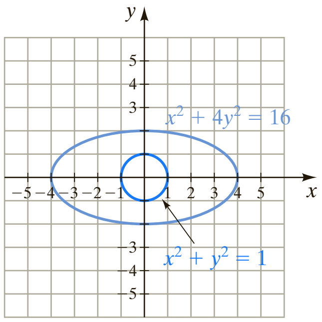


FIGURA 10.38

Como x es un número imaginario para ambos valores de y, este sistema de ecuaciones no tiene solución real. Cuando resolvemos sistemas de ecuaciones no lineales, nos interesa determinar todas las soluciones que sean números reales.

Las gráficas de las ecuaciones se muestran en la **Figura 10.38**. Observa que las dos gráficas no se intersectan, por lo tanto, no hay solución real. Esto concuerda con la respuesta que obtuvimos algebraicamente.

Resuelve ahora el ejercicio 37

3 Resolver aplicaciones

EJEMPLO 5 **Jardín de flores** Fred y Judy Vespucci quieren construir un jardín rectangular de flores detrás de su casa. Fred fue al vivero local y compró suficiente tierra para cubrir 150 metros cuadrados de terreno. Judy fue a la ferretería local y compró 50 metros de cerca para el perímetro del jardín. ¿Cómo deben construir el jardín para usar toda la tierra que él compró y toda la cerca que ella compró?

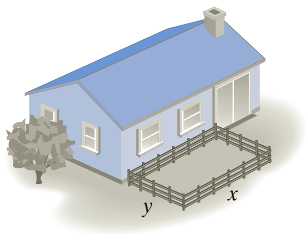


FIGURA 10.39

Solución **Entiende y traduce** Empezamos trazando un bosquejo (ver **Figura 10.39**).

Sea x = longitud del jardín.

Sea y = ancho del jardín.

Como $A = xy$ y Fred compró tierra para cubrir 150 metros cuadrados, tenemos que

$$xy = 150$$

Como $P = 2x + 2y$ y Judy compró 50 metros de cerca para el perímetro del jardín, tenemos que

$$2x + 2y = 50$$

El sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned} xy &= 150 \\ 2x + 2y &= 50 \end{aligned}$$

Realiza los cálculos Resolveremos el sistema por el método de sustitución. La ecuación $2x + 2y = 50$ es una ecuación lineal. Resolveremos esta ecuación para y.

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 50 \\ 2y &= 50 - 2x \\ y &= \frac{50 - 2x}{2} = \frac{50}{2} - \frac{2x}{2} = 25 - x \end{aligned}$$

Ahora sustituye y por $25 - x$ en la ecuación $xy = 150$.

$$\begin{aligned} xy &= 150 \\ x(25 - x) &= 150 \\ 25x - x^2 &= 150 \\ 0 &= x^2 - 25x + 150 \\ 0 &= (x - 10)(x - 15) \end{aligned}$$

$$x - 10 = 0 \quad \text{o} \quad x - 15 = 0$$
$$x = 10 \qquad\qquad x = 15$$

Responde Si $x = 10$, entonces $y = 25 - 10 = 15$. Y si $x = 15$, entonces $y = 25 - 15 = 10$. Por lo tanto, en cualquier caso, las dimensiones del jardín de flores son de 10 metros por 15 metros.

Resuelve ahora el ejercicio 41

EJEMPLO 6 **Bicicletas** La compañía Hike 'n' Bike produce y vende bicicletas. La ecuación de sus costos semanales es $C = 50x + 400$, $0 \le x \le 160$, y la ecuación de sus ingresos semanales es $R = 100x - 0.3x^2$, $0 \le x \le 160$, donde x es el número de bicicletas que se producen y se venden cada semana. Determina el número de bicicletas que se deben producir y vender para que Hike 'n' Bike llegue al punto de equilibrio.

Solución **Entiende y traduce** Una compañía llega a su punto de equilibrio cuando sus costos son iguales a sus ingresos. Cuando sus costos son mayores que sus ingresos, la compañía tiene pérdidas. Cuando sus ingresos son mayores que sus costos, la compañía tiene ganancias.

El sistema de ecuaciones es

$$C = 50x + 400$$
$$R = 100x - 0.3x^2$$

Para que Hike 'n' Bike llegue a su punto de equilibrio, sus costos deben ser iguales a sus ingresos. Entonces, escribimos

$$C = R$$
$$50x + 400 = 100x - 0.3x^2$$

Realiza los cálculos Al escribir esta ecuación cuadrática en la forma general, obtenemos

$$0.3x^2 - 50x + 400 = 0, \quad 0 \le x \le 160$$

Resolveremos esta ecuación usando la fórmula cuadrática.

$$a = 0.3, \quad b = -50, \quad c = 400$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-(-50) \pm \sqrt{(-50)^2 - 4(0.3)(400)}}{2(0.3)}$$
$$= \frac{50 \pm \sqrt{2020}}{0.6}$$

$$x = \frac{50 + \sqrt{2020}}{0.6} \approx 158.2 \quad \text{o} \quad x = \frac{50 - \sqrt{2020}}{0.6} \approx 8.4$$

Responde Los costos serán iguales a los ingresos y la compañía llegará al punto de equilibrio cuando se vendan aproximadamente 8 bicicletas o 158 bicicletas. La compañía tendrá una ganancia cuando se vendan entre 9 y 158 bicicletas. Cuando se vendan menos de 9 o más de 158 bicicletas, la compañía tendrá pérdidas (ver **Figura 10.40**).

Resuelve ahora el ejercicio 53

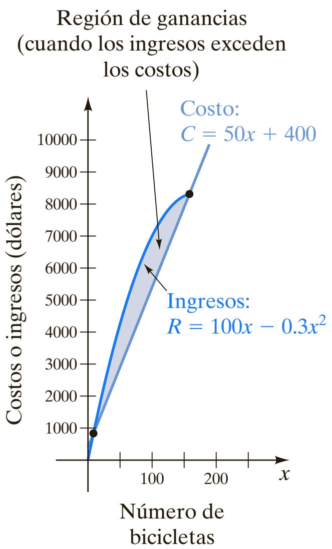


FIGURA 10.40

CONJUNTO DE EJERCICIOS 10.4

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

intersección sustitución 1 suma 2 3 no lineal no

1. Un sistema de ecuaciones en el que al menos una de las ecuaciones es no lineal es un sistema de ecuaciones ________.

2. La forma algebraica más sencilla de resolver el sistema de ecuaciones no lineales

$$x^2 + y^2 = 100$$
$$6x + 8y = 0$$

es usar el método de ________.

3. La forma algebraica más sencilla de resolver el sistema de ecuaciones no lineales

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$4x^2 - y^2 = 100$$

es usar el método de ________.

4. Si las gráficas de las ecuaciones en el sistema no lineal no se intersectan, el sistema ________ tiene soluciones reales.

5. Si las gráficas de las ecuaciones de un sistema de ecuaciones no lineal tienen tres puntos de intersección, el sistema tiene ________________ soluciones reales.

6. Gráficamente, la solución de un sistema de ecuaciones ocurre en el punto o los puntos de ________________ de las gráficas de las ecuaciones.

Practica tus habilidades

Determina todas las soluciones reales de cada sistema de ecuaciones usando el método de sustitución.

7. $x^2 + y^2 = 18$; $x + y = 0$

8. $x^2 + y^2 = 18$; $x - y = 0$

9. $x^2 + y^2 = 9$; $y = 3x + 9$

10. $x^2 + y^2 = 4$; $x - 2y = 4$

11. $y = x^2 - 5$; $3x + 2y = 10$

12. $x^2 = y^2 + 4$; $x + y = 4$

13. $x^2 + y = 6$; $y = x^2 + 4$

14. $y - x = 2$; $x^2 - y^2 = 4$

15. $x^2 + 2y^2 = 25$; $x^2 - 3y^2 = 25$

16. $x + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 = 6$

17. $x^2 + y^2 = 4$; $y = x^2 - 6$

18. $x^2 - 6y^2 = 36$; $x^2 + 2y^2 = 9$

19. $x^2 + y^2 = 9$; $y = x^2 - 3$

20. $x^2 + y^2 = 16$; $y = x^2 - 4$

21. $2x^2 - y^2 = -8$; $x - y = 6$

22. $x^2 + y^2 = 1$; $y - x = 3$

Determina todas las soluciones reales de cada sistema de ecuaciones usando el método de la suma.

23. $x^2 - y^2 = 4$; $2x^2 + y^2 = 8$

24. $x^2 + y^2 = 36$; $x^2 - y^2 = 36$

25. $x^2 + y^2 = 25$; $x^2 - 2y^2 = -2$

26. $x^2 + y^2 = 25$; $x^2 - 2y^2 = 7$

27. $3x^2 - y^2 = 4$; $x^2 + 4y^2 = 10$

28. $3x^2 + 2y^2 = 30$; $x^2 + y^2 = 13$

29. $4x^2 + 9y^2 = 36$; $2x^2 - 9y^2 = 18$

30. $x^2 + 4y^2 = 16$; $-9x^2 + y^2 = 4$

31. $2x^2 - y^2 = 7$; $x^2 + 2y^2 = 6$

32. $5x^2 - 2y^2 = -13$; $3x^2 + 4y^2 = 39$

33. $x^2 + y^2 = 25$; $2x^2 - 3y^2 = -30$

34. $x^2 - 2y^2 = 7$; $x^2 + y^2 = 34$

35. $x^2 + y^2 = 9$; $16x^2 - 4y^2 = 64$

36. $3x^2 + 2y^2 = 6$; $4x^2 + 5y^2 = 15$

37. $x^2 + y^2 = 4$; $16x^2 + 9y^2 = 144$

38. $x^2 + y^2 = 1$; $9x^2 - 4y^2 = 36$

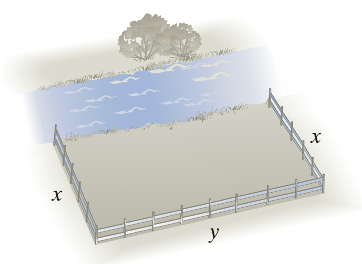
39. $x^2 + 4y^2 = 4$; $10y^2 - 9x^2 = 90$

40. $-4x^2 + y^2 = -15$; $8x^2 + 3y^2 = -5$

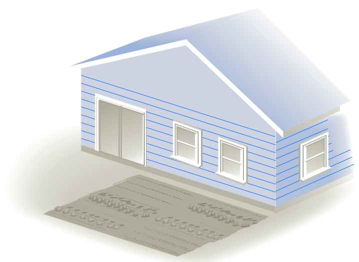
Resolución de problemas

41. Pista de baile Kris Hundley quiere construir una pista de baile en su gimnasio. La pista de baile debe tener un perímetro de 90 metros y un área de 500 metros cuadrados. Determina las dimensiones de la pista de baile.

42. Región rectangular Ellen Dupree cerca un área rectangular que está a la orilla de un río, como se ve en la imagen. Si 20 pies de cerca rodean un área de 48 pies cuadrados, determina las dimensiones del área cercada.



43. Jardín de vegetales James Cannon planea construir un jardín de vegetales en su patio. El jardín debe tener un perímetro de 54 pies y un área de 170 pies cuadrados. Determina las dimensiones del jardín de vegetales.



44. Región rectangular Se quiere cercar un área rectangular que está a la orilla de un río como en el ejercicio 42. Si 20 pies de cerca rodean un área de 50 pies cuadrados, determina las dimensiones del área cercada.

45. Divisas La moneda de un país incluye un billete que tiene un área de 112 centímetros cuadrados con una diagonal de $\sqrt{260}$ centímetros. Determina la longitud y el ancho del billete.

46. Pista de hielo Una pista de hielo rectangular tiene un área de 3000 pies cuadrados. Si la diagonal a través de la pista mide 85 pies, determina las dimensiones de la pista.

© Wikicommons

Plaza Rockefeller, ciudad de New York

47. Pedazo de madera Frank Samuelson, un carpintero, tiene un pedazo rectangular de triplay. La diagonal mide 34 pulgadas. Cuando corta la madera a lo largo de la diagonal, el perímetro de cada triángulo que se forma es de 80 pulgadas. Determina las dimensiones del pedazo original de madera.

48. Velero Una vela de un velero tiene la forma de un triángulo rectángulo con un perímetro de 36 metros y una hipotenusa de 15 metros. Determina la longitud de los catetos del triángulo.

49. Béisbol y fútbol Paul Martin lanza un balón de fútbol hacia arriba desde el suelo. Su altura sobre el suelo en cualquier tiempo, t, se da por la fórmula $d = -16t^2 + 64t$. Al mismo tiempo que lanza el balón, Shannon Ryan lanza una pelota de béisbol hacia arriba desde la parte superior de un edificio de 80 pies de alto. Su altura sobre el suelo en cualquier tiempo, t, se da por la fórmula $d = -16t^2 + 16t + 80$. Determina el tiempo en el que las dos pelotas estarán a la misma altura del suelo.

50. Pelota de tenis y bola de nieve Robert Snell lanza una pelota de tenis hacia abajo desde un helicóptero que vuela a una altura de 950 pies. La altura de la pelota sobre el suelo en cualquier tiempo, t, se determina por la fórmula $d = -16t^2 - 10t + 950$. En el instante que lanza la bola del helicóptero, Ramón Sánchez lanza una bola de nieve hacia arriba desde la parte superior de un edificio de 750 pies de alto. La altura sobre el suelo de la bola de nieve en cualquier tiempo, t, se determina por la fórmula $d = -16t^2 + 80t + 750$. ¿En qué momento se cruzarán la pelota de tenis y la bola de nieve?

51. Interés simple El interés simple se calcula usando la fórmula de interés simple, interés = capital × tasa × tiempo o $i = prt$. Si Seana Hayden invierte cierto capital a una tasa de interés específica por un año, el interés que obtiene es de \$7.50. Si incrementa el capital a \$25 y la tasa de interés disminuye en 1%, el interés permanece igual. Determina el capital y la tasa de interés.

52. Interés simple Si Claire Brooke invierte cierto capital a una tasa de interés específica por un año, el interés que obtiene es de \$72. Si incrementa el capital a \$120 y la tasa de interés disminuye en 2%, el interés se mantiene igual. Determina el capital y la tasa de interés. Usa $i = prt$.

Para las ecuaciones de costo e ingreso dadas, determina los puntos de equilibrio.

53. $C = 10x + 300$, $R = 30x - 0.1x^2$

54. $C = 0.6x^2 + 9$, $R = 12x - 0.2x^2$

55. $C = 12.6x + 150$, $R = 42.8x - 0.3x^2$

56. $C = 80x + 900$, $R = 120x - 0.2x^2$

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones usando tu calculadora graficadora. *Redondea tus respuestas a la centésima más cercana.*

57. $3x - 5y = 12$

$x^2 + y^2 = 10$

58. $y = 2x^2 - x + 2$

$4x^2 + y^2 = 36$

Ejercicios de conceptos y escritura

59. Desarrolla tu propio sistema de ecuaciones no lineales cuya solución sea el conjunto vacío. Explica cómo sabes que el sistema no tiene solución.

60. Si un sistema de ecuaciones consiste en una elipse y una hipérbola, ¿cuál es el máximo número de puntos de intersección? Ilustra lo anterior con un bosquejo.

61. ¿Puede un sistema de ecuaciones no lineales tener exactamente una solución real? Si es así, da un ejemplo. Explica tu respuesta.

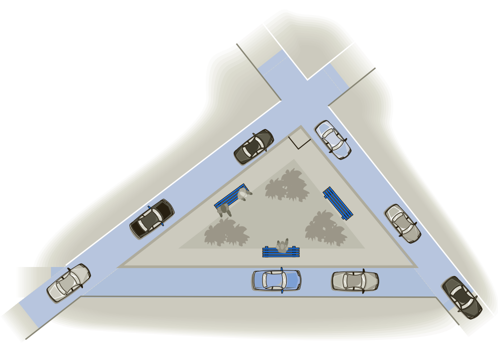
62. ¿Puede un sistema de ecuaciones no lineales tener exactamente dos soluciones reales? Si es así, da un ejemplo. Explica tu respuesta.

63. ¿Puede un sistema de ecuaciones no lineales tener exactamente tres soluciones reales? Si es así, da un ejemplo. Explica tu respuesta.

64. ¿Puede un sistema de ecuaciones no lineales no tener soluciones reales? Si es así, da un ejemplo. Explica tu respuesta.

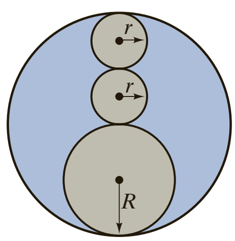
Problemas de desafío

65. Caminos que se intersectan La intersección de tres caminos forma un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura.



Si la hipotenusa mide 26 yardas y el área es de 120 yardas cuadradas, determina la longitud de los dos catetos del triángulo.

66. En la figura que se muestra, R representa el radio de la circunferencia anaranjada más grande y r representa el radio de las circunferencias anaranjadas más pequeñas. Si $R = 2r$ y si el área sombreada es de 122.5p, determina r y R.



Ejercicios de repaso acumulados

[1.4] **67.** Haz una lista del orden de operaciones que seguimos cuando evaluamos una expresión.

[5.6] **68.** Factoriza $(x + 1)^3 + 1$.

[6.6] **69.** x varía inversamente con el cuadrado de P. Si $x = 10$ cuando P es 6, determina x cuando $P = 20$.

[7.5] **70.** Simplifica $\dfrac{5}{\sqrt{x+2} - 3}$.

[9.7] **71.** Resuelve $A = A_0 e^{kt}$ para k.

Resumen del capítulo 10

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES | **EJEMPLOS**

Sección 10.1

Las cuatro **secciones cónicas** son la parábola, la circunferencia, la elipse y la hipérbola, que se obtienen cortando un cono.

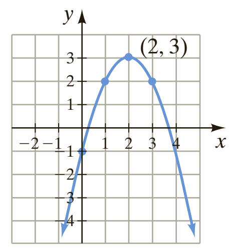
Parábola Circunferencia Elipse Hipérbola

Las cuatro diferentes formas para ecuaciones de parábolas se resumen a continuación.

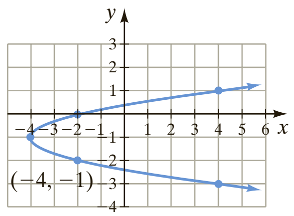
Parábola con vértice en (h, k)

1. $y = a(x - h)^2 + k$, $a > 0$ (se abre hacia arriba)
2. $y = a(x - h)^2 + k$, $a < 0$ (se abre hacia abajo)
3. $x = a(y - k)^2 + h$, $a > 0$ (se abre hacia la derecha)
4. $x = a(y - k)^2 + h$, $a < 0$ (se abre hacia la izquierda)

$y = -(x - 2)^2 + 3$



$x = 2(y + 1)^2 - 4$



Fórmula de la distancia

La distancia, d, entre cualesquiera dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se puede determinar por la fórmula de la distancia:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

La distancia entre $(-1, 3)$ y $(4, 15)$ es

$$d = \sqrt{[4 - (-1)]^2 + (15 - 3)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

Fórmula del punto medio

Dados dos puntos cualesquiera (x_1, y_1) y (x_2, y_2), el punto intermedio entre los puntos dados se puede determinar por la fórmula del punto medio:

$$\text{punto medio} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

El punto medio del segmento de recta que une $(7, 6)$ y $(-11, 10)$ es

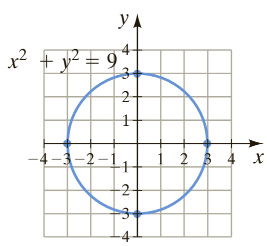
$$\text{punto medio} = \left(\frac{7 + (-11)}{2}, \frac{6 + 10}{2}\right) = \left(\frac{-4}{2}, \frac{16}{2}\right) = (-2, 8)$$

Una **circunferencia** es un conjunto de puntos en un plano que están a la misma distancia, llamada **radio**, de un punto fijo, llamado **centro**.

Circunferencia con centro en el origen y radio r

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Dibuja la gráfica de $x^2 + y^2 = 9$.
La gráfica es una circunferencia con centro en $(0, 0)$ y radio $r = 3$.



HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

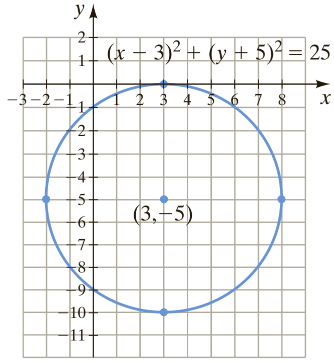
Sección 10.1 (cont.)

Circunferencia con centro en (*h*, *k*) y radio *r*

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Dibuja la gráfica de $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 25$.

La gráfica es una circunferencia con centro en $(3, -5)$ y radio $r = 5$.



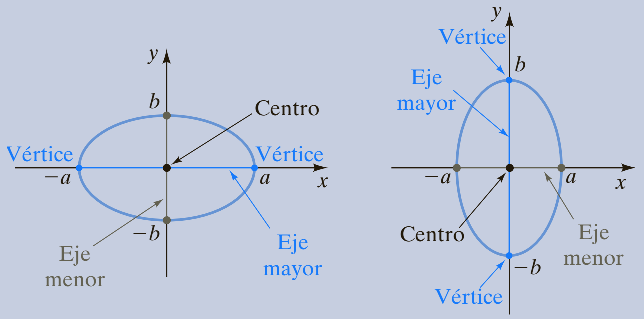
Sección 10.2

Una **elipse** es un conjunto de puntos en un plano, cuya suma de las distancias desde dos puntos fijos (llamados **focos**) es una constante.

Elipse con centro en el origen

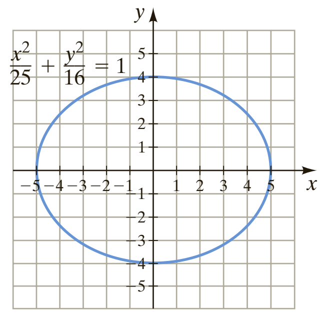
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ son las intersecciones con el eje x y $(0, b)$ y $(0, -b)$ son las intersecciones con el eje y.



Dibuja la gráfica de $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

La gráfica es una elipse. Como $a = 5$, las intersecciones con el eje x son $(-5, 0)$ y $(5, 0)$. Como $b = 4$, las intersecciones con el eje y son $(0, -4)$ y $(0, 4)$.

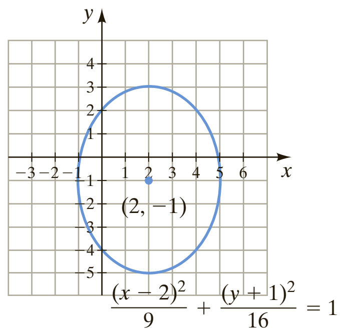


Elipse con centro en (*h*, *k*)

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Dibuja la gráfica de $\dfrac{(x - 2)^2}{9} + \dfrac{(y + 1)^2}{16} = 1$.

La gráfica es una elipse con centro en $(2, -1)$, donde $a = 3$ y $b = 4$.



HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES | **EJEMPLOS**

Sección 10.2 (cont.)

El área, A, de una elipse es $A = \pi ab$.

El área de la segunda elipse de la página 667 es

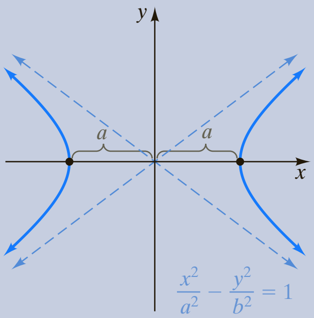
$$A = \pi ab = \pi \cdot 3 \cdot 4 = 12\pi \approx 37.70 \text{ unidades cuadradas.}$$

Sección 10.3

Una **hipérbola** es un conjunto de puntos en un plano, cuya diferencia de las distancias desde dos puntos fijos (llamados **focos**) es una constante.

Hipérbola con centro en el origen

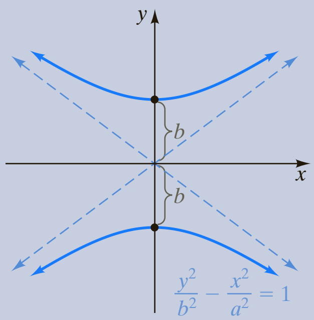
Hipérbola
con eje transversal
sobre el eje x



Asíntotas

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

Hipérbola
con eje transversal
sobre el eje y



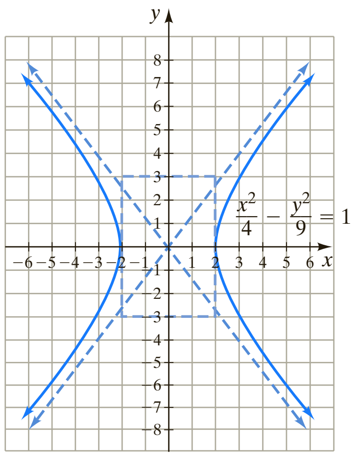
Asíntotas

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

Determina las ecuaciones de las asíntotas y dibuja la gráfica de $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

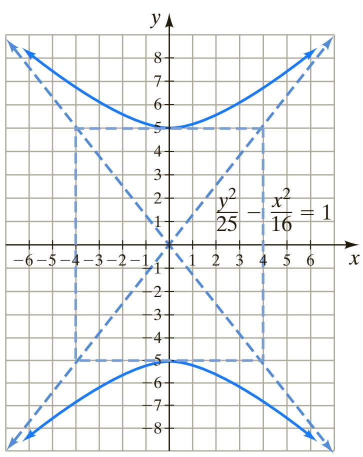
La gráfica es una hipérbola con $a = 2$ y $b - 3$.

Las ecuaciones de las asíntotas son $y = \frac{3}{2}x$ y $y = -\frac{3}{2}x$.



Determina las ecuaciones de las asíntotas y dibuja la gráfica de $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$.

La gráfica es una hipérbola con $a = 4$ y $b = 5$. Las ecuaciones de las asíntotas son $y = \frac{5}{4}x$ y $y = -\frac{5}{4}x$.



HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 10.4	
Un **sistema de ecuaciones no lineales** es un sistema de ecuaciones donde al menos una ecuación es no lineal. La solución de un sistema de ecuaciones no lineales es el punto o puntos que satisfacen todas las ecuaciones en el sistema.	Resuelve el sistema de ecuaciones. $$x^2 + y^2 = 14$$ $$5x^2 - y^2 = -2$$ Resolveremos este sistema usando el método de la suma. $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 14 \\ \underline{5x^2 - y^2} &\underline{= -2} \\ 6x^2 \qquad &= 12 \\ x^2 &= 2 \\ x &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$ Para obtener el valor(es) para y, usa la ecuación $x^2 + y^2 = 14$. $$x = \sqrt{2}$$ $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 14 \\ (\sqrt{2})^2 + y^2 &= 14 \\ 2 + y^2 &= 14 \\ y^2 &= 12 \\ y &= \pm\sqrt{12} \\ &= \pm 2\sqrt{3} \end{aligned}$$ $$x = -\sqrt{2}$$ $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 14 \\ (-\sqrt{2})^2 + y^2 &= 14 \\ 2 + y^2 &= 14 \\ y^2 &= 12 \\ y &= \pm\sqrt{12} \\ &= \pm 2\sqrt{3} \end{aligned}$$ El sistema tiene cuatro soluciones: $(\sqrt{2}, 2\sqrt{3}), (\sqrt{2}, -2\sqrt{3}), (-\sqrt{2}, 2\sqrt{3}), (-\sqrt{2}, -2\sqrt{3})$

Ejercicios de repaso del capítulo 10

[10.1] *Determina la longitud y el punto medio del segmento de recta entre cada par de puntos.*

1. $(0, 0), (5, -12)$ **2.** $(-4, 1), (-1, 5)$ **3.** $(-9, -5), (-1, 10)$ **4.** $(-4, 3), (-2, 5)$

Grafica cada ecuación.

5. $y = (x - 2)^2 + 1$ **6.** $y = (x + 3)^2 - 2$ **7.** $x = (y - 1)^2 + 4$ **8.** $x = -2(y - 4)^2 + 4$

En los ejercicios 9-12 ***a)*** *escribe la ecuación en la forma $y = a(x - h)^2 + k$ o $x = a(y - k)^2 + h$.* **b)** *Grafica la ecuación.*

9. $y = x^2 - 8x + 22$ **10.** $x = -y^2 - 5y - 4$ **11.** $x = y^2 + 5y + 4$ **12.** $y = 2x^2 - 8x - 24$

En los ejercicios 13-18, **a)** *escribe la ecuación de cada circunferencia en la forma general.* **b)** *Dibuja la gráfica.*

13. Centro $(0, 0)$, radio 4 **14.** Centro $(-3, 4)$, radio 1 **15.** $x^2 + y^2 - 4y = 0$

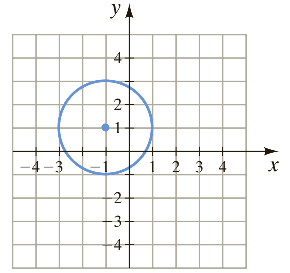
16. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$ **17.** $x^2 - 8x + y^2 - 10y + 40 = 0$ **18.** $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 17 = 0$

Grafica cada ecuación.

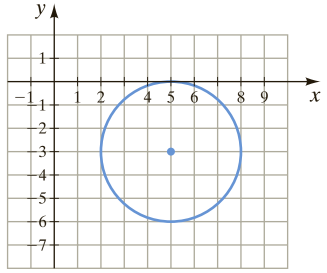
19. $y = \sqrt{9 - x^2}$ **20.** $y = -\sqrt{36 - x^2}$

Determina la ecuación de cada circunferencia.

21.



22.



[10.2] *Grafica cada ecuación.*

23. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ **24.** $\dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{49} = 1$ **25.** $9x^2 + 16y^2 = 144$ **26.** $25x^2 + 4y^2 = 100$

27. $\dfrac{(x-3)^2}{16} + \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$ **28.** $\dfrac{(x-4)^2}{9} + \dfrac{(y+3)^2}{25} = 1$ **29.** $16(x-2)^2 + 4(y+3)^2 = 16$

30. Determina el área de la elipse del ejercicio 23.

[10.3] *En los ejercicios 31-34,* **a)** *determina la ecuación de las asíntotas para cada ecuación, y* **b)** *traza la gráfica.*

31. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{25} = 1$ **32.** $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{9} = 1$ **33.** $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$ **34.** $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

En los ejercicios 35-38, **a)** *escribe cada ecuación en la forma general,* **b)** *determina las ecuaciones de las asíntotas, y* **c)** *traza la gráfica.*

35. $x^2 - 9y^2 = 9$ **36.** $64y^2 - 25x^2 = 1600$

37. $9y^2 - 25x^2 = 225$ **38.** $49y^2 - 9x^2 = 441$

[10.1–10.3] *Identifica la gráfica de cada ecuación como una circunferencia, una elipse, una parábola o una hipérbola.*

39. $\dfrac{x^2}{49} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ **40.** $4x^2 + 8y^2 = 32$ **41.** $6x^2 + 6y^2 = 96$ **42.** $4x^2 - 36y^2 = 36$

43. $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ **44.** $y = (x-3)^2 + 4$ **45.** $12x^2 + 9y^2 = 108$ **46.** $x = -y^2 + 8y - 9$

[10.4] *Determina todas las soluciones reales de cada sistema de ecuaciones usando el método de sustitución.*

47. $2x^2 + y^2 = 16$
$x^2 - y^2 = -4$

48. $x^2 - y^2 = 4$
$x + y = 4$

49. $x^2 + y^2 = 9$
$x + 2y = 3$

50. $x^2 + 2y^2 = 5$
$x^2 - 4y^2 = 36$

Determina todas las soluciones reales de cada sistema de ecuaciones usando el método de la suma.

51. $x^2 + y^2 = 36$
$x^2 - y^2 = 36$

52. $x^2 + y^2 = 16$
$2x^2 - 5y^2 = 25$

53. $x^2 + y^2 = 81$
$25x^2 + 4y^2 = 100$

54. $3x^2 + 4y^2 = 35$
$2x^2 + 5y^2 = 42$

55. Mesa de billar Jerry y Denise tienen una mesa de billar en su casa. La mesa tiene un área de 45 pies cuadrados y un perímetro de 28 pies. Determina las dimensiones de la mesa.

© Allen R. Angel

56. Botellas de pegamento La compañía Dip and Dap tiene una ecuación de costos de $C = 20.3x + 120$ y una ecuación de ingresos de $R = 50.2x - 0.2x^2$, donde x es el número de botellas de pegamento vendidas. Determina el número de botellas de pegamento que debe vender la compañía para alcanzar el punto de equilibrio.

57. Cuenta de ahorros Si Kien Kempter invierte cierto capital a una tasa de interés específica por un año, el interés es de \$120. Si incrementa el capital a \$2,000 y se disminuye la tasa de interés en 1%, el interés se mantiene igual. Determina el capital y la tasa de interés. Usa $i = prt$.

Prueba de práctica del capítulo 10

Los videos de la prueba de práctica del capítulo proporcionan soluciones totalmente resueltas para cualquiera de los ejercicios que quieras repasar. Los videos de la prueba de práctica del capítulo están disponibles vía MyMathLab, o en YouTube *(busca "Angel Intermediate Algebra" y da clic en "Channels").*

1. ¿Por qué se les llama secciones cónicas a las parábolas, las circunferencias, las elipses y las hipérbolas?

2. Determina la longitud del segmento de recta cuyos puntos extremos son $(-1,8)$ y $(6,7)$.

3. Determina el punto medio del segmento de recta cuyos puntos extremos son $(-9,4)$ y $(7,-1)$.

4. Determina el vértice de la gráfica de $y = -2(x + 3)^2 + 1$ y después grafica la ecuación.

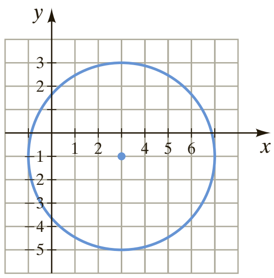
5. Grafica $x = y^2 - 2y + 4$.

6. Escribe la ecuación $x = -y^2 - 4y - 5$ en la forma $x = a(y - k)^2 + h$ y después traza la gráfica.

7. Escribe la ecuación de una circunferencia con centro en $(2,4)$ y radio 3 y después traza la gráfica de la circunferencia.

8. Determina el área de la circunferencia cuya ecuación es $(x + 2)^2 + (y - 8)^2 = 9$.

9. Escribe la ecuación de la circunferencia que se muestra.

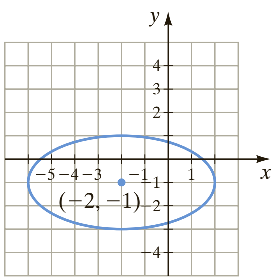


10. Grafica $y = -\sqrt{16 - x^2}$.

11. Escribe la ecuación $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$ en la forma general y después traza la gráfica.

12. Grafica $4x^2 + 25y^2 = 100$.

13. Lasiguientegráfica,¿eslagráficade $\frac{(x + 2)^2}{4} + \frac{(y + 1)^2}{16} = 1$? Explica tu respuesta.



14. Grafica $4(x - 4)^2 + 36(y + 2)^2 = 36$.

15. Determina el centro de la elipse dado por la ecuación $3(x - 8)^2 + 6(y + 7)^2 = 18$.

16. Explica cómo determinar si el eje transversal de una hipérbola está sobre el eje x o sobre el eje y.

17. ¿Cuáles son las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica de $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{49} = 1$?

18. Grafica $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{1} = 1$.

19. Grafica $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

En los ejercicios 20 y 21, determina si la gráfica de la ecuación es una parábola, una circunferencia, una elipse o una hipérbola.

20. $4x^2 - 15y^2 = 30$

21. $25x^2 + 4y^2 = 100$

Resuelve cada sistema de ecuaciones

22. $x^2 + y^2 = 7$
$2x^2 - 3y^2 = -1$

23. $x + y = 8$
$x^2 + y^2 = 4$

24. Jardín de vegetales Tom Wilson tiene un jardín de vegetales rectangular en su granja, el cual tiene un área de 1,500 metros cuadrados. Determina las dimensiones del jardín si el perímetro es de 160 metros.

25. Plataforma de carga de un camión Gina Chang tiene un camión. La plataforma de carga rectangular del camión tiene un área de 60 pies cuadrados, y la diagonal a través de la plataforma mide 13 pies. Determina las dimensiones de la plataforma del camión.

Prueba de repaso acumulada

Resuelve la siguiente prueba y verifica tus respuestas con las que se dan al final del libro. Repasa cualquier respuesta que hayas respondido incorrectamente. Después de la respuesta se indica la sección donde se cubrió el tema.

1. Simplifica $(9x^2y^5)(-3xy^4)$.

2. Resuelve $4x - 2(3x - 7) = 2x - 5$.

3. Determina el conjunto solución: $2(x - 5) + 2x = 4x - 7$.

4. Determina el conjunto solución: $|3x + 1| > 4$.

5. Grafica $y = -2x + 2$.

6. Si $f(x) = x^2 + 3x + 9$, determina $f(10)$.

7. Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 2$$
$$\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}y = 6$$

8. Factoriza $x^4 - x^2 - 42$.

9. Un letrero triangular tiene una altura de 6 pies menos que su base. Si el área del letrero es de 56 pies cuadrados, determina la longitud de la base y la altura del letrero.

10. Multiplica $\dfrac{3x^2 - x - 4}{4x^2 + 7x + 3} \cdot \dfrac{2x^2 - 5x - 12}{6x^2 + x - 12}$.

11. Resta $\dfrac{x}{x + 3} - \dfrac{x + 5}{2x^2 - 2x - 24}$.

12. Resuelve $\dfrac{3}{x + 3} + \dfrac{5}{x + 4} = \dfrac{12x + 19}{x^2 + 7x + 12}$.

13. Simplifica $\left(\dfrac{18x^{1/2}y^3}{2x^{3/2}}\right)^{1/2}$.

14. Simplifica $\dfrac{6\sqrt{x}}{\sqrt{x} - y}$.

15. Resuelve $3\sqrt[3]{2x + 2} = \sqrt[3]{80x - 24}$.

16. Resuelve $3x^2 - 4x + 5 = 0$ usando la fórmula cuadrática.

17. Resuelve $\log(3x - 4) + \log 4 = \log(x + 6)$.

18. Resuelve $35 = 70e^{-0.3t}$.

19. Grafica $9x^2 + 4y^2 = 36$.

20. Grafica $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{16} = 1$.

11 Sucesiones, series y el teorema del binomio

Objetivos de este capítulo

En este capítulo analizaremos las sucesiones y las series. Una sucesión es una lista de números en un orden específico y una serie es la suma de los números en una sucesión. En este libro analizaremos dos tipos de sucesiones y series: aritmética y geométrica. Las sucesiones y las series pueden utilizarse para resolver muchos problemas de la vida real, como se muestra en este capítulo.

En este capítulo, introduciremos el símbolo sumatoria, Σ, el cual se utiliza con frecuencia en estadística y otros cursos de matemáticas. También analizaremos el teorema del binomio para expandir una expresión de la forma $(a + b)^n$.

© Jonathan Larsen/Shutterstock

Si una pelota rebota 9 pies cuando cae desde 10 pies, ésta ha recuperado el 90% de su altura inicial. Teóricamente, cada bote tendrá un rebote y la pelota nunca dejará de rebotar. En el ejercicio 78 de la página 687, determinamos la altura de una pelota de ping-pong después de que cae de una mesa.

11.1 Sucesiones y series

1 Determinar los términos de una sucesión.
2 Escribir una serie.
3 Determinar sumas parciales.
4 Utilizar la notación de suma, Σ.

1 Determinar los términos de una sucesión

Muchas veces vemos patrones en los números. Por ejemplo, supón que te ofrecen un trabajo con un salario inicial de $30,000. Te dan dos opciones para tu aumento salarial anual. Una opción es un aumento de $2000 cada año. Con esta opción recibirías el salario que se muestra a continuación.

Año	1	2	3	4	...
	↓	↓	↓	↓	↓
Salario	$30,000	$32,000	$34,000	$36,000	...

Cada año, el salario es $2000 mayor que el año anterior. Los tres puntos a la derecha de la lista de números indican que la lista continúa de la misma manera.

La segunda opción es un aumento de 5% cada año. El salario que recibirías con esta opción se muestra a continuación.

Año	1	2	3	4	...
	↓	↓	↓	↓	↓
Salario	$30,000	$31,500	$33,075	$34,728.75	...

Con esta opción, el salario en cualquier año después del primer año es 5% mayor que el salario del año anterior.

Las dos listas de números que ilustran los salarios son ejemplos de sucesiones. Una **sucesión** de números es una lista de números con un orden específico. Considera la lista de números dados a continuación, la cual es una sucesión.

$$5, 10, 15, 20, 25, 30, \ldots$$

Cada número se denomina un **término** de la sucesión. El primer término es 5. Indicamos esto escribiendo $a_1 = 5$. Como el segundo término es 10, indicamos $a_2 = 10$, y así sucesivamente.

$$\begin{array}{cccccc} 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30\ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6\ldots \end{array}$$

Los tres puntos, denominados **elipsis**, indican que la sucesión continúa indefinidamente y es una **sucesión infinita**.

Sucesión infinita

Una **sucesión infinita** es una función cuyo dominio es el conjunto de números naturales.

Comprendiendo el álgebra

Una sucesión *infinita* continúa por siempre y nunca termina

Considera la sucesión 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ...

$$\begin{array}{llllllllllll} \text{Dominio:} & \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \ldots, & n, & \ldots\} & \text{Números naturales} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{Rango:} & \{5, & 10, & 15, & 20, & 25, & 30, & 35, & \ldots, & 5n, & \ldots\} & \text{Valor de la función} \end{array}$$

Observa que los términos de la sucesión 5, 10, 15, 20, … se determinan multiplicando cada número natural por 5. Para cualquier número natural n, el término correspondiente de la sucesión es $5 \cdot n$ o $5n$. El **término general de una sucesión**, a_n, que define la sucesión, es $a_n = 5n$.

$$a_n = f(n) = 5n$$

Para determinar el término decimosegundo de la sucesión, sustituimos n por 12 en el término general de la sucesión: $a_{12} = 5 \cdot 12 = 60$. Así, el decimosegundo término de la sucesión es 60. Observa que los términos de la sucesión son los valores de la función, o los números en el rango de la función. La forma general de una función es:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

n	$a_n = 2^n$
1	$a_1 = 2^1 = 2$
2	$a_2 = 2^2 = 4$
3	$a_3 = 2^3 = 8$
4	$a_4 = 2^4 = 16$
5	$a_5 = 2^5 = 32$
6	$a_6 = 2^6 = 64$
⋮	⋮ ⋮ ⋮

Para la sucesión infinita 2, 4, 8, 16, 32, ..., 2^n,... podemos escribir

$$a_n = f(n) = 2^n$$

La tabla de la izquierda muestra los primeros seis términos de esta sucesión.

Sucesión finita

Una **sucesión finita** es una función cuyo dominio incluye solamente los primeros n números naturales. Una sucesión finita tiene solamente un número finito de términos.

Ejemplos de sucesiones finitas

5, 10, 15, 20	dominio es {1, 2, 3, 4}
2, 4, 8, 16, 32	dominio es {1, 2, 3, 4, 5}

EJEMPLO 1 Escribe la sucesión finita definida por $a_n = 2n + 3$, para $n = 1, 2, 3, 4$.

Solución

$$a_n = 2n + 3$$
$$a_1 = 2(1) + 3 = 5$$
$$a_2 = 2(2) + 3 = 7$$
$$a_3 = 2(3) + 3 = 9$$
$$a_4 = 2(4) + 3 = 11$$

Por lo tanto, la sucesión es 5, 7, 9, 11.

Resuelve ahora el ejercicio 13

Comprendiendo el álgebra

Una sucesión es *creciente* cuando cada término es mayor que el término anterior.

Como cada término de la sucesión del ejemplo 1 es mayor que el término anterior, ésta se denomina **sucesión creciente**.

EJEMPLO 2 Dada $a_n = \dfrac{2n + 3}{n^2}$,

a) determina el 1er. término de la sucesión **b)** determina el 3er. término de la sucesión

c) determina el 5o. término de la sucesión **d)** determina el 10o. término de la sucesión

Solución

a) Cuando $n = 1$, $a_1 = \dfrac{2(1) + 3}{1^2} = \dfrac{5}{1} = 5$.

b) Cuando $n = 3$, $a_3 = \dfrac{2(3) + 3}{3^2} = \dfrac{9}{9} = 1$.

c) Cuando $n = 5$, $a_5 = \dfrac{2(5) + 3}{5^2} = \dfrac{13}{25} = 0.52$.

d) Cuando $n = 10$, $a_{10} = \dfrac{2(10) + 3}{10^2} = \dfrac{23}{100} = 0.23$.

Resuelve ahora el ejercicio 29

Observa en el ejemplo 2 que, como no hay restricción alguna sobre n, a_n es el término general de una sucesión infinita.

En el ejemplo 2, los primeros cuatro términos de la sucesión son $5, \dfrac{7}{4} = 1.75, 1, \dfrac{11}{16} = 0.6875$.

Como cada término de la sucesión generada por $a_n = \dfrac{2n + 3}{n^2}$ será menor que el término que le precede, la sucesión se denomina **sucesión decreciente**.

Comprendiendo el álgebra

Una sucesión es *decreciente* cuando cada término es menor que el término que le precede.

EJEMPLO 3 Determina los primeros cuatro términos de la sucesión cuyo término general es $a_n = (-1)^n(n)$.

Solución

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n(n) \\ a_1 &= (-1)^1(1) = -1 \\ a_2 &= (-1)^2(2) = 2 \\ a_3 &= (-1)^3(3) = -3 \\ a_4 &= (-1)^4(4) = 4 \end{aligned}$$

Si escribimos la sucesión, obtenemos $-1, 2, -3, 4, \ldots, (-1)^n(n), \ldots$ Observa que cada término en el que se alterna el signo, podemos llamarlo **sucesión alternante**.

Resuelve ahora el ejercicio 21

Comprendiendo el álgebra

Alternar significa cambiar los lugares que ocupan respectivamente los signos + y −. En una *sucesión alternante*, los signos en los términos están alternados.

2 Escribir una serie

Series

Una **serie** es la suma expresada de los términos de una sucesión.

Una serie puede ser finita o infinita, dependiendo de si se basa en una sucesión finita o infinita.

Comprendiendo el álgebra

Una *serie* se obtiene mediante la suma de los términos de su *sucesión* correspondiente.

Ejemplos

Sucesión finita

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$$

Serie finita

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

Sucesión infinita

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n, \ldots$$

Serie infinita

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n + \cdots$$

EJEMPLO 4 Escribe los primeros ocho términos de la sucesión dada mediante cada término general, después escribe las series que representan la suma de esa sucesión.

a) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ **b)** $a_n = (-2)^n$

Solución

a) Comenzamos con $n = 1$; así, los primeros ocho términos de la sucesión cuyo término general es $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ son

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \left(\frac{1}{2}\right)^5, \left(\frac{1}{2}\right)^6, \left(\frac{1}{2}\right)^7, \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

o

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}$$

La serie que representa la suma de la sucesión es

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} = \frac{255}{256}$$

b) De nuevo comenzamos con $n = 1$; así, los primeros ocho términos de la sucesión cuyo término general es $a_n = (-2)^n$ son

$$(-2)^1, (-2)^2, (-2)^3, (-2)^4, (-2)^5, (-2)^6, (-2)^7, (-2)^8$$

o

$$-2, 4, -8, 16, -32, 64, -128, 256$$

La serie que representa la suma de esta sucesión es

$$-2 + 4 + (-8) + 16 + (-32) + 64 + (-128) + 256 = 170$$

Resuelve ahora el ejercicio 45

3 Determinar sumas parciales

Suma parcial

Para una sucesión infinita con términos $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$, una **suma parcial** es la suma de un número finito de términos consecutivos de la sucesión, comenzando con el primer término.

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 && \text{Primera suma parcial}\\
s_2 &= a_1 + a_2 && \text{Segunda suma parcial}\\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 && \text{Tercera suma parcial}\\
&\vdots\\
s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n && \textit{Enésima}\text{ suma parcial}
\end{aligned}$$

La suma de todos los términos de la sucesión infinita se denomina **serie infinita** y está dada por:

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

EJEMPLO 5 Dada una sucesión infinita definida por $a_n = \dfrac{3 + n^2}{n}$, determina las sumas parciales que se indican.

a) s_1 **b)** s_4

Solución

a) $s_1 = a_1 = \dfrac{3 + 1^2}{1} = \dfrac{3 + 1}{1} = 4$

b)
$$\begin{aligned}
s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4\\
&= \frac{3 + 1^2}{1} + \frac{3 + 2^2}{2} + \frac{3 + 3^2}{3} + \frac{3 + 4^2}{4}\\
&= 4 + \frac{7}{2} + \frac{12}{3} + \frac{19}{4}\\
&= \frac{48}{12} + \frac{42}{12} + \frac{48}{12} + \frac{57}{12}\\
&= \frac{195}{12} \quad \text{o} \quad 16\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 35

4 Utilizar la notación de suma, Σ

Cuando se conoce el término general de una sucesión, puede usarse la letra griega **sigma**, Σ, para escribir una serie. La suma de los primeros n términos de la sucesión cuyo enésimo término es a_n se representa por

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

donde i se denomina **índice de la suma**, o simplemente **índice**, n es el **límite superior de la suma**, y 1 es el **límite inferior de la suma**. En este ejemplo, usamos la i para el índice, sin embargo, puede usarse cualquier letra para el índice.

Considera la sucesión 7, 9, 11, 13, ..., $2n + 5$, ... La suma de los primeros cinco términos puede representarse por medio de la **notación de suma**.

$$\sum_{i=1}^{5} (2i + 5)$$

Esta notación se lee "la suma desde i igual a 1 hasta 5 de $2i + 5$".

Para evaluar la serie representada por $\sum_{i=1}^{5} (2i + 5)$,

1. Primero sustituye 1 en vez de i en $2i + 5$ para obtener el valor 7.
2. Luego, sustituye 2 en vez de i en $2i + 5$ para obtener el valor 9.
3. Sigue este procedimiento para $i = 3$, $i = 4$, $i = 5$.
4. Finalmente, suma estos valores para evaluar la serie. Los resultados se resumen del modo siguiente:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{5} (2i + 5) &= (2\cdot \underset{i=1}{\boxed{1}} + 5) + (2\cdot \underset{i=2}{\boxed{2}} + 5) + (2\cdot \underset{i=3}{\boxed{3}} + 5) + (2\cdot \underset{i=4}{\boxed{4}} + 5) + (2\cdot \underset{i=5}{\boxed{5}} + 5)\\
&= 7 + 9 + 11 + 13 + 15\\
&= 55
\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Desarrolla la serie $\sum_{i=1}^{6} (i^2 + 1)$ y evalúala.

Solución

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{6} (i^2 + 1) &= (\boxed{1}^2 + 1) + (\boxed{2}^2 + 1) + (\boxed{3}^2 + 1) + (\boxed{4}^2 + 1) + (\boxed{5}^2 + 1) + (\boxed{6}^2 + 1)\\
&= 2 + 5 + 10 + 17 + 26 + 37\\
&= 97
\end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 57

EJEMPLO 7 Considera el término general de una sucesión $a_n = 2n^2 - 9$. Representa la tercera suma parcial, s_3, en notación de suma.

Solución La tercera suma parcial será la suma de los primeros tres términos, $a_1 + a_2 + a_3$.

Podemos representar la tercera suma parcial como $\sum_{i=1}^{3} (2i^2 - 9)$.

Resuelve ahora el ejercicio 65

EJEMPLO 8 Para el siguiente conjunto de valores $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$, $x_4 = 6$ y $x_5 = 7$, ¿se cumple que $\sum_{i=1}^{5} (x_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2$?

Solución

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{5} (x_i)^2 &= (x_{\boxed{1}})^2 + (x_{\boxed{2}})^2 + (x_{\boxed{3}})^2 + (x_{\boxed{4}})^2 + (x_{\boxed{5}})^2\\
&= 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2\\
&= 9 + 16 + 25 + 36 + 49 = 135\\
\left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2 &= (x_{\boxed{1}} + x_{\boxed{2}} + x_{\boxed{3}} + x_{\boxed{4}} + x_{\boxed{5}})^2\\
&= (3 + 4 + 5 + 6 + 7)^2 = (25)^2 = 625
\end{aligned}$$

Como $135 \neq 625$, $\sum_{i=1}^{5} (x_i)^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2$.

Resuelve ahora el ejercicio 71

Cuando un símbolo de suma se escribe sin límites superior e inferior, esto significa que debemos sumar todos los datos.

EJEMPLO 9 Una fórmula utilizada para determinar la media aritmética, $\bar{x}$ (se lee x barra), de un conjunto de datos es $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x}{n}$, donde n es el número de datos.

Las calificaciones de los cinco exámenes de Joan Sally son 70, 95, 83, 74 y 92. Determina la media aritmética de sus calificaciones.

Solución $$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{70 + 95 + 83 + 74 + 92}{5} = \frac{414}{5} = 82.8$$

Resuelve ahora el ejercicio 75

CONJUNTO DE EJERCICIOS 11.1

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

finita	serie	mayor	superior	sucesión	menor
constante	infinita	alternante	índice	inferior	

1. Una lista de números arreglada en un orden específico es una ________.

2. Una sucesión ________ es una función cuyo dominio es el conjunto de números naturales.

3. Una sucesión ________ es una función cuyo dominio incluye solamente los primeros n números naturales.

4. En una sucesión creciente, cada término es ________ que el término que le precede.

5. En una sucesión decreciente, cada término es ________ que el término que le precede.

6. Una sucesión en la que cada término tiene el signo opuesto del término que le precede se denomina una sucesión ________.

7. La suma de los términos en una sucesión es una ________.

8. Considera la suma. $\sum_{k=1}^{50} (k^2 + 3)$. 1 es el límite ________.

9. Considera la suma. $\sum_{k=1}^{50} (k^2 + 3)$. 50 es el límite ________.

10. Considera la suma. $\sum_{k=1}^{50} (k^2 + 3)$. k es el límite ________.

Practica tus habilidades

Escribe los primeros cinco términos de la sucesión cuyo término enésimo se muestra.

11. $a_n = 6n$ **12.** $a_n = -7n$ **13.** $a_n = 4n - 1$

14. $a_n = 2n + 5$ **15.** $a_n = \dfrac{9}{n}$ **16.** $a_n = \dfrac{8}{n^2}$

17. $a_n = \dfrac{n + 2}{n + 1}$ **18.** $a_n = \dfrac{n - 3}{n + 6}$ **19.** $a_n = (-1)^n$

20. $a_n = (-1)^{2n}$ **21.** $a_n = (-2)^{n+1}$ **22.** $a_n = 3^{n-1}$

Determina el término indicado de la sucesión, cuyo término enésimo se muestra.

23. $a_n = 2n + 7$, duodécimo término **24.** $a_n = 3n + 2$, sexto término **25.** $a_n = \dfrac{n}{4} + 8$, decimosexto término

26. $a_n = \dfrac{n}{2} - 13$, decimocuarto término **27.** $a_n = (-1)^n$, octavo término **28.** $a_n = (-2)^n$, séptimo término

29. $a_n = n(n + 2)$, undécimo término **30.** $a_n = (n - 1)(n + 4)$, quinto término **31.** $a_n = \dfrac{n^2}{2n + 7}$, noveno término

32. $a_n = \dfrac{n(n + 6)}{n^2}$, décimo término

Para cada sucesión, determina la primera y la tercera sumas parciales, s_1 y s_3.

33. $a_n = 3n - 1$ **34.** $a_n = 2n + 5$ **35.** $a_n = 2^n + 1$

36. $a_n = 3^n - 8$ **37.** $a_n = \dfrac{n - 1}{n + 2}$ **38.** $a_n = \dfrac{n}{n + 4}$

39. $a_n = (-1)^n$ **40.** $a_n = (-3)^n$ **41.** $a_n = \dfrac{n^2}{2}$

42. $a_n = \dfrac{n^2}{n + 4}$

Escribe los tres términos siguientes de cada sucesión.

43. $2, 4, 8, 16, 32, \ldots$

44. $7, 12, 17, 22, 27, \ldots$

45. $7, 9, 11, 13, 15, \ldots$

46. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

47. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

48. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$

49. $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

50. $-10, -20, -30, -40, \ldots$

51. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$

52. $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \ldots$

53. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$

54. $\frac{1}{3}, \ -\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \ -\frac{1}{24}, \ldots$

55. $42, 38, 34, 30, \ldots$

56. $7, -1, -9, -17, \ldots$

Desarrolla cada serie y luego evalúala.

57. $\sum_{i=1}^{5} (3i - 1)$

58. $\sum_{i=1}^{4} (4i + 9)$

59. $\sum_{i=1}^{6} (i^2 + 1)$

60. $\sum_{i=1}^{5} (2i^2 - 7)$

61. $\sum_{i=1}^{4} \frac{i^2}{3}$

62. $\sum_{i=1}^{3} \frac{i^2}{4}$

63. $\sum_{i=4}^{9} \frac{i^2 + i}{i + 1}$

64. $\sum_{i=2}^{5} \frac{i^3}{i + 1}$

Para el término general dado a_n, escribe una expresión utilizando Σ para representar la suma parcial indicada.

65. $a_n = n + 10$, quinta suma parcial

66. $a_n = n^2 + 5$, cuarta suma parcial

67. $a_n = \frac{n^2}{4}$, tercera suma parcial

68. $a_n = \frac{n^2 + 7}{n + 9}$, tercera suma parcial

Para el conjunto de valores $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, $x_4 = -1$ y $x_5 = 4$, determina cada una de las sumas siguientes.

69. $\sum_{i=1}^{5} x_i$

70. $\sum_{i=1}^{5} (x_i + 5)$

71. $\left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2$

72. $\sum_{i=1}^{5} 4x_i$

73. $\sum_{i=1}^{5} (x_i)^2$

74. $\sum_{i=1}^{4} (x_i^2 + 3)$

Determina la media aritmética, $\bar{x}$, de los conjuntos de datos siguientes.

75. 15, 20, 25, 30, 35

76. 16, 22, 96, 18, 48

77. 72, 83, 4, 60, 18, 20

78. 12, 13, 9, 19, 23, 36, 70

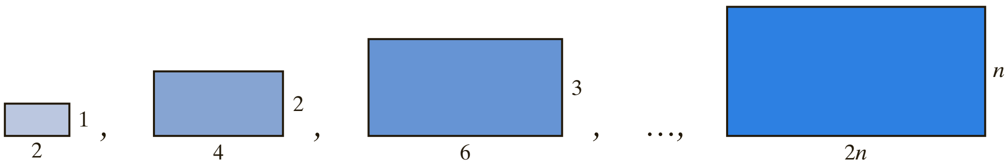
Resolución de problemas

En los ejercicios 79 y 80, considera los rectángulos siguientes. Para el rectángulo enésimo, el largo es 2n y el ancho es n.

79. Perímetro

a) Determina los perímetros para los primeros cuatro rectángulos y luego escribe los perímetros en una sucesión.

b) Determina el término general para el perímetro del rectángulo enésimo en la sucesión. Utiliza p_n para el perímetro.



80. Área

a) Determina las áreas de los cuatro rectángulos y luego escribe las áreas en una sucesión.

b) Determina el término general para el área del rectángulo enésimo en la sucesión. Utiliza a_n para el área.

81. Escribe

a) $\sum_{i=1}^{n} x_i$ como una suma de términos.

b) $\sum_{j=1}^{n} x_j$ como una suma de términos.

c) Para un conjunto dado de valores de x desde x_1 hasta x_n, ¿se cumplirá $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$?

82. Despeja $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$ de Σx.

83. Despeja $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$ de n.

84. ¿Es $\sum_{i=1}^{n} 4x_i = 4\sum_{i=1}^{n} x_i$? Ilustra tu respuesta con un ejemplo.

85. ¿Es $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{3} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} x_i$? Ilustra tu respuesta con un ejemplo.

86. Sean $x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 2$, y $y_1 = 4, y_2 = 1, y_3 = 6$. Determina lo siguiente. Observa que $\Sigma x = x_1 + x_2 + x_3$, $\Sigma y = y_1 + y_2 + y_3$ y $\Sigma xy = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

a) Σx

b) Σy

c) $\Sigma x \cdot \Sigma y$

d) Σxy

e) ¿Es $\Sigma x \cdot \Sigma y = \Sigma xy$?

Ejercicios de conceptos y escritura

87. ¿Cuál es la *enésima* suma parcial de una serie?

88. Escribe la notación siguiente en palabras: $\sum_{i=1}^{5} (i + 4)$.

89. Sea $a_n = 2n - 1$. ¿Es ésta una sucesión creciente o decreciente? Explica.

90. Sea $a_n = -3n + 7$. ¿Es ésta una sucesión creciente o decreciente? Explica.

91. Sea $a_n = 1 + (-2)^n$. ¿Es ésta una sucesión alternante? Explica.

92. Sea $a_n = (-1)^{2n}$. ¿Es ésta una sucesión alternante? Explica.

93. Crea tu propia sucesión que sea una sucesión creciente y escribe los primeros cinco términos.

94. Crea tu propia sucesión que sea una sucesión decreciente y escribe los primeros cinco términos.

95. Crea tu propia sucesión que sea una sucesión alternante y escribe los primeros cinco términos.

Ejercicios de repaso acumulados

[2.6] **96.** Despeja $\left|\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}\right| = \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$.

[5.6] **97.** Factoriza $8y^3 - 64x^6$.

[7.6] **98.** Resuelve $\sqrt{x+5} - 1 = \sqrt{x-2}$.

