PEDAGOGÍA
Y DIDÁCTICA

Matemáticas para maestros de Educación Primaria

Isidoro Segovia Alex
Luis Rico Romero
(Coords.)

PIRÁMIDE

Matemáticas para maestros de Educación Primaria

Coordinadores
ISIDORO SEGOVIA ALEX
PROFESOR TITULAR DE UNIVERSIDAD. DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
DE LA UNIVERSIDAD DE GRANADA
LUIS RICO ROMERO
CATEDRÁTICO DE UNIVERSIDAD. DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
DE LA UNIVERSIDAD DE GRANADA

Matemáticas para maestros de Educación Primaria

EDICIONES PIRÁMIDE

Primera edición electrónica publicada por Pirámide 2015
www.edicionespiramide.es

Juan Ignacio Luca de Tena, 15. 28027 Madrid
Teléfono: 91 393 89 89
ISBN: 978-84-368-3486-4
Edición en versión digital 2015

Relación de autores

Rafael Bracho López
Profesor contratado.

Encarnación Castro Martínez
Catedrático de universidad.

Enrique Castro Martínez
Catedrático de universidad.

Elena Castro-Rodríguez
Becaria de investigación.

María Consuelo Cañadas Santiago
Profesora ayudante doctora de universidad.

Moisés Coriat Benarroch
Profesor titular de universidad.

Ángel Díez Lozano
Profesor titular de escuela universitaria.

Francisco Fernández García
Profesor titular de universidad.

Pablo Flores Martínez
Profesor titular de universidad.

Pedro Gómez Guzmán
Investigador contratado.

María José González López
Profesora titular de universidad.

José Luis Lupiáñez Gómez
Profesor ayudante doctor.

Alexander Maz Machado
Profesor contratado doctor.

Marta Molina González
Profesora ayudante doctora.

Juan Luis Pareja Pérez
Profesor titular de escuela universitaria.

Luis Rico Romero (coord.)
Catedrático de universidad.

Juan Francisco Ruiz Hidalgo
Profesor de Secundaria y profesor sustituto de universidad.

Francisco Ruiz López
Profesor titular de universidad.

Isidoro Segovia Alex (coord.)
Profesor titular de universidad.

Luis Serrano Romero
Profesor titular de universidad.

Manuel Torralbo Rodríguez
Profesor titular de universidad.

Índice

Introducción

Este libro, dirigido a maestros en formación, viene impulsado por los cambios que se han producido recientemente en las enseñanzas universitarias. Desde el curso 2010-2011, las universidades españolas han adecuado sus titulaciones al marco establecido por el Espacio Europeo de Educación Superior (EEES). A partir de esa fecha los títulos universitarios se transforman en grados, sustituyendo a las anteriores licenciaturas y diplomaturas. El EEES, que parte de la Declaración de Bolonia, firmada por 29 países europeos, entre ellos España, tiene como objetivo estructural la adopción de un sistema de titulaciones flexible, fácilmente comprensible y comparable, el establecimiento del sistema de créditos común: Sistema Europeo de Transferencia de Créditos, ECTS (European Credit Transfer System) y la promoción de referencias comunes europeas para la Educación Superior, con particular énfasis en la cooperación curricular y el fomento de la empleabilidad.

Además de un cambio estructural, la nueva organización de las enseñanzas universitarias supone, principalmente, un cambio en sus procesos de enseñanza y aprendizaje. La incorporación del crédito ECTS centra la docencia en el trabajo del estudiante e implica un cambio en su actitud y motivación, ya que deja de ser mero receptor de conocimientos (docencia basada en la enseñanza) para asumir una actitud activa y autónoma (docencia basada en el aprendizaje), con un sistema de formación basado en competencias. Del mismo modo, también cambia la función del profesorado dentro de este nuevo marco educativo. La labor fundamental del profesor universitario consistirá en enseñar a aprender, no se limitará a transmitir conocimientos. El profesor fomentará en el estudiante universitario la adquisición de nuevos conocimientos, capacidades y destrezas que le permitan responder adecuadamente a las demandas de su futuro desempeño profesional y progresar humana y académicamente. La idea de competencia, que ha irrumpido recientemente en todos los niveles de enseñanza, responde a estas demandas y recoge estas apreciaciones.

Con el Grado de Maestro en Educación Primaria se produce un cambio importante en la consideración de la formación del maestro generalista. Dentro de los conocimientos profesionales requeridos para ser maestro de Primaria, se fortalecen los relativos a las áreas curriculares de la Educación Primaria, entre las que destaca la matemática escolar, sobre la cual trata este libro. Este planteamiento responde a la nueva filosofía de enseñanza.

Un maestro de Educación Primaria debe conocer, entender y utilizar aquellas nociones matemáticas que ha de enseñar y transmitir a sus futuros alumnos de Primaria, con el nivel de reflexión y la amplitud de análisis requeridos para desenvolverse con soltura en una clase de Primaria. Este requerimiento va más allá de un mero conocimiento conceptual y procedimental de las matemáticas. Significa, en primer lugar, saber qué matemáticas han de aprender los alumnos de Educación Primaria; supone conocer qué motiva el surgimiento de conceptos y procedimientos matemáticos en un determinado momento de la historia, y a qué problemas responde. También requiere conocer cuáles son sus significados, qué sistemas de representación se emplean para su manejo, cuáles son los fenómenos de los que surgen y con los que están relacionados y en qué contextos y situaciones se aplican. Un futuro maestro de matemáticas debe entender, igualmente, cuál es la justificación de sus reglas y procedimientos, cuáles son los modos de razonamiento y argumentación básicos en estos niveles, cuáles son los problemas que resuelven y cuáles son las estrategias básicas para su resolución.

Este libro aborda estas cuestiones en cada uno de los contenidos de matemáticas que se trabajan en Educación Primaria, es decir, números naturales, enteros y racionales, geometría del plano y del espacio, magnitudes y su medida, estadística y probabilidad.

El libro está estructurado en diecisiete capítulos: un tema general de introducción sobre qué son y qué significan las matemáticas escolares y cuál debe ser la formación de un maestro, ocho temas de aritmética, cuatro de geometría, dos temas de medida, uno de estadística y otro de probabilidad. En cada tema se incluyen y desarrollan los conceptos y procedimientos asociados, los diferentes sistemas de representación y técnicas de modelización, las situaciones y contextos de donde surgen y se aplican los conceptos y procedimientos, los materiales y recursos usuales y algunas referencias de carácter histórico. Todos los temas incluyen un listado de actividades y problemas donde el alumno puede ejercitarse. Estos contenidos constituyen un primer nivel de formación del maestro de Educación Primaria, imprescindibles para una posterior formación didáctica complementaria relativa a los mismos contenidos.

La estructura de cada uno de los capítulos es similar. A medida que se avanza en el tema se proponen al estudiante actividades que le muestren el alcance de los conocimientos que ha adquirido. También, en ocasiones, se pide ampliar determinada información y se proporcionan sugerencias sobre dónde localizarla. Cada tema, además, añade una breve bibliografía específica para una mayor profundización. Al finalizar cada capítulo se presenta un listado de actividades complementarias para discutir y debatir en clase, que además permiten al alumno autoevaluarse. Finalmente, se introduce un conjunto amplio de actividades de investigación y reflexión.

En la línea de las nuevas orientaciones para la enseñanza universitaria, el libro persigue proporcionar autonomía al estudiante para maestro de Primaria. Además, se propone implicarle más en el desarrollo de las clases mediante una lectura previa del tema. Al formador le va a permitir, igualmente, organizar su enseñanza sin estar subordinado a la clase magistral, centrado en la resolución de dificultades y en la animación y coordinación de la discusión y el debate.

Muchos de los autores de los diferentes capítulos tienen una considerable experiencia docente e investigadora relativa a las matemáticas escolares y a su enseñanza en las carreras de maestro. Esta experiencia, que en muchos casos acumula varios sexenios, se ve complementada con la aportación y la visión de un profesorado joven, el cual aporta una perspectiva clara y actualizada de cuáles son los retos del futuro y cómo mejorar la enseñanza. Los capítulos han sido discutidos y debatidos por el conjunto de los autores, que han puesto en el libro su experiencia profesional y su voluntad de renovar la enseñanza y formar maestros que sean profesionales competentes en la enseñanza de las matemáticas.

Granada, junio de 2011.

1 Las matemáticas y el maestro de Primaria

LUIS RICO ROMERO
ÁNGEL DÍEZ LOZANO

Figura 1.1.—Aulas de matemáticas: alumnos y profesores. A lo largo y ancho del mundo, en todos los países y para todas las culturas.

Mediante la educación, cada generación transmite parte de su herencia cultural básica a las generaciones más jóvenes, la cual incluye a las matemáticas. Las matemáticas forman parte del patrimonio cultural de la humanidad, del conocimiento y de los valores comunes, de las normas y de la actividad compartida. Los escolares de todos los países llevan a cabo, durante su período de formación obligatoria, un aprendizaje en matemáticas. Por ello los currículos de todos los sistemas educativos la incluyen en sus programas. En cualquier centro, en cualquier escuela, bajo las formas y expresiones más diversas, encontramos matemáticas en las aulas.

Las estrategias, recursos y medios para la formación de niños y jóvenes incorporan el aprendizaje de las matemáticas en el período de la educación obligatoria. Enseñar matemáticas es parte del trabajo que profesores y alumnos comparten.

Dentro del sistema escolar tiene lugar parte importante de la formación matemática de los escolares, y por ello la institución escolar debe promover las condiciones para que los más jóvenes lleven a cabo su construcción del conocimiento matemático mediante la elaboración de significados simbólicos compartidos. La escuela debe ocuparse de que las nuevas generaciones sean iniciadas en los recursos matemáticos utilizados socialmente y en la red de significados o visión del mundo en que se encuentran enclavados; esto es, debe organizar unos modos de práctica matemática. Esta tarea se lleva a cabo en el sistema escolar mediante las matemáticas escolares.

Iniciamos este capítulo presentando las competencias del profesor de matemáticas de Primaria, entre las cuales destaca el conocimiento de las matemáticas escolares. La introducción a las matemáticas escolares se inicia con la revisión del papel que éstas desempeñan en el sistema educativo, los fines de la educación matemática y los porqué de su presencia en la educación. Continúa el capítulo con una descripción general del plan de formación establecido para los escolares de Primaria en el sistema educativo: qué conocimientos, para qué aprendizajes, cómo planificarlos y desarrollarlos en el aula, y qué logros finales deben alcanzarse. Las matemáticas escolares están centradas en unos contenidos determinados y en los modos en que éstos se enseñan y se aprenden; estas nociones vienen establecidas inicialmente por el currículo oficial. En el siguiente apartado se presenta el enfoque curricular actual, basado en la competencia matemática básica, y se compara con otros enfoques posibles. La opción por el enfoque funcional caracteriza los conocimientos matemático como herramientas para resolver problemas en contexto. También incluye la consideración cognitiva del conocimiento matemáticos según conceptos, procedimientos y actitudes. Finalmente, dedicamos un último apartado al análisis de contenido, que estudia los posibles significados del conocimiento matemático. Éste va a ser el modo en que vamos a trabajar los conceptos y procedimientos de cada uno de los distintos capítulos. Las ideas de este apartado se concretan, desarrollan y ejemplifican en los distintos temas, mostrando el modo en el que los maestros de Primaria deben entender las matemáticas escolares.

1. COMPETENCIAS DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS DE PRIMARIA

Enseñar matemáticas es parte integrante de la actividad profesional del Maestro de Primaria. Por ello mismo la formación en matemáticas y en su didáctica es parte imprescindible de la formación inicial de los futuros profesores, de los Maestros de Educación Primaria, quienes desempeñan un papel determinante en la formación matemática de los escolares.

Entre las diversas competencias instrumentales, personales, sistémicas y disciplinares que delimitan el perfil profesional del Maestro de Primaria se encuentra una serie detallada de competencias profesionales que afectan a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Entre las competencias establecidas por el Libro Blanco del Título de Magisterio (MEC, 2005), destacan las competencias generales 19 y 22, cuyos enunciados dicen:

- **CG 19.** Comprender y relacionar los conocimientos generales y especializados propios de la profesión teniendo en cuenta tanto su singularidad epistemológica como la especificidad de su didáctica.
- **CG 22.** Conocer los fundamentos científicos y didácticos de cada una de las áreas y las competencias curriculares de la Educación Primaria: su proceso de construcción, sus principales esquemas de conocimiento, la relación interdisciplinar entre ellas, los criterios de evaluación y el cuerpo de conocimientos didácticos en relación con los procedimientos de enseñanza y aprendizaje respectivos.

En este sentido, las matemáticas escolares básicas forman parte de los conocimientos especializados propios de la profesión de maestro, ya que son fundamento del área curricular de matemáticas y de la competencia escolar básica correspondiente para la Educación Primaria. Estudios internacionales llevados a cabo por expertos han considerado cuatro componentes disciplinares centrales para la formación inicial del profesor de matemáticas de Educación Primaria: Conocimiento Pedagógico, Matemáticas escolares, Didáctica de la matemática y Matemáticas avanzadas (IEA, 2008).

Por ello, el Maestro de Primaria necesita disponer de unos fundamentos científicos y unas bases didácticas sobre matemáticas, sobre su proceso de construcción, de sus principales esquemas de conocimiento y su relación interdisciplinar con otras áreas. Los requerimientos establecidos para que el futuro profesor de matemáticas desarrolle su competencia para ejercer de manera solvente su profesión exigen una base de formación centrada en las Matemáticas escolares y en la Didáctica de la matemática. Sostenemos que un nivel avanzado en estos conocimientos es imprescindible para abordar las tareas profesionales establecidas por las siguientes competencias específicas del Título de Maestro:

- **C1.** Conocer las áreas curriculares de la Educación Primaria, su relación interdisciplinar, los criterios de evaluación y el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procedimientos de enseñanza y aprendizaje respectivos.
- **C2.** Diseñar, planificar y evaluar procesos de enseñanza y aprendizaje, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales del centro.
- **C4.** Diseñar y regular espacios de aprendizaje en contextos de diversidad que atiendan a la igualdad de género, a la equidad y al respeto a los derechos humanos que conformen los valores de la formación ciudadana.

1.1. Competencias específicas de formación básica

Con mayor detalle, las competencias específicas de la titulación de Maestro, comunes a todas las universidades españolas, se definen en el Anexo II de la Orden ECI/3857/2007 (MEC, 2007). Estas competencias se organizan en diez módulos correspondientes a diferentes áreas de conocimiento. Las relativas a matemáticas se detallan en el sexto módulo y son las siguientes:

- **CDM 6.1.** Adquirir competencias matemáticas básicas (numéricas, cálculo, geométricas, representaciones especiales, estimación y medida, organización e interpretación de la información, etc.).
- **CDM 6.2.** Conocer el currículo escolar de matemáticas.
- **CDM 6.3.** Analizar, razonar y comunicar propuestas matemáticas.
- **CDM 6.4.** Plantear y resolver problemas vinculados con la vida cotidiana.
- **CDM 6.5.** Valorar la relación entre matemáticas y ciencias como uno de los pilares del pensamiento científico.
- **CDM 6.6.** Desarrollar y evaluar contenidos del currículo mediante recursos didácticos apropiados y promover las competencias correspondientes en los estudiantes.

Las competencias enumeradas subrayan que los conocimientos profesionales requeridos para ser profesor de matemáticas en Primaria abarcan:

> «Unos determinados conocimientos, conceptuales y procedimentales, que se centran, en cada caso, en los contenidos disciplinares y en los conocimientos epistemológicos y didácticos propios de la disciplina, en los conocimientos sobre planificación y organización del trabajo escolar, sobre el análisis y síntesis didácticos de los contenidos disciplinares, sobre el papel de la resolución de problemas en la disciplina, así como de las estrategias para la toma de decisiones, diseño de tareas e instrumentos de evaluación» (Lupiáñez, 2009).

El extenso listado de competencias, considerado según distintos niveles, pone de manifiesto la complejidad de los requerimientos profesionales que se establecen para los futuros profesores de Educación Primaria, singularmente para su trabajo como profesores de matemáticas. Aunque todas las competencias son importantes para el desarrollo de la labor docente de los maestros, en nuestro caso cobran especial importancia las referidas a matemáticas.

Este libro está escrito para presentar de manera organizada aquellos conocimientos básicos necesarios para la formación inicial del maestro de Educación Primaria como futuro profesor de matemáticas. Su objetivo es aportar conocimientos, estrategias y habilidades útiles para el desarrollo y logro de distintas competencias profesionales, singularmente las competencia de planificación del currículo de matemáticas.

2. FINES DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

El sistema educativo es un servicio público establecido para ayuda y provecho de los ciudadanos. Sus fines y principios están socialmente determinados y subordinan a cualesquiera otras metas y objetivos que, en su ámbito, puedan considerarse. Las leyes que regulan el sistema educativo establecen el enunciado de sus finalidades.

«El sistema educativo español se orientará a la consecución de los siguientes fines:

a) El pleno desarrollo de la personalidad y de las capacidades de los alumnos.
b) La educación en el respeto de los derechos y libertades fundamentales, en la igualdad de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres y en la igualdad de trato y no discriminación de las personas con discapacidad.
c) La educación en el ejercicio de la tolerancia y de la libertad dentro de los principios democráticos de convivencia, así como en la prevención de conflictos y la resolución pacífica de los mismos.
d) La educación en la responsabilidad individual y en el mérito y esfuerzo personal.
e) La formación para la paz, el respeto a los derechos humanos, la vida en común, la cohesión social, la cooperación y solidaridad entre los pueblos, así como la adquisición de valores que propicien el respeto hacia los seres vivos y el medio ambiente, en particular al valor de los espacios forestales y el desarrollo sostenible.
f) El desarrollo de la capacidad de los alumnos para regular su propio aprendizaje, confiar en sus aptitudes y conocimientos, así como para desarrollar la creatividad, la iniciativa personal y el espíritu emprendedor.
g) La formación en el respeto y reconocimiento de la pluralidad lingüística y cultural de España y de la interculturalidad como un elemento enriquecedor de la sociedad.
h) La adquisición de hábitos intelectuales y técnicas de trabajo, de conocimientos científicos, técnicos, humanísticos, históricos y artísticos, así como el desarrollo de hábitos saludables, el ejercicio físico y el deporte.
i) La capacitación para el ejercicio de actividades profesionales.
j) La capacitación para la comunicación en la lengua oficial y cooficial, si la hubiere, y en una o más lenguas extranjeras.
k) La preparación para el ejercicio de la ciudadanía y para la participación activa en la vida económica, social y cultural, con actitud crítica y responsable y con capacidad de adaptación a las situaciones cambiantes de la sociedad del conocimiento» (LOE, art. 2, 2006).

La enseñanza de las matemáticas no es ajena a estos fines generales de la educación. Los fines que se establecen para la educación matemática contribuyen a la consecución de estas finalidades. Desde una perspectiva global, se requiere que la enseñanza de las matemáticas atienda las necesidades formativas y el desarrollo de las capacidades cognitivas y afectivas de los escolares. También se demanda la atención hacia las finalidades sociales, que comprenden el dominio de destrezas matemáticas básicas por todos los ciudadanos y la formación de profesionales cualificados, productores de conocimientos matemáticos. Las finalidades culturales forman parte de la disposición que debe tener la enseñanza de las matemáticas hacia la naturaleza histórica, incompleta y culturalmente mediada del conocimiento matemático, así como de sus conexiones con otras ramas del conocimiento. Finalmente, la enseñanza de las matemáticas debe estar guiada por principios éticos, encaminada a la consecución de valores democráticos y vinculada al ejercicio fundado de la crítica.

ACTIVIDAD 1: Justifica brevemente y de forma razonada la vinculación que puede establecerse entre la enseñanza de las matemáticas y cada una de las finalidades generales establecidas.

El debate sobre los fines de la educación matemática está y ha estado presente a lo largo de los cambios y reformas del currículo de matemáticas. Su definición es de la mayor importancia: las finalidades determinan todo el plan que establece cada currículo, afectan a las expectativas sobre el aprendizaje de los escolares, al modo de entender e interpretar el conocimiento matemático, al papel y la actividad del profesor, al modo de organización del aula y de las tareas escolares y, también, a los principios, criterios e instrumentos para valorar los logros y aprendizajes alcanzados.

Los debates sobre las finalidades de la educación matemática son abiertos, participativos y vigorosos. En ellos intervienen agentes sociales y políticos, pensadores y académicos, investigadores y gestores, matemáticos y educadores, sindicales y familiares.

Las prioridades que han estado en el centro de estos debates han variado en sus énfasis a lo largo del tiempo, pero se han sintetizado en dos: educar personas y formar ciudadanos y profesionales competentes:

> «Se entienden las matemáticas como un conjunto de ideas y formas de actuar que conllevan no sólo utilizar cantidades y formas geométricas, sino, y sobre todo, hacerse preguntas, obtener modelos e identificar relaciones y estructuras, de modo que, al analizar los fenómenos y situaciones que se presentan en la realidad, se puedan obtener informaciones y conclusiones que inicialmente no estaban explícitas. Concebidas de esta forma, las matemáticas incorporan las características que les han sido tradicionalmente asignadas y que se identifican con la deducción, la precisión, el rigor, la seguridad, etc. También son inducción, estimación, aproximación, probabilidad y tentativa, y la capacidad de enfrentarse a situaciones abiertas, sin solución única y cerrada. Todo ello se refleja en la doble función que se viene dando al aprendizaje escolar de las matemáticas: se aprende matemáticas porque son útiles en otros ámbitos (en la vida cotidiana, en el mundo laboral, para aprender otras cosas...) y, también, por lo que su aprendizaje aporta a la formación intelectual general, en concreto destrezas susceptibles de ser utilizadas en una amplia gama de casos particulares, y que contribuyen por sí mismas a potenciar capacidades cognitivas de niños y niñas» (MEC, 2007).

ACTIVIDAD 2: Escribe una lista personal de finalidades a las que debe responder la enseñanza de las matemáticas en el sistema educativo para los estudiantes de Primaria. Comparte y revisa con tus compañeros esta reflexión y elaborad, conjuntamente, una propuesta de trabajo en grupo.

2.1. Fines de la educación, enseñanza de las matemáticas y conocimiento profesional

Los fines de la educación ponen de manifiesto que la formación matemática es propia de los intereses y la afectividad de los jóvenes. El educador contribuye de manera determinante a iniciar a los niños y adolescentes en la cultura de la comunidad a la que pertenecen, a introducirles en sus valores sociales. De esta cultura forma parte el conocimiento matemático, cuya transmisión debe realizarse adecuadamente.

El profesor de matemáticas requiere dominar los contenidos escolares, pero este dominio no se puede limitar a recordar aquellos conocimientos que recibió como estudiante en su momento. El dominio más o menos experto de conceptos y procedimientos de las matemáticas, por sí sólo, no es suficiente para enseñar matemáticas.

El profesor de matemáticas es un profesional con competencias específicas, responsable de dirigir y orientar la formación de los jóvenes en este campo; no podemos confundirlo con un alumno brillante. El profesor de matemáticas necesita de un conocimiento profesional específico que le dote de autonomía intelectual, que le permita valorar críticamente las propuestas de la administración y los materiales y libros elaborados por editoriales y casas comerciales, con criterio suficiente para seleccionar o elaborar sus propios materiales. Para ello necesita ampliar sus perspectivas sobre los contenidos del currículo de matemáticas de manera que su consideración no sea exclusivamente formal y técnica. No hay que olvidar que, cuando el profesor cierra la puerta de su aula, es artífice y responsable principal de cuanto allí ocurre; de ahí la importancia de una preparación adecuada.

3. CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS PARA EDUCACIÓN PRIMARIA

Los planes de formación para los escolares de Educación Primaria los determina su currículo. El concepto de currículo se entiende como *toda actividad de planificar y poner en práctica un programa de formación.* Documentos y estudios curriculares muestran que la noción es adecuada para caracterizar y estudiar cada programa de formación dentro del sistema educativo y para establecer comparaciones entre distintos países (Comisión Europea, 2010).

En tanto que herramienta propia para elaborar y llevar a cabo un plan de formación, el currículo se presenta al profesor mediante documentos y propuestas. Estos proyectos corresponden a un nivel de reflexión ligado a la práctica; se refieren a las directrices sobre el plan de formación que debe tener lugar en el aula. En este nivel, el currículo es el instrumento principal de trabajo del que dispone un profesor, como agente encargado de llevar a cabo el plan de formación de sus estudiantes con ámbito de actuación en el aula.

La legislación *entiende por currículo el conjunto de los objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada una de las enseñanzas* (LOE, art. 6.1, 2006).

Singularmente, la noción de currículo caracteriza la formación matemática de los escolares durante el período de la educación obligatoria. El plan de formación de los escolares en matemáticas viene determinado por cinco componentes curriculares:

- Unos objetivos.
- Unas competencias básicas.
- Unos contenidos.
- Una metodología.

- Y unos criterios e instrumentos de evaluación siguiendo la normativa que establece el currículo y que regula la ordenación de la Educación Primaria. Vamos a considerar estos componentes.

3.1. Objetivos del currículo de matemáticas para Educación Primaria

«La enseñanza de las matemáticas en esta etapa tiene como objetivo general el desarrollo de las siguientes capacidades:

1. Utilizar el conocimiento matemático para comprender, valorar y producir informaciones y mensajes sobre hechos y situaciones de la vida cotidiana y reconocer su carácter instrumental para otros campos de conocimiento.
2. Reconocer situaciones de su medio habitual, para cuya comprensión o tratamiento se requieran operaciones elementales de cálculo, formularlas mediante formas sencillas de expresión matemática o resolverlas utilizando los algoritmos correspondientes, valorar el sentido de los resultados y explicar oralmente y por escrito los procesos seguidos.
3. Apreciar el papel de las matemáticas en la vida cotidiana, disfrutar con su uso y reconocer el valor de actitudes como la exploración de distintas alternativas, la conveniencia de la precisión o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
4. Conocer, valorar y adquirir seguridad en las propias habilidades matemáticas para afrontar situaciones diversas, que permitan disfrutar de los aspectos creativos, estéticos o utilitarios y confiar en sus posibilidades de uso.
5. Elaborar y utilizar instrumentos y estrategias personales de cálculo mental y medida, así como procedimientos de orientación espacial en contextos de resolución de problemas, decidiendo, en cada caso, las ventajas de su uso y valorando la coherencia de los resultados.
6. Utilizar de forma adecuada los medios tecnológicos tanto en el cálculo como en la búsqueda, tratamiento y representación de informaciones diversas.
7. Identificar formas geométricas del entorno natural y cultural utilizando el conocimiento de sus elementos y propiedades para describir la realidad y desarrollar nuevas posibilidades de acción.
8. Utilizar técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones de su entorno; representarla de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.» (MEC, 2007)

ACTIVIDAD 1: Resume cinco de las ideas más importantes que, según tu criterio, recogen los objetivos de matemáticas para Primaria.

Los descriptores elegidos para expresar las expectativas de aprendizaje destacan el carácter funcional, de herramientas en uso y de los conocimientos matemáticos para abordar y dar respuesta a situaciones de la vida cotidiana. El aprendizaje esperado se destaca mediante un uso de los conocimientos en contexto y el desarrollo de cierta complejidad cognitiva.

3.2. Competencias básicas

El programa de la LOE añade un nuevo e importante componente curricular: las competencias básicas y específicas, como expectativas de aprendizaje a largo plazo, cuyo desarrollo se logra paulatinamente y que organizan los aprendizajes escolares.

«La incorporación de competencias básicas al currículo pone el acento en los aprendizajes que se consideran imprescindibles, desde un planteamiento integrador y orientado a la aplicación de los saberes adquiridos. De ahí su carácter básico. Son aquellas competencias que se deben haber desarrollado al finalizar la enseñanza obligatoria para la realización personal, ejercer la ciudadanía activa, incorporarse a la vida adulta de manera satisfactoria y ser capaz de un aprendizaje permanente a lo largo de la vida.

La inclusión de las competencias básicas en el currículo tiene varias finalidades. En primer lugar, integrar los diferentes aprendizajes, tanto los formales, de las diferentes áreas o materias, como los informales y no formales. En segundo lugar, ponerlos en relación con distintos tipos de contenidos y utilizarlos de manera efectiva cuando resulten necesarios en situaciones y contextos diferentes. Por último, orientar la enseñanza, al identificar los contenidos y los criterios de evaluación que tienen carácter imprescindible, en general, inspirar las decisiones relativas al proceso de enseñanza y de aprendizaje.

Con las áreas y materias del currículo se pretende que todos los alumnos y las alumnas alcancen los objetivos educativos y, consecuentemente, también que adquieran las competencias básicas. Sin embargo, no existe una relación unívoca entre la enseñanza de determinadas áreas o materias y el desarrollo de ciertas competencias. Cada una de las áreas contribuye al desarrollo de diferentes competencias y, a su vez, cada una de las competencias básicas se alcanzará como consecuencia del trabajo en varias áreas o materias.»

ACTIVIDAD 2: Objetivos específicos y competencias comparten algunas características, pero son distintos. Establece, al menos, cuatro semejanzas y cuatro diferencias entre los objetivos y las competencias. Razona por qué pueden confundirse objetivos específicos y competencias.

Competencia matemática básica

«La competencia matemática en el currículo español consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral.

Forma parte de la competencia matemática la habilidad para interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones, y favorecer la participación efectiva en la vida social.

Asimismo, esta competencia implica el conocimiento y manejo de los elementos matemáticos básicos (distintos tipos de números, medidas, símbolos, elementos geométricos, etc.) en situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana, y la puesta en práctica de procesos de razonamiento que llevan a la solución de los problemas o a la obtención de información. Estos procesos permiten aplicar esa información a una mayor variedad de situaciones y contextos, seguir cadenas argumentales identificando las ideas fundamentales, y estimar y enjuiciar la lógica y validez de argumentaciones e informaciones. En consecuencia, la competencia matemática supone la habilidad para seguir determinados procesos de pensamiento (como la inducción y la deducción, entre otros) y aplicar algunos algoritmos de cálculo o elementos de la lógica, lo que conduce a identificar la validez de los razonamientos y a valorar el grado de certeza asociado a los resultados derivados de los razonamientos válidos.

La competencia matemática implica una disposición favorable y de progresiva seguridad y confianza hacia la información y las situaciones (problemas, incógnitas, etc.) que contienen elementos o soportes matemáticos, así como hacia su utilización cuando la situación lo aconseja, basadas en el respeto y el gusto por la certeza y en su búsqueda a través del razonamiento.

Esta competencia cobra realidad y sentido en la medida que los elementos y razonamientos matemáticos son utilizados para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los precisan. Por tanto, la identificación de tales situaciones, la aplicación de estrategias de resolución de problemas y la selección de las técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar la realidad a partir de la información disponible están incluidas en ella. En definitiva, la posibilidad real de utilizar la actividad matemática en contextos tan variados como sea posible. Por ello, su desarrollo en la educación obligatoria se alcanzará en la medida en que los conocimientos matemáticos se apliquen a una amplia variedad de situaciones, provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana.

El desarrollo de la competencia matemática al final de la educación obligatoria conlleva utilizar espontáneamente —en los ámbitos personal y social— los elementos y razonamientos matemáticos para interpretar y producir información, para resolver problemas provenientes de situaciones cotidianas y para tomar decisiones. En definitiva, supone aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas de apoyo adecuadas, e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para dar una mejor respuesta a las situaciones de la vida de distinto nivel de complejidad» (MEC, 2007).

ACTIVIDAD 3: Resume las ideas principales que encuentres en los seis párrafos con los que el Ministerio de Educación caracteriza la competencia matemática.

Esta extensa caracterización de la competencia matemática se ha resumido de diversas maneras.

El estudio PISA define la alfabetización o competencia matemática de los escolares como «la capacidad individual para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas, y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo» (OCDE, 2003).

Nosotros la hemos resumido así:

- La competencia matemática muestra la *habilidad para el uso de conceptos y procedimientos matemáticos diversos,* con el fin de *producir, interpretar y expresar información* en términos matemáticos, *ampliar el conocimiento* y *abordar y resolver problemas*.
- La competencia matemática *incluye conocimientos matemáticos básicos y procesos de razonamiento,* desde algoritmos de cálculo a la validación de razonamientos lógicos.
- La competencia matemática supone capacidad para *aplicar los conocimientos matemáticos a una variedad de situaciones y contextos*.

- La competencia matemática incluye *actitudes positivas,* basadas en el rigor y la certeza que aportan los razonamientos bien hechos.

Competencias matemáticas específicas

Cognitivamente, en las matemáticas escolares se pueden considerar varias competencias específicas. Entre ellas, destacan:

1. La consideración de las matemáticas como instrumento potente de comunicación, que muestra la competencia de *comunicar*.
2. La apuesta por la inteligibilidad del mundo, que subrayan las capacidades de *pensar y razonar*.
3. La consideración de la matemática como lenguaje de la ciencia, que destaca la competencia de *modelizar*.
4. La consideración de la matemática como lenguaje de la técnica, donde destacan las capacidades para *usar herramientas y tecnología*.
5. La importancia del reto, el desafío y la curiosidad como motivación para abordar cuestiones no resueltas, en que consiste la competencia de *resolver problemas*.
6. La valoración prioritaria de la objetividad, veracidad y equidad, que conlleva las competencias de *argumentar y justificar*.
7. La profundidad en la abstracción de ideas, la simbolización, la creatividad y la percepción de belleza, que se muestran en la competencia de *representar*.
8. El gusto por la precisión, el dominio de las reglas y el rigor, que destacan al *utilizar reglas, procedimientos y algoritmos*.

Estas competencias matemáticas específicas caracterizan la competencia básica en la escuela.

3.3. Contenidos del currículo de matemáticas para Educación Primaria

Los contenidos matemáticos, es decir, los conceptos y procedimientos que se manejan en matemáticas, constituyen un componente especialmente importante, sobre el cual está centrado este libro. Los conceptos son las ideas con las que pensamos; los procedimientos son los modos y técnicas con que se usan dichas ideas. También se consideran las actitudes, entendidas como una predisposición aprendida de los estudiantes para responder de manera positiva, o negativa, a las matemáticas, lo cual influye en su comportamiento ante la materia. Las actitudes como contenidos tienen una componente cognitiva, y tratan de mejorar la predisposición de los alumnos y favorecer sus emociones positivas.

En una etapa tan importante como es la Educación Primaria para la formación de los escolares, la delimitación de los contenidos matemáticos es de una importancia singular, tanto por los conceptos y procedimientos matemáticos como por las actitudes hacia ellas.

Este curso se centra en las matemáticas escolares, es decir, en los contenidos matemáticos cuando se consideran objeto de enseñanza y de aprendizaje, de ahí el relieve especial que toman los contenidos del currículo en este libro.

Bloques de contenidos

El currículo de matemáticas para Educación Primaria contempla esta materia como un área de educación. Los contenidos se organizan en cuatro bloques según el tipo de objetos matemáticos que se manejan en cada uno de ellos: Números y operaciones, Medida, Geometría y Tratamiento de la información, azar y probabilidad. Los contenidos se trabajarán de manera relacionada. La enseñanza de las matemáticas debe atender a la configuración cíclica de los contenidos relacionados, que se construyen unos sobre otros. La resolución de problemas actúa como eje vertebrador, que recorre transversalmente todos los bloques y se incluye con especial relevancia en cada uno de ellos.

«El bloque 1, *Números y operaciones,* pretende el desarrollo del sentido numérico, entendido como dominio reflexivo de las relaciones numéricas, que se puede expresar en capacidades como: habilidad para descomponer números de forma natural, comprender y utilizar la estructura del sistema de numeración decimal, utilizar las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas para realizar mentalmente cálculos. Los números se han de usar en diferentes contextos, sabiendo qué comprensión de los procesos y significado de los resultados es prioritaria frente a la destreza de cálculo. Interesa principalmente la habilidad para el cálculo con diferentes procedimientos y la decisión en cada caso sobre el que sea más adecuado. A lo largo de la etapa, se pretende que calculen con fluidez y hagan estimaciones razonables, tratando de lograr un equilibrio entre comprensión conceptual y competencia en el cálculo.