[8.3] **99.** Despeja r de $V = \pi r^2 h$.

11.2 Sucesiones y series aritméticas

1 Determinar la diferencia común en una sucesión aritmética.

2 Determinar el *enésimo* término de una sucesión aritmética.

3 Determinar la *enésima* suma parcial de una serie aritmética.

1 Determinar la diferencia común en una sucesión aritmética

En la sección anterior, empezamos nuestro análisis suponiendo que obtenías un trabajo con un salario inicial de \$30,000. Una opción para el aumento de salario era un aumento de \$2000 anuales. Esto tendría como resultado la sucesión

$$\$30{,}000, \$32{,}000, \$34{,}000, \$36{,}000, \ldots$$

Éste es un ejemplo de una sucesión aritmética.

Sucesión aritmética

Una **sucesión aritmética** es una sucesión en la que cada término, después del primero, difiere del término que le precede en una cantidad constante. La cantidad constante en que difiere cada par de términos sucesivos se denomina **diferencia común**, d.

La diferencia común puede determinarse restando cualquier término del término que le sigue directamente.

Sucesión aritmética	Diferencia común
$1, 3, 5, 7, 9, \ldots$	$d = 3 - 1 = 2$
$5, 1, -3, -7, -11, -15, \ldots$	$d = 1 - 5 = -4$
$\frac{7}{2}, \frac{2}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{8}{2}, -\frac{13}{2}, -\frac{18}{2}, \ldots$	$d = \frac{2}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{5}{2}$

Comprendiendo el álgebra

En una *sucesión aritmética*, puedes obtener el término siguiente mediante la suma de la *diferencia común* al término previo.

Observa que la diferencia común puede ser un número positivo o un número negativo. Si la sucesión es creciente, entonces d es un número positivo. Si la sucesión es decreciente, entonces d es un número negativo.

EJEMPLO 1 Escribe los primeros cinco términos de la sucesión aritmética con

a) el primer término 6 y diferencia común 4.

b) el primer término 3 y diferencia común -2.

c) el primer término 1 y diferencia común $\frac{1}{3}$.

Solución

a) Comienza con 6 y sigue sumando 4. La sucesión es 6, 10, 14, 18, 22.

b) 3, 1, −1, −3, −5

c) $1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}$

Resuelve ahora el ejercicio 13

2 Determinar el *enésimo* término de una sucesión aritmética

En general, una sucesión aritmética con el primer término, a_1, y la diferencia común, d, tiene los términos siguientes:

$$a_1 = a_1, \quad a_2 = a_1 + d, \quad a_3 = a_1 + 2d, \quad a_4 = a_1 + 3d, \text{ y así sucesivamente}$$

Si continuamos este proceso, podemos ver que el *enésimo* término, a_n, se puede determinar mediante la fórmula siguiente:

enésimo término de una sucesión aritmética

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

EJEMPLO 2

a) Escribe una expresión para el término general (o *enésimo*), a_n, de una sucesión aritmética cuyo primer término es −3 y cuya diferencia común es 2.

b) Determina el duodécimo término de la sucesión.

Solución

a) El *enésimo* término de la sucesión es $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d && \textit{enésimo}\text{ término de la sucesión} \\ &= -3 + (n-1)2 && \text{Sustituye } a_1 = -3 \text{ y } d = 2. \\ &= -3 + 2(n-1) && \text{Propiedad conmutativa} \\ &= -3 + 2n - 2 && \text{Propiedad distributiva} \\ &= 2n - 5 && \text{Simplifica.} \end{aligned}$$

Así, $a_n = 2n - 5$.

b) $a_n = 2n - 5$

$a_{12} = 2(12) - 5 = 24 - 5 = 19$

El duodécimo término de la sucesión es 19.

Resuelve ahora el ejercicio 11

EJEMPLO 3 Determina el número de términos en la sucesión aritmética 5, 9, 13, 17, …, 41.

Solución El primer término, a_1, es 5; el *enésimo* término es 41, y la diferencia común, d, es 4. Sustituye los valores apropiados en la fórmula para el término *enésimo* y resuelve para n.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ 41 &= 5 + (n-1)4 \\ 41 &= 5 + 4n - 4 \\ 41 &= 4n + 1 \\ 40 &= 4n \\ 10 &= n \end{aligned}$$

La sucesión tiene 10 términos.

Resuelve ahora el ejercicio 51

Comprendiendo el álgebra

En una sucesión aritmética, para obtener el valor de la diferencia común, d, *restamos* un término del último término en la sucesión.

3 Determinar la *enésima* suma parcial de una serie aritmética

Una **serie aritmética** es la suma de los términos de una sucesión aritmética. Una serie aritmética finita puede escribirse como

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + \cdots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n$$

Si consideras el último término como a_n, el penúltimo término será $a_n - d$, el antepenúltimo término será $a_n - 2d$, y así sucesivamente.

Una fórmula para la *enésima* suma parcial, s_n, se puede obtener sumando s_n a sí mismo, pero siguiendo el orden inverso.

$$\begin{array}{rcl}
s_n &=& a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \\
s_n &=& a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \\
\hline
2s_n &=& (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)
\end{array}$$

Como el lado derecho de la ecuación contiene n términos iguales a $(a_1 + a_n)$, podemos escribir

$$2s_n = n(a_1 + a_n)$$

Ahora divide ambos lados de la ecuación entre 2, para obtener la fórmula siguiente.

enésima suma parcial de una sucesión aritmética

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

EJEMPLO 4 Determina la suma de los primeros 25 números naturales.

Solución La sucesión aritmética es 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 25. El primer término, a_1, es 1; el último término, a_n, es 25. Hay 25 términos; así, $n = 25$. Mediante la fórmula para la *enésima* suma parcial, tenemos

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \\
&= \frac{25(1 + 25)}{2} \\
&= \frac{25(26)}{2} \\
&= 25(13) = 325
\end{aligned}$$

La suma de los primeros 25 números naturales es 325. Por lo tanto, $s_{25} = 325$.

Resuelve ahora el ejercicio 57

EJEMPLO 5 El primer término de una sucesión aritmética es 4 y el último término es 31. Si $s_n = 175$, determina el número de términos en la sucesión y la diferencia común.

Solución Sustituimos los valores apropiados, $a_1 = 4$, $a_n = 31$, y $s_n = 175$, en la fórmula para la *enésima* suma parcial y despejamos n.

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \\
175 &= \frac{n(4 + 31)}{2} \\
175 &= \frac{35n}{2} \\
350 &= 35n \\
10 &= n
\end{aligned}$$

Existen 10 términos en la sucesión. Podemos determinar ahora la diferencia común mediante la fórmula para el *enésimo* término de una sucesión aritmética.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ 31 &= 4 + (10-1)d \\ 31 &= 4 + 9d \\ 27 &= 9d \\ 3 &= d \end{aligned}$$

La diferencia común es 3. La sucesión es 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31.

Resuelve ahora el ejercicio 31

EJEMPLO 6 Salario Mary Tufts recibe un salario inicial de $35,000 y se le promete un aumento de $1200 después de cada uno de los 8 años siguientes. Determina su salario durante su octavo año de trabajo.

Solución **Entiende** Su salario después de los primeros años sería

$35,000, $36,200, $37,400, $38,600, . . .

Ya que se suma una cantidad constante cada año, ésta es una sucesión aritmética. El término general de una sucesión aritmética es $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Traduce En este ejemplo, $a_1 = 35{,}000$ y $d = 1200$. Así, para $n = 8$, el salario de Mary sería

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\,d \\ a_8 &= 35{,}000 + (8-1)1200 \end{aligned}$$

Realiza los cálculos

$$\begin{aligned} &= 35{,}000 + 7(1200) \\ &= 35{,}000 + 8400 \\ &= 43{,}400 \end{aligned}$$

Responde Durante su octavo año de trabajo, el salario de Mary sería de $43,400. Si enumeramos todos los salarios para el periodo de 8 años, estos serían $35,000, $36,200, $37,400, $38,600, $39,800, $41,000, $42,200, $43,400.

Resuelve ahora el ejercicio 83

EJEMPLO 7 Péndulo Cada oscilación de un péndulo (de derecha a izquierda o de izquierda a derecha) es 3 pulgadas menor que la anterior. La primera oscilación es de 8 pies.

a) Determina la longitud de la décima oscilación.

b) Determina la distancia total recorrida por el péndulo durante las primeras 10 oscilaciones.

Solución

a) **Entiende** Como cada oscilación decrece en una cantidad constante, este problema puede representarse como una serie aritmética. Como la primera oscilación está dada en pies y la disminución de las oscilaciones está dada en pulgadas, cambiaremos 3 pulgadas a 0.25 pies ($3 \div 12 = 0.25$). La décima oscilación puede considerarse como a_{10}. La diferencia, d, es negativa, ya que la distancia es decreciente en cada oscilación.

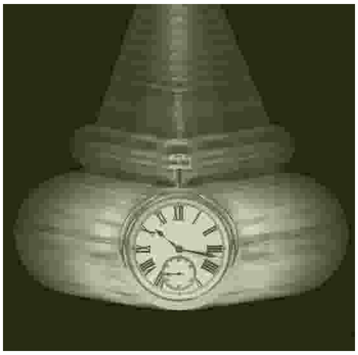
Traduce

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ a_{10} &= 8 + (10-1)(-0.25) \end{aligned}$$

Realiza los cálculos

$$\begin{aligned} &= 8 + 9(-0.25) \\ &= 8 - 2.25 \\ &= 5.75 \text{ pies} \end{aligned}$$

Responde La décima oscilación es de 5.75 pies.


© Glowimages

b) Entiende y traduce La distancia total recorrida durante las primeras 10 oscilaciones puede determinarse mediante la fórmula para la *enésima* suma parcial. La primera oscilación, a_1, es de 8 pies y la décima oscilación, a_{10}, es de 5.75 pies.

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$s_{10} = \frac{10(a_1 + a_{10})}{2}$$

Realiza los cálculos $= \frac{10(8 + 5.75)}{2} = \frac{10(13.75)}{2} = 5(13.75) = 68.75$ pies

Responde El péndulo recorre 68.75 pies durante sus primeras 10 oscilaciones.

Resuelve ahora el ejercicio 75

CONJUNTO DE EJERCICIOS 11.2

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

suma	serie	constante	0	1	positivo	diferencia	negativo	aritmética
n	sumando	restando	d	a_n	término	sumando	−1	2

1. Una sucesión en la que cada término, después del primero, difiere del término que le precede en una cantidad constante es una sucesión ________ .

2. La cantidad constante en que difiere cada par de términos sucesivos en una sucesión aritmética se denomina ________ común.

3. La diferencia común en una sucesión aritmética se identifica por la letra ________.

4. La diferencia común puede determinarse ________ cualquier término del próximo término de la sucesión.

5. La fórmula $a_n = a_1 + (n - 1)d$ se utiliza para determinar el ________ *enésimo* de una sucesión aritmética.

6. La suma de los términos de una sucesión aritmética es una ________ aritmética.

7. La fórmula $s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ se utiliza para determinar la *enésima* ________ parcial de una sucesión aritmética.

8. Si una sucesión aritmética es creciente, el valor para d es un número ________ .

9. Si los términos de una sucesión aritmética son decrecientes, el valor para d es ________ .

10. Si todos los términos de una sucesión aritmética son los mismos, el valor para d es ________.

Practica tus habilidades

Escribe los primeros cinco términos de la sucesión aritmética con el primer término y diferencia común dados. Escribe la expresión para el término general (o enésimo) a_n, de la sucesión aritmética.

11. $a_1 = 4, d = 3$

12. $a_1 = -8, d = 4$

13. $a_1 = 7, d = -2$

14. $a_1 = 3, d = -5$

15. $a_1 = \frac{1}{2}, d = \frac{3}{2}$

16. $a_1 = \frac{7}{4}, d = -\frac{3}{4}$

17. $a_1 = 100, d = -5$

18. $a_1 = 50, d = -9$

Determina la cantidad indicada de la sucesión aritmética.

19. $a_1 = 5, d = 3$; determina a_4

20. $a_1 = -6, d = 5$; determina a_5

21. $a_1 = -9, d = 4$; determina a_{10}

22. $a_1 = -1, d = -2$; determina a_{12}

23. $a_1 = -8, d = \frac{5}{3}$; determina a_{13}

24. $a_1 = 5, a_8 = 10$; determina d

25. $a_1 = -\frac{11}{2}, a_9 = \frac{21}{2}$, determina d

26. $a_1 = \frac{1}{2}, a_7 = \frac{19}{2}$; determina d

27. $a_1 = 4, a_n = 28, d = 3$; determina n

28. $a_1 = 1, a_n = -17, d = -3$; determina n

29. $a_1 = 82, a_n = 42, d = -8$; determina n

30. $a_1 = -\frac{4}{3}, a_n = -\frac{14}{3}, d = -\frac{2}{3}$; determina n

Determina la suma, s_n, y la diferencia común, d, de cada sucesión.

31. $a_1 = 1, a_{10} = 19, n = 10$

32. $a_1 = -8, a_7 = 10, n = 7$

33. $a_1 = \frac{3}{5}, a_8 = 2, n = 8$

34. $a_1 = 12, a_9 = -28, n = 9$

35. $a_1 = -5, a_6 = 13.5, n = 6$

36. $a_1 = -\frac{3}{5}, a_5 = \frac{13}{5}, n = 5$

37. $a_1 = 7, a_{11} = 67, n = 11$

38. $a_1 = 14.25, a_{31} = 18.75, n = 31$

Escribe los primeros cuatro términos de cada sucesión; luego determina a_{10} y s_{10}.

39. $a_1 = 4, d = 3$

40. $a_1 = 1, d = 7$

41. $a_1 = -6, d = 2$

42. $a_1 = -7, d = -4$

43. $a_1 = -8, d = -5$

44. $a_1 = 5, d = 4$

45. $a_1 = \frac{7}{2}, d = \frac{5}{2}$

46. $a_1 = \frac{9}{5}, d = \frac{3}{5}$

47. $a_1 = 100, d = -7$

48. $a_1 = 35, d = 6$

Determina el número de términos en cada sucesión y determina s_n.

49. $1, 4, 7, 10, \ldots, 43$

50. $-10, -8, -6, -4, \ldots, 40$

51. $-9, -5, -1, 3, \ldots, 31$

52. $6, 13, 20, 27, \ldots, 55$

53. $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, \frac{17}{2}$

54. $-\frac{5}{6}, -\frac{7}{6}, -\frac{9}{6}, -\frac{11}{6}, \ldots, -\frac{21}{6}$

55. $7, 10, 13, 16, \ldots, 91$

56. $-11, -15, -19, \ldots, -51$

Resolución de problemas

57. Determina la suma de los primeros 50 números naturales.

58. Determina la suma de los primeros 50 números pares.

59. Determina la suma de los primeros 50 números impares.

60. Determina la suma de los primeros 40 múltiplos de 5.

61. Determina la suma de los primeros 30 múltiplos de 3.

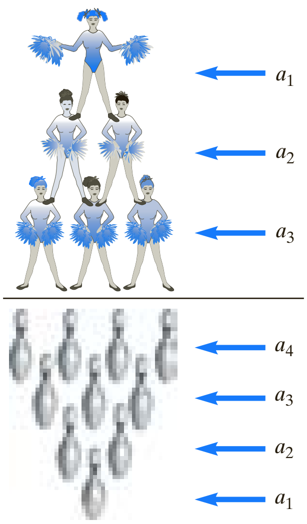
62. Determina la suma de los números entre 50 y 150, ambos incluidos.

63. Determina cuántos números entre 7 y 1610 son divisibles entre 6.

64. Determina cuántos números entre 14 y 1470 son divisibles entre 8.

Las pirámides aparecen en todos lados; en eventos deportivos, las porristas pueden formar una pirámide en la que las personas de arriba se paran sobre los hombros de las personas de abajo. La ilustración muestra una pirámide de 1 porrista en la parte superior, 2 en la fila de en medio y 3 porristas en la fila de abajo. Observa que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, y $a_3 = 3$. También nota que $d = 1$, $n = 3$, y $s_3 = 6$.

En una pista de boliche, los bolos forman una pirámide. La primera fila tiene 1 bolo, la segunda fila tiene 2 bolos, la tercera fila tiene 3 bolos y la cuarta fila tiene 4. Así, $a_1 = 1$, $d = 1$, $n = 4$, y $s_4 = 10$.

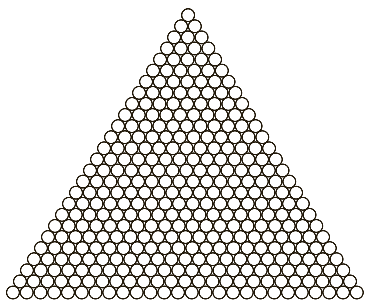


Utiliza la idea de una pirámide para resolver los ejercicios 65-70.

65. Auditorio Un auditorio tiene 20 asientos en la primera fila. Cada fila sucesiva tiene dos asientos más que la fila anterior. ¿Cuántos asientos hay en la duodécima fila? ¿Cuántos asientos hay en las primeras 12 filas?

66. Auditorio Un auditorio tiene 22 asientos en la primera fila. Cada fila sucesiva tiene cuatro asientos más que la fila anterior. ¿Cuántos asientos hay en la novena fila? ¿Cuántos asientos hay en las primeras 9 filas?

67. Troncos Wolfang Schmidt apila troncos de modo que hay 26 troncos en la parte inferior, y cada fila tiene un tronco menos que la fila anterior. ¿Cuántos troncos hay en la pila?



68. Troncos Supón que Wolfang, en el ejercicio 67, deja de apilar troncos después de terminar con la fila que tiene ocho troncos. ¿Cuántos troncos hay en la pila?

69. Copas apiladas En su quincuagésimo aniversario de bodas, el señor y la señora Carlson están a punto de verter champán en la copa superior, como se muestra en la foto en la página siguiente. La fila superior tiene 1 copa, la segunda fila tiene 3 copas, la tercera fila tiene 5 copas, y así sucesivamente. Cada fila tiene 2 copas más que la fila superior anterior. Esta pirámide tiene 14 filas.

a) ¿Cuántas copas hay en la decimocuarta fila (la fila inferior)?

b) ¿Cuántas copas hay en total?

© Allen R. Angel

Ver ejercicio 69 de la página 686.

70. Dulces apilados Unos dulces que están envueltos de forma individual, se apilan en filas de modo que la fila superior tiene 1 dulce, la segunda fila tiene 3 dulces, la tercera fila tiene 5 dulces, y así sucesivamente. Cada fila tiene 2 dulces más que la fila arriba de ella. Hay 7 filas de dulces.

a) ¿Cuántos dulces hay en la séptima fila (la fila inferior)?

b) ¿Cuántos dulces hay en total?

71. Suma de números Karl Friedrich Gauss (1777-1855), un famoso matemático, cuando era niño determinó mentalmente y de forma rápida la suma de los primeros 100 números naturales (1 + 2 + 3 + ... +100). Explica cómo podría haberlo hecho y determina de esa forma la suma de los primeros 100 números naturales como crees que lo pudo haber hecho Gauss. (*Sugerencia:* 1 + 100 = 101, 2 + 99 = 101, etcétera.)

© Wikicommons

Karl Friedrich Gauss

72. Suma de números Utiliza el mismo proceso del ejercicio 71 para determinar la suma de los números del 101 al 150.

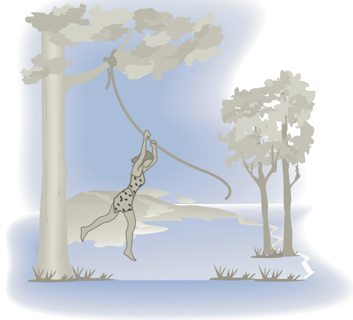
73. Suma de números Determina una fórmula para la suma de los primeros n números impares consecutivos iniciando con 1.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$$

74. Suma de números pares Determina una fórmula para la suma de los primeros n números pares consecutivos iniciando con 2.

$$2 + 4 + 6 + 8 + + \cdots + 2n$$

75. Balanceándose en una liana Una larga liana se ata a la rama de un árbol. Sally Wynn se columpia en la liana y cada oscilación (izquierda a derecha o derecha a izquierda) es $\frac{1}{2}$ pie menor que la oscilación anterior. Si su primera oscilación es de 22 pies, determina



a) la longitud de la séptima oscilación, y

b) la distancia recorrida durante las siete oscilaciones.

76. Péndulo Cada oscilación de un péndulo es 2 pulgadas más corta que la oscilación que le precede (izquierda a derecha o de derecha a izquierda). La primera oscilación es de 6 pies. Determina

a) la longitud de la octava oscilación, y

b) la distancia total recorrida por el péndulo durante las ocho oscilaciones.

77. Rebote de una pelota Frank Holyton deja caer una pelota desde una ventana que está en un segundo piso. Cada vez que la pelota rebota, la altura que alcanza es 6 pulgadas menor que la del rebote anterior. Si el primer rebote alcanza una altura de 6 pies, determina la altura que alcanza la pelota en el noveno rebote.

78. Pelota de ping-pong Una pelota de ping-pong cae de la mesa y rebota a una altura de 3 pies. Si cada rebote sucesivo es 3 pulgadas menor que el rebote que le precede, determina la altura que alcanza la pelota en el décimo rebote.

79. Paquetes El lunes 17 de marzo, Brian Wallin inició un nuevo trabajo en una compañía de paquetería. Ese día, él fue capaz de preparar 105 paquetes para envío. Su jefe espera que con la experiencia que vaya obteniendo Brian sea más productivo. Cada día de la primera semana, se espera que Brian prepare 10 paquetes más que el total del día anterior.

a) ¿Cuántos paquetes se espera que prepare Brian el 22 de marzo?

b) ¿Cuántos paquetes se espera que prepare Brian en sus primeros seis días de trabajo?

80. Salario Marion Nickelson gana un salario anual de $37,500 en la fábrica de alimentos congelados Thompson. Su jefe le ha prometido un aumento de $1500 a su salario en cada año, durante los siguientes 10 años.

a) Dentro de 10 años, ¿cuál será el salario de Marion?

b) ¿Cuánto ganará en total durante esos 11 años?

81. Dinero Si Craig Campanella ahorra $1 el día 1, $2 el día 2, $3 el día 3, y así sucesivamente, ¿cuánto dinero, en total, habrá ahorrado el día 31?

82. Dinero Si Dan Currier ahorra 50 centavos el día 1, $1.00 el día 2, $1.50 el día 3, y así sucesivamente, ¿cuánto, en total, habrá ahorrado al final de 1 año (365 días)?

83. Dinero Carrie Dereshi, recientemente jubilada, se entrevistó con su asesor financiero. Acordó recibir $42,000 el primer año, y debido a la inflación, cada año recibirá $400 más de lo que recibiera el año anterior.

a) ¿Cuál fue el ingreso que recibió en su décimo año de retiro?

b) ¿Cuánto dinero recibirá en total durante los primeros 10 años de retiro?

84. Salario A Susan Forman se le da un salario inicial de \$23,000 y le dicen que recibirá un aumento de \$1000 al final de cada año.

a) Determina su salario durante el año 12.

b) En total, ¿cuánto recibirá durante sus primeros 12 años?

85. Ángulos La suma de los ángulos interiores de un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono y un hexágono, son 180°, 360°, 540° y 720°, respectivamente. Utiliza este patrón para determinar la fórmula para la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados.

86. Otra fórmula que puede usarse para determinar la *enésima* suma parcial de una serie aritmética es

$$s_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

Deduce esta fórmula, usando las dos fórmulas que se presentaron en esta sección.

Ejercicios de conceptos y escritura

87. ¿Una sucesión aritmética, puede constar solamente de números negativos? Explica.

88. ¿Una sucesión aritmética, puede constar solamente de números impares? Explica.

89. ¿Una sucesión aritmética, puede constar solamente de números pares? Explica.

90. ¿Una sucesión alternante, puede ser una sucesión aritmética? Explica.

Actividad de grupo

En cálculo un tema muy importante es el de límites. Considera $a_n = \frac{1}{n}$. *Los primeros cinco términos de esta sucesión son* $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$. *Como el valor de* $\frac{1}{n}$ *se acerca cada vez más a 0 conforme n se hace cada vez más grande, decimos que el límite de* $\frac{1}{n}$ *cuando n tiende a infinito es 0. Escribimos esto como* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ *o* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. *Observa que* $\frac{1}{n}$ *nunca es igual a 0, pero su valor se aproxima a 0 cuando n se hace cada vez más grande.*

a) *Miembro 1 del grupo: determina* $\lim_{n\to+\infty} a_n$ *para los ejercicios 91 y 92.*

b) *Miembro 2 del grupo: determina* $\lim_{n\to+\infty} a_n$ *para los ejercicios 91 y 92.*

c) *Miembro 3 del grupo: determina* $\lim_{n\to+\infty} a_n$ *para los ejercicios 95 y 96.*

d) *Intercambien trabajos y verifiquen las respuestas de los demás.*

91. $a_n = \dfrac{1}{n-2}$

92. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

93. $a_n = \dfrac{1}{n^2+2}$

94. $a_n = \dfrac{2n+1}{n}$

95. $a_n = \dfrac{4n-3}{3n+1}$

96. $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

Ejercicios de repaso acumulados

[2.2] **97.** Despeja r de $A = P + Prt$.

[4.1] **98.** Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$y = 2x + 1$$
$$3x - 2y = 1$$

[5.4] **99.** Factoriza $12n^2 - 6n - 30n + 15$.

[10.1] **100.** Grafica $(x+4)^2 + y^2 = 25$.

11.3 Sucesiones y series geométricas

1 Determinar la razón común en una sucesión geométrica.

2 Determinar el *enésimo* término de una sucesión geométrica.

3 Determinar la *enésima* suma parcial de una serie geométrica.

4 Identificar series geométricas infinitas.

5 Determinar la suma de una serie geométrica infinita.

6 Aplicaciones de series geométricas.

1 Determinar la razón común en una sucesión geométrica

En la sección 11.1 supusimos que obtenías un trabajo con un salario inicial de \$30,000. También mencionamos que una opción de aumento salarial era 5% de aumento cada año. Esto daría como resultado la sucesión siguiente.

$$\$30{,}000,\ \$31{,}500,\ \$33{,}075,\ \$34{,}728.75,\ \ldots$$

Éste es un ejemplo de una sucesión geométrica.

Sucesión geométrica

Una **sucesión geométrica** es una sucesión donde cada término después del primero es el mismo múltiplo del término que le precede. El múltiplo común se denomina **razón común**.

Comprendiendo el álgebra

En una *sucesión geométrica*, obtienes el término siguiente multiplicando el término anterior por la *razón común*.

La razón común, r, de cualquier sucesión geométrica puede determinarse dividiendo cualquier término, excepto el primero, entre el término que le precede. En la sucesión geométrica anterior, la razón común es $\frac{31{,}500}{30{,}000} = 1.05$ (o 105%).

Considera la sucesión geométrica

$$1, 3, 9, 27, 81, ..., 3^{n-1}, ...$$

La razón común es 3, ya que $3 \div 1 = 3$, $9 \div 3 = 3$, $27 \div 9 = 3$, y así sucesivamente.

Sucesión geométrica	Razón común
$4, 8, 16, 32, 64, \ldots, 4(2)^{n-1}, \ldots$	2
$3, 12, 48, 192, 768, \ldots, 3(4)^{n-1}, \ldots$	4
$7, \frac{7}{2}, \frac{7}{4}, \frac{7}{8}, \frac{7}{16}, \ldots, 7\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \ldots$	$\frac{1}{2}$
$5, -\frac{5}{3}, \frac{5}{9}, -\frac{5}{27}, \frac{5}{81}, \ldots, 5\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \ldots$	$-\frac{1}{3}$

EJEMPLO 1 Determina los primeros cinco términos de la sucesión geométrica si $a_1 = 6$ y $r = \frac{1}{2}$.

Solución $a_1 = 6$, $a_2 = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$, $a_3 = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $a_4 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$, $a_5 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

Así, los primeros cinco términos de la sucesión geométrica son

$$6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}$$

Resuelve ahora el ejercicio 15

2 Determinar el *enésimo* término de una sucesión geométrica

Comprendiendo el álgebra

Para obtener el valor de la razón común, r, en una sucesión geométrica, dividimos un término entre el término que le precede.

En general, una sucesión geométrica con primer término a_1, y razón común, r, tiene los términos siguientes:

$a_1,$	$a_1 r,$	$a_1 r^2,$	$a_1 r^3,$	$a_1 r^4, \ldots,$	$a_1 r^{n-1}, \ldots$
↑	↑	↑	↑	↑	↑
Primer término a_1	Segundo término a_2	Tercer término a_3	Cuarto término a_4	Quinto término a_5	*Enésimo* término a_n

Así, podemos ver que el *enésimo* término de una sucesión geométrica está dado por la fórmula siguiente.

Enésimo término de una sucesión geométrica

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

EJEMPLO 2

a) Escribe una expresión para el término general (o *enésimo*), a_n, de la sucesión geométrica con $a_1 = 3$ y $r = -2$.

b) Determina el duodécimo término de esta sucesión.

Solución

a) El término *enésimo* de la sucesión es $a_n = a_1 r^{n-1}$. Al sustituir $a_1 = 3$ y $r = -2$, obtenemos

$$a_n = a_1 r^{n-1} = 3(-2)^{n-1}$$

Por lo tanto, $a_n = 3(-2)^{n-1}$.

b)

$$a_n = 3(-2)^{n-1}$$
$$a_{12} = 3(-2)^{12-1} = 3(-2)^{11} = 3(-2048) = -6144$$

El duodécimo término de la sucesión es -6144. Los primeros 12 términos de la sucesión son 3, -6, 12, -24, 48, -96, 192, -384, 768, -1536, 3072, -6144.

Resuelve ahora el ejercicio 35

Consejo útil

Consejo de estudio

En este capítulo trabajarás con exponentes y utilizarás las reglas de los exponentes. Las reglas de los exponentes se analizaron en la sección 1.5 y nuevamente en el capítulo 6. Si no las recuerdas, ahora es buen momento para revisar la sección 1.5.

EJEMPLO 3 Determina r y a_1 para la sucesión geométrica con $a_2 = 12$ y $a_5 = 324$.

Solución La sucesión puede representarse con espacios en blanco para los términos faltantes.

$$\_\_,\ \underset{\substack{\uparrow\\ a_2}}{12},\ \_\_,\ \_\_,\ \underset{\substack{\uparrow\\ a_5}}{324}$$

Si suponemos que a_2 es el primer término de la sucesión con la misma razón común, obtenemos

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Primer}\\ \text{término}}}{12},\ \_\_,\ \_\_,\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Cuarto}\\ \text{término}}}{324}$$

Ahora utilizamos la fórmula para el enésimo término de una sucesión geométrica para determinar r. Sea el primer término, a_1, 12 y el número de términos n, 4.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 r^{n-1} \\ 324 &= 12r^{4-1} \\ 324 &= 12r^3 \\ \frac{324}{12} &= r^3 \\ 27 &= r^3 \\ 3 &= r \end{aligned}$$

Por lo tanto, la razón común es 3.

El primer término de la sucesión original es $12 \div 3$, es decir, 4. Por lo tanto, $a_1 = 4$. El primer término también podría determinarse utilizando la fórmula con $a_n = 324$, $r = 3$ y $n = 5$. Ahora, determina a_1 mediante la fórmula.

Resuelve ahora el ejercicio 83

3 Determinar la *enésima* suma parcial de una serie geométrica

Serie geométrica

Una **serie geométrica** es la suma de los términos de una sucesión geométrica.

La suma de los primeros n términos, s_n, de una sucesión geométrica pueden expresarse como

$$s_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1} \qquad \text{(ec. 1)}$$

Si multiplicamos ambos lados de la ecuación por r, obtenemos

$$rs_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n \qquad \text{(ec. 2)}$$

Ahora restamos los lados correspondientes de la (ec. 2) de la (ec. 1). Los términos en color azul se anulan, dejando

$$s_n - rs_n = a_1 - a_1r^n$$

Ahora, despejamos s_n de la ecuación.

$$s_n(1 - r) = a_1(1 - r^n) \qquad \text{Factoriza.}$$

$$s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} \qquad \text{Divide ambos lados entre } 1 - r.$$

Así, tenemos la fórmula siguiente para la enésima suma parcial de una serie geométrica.

Enésima suma parcial de una serie geométrica

$$s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}, \qquad r \neq 1$$

EJEMPLO 4 Determina la séptima suma parcial de una sucesión geométrica cuyo primer término es 16 y cuya razón común es $-\frac{1}{2}$.

Solución Al sustituir los valores apropiados para a_1, r y n.

$$s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$s_7 = \frac{16\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^7\right]}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{16\left(1 + \frac{1}{128}\right)}{\frac{3}{2}} = \frac{16\left(\frac{129}{128}\right)}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{129}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{129}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{43}{4}$$

Por lo tanto, $s_7 = \frac{43}{4}$.

Resuelve ahora el ejercicio 41

EJEMPLO 5 Dados $s_n = 93$, $a_1 = 3$, y $r = 2$, determina n.

Solución

$$s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$93 = \frac{3(1 - 2^n)}{1 - 2} \qquad \text{Sustituye los valores para } s_n, a_1, \text{ y } r.$$

$$93 = \frac{3(1 - 2^n)}{-1}$$

$$-93 = 3(1 - 2^n) \qquad \text{Multiplica ambos lados por } -1.$$

$$-31 = 1 - 2^n \qquad \text{Divide ambos lados entre 3.}$$

$$-32 = -2^n \qquad \text{Resta 1 de ambos lados.}$$

$$32 = 2^n \qquad \text{Divide ambos lados entre } -1.$$

$$2^5 = 2^n \qquad \text{Escribe 32 como } 2^5.$$

Por lo tanto, $n = 5$.

Resuelve ahora el ejercicio 65

Cuando trabajamos con series geométricas, r puede ser un número positivo como vimos en el ejemplo 5, o un número negativo como vimos en el ejemplo 4.

4 Identificar series geométricas infinitas

Todas las sucesiones geométricas que hemos analizado hasta el momento han sido finitas, pues tenían un último término. La sucesión siguiente es un ejemplo de una sucesión geométrica infinita.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \ldots$$

Observa que los tres puntos al final de la sucesión indican que la sucesión continúa indefinidamente.

Serie geométrica infinita

Una **serie geométrica infinita** es la suma de los términos de una sucesión geométrica infinita.

Por ejemplo,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots$$

es una serie geométrica infinita. Determinemos algunas sumas parciales.

Suma parcial	Serie	Suma
Segunda	$1 + \frac{1}{2}$	1.5
Tercera	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	1.75
Cuarta	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	1.875
Quinta	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$	1.9375
Sexta	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$	1.96875

Con cada suma parcial sucesiva, la cantidad que se le añade es menor que la de la suma parcial que le precede. También, la suma parece acercarse cada vez más a 2. En el ejemplo 6, mostraremos que la suma de esta serie geométrica infinita en realidad es 2.

5 Determinar la suma de una serie geométrica infinita

Consideremos la fórmula para la suma de los primeros n términos de una serie geométrica:

$$s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}, \qquad r \neq 1$$

¿Qué ocurre con r^n si $|r| < 1$ y n cada vez que se hace más grande? Supongamos que $r = \frac{1}{2}$; entonces

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0.5, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.25, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.125, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \approx 0.000001$$

Podemos ver que cuando $|r| < 1$ el valor de r^n se acerca mucho a 0 cuando n es cada vez más grande. Así, al considerar la suma de una serie geométrica infinita, que denotamos como s_∞, la expresión r^n tiende a 0 cuando $|r| < 1$ Por lo tanto, si reemplazamos r^n con 0 en la fórmula $s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$ obtenemos la fórmula siguiente.

Suma de una serie geométrica infinita

$$s_\infty = \frac{a_1}{1 - r} \text{ donde } |r| < 1$$

EJEMPLO 6 Determina la suma de la serie geométrica infinita

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots$$

Solución $a_1 = 1$ y $r = \frac{1}{2}$. Observa que $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$.

$$\begin{aligned} s_\infty &= \frac{a_1}{1 - r} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots = 2$.

Resuelve ahora el ejercicio 69

EJEMPLO 7 Determina la suma de la serie geométrica infinita

$$3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25} - \frac{24}{125} + \frac{48}{625} + \cdots$$

Solución Los términos de la sucesión correspondiente son $3, -\frac{6}{5}, \frac{12}{25}, -\frac{24}{125}, \ldots$. Observa que $a_1 = 3$. Para determinar la razón común r, podemos dividir el segundo término, $-\frac{6}{5}$, entre el primer término, 3.

$$\begin{aligned} r &= -\frac{6}{5} \div 3 \\ &= -\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{3} \\ &= -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Como $\left|-\frac{2}{5}\right| < 1$,

$$\begin{aligned} s_\infty &= \frac{a_1}{1 - r} \\ &= \frac{3}{1 - \left(-\frac{2}{5}\right)} \\ &= \frac{3}{1 + \frac{2}{5}} \\ &= \frac{3}{\frac{7}{5}} \\ &= \frac{15}{7} \end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 71

EJEMPLO 8 Escribe 0.343434... como una razón de enteros.

Solución Podemos escribir este decimal como

$$0.34 + 0.0034 + 0.000034 + \cdots + (0.34)(0.01)^{n-1} + \cdots$$

Ésta es una serie geométrica infinita, con $r = 0.01$. Puesto que $|r| < 1$,

$$s_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0.34}{1-0.01} = \frac{0.34}{0.99} = \frac{34}{99}$$

Si divides 34 entre 99 obtienes 0.343434...

Resuelve ahora el ejercicio 81

¿Cuál es la suma de una serie geométrica cuando $|r| > 1$? Considera la sucesión geométrica en la que $a_1 = 1$ y $r = 2$.

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots, 2^{n-1}, \ldots$$

La suma de sus términos es

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots + 2^{n-1} + \cdots$$

¿Cuál es la suma de esta serie? Conforme n crece, la suma se hace cada vez más grande. Por lo tanto, decimos que la suma "no existe". Para $|r| > 1$, la suma de una serie geométrica infinita no existe.

6 Aplicaciones de series geométricas

EJEMPLO 9 **Cuenta de ahorro** Gene Simmons invierte, en una cuenta de ahorro, \$1000 a 5% de interés compuesto cada año. Determina la cantidad en su cuenta y el monto de interés generado al final de 10 años.

Solución **Entiende** Supón que P representa el capital invertido. Al inicio del segundo año, el monto crece a $P + 0.05P$ o $1.05P$. Este monto será el capital invertido durante el segundo año. Al inicio del tercer año, el capital del segundo año crecerá 5% a $(1.05P)(1.05)$ o $(1.05)^2P$. El monto en la cuenta de Gene al inicio de los años sucesivos es

Año 1	Año 2	Año 3	Año 4
P	$1.05P$	$(1.05)^2P$	$(1.05)^3P$

y así sucesivamente. Ésta es una serie geométrica con $r = 1.05$. El monto en su cuenta al final de 10 años será la misma cantidad en su cuenta al inicio del año 11. Por lo tanto, utilizamos la fórmula,

$$a_n = a_1 r^{n-1}, \quad \text{con} \quad r = 1.05 \quad \text{y} \quad n = 11$$

Traduce Tenemos una sucesión geométrica con $a_1 = 1000$, $r = 1.05$ y $r = 11$. Al sustituir estos valores en la fórmula, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 r^{n-1} \\ a_{11} &= 1000(1.05)^{11-1} \end{aligned}$$

Realiza los cálculos

$$\begin{aligned} &= 1000(1.05)^{10} \\ &\approx 1000(1.62889) \\ &\approx 1628.89 \end{aligned}$$

Responde Al cabo de 10 años, el monto en la cuenta es alrededor de \$1628.89. El monto del interés es \$1628.89 − \$1000 = \$628.89.

Resuelve ahora el ejercicio 95

EJEMPLO 10 **Dinero** Supón que alguien te ofrece \$1000 diarios por cada día de un mes de 30 días. O podrías elegir tomar un centavo el día 1, 2 centavos el día 2, 4 centavos el día 3, 8 centavos el día 4, y así sucesivamente. La cantidad continuaría duplicándose cada día durante 30 días.

a) Sin hacer cálculos, trata de adivinar cuál de las dos ofertas te proporcionaría el mayor ingreso total en los 30 días.

b) Calcula la cantidad total que recibirías si prefirieras \$1000 diarios durante 30 días.

c) Calcula la cantidad que recibirías el día 30, si eligieras 1 centavo el día 1 y la cantidad se duplicara cada día durante 30 días.

d) Calcula la cantidad total que recibirías si eligieras 1 centavo el día 1 y se duplica la cantidad cada día durante 30 días.

Solución

a) Cada quien tendrá su propia respuesta para el inciso **a)**.

b) Si recibieras \$1000 diarios durante 30 días, recibirías 30(\$1000) = \$30,000.

c) **Entiende** Como la cantidad se duplica cada día, esto representa una serie geométrica con $r = 2$. La tabla siguiente muestra la cantidad que recibiría en cada uno de los primeros 7 días. También muestra las cantidades escritas con base 2, la razón común.

Día	1	2	3	4	5	6	7
Cantidad (centavos)	1	2	4	8	16	32	64
Cantidad (centavos)	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6

Observa que para cualquier día dado, el exponente en el 2 es 1 menos que el número del día. Por ejemplo, el día 7, la cantidad es 2^6. En general, la cantidad en el día n es 2^{n-1}.

Traduce Para determinar la cantidad que se recibe el día 30, evaluamos $a_n = a_1 r^{n-1}$ para $n = 30$.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_{30} = 1(2)^{30-1}$$

Realiza los cálculos

$$a_{30} = 1(2)^{29}$$

$$= 1(536{,}870{,}912)$$

$$= 536{,}870{,}912$$

Responde El día 30, la cantidad que recibirías es de 536,870,912 centavos o \$5,368,709.12.

d) **Entiende y traduce** Para determinar la cantidad total recibida durante los 30 días, determinaremos la trigésima suma parcial.

$$s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$s_{30} = \frac{1(1 - 2^{30})}{1 - 2}$$

Realiza los cálculos

$$= \frac{1(1 - 1{,}073{,}741{,}824)}{-1}$$

$$= 1{,}073{,}741{,}823$$

Responde Por lo tanto, durante los 30 días la cantidad total que recibirías por este método sería de 1,073,741,823 centavos o \$10,737,418.23. La cantidad recibida por este método sobrepasa por mucho los \$30,000 que recibirías si eligieras \$1000 diarios durante 30 días.

Resuelve ahora el ejercicio 87

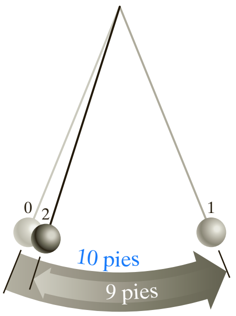


FIGURA 11.1

EJEMPLO 11 Péndulo En cada oscilación (de izquierda a derecha o de derecha a izquierda), cierto péndulo recorre 90% de la distancia recorrida en la oscilación anterior. Por ejemplo, si la oscilación a la derecha fue de 10 pies, la oscilación de regreso hacia la izquierda es de $0.9 \times 10 = 9$ pies (ver **Figura 11.1**). Si la primera oscilación es de 10 pies, determina la distancia total recorrida por el péndulo hasta el momento en que se detiene.

Solución **Entiende** Este problema se puede considerar como una serie geométrica infinita, con $a_1 = 10$ y $r = 0.9$. Por lo tanto, podemos utilizar la fórmula $s_\infty = \dfrac{a_1}{1 - r}$ para determinar la distancia total recorrida por el péndulo.

Traduce y realiza los cálculos

$$s_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{10}{1 - 0.9} = \frac{10}{0.1} = 100 \text{ pies}$$

Responde Cuando el péndulo se detenga, habrá recorrido 100 pies.

Resuelve ahora el ejercicio 99

CONJUNTO DE EJERCICIOS 11.3

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

suma	diferencia	d	r	infinita	término	razón	menor
0	1	dividiendo	multiplicando	geométrica	serie	mayor	

1. Una sucesión en la que cada término después del primer término es un múltiplo común del término que le precede es una sucesión ________.

2. Al múltiplo común de una sucesión geométrica se le denomina ________ común.

3. La razón común de una sucesión geométrica se identifica por la letra ________.

4. La razón común puede determinarse ________ cualquier término, excepto el primer término, entre el término que le precede.

5. La fórmula $a_n = a_1 r^{n-1}$ se utiliza para determinar el *enésimo* ________ de una sucesión geométrica.

6. La suma de los términos de una sucesión geométrica es una ________ geométrica.

7. La fórmula $s_n = \dfrac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$ se utiliza para determinar la *enésima* ________ parcial de una sucesión geométrica.

8. Si los términos de una sucesión geométrica son crecientes, el valor para r es ________ que 1.

9. Si los términos de una sucesión geométrica son los mismos, el valor para r es ________.

10. La fórmula $s_\infty = \dfrac{a_1}{1 - r}$, $|r| < 1$ se utiliza para determinar la suma de una serie geométrica________.

Practica tus habilidades

Determina los primeros cinco términos de cada sucesión geométrica.

11. $a_1 = 2, r = 3$

12. $a_1 = 5, r = 2$

13. $a_1 = 6, r = -\frac{1}{2}$

14. $a_1 = 6, r = \frac{1}{2}$

15. $a_1 = 72, r = \frac{1}{3}$

16. $a_1 = 50, r = \frac{1}{5}$

17. $a_1 = 90, r = -\frac{1}{3}$

18. $a_1 = 32, r = -\frac{1}{4}$

19. $a_1 = -1, r = 3$

20. $a_1 = -1, r = -3$

21. $a_1 = 7, r = -2$

22. $a_1 = -13, r = -1$

23. $a_1 = \frac{1}{3}, r = \frac{1}{2}$

24. $a_1 = \frac{1}{2}, r = -\frac{1}{3}$

25. $a_1 = 3, r = \frac{3}{2}$

26. $a_1 = 60, r = -\frac{2}{5}$

Para cada sucesión geométrica, determina el término que se pide.

27. $a_1 = 4, r = 2$; determina a_6

28. $a_1 = 4, r = -2$; determina a_6

29. $a_1 = -24, r = \frac{1}{2}$; determina a_9

30. $a_1 = 27, r = \frac{1}{3}$; determina a_7

31. $a_1 = \frac{1}{8}, r = 2$; determina a_{10}

32. $a_1 = 3, r = 3$; determina a_5

33. $a_1 = -3, r = -2$; determina a_{12}

34. $a_1 = -10, r = -2$; determina a_4

35. $a_1 = 2, r = \frac{1}{2}$; determina a_8

36. $a_1 = 5, r = \frac{2}{3}$; determina a_9

37. $a_1 = 50, r = \frac{1}{3}$; determina a_7

38. $a_1 = -7, r = -\frac{3}{4}$; determina a_7

Determina la suma indicada.

39. $a_1 = 5, r = 2$; determina s_5

40. $a_1 = 7, r = -3$; determina s_4

41. $a_1 = 2, r = 5$; determina s_6

42. $a_1 = 9, r = \frac{1}{2}$; determina s_6

43. $a_1 = 80, r = 2$; determina s_7

44. $a_1 = 2, r = -2$; determina s_{12}

45. $a_1 = -15, r = -\frac{1}{2}$; determina s_9

46. $a_1 = \frac{3}{4}, r = 3$; determina s_7

47. $a_1 = -9, r = \frac{2}{5}$; determina s_5

48. $a_1 = 35, r = \frac{1}{5}$; determina s_{12}

Para cada sucesión geométrica, determina la razón común, r, y luego escribe una expresión para el término general (enésimo), a_n.

49. $7, \frac{7}{2}, \frac{7}{4}, \frac{7}{8}, \ldots$

50. $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \ldots$

51. $9, 18, 36, 72, \ldots$

52. $2, 6, 18, 54, \ldots$

53. $2, -6, 18, -54, \ldots$

54. $-1, -4, -16, -64, -256, \ldots$

55. $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}$

56. $\frac{2}{3}, \frac{10}{3}, \frac{50}{3}, \frac{250}{3}, \ldots$

Determina la suma de los términos en cada sucesión geométrica.

57. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

58. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

59. $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \ldots$

60. $1, -\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, -\frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \ldots$

61. $12, 6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$

62. $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \ldots$

63. $5, 2, \frac{4}{5}, \frac{8}{25}, \ldots$

64. $-\frac{4}{3}, -\frac{4}{9}, -\frac{4}{27}, -\frac{4}{81}, \ldots$

Dados s_n, a_1 y r, determina n en cada serie geométrica.

65. $s_n = 93, a_1 = 3$, y $r = 2$

66. $s_n = 80, a_1 = 2$, y $r = 3$

67. $s_n = \frac{189}{32}, a_1 = 3$, y $r = \frac{1}{2}$

68. $s_n = \frac{104}{9}, a_1 = 8$, y $r = \frac{1}{3}$

Determina la suma de cada serie geométrica infinita.

69. $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$

70. $16 + 8 + 4 + 2 + \cdots$

71. $4 + \frac{8}{3} + \frac{16}{9} + \frac{32}{27} + \cdots$

72. $6 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \cdots$

73. $-60 + 20 - \frac{20}{3} + \frac{20}{9} - \cdots$

74. $2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{16}{27} + \cdots$

75. $-12 - \frac{12}{5} - \frac{12}{25} - \frac{12}{125} - \cdots$

76. $7 - 1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{49} + \cdots$

Escribe cada número con decimales periódicos (o que se repiten) como una razón de enteros.

77. 0.242424...

78. 0.454545...

79. 0.7777...

80. 0.375375...

81. 0.515151...

82. 0.742742...

Resolución de problemas

83. En una sucesión geométrica, $a_2 = 15$ y $a_5 = 405$; determina r y a_1.

84. En una sucesión geométrica, $a_2 = 27$ y $a_5 = 1$; determina r y a_1.

85. En una sucesión geométrica, $a_3 = 28$ y $a_5 = 112$; determina r y a_1.

86. En una sucesión geométrica, $a_2 = 12$ y $a_5 = -324$; determina r y a_1.

87. **Barra de pan** Actualmente una barra de pan cuesta $1.40. Determina su precio al cabo de 8 años (al inicio del noveno año), si la inflación creciera a una razón constante de 3% por año. *Sugerencia:* después de 1 año (al inicio del segundo año), el costo de la barra es de $1.40(1.03). Después de 2 años (al inicio del tercer año), el costo sería $\$1.40(1.03)^2$, y así sucesivamente.

88. **Bicicleta** Actualmente una determinada bicicleta cuesta $300. Determina su costo después de 12 años, si la inflación creciera a una tasa constante de 4% anual.

89. **Masa** Una sustancia pierde la mitad de su masa cada día. Si al inicio hay 600 gramos de la sustancia, determina

a) el número de días después de los cuales queden 37.5 gramos de la sustancia.

b) la cantidad de sustancia que queda después de 9 días.

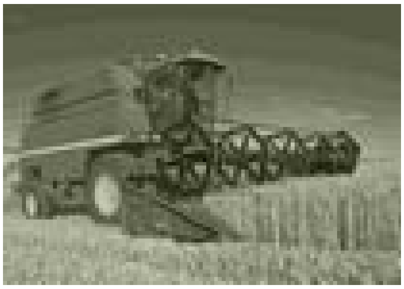
90. **Bacterias** El número de cierto tipo de bacterias se duplica cada hora. Si al inicio había 500 bacterias, ¿después de cuántas horas el número de bacterias será 32,000?

91. Población El 1 de julio de 2008, la población de Estados Unidos era alrededor de 303.5 millones de personas. Si la población crece a una tasa de 1.1% por año, determina

a) la población al cabo de 10 años.

b) el número de años para que la población se duplique.

92. Equipo para granja Un equipo para granja cuesta \$105,000 y su valor disminuye 15% cada año. Determina el valor del equipo al cabo de 4 años.



© Jose Ignacio Soto/Shutterstock

93. Luz filtrada La cantidad de luz que se filtra a través de un lago, disminuye un medio por cada metro de profundidad.

a) Escribe una sucesión que indique la cantidad de luz que se tiene a profundidades de 1, 2, 3, 4 y 5 metros.

b) ¿Cuál es el término general de la sucesión?

c) ¿Cuál es la cantidad de luz que llega a una profundidad de 7 metros?

94. Péndulo En cada oscilación (de izquierda a derecha o de derecha a izquierda), un péndulo recorre 80% de la oscilación que le precede. Si la primera oscilación es de 10 pies, determina la distancia total que recorrió el péndulo hasta el momento en que se detuvo.

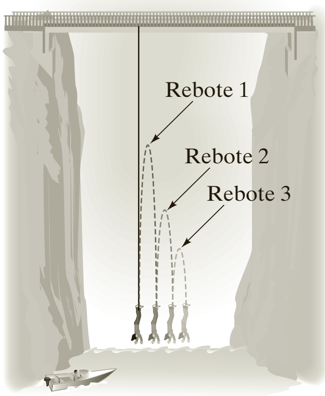
95. Inversión Si inviertes \$10,000 en una cuenta de ahorros que paga 6% de interés anual. Determina la cantidad en tu cuenta al final de 8 años.

96. Líquido de contraste Por razones médicas, se le inyecta un líquido de contraste a Mark Damion. Después de cada hora quedan dos tercios del líquido de contraste que había una hora antes. Después de 10 horas, ¿cuánto líquido permanece en el sistema de Mark?

97. Salto en bungee Shawna Kelly salta en un bungee desde un puente sobre agua. En el salto inicial, la cuerda del bungee se estira 220 pies. Supón que el primer rebote alcanza una altura de 60% del salto original y que cada rebote adicional alcanza una altura de 60% del rebote anterior.

a) ¿Cuál será la altura del cuarto rebote?

b) En teoría, Shawna nunca pararía de rebotar, pero en la realidad, sí lo hará. Utiliza la serie geométrica infinita para estimar la distancia total que Shawna recorre en dirección descendente.



98. Salto en bungee Repite el inciso **b)** del ejercicio 97, pero esta vez determina la distancia total recorrida en dirección *ascendente*.

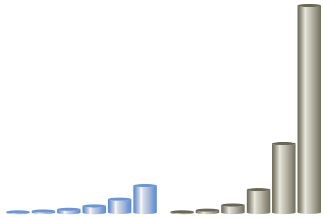
99. Pelota de ping-pong Una pelota de ping-pong cae de una mesa de 30 pulgadas de altura. Supón que el primer rebote alcanza 70% de la distancia desde la que cayó y cada rebote adicional alcanza 70% de la altura del rebote anterior.

a) ¿A qué altura llegará la pelota en el tercer rebote?

b) En teoría, la pelota nunca dejaría de rebotar, pero en la realidad lo hará. Estima la distancia total que recorre la pelota en dirección *descendente*.

100. Pelota de ping-pong Repite el inciso **b)** del ejercicio 99, pero esta vez determina la distancia total recorrida en dirección *ascendente*.

101. Montón de fichas Supón que formas montones de fichas de color azul, de tal forma que hay una ficha azul en el primer montón y en cada montón sucesivo hay el doble de fichas que en la pila anterior. Así, tendrías montones de fichas azules con 1, 2, 4, 8, y así sucesivamente. También forma montones de fichas grises, iniciando con una ficha gris y luego triplicando el número de fichas en cada montón sucesivo. Así, los montones de fichas grises tendrían 1, 3, 9, 27 y así sucesivamente. ¿Cuántas fichas más habrá en el sexto montón de fichas grises que en el sexto montón de fichas azules?



102. Montón de monedas Si inicias con \$1 y duplicas tu dinero cada día, ¿cuántos días tardarás en superar \$1,000,000?

103. Depreciación Un método de depreciación de un equipo de cómputo en una declaración de impuestos es el método de disminución de saldo. Con este método se deprecia cada año un porcentaje dado del costo del equipo de cómputo. Supón que un equipo de cómputo tiene una vida de 5 años y se deprecia por medio del método de disminución de saldo. Entonces, al final del primer año, pierde $\frac{1}{5}$ de su valor y conserva $\frac{4}{5}$ de su valor. Al final del segundo año pierde $\frac{1}{5}$ de los $\frac{4}{5}$ restantes de su valor, y así sucesivamente. Un automóvil tiene una expectativa de vida de 5 años y cuesta \$15,000.

a) Escribe una sucesión que muestre el valor que queda del automóvil para cada uno de los primeros 3 años.

b) ¿Cuál es el término general de esta sucesión?

c) Determina el valor del automóvil al final de los 5 años.

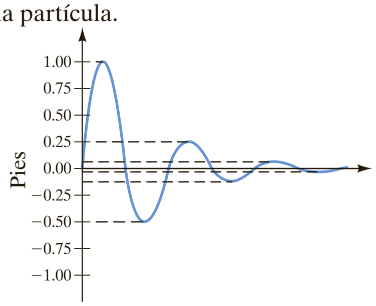
104. Valor de desecho En el ejercicio 77, de la página 613, del conjunto de ejercicios 9.6, se dio una fórmula para el valor de desecho. El valor de desecho, S, se determina mediante $S = c(1 - r)^n$ donde c es el costo original, r es la tasa de depreciación anual y n es el número de años que el objeto se deprecia.

a) Si no has resuelto el ejercicio 103, hazlo ahora para determinar el valor del automóvil al final de los 5 años.

b) Utiliza la fórmula dada para determinar el valor de desecho del automóvil al final de los 5 años y compara esta respuesta con la respuesta que encontraste en el inciso **a)**.

105. Rebote de una pelota Una pelota se deja caer desde una altura de 10 pies. La pelota rebota hasta una altura de 9 pies. En cada rebote sucesivo, la pelota se eleva hasta 90% de la altura anterior. Determina la *distancia vertical total* que recorre la pelota hasta que se detiene.

106. **Acción de ondas** Una partícula sigue la trayectoria que se muestra en la onda. Determina la *distancia vertical total* que recorre la partícula.



107. La fórmula para el *enésimo* término de la sucesión geométrica es $a_n = a_1 r^{n-1}$. Si $a_1 = 1$, $a_n = r^{n-1}$.

a) Compara las gráficas de $y_1 = 2^{n-1}$ y $y_2 = 3^{n-1}$, ¿Cómo son?

b) Grafica ambas y_1 y y_2 y determina si tu respuesta del inciso **a)** fue correcta.

108. Utiliza tu calculadora graficadora para aproximar el valor de n, a la centésima más cercana, donde $100 = 3 \cdot 2^{n-1}$.

Ejercicios de conceptos y escritura

109. En una serie geométrica, si $|r| < 1$, ¿hacia dónde se aproxima r^n cuando n se hace más grande?

110. ¿La suma de una serie geométrica infinita existe cuando $|r| > 1$?

111. En una serie geométrica, ¿puede ser negativo el valor de r?

112. En una serie geométrica, ¿puede ser positivo el valor de r?

113. En una serie geométrica, si $a_1 = 6$ y $r = \frac{1}{4}$ ¿existe s_∞? Si es así, ¿cuál es su valor? Explica.

114. En una serie geométrica, Si $a_1 = 6$ y $r = -2$, ¿existe s_∞? Si es así, ¿cuál es su valor? Explica.

Problemas de desafío

115. Determina la suma de la sucesión 1, 2, 4, 8, ..., 1,048,576 y el número de términos en la sucesión.

Ejercicios de repaso acumulados

[3.6] **116.** Sea $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = x - 3$. Determina $(f \cdot g)(4)$.

[5.2] **117.** Multiplica $(2x - 3y)(3x^2 + 4xy - 2y^2)$.

[6.4] **118.** Despeja r de $S = \dfrac{2a}{1 - r}$.

[9.1] **119.** Sea $g(x) = x^3 + 9$. Determina $g^{-1}(x)$.

[9.6] **120.** Resuelve $\log x + \log(x - 1) = \log 20$.

[10.4] **121.** **Vela de un velero** Una vela de un velero tiene la forma de un triángulo rectángulo con un perímetro de 36 metros y una hipotenusa de 15 metros. Determina la longitud de cada cateto del triángulo.

Prueba de mitad de capítulo: 11.1-11.3

Para determinar tu comprensión del tema que se ha abordado hasta este momento, resuelve esta pequeña prueba. Las respuestas, y la sección en la que se trató el tema por primera vez, se proporcionan al final del libro. Repasa el tema de las preguntas que respondiste de forma incorrecta.

1. Escribe los primeros cinco términos de la sucesión cuyo *enésimo* término es $a_n = -3n + 7$.

2. Si $a_n = n(n + 6)$, determina el séptimo término.

3. Determina la primera y la tercera sumas parciales, s_1 y s_3, para la sucesión cuyo término *enésimo* es $a_n = 2^n - 1$.

4. Escribe los tres términos siguientes de la sucesión 5, 1, −3, −7, −11,....

5. Evalúa la serie $\sum_{i=1}^{5} (4i - 3)$.

6. Si el término general de una sucesión es $a_n = \frac{1}{4}n + 9$, escribe su expresión usando el signo Σ para representar la quinta suma parcial.

7. Escribe los primeros cuatro términos de la sucesión aritmética con $a = -6$ y $d = 5$. Determina una expresión para el término general a_n.

8. Determina d para la sucesión aritmética con $a_1 = \frac{11}{2}$ y $a_7 = -\frac{1}{2}$.

9. Determina n para la sucesión aritmética con $a_1 = 22$, $a_n = -3$, y $d = -5$.

10. Determina la diferencia común, d, y la suma, s_6, para la sucesión aritmética con $a_1 = -8$ y $a_6 = 7$.

11. Determina s_{10} para la sucesión aritmética con $a_1 = \frac{5}{2}$ y $d = \frac{1}{2}$.

12. Determina el número de términos en la sucesión aritmética −7, 0, 7, 14, …, 70.

13. Se enciman troncos en una pila con 16 troncos en la fila inferior, 15 en la siguiente, 14 en la otra, y así sucesivamente, hasta que la fila superior termina con un tronco. Cada fila tiene un tronco menos que la fila que le precede. ¿Cuántos troncos hay en la pila?

14. Escribe los primeros cinco términos de la serie geométrica con $a_1 = 100$ y $r = -\frac{1}{2}$.

15. Determina a_7 para la sucesión geométrica con $a_1 = 27$ y $r = \frac{1}{3}$.

(*Continúa en la siguiente página*)

16. Determina s_6 para la sucesión geométrica con $a_1 = 5$ y $r = 2$.

17. Para la sucesión geométrica $8, -\frac{16}{3}, \frac{32}{9}, -\frac{64}{27}, \ldots$, determina r.

18. Determina la suma de la serie infinita $12, 4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \ldots$.

19. Escribe el decimal periódico 0.878787... como un cociente de dos enteros.

20. **a)** ¿Qué es una sucesión?
b) ¿Qué es una sucesión aritmética?
c) ¿Qué es una sucesión geométrica?
d) ¿Qué es una serie?

11.4 Teorema del binomio

1 Evaluar factoriales.
2 Utilizar el triángulo de Pascal.
3 Utilizar el teorema del binomio.

1 Evaluar factoriales

Para comprender el teorema del binomio debes entender lo que son los **factoriales**.

n Factorial

La notación ***n*!** se lee "***n* factorial**."

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(1)$$

para cualquier entero positivo n.

Ejemplos

$$6! = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 720$$
$$7! = 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 5040$$

Observa que, por definición, **0! es 1**.

Cómo utilizar tu calculadora

Calculadora científica

Los factoriales se pueden obtener en calculadoras que tienen una tecla $\boxed{n!}$ o $\boxed{x!}$. Con frecuencia, la tecla de factorial es una tecla de segunda función.

En los ejemplos siguientes las respuestas aparecen después de $\boxed{n!}$.

Evaluar 6!	6 $\boxed{2^{nd}}$ $\boxed{n!}$	720
Evaluar 9!	9 $\boxed{2^{nd}}$ $\boxed{n!}$	362880

Calculadora graficadora

En la mayoría de las calculadoras graficadoras los factoriales se encuentran en $\boxed{\text{MATH}}$, en el menú de funciones de probabilidad (PRB).

En la calculadora TI-84 Plus, presiona $\boxed{\text{MATH}}$, y luego desplázate hacia la derecha, con la tecla de flecha derecha, $\boxed{\blacktriangleright}$, tres veces, hasta que obtengas PRB. La $n!$ (o!) es el cuarto elemento del menú.
Para determinar 5! o 6!, sigue esta secuencia de teclas.

SECUENCIA DE TECLAS	RESPUESTA
$\boxed{5}$ $\boxed{\text{MATH}}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\text{ENTER}}$	120
$\boxed{6}$ $\boxed{\text{MATH}}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\text{ENTER}}$	720

Comprendiendo el álgebra

A un polinomio de dos términos, como $a + b$ o $2x + 3y$, se le denomina binomio.

2 Utilizar el triángulo de Pascal

Mediante la multiplicación de polinomios podemos obtener los siguientes desarrollos de las potencias del binomio $a + b$: estas multiplicaciones se denominan desarrollo del binomio.

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1\\
(a+b)^1 &= a+b\\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\
(a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\\
(a+b)^6 &= a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6
\end{aligned}$$

© Wikicommons

Blaise Pascal
El matemático francés Blaise Pascal (1623-1662) es responsable del desarrollo de la matriz de números del triángulo de Pascal.

Observa que al desarrollar un binomio de la forma $(a+b)^n$,

1. Existen $n+1$ términos en el desarrollo.
2. El primer término es a^n y el último término es b^n.
3. Si se leen de izquierda a derecha, los exponentes de a decrecen en 1 de un término a otro, mientras que los exponentes de b aumentan en 1 de un término a otro.
4. La suma de los exponentes de las variables en cada término es n.
5. Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales.

Si solamente examinamos las variables en $(a+b)^5$, tenemos a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4 y b^5.

Podemos determinar los coeficientes numéricos de cada término del desarrollo de $(a+b)^n$ mediante el uso del **triángulo de Pascal**. Por ejemplo, si $n=5$, podemos determinar los coeficientes numéricos de $(a+b)^5$ como sigue.

Exponente en el binomio	Triángulo de Pascal
$n=0$	1
$n=1$	1 1
$n=2$	1 2 1
$n=3$	1 3 3 1
$n=4$	1 4 6 4 1
$n=5$	1 5 10 10 5 1
$n=6$	1 6 15 20 15 6 1

Examinemos el renglón 5 ($n=4$) y el renglón 6 ($n=5$).

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1$$

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

Suma de dos números.

Observa que el primero y el último número de cada renglón son 1, y que los números interiores se obtienen sumando los dos números del renglón anterior (a la derecha y a la izquierda). Los coeficientes numéricos de $(a+b)^5$ son 1, 5, 10, 10, 5, y 1. Así, podemos escribir el desarrollo de $(a+b)^5$ mediante la información de los incisos 1 a 5 anteriores para las variables y sus exponentes, y utilizando el triángulo de Pascal para los coeficientes.

$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

Este método de desarrollo de un binomio no es práctico cuando n es grande.

3 Utilizar el teorema del binomio

En breve presentaremos un método más práctico, llamado teorema del binomio, para desarrollar expresiones de la forma $(a+b)^n$. Sin embargo, antes de presentar esta fórmula necesitamos explicar cómo determinar los coeficientes binomiales de la forma $\binom{n}{r}$.

Coeficientes binomiales

Para n y r enteros no negativos, $n \geq r$.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

El coeficiente binomial $\binom{n}{r}$ se lee "el número de *combinaciones* de n elementos tomando r a la vez". Las combinaciones se utilizan en muchas áreas de las matemáticas, incluyendo el estudio de la probabilidad.

EJEMPLO 1 Evalúa $\binom{6}{2}$.

Solución Usando la definición, si sustituimos n por 6 y r por 2, obtenemos

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\cdot(6-2)!} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{(2\cdot 1)\cdot(\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1})} = 15$$

Por lo tanto, $\binom{6}{2}$ es igual a 15.

Resuelve ahora el ejercicio 9

EJEMPLO 2 Evalúa.

a) $\binom{7}{4}$ **b)** $\binom{8}{8}$ **c)** $\binom{5}{0}$

Solución

a) $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!\cdot(7-4)!} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{(\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1})(3\cdot 2\cdot 1)} = 35$

b) $\binom{8}{8} = \frac{8!}{8!\,(8-8)!} = \frac{\cancel{8!}}{\cancel{8!}\cdot 0!} = \frac{1}{1} = 1$ Recuerda que $0! = 1$.

c) $\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!\cdot(5-0)!} = \frac{\cancel{5!}}{0!\cdot\cancel{5!}} = \frac{1}{1} = 1$

Resuelve ahora el ejercicio 17

Al estudiar el inciso **b)** y **c)** del ejemplo 2, puedes deducir que para cualquier entero positivo n,

$$\binom{n}{n} = 1 \quad \text{y} \quad \binom{n}{0} = 1$$

Cómo utilizar tu calculadora

En la mayoría de las calculadoras graficadoras se utiliza la notación ${}_nC_r$ en lugar de $\binom{n}{r}$. Así, $\binom{7}{4}$ se representaría como ${}_7C_4$.

En la calculadora TI-84 Plus, la notación ${}_nC_r$ se puede encontrar en el menú PBR. En esta ocasión el elemento 3 es ${}_nC_r$. Para determinar ${}_7C_4$ o ${}_8C_2$, utiliza la siguiente secuencia de teclas:

	SECUENCIA DE TECLAS	RESPUESTA
${}_7C_4$	7 MATH ▶ ▶ ▶ 3 4 ENTER	35
${}_8C_2$	8 MATH ▶ ▶ ▶ 3 2 ENTER	28

Si utilizas una calculadora graficadora diferente, consulta el manual para aprender como evaluar combinaciones.

Ahora presentaremos el teorema del binomio.

Teorema del binomio

Para cualquier entero positivo n,

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{n}a^0b^n$$

Observa en el teorema del binomio que la suma de los exponentes de las variables en cada término es n. En la combinación, el número de arriba siempre es n y el número inferior siempre es igual al del exponente de la segunda variable del término.

Por ejemplo, si consideramos el término $\binom{n}{3}a^{n-3}b^3$.

El número de arriba siempre es n. La suma de los exponentes siempre es igual a n.

$$\binom{n}{3} \quad a^{n-3}b^3$$

El número inferior siempre coincide con la potencia de la segunda variable.

Ahora desarrollaremos $(a + b)^5$ mediante el teorema del binomio y veremos si obtenemos la misma expresión que cuando utilizamos la multiplicación de polinomios y el triángulo de Pascal.

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= \binom{5}{0}a^5b^0 + \binom{5}{1}a^{5-1}b^1 + \binom{5}{2}a^{5-2}b^2 + \binom{5}{3}a^{5-3}b^3 + \binom{5}{4}a^{5-4}b^4 + \binom{5}{5}a^{5-5}b^5 \\ &= \binom{5}{0}a^5b^0 + \binom{5}{1}a^4b^1 + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}a^1b^4 + \binom{5}{5}a^0b^5 \\ &= \frac{5!}{0!\cdot 5!}a^5 + \frac{5!}{1!\cdot 4!}a^4b + \frac{5!}{2!\cdot 3!}a^3b^2 + \frac{5!}{3!\cdot 2!}a^2b^3 + \frac{5!}{4!\cdot 1!}ab^4 + \frac{5!}{5!\cdot 0!}b^5 \\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\end{aligned}$$

Ésta es la misma expresión que obtuvimos antes.

EJEMPLO 3 Utiliza el teorema del binomio para desarrollar $(2x + 3)^6$.

Solución Si utilizamos $2x$ como a y 3 como b, obtenemos

$$\begin{aligned}(2x+3)^6 &= \binom{6}{0}(2x)^6(3)^0 + \binom{6}{1}(2x)^5(3)^1 + \binom{6}{2}(2x)^4(3)^2 + \binom{6}{3}(2x)^3(3)^3 + \binom{6}{4}(2x)^2(3)^4 + \binom{6}{5}(2x)^1(3)^5 + \binom{6}{6}(2x)^0(3)^6 \\ &= 1(2x)^6 + 6(2x)^5(3) + 15(2x)^4(9) + 20(2x)^3(27) + 15(2x)^2(81) + 6(2x)(243) + 1(729) \\ &= 64x^6 + 576x^5 + 2160x^4 + 4320x^3 + 4860x^2 + 2916x + 729\end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 19

EJEMPLO 4 Utiliza el teorema del binomio para desarrollar $(5x - 2y)^4$.

Solución Escribimos $(5x - 2y)^4$ como $[5x + (-2y)]^4$. En el teorema del binomio utilizamos $5x$ en vez de a y $-2y$ en vez de b.

$$\begin{aligned}[5x + (-2y)]^4 &= \binom{4}{0}(5x)^4(-2y)^0 + \binom{4}{1}(5x)^3(-2y)^1 + \binom{4}{2}(5x)^2(-2y)^2 + \binom{4}{3}(5x)^1(-2y)^3 + \binom{4}{4}(5x)^0(-2y)^4 \\ &= 1(5x)^4 + 4(5x)^3(-2y) + 6(5x)^2(-2y)^2 + 4(5x)(-2y)^3 + 1(-2y)^4 \\ &= 625x^4 - 1000x^3y + 600x^2y^2 - 160xy^3 + 16y^4\end{aligned}$$

Resuelve ahora el ejercicio 25

CONJUNTOS DE EJERCICIOS 11.4

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

binomiales	0	1	2	4	producto
de Pascal	10	20	factorial	suma	cociente

1. La notación $n!$ se lee como "n ________."
2. El valor de $n!$ ($n \neq 0$) es el ________ de los números enteros de 1 a n.
3. El valor de $0!$ es ________.
4. El valor de $2!$ es ________.
5. El número de términos en el desarrollo de $(a + b)^{19}$ es ________.
6. La fórmula $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r! \cdot (n - r)!}$ se utiliza para determinar los coeficientes ________ en el desarrollo de $(a + b)^n$.
7. El valor de $\binom{5}{3}$ es ________.
8. Los coeficientes numéricos de los términos en el desarrollo de $(a + b)^n$ pueden determinarse utilizando el triángulo ________.

Practica tus habilidades

Evalúa cada combinación.

9. $\binom{5}{2}$
10. $\binom{6}{3}$
11. $\binom{5}{5}$
12. $\binom{9}{6}$
13. $\binom{7}{0}$
14. $\binom{12}{10}$
15. $\binom{8}{4}$
16. $\binom{11}{8}$
17. $\binom{8}{2}$
18. $\binom{10}{4}$

Utiliza el teorema del binomio para desarrollar cada expresión.

19. $(x + 4)^3$
20. $(x - 4)^3$
21. $(2x - 3)^3$
22. $(2x + 3)^3$
23. $(a - b)^4$
24. $(2r + s^2)^4$
25. $(3a - b)^5$
26. $(x + 2y)^5$
27. $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^4$
28. $\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}\right)^4$
29. $\left(\frac{x}{2} - 3\right)^4$
30. $(3x^2 + y)^5$

Escribe los cuatro primeros términos de cada desarrollo.

31. $(x + 10)^{10}$
32. $(2x + 3)^8$
33. $(3x - y)^7$
34. $(3p - 2q)^{11}$
35. $(x^2 - 3y)^8$
36. $\left(2x + \frac{y}{7}\right)^9$

Resolución de problemas

37. ¿Cuáles son el primero, el segundo, penúltimo y último términos del desarrollo de $(x + 3)^8$?
38. ¿Cuáles son el primero, el segundo, penúltimo y último términos del desarrollo de $(x + 2)^{10}$?
39. ¿Cuáles son el primero, el segundo, penúltimo y último términos del desarrollo de $(2x + 5)^6$?
40. ¿Cuáles son el primero, el segundo, penúltimo y último términos del desarrollo de $(3x - 4)^5$?

Ejercicios de conceptos y escritura

41. ¿Es $n!$ igual a $n \cdot (n - 1)!$? Explica y proporciona un ejemplo que apoye tu respuesta.
42. ¿Es $(n + 1)!$ igual a $(n + 1)! \cdot n!$? Explica y proporciona un ejemplo que apoye tu respuesta.
43. ¿Es $(n - 3)!$ igual a $(n - 3)(n - 4)(n - 5)!$ para $n \geq 5$? Explica y proporciona un ejemplo que apoye tu respuesta.
44. ¿Es $(n + 2)!$ igual a $(n + 2)(n + 1)(n)(n - 1)!$ para $n \geq 1$? Explica y proporciona un ejemplo que apoye tu respuesta.
45. ¿Bajo qué condiciones $\binom{n}{m}$, tendrá un valor de 1? Donde n y m son enteros no negativos.
46. ¿Puede $\binom{n}{m}$ llegar a tener un valor de 0? Explica.
47. Escribe el teorema del binomio usando notación de sumatoria.
48. Demuestra que $\binom{n}{r} = \binom{n}{n - r}$ para cualquier número entero n y r con $r \leq n$.

Ejercicios de repaso acumulados

[3.4] **49.** Determina la intersección con el eje y de la recta $2x + y = 10$.

[4.1] **50.** Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y = 4$$
$$\frac{2}{3}x - y = \frac{8}{3}$$

[5.8] **51.** Resuelve $x(x - 11) = -18$.

[7.4] **52.** Simplifica $\sqrt{20xy^4}\sqrt{6x^5y^7}$.

[9.1] **53.** Encuentra $f^{-1}(x)$ si $f(x) = 3x + 8$.

Resumen del capítulo 11

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 11.1	
Una **sucesión** de números es una lista de números acomodados en un orden específico. Cada número se denomina **término** de la sucesión.	2, 6, 10, 14, 18, 22,... es una sucesión. 7, 14, 21, 28, 35, 42,... es una sucesión.
Una **sucesión infinita** es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales. Una **sucesión finita** es una función cuyo dominio solamente incluye a los primeros n números naturales.	$\begin{array}{llllllll} \text{Dominio:} & \{1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, & \ldots\} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \text{Rango:} & \{7, & 14, & 21, & 28, & \ldots & 7n, & \ldots\} \end{array}$ La sucesión infinita es 7, 14, 21, 28,... $\begin{array}{lllll} \text{Dominio:} & \{1, & 2, & 3, & 4\} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Rango:} & \{4, & 8, & 12, & 16\} \end{array}$ La sucesión finita es 4, 8, 12, 16.
El **término general de una sucesión**, $\boldsymbol{a_n}$, puede determinar la sucesión.	Sea $a_n = n^2 - 3$. Escribe los primeros tres términos de esta sucesión $a_1 = 1^2 - 3 = -2$ $a_2 = 2^2 - 3 = 1$ $a_3 = 3^2 - 3 = 6$ Los primeros tres términos de la sucesión son $-2, 1, 6$.
Una **sucesión creciente** es una sucesión en la que cada término es mayor que el término que le precede. Una **sucesión decreciente** es una sucesión en la que cada término es menor que el término que le precede.	$-2, 5, 7, 11$ es una sucesión creciente. 50, 48, 46, 44 es una sucesión decreciente.
Una **serie** es la suma de los términos de una sucesión. Una serie puede ser finita o infinita.	Si la sucesión es 1, 3, 5, 7, 9, entonces la serie es $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$. Si la sucesión es $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots, \left(\frac{1}{3}\right)^n, \ldots$ Entonces la serie es $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \cdots$
Una **suma parcial**, s_n, de una sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ es la suma de los primeros n términos. Esto es, $s_1 = a_1$ $s_2 = a_1 + a_2$ $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$ $\vdots$ $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$	Sea $a_n = \dfrac{5 + n}{n^2}$. Calcula s_1 y s_3. $s_1 = a_1 = \dfrac{5+1}{1^2} = \dfrac{6}{1} = 6$ $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$ $= \dfrac{5+1}{1^2} + \dfrac{5+2}{2^2} + \dfrac{5+3}{3^2}$ $= \dfrac{6}{1} + \dfrac{7}{4} + \dfrac{8}{9} = 8\dfrac{23}{36}$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 11.1 (cont.)	
Una serie puede escribirse mediante la **notación sumatoria**: $$\sum_{i=1}^{n} a_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$ *i* es el **índice de la sumatoria**, *n* es el **límite superior de la sumatoria** y 1 es el **límite inferior de la sumatoria**.	$$\sum_{i=1}^{4}(3i-7) = (3\cdot1-7)+(3\cdot2-7)+(3\cdot3-7)+(3\cdot4-7)$$ $$= -4-1+2+5=2$$ Si $a_n = 6n^2 + 11$, la tercera suma parcial, s_3, en la notación sumatoria se escribe como $\sum_{i=1}^{3}(6i^2+11)$.
Sección 11.2	
Una **sucesión aritmética** es una sucesión en la que cada término después del primero difiere del término que le precede en una **diferencia común**, ***d***.	**Sucesión aritmética** / **Diferencia común, *d*** $3, 8, 13, 18, 23, \ldots$ — $d = 8 - 3 = 5$ $20, 14, 8, 2, -4, \ldots$ — $d = 14 - 20 = -6$
El ***enésimo* término**, a_n, de una sucesión aritmética es $$a_n = a_1 + (n-1)d$$	El *enésimo* término de la sucesión aritmética con $a_1 = 7$ y $d = -5$ es $$\begin{aligned} a_n &= 7 + (n-1)(-5) \\ &= 7 - 5n + 5 \\ &= -5n + 12 \end{aligned}$$ Para esta sucesión el vigésimo término es $$\begin{aligned} a_{20} &= -5(20) + 12 = -100 + 12 \\ &= -88 \end{aligned}$$
Una **serie aritmética** es la suma de los términos de una sucesión aritmética. La suma de los primeros *n* términos s_n, de una sucesión aritmética, también conocida como la ***enésima* suma parcial** es $$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$ Para una serie aritmética, esta suma está determinada por la fórmula $$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$	Determina la suma de los primeros 30 números naturales. Esto es, determina la suma de $$1 + 2 + 3 + \cdots + 30$$ Como $a_1 = 1$, $a_{30} = 30$, y $n = 30$, la suma es $$s_{30} = \frac{30(1+30)}{2} = \frac{30(31)}{2} = 465$$
Sección 11.3	
Una **sucesión geométrica** es una sucesión en la que cada término, a partir del segundo, es un múltiplo común del término que le precede. El múltiplo común se denomina **razón común**, *r*.	**Sucesión geométrica** / **Razón común, *r*** $2, 6, 18, 54, 162, \ldots$ — $r = \frac{6}{2} = 3$ $8, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \ldots$ — $r = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$
El ***enésimo* término**, a_n, de una sucesión geométrica es $$a_n = a_1 r^{n-1}$$	Para la sucesión geométrica con $a_1 = 5$, $r = \frac{1}{2}$ y $n = 6$, a_6 se determina como sigue $$a_6 = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} = 5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}$$
Una **serie geométrica** es la suma de los términos de una sucesión geométrica. La suma de los primeros *n* términos, s_n, de una sucesión aritmética, también conocida como la ***enésima* suma parcial**, es $$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$ Para una serie geométrica, esta suma está determinada por la fórmula $$s_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1$$	Para determinar la suma de los seis términos de una sucesión geométrica con $a_1 = 12$ y $r = \frac{1}{3}$, utiliza la fórmula con $n = 6$ para obtener $$s_6 = \frac{12\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^6\right]}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{12\left[1 - \frac{1}{729}\right]}{\frac{2}{3}} = \frac{12\left(\frac{728}{729}\right)}{\frac{1}{3}}$$ $$= 12\left(\frac{728}{729}\right)\left(\frac{3}{1}\right) = \frac{2912}{81} \text{ o } 35\frac{77}{81}$$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 11.3 (cont.)	
La suma de una serie geométrica infinita es $$s_\infty = \frac{a_1}{1-r} \text{ donde } \lvert r\rvert < 1$$	Para determinar la suma de la serie infinita $4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$, utiliza la fórmula con $a_1 = 4$ y $r = -\frac{1}{2}$ para obtener $$s_\infty = \frac{4}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{\frac{3}{2}} = 4\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{3} \text{ o } 2\frac{2}{3}$$
Sección 11.4	
***n* Factorial** $$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(1)$$ para cualquier entero positivo n. Observa que 0! Se define como 1.	$5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$ $8! = 8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 40{,}320$
Coeficientes binomiales Para n y r enteros no negativos $n \geq r$. $$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$$ $$\binom{n}{n} = 1 \quad \text{y} \quad \binom{n}{0} = 1$$	$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!} = \frac{7!}{3!\cdot4!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{3\cdot2\cdot1\cdot\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}} = 35$ $\binom{10}{10} = 1, \binom{10}{0} = 1$
Teorema del binomio Para cualquier entero positivo n. $$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{n}a^0b^n$$	$(x+2y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3(2y) + \binom{4}{2}x^2(2y)^2 + \binom{4}{3}x(2y)^3 + \binom{4}{4}(2y)^4$ $= 1\cdot x^4 + 4\cdot x^3(2y) + 6\cdot x^2(4y^2) + 4\cdot x(8y^3) + 1\cdot 16y^4$ $= x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4$

Ejercicios de repaso del capítulo 11

[11.1] *Escribe los primeros cinco términos de cada sucesión.*

1. $a_n = n + 5$ **2.** $a_n = n^2 + n - 3$ **3.** $a_n = \frac{12}{n}$ **4.** $a_n = \frac{n^2}{n+4}$

Determina el término indicado de cada sucesión.

5. $a_n = 3n - 10$, séptimo término.

6. $a_n = (-1)^n + 5$, séptimo término.

7. $a_n = \frac{n+17}{n^2}$, noveno término.

8. $a_n = (n)(n-3)$, décimo término.

Para cada sucesión, determina la primera y tercera sumas parciales s_1 y s_3.

9. $a_n = 2n + 5$

10. $a_n = n^2 + 11$

11. $a_n = \frac{n+3}{n+2}$

12. $a_n = (-1)^n(n+8)$

Escribe los siguientes tres términos de cada sucesión. Luego escribe una expresión para el término general, a_n.

13. $2, 4, 8, 16, \ldots$

14. $-27, 9, -3, 1, \ldots$

15. $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, \ldots$

16. $13, 9, 5, 1, \ldots$

Desarrolla cada serie. Luego determina la suma de cada serie.

17. $\sum_{i=1}^{3} i^2 + 10$

18. $\sum_{i=1}^{4} i(i+5)$

19. $\sum_{i=1}^{5} \frac{i^2}{6}$

20. $\sum_{i=1}^{4} \frac{i}{i+1}$

Para el conjunto de valores $x_1 = 3, x_2 = 9, x_3 = 7, x_4 = 10$, *evalúa la suma que se indica.*

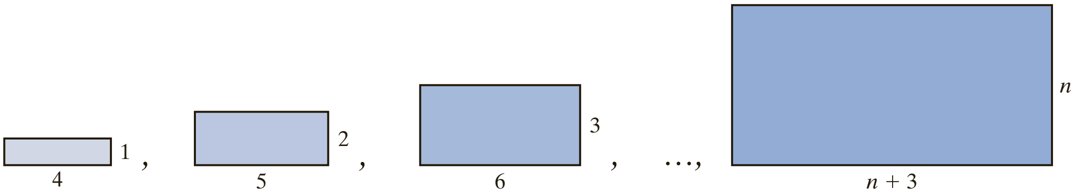
21. $\sum_{i=1}^{4} x_i$

22. $\sum_{i=1}^{4} (x_i)^2$

23. $\sum_{i=2}^{3} (x_i^2 + 1)$

24. $\left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2$

En los ejercicios 25 y 26, considera los rectángulos siguientes. Para el rectángulo enésimo, el largo es n + 3 y el ancho es n.



25. Perímetro

a) Determina los perímetros de los cuatro rectángulos y luego escribe los perímetros en una sucesión.

b) Determina el término general para el perímetro del rectángulo *enésimo* en la sucesión. Utiliza p_n para el perímetro.

26. Área

a) Determina las áreas de los cuatro rectángulos y luego escribe las áreas en una sucesión.

b) Determina el término general para el área del rectángulo *enésimo* en la sucesión. Utiliza a_n para el área.

[11.2] *Escribe los primeros cinco términos de la sucesión aritmética con el primer término y la diferencia común indicados.*

27. $a_1 = 5, d = 3$

28. $a_1 = 5, d = -\frac{1}{3}$

29. $a_1 = \frac{1}{2}, d = -2$

30. $a_1 = -20, d = \frac{1}{5}$

Para cada sucesión aritmética, determina el valor que se indica.

31. $a_1 = 6, d = 3$; determina a_9

32. $a_1 = 26, a_8 = -9$; determina d

33. $a_1 = -3, a_{11} = 2$; determina d

34. $a_1 = 22, a_n = -3, d = -5$; determina n

Determina s_n *y d para cada sucesión aritmética.*

35. $a_1 = 7, a_8 = 21, n = 8$

36. $a_1 = -2, a_7 = -38, n = 7$

37. $a_1 = \frac{3}{5}, a_6 = \frac{13}{5}, n = 6$

38. $a_1 = -\frac{10}{3}, a_9 = -6, n = 9$

Escribe los primeros cuatro términos de cada sucesión aritmética. Luego determina a_{10} *y* s_{10}.

39. $a_1 = -7, d = 4$

40. $a_1 = 8, d = -3$

41. $a_1 = \frac{5}{6}, d = \frac{2}{3}$

42. $a_1 = -60, d = 5$

Determina el número de términos de cada sucesión aritmética. Luego determina s_n.

43. $4, 9, 14, \ldots, 64$

44. $-7, -4, -1, \ldots, 14$

45. $\frac{6}{10}, \frac{9}{10}, \frac{12}{10}, \ldots, \frac{36}{10}$

46. $-9, -3, 3, 9, \ldots, 45$

[11.3] *Determina los primeros cinco términos de cada sucesión geométrica.*

47. $a_1 = 6, r = 2$

48. $a_1 = -56, r = \frac{1}{2}$

49. $a_1 = 20, r = -\frac{2}{3}$

50. $a_1 = -20, r = \frac{1}{5}$

Determina el término que se indica de cada sucesión geométrica.

51. $a_1 = 12, r = \frac{1}{3}$; determina a_5

52. $a_1 = 15, r = 2$; determina a_6

53. $a_1 = -8, r = -3$; determina a_4

54. $a_1 = \frac{1}{12}, r = \frac{2}{3}$; determina a_5

Determina cada suma.

55. $a_1 = 7, r = 2$; determina s_6

56. $a_1 = -84, r = -\frac{1}{4}$; determina s_5

57. $a_1 = 9, r = \frac{3}{2}$; determina s_4

58. $a_1 = 8, r = \frac{1}{2}$; determina s_7

Para cada sucesión geométrica, determina la razón común, r y luego escribe una expresión para el término general, a_n.

59. $6, 12, 24, \ldots$

60. $-6, -30, -150, \ldots$

61. $10, \frac{10}{3}, \frac{10}{9}, \ldots$

62. $\frac{9}{5}, \frac{18}{15}, \frac{36}{45}, \ldots$

Determina la suma de los términos en cada sucesión geométrica infinita.

63. $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$

64. $\frac{7}{2}, 1, \frac{2}{7}, \frac{4}{49}, \ldots$

65. $-8, \frac{8}{3}, -\frac{8}{9}, \frac{8}{27}, \ldots$

66. $-6, -4, -\frac{8}{3}, -\frac{16}{9}, \ldots$

Determina la suma de cada serie infinita.

67. $16 + 8 + 4 + 2 + 1 + \cdots$

68. $11 + \frac{11}{3} + \frac{11}{9} + \frac{11}{27} + \cdots$

69. $5 - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \cdots$

70. $-4, -\frac{8}{3} - \frac{16}{9}, -\frac{32}{27}, \ldots$

Escribe el decimal periódico como una razón de enteros.

71. 0.363636…

72. 0.783783783…

[11.4] *Utiliza el teorema del binomio para desarrollar la expresión.*

73. $(3x + y)^4$

74. $(2x - 3y^2)^3$

Escribe los cuatro primeros términos del desarrollo.

75. $(x - 2y)^9$

76. $(2a^2 + 3b)^8$

[11.2]

77. Suma de enteros Determina la suma de los enteros entre 101 y 200, inclusive.

78. Barriles de petróleo Los barriles de petróleo están apilados con 21 barriles en la fila inferior, 20 barriles en la segunda fila, 19 barriles en la tercera fila, y así sucesivamente, hasta la fila superior que solamente tiene un barril. ¿Cuántos barriles hay?

79. Salario Ahmed Mocanda acaba de iniciar en un trabajo nuevo con un salario anual de \$36,000. Se le ha dicho que su salario aumentará \$1000 por año durante los próximos 10 años.

a) Escribe una sucesión que muestre su salario para los primeros 4 años.

b) Escribe un término general de esta sucesión.

c) ¿Cuál será su salario dentro de 6 años?

d) ¿Cuánto dinero obtendrá en total en los primeros 11 años?

[11.3]

80. Dinero Imagínate que inicias con \$50, lo duplicas para obtener \$100, nuevamente lo duplicas para obtener \$200, y así sucesivamente. ¿Cuánto tendrás después de realizar este proceso 10 veces?

81. Salario Gertude Dibble inició un trabajo nuevo el día 1 de enero de 2010, con un salario mensual de \$1600. Su jefa ha acordado darle 4% de aumento cada mes, durante el resto del año.

a) ¿Cuál fue el salario de Gertude en julio?

b) ¿Cuál fue el salario de Gertude en diciembre?

c) ¿Cuánto dinero ganó Gertude en 2010?

82. Inflación Si la tasa de inflación fue constante, de 8% anual (cada año el costo de vida es 8% mayor que el año anterior), ¿cuánto costaría dentro de 12 años un producto que ahora cuesta \$200?

83. Péndulo En cada oscilación (de izquierda a derecha o de derecha a izquierda), un péndulo recorre 92% de lo que recorrió en la oscilación que le precede. Si la primera oscilación es de 12 pies, determina la distancia recorrida por el péndulo hasta el momento en que se detiene.

Prueba de práctica del capítulo 11

CHAPTER Test Prep VIDEOS

Los videos de la prueba de práctica del capítulo proporcionan soluciones totalmente resueltas para cualquiera de los ejercicios que quieras repasar. Los videos de la prueba de práctica del capítulo están disponibles vía MyMathLab, o en YouTube *(busca "Angel Intermediate Algebra" y da click en "Channels").*

1. ¿Qué es una serie?

2. a) ¿Qué es una sucesión aritmética?

b) ¿Qué es una sucesión geométrica?

3. Escribe los cinco primeros términos de la sucesión, si $a_n = \frac{n-2}{3n}$.

4. Determina la primera y tercera sumas parciales, si $a_n = \frac{2n+1}{n^2}$.

5. Desarrolla la siguiente serie y determina la suma.

$$\sum_{i=1}^{5} (2i^2 + 3)$$

6. Para $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 8$ y $x_4 = 10$, determina $\sum_{i=1}^{4} (x_i)^2$.

7. Escribe el término general de la sucesión aritmética siguiente.

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \ldots$$

8. Escribe el término general de la sucesión geométrica siguiente.

$$5, 10, 20, 40, \ldots$$

En los ejercicios 9 y 10, escribe los primeros cuatro términos de cada sucesión.

9. $a_1 = 15, d = -6$

10. $a_1 = \frac{5}{12}, r = \frac{2}{3}$

11. Determina a_{11} cuando $a_1 = 40$ y $d = -8$.

12. Determina s_8 para la sucesión aritmética con $a_1 = 7$ y $a_8 = -12$.

13. Determina el número de términos en la sucesión aritmética $-4, -16, -28, \ldots, -136$.

14. Determina a_6 cuando $a_1 = 8$ y $r = \frac{2}{3}$.

15. Determina s_7 cuando $a_1 = \frac{3}{5}$ y $r = -5$.

16. Determina la razón común y escribe una expresión para el término general de la sucesión $15, 5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \ldots$.

17. Determina la suma de la serie geométrica infinita.

$$4 + \frac{8}{3} + \frac{16}{9} + \frac{32}{27} + \cdots$$

18. Escribe 0.3939... como una razón de enteros.

19. Evalúa $\binom{8}{3}$.

20. Utiliza el teorema del binomio para desarrollar $(x + 2y)^4$.

21. **Media aritmética** Las 5 calificaciones de Paul Misselwitz son 76, 93, 83, 87 y 71. Utiliza $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$ para determinar la media aritmética de las calificaciones de Paul.

22. **Una pila de troncos** Se apilan troncos con 13 troncos en la fila inferior, 12 troncos en la segunda fila, 11 troncos en la tercera fila, y así sucesivamente, hasta la parte superior. ¿Cuántos troncos hay?

23. **Ahorro para el retiro** Con la finalidad de ahorrar para su retiro, Jamie Monroe planea ahorrar \$1000 el primer año, \$2000 el segundo año, \$3000 el tercer año, e incrementar la cantidad ahorrada en \$1000 en cada año sucesivo. ¿Cuánto habrá ahorrado al final del vigésimo año de estar ahorrando?

24. **Ingresos** Yolanda Rivera gana \$700 a la semana trabajando en una oficina de seguros. Su jefe le ha garantizado un aumento de 4% a la semana durante las siguientes 7 semanas. ¿Cuánto recibirá en la sexta semana?

25. **Cultivo de bacterias** El número de bacterias en un cultivo se triplica cada hora. Si al inicio había 500 bacterias en el cultivo, ¿cuántas bacterias habrá en el cultivo al final de la sexta hora?

Prueba de repaso acumulada

Realiza la siguiente prueba y verifica tu respuesta con aquellas que se dan al final del libro. Repasa cualquier pregunta que hayas contestado incorrectamente. La sección en donde se revisó el tema se indica después de cada respuesta.

1. Despeja b de $A = \frac{1}{2}bh$.

2. Determina una ecuación de la recta que pasa por $(4, -2)$ y $(1, 9)$. Escribe la ecuación en la forma de pendiente-intersección.

3. Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + 2y + 2z &= 2 \\ 3x + 3y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

4. Multiplica $(5x^3 + 4x^2 - 6x + 2)(x + 5)$.

5. Factoriza $x^3 + 2x - 6x^2 - 12$.

6. Factoriza $(a + b)^2 + (a + b) + 16$.

7. Resta $5 - \frac{x - 1}{x^2 + 3x - 10}$.

8. y varía directamente con el cuadrado de z. Si y es 80 cuando z es 20, determina y cuando z es 50.

9. Si $f(x) = 2\sqrt[3]{x - 3}$ y $g(x) = \sqrt[3]{5x - 15}$, determina todos los valores de x para los cuales $f(x) = g(x)$.

10. Resuelve $\sqrt{6x - 5} - \sqrt{2x + 6} - 1 = 0$.

11. Resuelve completando el cuadrado.

$$x^2 + 2x + 15 = 0$$

12. Resuelve por medio de la fórmula cuadrática.

$$x^2 - \frac{x}{5} - \frac{1}{3} = 0$$

13. **Números** El doble del cuadrado de un número positivo, disminuido nueve veces el mismo número da como resultado 5. Determina el número.

14. Grafica $y = x^2 - 4x$ y marca los vértices.

15. Despeja a de $\log_a \frac{1}{64} = 6$.

16. Grafica $y = 2^x - 1$.

17. Determina una ecuación de una circunferencia con centro en $(-6, 2)$ y radio 7.

18. Grafica $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$.

19. Grafica $9x^2 + 16y^2 = 144$.

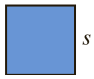
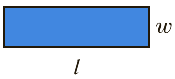
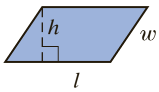
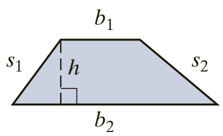
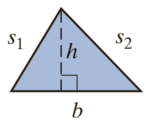
20. Determina la suma de la serie geométrica infinita.

$$6 + 4 + \frac{8}{3} + \frac{16}{9} + \frac{32}{27} + \cdots$$

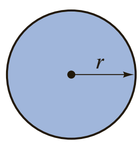
Apéndice

Fórmulas geométricas

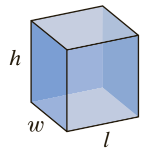
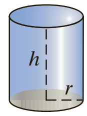
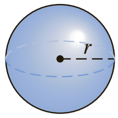
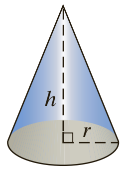
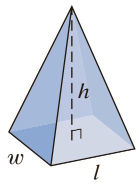
Áreas y perímetros

Figura	**Dibujo**	**Área**	**Perímetro**
Cuadrado		$A = s^2$	$P = 4s$
Rectángulo		$A = lw$	$P = 2l + 2w$
Paralelogramo		$A = lh$	$P = 2l + 2w$
Trapezoide		$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$	$P = s_1 + s_2 + b_1 + b_2$
Triángulo		$A = \frac{1}{2}bh$	$P = s_1 + s_2 + b$

Área y circunferencia de un círculo

Círculo		$A = \pi r^2$	$C = 2\pi r$

Volumen y área de superficies de figuras tridimensionales

Figura	**Dibujo**	**Volumen**	**Área de la superficie**
Sólido rectangular		$V = lwh$	$A = 2lh + 2wh + 2wl$
Cilindro circular recto		$V = \pi r^2 h$	$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$
Esfera		$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$A = 4\pi r^2$
Cono circular recto		$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	$A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$
Pirámide rectangular o cuadrada		$V = \frac{1}{3}lwh$	

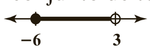
Respuestas

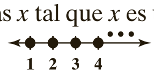
Capítulo 1

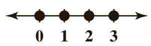
Conjunto de ejercicios 1.1 **1-11** Las respuestas variarán. **13**. Haz toda la tarea y previo revisa el nuevo material que será cubierto en clase. **15**. Ve los pasos en la página 4 de tu texto. **17**. Cuanto más empeño pongas en el curso, mayor provecho obtendrás de él. **19.** Las respuestas variarán.

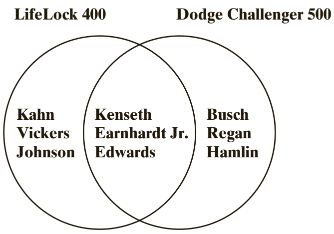
Conjunto de ejercicios 1.2 **1.** Variable **3.** Expresión algebraica **5.** Elementos **7.** Subconjunto **9.** Intersección **11.** Irracional **13.** $>$ **15.** $=$ **17.** $>$ **19.** $<$ **21.** $>$ **23.** $<$ **25.** $>$ **27.** $>$ **29.** $A = \{0\}$ **31.** $C = \{18, 20\}$ **33.** $E = \{0, 1, 2\}$ **35.** $H = \{0, 7, 14, 21, \ldots\}$ **37.** $J = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ o $J = N$ **39. a)** 4 **b)** 4, 0 **c)** $-2, 4, 0$ **d)** $-2, 4, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, 0, -1.23, \frac{78}{79}$ **e)** $\sqrt{2}, \sqrt{8}$ **f)** $-2, 4, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, 0, \sqrt{2}, \sqrt{8}, -1.23, \frac{78}{79}$ **41.** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $A \cap B = \{\ \}$ **43.** $A \cup B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 3\}$; $A \cap B = \{-3, -1\}$ **45.** $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$; $A \cap B = \{\ \}$ **47.** $A \cup B = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30\}$; $A \cap B = \{\ \}$ **49.** $A \cup B = \{-1, -0, 1, e, i, \pi\}$; $A \cap B = \{-1, 0, 1\}$ **51.** El conjunto de números naturales **53.** El conjunto de todos los números múltiplos de 3 **55.** El conjunto de enteros impares **57. a)** El conjunto A es el conjunto de todas las x tal que x es un número natural menor que 7 **b)** $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ **59.** 

61. 

63. 

65. 

67. 

69. $\{x|x \geq 1\}$ **71.** $\{x|x < 5$ y $x \in I\}$ o $\{x|x \leq 4$ y $x \in I\}$ **73.** $\{x| -3 < x \leq 5\}$ **75.** $\{x| -2.5 \leq x < 4.2\}$ **77.** $\{x| -3 \leq x \leq 1$ y $x \in I\}$ **79.** Sí **81.** No **83.** Sí **85.** No **87.** Un ejemplo es $\left\{\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}\right\}$ **89.** Un ejemplo es $A = \{2, 4, 5, 8, 9\}$, $B = \{4, 5, 6, 9\}$ **91. a)** {Johnson, Earnhardt Jr., Kahn, Kenseth, Vickers, Edwards, Busch, Regan, Hamlin} **b)** Unión **c)** {Earnhard Jr., Kenseth, Edwards} **d)** Intersección **93. a)** {Albert, Carmen, Frank, Linda, Bárbara, Jason, David, Earl, Kate, Ingrid} **b)** Unión **c)** {Frank, Linda} **d)** Intersección **95. a)** {China, India, Estados Unidos, Indonesia, Brasil, Nigeria} **b)** {China, India, Estados Unidos, Rusia, Japón, Indonesia, Nigeria} **c)** {China, India, Estados Unidos} **d)** {China, India, Estados Unidos, Indonesia} **e)** {China, India, Estados Unidos} **97. a)** A = {Alex, James}, B = {Alex, James, George, Connor}, C = {Alex, Stephen}, D = {Alex, George, Connor} **b)** {Alejandro} **c)** Solo Alex **99. a)** $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ **b)** $\{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$ **c)** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ **d)** $\{3,4,6\}$ **101. a)** $\{x|x > 1\}$ incluye fracciones números decimales que el otro conjunto no contiene, **b)** $\{2,3,4,5,\ldots\}$ **c)** No, ya que no es posible enlistar todos los número reales mayores que 1 en forma de lista. **103.** 

105. $<, \leq, >, \geq, \neq$
107. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$
109. Las respuestas variarán.
111. Falso **113.** Falso
115. Verdadero **117.** Falso **119.** Verdadero

Conjunto de ejercicios 1.3 **1.** Positivo **3.** Inverso aditivo **5.** Suma **7.** Valor absoluto **9.** Distributiva **11.** 5 **13.** 7 **15.** $\frac{7}{8}$ **17.** 0 **19.** -7 **21.** $-\frac{5}{9}$ **23.** $=$ **25.** $>$ **27.** $>$ **29.** $>$ **31.** $>$ **33.** $<$ **35.** $-|5|, -2, -1, |-3|, 4$ **37.** $-32, -|4|, 4, |-7|, 15$ **39.** $-|-6.5|, -6.1, |-6.3|, |6.4|, 6.8$ **41.** $-2, \frac{1}{3}, \left|-\frac{1}{2}\right|, \left|\frac{3}{5}\right|, \left|-\frac{3}{4}\right|$ **43.** 3 **45.** -22 **47.** -4 **49.** $-\frac{2}{35}$ **51.** -0.99 **53.** 7.92 **55.** -16.2 **57.** 2 **59.** -2 **61.** $\frac{17}{20}$ **63.** -40 **65.** $\frac{5}{4}$ **67.** 12 **69.** 235.9192 **71.** 11 **73.** 1 **75.** $-\frac{3}{64}$ **77.** $\frac{7}{3}$ **79.** -4 **81.** 18 **83.** 7 **85.** -20.6 **87.** 11 **89.** -6 **91.** $\frac{81}{16}$ **93.** -1 **95.** $-\frac{17}{45}$ **97.** 77 **99.** -39 **101.** 0 **103.** Propiedad conmutativa de la suma **105.** Propiedad multiplicativa del cero **107.** Propiedad asociativa de la suma **109.** Propiedad de la identidad de la multiplicación **111.** Propiedad asociativa de la multiplicación **113.** Propiedad distributiva **115.** Propiedad de la identidad en la suma **117.** Propiedad del inverso de la suma **119.** Propiedad del doble negativo **121.** $-6, \frac{1}{6}$ **123.** $\frac{22}{9}, -\frac{9}{22}$ **125.** 49°F **127.** 148.2 pies debajo del punto de inicio o -148.2 pies **129.** 10.1°F **131.** Ganancia de \$1207 **133.** Las respuestas variarán **135.** \$24,000 **137.** Todos los números reales, $\mathbb{R}$ **139.** 6, -6 **141.** $\{\ \}$ **143.** Las respuestas variarán. **145.** Las respuestas variarán. **147.** $-\frac{a}{b}$ o $\frac{-a}{b}$ **149. a)** $a + b = b + a$ **b)** Las respuestas variarán. **151.** $2 + (3 \cdot 4) \neq (2 + 3) \cdot (2 + 4), 14 \neq 30$ **153.** 84 **155.** 1 **156.** Verdadero **157.** $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ **158. a)** $3, 4, -2, 0$ **b)** $3, 4, -2, \frac{5}{6}, 0$ **c)** $\sqrt{11}$ **d)** $3, 4, -2, \frac{5}{6}, \sqrt{11}, 0$ **159. a)** $\{1, 4, 7, 9, 12, 19\}$ **b)** $\{4, 7\}$ **160.** 

Conjunto de ejercicios 1.4 **1.** Factores **3.** Exponente **5.** 64 **7.** Radical **9.** Índice **11.** Real **13.** 9 **15.** -9 **17.** 25 **19.** $-\frac{81}{625}$ **21.** 7 **23.** -6 **25.** -3 **27.** 0.1 **29.** 0.015 **31.** 1.897 **33.** 76,183.335 **35.** 2.962 **37.** 3.250 **39.** -0.723 **41. a)** 9 **b)** -9 **43. a)** 100 **b)** -100 **45. a)** 1 **b)** -1 **47. a)** $\frac{1}{9}$ **b)** $-\frac{1}{9}$ **49. a)** 27 **b)** -27 **51. a)** -125 **b)** 125 **53. a)** -8 **b)** 8 **55. a)** $\frac{8}{125}$ **b)** $-\frac{8}{125}$ **57.** -7 **59.** -19 **61.** -22.221 **63.** $-\frac{5}{16}$ **65.** 43 **67.** 25 **69.** 0 **71.** $\frac{1}{2}$ **73.** -10 **75.** 10 **77.** 64 **79.** 12 **81.** $\frac{27}{5}$ **83.** Indefinido **85.** -4 **87.** 0 **89.** $-\frac{10}{3}$ **91.** $\frac{242}{5}$ **93.** $\frac{1}{4}$ **95.** 34 **97.** -41 **99.** -9 **101.** -100 **103.** 33 **105.** -6 **107.** $\frac{3}{2}$ **109.** $\frac{7y-14}{2}, 14$ **111.** $6(3x+6)-9, 81$ **113.** $\left(\frac{x+3}{2y}\right)^2 -3, 1$ **115. a)** 24.6 millas **b)** 57.4 millas **117. a)** 102 pies **b)** 54 pies **119. a)** \$837.97 **b)** \$972.30 **121. a)** 9.51 billones de viajes **b)** 22.51 billones de viajes **123. a)** \$297.83 **b)** 405.83 billones **125. a)** 7.62% **b)** 21.78% **127. a)** 7.62% **b)** 21.78% **127. a)** \$1.262 billones **b)** \$26.38 billones **129.** n factores de a **131.** El número positivo cuya raíz es igual al radicando **133.** Un número negativo elevado a una potencia impar es un número negativo **135.** Paréntesis; exponentes y radicales; multiplicación o división de izquierda a derecha; suma o resta de izquierda a derecha **137. a)** Las respuestas variarán **b)** 24 **139. a)** $A \cap B = \{b, c, f\}$ **b)** $A \cup B = \{a, b, c, d, f, g, h\}$ **140.** Todos los números reales, $\mathbb{R}$ **141.** $a \geq 0$ **142.** $8, -8$ **143.** $-|6|, -4, -|-2|, 0, |-5|$ **144.** Propiedad asociativa de la suma.

Prueba de mitad de capítulo* **1.** Las respuestas variarán. [1.1] **2.** $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5\}$, $A \cap B = \{-1, 1\}$ [1.2] **3.** El conjunto de la totalidad de los números múltiplos de 5. [1.2] **4.**  [1.2] **5.** $>$ [1.2] **6.** $|x| - 5 \leq x < 2$ [1.2] **7.** No [1.2] **8.** $-15, |-6|, 7, |-17|$ [1.2] **9.** 9.2 [1.3] **10.** $\frac{7}{30}$ [1.3] **11.** 256 [1.3] **12.** $-\frac{4}{13}$ [1.3] **13.** -3 [1.3] **14.** Propiedad distributiva [1.3] **15.** 0.9 [1.4] **16. a)** -121 **b)** 121 [1.4] **17. a)** 1) Símbolos de agrupación, 2) exponentes y radicales, 3) multiplicaciones o divisiones de izquierda a derecha, 4) sumas o restas de izquierda a derecha **b)** -14 [1.4] **18.** 23 [1.4] **19.** 4 [1.4] **20.** $\frac{5}{2}$ [1.4]

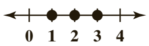
Conjunto de ejercicios 1.5 **1.** Producto **3.** Exponente negativo **5.** Indefinido **7.** Elevar un producto **9.** Recíproco **11.** $\frac{1}{9}$ **13.** 32 **15.** 9 **17.** $\frac{1}{81}$ **19.** 125 **21.** 1 **23.** 64 **25.** 64 **27.** $\frac{16}{49}$ **29. a)** $\frac{1}{9}$ **b)** $\frac{1}{9}$ **c)** $-\frac{1}{9}$ **d)** $-\frac{1}{9}$ **31. a)** 2 **b)** -2 **c)** -2 **d)** 2 **33. a)** 5 **b)** -5 **c)** 1 **d)** -1 **35. a)** $3xy$ **b)** 1 **c)** $3x$ **d)** 3 **37.** $\frac{7}{y^3}$ **39.** $9x^4$ **41.** $3ab^3$ **43.** $\frac{17}{2m^2n^3}$ **45.** $\frac{5z^4}{x^2y^3}$ **47.** $\frac{1}{9xy}$ **49.** $\frac{1}{4}$ **51.** x^2 **53.** 64 **55.** $\frac{1}{49}$ **57.** $\frac{1}{m^{11}}$ **59.** $5w^5$ **61.** $\frac{12}{a^8}$ **63.** $3p$ **65.** $-10r^7$ **67.** $8x^7y^2$ **69.** $\frac{3x^2}{y^6}$ **71.** $-\frac{3x^3z^2}{y^5}$ **73. a)** 4 **b)** 8 **c)** 1 **d)** 0 **75. a)** $-\frac{1}{12}$ **b)** $\frac{7}{12}$ **c)** $\frac{11}{10}$ **d)** $\frac{23}{120}$ **77.** 81 **79.** $\frac{1}{81}$ **81.** b^6 **83.** $-c^3$ **85.** $\frac{25}{x^6}$ **87.** $\frac{3}{16}$ **89.** $\frac{21}{16}$ **91.** $\frac{9}{16b^2}$ **93.** $\frac{16x^4}{y^4}$ **95.** $\frac{q^{12}}{125p^6}$ **97.** $-\frac{g^{12}}{27h^9}$ **99.** $\frac{25j^2}{16k^4}$ **101.** $8r^6s^{15}$ **103.** $\frac{y^6}{64x^3}$ **105.** $125x^9y^3$ **107.** $\frac{z^3}{8x^3y^3}$ **109.** $\frac{x^{20}}{y^{10}}$ **111.** $\frac{x^4y^8}{4z^{12}}$ **113.** $-\frac{64b^{12}}{a^6c^3}$ **115.** $\frac{27}{8x^{21}y^9}$ **117.** x^{7a+3} **119.** w^{5a-7} **121.** x^{w+7} **123.** x^{5p+2} **125.** x^{2m+2} **127.** $\frac{5m^{2b}}{n^{2a}}$ **129. a)** $x < 0$ o $x > 1$ **b)** $0 < x < 1$ **c)** $x = 0$ o $x = 1$ **d)** No verdadero para $0 \leq x \leq 1$ **131. a)** El producto de un número par de factores negativos es positivo. **b)** El producto de un número impar de factores negativos es negativo. **133. a)** Sí **b)** Sí, porque $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ y $(-x)^{-2} = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}$ **135.** -3, porque $\left(\frac{y^{-2}}{y^{-3}}\right)^2 = y^2$ **137.** -1,3, porque $\left(\frac{x^{-1}}{x^4}\right)^{-1} = x^5$, y $\left(\frac{y^5}{y^3}\right)^{-1} = \frac{1}{y^2}$ **139.** $x^{9/8}$ **141.** $\frac{1}{x^{9/2}y^{19/6}}$ **144. a)** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$ **b)** $A \cap B = \{\ \}$ **145.**  **146.** -4 **147.** -5

Conjunto de ejercicios 1.6 **1.** Notación científica **3.** 3 **5.** 3.7×10^3 **7.** 4.3×10^{-2} **9.** 7.6×10^5 **11.** 1.86×10^{-6} **13.** 5.78×10^6 **15.** 1.06×10^{-4} **17.** 31,000 **19.** 0.0000213 **21.** 0.917 **23.** 3,000,000 **25.** 203,000 **27.** 1,000,000 **29.** 240,000,000 **31.** 0.021 **33.** 0.000027 **35.** 11,480 **37.** 0.0003 **39.** 0.0000006734 **41.** 1.5×10^{-5} **43.** 5.0×10^3 **45.** 3.0×10^{-8} **47.** 1.645×10^{12} **49.** 9.6×10^5 **51.** 3.0×10^0 **53.** 9.369×10^{14} **55.** 1.056×10^3 **57.** 5.337×10^2 **59.** 3.115×10^{-25} **61.** 3.802×10^{-27} **63.** 3.333×10^{60} **65.** 8.5×10^8 **67.** 2.7×10^6 **69.** 6.2×10^{10} **71.** 9.5×10^{12} **73.** 1.0×10^{-4} **75.** 1.58×10^{-5} **77.** 1.0×10^{-9} **79. a)** Resta 1 del exponente. **b)** Resta 2 del exponente. **c)** Resta 6 del exponente. **d)** 6.58×10^{-10} **81. a)** 1.0×10^4 o 10,000 **b)** 4.725×10^5 o 472,500 **c)** El error en parte **b)** porque la respuesta se redondea en más. **83.** 30,000 horas **85. a)** $\approx 6.406 \times 10^9$ personas **b)** $\approx 4.539\%$ **87. a)** $1.1750 \times 10^{13}, 3.022 \times 10^8$ **b)** $\approx$ \$38,881.54 **89.** 135 personas/kilómetro cuadrado **91. a)** 2.1×108 libras **b)** 3.99×109 libras **93. a)** 1020 millones **b)** $\approx 20.20\%$ **c)** ≈ 357 personas/milla cuadrada

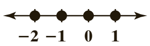
*Los números entre corchetes después de las respuestas indican la sección donde el material fue analizado.

d) ≈ 83.1 personas/milla cuadrada **95. a)** \$5.31 $\times 10^{10}$ **b)** \$9.588 $\times 10^{11}$ **c)** \$2.4426 $\times 10^{12}$
97. a) 6.03×10^7 kilometros cuadrados **b)** 4.4×10^6 kilometros cuadrados.