El bloque 2, *La medida: estimación y cálculo de magnitudes,* busca facilitar la comprensión de los mensajes en los que se cuantifican magnitudes y se informa sobre situaciones reales que niños y niñas deben llegar a interpretar correctamente. A partir del conocimiento de diferentes magnitudes se pasa a su medición y a la utilización de un número progresivamente mayor de unidades. Debe considerarse la necesidad de manejar la medida en situaciones diversas, así como establecer los mecanismos para efectuarla: elección de unidad, relaciones entre unidades y grado de fiabilidad. Se puede partir para ello de unidades corporales (palmo, pie), arbitrarias (cuerdas, varas) para pasar a medidas normalizadas, como superación de las anteriores.

Los contenidos del bloque 3, *Geometría,* tratan de formas y estructuras geométricas. La geometría es describir, analizar propiedades, clasificar y razonar, y no sólo definir. El aprendizaje de la geometría requiere pensar y hacer, y debe ofrecer continuas oportunidades para clasificar de acuerdo a criterios libremente elegidos, construir, dibujar, modelizar, medir, desarrollando la capacidad para visualizar relaciones geométricas. Todo ello se logra al establecer relaciones constantes con el resto de los bloques y con otros ámbitos como el mundo del arte o de la ciencia, pero también al asignar un papel relevante a la parte manipulativa a través del uso de materiales (geoplanos y mecanos, tramas de puntos, libros de espejos, material para formar poliedros, etc.) y de la actividad personal realizando plegados, construcciones, etc., para llegar al concepto a través de modelos reales. A este fin contribuyen los programas informáticos de geometría dinámica.

Los contenidos del bloque 4, *Tratamiento de la información, azar y probabilidad,* adquieren pleno significado cuando se presentan en conexión con actividades que implican a otras áreas de conocimiento. Igualmente, el trabajo ha de incidir de forma significativa en la comprensión de las informaciones de los medios de comunicación, para suscitar el interés por los temas y ayudar a valorar el beneficio que los conocimientos estadísticos proporcionan ante la toma de decisiones, normalmente sobre cuestiones que estudian otras áreas. Tienen especial importancia en el bloque los contenidos actitudinales, que favorecen la presentación de los datos de forma ordenada y gráfica, y permiten descubrir que las matemáticas facilitan la resolución de problemas de la vida diaria. A su vez, los contenidos de este bloque deben iniciar en el uso crítico de la información recibida por diferentes medios» (MEC, 2007).

ACTIVIDAD 4: Identifica cómo se corresponden los capítulos que organizan este libro con cada uno de los cuatro bloques de contenidos presentados.

3.4. Métodos pedagógicos del currículo de matemáticas para Educación Primaria

La normativa general y específica para la etapa de Primaria establece recomendaciones generales.

Normativa general para Primaria: en ella se destaca la atención a la diversidad y al seguimiento individualizado, a la prevención de dificultades y a los mecanismos de refuerzo (art. 19).

Normativa específica para Primaria. En ella se subrayan estos aspectos: sistematizar el conocimiento intuitivo; mostrar una variedad de procedimientos; enfatizar la resolución de problemas; destacar el papel experimental de las matemáticas; usar adecuadamente materiales manipulativos y otros recursos; vincular los diferentes bloques de contenido.

Específicamente, las recomendaciones metodológicas que se hacen para esta etapa son varias: «El sentido de este área (matemáticas) en Educación Primaria es eminentemente experiencial; los contenidos de aprendizaje toman como referencia lo que resulta familiar y cercano al alumnado, y se abordan en contextos de resolución de problemas y de contraste de puntos de vista. Los niños y las niñas deben aprender matemáticas utilizándolas en contextos funcionales relacionados con situaciones de la vida diaria, para adquirir progresivamente conocimientos más complejos a partir de las experiencias y los conocimientos previos. Los procesos de resolución de problemas constituyen uno de los ejes principales de la actividad matemática y deben ser fuente y soporte principal del aprendizaje a lo largo de la etapa, puesto que constituyen la piedra angular de la educación matemática. En la resolución de un problema se requieren y se utilizan muchas de las capacidades básicas: leer comprensivamente, reflexionar, establecer un plan de trabajo que se va revisando durante la resolución, modificar el plan si es necesario, comprobar la solución si se ha encontrado, hasta la comunicación de los resultados» (MEC, 2007).

3.5. Criterios de evaluación

La normativa marca unos criterios generales para la etapa y otros específicos para el área respecto a la evaluación.

Criterios generales para la evaluación en Primaria son: La evaluación debe ser continua y global, y tendrá en cuenta el progreso en el conjunto de las áreas (art. 20). La Administración realizará pruebas anuales de diagnóstico (art. 21).

La ley incluye criterios de evaluación específicos para cada una de las materias. Estos criterios aparecen en los Decretos que regulan las enseñanzas mínimas para Educación Primaria. Estos criterios muestran un cambio importante en la organización curricular marcada por la ley. Para los tres ciclos del área de matemáticas se establecen 24 criterios de evaluación.

Cuatro de ellos están centrados en la resolución de problemas y aluden a valorar y aplicar estrategias, anticipar soluciones, expresar los procedimientos y formular y resolver problemas.

Ejemplos:

Primer Ciclo: «11. Resolver problemas sencillos relacionados con objetos, hechos y situaciones de la vida cotidiana, seleccionando las operaciones de suma y resta en las que intervengan números naturales (hasta tres dígitos) y utilizando los algoritmos básicos correspondientes u otros procedimientos de resolución. Explicar oralmente el proceso seguido para resolver un problema. Con este criterio se pretende evaluar la capacidad de seleccionar y aplicar la operación adecuada a la situación problemática a resolver. Es asimismo importante observar la capacidad de emplear más de un procedimiento y la madurez que se manifiesta en la expresión oral y escrita del proceso de resolución.»

Tercer Ciclo: «11. En un contexto de resolución de problemas sencillos, anticipar una solución razonable y buscar los procedimientos matemáticos más adecuados para abordar el proceso de resolución. Valorar las diferentes estrategias y perseverar en la búsqueda de datos y soluciones precisas, tanto en la formulación como en la resolución de un problema. Expresar de forma ordenada y clara, oralmente y por escrito, el proceso seguido en la resolución de problemas. Este criterio está dirigido especialmente a comprobar la capacidad en la resolución de problemas, atendiendo al proceso seguido. Se trata de verificar que ante un problema los alumnos y las alumnas tratan de resolverlo de forma lógica y reflexiva y comprobar que comprenden la importancia que el orden y la claridad tienen en la presentación de los datos y en la búsqueda de la solución correcta, para detectar los posibles errores, para explicar el razonamiento seguido y para argumentar sobre la validez de una solución.»

ACTIVIDAD 5: Redacta un ejercicio que sirva como ejemplo de evaluación para cada uno de los dos criterios anteriores sobre la resolución de problemas; ten en cuenta el ciclo que se considera.

Otros once criterios se ocupan del cálculo y la medida con actuaciones como: usar el cálculo mental; leer, escribir y ordenar números; realizar cálculos; usar diferentes tipos de números para describir e interpretar el entorno; seleccionar y emplear distintos instrumentos de medida.

Ejemplos:

Primer Ciclo: «4. Realizar, en situaciones cotidianas, cálculos numéricos básicos con las operaciones de suma, resta y multiplicación, utilizando procedimientos diversos y estrategias personales. Este criterio trata de comprobar la capacidad de utilizar en los cálculos de sumas, restas y multiplicaciones la estructura del sistema decimal de numeración, mostrando flexibilidad a la hora de elegir el procedimiento más conveniente. Debe prestarse especial atención a la capacidad para desarrollar estrategias propias de cálculo en contextos habituales. Se valorará también la aplicación intuitiva de las propiedades de las operaciones y la capacidad de explicar oralmente los razonamientos.»

Segundo Ciclo: «2. Reconocer fracciones como partes de la unidad o de colecciones, comparar fracciones sencillas y representarlas mediante gráficos simples o en la recta numérica. Con este criterio se quiere comprobar si son capaces de comparar fracciones cuyo denominador sea 2, 3, 4, 5, 8, 10 en contextos reales, hacer corresponder números fraccionarios con su correspondiente representación gráfica y su localización en la recta numérica. Asimismo, ha de valorarse la utilización del vocabulario adecuado.»

ACTIVIDAD 6: Redacta un ejercicio que sirva como ejemplo de evaluación para cada uno de los dos criterios anteriores sobre números y operaciones; ten en cuenta el ciclo que se considera.

Otros seis criterios se dedican al bloque de Geometría para describir el entorno y reconocer formas y cuerpos geométricos en la vida cotidiana.

Ejemplos:

Primer Ciclo: «8. Reconocer en el entorno inmediato objetos y espacios con formas rectangulares, triangulares, circulares, cúbicas y esféricas y clasificarlos según diferentes criterios. Este criterio pretende valorar la capacidad de reconocer en el entorno las formas geométricas planas o espaciales más elementales. Es importante valorar la capacidad de recibir y emitir informaciones de modo oral o escrito sobre los espacios familiares, utilizando con propiedad los términos geométricos propios del ciclo.»

Segundo ciclo: «6. Obtener información puntual y describir una representación espacial (croquis de un itinerario, plano de una pista), tomando como referencia objetos familiares y utilizar las nociones básicas de movimientos geométricos para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana y para valorar expresiones artísticas. Este criterio pretende evaluar capacidades de orientación y representación espacial, teniendo en cuenta tanto el lenguaje utilizado como la representación en el plano de objetos y contextos cercanos, valorando la utilización de propiedades geométricas (alineamiento, paralelismo, perpendicularidad) como elementos de referencia para describir situaciones espaciales. Asimismo, se pretende apreciar la adecuada utilización de los movimientos en el plano, tanto para emitir y recibir informaciones sobre situaciones cotidianas como para identificar y reproducir manifestaciones artísticas que incluyan simetrías y traslaciones.»

ACTIVIDAD 7: Redacta un ejercicio que sirva como ejemplo de evaluación para cada uno de los dos criterios anteriores sobre geometría y magnitudes; ten en cuenta el ciclo que se considera.

Finalmente, hay tres criterios centrados en representaciones gráficas y en estimaciones y descripciones estadísticas.

Ejemplo:

Tercer Ciclo: «8. Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas y tablas numéricas de un conjunto de datos relativos a contextos familiares. Este criterio trata de comprobar la capacidad de recoger y registrar una información que se pueda cuantificar, de utilizar algunos recursos sencillos de representación gráfica: tablas de datos, diagramas de barras, pictogramas, polígonos de frecuencias y diagramas de sectores. También se valorará el grado de comprensión de la información así expresada mediante la comunicación oral y escrita del razonamiento seguido.»

ACTIVIDAD 8: Redacta un ejercicio que sirva como ejemplo de evaluación del criterio anterior sobre tratamiento de la información y azar; ten en cuenta el ciclo que se considera.

4. MODELO FUNCIONAL DE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

La enseñanza de las matemáticas se contempla en los sistemas educativos de todos los países del mundo. Las matemáticas son una disciplina universal, aunque se aprecian considerables diferencias en el currículo de matemáticas entre unos países y otros. Como se ha dicho, son parte del patrimonio cultural que todas las sociedades transmiten a las generaciones jóvenes.

La ubicuidad de las matemáticas en los sistemas educativos de todos los países ha dado lugar a modos diversos de fundamentar y presentar aquellos conocimientos matemáticos que se transmiten.

Enfoques curriculares

Por su cercanía a los cambios recientes en el sistema educativo español, consideramos tres enfoques generales o modos de entender el conocimiento matemático escolar:

- *Enfoque instrumental* o tecnológico, centrado en el dominio y uso de hechos, destrezas y conceptos básicos, que se toman como herramientas.
- *Enfoque estructural* o técnico, donde el conocimiento se presenta como un sistema estructurado de reglas y conceptos, formalizado y basado en la deducción.
- *Enfoque funcional* o aplicado, donde el conocimiento permite modelar situaciones reales y está orientado a responder a cuestiones y resolver problemas en diferentes contextos.

Tenemos así distintos modelos de currículo, que muestran opciones distintas de planes de formación según los conocimientos que destacan, el tipo de pensamiento que en cada caso se promueve, el peso de la argumentación y de las relaciones de comunicación, la complejidad y diversidad de capacidades contempladas y otras cuestiones consideradas en cada caso. Estos enfoques contemplan y proponen respuestas tanto para las necesidades formativas como para las sociales.

Un currículo instrumental considera los hechos, destrezas y conceptos matemáticos básicos como piezas centrales del aprendizaje; las definiciones deben estar incorporadas a la memoria de todos los escolares y las reglas y rutinas operatorias se deben ejecutar con la mayor rapidez y precisión posibles. Las expectativas de aprendizaje se enuncian preferentemente en términos de objetivos específicos de consecución inmediata y no consideran una competencia matemática general cuya consecución se produzca al término de un período formativo. En un currículo instrumental las expectativas se vinculan con contenidos matemáticos concretos, exhaustivos y detallados, que se enumeran por medio de objetivos específicos, muchas veces operativos.

Ejemplos de currículos con orientación instrumental son aquellas propuestas que se etiquetan como conductistas y que surgen periódicamente como respuesta a la preocupación social ante un fracaso escolar continuado *(Back to Basic),* o bien ante la necesidad de precisar y acotar otras propuestas genéricas o ambiciosas en exceso *(Curriculum Focal Points).* Estos enfoques tienen como fundamento una concepción instrumental de las matemáticas escolares y contemplan varios de los atributos antes mencionados. Surgen como respuesta que garantice a los escolares el logro de unos conocimientos matemáticos básicos y unas destrezas mínimas a lo largo del período de su educación obligatoria, una vez constatado el bajo rendimiento con propuestas curriculares previas más utópicas o ambiciosas.

ACTIVIDAD 1: Es usual referirse a las matemáticas como una asignatura instrumental dentro de la educación obligatoria. ¿Cómo interpretas esta afirmación?

También conocemos enfoques curriculares de orientación estrictamente formal. Entre ellos se encuentra el programa de las *Matemáticas Modernas,* que tuvo gran impacto en España durante las décadas de los años sesenta y setenta del pasado siglo. Aunque su difusión pueda parecer poco extendida en la actualidad, ocupa aún un espacio importante. Hay grupos de profesores, redes de centros y materiales escolares comerciales que mantienen en su oferta práctica programas de corte muy formal y académico. Un currículo de matemáticas puede mantener su orientación estructural sin que apenas haya que modificar sus objetivos y contenidos. Esto sucede ya que cualquier tema de matemáticas admite una organización, un tratamiento y un desarrollo basado en estructuras y el consiguiente razonamiento formal, derivando la resolución de problemas a la práctica de ejercicios de aplicación de los conceptos estudiados.

ACTIVIDAD 2: Argumenta alguna de las ventajas que puede tener un enfoque formal para el currículo de matemáticas. Explica también alguno de sus inconvenientes.

Enfoque funcional

El enfoque funcional destaca la importancia del conocimiento de las herramientas en uso. Usando una metáfora, podemos decir que lo importante para un labrador o para un mecánico es el dominio y uso práctico que haga de sus herramientas de trabajo para dar respuesta a los requerimientos y necesidades que se le propongan: labrar y reparar.

Análogamente, para un estudiante de matemáticas, lo importante al concluir su período de formación será tener un dominio y uso práctico de los contenidos matemáticos para dar respuesta a las cuestiones personales y sociales que se le planteen.

Figura 1.2.—Uso de las herramientas para atender y dar respuesta a problemas prácticos.

El enfoque funcional de las matemáticas escolares considera que los conceptos y procedimientos matemáticos tienen un *para qué* cercano y sirven para algo tangible. *Las nociones matemáticas constituyen herramientas intelectuales mediante las que actuamos para dar respuesta* *a cuestiones, problemas e interrogantes personales y del entorno*. Este enfoque centra el aprendizaje en cómo los escolares pueden utilizar los conceptos y procedimientos matemáticos en situaciones usuales de la vida cotidiana, no sólo, ni preferentemente, en el dominio puramente formal y técnico de definiciones y algoritmos. La noción de competencia matemática que considera el currículo se ajusta al enfoque funcional.

La consideración de las matemáticas como «modo de hacer» y la noción de competencia matemática básica responden a un modelo funcional sobre su enseñanza y aprendizaje. Este modelo postula que cuando el sujeto trata de abordar las tareas mediante las herramientas disponibles, moviliza y pone de manifiesto su competencia en la ejecución de los procesos correspondientes.

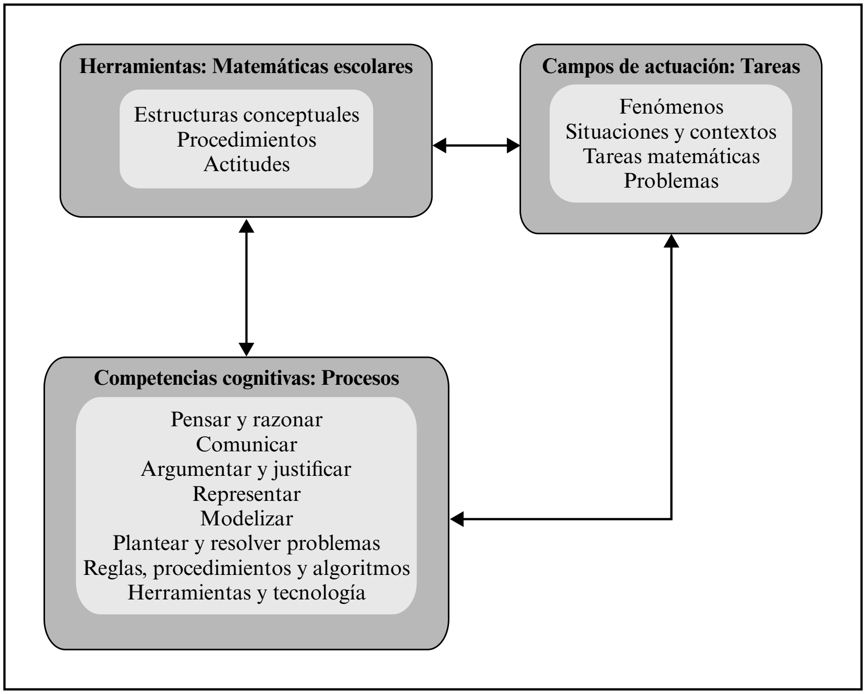


Figura 1.3.—Enfoque funcional para las matemáticas escolares.

El énfasis principal de este enfoque está en que el conocimiento matemático se moviliza y se pone en funcionamiento ante una diversidad de tareas y en una variedad de contextos diferentes por medios reflexivos, variados y basados en la actitud personal, es decir, muestra el progreso y desarrollo de competencias y capacidades cognitivas.

El modelo funcional sobre las matemáticas escolares postula que el aprendizaje requiere:

- Unas tareas contextualizadas.
- Unas herramientas conceptuales.
- Un sujeto cognitivo, que moviliza sus capacidades.

Nuestro planteamiento en este libro sigue el enfoque funcional que postula el currículo actual de matemáticas, basado en la noción de competencia.

ACTIVIDAD 3: Argumenta alguna de las ventajas que puede tener un enfoque funcional para el currículo de matemáticas. Explica también alguno de sus inconvenientes.

Herramientas matemáticas escolares

Las ideas, estructuras y conceptos matemáticos se consideran herramientas para organizar los fenómenos de los mundos natural, social, científico y mental.

¿De dónde proceden las herramientas matemáticas escolares?

Las matemáticas, como todas las disciplinas escolares, tienen un modo establecido de organizar sus contenidos que se ha configurado a lo largo de la historia del sistema educativo. El currículo de matemáticas de Primaria se compone de una serie de conceptos y procesos de razonamiento básicos e imprescindibles para el ciudadano de una sociedad que, como la actual, es cultural y técnicamente avanzada. Estos conceptos han ido evolucionando a lo largo de la historia y constituyen un patrimonio, un caudal de conocimientos socialmente aceptados. Las escuelas regulan el currículo mediante contenidos temáticos, como hemos visto en los Bloques de contenidos para Educación Primaria: Números y operaciones; Medida, estimación y cálculo; Geometría, y Tratamiento de la información, azar y probabilidad. Estos bloques organizan ramas bien establecidas del conocimiento matemático y facilitan el desarrollo estructurado de un programa. Estas ramas aportan el listado de instrumentos que proporcionaremos a los escolares de Primaria.

ACTIVIDAD 4: Todos los capítulos de este libro comienzan presentando los antecedentes históricos de un contenido específico, así como su utilidad en la sociedad actual. Elige un capítulo del libro y haz un resumen de estas ideas para el tópico que en ese capítulo se desarrolla.

Organización cognitiva de los contenidos matemáticos

Los profesores de matemáticas se ocupan del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas escolares, de ahí la importancia de considerar los contenidos también desde una perspectiva cognitiva. Para organizar el conocimiento matemático escolar con criterios cognitivos algunos expertos consideran dos grandes bloques de contenidos en las matemáticas escolares: conceptuales y procedimentales. Esta división, que se llama clasificación cognitiva del conocimiento matemático, se caracteriza del siguiente modo.

Los *conceptos* son aquellas nociones con las que pensamos; podemos distinguir tres niveles en el campo conceptual:

i) Los *hechos,* que son unidades de información y sirven como registros de acontecimientos.
ii) Los *conceptos* propiamente dichos, que describen una regularidad o relación de un grupo de hechos, suelen admitir un modelo o representación y se designan con signos o símbolos.
iii) Las *estructuras conceptuales,* que sirven para unir conceptos o relacionarlos, constituyendo conceptos de orden superior, ya que pueden establecer algún orden o relación entre conceptos no inclusivos.

Los *procedimientos* son aquellas formas de procesamiento, actuación o ejecución de tareas matemáticas; igualmente, se distinguen tres niveles diferentes en el campo de los procedimientos:

i) Las *destrezas,* que consisten en ejecutar una secuencia de reglas sobre manipulaciones u operaciones de símbolos; por lo general, las destrezas se ejecutan procesando hechos.
ii) Los *razonamientos* se presentan al procesar relaciones entre conceptos, y permiten establecer relaciones de inferencia entre los mismos.
iii) Las *estrategias,* que operan dentro de una estructura conceptual y suponen cualquier tipo de procedimiento que pueda ejecutarse, teniendo en cuenta las relaciones y conceptos implicados.

ACTIVIDAD 5: Considera estas dos sencillas ideas de las matemáticas escolares: «cuadrado» y «fracción». Describe cada una de estas dos nociones desde los tres niveles del campo conceptual y del campo procedimental.

ACTIVIDAD 6: Enumera situaciones y contextos en que aparezcan y se utilicen las nociones de «cuadrado» y de «fracción». Enuncia un problema donde aparezcan estas nociones.

ACTIVIDAD 7: Argumenta en qué sentido se puede afirmar que las nociones de «cuadrado» y de «fracción» son herramientas para las matemáticas escolares.

Cada una de las herramientas de la matemática escolar, cada contenido, se puede contemplar desde un doble punto de vista: bien como noción de un bloque determinado o bien como un conocimiento de tipo cognitivo. De este modo se considera el significado de conceptos e ideas matemáticas desde una perspectiva más amplia que la de su exclusivo encaje disciplinar y formal. El análisis de los significados de los contenidos de las matemáticas escolares necesita conocer la base cognitiva en que tales contenidos se encuadran.

5. SIGNIFICADO DE UN CONCEPTO MATEMÁTICO

5.1. Contenidos y matemáticas escolares

La hipótesis de que las ideas, estructuras y conceptos matemáticos se han generado y constituido como herramientas para organizar los fenómenos de los mundos natural, social y mental es central en el modelo funcional de las matemáticas escolares. El sistema educativo organiza y estructura dichos conceptos e ideas a los efectos de su enseñanza, y contribuye a que los ciudadanos que se encuentran en período de formación lleven a cabo su aprendizaje. Dicho aprendizaje se hace efectivo mediante el desarrollo de las capacidades y competencias antes consideradas.

Las matemáticas proporcionan significado a relaciones y expresiones abstractas que no corresponden a objetos de la naturaleza o a sus propiedades físicas, pero contemplan un marco de experiencias estructuradas relacionadas con las acciones de clasificar, contar, ordenar, situar, representar, medir, expresar armonía, buscar relaciones y regularidades, jugar y explicar. Esta idea se enuncia diciendo que las matemáticas no describen las propiedades de los objetos, sino las relaciones entre ellos.

Los términos y conceptos matemáticos por cuyo significado nos interesamos son los de las matemáticas escolares. Por tanto, los términos que se usan y los conceptos que representan corresponden a nociones socialmente útiles y culturalmente relevantes, que se transmiten por el sistema educativo para la formación de todos sus ciudadanos.

Las conexiones matemáticas internas dotan de referencia a cada noción por medio de sus vínculos con la estructura conceptual en la que dicho concepto se inserta, dotan de veracidad a su contenido y le proporcionan objetividad formal y potencial argumentativo. Las conexiones externas aportan un sentido que se basa en la experiencia propia o en la experiencia culturalmente acumulada, e incorporan modos de actuar ante situaciones, abordar problemas, procesar información y ajustarse a modelos.

En el ámbito escolar, un concepto matemático dispone de una variedad de significados. Afirmamos que esto es así porque un mismo concepto admite diversos referentes, distintas notaciones o representaciones y una pluralidad de sentidos, los cuales determinan sus posibles significados.

Veamos dos ejemplos, para las nociones de «cuadrado» y de «fracción» antes consideradas.

Un cuadrado es un polígono, es un cuadrilátero, es una figura regular y un lugar geométrico. Un cuadrado es una de las figuras que teselan el plano. Un cuadrado es la cara de un cubo, también es la cara de algunos poliedros semirregulares. Un cuadrado es una unidad de superficie, una relación métrica entre cuatro puntos. Un cuadrado es la relación que determina una ecuación de segundo grado y la figura básica que representa su solución; es la ley de una relación funcional, la relación entre la abscisa y la ordenada de un punto de una parábola, etc.

Una fracción es una relación multiplicativa entre un todo y una parte o entre dos partes distintas de un mismo todo; una fracción es la expresión de una medida o la razón entre dos medidas, es una tasa o un porcentaje, es una notación decimal; una fracción es un número racional y es un punto de la recta. Una fracción es un operador multiplicativo, es una relación de proporcionalidad, o bien la ley de una función lineal. Una fracción es una escala o una razón de semejanza.

Todos estos significados, como vemos, son posibles para un mismo contenido. Los diferentes significados se establecen según la estructura que consideremos en cada caso, las representaciones que asignemos o los problemas que queramos abordar y resolver en cada momento.

ACTIVIDAD 1: Escoge una de las siguientes nociones matemáticas e identifica y describe sus distintos significados: número natural, círculo, longitud de un segmento y probabilidad de un suceso. Trabaja individualmente y, luego, discute en grupo las ideas encontradas.

Significado de un contenido matemático

Los diferentes significados de un contenido matemático vienen dados por las estructuras conceptuales en que se inserta, por los sistemas de símbolos que lo representan y por los objetos y fenómenos de los que surge, que le dan sentido.

El significado de un contenido matemático escolar se establece mediante la terna: Definición-Representación-Fenómeno, adaptación para las matemáticas escolares de la terna Referencia-Signo-Sentido, elaborada por Frege.

No resulta difícil asumir que en matemáticas hay una multiplicidad de significados para un mismo contenido, ya que hay diversos sistemas para su representación e, igualmente, hay diversos fenómenos que dan distintos sentidos a un mismo concepto. Por eso es factible entender que hay una pluralidad de significados para un mismo concepto matemático. Determinar diversos significados, al menos los más relevantes de cada concepto, es uno de los retos de la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, tarea que han de llevar a cabo los profesores para transmitir a los estudiantes los significados prioritarios.

ACTIVIDAD 2: Describe, para cada una de las nociones de «cuadrado» y de «fracción», alguno de sus significados, destacando la estructura en que se ubica, sus sistemas de representación y alguno de los fenómenos en que se sustenta.

Conocimiento del profesor

El conocimiento del profesor en formación sobre matemáticas escolares se constituye en conocimiento experto conforme domina la pluralidad de significados de los contenidos. Esto se realiza mediante el estudio de las estructuras conceptuales en las que cada uno de los conceptos se inserta, por la determinación de los sistemas de representación mediante los cuales esos conceptos se expresan y también por la delimitación y conocimiento de las cuestiones para cuya respuesta tales conceptos fueron construidos, acotados, a su vez, por los campos en que dichos conceptos se utilizan como herramientas para plantear y resolver problemas.

Entender diferentes significados de un mismo concepto contribuye a su comprensión. Para un profesor en formación su dominio de las matemáticas escolares vendrá determinado por la riqueza de significados con que maneje cada una de las nociones básicas del currículo de las matemáticas escolares.

Cada uno de los capítulos de este libro está dedicado a presentar y desarrollar con cierta profundidad el significado de un concepto o una estructura conceptual relevante. En cada capítulo se presenta con cierta amplitud la estructura conceptual que se considera, se detallan diferentes sistemas de representación que se manejan para el estudio de esa estructura y se muestran los contextos y situaciones que dan sentido al concepto en estudio, junto con aquellos fenómeno a partir de los cuales han surgido las nociones y conceptos matemáticos que se estudian. El estudio del significado de cada estructura conceptual se presenta vinculado con la amplitud y profundidad con que dicho contenido se trabaja en la Educación Primaria. También se presenta información histórica y se hacen consideraciones sobre la evolución de los conceptos estudiados a lo largo del tiempo. Mostrar cómo, en cada época o cultura, y según determinadas necesidades, se ha trabajado un mismo concepto es una fuente segura y valiosa de información, que mejora la comprensión del significado de un determinado concepto.

5.2. Análisis de contenido

Este libro se dedica al análisis de contenido de los temas y tópicos de las matemáticas escolares, centradas en los programas establecidos para la Educación Primaria. El análisis de contenido que este libro presenta es una herramienta técnica para establecer y estudiar la diversidad de significados de los contenidos de las Matemáticas Escolares. Mediante este análisis se desarrollan las capacidades del profesor de matemáticas para establecer diversos significados de los temas matemáticos escolares, que son conocimientos necesarios para el aprendizaje de los alumnos de Primaria y para delimitar y diseñar tareas escolares basadas en la concreción de unas demandas cognitivas. El análisis de contenido contribuye destacadamente al desarrollo de capacidades profesionales del profesor de Primaria, singularmente aquellas vinculadas con su competencia de planificación.

6. EL MAESTRO DE PRIMARIA, PROFESIONAL DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Al comienzo de este capítulo hemos destacado como objetivo de este libro su contribución a las competencias profesionales del Maestro de Primaria, singularmente de aquellas requeridas para su trabajo como profesor de matemáticas.

En este capítulo nos hemos centrado en precisar las nociones de competencia matemática básica y su desglose en competencias matemáticas específicas, según establecen el currículo para la Educación Primaria y los informes relacionados con el proyecto PISA (CDM 6.1). También hemos presentado en este capítulo una síntesis de los objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación relativos al currículo de matemáticas (CDM 6.2). Hemos presentado distintos enfoques con los que se aborda el tratamiento de las matemáticas escolares por medio del sistema educativo, entre los que destaca el enfoque funcional, impulsado por el currículo actual (CDM 6.3). Ese enfoque promueve que el trabajo con los conceptos matemáticos no se reduzca a sus definiciones formales y al dominio de los algoritmos implicados, sino que, como se ha dicho, se centre igualmente sobre los fenómenos del mundo real de los que surgen tales conocimientos, de los contextos y situaciones en los que se requieren y utilizan.

Al modelo funcional no le preocupa tanto una clasificación convencional de las herramientas, es decir, centrarse en la organización de los contenidos, como destacar las herramientas por su funcionalidad, teniendo en cuenta los usos en que se ven implicadas. Hemos dedicado una reflexión a los problemas vinculados con la vida cotidiana y a su papel en el modelo funcional (CDM 6.4).

Organización de las lecciones

El tratamiento del resto de los capítulos desarrolla este marco teórico para cada uno de los 16 temas que hemos considerado prioritarios en el currículo de matemáticas de Primaria.

El guión que seguimos para cada capítulo comprende:

1. Una reflexión general sobre la utilidad y aplicabilidad de los conceptos en estudio.
2. Una consideración sobre su evolución histórica.
3. La revisión del tratamiento y presencia en el currículo del contenido en estudio.
4. La estructura conceptual de cada contenido según los conceptos y procedimientos de las matemáticas escolares. Hechos-Algoritmos (niveles de complejidad considerados). Conceptos y significados básicos.
5. Los sistemas de representación utilizados en cada tópico.
6. Estudio de los procedimientos: destrezas, razonamiento y argumentación, junto con las estrategias y los modos de procesar en cada una de las estructuras contempladas.
7. Estudio fenomenológico, centrado en aquellas cuestiones de las que surgen cada uno de los conceptos matemáticos en estudio. Resolución de problemas y aplicaciones.
8. Actividades. Ampliación y exploración. Funcionalidad del conocimiento matemático escolar.
9. Actitudes y motivación. Carácter profesional del conocimiento del maestro de Primaria sobre las matemáticas escolares. Dominio de las estructuras del currículo de matemáticas para Primaria.

2 Números naturales y sistemas de numeración

ENCARNACIÓN CASTRO MARTÍNEZ
MARTA MOLINA GONZÁLEZ

Figura 2.1.—Recreación de la vida de las personas en dos momentos diferentes.

Hubo un tiempo en el que no se conocían los números. La necesidad de las personas de cuantificar llevó a su descubrimiento. Inicialmente se utilizaron signos arbitrarios con los que expresar cantidades y a partir de ellos se desarrollaron diferentes representaciones numéricas. Antropólogos e historiadores han puesto de manifiesto que en sus inicios se percibían la unidad, el par y la multitud, y que, a lo largo de los tiempos, se fue avanzando hacia ideas numéricas más sofisticadas. El conocimiento y utilización de los números ha dirigido y organizado muchos de los cambios producidos en la historia de la humanidad.

El devenir de las sociedades desarrolladas actuales es impensable sin el conocimiento de los números, los cuales están muy presentes en la vida de las personas en las sociedades civilizadas, desde las actividades intelectuales más sofisticadas, como puede ser la construcción y funcionamiento de una nave espacial, hasta el quehacer rutinario del día a día. Los números son un modo de expresión y comunicación conciso y útil, y sirven para transmitir información en general. De manera sistemática, se emplean en estudios científicos y en estudios económicos.

La importancia incuestionable de los números nos lleva a la pregunta ¿qué son los números? Una respuesta a esta cuestión la proporciona Stewart (2008) en el libro *Historia de las Matemáticas. En los últimos 10.000 años,* cuando escribe*:* «Los números cuentan cosas, pero no son cosas. Se denotan por símbolos, pero no son símbolos. Son abstractos, pero nuestra sociedad no podría funcionar sin ellos. Son una construcción mental, pero tenemos la sensación de que seguirían teniendo significado, incluso si la humanidad fuera barrida por una catástrofe mundial y no quedara ninguna mente para contemplarlos».

En su descripción, Stewart pone de manifiesto diferentes particularidades de los números que vamos a precisar en los próximos apartados. Este capítulo lo dedicamos a presentar los números naturales y los sistemas de numeración partiendo, en ambos casos, de la utilidad que tienen y del desarrollo histórico que han experimentado dichos conocimientos. Nos centramos en el uso que actualmente se hace de los números naturales y en la estructura del sistema de numeración decimal, poniendo de manifiesto sus propiedades. En un apartado final se presentan materiales que pueden servir de mediadores en los aprendizajes numéricos y del sistema de numeración decimal. El objetivo es proporcionar a los usuarios de este libro herramientas que permitan abordar la enseñanza de estas nociones con ciertas garantías de éxito.

ACTIVIDAD: Escribe aquellas ideas que te sugieren las palabras de Stewart. Comenta con tus compañeros tus anotaciones.

1. LOS NÚMEROS NATURALES Y EL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL EN EL CURRÍCULO ESCOLAR

La sociedad actual es consciente de la importancia del conocimiento de los números para la formación integral de las personas. Un aprendizaje significativo de los números naturales exige de la comprensión del sistema de numeración que los organiza. Esta consideración revierte en el currículo de Educación Primaria, el cual señala la necesidad de enseñar dichas nociones. Consecuencia de ello es que la escuela dedica tiempo y esfuerzo para formar a los escolares en los conocimientos concernientes a los números, siendo de los primeros conocimientos que los escolares han de construir. El aprendizaje del sistema de numeración es algo posterior. En el primer ciclo de Educación Primaria, los estudiantes han de aprender a escribir y leer números naturales de hasta tres cifras e iniciarse en los principios del sistema de numeración decimal. La complejidad que entraña tal sistema exige su continuación en el segundo ciclo. En el tercer ciclo, los escolares se instruyen en el manejo de números de más de seis cifras y refuerzan el aprendizaje del sistema de numeración para lograr un pleno conocimiento de su alcance.

La enseñanza en relación con el número debe asociarse con contextos de la vida cotidiana cercanos al alumnado. El aprendizaje de los conceptos relacionados con los números no ha de constituir un fin en sí mismo, sino que proporcionará situaciones en las que localizar y resolver problemas a través de las relaciones y operaciones posibles entre números.

Atendiendo al currículo, los escolares han de utilizar los números naturales fundamentalmente en dos situaciones diferentes:

a) *Para valorar cantidades,* ya sea de *magnitudes discretas,* como puede ser la cantidad de coches en una colección, o de *magnitudes continuas,* como el largo de un trozo de tela. En el primer caso esta valoración se alcanza, fundamentalmente, contando; en el segundo caso, midiendo, comparando la cantidad, o extensión, de longitud de tela con una unidad de medida (por ejemplo, el metro). El resultado de la medida será un número natural cuando la unidad considerada esté comprendida en la cantidad a medir un número exacto de veces. El resultado de contar es un número unido al nombre de los objetos contados (5 coches, por ejemplo); el resultado de medir es un número acompañado de la unidad de medida utilizada (5 metros, por ejemplo). En los dos casos el número expresa cantidad. En el primer caso se trata de una cantidad de objetos discontinuos (o magnitud discreta); en el segundo se trata de una cantidad de magnitud continua.

b) *Para ordenar los elementos de un conjunto o colección*. En diferentes situaciones de la vida es necesario que los objetos de una colección estén ordenados, y es conveniente, además, conocer cuál es dicho orden para facilitar diversas tareas diarias. Así, por ejemplo, debido a que las páginas de un libro están ordenadas y es fácil encontrar una cita indicando la página donde se encuentra.

Todo el trabajo escolar que se realice, tanto con números, en las situaciones indicadas, como el que se realice con el sistema de numeración decimal, se recomienda que esté dirigido a que los escolares adquieran sentido numérico.

El *sentido numérico* es una forma singular y especial de trabajar con los números. Conlleva una comprensión profunda de la naturaleza de los números, de sus relaciones y de las operaciones que se pueden realizar entre ellos; todo ello se refleja en el desempeño de tareas en las que los números estén involucrados. Algunos investigadores sostienen que todas las personas poseen sentido numérico y consideran que es algo innato en los seres humanos. Desde este punto de vista lo que difiere de unas personas a otras es el grado de desarrollo del mismo y la escuela ha de potenciar dicho desarrollo. Disponer de sentido numérico disciplinado y especialmente desarrollado equivale a tener dominio reflexivo de las relaciones numéricas, lo cual se manifiesta en capacidades concretas como habilidad para descomponer números de forma natural, comprender y utilizar la estructura del sistema de numeración decimal, utilizar las relaciones de dicha estructura para realizar cálculos mentalmente, anticipar la razonabilidad del resultado de las operaciones, conocer diferentes procedimientos para hacer cálculos y utilizar el más adecuado en cada momento, calcular con fluidez y hacer estimaciones razonables. Todas estas capacidades han de potenciarse en el trabajo de los escolares con los números para conseguir establecer un equilibrio entre comprensión conceptual y competencia numérica.

ACTIVIDAD 1: Enumera cinco situaciones de la vida diaria y tres situaciones relacionadas con la ciencia o la tecnología en las que los números estén presentes.

ACTIVIDAD 2: Consulta un libro de primer curso de Primaria y describe cuatro ejemplos de los contenidos que en dicho libro se trabajan sobre conocimientos numéricos.

2. CORRESPONDENCIA

Entre las necesidades de las personas que habitaban la Tierra hace más de treinta mil años estarían controlar la cantidad de objetos o animales que cazaban o poseían, los recursos que administraban, los intercambios que hacían y el transcurrir del tiempo. Estas necesidades impulsaron la invención de símbolos y técnicas para satisfacer dichos requerimientos.

Los descubrimientos arqueológicos proporcionan muestras y ponen de manifiesto que las primeras aproximaciones al número se hicieron mediante emparejamientos o correspondencia entre colecciones de objetos. Se han encontrado huesos con muescas, de unos treinta mil años de antigüedad, cuyo uso era el de servir como «contadores» o auxiliares para conocer la cantidad de objetos de una colección a través de una representación de la misma. Se interpreta que cada muesca representa la intención de un ser humano por dejar constancia de un animal, objeto o acontecimiento que se considera relevante en ese momento. Una muesca por cada animal, objeto o día de un período temporal da lugar a tantas marcas como animales, objetos o días. En estos casos la correspondencia se hace entre objetos o datos reales con muescas en el hueso. Otro método, también basado en el emparejamiento, consiste en reunir un montón de guijarros. Cada animal u objeto de la colección a cuantificar se asocia con un guijarro, más pequeño y fácil de manejar; tantos guijarros equivalen a tantos animales. En este ejemplo la correspondencia es entre guijarros y animales. Estas técnicas fueron útiles para conocer si una cantidad de animales se mantenía o variaba transcurrido un cierto tiempo, acontecimiento o acción sobre ellos. Para conocer si el número de animales se mantenía o faltaba alguno, sólo era necesario emparejar de nuevo animales con guijarros.

Las prácticas de emparejamiento descritas están basadas en la noción de correspondencia y muestran la aparición de las primeras ideas rudimentarias de número. Tuvieron que pasar miles de años para que esas primeras ideas numéricas se desarrollaran y dieran lugar a símbolos más elaborados. Diferentes civilizaciones fueron perfeccionando la idea de número y sus representaciones, hasta llegar al sistema numérico que utilizamos en la actualidad. La ventaja de las nuevas representaciones simbólicas consistía en que no sólo expresaban cantidades, sino que también permitían expresar las acciones sobre esas cantidades, es decir, operar con ellas.

ACTIVIDAD 1: Señala dos acciones cotidianas en las que se emparejen colecciones de objetos.

2.1. Aplicación biyectiva

Las correspondencias o emparejamientos tienen interés para la matemática y están relacionadas con la noción de número. Emparejar dos colecciones de objetos quiere decir que a cada objeto de una colección (o conjunto) se le asocia uno y sólo un objeto de la otra colección. En la figura 2.2 hay representadas tres colecciones de objetos, A, B y C. Como se muestra en la figura 2.3, se pueden emparejar los elementos de las colecciones B y C sin que sobre ni falte algún objeto, cosa que no es posible hacer entre los conjuntos A y C ni entre los conjuntos A y B.

En matemáticas se denomina *aplicación biyectiva* (o biunívoca) a la técnica para llevar a cabo un emparejamiento; también se llama *correspondencia uno a uno*.

> *Se dice que entre dos conjuntos, o colecciones, se ha establecido (o puede establecerse) una* ***aplicación biyectiva*** *(o biunívoca) si sus elementos se pueden poner en correspondencia uno a uno, esto es, emparejarse sin que queden elementos de alguna de las dos colecciones sin pareja.*

2.2. Cardinal

Todas las colecciones finitas de objetos que se pueden emparejar, con la condición señalada en el recuadro anterior, tienen algo en común. Ese «algo» común se conoce como *cardinal del conjunto o de la colección, y se refiere a la cantidad de elementos que tiene.*

> *El* ***cardinal*** *de un conjunto finito A se representa como $n(A)$; expresa el número de elementos que tiene A.*

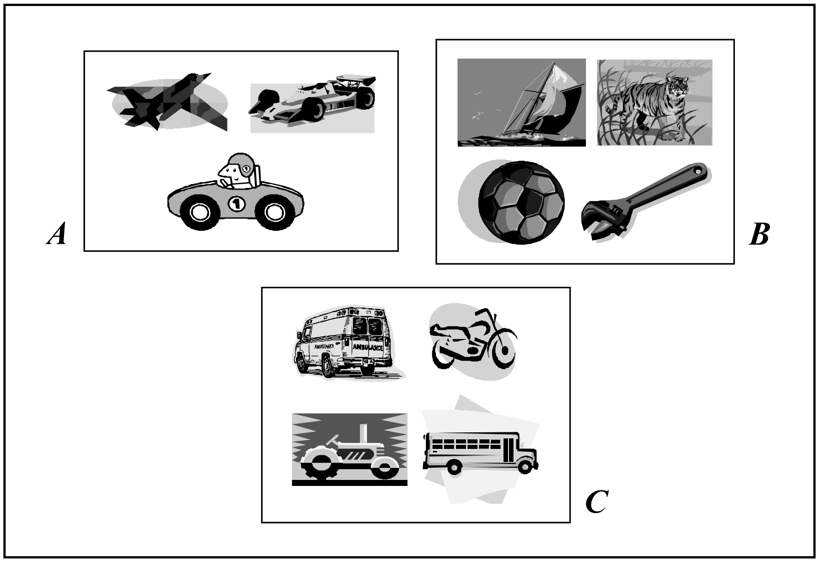


Figura 2.2.—Conjuntos de objetos *A, B* y *C*.

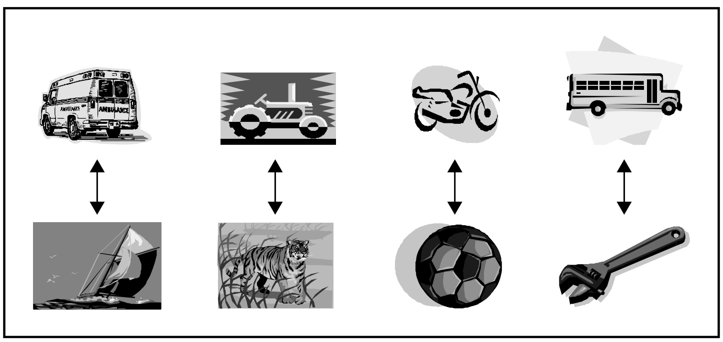


Figura 2.3.—Emparejamiento de los conjuntos *B* y *C*.

Los conjuntos finitos con el mismo cardinal se dice que son *coordinables entre sí*.

En el caso de los conjuntos representados en la figura 2.2, el conjunto A no tiene el mismo cardinal que el B ni el C (A no es coordinable ni con B ni con C). Los conjuntos B y C tienen el mismo cardinal (son coordinables entre sí). De forma abreviada, se escribe:

$$n(A) \neq n(B); \quad n(A) \neq n(C); \quad n(B) = n(C)$$

3. NÚMERO NATURAL

Todos los conjuntos finitos coordinables entre sí poseen el mismo cardinal. La abstracción de este hecho da lugar a la idea de número natural.

> *Número natural es cada clase de conjuntos finitos coordinables entre sí.*

El concepto número natural corresponde a la cardinalidad de las colecciones o conjuntos finitos coordinables entre sí. Dicho concepto se representa por un símbolo y se le da un nombre. En la figura 2.2, las colecciones *B* y *C,* que se pueden emparejar, tienen el mismo cardinal (el mismo número de elementos). Dicho cardinal se nombra con la palabra *cuatro,* y su representación es el símbolo 4.

Las palabras y símbolos con los que se representan los números naturales se denominan *numerales,* para no confundir con la idea de número, que, como se ha visto, es un concepto abstracto y más complejo. En la práctica, por comodidad y abuso de lenguaje, a los símbolos y términos se les llama también números. Hay que cuidar de no confundir la idea de número con su representación.

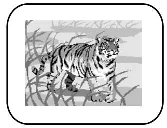
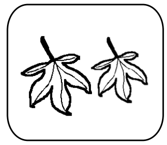
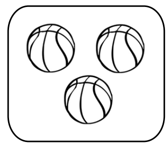
Colección	Símbolo	Nombre
	1	Uno
	2	Dos
	3	Tres

Figura 2.4.—Asociación de cantidad de objetos con símbolos y palabras numéricas.

3.1. Asignación de símbolo y nombre a cantidades de elementos

Todos y cada uno de los conjuntos finitos tienen asociado un valor numérico, que puede representarse mediante un símbolo y un nombre. La figura 2.4 muestra un ejemplo de lo que estamos exponiendo. A la idea asociada a la colección donde está el tigre y todas las que tengan igual cardinal que ella se le asigna el símbolo 1 y la palabra uno. Para la colección formada por una hoja y otra hoja, así como todas las demás colecciones que se puedan emparejar con ella, se le asigna el símbolo 2, cuya lectura o nombre es dos. Así se puede seguir indefinidamente, llegando a construir los números naturales.

El procedimiento seguido, si se continúa ordenadamente, lleva a tener colecciones o conjuntos (que se pueden formar con objetos cualesquiera). Los conjuntos en cada nueva fila tienen un objeto más que los conjuntos que forman la fila anterior.

ACTIVIDAD 1: Prolonga la tabla anterior añadiendo, al menos, otras cinco filas.

Tanto los términos como los símbolos son creaciones humanas para significar lo común de colecciones o conjuntos finitos coordinables, o sea, para expresar la idea de número. En la figura 2.5 se recoge el inicio de la secuencia de los términos y símbolos numéricos, que representa a los números naturales como una sucesión ordenada, a la que se denomina secuencia numérica convencional.

0,	1,	2,	3,	4,	5...
cero,	uno,	dos,	tres,	cuatro,	cinco...

Figura 2.5.—Primeros elementos de la secuencia numérica.

La secuencia numérica comienza en 0.

Conforme se avanza en la secuencia numérica, cada palabra y cada símbolo representan un nuevo cardinal correspondiente a clases de conjuntos finitos. En cada caso estos conjuntos tienen un elemento más que los correspondientes al cardinal anterior, de ahí las siguientes propiedades:

a) *Todo término de la secuencia numérica convencional se obtiene añadiendo una unidad al número que le precede.*
b) *Todo número natural es mayor que los que le preceden en la secuencia.*

Para ampliar información sobre este tema puedes consultar: Castro, E. (2001).

ACTIVIDAD 2: Argumenta por qué se dice que la secuencia de los números naturales está ordenada.

3.2. Fundamentos del concepto de número natural

El concepto de número natural se basa en dos nociones: la de cantidad (cardinal) y la de orden (ordinal). La noción de cantidad o cardinal trata de la totalidad de los elementos de un conjunto finito y se determina por su emparejamiento o correspondencia con otros conjuntos coordinables. Designa el «tamaño» de un conjunto o colección. La noción de ordinal está basada en la idea de sucesión, por la que siempre es posible relacionar un número con su sucesor (o siguiente) agregando la unidad.

En el quehacer diario intervienen las dos nociones. Con frecuencia se pasa de una a otra sin percibirlas separadamente, sin discriminarlas. Por ejemplo, si se dice «el mes de abril tiene treinta días», el número 30, número total de días, señala un aspecto cardinal. Si se dice «el día treinta del mes de abril», el número 30 se refiere al aspecto ordinal, ya que indicaría el último (o trigésimo) día del mes. El sistema numérico que utilizamos está consolidado por estos dos fundamentos, el de emparejamiento (cantidad) y el de sucesión (orden). El éxito del concepto de número natural está ligado a la integración de estos dos fundamentos de la noción de número en un mismo concepto.

Para ampliar información sobre este apartado puedes consultar: Ifrah, G. (1997).

3.3. Recta numérica

La recta numérica es el nombre que recibe la representación de la secuencia numérica convencional, que se muestra en la figura 2.6. Consiste en una semirrecta orientada, dibujada horizontalmente, cuyo extremo se sitúa a la izquierda. Sobre la semirrecta se marcan puntos igualmente espaciados. En el punto extremo se sitúa el 0; a su derecha, a continuación, el 1, y, progresivamente, se colocan los siguientes números de la secuencia de menor a mayor y de izquierda a derecha en los puntos sucesivos. Esta representación visualiza el orden de los números naturales: cualquier número es menor que todos los representados a su derecha y mayor que todos los de su izquierda.

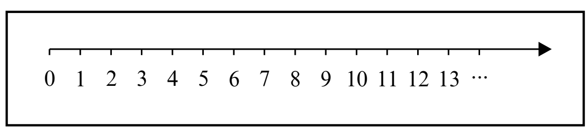


Figura 2.6.—Recta numérica.

4. USOS DEL NÚMERO

Entre los usos que se hacen del número natural se distinguen los que están asociados a la secuencia numérica y los que no dependen de ella. La secuencia numérica convencional se utiliza para contar, para ordenar y para cronometrar tiempos. Otros usos del número natural, no relacionados tan estrechamente con la secuencia numérica, son el uso cardinal y el uso como signo de identificación o etiqueta.

La memorización de la secuencia numérica es el conocimiento matemático relacionado con el número que más tempranamente se aprende y que da lugar, posteriormente, a conocimientos numéricos más avanzados. Además de su memorización, es necesario aprender a escribir y leer las palabras y símbolos que conforman dicha secuencia.

4.1. Contar

Contar una colección de objetos es una acción que se realiza con la intención de conocer la cantidad de objetos que tiene dicha colección, es decir, cuantificar dicha colección. La acción de contar, también denominada conteo, es compleja y requiere de la ejecución adecuada de varios principios para que su resultado sea correcto. Dichos principios son:

- *Principio de orden estable:* al contar se ha de recitar la secuencia numérica, comenzando desde el uno, en su orden convencional. No se obtendrá el resultado correcto si se comienza en cero, o se utiliza otro orden diferente. Por ejemplo, si se pretende conocer la cantidad de dedos que hay en una mano, no se obtiene correctamente el resultado si los números se recitan en el orden 1, 8, 4, 5, 2, ni en cualquier otro que no sea el convencional, es decir, 1, 2, 3, 4, 5...
- *Principio de correspondencia:* en el proceso de contar, hay que asignar a todos y a cada uno de los objetos que se cuentan un término numérico y sólo uno. Siguiendo con el ejemplo de los dedos de una mano, no se cumple este principio si empezando a contar por el meñique y asignándole uno se recorren todos los dedos y se termina en el mismo meñique asignándole seis; en este caso el meñique ha recibido dos términos numéricos, uno y seis, lo que incumpliría el principio.
- *Principio de biunivocidad:* al contar, cada palabra numérica (numeral) sólo se puede asignar a un objeto. Este principio, junto con el anterior, implica que la correspondencia que se establece entre objetos y palabras numéricas ha de ser biyectiva, uno a uno. No se cumple este principio cuando alguna palabra numérica se reparte entre dos objetos. En el caso de los números de una sola cifra, esto puede ocurrir con las palabras cuatro, siete y nueve, que son más largas. Si se trata de contar los dedos de las dos manos y éstos se señalan con rapidez, puede ocurrir que alguna de las palabras indicadas abarque a dos dedos (objetos), causando error.
- *Principio de cardinalidad:* el último número que se dice, asociado al último elemento considerado en la colección, indica el cardinal o número de elementos que tiene el conjunto. En el caso de la mano, el cardinal del conjunto de dedos es cinco. Este principio lleva implícito que cada palabra numérica asignada a cada elemento de la colección, además de servir de tránsito hacia la siguiente, expresa la cantidad de objetos que ha sido contada hasta ese momento (indica cardinalidad).
- *Principio de irrelevancia del orden:* en el resultado de contar no interviene el orden en que se tomen o señalen los objetos al realizar la correspondencia con las palabras de la secuencia numérica. Al contar

los dedos de la mano, el resultado no queda afectado por el recorrido que se haga.
- *Principio de generalidad:* todos los conjuntos o colecciones de objetos se pueden contar. A veces los conjuntos están formados por elementos homogéneos, como el ejemplo de los dedos de la mano; en este caso no hay dificultad. En otros casos puede tratarse de objetos heterogéneos como un par de manzanas y un trío de peras; en este caso, si se cuenta la colección, el resultado ha de considerar una clase superior a las peras y las manzanas, como puede ser las frutas. El resultado es cinco frutas.

Si algunos de estos principios se vulneran en la acción de contar, el resultado no será correcto.

ACTIVIDAD 1: Dos escolares de 6-7 años han contado las canicas que hay en una caja. Uno de ellos dice que hay 22 canicas y el otro da como resultado 23 canicas. Analiza la situación y explica qué ha podido ocurrir basándote en los principios de contar.

4.2. Ordenar

Ordenar linealmente los elementos de una colección consiste en asignar un lugar, o posición, a cada uno de ellos de forma que constituyan una secuencia organizada. Para asignar el orden a los objetos de la colección se usan las palabras que nombran a los números naturales, modificadas. A estas palabras se les denomina ordinales. Los ordinales son: primero, segundo, tercero...; en ocasiones se dice simplemente «el objeto» uno, «el objeto» dos... En ambos casos indican lugar 1, lugar 2, lugar 3... Por ejemplo, se dice: *el tercer alumno de la lista, el 3.º de la lista, el alumno que ocupa el puesto tres de la lista o el alumno número tres de la lista*. Todas estas expresiones tienen el mismo significado. La representación simbólica de los ordinales se hace utilizando el símbolo del número con un cero pequeño en la parte superior derecha: 1.º (primero), 2.º (segundo), 3.º (tercero)...

La ordenación lineal de objetos está asociada, como hemos dicho, a la secuencia de los números naturales, por lo que siguen su mismo orden. Este uso de la secuencia convencional numérica se encuentra a menudo en la vida real. La ordenación de los edificios en una calle, la llegada de unos corredores a la meta y los meses del año son ejemplos conocidos de ello.

ACTIVIDAD 2: Escribe los términos ordinales hasta el lugar treinta.

4.3. Cronometrar

La secuencia numérica estándar (o convencional) se usa, en ocasiones, a modo de contador temporal. En este caso cada palabra numérica recitada equivale a una cantidad de tiempo. Así sucede cuando se da tiempo para hacer alguna actividad, y se usan expresiones como «termina la tarea antes de que yo cuente hasta cien». Contar se utiliza aquí en el sentido simple de recitar la secuencia numérica y no de cuantificar objetos.

ACTIVIDAD 3: Indica dos situaciones reales en las que la secuencia numérica se utilice para cronometrar.

4.4. Uso cardinal del número natural

Cuando se utiliza un número, aislado de la secuencia numérica, para indicar la cantidad de elementos que tiene un conjunto, se está haciendo un uso cardinal del número. Éste es el uso del número por excelencia. En este caso el número no suele estar solo, sino que se acompaña de un término que refiere la unidad de los elementos considerados; por ejemplo, 5 dedos. Los números naturales que aparecen en los problemas escolares, y con los que se operan para llegar a la solución del mismo, están expresando un uso cardinal. Algunas palabras, no siendo numéricas, también expresan cantidad de elementos y denotan cardinalidad, como par, trío, cuarteto, quinteto...

Para conocer el cardinal de una colección se pueden utilizar procedimientos diferentes. Uno de estos procedimientos consiste en contar dichos elementos. Otra forma es estimando (véase capítulo 6). Es útil estimar cuando se trata de una gran cantidad de elementos y no se requiere conocer su valor exacto. Un tercer procedimiento que se conoce como *subitización,* consiste en la percepción directa de la cantidad, de un solo «golpe de vista». Este último procedimiento es utilizado cuando son pocos elementos en la colección. La subitización se favorece si los objetos de la colección están organizados en alguna configuración especial, como los casos de las configuraciones puntuales de un dado usual o de las fichas de un dominó tradicional (figura 2.7).

Figura 2.7.—Colecciones de puntos que pueden subitizarse.

Otro procedimiento es operando. Por ejemplo, si en un aula los asientos están organizados en 5 filas y cada fila consta de 6 asientos, se puede conocer la cantidad total de asientos haciendo el producto 5×6.

En un apartado posterior describiremos otro procedimiento, conocido como agrupamiento, que se basa en la estructura del sistema de numeración.

ACTIVIDAD 4: Identifica disposiciones de objetos que permitan decir la cantidad exacta que hay sin necesidad de contarlos, e indica en cada caso cómo determinar el cardinal.

4.5. Simbolizar o etiquetar

En este uso, los números se utilizan simplemente como un código o etiqueta para diferenciar entes entre sí. Por ejemplo, los números puestos en el dorsal de los componentes de un equipo de fútbol, o los que llevan los participantes en una carrera, cumplen esta función. En estos casos, si se cambian los símbolos numéricos por otros, como pueden ser letras o un sistema de signos como ♠, ♣, ♥, ♦, la función desempeñada por los números o por estos otros sistemas de signos es la misma.

ACTIVIDAD 5: Indica dos situaciones reales en que los símbolos de los números se utilicen simplemente para distinguir o etiquetar objetos.

Para ampliar información sobre este apartado puedes consultar: Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1987).

5. SISTEMAS DE NUMERACIÓN

La necesidad de cuantificar y expresar el valor de cantidades lleva a la invención de los números y sus representaciones. Facilitar el manejo de las cantidades y de los números conduce a inventar sistemas de numeración.

Una vez que surge la idea de número, se hace necesario poner nombres a los números, a la vez que utilizar símbolos que faciliten su uso y manejo. A lo largo de la historia las formas de expresar las cantidades han sido diversas, usándose palabras y símbolos especiales para representar los números. En la figura 2.8 se presentan ejemplos de símbolos numéricos procedentes de civilizaciones antiguas.

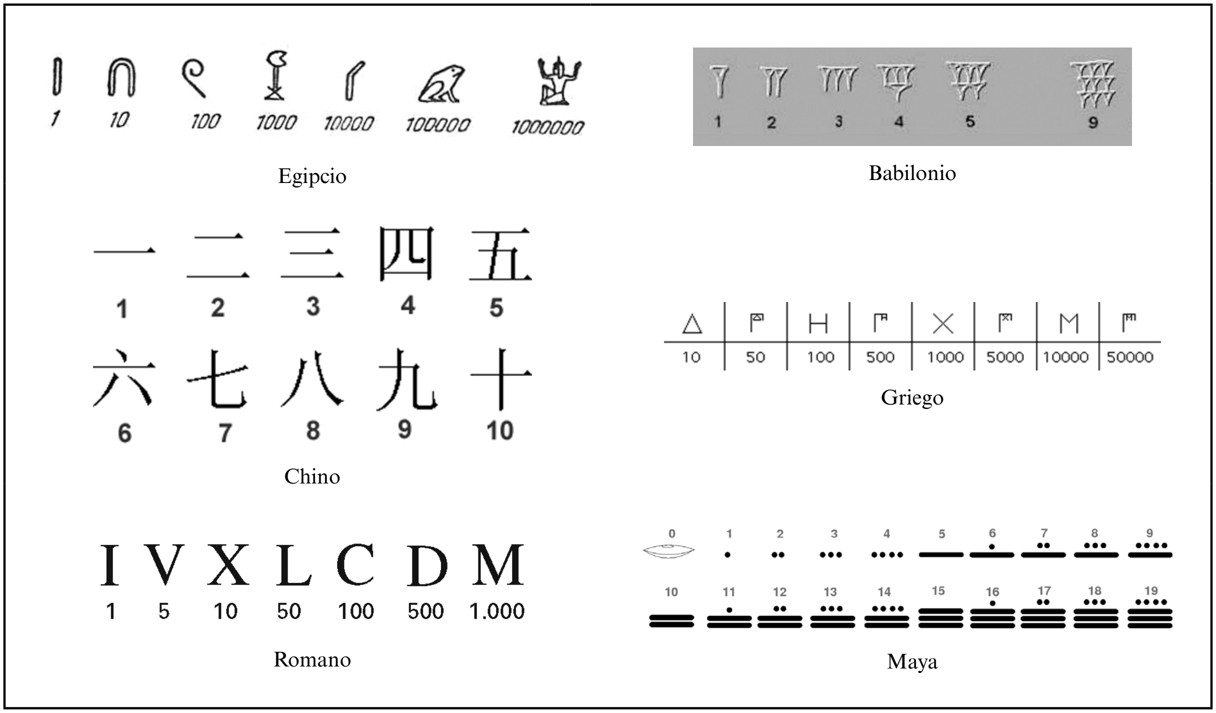


Figura 2.8.—Representaciones de los números en diferentes civilizaciones.

> *Un **sistema de numeración** lo constituyen un conjunto finito de signos y reglas, que hacen posible expresar cualquier número que se desee mediante el uso de los signos de que consta el sistema y siguiendo sus reglas.*

Cada civilización, mediante la combinación de ciertos elementos y uso de unas reglas, dio lugar a sistemas de numeración propios. Ciñéndonos a la representación simbólica, inicialmente se tomó un símbolo sencillo para representar la unidad, el cual se repetía tantas veces como fuera necesario; así se observa en el sistema de numeración babilónico. Esta técnica tiene un fundamento cardinal. También cupo la posibilidad de asignar un símbolo diferente a cada cantidad, técnica con fundamento ordinal. Sin embargo, estos procedimientos no resultaron útiles, sobre todo si se manejaban cantidades grandes.

5.1. Base de un sistema de numeración

Para superar los inconvenientes mencionados se impuso un *principio de agrupamiento*. Este principio consiste en que cada cierto número de unidades son representadas por un nuevo signo o notación. De esta manera surge la noción de *base de un sistema de numeración,* que consiste en destacar una cantidad fija (cinco, diez, doce, veinte, sesenta...) y organizar las cantidades formadas por unidades sencillas mediante su agrupamiento reiterado según la base elegida: agrupar unidades de cinco en cinco, de diez en diez, etc., dando lugar a nuevas unidades. A su vez, estos primeros agrupamientos se vuelven a agrupar según la base escogida, dando lugar a un nuevo orden de unidades, y así sucesivamente.

Cambiar un guijarro grande por cada cinco pequeños es un ejemplo de lo que estamos exponiendo. En este caso la cantidad elegida como base es cinco; el guijarro grande tiene rango superior, es de un orden superior y siguiente al de los guijarros pequeños.

Se distinguen de este modo signos simples para cantidades pequeñas y nuevos signos para expresar grados sucesivos de unidades correspondientes a cada nivel de agrupamiento considerado. Los signos del sistema egipcio de la figura 2.8 muestran una versión sencilla de un principio de agrupamiento de base decimal, donde cada uno de los signos expresa una potencia de diez. Un número en este sistema se expresa reiterando tantas veces el signo de cada orden como unidades de ese orden lo constituyen.

La ***base de un sistema de numeración*** *es el número de unidades que se han de agrupar dentro de un orden dado para formar una unidad del orden inmediatamente superior.*

5.2. Principio aditivo de un sistema de numeración

Las numeraciones escritas, desde sus inicios, están basadas en un *principio aditivo*. De acuerdo con este principio, *el valor de un número se obtiene como suma del valor de todos los símbolos utilizados en su representación.* Por ejemplo en la figura 2.9, perteneciente a un jeroglífico egipcio, se perciben seis signos iguales a la izquierda (seis veces mil), seguidos de otros seis también iguales (seis unidades). Siguiendo un principio aditivo, se está representando la cantidad seis mil seis.

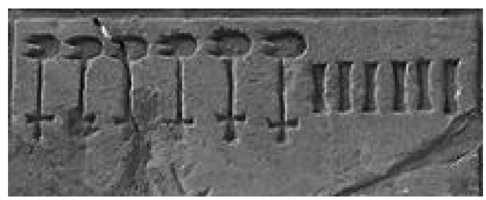


Figura 2.9.—Parte de un jeroglífico egipcio.

El primer sistema de numeración griego se desarrolló hacia el 600 a. C. Era un sistema que utilizaba dos valores como base: el diez y el cinco. Se tomaban tantos símbolos de cada uno de ellos como fueran necesarios para expresar el número. La figura 2.10 reproduce el número 3.737 en el sistema griego antiguo y su equivalencia en el sistema de numeración decimal.

Figura 2.10.—Número escrito en el sistema griego antiguo.

5.3. Principio multiplicativo de un sistema de numeración

Para evitar la reiteración de un mismo signo, civilizaciones más avanzadas introdujeron un *principio multiplicativo,* que consiste en *utilizar nuevos signos para indicar las veces que se repite alguno de los símbolos numéricos,* evitando así su reiteración. Un ejemplo de sistema multiplicativo y aditivo es el chino, del que se muestra, en la figura 2.11, la representación del número 5.789, donde los símbolos 五七八 actúan como multiplicadores.

Figura 2.11.—Representación de un número en el sistema de numeración chino.

En el sistema chino la base es diez, por lo que incluye signos distintos para cada una de las potencias de diez. El principio multiplicativo introduce nueve signos básicos (desde uno a nueve) para indicar las veces que se repite la cifra de un orden determinado: desde una vez hasta nueve veces. Si se repitiera diez veces, se formaría una unidad de orden superior. Por tanto, cada número se expresa como la suma de múltiplos de las sucesivas potencias de diez mediante yuxtaposición.

ACTIVIDAD 1: Escribe en los distintos sistemas presentados los siguientes números: 35, 265, 360 y 1.492.

5.4. Principio de posición de un sistema de numeración

El descubrimiento del *principio de posición* fue un gran avance muy posterior que permitió construir los sistemas de numeración modernos. El principio de posición establece que *el valor de una cifra, o símbolo numérico, es relativo, es decir, depende del lugar que ocupe en la escritura del número*. Los órdenes sucesivos ocupan posiciones relativas dentro de las escritura de cada número, en orden creciente de menor a mayor y de derecha a izquierda. De este modo, no se escribe el signo de cada una de las potencias de la base, en una posición determinada del número, como ocurre, por ejemplo, en el sistema de numeración chino, sólo las veces que se considera cada una de ellas.

El sistema babilónico tiene base sesenta, es aditivo desde 1 hasta 59 y posicional para números mayores.

$32 \times 3.600 + 21 \times 60 + 41$

Figura 2.12.—Representación de un número en el sistema de numeración babilónico.

ACTIVIDAD 2: Localiza información sobre los sistemas de numeración antiguos que hemos presentado. Determina su base y explica en qué modo cumplen los principios aditivo y multiplicativo.

5.5. Numeración romana

La numeración romana, propia de la civilización del mismo nombre, sigue utilizándose habitualmente en situaciones locales, como ocurre en las esferas de algunos relojes, para indicar capítulos de libros y fechas, entre otros.

Sus símbolos son siete letras mayúsculas, como se recogen en la figura 2.8. Los primeros doce números están recogidos en el reloj de la figura 2.13.

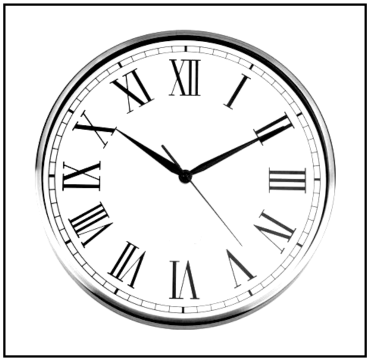


Figura 2.13.—Reloj con numeración romana.

Los siete símbolos iniciales se pueden combinar para producir otros números siguiendo ciertas reglas en la repetición y la posición de los mismos. Las reglas de repetición dicen que los números I, X, C y M no se pueden escribir más de tres veces consecutivas. Los símbolos V, L y D sólo se pueden escribir una vez en cada número. La regla de posición indica que cuando un número está a la izquierda de otro mayor, lo resta; si está a la derecha de otro, lo suma. Con las condiciones siguientes:

I sólo resta o suma a V y X.
X sólo resta o suma a L y C.
C sólo resta o suma a D y M.

Para valores iguales o superiores a 4.000, se coloca una línea horizontal por encima del número para indicar que dicho número queda multiplicado por 1.000

A continuación mostramos algunos ejemplos de cantidades representadas con el sistema de numeración romano y su equivalencia en el sistema de numeración decimal:

XXI = 21; LXVII = 67; CXXIX = 129;
CMLXXXIX = 989

ACTIVIDAD 3: Usando los símbolos romanos, escribe los números 78, 47, 333 y 444.