Capítulo 1 Ejercicios de repaso

1. $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ **2.** $[0, 3, 6, 9, \ldots]$ **3.** Sí **4.** Sí **5.** No **6.** Sí **7.** 4, 6 **8.** 4, 6, 0
9. $-2, 4, 6, 0$ **10.** $-2, 4, 6, \frac{1}{2}, 0, \frac{15}{27}, -\frac{1}{5}, 1.47$ **11.** $\sqrt{7}, \sqrt{3}$ **12.** $-2, 4, 6, \frac{1}{2}, \sqrt{7}, \sqrt{3}, 0, \frac{15}{27}, -\frac{1}{5}, 1.47$ **13.** Falso **14.** Verdadero
15. Verdadero **16.** Verdadero **17.** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$; $A \cap B = \{2, 4, 6\}$ **18.** $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $A \cap B = \{\ \}$
19. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$; $A \cap B = \{\ \}$ **20.** $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12\}$; $A \cap B = \{9, 10\}$ **21.** 
22.  **23.**  **24.**  **25.** $<$ **26.** $<$ **27.** $<$ **28.** $=$ **29.** $<$ **30.** $>$ **31.** $>$ **32.** $>$
33. $-\pi, -3, 3, \pi$ **34.** $0, \frac{3}{5}, 2.7, |-3|$ **35.** $-2, 3, |-5|, |-10|$ **36.** $-7, -3, |-3|, |-7|$ **37.** $-4, -|-3|, 5, 6$ **38.** $-2, 0, |1.6|, |-2.3|$
39. Propiedad distributiva **40.** Propiedad conmutativa de la multiplicación **41.** Propiedad asociativa de la suma **42.** Propiedad de la identidad para la suma **43.** Propiedad asociativa de la multiplicación **44.** Propiedad del doble negativo **45.** Propiedad multiplicativa del cero **46.** Propiedad del inverso de la suma **47.** Propiedad del inverso en la multiplicación **48.** Propiedad de la identidad para la multiplicación **49.** 11 **50.** 9 **51.** 12 **52.** -3 **53.** 2 **54.** 21 **55.** 9 **56.** -59 **57.** 15 **58.** 42 **59.** 4 **60.** 64
61. Indefinido **62.** $\frac{8}{3}$ **63.** 22 **64.** -67 **65. a)** \$816.37 millones **b)** \$7,223.73 millones **66. a)** 944.53 toneladas millas
b) 2135.65 toneladas millas **67.** 32 **68.** x^5 **69.** a^8 **70.** y^7 **71.** b^9 **72.** $\frac{1}{c^3}$ **73.** $\frac{1}{125}$ **74.** 8 **75.** $81m^6$ **76.** $\frac{7}{5}$ **77.** $\frac{27}{8}$ **78.** $\frac{y^2}{x}$
79. $-15x^3y^4$ **80.** $\frac{14}{v^3w^3}$ **81.** $\frac{3y^7}{x^5}$ **82.** $\frac{3}{xy^9}$ **83.** $\frac{g^5}{h^5j^{14}}$ **84.** $\frac{3m}{n^4}$ **85.** $64a^3b^3$ **86.** $\frac{x^{10}}{9y^2}$ **87.** $\frac{p^{14}}{q^{12}}$ **88.** $-\frac{8a^3}{b^9c^6}$ **89.** $\frac{z^4}{25x^2y^6}$ **90.** $\frac{m^9}{27}$
91. $\frac{n^6}{4m^4}$ **92.** $\frac{625x^4y^4}{z^{20}}$ **93.** $\frac{9x^{10}}{4y^{14}z^{12}}$ **94.** $-\frac{x^6z^2}{10y^2}$ **95.** 7.42×10^{-5} **96.** 4.6×10^5 **97.** 1.83×10^5 **98.** 2.0×10^{-6} **99.** 30,000
100. 0.03 **101.** 300,000,000 **102.** 2000 **103. a)** 2.8×10^7 **b)** 7.45×10^8 **c)** 2.548×10^9 **104. a)** 14,000,000,000 **b)** 14 miles de millones de kilómetros **c)** 5.0×10^8 o 500,000,000 kilómetros **d)** 8.4×10^9 o 8,400,000,000 millas

Ejercicios de práctica del capítulo 1

1. $A = \{6,7,8,9,\ldots\}$ [1.2] **2.** Falso [1.2] **3.** Verdadero [1.2]
4. $-\frac{3}{5}, 2, -4, 0, \frac{19}{12}, 2.57, -1.92$ [1.2] **5.** $-\frac{3}{5}, 2, -4, 0, \frac{19}{12}, 2.57, \sqrt{8}, \sqrt{2}, -1.92$ [1.2] **6.** $A \cup B = \{5,7,8,9,10,11,14\}$: $A \cap B = \{8,10\}$ [1.2]
7. $A \cup B = \{1,3,5,7,\ldots\}$: $A \cap B = \{3,5,7,9,11\}$ [1.2] **8.**  [1.2] **9.**  [1.2] **10.** $-|4|, -2, |3|, 9$ [1.3]
11. Propiedad asociativa de la suma [1.3] **12.** Propiedad conmutativa de la adición [1.3] **13.** 2 [1.4] **14.** 33 [1.4]
15. Indefinido [1.4] **16.** $-\frac{37}{22}$ [1.4] **17.** 17 [1.4] **18. a)** 304 pies **b)** 400 pies [1.4] **19.** $\frac{1}{9}$ [1.5] **20.** $\frac{16}{m^6n^4}$ [1.5] **21.** $\frac{4c^2}{5ab^5}$ [1.5]
22. $-\frac{y^{21}}{27x^{12}}$ [1.5] **23.** 3.89×10^8 [1.6] **24.** 260,000,000 [1.6] **25. a)** 9.2×10^9 **b)** 0–14: 1.794×10^9, 15–64: 5.8052×10^9, 65 y mayores: 1.6008×10^9 [1.6]

Capítulo 2

Conjunto de ejercicios 2.1

1. Término **3.** Aísla **5.** Identidad **7.** Contradicción **9.** $\varnothing$ **11.** Propiedad simétrica
13. Propiedad transitiva **15.** Propiedad reflexiva **17.** Propiedad de suma de la igualdad. **19.** Propiedad de la multiplicación de la igualdad **21.** Propiedad de la multiplicación de la igualdad **23.** Propiedad de la suma **25.** Uno **27.** Tres **29.** Dos **31.** Cero
33. Uno **35.** Siete **37.** Doce **39.** No puede ser simplificada **41.** $-2x^2 + 2x - 3$ **43.** $8.7c^2 + 3.6c$ **45.** No puede ser simplificada
47. $-pq + p + q$ **49.** $8d + 2$ **51.** $\frac{8}{3}x + \frac{13}{2}$ **53.** $-17x - 4$ **55.** $11x - 6y$ **57.** $-9b + 93$ **59.** $4r^2 - 2rs + 3r + 4s$ **61.** 3
63. $\frac{15}{2}$ **65.** 2 **67.** 16 **69.** 5 **71.** $\frac{3}{5}$ **73.** 1 **75.** 0 **77.** 3 **79.** -1 **81.** 5 **83.** 5 **85.** -1 **87.** $-\frac{1}{2}$ **89.** 6 **91.** 2 **93.** 68
91. 2 **93.** 68 **95.** -35 **97.** -4 **99.** 24 **101.** 10 **103.** -4 **105.** $\frac{15}{16}$ **107.** 5 **109.** 1.00 **111.** 1.18 **113.** 0.43 **115.** 1701.39
117. -1.85 **119.** $\varnothing$; Contradicción **121.** $\left\{-\frac{4}{3}\right\}$; condicional **123.** $\mathbb{R}$; identidad **125.** $\mathbb{R}$; identidad **127.** $\varnothing$; contradicción
129. a) ≈ 85 personas por milla cuadrada **b)** ≈ 2026 **131. a)** \$3 trillón **b)** 2014 **133.** $\Delta = \frac{\odot + \square}{*}$ **135.** $\odot = \frac{\otimes - \triangle}{\square}$
137. Las respuestas variarán. Una posible respuesta: $x = \frac{5}{2}, 2x - 4 = 1, 4x = 10$ **139.** Las respuestas variarán. Una posible respuesta: $2x - 4 = 5x - 3(1 + x)$ **141.** Las respuestas variarán. Una posible respuesta: $3p + 3 = \frac{3}{2}p + p + 6$ **143.** -22, sustituye -2 por a y despeja n. **145. a)** Las respuestas variarán. **b)** $|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$ **146. a)** -9 **b)** 9 **147.** -5 **148.** $\frac{4}{49}$

Conjunto de ejercicios 2.2 **1.** Modelo matemático **3.** Traduce **5.** Verifica **7.** 300 **9.** 300 **11.** 201.06 **13.** 70 **15.** 176 **17.** $\frac{7}{4}$ **19.** 66.67 **21.** 4 **23.** 119.10 **25.** $y = -3x + 5$ **27.** $y = -\frac{3}{2}x + 3$ **29.** $y = 3x - 8$ **31.** $y = \frac{3}{4}x - 5$ **33.** $y = x + 2$ **35.** $y = -\frac{4}{3}x + 11$ **37.** $I = \frac{E}{R}$ **39.** $d = \frac{C}{\pi}$ **41.** $l = \frac{P - 2w}{2}$ **43.** $h = \frac{V}{lw}$ **45.** $r = \frac{A - P}{Pt}$ **47.** $l = \frac{3V}{wh}$ **49.** $m = \frac{y - b}{x}$ **51.** $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ **53.** $\mu = x - z\sigma$ **55.** $T_2 = \frac{T_1P_2}{P_1}$ **57.** $h = \frac{2A}{b_1 + b_2}$ **59.** $n = \frac{2S}{f + l}$ **61.** $F = \frac{9}{5}C + 32$ **63.** $m_1 = \frac{Fd^2}{km_2}$ **65. a)** $e = 0.68d$ **b)** $d = \frac{e}{0.68}$ o $d \approx 1.47e$ **67.** \$308 **69.** 6.5 años **71. a)** 3.14 pulgadas cuadradas **b)** 78.54 pulgadas cuadradas **73. a)** 75 pies cúbicos **b)** 2.78 yardas cúbicas **c)** \$105 **75.** El cilindro, la diferencia es 0.22 pulgadas cúbicas **77.** \$11,264.93 **79.** \$4958.41 **81.** $\approx 4.12\%$ **83. a)** $\approx 7.08\%$ **b)** $\approx 6.39\%$ **85. a)** 4 libras por semana **b)** 2500 calorías **87. a)** $S = 100 - a$ **b)** 40% **89. a)** $s = \frac{rt^2}{u}$ **b)** $u = \frac{rt^2}{s}$ **90.** -40 **91.** 1 **92.** -125 **93.** $\frac{4}{3}$

Conjunto de ejercicios 2.3 **1.** $x + 3$ **3.** $7 - x$ **5.** Menor que **7.** $19.95y$ **9.** $11n - 7.5$ **11.** $x, 12 - x$ **13.** $w, w + 29$ **15.** $p, 165 - p$ **17.** $z, z + 1.3$ **19.** $e, e + 0.22e$ **21.** $A = 72°, B = 18°$ **23.** $A = 36°, B = 144°$ **25.** $40°, 60°, 80°$ **27.** \$32 **29.** 25 viajes **31.** 225 millas **33.** 13 veces **35.** 10 veces **37.** \$1600 **39.** Noroeste: \$2.455 millones, sudeste: \$2.455 millones **41.** 4 gramos **43.** \$6.55 por hora **45.** Pastos: 12, malezas: 19, árboles: 26 **47.** \$16.25 **49. a)** ≈ 63.49 meses o 5.29 años **b)** First National **51. a)** ≈ 28 meses o 2.33 años **b)** Sí **53.** Phelps: 8, Coughlin: 6, Lochte: 4, Grevers: 3 **55.** Animales: 250,000, plantas: 350,000, insectos no escarabajos: 540,000, escarabajos: 360,000 **57.** 9 pulgadas, 12 pulgadas, 15 pulgadas **59.** 10 pies, 24 pies, 26 pies **61.** 13 metros por 13 metros **63.** 3 pies por 6 pies **65.** \$60 **67.** 3 **69.** \$16 **71. a)** $\frac{88 + 92 + 97 + 96 + x}{5} = 90$ **b)** Las respuestas variarán. **c)** 77 **73. a), b)** Las respuestas variarán. **75.** 220 millas **78.** $\frac{32}{5}$ **79.** -2.7 **80.** $\frac{5}{32}$ **81.** -10 **82.** $\frac{y^{18}}{8x^{12}}$

Prueba de mitad de capítulo **1.** 12 [2.1] **2.** $5x^2 - 2x - 11$ [2.1] **3.** $6.4a - 9.6$ [2.1] **4.** -6 [2.1] **5.** 14 [2.1] **6.** $-\frac{11}{3}$ [2.1] **7.** 5 [2.1] **8.** $\mathbb{R}$, identidad [2.1] **9.** $\varnothing$, contradicción [2.1] **10.** 80 [2.2] **11.** $\frac{100}{3}$ [2.2] **12.** $x = \frac{y - 13}{7}$ [2.2] **13.** $x_3 = nA - 2x_1 - x_2$ [2.2] **14.** \$942.80 [2.2] **15.** $A = 62°, B = 28°$ [2.3] **16.** 10 días [2.3] **17.** 20 pies, 40 pies, 40 pies [2.3] **18.** 4.5% [2.3] **19.** 40 meses [2.3] **20.** Multiplica ambos lados por el mismo número, 12; $-\frac{10}{3}$ [2.3]

Conjunto de ejercicios 2.4 **1.** 11.4 millas **3.** 4 horas **5.** 6 horas **7. a)** 6 millas por hora **b)** 12 millas por hora **9. a)** 0.15 por hora o 9 minutos **b)** 3.6 millas **11.** 13.8 horas **13.** 3.5 horas **15.** \$12,570 a 3%, \$17,430 a 4.1% **17.** 54 libras **19.** 4 *basset hounds* y 8 gatos negros **21.** 30 onzas **23.** 2.8 cucharadas al 30%, 1.2 cucharadas al 80% **25.** 35% **27.** libras de hojas, 8 libras de rebanadas **29.** ≈ 25.77 horas **31.** 500 minutos o $8\frac{1}{3}$ horas **33.** 6 cuartos **35. a)** ≈ 3.71 horas **b)** ≈ 2971.43 millas **37.** 8 pinturas pequeñas, 4 pinturas largas **39.** 9.6 onzas de solución al 80%, 118.4 onzas de agua **41. a)** 248 boletos **b)** 3002 boletos **43.** 3 millas **45.** ≈ 11.4 onzas **47. a), b), c)** Las respuestas variarán. **49.** ≈ 149 millas **51.** 6 cuartos **52.** 6.0×10^{-4} **53.** -5.7 **54.** $\frac{21}{4}$ **55.** $y = \frac{x - 42}{30}$ **56.** 300 millas

Conjunto de ejercicios 2.5 **1.** Compuesto **3.** Cerrado **5.** Unión **7. a)** 

b) $(-3, \infty)$ **c)** $\{x|x > -3\}$ **9. a)** 

b) $(-\infty, \pi]$ **c)** $\{w|w \le \pi\}$ **11. a)** 

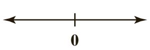
b) $\left(-3, \frac{4}{5}\right]$ **c)** $\left\{q \middle| -3 < q \le \frac{4}{5}\right\}$ **13. a)** 

b) $(-7, -4]$ **c)** $\{x|-7 < x \le -4\}$ **15.** 

17. 

19. 

21. 

23. 

25. 

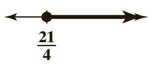
27. $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ **29.** $[2, \infty)$ **31.** $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$ **33.** $(-\infty, \infty)$ **35.** $[-5, 1)$ **37.** $[-4, 5]$ **39.** $\left[4, \frac{11}{2}\right)$ **41.** $\left(-\frac{13}{3}, -4\right]$ **43.** $\{x|3 \le x < 7\}$ **45.** $\{x|0 < x \le 3\}$ **47.** $\left\{u \middle| 4 \le u \le \frac{19}{3}\right\}$ **49.** $\{c|-3 < c \le 1\}$ **51.** $\varnothing$ **53.** $\{x|-5 < x < 2\}$ **55.** $(-\infty, 2) \cup [7, \infty)$ **57.** $[0, 2]$ **59.** $(-\infty, 0) \cup (6, \infty)$ **61.** $[0, \infty)$ **63. a)** $l + g \le 130$ **b)** $l + 2w + 2d \le 130$ **c)** 24.5 pulgadas **65.** 11 cajas **67.** 300 mensajes de texto **69.** 1881 libros **71.** 12 onzas **73.** Para ventas de más de \$5000 por semana **75.** 24 **77.** $76 \le x \le 100$ **79. a)** \$12,242.75 **b)** \$78,135.89 **81. a)** $[0, 3)$ **b)** $(3, 10]$ **83. a)** $[0, 5)$ **b)** $(5, 13]$ **85. a)** $[0, 8]$ **b)** Ninguno **87.** $6.97 < x < 8.77$ **89.** Las respuestas variarán. **91. a)** $[17.5, 23.5]$ **b)** $[23.5, 31]$ **c)** $[27.2, 36.5]$ **93.** $84 \le x \le 100$ **95. a)** Las respuestas variarán. **b)** $(-3, \infty)$ **97. a)** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ **b)** $A \cap B = \{1, 8\}$ **98. a)** 4 **b)** 0, 4 **c)** $-3, 4, \frac{5}{2}, 0, -\frac{13}{29}$ **d)** $-3, 4, \frac{5}{2}, \sqrt{7}, 0, -\frac{13}{29}$ **99.** Propiedad asociativa de la suma **100.** Propiedad conmutativa de la suma **101.** $V = \frac{R - L + Dr}{r}$

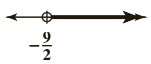
Conjunto de ejercicios 2.6 **1.** $|x| \le 4$ **3.** $|x| = 4$ **5.** $|x| > 4$ **7.** $|x| \ge 5$ **9.** $|x| < 5$ **11.** $|x| > -6$ **13.** $\{-7, 7\}$ **15.** $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ **17.** $\varnothing$ **19.** $\{-13, 3\}$ **21.** $\{-7\}$ **23.** $\left\{\frac{3}{2}, \frac{11}{6}\right\}$ **25.** $\{-17, 23\}$ **27.** $\{3\}$ **29.** $\varnothing$ **31.** $\{w|-11 < w < 11\}$ **33.** $\{q|-13 \le q \le 3\}$ **35.** $\{b|1 < b < 5\}$ **37.** $\{x|-9 \le x \le 6\}$ **39.** $\left\{x \middle| \frac{1}{3} < x < \frac{13}{3}\right\}$ **41.** $\varnothing$ **43.** $\{j|-22 < j < 6\}$ **45.** $\{x|-1 \le x \le 7\}$ **47.** $\{y|y < -8 \text{ o } y > 8\}$ **49.** $\{x|x < -9 \text{ o } x > 1\}$ **51.** $\left\{b \middle| b < \frac{2}{3} \text{ o } b > 4\right\}$ **53.** $\{h|h < 1 \text{ o } h > 4\}$ **55.** $\{x|x < 2 \text{ o } x > 6\}$ **57.** $\{x|x \le -18 \text{ o } x \ge 2\}$ **59.** $\mathbb{R}$ **61.** $\{x|x < 2 \text{ o } x > 2\}$ **63.** $\{-1, 15\}$ **65.** $\{-3, 1\}$ **67.** $\left\{-23, \frac{13}{7}\right\}$ **69.** $\{10\}$ **71.** $\{-9, 9\}$ **73.** $\{q|q < -8 \text{ o } q > -4\}$ **75.** $\{w|-1 \le w \le 8\}$ **77.** $\left\{-\frac{8}{5}, 2\right\}$ **79.** $\left\{x \middle| x < -\frac{5}{2} \text{ o } x > -\frac{5}{2}\right\}$ **81.** $\left\{x \middle| -\frac{13}{3} \le x \le \frac{5}{3}\right\}$ **83.** $\varnothing$ **85.** $\{w|-16 < w < 8\}$ **87.** $\mathbb{R}$ **89.** $\left\{2, \frac{22}{3}\right\}$ **91.** $\left\{-\frac{3}{2}, \frac{9}{7}\right\}$ **93.** **a)** $[0.085, 0.093]$ **b)** 0.085 pulgada **c)** 0.093 pulgada **95.** **a)** $[132, 188]$ **b)** 132 a 188 pies ,inclusive, debajo del nivel del mar **97.** **a)** Dos **b)** Número infinito **c)** Número infinito **99.** **a)** ninguno **b)** uno **c)** dos **101.** $x = -\frac{b}{a}$; $|ax + b|$ nunca es menor que 0, así el conjunto $|ax + b| = 0$ y despeja x. **103.** **a)** conjunto $ax + b = -c$ o $ax + b = c$ y despeja x de cada ecuación. **b)** $x = \frac{-c - b}{a}$ o $x = \frac{c - b}{a}$ **105.** **a)** escribe $ax + b < -c$ o $ax + b > c$ y despeja x de cada desigualdad. **b)** $x < \frac{-c - b}{a}$ o $x > \frac{c - b}{a}$ **107.** $\mathbb{R}$; ya que $4 - x = -(x - 4)$ **109.** $\{x|x \ge 0\}$; por definición de valor absoluto **111.** $\{2\}$; conjunto $x + 1 = 2x - 1$ o $x + 1 = -(2x - 1)$ **113.** $\{x|x \le 4\}$; por definición $|x - 4| = -(x - 4)$ si $x \le 4$ **115.** $\{4\}$ **117.** $\varnothing$ **119.** $\frac{29}{72}$ **120.** 25 **121.** ≈ 1.33 millas **122.** $\{x|x \le 3\}$

Ejercicios de repaso del capítulo 2 **1.** ocho **2.** Uno **3.** Siete **4.** $5z + 13$ **5.** $7x^2 + 2xy - 13$ **6.** No puede ser simplificada **7.** $4x - 3y + 10$ **8.** -2 **9.** 20 **10.** $-\frac{13}{3}$ **11.** -10 **12.** $-\frac{9}{2}$ **13.** Sin solución **14.** $\mathbb{R}$ **15.** 5 **16.** $\frac{1}{4}$ **17.** 69 **18.** -4 **19.** $t = \frac{D}{r}$ **20.** $w = \frac{P - 2l}{2}$ **21.** $h = \frac{A}{\pi r^2}$ **22.** $h = \frac{2A}{b}$ **23.** $m = \frac{y - b}{x}$ **24.** $y = \frac{2x - 5}{3}$ **25.** $R_2 = R_T - R_1 - R_3$ **26.** $a = \frac{2S - b}{3}$ **27.** $l = \frac{K - 2d}{2}$ **28.** \$700 **29.** 7 años **30.** \$6800 **31.** 150 millas **32.** \$260 **33.** \$2570 a 3.5%, \$2430 a 4% **34.** 187.5 galones del 20%, 62.5 galones del 60% **35.** $6\frac{1}{2}$ horas **36.** **a)** 3000 millas por hora **b)** 16,500 millas **37.** 15 libras de café a \$6.00; 25 libras de café a \$6.80 **38.** \$36 **39.** **a)** 1 hora **b)** 14.4 millas **40.** 40°, 65°, 75° **41.** 300 galones por hora, 450 galones por hora **42.** 40°, 50° **43.** 7.5 onzas **44.** \$4500 al 10%, \$7500 al 6% **45.** Más que 5 **46.** 40 millas por hora, 50 millas por hora **47.** 

48. 

49. 

50. 

51. 

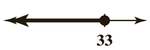
52. 

53. 

54. 

55. 6 cajas **56.** 8 horas **57.** ≈ 15.67 semanas **58.** $\{x|81 \le x \le 100\}$ **59.** $(3, 8)$ **60.** $(-3, 5]$ **61.** $\left(\frac{7}{2}, 8\right)$ **62.** $\left(\frac{8}{3}, 6\right)$ **63.** $(-3, 1]$ **64.** $(2, 14)$ **65.** $\{x|2 < x \le 3\}$ **66.** $\mathbb{R}$ **67.** $\{x|x \le -4\}$ **68.** $\{g|g < -6 \text{ o } g \ge 11\}$ **69.** $\{-4, 4\}$ **70.** $\{x|-8 < x < 8\}$ **71.** $\{x|x \le -9 \text{ o } x \ge 9\}$ **72.** $\{-18, 8\}$ **73.** $\{x|x \le -3 \text{ o } x \ge 7\}$ **74.** $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right\}$ **75.** $\{q|1 < q < 8\}$ **76.** $\{-1, 4\}$ **77.** $\{x|-14 < x < 22\}$ **78.** $\left\{-5, -\frac{4}{5}\right\}$ **79.** $\mathbb{R}$ **80.** $(-\infty, -1] \cup [4, \infty)$ **81.** $(4, 8]$ **82.** $\left(-\frac{17}{2}, \frac{27}{2}\right]$ **83.** $[-2, 6)$ **84.** $(-\infty, \infty)$ **85.** $\left(\frac{2}{3}, 10\right]$

Prueba de práctica del capítulo 2 **1.** Siete [2.1] **2.** $16p - 3q - 4pq$ [2.1] **3.** $10q + 42$ [2.1] **4.** -26 [2.1] **5.** $\frac{4}{3}$ [2.1] **6.** $-\frac{35}{11}$ [2.1] **7.** $\varnothing$ [2.1] **8.** $\mathbb{R}$ [2.1] **9.** $\frac{13}{3}$ [2.2] **10.** $b = \frac{a - 2c}{5}$ [2.2] **11.** $b_2 = \frac{2A - hb_1}{h}$ [2.2] **12.** \$625 [2.3-2.4] **13.** 80 visitas [2.3–2.4] **14.** 4.2 horas [2.3-2.4] **15.** 6.25 litros [2.3-2.4] **16.** \$7000 al 8%, \$5000 al 7% [2.3-2.4] **17.** 

[2.5] **18.** 

[2.5] **19.** $\left(\frac{9}{2}, 7\right]$ [2.5] **20.** $(13, 16)$ [2.6] **21.** $\{-7, 2\}$ [2.6] **22.** $\left\{-\frac{14}{3}, \frac{26}{5}\right\}$ [2.6] **23.** $\{-3\}$ [2.6] **24.** $\{x|x < -1 \text{ o } x > 4\}$ [2.6] **25.** $\left\{x \middle| \frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{2}\right\}$ [2.6]

Prueba de repaso acumulada

1. a) $\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ **b)** $\{3, 5, 7, 11, 13\}$ [1.2] **2. a)** Propiedad conmutativa de la suma **b)** Propiedad asociativa de la multiplicativa **c)** Propiedad distributiva [1.3] **3.** -63 [1.4] **4.** -6 [1.4] **5.** 7 [1.4] **6.** $\dfrac{1}{25x^8y^6}$ [1.5] **7.** $\dfrac{16m^{10}}{n^{12}}$ [1.5] **8.** ≈ 545.8 veces [1.6] **9.** 5 [2.1] **10.** 1.15 [2.1] **11.** $\dfrac{3}{4}$ [2.1] **12.** Una ecuación condicional lineal es verdadera para un solo valor; una ecuación lineal que es una identidad es siempre verdadera. [2.1] **13.** 3 [2.2] **14.** $x = \dfrac{y - y_1 + mx_1}{m}$ [2.2]

15. a) 

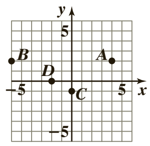
b) $\left\{x \,\middle|\, -2 < x < \dfrac{8}{5}\right\}$ **c)** $\left(-2, \dfrac{8}{5}\right)$ [2.5] **16.** $\left\{-\dfrac{7}{3}, 3\right\}$ [2.6]

17. $\{x | x \leq -10 \text{ o } x \geq 14\}$ [2.6] **18.** \$35 [2.3] **19.** 40 millas por hora, 60 millas por hora [2.4] **20.** Castañas: 15 libras, cacahuates: 25 libras [2.4]

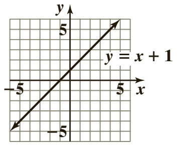
Capítulo 3

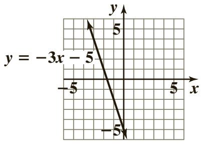
Conjunto de ejercicios 3.1

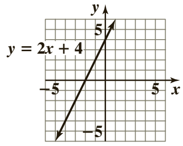
1. Par ordenado **3.** Colineal

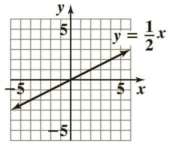
5. $A(3, 2), B(-6, 0), C(2, -4), D(-2, -4), E(0, 3), F(-8, 1), G\left(\dfrac{3}{2}, -1\right) H(2, 3)$ **7.** 

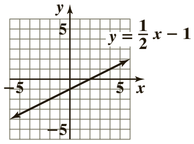
9. I **11.** IV **13.** II **15.** III **17.** Sí **19.** No **21.** Sí **23.** Sí **25.** No

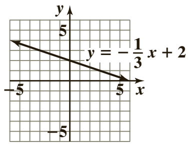
27. 

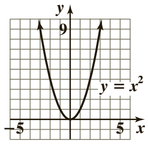
29. 

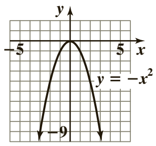
31. 

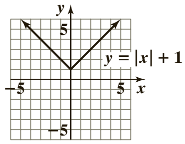
33. 

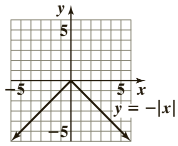
35. 

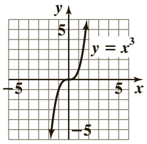
37. 

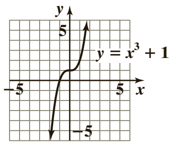
39. 

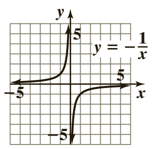
41. 

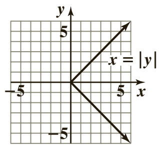
43. 

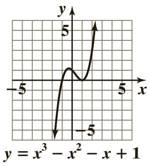
45. 

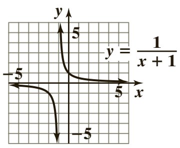
47. 

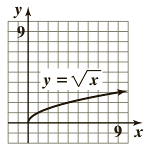
49. 

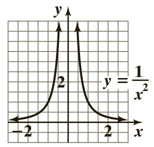
51. 

53. 

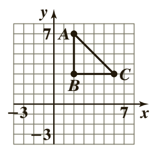
55. 

57. 

59. 

61. 

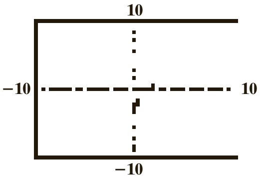
63. Sí, las coordinadas satisfacen la ecuación

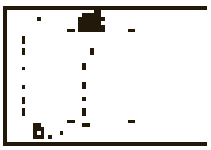
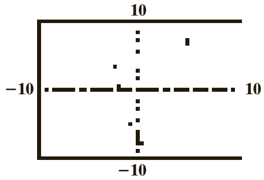
65. a) 

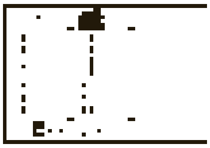
b) 8 unidades cuadradas

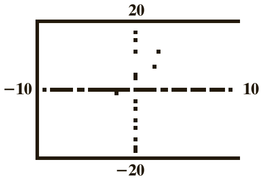
67. a) Alrededor de 800,000 pasajeros **b)** Alrededor de 667,000 pasajeros **c)** 1890-1894, 1900-1904, 1905-1909, 1910-1914 **d)** No

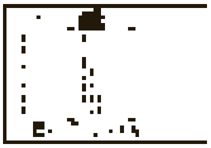
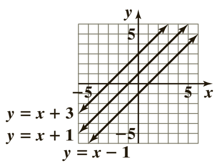
69. a **71.** c **73.** b **75.** d **77.** b **79.** d **81.** b **83.** d

85. a) 

b) 
87. a) 

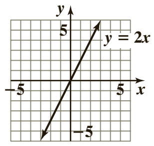
b) 

89. a) 

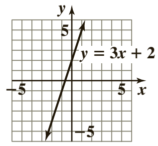
b) 
91. 

a) Cada gráfica cruza el eje y en el punto que corresponde al término constante en la ecuación de la gráfica. **b)** Sí

93. La tasa de cambio es 2.

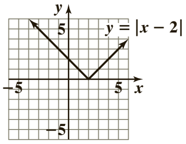


95. La tasa de cambio es 3.



97. $(4, -3),(5, 1)$, otras posibles respuestas.

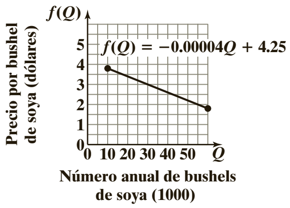
99.



103. $\dfrac{3}{2}$ **104.** ≈ 71 millas **105.** $\{x|-2 < x \leq 2\}$ **106.** $\left\{x \middle| x < -3 \text{ o } x > \dfrac{5}{3}\right\}$

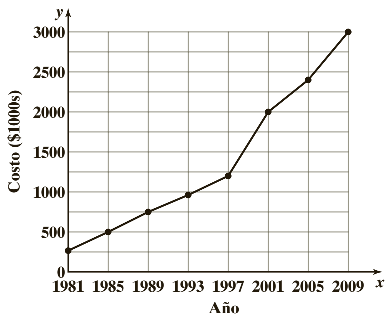
Conjunto de ejercicios 3.2

1. Dominio **3.** Par ordenado **5.** Línea vertical **7.** Rango **9.** Función **11.** Independiente **13. a)** Función **b)** Dominio: {Idaho, Texas, Georgia} Rango: $\{15, 16, 18\}$ **15. a)** Función **b)** Dominio: $\{3, 5, 11\}$ Rango: $\{6, 10, 22\}$ **17. a)** Función **b)** Dominio: {Cameron, Tyrone, Vishnu}, Rango: $\{3, 6\}$ **19. a)** No es función **b)** Dominio: $\{1990, 2001, 2002\}$; Rango: $\{20, 34, 37\}$ **21. a)** Función **b)** Dominio: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, Rango: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ **23. a)** Función **b)** Dominio: $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, Rango: $\{-1, 0, 2, 4, 9\}$ **25. a)** No es función **b)** Dominio: $\{1, 2, 3\}$, Rango: $\{1, 2, 4, 5, 6\}$ **27. a)** No es función **b)** Dominio: $\{0, 1, 2\}$, Rango: $\{-7, -1, 2, 3\}$ **29. a)** Función **b)** Dominio: $\mathbb{R}$, Rango: $\mathbb{R}$ **c)** 2 **31. a)** No es función **b)** Dominio: $\{x|0 \leq x \leq 2\}$, Rango: $\{y| -3 \leq y \leq 3\}$ **c)** ≈ 1.5 **33. a)** Función **b)** Dominio: $\mathbb{R}$, Rango: $\{y|y \geq 0\}$ **c)** $-3, -1$ **35. a)** Función **b)** Dominio: $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$, Rango: $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ **c)** 2 **37. a)** No es función **b)** Dominio: $\{x|x \geq 2\}$, Rango: $\mathbb{R}$ **c)** 3 **39. a)** Función **b)** Dominio: $\{x|-2 \leq x \leq 2\}$, Rango: $\{y|-1 \leq y \leq 2\}$ **c)** $-2, 2$ **41. a)** 5 **b)** -11 **43. a)** -6 **b)** -4 **45. a)** 2 **b)** 2 **47. a)** 7 **b)** 0 **49. a)** 0 **b)** 3 **51. a)** 1 **b)** indefinido **53. a)** 16 pies cuadrados **b)** 26 26 pies cuadrados **55. a)** $A(r) = \pi r^2$ **b)** $\approx$452.4 yardas cuadradas **57. a)** $C(F) = \dfrac{5}{9}(F - 32)$ **b)** $-35°$ C **59. a)** 18.23°C **b)** 27.68°C **61. a)** 78.32° **b)** 73.04° **63. a)** 91 naranjas **b)** 204 naranjas **65. a)**



b) \$2.65 por *bushel*

67. Las respuestas variarán. Una posible interpretación: la persona calienta lentamente, posiblemente por caminar, por 5 minutos. Posteriormente comienza a trotar lentamente durante un periodo de 5 minutos. Para los siguientes 15 minutos la persona trota. Los siguientes 5 minutos la persona camina lentamente y su ritmo cardiaco disminuye a su ritmo normal. El ritmo permanece igual durante los siguientes 5 minutos.
69. Las respuestas variarán. Una posible interpretación: el hombre camina en el terreno plano, por encima del nivel del mar, por 5 minutos. Los siguientes 5 minutos camina colina arriba a 45 pies sobre el nivel del mar. Durante 7 minutos camina en terreno plano. Después camina rápidamente colina arriba durante 5 minutos.
71. Las respuestas variarán. Una posible interpretación: el conductor se encuentra en el tráfico, entonces conduce por la autopista alrededor de 15 minutos, después conduce por un camino rural por unos pocos minutos, entonces detiene el auto por unos minutos, después regresa al tráfico que se detiene y avanza.
73. a) Si **b)** Año **c)** $\approx$ \$22,000 **d)** $\approx$ \$6,000 **e)** $\approx 100\%$
75. a)



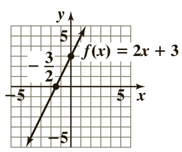
b) No se trata de una linea recta. **c)** \$2,300,000

79. $\dfrac{1}{2}$ **80.** $p_2 = \dfrac{E - a_1p_1 - a_3p_3}{a_2}$ **81. a)**

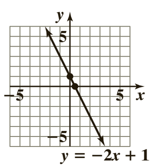
b) $(3, \infty)$ **c)** $\{x|x > 3\}$ **82.** $-2, 10$

Conjunto de ejercicios

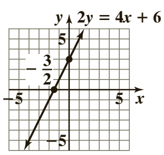
1. Números reales **3.** Intersección con el eje x. **5.** Horizontal **7.** Error **9.** Lineal.
11. $4x + y = 3$ **13.** $3x - 4y = -14$
15.



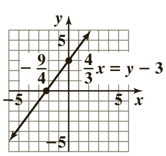
17.



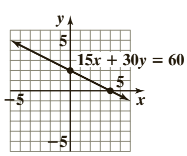
19.

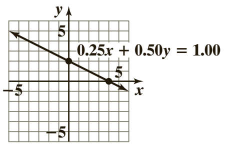


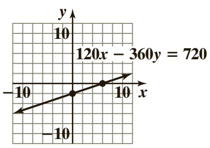
21.

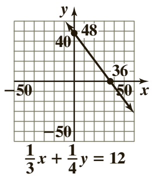


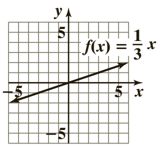
23.

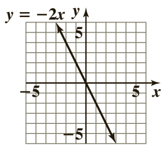


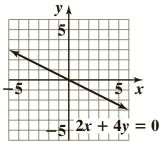
25. 

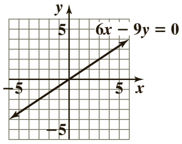
27. 

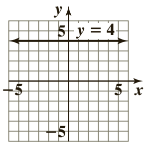
29. 

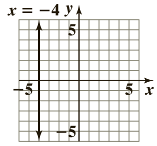
31. 

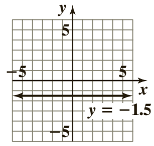
33. 

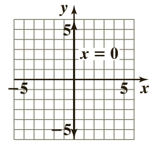
35. 

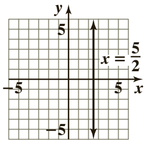
37. 

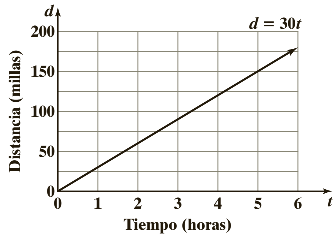
39. 

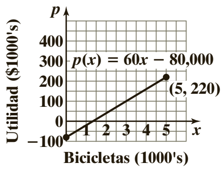
41. 

43. 

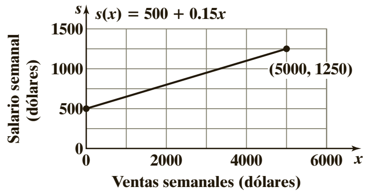
45. 

47. 

49. 

51. a) 

b) 1300 bicicletas **c)** 3800 bicicletas

53. a) $s(x) = 500 + 0.15x$ **b)** 

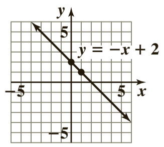
c) $950 **d)** $4000

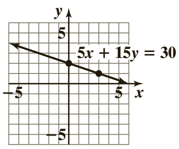
55. a) Solo hay un valor de y para cada valor de x.
b) Independiente: altura, dependiente: peso
c) Sí
d) 11.5 kilogramos
e) 65 centímetros
f) 12.0-15.5 kilogramos
g) Aumentará; si, conforme los bebés crecen sus pesos variaran más.

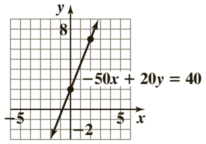
57. Cuando la gráfica cruza por el origen, ya que en el origen tanto x como y son iguales a cero.
59. Las respuestas variarán. Un ejemplo: $f(x) = 4$. **61.** Ambas intersecciones serán con 0. **63.** $(-3.2, 0), (0, 6.4)$
65. $(-2, 0)$, $(0, -2.5)$ **69.** 96 **70.** $-\frac{18}{13}$ **71. a)** Las respuestas variarán. **b)** $x = a + b$ o $x = a - b$
72. a) Las respuestas variarán. **b)** $a - b < x < a + b$ **73. a)** Las respuestas variarán. **b)** $x < a - b$ o $x > a + b$ **74.** $\{-2, 2\}$

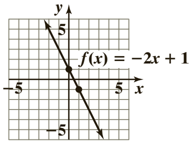
Conjunto de ejercicios 3.4

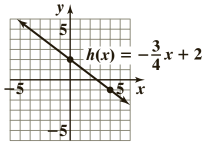
1. Pendiente **3.** Forma estándar **5.** Escalar, correr **7.** Negativo **9.** Vertical **11.** Tasa de cambio **13.** -2 **15.** $-\frac{1}{2}$ **17.** -1 **19.** Indefinido **21.** 0 **23.** $-\frac{2}{3}$ **25.** $j = 3$ **27.** $k = -2$ **29.** $x = 6$ **31.** $r = 0$ **33.** $m = -3$, $y = -3x$ **35.** $m = -\frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{3}x + 2$ **37.** m es indefinida, $x = -2$ **39.** $m = 0$, $y = 3$ **41.** $m = -\frac{3}{2}$, $y = -\frac{3}{2}x + 15$

43. $y = -x + 2, -1, (0, 2)$ 

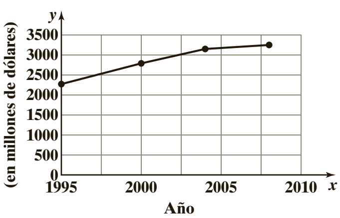
45. $y = -\frac{1}{3}x + 2, -\frac{1}{3}, (0, 2)$ 

47. 

49. 

51. 

53. a) 2 **b)** 4 **c)** 1 **d)** 3
55. Si las pendientes son las mismas y las intersecciones con y son diferentes, las rectas son paralelas.
57. $(0, -5)$

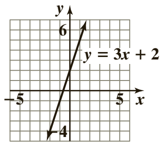
59. a) **b)** **61. a)** 1 **b)** $(0, 4)$ **c)** **63.** **65.** 0.2 **67. a)** 11.3 **b)** positivo
c) 7.075 **69. a-b)** 

c) 123.8, 64.25, 31.75 **d)** 1995-2000, debido a que el segmento de la recta tiene la mayor pendiente **71. a)** $h(x) = -x + 200$
b) 186 latidos por minuto **73. a)** $S(t) = 210t + 37{,}550$ **b)** $38,180
c) $39,650 **d)** 12 años **75. a)** $S(t) = 1853.6t + 37{,}855$
b) $43,415.80 **c)** $56,391 **d)** 8 años

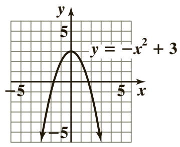
77. La intersección en el eje y es incorrecta. **79.** La pendiente es incorrecta. **81.** Altura: 14.2 pulgadas, ancho: 6.4 pulgadas **84.** 19 **85.** 5 **86.** 2.4 **87.** Primero: 75 millas por hora, segundo: 60 millas por hora **88. a)** $x < -3$ o $x > 2$ **b)** $-3 < x < 2$

Prueba de mitad de capítulo

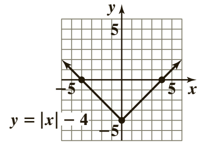
1. III [3.1] **2.**



[3.1] **3.**

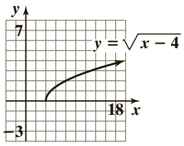


[3.1] **4.**



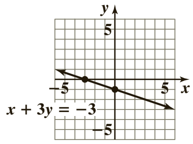
[3.1]

5.

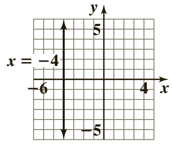


[3.1] **6. a)** Una relación es cualquier conjunto de pares ordenados. **b)** Una función es una correspondencia entre un primer conjunto de elementos, el dominio, y un segundo conjunto de elementos, el rango, tal que a cada elemento del dominio le corresponde exactamente un elemento en el rango. **c)** No **d)** Si [3.2] **7.** Función; dominio:$\{1, 2, 7, -5\}$, Rango:$\{5, -3, -1, 6\}$ [3.2] **8.** No es función; Dominio $\{x|-2 \le x \le 2\}$, Rango $\{y|-4 \le y \le 4\}$ [3.2] **9.** Función; Dominio: $\{x|5 \le x \le 3\}$, Rango: $\{y|-2 \le y \le 2\}$ [3.2]

10. -21 [3.2] **11.** 105 pies [3.2] **12.** $7x - y = -6$ [3.3] **13.**

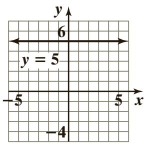


[3.3] **14.**

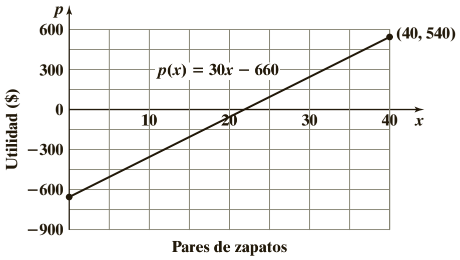


[3.3]

15.



[3.3] **16. a)**



b) 22 pares de zapatos **c)** 34 pares de zapatos [3.3]

17. $-\frac{5}{8}$ [3.4]

18. $y = -2x + 2$ [3.4]

19. $y = \frac{3}{2}x + 9; \frac{3}{2}; (0, 9)$ [3.4]

20. a) 5 **b)** $(0, 1)$ **c)** $y = 5x + 1$ [3.4]

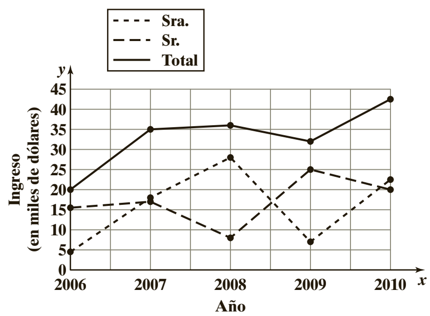
Conjunto de ejercicios 3.5

1. Paralela **3.** Forma punto pendiente **5.** $y = 3x - 5$ **7.** $y = -\frac{1}{2}x + 1$ **9.** $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$ **11.** $y = -\frac{3}{2}x$ **13.** $y = \frac{1}{2}x - 5$ **15.** Paralela **17.** Ninguna **19.** Perpendicular **21.** Perpendicular **23.** Paralela **25.** Ninguna **27.** Perpendicular **29.** Paralela **31.** Ninguna **33.** $y = 2x + 1$ **35.** $2x - 5y = 19$ **37.** $y = -\frac{5}{3}x + 5$ **39.** $f(x) = 4x - 2$ **41.** $y = -\frac{2}{3}x + 6$ **43. a)** $C(s) = 45.7s + 95.8$ **b)** 324.3 calorías **45. a)** $d(p) = -0.20p + 90$ **b)** 38 ipods **c)** \$225 **47. a)** $s(p) = 95p - 60$ **b)** 206 cometas **c)** \$3.00 **49. a)** $i(t) = 12.5t$ **b)** \$1500 **c)** 176 boletos **51. a)** $r(w) = 0.01\omega\ 10$ **b)** \$46.13 **c)** 5000 libras **53. a)** $y(a) = -0.865a + 79.25$ **b)** 47.2 años **c)** 62.7 años de edad **55. a)** $w(a) \approx 0.189a + 10.6$ **b)** 14.758 kilogramos **58.** $\left(-\infty, \frac{2}{5}\right)$ **59.** Invierte la dirección del símbolo de desigualdad. **60. a)** Cualquier conjunto de pares ordenados **b)** una correspondencia donde cada miembro del dominio le corresponde un único miembro del rango. **c)** las respuestas variarán. **61.** Dominio: $\{3,4,5,6\}$, Rango $\{-4. -1, 2, 7\}$

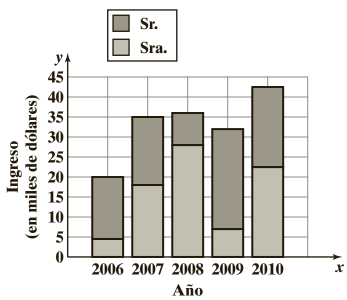
Conjunto de ejercicios 3.6

1. $x^2 - 2x + 5$ **3.** $x^2 + 2x - 5$ **5.** $2x^3 - 5x^2$ **7.** Todos los números reales **9. a)** $4x + 3$ **b)** $4a + 3$ **c)** 11 **11. a)** $x^3 + x - 4$ **b)** $a^3 + a - 4$ **c)** 6 **13. a)** $4x^3 - x + 4$ **b)** $4a^3 - a + 4$ **c)** 34 **15.** -7 **17.** 29 **19.** -60 **21.** Indefinido **23.** 13 **25.** $-\frac{3}{4}$ **27.** $2x^2 - 6$ **29.** -4 **31.** 18 **33.** 0 **35.** $-\frac{3}{7}$ **37.** $-\frac{1}{45}$ **39.** $2x^2 + 2x - 6$ **41.** 3 **43.** -4 **45.** 1 **47.** Indefinido **49.** 0 **51.** 0 **53.** -3 **55.** -2 **57. a)** 2008 **b)** \$800 **c)** \$7900 **d)** \$900 **59. a)** verano A, 36 **b)** verano B, 10 **c)** 11 estudiantes masculinos **d)** 19 estudiantes femeninas **61. a)** ≈ 20 **b)** ≈ 8 **c)** ≈ 12 **d)** ≈ 23

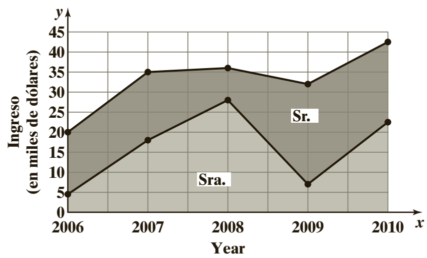
63. a)



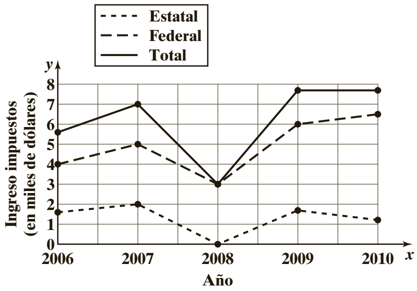
b)



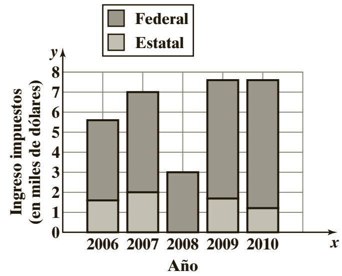
a)



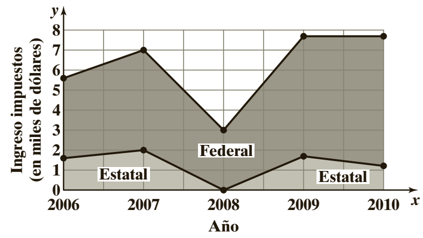
65. **a)**



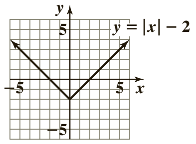
b)



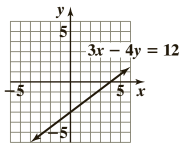
c)



67. $g(x) \neq 0$ ya que la división por cero es indefinida. **69.** No, la resta no es conmutativa. Un ejemplo es $5 - 3 = 2$ aunque $3 - 5 = -2$
71. $f(a)$ y $g(a)$ deben ser opuestas o ambas iguales a 0. **73.** $f(a) = g(a)$ **75.** $f(a)$ y $g(a)$ deben tener signos opuestos.
78. $-\dfrac{1}{64}$ **79.** 2.96×10^6 **80.** $h = \dfrac{2A}{b}$ **81.** \$450 **82.**

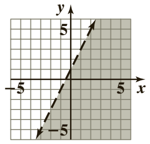


83.

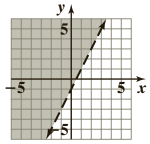


Conjunto de ejercicios 3.7

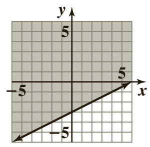
1. Línea de frontera **3.** Sólido **5.**



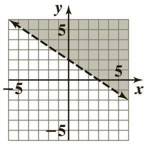
7.



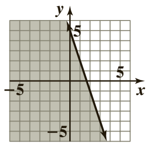
9.



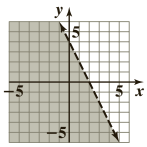
11.



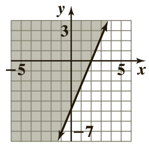
13.



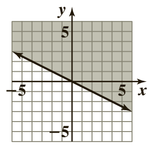
15.



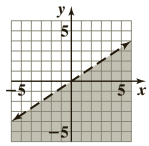
17.



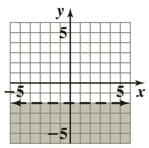
19.



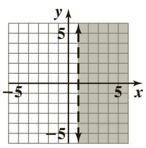
21.



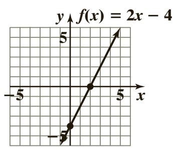
23.



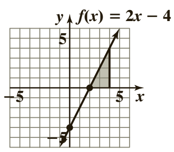
25.



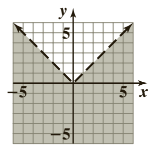
27. **a)** $8x + 15y \leq 175$ **b)** Sí **c)** No
29. **a)**



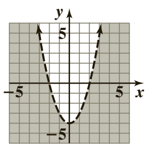
b)



31. Los puntos en la recta son soluciones para la ecuación correspondiente, y no son soluciones si el símbolo utilizado es $<$ o $>$.
33. (0, 0) no puede ser usado como punto de prueba si la recta cruza por el origen. **35.**



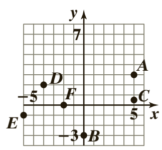
37.



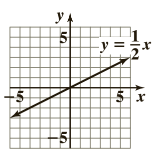
38. 9
39. 81.176 **40.** \$15.72 **41.** -4
42. $x = 2y = 2$ (other answers are possible) **43.** -2

Ejercicios de repaso acumulados del capítulo 3

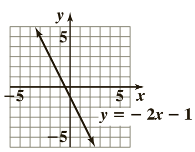
1.



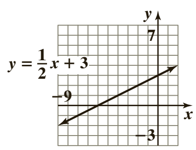
2.



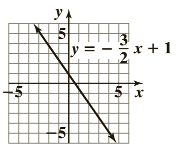
3.



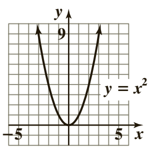
4.



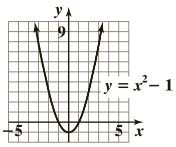
5.



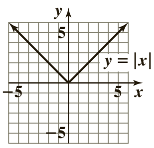
6.



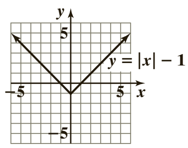
7.



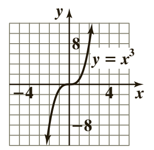
8.



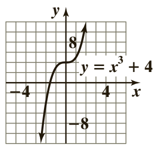
9.



10.

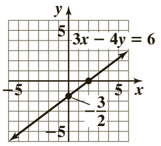


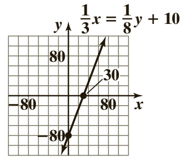
11.

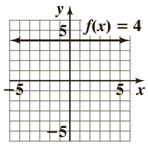


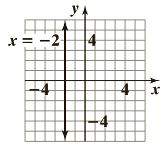
12. Una función es una correspondencia donde a cada miembro del dominio corresponde exactamente un miembro del rango. **13.** No, no toda relación es una función. {(84, 29, 84, −2)} es una relación pero no una función. Sí, toda función es una relación, ya que es un conjunto de pares ordenados. **14.** Sí, a cada miembro del dominio le corresponde exactamente un miembro del rango. **15.** No, al elemento 1 del dominio le corresponde más de un elemento del rango (1 y −1). **16.** **a)** Sí, la relación es una función. **b)** Dominio: ℝ; Rango: ℝ

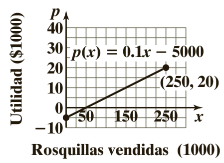
17. a) Sí, la relación es una función. **b)** Dominio: $\mathbb{R}$, Rango: $\{y|y \leq 0\}$ **18. a)** No, la relación no es una función. **b)** Dominio: $\{x|-3 \leq x \leq 3\}$, Rango: $\{y|-3 \leq y \leq 3\}$ **19. a)** No, la relación no es una función. **b)** Dominio: $\{x|-2 \leq x \leq 2\}$, Rango: $\{y|-1 \leq y \leq 1\}$ **20. a)** -1 **b)** $3h - 7$ **21. a)** 1 **b)** $2a^3 - 3a^2 + 6$ **22.** Las respuestas variarán. Aquí esta una posible interpretación: la velocidad del vehículo incrementa a 50 mph. Permanece en esta velocidad alrededor de 11 minutos. Incrementa su velocidad a 68 mph. Permanece a esa velocidad durante 5 minutos, posteriormente se detiene. Se mantiene detenido por 5 minutos, entonces va en el tráfico por 5 minutos. **23. a)** 1020 canastas **b)** 1500 canastas **24. a)** 180 pies **b)** 52 pies

25. 

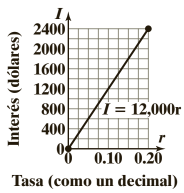
26. 

27. 

28. 

29. 

b) 50,000 rosquillas **c)** 270,000 rosquillas

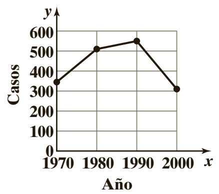
30. 

31. $m = \frac{1}{2}, (0, 6)$ **32.** $m = -2, (0, 3)$ **33.** $m = -\frac{3}{5}, \left(0, \frac{13}{5}\right)$ **34.** $m = -\frac{3}{4}, \left(0, \frac{5}{2}\right)$

35. m es indefinido, no hay intersección con el eje y **36.** $m = 0, (0, 8)$ **37.** 2 **38.** $-\frac{1}{3}$ **39.** $m = 0, y = 3$

40. m es indefinida, $x = 2$ **41.** $m = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}x + 2$ **42. a)** -2 **b)** $(0, 1)$ **c)** $y = -2x + 1$

43. $(0, 0)$

44. a) 

b) 1970-1980: 16.4, 1980-1990: 4.2, 1990-2000: -23.5 **c)** 1970-1980 **45.** $n(t) \approx 0.7t + 35.6$

46. Paralelo **47.** Perpendicular **48.** Ninguno **49.** $y = \frac{1}{2}x + 2$ **50.** $y = -x - 2$

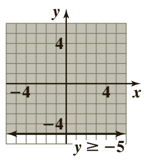
51. $y = -\frac{2}{3}x + 6$ **52.** $y = \frac{5}{2}x + 3$ **53.** $y = -\frac{5}{3}x - 4$ **54** $y = -\frac{1}{2}x + 7$ **55.** Ninguno

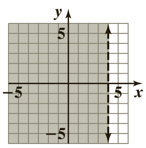
56. Paralelo **57.** Perpendicular **58.** Ninguno **59. a)** $r(a) = 0.61a - 10.59$ **b)** \$13.81

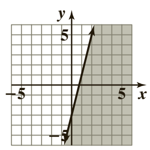
60. a) $C(r) = 1.8r + 435$ **b)** 507 calorías **c)** ≈ 91.7 yardas por minuto **61.** $x^2 - x - 1$ **62.** 11 **63.** $-x^2 + 5x - 9$

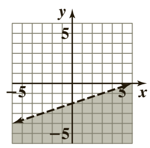
64. -15 **65.** -56 **66.** 4 **67.** $-\frac{2}{3}$ **68.** -2 **69. a)** ≈ 4.6 billones **b)** ≈ 2.1 billones **c)** ≈ 0.8 billones **d)** $\approx 33\%$

70. a) $\approx \$47{,}000$ **b)** $\approx \$28{,}000$ **c)** $\approx \$3000$

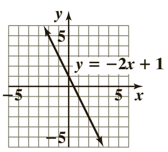
71. 

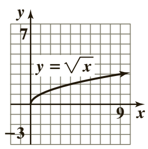
72. 

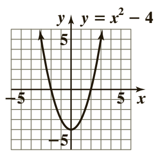
73. 

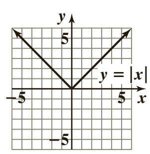
74. 

Ejercicios de práctica del capítulo 3

1. 

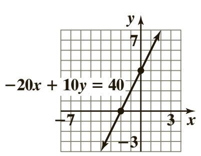
[3.1] **2.** 

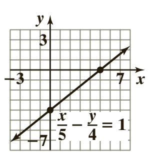
[3.1] **3.** 

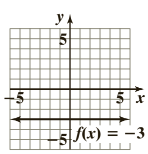
[3.1] **4.** 

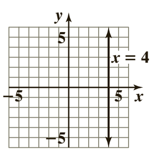
[3.1]

5. Una función es una correspondencia donde a cada elemento en el dominio le corresponde exactamente un elemento del rango. [3.2] **6.** Si, debido a que a cada elemento en el dominio le corresponde exactamente un elemento del rango. [3.2] **7.** Sí; Dominio: $\mathbb{R}$, Rango: $\{y|y \leq 4\}$ [3.2] **8.** No; Dominio: $\{x|-3 \leq x \leq 3\}$, Rango: $\{y|-2 \leq y \leq 2\}$ [3.2] **9.** 29 [3.2]

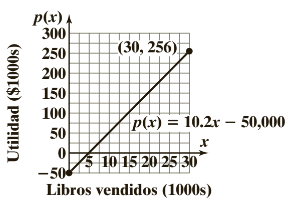
10. 

[3.3] **11.** 

[3.3] **12.** 

[3.3] **13.** 

[3.3]

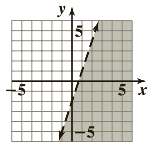
14. a) 

b) 4900 libros **c)** 14,700 libros [3.3] **15.** $m = \frac{4}{3}, (0, -5)$ [3.4] **16.** $y = 3x - 7$ [3.4]

17. $y = -2x + 7$ [3.4] **18.** $p(t) = 2.9044t + 274.634$ [3.4]

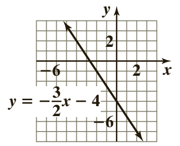
19. Paralelo, la pendiente de ambas rectas es la misma, $\frac{2}{3}$. [3.5] **20. a)** $r(t) = -3t + 266$

b) 248 por cada 100,000 **c)** 206 por cada 100,000 [3.5] **21.** 12 [3.6] **22.** $-\frac{3}{7}$ [3.6]

23. $2a^2 - a$ [3.6] **24. a)** ≈ 44 millones de toneladas **b)** ≈ 18 millones de toneladas **c)** ≈ 26 millones de toneladas [3.6] **25.** 

[3.7]

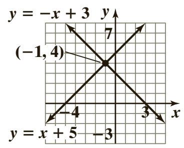
Ejercicios de repaso acumulados

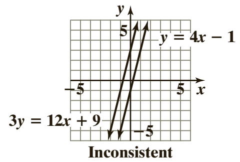
1. a) {3, 5, 7} **b)** {1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 14} [1.2] **2. a)** Ninguna **b)** $-6, -4, \frac{1}{3}, 0, \sqrt{3}, 4.67, \frac{37}{2}, -\sqrt{5}$ [1.2] **3.** 100 [1.4] **4.** $25x^4y^6$ [1.5] **5.** $\frac{x^9}{8y^{15}}$ [1.5] **6. a)** 3.052×10^{12} pies cúbicos **b)** $7.4^{12} \times 10^{12}$ pies cúbicos **c)** 2.398×10^{13} pies cúbicos [1.6] **7.** 0 [2.1] **8.** $-\frac{138}{5}$ [2.1] **9.** $9x - 7$ [2.1] **10.** $b_1 = \frac{2A}{h} - b_2$ [2.2] **11.** 12 galones [2.4] **12.** $x > -\frac{10}{3}$ [2.5] **13.** $2 < x < 6$ [2.5] **14.** {−15, 1} [2.6] **15.** $\{x|-1 \le x \le 2\}$ [2.6] **16.** 

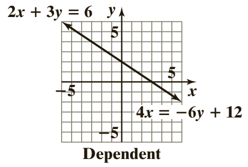
[3.1] **17. a)** No es una función **b)** Dominio: $\{x|x \le 2\}$[Rango: ℝ [3.2] **18.** $-\frac{4}{9}$ [3.4] **19.** Ninguno [3.5] **20.** $x^2 + 7x - 11$ [3.6]

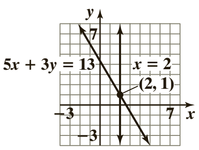
Capítulo 4

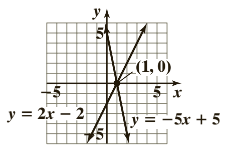
Conjunto de ejercicios 4.1

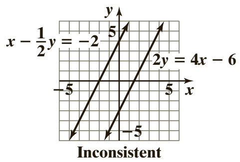
1. Una variable **3.** Dependiente **5.** Consistente **7.** Rectas paralelas **9.** Par ordenado **11.** Ninguno **13. b) 15. b) 17.** Consistente; una solución **19.** Dependiente; infinito número de soluciones **21.** Inconsistente; sin solución **23.** Inconsistente; sin solución. **25.** 

27. 