Puedes encontrar información sobre los nombres de los números en las civilizaciones antiguas en: Ifrah, G. (1997).

6. SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL

El sistema de numeración decimal o Indo-Arábigo es un sistema universal utilizado en la actualidad en la mayoría de los países, entre ellos España. Consta de diez elementos o símbolos simples, unos principios, y reglas para la formación de símbolos compuestos. Su origen se remonta a la cultura hindú y fue introducido en Europa por los árabes, de ahí la denominación de Indo-Arábigo.

6.1. Elementos simples

Los elementos simples, llamados cifras o números de una sola cifra, son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Constituyen los símbolos base del sistema.

El cero

No está documentada la utilización del cero antes de que lo hicieran los babilonios en el siglo III a. C. (antes de Cristo). Los sabios babilónicos usaron una doble espiga para indicar un lugar vacío en la escritura de los números; sin embargo, parece que no dieron a ese signo la categoría de número. Documentos de carácter matemático o astronómico de otras civilizaciones, como en la Antigua Grecia, incluyen símbolos que sugieren el valor cero. En ninguno de los casos llegaron a hacer uso efectivo del mismo en la representación de números compuestos. Por ejemplo, en tablillas babilónicas datadas en 1700 a. C. no es posible distinguir el número 23 del 203 en una representación.

Se atribuye a la civilización hindú el logro de la numeración moderna, en la que el cero está incluido y posee un papel determinante. Dicha civilización convirtió el cero en un ente operativo. Su presencia en un número indica lugar de posición y ausencia de cantidad en el mismo, reemplaza la cantidad que falta y tiene a la vez sentido de número. Los conocimientos numéricos de los hindúes se transmitieron a los árabes y, posteriormente, a través del Magreb y Al-Ándalus, pasaron al resto de Europa. La mayor parte de las referencias indican que el cero *(zefhirum)* fue introducido en Europa por el matemático Leonardo de Pisa (Fibonacci) en el siglo XII. La tardía aparición del cero se explica por la complejidad de abstraer una idea de cantidad a partir de la nada, de la ausencia de objetos.

El uso que se hace del cero es más restringido que el del resto de los números naturales. Al contar, no se empieza por cero, sino por uno. En escasas ocasiones se le considera para indicar posición u orden. Su principal fortaleza radica en proporcionar consistencia al sistema decimal de numeración.

ACTIVIDAD 1: Mediante un ejemplo, explica alguna propiedad o uso del cero que sea distinta al del resto de los números.

6.2. Elementos compuestos o números de más de una cifra

A partir de los elementos simples o cifras base del sistema, se forman números de más de una cifra, según la siguiente regla combinatoria.

Para formar los números de dos cifras, se escribe a la derecha de cada una de las cifras de la base, tomadas ordenadamente, todas las cifras. Así, partiendo del 1 se forman 10, 11, 12, hasta 19, partiendo de la cifra 2, se obtiene 20, 21, 22, hasta 29. Siguiendo este proceso con todos los números de una cifra se obtienen los de dos cifras. Los números de tres cifras surgen de los de dos cifras, añadiendo a cada uno de ellos, ordenadamente, todas las cifras base. El procedimiento puede continuar indefinidamente. A partir de cada número se generan diez nuevos números que tienen una cifra más que el de partida. La figura 2.14 muestra la formación para unos pocos números. La representación permite percibir una estructura en árbol de la secuencia numérica, si bien su estructura usual es lineal. Para pasar de esta organización a la lineal, se comienza poniendo los números de una cifra hasta el nueve, a continuación se escriben los números de dos cifras, desde el 10 hasta el 99, después los de tres cifras, y así sucesivamente. En la formación de los números de más de una cifra se aprecia la potencialidad del sistema de numeración decimal, que permite con sólo diez cifras formar todos los números, cualquiera que sea la cantidad de cifras que tenga.

ACTIVIDAD 2: Escribe todos los números de 3 cifras que se obtienen del número 23.

6.3. Diferentes órdenes de unidades del sistema decimal de numeración

El sistema decimal de numeración posee diferentes órdenes de unidades; la tabla 2.1 recoge tres formas de expresar las mismas. Cada

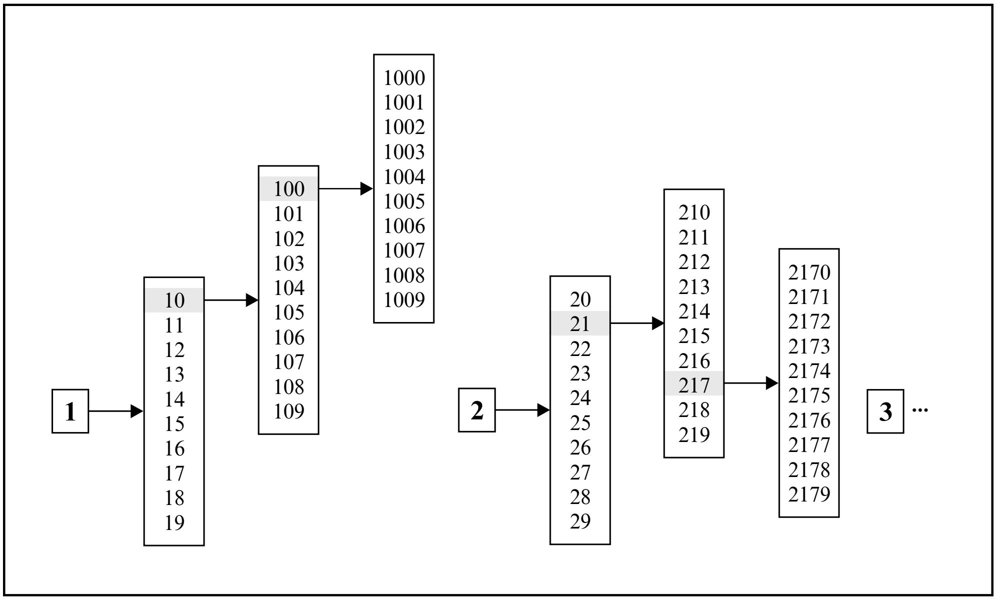


Figura 2.14.—Esquema representativo de la formación de la secuencia numérica.

TABLA 2.1

Unidades del sistema de numeración decimal

Potencias de 10	**Escritura**	**Nombre**
10^0	1	Unidad
10^1	10	Decena
10^2	100	Centena
10^3	1.000	Unidad de millar
10^4	10.000	Decena de millar
10^5	100.000	Centena de millar
10^6	1.000.000	Unidad de millón
10^7	10.000.000	Decena de millón
10^8	100.000.000	Centena de millón
10^9	1.000.000.000	Unidad de millar de millón
10^{10}	10.000.000.000	Decena de millar de millón
10^{11}	100.000.000.000	Centena de millar de millón
10^{12}	1.000.000.000.000	Billón

unidad de un orden equivale a 10 unidades del orden inmediatamente inferior. Así, una decena equivale a diez unidades, una centena equivale a diez decenas...

En la escritura de los números de más de una cifra estos órdenes no aparecen explícitamente escritos (como se aprecia en la construcción de los números hecha en el apartado anterior), sólo aparecen las cifras que representan el número de veces que el orden correspondiente está contenido en el número, de aquí que el valor de cada cifra de un número dependa del lugar que ocupe en el mismo, que se hable del orden de las cifras de un número y que se pueda escribir la expresión polinómica del número.

Orden de las cifras de un número

Los números de más de una cifra ocupan más de un espacio en la escritura. Cada espacio corresponde a un orden. Los diferentes órdenes reciben, a su vez, diferentes nombres (figura 2.15). El primer orden está a la derecha y corresponde a las unidades, le siguen a continuación, a su izquierda, las decenas, etc.

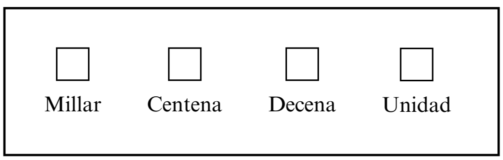


Figura 2.15.—Diferentes órdenes en los números.

Para el número 364, la cifra 4 está en el lugar de las unidades, la 6 en el lugar de las decenas y la 3 en el de las centenas. Por tanto, 4 es la cifra de las unidades o valores de 10^0; 6 es la cifra de las decenas o valores de 10^1 y 3 es la cifra de las centenas o valores de 10^2. El valor del número es 4 unidades más 6 decenas (o 60 unidades) más 3 centenas (o 300 unidades).

Expresión polinómica de un número

Considerando los diferentes órdenes de las unidades y el orden de las cifras de un número, es posible obtener la expresión polinómica de un número; consiste en escribirlo como suma de las sucesivas potencias de 10 que lo constituyen. Así:

$$47\,602\,083 = 4 \times 10^7 + 7 \times 10^6 + 6 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

abreviadamente:

$$47\,602\,083 = 4 \times 10^7 + 7 \times 10^6 + 6 \times 10^5 + 2 \times 10^3 + 8 \times 10^1 + 3$$

> *Todo número puede expresarse como suma de productos de potencias de la base 10 por un número de una cifra. El número abcd se expresa:*
>
> $$a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10^1 + d \times 10^0$$
>
> *Esta expresión se denomina expresión polinómica del número.*

ACTIVIDAD 1: Escribe la expresión polinómica de los números 2.004 y 52.186.

6.4. Principios del sistema de numeración decimal

Partiendo de lo expuesto sobre el sistema decimal de numeración, se recogen a continuación, de forma resumida, los principios que lo organizan:

a) *Es de base diez:* cada diez unidades de un orden constituyen una unidad de orden superior. La base coincide con el número de unidades simples.
b) *Introduce y utiliza el cero:* el cero indica la ausencia de unidades en el lugar del orden donde se encuentre.

c) *Es aditivo:* el valor que se representa en un número equivale a la suma de las cifras considerando su valor de posición. Esto hace que el número también se pueda escribir como suma de sus unidades de diferente orden.

d) *Es multiplicativo:* cada una de las cifras del número es un factor que multiplica a una potencia de diez; su exponente se corresponde con 0 para las unidades, con 1 para las decenas, etc.

e) *Es posicional:* el valor de las cifras en el número es relativo, depende de su lugar de posición en el mismo.

f) *Orden en la posición:* las cifras en el número están colocadas por su orden de derecha a izquierda, de forma que la unidad tiene a su izquierda a la decena, la decena tiene a su izquierda a la centena, y así sucesivamente.

ACTIVIDAD 4: Reflexiona y describe qué ocurriría si no existiese el sistema decimal de numeración.

6.5. Lectura y expresión verbal de los números

Las expresiones con las que se nombran los números también están sujetas a reglas. A partir de unas pocas palabras «simples» se forma el resto por combinación de ellas; se obtienen así las expresiones «compuestas». Por ejemplo, el término tres lo consideramos simple y veinte también, pero veintitrés está compuesto a partir de los simples veinte y tres.

Recitar la secuencia numérica requiere inicialmente decir las palabras simples que nombran a los números de una sola cifra: cero, uno, dos... nueve; continuar con el nombre de la decena, que también es simple (diez); seguir con las excepciones once, doce, trece, catorce, quince y, a partir de ahí, combinar el nombre de la decena, ordenadamente, con todas las palabras que nombran a los números de una sola cifra a partir del seis (dieciséis, diecisiete...). Le sigue veinte (segunda decena) y, a continuación, dicho término simple se combina, ordenadamente, con las palabras simples que nombran a las cifras: veintiuno, veintidós... Así se continúa el proceso hasta el número que se quiera.

Las palabras que nombran a las decenas terminan en la silaba «ta» (cuarenta, sesenta...), excepto la segunda decena, que lo hace en «te» (veinte).

La expresión verbal de los números pone de manifiesto los principios aditivo y posicional del sistema de numeración decimal, ya que, salvo algunas excepciones, se leen indicando separadamente cuántas unidades tiene por cada uno de los órdenes que lo forman y en el mismo orden en que aparecen en su expresión simbólica posicional. Por ejemplo, al decir tres mil cuatrocientos setenta y cinco, se indica que hay tres veces mil unidades, cuatro veces cien unidades, siete veces diez unidades y, por último, cinco unidades; en otras palabras, hay tres unidades de millar, cuatro centenas, siete decenas y cinco unidades. La unión de todas es la cantidad total que el número representa.

Esta lectura o regla de formación de las expresiones verbales o nombres de los números supone un ahorro de esfuerzo en el aprendizaje, ya que permite nombrar o leer cualquier número sin necesidad de almacenar en la memoria la gran cantidad de información que supondría un nombre diferente para cada uno de ellos (como sería en el caso de no existir la regla).

ACTIVIDAD 5: Escribe todas las palabras simples, o no compuestas de otras anteriores, necesarias para decir la secuencia numérica convencional desde cero hasta un millón.

6.6. Referentes para los distintos órdenes de los números

Los números tienen distinta cantidad de cifras, a veces se habla de distinto «tamaño». Asociar el tamaño de un número a una colección de objetos conocidos proporciona una percepción de la cantidad que representa dicho número. La colección conocida constituye un referente. La percepción de la «numerosidad» es una capacidad propia de un sentido numérico algo elaborado. Mostramos como ejemplo algunos referentes de conjuntos de personas para números de distintos tamaños:

- Números de 1 cifra o unidades – miembros de una familia.
- Números de 3 cifras o centenas – alumnos de un instituto.
- Números de 4 cifras o unidades de millar – aforo de un polideportivo.
- Números de 7 cifras o millones – habitantes de Madrid o Barcelona.
- Números de 10 cifras o miles de millones – habitantes del planeta.

ACTIVIDAD 6: Completa la lista con otros ejemplos para los órdenes que faltan entre los números de 1 a 10 cifras.

7. SISTEMAS DE NUMERACIÓN DE BASES DIFERENTES A DIEZ

Algunos sistemas de numeración tienen como base un número distinto de diez, aunque comparten los mismos principios que los del sistema de numeración decimal. La base en estos casos puede ser menor o mayor que diez. Al variar la base se cambia el criterio de agrupamiento, ya que se agrupan las cantidades según las potencias de la nueva base. La figura 2.16 recoge las secuencias numéricas para los sistemas de base 6, 12 y 2. Para el sistema de base 12 (mayor que 10), al no haber cifras suficientes, para suplir la falta se han introducido como símbolos A y B. Especial relevancia tiene el sistema binario o de base 2 por su aplicación en la tecnología basada en pasos e interrupciones de corriente eléctrica. Se indica que un número está escrito en una base diferente a 10 poniendo un subíndice. Por ejemplo, $326_{(7}$ o $326_{\text{siete)}}$ significa que el número 326 está en base 7.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 30 ...
Secuencia numérica en un sistema de base 6

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 1A, 1B, 20, 21 ...
Secuencia numérica en un sistema de base 12

0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1.000, 1.001, 1.010, 1.011 ...
Secuencia numérica en el sistema binario

Figura 2.16.—Secuencias numéricas para sistemas de numeración aditivos, multiplicativos y posicionales de base 6, 12 y 2.

ACTIVIDAD 1: Escribe la secuencia numérica en un sistema de base 4.

7.1. Cuantificación de una cantidad de objetos por agrupamiento

Los principios del sistema de numeración decimal, y sistemas análogos con otras bases, permiten conocer el cardinal de una colección de objetos por el método que se conoce como agrupamiento. Este método facilita el proceso de cuantificación, ya que sólo es necesario contar hasta el número que tiene la base. Para ello se hacen grupos de tantos objetos como indica la base, pudiendo quedar algunos objetos sin agrupar. La expresión simbólica del número se obtiene poniendo como cifra de primer orden los elementos sueltos y como cifra de segundo orden los grupos formados. En el caso de que el número de grupos hechos sea igual o mayor que la base, se vuelven a realizar agrupaciones, tantas como indica el número de la base. Después de este segundo agrupamiento, el número de grupos nuevos que se ha creado corresponde a las unidades de tercer orden, los grupos que han quedado sueltos constituyen las unidades de segundo orden. Así, sucesivamente, se puede continuar este proceso las veces que sea necesario. La figura 2.17 muestra una colección de puntos, la cual se ha cuantificado por dos procedimientos; en el primer caso, contando, asignando los números de la secuencia numérica en base 4; en el segundo caso, por agrupamiento.

ACTIVIDAD 2: Cuenta los dedos de las dos manos en un sistema de base 2. Hazlo utilizando la secuencia numérica y por el método de agrupamientos.

ACTIVIDAD 3: A partir del método de los agrupamientos, justifica un procedimiento algorítmico que permita escribir en base 5 un número expresado en base 10.

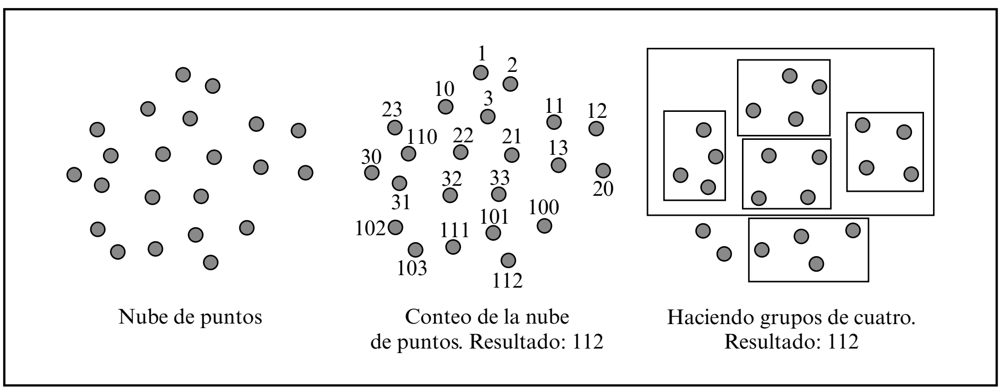


Figura 2.17.—Cuantificación de una nube de puntos en base cuatro.

8. MATERIALES PARA TRABAJAR CONCEPTOS NUMÉRICOS

Existen materiales mediadores en el aprendizaje de los conceptos matemáticos. Estos materiales permiten diferentes clasificaciones según el criterio que se considere. Por ejemplo, según la intencionalidad con que han sido diseñados, cabe clasificarlos como «con intencionalidad didáctica» o «sin dicha intencionalidad didáctica», aunque los docentes puedan usar estos últimos en su gestión de la clase. Puzzles de dos piezas donde se ha de encajar la pieza que presenta una colección de objetos con otra donde esté representado el número, tienen intencionalidad didáctica; estarían en la primera clase. Una caja con bolas de diferentes colores que el profesor puede usar para trabajar aspectos del número, aunque en su construcción no existiese tal intencionalidad, estaría en la segunda clase.

En el material con intencionalidad didáctica se distingue, a su vez, entre material estructurado y material no estructurado. El material estructurado se caracteriza por poseer un conjunto de atributos, propios de cierta estructura matemática, los cuales son perceptibles sensorialmente. Están pensados para que sean el fundamento de los conceptos o propiedades que se desea que se aprendan. A este grupo de materiales pertenecen los ábacos, bloques lógicos, bloques multibase, regletas de Cuisenaire y los geoplanos. Materiales no estructurados, que no disponen de atributos como los mencionados, se pueden considerar el franelograma, juegos de cartas, puzzles especiales, dominós especiales y ciertos juegos de mesa.

Esta clasificación es aplicable, en particular, a materiales manipulativos que permiten trabajar conceptos numéricos. Cualquier colección de objetos discretos o juegos como el de «La Oca», materiales producidos sin intencionalidad didáctica, pueden utilizarse para trabajar el conteo. De forma análoga, los dados se pueden utilizar para trabajar la cardinalidad; juegos en los que son necesarios dos dados son útiles para establecer relaciones entre números. Para la comprensión del sistema de numeración de base 10 son útiles objetos que se puedan agrupar, sucesivamente, en paquetes de diez (por ejemplo, palillos que se agrupan, se atan con gomas y se sustituye cada agrupamiento por uno mayor) y juegos de mesa en los que sea necesario hacer cambios de monedas. Materiales estructurados para trabajar conceptos numéricos y sistema de numeración son los ábacos, los bloques multibase y las regletas de Cuisenaire, o números en color, los cuales describimos a continuación.

8.1. Ábacos

El ábaco, además de un material didáctico, que permite representar y leer números ya representados, es un instrumento de cálculo muy utilizado en algunas culturas. Consideramos dos tipos de ábaco:

- *Ábaco horizontal,* también llamado contador. Está formado por 10 varillas horizontales que contienen 10 cuentas cada una. Las 10 cuentas de cada varilla son 5 de un color y 5 de otro, alternándose los colores como se muestra en la figura 2.18, por lo que es sencillo realizar recuentos y visualizar las cantidades. El número se representa deslizando cuentas hacia la izquierda. Cada vez que se desplazan todas las cuentas de una varilla se tiene una decena. Para representar cantidades superiores a cien se combina el uso de dos ábacos, uno de los cuales se utiliza para representar cantidades superiores a la centena asignando el valor 100 a cada cuenta.

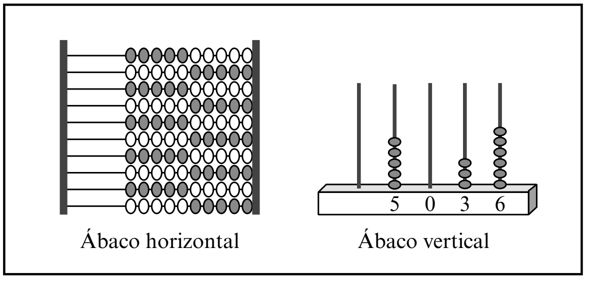


Figura 2.18.—Ábacos horizontal y vertical.

- *Ábaco vertical.* Consta de varillas verticales con cuentas sueltas. El número se representa insertando cuentas en las varillas. Las varillas representan, de derecha a izquierda, las unidades de diferente orden en modo creciente: unidad, decena, centena, etc. Cada cuenta tiene un valor diferente según la varilla en que se encuentre, y para hacerlo notar son de color diferente.

El uso del ábaco horizontal puede potenciar la comprensión del proceso de contar de forma sistematizada y la realización de operaciones básicas. El uso del ábaco vertical favorece la comprensión de los principios del sistema de numeración decimal.

ACTIVIDAD 1: Representa en un ábaco horizontal los números 59 y 45. Representa en un ábaco vertical los números 38, 765 y 476.

ACTIVIDAD 2: Identifica qué principios del sistema de numeración decimal se ponen de manifiesto al hacer uso de cada uno de estos ábacos. Justifica esa interpretación.

8.2. Bloques multibase

Los bloques multibase son un material manipulativo con la misma estructura que los sistemas de numeración aditivos con base. Se basan en el principio de agrupamiento. Se suelen presentar en cajas con un juego de piezas para cada una de las unidades de diferente orden. Aquí mostramos las que corresponden a la base 10. Las piezas que hay en las cajas son las siguientes: cubos de 1 cm de lado; barras (o tiras) de tantos cubos unidos como indique la base; placas cuadradas, cuyo lado está dado por la base, y cubos cuya arista tiene el valor de la base. Cada una de estas piezas representa los diferentes tipos de unidades. Para el caso de la base 10 el material está representado en la figura 2.19 en sus cuatro primeros órdenes de unidades.

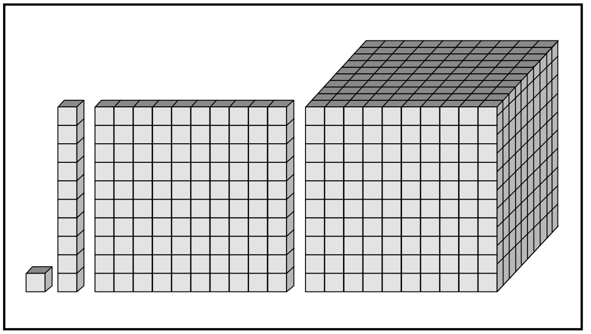


Figura 2.19.—Modelo de bloque de base 10.

Los bloques de base 10 permiten trabajar el concepto de unidad, el agrupamiento, los tipos y órdenes de unidades, el valor posicional de las cifras y las operaciones aritméticas

ACTIVIDAD 3: Con bloques de base 10, representa los números 143 y 1.342.

ACTIVIDAD 4: Dibuja las piezas que componen el material multibase en base 5.

8.3. Regletas de Cuisenaire

Es un material compuesto de prismas de madera o plástico (regletas) de un centímetro cuadrado de sección y de diferentes longitudes, desde 1 cm hasta 10 cm. Cada longitud está asociada a un color. Cada regleta representa un número, que corresponde a su longitud. La figura 2.20 recoge la longitud y el color de cada una de las regletas. Este material se puede utilizar para iniciar a los escolares en el aprendizaje de los números naturales y las operaciones básicas. Permite formar la secuencia ordenada 1 al 10, ordenar las regletas según su tamaño, y, por ende, los números que representan, y asociar cada cifra a una cantidad de longitud: construir otras secuencias numéricas (de dos en dos, de tres en tres...), descomponer y componer números y realizar operaciones aritméticas cuando intervengan números pequeños.

Regletas	Longitud	Color
	1	Blanco
	2	Rojo
	3	Verde claro
	4	Rosa
	5	Amarillo
	6	Verde oscuro
	7	Negro
	8	Marrón
	9	Azul
	10	Naranja

Figura 2.20.—Regletas Cuisenaire.

ACTIVIDADES PARA PRACTICAR

1. Analiza las frases siguientes e indica, para cada caso, el uso que se hace del número en las mismas: «la nota 5 corresponde al aprobado», «vivo en la planta 16», «el número premiado en el sorteo ha sido el 7.628», «la matrícula de mi coche tiene el número 3.281», «el palacio tiene 43 habitaciones» y «el número que más me gusta es el 25».
2. Alguien dice «veintiocho». Razona si se puede saber con qué uso se ha tomado el número 28.
3. Analiza la viabilidad de sumar dos etiquetas numéricas o dos ordinales.
4. En el sistema egipcio, las potencias de diez se representaban con elementos simples (figura 2.8) y los números compuestos se obtenían por repetición de los símbolos simples. Se tomaban tantos símbolos simples como fueran necesarios, no repitiéndose ninguno más de nueve veces, y se escribían indistintamente de izquierda a derecha, de arriba abajo y también cam-

biando la orientación de los símbolos. Escribe en sistema decimal los dos números representados en la figura 2.21:

Figura 2.21.—Ejemplos de representaciones en el sistema de numeración egipcio.

5. Representa los números 375 y 28 en el sistema de numeración egipcio.

6. Representa los números que se leen como «cien mil cien millones uno» y «setecientos cincuenta y cuatro trillones, ciento veinticuatro mil cuatro billones, dos mil millones».

7. Para los números romanos que aparecen a continuación escribe su equivalente en el sistema de numeración decimal: MMCIII, CCLIV y MDLI.

8. Escribe con símbolos romanos los números: 27, 375 y 2011.

9. La expresión de la medida del tiempo es compleja, pues utiliza diversas agrupaciones de unidades, con distintas bases y formas. Así, la duración de un acontecimiento puede venir representada en la forma: 1 (*a*), 2 (*m*), 27 (*d*), 15 (*h*), 25 (*m*) y 18 (*s*), donde *a* son años, *m* meses, etc. Estudia qué características tiene el sistema de numeración que utilizamos para medir el tiempo, las características que tiene en común con el sistema de numeración decimal y las que le hacen diferente.

10. Escribe con palabras el número 754.120.004.002.000.000. Expresa, mediante los términos ordinales, los números 11, 14, 53, 99, 135, 366, 584 y 1.336.

11. El número 341 está escrito en un sistema de base 5. Escribe dicho número en forma polinómica. Calcula y escribe su correspondiente escritura en el sistema de numeración decimal.

12. El número 6A3B está escrito en un sistema de base 12. Escribe dicho número en forma polinómica. Calcula y escribe su correspondiente en el sistema decimal.

13. Escribe el mayor número posible de tres cifras en base 4.

14. Escribe, en bases 3, 4 y 8, el número que indica la cantidad de los objetos siguientes: ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦.

15. Indica, sin hacer operaciones, cuántos billetes de 10 euros equivalen a 345 euros.

16. En una fábrica de caramelos, el empaquetado de los mismos se hace de la siguiente forma: tubos de 5 caramelos, paquetes de 5 tubos y cajas de 5 paquetes. Un empleado indica que en una hora se han fabricado 2 paquetes, 4 cajas y un tubo. Escribe el número que representa los caramelos fabricados en esa hora. Indica la base del sistema en que estaría escrito dicho número. En la hora siguiente, la fabricación ha sido de 785 caramelos. Escribe esa cantidad de caramelos de forma que se perciban los paquetes, cajas, tubos y caramelos sueltos que se formarán.

17. Indaga para conocer la base del sistema en la que el número 25 se duplica al invertir sus cifras.

18. Utiliza las regletas de Cuisenaire para realizar la descomposición de los números 10 y 8 de todas las formas posibles.

INVESTIGA Y REFLEXIONA

1. El principio posicional da lugar a que se pueda hablar de números capicúa como el siguiente 12345654321, que procede de calcular la potencia 111.111^2. Calcula las potencias 1^2, 11^2, 111^2, 1.111^2 y organiza las datos en una columna y los resultados en otra de forma que estén emparejados. Busca una relación de regularidad entre los números que aparecen en las dos columnas. Escribe, sin realizar la potencia, el resultado de 11.111^2.

2. Existen secuencias numéricas cuyo conocimiento puede ser de ayuda en situaciones matemáticas variadas. Una de dichas secuencias está formada por los números cuadrados perfectos: 1, 4, 9, 16, 25... La representación de esta secuencia de números mediante configuraciones de puntos se muestra en la figura 2.22. Basándote en las líneas trazadas en los cuadrados de puntos, justifica que «todo número cuadrado (n^2) es suma de una secuencia de números impares consecutivos, desde 1 hasta el lugar que indica la base de la potencia.

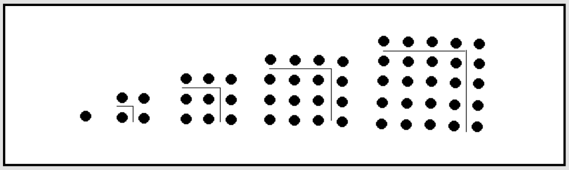


Figura: 2.22.—Números cuadrados.

3. Se conoce como números triangulares a la secuencia que aparece representada en la figura 2.23.

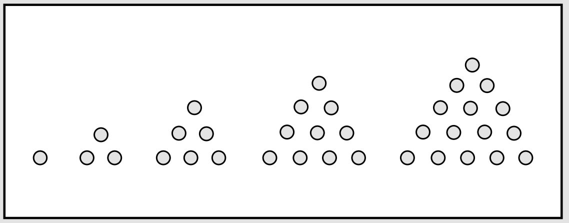


Figura 2.23.—Números triangulares.

a) Escribe la secuencia de los números triangulares en forma simbólica.
b) Analiza la formación de los números triangulares y escribe una conjetura sobre la regla de formación de los mismos como suma de números consecutivos.

4. Escribe un breve resumen (un folio como máximo) sobre los números poligonales. Busca información en libros o en Internet.

5. Copia en tu cuaderno la figura 2.24 y coloca en ella los números del 1 al 9 de forma que siempre se cumpla que la suma de los tres números que están en una misma línea es 15.

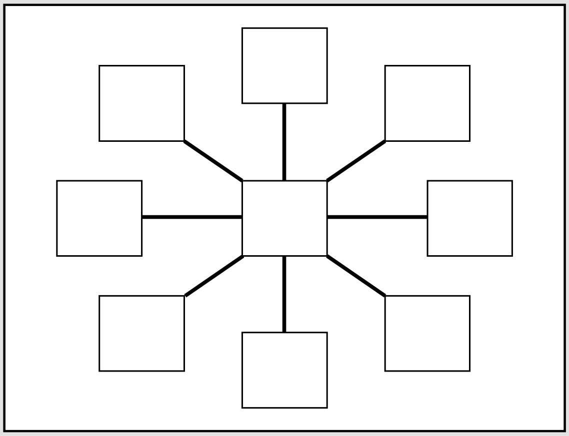


Figura 2.24

6. La figura 2.25 corresponde a una hoja de calendario. En ella se ha rodeado con un círculo el número 16. Además, se ha marcado un cuadrado cuyos vértices son 8, 10, 22 y 24.

Marzo 2011

	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

Figura 2.25

a) Comprueba que el número que hay dentro del círculo es la media de los números que hay en los dos vértices opuestos en el cuadrado.

b) Comprueba que para cada lado del cuadrado el número del centro es la media de los dos vértices que son los extremos de dicho lado.

c) Dibuja otros cuadros, con otros vértices, y comprueba si ocurre lo mismo que en éste.

d) Construye una tabla de 10 × 10 con los 100 primeros números; dibuja en ella formas cuadradas y rectangulares y explora relaciones similares a las observadas en el calendario.

7. La siguiente es una relación de libros de literatura infantil y juvenil relacionados con los números. Recomendamos la lectura de alguno de ellos para ampliar la visión de los números dada en este tema:

Frabetti, C. (2000). *Malditas matemáticas. Alicia en el país de los números*. Madrid: Alfaguara Juvenil.

Gómez, R. (2000). *El mundo secreto de los números. Aventura en el castillo numeral*. Madrid: SM.

Gómez, R. (2000). *La selva de los números*. Madrid: Alfaguara Juvenil.

Gómez, R. (2003). *Las hijas de tuga*. Madrid: Alfaguara.

Roig, P. y Font, J. (1997). *Apín capón zapún amanicano (1134)*. Barcelona: Octaedro.

Rittaud, B. (2008). *Viaje al país de los números*. Barcelona: El Juego de la Ciencia.

Serrano, E. (2002). *¡Ojalá no hubiera números!* Madrid: Nívola.

BIBLIOGRAFÍA

Castro, E. (2001). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria.* Madrid: Síntesis.

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1987). *Números y operaciones. Fundamentos para una didáctica escolar.* Madrid: Síntesis.

Ifrah, G. (1997). *Historia universal de las cifras.* Madrid: Espasa Calpe.

Stewart, I. (2008). *Historia de las Matemáticas. En los últimos 10.000 años.* 2.ª ed. Barcelona: Crítica.

3 Aritmética de los números naturales. Estructura aditiva

MARÍA CONSUELO CAÑADAS SANTIAGO
ELENA CASTRO-RODRÍGUEZ

Figura 3.1.—Problema de estructura aditiva: «Luis tenía 7 cartas y Paula le da 2, ¿cuántas cartas tiene Luis?».

El problema que se presenta en la figura 3.1 es un ejemplo de una situación real. La respuesta a este problema se puede obtener según diferentes formas de proceder. Verbalmente, podríamos contar progresivamente 2 unidades a partir de 7 hasta llegar a 9, y así dar respuesta al problema, que es una forma incipiente de realizar la suma:

$$7 + 2 = 7 + 1 + 1 = ?$$

Pero también podemos pensar que la solución es 9, puesto que si contamos regresivamente 2 desde 9, obtenemos 7. En este caso también podemos llegar a la solución pensando que el resultado menos 2 es 7, es decir:

$$? - 2 = 7$$

La respuesta al problema es la misma, pero la operación realizada no. Destacamos así que la operación para llegar a la solución de un problema no es un criterio adecuado para su clasificación. Dicho de forma directa: no hay problemas de sumar y problemas de restar, ya que una suma se puede interpretar como resta, o viceversa. Lo importante es la relación entre las cantidades consideradas, la estructura a la que se ajustan. Las situaciones y problemas que se resuelven mediante una adición o una sustracción se consideran parte de una misma estructura numérica, que se llama *estructura aditiva*.

La situación que muestra la figura 3.1 refleja la cotidianidad de las nociones implicadas en la estructura aditiva desde la más temprana edad, con clara repercusión en los aprendizajes escolares. Asimismo, refleja el papel que tiene la acción sobre los objetos físicos en el aprendizaje de las operaciones. Pero este inicio es sólo parte de la variedad de situaciones ligadas a la estructura aditiva, sobre las que profundizaremos.

La aritmética de los números naturales consta de dos estructuras claramente diferenciadas: la aditiva y la multiplicativa. Este capítulo aborda la estructura aditiva y es el primero de los dedicados al estudio de la aritmética de los números naturales. Consideramos la organización cognitiva del conocimiento matemático, que distingue entre conocimiento conceptual y conocimiento procedimental. El conocimiento conceptual propio de la estructura aditiva hace referencia a los conceptos y significados de las operaciones y a las situaciones que le dan sentido, así como a sus formas de representación, organización y justificación. El conocimiento procedimental incluye los procesos y modos de actuación que se establecen para realizar cálculos con los números, al dominio y uso de sus propiedades, a sus algoritmos y a la estimación de resultados. En particular, los tópicos en torno a los que se articula este capítulo son:

- Significados de las operaciones.
- Representaciones y modelos.
- Propiedades de las operaciones.
- Tipos de problemas.
- Algoritmos básicos de cálculo de las operaciones.

1. ESTRUCTURA ADITIVA EN EL CURRÍCULO ESCOLAR

Los escolares entran en contacto con situaciones aditivas a través de su entorno, antes de iniciar su período escolar en Educación Primaria. El currículo para este nivel educativo recomienda que en la enseñanza se utilicen situaciones familiares en las que la adición y la sustracción estén involucradas, así como diferentes formas de representar y modelizar las operaciones.

La secuencia numérica está relacionada con la estructura aditiva, pues el paso de un número a otro en la secuencia se obtiene sumando una unidad para alcanzar el número siguiente. La identificación de regularidades y relacionesnuméricas en el sistema decimal de numeración permite una primera aproximación a las propiedades de las operaciones de adición y sustracción. Las técnicas de conteo, hacia delante y hacia atrás, de uno en uno, de dos en dos, etc., son estrategias básicas para iniciarse en los algoritmos de cálculo. Resolver problemas sencillos eligiendo la operación y utilizando un algoritmo válido es también objetivo de esta etapa educativa. Entre las estrategias de cálculo los documentos curriculares señalan la necesidad de aplicar los algoritmos básicos para obtener los resultados de las operaciones aditivas, desarrollar estrategias de cálculo mental y técnicas de cálculo aproximado y el uso de la calculadora.

Las expectativas de aprendizaje del escolar en Educación Primaria hacen que el futuro maestro tenga que profundizar sobre los elementos que configuran la estructura aditiva. Es necesario que el futuro maestro conozca el significado de las operaciones con números naturales basadas en el sistema de numeración decimal, así como los contextos y situaciones con los que la adición y la sustracción están asociadas; que defina y relacione los conceptos de adición y sustracción; que reconozca, identifique y enuncie diferentes tipos de problemas que se puedan plantear mediante las operaciones aditivas; que represente y resuelva problemas en esta estructura mediante diferentes modelos, y que sepa justificar los algoritmos tradicionales de la adición y la sustracción.

2. SIGNIFICADOS Y REPRESENTACIONES DE LA ADICIÓN Y DE LA SUSTRACCIÓN

Las representaciones muestran diferentes significados de las dos operaciones aritméticas consideradas. En este apartado presentamos los significados y las representaciones de la adición y de la sustracción.

Una búsqueda en diversos diccionarios y enciclopedias permite encontrar diferentes términos relacionados con la estructura aditiva. Acumular, ampliar, añadir, aumentar, dar, deducir, disminuir, disponer, imponer, ingresar, meter, poner, quitar, recibir, recoger, reducir, regalar, restar, retirar, reunir, sacar, sumar y sustraer son algunos de ellos. No es posible discernir cuáles de estos términos están asociados a la adición y cuáles a la sustracción. Así, por ejemplo:

- *Quitaron primero 4 cuadros y luego yo quité otros 3* se expresa simbólicamente por: 4 + 3.
- *Tenía 5 mensajes y quité 3 de ellos* se expresa simbólicamente por: 5 – 3.

ACTIVIDAD 1: Localiza nuevos términos asociados con las acciones de agregar/segregar objetos. Ejemplifica con cada término su uso dentro de la estructura aditiva.

ACTIVIDAD 2: Enuncia dos relaciones aditivas mediante el verbo «disminuir».

2.1. Significados de la adición

Proponemos un ejemplo de situación aditiva.

Situación 1. Manolo tiene tres lápices y Rosa le da dos.

La situación 1 describe una acción física (Rosa le da lápices a Manolo) sobre un número de objetos inicial (lápices de Manolo al principio) que hace que el número de lápices que tenía Manolo aumente. Este tipo de situaciones responden a una concepción unitaria de la adición. Representamos la situación y el número final de lápices que tiene Manolo después de la acción física en la figura 3.2.

En la adición hay involucradas tres cantidades, dos cantidades que se agregan, que se llaman *sumandos* y la cantidad resultante, que se llama *resultado*.

En una suma puede haber más de dos sumandos, cuando se agregan más de dos cantidades. En lo que sigue, haremos referencia a adiciones con dos sumandos, pudiendo reducirse a este caso las adiciones en las que haya implicados más de dos sumandos.

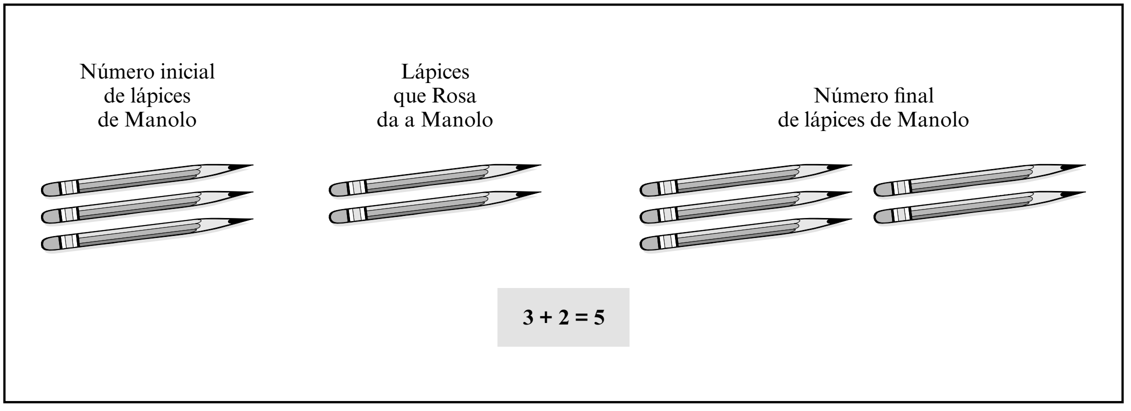


Figura 3.2.—Representación de la situación 1.

> *En la **concepción unitaria de la adición** hay una cantidad inicial que experimenta un cambio al añadirle una segunda cantidad. El resultado es el incremento de la segunda cantidad sobre la primera.*

La situación 2 que se observa a continuación muestra un significado diferente a la anterior.

Situación 2. María tiene tres euros en su mano derecha y dos en su mano izquierda.

En la situación 2 hay dos cantidades sobre las que no se realiza ninguna acción física y que se consideran conjuntamente. Este tipo de situaciones responden a una concepción binaria de la adición.

Una forma de presentar la situación 2 muestra la unión de dos conjuntos que tienen 3 y 2 elementos, respectivamente. La cantidad total que tiene María se obtiene mediante la adición de 3 y 2. La figura 3.3 representa el resultado de esta adición con base en la cardinalidad de los conjuntos implicados.

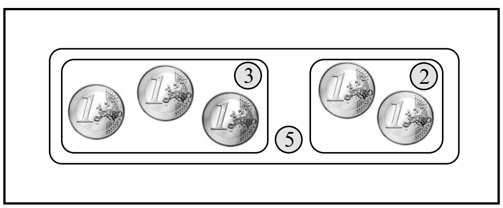


Figura 3.3.—Representación de la situación 2.

> *Si a y b son dos números naturales que representan los cardinales de dos conjuntos (A y B), la adición de a y b se escribe a + b, y es el cardinal del conjunto A unión B (se supone que A y B no tienen elementos comunes).*

> *En la **concepción binaria de la adición** hay dos cantidades que tienen asignado el mismo papel. Se realiza una unión o combinación de las dos cantidades que permite llegar al resultado.*

2.2. Significados de la sustracción

La situación 3 pone de manifiesto un significado de la sustracción basado en la acción, análogo al introducido en la situación 1 de la adición.

Situación 3. Manolo tiene tres lápices y pierde uno.

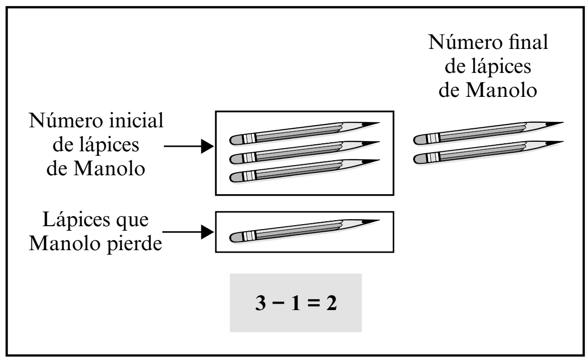


Figura 3.4.—Representación de la situación 3.

En la situación 3 se realiza una acción física (Manolo pierde un lápiz) sobre un número de objetos inicial (lápices de Manolo al principio) que hace que el número de lápices que tenía Manolo disminuya. Este tipo de situaciones responden a una concepción unitaria de la sustracción.

> *En la **concepción unitaria** de la sustracción hay una cantidad inicial que sufre un cambio al quitarle una segunda cantidad. El resultado es la disminución de la segunda cantidad sobre la primera.*

En esta concepción unitaria de la sustracción están presentes tres cantidades, la cantidad inicial, llamada *minuendo* y la cantidad que se segrega o quita de la anterior, llamada *sustraendo*. El resultado es, de nuevo, la cantidad que se obtiene al realizar la operación. Dentro de la aritmética de los números naturales, el minuendo debe ser mayor que el sustraendo, de forma que el resultado sea un número natural.

La situación 4 muestra un segundo significado de la sustracción.

Situación 4. María tiene 4 euros en total, 3 de ellos en su mano derecha.

En esta situación se conoce la cantidad de euros que tiene María en total y los que tiene en una de las manos, sin realizar ninguna acción física. La diferencia entre ambas cantidades pone de manifiesto una concepción binaria de la sustracción.

> *En la* ***concepción binaria de la sustracción*** *hay dos cantidades que tienen asignado el mismo papel. Se valora lo que hay en el todo y en una de las partes, lo cual permite conocer lo que hay en el complemento.*

En la tabla 3.1 resumimos las acciones asociadas a las concepciones binaria y unitaria de la adición y de la sustracción presentadas.

TABLA 3.1

Concepciones y tipos de acciones asociadas a la adición y a la sustracción

Concepción unitaria	Concepción binaria
Adición	
Aumentar	Unir/combinar
Sustracción	
Disminuir	Comparar/igualar

2.3. Representaciones

Cada representación tiene sus elementos propios para expresar las nociones características de la estructura aditiva (números, acciones, resultados, etc.), así como sus reglas para combinar estos elementos. Desde esta perspectiva, centramos la atención en tres representaciones diferentes pero complementarias: *a*) simbólica, *b*) manipulativa y *c*) icónica.

El principio aditivo del sistema decimal de numeración hace especialmente adecuados a los números escritos en notación decimal para expresar relaciones aditivas. La representación simbólica es la habitual en aritmética. Los símbolos proporcionan la representación simbólica de la estructura aditiva. Los números naturales, tal y como los conocemos en nuestro sistema de numeración decimal actual, descritos en el capítulo 2, forman parte importante de esta representación. Otros símbolos característicos de la estructura aditiva los recogemos en la tabla 3.2, junto con su lectura y significado.

TABLA 3.2

Símbolos

Símbolo	Operación/relación	Lectura
+	Sumar	Más
−	Restar	Menos
=	Igualar	Igual

Los símbolos introducidos, conocidos por el lector, no son familiares para los escolares cuando comienzan su trabajo con ellos. Una ventaja de la notación simbólica respecto a otros sistemas de representación es que expresa con precisión y facilidad cualquier operación entre números naturales.

La representación manipulativa incluye diferentes materiales manipulables (física o virtualmente). Un ejemplo son las regletas de color o regletas de Cuisenaire, que se han introducido en el capítulo 2. En la figura 3.5 se muestra la adición de 4 y 3 usando regletas. Partiendo de las dos regletas que tienen esas longitudes (paso 1), y obteniendo cuál es la longitud de las dos regletas conjuntas (paso 2), se llega a identificar la regleta cuya longitud es la adición de las longitudes de las dos regletas iniciales, que es la regleta de longitud 7 (paso 3).

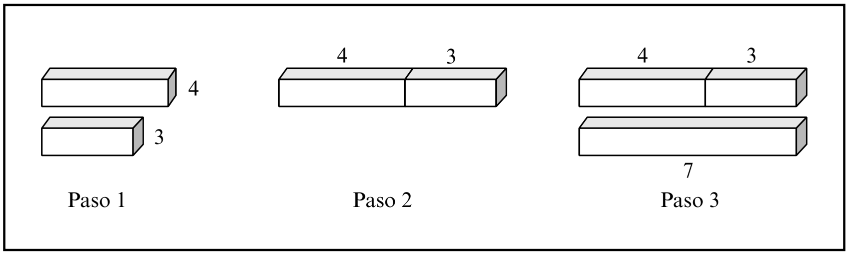


Figura 3.5.—Adición con las regletas Cuisenaire.

ACTIVIDAD 3: Realiza la sustracción 8 – 5 utilizando las regletas de Cuisenaire.

La representación icónica hace referencia a dibujos o imágenes que se pueden trazar sobre el papel. La figura 3.6 muestra un ejemplo de representación icónica.

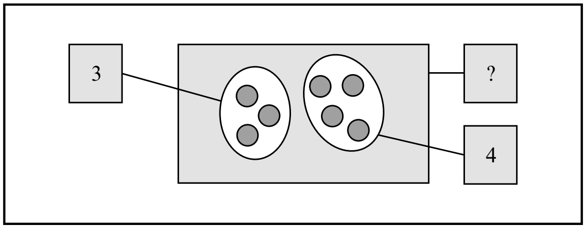


Figura 3.6.—Adición con representación icónica.

2.4. Qué es sumar

En el capítulo 2 vimos que un número natural *a* es el cardinal de un conjunto finito *A*: $a = \text{card}(A)$. Según hemos visto:

> *La suma de dos números naturales a y b se define por $a + b = \text{card}(A \cup B)$, donde $a = \text{card}(A)$ y $b = \text{card}(B)$, con los conjuntos A y B disjuntos.*

2.5. Qué es restar

La diferencia de dos números naturales *a* y *b* con $a \geq b$ es aquel otro número *c* que sumado con el menor de ellos, *b,* da como resultado el mayor *a:* $c + b = a$. Por este motivo se dice que la sustracción es la operación inversa de la adición.

> *Sean dos números a y b, con $a \geq b$, se define su diferencia, $c = a - b$, como aquel número que sumado con b da como resultado a.*

3 PROPIEDADES Y MODELOS PARA LA ADICIÓN Y LA SUSTRACCIÓN

Utilizamos diferentes modelos para visualizar propiedades de las dos operaciones aritméticas de la estructura aditiva.

Las regletas constituyen un *modelo de medida* para las operaciones de adición y sustracción. En particular, para la estructura aditiva hay varios modelos asociados, que presentamos en los siguientes apartados: *a*) lineales; *b*) cardinales; *c*) de medida; *d*) numéricos, y *e*) funcionales. Proponemos un ejemplo, al menos, para cada tipo.

La recta numérica es un ejemplo de *modelo lineal* que permite visualizar propiedades de la adición. Así, la figura 3.7 muestra que $5 + 7 = 7 + 5$.

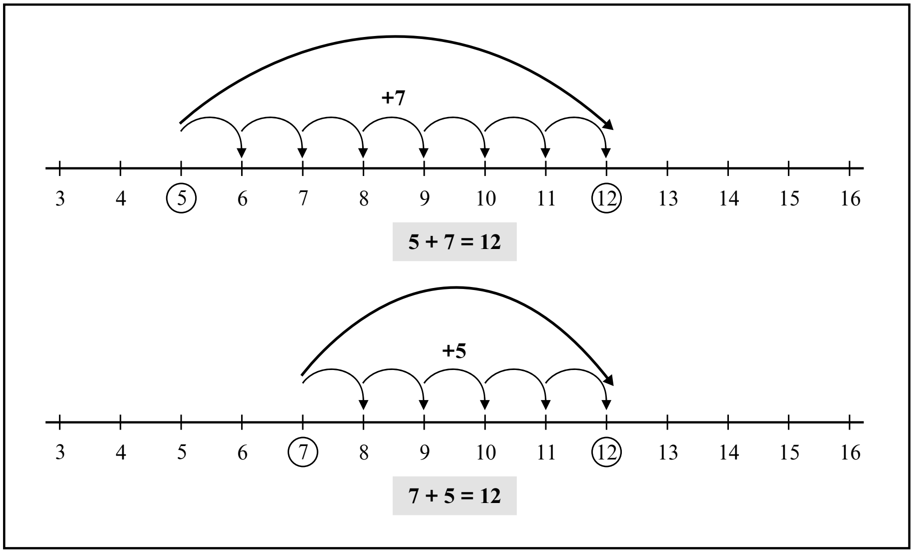


Figura 3.7.—Relación conmutativa en la recta numérica.

Esta propiedad también se puede visualizar mediante el modelo de las balanzas o mediante las regletas. Ambos son modelos de medida. Las balanzas constituyen un modelo de medida de masa. En la figura 3.8 se puede observar el ejemplo $4 + 5 = 5 + 4$.

ACTIVIDAD 1: Utiliza las regletas para comprobar visualmente la propiedad conmutativa.

Utilizamos un *modelo cardinal* para visualizar un ejemplo de la propiedad asociativa de la adición. La figura 3.9 muestra que $6 + (2 + 4) = (6 + 2) + 4$.

Figura 3.8.—Relación conmutativa en una balanza.

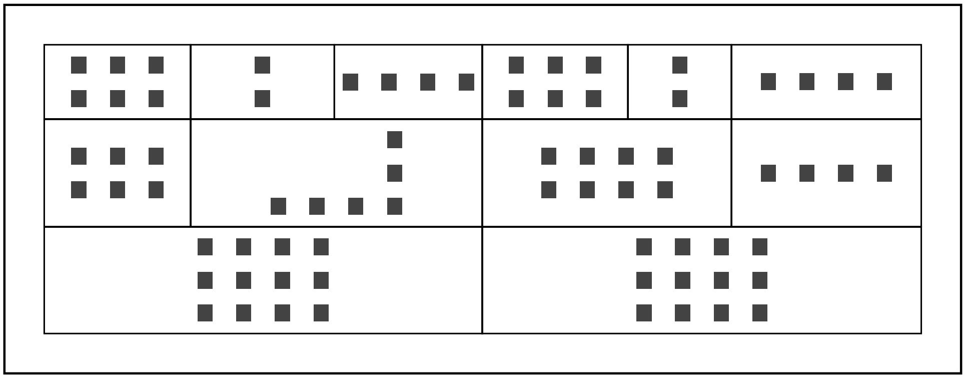


Figura 3.9.—Relación asociativa en un modelo cardinal.

ACTIVIDAD 2: Utiliza el modelo de recta numérica para visualizar la propiedad asociativa.

ACTIVIDAD 3: Utiliza un modelo cardinal para visualizar la propiedad conmutativa.

Los *modelos numéricos* son aquellos que utilizan los símbolos presentados en la tabla 3.2. Por ejemplo, 24 + 31 = 31 + 24 expresa una relación conmutativa para la adición.

Los *modelos funcionales* consideran una cantidad de partida o estado inicial y, tras una transformación u operador, se obtiene una cantidad o estado final, que es el resultado de la operación. Es habitual utilizar un esquema del tipo que presentamos en la figura 3.10, ejemplificado para una sustracción.

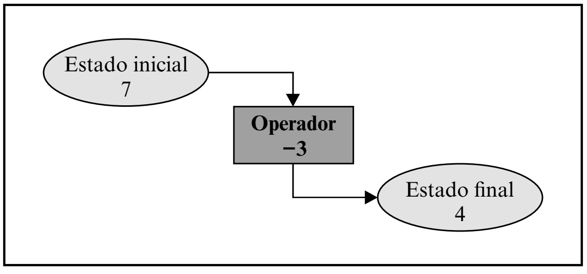


Figura 3.10.—Modelo funcional.

La tabla 3.3 recoge las propiedades de la adición, algunas de las cuales se han ejemplificado anteriormente con distintos modelos.

TABLA 3.3

Propiedades de la adición

Nombre	Descripción
Clausura	Si a y b son dos números naturales, entonces $a + b$ es un único número natural.
Conmutativa	Si a y b son dos números naturales cualesquiera, entonces $a + b = b + a$.
Asociativa	Si a, b y c son tres números naturales cualesquiera, entonces $a + (b + c) = (a + b) + c$.
Elemento neutro	Para cualquier número natural a se cumple que $a + 0 = 0 + a = a$.

Las propiedades conmutativa y asociativa para la adición han sido ejemplificadas mediante modelos. Para probar que se cumplen de manera general hay que mostrar que la unión de conjuntos es igualmente asociativa y conmutativa, ya que la suma de dos números se define por medio del cardinal de la unión de conjuntos.

La sustracción no cumple la propiedad de la clausura, ya que, por ejemplo, $5 - 7$ no es un número natural; no hay un número natural c que sumado con 7 dé 5 como resultado.

El cero es el elemento neutro para la sustracción por la derecha, ya que $a - 0 = a$.

Además, destacamos la *propiedad de la compensación,* que involucra a la adición y a la sustracción:

Compensación	Si a, b y c son tres números naturales, entonces $a - b = (a + c) - (b + c)$.

ACTIVIDAD 4: Encuentra ejemplos que permitan afirmar que la sustracción no cumple las propiedades conmutativa ni asociativa.

ACTIVIDAD 5: Justifica que el resultado de cualquier adición de dos sumandos siempre es mayor que cualquiera de sus sumandos.

ACTIVIDAD 6: Utiliza ejemplos numéricos para comprobar la propiedad de compensación.

4. SITUACIONES Y PROBLEMAS ADITIVOS

Las operaciones aritméticas y, en particular, la adición y la sustracción, permiten dar respuesta a situaciones problemáticas del mundo real. En el ámbito educativo estas situaciones se presentan al escolar en forma de texto escrito; es lo que se llama *problemas aritméticos de enunciado verbal*.

En la resolución de problemas se suele distinguir entre problemas de una etapa y problemas de dos o más etapas. Los problemas de una etapa —o *problemas simples*— son los que se resuelven con una operación aritmética empleada una sola vez.

Un problema de n etapas es aquel en el que se necesitan n operaciones para llegar a su solución. En el caso de la estructura aditiva, cada una de estas acciones se corresponde con adiciones y/o sustracciones.

Este capítulo se centra en los problemas de estructura aditiva de una etapa. Los problemas de dos o más etapas se pueden analizar a través de cada una de las etapas que los componen.

> *Los problemas aditivos de una etapa se resuelven con una adición o una sustracción.*

En los problemas aditivos de una etapa hay tres cantidades involucradas mediante una relación aditiva. Para que se puedan resolver mediante una operación aritmética, es necesario conocer dos de esas cantidades. A las cantidades conocidas se les llama *datos,* y a la cantidad desconocida, *resultado* o *incógnita.*

En lo que sigue, describimos diferentes tipos de problemas enunciados verbalmente que atienden a los significados de la adición y la sustracción presentados. Consideramos una clasificación semántica de los problemas distinguiendo cuatro tipos: *a*) problemas de cambio, *b*) problemas de combinación, *c*) problemas de comparación y *d*) problemas de igualación.

4.1. Problemas de cambio

Los siguientes enunciados se corresponden con dos problemas aditivos:

Problema 1. María tenía 8 pelotas y le regalan 5, ¿cuántas pelotas tiene ahora?

Problema 2. María tenía 8 pelotas y pierde 5, ¿cuántas pelotas tiene ahora?

Aunque los enunciados anteriores presentan diferencias, comparten el hecho de que en ellos se produce una acción física que transforma una cantidad inicial.

> *En los problemas de cambio se distinguen tres momentos diferentes: hay una **cantidad inicial** sometida a una acción o **transformación** que la modifica para llegar a una **cantidad final.***

Este tipo de problemas se suelen representar mediante el esquema de la figura 3.11.

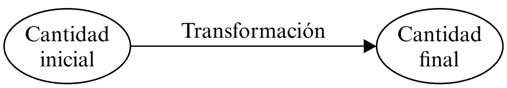


Figura 3.11.—Esquema de problema aditivo de cambio.

En los problemas 1 y 2 se produce una transformación sobre una cantidad inicial, por lo que se presenta una concepción unitaria de las operaciones implicadas. En el primero, la cantidad inicial se incrementa, mientras que en el segundo la cantidad inicial disminuye. El primer tipo de problemas se llama de *cambio de aumento*. En el problema 1 se conoce la cantidad inicial y la transformación, estando la incógnita en la cantidad final, por lo que el esquema sería el de la figura 3.12.

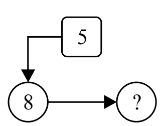


Figura 3.12.—Esquema del problema 1.

En el problema 2 el resultado final proviene de la disminución de una cantidad inicial, que puede proceder de una acción de quitar. Este tipo de problemas son de *cambio de disminución*. En el enunciado del problema 2 se conoce la cantidad inicial y la transformación, y se desconoce la cantidad final.

Tanto en los problemas de cambio de aumento como en los de cambio disminución, la cantidad desconocida puede ser el estado inicial, el estado final o la transformación. Por tanto, en total hay seis tipos de problemas de cambio. La tabla 3.4 presenta los seis enunciados diferentes que admiten los problemas de cambio a partir del ejemplo inicial.

TABLA 3.4

Ejemplos de los seis tipos de problemas aditivos de cambio

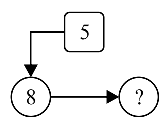
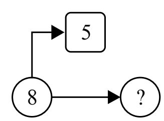
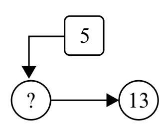
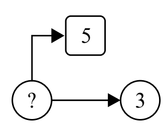
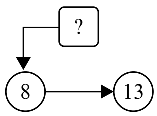
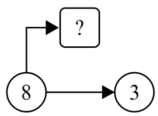
Cambio-aumento	Cambio-disminución
Incógnita en cantidad final	
María tenía 8 pelotas y le regalan 5, ¿cuántas pelotas tiene ahora? 	María tenía 8 pelotas y pierde 5, ¿cuántas pelotas tiene ahora? 
Incógnita en cantidad inicial	
María tenía algunas pelotas y le regalan 5. Si ahora tiene 13 pelotas, ¿cuántas pelotas tenía al comienzo? 	María tenía algunas pelotas y pierde 5. Si ahora tiene 3 pelotas, ¿cuántas pelotas tenía al comienzo? 

TABLA 3.4 *(continuación)*

Cambio-aumento	**Cambio-disminución**
Incógnita en transformación	
María tenía 5 pelotas. Si ahora tiene 8, ¿cuántas pelotas le han regalado? 	María tenía 8 pelotas. Después de perder algunas, le quedan 5, ¿cuántas pelotas ha perdido? 

ACTIVIDAD 1: «¿Cuántos kilos ha engordado Samuel si ahora pesa 54 y el año pasado pesaba 48?» Clasifica este problema y representa el esquema correspondiente.

ACTIVIDAD 2: Enuncia problemas de cada uno de los cinco tipos restantes a partir del enunciado del problema de la actividad anterior.

ACTIVIDAD 3: Enuncia un problema de cambio-aumento que se resuelva con la operación 15 – 7.

ACTIVIDAD 4: Enuncia un problema de cambio-disminución que se resuelva con la operación 18 + 11.

4.2. Problemas de combinación

Los siguientes enunciados se corresponden con dos problemas de estructura aditiva:

Problema 3. Carlos tiene 6 lápices verdes y 7 lápices rojos, ¿cuántos lápices tiene Carlos?

Problema 4. Carlos tiene 13 lápices, unos verdes y otros rojos. Si tiene 6 lápices verdes, ¿cuántos lápices rojos tiene Carlos?

En ambos enunciados se observan dos cantidades estáticas (número de lápices rojos y número de lápices verdes) que forman un total (número de lápices). En los problemas de combinación hay una cantidad que es el total de dos cantidades que no se modifican.

> *En los **problemas de combinación** hay dos cantidades estáticas (A y B) que forman parte de un todo que las incluye y lo conforman en su totalidad.*

Este tipo de problemas ponen en juego una concepción binaria de las operaciones; se les suele conocer como *problemas de parte-todo*. Esquemáticamente, se puede representar su estructura como se recoge en la figura 3.13.

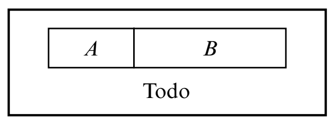


Figura 3.13.—Esquema de problema de combinación.

La relación que existe entre las cantidades de lápices de los enunciados de los problemas 3 y 4 no conlleva acción. Puesto que el papel que tienen las partes es simétrico, se suelen distinguir sólo dos tipos de problemas: uno en el que se trata de obtener el todo a partir de las partes (problema 3) y, otro en el que se trata de hallar el valor de una de las partes conocida la otra y el todo (problema 4). Por tanto, sólo hay dos tipos de problemas de combinación, que se pueden esquematizar como se muestra en la figura 3.14.

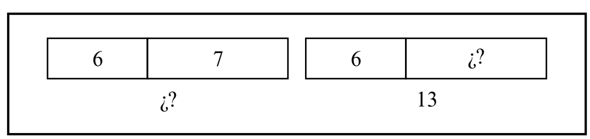


Figura 3.14.—Esquemas de los problemas 3 y 4.

Los problemas de combinación son problemas estáticos porque no existe una acción física que transforme una cantidad.

TABLA 3.5

Ejemplos de los dos tipos de problemas de combinación

Incógnita en el todo
Carlos tiene 6 lápices rojos y 7 azules, ¿cuántos tiene en total? [6 | 7] = ?
Incógnita en una parte
Carlos tiene 13 lápices, unos son verdes y otros son rojos. Si 6 son verdes, ¿cuántos son rojos? [6 | ?] = 13

ACTIVIDAD 5: Partiendo del siguiente enunciado: «Pablo tiene 13 caramelos, 5 son de fresa y el resto son de menta. ¿Cuántos caramelos de menta tiene?», plantea el segundo problema de combinación que se puede enunciar.

ACTIVIDAD 6: Inventa dos problemas de combinación de tipos distintos cuyos resultados sean 9.

4.3. Problemas aditivos de comparación

Los dos problemas siguientes son problemas aditivos:

Problema 5. Teresa tiene 6 galletas y Antonio tiene 9. ¿Cuántas galletas tiene Antonio más que Teresa?

Problema 6. Teresa tiene 6 galletas y Antonio tiene 9. ¿Cuántas galletas tiene Teresa menos que Antonio?

Ambos enunciados comparten que relacionan dos cantidades mediante comparación aditiva, y ninguna se modifica.

> *En los **problemas de comparación** se dan simultáneamente dos cantidades independientes que se relacionan mediante la comparación.*

Este tipo de problemas no dependen del tiempo, son estáticos y también ponen en juego una concepción binaria de las operaciones. En la comparación de cantidades, una de ellas actúa de referente (*R*) y otra de comparado o referido (*C*). El resultado de la comparación de las dos cantidades es la cantidad diferencia (*D*). Su estructura se puede representar mediante los dos esquemas de la figura 3.15.

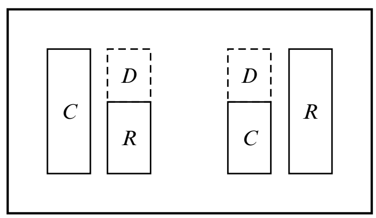


Figura 3.15.—Esquemas de problemas aditivos de comparación.

Como se observa en la figura 3.15, hay dos posibles comparaciones, según el referente sea menor o mayor que el comparado. En cada uno de éstos hay tres posibles problemas, según se desconozca una de las tres cantidades (*C, R,* o *D*). Por tanto, en total tenemos 6 posibles problemas de comparación aditiva.

En los enunciados de estos problemas la relación entre las cantidades se expresa con términos comparativos. Las palabras o términos del enunciado que muestran la relación de comparación son «más que» o «menos que» o equivalentes, y pueden ir acompañadas de un adjetivo según el contexto: «más viejo que», «menos alto que», etc. Además, variando la posición de la incógnita, se pueden formular tres problemas diferentes para cada uno de los dos tipos presentados. La tabla 3.6 recoge los seis problemas diferentes de comparación partiendo del enunciado de los problemas 5 y 6.

ACTIVIDAD 7: Enuncia un problema de igualación de cada uno de los tipos cuyos datos sean 13 y 14.

4.4. Problemas aditivos de igualación

Los enunciados de los problemas 7 y 8 comparten ciertas características con algunos de los anteriores:

Problema 7. Tengo 14 euros y mi hermano tiene 8. ¿Cuántos euros necesita recibir mi hermano para tener los mismos que yo?
Problema 8. Tengo 14 euros y mi hermano tiene 8. ¿Cuántos euros tengo que gastar para tener tantos como mi hermano?

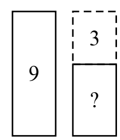
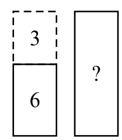
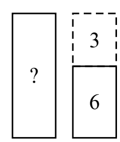
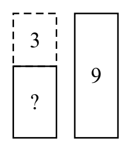
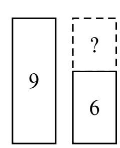
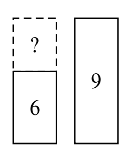
En ambos enunciados se plantea una acción para igualar las dos cantidades presentadas en el problema. Ésta es la característica de los problemas de igualación.

> *Los enunciados de los* ***problemas de igualación*** *exponen una acción física, necesaria para que una cantidad sea igual a otra.*

La diferencia fundamental entre los problemas 7 y 8 es la cantidad sobre la que se realiza la acción. En el problema 7 la acción hay que realizarla sobre la cantidad menor, mientras que en el problema 8 la acción se realiza sobre la cantidad mayor. Si la acción hay que reali-

TABLA 3.6

Ejemplos de los seis tipos de problemas aditivos de comparación

Comparación-aumento	Comparación-disminución
Incógnita en referente	
Teresa tiene 9 galletas, 3 galletas más que Antonio. ¿Cuántas galletas tiene Antonio? 	Antonio tiene 6 galletas, 3 galletas menos que Teresa. ¿Cuántas galletas tiene Teresa? 
Incógnita en comparado	
Antonio tiene 6 galletas. Teresa tiene 3 galletas más que Antonio. ¿Cuántas galletas tiene Teresa? 	Teresa tiene 9 galletas. Antonio tiene 3 galletas menos que Teresa. ¿Cuántas galletas tiene Antonio? 
Incógnita en diferencia	
Teresa tiene 9 galletas y Antonio tiene 6. ¿Cuántas galletas tiene Teresa más que Antonio? 	Antonio tiene 6 galletas y Teresa tiene 9. ¿Cuántas galletas tiene Antonio menos que Teresa? 

zarla sobre la cantidad mayor, se denomina problema de *igualación-disminución*. Si, por el contrario, la acción se realiza sobre la menor, se obtiene un problema de *igualación-aumento*.

Algunos autores consideran los problemas de igualación como un caso especial de los problemas de comparación, pero ambos tipos muestran una formulación lingüística distinta: «tan que» o «tantos como». También son diferentes porque los problemas de comparación son estáticos (las cantidades no se modifican) y los problemas de igualación demandan una transformación de una cantidad en otra, adoptando así un carácter dinámico. Su similitud con los problemas de comparación es debida a que se inscriben dentro de un mismo esquema.

Teniendo en cuenta el lugar que ocupe la incógnita, se pueden obtener tres tipos de problemas de igualación-aumento y otros tres de igualación-disminución. En la tabla 3.7 mostramos ejemplos para estos seis tipos de problemas.

ACTIVIDAD 8: Atendiendo a la clasificación de problemas aditivos propuesta, describe el problema de la figura 3.1 y representa su esquema correspondiente.