29. 

31. 

33. 

35. 

37. (1, 0) **39.** (−3, −3) **41.** (2, 1) **43.** (0.5, 0.7) **45.** Número infinito de soluciones. **47.** Sin solución **49.** $\left(-\frac{19}{5}, -3\right)$ **51.** (8, 6) **53.** (5, 2) **55.** $\left(-1, -\frac{5}{3}\right)$ **57.** Número infinito de soluciones **59.** Sin solución **61.** (1, 1) **63.** Número infinito de soluciones **65.** $\left(\frac{14}{5}, -\frac{12}{5}\right)$ **67.** $\left(\frac{37}{7}, \frac{19}{7}\right)$ **69.** (3, 2) **71.** (4, 0) **73.** (4, 3) **75.** $\left(\frac{192}{25}, \frac{144}{25}\right)$ **77.** 2025, $53,000 **79. a)** Un ejemplo es: $x + y = 7, x - y = -3$. **b)** Elije coeficientes para x y y, después usa las coordenadas dadas para encontrar las constantes. **81.** A = 2 y B = 5 **83.** $m = 4, b = -2$ **85.** Compara las pendientes y las intersecciones con el eje y de las ecuaciones. Si las pendientes son distintas, el sistema es consistente. Si las pendientes y las intersecciones con el eje y son las mismas, el sistema es dependiente. Si las pendientes son las mismas y las intersecciones con el eje y son diferentes, el sistema es inconsistente. **87.** Obtendrás una proposición verdadera, como $0 = 0$. **89.** Multiplica la primer ecuación por 2 y observa que la nueva ecuación es idéntica a la segunda ecuación. **91. a), b),** y **c)** Las respuestas variarán. **93. a)** Número infinito, porque un sistema de ecuaciones puede no tener solución, una solución, o un número infinito de soluciones **b)** $m = -4, y = -4x - 13, (0, -13)$ **c)** Sí **95.** Un ejemplo es: $x + y = 1, 2x + 2y = 2$, crea una ecuación y entonces multiplícala por una constante para obtener una segunda ecuación **97.** El sistema es dependiente o una gráfica no aparece en la ventana de visualización. **99.** (8, −1) **101.** (−1, 2) **103.** $\left(\frac{1}{a}, 5\right)$ **106.** Los números racionales pueden ser expresados como cocientes de dos enteros, en los que el denominador no es 0. Los números racionales no. **107. a)** Sí, el conjunto de números reales incluye el conjunto de números racionales. **b)** Sí, el conjunto de números reales incluyen el conjunto de números irracionales. **108.** $-\frac{17}{4}$ **109.** ℝ **110.** 520.20 **111.** No, los puntos(−3, 4) y (−3, −1) tienen la misma primer coordenada y la segunda diferente. 112. Indefinido

Conjunto de ejercicios 4.2

1. Triple ordenado **3.** Inconsistente **5.** 2, 0 ,1) **7.** $\left(-7, -\frac{35}{4}, -3\right)$ **9.** (0, 3, 6) **11.** (1, 1, 1) **13.** (−3, 15, −7) **15.** (3, 1, −2) **17.** (2, −1, 3) **19.** $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$ **21.** (0, −1, 0) **23.** $\left(-\frac{11}{17}, \frac{7}{34}, -\frac{49}{17}\right)$ **25.** (0, 0, 0) **27.** (4, 6, 8)

29. $\left(\frac{2}{3}, \frac{23}{15}, \frac{37}{15}\right)$ **31.** $(1, 1, 2)$ **33.** Inconsistente **35.** Dependiente **37.** Inconsistente **39.** $A = 9, B = 6, C = 2; 9x + 6y + 2z = 1$
41. Las respuestas variarán. Un ejemplo es $x + y + z = 10, x + 2y + z = 10, x + 2y + z = 16$
43. a) $a = 1, b = 2, c = -4$ **b)** $y = x^2 + 2x - 4$, sustituye 1 por a, 2 por b, y -4 por c en $y = ax^2 + bx + c$
45. Ningún punto es común a los tres planos. Por lo tanto, el sistema es inconsistente. **47.** Un punto es común a los tres planos; por lo tanto, el sistema es inconsistente. **49. a)** Sí, los tres planos pueden ser paralelos **b)** Sí, los tres planos pueden intersectar en un punto **c)** No, los 3 planos no pueden intersectar en exactamente dos puntos **51.** $(1, 2, 3, 4)$ **53. a)** $\frac{1}{4}$ de hora o 15 minutos **b)** 1.25 millas **54.** $\left\{x \middle| x < -\frac{3}{2} \text{ o } x > \frac{27}{2}\right\}$ **55.** $\left\{x \middle| -\frac{8}{3} < x < \frac{16}{3}\right\}$ **56.** $\varnothing$

Conjunto de ejercicios 4.3

1. Irlanda: 70,273 kilómetros cuadrados, Georgia: 69,700 kilómetros cuadrados **3.** Hamburguesa: 21 gramos, papas fritas: 67 gramos **5.** Hot dog: \$2, soda: \$1 **7.** 512 MB: 109 fotos, 4GB: 887 fotos **9.** 25°, 65° **11.** 52°, 128° **13.** 12.2 millas por hora, 3.4 millas por hora **15.** \$500, 4% **17.** 1.2 onzas de 5%, 1.8 onzas de 30% **19.** 10 galones de concentrado, 190 galones de agua. **21.** $17\frac{1}{3}$ libras de alpiste, $22\frac{2}{3}$ libras de semilla de girasol **23.** Adulto: \$29, niño: \$18 **25.** \$6000 al 5%, \$4000 al 6% **27.** 160 galones completos, 100 galones de descremada **29.** 7 libras de selección de temporada, 13 libras Mezcla del Jardín **31.** 50 millas por hora, 55 millas por hora **33.** Cabrina: 8 horas, Dabney: 3.4 horas **35.** 80 gramos de A, 60 gramos de B **37.** 200 gramos de la primera aleación, 100 gramos de la segunda aleación **39.** 2012 **41.** Tom: 60 millas por hora, Melissa: 75 millas por hora **43.** Personal: 3, estados de cuenta: 4, publicidad: 17 **45.** Alabama: 54, Tennessee: 47, Texas: 46 **47.** Bandits: 32 ganados, Force: 31 ganados, Glory: 30 ganados **49.** *Sus mejores éxitos 1971-1975*: 29 millones de álbumes, *Thriller*: 27 millones de álbumes, The Wall: 23.5 millones de álbumes. **51.** Florida: 15, California: 11, Lousiana: 9 **53.** 30°, 45°, 105° **55.** \$1500 a 3%, \$3000 a 5%, \$5500 al 6% **57.** 4 litros al 10% de solución, 2 litros al 12% de solución, 2 litros al 20% de solución **59.** 10 sillas para niños, 12 sillas estándar, 8 sillas ejecutivas **61.** $I_A = \frac{27}{38}; I_B = -\frac{15}{38}; I_C = -\frac{6}{19}$ **64.** $-\frac{35}{8}$ **65.** 4 **66.** Utiliza la prueba de la recta vertical **67.** $y = x - 10$

Prueba de mitad del capítulo

1. a) $y = 7x - 13, \quad y = -\frac{2}{3}x + 3$, **b)** Consistente **c)** una solución [4.1] **2.** $(1, 2)$ [4.1] **3.** $(-1, -3)$ [4.1] **4.** $(-4, 1)$ [4.1] **5.** $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ [4.1] **6.** $(-3, 4)$ [4.1] **7.** $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ [4.1] **8.** $(6, 12)$ [4.1] **9.** Inconsistente, sin solución [4.1] **10.** Dependiente, número infinito de soluciones [4.1] **11.** $(1, 2, -1)$ [4.2] **12.** $(2, 0, 3)$ [4.2] **13.** La solución debe tener valores para y y z además de un valor para x. La solución es $(1, -1, 4)$ o $x = 1, y = -1, z = 4$. [4.2] **14.** 10 libras de anacardos, 5 libras de pacanas [4.3] **15.** 5, 7, 20 [4.3]

Conjunto de ejercicios 4.4

1. Transformación de renglón **3.** Dimensiones **5.** Inconsistente **7.** Matriz cuadrada

9. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -5 \\ 3 & -7 & -4 \end{array}\right]$ **11.** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -8 \\ 3 & 2 & 1 & -5 \\ 4 & 7 & 2 & -1 \end{array}\right]$ **13.** $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 12 \\ 0 & 23 & 42 \end{array}\right]$ **15.** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 & -38 & -\frac{13}{4} \\ 6 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right]$ **17.** $(3, 0)$ **19.** $(-5, 1)$ **21.** $(0, 1)$

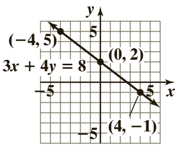
23. Sistema dependiente **25.** $\left(-\frac{1}{3}, 3\right)$ **27.** Sistema inconsistente **29.** $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right)$ **31.** $\left(\frac{4}{5}, -\frac{7}{8}\right)$ **33.** $(1, 2, 0)$ **35.** $(3, 1, 2)$ **37.** $\left(1, -1, \frac{1}{2}\right)$ **39.** Sistema dependiente **41.** $\left(\frac{1}{2}, 2, 4\right)$ **43.** Sistema inconsistente **45.** $\left(5, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

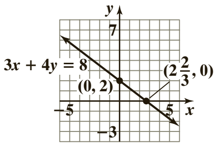
47. $\angle x = 30°, \angle y = 65°, \angle z = 85°$ **49.** Washinton: \$1100 millones (o \$1.1 billones), Dallas: \$923 millones, Houston: \$905 millones **51.** Dependiente **53.** No, éste es el mismo cuando se intercambia el orden de las ecuaciones. **55. a)** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10\}$ **b)** $\{4, 6\}$ **56. a)**  **b)** $)\{x|-1 < x \leq 4\}$ **c)** $(-1, 4]$ **57.** Un gráfico es una ilustración del conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación. **58.** -71

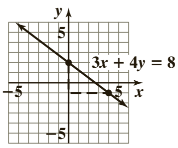
Conjunto de ejercicios 4.5

1. Determinante **3.** D_y **5.** Dependiente **7.** 11 **9.** -8 **11.** -12 **13.** 44 **15.** $(2, 1)$ **17.** $(6, -4)$ **19.** $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ **21.** $(-7, -2)$ **23.** Número infinito de soluciones **25.** $(2, -3)$ **27.** Sin solución **29.** $(2, 5)$

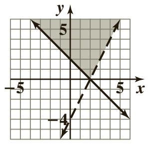
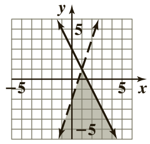
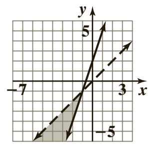
31. $(1, 2, 1)$ **33.** $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right)$ **35.** $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, 2\right)$ **37.** $(-1, 0, 2)$ **39.** Número infinito de soluciones **41.** $(1, -1, 2)$ **43.** Sin solución **45.** $(3, 4, 1)$ **47.** $(-1, 5, -2)$ **49.** 5 **51.** 6 **53.** Adulto: \$10, estudiante: \$5 **55.** Tendrán signos opuestos. Esto puede observarse al comparar $a_1b_2 - a_2b_1$ con $a_2b_1 - a_1b_2$ **57.** 0 **59.** 0 **61.** Sí, tendrán signos opuestos **63.** No, igual valor que el original **65.** Sí, el valor es el doble del original **67. a)** $x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ **b)** $y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ **68.** $\left(-\infty, \frac{14}{11}\right)$

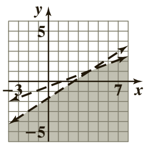
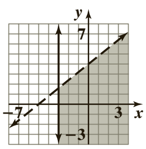
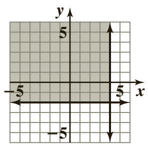
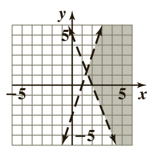
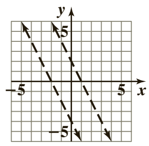
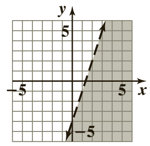
69. 

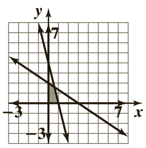
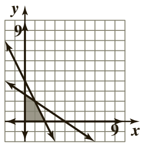
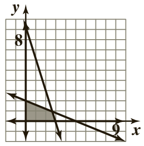
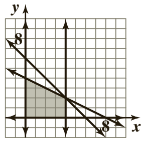
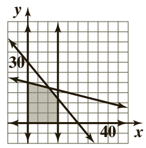
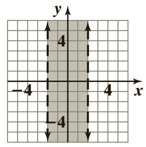
70. 

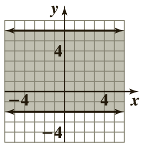
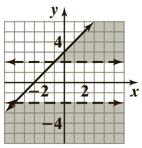
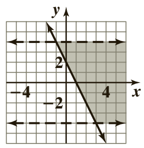
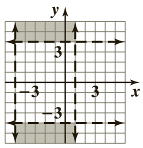
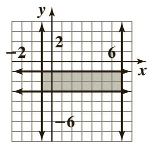
71. 

Conjunto de ejercicios 4.6

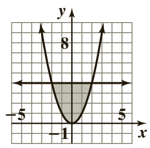
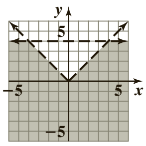
1. Satisface **3.** Restricciones **5.**  **7.**  **9.** 

11.  **13.**  **15.**  **17.**  **19.**  **21.** 

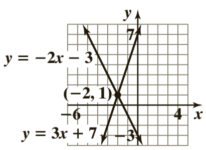
23.  **25.**  **27.**  **29.**  **31.**  **33.** 

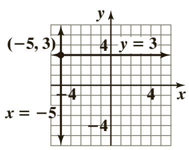
35.  **37.**  **39.**  **41.**  **43.** 

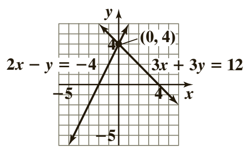
45. No; el punto no es parte de la solución en la desigualdad $<$ **47.** No; el punto no es una solución de ninguna desigualdad. **49.** No hay una solución. Los lados opuestos de la misma recta han sido sombreados y solo una desigualdad incluye la recta. **51.** Hay un número infinito de soluciones. Ambas desigualdades incluyen la recta $5x - 2y = 3$. **53.** Hay un número infinito de soluciones, las rectas no son paralelas o idénticas.

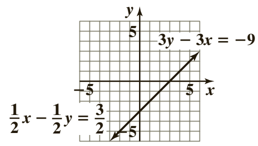
55.  **57.**  **59.** $f_2 = \dfrac{f_3 d_3 - f_1 d_1}{d_2}$ **60.** Dominio: $\{-1, 0, 4, 5\}$, Rango: $\{-5, -2, 2, 3\}$
61. Dominio: $\mathbb{R}$, Rango: $\mathbb{R}$
62. Dominio: $\mathbb{R}$, Rango: $\{y|y \geq -1\}$

Revisión de ejercicios del capítulo 4

1. Inconsistente; sin solución **2.** Consistente; una solución **3.** Consistente; una solución
4. Consistente, una solución **5.** 

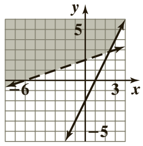
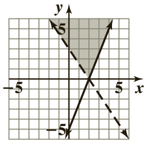
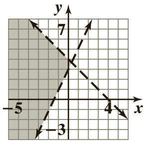
6. 

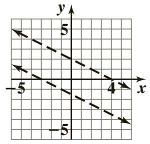
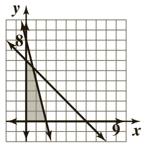
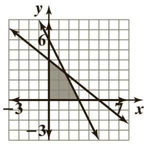
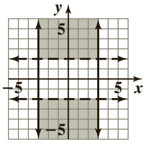
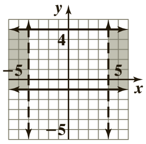
7. 

8. 

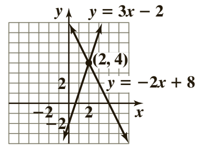
Dependiente, número infinito de soluciones

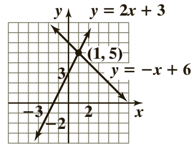
9. $(1, -1)$ **10.** $(-1, -1)$ **11.** $(2, 5)$ **12.** $(5, 2)$ **13.** $(2, 1)$ **14.** $(-8, 11)$ **15.** $(-1, 3)$ **16.** $(3, -2)$ **17.** $\left(\frac{32}{13}, \frac{8}{13}\right)$
18. $\left(-1, \frac{13}{3}\right)$ **19.** $(1, 2)$ **20.** $\left(\frac{7}{5}, \frac{13}{5}\right)$ **21.** $(6, -2)$ **22.** $\left(-\frac{78}{7}, -\frac{48}{7}\right)$ **23.** Número infinito de soluciones **24.** No hay solución
25. $(2, 0, 1)$ **26.** $(-1, 3, -2)$ **27.** $(-5, 1, 2)$ **28.** $(3, -2, -2)$ **29.** $\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, 3\right)$ **30.** $(0, 2, -3)$ **31.** Sin solución
32. Número infinito de soluciones **33.** Luan: 38, Jennifer: 28 **34.** Avión: 520 mph, viento: 40 mph **35.** Combina 2 litros al 20% de solución de ácido con 4 litros al 50% de la solución acida. **36.** 410 boletos para adulto y 240 boletos para niños fueron vendidos. **37.** Sus edades fueron 41 años y 77 años. **38.** \$20,000 invertidos al 7%, \$15,000 invertidos al 5%, y \$5000 fueron invertidos al 3%. **39.** $(3, -2)$ **40.** $(3, 1)$ **41.** Número infinito de soluciones **42.** $(2, 1, -2)$ **43.** Sin solución **44.** Número infinito de soluciones **45.** $(1, 5)$ **46.** $(-3, 2)$ **47.** $(-1, 2)$ **48.** $(-2, 3, 4)$ **49.** $(1, 1, 2)$ **50.** Sin solución

51.  **52.**  **53.** 

54. Sin solución  **55.**  **56.**  **57.**  **58.** 

Prueba de repaso del capítulo

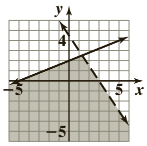
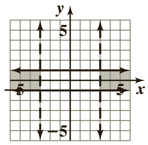
1. Las respuestas variarán [4.1] **2.** Consistente; una solución [4.1] **3.** Dependiente; infinito número de soluciones [4.1] **4.** Inconsistente, sin solución [4.1] **5.** 

[4.1] **6.** 

[4.1] **7.** $(1, 1)$ [4.1]

8. $(-3, 2)$ [4.1] **9.** $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ [4.1] **10.** Número infinito de soluciones [4.1] **11.** $\left(\frac{44}{19}, \frac{48}{19}\right)$ [4.1] **12.** $(1, -1, 2)$ [4.2]

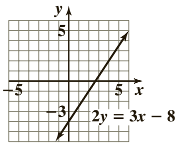
13. $\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & 9 & -13 \end{array}\right]$ [4.4] **14.** $\left[\begin{array}{rrr|r} 6 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & 12 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \end{array}\right]$ [4.4] **15.** $(4, -1)$ [4.4] **16.** $(3, -1, 2)$ [4.4] **17.** -1 [4.5] **18.** 165 [4.5]

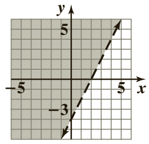
19. $(-3, 2)$ [4.5] **20.** $(3, 1, -1)$ [4.5] **21.** 8 libras de girasol; 12 libras de mezcla para aves [4.3] **22.** $6\frac{2}{3}$ litros de solución al 6%; $3\frac{1}{3}$ litros de solución al 15% [4.3] **23.** 4, 9, y 16 [4.3] **24.**  [4.6] **25.**  [4.6]

Prueba de repaso acumulado

1. 3 [1.4] **2. a)** 9, 1 **b)** $\frac{1}{2}, -4, 9, 0, -4.63, 1$ **c)** $\frac{1}{2}, -4, 9, 0, \sqrt{3}, -4.63, 1$ [1.2]

3. $-|-8|, -1, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, |-4|, |-12|$ [1.3] **4.** 7 [2.1] **5.** $\frac{17}{4}$ [2.1] **6.** $6, -3$ [2.6] **7.** $x = 2M - 2$ [2.2] **8.** $\left\{x \,\middle|\, \frac{2}{3} < x \leq \frac{34}{3}\right\}$ [2.5]

9. $\frac{y^{10}}{9x^4}$ [1.5] **10.** 

[3.3] **11.** $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ [3.5] **12.**  [3.7] **13. a)** Función **b)** Función **c)** Sin función [3.2]

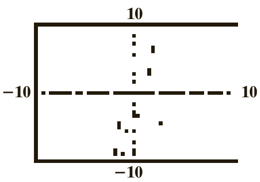
14. a) $-\frac{1}{7}$ **b)** $\frac{h+3}{h^2-9}$ **c)** Indefinido [3.2]

15. $(1, 3)$ [4.1] **16.** $(7, -1)$ [4.1] **17.** $(2, 1, 3)$ [4.2] **18.** 10°, 80°, 90° [2.3] **19.** 1 hora [2.4] **20.** 600 a \$20, 400 a \$16 [4.3]

Capítulo 5

Conjunto de ejercicios 5.1

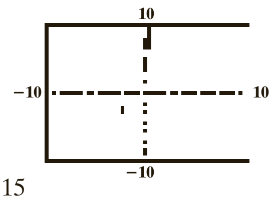
1. Términos **3.** 5 **5.** Liderando **7.** Binomio **9.** Monomio **11.** Monomio **13.** No es un polinomio; hay un exponente -1 **15.** No es un polinomio; hay un exponente $\frac{1}{2}$ **17.** $-x^2 + 2x - 5$, 2 **19.** $10x^2 + 3xy + 9y^2$, 2 **21.** En orden descendente, 4 **23. a)** 6 **b)** **25. a)** 6 **b)** 9 **27. a)** 17 **b)** $-\frac{1}{3}$ **29.** -5 **31.** -7 **33.** -2.0312 **35.** $x^2 + 9x - 6$ **37.** $x^2 - 13x + 2$ **39.** $2y^2 + 9y - 11$ **41.** $-\frac{2}{3}a^2 - \frac{29}{36}a + 5$ **43.** $-3.5x^2 - 2.1x - 19.6$ **45.** $-\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2y + 9xy^2$ **47.** $5a - 10b + 13c$ **49.** $8a^2b - 10ab + 11b^2$ **51.** $7r^2 - 4rt - 3t^2$ **53.** $10x^2 - 8x - 9$ **55.** $-3w^2 + 6w$ **57.** $3x + 19$ **59.** $-3x^2 + 2x - 12$ **61.** $-5.4a^2 - 5.7a - 26.4$ **63.** $-\frac{11}{2}x^2y + xy^2 + \frac{2}{45}$ **65.** $5x^{2r} - 10x^r + 3$ **67.** $-x^{2s} - 4x^s + 19$ **69.** $7b^{4n} - 3b^{3n} - 4b^{2n} + 1$ **71.** $4x^2 + 8x + 4$ **73.** $3x^2 + 4x + 19$ **75.** $2x^2 + 12x + 9$ **77.** 144 metros cuadrados **79.** A ≈ 113.10 pulgadas cuadradas **81.** 674 pies **83.** 105 comités **85. a)** \$674 **b)** \$1010 **87. a)** $P(x) = 2x^2 + 360x - 8050$ **b)** \$47,950 **89. c)** La intersección en y es $(0, -4)$ y el coeficiente principal positivo **91. c)** La intersección en y es $(0, -6)$ y el coeficiente es negativo **93. a)** 3.5% **b)** Si **c)** 12.5% **95.** \$88,210

97. a)  **b)** Creciente **c)** Las respuestas variarán **d)** Decreciente **e)** Las respuestas variarán **99.** 0 **101.** El coeficiente principal es el coeficiente del término principal **103. a)** Es el mismo tal como el término de mayor grado **b)** 7 **105. a)** Un polinomio es lineal si el grado es 0 o 1. **b)** Las respuestas variarán. Un ejemplo es $x + 4$. **107. a)** Un polinomio es cúbico si tiene grado 3 y es en una variable. **b)** Las respuestas variarán. Un ejemplo es $x^3 + x - 4$. **109.** Las respuestas variarán. Un ejemplo es $x^5 + x + 1$.

111. No, por ejemplo $(x^2 + x + 1) + (x^3 - 2x^2 + x) = x^3 - x^2 + 2x + 1$ **113.** No, por ejemplo $(x^2 + 3x - 5) + (-x^2 - 4x + 2) = -x - 3$ **115. b)** La intersección en y es $(0, -5)$ y el coeficiente principal es negativo **119.** 3 **120.** $\frac{15}{16}$ **121.** 6 horas **122.** $-\frac{2}{11}$ **123.** $(-4, 0, -1)$

Conjunto de ejercicios 5.2

1. Segundo **3.** Factores **5.** Primero **7.** Cuadrado **9.** $42x^2y^5$ **11.** $\frac{1}{9}x^7y^8z^2$ **13.** $6x^6y^3 - 15x^3y^4 - 18x^2y$ **15.** $2xyz + \frac{8}{3}y^2z - 8y^3z$ **17.** $0.6x^2 - 1.5x + 3.3y$ **19.** $2.85a^{11}b^5 - 1.38a^9b^7 + 0.36a^6b^9$ **21.** $12x^2 - 38x + 30$ **23.** $-2x^3 + 8x^2 - 3x + 12$ **25.** $x^2 + \frac{23}{6}xy - \frac{2}{3}y^2$ **27.** $0.09a^2 - 0.25b^2$ **29.** $x^3 - x^2 - 11x - 4$ **31.** $2a^3 - 7a^2b + 5ab^2 - 6b^3$ **33.** $x^4 + 2x^2 + 10x + 7$ **35.** $5x^4 + 29x^3 + 14x^2 - 28x + 10$ **37.** $3m^4 - 11m^3 - 5m^2 - 2m - 20$ **39.** $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ **41.** $10r^4 - 2r^3s - r^2s^2 + rs^3 - 2s^4$ **43.** $x^2 + 4x + 4$ **45.** $4x^2 - 36x + 81$ **47.** $16x^2 - 24xy + 9y^2$ **49.** $25m^4 - 4n^2$ **51.** $y^2 + 8y - 4xy + 16 - 16x + 4x^2$ **53.** $25x^2 + 20xy + 10x + 4y^2 + 4y + 1$ **55.** $a^2 - b^2 - 8b - 16$ **57.** $2x^3y + 2x^2y^2 + 24xy^3$ **59.** $2x^3y^2 + \frac{3}{2}x^2y^3 - \frac{7}{2}xy^6$ **61.** $\frac{3}{5}x^2y^5z^7 + 3x^2y^4z^2 - \frac{1}{15}x^2y^3z^9$ **63.** $21a^2 + 10a - 24$ **65.** $64x^2 - \frac{1}{25}$ **67.** $x^3 - \frac{3}{2}x^2y + \frac{3}{4}xy^2 - \frac{1}{8}y^3$ **69.** $2x^3 + 10x^2 + 9x - 9$ **71.** $6p^3 - p^2q - 16pq^2 + 6q^3$ **73.** $9x^2 + 12x + 4 - y^2$ **75.** $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ **77.** $2x^3 - 4x^2 - 64x + 192$ **79. a)** $x^2 + x - 30$ **b)** -10 **81. a)** $10x^3 + 36x^2 - 2x - 12$ **b)** 1196 **83. a)** $-x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 6x$ **b)** -72 **85.** $x^2 + 5x$ **87.** $x^2 + y^2$ **89. a)** y **b)** $x^2 + 7x + 12$ **91.** $36 - x^2$ **93. a)** $11x + 12$ **b)** 117 pulgadas cuadradas, 50 pulgadas cuadradas. **95.** $(x + 7)(x - 7)$, producto de la suma y diferencia de los mismos dos términos **97.** $(x + 6)(x + 6)$, fórmula del cuadrado de un binomio **99.** $a(x - n)(x - n)(x - n)$ **101. a)** las respuestas variarán **b)** $a^2 + 2ab + b^2$ **c)** $a^2 + 2ab + b^2$ **d)** Igual **103. a)** $A = P(1 + r)^t$ **b)** \$1123.60 **105. a)** 110 formas **b)** $P(n) = n^2 - n$ **c)** 110 formas **d)** Sí **107.** $a^2 + 2ab + b^2 - 3a - 3b + 5$ **109.** $15x^{3t-1} + 18x^{4t}$ **111.** $12x^{3m} - 18x^m - 10x^{2m} + 15$ **115.** $x^4 - 12x^3y + 54x^2y^2 - 108xy^3 + 81y^4$ **117. a)** Las respuestas variarán **b)**



es correcto. **119. a)-d)** Las respuestas variarán **121. a)** Las respuestas variarán **b)** $x^3 - 2x^2 - 21x + 12$ **123. a)** Las respuestas variarán. **b)** Las respuestas variarán. Una posible respuesta es $(x + 4)(x - 4)$. **c)** Las respuestas variarán. **d)** Las respuestas variarán. Una posible respuesta es $x^2 - 16$. **125.** Si, por ejemplo $(x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$ **127.** $y^2 - 2y - 2xy + 2x + x^2 + 1$ **129.** $\frac{43}{60}$ **130.** $8r^6s^{15}$ **131.** $\left(-\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right]$ **132.** $\frac{15}{4}$

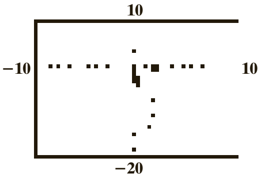
Conjunto de ejercicios 5.3

1. Dividendo **3.** Regla del cociente **5.** Término **7.** Sintético **9.** $P(7)$ **11.** x^2 **13.** a^4 **15.** z^8 **17.** $4r^6s^2$ **19.** $5x^8y^{11}$ **21.** $2x + 9$ **23.** $2x + 1$ **25.** $\frac{5}{3}y^2 + 2y - 4$ **27.** $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 2$ **29.** $4x^2 - 5xy - \frac{5}{2y}$ **31.** $\frac{9x}{2y} - 6x^2 + \frac{25y}{2x}$ **33.** $\frac{z}{2} + z^2 - \frac{3}{2}x^2y^4z^7$ **35.** $x + 2$ **37.** $2x + 4$ **39.** $3x + 2$ **41.** $x + 5 - \frac{2}{x + 1}$ **43.** $2b + 5 + \frac{2}{b - 2}$ **45.** $4x + 9 + \frac{2}{2x - 3}$ **47.** $2x + 6$ **49.** $x^2 + 2x + 3 + \frac{6}{x + 1}$ **51.** $2y^2 + 3y - 1 - \frac{6}{2y + 3}$ **53.** $2a^2 + a - 2 - \frac{2}{2a - 1}$ **55.** $3x^3 + 6x + 2$ **57.** $x + 4$ **59.** $2c^2 - 6c + 3$ **61.** $x + 6$ **63.** $x + 3$ **65.** $x - 7$ **67.** $x + 8 + \frac{10}{x - 3}$ **69.** $3x + 5 + \frac{10}{x - 4}$ **71.** $4x^2 + x + 3 + \frac{3}{x - 1}$ **73.** $3c^2 - 2c + 2 + \frac{10}{c + 3}$ **75.** $y^3 + y^2 + y + 1$ **77.** $x^3 - 4x^2 + 16x - 64 + \frac{272}{x + 4}$ **79.** $x^4 - \frac{9}{x + 1}$ **81.** $b^4 + 3b^3 - 3b^2 + 3b - 3 - \frac{11}{b + 1}$ **83.** $3x^2 + 3x - 3$ **85.** $2x^3 + 2x - 2 + \frac{6}{x - \frac{1}{2}}$ **87.** 12 **89.** 0, factor **91.** $-\frac{19}{4}$ o -4.75 **93.** $3x + 2$ **95.** 3 veces mas grande, encuentra las áreas multiplicando los polinomios, entonces compara **97.** $x^2 - 2x - 8$ **99.** $x^2 + 9x + 26$ **101.** $2x^2 + 3xy - y^2$ **103.** $x + \frac{5}{2} + \frac{11}{2(2x - 3)}$ **105.** $w = r + 1$ **107.** $x^3 - 6x^2 + 13x - 7$; multiplica $(x - 3)(x^2 - 3x + 4)$ y entonces suma 5. **109.** $2x + 1 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2x^2}$ **111.** No es factor; calcula $P(1)$. $P(1) = 101$, que no es 0, así $x - 1$ no es un factor **113.** Factor; calcula $P(-1)$. $P(-1) = 0$, así $x + 1$ es un factor. **115. a)** las respuestas variarán. **b)** $\frac{5}{3}x^3 - 2x^2 - \frac{4}{3}x - 4 + \frac{1}{3x}$ **117.** Sí, las respuestas variarán. **119.** Acomódalos en orden descendente de la variable. **121. a)** Las respuestas variarán **b)** $x + 8 + \frac{36}{x - 5}$ **123.** No, debido a que el residuo no es igual a 0. **125.** No, el dividendo es un binomio. **127.** Si el residuo es 0, $x - a$ es un factor. **129.** 2.0×10^{10} **130.** 30°, 60°, 90° **131.** $\left\{-1, \frac{11}{5}\right\}$ **132.** -864 **133.** $3r + 3s - 8t$

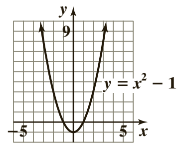
Conjunto de ejercicios 5.4

1. Multiplicando **3.** Agrupando **5.** Común **7.** $4(x - 2)^3$ **9.** $7(n + 2)$ **11.** $2(x^2 - 2x + 8)$ **13.** $4(3y^2 - 4y + 7)$

15. $x^2(9x^2 - 3x + 11)$ **17.** $-3a^2(8a^5 - 3a^4 + 1)$ **19.** $3xy(x + 2xy + 1)$ **21.** $8a^2c(10a^3b^4 - 2a^2b^2c + 3)$ **23.** $3pq^2r(3p^3q^3 - pr + 4q^3r^2)$ **25.** $-2(11p^2q^2 + 8pq^3 - 13r)$ **27.** $-4(2x - 1)$ **29.** $-(x^2 + 4x - 23)$ **31.** $-3(r^2 + 2r - 3)$ **33.** $-2rs^3(3r^3 - 2rs - s^2)$ **35.** $-a^2b(a^2bc - 5ac^2 - 3)$ **37.** $(a + 9)(x + 1)$ **39.** $(x - 4)(9x - 8)$ **41.** $-(x - 2)(2x - 9)$ **43.** $-2(a + 2)(a + 2)$ o $-2(a + 2)^2$ **45.** $(x + 4)(x - 5)$ **47.** $2(2y - 1)(2y - 5)$ **49.** $(a + b)(m + n)$ **51.** $(x - 3)(x^2 + 4)$ **53.** $(5m - 6n)(2m - 5n)$ **55.** $5(a + 3)(a^2 - 2)$ **57.** $c^2(c - 1)(c^2 + 1)$ **59.** $(2x + 1)(6x - 5)$ **61.** $(x + 4)(3x - 2)$ **63.** $(3x + 2)(9x - 5)$ **65. a)** 96 pies **b)** $h(t) = -16t(t - 5)$ **c)** 96 pies **67. a)** $\approx$2856.64 pies cuadrados A **b)** $A = r(\pi r + 2l)$ **c)** $\approx$2856.64 pies cuadrados **69. a)** \$525 **b)** $A(t) = 75(13 - t)$ **c)** \$525 **71. a)** $(1 - 0.006)(x + 0.06x) = 0.94(1.06x)$ **b)** $0.9964x$; un poco menor que el precio del modelo 2009(99.64% del costo original) **73. a)** $(x + 0.15x) - 0.20(x + 0.15x) = 0.80(x + 0.15x)$ **b)** $0.90(1.15x) = 0.92x$; 92% del precio regular **75.** $(3x + 2)^4(15ax + 10a + 4)$ **77.** $2(x - 3)(2x^4 - 12x^3 + 15x^2 + 9x + 2)$ **79.** $(x^2 + 2x - 4)(a + b)$ **81.** $x^{4m}(x^{2m} - 5)$ **83.** $x^{2m}(3x^{2m} - 2x^m + 1)$ **85.** $(a^r + c^r)(b^r - d^r)$ **87. a)** Sí **b)** 0; restando la misma cantidad de él mismo **c)** Las respuestas variarán. **89. a)** Deben tener la misa gráfica, representan la misma función **89. b)**



c) las respuestas variarán **d)** La factorización no es correcta **91.** Determina si todos los términos contienen un mayor factor común y, si es así, factorizalo **93. a)** Las respuestas variarán **b)** $2x^2y$ **c)** $2x^2y(3y^4 - x + 6x^7y^2)$ **95.** $3(x - 4)3$ **97. a)** Las respuestas variarán. **b)** $(3x^2 - y^3)(2x + y^2)$ **99.** $-\frac{15}{72} = -\frac{5}{24}$ **100.** 2 **101.**



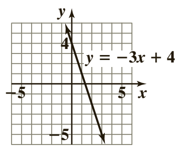
102. 0.4 horas **103.** $-14a^3 - 22a^2 - 19a - 3$

Prueba de mitad del capítulo

1. $5x^4 - 1.5x^3 + 2x - 7, 4$ [5.1] **2.** $\frac{3}{2}$ o $1\frac{1}{2}$ [5.1] **3.** $-n^2 - 7n - 4$ [5.1] **4.** $-16x^2y + 14xy$ [5.1] **5.** $9x^2 - 4x + 13$ [5.1] **6.** $6x^6y^4 + 10x^7 - 14x^8y$ [5.1] **7.** $21x^2 - 4xy - 12y^2$ [5.2] **8.** $6x^4 - x^3 + 14x^2 + 32x + 9$ [5.2] **9.** $64p^2 - \frac{1}{25}$ [5.2] **10.** $12m^3 - m^2n - 30mn^2 + 18n^3$ [5.2] **11.** $x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2$ [5.2] **12.** $2x^2y + 3 - \frac{11}{2xy^2}$ [5.3] **13.** $3x + 5 + \frac{2}{4x + 1}$ [5.3] **14.** $y^2 + y + 5 + \frac{5}{2y - 3}$ [5.3] **15.** $x - 9$ [5.3] **16.** $3a^3 + 4a^2 - 6a - 1$ [5.3] **17.** $8b^2c(4bc^2 + 2 + 3b^3c^3)$ [5.4] **18.** $(2x + 9)(7b - 3c)$ [5.4] **19.** $b^2(b + 2c)(2b - c)$ [5.4] **20.** $(3x - 2)^5(5a - 12x + 8)$ [5.4]

Conjunto de ejercicios 5.5

1. Primo **3.** Prueba y error **5.** Usando sustitución **7.** -3 **9.** Ambos son + **11.** Uno es +, uno es − **13.** $(x + 3)(x + 4)$ **15.** $(b - 1)(b + 9)$ **17.** $(z + 2)^2$ **19.** $(r + 12)^2$ **21.** $(x + 32)(x - 2)$ **23.** $(x + 2)(x - 15)$ **25.** $-(a - 15)(a - 3)$ **27.** Primo **29.** $-2(m + 2)(m + 5)$ **31.** $4(r + 4)(r - 1)$ **33.** $x(x + 6)(x - 3)$ **35.** $(a - 1)(5a - 3)$ **37.** $3(x - 2)(x + 1)$ **39.** $(3c + 7)(2c - 9)$ **41.** $(2b + 1)(4b - 3)$ **43.** $(3c - 2)(2c + 5)$ **45.** $4(2p - 3q)(2p + q)$ **47.** Primo **49.** $2(3a + 4b)(3a - b)$ **51.** $(4x - 3y)(2x + 9y)$ **53.** $10(5b - 2)(2b - 1)$ **55.** $ab^5(a - 4)(a + 3)$ **57.** $3b^2c(b - 3c)^2$ **59.** $4m^6n^3(m + 2n)(2m - 3n)$ **61.** $(6x - 5)(5x + 4)$ **63.** $8x^2y^5(x + 4)(x - 1)$ **65.** $(x^2 + 3)(x^2 - 2)$ **67.** $(b^2 + 5)(b^2 + 4)$ **69.** $(2a^2 + 5)(3a^2 - 5)$ **71.** $(2x + 5)(2x + 3)$ **73.** $(3a + 1)(2a + 5)$ **75.** $(xy + 7)(xy + 2)$ **77.** $(2xy - 11)(xy + 1)$ **79.** $(2 - y)(y - 1)(2y - 5)$ **81.** $(p - 4)(2p + 3)(p + 2)$ **83.** $(a^3 - 10)(a^3 + 3)$ **85.** $(x + 5)(x + 2)(x + 1)$ **87.** $a^3b^2(5a - 3b)(a - b)$ **89.** $(x + 6)(x + 1)$ **91.** $(x + 6)(x + 3)$ **93.** $2x^2 - 5xy - 12y^2$, multiplica $(2x + 3y)(x - 4y)$ **95.** Divide, $x + 7$ **97. a)** Las respuestas variarán. **b)** $(6x - 5)(5x + 8)$, $(7x - 13)$ **99.** $\pm3, \pm9$ **101.** 6 o −6, b es la suma de los factores de 5 **103. a)** 4 **b)** $(x - 3)(x - 5)$ **105. a)** -8 **b)** No es factorizable **107.** Las respuestas variarán. Un ejemplo es $x^2 + 2x + 1$. **109.** $(2a^n + 3)(2a^n - 5)$ **111.** $(x + y)2(x - 4y)(x - 3y)$ **113.** $(x^n - 2)(x^n + 5)$ **115. a)** Las respuestas variarán. **b)** Correcto **117.** Factoriza el máximo factor común si está presente **119. a)** Las respuestas variarán. **b)** $(2x + 3)(3x - 4)$ **121.** No; $2(x + 3)(x + 1)$; $(2x + 2)$ tiene el MCM 2 **123.** No; $3x(x + 4)(x - 2)$; $(3x - 6)$ tiene el MCM 3 **125.** $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ **126.**



127. 4 **128.** $x^2 + 2xy + y^2 + 12x + 12y + 36$ **129.** $(2x^2 - 5)(x + 2)$

Conjunto de ejercicios 5.6

1. Dos **3.** Cuadrado perfecto **5.** $(x + 7)^2$ **7.** Suma **9.** $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ **11.** $(x + 9)(x - 9)$ **13.** $(a + 10)(a - 10)$ **15.** $(1 + 7b)(1 - 7b)$ **17.** $(5 + 4y^2)(5 - 4y^2)$ **19.** $\left(\frac{1}{10} + y\right)\left(\frac{1}{10} - y\right)$ **21.** $(xy + 11c)(xy - 11c)$ **23.** $(0.2x + 0.3)(0.2x - 0.3)$ **25.** $x(12 - x)$ **27.** $(a + 3b + 2)(a - 3b - 2)$ **29.** $(x + 5)^2$ **31.** $(7 - t)^2$ **33.** $(6pq + 1)^2$ **35.** $(0.9x - 0.2)^2$ **37.** $(y^2 + 2)^2$ **39.** $(a + b + 3)^2$ **41.** $(y + 1)^2$ **43.** $(x + 3 + y)(x + 3 - y)$ **45.** $(x + 7)(3 - x)$ **47.** $(3a - 2b + 3)(3a - 2b - 3)$ **49.** $(y^2 - 3)^2$ **51.** $(a + 5)(a^2 - 5a + 25)$ **53.** $(4 - a)(16 + 4a + a^2)$ **55.** $(p - 3a)(p^2 + 3ap + 9a^2)$ **57.** $(3y - 2x)(9y^2 + 6xy + 4x^2)$ **59.** $2(2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2)$

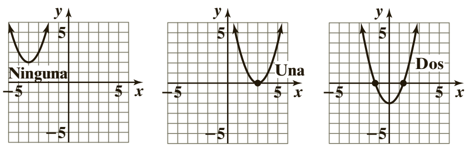
61. $(x^2+y^3)(x^4-x^2y^3+y^6)$ **63.** $(x+2)(x^2+x+1)$ **65.** $(a-b-3)(a^2-2ab+b^2+3a-3b+9)$ **67.** $-9(b^2+3b+3)$ **69.** $(a^2+2b^2)(a^2-2b^2)$ **71.** $(7+8xy)(7-8xy)$ **73.** $(x+y+4)(x+y-4)$ **75.** $(x-4)(x^2+4x+16)$ **77.** $(3xy+4)^2$ **79.** $(a^2+b^2)^2$ **81.** $(x-1+y)(x-1-y)$ **83.** $(x+y+1)(x^2+2xy+y^2-x-y+1)$ **85.** $3m(-m+2n)$ **87.** $(3x-2)(9x^2+6x+4)$ **89.** $(6a-b)(36a^2+6ab+b^2)$ **91.** $(4x+3a)(16x^2-12ax+9a^2)$ **93. a)** a^2-b^2 **b)** $(a+b)(a-b)$ **95. a)** $6a^3-6ab^2$ **b)** $6a(a+b)(a-b)$ **97. a)** $\frac{4}{3}\pi R^3-\frac{4}{3}\pi r^3$ **b)** $\frac{4}{3}\pi(R-r)(R^2+Rr+r^2)$ **99.** 12, −12; escribe $4x^2+bx+9$ como $(2x)^2+bx+(3)^2$; $bx=2(2x)(3)$ o $bx=-2(2x)(3)$ **101.** 4; escribe $25x^2+20x+c$ como $(5x)^2+20x+(a)^2$ entonces $20x=2(5x)(a)$. Ya que $a=2$, $c=4$ **103. a)** En encuentra una ecuación cuyo cuadrado sea $25x^2-30x+9$ **b)** $s(x)=5x-3$ **c)** 7 **105.** $(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$ **107.** $h(2a+h)$ **109. a)** 16 **b)** $x^2+8x+16$ **c)** $(x+4)^2$ **111.** $(8x^{2a}+3y^{3a})(8x^{2a}-3y^{3a})$ **113.** $(a^n-8)^2$ **115.** $(x^n-2)(x^{2n}+2x^n+4)$ **117.** Correcto **119. a)** Las respuestas variarán. **b)** $(x+4)(x+4)$ **121.** $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ **123.** Las respuestas variarán. **125.** No. $(x+7)(x-7)=x^2-49$ **127.** No. $x^2-81=(x+9)(x-9)$ **129. a)** $(x^3+1)(x^3-1)$ **b)** $(x^2-1)(x^4+x^2+1)$ **131.** $4x+7y-2$ **132.** −17 **133.** 20°, 30°, 40° **134.** $15y^{10}(3y^2+4)$ **135.** $(4x-3y)(3x+y)$

Conjunto de ejercicios 5.7

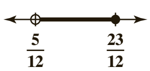
1. −5 **3.** $3(x+5)(x-5)$ **5.** $(5s-3)(2s+5)$ **7.** $2x^2y^2(3x+5y+7)$ **9.** $0.8(x+0.3)(x-0.3)$ **11.** $6x(x^2+3)(x^2-3)$ **13.** $3x^4(x-1)(x+4)$ **15.** $5x^2y^2(x+4)(x+3)$ **17.** $x^2(x+y)(x-y)$ **19.** $x^4y^2(x-1)(x^2+x+1)$ **21.** $x(x^2+4)(x+2)(x-2)$ **23.** $4(x^2+2y)(x^4-2x^2y+4y^2)$ **25.** $5(a+b+2)(a+b-2)$ **27.** $6(x+3y)^2$ **29.** $x(x+4)$ **31.** $3(2x-y)(x+4y)$ **33.** $(y+7)^2$ **35.** $(b^2+1)^2$ **37.** $\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}\right)$ **39.** $2y(3y+1)(y+2)$ **41.** $ab(a+9b)(a-9b)$ **43.** $(7+x+y)(7-x-y)$ **45.** $2(3x-2)(4x-3)$ **47.** $3(3x-1)(2x+5)$ **49.** $(x^2+4)(x+2)(x-2)$ **51.** $(b-2x)(5c-7y)$ **53.** $(3x^2-4)(x^2+1)$ **55.** $(z+x-6)(z-x+6)$ **57.** $(2y+5)(y+8)$ **59.** $(a+6b+4c)(a+6b-4c)$ **61.** $5x^2y(x+3)(2x-1)$ **63.** $(x+y)^2(x-y)^2$ **65. e)** **67. d)** **69. f)** **71. c)** **73.** $2(x+3)(x+2)$ **75.** $(x+6)(x+2)$ **77.** $(y+3)(y-3)$ **79.** $(5x-3)(25x^2+15x+9)$ **81. a)** $a(a+b)-b(a+b)=a^2-b^2$ **b)** $(a+b)(a-b)$ **83. a)** $a^2+2ab+b^2$ **b)** $(a+b)^2$ **85. a)** $a(a-b)+a(a-b)+b(a-b)+b(a-b)$ o $2a(a-b)+2b(a-b)$ **b)** $2(a+b)(a-b)$ **87. a)** Las respuestas variarán **b)** Las respuestas variarán **89. a)** $x^{-5}(x^2-2x-3)$ **b)** $x^{-5}(x-3)(x+1)$ **91. a)** $x^{-3/2}(5x^2+2x-3)$ **b)** $x^{-3/2}(5x-3)(x+1)$ **92.** 1 **93.** $\{z|z<-6 \text{ o } z>0\}$ **94.** ≈17.3 libras al \$5.20, ≈12.7 libras a \$6.30 **95.** $5x^3-x^2+16x+16$ **96.** $(x+3)(2x^2-5)$

Conjunto de ejercicios 5.8

1. Ecuación **3.** $ax^2+bx+c=0$ **5.** Intersección en el eje x **7.** 0, −3 **9.** 0, 1 **11.** −1, 7 **13.** 0, 4, 9 **15.** $\frac{2}{3}, \frac{1}{7}$ **17.** 0, 3 **19.** 0, −5 **21.** 0, 6 **23.** 0, 9 **25.** −1, −5 **27.** −4, 3 **29.** −4 **31.** $-\frac{1}{2}, 5$ **33.** $\frac{3}{2}, -2$ **35.** −4, 6 **37.** 0, 6, −3 **39.** 0, −4, 3 **41.** $0, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$ **43.** 5, −5 **45.** $-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}$ **47.** 0, −3, 3 **49.** −11, 9 **51.** −3, −11 **53.** −1, −4 **55.** $\frac{5}{2}, \frac{4}{3}$ **57.** 0, −3, −5 **59.** $-2, -\frac{1}{3}$ **61.** $\frac{3}{5}, \frac{5}{2}$ **63.** 6, −5 **65.** (4, 0), (6, 0) **67.** (−8, 0) **69.** $(0,0), \left(\frac{4}{3}, 0\right), \left(\frac{5}{2}, 0\right)$ **71.** $x=1$ **73.** $x=5$ **75.** $x=9$ **77. d)** **79. b)** **81.** $y=x^2-6x+5$ **83.** $y=x^2-2x-8$ **85.** $y=6x^2-7x-10$ **87.** Ancho = 2 pies, largo = 5 pies **89.** Base = 10 pies, altura = 16 pies **91.** 2 pies **93.** 3 pies **95.** 2 segundos **97.** Tim: 5 millas, Bob: 12 millas **99.** 13 pies **101.** 50 bicicletas **103.** 13 pulgadas por 13 pulgadas **105. a)** $V=a^3-ab^2$ **b)** $V=a(a+b)(a-b)$ **c)** 3 pulgadas **107. a)** $f(x)=x^2+7x+10$ **b)** $x^2+7x+10=0$ **c)** Un número infinito; cualquier función de la forma $f(x)=a(x^2+7x+10)$, $a\neq 0$ **d)** un número infinito; cualquier función de la forma $a(x^2+7x+10)=0$, $a\neq 0$ **109. a)** las respuestas variarán. Ejemplos son:



b) Ninguna (una intersección en el eje x), o dos (dos intersecciones en el eje x) **111.** ≈73.721949 mph **113.** Una ecuación de segundo grado en una variable **115. a)** Las respuestas variarán **b)** $\frac{7}{3}, -\frac{3}{2}$ **117.** Los términos constante no contienen la variable **119. a)** Factoriza −1 **b)** 7, −5 **121.** $a^2+b^2=c^2$ **123.** $\left(\frac{3}{2}, 0\right), (6,0)$ **125.** Sí **127.** No **129.** ±2, ±3 **134.** $\frac{x^4}{16y^6}$ **135.**



136. (2, −1) **137.** −84 **138.** $(x+3)(x-2)$

Ejercicios de repaso del capítulo 5

1. a) Binomio **b)** $3x^2+9$ **c)** 2 **2. a)** Trinomio **b)** $4x^3+5x-7$ **c)** 3 **3.** No es un polinomio **4. a)** Polinomio **b)** $2x^4-10x^2y+6xy^3-3$ **c)** 4 **5.** $x^2-3x+14$ **6.** $5x^2+11x-4$ **7.** $3a-8b+7$ **8.** $6x^3-9x+13$ **9.** $3x^2y+3xy-9y^2$ **10.** $-3ab+b^2-2a$ **11.** $5x^2+7x+3$ **12.** $-10a^2b+ab$ **13.** 21 **14.** −76 **15.** $3x^2+27$ **16.** $2x^2+24x+23$ **17. a)** \$780.46 billones **b)** Sí **18. a)** \$773.13 billones **b)** Sí **19.** $6x^3-14x^2+10x$

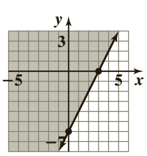
20. $-3x^4y^2 - 3x^2y^6 + 12xy^7$ **21.** $6x^2 + 17x - 45$ **22.** $50a^2 - 5a - 3$ **23.** $x^2 + 16xy + 64y^2$ **24.** $a^2 - 22ab + 121b^2$ **25.** $10x^2y + 8xy^2 - 5x - 4y$ **26.** $6p^2q^2 + 11pqr - 7r^2$ **27.** $4a^2 + 36ab + 81b^2$ **28.** $16x^2 - 24xy + 9y^2$ **29.** $49x^2 - 25y^2$ **30.** $4a^2 - 25b^4$ **31.** $16x^2y^2 - 36$ **32.** $81a^4 - 4b^4$ **33.** $x^2 + 6xy + 9y^2 + 4x + 12y + 4$ **34.** $4p^2 - 4pq + q^2 - 20p + 10q + 25$ **35.** $6x^3 - x^2 - 24x + 18$ **36.** $4x^4 + 12x^3 + 6x^2 + 16x - 6$ **37.** $x^2 + 8x + 10$ **38.** $x^2 + xy + 4y + xz$ **39. a)** $x^2 - 2x - 3$ **b)** 0 **40. a)** $2x^3 - 4x^2 - 6x + 12$ **b)** 12 **41. a)** $x^3 - x^2 - 5x + 6$ **b)** 9 **42. a)** $x^4 - 4$ **b)** 77 **43.** $\frac{1}{5}x^6y^2$ **44.** $\frac{1}{4}t^5$ **45.** $9p - 5q - 3$ **46.** $\frac{7}{4}a^2 - 4a + 8$ **47.** $\frac{x^2}{4y} + x + \frac{3y}{2}$ **48.** $4x - 3$ **49.** $x^3 - 2x^2 + 3x + 7$ **50.** $2a^3 + a^2 - 3a - 4$ **51.** $x + 4 - \frac{10}{x - 3}$ **52.** $2x^2 + 3x - 4 + \frac{3}{2x + 3}$ **53.** $3x^2 + 7x + 21 + \frac{73}{x - 3}$ **54.** $2y^4 - 2y^3 - 8y^2 + 8y - 7 + \frac{5}{y + 1}$ **55.** $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 + \frac{14}{x - 2}$ **56.** $2x^2 + 2x + 6$ **57.** 10 **58.** -236 **59.** $-\frac{53}{9}$ o $-5.\overline{8}$ **60.** 0, factor **61.** $4(x^2 + 2x + 8)$ **62.** $3x^4(5x + 2 - 4xy^3)$ **63.** $2a^2b^3(5a - 7b^3)$ **64.** $6xy^2z^2(4y^2z + 2xy - 5x^2z)$ **65.** $(5x - y)(x + 6y)$ **66.** $(3a + 2b)(4a + 5b)$ **67.** $(2x - 5)(x + 9)$ **68.** $(3x - 7)(16x - 21)$ **69.** $(5x + 2)(13x - 7)$ **70.** $(7x + 9)(2x - 1)$ **71.** $(17x + 3)(9x - 7)$ **72.** $(4x + 5)(5x - 2)$ **73.** $(x + 6)(x + 3)$ **74.** $(x - 2)(x + 5)$ **75.** $(x - 7)(x + 4)$ **76.** $(x - 8)(x - 2)$ **77.** $-(x - 15)(x + 3)$ **78.** $-(x - 12)(x - 1)$ **79.** $x(2x + 1)(x + 6)$ **80.** $x^2(4x - 5)(2x + 5)$ **81.** $a^3(4a - 5)(a - 1)$ **82.** $y^3(12y + 1)(y + 5)$ **83.** $(x - 18y)(x + 3y)$ **84.** $(2p - 5q)(3p - 2q)$ **85.** $(x^2 + 3)(x^2 + 7)$ **86.** $(x^2 - 7)(x^2 + 9)$ **87.** $(x + 9)(x + 7)$ **88.** $x(x - 9)$ **89.** $(x + 10)(x + 1)$ **90.** $(x + 10)(x + 2)$ **91.** $(x + 6)(x - 6)$ **92.** $(x + 11)(x - 11)$ **93.** $(x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)$ **94.** $(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$ **95.** $(2a + 1)^2$ **96.** $(4y - 3)^2$ **97.** $(x - 2)(x + 6)$ **98.** $(3y + 5)(3y - 7)$ **99.** $(p^2 + 9)^2$ **100.** $(m^2 - 10)^2$ **101.** $(x + 4 + y)(x + 4 - y)$ **102.** $(a + 3b + 6c)(a + 3b - 6c)$ **103.** $(4x + y)^2$ **104.** $(6b - 5c)^2$ **105.** $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$ **106.** $(y + 4z)(y^2 - 4yz + 16z^2)$ **107.** $(5x - 1)(25x^2 + 5x + 1)$ **108.** $(2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$ **109.** $(y - 4z)(y^2 + 4yz + 16z^2)$ **110.** $(x - 5)(x^2 - x + 7)$ **111.** $(x - 1)(x^2 + 4x + 7)$ **112.** $(a + 5)(a^2 + 7a + 13)$ **113.** $(x + 3)(x - 3)$ **114.** $(a + 2b)(a - 2b)$ **115.** $(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$ **116.** $4a(a + c)(a - c)$ **117.** $y^4(x + 3)(x - 5)$ **118.** $5x(x - 4)(x - 2)$ **119.** $3xy^4(x - 2)(x + 6)$ **120.** $3y(y^2 + 5)(y^2 - 5)$ **121.** $4y(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ **122.** $5x^2y(x + 2)^2$ **123.** $3x(2x + 1)(x - 4)$ **124.** $(x + 5 + z)(x + 5 - z)$ **125.** $5(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$ **126.** $(x + 4)(x - 1)(x + 6)$ **127.** $(4x + 1)(4x + 5)$ **128.** $(2x^2 - 1)(2x^2 + 3)$ **129.** $(x + 1)^2(x - 2)$ **130.** $(3a - b)(3x + 7y)$ **131.** $(2pq - 3)(3pq + 2)$ **132.** $(3x^2 - 2)^2$ **133.** $(4y + x + 2)(4y - x - 2)$ **134.** $2(3a + 5)(4a + 3)$ **135.** $3x^2y^5(x + 3)(2x - 3)$ **136.** $\left(x - \frac{2}{3}y^2\right)\left(x^2 + \frac{2}{3}xy^2 + \frac{4}{9}y^4\right)$ **137.** $(x + 9)(x + 2)$ **138.** $(y + 10)(y + 5)$ **139.** $(a + 2b)(a - 2b)$ **140.** $2b(a + b)$ **141.** $(2a + b)(a + 3b)$ **142.** $(a + b)^2$ **143.** $2, -\frac{1}{4}$ **144.** $-\frac{5}{2}, -\frac{10}{3}$ **145.** 0, 2 **146.** $0, -\frac{4}{3}$ **147.** $-4, -3$ **148.** $5, -6$ **149.** 7, 1 **150.** 0, 2, 4 **151.** $4, -4$ **152.** $2, -3$ **153.** $\frac{4}{3}, -\frac{1}{4}$ **154.** $\frac{3}{4}, -\frac{2}{5}$ **155.** $(-3, 0), (6, 0)$ **156.** $\left(\frac{6}{5}, 0\right), \left(\frac{5}{4}, 0\right)$ **157.** $y = x^2 - 2x - 24$ **158.** $y = 12x^2 + 32x + 5$ **159.** Ancho = 9 pies, largo = 12 pies **160.** Alto = 4 pies, base = 13 pies **161.** 3 pulgadas, 7 pulgadas **162.** 9 segundos **163.** 9

Prueba de repaso del capítulo 5

1. a) Trinomio **b)** $-6x^4 - 4x^2 + 3x$ **c)** 4 **d)** -6 [5.1] **2.** $4x^2y - 14y^2 + 4x + 6y$ [5.1] **3.** $-8x^8y^3 + 24x^6y^4 - 12x^4y^2$ [5.2] **4.** $10a^2 - 13ab - 3b^2$ [5.2] **5.** $4x^3 + 8x^2y - 9xy^2 - 6y^3$ [5.2] **6.** $4x^4 - 5y + \frac{7}{x^2}$ [5.3] **7.** $x - 5 + \frac{24}{2x + 3}$ [5.3] **8.** $3x^3 + 3x^2 + 15x + 15 + \frac{76}{x - 5}$ [5.3] **9.** -85 [5.3] **10.** $2xy(6x^2 + 5xy^3 - 7y^2)$ [5.4] **11.** $x(x - 3)(x + 1)$ [5.5] **12.** $(a + 2b)(2a + 3b)$ [5.4] **13.** $(2b^2 + 9)(b^2 - 2)$ [5.5] **14.** $4x(x - 5)$ [5.5] **15.** $(x + 7)(x + 3)$ [5.5] **16.** $q^6(3p - 2)(9p^2 + 6p + 4)$ [5.6] **17. a)** $3x^2 - 19x + 20$ **b)** -6 [5.2] **18.** $4(x + y)(x - y)$ [5.5] **19.** $(x + 11)(x + 4)$ [5.5] **20.** $\frac{3}{7}, -4$ [5.8] **21.** $0, -5, 2$ [5.8] **22.** $\left(\frac{1}{4}, 0\right), \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ [5.8] **23.** $y = x^2 - 9x + 14$ [5.8] **24.** Alto = 4 metros, base = 11 metros [5.8] **25.** 7 segundos [5.8]

Ejercicios de repaso acumulados

1. $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ [1.2] **2.** 

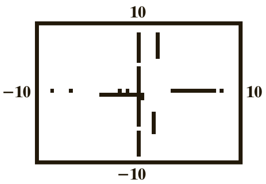
[1.2] **3.** $-\frac{3}{32}$ [1.3] **4.** -34 [1.4] **5.** $8r^6s^{15}$ [1.5] **6.** 5 [2.1] **7.** $e = \frac{k - 2d}{2}$ [2.2] **8.** 13 metros por 13 metros [2.3] **9.** 620 páginas [2.3] **10.** $34 \le x < 84$ [2.5] **11.** No [3.1] **12.** $6x - 3y = 2$ [3.3] **13.** $-\frac{2}{9}$ [3.4] **14.** -180 [3.6] **15.** 

[3.7] **16.** (10, 4) [4.1] **17.** (4, 1, 2) [4.2] **18.** 18 [4.5] **19.** $2x^2 + 12x + 63 + \frac{393}{x - 6}$ [5.3] **20.** $(4x - 3y)(16x^2 + 12xy + 9y^2)$ [5.6]

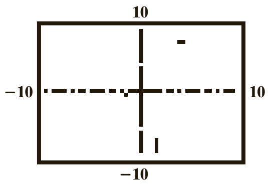
Capítulo 6

Conjunto de ejercicios 6.1

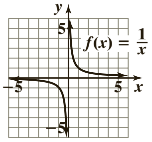
1. Expresión racional **3.** Dominio **5.** Multiplicar **7.** $\dfrac{x+3}{x+8}$ **9.** $\dfrac{x^3}{y^2}$ **11.** 0 **13.** $5, \dfrac{5}{2}$ **15.** Ninguno **17.** 9, −9 **19.** $\{x|x \neq 5\}$
21. $\{x|x \neq -3 \text{ y } x \neq 2\}$ **23.** $\{a|a \neq -3 \text{ y } a \neq -1\}$ **25.** $\{x|x$ es un número real$\}$ **27.** $\{a|a \neq -6 \text{ y } a \neq 6\}$ **29.** $x + 1$
31. $\dfrac{x-4y}{3}$ **33.** x **35.** −1 **37.** $-(p+4)$ **39.** $\dfrac{a-5}{a+3}$ **41.** $4x^2+10xy+25y^2$ **43.** $\dfrac{2x-5}{2}$ **45.** $\dfrac{a+7}{a+5}$ **47.** $\dfrac{x-4}{x^2-3x+9}$
49. $\dfrac{x}{15y}$ **51.** $12x^3y^2$ **53.** 1 **55.** $\dfrac{x+5}{4}$ **57.** $\dfrac{r^3}{r-8}$ **59.** $\dfrac{7}{x-4}$ **61.** $\dfrac{(a+1)^2}{9(a+b)^2}$ **63.** $\dfrac{x-4}{4x+1}$ **65.** $\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x^2+2x+4)(x^2+4)}$
67. $\dfrac{x-y}{x+y}$ **69.** $\dfrac{x^3}{x+2}$ **71.** $\dfrac{(a-b)(a+b)}{a^2+ab+b^2}$ **73.** 1 **75.** $\dfrac{p-q}{p+q}$ **77.** $\dfrac{r+5s}{2r+5s}$ **79.** $x + 5$; el numerador debe ser $x + 5$
81. $y^2 - 4y - 5$, los factores deben ser $(y-5)(y+1)$ **83.** $x^2 + x - 2$; los factores deben ser $(x-1)(x+2)$ **85.** $2x^2 + x - 6$; los factores deben ser $(x+2)(2x-3)$. **87.** $\dfrac{3a+b}{2}$ **89.** $2(a+b)$ **91.** $\dfrac{(x+2)(3x+1)}{(2x-3)(x+1)}$ **93.** $\dfrac{x-1}{x+3}$ **95.** $\dfrac{1}{x^4(x-p)^n}$
97. x^y **99. a)** $\{x|x \neq 2\}$ **b)**



101. a) $\{x|x \neq 2\}$ **b)**



103. a) $\{x|x \neq 0\}$ **b)** −0.1, −1, −2, −10, −100, 100, 10, 2, 1, 0.1 **c)**



d) No, el numerador nunca puede ser 0
105. Una respuesta posible es $\dfrac{1}{(x-2)(x+3)}$; el denominador es 0 en $x = 2$ y $x = -3$ **107.** El numerador nunca es 0.
109. a) 4, hace que el numerador sea 0 **b)** 6 y −6, cada uno, hacen que el denominador sea 0
111. Una respuesta posible es $f(x) = \dfrac{x-2}{(x-3)(x+1)}$; el numerador es 0 en $x = 2$, el denominador es 0 en $x = 3$ y $x = -1$
113. $y = x + 2$ **114.** $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$ **115.** −28, 32 **116.** 0.1 **117.** $(2, -1)$ **118.** $(3x + y + 2)(3x + y - 2)$.