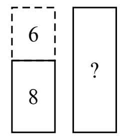
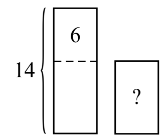
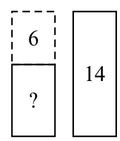
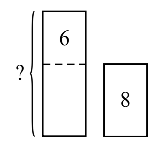
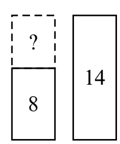
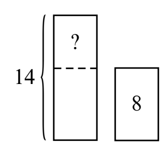
ACTIVIDAD 9: Atendiendo a la clasificación de problemas aditivos propuesta, inventa los siguientes problemas: *a*) un problema de cambio-aumento; *b*) un problema de combinación con la incógnita en el total; *c*) un problema de comparación-disminución, y *d*) un problema de igualación-aumento.

4.5. Problemas aditivos de más de una etapa

ACTIVIDAD 10: Lee con atención el siguiente enunciado: «María tiene 8 canicas rojas y 5 verdes; luego, compra otras 4 canicas azules. ¿Cuántas canicas tiene en total?». Reflexiona en qué se diferencia de los problemas de una etapa.

TABLA 3.7

Ejemplos de los seis tipos de problemas aditivos de igualación

Igualación-aumento	Igualación-disminución
Incógnita: referente	
Pedro tiene 8 euros y necesita ganar 6 euros más para tener tantos como Ana. ¿Cuántos euros tiene Ana? 	Ana tiene 14 euros y si gasta 6 euros tendrá tantos como Pedro. ¿Cuántos euros tiene Pedro? 
Incógnita: comparado	
Ana tiene 14 euros. Si Pedro gana 6 euros, tendrá tantos como Ana. ¿Cuántos euros tiene Pedro? 	Pedro tiene 8 euros. Si Ana gasta 6 euros, tendrá tantos como Pedro. ¿Cuántos euros tiene Ana? 
Incógnita: igualación	
Ana tiene 14 euros y Pedro tiene 8 euros. ¿Cuántos euros tiene que ganar Pedro para tener tantos como Ana? 	Ana tiene 14 euros y Pedro tiene 8 euros. ¿Cuántos euros tiene que gastar Ana para tener tantos como Pedro? 

Problemas aditivos compuestos, o de más de una etapa, son aquellos que involucran más de una relación aditiva. Las categorías establecidas para los problemas de una etapa pueden extenderse a cada una de las relaciones presentadas en un problema de más de una etapa. Por ejemplo:

Problema 9. María tiene 13 canicas, da a Pedro 5 canicas y 2 a Ana. ¿Cuántas canicas le quedan a María?

Problema 10. María tiene 5 canicas más que Pedro, Pedro tiene 3 canicas más que Ana y Ana tiene 2 canicas ¿Cuántas canicas tiene María?

Estos problemas son extensiones de problemas de cambio e igualación, respectivamente, a problemas de dos etapas. De la misma manera se pueden combinar cada una de las categorías anteriores.

5. ALGORITMOS DE LA ADICIÓN Y DE LA SUSTRACCIÓN

Existen diferentes formas de obtener los resultados de las operaciones aritméticas. La forma directa y sistemática de obtener los resultados de las operaciones es mediante el uso de algoritmos. Un algoritmo es una serie finita de pasos a aplicar en un determinado orden para llegar con certeza a un resultado. En este apartado describimos los algoritmos de la adición y de la sustracción. Llamaremos *algoritmos estándar* a los que se suelen utilizar en nuestro sistema educativo.

5.1. Algoritmos de la adición

Se suele comenzar a trabajar la adición con sumandos de una cifra, para pasar después a utilizar sumandos de más cifras.

Sumandos de una cifra

Se comienza por construir el resultado de sumar y de restar los números de una cifra, llegando a memorizar esos resultados. El conocimiento de estos datos básicos es lo que constituye el aprendizaje de los *hechos numéricos*. Estos primeros aprendizajes se pueden introducir mediante algunos de los modelos presentados anteriormente.

Los hechos numéricos básicos de la adición en el sistema de numeración decimal se recogen en la *tabla de sumar,* que se presenta a continuación.

TABLA 3.8

Tabla de sumar

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

La primera fila de la tabla se escribe igual que la fila de partida, teniendo en cuenta que el cero es el elemento neutro para la adición. El resto de las filas se completan añadiendo uno al número anterior o, lo que es equivalente, siguiendo la secuencia numérica.

ACTIVIDAD 1: Construye la tabla de sumar en base 10 e identifica en ella regularidades.

La memorización de los hechos numéricos se facilita si se tienen en cuenta las propiedades de la adición. Por ejemplo, la adición de cualquier número y 0 es ese número, o la propiedad conmutativa (4 + 7 = 7 + 4).

ACTIVIDAD 2: Construye una tabla de sumar en base 5 con sumandos de un dígito.

Sumandos de más de una cifra

La memorización de los hechos numéricos para sumandos de una cifra facilita la adición con sumandos de más cifras. Si no se recuerdan, la tabla de sumar puede ser un apoyo.

En la tabla 3.9 presentamos la adición 185 + + 41 con material multibase (representación manipulativa), mediante tablas de valor posicional (simbólico) y mediante el algoritmo estándar (representación simbólica).

Los pasos realizados en la adición se justifican mediante los principios del sistema de numeración decimal y las propiedades de la adición. Justificamos los pasos dados para la adición 185 + 41 en la tabla 3.10.

ACTIVIDAD 3: Realiza la adición 265 + 347 con el material multibase, identificando cada paso simbólicamente.

En la figura 3.16 presentamos un ejemplo de adición con sumandos de más de una cifra con el ábaco vertical. En este ábaco cada varilla representa un orden. Empezando por la derecha, el número de bolas en la varilla primera representa el número de unidades, el número de bolas de segunda es el número de decenas, y así sucesivamente.

TABLA 3.9

Adición con llevada

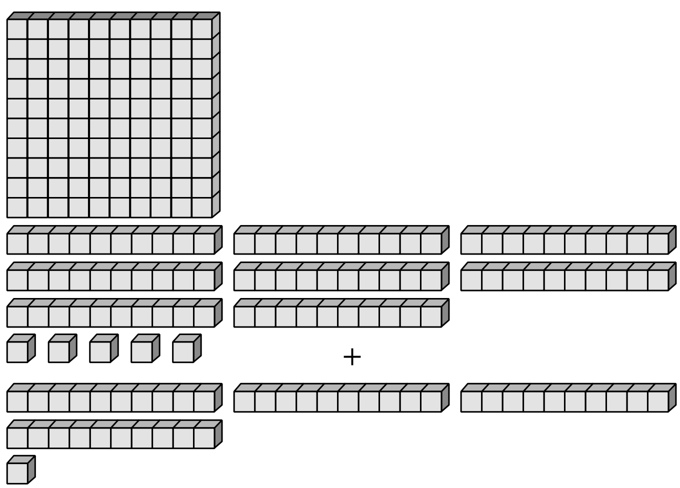
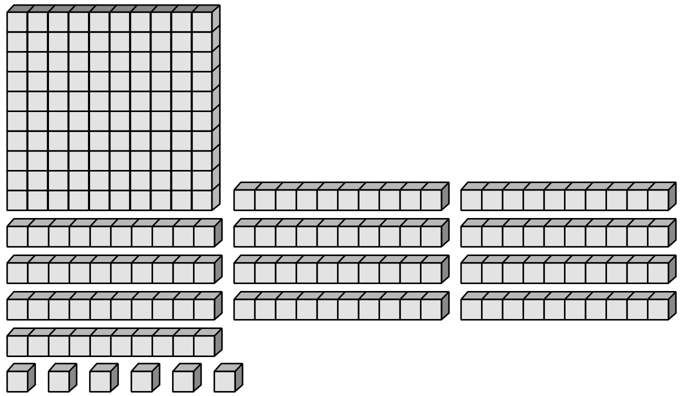
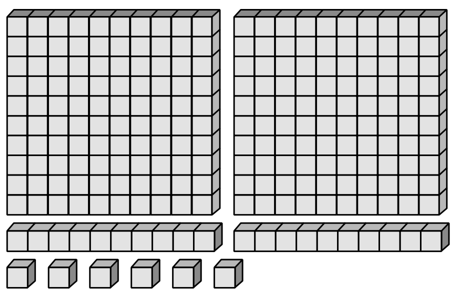
<table>
<tr><th>Material multibase</th><th>Tablas de valor posicional</th><th>Algoritmo estándar</th></tr>
<tr><td></td><td><table><tr><td></td><td>C</td><td>D</td><td>U</td></tr><tr><td></td><td>1</td><td>8</td><td>5</td></tr><tr><td>+</td><td></td><td>4</td><td>1</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td><td>185
+ 41</td></tr>
</table>

TABLA 3.9 *(continuación)*

<table>
<tr><th>Material multibase</th><th>Tablas de valor posicional</th><th>Algoritmo estándar</th></tr>
<tr><td></td><td>
<table>
<tr><td></td><td>C</td><td>D</td><td>U</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>8</td><td>5</td></tr>
<tr><td>+</td><td></td><td>4</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>6</td></tr>
</table>
</td><td>

$$\begin{array}{r} 185 \\ +\ 41 \\ \hline 6 \end{array}$$

</td></tr>
<tr><td></td><td>
<table>
<tr><td></td><td>C</td><td>D</td><td>U</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>8</td><td>5</td></tr>
<tr><td>+</td><td></td><td>4</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>12</td><td>6</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td></td><td>C</td><td>D</td><td>U</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>8</td><td>5</td></tr>
<tr><td>+</td><td></td><td>4</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td>2</td><td>6</td></tr>
</table>
</td><td>

$$\begin{array}{r} 1 \\ 185 \\ +\ 41 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 185 \\ +\ 41 \\ \hline 226 \end{array}$$

</td></tr>
</table>

TABLA 3.10

Justificación de pasos para la adición con llevada

Pasos	Propiedades
185 + 41 = 100 + 80 + 5 + 40 + 1 =	Valor de posición
= 100 + 80 + 40 + 5 + 1 =	Propiedad conmutativa
= 100 + (80 + 40) + 6 =	Propiedad asociativa
= 100 + 120 + 6 = 100 + 100 + 20 + 6	Valor de posición
= (100 + 100) + 20 + 6	Propiedad asociativa
= 200 + 20 + 6 = 200 + (20 + 6) = 200 + 26 = 226	Propiedad asociativa

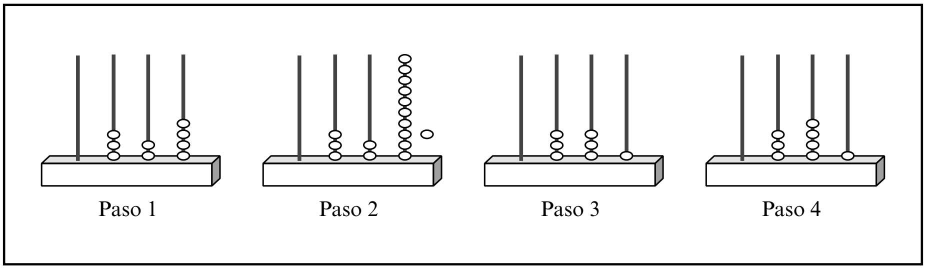


Figura 3.16.—Adición 324 + 17 con el ábaco vertical.

En el paso 1 se representa el primer sumando. En el paso 2 se añaden las unidades del segundo sumando y, teniendo en cuenta que 10 unidades equivalen a una decena (paso 3), se finaliza sumando el número de decenas del segundo sumando. Finalmente, se obtiene el resultado de la adición (paso 4).

ACTIVIDAD 4: Realiza la adición 265 + 347 con el ábaco vertical.

ACTIVIDAD 5: Analiza las ventajas e inconvenientes de realizar la adición anterior con el material multibase y con el ábaco vertical.

En ocasiones, es útil realizar una adaptación del algoritmo estándar. Mostramos una adaptación de este tipo para realizar la adición 265 + 347 en la figura 3.17.

	C	**D**	**U**
	2	6	5
+	3	4	7
U		1	2
D	1	0	
C	5		
Total	6	1	2

Figura 3.17.—Ejemplo de adaptación del algoritmo estándar.

Existe un algoritmo, similar al algoritmo estándar, consistente en invertir el orden en el que se suman los dígitos de los sumandos, sumando de izquierda a derecha. Tal y como se puede observar en la figura 3.18, tras realizar la adición, se hacen grupos para organizar el resultado.

$$\begin{array}{rrrr} & 9 & 2 & 8 \\ + & 3 & 8 & 0 \\ \hline & 12 & 10 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & 9 & 2 & 8 \\ + & 3 & 8 & 0 \\ \hline & 13 & 0 & 8 \end{array}$$

Figura 3.18.—Algoritmo de la adición empezando por la izquierda

ACTIVIDAD 6: Analiza los pasos de este algoritmo e identifica ventajas e inconvenientes respecto al algoritmo estándar.

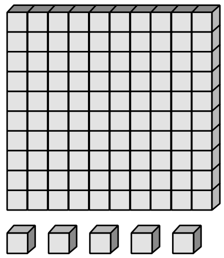
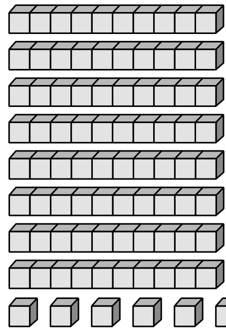
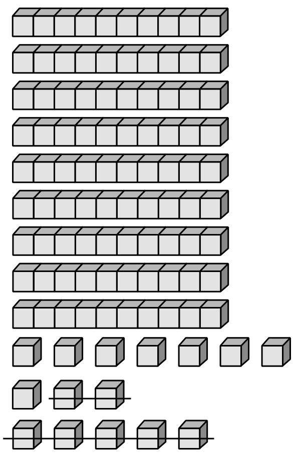
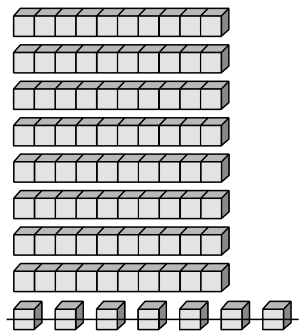
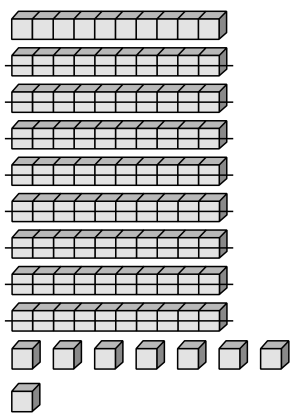
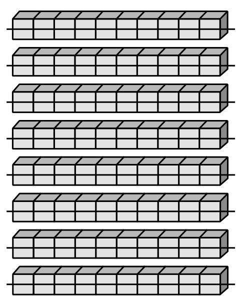
5.2. Algoritmos de la sustracción

En la tabla 3.11 presentamos la sustracción 105 − 87 representada con material multibase (representación manipulativa), mediante tablas de valor posicional (simbólico) y mediante el algoritmo estándar (representación simbólica).

La figura 3.19 muestra una sustracción mediante el ábaco vertical para el ejemplo 231 − 99.

TABLA 3.11

Ejemplo de sustracción con llevada

<table>
<tr><th colspan="2">Material multibase</th><th>Tablas de valor posicional</th><th>Algoritmo estándar</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td><table><tr><td></td><td>C</td><td>D</td><td>U</td></tr><tr><td></td><td>1</td><td>0</td><td>5</td></tr><tr><td>−</td><td></td><td>8</td><td>7</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td><td>$$\begin{array}{r} 105 \\ -\ 87 \\ \hline \end{array}$$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td><table><tr><td></td><td>C</td><td>D</td><td>U</td></tr><tr><td></td><td></td><td>9</td><td>15</td></tr><tr><td>−</td><td></td><td>8</td><td>7</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>8</td></tr></table></td><td>$$\begin{array}{r} \overset{9}{\cancel{10}}{}^{1}5 \\ -\ \ 87 \\ \hline 8 \end{array}$$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td><table><tr><td></td><td>C</td><td>D</td><td>U</td></tr><tr><td></td><td></td><td>9</td><td>15</td></tr><tr><td>−</td><td></td><td>8</td><td>7</td></tr><tr><td></td><td></td><td>1</td><td>8</td></tr></table></td><td>$$\begin{array}{r} \overset{9}{\cancel{10}}{}^{1}5 \\ -\ \ 87 \\ \hline 18 \end{array}$$</td></tr>
</table>

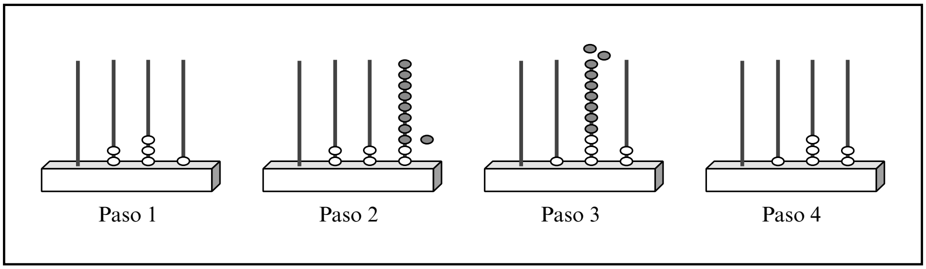


Figura 3.19.—Ejemplo de sustracción con el ábaco vertical.

Hay dos algoritmos para la sustracción que son usuales. Ambos algoritmos se diferencian en el paso que se realiza cuando una cifra del minuendo es menor que la cifra correspondiente del sustraendo. El primero se basa en la descomposición del minuendo, de forma que la cifra del minuendo no sea menor que la del sustraendo. Tal y como se ha mostrado con el material multibase y con el ábaco, para la sustracción 231 − 99 se descompone el minuendo como 2 centenas, 3 decenas y 1 unidad, lo cual es igual a 1 centena, 12 decenas y 11 unidades. De este número hay que quitar 9 decenas y 9 unidades, por lo que el resultado es 1 centena, 3 decenas y 2 unidades, es decir, 132. Presentamos este algoritmo en la figura 3.20.

$$\begin{array}{rccc} & 2 & 3^{-1} & {}^{1}1 \\ - & & 9 & 9 \\ \hline & & & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} & 2 & 2 & {}^{1}1 \\ - & & 9 & 9 \\ \hline & & & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} & 2^{-1} & {}^{1}2 & {}^{1}1 \\ - & & 9 & 9 \\ \hline & 1 & 3 & 2 \end{array}$$

Figura 3.20.—Algoritmo 1 de la sustracción.

ACTIVIDAD 7: Analiza y explica en qué propiedad se basa este algoritmo de la sustracción.

El segundo algoritmo de la sustracción se suele denominar *algoritmo con llevada,* y consiste en aumentar en diez la cifra del minuendo y «llevarse una» para añadir a la cifra del siguiente sustraendo. Lo que se consigue así es obtener una resta equivalente, sumando la misma cantidad al minuendo y al sustraendo. Por ejemplo en la sustracción 231 − 99 se dice en las unidades: de 9 a 11 van 2 y «me llevo una», que se añade al 9 y ya son 10, de 10 a 13 van 3 y «me llevo una», y de 1 a 2 va 1. El resultado es 132:

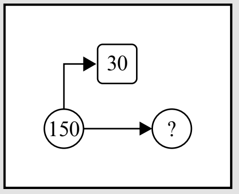
$$\begin{array}{rccc} & 2 & {}^{1}3 & {}^{1}1 \\ - & 0^{+1} & 9^{+1} & 9 \\ \hline & 1 & 3 & 2 \end{array}$$

Este algoritmo se basa en la propiedad de la compensación: sumando la misma cantidad al minuendo y al sustraendo de una sustracción, el resultado no varía. En este algoritmo se suman 10 unidades al minuendo y una decena (10 unidades) al sustraendo, por lo que resolvemos una sustracción equivalente a la inicial, cuyo resultado se mantiene.

ACTIVIDAD 8: Proponemos la siguiente adición: 197 + 322 + 38, y oímos a un escolar decir «trescientos treinta y treinta, trescientos sesenta, más doscientos, quinientos sesenta, menos tres, quinientos cincuenta y siete». Explica y justifica los pasos que se siguen.

ACTIVIDADES PARA PRACTICAR

1. Una sustracción está bien hecha cuando al sumar el sustraendo con el resultado se obtiene el minuendo. Utiliza las regletas de Cuisenaire para comprobar que esto es cierto para la sustracción 11 − 4.
2. Describe y clasifica en la categoría correspondiente el siguiente problema: «Para pagar una colección de láminas que vale 58 euros, Carmen entregó 100 euros y le devolvieron un billete de 50 euros y una moneda de 2 euros. ¿Es correcta la vuelta? ¿Por qué?»
3. Atendiendo a la clasificación de problemas aditivos propuesta, transforma estos problemas a un problema de cambio-combinación y comparación-igualación, respectivamente: *a*) Samuel tiene 8 canicas rojas y 5 verdes, luego, compra 4 canicas más, azules. ¿Cuántas canicas tiene en total?, y *b*) Irene tiene 5 canicas más que Manolo, Manolo tiene 3 canicas más que Ana, y Ana tiene 2 canicas ¿Cuántas canicas tiene Irene?
4. Atendiendo a la clasificación de problemas aditivos propuesta, inventa un problema de cada uno de los siguientes tipos: *a*) un problema de igualación-combinación, *b*) un problema de cambio-igualación y *c*) un problema de comparación-combinación.
5. Atendiendo a la clasificación de problemas aditivos propuesta, clasifica estos problemas e identifica cuál es la cantidad desconocida: *a*) Pedro tiene 15 euros y debe 3 euros. ¿Cuánto dinero tendrá cuando pague su deuda?; *b*) nos encontramos a 20 grados y la temperatura bajó 11 grados, luego, subió 5 grados. ¿Qué temperatura hace finalmente?, y *c*) Javier tiene 37 euros menos que Carlos. Si Carlos recibe 125 euros, ¿cuántos euros más o menos que Carlos tiene Javier?
6. Plantea un problema que se corresponda con la siguiente estructura semántica y describe el tipo de problema del que se trata.



7. A continuación se realizan algunas operaciones de forma oral. Indica en cada caso las estrategias utilizadas y qué propiedades de las operaciones se están utilizando:

   a) 2.453 − 1.238, dos mil cuatrocientos cincuenta y tres menos mil doscientos, mil doscientos cincuenta y tres, menos treinta, mil doscientos veintitrés, mil doscientos veinte menos cinco, mil doscientos quince.
   b) 197 + 322 + 38, trescientos treinta y treinta, trescientos sesenta, más doscientos, quinientos sesenta, menos tres, quinientos cincuenta y siete.

8. Examina las estrategias empleadas por tres escolares, Isabel, Juan y Miguel, para resolver la adición 348 + 279. Explica la estrategia de cada alumno.

200 + 348: 448, 548 70 + 548: 558, 568, 578, 588, 598, 608, 618 9 + 618: 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627	348 − 21 = 327 327 + 300 = 627	348 + 279 = 500 + 110 + 17 = 627
Isabel	Juan	Miguel

9. Utiliza la calculadora para hallar el resultado de 273 − 129 sin utilizar la tecla de restar. Explica la estrategia que empleas.

10. A continuación se realiza una sustracción de forma oral: 1.573 − 628, mil quinientos setenta y tres menos seiscientos, novecientos setenta tres, menos veinte, novecientos cincuenta y tres, novecientos cincuenta menos cinco, novecientos cuarenta y cinco. Explica y justifica los pasos que se siguen.

11. Con la calculadora, realiza las siguientes operaciones. ¿Hay varias formas de realizar dichos cálculos?: *a*) 273 − 129, sin usar la tecla de restar, y *b*) 273 + 129, sin usar la tecla de sumar.

INVESTIGA Y REFLEXIONA

1. Presenta un problema aditivo de una etapa en algún medio de comunicación. Clasifícalo dentro de los tipos presentados y representa su esquema indicando los datos conocidos y la incógnita.

2. Investiga patrones numéricos relacionados con la adición en la tabla de los 100 primeros números.

3. Localiza algún programa en Internet que ayude a que los escolares trabajen la adición y la sustracción. Haz una ficha que recoja la dirección y las habilidades que promueve, así como el tipo de actividades que los escolares pueden realizar con él.

4. Elabora un esquema general de los diferentes tipos de problemas de una etapa. Propón, a modo de ejemplo, cómo sería el enunciado del problema del ejercicio 1 según cada uno de los tipos de problemas vistos en este capítulo.

5. Examina un libro de texto de 3.º de Educación Primaria y otro de 4.º. Localiza seis problemas de estructura aditiva y clasifícalos de acuerdo con los criterios dados en este capítulo.

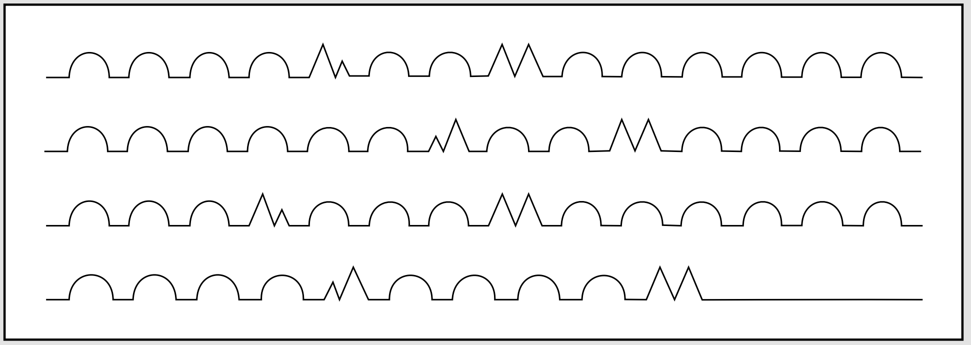
6. Busca diferentes algoritmos para la adición y la sustracción de los presentados en este capítulo. Justifica su validez.

7. A continuación puedes observar el Triángulo de Pascal. Encuentra qué relaciones hay entre los números que se observan en él.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

8. Escribe un documento de dos páginas como máximo donde se comparen los diferentes algoritmos de la adición y los distintos algoritmos de la sustracción, señalando las ventajas y los inconvenientes de los mismos.

9. Una profesora muestra a los escolares los siguientes códigos, que representan operaciones aritméticas. Analiza los códigos y descifra el significado de los diferentes elementos que se observan. Expresa simbólicamente las expresiones dadas.



BIBLIOGRAFÍA

Baroody, A. J. y Coslick, T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Castro, E. (Ed.) (2001). *Didáctica de la Matemática en la educación primaria.* Madrid: Síntesis.

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1987). *Números y operaciones*. Madrid: Síntesis.

Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P. y Martínez, L. (2008). *Matemáticas segundo ciclo 4.* Madrid: Anaya.

Gómez, B. (1988). *Numeración y cálculo*. Madrid: Síntesis.

Krause, E. F. (1991). *Mathematics for elementary teachers.* Massachusetts: Heath and Company.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Aritmética de los números naturales. Estructura multiplicativa

4

ENRIQUE CASTRO MARTÍNEZ
JUAN FRANCISCO RUIZ HIDALGO

Figura. 4.1.—¿Cómo podemos determinar el número de personas en el desfile? Hay varios procedimientos de encontrar la respuesta a esta pregunta. ¿Cuál sería el más rápido?

La multiplicación y la división se utilizan muy a menudo para resolver problemas que surgen en distintos ámbitos. Constituyen, junto con la adición y la sustracción, las cuatro operaciones básicas de la aritmética. Desde el punto de vista matemático, estas cuatro operaciones aritméticas están relacionadas entre sí hasta tal punto que todas se pueden reducir a la adición, pero a costa de una gran complejidad operativa que sólo es viable en los ordenadores. En la práctica, considerar las cuatro operaciones de modo diferenciado disminuye la carga intelectual y facilita el cálculo, y también acrecienta la riqueza de significados que podemos abordar con ellas.

Las operaciones de multiplicar y dividir tienen conexión y se fundamentan en dos nociones más generales. Una de ellas es la de aumentar o disminuir rápida y considerablemente una cantidad, y la otra, agrupar o partir siguiendo un patrón o regularidad. Las dos ideas se encuentran de manera general en la naturaleza de forma aislada o conjunta, como es el caso de la reproducción de los seres vivos. Como ejemplos, citemos el fenómeno natural de la *marea roja,* que consiste en la multiplicación masiva de microalgas presentes en el mar, y el fenómeno de la *meiosis celular,* proceso de división celular en el cual una célula experimenta dos divisiones sucesivas.

Los contenidos de este capítulo se articulan en torno a los siguientes tópicos:

- Estudio de los significados de la multiplicación y la división.
- Modelos que ilustran estos significados.
- Propiedades de las operaciones.
- Tipos de problemas de estructura multiplicativa.
- Algoritmos de cálculo de la multiplicación y la división.

Estos aspectos son conocimientos básicos del docente de Educación Primaria y se desarrollan en las asignaturas de matemáticas de esta etapa escolar de la educación obligatoria.

1. LA ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA Y EL CURRÍCULO ESCOLAR

La estructura multiplicativa se refiere a los conceptos relacionados con las operaciones de multiplicar y dividir, que están presentes y son necesarios y fundamentales en las actividades social, cultural y científica. Los sistemas educativos no son ajenos a esta importancia de las ideas relacionadas con la multiplicación y la división y, desde los primeros niveles educativos, se establecen las bases sobre las que se construyen las ideas relacionadas con ellas. En la etapa de Educación Infantil se abordan ideas previas que son útiles para fundamentar el posterior aprendizaje de la aritmética. Concretamente, desde los primeros niveles educativos de la Educación Infantil se trabaja de forma asidua con las ideas de doble y mitad, así como en la formación de patrones constantes. Estas actividades contribuyen a dar un sustento lógico al aprendizaje posterior de la multiplicación y la división.

Posteriormente, el estudio de los números naturales y las operaciones aritméticas se distribuye progresivamente a lo largo del los seis cursos de la Educación Primaria. La multiplicación y la división son objeto de especial atención curricular en los cursos tercero y cuarto; no obstante, es frecuente que en la práctica la multiplicación se empiece a trabajar ya en segundo curso, y que el estudio de estos temas se consolide con actividades, fundamentalmente de resolución de problemas y estudio general de las operaciones y sus propiedades, en quinto y sexto cursos.

Igual que en la adición y la sustracción, el aprendizaje de la multiplicación y la división se desglosa en dos aspectos básicos: el significado de las operaciones y el dominio de las formas o procedimientos de cálculo. Entender el significado de las operaciones requiere capacidad para reconocer las distintas situaciones o fenómenos en que se aplican; para realizar cálculos concretos con ellas hay que ser capaz de desplegar alguna estrategia o procedimiento de cálculo que puede emplearse como rutina, lo que se conoce como algoritmo. Entre las estrategias de cálculo hay que incluir la habilidad para realizar estas operaciones con calculadoras y ordenadores, especialmente empleando hojas de cálculo.

2. LA MULTIPLICACIÓN COMO SUMA REPETIDA

La suma es una operación aritmética básica y, a partir de ella, se pueden definir otras operaciones. La resta se define como la inversa de la suma. Uno de los significados más elementales de la multiplicación la presenta como suma repetida o reiterada. Se justifica su introducción como un principio de economía que simplifica lo engorroso de realizar de forma repetida la suma de un número consigo mismo un alto número de veces.

Así, la suma repetida 3 + 3 + 3 + 3 + 3 se abrevia mediante el producto 5 × 3, y en este caso se lee «cinco veces tres».

La multiplicación como suma repetida se puede ilustrar con modelos cardinales discretos y con modelos lineales como el de la recta numérica.

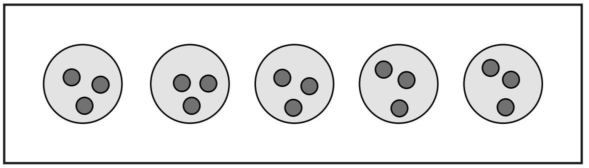


Figura 4.2.—El modelo cardinal muestra que 5 veces 3 es 15.

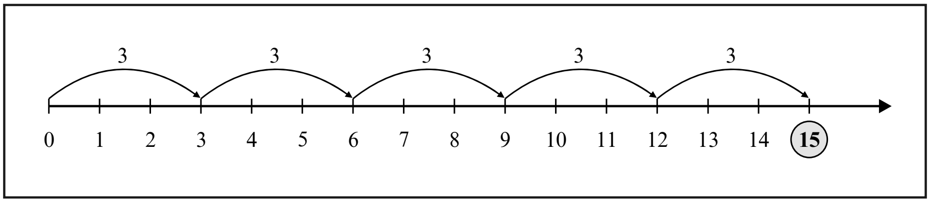


Figura 4.3.—El modelo de recta numérica muestra que 5 veces 3 es 15.

> *Definición. Multiplicación como suma repetida. Si a y b son dos números naturales, el producto de a y b, escrito a × b, se define como:*
>
> $$a \times b = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{a \text{ sumandos}} \text{ cuando } a \neq 0$$
>
> *y como* $0 \times b = 0$

El signo de la multiplicación puede ser un punto ·, un aspa × (que no debe confundirse con la letra x), un asterisco ∗ y, a veces, no se utiliza ningún símbolo. Así, la multiplicación de *a* y *b* puede representarse por las expresiones:

$$a \cdot b; \quad a \times b; \quad a * b; \quad ab$$

a las que se denomina producto de *a* y *b*. A menudo, *a* × *b* se lee como «*a* veces *b*», o también «*a* por *b*». A cada uno de los números *a* y *b* se le denomina *factor*. De manera más precisa, al número que se repite se le llama *multiplicando,* y al que indica las veces que se suma se le denomina *multiplicador*.

El establecimiento definitivo de los signos de la multiplicación tal como los conocemos actualmente se inicia en el siglo XVI:

- El signo de la multiplicación en forma de aspa × lo utilizó William Oughtred, matemático inglés del siglo XVII, en su obra *Clavis Mathematicae*. Leibniz criticó este signo por que se confundía con la letra x. Prefería el punto como signo de la multiplicación, que ya había sido utilizado por Descartes.
- El primero que omitió el signo de multiplicar cuando los factores son literales fue Stifel, matemático alemán del siglo XVI, en su obra *Arithmetica íntegra*.

- El asterisco $*$ es un signo actual ligado al empleo de ordenadores, calculadoras, teléfonos móviles y, en general, a las tecnologías de la información y la comunicación.

2.1. Modelo funcional

La multiplicación como suma repetida es una operación *unaria* asimétrica; los dos factores no tienen el mismo papel, que se puede interpretar según el modelo funcional siguiente:

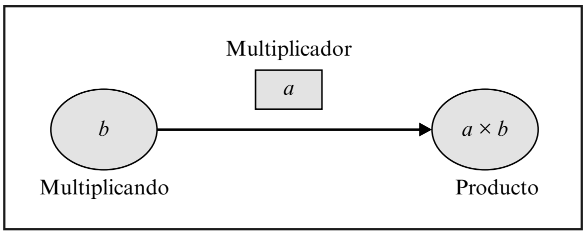


Figura 4.4.—Modelo funcional unario.

ACTIVIDAD 1: Representa en la recta numérica los productos 4 × 6 y 5 × 7.

ACTIVIDAD 2: Haz un diagrama funcional para cada uno de los siguientes enunciados:

a) He comprado 7 sellos de 60 céntimos. ¿Cuánto me han costado?
b) Juan recorre 30 km cada día en bicicleta. ¿Cuánto recorre en 5 días?

ACTIVIDAD 3: La multiplicación como suma repetida se puede ilustrar con la calculadora. Por ejemplo, la calculadora incorporada en los ordenadores funciona así: si se introduce + 7 = = = = da como resultado 28, es decir, 4 × 7:

a) Explora cómo se puede obtener una suma repetida en tu calculadora.
b) Escribe la expresión que habría que poner en la calculadora incorporada en el ordenador para obtener los siguientes productos como sumas repetidas: 5 × 9, 8 × 549.

3. LA MULTIPLICACIÓN COMO PRODUCTO CARTESIANO

La multiplicación puede definirse como una nueva operación sin acudir a la operación de adición. Una forma es recurriendo al producto cartesiano de conjuntos. Si tenemos un conjunto o colección *C* de camisetas y otro *P* de pantalones, podemos combinar cada camiseta con cada uno de los pantalones dando lugar a un número de posibilidades de formas de vestirnos. En el caso de 4 camisetas y 3 pantalones, el número de posibilidades son 12 (véase tabla 4.1).