Conjunto de ejercicios 6.2

1. Mínimo común denominador **3.** El máximo. **5.** $\dfrac{4x+1}{x+7}$ **7.** $\dfrac{7x-2}{x-5}$ **9.** $\dfrac{x+7}{x+3}$ **11.** $\dfrac{7x-11}{x-8}$ **13.** $\dfrac{x-3}{x-1}$ **15.** $x - 5$
17. $\dfrac{x+5}{x+3}$ **19.** $12a^2$ **21.** $40x^4y^6$ **23.** $6a^4b^5$ **25.** $(x+3)(x+9)$ **27.** $z - 6$ **29.** $x^4(x-2)^3$ **31.** $(a-8)(a+3)(a+8)$
33. $(x-3)(2x-1)(2x+3)$ **35.** $\dfrac{13}{2x}$ **37.** $\dfrac{5x-3}{12x^2}$ **39.** $\dfrac{15y^2+8x^2}{40x^4y^3}$ **41.** $\dfrac{2b^2-a^2}{b(a-b)}$ **43.** $\dfrac{2a}{a-b}$ **45.** $\dfrac{5x^2+3x-12}{(x-4)(x+1)}$
47. $\dfrac{6a+7}{(a+2)^2}$ **49.** $\dfrac{2x^2+4x+4}{(x-1)(x+4)(x-2)}$ **51.** $\dfrac{2x+3}{(x-8)(x-1)}$ **53.** $\dfrac{4x^2+11x-39}{(x+5)(x-2)}$ **55.** $\dfrac{3a-1}{4a+1}$ **57.** $\dfrac{2x^2-4xy+4y^2}{(x-2y)^2(x+2y)}$
59. $\dfrac{16}{r-4}$ **61.** 0 **63.** $\dfrac{15x^2-70x+30}{(3x-2)(x-4)}$ **65.** $\dfrac{18r^2+11r-25}{(4r-5)(2r+3)}$ **67.** $\dfrac{x^2-18x-30}{(5x+6)(x-2)}$ **69.** $\dfrac{12m^2+7mn}{(2m+3n)(3m+2n)(2m+n)}$
71. 0 **73.** $\dfrac{1}{2x+3y}$ **75. a)** $\{x|x \neq 3\}$ **b)** $\{x|x \neq -4\}$ **c)** $\dfrac{2x^2+3x+8}{(x-3)(x+4)}$ **d)** $\{x|x \neq 3 \text{ y } x \neq -4\}$ **77.** $\dfrac{2x^2+8x-3}{(x+1)(x+2)}$
79. $\dfrac{3x^2+19x+7}{(x+2)(x+3)}$ **81.** $\dfrac{x^2+5x+4}{(x+2)(x-2)(x+3)}$ **83.** $\dfrac{2x}{x^4+x^3-10x^2-4x+24}$ **85.** $\dfrac{ad}{bd} + \dfrac{bc}{bd} = \dfrac{ad+bc}{bd}$
87. a) 4 **b)** $\dfrac{a^2-b^2}{a^2}$ **89.** $7x^2 - 6x + 6$; $5x^2 - (7x^2) = -2x^2$, $-(-6x) = 6x$, $-6 - (6) = -12$ **91.** $\dfrac{3x+10}{x-2}$ **93.** $\dfrac{1}{(a-5)(a+3)}$
95. $-x^2 + 4x + 5$ **97. a)** $\dfrac{ax+bn-bx}{n}$ **b)** 79.2 **99.** $\dfrac{a-b+1}{(a-b)^2}$ **101. a)** El numerador no se restó totalmente.
b) $\dfrac{x^2-4x-x^2-x+2}{(x+3)(x-2)}$ **103.** No **105.** Sí, si multiplicas la fracción por $\dfrac{-1}{-1}$ obtienes la otra fracción.
107. a) $\dfrac{x+1}{x}$ **b)** $\dfrac{x^2+x+1}{x^2}$ **c)** $\dfrac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^4}$ **d)** $\dfrac{x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1}{x^n}$ **109.** $\dfrac{-h}{(a+1)(a+h+1)}$
110. a) 6 minutos **b)** 960 cajas **111.** $\{x|-2 < x < 8\}$ **112.** $-\dfrac{2}{3}$ **113.** −11 **114.** $3x - 7 + \dfrac{27}{2x+3}$ **115.** $\dfrac{1}{3}, 7$

Conjunto de ejercicios 6.3

1. Fracción compleja **3.** Denominador **5.** $\dfrac{75a}{b^5}$ **7.** $\dfrac{12x^3}{y^6}$ **9.** $\dfrac{3z^4}{4xy^4}$ **11.** $\dfrac{x(y-1)}{8+x}$ **13.** $\dfrac{xy+5}{y+x}$ **15.** $\dfrac{5}{3a^2}$ **17.** $-\dfrac{a}{b}$ **19.** $\dfrac{x-y}{y}$

21. -1 **23.** $\frac{3(x+2)}{x^5}$ **25.** $\frac{-a+1}{(a+1)(2a+1)}$ **27.** $\frac{x-1}{x+1}$ **29.** $\frac{a^2+1}{2a}$ **31.** $\frac{x}{5(x-3)}$ **33.** $\frac{x^2+5x-6}{x(x-2)}$ **35.** $\frac{a(a+3)}{(a-2)(a+1)}$
37. $\frac{ab}{b+a}$ **39.** $\frac{2}{y-x}$ **41.** $\frac{b(1+a)}{a(1-b)}$ **43.** $\frac{b^2-a^3b}{a^3+ab}$ **45.** $\frac{9a^2+b}{b(b+1)}$ **47.** $\frac{(a+b)^2}{ab}$ **49.** $\frac{15y-x}{3xy}$ **51.** $\frac{2y-8xy+5y^2}{3y^2-4x}$
53. $\frac{x^2+9x+14}{x+1}$ **55.** $\frac{x^2+3x-4}{x+1}$ **57. a)** $\frac{2}{9}$ **b)** $\frac{1}{5}$ **59.** $R_T = \frac{R_1R_2R_3}{R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2}$ **61.** a **63.** $\frac{-1}{a(a+h)}$
65. $\frac{-1}{(a+1)(a+h+1)}$ **67.** $\frac{-2a-h}{a^2(a+h)^2}$ **69.** $\frac{5}{12}$ **71.** $\frac{4a^2+1}{4a(2a^2+1)}$ **72.** $\frac{13}{48}$ **73.** $\left(-23, -\frac{34}{5}\right)$ **74.** $\left\{3, \frac{5}{3}\right\}$ **75.** Ninguna

Conjunto de ejercicios 6.4

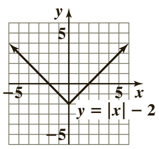
1. Mínimo común denominador. **3.** Solución extraña. **5.** Multiplicación cruzada **7.** Factorizando **9.** 5 **11.** $\frac{11}{2}$ **13.** 3 **15.** -5
17. Todos los números reales **19.** $\frac{1}{4}$ **21.** $\frac{11}{3}$ **23.** No hay solución. **25.** $\frac{6}{5}$ **27.** ≈ -1.63 **29.** 8 **31.** $-\frac{4}{3}$, 1 **33.** 3.76 **35.** $-1, -6$
37. -5 **39.** $-\frac{5}{2}$ **41.** 5 **43.** No hay solución **45.** -5 **47.** $\frac{17}{4}$ **49.** 12, 2 **51.** 12, 4 **53.** 3, -1 **55.** $\frac{25}{2}$ **57.** $\frac{3}{2}$ **59.** $P_1 = \frac{P_2V_2}{V_1}$
61. $V_2 = \frac{V_1P_1}{P_2}$ **63.** $y = y_1 + m(x - x_1)$ **65.** $x = zs + \bar{x}$ **67.** $w = \frac{fl - df}{d}$ **69.** $q = \frac{pf}{p-f}$ **71.** $a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ **73.** $d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$
75. $G = \frac{Fd^2}{m_1m_2}$ **77.** $T_1 = \frac{T_2P_1V_1}{P_2V_2}$ **79.** $V_0 = \frac{S - S_0 - gt^2}{t}$ **81. a)** $\frac{3x+7}{(x+3)(x+1)}$ **b)** $-\frac{7}{3}$ **83. a)** $\frac{4}{b+5}$ **b)** No hay solución
85. a) 12.5% **b)** $T_f = T_a(1-f)$ **c)** 8.64% **87. a)** $ 6250 **b)** $R = \frac{AC}{0.80I}$ **89. a)** 20 pies/min² **b)** $t_1 = t_2 + \frac{v_1 - v_2}{a}$
91. a) ≈22.5% **b)** $D = PR$ **c)** $R = \frac{D}{P}$ **93.** 150 ohms **95.** ≈0.101 metros **97. a)** ≈9.71% **b)** Ya que 9.71% > 7.68%, debe invertir en el portafolio del mercado de dinero que está libre de impuestos. **99.** $c \neq 0$ **101.** Una respuesta es $\frac{1}{x-4} + \frac{1}{x+2} = 0$; 4 o -2 hacen que la fracción sea indefinida. **103.** Una respuesta es $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$. **105.** $-1 < x \leq 3$ **106.** $m = -\frac{1}{3}$; intercepción con el eje y, $\left(0, \frac{14}{3}\right)$ **107.** $3x^2y - 7xy - 4y^2 - 9x$ **108.** 2 pies.

Examen de mitad de capítulo 6

1. $\{x|x \neq 0, x \neq -5, \text{ y } x \neq 5\}$ [6.1] **2.** $\frac{x+5}{2x-3}$ [6.1] **3.** $\frac{55b}{a^2-ab+b^2}$ [6.1] **4.** $\frac{x-3}{x+1}$ [6.1]
5. $\frac{(2a+1)(2a+3)}{(2a-1)(a-9)}$ o $\frac{4a^2+8a+3}{2a^2-19a+9}$ [6.1] **6.** $\frac{4a+3b}{6}$ [6.1] **7.** $(x+5)(x-6)(x+2)$ [6.2] **8.** 5 [6.2] **9.** $\frac{20y^2+ax}{6x^2y^3}$
10. $\frac{-2x-7}{(x-4)(x+4)(2x-3)}$ [6.2] **11.** $\frac{9b+a}{3-c}$ [6.3] **12.** $\frac{5x-8}{6x^2-x}$ [6.3] **13.** y^2 [6.3]
14. Una raíz extraña es un número que se obtiene al resolver una ecuación, pero que no es solución de la ecuación original. Siempre que una variable aparezca en el denominador, debe verificar la aparente solución. [6.4] **15.** 5 [6.4] **16.** No hay solución [6.4]
17. 4, -3 [6.4] **18.** $a = \frac{bc}{b+c}$ [6.4] **19.** $r = \frac{x-4}{x}$ [6.4] **20.** 14 y 5 [6.4]

Conjunto de ejercicios 6.5

1. Una tarea **3.** Parte de la tarea se ha completado. **5.** 1.5 horas **7.** 2 horas **9.** 18.75 minutos **11.** 4 horas **13.** ≈2.48 días
15. 2.4 horas **17.** ≈3.08 horas **19.** 100 horas **21.** 7.8 meses **23.** 75 minutos **25.** ≈15.27 minutos **27.** ≈1.62 horas
29. 12 horas **31.** 3 **33.** 2.4 **35.** 4.6 **37.** 20 **39.** $\frac{2}{3}$, 1 **41.** ≈0.064 millas por hora **43.** ≈1.53 pies por hora **45.** 7.5 millas
47. 36 millas por hora **49.** ≈30.59 yardas **51.** Local: ≈10.93 millas por hora, expreso: ≈16.13 millas por hora **53.** Automóvil: 60 millas por hora, tren: 30 millas por hora **55.** 60 millas por hora **57.** 120 kilómetros por hora **59.** 2 horas a 6 millas por hora, $\frac{1}{2}$ hora a 10 millas por hora **61.** 18 pies por minuto **63.** 108,000 millas **65.** Las respuestas variarán. **67. a)** 10 minutos
b) 15 millas **c)** 165 millas por hora **68.** $\frac{1}{72x^{5y^{12}}}$ **69.** 9.26 × 109 **70.** $2500 **71.**



72. $a(2a^2 - 5)(a - 1)$

Conjunto de ejercicios 6.6

1. Combinada **3.** Directa **5.** Constante **7.** Directa **9.** Inversa **11.** Directa **13.** Directa **15.** Directa **17.** Inversa **19.** Directa
21. Inversa **23.** Inversa **25. a)** $x = ky$ **b)** 72 **27. a)** $y = kR$ **b)** 306 **29. a)** $R = \frac{k}{W}$ **b)** $\frac{1}{20}$ **31. a)** $A = \frac{kB}{C}$ **b)** 9
33. a) $x = ky$ **b)** 20 **35. a)** $y = kR^2$ **b)** 20 **37. a)** $S = \frac{k}{G}$ **b)** 0.96 **39. a)** $x = \frac{k}{P^2}$ **b)** 25 **41. a)** $F = \frac{kM_1M_2}{d}$ **b)** 40

43. Se duplica **45.** Se divide entre dos **47.** Se duplica **49.** No cambia **51.** Se duplica **53.** $y = \frac{k}{x}; k = 5$ **55.** \$8814 **57.** 3096 miligramos **59.** 1.05 pulgadas **61.** 6400 centímetros cúbicos **63.** 3.12 horas **65.** 45 pies-candelas **67.** 117.6 pies **69.** 126 metros cúbicos **71.** 4600 DVD **73.** ≈ 133.25 libras **75.** $\approx 121{,}528$ llamadas **77.** $\frac{1}{49}$ de la luz del flash **79. a)** $P = 14.7 + kx$ **b)** 0.43 **c)** ≈ 337.9 pies **80.** $h = \frac{3V}{4\pi r^2}$ **81.** 132 **82.** $-14x^3 - 22x^2 + 47x - 15$ **83.** $(x + 3)(x - 2)$

Capítulo 6 Ejercicios de repaso

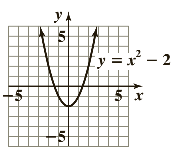
1. 4 **2.** -1 **3.** Ninguna **4.** $\{x|x \neq 1\}$ **5.** $\{x|x \neq 0\}$ **6.** $\{x|x \neq 2 \text{ y } x \neq -6\}$ **7.** $\frac{2}{5}$ **8.** $x - 6$ **9.** -1 **10.** $\frac{x-1}{x-2}$ **11.** $\frac{x-3}{x+1}$ **12.** $\frac{a^2 + 2ab + 4b^2}{a + 2b}$ **13.** $\frac{9x^2 - 3xy + y^2}{3x - y}$ **14.** $\frac{2x - 3}{x^2 - 2x + 4}$ **15.** $x(x - 4)$ **16.** $(x + 2y)(x - 2y)$ **17.** $(x + 7)(x - 5)(x + 2)$ **18.** $(x + 2)^2(x - 2)(x + 3)$ **19.** $\frac{4xyz}{3}$ **20.** $-\frac{x}{6}$ **21.** $9x^3z^5$ **22.** $\frac{11x + 6}{3x^2}$ **23.** $\frac{(x - y)y^2}{4x^3}$ **24.** $3x + 2$ **25.** $\frac{30x + 3y^2}{5x^2y}$ **26.** 1 **27.** $\frac{2x + 1}{3x + 1}$ **28.** $\frac{6a + 7}{a + 1}$ **29.** $\frac{6b - 8}{b - 1}$ **30.** $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$ **31.** $\frac{1}{3(a + 3)}$ **32.** $\frac{a^2 + c^2}{ac}$ **33.** $\frac{x + 1}{2x - 1}$ **34.** 1 **35.** $4x(x - 5y)$ **36.** $\frac{2a^2 + 9a + 4}{4a(a + 2)}$ **37.** $\frac{x^2 + 5}{(x + 5)(x - 5)}$ **38.** $-\frac{2(x + 1)}{x^2 - 4}$ **39.** $\frac{x + 5}{x + 6}$ **40.** $\frac{-x + 5}{(x + 2)(x - 2)(x - 3)}$ **41.** $\frac{16(x - 2y)}{3(x + 2y)}$ **42.** $\frac{3}{a^3}$ **43.** $\frac{22x + 5}{(x - 5)(x - 10)(x + 5)}$ **44.** $\frac{2(x - 4)}{(x - 3)(x - 5)}$ **45.** $-\frac{1}{x - 3}$ **46.** $\frac{a + 3}{a + 5}$ **47.** $\frac{x + 6}{x - 4}$ **48.** $\frac{a + 2b^2}{3}$ **49.** $\frac{x^2 + 6x - 24}{(x - 1)(x + 9)}$ **50.** $\frac{x - 4}{x - 6}$ **51. a)** $\{x|x \neq -2\}$ **b)** $\{x|x \neq -4\}$ **c)** $\frac{2x^2 + 7x + 4}{(x + 2)(x + 4)}$ **d)** $\{x|x \neq -2 \text{ y } x \neq -4\}$ **52. a)** $\{x|x \neq 3 \text{ y } x \neq -3\}$ **b)** $\{x|x \neq 3\}$ **c)** $\frac{x^2 + 8x + 12}{(x + 3)(x - 3)}$ **d)** $\{x|x \neq 3 \text{ y } x \neq -3\}$ **53.** $\frac{3ac^2}{b^3}$ **54.** $\frac{4x + 2y}{x^2 + xy^3}$ **55.** $\frac{3y - 1}{7y^2 + 1}$ **56.** $\frac{5a + 1}{2}$ **57.** $\frac{3x + 1}{-x + 1}$ **58.** $\frac{3x^2 - 29x + 68}{4x^2 - 6x - 54}$ **59.** $\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 5}$ **60.** $\frac{x^2 + 6x + 8}{x + 3}$ **61.** 16 **62.** -2 **63.** 52 **64.** 2.4 **65.** 5 **66.** -9 **67.** -18 **68.** -28 **69.** -6 **70.** -10 **71.** $b = \frac{ac}{a - c}$ **72.** $\bar{x} = x - sz$ **73.** 60 ohms **74.** 2 centímetros **75.** 10, 2 **76.** 21, 3 **77.** ≈ 17.14 minutos **78.** 14 horas **79.** 3 **80.** $\frac{5}{6}$ **81.** 5 millas por hora **82.** Automóvil: 50 millas por hora, aeroplano: 150 millas por hora **83.** 20 **84.** $\frac{25}{2}$ **85.** ≈ 426.7 **86.** \$8.40 **87.** 1600 pies **88.** 200.96 unidades cuadradas **89.** 2.38 minutos

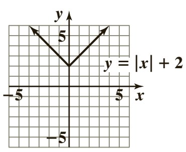
Ejercicios de práctica del capítulo

1. -7 y 4 [6.1] **2.** $\left\{x \middle| x \neq -4 \text{ y } x \neq \frac{1}{2}\right\}$ [6.1] **3.** $5x^5y + 8 + 11xy^2$ [6.1] **4.** $\frac{x - 6y}{x + y}$ [6.1] **5.** $\frac{1}{x^4y^2}$ [6.1] **6.** $\frac{1}{x + 2}$ [6.1] **7.** $\frac{7}{a(a + b)}$ [6.1] **8.** $x^2 + y^2$ [6.1] **9.** $\frac{5x^2 + 2x + 2}{x^2(x + 1)}$ [6.2] **10.** $\frac{-3x - 1}{(x - 3)(x + 3)(x + 1)}$ [6.2] **11.** $\frac{m(6m + n)}{(6m + 5n)(2m - n)(2m + 3n)}$ [6.2] **12.** $\frac{x(x + 10)}{(2x - 1)^2(x + 3)}$ [6.2] **13.** $x + 3$ [6.1] **14. a)** $\frac{3x^2 + 2x - 9}{(x + 5)(2x + 3)}$ **b)** $\left\{x \middle| x \neq -5 \text{ y } x \neq -\frac{3}{2}\right\}$ [6.2] **15.** $\frac{x + 5}{x + 2}$ [6.1] **16.** $\frac{y + 2x}{y - 3x}$ [6.3] **17.** $\frac{b(a - b)}{a}$ [6.3] **18.** $\frac{7x - 6}{4x^2 - x}$ [6.3] **19.** 20 [6.3] **20.** 12 [6.4] **21.** $C = \frac{2b + Ad}{A}$ [6.4] **22.** 0.75 watt [6.6] **23.** 6 [6.6] **24.** ≈ 4.44 horas [6.5] **25.** $6\frac{2}{3}$ millas [6.5]

Ejercicios de repaso acumulados

1. 

[1.2] **2.** $-27\frac{3}{4}$ [1.4] **3.** -3 [2.1] **4. a)** 28% **b)** $\approx 44{,}000$ [1.3] **5.** 62 [1.4] **6.** $\frac{x^3}{8y^3}$ [1.5] **7.** $m = \frac{rF}{v^2}$ [2.2] **8.** 6% [2.2] **9.** 3 horas [2.4] **10.** $\left\{-\frac{32}{3}, \frac{22}{3}\right\}$ [2.6] **11.** 

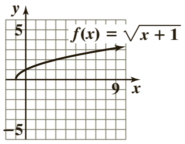
[3.1] **12.** 5 [3.2] **13.** $-\frac{1}{7}$ [3.4] **14.** $2x + 3y = 4$ [3.5] **15.** $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ [4.1] **16.** $9x^4 - 25y^2$ [5.2] **17.** $3(x - 5)^2$ [5.6] **18.** 

[3.1] **19.** $\frac{3x - 4}{(x - 1)(x - 2)}$ [6.2] **20.** 4 [6.4]

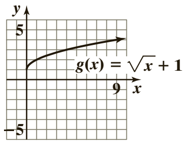
Capítulo 7

Conjunto de ejercicios 7.1

1. Radical **3.** Radicando **5.** Cúbica **7.** Negativa **9.** Par **11. a)** 3 **b)** -3 **c)** No es un número real **d)** No es un número real **13.** -4 **15.** -5 **17.** -1 **19.** 1 **21.** No es un número real **23.** -7 **25.** No es un número real **27.** No es un número real **29.** $\frac{1}{5}$ **31.** $\frac{1}{2}$ **33.** $\frac{2}{7}$ **35.** $-\frac{2}{3}$ **37.** ≈ -2.07 **39.** 7 **41.** 3 **43.** 119 **45.** 235.23 **47.** 0.06 **49.** $\frac{12}{13}$ **51.** $|x-8|$ **53.** $|x-3|$ **55.** $|3x^2-1|$ **57.** $|6a^3-5b^4|$ **59.** $|x^5|$ **61.** $|z^{16}|$ **63.** $|a-4|$ **65.** $|3a+2b|$ **67.** $5a$ **69.** $4c^3$ **71.** $x+2$ **73.** $2x+y$ **75.** 2 **77.** 8 **79.** 9 **81.** ≈ 9.381 **83.** ≈ 5.290 **85.** -3 **87.** 97 **89.** 11 **91.** 45 **93.** Selecciona un valor menor a $-\frac{1}{2}$. **95.** d **97.** a **99.**



101.



103. Una respuesta es $f(x) = \sqrt{x-8}$

105. a) $\sqrt{1288} \approx 35.89$ pies por segundo **b)** $\sqrt{2576} \approx 50.75$ pies por segundo **107.** No existe número real que al ser elevado al cuadrado se obtenga -81. **109.** No; si el radicando es negativo, la respuesta no es un número real. **111. a)** 1.3 **b)** 1.3 **113.** $x \geq 1$ **115.** $x \geq 3$ **117. a)** Todos los números reales **b)** $a \geq 0$ **c)** Todos los números reales **119.** Si n es par, se determina la raíz par de un número positivo. Si n es impar, la expresión es real. **121.** $x > -5$ **123. a)** No **b)** Sí, cuando $x = 0$ **c)** Sí **127.** $(3a-b)(3x+4y)$ **128.** $3x(x-4)(x-2)$ **129.** $(2x+1)(2x-1)(2x^2+3)$ **130.** $\left(x-\frac{2}{3}y\right)\left(x^2+\frac{2}{3}xy+\frac{4}{9}y^2\right)$

Conjunto de ejercicios 7.2

1. Numerador **3.** Índice **5.** Sumar **7.** $x^{5/2}$ **9.** $9^{5/2}$ **11.** $z^{5/3}$ **13.** $7^{10/3}$ **15.** $9^{7/4}$ **17.** $y^{14/3}$ **19.** $(a^3b)^{1/4}$ **21.** $(x^9z^5)^{1/4}$ **23.** $(3a+8b)^{1/6}$ **25.** $\left(\frac{2x^6}{11y^7}\right)^{1/5}$ **27.** $\sqrt{a}$ **29.** $\sqrt[3]{a^2}$ **31.** $\sqrt[3]{18^5}$ **33.** $\sqrt{24x^3}$ **35.** $(\sqrt[5]{11b^2c})^3$ **37.** $\sqrt[3]{6a+5b}$ **39.** $\frac{1}{\sqrt[3]{b^3-d}}$ **41.** a **43.** x^3 **45.** $\sqrt[3]{y}$ **47.** $\sqrt{y}$ **49.** 19.3 **51.** x^5y^{10} **53.** $\sqrt{xyz}$ **55.** $\sqrt[4]{x}$ **57.** $\sqrt[8]{y}$ **59.** $\sqrt[9]{x^2y}$ **61.** $\sqrt[10]{a^9}$ **63.** 3 **65.** 4 **67.** 16 **69.** No es un número real **71.** $\frac{5}{3}$ **73.** $\frac{1}{2}$ **75.** -9 **77.** -4 **79.** $\frac{1}{4}$ **81.** $\frac{1}{64}$ **83.** $\frac{3}{4}$ **85.** No es un número real **87.** 24 **89.** $\frac{11}{28}$ **91.** $x^{9/2}$ **93.** $x^{1/6}$ **95.** $\frac{1}{x}$ **97.** 1 **99.** $\frac{y^{5/3}}{12}$ **101.** $\frac{12}{x^{11/6}}$ **103.** $\frac{1}{2x^{1/3}}$ **105.** $\frac{121}{x^{1/7}}$ **107.** $\frac{64}{a^{66/5}}$ **109.** $\frac{x}{y^{20}}$ **111.** $8z^{7/2}-4$ **113.** $\frac{5}{x^5}+\frac{20}{x^{3/2}}$ **115.** $12x^{13/6}-18x^2$ **117.** ≈ 13.42 **119.** ≈ 3.32 **121.** ≈ 20.53 **123.** ≈ 0.03 **125.** n es impar, o n es par y $a \geq 0$. **127.** $(4^{1/2}+9^{1/2})^2 \neq 4+9; 25 \neq 13$ **129.** $(1^{1/3}+1^{1/3})^3 \neq 1+1; 8 \neq 2$ **131.** $x^{1/2}(x+1)$ **133.** $y^{1/3}(1-y)(1+y)$ **135.** $\frac{1+y^2}{y^{2/5}}$ **137. a)** $2^{10} = 1024$ bacterias **b)** $2^{10}\sqrt{2} \approx 1448$ bacterias **139.** 2247 calorías **141.** $\{x \mid x \geq 7\}$ **143.** $2; z^{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{3}} = z^{\frac{1}{60a}}; z^{\frac{1}{60a}} = z^{\frac{1}{120}}, 60a = 120; a = 2$ **145. a)** Cuando n es par y $a \geq 0$, o n es impar **b)** $a^{1/n}$ **147. a)** Siempre es real **b)** a **c)** a **d)** $|a|$ **149. a)** No; $(xy)^{1/2} = x^{1/2}y^{1/2}$ **b)** No; $(xy)^{-1/2} = x^{-1/2}y^{-1/2} = \frac{1}{x^{1/2}y^{1/2}}$ **151.** 9 **153. c)** es una función **154.** $\frac{b^2+a^3b}{a^3-b}$ **155.** 0, 3 **156.** ≈ 441.67 millas por hora.

Conjunto de ejercicios 7.3

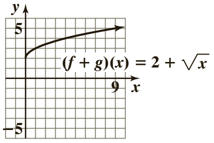
1. Cuadrado **3.** 3 **5.** 4 **7.** Producto **9.** 7 **11.** $2\sqrt{6}$ **13.** $4\sqrt{2}$ **15.** $5\sqrt{2}$ **17.** $5\sqrt{3}$ **19.** $2\sqrt{10}$ **21.** $2\sqrt[3]{2}$ **23.** $3\sqrt[3]{2}$ **25.** $2\sqrt[3]{4}$ **27.** $2\sqrt[3]{5}$ **29.** $2\sqrt[4]{3}$ **31.** $-2\sqrt[5]{2}$ **33.** b^3 **35.** x^2 **37.** $x\sqrt{x}$ **39.** $a^2\sqrt{a}$ **41.** $8z^{10}\sqrt[3]{z^2}$ **43.** $b^5\sqrt[4]{b^3}$ **45.** $x\sqrt[6]{x^3}$ o $x\sqrt{x}$ **47.** $3y^4\sqrt[5]{y^3}$ **49.** $10y^4\sqrt{2y}$ **51.** $xy^2\sqrt[3]{y}$ **53.** $ab^4\sqrt[5]{ab^3}$ **55.** $2x^7y^{10}z^{13}\sqrt{6xz}$ **57.** $3a^2b^2\sqrt[3]{3b^2}$ **59.** $2x^2y^2z^4\sqrt[4]{2yz^3}$ **61.** $3a^2b^2\sqrt[4]{b}$ **63.** $2a^2b^2\sqrt[5]{b^2}$ **65.** 3 **67.** $\frac{9}{10}$ **69.** 3 **71.** $\frac{1}{4}$ **73.** $\frac{1}{2}$ **75.** $\frac{1}{3}$ **77.** $\frac{1}{2}$ **79.** 2 **81.** $\frac{x}{3}$ **83.** $\frac{4x^2}{5y^5}$ **85.** $\frac{c^2}{4}$ **87.** $a^2b^6\sqrt[3]{a^2b^2}$ **89.** $2\sqrt{2}$ **91.** $3x^2$ **93.** $2x^2y\sqrt{2y}$ **95.** $\frac{\sqrt[3]{5y}}{2x^4}$ **97.** $\frac{y^2\sqrt[3]{5y}}{x^2}$ **99.** $\frac{x^3\sqrt[4]{10y}}{3}$ **101. a)** Elevando al cuadrado los números naturales. **b)** 1, 4, 9, 16, 25, 36 **103.** Si n es par y a o b son negativos, los números no son números reales. **105.** $(a \cdot b)^{1/2} = a^{1/2}b^{1/2} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ **107.** No; un ejemplo es $\sqrt{18}/\sqrt{2} = 3$. **109. a)** No **b)** Cuando $\sqrt[n]{x}$ es un número real y no es igual a 0. **110.** $C = \frac{5}{9}(F-32)$ **111.** $\{-28, 32\}$ **112.** $3x^6 - x^3 + 4$ **113.** $(x-1)(x^2-8x+19)$

Conjunto de ejercicios 7.4

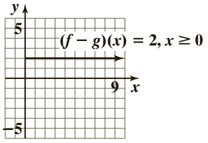
1. Semejantes **3.** Distributiva **5.** PIES. **7.** 0 **9.** $4\sqrt{5}$ **11.** $-4\sqrt{3}+5$ **13.** $-7\sqrt[4]{y}$ **15.** $2\sqrt[3]{x}+9\sqrt{5}$ **17.** $7\sqrt{x}-6\sqrt{y}$ **19.** $3\sqrt{3}$ **21.** $-30\sqrt{3}+25\sqrt{5}$ **23.** $-4\sqrt{10}$ **25.** $18y\sqrt{5x}$ **27.** $-16\sqrt{5x}$ **29.** $-27a\sqrt{2}$ **31.** $5\sqrt[3]{4}$ **33.** -7 **35.** $6a\sqrt[3]{ab^2}$ **37.** $3r^3s^2\sqrt{rs}$ **39.** 0 **41.** 4 **43.** $2\sqrt[3]{7}$ **45.** $3m^2n^5\sqrt{3n}$ **47.** $3x^3y^4\sqrt[3]{2x^2y}$ **49.** $x^7y^7z^3\sqrt[5]{x^2y^3z}$ **51.** $x^2y^2\sqrt[3]{4y^2}$ **53.** $5-\sqrt{15}$ **55.** $2\sqrt[3]{y^2}-y^3$ **57.** $4x^5y^3\sqrt[3]{x}+4xy^4\sqrt[3]{2x^2y^2}$ **59.** 59 **61.** $6-x^2$ **63.** $7-z$ **65.** $23+9\sqrt{3}$

67. $16 - 10\sqrt{2}$ **69.** $10 - 3\sqrt{6}$ **71.** $29 - 12\sqrt{5}$ **73.** $18x - \sqrt{3xy} - y$ **75.** $8 - 2\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{12}$ **77.** $x - \sqrt{3x}$ **79.** $x^2 + x\sqrt[3]{x^2}$ **81.** $x\sqrt[4]{27x^2} - x^2\sqrt[4]{3x}$ **83.** $3\sqrt{2}$ **85.** $3\sqrt{5}$ **87.** $-14 + 11\sqrt{2}$ **89.** $5\sqrt{6} - 2\sqrt{3}$ **91.** $15\sqrt{2}$ **93.** $2x^3\sqrt[3]{10x^2}$ **95.** $2b^2c\sqrt[6]{2ab^5c^3}$ **97.** $4ab\sqrt[4]{b}$ **99.** $x - 2\sqrt[3]{x^2y^2} - \sqrt[3]{xy} + 2y$ **101.** $ab\sqrt[3]{12a^2b^2} - 2a^2b^2\sqrt[3]{3}$ **103.** $2x - 5$ **105.** $2|r - 4|$ **107.** $P = 14\sqrt{5}, A = 60$ **109.** $P = 12\sqrt{5}, A = 30$ **111.** **a)** ≈ 45.17 millas por hora **b)** ≈ 35.33 millas por hora **113.** **a)** 37 pulgadas **b)** ≈ 37.97 pulgadas

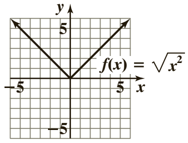
115. **a)**



117. **a)**



119.



b) Subir la gráfica 2 unidades **b)** $\{x|x \geq 0\}$

121. No: un ejemplo es $\sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{9 + 16}, 3 + 4 \neq 5, 7 \neq 5.$ **123.** No, $-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$ **125.** Un cociente de dos enteros, con denominador distinto de 0. **126.** Un número que puede representarse en una recta numérica real. **127.** Un número real que no puede expresarse como el cociente de dos enteros. **128.** $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$ **129.** $m = \dfrac{2E}{v^2}$ **130.** **a)**

b) $\left(-\dfrac{1}{2}, 5\right]$

c) $\left\{x \,\middle|\, -\dfrac{1}{2} < x \leq 5\right\}$

Prueba de mitad de capítulo

1. 11 [7.1] **2.** $-\dfrac{3}{4}$ [7.1] **3.** 16.3 [7.1] **4.** $|3a^2 - 4b^3|$ [7.1] **5.** 3 [7.1] **6.** $(7a^4b^3)^{1/5}$ [7.2] **7.** 20 [7.2] **8.** $a^{10}b^{15}c^5$ [7.3] **9.** $\dfrac{14}{x}$ [7.3] **10.** $8x + \dfrac{16}{x^{5/2}}$ [7.3] **11.** $4x^2y^4\sqrt{2y}$ [7.3] **12.** $2a^2b^3c^2\sqrt[6]{ab^5c^3}$ [7.3] **13.** $\dfrac{1}{3}$ [7.3] **14.** $\dfrac{y^2\sqrt{y}}{3x^5}$ [7.3] **15.** $11\sqrt{x} + 12\sqrt{y}$ [7.4] **16.** $27x\sqrt{10y}$ [7.4] **17.** $2x^2 - x\sqrt{5} - 15$ [7.4] **18.** $18a\sqrt{a} - 20a\sqrt{3}$ [7.4] **19.** $7ab\sqrt[4]{ab}$ [7.4] **20.** La parte **a)** tendrá un valor absoluto. **a)** $|x - 3|$, **b)** $8x$ [7.1]

Conjunto de ejercicios 7.5

1. Racionalizando **3.** Potencia **5.** Radicando **7.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **9.** $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ **11.** $\sqrt{6}$ **13.** $\dfrac{\sqrt{z}}{z}$ **15.** $\dfrac{p\sqrt{2}}{2}$ **17.** $\dfrac{\sqrt{7y}}{7}$ **19.** $3\sqrt{2}$ **21.** $\dfrac{\sqrt{xy}}{y}$ **23.** $\dfrac{\sqrt{10m}}{4}$ **25.** $\dfrac{\sqrt{2n}}{3}$ **27.** $\dfrac{3x^2y\sqrt{yz}}{z^2}$ **29.** $\dfrac{2y^4z\sqrt{15xz}}{3x}$ **31.** $\dfrac{4x^3y^2\sqrt{yz}}{z^2}$ **33.** $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$ **35.** $\dfrac{8\sqrt[3]{y^2}}{y}$ **37.** $\dfrac{\sqrt[4]{8}}{2}$ **39.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **41.** $\dfrac{5\sqrt[4]{z^2}}{z}$ **43.** $\dfrac{10\sqrt[5]{y^2}}{y}$ **45.** $\dfrac{2\sqrt[7]{a^3}}{a}$ **47.** $\dfrac{\sqrt[3]{4x^2}}{2x}$ **49.** $\dfrac{5m\sqrt[4]{8}}{2}$ **51.** $\dfrac{\sqrt[4]{135x}}{3x}$ **53.** $\dfrac{\sqrt[3]{12x^2y}}{2y}$ **55.** $\dfrac{\sqrt[3]{7xy^2z}}{z}$ **57.** 11 **59.** 62 **61.** -6 **63.** $a - b$ **65.** $4x - 9y$ **67.** $\sqrt{2} - 1$ **69.** $2 - \sqrt{3}$ **71.** $\dfrac{-5\sqrt{2} - 35}{47}$ **73.** $\dfrac{10 + \sqrt{30}}{14}$ **75.** $\dfrac{18 - 3\sqrt{x}}{36 - x}$ **77.** $\dfrac{4x + 4y\sqrt{x}}{x - y^2}$ **79.** $\dfrac{-13 + 3\sqrt{6}}{23}$ **81.** $a + a^3$ **83.** $\dfrac{4\sqrt{x+2} + 12}{x - 7}$ **85.** $\dfrac{a}{5}$ **87.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ **89.** 1 **91.** $\dfrac{2xy^3\sqrt{30xz}}{5z}$ **93.** $\dfrac{\sqrt{14}}{x}$ **95.** $\dfrac{\sqrt{a} - 7}{a - 49}$ **97.** $-\dfrac{\sqrt{2x}}{2}$ **99.** $\dfrac{\sqrt[4]{24x^3y^2}}{2x}$ **101.** $\dfrac{2y^4z^3\sqrt[3]{2x^2z}}{x}$ **103.** $\dfrac{a\sqrt{r} + 2r\sqrt{a}}{a - 4r}$ **105.** $\dfrac{\sqrt[3]{150y^2}}{5y}$ **107.** $\dfrac{y^3z\sqrt[4]{54x^2}}{3x}$ **109.** $\sqrt{2}$ **111.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ **113.** $\dfrac{8\sqrt{6}}{3}$ **115.** $\dfrac{19\sqrt{2}}{2}$ **117.** $\dfrac{21\sqrt{2}}{2}$ **119.** $-\dfrac{301\sqrt{2}}{20}$ **121.** $\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$ **123.** $\left(-\dfrac{2}{y} + \dfrac{3}{x}\right)\sqrt{xy}$ **125.** $2\sqrt{a}$ **127.** $\sqrt[3]{(a + b)^5}$ **129.** $\sqrt[15]{(a + 2b)^2}$ **131.** $\sqrt[6]{rs^5}$ **133.** $\sqrt[15]{x^2y^8}$ **135.** ≈ 3.69 metros **137.** ≈ 12 pulgadas **139.** **a)** 6.21 millones **b)** ≈ 2.35 millones **141.** $\dfrac{10}{15 + 3\sqrt{5}}$ **143.** $\dfrac{1}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}$ **145.** $\dfrac{3}{\sqrt{3}}; \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ **147.** $2 + \sqrt{3}$; racionalice el denominador y compare **149.** **a)** 4, 8, 12 **b)** 9, 18, 27 **c)** $x^{(3a+2b)/6}$ **d)** $x^{(3a-2b)/6}$ **152.** $b_2 = \dfrac{2A}{h} - b_1$ **153.** 40 millas por hora, 50 millas por hora **154.** $4x^3 + x^2 - 20x + 4$ **155.** -8.1

Conjunto de ejercicios 7.6

1. Radical **3.** Original **5.** Índice **7.** Cubo **9.** 16 **11.** No hay solución real **13.** -64 **15.** 11 **17.** 9 **19.** -1 **21.** 81 **23.** 71 **25.** 26 **27.** No hay solución real **29.** 2, 4 **31.** 8 **33.** 7 **35.** $\dfrac{2}{3}$ **37.** 16 **39.** 2 **41.** 10 **43.** 6 **45.** 8 **47.** 0 **49.** -3 **51.** $\dfrac{3}{2}$ **53.** No hay solución real **55.** 0 **57.** 5, 8 **59.** No hay solución real **61.** 9 **63.** 3, 7 **65.** -1 **67.** 2 **69.** 4 **71.** 5 **73.** $v = \dfrac{p^2}{2}$ **75.** $g = \dfrac{v^2}{2h}$ **77.** $F = \dfrac{Mv^2}{R}$ **79.** $m = \dfrac{x^2k}{V_0^2}$ **81.** $A = \pi r^2$ **83.** $\sqrt{87}$ **85.** $2\sqrt{10}$ **87.** 1 **89.** No hay solución **91.** 3 **93.** 7 **95.** 1 **97.** 3 **99.** $\sqrt{16{,}200} \approx 127.28$ pies **101.** $\sqrt{2000} \approx 44.7$ pies **103.** **a)** ≈ 3.14 segundos **b)** $\sqrt{2} \cdot T$; compare $\sqrt{\dfrac{l}{32}}$ con $\sqrt{\dfrac{l}{16}}$ **c)** $\sqrt{24} \approx 4.90$ segundos **105.** $R = \dfrac{8\mu l}{\pi r^4}$ **107.** $0.2(\sqrt{149.4})^3 \approx 365.2$ días

109. $\sqrt{10{,}000} = 100$ libras **111.** $\sqrt{320} \approx 17.89$ pies por segundo **113.** $\sqrt{1649} \approx 40.61$ metros **115.** $2, -2$ **117.** $5, -1$ **119.** 30 **121.** $5, -5$ **123.** Todos los números reales **125.** Las respuestas variarán. **127.** 0 **129.** 1; Las respuestas variarán. **131. a)** 3, 7; puntos de intersección **b)** Sí **c)** 3, 7; sí **133.** En $x = 4$, $g(x)$ o $y = 0$. Por lo tanto la gráfica debe tener una intercepción con el eje x en 4. **135.** No hay solución **137.** $n = \dfrac{z^2\sigma^2}{(\bar{x} - \mu)^2}$ **139.** $L_1 \approx 0.44$, $L_2 \approx 0.76$ **142.** $P_2 = \dfrac{P_1P_3}{P_1 - P_3}$ **143.** x **144.** $\dfrac{3a}{2b(2a + 3b)}$ **145.** $t(t - 5)$ **146.** $\dfrac{3}{x + 3}$ **147.** 2

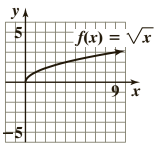
Conjunto de ejercicios 7.7

1. Imaginario **3.** Complejo **5.** Inciso **7.** Número **9.** -1 **11.** $4 + 0i$ **15.** $21 - 6i$ **17.** $0 + 2i\sqrt{6}$ **19.** $8 - 2i\sqrt{3}$ **21.** $3 + 7i\sqrt{2}$ **23.** $12 - 5i$ **25.** $0 + (7 - 3\sqrt{5})i$ **27.** $4 + 4i$ **29.** $2 + 10i$ **31.** $-17 - 12i$ **33.** $(4\sqrt{2} + \sqrt{3}) - 2i\sqrt{2}$ **35.** $11 - 4i\sqrt{2}$ **37.** $-3 - 2i\sqrt{5}$ **39.** $6 - 12i$ **41.** $-9 + 4i$ **43.** $-33 + 18i$ **45.** $28 + 4i\sqrt{3}$ **47.** $9 + 9i$ **49.** $1 + 5i$ **51.** 109 **53.** $39 - 9i\sqrt{2}$ **55.** $\dfrac{25}{72} + \dfrac{1}{4}i$ **57.** $-\dfrac{2}{3}i$ **59.** $\dfrac{3}{2} - i$ **61.** $\dfrac{12}{5} + \dfrac{6}{5}i$ **63.** $\dfrac{3}{5} + \dfrac{6}{5}i$ **65.** $\dfrac{9}{10} - \dfrac{6}{5}i$ **67.** $\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{5}i$ **69.** $\dfrac{5\sqrt{2}}{37} - \dfrac{2\sqrt{6}}{37}i$ **71.** $\dfrac{3}{8} + \dfrac{7}{8}i$ **73.** 5 **75.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ **77.** 0 **79.** $4\sqrt{2} + 2i\sqrt{3}$ **81.** $20.8 - 16.64i$ **83.** $37 - 39i$ **85.** $2 - \dfrac{11}{2}i$ **87.** $\dfrac{6\sqrt{3}}{7} + \dfrac{12}{7}i$ **89.** $7 + \dfrac{2}{45}i$ **91.** $\dfrac{1}{4} - \dfrac{31}{50}i$ **93.** 2 **95.** $-4.33 - 10.91i$ **97.** -1 **99.** 1 **101.** i **103.** $-i$ **105. a)** $-2 - 3i$ **b)** $\dfrac{2}{13} - \dfrac{3}{13}i$ **107.** -4 **109.** $16 - 4i$ **111.** $14 + 8i$ **113.** 0 **115.** 1 **117.** Sí **119.** No **121.** $\approx 0.83 - 3i$ **123.** $\approx 1.5 - 0.33i$ **125.** $-i$ **127.** $1 + i\sqrt{5}, 1 - i\sqrt{5}$ **129.** $6 + 3i\sqrt{3}$ **131.** $-1 + 7i\sqrt{3}$ **133.** Sí **135.** No **137.** Verdadero; $(2i)(2i) = 4$ **139.** Falso; $(1 + i)(1 + 2i) = -1 + 3i$ **141.** Valores pares; i^n donde n es par será 1 o -1. **143.** 15 libras en \$5.50, 25 libras en \$6.30 **144.** $2c - 3 - \dfrac{8}{4c + 9}$ **145.** $\dfrac{a^2}{b(a - b)}$ **146.** 4

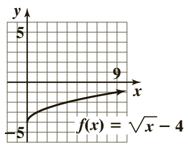
Ejercicios de repaso del capítulo 7

1. 3 **2.** -3 **3.** -5 **4.** 4 **5.** 5 **6.** 38.2 **7.** $|x|$ **8.** $|x + 7|$ **9.** $|x - y|$ **10.** $|x^2 - 4x + 12|$ **11.** 7 **12.** 57 **13.** ≈ 2.2 **14.** 12 metros **15.** $x^{3/2}$ **16.** $x^{5/3}$ **17.** $y^{13/4}$ **18.** $6^{-2/7}$ **19.** $\sqrt{x}$ **20.** $\sqrt[3]{a^2}$ **21.** $\left(\sqrt[4]{8m^2n}\right)^7$ **22.** $\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{x + y}\right)^5}$ **23.** 16 **24.** x^6 **25.** 81 **26.** $\sqrt[4]{a}$ **27.** -6 **28.** No es un número real **29.** $\dfrac{3}{4}$ **30.** $\dfrac{3}{8}$ **31.** $x^{4/15}$ **32.** $\dfrac{4}{y^3}$ **33.** $\dfrac{1}{a^{16/15}}$ **34.** $\dfrac{25x^{10}}{y^7}$ **35.** $5a^2 - 3a^{5/2}$ **36.** $\dfrac{4}{x^{7/6}} + 11$ **37.** $x^{2/5}(1 + x)$ **38.** $\dfrac{1 + a^2}{a^{1/2}}$ **39.** 5 **40.** ≈ 2.668

41.

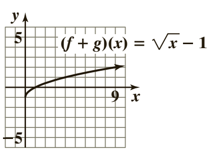


42.