TABLA 4.1

Combinaciones posibles de camisetas y pantalones

Conjunto de pantalones	**Conjunto de camisetas**			
	c1	**c2**	**c3**	**c4**
p1	c1, p1	c2, p1	c3, p1	c4, p1
p2	c1, p2	c2, p2	c3, p2	c4, p2
p3	c1, p3	c2, p3	c3, p3	c4, p3

Desde este punto de vista, la multiplicación es una operación binaria *simétrica* en la que los dos factores desempeñan el mismo papel y puede esquematizarse como sigue, lo cual refleja la igualdad de papeles que desempeñan los dos factores:

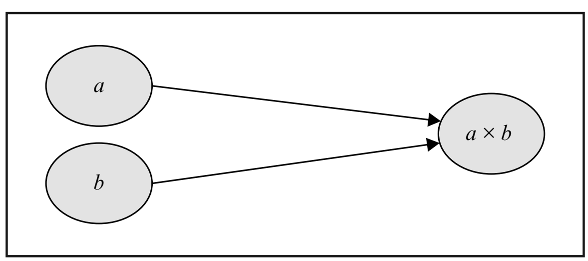


Figura 4.5.—Modelo funcional binario.

Que la multiplicación sea una operación binaria se refleja en distintos modelos. El conjunto de pares se puede visualizar en un diagrama de árbol como el que aparece en la figura 4.6.

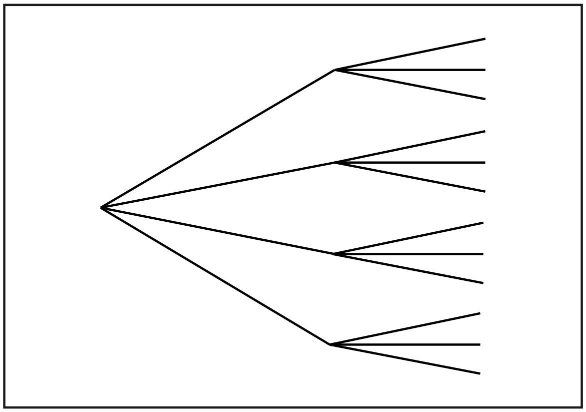


Figura 4.6.—Diagrama de árbol.

3.1. Modelo de matriz y de área de un rectángulo

El carácter simétrico de la multiplicación como operación binaria queda bien reflejado en los modelos de matriz y de área. Ambos tienen el mismo significado, sólo difieren en la naturaleza de las cantidades que intervienen. En el modelo de matriz las cantidades son discretas, mientras que en el de área de un rectángulo las cantidades son de naturaleza continua.

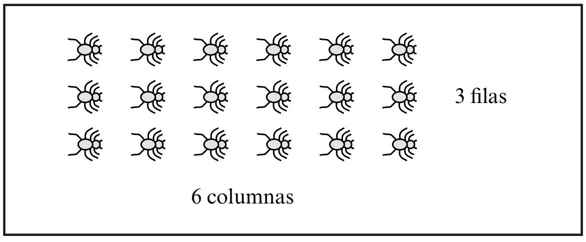


Figura 4.7.—Modelo de matriz.

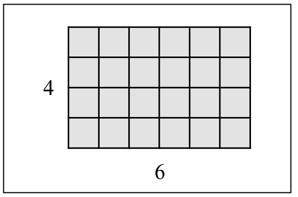


Figura 4.8.—Modelo de área de un rectángulo.

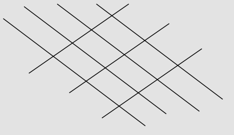
En el modelo de matriz el producto está representado por el total de objetos de la matriz, y los factores por el número de filas y columnas. De manera similar, el área del rectángulo representa el producto, mientras que los factores se refieren a la base y la altura del rectángulo.

ACTIVIDAD 1: En una heladería tienen tres tamaños de tarrinas (grande, mediano y pequeño), y cinco sabores de helado (turrón, fresa, vainilla, limón y chocolate). Escribe la tabla de doble entrada con todas las posibilidades de venta de helados. Representa la situación mediante un diagrama de árbol.

ACTIVIDAD 2: Modeliza los productos 5 × 7 y 2 × × 3 con matrices de puntos y área de rectángulos.

ACTIVIDAD 3: Haz un modelo de árbol que refleje las posibilidades de lanzar dos dados.

ACTIVIDAD 4: Un conjunto de cuatro rectas paralelas entre sí (*r, s, t* y *v)* se cruza con otro conjunto de tres rectas (*a*, *b* y *c)*, que tienen dirección distinta a las anteriores pero también son paralelas entre sí:



Fíjate en la imagen, escribe el nombre de las rectas e interprétala como un producto cartesiano. ¿Qué representan los puntos de intersección de las rectas?

Para saber más sobre modelos véase Castro, Rico y Castro (1987).

4. PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN

El modelo de área de rectángulo y el de matriz son útiles para visualizar propiedades de la multiplicación. Con estos modelos, la propiedad conmutativa se visualiza girando 90º el rectángulo de partida. La figura muestra $4 \times 7 = 7 \times 4$:

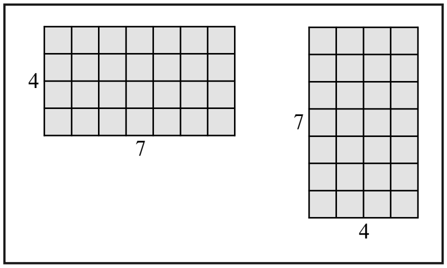


Figura 4.9.—Propiedad conmutativa.

El modelo de área de rectángulo en la propiedad asociativa se convierte en el cálculo del volumen de un prisma recto, en el que se obtiene el mismo volumen multiplicando primero dos dimensiones cualquiera y el resultado por la tercera dimensión:

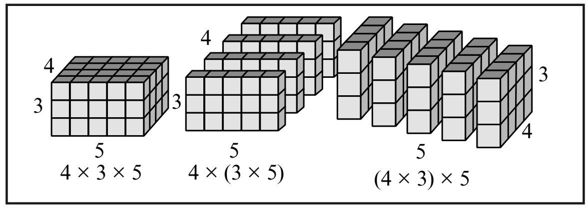


Figura 4.10.—Propiedad asociativa.

Para la visualización de la propiedad distributiva se puede recurrir también a las matrices de puntos o el área del rectángulo:

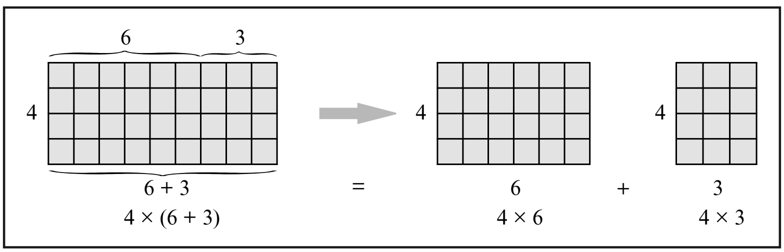


Figura 4.11.—Propiedad distributiva.

TABLA 4.2

Propiedades de la multiplicación de números naturales

Propiedad de clausura y unicidad	Si a y b son dos números naturales, entonces $a \times b$ es un único número natural.
Propiedad conmutativa	Si a y b son dos números naturales, entonces $a \times b = b \times a$.
Propiedad asociativa	Si a, b y c son tres números naturales, entonces $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.
Elemento unidad	El 1 es el único número natural que cumple $1 \times a = a \times 1 = a$ para cualquier número natural a.
Multiplicación por cero	Para cualquier número natural a se cumple que $a \times 0 = 0 \times a = 0$.
Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición	Si a, b y c son tres números naturales, entonces $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ y $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$.

ACTIVIDAD 1: Utiliza las propiedades de la multiplicación para justificar la igualdad:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

ACTIVIDAD 2: Ilustra la igualdad $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ con el modelo de área de la multiplicación.

ACTIVIDAD 3: Representa $14 \times 26 = (10 + 4)(20 + 6) = 200 + 60 + 80 + 24$ con el modelo de área del producto.

ACTIVIDAD 4: Comprueba que $(a + 5)(2a + 3) = 2a^2 + 13a + 15$.

5. DIVISIÓN

La división de números naturales puede ser considerada como una operación en sí misma con características propias que se aplica a la resolución de determinados problemas, entre los cuales están los relativos a repartos equitativos. En un contexto de reparto equitativo la división puede ser entendida de dos modos: como *división partitiva* y como *división cuotitiva* o *medida*. La división partitiva es una operación aritmética que tiene por objeto hallar una cantidad llamada *cociente* (por ejemplo, caramelos) a partir de otra cantidad del mismo tipo (caramelos) llamada *dividendo* que se reparte entre una cantidad de distinto tipo (por ejemplo, niños) que hace el papel de *divisor*. Dentro del esquema anterior, la división cuotitiva o medida tiene por objeto hallar el *divisor* (niños) conocidos el *dividendo* (caramelos) y el *cociente* (caramelos). En la división cuotitiva tenemos que descomponer el dividendo en partes de igual tamaño, y, en principio, conocemos el tamaño de esas partes, pero no su número.

El signo de la división son dos puntos (:), que se lee *dividido entre* y se escribe entre el dividendo y el divisor. Los dos puntos como signo de la división fue empleado por primera vez por Leibniz. En el siglo XVII, el matemático inglés John Pell utilizó el signo ÷ que es el que se utiliza en países anglosajones. La barra inclinada / como signo de la división se utiliza con asiduidad debido a que es el empleado para la división en las nuevas tecnologías de la información y la comunicación.

La división se puede representar esquemáticamente mediante un diagrama funcional:

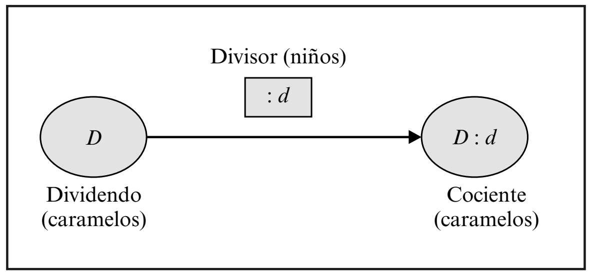


Figura 4.12.—Modelo funcional de la división.

- *División partitiva:* El maestro quiere repartir de forma equitativa una bolsa de 60 caramelos entre los 20 niños de su clase. ¿A cómo tocan?
- *División cuotitiva o medida:* El maestro tiene una bolsa de 60 caramelos y quiere dar 6 caramelos a cada niño. ¿Para cuántos niños tendrá?

La división cuotitiva se puede entender como sustraer de forma repetida del cociente del dividendo, siendo el divisor el número de veces que podemos realizar esta sustracción. En el ejemplo anterior, a 60 le podemos restar el 6 diez veces.

Así como la sustracción es la opuesta a la adición, la división es la inversa de la multiplicación, por lo que admite una definición indirecta a partir de la multiplicación.

> *Definición. La operación aritmética de división es la operación recíproca o inversa de la multiplicación.*

Esto conlleva que para encontrar el cociente c de dos números D y d, basta con encontrar un número que multiplicado por el divisor dé cómo resultado el dividendo.

No siempre existe un número natural «c» que multiplicado por el divisor «d» dé como resultado el dividendo «D». Cuando existe, se llama división exacta, en este caso:

$$D = d \times c \quad \text{o bien} \quad D : d = c$$

El carácter de operaciones inversas queda reflejado en el modelo funcional de la figura, donde se observa que la aplicación sucesiva de la multiplicación y la división a un número b produce la invariancia del valor inicial:

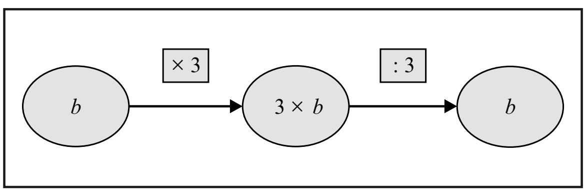


Figura 4.13.—Operaciones inversas

Cuando no existe un número natural que multiplicado por el divisor dé el dividendo, la división se llama *entera* o *inexacta.* En este caso se llama cociente (c) al mayor número natural que multiplicado por el divisor puede ser restado del dividendo. Se llama *resto* (r) a la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente:

$$r = D - d \times c \quad \text{o bien} \quad D = d \times c + r$$

$$0 \le r < d$$

Así como la multiplicación se define como suma repetida, la división se puede definir como una sustracción repetida. La división 17 : 5 consiste en restar 5 de 17 las veces que se pueda, que en este caso son 3 y quedan 2 de resto.

5.1. Propiedades de la división

La división no tiene la propiedad conmutativa ni la asociativa, pues, en general, si a, b y c son números naturales:

$$a : b \neq b : a$$

$$(a : b) : c \neq a : (b : c)$$

No obstante, combinada con otras operaciones aritméticas, cumple una serie de propiedades:

$$(a + b) : c = (a : c) + (b : c)$$
$$(a - b) : c = (a : c) - (b : c)$$
$$(a : b) \times b = a$$
$$(a \times b) : b = a$$
$$a \times (b : c) = (a \times b) : c$$
$$a : (b \times c) = (a : b) : c$$
$$a : (b : c) = (a : b) \times c$$

Cabe reseñar, además, que el número 1 actúa como elemento neutro por la derecha: $a : 1 = a$, pero no por la izquierda: $1 : a \neq a$.

Actividad 1: Modeliza con una recta numérica las divisiones 15 : 5 y 19 : 3.

Actividad 2: Justifica por qué la división no tiene las propiedades conmutativa, asociativa y existencia de elemento unidad o neutro.

Actividad 3: Los casos en que en una división interviene el número 0 son especiales. Por ejemplo: *a*) 5 : 0; *b*) 0 : 5, y *c*) 0 : 0. ¿Qué ocurre en estos casos? ¿Cuál de ellos es indefinido? ¿Cuál de ellos es indeterminado? Explica la respuesta.

ACTIVIDAD 4: La calculadora se puede utilizar para realizar una división como sustracción repetida. Por ejemplo, en una calculadora estándar, si tecleamos sucesivamente 35 – 7 = = = = = (pulsamos cinco veces el signo igual), obtenemos el resultado cero.

Realiza con este procedimiento las divisiones: 72 : 9 y 54 : 6.

6. PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

A los problemas que se resuelven con una sola multiplicación o división se les denomina problemas de estructura multiplicativa simples, de un paso o de una etapa. Los enunciados de estos problemas contienen una relación ternaria entre tres cantidades, dos de ellas aparecen explícitamente en el enunciado y se pide hallar una tercera cantidad que completa la relación.

Según el significado de la relación ternaria descrita en el problema, se han identificado tres grandes clases de problemas simples de estructura multiplicativa: proporcionalidad simple, comparación multiplicativa y producto cartesiano.

6.1. Problemas de proporcionalidad simple

En los problemas de proporcionalidad simple subyace una proporcionalidad entre dos magnitudes. En ellos se establecen dos relaciones o correspondencias entre dos cantidades de cada una, como indica el esquema siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \text{Magnitud 1} & \longrightarrow & \text{Magnitud 2} \\ 1 & \longrightarrow & 4 \\ 5 & \longrightarrow & 20 \end{array}$$

Una definición clásica de multiplicación tiene este esquema como fundamento:

> Tienen los romanos el concepto preciso de que multiplicar dos números [$a \times b$] es formar un tercer número que sea respecto del primero a (multiplicando) lo que el segundo b (multiplicador) es respecto de la unidad (Sánchez Pérez, 1949, p. 38).

De este esquema surgen tres tipos de problemas según se desconozca una de las cantidades que ocupan los números 20, 5 o 4:

Tipo 1 = desconocido 20 (multiplicación).
Tipo 2 = desconocido 4 (división partitiva).
Tipo 3 = desconocido 5 (división cuotitiva).

Estos tres tipos de problemas se pueden presentar en dos variantes sutiles de la proporcionalidad simple: *grupos repetidos* y *tasa,* que surgen de enunciar de forma directa o inversa la relación 1 $\longrightarrow$ 4. La forma directa enuncia que a cada uno le corresponden 4, que se expresa lingüísticamente en alguna de las formas «cada uno...», «en cada uno...», «a cada uno...» o similares según el contexto. En el ejemplo 1, corresponde a la expresión «cada caja contiene 6 lápices». El grupo de 6 lápices es el que se repite. También se utiliza el término «veces» para indicar la reiteración, por ejemplo.

Problema. Cada vez que voy al banco dono 10 euros para asuntos sociales. Si este mes he ido 6 veces, ¿cuánto dinero he donado este mes?

Los problemas de *tasa* enuncian la relación 1 $\longrightarrow$ 4 de forma inversa, expresando que hay 4 por 1.

Proporcionalidad simple (multiplicación):

Ejemplo 1. En la mesa hay 4 cajas de lápices. Cada caja contiene 6 lápices. ¿Cuántos lápices hay en total? (grupos repetidos):

(n.º de cajas) ⟶ (n.º de lápices)
1 caja ⟶ 6 lápices
4 cajas ⟶ ? lápices

Ejemplo 2. Si los bombones cuestan 7 céntimos la unidad, ¿cuánto costará una docena? (tasa):

(n.º de bombones) ⟶ (coste)
1 bombón ⟶ 7 céntimos
12 bombones ⟶ ? céntimos

Proporcionalidad simple (división partitiva):

Ejemplo1. En la mesa hay 24 lápices repartidos por igual en 4 cajas. ¿Cuántos tiene cada caja? (grupos repetidos).

Ejemplo 2. Una docena de bombones cuesta 84 céntimos. ¿Cuánto cuesta cada uno? (tasa).

Proporcionalidad simple (división cuotitiva o medida):

Ejemplo 1. En la mesa hay 24 lápices. Los quiero colocar en cajas de 6 lápices. ¿Cuántas cajas necesito? (grupos repetidos).

Ejemplo 2. He comprado bombones por un total de 84 céntimos. Cada uno me cuesta 7 céntimos. ¿Cuántos bombones he comprado? (tasa).

ACTIVIDAD 1: Inventa un problema de cada uno de los tipos de división.

6.2. Problemas de comparación multiplicativa

En la comparación de dos cantidades, una de ellas hace el papel de *referente* y la otra el de *comparado* o *referido*. Al comparar las dos cantidades podemos hacerlo en términos absolutos fijándonos en cuánto una cantidad es más grande o más pequeña que la otra; este tipo de comparación se llama aditiva, vista en el capítulo anterior. También podemos comparar dos cantidades para establecer el número de veces que una es mayor o menor que la otra; en este caso se trata de la comparación multiplicativa. Al número de veces se le denomina *escalar*.

La relación ternaria entre las tres cantidades que caracterizan los problemas de comparación se puede expresar mediante un esquema funcional:

$$f : R \longrightarrow C$$
$$r \longrightarrow c = e \times r$$

donde r es la cantidad referente, c la cantidad comparada y e el escalar.

Igual que sucede en los problemas de comparación aditiva, se pueden enunciar tres problemas diferentes según que la cantidad desconocida en el problema sea el comparado, el escalar o el referente.

Al mismo tiempo, para cada uno de estos tres casos, el referente puede ser menor o mayor que el comparado (véase figura 4.14), lo que da lugar a dos tipos de comparación: comparación de aumento y comparación de disminución, siendo la comparación de disminución la inversa de la relación de comparación de aumento:

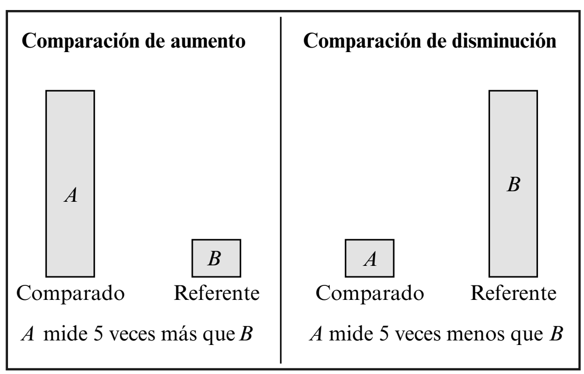


Figura 4.14.—Comparación multiplicativa.

De acuerdo con lo anterior, cabe la posibilidad de enunciar 6 variantes de problemas de comparación. Para enunciar estos problemas hay que utilizar las expresiones lingüísticas correspondientes de la comparación de aumento y de disminución aditiva acompañadas del término veces.

Comparado desconocido

Ejemplo 1. Juan tiene 6 naranjas. Pedro tiene 4 veces más que Juan. ¿Cuántas naranjas tiene Pedro? (comparación de aumento).

Ejemplo 2. María tiene 60 cintas. Laura tiene 5 veces menos que María. ¿Cuántas cintas tiene Laura? (comparación de disminución).

Escalar desconocido

Ejemplo 1. Juan tiene 6 naranjas. Pedro tiene 24 naranjas. ¿Cuántas veces más naranjas tiene Pedro que Juan? (comparación de aumento).

Ejemplo 2. María tiene 60 cintas. Laura tiene 12 cintas. ¿Cuántas veces menos cintas tiene Laura que María? (comparación de disminución).

Referente desconocido

Ejemplo 1. Pedro tiene 4 veces más que Juan. Si Pedro tiene 24 naranjas, ¿cuántas naranjas tiene Juan? (comparación de aumento):

Referente: cantidad de naranjas de Juan.
Comparado: cantidad de naranjas de Pedro.
Escalar: 4.

Ejemplo 2. Laura tiene 5 veces menos que María. Si Laura tiene 60 cintas, ¿cuántas cintas tiene María? (comparación de disminución):

Referente: cantidad de cintas de María.
Comparado: cantidad de cintas de Laura.
Escalar: 5.

6.3. Problemas de igualación

Además de los problemas de comparación de aumento y de disminución, hay problemas de estructura multiplicativa en los que la comparación se realiza en términos de igualación. En ellos se enuncia las veces que una cantidad es tan grande como otra. En los problemas de igualación podemos encontrar los tres subtipos siguientes.

Comparado desconocido

Ejemplo. Justin gana cuatro veces tanto como lo que gana la estrella de Disney, Selena, que gana 100.000 dólares. ¿Cuánto gana Justin?

Escalar desconocido

Ejemplo. Justin gana 400.000 dólares. La estrella de Disney, Selena, gana 100.000 dólares. ¿Cuántas veces gana Justin tanto como gana Selena?

Referente desconocido

Ejemplo. Justin gana cuatro veces tanto como lo que Selena, la estrella de Disney; en total, Justin gana 400.000 dólares. ¿Cuánto gana Selena?

Las expresiones lingüísticas para establecer la comparación de aumento, de disminución y de igualación que hemos utilizado son: «veces más que», «veces menos que» y «veces tanto como», respectivamente. No obstante, en el lenguaje usual se suelen emplear expresiones concisas alternativas equivalentes, por ejemplo, «veces las que». Y, en casos sencillos, hay términos específicos para expresar la comparación, como es el caso de doble, triple, cuádruple y otros términos similares.

ACTIVIDAD 2: Inventa un problema de comparación multiplicativa de cada uno de los tipos descritos en el apartado anterior.

ACTIVIDAD 3: Lee el texto siguiente del matemático francés Alexandre Saverien:

Habiendo hecho construir Doro Rey de Acaya un templo en honor de Juno, un hombre, cuyo nombre se ignora, creyó que la columna debía tener de altura seis veces tanto como tiene de grueso, porque esta es la proporción que tiene el cuerpo del hombre, el cual se propuso como modelo (Saverien, 1775, p. 378).

¿Qué sentido matemático le da el autor a la expresión «seis veces tanto como»?

6.4. Problemas de producto cartesiano

En los problemas de producto cartesiano intervienen tres tipos de cantidades: $E1$, $E2$ y $E3$, de tal manera que el resultado de componer una cantidad de tipo $E1$ con otra cantidad de tipo $E2$ da como resultado una cantidad distinta, $E3$. Hay dos modalidades de problemas de producto cartesiano: los de combinaciones y los de producto de medidas.

Problemas de combinaciones

Los problemas de combinaciones se basan en la formación de un conjunto de pares ordenados a partir de dos conjuntos de objetos discretos. Hay dos variantes de problemas; en el primer tipo se trata de determinar el número de pares ordenados que se pueden formar con los elementos de dos conjuntos de objetos, mientras que en el segundo tipo se conoce el número de combinaciones y el número de elementos de uno de los conjuntos y se pide hallar el número de elementos del otro conjunto.

Combinaciones: producto desconocido

Ejemplo 1. Se ha fabricado un material teniendo en cuenta dos características: el tamaño (grande, mediano y pequeño) y la forma (cuadrado, triángulo, círculo y rectángulo). ¿Cuántas piezas distintas tiene el material?

Ejemplo 2. Samuel tiene 4 pantalones y 3 camisas que puede combinar entre sí. ¿De cuantas formas las puede combinar para vestirse?

Combinaciones: factor desconocido

Ejemplo 1. Se ha fabricado un material teniendo en cuenta dos características: el tamaño (grande, mediano y pequeño) y la forma. Sabiendo que hay 12 combinaciones distintas de tamaño y forma, ¿cuántas formas distintas tiene el material?

Ejemplo 2. Samuel tiene 12 combinaciones pantalón-camisa. Samuel tiene 4 pantalones. ¿Cuántas camisas ha combinado?

6.5. Problemas de producto de medidas

Los problemas de producto de medidas conllevan un producto cartesiano de dos magnitudes continuas, $M1$ y $M2$, dando como resultado una tercera magnitud continua, $M3$. Una característica distintiva básica entre los problemas de combinaciones y de producto de medidas es que en los de combinaciones las magnitudes que intervienen son discretas, mientras que en los de producto de medidas son continuas (longitudes × longitudes = superficies; longitud × superficie = volumen; velocidad × × tiempo = espacio). Igual que en los problemas de combinaciones, hay dos tipos básicos de problemas de producto de medidas: producto desconocido y factor desconocido.

Producto de medidas: producto desconocido

Ejemplo 1. Halla el área de un rectángulo sabiendo que su base mide 20 m y su altura 6 m.
Ejemplo 2. Halla el volumen de un prisma recto sabiendo que el área de la base es 20 m^2 y su altura es de 6 m.

Producto de medidas: factor desconocido

Ejemplo 1. Si el área de un rectángulo es 60 m^2 y su altura 6 m, ¿qué mide su base?
Ejemplo 2. El volumen de un prisma recto es 60 m^3. Sabiendo que el área de la base es 20 m^2, ¿qué mide su altura?

6.6. Problemas de más de una etapa

Desde el punto de vista educativo, los problemas aritméticos simples son un recurso para darle sentido a las operaciones aritméticas básicas, pero también es necesario que los escolares aprendan a resolver problemas de más de una etapa, en los que es necesario emplear, al menos, dos operaciones aritméticas de forma consecutiva. Hay que advertir que cada una de estas etapas está conformada como un problema de una etapa, que deben presentarse de forma conectada, en la que una de las cantidades se utiliza, al menos, en dos etapas. Por ejemplo:

Un comerciante va al mercadillo y vende 5 sacos de naranjas al precio de 10 euros el saco. Con este dinero compra 4 bombillas de bajo consumo al precio de 9 euros cada una. Sabiendo que tenía 20 euros en su monedero al salir y que el transporte le ha costado 6 euros, ¿con cuánto dinero regresa a casa?

También es importante que, durante su etapa escolar, los escolares resuelvan problemas abiertos en los que se emplean las operaciones aritméticas. Dentro de esta categoría se ubican lo que se denominan problemas incompletos o problemas de soluciones múltiples. El ejemplo más conocido es el de proyectar un viaje. Se dispone de una cantidad de dinero y se trata de encontrar todas las soluciones posibles que no pasen de la cantidad que disponemos.

ACTIVIDAD 4: Inventa un problema de dos pasos en el que las dos relaciones implicadas correspondan a la estructura multiplicativa.

ACTIVIDAD 5: Analiza si los siguientes problemas son de un paso o de más de uno. En cada problema, identifica el tipo de problema correspondiente a las relaciones simples implicadas, tanto si son aditivas como multiplicativas.

Problema 1. Juan tiene 7 veces tantos sellos como Antonio. Si a Juan le dan 15 sellos, tiene 90.¿Cuántos sellos tiene Antonio?
Problema 2. María tiene el doble de dinero que Francisco. Entre los dos tienen 36 euros. ¿Cuánto tiene cada uno?

Puedes ampliar información sobre problemas aritméticos en Puig y Cerdán (1988) y Castro (2001).

7. EL ALGORITMO DE LA MULTIPLICACIÓN

Tradicionalmente, hallar el producto de dos números no ha sido una tarea fácil, por lo que se han buscado métodos para obtenerlo de manera rápida y segura, que puedan aplicarse de forma automática a todos los casos. Uno de esos procedimientos automáticos es el algoritmo de la multiplicación que, usualmente, se realiza con lápiz y papel. El manejo de este algoritmo se fundamenta en conocimientos previos del sistema de numeración: unidades de distinto orden y valor de posición y desarrollo polinómico de un número empleando las potencias de la base. También es requisito el significado de la operación de multiplicar y sus propiedades, especialmente la propiedad distributiva. Otro conocimiento previo necesario es saber realizar sumas.

7.1. Números de una cifra

El primer paso para aprender a realizar el algoritmo de la multiplicación es aprender a multiplicar números de una cifra y memorizar los resultados. Esto constituye el aprendizaje de los hechos numéricos, que se puede apoyar en actividades centradas en los distintos modelos de la multiplicación basados en adición repetida o producto cartesiano. Contar a saltos de dos en dos, de tres en tres..., asociar sumas repetidas con productos o visualizar estos resultados en unión repetida de conjuntos de objetos o matrices rectangulares son dos actividades típicas para cimentar este aprendizaje. El recuadro muestra un ejemplo de tales actividades orientadas a los escolares.

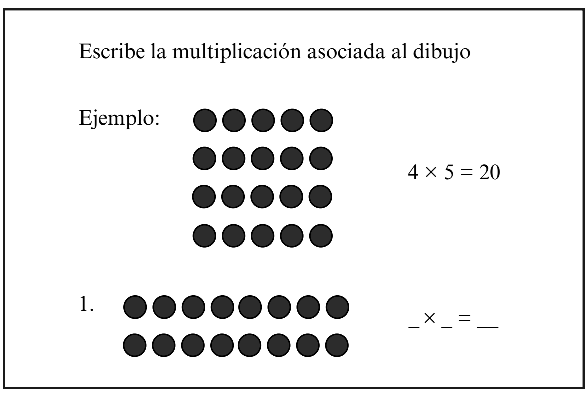


Figura 4.15.—Modelo discreto de la multiplicación.

Con estas y otras ayudas aprendemos a memorizar los hechos básicos de la multiplicación recogidos en la tabla de multiplicar de Pitágoras (véase tabla 4.3).

TABLA 4.3

Tabla de multiplicar de Pitágoras

×	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

La memorización de los hechos numéricos recogidos en las tablas se favorece si reconocemos en ellas regularidades y patrones. Por ejemplo:

a) Si cero es un factor, el resultado es cero.
b) Si el uno es un factor, el resultado es el otro factor.
c) Si dos es un factor, el resultado es siempre par.
d) Si cinco es un factor, la cifra de las unidades es 0 o 5.
e) Si ocho es un factor, la cifra de las unidades es sucesivamente 8, 6, 4, 2, 0.
f) Si nueve es un factor, la suma de las cifras del producto es 9.
g) El producto de dos factores es igual, independientemente del orden, por ejemplo: 7 × 9 = 9 × 7

ACTIVIDAD 1: Busca y describe regularidades y patrones en la tabla de Pitágoras (tabla 4.3).

7.2. Multiplicador con una cifra

Después de aprender los hechos numéricos básicos de la multiplicación, el segundo paso importante en el aprendizaje del algoritmo de la multiplicación es el dominio de la multiplicación de un número de dos cifras por otro de una cifra, por ejemplo, 4 × 13. Este producto se puede ilustrar mediante una matriz rectangular de 4 filas de 13 puntos. La matriz rectangular se puede partir en dos partes para mostrar que 4 × 13 = 4 × (10 + 3) = 4 × 10 + 4 × × 3, que, como puede observarse, es cierta por la propiedad distributiva de la multiplicación. A los productos 4 × 10 y 4 × 3 se les llama *productos parciales:*

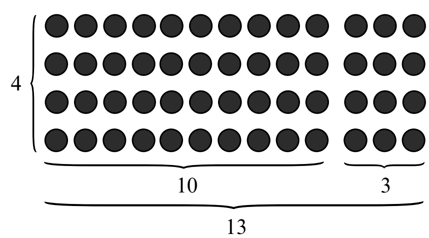


Figura 4.16.—Multiplicando de dos cifras.

Una justificación matemática del algoritmo es como sigue:

4 × 13 = 4 × (1 × 10 + 3) = por el valor de posición.
= 4 × (1 × 10) + 4 × 3 = propiedad distributiva de la multiplicación.
= (4 × 1) × 10 + 4 × 3 = por la propiedad asociativa de la multiplicación.
= 4 × 10 + 12 = aplicamos los hechos básicos de la multiplicación.
= 4 × 10 + 1 × 10 + 2 = valor de posición.
= (4 + 1) × 10 + 2 = propiedad distributiva de la multiplicación.
= 5 × 10 + 2 = 52 = suma y valor de posición.

Este proceso se sintetiza en el algoritmo clásico de la multiplicación de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times\ 4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10 + 3 \\ \times \quad 4 \\ \hline 40 + 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ \times\ 4 \\ \hline 12 \\ 40 \\ \hline 52 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ \times\ 4 \\ \hline 52 \end{array}$$

El proceso de llevarse en la multiplicación se puede ilustrar con un material adecuado como el tablero de valor de posición. Ejemplo: 5 × 135.

Pasos en una multiplicación con multiplicado de tres cifras

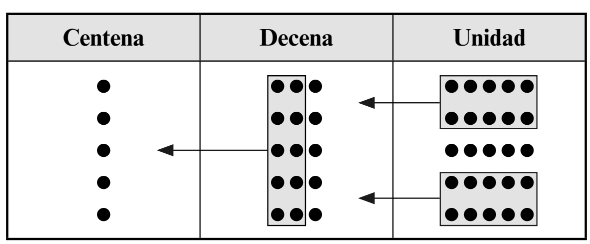
Paso 1. Representa el factor mayor 135.

Centena	Decena	Unidad
●	●●●	●●●●●

Paso 2. Repite el número de veces según indica el otro factor.

Centena	Decena	Unidad
● ● ● ● ●	●●● ●●● ●●● ●●● ●●●	●●●●● ●●●●● ●●●●● ●●●●● ●●●●●

Paso 3. Reagrupa cuando sea necesario.



Paso 4. Escribe el resultado: 675.

Centena	Decena	Unidad
●● ● ● ● ●	●● ●● ● ● ●	●●●●●

7.3. Multiplicador con dos o más cifras

Cuando los niños aprenden a multiplicar números de dos o más cifras, el empleo de material manipulativo para ilustrar el algoritmo de la multiplicación resulta poco *transparente* y confuso. En este caso, el modelo de áreas del rectángulo resulta más adecuado para visualizar y dar sentido a los productos parciales. El papel cuadriculado resulta útil en este caso, como se ve en la figura 4.17, que representa los productos parciales de 16 × 13.

ACTIVIDAD 2: Dibuja modelos de áreas similares para los productos 25 × 18 y 23 × 14.

ACTIVIDAD 3: Extiende las ideas de la multiplicación al álgebra de manera similar a como hemos representado 16 × 13 y representa sobre papel cuadriculado las expresiones algebraicas $(a + b)^2$ y $(a + b)(c + d)$.