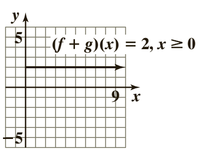


43. $3\sqrt{2}$ **44.** $2\sqrt[3]{2}$ **45.** $\dfrac{7}{3}$ **46.** $\dfrac{2}{5}$ **47.** $-\dfrac{9}{7}$ **48.** $-\dfrac{3}{5}$ **49.** 8 **50.** 4 **51.** $3xyz^2\sqrt{2y}$ **52.** $5xy^3\sqrt{3xy}$ **53.** $3a^2b^3\sqrt[3]{2ab}$ **54.** $5x^2y^3z^5\sqrt[3]{x^2z}$ **55.** $x^{14}y^{21}z^{35}$ **56.** $8a^3b^{12}c^{18}$ **57.** $2x^3\sqrt{10}$ **58.** $2x^3y\sqrt[3]{x^2y^2}$ **59.** $2x^2y^3\sqrt[3]{4x^2}$ **60.** $2x^2y^4\sqrt[4]{x}$ **61.** $6x - 2\sqrt{15x}$ **62.** $2x^2y^2\sqrt[3]{y^2} + x\sqrt[3]{18y}$ **63.** $\sqrt[4]{a^3b^2}$ **64.** $\sqrt[6]{x^5y^2}$ **65.** $\dfrac{64r^{9/2}}{p^3}$ **66.** $\dfrac{y^{1/5}}{6xz^{1/3}}$ **67.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ **68.** $\dfrac{\sqrt[3]{21}}{3}$ **69.** $\dfrac{\sqrt[4]{20}}{2}$ **70.** $\dfrac{x\sqrt{10}}{10}$ **71.** $\dfrac{8\sqrt{x}}{x}$ **72.** $\dfrac{m\sqrt[3]{5}}{5}$ **73.** $\dfrac{10\sqrt[3]{y}}{y}$ **74.** $\dfrac{9\sqrt[4]{z^3}}{z}$ **75.** $\dfrac{x}{3}$ **76.** $\dfrac{x}{2}$ **77.** $\dfrac{4y^2}{x^3}$ **78.** $2x^2y^3$ **79.** $\dfrac{x^2\sqrt{6y}}{y}$ **80.** $\dfrac{2\sqrt{21ab}}{7b}$ **81.** $\dfrac{x^2y^2\sqrt{6yz}}{z}$ **82.** $\dfrac{5xy^2\sqrt{15yz}}{3z}$ **83.** $3xy\sqrt[3]{2y}$ **84.** $\dfrac{\sqrt[3]{75xy^2}}{5y}$ **85.** $\dfrac{y\sqrt[3]{9x^2}}{x}$ **86.** $\dfrac{y^2\sqrt[3]{25x}}{5x}$ **87.** $\dfrac{b^2\sqrt[4]{2ab^2}}{a}$ **88.** $\dfrac{y\sqrt[4]{6x^3y^2}}{2x}$ **89.** 7 **90.** -2 **91.** $x^2 - y$ **92.** $7 + 4\sqrt{3}$ **93.** $x + \sqrt{5xy} - \sqrt{3xy} - y\sqrt{15}$ **94.** $\sqrt[3]{6x^2} - \sqrt[3]{4xy} - \sqrt[3]{9xy} + \sqrt[3]{6y^2}$ **95.** $-12 + 6\sqrt{5}$ **96.** $\dfrac{4x - x\sqrt{x}}{16 - x}$ **97.** $\dfrac{4a + a\sqrt{b}}{16 - b}$ **98.** $\dfrac{x\sqrt{y} + 7x}{y - 49}$ **99.** $\dfrac{x - \sqrt{xy}}{x - y}$ **100.** $\dfrac{x - 2\sqrt{xy} - 3y}{x - y}$ **101.** $\dfrac{2\sqrt{a - 1} + 4}{a - 5}$ **102.** $\dfrac{5\sqrt{y + 2} + 15}{y - 7}$ **103.** $9\sqrt[3]{x}$ **104.** $-4\sqrt{3}$ **105.** $12 - 13\sqrt[3]{2}$ **106.** $\dfrac{45\sqrt{2}}{8}$ **107.** $(9x^2y^3 - 4x^3y^4)\sqrt{x}$ **108.** $(8x^2y^2 - x + 3x^3)\sqrt[3]{xy^2}$ **109.** $3x\sqrt{2} - 3\sqrt{5x}$ **110.** $2x^2 + 2x^2\sqrt[3]{4x}$ **111.** $2x + 7$ **112.** $\sqrt{5}|2a + 5|$ **113.** $\sqrt[6]{x + 5}$ **114.** $\sqrt[12]{b^5}$ **115. a)** $12\sqrt{3}$ **b)** 24 **116. a)** $40\sqrt{2}$ **b)** $\dfrac{2040}{7} \approx 291.4$

117. a)



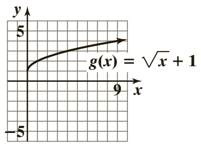
b) $x \geq 0$ **118. a)**



b) $x \geq 0$ **119.** 16 **120.** No hay solución

121. 64 **122.** -125 **123.** 9 **124.** 125 **125.** No hay solución. **126.** 4 **127.** -3 **128.** 3 **129.** 0, 9 **130.** 5 **131.** 4 **132.** 6
133. $L = \dfrac{V^2 w}{2}$ **134.** $A = \pi r^2$ **135.** $2\sqrt{14}$ **136.** $5\sqrt{3}$ **137.** $\sqrt{29} \approx 5.39$ metros **138.** $\sqrt{1280} \approx 35.78$ pies por segundo
139. $2\pi\sqrt{2} \approx 2.83\pi \approx 8.89$ segundos **140.** $\sqrt{\dfrac{90}{0.145}} \approx 24.91$ metros por segundo **141.** $m \approx 5m_0$. Así, es ≈ 5 veces su masa original.
142. $1 + 0i$ **143.** $-8 + 0i$ **144.** $7 - 16i$ **145.** $9 + 4i$ **146.** $13 + i$ **147.** $-3 + 3i$ **148.** $12\sqrt{3} + (\sqrt{5} - \sqrt{7})i$ **149.** $-6 + 6i$
150. $17 - 6i$ **151.** $(24 + 3\sqrt{5}) + (4\sqrt{3} - 6\sqrt{15})i$ **152.** $-\dfrac{8i}{3}$ **153.** $-1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ **154.** $\dfrac{12}{13} - \dfrac{8}{13}i$ **155.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{31} + \dfrac{3\sqrt{2}}{31}i$ **156.** 0
157. 7 **158.** i **159.** $-i$ **160.** 1 **161.** -1

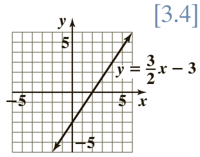
Ejercicios de práctica del capítulo 7

1. $|5x - 3|$ [7.1] **2.** $\dfrac{1}{x^{12/5}}$ [7.2] **3.** $\dfrac{1 + x^2}{x^{2/3}}$ [7.2] **4.** 

[7.1]

5. $3x^3y^5\sqrt{6x}$ [7.3] **6.** $5x^3y^3\sqrt[3]{2x^2y}$ [7.4] **7.** $\dfrac{x^3y\sqrt{14yz}}{4z}$ [7.5] **8.** $\dfrac{9\sqrt[3]{x^2}}{x}$ [7.5] **9.** $\dfrac{3 - \sqrt{3}}{6}$ [7.5] **10.** $7\sqrt{6}$ [7.3]
11. $(2xy + 4x^2y^2)\sqrt[3]{y^2}$ [7.4] **12.** $6\sqrt{3} - 2\sqrt{6} - 12 + 4\sqrt{2}$ [7.4] **13.** $\sqrt[8]{x^5y^3}$ [7.2] **14.** $\sqrt[12]{(7x + 2)^7}$ [7.5] **15.** -5 [7.6]
16. -3 [7.6] **17.** 9 [7.6] **18.** 3 [7.6] **19.** $g = \dfrac{8w^2}{h}$ [7.6] **20.** $\sqrt{12{,}880} \approx 113.49$ pies por segundo [7.6] **21.** 13 pies [7.6]
22. $2\pi\sqrt{\dfrac{1400}{65{,}000}} \approx 0.92$ segundos [7.6] **23.** $20 + 20i$ [7.7] **24.** $\dfrac{33}{53} - \dfrac{17}{53}i$ [7.7] **25.** 2 [7.7]

Ejercicios de repaso acumulados

1. $\dfrac{57}{9}$ [2.1] **2.** -1 [2.1] **3.** \$40 [2.3] **4.** $\{x \mid -1 < x < 4\}$ [2.6] **5.** 

[3.4]

6. Paralelo [3.5] **7.** $-x^2 + 5x - 13$ [3.6] **8.** $y = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{10}{3}$ [3.5] **9.** $\left(2, 5, \dfrac{34}{5}\right)$ [4.2] **10.** 40 [4.5] **11.** $w = 2r + 1$ [5.3]
12. $25x^2y^2 - 9$ [5.2] **13.** $3, -3$ [7.6] **14.** $x(4x - 5)(x - 1)$ [5.5] **15.** $(x - 2)(x^2 + 5x + 13)$ [5.6] **16.** $\dfrac{1}{4}, -\dfrac{3}{2}$ [5.8]
17. $\dfrac{(x + y)y^2}{3x^3}$ [6.1] **18.** $\dfrac{x + 3}{x + 5}$ [6.2] **19.** 18 [6.4] **20.** 400 pies [6.6]

Capítulo 8

Conjunto de ejercicios 8.1

1. Cuadrática **3.** Complejo **5.** Trinomio cuadrado perfecto **7.** Recíproco **9.** 25 **11.** ± 9
13. ± 5 **15.** $\pm 7i$ **17.** $\pm 2i\sqrt{6}$ **19.** $\pm i\sqrt{61}$ **21.** 8, 0 **23.** $-3 \pm 5i$ **25.** $2 \pm 3i\sqrt{5}$ **27.** $-1, \dfrac{1}{3}$ **29.** $\dfrac{2 \pm 2i}{3}$ **31.** $0.1, -1.7$
33. $\dfrac{5 \pm 3\sqrt{2}}{2}$ **35.** $-\dfrac{1}{20}, -\dfrac{9}{20}$ **37.** $-1, -5$ **39.** $-3, -5$ **41.** $-2, -4$ **43.** 1, 6 **45.** $-1, \dfrac{1}{2}$ **47.** $-\dfrac{1}{2}, 4$ **49.** 5, 8 **51.** $-1, 7$ **53.** 4, 5
55. $7, -4$ **57.** $1, -11$ **59.** $2 \pm \sqrt{14}$ **61.** $-4 \pm \sqrt{11}$ **63.** $\dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ **65.** $\dfrac{-3 \pm i\sqrt{15}}{2}$ **67.** 0, 1 **69.** $0, -\dfrac{2}{3}$ **71.** $0, \dfrac{1}{6}$ **73.** $1, -3$
75. $8, -4$ **77.** $\dfrac{-9 \pm \sqrt{73}}{2}$ **79.** $\dfrac{1}{3}, -1$ **81.** $\dfrac{1 \pm i\sqrt{39}}{4}$ **83.** $1 \pm i$ **85.** **a)** $21 = (x + 2)(x - 2)$ **b)** 5 **87.** **a)** $18 = (x + 4)(x + 2)$
b) $-3 + \sqrt{19}$ **89.** 12 mph **91.** 5, 7 **93.** 5 pies por 12 pies **95.** $\dfrac{12 + \sqrt{288}}{2} \approx 14.49$ pies por 14.49 pies
97. $\sqrt{200} \approx 14.14$ pulgadas **99.** $\sqrt{24} \approx 4.90$ pies **101.** 4% **103.** $\approx 6\%$ **105.** **a)** $S = 32 + 80\sqrt{\pi} \approx 173.80$ pulgadas cuadradas
b) $r = \dfrac{4\sqrt{\pi}}{\pi} \approx 2.26$ pulgadas **c)** $r = -5 + \sqrt{\dfrac{80 + 25\pi}{\pi}} \approx 2.1$ pulgadas **107.** 2 **108.** \$4200 al 7%, \$5800 al $6\frac{1}{4}\%$ **109.** $\left\{10, \dfrac{4}{3}\right\}$
110. 0 **111.** $4x^3 + x^2 - 21x + 6$

Conjunto de ejercicios 8.2

1. Completando el cuadrado **3.** Dividimos **5.** Dos **7.** No **9.** Dos soluciones reales
11. No hay solución real **13.** Dos soluciones reales **15.** No hay solución real **17.** Una solución real **19.** Una solución real
21. $-2, -5$ **23.** 2, 4 **25.** $1, -7$ **27.** $-2 \pm 2\sqrt{6}$ **29.** ± 8 **31.** $\dfrac{2 \pm i\sqrt{11}}{3}$ **33.** 0, 5 **35.** $\dfrac{2 \pm i\sqrt{2}}{2}$ **37.** -1 **39.** $\dfrac{1}{4}$ **41.** $1 \pm \sqrt{2}$
43. $\dfrac{-3 \pm i\sqrt{15}}{2}$ **45.** $-3, \dfrac{1}{2}$ **47.** $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{5}{3}$ **49.** $4, -6$ **51.** $\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}$ **53.** $\dfrac{-6 \pm 2\sqrt{6}}{3}$ **55.** $\dfrac{3 \pm \sqrt{309}}{30}$ **57.** $\dfrac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$ **59.** $\dfrac{2 \pm i\sqrt{6}}{2}$

61. $\frac{-1 \pm i\sqrt{23}}{4}$ **63.** $\frac{-0.6 \pm \sqrt{0.84}}{0.2}$ o $-3 \pm \sqrt{21}$ **65.** $0, \frac{3}{2}$ **67.** $-5, 6$ **69.** $\frac{7 \pm \sqrt{17}}{4}$ **71.** No es un número real
73. $x^2 - 7x + 6 = 0$ **75.** $x^2 + 8x - 9 = 0$ **77.** $15x^2 - x - 6 = 0$ **79.** $x^2 - 2 = 0$ **81.** $x^2 + 9 = 0$ **83.** $x^2 - 6x + 7 = 0$
85. $x^2 - 4x + 13 = 0$ **87. a)** $n(10 - 0.02n) = 450$ **b)** 50 **89. a)** $n(50 - 0.4n) = 660$ **b)** 15 **91.** 3
93. $w = 3$ pies, $l = 8$ pies **95.** 2 pulgadas **97. a)** 0.5 segundos y 2 segundos **b)** 2.6 segundos **c)** 28 pies
99. a) 1 segundo y 9 segundos **b)** 10 segundos **c)** 66.25 pies **101.** Sí; si multiplicas ambos lados de una ecuación por -1 obtienes la otra ecuación. **103. a)** $b^2 - 4ac$ **b)** -84 **c)** Las respuestas variarán **105.** Las respuestas variarán. **107.** Sí
109. $(-0.12 + \sqrt{14.3952})/1.2 \approx 3.0618$ milímetros **111. a)** ≈ 1.94 segundos **b)** ≈ 2.74 segundos **c)** La de Courtney
d) Sí, a los 1.5 segundos **112.** 5.0×10^2 o 500 **113.** 7 **114.** $(2, -1)$ **115.** $\frac{6y - x}{3xy}$ **116.** No hay solución real

Conjunto de ejercicios 8.3

1. Utilidades **3.** Una tarea **5.** $s = \sqrt{A}$ **7.** $i = \sqrt{\frac{E}{r}}$ **9.** $t = \frac{\sqrt{d}}{4}$ **11.** $c = \sqrt{\frac{E}{m}}$ **13.** $r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$
15. $W = \sqrt{d^2 - L^2}$ **17.** $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ **19.** $H = \sqrt{d^2 - L^2 - W^2}$ **21.** $t = \sqrt{\frac{h - s_0}{-16}}$ o $t = \frac{\sqrt{s_0 - h}}{4}$ **23.** $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$
25. $v_1 = \sqrt{v_2^2 - 2ad}$ **27.** $c = \sqrt{(v')^2 + v^2}$ **29. a)** pérdida de \$2400 **b)** utilidades de \$24,000 **c)** alrededor de 1.4 años
31. a) pérdida de \$2000 **b)** utilidades de \$21,000 **c)** alrededor de 1.5 años **33. a)** 32°F **b)** 80.8°F **c)** ≈ 2.92 minutos
35. a) alrededor de 9.64 accidentes **b)** alrededor de 12.115 accidentes **c)** alrededor de 19 años y 72 años **37. a)** \$3615.25 billones **b)** \$1114 billones **c)** 2009 y 2028 **39.** $l = 30$ metros, $w = 20$ metros **41.** 4 pies por hora **43.** De ida a 6 mph, de regreso a 8 mph
45. Bonita ≈ 11.52 horas, Pamela ≈ 12.52 horas **47.** 130 mph **49.** Chris ≈ 11.76 horas, John ≈ 12.26 horas **51.** 75 mph
53. $l \approx 34.86$ pulgadas, $h \approx 19.61$ pulgadas **55.** Las respuestas variarán. **57.** Las respuestas variarán. **59.** 6 metros por 3 metros o 2 metros por 9 metros **61.** -16 **62.** $R = \frac{E - Ir}{I}$ **63.** $\frac{8}{r - 4}$ **64.** $\frac{x^2}{y^{32}}$ **65.** No hay solución

Prueba de mitad de capítulo

1. $\pm 7\sqrt{2}$ [8.1] **2.** $3 \pm 2i\sqrt{5}$ [8.1] **3.** $-\frac{1}{2}, -\frac{13}{2}$ [8.1] **4.** $-6, 2$ [8.1] **5.** $2 \pm \sqrt{14}$ [8.1]
6. $\frac{-1 \pm i\sqrt{143}}{8}$ [8.1] **7.** $(6 + 6\sqrt{2})$ metros [8.1] **8. a)** $b^2 - 4ac$ **b)** dos soluciones reales distintas: $b^2 - 4ac > 0$; una solución real: $b^2 - 4ac = 0$; no tiene soluciones reales: $b^2 - 4ac < 0$ [8.2] **9.** Dos soluciones reales distintas [8.2] **10.** $-\frac{5}{3}, \frac{3}{2}$ [8.2]
11. $-2 \pm 2\sqrt{3}$ [8.2] **12.** $\frac{1 \pm i\sqrt{14}}{3}$ [8.2] **13.** $x^2 - 5x - 14 = 0$ [8.2] **14.** $x^2 - 4x - 1 = 0$ [8.2] **15.** 10 lámparas [8.2]
16. $r = \sqrt{x^2 - y}$ [8.3] **17.** $x = \sqrt{\frac{3A}{k}}$ [8.3] **18.** $y = \sqrt{D^2 - x^2}$ [8.3] **19.** 5 pies por 12 pies [8.3] **20.** 5 relojes [8.3]

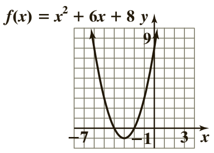
Conjunto de ejercicios 8.4

1. En la forma cuadrática **3.** Solución extraña **5.** $u = h - 2$ **7.** $\pm 1, \pm 3$ **9.** $\pm 2i, \pm 3i$
11. $\pm 2, \pm 3$ **13.** $\pm 2, \pm\sqrt{3}$ **15.** $\pm\frac{1}{2}, \pm 2$ **17.** $\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{5}$ **19.** $\pm 3, \pm i\sqrt{2}$ **21.** $\pm 1, \pm i\sqrt{5}$ **23.** 4 **25.** 9 **27.** $\frac{1}{9}$ **29.** $1, -9$
31. $\frac{4}{3}, -\frac{1}{2}$ **33.** $\pm\sqrt{6}, \pm 1$ **35.** $-6, -\frac{5}{2}$ **37.** $\pm\frac{5\sqrt{6}}{6}, \pm\frac{\sqrt{39}}{3}$ **39.** $-\frac{1}{2}$ **41.** 3, 4 **43.** $2, \frac{1}{3}$ **45.** $1, -\frac{1}{10}$ **47.** $-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ **49.** 1, 27
51. 27, 216 **53.** $\frac{1}{4}$ **55.** $-32, -1$ **57.** $(4, 0), (9, 0)$ **59.** Ninguna **61.** $(-4, 0), \left(\frac{1}{5}, 0\right)$ **63.** $(-8, 0), (27, 0)$ **65.** $(-1, 0), (4, 0)$
67. $(\pm 2, 0), (\pm 5, 0)$ **69. a)** y **b)** $\frac{1}{5}, -\frac{1}{4}$ **71.** $-\frac{14}{5}, -\frac{8}{3}$ **73.** $2, \frac{1}{4}$ **75.** 2, 1 **77.** $-3, 1, 2, -4$ **79.** $\pm\sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{15}}{2}}$ **81.** Sea $u = x^2$
83. Sea $u = x^{-1}$ **85.** $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; inicia con $(x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1) = 0$
87. $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$; inicia con $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0$ **89.** No; las soluciones imaginarias siempre ocurren en parejas. **91.** $\frac{43}{60}$ **92.** 1 **93.** D: $\mathbb{R}$, R:$\{y \mid y \geq 0\}$ **94.** $2xy^2\sqrt[3]{2}$ **95.** $9\sqrt{3}$

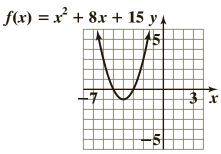
Conjunto de ejercicios 8.5

1. Parábola **3.** Abre hacia abajo **5.** $-\frac{b}{2a}$ **7.** Intersección con el eje y **9.** Derecha **11.** Arriba

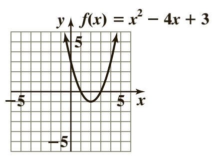
13. a) hacia arriba **b)** $(0, 8)$
c) $(-3, -1)$ **d)** $(-4, 0), (-2, 0)$
e)



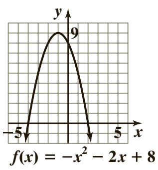
15. a) hacia arriba **b)** $(0, 15)$
c) $(-4, -1)$ **d)** $(-5, 0), (-3, 0)$
e)



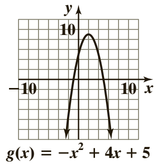
17. a) hacia arriba **b)** $(0, 3)$
c) $(2, -1)$ **d)** $(1, 0), (3, 0)$
e)



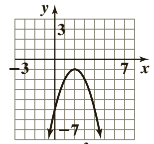
19. a) Hacia abajo **b)** $(0, 8)$ **c)** $(-1, 9)$ **d)** $(-4, 0), (2, 0)$ **e)**



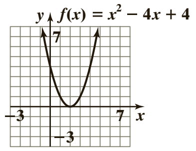
21. a) Hacia abajo **b)** $(0, 5)$ **c)** $(2, 9)$ **d)** $(-1, 0), (5, 0)$ **e)**



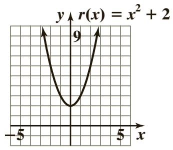
23. a) Hacia abajo **b)** $(0, -5)$ **c)** $(2, -1)$ **d)** No hay intersección con el eje x **e)**



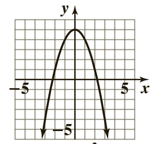
25. a) Hacia arriba **b)** $(0, 4)$ **c)** $(2, 0)$ **d)** $(2, 0)$ **e)**



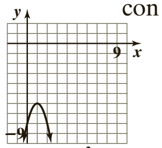
27. a) Hacia arriba **b)** $(0, 2)$ **c)** $(0, 2)$ **d)** No hay intersección con el eje x **e)**



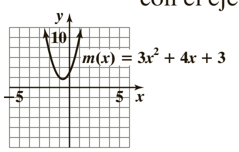
29. a) Hacia abajo **b)** $(0, 5)$ **c)** $(0, 5)$ **d)** $(-\sqrt{5}, 0), (\sqrt{5}, 0)$ **e)**



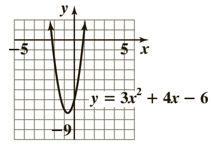
31. a) Hacia abajo **b)** $(0, -8)$ **c)** $(1, -6)$ **d)** No hay intersección con el eje x **e)**



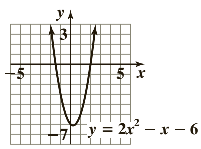
33. a) Hacia arriba **b)** $(0, 3)$ **c)** $\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$ **d)** No hay intersección con el eje x **e)**



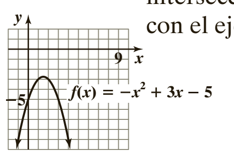
35. a) Hacia arriba **b)** $(0, -6)$ **c)** $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{22}{3}\right)$ **d)** $\left(\frac{-2 + \sqrt{22}}{3}, 0\right), \left(\frac{-2 - \sqrt{22}}{3}, 0\right)$ **e)**



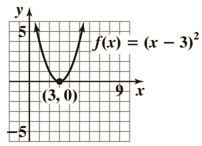
37. a) Hacia arriba **b)** $(0, -6)$ **c)** $\left(\frac{1}{4}, -\frac{49}{8}\right)$ **d)** $\left(-\frac{3}{2}, 0\right), (2, 0)$ **e)**



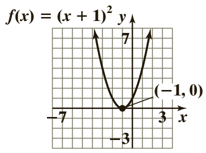
39. a) Hacia abajo **b)** $(0, -5)$ **c)** $\left(\frac{3}{2}, -\frac{11}{4}\right)$ **d)** No hay intersección con el eje x **e)**



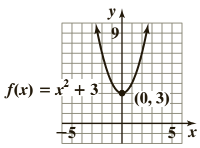
41.



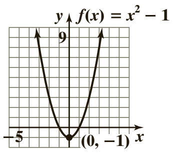
43.



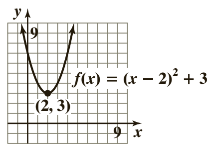
45.



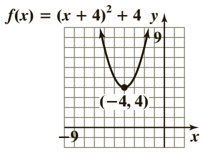
47.



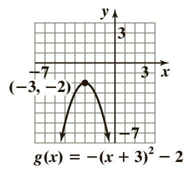
49.



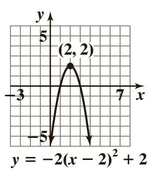
51.



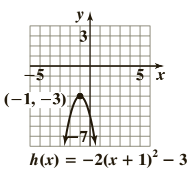
53.



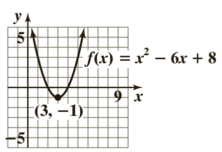
55.



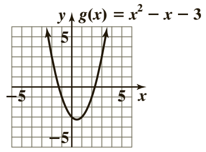
57.



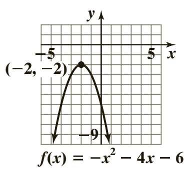
59. a) $f(x) = (x - 3)^2 - 1$ **b)**



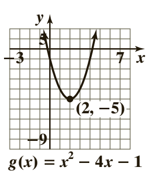
61. a) $g(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$ **b)**



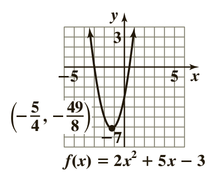
63. a) $f(x) = -(x + 2)^2 - 2$ **b)**



65. a) $g(x) = (x - 2)^2 - 5$ **b)**

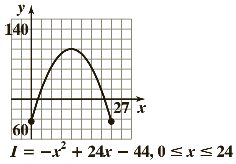


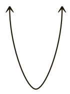
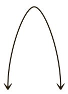
67. a) $f(x) = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$ **b)**

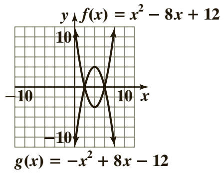


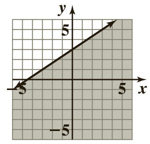
69. b) **71. d)** **73. a)** $x = 10.5$ **b)** $A = 240.25$ **75. a)** $x = 7$ **b)** $A = 121$ **77. a)** $n = 200$ **b)** $R = \$800$

79. 2010 **81.** 4 unidades **83.** 3 unidades **85.** $f(x) = 2(x - 3)^2 - 2$ **87.** $f(x) = -4\left(x + \frac{3}{5}\right)^2 - \sqrt{2}$

89. a) 

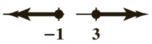
b) \$2 **c)** \$22 **d)** \$12 **e)** \$10, 000 **91. a)** 100 **b)** \$3800 **93. a)** 40.425 metros **b)** 2.5 segundos **c)** ≈5.37 segundos **95.** 400 pies cuadrados **97.** $-16, 4$ y -4 **99.** 900, 30 y 30 **101. a)** \$142, 400 **b)** 380 **103. a)**  **b)**  **105.** Valor mínimo; la gráfica abre hacia arriba

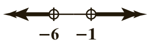
107. a) Las gráficas tendrán las mismas intersecciones con el eje x, pero $f(x) = x^2 - 8x + 12$ abrirá hacia arriba y $g(x) = -x^2 + 8x - 12$ abrirá hacia abajo. **b)** Sí, ambas en $(6, 0)$ y $(2, 0)$ **c)** No; vértice de $f(x)$ en $(4, -4)$, vértice de $g(x)$ en $(4, 4)$
d) 

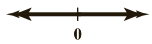
109. a) $f(t) = -16(t - 1.625)^2 + 45.25$ **b)** 45.25 pies, 1.625 segundos **c)** Iguales **111.** 200π pies cuadrados **112.** 

113. $(-2, 3, 2)$ **114.** -8 **115.** $\dfrac{x}{x + 6}$

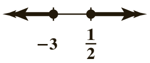
Conjunto de ejercicios 8.6

1. Solución **3.** Incluidos **5.** Abierto **7.** 

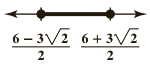
9. 

11. 

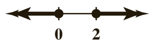
13. 

15. 

17. 

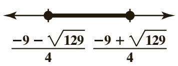
19. 

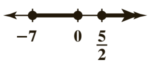
21. $(-\infty, -2] \cup [1, 3]$ **23.** $(-\infty, -4) \cup (-2, 3)$

25. $\left(-6, -\dfrac{5}{2}\right) \cup (2, \infty)$ **27.** $\left(-\dfrac{5}{3}, -1\right) \cup (3, \infty)$ **29.** $[-2, -2] \cup \left[\dfrac{8}{3}, \infty\right)$ **31.** $(-\infty, 0)$ **33.** 

35. 

37. 

39. 

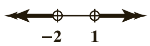
41. 

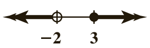
43. $\{x | -1 \le x < 3\}$ **45.** $\{x | -5 < x < 1\}$

47. $\{x | x \le -3 \text{ o } x > 2\}$ **49.** $\{a | -5 < a < 9\}$ **51.** $\{c | c < 4 \text{ o } c > 10\}$ **53.** $\{y | -4 < y \le -2\}$ **55.** $\left\{a \middle| a \le -2 \text{ o } a > \dfrac{1}{3}\right\}$

57. $\left\{x \middle| -\dfrac{4}{3} < x < \dfrac{1}{2}\right\}$ **59.** $\left\{x \middle| -\dfrac{8}{3} \le x < 2\right\}$ **61.** $(-\infty, -1) \cup (2, 4)$ **63.** $(-3, 2) \cup (5, \infty)$ **65.** $(-2, 1] \cup [7, \infty)$

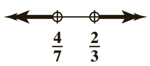
67. $(-\infty, -8) \cup [0, 3)$ **69.** $(-\infty, -4) \cup (1, 6]$ **71.** $\left[-\dfrac{5}{2}, 3\right] \cup (4, \infty)$ **73.** 

75. 

77. 

79. 

81. 

83. 

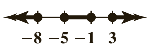
85. a) $x < 2$ o $x > 5$ **b)** $2 < x < 5$

87. a) $(4, \infty)$; y > 0 en este intervalo **b)** $(-\infty, 2) \cup (2, 4)$; y < 0 en este intervalo **89.** $x^2 + 2x - 8 > 0$ **91.** $\dfrac{x + 3}{x - 4} \ge 0$

93. Todos los números reales; para cualquier valor de x, la expresión es ≥ 0.

95. Todos los números reales excepto -2; para cualquier valor de x excepto -2, la expresión es ≥ 0.

97. No hay solución; la gráfica abre hacia arriba y no tiene intersecciones con el eje x, de modo que siempre está por arriba del eje x.

99. 

101. $x^2 - 3x > 0$; multiplique los factores que tienen valores frontera. **103.** $x^2 < 0$; x^2 siempre es ≥ 0.

105. $(-\infty, -3) \cup (-1, 1) \cup (3, \infty)$ **107.** $[-2, -1] \cup [2, \infty)$ **111.** 6 cuartos **112.** $-\dfrac{1}{2}$ **113.** $3r + 3s - 9t$ **114.** $\dfrac{x - 3}{x + 1}$ **115.** $38 - 9i$

Ejercicios de repaso del capítulo 8

1. 1, 9 **2.** $\dfrac{-1 \pm 2\sqrt{15}}{2}$ **3.** $-\dfrac{1}{3}, 1$ **4.** $\dfrac{5}{4}, -\dfrac{3}{4}$ **5.** 2, 6 **6.** 4, −8 **7.** $-1 \pm \sqrt{10}$

8. $-3 \pm \sqrt{21}$ **9.** $1 \pm 3i$ **10.** $2 \pm 2i\sqrt{7}$ **11. a)** $32 = (x + 1)(x + 5)$ **b)** 3 **12. a)** $63 = (x + 2)(x + 4)$ **b)** 5

13. 7, 8 **14.** ≈ 16.90 pies por ≈ 16.90 **15.** Dos soluciones reales **16.** No hay solución real **17.** Una solución real **18.** No hay solución real **19.** Una solución real **20.** Dos soluciones reales **21.** $-\dfrac{5}{2}, \dfrac{10}{3}$ **22.** 2, 9 **23.** 8, −5 **24.** $0, \dfrac{9}{7}$ **25.** $\dfrac{3}{2}, -\dfrac{5}{3}$ **26.** $\dfrac{1}{4}, -3$

27. $-4 \pm \sqrt{11}$ **28.** $-2 \pm 2\sqrt{3}$ **29.** $\dfrac{-2 \pm \sqrt{10}}{2}$ **30.** $\dfrac{3 \pm \sqrt{33}}{3}$ **31.** $\dfrac{1 \pm i\sqrt{51}}{2}$ **32.** $1 \pm i\sqrt{10}$ **33.** $\dfrac{5}{2}, -\dfrac{5}{3}$ **34.** $\dfrac{1}{4}, -\dfrac{3}{2}$

35. 10, −6 **36.** $\dfrac{2}{3}, -\dfrac{3}{2}$ **37.** $\dfrac{7 \pm \sqrt{89}}{10}$ **38.** $\dfrac{3 \pm 3\sqrt{3}}{2}$ **39.** $x^2 - 2x - 3 = 0$ **40.** $3x^2 + 4x - 4 = 0$ **41.** $x^2 - 11 = 0$

42. $x^2 - 6x + 13 = 0$ **43.** 8 pies por 12 pies **44.** $\sqrt{128} \approx 11.31$ **45.** 4% **46.** 7, 11 **47.** 8 pulgadas por 12 pulgadas **48.** \$540

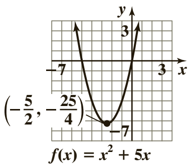
49. a) 10.12 pulgadas **b)** 11.77 pulgadas o 38.23 pulgadas **50. a)** 720 pies **b)** 7 segundos **51. a)** 40 mililitros **b)** 150°C

52. La mayor: ≈ 23.51 horas, la menor: ≈ 24.51 horas **53.** 50 millas por hora **54.** 1.6 millas por hora **55.** $l = 10$ unidades, $w = 8$ unidades **56.** 20 mesas **57.** $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ **58.** $t = \sqrt{\dfrac{c - h}{4.9}}$ **59.** $v_y = \sqrt{v^2 - v_x^2}$ **60.** $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2ad}$ **61.** $\pm 1, \pm 3$

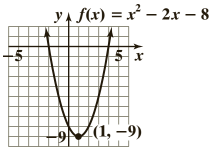
62. $\pm 4, \pm\sqrt{5}$ **63.** $\pm 2\sqrt{2}, \pm i\sqrt{3}$ **64.** $\frac{3}{2}, -\frac{1}{6}$ **65.** $\frac{1}{9}$ **66.** $\frac{27}{8}, 8$ **67.** $4, \frac{13}{8}$ **68.** $-\frac{1}{5}, -\frac{5}{2}$ **69.** $(\pm 1, 0), (\pm 9, 0)$ **70.** $\left(\frac{4}{25}, 0\right)$

71. Ninguno **72.** $(3 \pm \sqrt{17}, 0), (3 \pm \sqrt{6}, 0)$

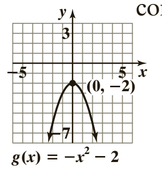
73. a) Hacia arriba **b)** $(0, 0)$ **c)** $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{25}{4}\right)$ **d)** $(0, 0), (-5, 0)$ **e)**



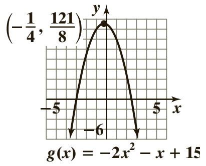
74. a) Hacia arriba **b)** $(0, -8)$ **c)** $(1, -9)$ **d)** $(-2, 0), (4, 0)$ **e)**



75. a) Hacia abajo **b)** $(0, -2)$ **c)** $(0, -2)$ **d)** No hay intersecciones con el eje x **e)**



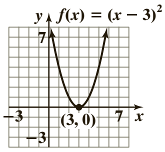
76. a) Hacia abajo **b)** $(0, 15)$ **c)** $\left(-\frac{1}{4}, \frac{121}{8}\right)$ **d)** $(-3, 0), \left(\frac{5}{2}, 0\right)$ **e)**



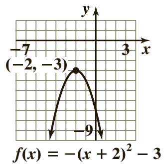
77. a) \$11 **b)** \$7600

78. a) 2.5 segundos **b)** 175 pies

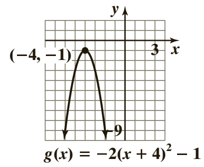
79.



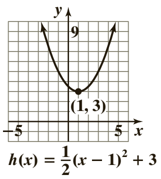
80.



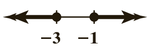
81.



82.

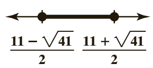


83.

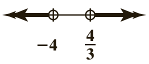


84.

85.

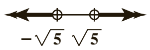


86.



87.

88.

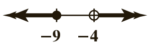


89. $\{x|x < -1 \text{ o } x > 5\}$ **90.** $\{x|-2 < x \leq 3\}$ **91.** $\{x|x < -3 \text{ o } x \geq 2\}$ **92.** $\left\{x \middle| -\frac{5}{3} < x < 6\right\}$

93. $\{x|-4 < x < -1 \text{ o } x > 2\}$ **94.** $\{x|x \leq 0 \text{ o } 3 \leq x \leq 6\}$ **95.** $\left[-\frac{4}{3}, 1\right] \cup [3, \infty)$ **96.** $(-\infty, -4) \cup (-2, 0)$

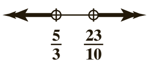
97. $(-2, 0) \cup (4, \infty)$ **98.** $(-\infty, -3) \cup (2, 8)$ **99.** $(-2, 3] \cup (7, \infty)$ **100.** $(-\infty, -3) \cup [0, 6]$

101.



102.

103.



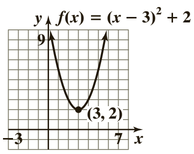
Prueba de práctica del capítulo 8

1. $3, -5$ [8.1] **2.** $3 \pm \sqrt{2}$ [8.1] **3.** $8, -2$ [8.2] **4.** $2 \pm i\sqrt{7}$ [8.2] **5.** $\frac{2}{3}, -1$ [8.1-8.2]

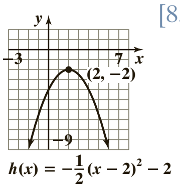
6. $\frac{-7 \pm \sqrt{33}}{2}$ [8.1-8.2] **7.** $5x^2 - 18x - 8 = 0$ [8.2] **8.** $v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$ [8.3] **9. a)** \$121, 200 **b)** ≈2712.57 pies cuadrados [8.1-8.3]

10. 50 mph [8.1-8.3] **11.** $\pm\frac{\sqrt{10}}{2}, \pm i\sqrt{10}$ [8.4] **12.** $\frac{343}{27}, -216$ [8.4] **13.** $\left(\frac{9}{16}, 0\right)$ [8.4]

14. [8.5]

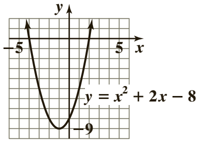


15. [8.5]

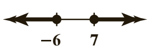


16. Dos soluciones reales [8.5]

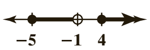
17. a) Hacia arriba **b)** $(0, -8)$ **c)** $(-1, -9)$ **d)** $(-4, 0), (2, 0)$ **e)** [8.5]



18. $2x^2 + 13x - 7 = 0$ [8.5] **19.** [8.6]



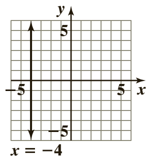
20. [8.6]



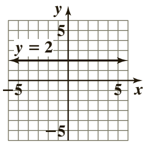
21. a) $\left[-\frac{5}{2}, -2\right)$ **b)** $\left\{x \middle| -\frac{5}{2} \leq x < -2\right\}$ [8.6] **22.** $w = 5$ pies, $l = 13$ pies [8.5] **23.** 6 segundos [8.5] **24. a)** 20 **b)** \$ 490 [8.5] **25.** 30 [8.5]

Ejercicios de repaso acumulados

1. 13 [1.4] **2.** 18 [1.4] **3.** 2.54×10^6 [1.6] **4.** $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right\}$ [2.6] **5.** $3x - 7$ [2.1]
6. Todos los números reales, $\mathbb{R}$ [2.1] **7.** $(-12, 8)$ [2.5] **8.** $m = -\frac{9}{7}, \left(0, \frac{15}{7}\right)$ [3.4] **9.** 1500 [3.2] **10.** $y = x - 1$ [3.5]
11. a) No, las gráficas no pasan la prueba de la recta vertical **b)** Dominio: $\{x | x \geq -2\}$, Rango: $\mathbb{R}$ [3.2]
12. a)



b)

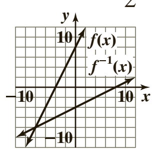


[3.3] **13.** 160 [4.5] **14.** $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ [4.1] **15.** $(x + 7)(x + 9)$ [5.5]
16. a) $a^2 + 2ab + b^2$ **b)** $(a + b)^2$ [5.7] **17.** $\frac{2(x - 4)}{(x - 3)(x - 5)}$ [6.2] **18.** $\frac{12}{5}$ [6.4] **19.** 11.52 watts [6.6] **20.** $-\frac{14}{29} - \frac{23}{29}i$ [7.7]

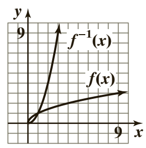
Capítulo 9

Conjunto de ejercicios 9.1

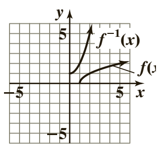
1. Composición **3.** Vertical **5.** Inverso **7.** Dominio **9. a)** $2x + 1$ **b)** 9 **c)** $2x + 5$ **d)** 13
11. a) $x^2 + x - 1$ **b)** 19 **c)** $x^2 + 7x + 8$ **d)** 52 **13. a)** $\frac{1}{2x + 3}$ **b)** $\frac{1}{11}$ **c)** $\frac{2}{x} + 3$ **d)** $3\frac{1}{2}$ **15. a)** $\frac{9}{x} + 1$ **b)** $3\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{3}{3x + 1}$ **d)** $\frac{3}{13}$
17. a) $x^4 + 10x^2 + 26$ **b)** 442 **c)** $x^4 + 2x^2 + 6$ **d)** 294 **19. a)** $\sqrt{x + 5} - 4$ **b)** -1 **c)** $\sqrt{x + 1}$ **d)** $\sqrt{5}$ **21.** No **23.** Sí
25. Sí **27.** No **29.** Sí **31.** No **33.** No **35.** Sí **37.** Sí **39.** No **41.** Sí **43.** $f(x)$: Dominio: $\{-2, -1, 2, 4, 8\}$, Rango: $\{0, 4, 6, 7, 9\}$; $f^{-1}(x)$: Dominio $\{0, 4, 6, 7, 9\}$, Rango: $\{-2, -1, 2, 4, 8\}$ **45.** $f(x)$: Dominio: $\{-1, 1, 2, 4\}$, Rango: $\{-3, -1, 0, 2\}$; $f^{-1}(x)$: Dominio $\{-3, -1, 0, 2\}$, Rango: $\{-1, 1, 2, 4\}$; **47.** $f(x)$: Dominio: $\{x | x \geq 2\}$, Rango: $\{y | y \geq 0\}$; $f^{-1}(x)$: Dominio $\{x | x \geq 0\}$, Rango: $\{y | y \geq 2\}$ **49. a)** Sí **b)** $f^{-1}(x) = x - 3$ **51. a)** Sí **b)** $h^{-1}(x) = \frac{x}{4}$ **53. a)** No
55. a) No **57. a)** Sí **b)** $g^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ **59. a)** No **61. a)** Sí **b)** $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 6}$ **63. a)** Sí **b)** $g^{-1}(x) = x^2 - 2, x \geq 0$
65. a) Sí **b)** $h^{-1}(x) = \sqrt{x + 4}, x \geq -4$
67. a) $f^{-1}(x) = \frac{x - 8}{2}$ **b)**



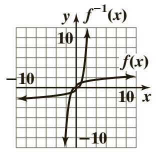
69. a) $f^{-1}(x) = x^2, x \geq 0$ **b)**



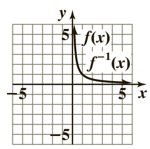
71. a) $f^{-1}(x) = x^2 + 1, x \geq 0$ **b)**



73. a) $f^{-1}(x) = x^3$ **b)**



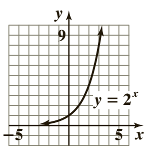
75. a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}, x > 0$ **b)**



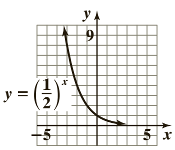
77. $(f \circ f^{-1})(x) = x, (f^{-1} \circ f)(x) = x$ **79.** $(f \circ f^{-1})(x) = x, (f^{-1} \circ f)(x) = x$ **81.** $(f \circ f^{-1})(x) = x, (f^{-1} \circ f)(x) = x$
83. $(f \circ f^{-1})(x) = x, (f^{-1} \circ f)(x) = x$ **85.** $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$; x está en pies y $f^{-1}(x)$ está en yardas **87.** $f^{-1}(x) = \frac{9}{5}x + 32$.
89. $(f \circ g)(x) = 453.6x$, x está en libras, $(f \circ g)(x)$ está en gramos **91.** $(f \circ g)(x) = 0.915x$, x está en yardas, $(f \circ g)(x)$ está en metros **93.** No, la composición de funciones no es conmutativa. Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 1$. Entonces $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 1$, mientras que $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$. **95. a)** $(f \circ g)(x) = x$; $(g \circ f)(x) = x$ **b)** El dominio es $\mathbb{R}$, para todas ellas.
97. El rango de $f^{-1}(x)$ es el dominio de $f(x)$. **99. a)** 6 pies **b)** $36\pi \approx 113.10$ pies cuadrados **c)** $A(t)\,4\pi t^2$ **d)** $36\pi \approx 113.10$ pies cuadrados **e)** Las respuestas deben coincidir **102.** $\frac{81}{16}$ **103.** $2x + 3y = 10$ **104.** $\frac{18 - 12x}{x^3}$ **105.** $p = \frac{fq}{q - f}$ **106.** $-1 \pm \sqrt{11}$

Conjunto de ejercicios 9.2

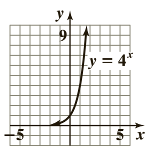
1. Exponente **3.** Elevar **5.** Principal
7.



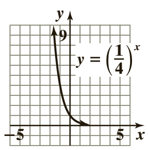
9.



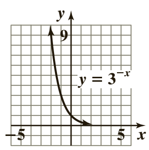
11.



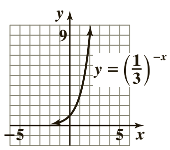
13.

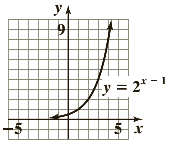


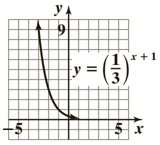
15.

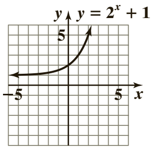


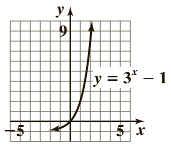
17.



19. 

21. 

23. 

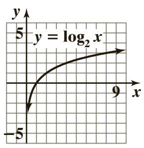
25. 

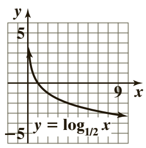
27. a) $\approx$36.232 millones **b)** $\approx$187.846 millones

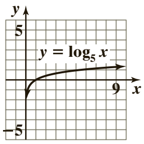
29. \$512 **31.** 45 **33.** $\approx$ \$6344.93 **35.** \$6166.13 **37.** \$3147.06 **39.** $\approx$ 10.6 gramos **41. a)** 5 gramos **b)** $\approx 7.28 \times 10^{-11}$ gramos **43. a)** 2400 **b)** $\approx$ 4977 **45.** $\approx$ \$10,850.92 **47.** $\approx$ 8.83 kilómetros **49. a)** \$13,047 miles **b)** \$282,727 miles **51. a)** 14 años **b)** 10 años **c)** \$25 **d)** Lo incrementa **53. a)** Conforme x aumenta, y disminuye. **b)** No, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ nunca tomará valor de 0. **c)** No, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ nunca puede ser negativo 0. **55. a)** Igual; (0, 1). **b)** $y = 3^x$ será más pronunciada que con $y = 2^x$ para $x > 0$. **57. a)** Es una recta horizontal que pasa por $y = 1$. **b)** Sí **c)** No, no es una función uno a uno. **59.** $y = a^x - k$ es $y = a^x$ desplazada k unidades hacia abajo. **61.** El gráfico de $y = a^{x+2}$ es la gráfica de $y = a^x$ desplazada 2 unidades a la izquierda. **63. a)** \$16,384 **b)** \$524,288 **c)** 2^{2n-1} **d)** $\$2^{29} = \$536,870,912$ **e)** $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{29}$ **65. a)** $-6.2x^6y^2 + 9.2x^5y^2 + 2.3x^4y$ **b)** 8 **c)** -6.2 **66.** $x^3 + 3x^2 - 6x + 20$ **67.** $|a - 4|$ **68.** $\dfrac{2xy\sqrt[4]{xy^2z^3}}{z}$

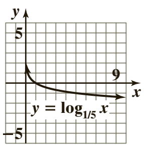
Conjunto de ejercicios 9.3

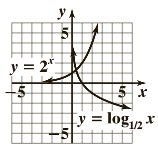
1. Exponente **3.** Base **5.** Dominio **7.** $\log_5 5 = 2$ **9.** $\log_3 9 = 2$ **11.** $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$ **13.** $\log_8 2 = \frac{1}{3}$ **15.** $\log_{1/2} \frac{1}{32} = 5$ **17.** $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ **19.** $\log_4 \frac{1}{64} = -3$ **21.** $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$ **23.** $\log_8 \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$ **25.** $\log_{81} \frac{1}{3} = -\frac{1}{4}$ **27.** $\log_{10} 7 = 0.8451$ **29.** $\log_e 7.3891 = 2$ **31.** $\log_a b = n$ **33.** $3^2 = 9$ **35.** $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ **37.** $5^{-2} = \frac{1}{25}$ **39.** $49^{1/2} = 7$ **41.** $9^{-2} = \frac{1}{81}$ **43.** $10^{-3} = \frac{1}{1000}$ **45.** $6^3 = 216$ **47.** $10^{-0.2076} = 0.62$ **49.** $e^{1.8749} = 6.52$ **51.** $w^{-p} = s$ **53.** 3 **55.** 5 **57.** 27 **59.** -4 **61.** $\frac{1}{64}$ **63.** 3 **65.** $\frac{1}{2}$ **67.** 0 **69.** 2 **71.** -2 **73.** 4 **75.** 4 **77.** -4 **79.** -2 **81.** $\frac{1}{2}$ **83.** 1 **85.** $\frac{1}{2}$

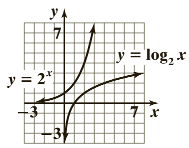
87. 

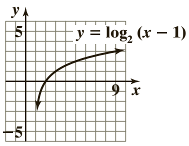
89. 

91. 

93. 

95. 

97. 

99. 10,000,000 **101.** 10,000 **103.** 

105. a) $a > 0$ y $a \neq 1$ **b)** $\{x|x > 0\}$ **c)** $\mathbb{R}$

107. $\left(\frac{1}{27}, -3\right)\left(\frac{1}{9}, -2\right), \left(\frac{1}{3}, -1\right)$ (1, 0), (3, 1), (9, 2), y (27, 3); las funciones $f(x) = a^x$ y $g(x) = \log_a x$ son inversas. **109.** $f^{-1}(x)\ \log_5 x$ **111.** 3 y 4, ya que 62 se encuentra entre $3^3 = 27$ y $3^4 = 81$ **113.** 2 y 3, ya que 425 se encuentra entre $10^2 = 100$ y $10^3 = 1000$. **115.** 2^x; observa que para $x = 10$, $2^x = 1024$ mientras que $\log_{10} x = 1$ **117.** $2x(x + 3)(x - 6)$ **118.** $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$ **119.** $4(2x + 3)(5x - 1)$ **120.** $(3rs - 1)(2rs + 1)$

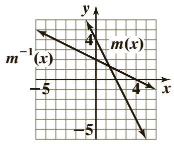
Conjunto de ejercicios 9.4

1. Positivo **3.** Suma **5.** Veces **7.** $\log_2 3 + \log_2 5$ **9.** $\log_8 7 + \log_8 (x + 3)$ **11.** $\log_2 27 - \log_2 11$ **13.** $\frac{1}{2}\log_{10} x - \log_{10}(x - 9)$ **15.** $7\log_6 x$ **17.** $5\log_4(r + 7)$ **19.** $\frac{3}{2}\log_4 a - \frac{1}{2}\log_4(a + 2)$ **21.** $6\log_3 d - 4\log_3(a - 8)$ **23.** $\log_8(y + 4) - 2\log_8 y$ **25.** $\log_{10} 9 + \log_{10} m - \log_{10} 8 - \log_{10} n$ **27.** $\log_2 21$ **29.** $\log_2 \frac{9}{5}$ **31.** $\log_4 64$ **33.** $\log_{10} x(x + 3)$ **35.** $\log_9 \frac{z^2}{z - 2}$ **37.** $\log_5 \left(\frac{p}{3}\right)^4$ **39.** $\log_2 \frac{n(n + 4)}{n - 3}$ **41.** $\log_5 \sqrt{\frac{x - 8}{x}}$ **43.** $\log_9 \frac{16\sqrt[3]{r} - 6}{\sqrt{r}}$ **45.** $\log_6 \frac{81}{(x + 3)^2x^4}$ **47.** 1 **49.** -0.3980 **51.** 1.3980 **53.** 2 **55.** 7 **57.** 3 **59.** 25 **61.** $\log_a(x - 2)$ **63.** $\frac{1}{4}\log_2 x + \frac{1}{4}\log_2 y + \frac{1}{3}\log_2 a - \frac{1}{5}\log_2(a - b)$ **65.** 0.8640 **67.** 0.1080 **69.** 0.7000 **71.** No, no hay relación entre $\log_{10}(x + y)$ y $\log_{10} xy$ o $\log_{10}\left(\frac{x}{y}\right)$ **73.** Sí, es una ampliación de la propiedad 1. **75.** Sí, $\log_a(x^2 + 8x + 16) = \log_a(x + 4)$ **77.** Sí **79.** $\log_a \frac{x}{y} = \log_a\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = \log_a x + \log_a \frac{1}{y}$ **82. a)** $\{x|x > 40\}$ **b)** $(40, \infty)$ **83. a)** $a^2 - 4c^2b)(a + 2c)(a - 2c)$ **84.** 3 **85.** $-26 - 7i$ **86.** 49

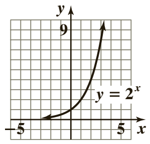
Prueba de mitad de capítulo

1. a) En $f(x)$, reemplaza x por $g(x)$ **b)** $6x + 18$ [9.1] **2. a)** $\left(\frac{6}{x}\right)^2 + 5$ o $\frac{36}{x^2} + 5$ **b)** 9 **c)** $\frac{6}{x^2 + 5}$ **d)** $\frac{3}{7}$ [9.1] **3. a)** Las respuestas variarán **b)** No [9.1] **4. a)** Sí **b)** $\{(2, -3), (3, 2), (1, 5), (8, 6)\}$ [9.1] **5. a)** Sí **b)** $p^{-1}(x) = 3x + 15$ [9.1] **6. a)** Sí **b)** $k^{-1}(x) = x^2 + 4x \geq 0$ [9.1]

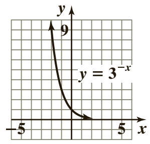
7. $m^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ [9.1]



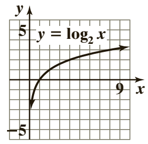
8.



[9.2] **9.**



[9.2] **10.**



[9.3]

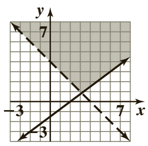
11. a) 10 **b)** 320 [9.3] **12.** $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$ [9.3] **13.** $2^{-6} = \frac{1}{64}$ [9.3] **14.** 3 [9.3] **15.** 2 [9.3] **16.** 4 [9.3] **17.** $2 \log_9 x + \log_9 (x - 5)$ [9.4] **18.** $\log_5 7 + \log_5 m - \frac{1}{2}\log_5 n$ [9.4] **19.** $\log_2 \frac{x^3(x + 7)}{(x + 1)^4}$ [9.4] **20.** $\log_7 \sqrt{\frac{x + 2}{x}}$ [9.4]

Conjunto de ejercicios 9.5

1. Común **3.** 10^y **5.** 0 **7.** −1 **9.** −2 **11.** −3 **13.** 1 y 2 **15.** 4 y 5 **17.** −2 y −1 **19.** 2 y 3 **21.** 0 y 1 **23.** −2 y −1 **25.** 1.9345 **27.** 4.2833 **29.** −1.2125 **31.** 2.0004 **33.** 0.5740 **35.** −1.7620 **37.** 3.5514 **39.** −1.1385 **41.** 2.3856 **43.** −2.2277 **45.** −2.0088 **47.** 1.1901 **49.** 1.6357 **51.** 42,491.2982 **53.** 0.0196 **55.** 1.0023 **57.** 578.7620 **59.** 0.0097 **61.** 100 **63.** 2408.2413 **65.** 13,832.4784 **67.** 0.0871 **69.** 0.2389 **71.** 0.7489 **73.** 7 **75.** 7 **77.** 20.8 **79.** 41.5 **81.** 2511.8864 **83.** 501,187.2336 **85. a)** ≈31.62 kilómetros **b)** ≈0.50 kilómetros **c)** ≈14.68 **87. a)** ≈72% **b)** ≈15% **89.** ≈6310 veces más intenso **91. a)** $\approx 6.31 \times 10^{20}$ **b)** ≈2.19 **93.** ≈6.2 **95.** No; $10^2 = 100$ y como $462 > 100$, log 462 debe ser mayor a 2. **97.** No; $10^0 = 1$ y $10^{-1} = 0.1$ y como $1 > 0.163 > 0.1$, log 0.163 debe ser entre 0 y −1. **99.** No; $\log \frac{y}{4x} = \log y - \log 4 - \log x$ **101.** $I = 10^R$ **103.** $t = 10^{\left(\frac{26-R}{41.9}\right)} - 1$ **106.** 50 millas por hora, 55 millas por hora **107.** (2, −3) **108.** 0, −4, 3 **109.** $|3x^2 - y|$ **110.** $(-\infty, -4) \cup [2, 5]$

Conjunto de ejercicios 9.6

1. Base **3.** Extraña **5.** Producto **7.** 3 **9.** 4 **11.** $\frac{1}{2}$ **13.** 2 **15.** $-\frac{1}{3}$ **17.** 4 **19.** 3 **21.** 3 **23.** 2.01 **25.** 3.56 **27.** 5.59 **29.** 6.34 **31.** 6 **33.** 5 **35.** $\frac{1}{16}$ **37.** 100 **39.** −1 **41.** −6, 4 **43.** 0, −8 **45.** 92 **47.** $\frac{4}{5}$ **49.** $\frac{3}{2}$ **51.** 4 **53.** 2 **55.** 0.87 **57.** 30 **59.** 5 **61.** 4 **63.** 2 **67.** 9 **69.** ≈3.47 horas **71.** ≈3.19 años **73.** ≈17.07 años **75.** ≈11.81 años **77.** ≈$7112.09 **79.** ≈19.36 **81. a)** 1,000,000,000,000 veces mayor **b)** 10,000,000 veces mayor **83.** 8 **85.** $x = 1$ y $x = 2$ **87.** (3, 1) **89.** (54, 46) **91.** 2.8 **93.** Sin solución **95.** log (−2) no es un número real **97.** La caja es mayor por ≈7.73 pies cúbicos **98.** −4 **99.**



100. $\frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{x - y}$ **101.** $c = \sqrt{\frac{E}{m}}$ **102.** $f(x) = 2(x - 3)^2 - 5$

Conjunto de ejercicios 9.7

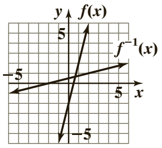
1. Base **3.** Exponencial **5.** Cambio **7.** Natural **9.** Crecimiento **11.** 3.2958 **13.** −0.8795 **15.** 3.3201 **17.** 0.5712 **19.** 4.95 **21.** 0.0578 **23.** 4.5850 **25.** −2.8577 **27.** 4.3923 **29.** 1.7297 **31.** 2.7380 **33.** 2.9135 **35.** −0.4784 **37.** 4 **39.** 1 **41.** 4 **43.** 6 **45.** $P = 4757.5673$ **47.** $P_0 = 224.0845$ **49.** $t = 0.7847$ **51.** $k = 0.2310$ **53.** $k = -0.2888$ **55.** $A = 4719.7672$ **57.** $V_0 = \frac{V}{e^{kt}}$ **59.** $t = \frac{\ln P - \ln 150}{7}$ **61.** $k = \frac{\ln A - \ln A_0}{t}$ **63.** $y = xe^{2.3}$ **65.** $y = (x + 6)e^5$ **67. a)** ≈$5637.48 **b)** ≈11.55 años **69. a)** ≈$2818.74 **b)** ≈17.33 años **71.** ≈39.98 gramos **73. a)** ≈86.47% **b)** ≈34.66 días **75. a)** ≈5.15 pies por segundo **b)** ≈5.96 pies por segundo **77.** ≈$526,911,558,800,000 **79. a)** ≈7.26 mil millones de personas **b)** ≈57.76 años **81. a)** ≈1.39 mil millones de personas **b)** ≈115.52 años **83. a)** ≈32.43 pulgadas **b)** ≈35.46 pulgadas **85. a)** ≈999.7 gramos **b)** 231,049 años **87. a)** ≈6626.62 años **b)** ≈5752.26 años **89.** ≈$6791.91 **91. a)** Estroncio 90, ya que tiene una mayor velocidad de decaimiento **b)** ≈31.66% de la original **93.** $v_0 = \frac{e^{xk} - 1}{kt}$ **95.** $i = Ie^{-t/RC}$ **97. a)** 0 **b)** $\frac{11}{40}$ o 0.275 **98.** 240 niños, 310 adultos **99.** $-9x^2y^3 + 12x^2y^2 - 3xy^2 + 4xy$ **100.** −20, 20 **101.** $x + x^2$

Ejercicios de repaso del capítulo 9

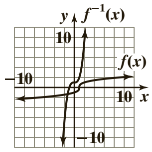
1. $4x^2 - 26x + 44$ **2.** 2 **3.** $2x^2 - 6x + 3$ **4.** 39 **5.** $6\sqrt{x - 3} + 7, x \geq 3$ **6.** $\sqrt{6x + 4}, x \geq -\frac{2}{3}$ **7.** Uno a uno **8.** No es uno a uno **9.** Uno a uno **10.** No es uno a uno **11.** Uno a uno **12.** No es uno a uno **13.** $f(x)$: Dominio: $\{-4, -1, 5, 6\}$, Rango: $\{-3, 2, 3, 8\}$; $f^{-1}(x)$: Dominio: $\{-3, 2, 3, 8\}$, Rango: $\{-4, -1, 5, 6\}$

14. $f(x)$: Dominio: $\{x \mid x \geq 0\}$, Rango: $\{y \mid y \geq 4\}$; $f^{-1}(x)$: Dominio: $\{x \mid x \geq 4\}$, Rango: $\{y \mid y \geq 0\}$

15. $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{4}$;

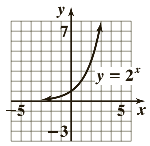


16. $f^{-1}(x) = x^3 + 1$;

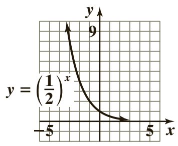


17. $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{36}$, x son las pulgadas, $f^{-1}(x)$ son las yardas.

18. $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{4}$, x son cuartos, $f^{-1}(x)$ son galones **19.**



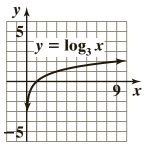
20.



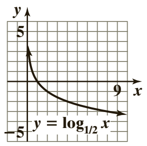
21. $\approx \$1830.29$ **22.** $\log_8 64 = 2$

23. $\log_{81} 3 = \dfrac{1}{4}$ **24.** $\log_5 \dfrac{1}{125} = -3$ **25.** $2^5 = 32$ **26.** $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{16}$ **27.** $6^{-2} = \dfrac{1}{36}$ **28.** $4^3 = x$; 64 **29.** $a^4 = 81$; 3

30. $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-3} = x$; 125 **31.**



32.



33. $8 \log_5 17$ **34.** $\dfrac{1}{2}\log_3(x-9)$ **35.** $\log 6 + \log(a+1) - \log 19$

36. $4\log x - \log 7 - 5\log(2x+3)$ **37.** $\log \dfrac{x^5}{(x+1)^3}$ **38.** $\log \dfrac{(2x)^4}{y}$ **39.** $\ln \dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{x}{x+2}}}{2}$ **40.** $\ln \dfrac{x^3\sqrt{x+1}}{(x+4)^6}$ **41.** 10 **42.** 5 **43.** 121

44. 3 **45.** 2.9133 **46.** -3.5720 **47.** 1442.1154 **48.** 0.0007 **49.** 11,561.1224 **50.** 0.0594 **51.** 5 **52.** 9 **53.** 22.4 **54.** 9.4

55. 4 **56.** $-\dfrac{1}{2}$ **57.** 2 **58.** 5 **59.** 2.5818 **60.** 5.9681 **61.** 1.3529 **62.** 2.2402 **63.** 26 **64.** 5 **65.** 1 **66.** 3 **67.** $t \approx 1.1552$

68. $A_0 \approx 352.5421$ **69.** $t = \dfrac{\ln A - \ln A_0}{k}$ **70.** $k = \dfrac{\ln 0.25}{t}$ **71.** $y = xe^6$ **72.** $y = 3x + 23$ **73.** 7.6147 **74.** 3.5046

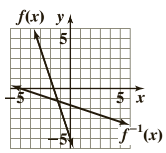
75. $\approx \$19{,}126.18$ **76.** ≈ 17.3 años **77. a)** ≈ 92.88 minutos **b)** ≈ 118.14 minutos 78. ≈ 10.32 libras por pulgada cuadrada
79. a) 72 **b)** ≈ 61.2 **c)** ≈ 5 meses

Prueba de práctica del capítulo 9

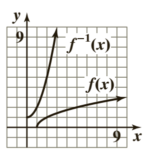
1. a) Sí **b)** $\{(2, 4), (8, -3), (3, -1), (-7, 6)\}$ [9.1] **2. a)** $x^2 + 4x + 1$ **b)** 61 [9.1]

3. a) $\sqrt{x^2+3}$, **b)** $2\sqrt{13}$ [9.1] **4. a)** $f^{-1}(x) = -\dfrac{1}{3}(x+5)$ [9.1] **5. a)** $f^{-1}(x) = x^2 + 1, x \geq 0$

b)

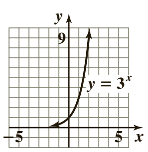


b)

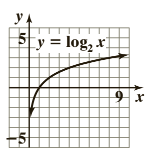


[9.1]

6. $\{x \mid x > 0\}$ [9.3] **7.** -4 [9.4] **8.**



[9.2] **9.**



[9.3] **10.** $\log_2 \dfrac{1}{32} = -5$ [9.4] **11.** $5^3 = 125$ [9.3]

12. $2^4 = x + 3$, 13 [9.3] **13.** $64^y = 16$, $\dfrac{2}{3}$ [9.3] **14.** $3\log_2 x + \log_2(x-4) - \log_2(x+2)$ [9.4] **15.** $\log_6 \dfrac{(x-4)^7(x+3)^2}{\sqrt{x}}$ [9.4]

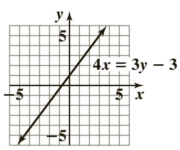
16. 5 [9.4] **17. a)** 3.6646 **b)** -2.6708 [9.5] **18.** ≈ 2.68 [9.6] **19.** 3 [9.6] **20.** $\dfrac{17}{5}$ [9.6] **21.** 16.2810 [9.7] **22.** 2.0588 [9.7]

23. 30.5430 [9.7] **24.** $\approx \$5211.02$ [9.7] **25.** ≈ 3364.86 años de antigüedad [9.7]

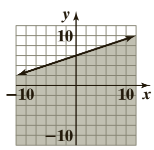
Prueba de repaso acumulada

1. $\dfrac{12xy^5}{z^4}$ [1.5] **2.** 40 [1.4] **3.** 7.5% [2.3] **4.** $\left\{x \,\middle|\, 2 \leq x < \dfrac{15}{2}\right\}$, $\left[2, \dfrac{15}{2}\right)$ [2.5]

5. $y = \dfrac{2x-8}{3}$ [2.2] **6.** 0 [3.2] **7.** $m = 2$, $y = 2x + 3$ [3.4] **8.**

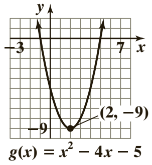


[3.4] **9.**



[3.7] **10.** (10, 24) [4.1]

11. $x^2 + 2x + 3 + \dfrac{6}{x+1}$ [5.3] **12.** $(x - y + 8)(x - y - 8)$ [5.6] **13.** $1, -2$ [8.1] **14.** -3 [6.4] **15.** $d = \dfrac{a_n - a_1}{n - 1}$ [6.4]
16. 6.25 [6.6] **17.** $(12x + 1)\sqrt{5x}$ [7.4] **18.** 8 [7.6] **19.** $0, \pm\sqrt{7}$ [8.4] **20. a)** $g(x) = (x - 2)^2 - 9$ **b)**



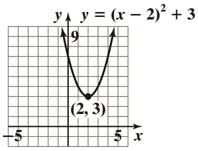
[8.5]

Capítulo 10

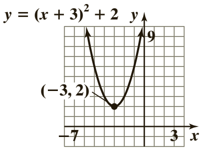
Conjunto de ejercicios 10.1

1. Punto medio **3.** Parábola **5.** (h, k)

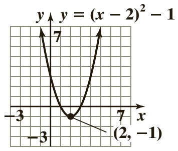
7.



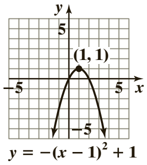
9.



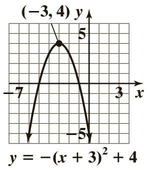
11.



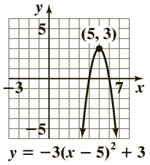
13.



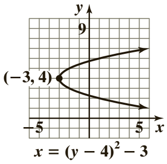
15.



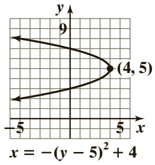
17.



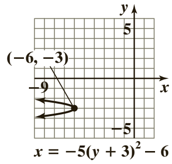
19.



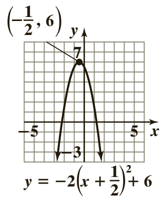
21.



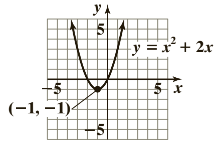
23.



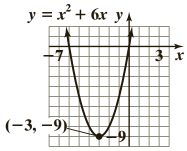
25.



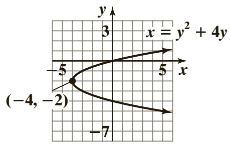
27. a) $y = (x + 1)^2 - 1$
b)



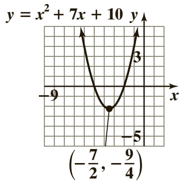
29. a) $y = (x + 3)^2 - 9$
b)



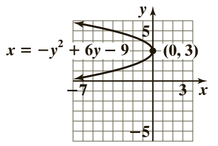
31. a) $x = (y + 2)^2 - 4$
b)



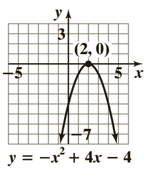
33. a) $y = \left(x + \dfrac{7}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4}$
b)



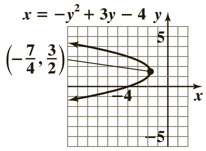
35. a) $x = -(y - 3)^2$
b)



37. a) $y = -(x - 2)^2$
b)

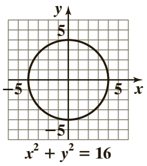


39. a) $x = -\left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{7}{4}$
b)

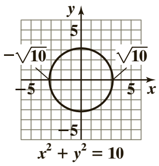


41. 5 **43.** 9 **45.** 13 **47.** $\sqrt{90} \approx 9.49$
49. $\sqrt{\dfrac{125}{4}} \approx 5.59$ **51.** $\sqrt{34.33} \approx 5.86$ **53.** $\sqrt{10} \approx 3.16$
55. $(3, 5)$ **57.** $(0, 0)$ **59.** $\left(\dfrac{3}{2}, 5\right)$ **61.** $\left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{7}{4}\right)$
63. $\left(\dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$ **65.** $x^2 + y^2 = 25$ **67.** $(x - 2)^2 + y^2 = 64$
69. $x^2 + (y - 5)^2 = 4$ **71.** $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$ **73.** $(x - 7)^2 + (y + 6)^2 = 144$ **75.** $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$
77. $x^2 + y^2 = 16$ **79.** $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$

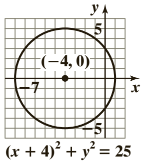
81.



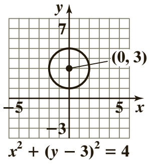
83.



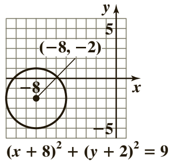
85.



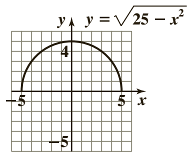
87.



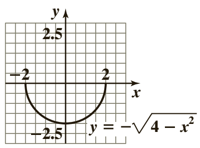
89.



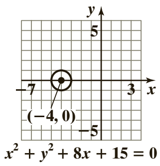
91.



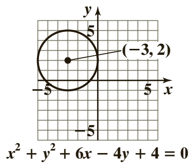
93.



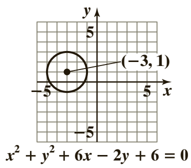
95. a) $(x + 4)^2 + y^2 = 1^2$
b)



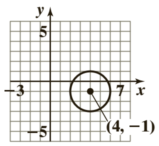
97. a) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$
b)



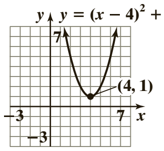
99. a) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$
b)



101. a) $(x-4)^2+(y+1)^2=2^2$ **b)**



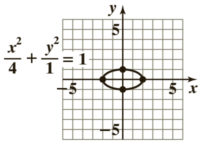
103. $25\pi \approx 78.5$ unidades cuadradas **105.** Intersección con el eje x: $(-7, 0)$, intersección con el eje y: $(0, -1)$, $(0, 7)$ **107.** Intersección con el eje x: $(24, 0)$; no hay intersecciones con el eje y. **109.** No, diferentes segmentos de recta pueden tener el mismo punto medio. **111.** 10 **113.** $(x+6)^2+(y-2)^2=4$ **115. a)** $2\sqrt{2}$ **b)** $(7, 6)$ **c)** $(x-7)^2+(y-6)^2=8$ **117.** 4, 0; una parábola que abre hacia arriba o abre hacia abajo y una parábola que abre hacia la derecha o hacia la izquierda pueden dibujarse de forma que tengan un máximo de 4 intersecciones o un mínimo de 0 intersecciones. **119. a)** 13.6 pies **b)** 81.8 pies **c)** $x^2+(y-81.8)^2=4651.24$ **121. a)** $x^2+y^2=16$ **b)** $(x-2)^2+y^2=4$ **c)** $(x+2)^2+y^2=4$ **d)** 8π unidades cuadradas **123.** 48π unidades cuadradas **125.** Sí; D: $\mathbb{R}$, R: $\{y \mid y \geq k\}$ **127.** El mismo vértice; la primer gráfica abre hacia arriba y la segunda abre hacia abajo. **129.** No **131.** No **133.** No **136.** $\dfrac{y}{3x}$ **137.** $(0, 7)$ **138.** 128 **139. a)** 1. a^2, 2. ab, 3. ab, 4. b^2 **b)** $(a+b)^2$ **140.**



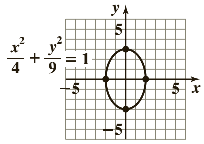
Conjunto de ejercicios 10.2

1. $(0, 0)$ **3.** Elipse **5.** Intersección de x **7.** Mayor **9.** Divide

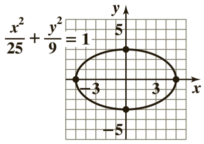
11.



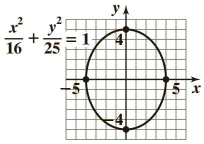
13.



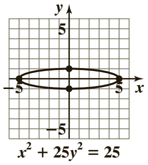
15.



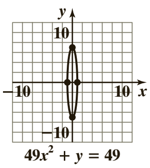
17.



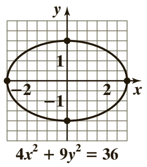
19.



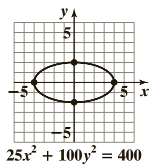
21.



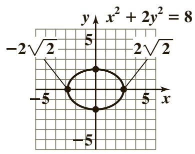
23.



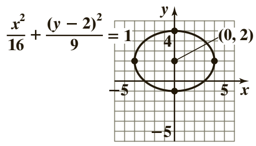
25.



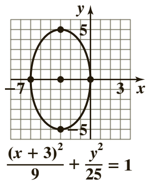
27.



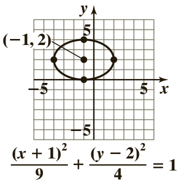
29.



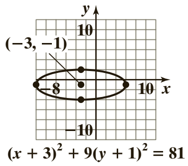
31.



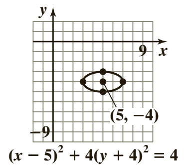
33.



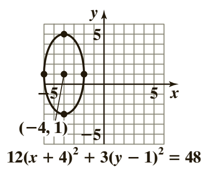
35.



37.



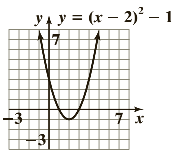
39.



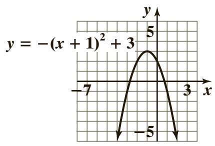
41. $2\pi \approx 6.3$ unidades cuadradas **43.** $20\pi \approx 62.8$ unidades cuadradas **45.** $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ **47.** $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ **49.** $\dfrac{(x+3)^2}{36}+\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$; $(-3, -2)$ **51.** 69.5 pies **53. a)** $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{576}=1$ **b)** $240\pi \approx 753.98$ pies cuadrados **c)** ≈ 376.99 pies cuadrados **55.** $\sqrt{5} \approx 2.24$ pies en ambas direcciones, desde el centro de la elipse, a lo largo del eje mayor (principal). **57.** Las respuestas variarán. **59.** Las respuestas variarán. **61.** Si $a=b$, se obtiene la fórmula de la circunferencia. **63.** No **65.** Se vuelve más circular. Cuando $a=b$, la gráfica es un círculo. **67.** 2 **69.** $\dfrac{(x-4)^2}{49}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$ **71.** $l=\dfrac{2S-nf}{n}$ **72.** $x+\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2(2x-3)}$ **73.** 6 **74.** $\left[-\dfrac{5}{3}, 4\right)$ **75.** ≈ 2.7755

Prueba de mitad de capítulo

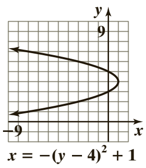
1. [10.1]



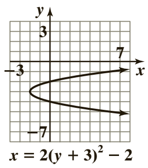
2. [10.1]



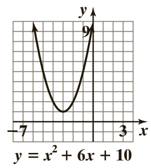
3. [10.1]



4. [10.1]

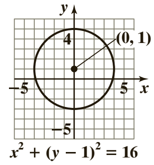


5. [10.1]

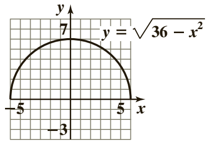


6. 13 [10.1] **7.** $\sqrt{153} \approx 12.37$ [10.1] **8.** $\left(-1, \dfrac{5}{2}\right)$ [10.1] **9.** $\left(\dfrac{11}{4}, \dfrac{15}{4}\right)$ [10.1]

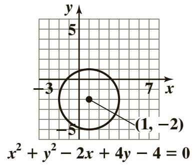
10. $(x+3)^2+(y-2)^2=25$ [10.1] **11.** [10.1]



12. [10.1]

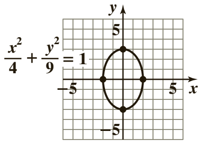


13. [10.1]

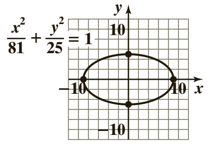


14. Una circunferencia es un conjunto de puntos en un plano que están a la misma distancia de un punto fijo, llamado centro [10,1]

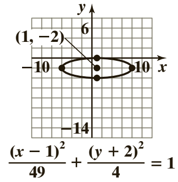
15. [10.2]



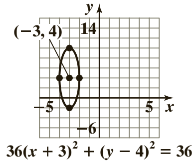
16. [10.2]



17. [10.2]



18. [10.2]

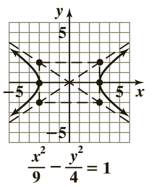


19. $6\pi \approx 18.85$ unidades cuadradas [10.2] **20.** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$ [10.2]

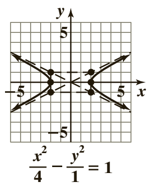
Conjunto de ejercicios 10.3

1. Hipérbola **3.** Centro **5.** Transversal **7.** y **9.** Dividir

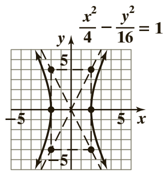
11. a) $y=\pm\frac{2}{3}x$ **b)**



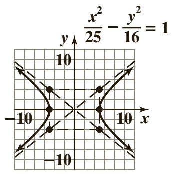
13. a) $y=\pm\frac{1}{2}x$ **b)**



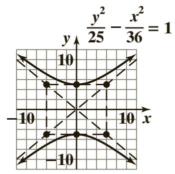
15. a) $y=\pm 2x$ **b)**



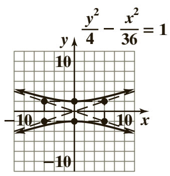
17. a) $y=\pm\frac{4}{5}x$ **b)**



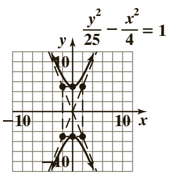
19. a) $y=\pm\frac{5}{6}x$ **b)**



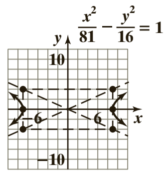
21. a) $y=\pm\frac{1}{3}x$ **b)**



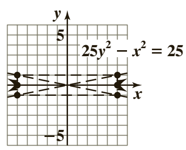
23. a) $y=\pm\frac{5}{2}x$ **b)**



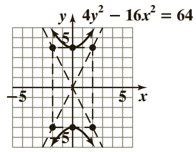
25. a) $y=\pm\frac{4}{9}x$ **b)**



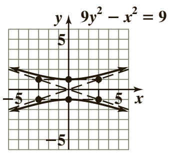
27. a) $\frac{y^2}{1}-\frac{x^2}{25}=1, y=\pm\frac{1}{5}x$ **b)**



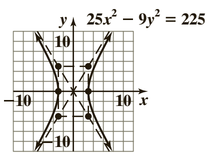
29. a) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1, y=\pm 2x$ **b)**



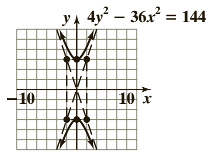
31. a) $\frac{y^2}{1}-\frac{x^2}{9}=1, y=\pm\frac{1}{3}x$ **b)**



33. a) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1, y=\pm\frac{5}{3}x$ **b)**



35. a) $\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{4}=1, y=\pm 3x$ **b)**



37. Circunferencia **39.** Elipse **41.** Hipérbola **43.** Parábola **45.** Elipse **47.** Parábola **49.** Circunferencia **51.** Hipérbola **53.** Parábola **55.** Hipérbola **57.** Parábola **59.** Circunferencia **61.** $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{16}=1$ **63.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$

65. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$, no, $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{50}=1$ y otras respuestas también pueden funcionar. La razón $\frac{b}{a}$ debe ser $\frac{5}{3}$. **67.** D: $(-\infty,-5]\cup[5,\infty)$; R: $\mathbb{R}$

69. Las respuestas variarán. **71.** No, las gráficas de hipérbolas de esta forma no pasan la prueba de la recta vertical.

73. El eje transversal de ambas gráficas está a lo largo del eje x. Los vértices de la segunda gráfica estarán más cercanos al origen y la segunda gráfica será más ancha. **75.** Es una hipérbola con vértices en $(a, 0)$ y $(-a, 0)$. El eje transversal está a lo largo del eje x. Las asíntotas son $y=\pm\frac{b}{a}x$. **77.** No **79.** Sí **81.** $y=-\frac{1}{2}x+1$ **82.** $-x^2-x+11$ **83.** $\left(-1,\frac{1}{3}\right)$

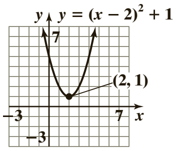
84. $\frac{3x+2}{2x-3}$ **85.** $v=\sqrt{\frac{2E}{m}}$ **86.** 1

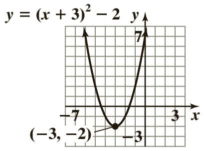
Conjunto de ejercicios 10.4

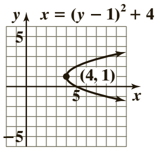
1. No lineal **3.** Suma **5.** 3 **7.** $(3, -3), (-3, 3)$ **9.** $(-3, 0), \left(-\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right)$ **11.** $(-4, 11), \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$ **13.** $(-1, 5), (1, 5)$ **15.** $(5, 0), (-5, 0)$ **17.** No hay solución real **19.** $(0, -3), (\sqrt{5}, 2)(-\sqrt{5}, 2)$ **21.** $(2, -4), (-14, -20)$ **23.** $(2, 0), (-2, 0)$ **25.** $(4, 3), (4, -3), (-4, 3), (-4, -3)$ **27.** $(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ **29.** $(3, 0), (-3, 0)$ **31.** $(2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1)$ **33.** $(3, 4), (3, -4), (-3, 4), (-3, -4)$ **35.** $(\sqrt{5}, 2), (\sqrt{5}, -2), (-\sqrt{5}, 2), (-\sqrt{5}, -2)$ **37.** No hay solución real **39.** No hay solución real **41.** 20 metros por 25 metros **43.** 10 pies por 17 pies **45.** largo: 14 centímetros, ancho: 8 centímetros **47.** 16 pulgadas por 30 pulgadas **49.** ≈ 1.67 segundos **51.** $r = 6\%, p = \$125$ **53.** ≈ 16 y ≈ 184 **55.** ≈ 5 y ≈ 95 **57.** $(-1, -3), (3.12, -0.53)$ **59.** Las respuestas variarán **61.** Sí, por ejemplo  **63.** Sí, por ejemplo  **65.** 10 yardas, 24 yardas **67.** Paréntesis, exponentes, multiplicaciones o divisiones, sumas o restas **68.** $(x + 2)(x^2 + x + 1)$ **69.** 0.9 **70.** $\dfrac{5\sqrt{x+2} + 15}{x - 7}$ **71.** $k = \dfrac{\ln A - \ln A_0}{t}$

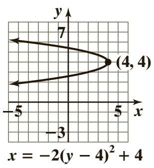
Ejercicios de repaso del capítulo 10

1. 13; $\left(\frac{5}{2}, -6\right)$ **2.** 5; $\left(-\frac{5}{2}, 3\right)$ **3.** 17; $\left(-5, \frac{5}{2}\right)$ **4.** $\sqrt{8} \approx 2.83; (-3, 4)$

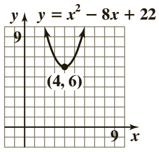
5.


6.


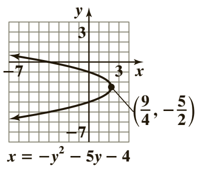
7.


8.


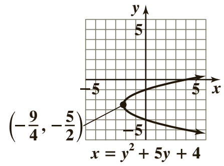
9. a) $y = (x - 4)^2 + 6$

b)


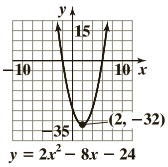
10. a) $x = -\left(y + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$

b)


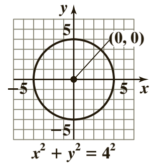
11. a) $x = \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$

b)


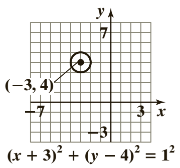
12. a) $y = 2(x - 2)^2 - 32$

b)


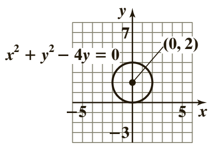
13. a) $x^2 + y^2 = 4^2$

b)


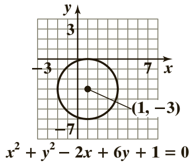
14. a) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 1^2$

b)


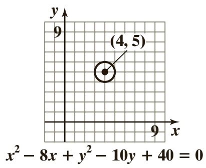
15. a) $x^2 + (y - 2)^2 = 2^2$

b)


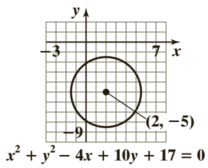
16. a) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 3^2$

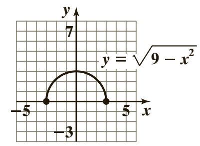
b)


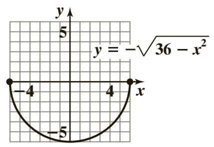
17. a) $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 1^2$

b)


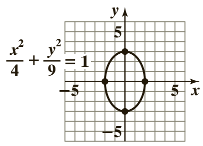
18. a) $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = (\sqrt{12})^2$

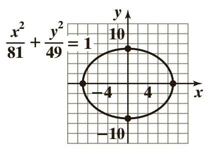
b)


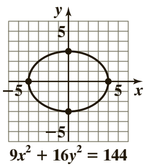
19.


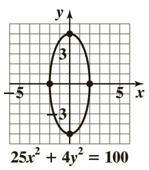
20.


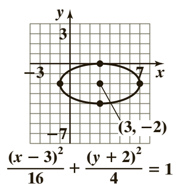
21. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ **22.** $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 9$

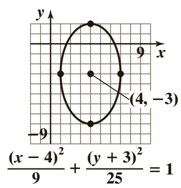
23.


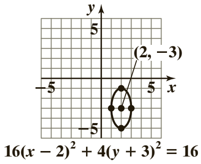
24.


25.


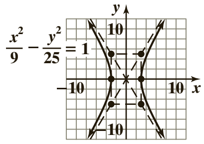
26.


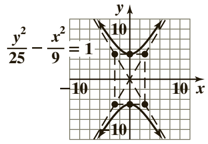
27.


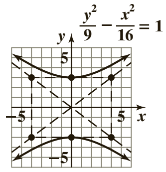
28.


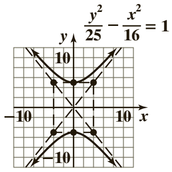
29.


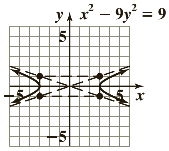
30. $6\pi \approx 18.85$ unidades cuadradas

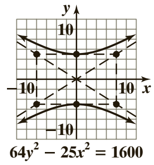
31. a) $y = \pm\frac{5}{3}x$ **b)**


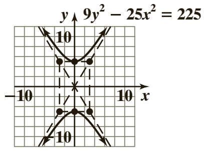
32. a) $y = \pm\frac{5}{3}x$ **b)**


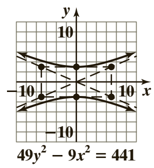
33. a) $y = \pm\frac{3}{4}x$ **b)**


34. a) $y = \pm\frac{5}{4}x$ **b)**


35. a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = 1$ **b)** $y = \pm\frac{1}{3}x$ **c)**


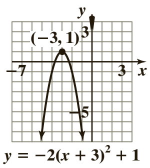
36. a) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{64} = 1$ **b)** $y = \pm\frac{5}{8}x$ **c)**


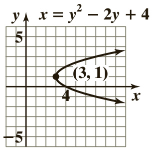
37. a) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$ **b)** $y = \pm\frac{5}{3}x$ **c)**


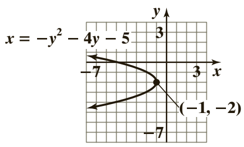
38. a) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{49} = 1$ **b)** $y = \pm\frac{3}{7}x$ **c)**


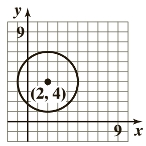
39. Hipérbola **40.** Elipse **41.** Círculo **42.** Hipérbola **43.** Elipse **44.** Parábola **45.** Elipse **46.** Parábola **47.** $(2, 2\sqrt{2}), (2, -2\sqrt{2}), (-2, 2\sqrt{2}), (-2, -2\sqrt{2})$ **48.** $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ **49.** $(3, 0), \left(-\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$ **50.** No hay solución real **51.** $(6, 0), (-6, 0)$ **52.** $(\sqrt{15}, 1), (-\sqrt{15}, 1), (\sqrt{15}, -1), (-\sqrt{15}, -1)$ **53.** No hay solución real **54.** $(1, 2\sqrt{2}), (-1, 2\sqrt{2}), (1, -2\sqrt{2}), (-1, -2\sqrt{2})$ **55.** 5 pies por 9 pies **56.** ≈ 4 y ≈ 145 **57.** $r = 3\%$, $p = \$4000$

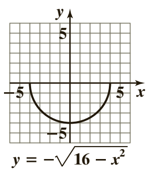
Prueba de práctica del capítulo 10

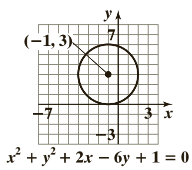
1. Se forman al cortar un cono o un par de conos [10.1] **2.** $\sqrt{50} \approx 7.07$ [10.1] **3.** $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ [10.1] **4.** $(-3, 1)$, [10.1]


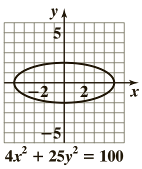
5.


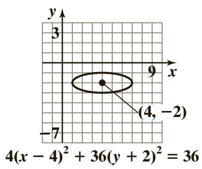
[10.1] **6.** $x = -(y + 2)^2 - 1$ [10.1]


7. $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$ [10.1]


8. $9\pi \approx 28.27$ unidades cuadradas [10.1] **9.** $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$ [10.1] **10.**


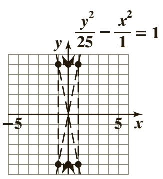
[10.1] **11.** $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$ [10.1]


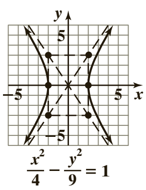
12.


[10.2] **13.** No, el eje mayor debe estar a lo largo del eje y [10.2] **14.**


[10.2] **15.** $(8, -7)$ [10.2]

16. El eje transversal está a lo largo del eje correspondiente al término con coeficiente positivo en la ecuación en la forma estándar. [10.3]

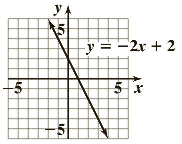
17. $y = \pm\frac{7}{4}x$ [10.3] **18.**


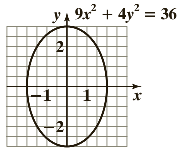
[10.3] **19.**


[10.3] **20.** Hipérbola, divide ambos lados de la ecuación entre 30. [10.3]

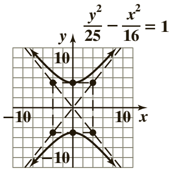
21. Elipse, divide ambos lados de la ecuación entre 100. [10.3] **22.** $(2, \sqrt{3}), (2, -\sqrt{3}), (-2, \sqrt{3}), (-2, -\sqrt{3})$ [10.4] **23.** No hay solución real [10.4] **24.** 30 metros por 50 metros [10.4] **25.** 5 pies por 12 pies [10.4]

Prueba de repaso acumulada **1.** $-27x^3y^9$ [1.5] **2.** $\frac{19}{4}$ [2.1] **3.** $\varnothing$ [2.1] **4.** $\left\{x \middle| x < -\frac{5}{3} \text{ o } x > 1\right\}$ [2.6]

5. 

[3.1] **6.** 139 [3.2] **7.** $(8, 6)$ [4.1] **8.** $(x^2 + 6)(x^2 - 7)$ [5.5] **9.** base: 14 pies, altura: 8 pies [5.8] **10.** $\frac{x - 4}{4x + 3}$ [6.1] **11.** $\frac{2x^2 - 9x - 5}{2(x + 3)(x - 4)}$ [6.2] **12.** 2 [6.4] **13.** $\frac{3y^{3/2}}{x^{1/2}}$ [7.2] **14.** $\frac{6x + 6y\sqrt{x}}{x - y^2}$ [7.5] **15.** 3 [7.6] **16.** $\frac{2 \pm i\sqrt{11}}{3}$ [8.2] **17.** 2 [9.6] **18.** ≈ 2.31 [9.7] **19.** 

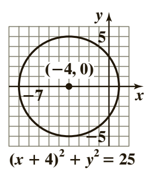
[10.2]

20. 

[10.3]

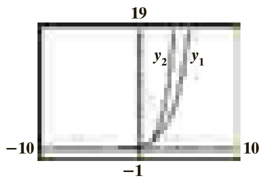
Capítulo 11

Conjunto de ejercicios 11.1 **1.** Sucesión **3.** Finita **5.** Menor **7.** Serie **9.** Superior **11.** 6, 12, 18, 24, 30 **13.** 3, 7, 11, 15, 19 **15.** $9, \frac{9}{2}, \frac{9}{3}, \frac{9}{4}, \frac{9}{5}$ **17.** $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}$ **19.** $-1, 1, -1, 1, -1$ **21.** $4, -8, 16, -32, 64$ **23.** 31 **25.** 12 **27.** 1 **29.** 143 **31.** $\frac{81}{25}$ **33.** 2, 15 **35.** 3, 17 **37.** $0, \frac{13}{20}$ **39.** $-1, -1$ **41.** $\frac{1}{2}, 7$ **43.** 64, 128, 256 **45.** 17, 19, 21 **47.** $\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}$ **49.** $1, -1, 1$ **51.** $\frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}$ **53.** $\frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ **55.** 26, 22, 18 **57.** $2 + 5 + 8 + 11 + 14 = 40$ **59.** $2 + 5 + 10 + 17 + 26 + 37 = 97$ **61.** $\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{9}{3} + \frac{16}{3} = \frac{30}{3} = 10$ **63.** $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39$ **65.** $\sum_{i=1}^{5}(i + 10)$ **67.** $\sum_{i=1}^{3}\frac{i^2}{4}$ **69.** 13 **71.** 169 **73.** 55 **75.** 25 **77.** ≈ 42.83 **79. a)** 6, 12, 18, 24 **b)** $p_n = 6n$ **81. a)** $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$ **b)** $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$ **c)** Si **83.** $n = \frac{\sum x}{\bar{x}}$ **85.** Sí **87.** La *enésima* suma parcial de una serie es la suma de los primeros *n* términos consecutivos de la serie. **89.** La sucesión aumenta **91.** Sí **93.** Las respuestas variarán. **95.** Las respuestas variarán. **96.** $\frac{2}{5}$ **97.** $8(y - 2x^2)(y^2 + 2x^2y + 4x^4)$ **98.** 11 **99.** $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$

Conjunto de ejercicios 11.2 **1.** Aritmética **3.** d **5.** Término **7.** Suma **9.** Negativo **11.** 4, 7, 10, 13, 16; $a_n = 3n + 1$ **13.** 7, 5, 3, 1, -1; $a_n = -2n + 9$ **15.** $\frac{1}{2}, 2, \frac{7}{2}, 5, \frac{13}{2}$; $a_n = \frac{3}{2}n - 1$ **17.** 100, 95, 90, 85, 80; $a_n = -5n + 105$ **19.** 14 **21.** 27 **23.** 12 **25.** 2 **27.** 9 **29.** 6 **31.** $s_{10} = 100, d = 2$ **33.** $s_8 = \frac{52}{5}, d = \frac{1}{5}$ **35.** $s_6 = 25.5, d = 3.7$ **37.** $s_{11} = 407, d = 6$ **39.** 4, 7, 10, 13; $a_{10} = 31, s_{10} = 175$ **41.** $-6, -4, -2; 0$; $a_{10} = 12, s_{10} = 30$ **43.** $-8, -13, -18, -23$; $a_{10} = -53, s_{10} = -305$ **45.** $\frac{7}{2}, 6, \frac{17}{2}, 11$; $a_{10} = 26, s_{10} = 147.5$ **47.** 100, 93, 86, 79; $a_{10} = 37, s_{10} = 685$ **49.** $n = 15, s_{15} = 330$ **51.** $n = 11, s_{11} = 121$ **53.** $n = 17, s_{17} = \frac{153}{2}$ **55.** $n = 29, s_{29} = 1421$ **57.** 1275 **59.** 2500 **61.** 1395 **63.** 267 **65.** 42; 372 **67.** 351 **69. a)** 27 **b)** 196 **71.** $101 \cdot 50 = 5050$ **73.** $s_n = n^2$ **75. a)** 19 pies **b)** 143.5 pies **77.** 2 pies **79. a)** 155 **b)** 780 **81.** \$496 **83. a)** \$45,600 **b)** \$438,000 **85.** $a_n = 180°(n - 2)$ **87.** Sí **89.** Sí **97.** $r = \frac{A - P}{Pt}$ **98.** $(-3, -5)$ **99.** $3(2n - 5)(2n - 1)$ **100.** 

Conjunto de ejercicios 11.3

1. Geométrica **3.** r **5.** término **7.** suma **9.** 1 **11.** 2, 6, 18, 54, 162
13. $6, -3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{8}$ **15.** $72, 24, 8, \frac{8}{3}, \frac{8}{9}$ **17.** $90, -30, 10, -\frac{10}{3}, \frac{10}{9}$ **19.** $-1, -3, -9, -27, -81$ **21.** $7, -14, 28, -56, 112$
23. $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{1}{48}$ **25.** $3, \frac{9}{2}, \frac{27}{4}, \frac{81}{8}, \frac{243}{16}$ **27.** 128 **29.** $-\frac{3}{32}$ **31.** 64 **33.** 6144 **35.** $\frac{1}{64}$ **37.** $\frac{50}{729}$ **39.** 155 **41.** 7812 **43.** 10,160
45. $-\frac{2565}{256}$ **47.** $-\frac{9279}{625}$ **49.** $r = \frac{1}{2}, a_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ **51.** $r = 2, a_n = 9(2)^{n-1}$ **53.** $r = -3, a_n = 2(-3)^{n-1}$ **55.** $r = \frac{2}{3}, a_n = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$
57. 2 **59.** $\frac{5}{4}$ **61.** 24 **63.** $\frac{25}{3}$ **65.** 5 **67.** 6 **69.** 4 **71.** 12 **73.** -45 **75.** -15 **77.** $\frac{8}{33}$ **79.** $\frac{7}{9}$ **81.** $\frac{17}{33}$ **83.** $r = 3, a_1 = 5$
85. $r = 2$ o $r = -2, a_1 = 7$ **87.** $\approx \$1.77$ **89. a)** 4 días **b)** $\approx$1.172 gramos **91. a)** $\approx$338.59 millones **b)** $\approx$63.4 años
93. a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ **b)** $a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ **c)** $\frac{1}{128} \approx 0.78\%$ **95.** $\approx \$15{,}938.48$ **97. a)** 28.512 pies **b)** 550 pies
99. a) 10.29 pulgadas **b)** 100 pulgadas **101.** 211 **103. a)** \$12,000, \$9600, \$7680 **b)** $a_n = 12{,}000\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$ **c)** $\approx \$4915.20$
105. 190 pies **107. a)** y_2 asciende más lentamente. **b)**



109. 0 **111.** Sí **113.** Sí, $s_\infty = 8$
115. $n = 21, s_n = 2{,}097{,}151$ **116.** 12 **117.** $6x^3 - x^2y - 16xy^2 + 6y^3$ **118.** $r = \frac{S - 2a}{S}$ **119.** $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-9}$ **120.** 5
121. 9 metros, 12 metros

Prueba de mitad de capítulo

1. $4, 1, -2, -5, -8$ [11.1] **2.** 91 [11.1] **3.** 1, 11 [11.1] **4.** $-15, -19, -23$ [11.1]
5. 45 [11.1] **6.** $\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{1}{4}i + 9\right)$ [11.1] **7.** $-6, -1, 4, 9; a_n = -11 + 5n$ [11.2] **8.** -1 [11.2] **9.** 6 [11.2] **10.** 3, -3 [11.2]
11. $47\frac{1}{2}$ [11.2] **12.** 12 [11.2] **13.** 136 [11.2] **14.** $100, -50, 25, -\frac{25}{2}, \frac{25}{4}$ [11.3] **15.** $\frac{1}{27}$ [11.3] **16.** 315 [11.3] **17.** $-\frac{2}{3}$ [11.3]
18. 18 [11.3] **19.** $\frac{29}{33}$ [11.3] **20. a)** Una sucesión es una lista de números acomodados en un orden específico. **b)** Una sucesión aritmética es una sucesión en la que cada término difiere por una cantidad constante. **c)** Una sucesión geométrica es una sucesión donde los términos difieren por un múltiplo común. **d)** Una serie es la suma de los términos de una sucesión, [11.1 – 11.3]

Conjunto de ejercicios 11.4

1. Factorial **3.** 1 **5.** 20 **7.** 10 **9.** 10 **11.** 1 **13.** 1 **15.** 70 **17.** 28
19. $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$ **21.** $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$ **23.** $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$
25. $243a^5 - 405a^4b + 270a^3b^2 - 90a^2b^3 + 15ab^4 - b^5$ **27.** $16x^4 + 16x^3 + 6x^2 + x + \frac{1}{16}$ **29.** $\frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{27}{2}x^2$
31. $x^{10} + 100x^9 + 4500x^8 + 120{,}000x^7$ **33.** $2187x^7 - 5103x^6y + 5103x^5y^2 - 2835x^4y^3$ **35.** $x^{16} - 24x^{14}y + 252x^{12}y^2 - 1512x^{10}y^3$
37. $x^8, 24x^7, 17{,}496x, 6561$ **39.** $64x^6, 960x^5, 37{,}500x, 15{,}625$ **41.** Sí, $4! = 4 \cdot 3!$ **43.** Sí, $(7-3)! = (7-3)(7-4)(7-5)! = 4 \cdot 3 \cdot 2!$
45. $m = n$ o $m = 0$ **47.** $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$ **49.** (0, 10) **50.** (10, 4) **51.** 2, 9 **52.** $2x^3y^5\sqrt{30y}$ **53.** $f^{-1}(x) = \frac{x-8}{3}$

Ejercicios de repaso del capítulo 11

1. 6, 7, 8, 9, 10 **2.** $-1, 3, 9, 17, 27$ **3.** $12, 5, 4, 3, \frac{12}{5}$ **4.** $\frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{9}{7}, 2, \frac{25}{9}$ **5.** 11 **6.** 6
7. $\frac{26}{81}$ **8.** 88 **9.** $s_1 = 7, s_3 = 27$ **10.** $s_1 = 12, s_3 = 47$ **11.** $s_1 = \frac{4}{3}, s_3 = \frac{227}{60}$ **12.** $s_1 = -9, s_3 = -10$ **13.** $32, 64, 128; a_n = 2^n$
14. $-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}; a_n = (-1)^n(3^{4-n})$ **15.** $\frac{16}{9}, \frac{32}{9}, \frac{64}{9}; a_n = \frac{2^n - 1}{9}$ **16.** $-3, -7, -11; a_n = 17 - 4n$ **17.** $11 + 14 + 19 = 44$
18. $6 + 14 + 24 + 36 = 80$ **19.** $\frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} + \frac{16}{6} + \frac{25}{6} = \frac{55}{6}$ **20.** $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{163}{60}$ **21.** 29 **22.** 239 **23.** 132 **24.** 841
25. a) 10, 14, 18, 22 **b)** $p_n = 4n + 6$ **26. a)** 4, 10, 18, 28 **b)** $a_n = n(n+3) = n^2 + 3n$ **27.** 5, 8, 11, 14, 17 **28.** $5, \frac{14}{3}, \frac{13}{3}, 4, \frac{11}{3}$
29. $\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}, -\frac{11}{2}, -\frac{15}{2}$ **30.** $-20, -\frac{99}{5}, -\frac{98}{5}, -\frac{97}{5}, -\frac{96}{5}$ **31.** 30 **32.** -5 **33.** $\frac{1}{2}$ **34.** 6 **35.** $s_8 = 112, d = 2$
36. $s_7 = -140, d = -6$ **37.** $s_7 = \frac{48}{5}, d = \frac{2}{5}$ **38.** $s_9 = -42, d = -\frac{1}{3}$ **39.** $-7, -3, 1, 5; a_{10} = 29, s_{10} = 110$
40. $8, 5, 2, -1; a_{10} = -19, s_{10} = -55$ **41.** $\frac{5}{6}, \frac{3}{2}, \frac{13}{6}, \frac{17}{6}; a_{10} = \frac{41}{6}, s_{10} = \frac{115}{3}$ **42.** $-60, -55, -50, -45; a_{10} = -15, s_{10} = -375$
43. $n = 13, s_{13} = 442$ **44.** $n = 8, s_8 = 28$ **45.** $n = 11, s_{11} = \frac{231}{10}$ **46.** $n = 10, s_{10} = 180$ **47.** 6, 12, 24, 48, 96

48. $-28, -14, -7, -\frac{7}{2}, -\frac{7}{14}$ **49.** $20, -\frac{40}{3}, \frac{80}{9}, -\frac{160}{27}, \frac{320}{81}$ **50.** $-20, -4, -\frac{4}{5}, -\frac{4}{25}, -\frac{4}{125}$ **51.** $\frac{4}{27}$ **52.** 480 **53.** 216

54. $\frac{4}{243}$ **55.** 441 **56.** $-\frac{4305}{64}$ **57.** $\frac{585}{8}$ **58.** $\frac{127}{8}$ **59.** $r = 2; a_n = 6(2)^{n-1}$ **60.** $r = 5, a_n = -6(5)^{n-1}$ **61.** $r = \frac{1}{3}, a_n = 10\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

62. $r = \frac{2}{3}, a_n = \frac{9}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ **63.** 10 **64.** $\frac{49}{10}$ **65.** -6 **66.** -18 **67.** 32 **68.** $\frac{33}{2}$ **69.** $\frac{25}{6}$ **70.** -12 **71.** $\frac{4}{11}$ **72.** $\frac{29}{37}$

73. $81x^4 + 108x^3y + 54x^2y^2 + 12xy^3 + y^4$ **74.** $8x^3 - 36x^2y^2 + 54xy^4 - 27y^6$ **75.** $x^9 - 18x^8y + 144x^7y^2 - 672x^6y^3$

76. $256a^{16} + 3072a^{14}b + 16{,}128a^{12}b^2 + 48{,}384a^{10}b^3$ **77.** 15,050 **78.** 231 **79. a)** \$36,000, \$37,000, \$38,000, \$39,000 **b)** $a_n = \$35{,}000 + 1000n$ **c)** \$41,000 **d)** \$451,000 **80.** \$51,200 **81. a)** ≈\$2024.51 **b)** ≈2463.13 **c)** ≈\$24,378.78 **82.** ≈\$503.63 **83.** 150 pies

Prueba de práctica del capítulo 11

1. Una serie es la suma de los términos de una sucesión. [11.1] **2. a)** Una sucesión aritmética es aquella cuyos términos difieren en una cantidad constante. **b)** Una sucesión geométrica es aquella cuyos términos difieren en un múltiplo constante. [11.2-11.3]

3. $-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{9}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}$ [11.1] **4.** $s_1 = 3, s_3 = \frac{181}{36}$ [11.1] **5.** $5 + 11 + 21 + 35 + 53 = 125$ [11.1] **6.** 184 [11.1]

7. $a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(n-1) = \frac{1}{3}n$ [11.1] **8.** $a_n = 5(2)^{n-1}$ [11.3] **9.** $15, 9, 3, -3$ [11.2] **10.** $\frac{5}{12}, \frac{5}{18}, \frac{5}{27}, \frac{10}{81}$ [11.3] **11.** -40 [11.2]

12. -20 [11.2] **13.** 12 [11.2] **14.** $\frac{256}{243}$ [11.3] **15.** $\frac{39{,}063}{5}$ [11.3] **16.** $r = \frac{1}{3}, a_n = 15\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ [11.3] **17.** 12 [11.3] **18.** $\frac{13}{33}$ [11.3]

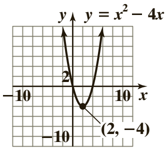
19. 56 [11.4] **20.** $x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4$ [11.4] **21.** 82 [11.2] **22.** 91 [11.2] **23.** \$210,000 [11.2] **24.** ≈\$851.66 [11.3] **25.** 364,500 [11.3]

Ejercicios de repaso acumulados

1. $b = \frac{2A}{h}$ [2.2] **2.** $y = -\frac{11}{3}x + \frac{38}{3}$ [3.5] **3.** Un número infinito de soluciones [4.2]

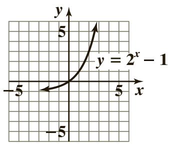
4. $5x^4 + 29x^3 + 14x^2 - 28x + 10$ [5.2] **5.** $(x^2 + 2)(x - 6)$ [5.4] **6.** $(a + b + 4)^2$ [5.5] **7.** $\frac{5x^2 + 14x - 49}{(x+5)(x-2)}$ [6.2] **8.** 500 [6.6]

9. 3 [7.6] **10.** 5 [7.6] **11.** $-1 \pm i\sqrt{14}$ [8.1] **12.** $\frac{3 \pm \sqrt{309}}{30}$ [8.2] **13.** 5 [5.8] **14.**



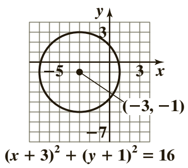
[8.5] **15.** $\frac{1}{2}$ [9.3]

16.

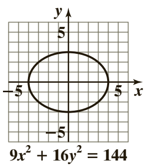


[9.2] **17.** $(x + 6)^2 + (y - 2)^2 = 49$ [10.1]

18.



[10.1] **19.**



[10.2] **20.** 18 [11.3]

Índice de aplicaciones

Educación

Electrónicos

Entretenimiento

Finanzas

Física/astronomía

Salarios

Varios

Vehículos de motor

Viajes/transportación

Vivienda/construcción

Índice analítico

D

E

Capítulo 1 Conceptos básicos

Propiedad conmutativa: $a + b = b + a, ab = ba$

Propiedad asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c), (ab)c = a(bc)$

Propiedad distributiva: $a(b + c) = ab + ac$

Propiedad de la identidad: $a + 0 = 0 + a = a,$

Propiedad de los inversos: $a + (-a) = -a + a = 0,\ a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

Propiedad de la multiplicación por 0: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

Propiedad de la doble negación: $-(-a) = a$

$>$ significa mayor que, $\geq$ significa mayor o igual que

$<$ significa menor que, $\leq$ significa menor o igual que

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases} \qquad a - b = a + (-b)$$

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si } \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n \text{ factores de } b} = a \qquad b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n \text{ factores de } b}$$

Orden de las operaciones: Paréntesis, exponentes y raíces, multiplicaciones y divisiones, sumas y restas.

Reglas de los exponentes

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^m/a^n = a^{m-n}, a \neq 0 \qquad (ab)^m = a^m b^m$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}, a \neq 0 \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, b \neq 0$$

$$a^0 = 1, a \neq 0 \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m, a \neq 0, b \neq 0$$

Capítulo 2 Ecuaciones y desigualdades

Propiedad de la suma para la igualdad: Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.

Propiedad de la multiplicación para la igualdad: Si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$.

Procedimiento de resolución de problemas para resolver problemas de aplicación

1. **Entiende el problema.** Identifica la cantidad o cantidades que se pide determinar.
2. **Traduce el problema a un lenguaje matemático** (expresa el problema como una ecuación).
   a) Elige una variable para representar una cantidad, **y escribe lo que representa**. Representa cualquier otra cantidad que se determinará en términos de esta variable.
   b) Usando la información del inciso a), escribe una ecuación que represente el problema verbal.
3. **Realiza los cálculos matemáticos** (resuelve la ecuación).
4. **Comprueba la respuesta** (con la redacción original del problema).
5. **Responde la pregunta que se hizo.**

Fórmula de la distancia: $d = rt$

Desigualdades

Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.
Si $a > b$, entonces $a - c > b - c$.
Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$.
Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $a/c > b/c$.
Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$.
Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $a/c < b/c$.

Valor absoluto

Si $|x| = a$, entonces $x = a$ o $x = -a$. Si $|x| > a$, entonces $x < -a$ o $x > a$.
Si $|x| < a$, entonces $-a < x < a$. Si $|x| = |y|$, entonces $x = y$ o $x = -y$.

Capítulo 3 Gráficas y funciones

Una **relación** es cualquier conjunto de pares ordenados.
Una **función** es una correspondencia entre un primer conjunto de elementos, el dominio, y un segundo conjunto de elementos, el rango, de modo que a cada elemento del dominio le corresponde exactamente un elemento del rango.

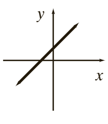
Funciones

Suma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
Diferencia: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
Producto: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
Cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

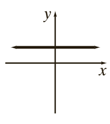
Una **gráfica de una ecuación** es una ilustración del conjunto de puntos que satisfacen una ecuación.
Para determinar la intersección con el eje y de una gráfica, haz $x = 0$ y resuelve la ecuación para y.
Para determinar la intersección con el eje x de una gráfica, haz $x = 0$ y resuelve la ecuación para x.

Pendiente de una recta: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

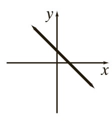
Forma general de una ecuación lineal: $ax + by = c$
Forma pendiente intersección de una ecuación lineal: $y = mx + b$
Forma punto pendiente de una ecuación lineal: $y - y_1 = m(x - x_1)$



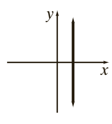
Pendiente positiva (se eleva a la derecha)



Pendiente igual a 0. (línea horizontal)



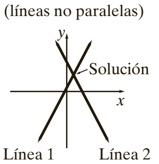
Pendiente negativa (cae a la derecha)



Pendiente indefinida. (línea vertical)

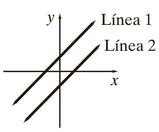
Capítulo 4 Sistemas de ecuaciones y desigualdades

Exactamente una solución (líneas no paralelas)



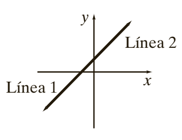
Sistema consistente

Sin solución (líneas paralelas)



Sistema inconsistente

Infinitas soluciones (línea recta)



Sistema dependiente

Un sistema de ecuaciones lineales puede resolverse: (a) de manera gráfica, (b) por el método de sustitución, (c) por el método de suma o de eliminación, (d) mediante matrices o (e) por determinantes.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Regla de Cramer:
Dado un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned} \quad \text{entonces } x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \text{y} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

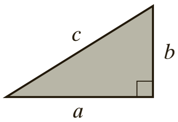
Capítulo 5 Polinomios y funciones polinomiales

Método de PIES para multiplicar dos binomios:

$$(a + b)(c + d) = \overset{\text{P}}{a \cdot c} + \overset{\text{I}}{a \cdot d} + \overset{\text{E}}{b \cdot c} + \overset{\text{S}}{b \cdot d}$$

Teorema de Pitágoras:

cateto^2 + cateto^2 = hipotenusa^2 o $a^2 + b^2 = c^2$



Cuadrado de un binomio:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Diferencia de dos cuadrados: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Trinomios cuadrados perfectos:

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Suma de dos cubos: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Diferencia de dos cubos: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Forma general de una ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

Propiedad del factor cero o nulo: Si $a \cdot b = 0$, entonces tenemos que $a = 0$ o $b = 0$, o bien, ambos $a = 0$ y $b = 0$.

Capítulo 6 Expresiones racionales y ecuaciones

Para multiplicar expresiones racionales:

1. Factoriza todos los numeradores y denominadores.
2. Divide entre los factores comunes que tengan.
3. Multiplica numeradores y multiplica denominadores.
4. Cuando sea posible, simplifica tu respuesta.

Para dividir expresiones racionales:

Invierte el divisor y multiplica la expresión racional resultante.

Para sumar o restar expresiones racionales:

1. Escribe cada fracción con un denominador común.
2. Suma o resta los numeradores, manteniendo el denominador común.
3. Cuando sea posible, factoriza el numerador y simplifica la fracción.

Figuras semejantes: Los ángulos correspondientes son iguales y los lados correspondientes son proporcionales.

Proporción: Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$.

Variación: directa, $y = kx$; inversa, $y = \frac{k}{x}$; conjunta, $y = kxz$

Capítulo 7 Raíces, radicales y números complejos

Si n es par y $a \geq 0$: $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$

Si n es impar: $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$

Reglas de los radicales:

$\sqrt{a^2} = |a|$

$\sqrt{a^2} = a,\ a \geq 0$

$\sqrt[n]{a^n} = a,\ a \geq 0$

$\sqrt[n]{a} = a^{1/n},\ a \geq 0$

$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{m/n},\ a \geq 0$

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab},\ a \geq 0, b \geq 0$

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}},\ a \geq 0, b > 0$

Un radical está simplificado cuando todo lo siguiente es verdadero:

1. En ningún radicando hay factores que sean potencias perfectas.
2. Ningún radicando tiene fracciones.
3. Ningún denominador tiene radicales.

Números complejos: números de la forma $a + bi$.

Potencias de *i*: $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$

Capítulo 8 Funciones cuadráticas

Propiedad de la raíz cuadrada:

Si $x^2 = a$, donde a es un número real, entonces $x = \pm\sqrt{a}$.

Una ecuación cuadrática puede resolverse mediante factorización, completando el cuadrado o mediante la fórmula cuadrática.

Fórmula cuadrática: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Discriminante: $b^2 - 4ac$

Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes.

Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces la ecuación tiene una sola solución real.

Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces la ecuación no tiene soluciones reales.

Parábolas

Para $f(x) = ax^2 + bx + c$, el vértice de la parábola es

$\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$ o $\left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$.

Para $f(x) = a(x - h)^2 + k$, el vértice de la parábola es (h, k).

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, la función tendrá un valor mínimo de $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$ en $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a < 0$, la función tendrá un valor máximo de $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$ en $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Capítulo 9 Funciones exponenciales y logarítmicas

Función compuesta de la función f con la función g: $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$

Para determinar la **función inversa**, $f^{-1}(x)$, intercambia todas las x y y, y despeja la ecuación y resultante.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones inversas, entonces $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$.

Función exponencial: $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

Logaritmo: $y = \log_a x$ significa $x = a^y$, $a > 0$, $a \neq 1$

Propiedades de los logaritmos:

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x^n = n \log_a x$

$\log_a a^x = x$

$a^{\log_a x} = x, x > 0$

Logaritmos comunes son logaritmos de base 10

Logaritmos naturales son logaritmos de base e, donde $e \approx 2.7183$.

Antilogaritmo: Si $\log N = L$ entonces $N = \text{antilog } L$.

Fórmula de cambio de base: $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Función exponencial natural: $f(x) = e^x$

Para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas también utilizamos estas propiedades:

Si $x = y$, entonces $a^x = a^y$.

Si $a^x = a^y$, entonces $x = y$.

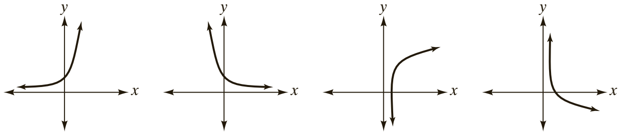
Si $x = y$, entonces $\log x = \log y$ $(x > 0, y > 0)$.

Si $\log x = \log y$, entonces $x = y$ $(x > 0, y > 0)$.

$\ln e^x = x$

$e^{\ln x} = x, x > 0$

$f(x) = a^x$, $a > 1$ | $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$ | $f(x) = \log_a x$, $a > 1$ | $f(x) = \log_a x$, $0 < a < 1$

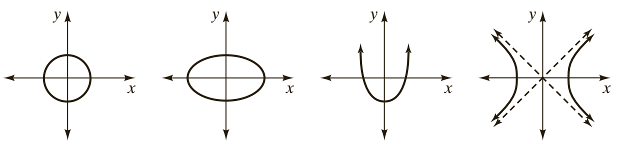


Capítulo 10 Secciones cónicas

Fórmula de distancia: $D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Fórmula del punto medio: punto medio $= \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Secciones cónicas:



Circunferencia | Elipse | Parábola | Hipérbola

Circunferencia con centro en el origen y radio r: $x^2 + y^2 = r^2$

Circunferencia con centro en (h, k) y radio r:

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Elipse con centro en el origen: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Parábola con vértice en (h, k) que abre hacia arriba:

arriba, $a > 0$: $y = a(x - h)^2 + k$

abajo, $a < 0$: $y = a(x - h)^2 + k$

a la derecha, $a > 0$: $x = a(y - k)^2 + h$

a la izquierda, $a < 0$: $x = a(y - k)^2 + h$

Hipérbolas con centro en el origen:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, cuando el eje transversal está a lo largo del eje x.

$\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ cuando el eje transversal está a lo largo del eje y.

$y = \pm\dfrac{b}{a}x$, ecuaciones de las asíntotas de las hipérbolas.

Capítulo 11 Sucesiones, series y el teorema del binomio

Sucesión finita: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

Serie finita: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

Sucesión infinita: $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$

Serie infinita: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots$

***enésima* suma parcial de una sucesión:** $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$

***enésimo* término de una sucesión aritmética:** $a_n = a_1 + (n - 1)d$

***enésima* suma parcial de una sucesión aritmética:** $s_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$

***enésimo* término de una serie geométrica:** $a_n = a_1 r^{n-1}$

***enésima* suma parcial de una sucesión geométrica:**

$s_n = \dfrac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}, r$

Suma de una serie geométrica infinita con $|r| < 1$: $s_\infty = \dfrac{a_1}{1 - r}$

$n! = n(n - 1)(n - 2)(n - 3)\cdots(1)$

$0! = 1$

Coeficientes binomiales: $\dbinom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n - r)!}$

Teorema del binomio:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

Comprendiendo el álgebra con Angel/Runde

Los estudiantes de hoy son aprendices visuales. Por ello, los autores Angel y Runde ofrecen diversos recursos gráficos para ayudar a los estudiantes a tener éxito en matemáticas. En el texto se utilizan ejemplos visuales o diagramas para explicar conceptos y procedimientos. Los cuadros de texto de **Comprendiendo el álgebra** y el código de color para las variables y la notación hacen que los jovenes se enfoquen en los conceptos clave. Asimismo, las frases cortas y claras refuerzan la presentación de cada tema

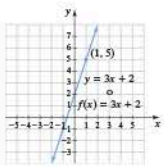


FIGURA 3.28

Notación de funciones

Si una ecuación que incluye x como la variable independiente y y como la variable dependiente define una función, decimos que **y es función de x** y lo escribimos como $y = f(x)$ (que se lee "f de x").

Considera la ecuación $y = 3x + 2$ como se ve en la **Figura 3.28**. Como esta gráfica pasa la prueba de la línea recta vertical, esta ecuación define una función y podemos escribir la ecuación usando notación de funciones como $f(x) = 3x + 2$.

$$f(x) = 3x + 2$$

f es el nombre de la función

x es la variable independiente

Sustituye valores de x para obtener los valores correspondientes de y o $f(x)$

Comprendiendo el álgebra

La notación $f(x)$ significa que la ecuación define una función en la que x es la variable independiente. Observa que $f(x)$ no quiere decir f multiplicada por x.

Por ejemplo, si $f(x) = 3x + 2$, entonces $f(1)$, que se lee como "f de uno" se de la siguiente manera:

$$f(x) = 3x + 2$$
$$f(1) = 3(1) + 2 = 5$$

Por lo tanto, cuando x es 1, y es 5. El par ordenado (1, 5) aparece en la gr $y = 3x + 2$ en la **Figura 3.28**.

4 Escribir ecuaciones lineales en la forma pendiente-intersección

Una ecuación lineal escrita en la forma $y = mx + b$ se dice que está en la **forma pendiente-intersección**.

Forma pendiente-intersección

La **forma pendiente-intersección de una ecuación lineal** es

$$y = mx + b$$

Donde **m es la pendiente** de la recta y **$(0, b)$ es la intersección con y** de la recta.

Comprendiendo el álgebra

Para expresar una ecuación lineal en la forma pendiente-intersección, resuelve la ecuación para y.

Ejemplos de ecuaciones en la forma pendiente-intersección

$$y = 3x - 6 \qquad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Pendiente — Intersección en y es $(0, b)$

$$y = mx + b$$

Ecuación	Pendiente	Intersección con y
$y = 3x - 6$	3	$(0, -6)$
$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\left(0, \frac{3}{2}\right)$

NUEVO

Comprendiendo el álgebra

Los cuadros de texto de *Comprendiendo el álgebra* resaltan los puntos clave a lo largo del texto, permitiendo que los estudiantes identifiquen a simple vista el tema más importante.

ISBN 978-607-32-2199-3

Visítenos en:
www.pearsonenespañol.com