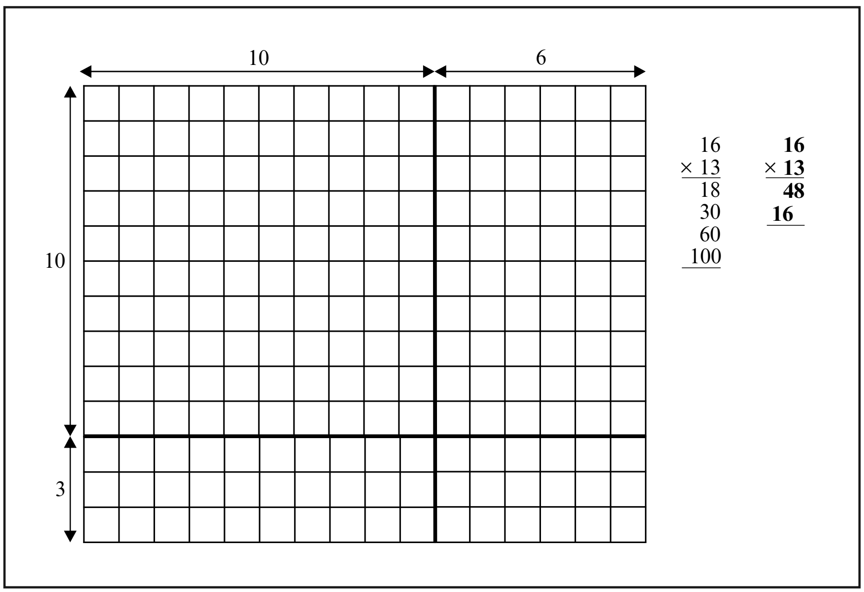


Figura 4.17.—Modelo de área para la multiplicación.

7.4. Algoritmo de la celosía

A lo largo de la historia se han utilizado diversos procedimientos para calcular el producto de dos números. Uno de ellos es el algoritmo de la celosía. Supongamos que queremos multiplicar 435 por 84; se procede del siguiente modo. Dibujamos una tabla rectangular de dimensiones dos por tres. Dividimos las celdas de la tabla mediante diagonales. Colocamos el multiplicando en la parte superior de la tabla, poniendo cada cifra en una de las columnas de la tabla. Escribimos las cifras del multiplicador a la derecha de la tabla alineando cada cifra con una fila de la misma. Realizamos todos los productos parciales y los colocamos en las casillas correspondientes a las intersecciones de las filas y columnas correspondientes a las cifras que se multiplican. La cifra de las unidades de los productos parciales se escribe en la subdivisión de la derecha de la celda, y la cifra de las decenas en la de la izquierda. Ahora se suman los productos parciales obtenidos según indica la dirección de las diagonales de las casillas. El producto viene dado por las cifras que aparecen en la columna de la izquierda de la tabla, leído de arriba abajo, seguido por las cifras que hay en la fila inferior de la tabla, leídas de izquierda a derecha. En nuestro caso: 36.540:

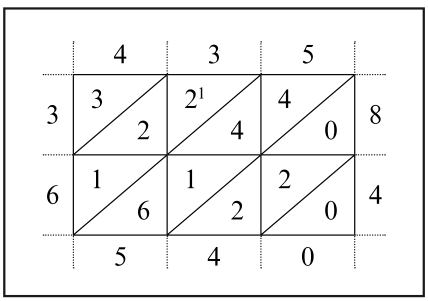


Figura 4.18.—Algoritmo de la celosía.

ACTIVIDAD 1: Multiplica 324 por 213 utilizando el algoritmo de la celosía.

8. ALGORITMO DE LA DIVISIÓN

El algoritmo tradicional de la división es más difícil de aprender que el de las otras operaciones aritméticas básicas. Algunas de las razones de esta dificultad son:

a) Además del conocimiento de los hechos básicos de la división, se requiere conocer la multiplicación y la sustracción.
b) Al contrario de las otras operaciones aritméticas (adición, sustracción y multiplicación), se realiza de izquierda a derecha.
c) Implica una cierta capacidad de estimación y aplicar la estrategia de ensayo y error.

Todo eso se refleja en la forma que se expresa verbalmente el proceso de la división. Por ejemplo, si queremos hacer la división 568: 4, la colocamos en formato de caja:

$$\begin{array}{l|l} 568 & 4 \\ \cline{2-2} 16 & 142 \\ \ \ 08 & \\ \ \ \ \ 0 & \end{array}$$

Empezamos diciendo:

5 entre 4 cabe a 1, 4 por 1 es 4, 5 menos 4 es 1.

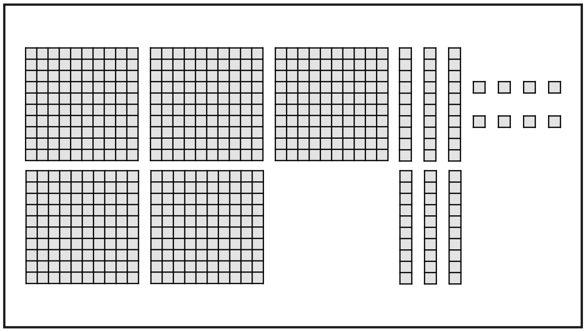
y continuamos:

bajo la cifra siguiente, el 6, 16 entre 4 cabe a 4, 4 por 4 es 16, 16 menos 16 es 0, bajo el 8, 8 entre 4 a 2, y me sobran 0.

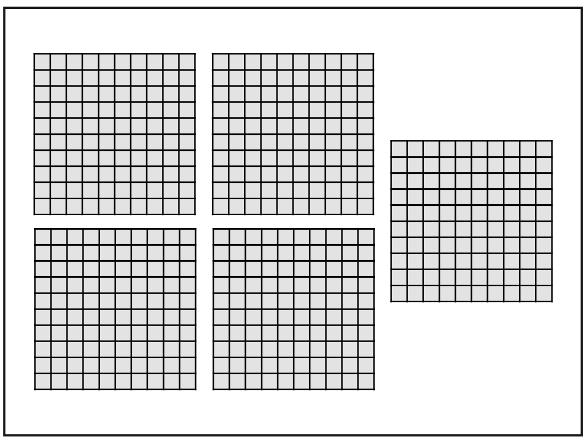
Podemos darle sentido y justificación a este proceso directamente diciendo que primero repartimos las unidades de mayor orden, las centenas, después las decenas y por último las unidades. Si en alguno de estos repartos queda algún sobrante se le añaden las unidades de su mismo orden presentes en el número. Este proceso se puede modelizar con bloques multibase, como se muestra a continuación.

Pasos en la división con material manipulativo

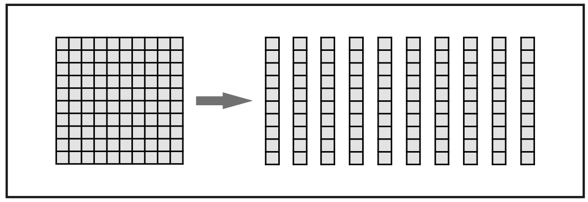
Primer paso. Se representa el dividendo con bloques multibase:



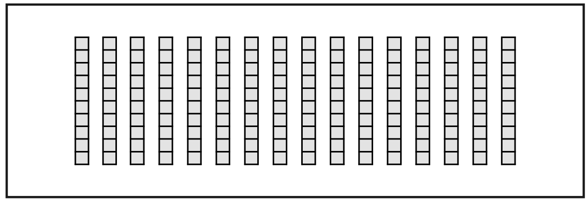
Segundo paso. Se reparten las 5 centenas (las placas) entre 4; tocan a 1 y sobra una centena:



Tercer paso. La centena sobrante se descompone en decenas:



Cuarto paso. Se suman estas 10 decenas (regletas) con las 6 iniciales; total: 16:



Quinto paso. Se reparten las dieciséis regletas entre 4 y tocan a 4 decenas.

Sexto paso. Repartimos las 8 unidades (cuadraditos) ente 4; tocan a 2 y no sobra ninguno.

ACTIVIDAD 1: Realiza la división de 1.532 : 5 empleando bloques multibase. Explica de forma detallada cómo lo haces.

ACTIVIDAD 2: Realiza las divisiones siguientes empleando restas sucesivas y con el algoritmo tradicional:

a) 4.803 : 912 *b*) 1.011 : 11

ACTIVIDADES PARA PRACTICAR

1. Si la tecla de la división de una calculadora está estropeada, ¿cómo podríamos utilizar la calculadora para hallar la respuesta a 408 : 17?

2. Qué tipo de división representan las siguientes expresiones:

a) Cortar un tablero de 100 cm en baldas de 20 cm.
b) Dividir un cordel en 5 partes iguales.
c) Doblar una cinta de papel para dividirla en cuatro partes iguales.
d) Colocar 144 huevos en cartones de docenas.

3. Redacta un problema de estructura multiplicativa que responda a las condiciones de cada apartado:

a) Un problema de producto cartesiano en el que el producto es desconocido.
b) Un problema de comparación de disminución con el referente desconocido.
c) Un problema de proporcionalidad simple de división cuotitiva.

4. Utiliza la propiedad distributiva de la multiplicación para obtener expresiones equivalentes a cada una de las siguientes:

a) $3a + 4a + 7a$ *b*) $4a^2 + 7a^2 - 3a^2$

c) $x(a + b + c)$ *d*) $(a + 3)5 + (b + 6)$

5. En el libro de Bruño (1825) encontramos enunciados de problemas empleando la comparación de igualación multiplicativa:

20. Un número consta de tres cifras cuya suma es 10, siendo la segunda cero; cuando se invierte, el número obtenido vale 8 veces tanto como el primero más 29. ¿Cuál es ese número?

El problema número 20 de este libro contiene la expresión «el número obtenido vale 8 veces tanto como el primero». ¿Qué significa esto? Escribe dos números que cumplan esta relación.

6. Describe el patrón de respuestas en los siguientes productos. Este patrón, ¿continúa indefinidamente?:

$$1 \times 1$$
$$11 \times 11$$
$$111 \times 111$$
$$1.111 \times 1.111$$

7. Completa y encuentra la regularidad:

$$1 \times 8 + 1 = 9$$
$$12 \times 8 + 2 = 98$$
$$123 \times 8 + 3 = 987$$
$$1.234 \times 8 + 4 =$$
$$12.345 \times 8 + 5 =$$
$$123.456 \times 8 + 6 =$$
$$1.234.567 \times 8 + 7 =$$
$$12.345.678 \times 8 + 8 =$$
$$123.456.789 \times 9 + 9 =$$

8. Investiga las cifras que faltan en la operación:

$$\begin{array}{cccc}
 & & 3 & \bigcirc \\
 & \times & \bigcirc & 2 \\
\hline
 & & 7 & 2 \\
 & 4 & \bigcirc & \\
\hline
1 & 5 & 1 & 2
\end{array}$$

9. Observa el siguiente razonamiento:

Sabemos que $1 \times 0 = 0$ y que $2 \times 0 = 0$.
En las dos igualdades dividimos ambos términos entre 0; obtenemos:

$$1 = 0 : 0 \ \text{ y } \ 2 = 0 : 0$$

Así pues, como 1 y 2 dan el mismo resultado, significa que $1 = 2$.
¿En qué nos hemos equivocado?

10. La dificultad de obtener productos y cocientes se manifiesta por la diversidad de métodos que se han utilizado a lo largo de la historia y por los medios que se han usado para su realización, desde los antiguos ábacos hasta las calculadoras y ordenadores actuales. Los babilonios utilizaban fórmulas que relacionaban la multiplicación con otras operaciones aritméticas. Una de ellas es:

$$a \times b = \frac{(a + b)^2}{4} - \frac{(a - b)^2}{4}$$

Calcula 23×45 utilizando esta fórmula.

11. *Identificar problemas de multiplicar*. Analiza los problemas siguientes e identifica la categoría a la que pertenecen:

Problema 1. Antonio y Juan son coleccionistas de sellos. Antonio tiene 23 sellos y Juan el triple que Antonio. ¿Cuántos sellos tiene Juan?

Problema 2. María está vistiendo a su muñeca. Tiene 4 cintas del pelo y 3 pares de calcetines. ¿De cuántas maneras puede vestir a la muñeca si emplea una cinta y un par de calcetines cada vez?

Problema 3. En la calle del Dr. García hay 3 aparcamientos con 5 coches en cada uno. ¿Cuántos coches hay en total en esta calle?

Problema 4. Una máquina limpia 4 metros cuadrados por día durante una semana. ¿Cuántos metros cuadrados ha limpiado?

Problema 5. Pedro coloca fichas en 3 filas de 5 fichas cada una. ¿Cuántas fichas ha colocado?

Problema 6. Una mesa rectangular tiene 100 cm de largo y 90 cm de ancho. Para cubrirla con un mantel, ¿cuál es la cantidad mínima necesaria?

12. Los babilonios vivieron en Mesopotamia, en unas tierras fértiles entre los ríos Tigris y Éufrates, hace unos 4.000 años. Fueron matemáticos activos y grabaron información sobre aritmética, álgebra y geometría en tablillas de arcilla. Escribían sobre la arcilla con estiletes que proporcionaban a los signos de esta escritura *cuneiforme* su típica forma triangular.

Las figuras siguientes contienen dos tablillas de arcilla cocida que datan de 1800 antes de Cristo:

a) Intenta descifrar los signos de esta escritura cuneiforme.

b) ¿Qué significado tienen las cinco primeras entradas de la columna de la derecha en la tablilla 1?

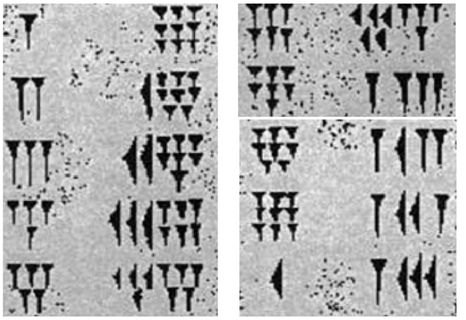
c) ¿Qué relación existe entre las dos columnas de la tablilla 1?

d) Interpreta el significado que tienen las cinco entradas de la columna de la izquierda en la tablilla 2.

e) Conocido el contenido de la columna 1, ¿qué está representado en la segunda columna de la tablilla 2?

f) ¿Qué otros patrones puedes descubrir en las tablillas?

g) ¿Qué representan conjuntamente las dos tablillas?



INVESTIGA Y REFLEXIONA

1. Examina un libro de texto reciente de matemáticas de 2.º, 3.º o 4.º cursos de Educación Primaria e investiga cómo se introducen los hechos básicos de la multiplicación y la división.

2. Reflexiona sobre la relación entre una división con resto y la misma división realizada con calculadora.

3. Investiga cómo se puede realizar con un ábaco decimal la multiplicación y la división de números.

5. Examina un libro de texto de 5.º curso de Primaria, localiza tres problemas de estructura multiplicativa y clasifícalos de acuerdo con los criterios dados en este capítulo.

6. Localiza en Internet algún programa orientado a que los alumnos aprendan a multiplicar y dividir. Haz una ficha resumen de las habilidades matemáticas que promueve tal programa y del tipo de actividades que los escolares pueden realizar con él.

BIBLIOGRAFÍA

Bruño, G. M. (1825). *Álgebra y trigonometría.* París: Procuraduría General.

Castro, E. (Ed.) (2001). *Didáctica de la matemática en la educación primaria*. Madrid: Síntesis.

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1987). *Números y operaciones*. Madrid: Síntesis.

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Sánchez Pérez, J. A. (1949). *La aritmética en Roma, en India y en Arabia*. Madrid: CSIC.

Saverien, A. (1775). *Historia de los progresos del entendimiento humano en las ciencias exactas y las artes que dependen de ellas*. Madrid: Imprenta de don Antonio de Sancha.

5

Introducción a la divisibilidad

MARTA MOLINA GONZÁLEZ
ENCARNACIÓN CASTRO MARTÍNEZ

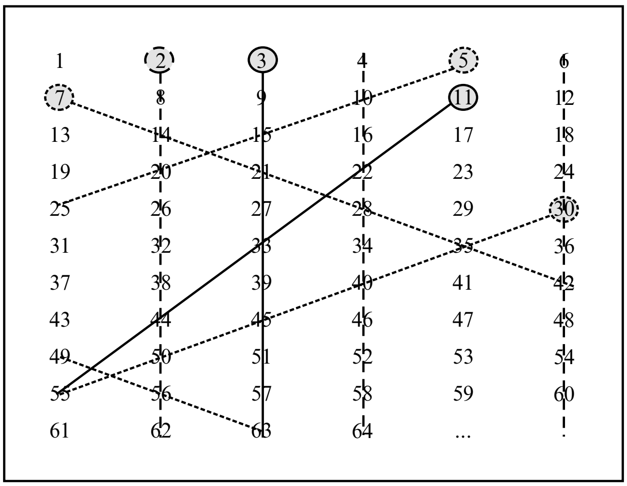


Figura 5.1.—Criba de Eratóstenes (del 1 al 64).

La figura corresponde a la aplicación de la criba de Eratóstenes a los números naturales del 1 al 64. Éste es un método inventado por el matemático griego Eratóstenes (276-194 a. C.) hace más de 2.200 años, que permite identificar números primos. Analizar esta figura e identificar qué números se han tachado y cuáles se han destacado con un círculo es una buena actividad para comenzar el tema.

Los números se relacionan entre sí de muchas maneras. En este tema estudiamos relaciones multiplicativas importantes que se consideran entre los números naturales. Los contenidos forman parte de una de las ramas más antiguas de las matemáticas, la *Teoría de números,* originada en la antigua Grecia hace más de 2.500 años.

Durante la mayor parte de su historia, la teoría de números se ha desarrollado por pura curiosidad intelectual y su actividad se ha centrado en estudiar vínculos y resolver cuestiones que afectan al propio funcionamiento de las matemáticas, principalmente, con escasas conexiones al mundo real. La llegada de las tecnologías digitales ha cambiado este panorama al incrementar considerablemente las aplicaciones de la teoría de números. Los ordenadores trabajan con representaciones electrónicas de números naturales, lo cual da lugar a plantear problemas propios de la teoría de números. Uno de estos problemas es el desarrollo de formas seguras que permitan la comunicación privada en el ámbito público, como ocurre en la realización de transacciones económicas a través de Internet. Para ello es necesario utilizar códigos secretos cuyo procedimiento de descifrado sea difícil. El diseño de algunos de estos códigos se basa en averiguar los factores primos de un número con muchas cifras. En el ámbito de las tecnologías de la información y la comunicación, la teoría de números también interviene al comprimir datos y en la corrección de errores que se producen en la transmisión y almacenamiento de la información.

Entre las nociones matemáticas que componen la teoría de números se encuentran las relacionadas con la divisibilidad. Las nociones de divisibilidad se ponen en juego en contextos cotidianos tales como repartos equitativos y otros tipos de situaciones relacionadas con cantidades de objetos o personas dispuestos en grupos de igual número (por ejemplo, yogures, baldosas, pilas, alumnos en equipos...). También se manifiestan en todo tipo de situaciones en las que existe alguna periodicidad, es decir, en las que se da coincidencia de sucesos que ocurren periódicamente en el tiempo, como es el caso del paso de una línea de autobús por una parada, el movimiento de los planetas, la estructura de las notas musicales (blanca, negra, cochea, semicorchea, fusa y semifusa) que representan la duración de un sonido determinado, los ciclos de vida de presas y depredadores, el movimiento y número de dientes de engranajes (también llamados ruedas dentadas) y algunos métodos científicos como la determinación de la edad de la materia orgánica mediante la técnica del carbono-14.

Como introducción a la teoría de números, este capítulo presenta los contenidos sobre divisibilidad que han de trabajarse en los niveles de Educación Primaria y primeros cursos de Educación Secundaria. Nos centramos en su significado y en sus interrelaciones, y destacamos el papel de las actividades de exploración de patrones y elaboración de generalizaciones como acceso a la teoría de números y contexto útil para promover el desarrollo del razonamiento matemático y de las capacidades de argumentación, expresión y comunicación en el lenguaje matemático, todas ellas capacidades componentes de la competencia matemática.

1. LA DIVISIBILIDAD EN EL CURRÍCULO ESCOLAR

El currículo de la Educación Primaria propone que los contenidos que se recogen en este tema se comiencen a trabajar en tercer ciclo de Educación Primaria, tomando como soporte los conocimientos sobre la estructura multiplicativa que los estudiantes han adquirido en cursos previos. En segundo ciclo se estudia la división de números naturales, distinguiéndose la división con resto de la división exacta. Esta última permite definir los conceptos de múltiplo y divisor, dando paso posteriormente a nociones más complejas tales como la distinción entre números primos y compuestos, máximo común divisor, mínimo común múltiplo y factorización de un número, en las que se profundiza en los primeros cursos de Educación Secundaria. No obstante, a partir de actividades de exploración de patrones multiplicativos, algunos de estos contenidos pueden comenzar a trabajarse desde los primeros cursos de Primaria. Por ejemplo, la exploración de patrones en la tabla de los 100 primeros números, en las tablas de multiplicar o el conteo a saltos con diferentes números permite introducir de forma intuitiva las nociones de múltiplo y divisor desde edades tempranas.

Hay varios argumentos que justifican que la divisibilidad forme parte del currículo de Educación Primaria. Los motivos principales para el estudio de la divisibilidad son:

- Profundizar en el conocimiento de los números y de sus relaciones, al reconocer diferentes formas en las que un mismo número puede expresarse, descomponerse y conectarse con otros por medio del producto.
- Conocer y aplicar las propiedades de las operaciones aritméticas, principalmente las de la estructura multiplicativa.
- Estimular la fluidez y flexibilidad en el cálculo, tanto exacto como aproximado.
- Comprender nociones fundamentales para el estudio de otros contenidos matemáticos, tales como fracciones y proporcionalidad.
- Promover el estudio y comprensión de patrones, el desarrollo del razonamiento inductivo y la elaboración y expresión de generalizaciones en contextos numéricos.

ACTIVIDAD 1: Elige dos textos escolares de matemáticas para Educación Primaria en vigor, correspondientes al último ciclo. Haz un resumen de los contenidos y actividades relacionados con la divisibilidad que en ellos aparecen.

2. NOTACIÓN MULTIPLICATIVA DE LOS NÚMEROS NATURALES

Cada forma de representar un número indica, al menos, una de sus propiedades. Así, por ejemplo, la siguiente cadena de igualdades muestra que 36 es la suma de los ocho primeros números, el cuadrado de 6, el cuadrado de 2 por el cuadrado de 3 y la suma de tres números consecutivos:

$$36 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 6^2 =$$
$$= 2^2 \times 3^2 = 11 + 12 + 13$$

Todo número se puede expresar de variadas formas mediante una o varias operaciones. Los desarrollos de números con notación multiplicativa tienen ciertas ventajas:

- Permiten escribir números grandes utilizando pocas cifras:

$$1.000.000.000.000 = 10^{12} = 2^{12} \times 5^{12}$$

$$26.970 = 29 \times 30 \times 31$$

- Facilitan el cálculo de productos y divisiones:

$$5.184 \times 196 = (2^6 \times 3^4) \times (7^2 \times 2^2) = 2^8 \times 3^4 \times 7^2$$

$$81.000 : 375 = (3^4 \times 2^3 \times 5^3) : (3 \times 5^3) = 3^3 \times 2^3$$

- Permiten reconocer los divisores del número, como veremos más adelante en este capítulo.
- Facilitan el estudio de algunas propiedades del número. Por ejemplo, permiten reconocer si el número es o no un cuadrado o un cubo:

$81.000.000 = 3^4 \times 2^6 \times 5^6 = (3^2 \times 2^3 \times 5^3)^2$ es un cuadrado, pero no es un cubo.

$3.375 = 5^3 \times 3^3 = (5 \times 3)^3$ es un cubo, pero no es un cuadrado.

$64.000.000 = 2^{12} \times 5^6 = (2^4 \times 5^2)^3 = (2^6 \times 5^3)^2$ es un cubo y un cuadrado.

Escribir un número como producto muestra características importantes. Dentro de las notaciones multiplicativas de los números, algunas, como es el caso de la factorización, tienen especial alcance para el manejo de números y el estudio de sus propiedades.

El estudio de las relaciones de divisibilidad conduce a precisar la escritura de un número de forma única como producto de factores primos.

ACTIVIDAD 1: Escribe de varias formas 4.200 utilizando notación multiplicativa.

ACTIVIDAD 2: Escribe en notación multiplicativa un número cuadrado, otro cubo y una cuarta potencia.

3. DIVISORES Y MÚLTIPLOS

La división de dos números naturales, $a : b$, puede dar resto nulo. Se dice entonces que la división es exacta. Si $a : b = c$, se tiene que $a = b \times c$. También $a = c \times b$, dado que la multiplicación es una operación conmutativa. En esta situación se dan las siguientes relaciones de divisibilidad entre los números a, b y c:

b es divisor o factor de *a*.
a es divisible por *b*.
a es múltiplo de *b*.
c es divisor o factor de *a*.
a es divisible por *c*.
a es múltiplo de *c*.

La figura 5.2 sintetiza estas relaciones para el caso de *a* y *b*.

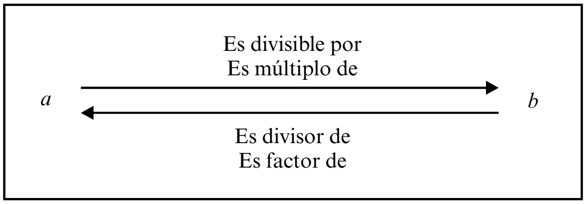


Figura 5.2.—Relaciones de divisibilidad entre *a* y *b* cuando *a* : *b* es exacta.

A modo de ejemplo, la figura 5.3 muestra las relaciones de divisibilidad que se desprenden de la división exacta 24 : 6, equivalente a $24 = 6 \times 4$.

Divisor de un número

*Para dos números naturales a y b, se dice que **b es divisor de a**, y se escribe b | a, si al hacer la división a : b el resto es nulo, es decir, si existe un número natural que al multiplicarlo por b da a. También se dice que **b es factor de a** o que **a** es divisible por **b.***

Este uso de la palabra divisor expresa una relación entre dos números. Es distinto al uso que se hace de esta palabra cuando se distinguen los diferentes términos que intervienen en una operación de división: dividendo, divisor, cociente y resto.

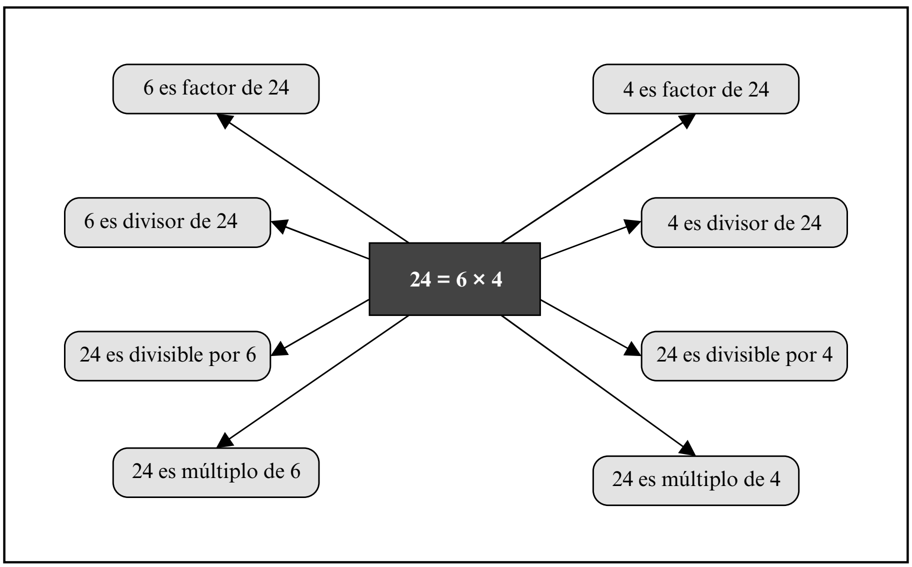


Figura 5.3.—Relaciones de divisibilidad para la terna de números (6, 4, 24).

En la división 12 : 4 = 3, el número 4 es el divisor y también *es un divisor* de 12 porque la división es exacta.

El número 5 es el divisor en la división 12 : 5 = 2,4, pero en este caso no es un divisor de 12, ya que la división indicada no es exacta en el conjunto de los números naturales.

ACTIVIDAD 1: Sabiendo que 60 tiene exactamente 12 divisores, encuentra dichos divisores.

ACTIVIDAD 2: Indaga sobre si es posible que un número par tenga un divisor impar. Asimismo, sobre si un número impar puede tener un divisor par. Justifica en cada caso tu respuesta.

Múltiplo de un número

Para dos números naturales a y b, se dice que ***a es múltiplo de b,*** *y se escribe* $a = \dot{b}$*, si existe un número natural que al multiplicarlo por b da a. El término múltiplo de b se refiere a cualquier número obtenido a partir de la multiplicación de b por un número natural.*

Por ejemplo, son múltiplos de 6 los resultados de multiplicar 6 por cualquier otro número. Los primeros múltiplos de 6 aparecen en la tabla de multiplicar del 6.

Debido a la relación inversa que existe entre la multiplicación y la división, las expresiones siguientes son equivalentes: $a = b \times c$, $a : b = c$ y $a : c = b$. Como conclusión, se deduce que las relaciones «ser múltiplo de/divisible por» y «ser divisor/factor de» son relaciones inversas.

ACTIVIDAD 3: Escribe cinco múltiplos de 13. Investiga cuántos múltiplos de 13 existen y si ocurre los mismo para el resto de números naturales.

ACTIVIDAD 4: Justifica cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

a) 8 es un divisor de 24; 24 es divisor de 8; 24 es múltiplo de 8 y 8 es múltiplo de 24.

b) 7 divide a 35; 35 | 7; 35 es múltiplo de 7 y 7 es múltiplo de 35.

ACTIVIDAD 5: Analiza el siguiente producto 1.650 = = 3 × 52 × 22 e indica qué relaciones de divisibilidad se pueden establecer a partir de esta igualdad.

ACTIVIDAD 6: Indica cuáles son los divisores y los múltiplos de 117. Busca algún número que sea tanto divisor como múltiplo de 117.

ACTIVIDAD 7: La figura 5.1 presenta los números naturales del 1 al 64 ordenados por filas y columnas. Analiza los números que aparecen en cada columna y señala qué tienen en común. Si esta tabla se continuara, identifica en qué columna aparecerían los siguientes números: $2^{10} = 1.024$; $2^{11} = 2.048$; $3^7 = 2.187$; $2 \times 3^7 = 4.374$; 1.000, y 1.000.000.

3.1. Representaciones de divisores y múltiplos mediante modelos

En este apartado introducimos las representaciones de divisores y múltiplos de un número mediante los modelos discreto, lineal y de área, considerando los diferentes significados de la multiplicación y de la división.

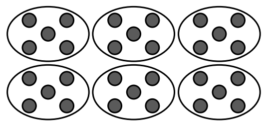
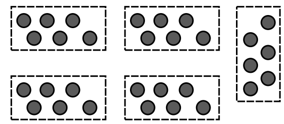
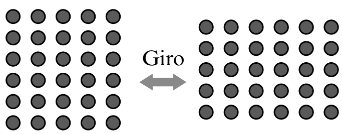
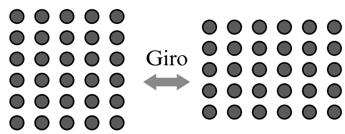
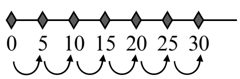
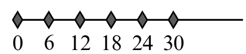
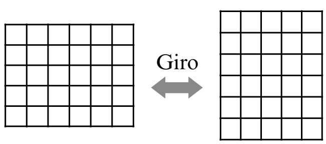
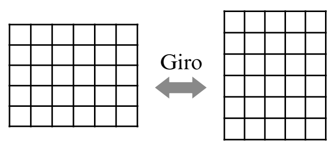
Si *b* es divisor de *a,* el significado de resta repetida de la división conlleva que *b* está contenido en *a* un número exacto de veces. Por su parte, el significado de reparto de la división implica que *a* puede repartirse de forma exacta en *b* grupos. Utilizando ambos significados se obtienen representaciones diferentes de esta relación de divisibilidad. La tabla 5.1 muestra un ejemplo para el caso de 5, divisor de 30.

ACTIVIDAD 8: Muestra, utilizando los modelos discreto, lineal y de área, que 21 es divisible por 7.

Para explorar la representación de los múltiplos de un número mediante estos tres modelos —discreto, lineal y de área—, consideramos

TABLA 5.1

Representación mediante modelos de la relación «5 es divisor de 30»

Significado / Modelo	**Resta repetida** 5 está contenido 6 veces en 30	**Reparto** 30 puede repartirse en 5 partes iguales, con 6 en cada parte
Discreto o de conjunto		
	6 columnas (o filas) con 5 objetos 	5 filas (o columnas) con 6 objetos 
Lineal		
De área	6 columnas con 5 filas o 6 filas con 5 columnas 	5 filas con 6 columnas o 5 columnas con 6 filas 

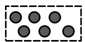
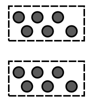
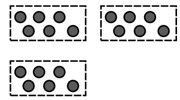
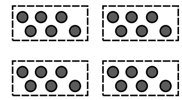
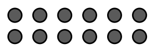
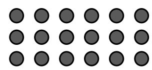
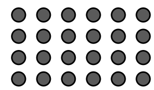
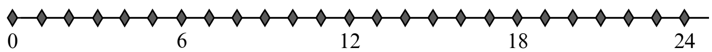
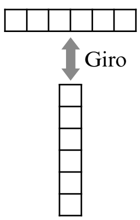
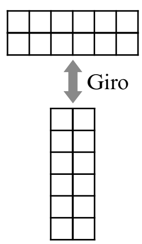
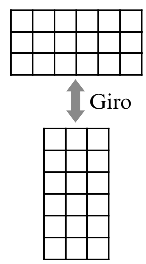
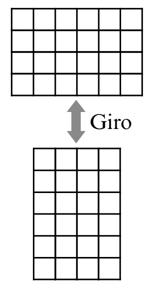
el significado de la multiplicación como suma repetida. Que *a* es múltiplo de *b* significa que al sumar una cantidad de veces *b* se obtiene *a*, o, lo que es lo mismo, que *a* contiene a *b* un número exacto de veces. Tomando como base dicha idea, la tabla 5.2 muestra las representaciones de algunos múltiplos de 6.

ACTIVIDAD 9: Calcula cinco múltiplos de 11 y represéntalos mediante los modelos discreto, lineal y de área.

ACTIVIDAD 10: Intenta representar el número 15 con una cuadrícula rectangular con 6 cuadrados por fila. Indica qué ocurre.

TABLA 5.2

Representaciones mediante modelos de múltiplos de 6

Número / Modelo	6	12	18	24
Discreto o de conjunto				
				
Lineal				
De área				

3.2. Propiedades

El estudio de los divisores y múltiplos de un número natural permite establecer, entre otras, las siguientes propiedades.

Propiedades de los divisores

a) Todo número natural, excepto el 0, es divisor de sí mismo.
b) El 1 es divisor de todos los números naturales.
c) El 1 sólo tiene un divisor, él mismo.
d) Todos los divisores de un número son menores o iguales que dicho número.
e) Todos los números naturales tienen un número finito de divisores.
f) Los divisores vienen en parejas: si b es divisor de a, entonces el cociente de la división $a : b$ es también divisor de a.

La figura 5.4 muestra las parejas de divisores de 18.

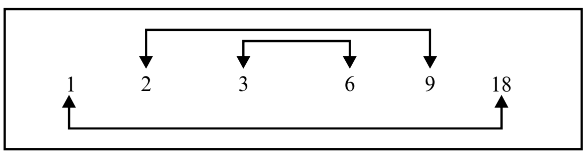


Figura 5.4.—Divisores de 18 por parejas.

ACTIVIDAD 11: Justifica cada una de estas propiedades a partir de la definición de divisor y de las propiedades anteriores.

ACTIVIDAD 12: Según la propiedad *f*), parecería que el número de divisores de un número siempre es par, pero no es así. Encuentra números cuyo número de divisores es impar y señala la especificidad de dichos números.

g) Los divisores de un divisor de un número son también divisores de dicho número. Por ejemplo, 12 es divisor de 36 y 4 es divisor de 12, entonces 4 es divisor de 36. Esta propiedad también se puede formular como sigue: «si un número natural es divisor de otro, entonces es divisor de cualquiera de sus múltiplos».

Su demostración se basa en la propiedad asociativa de la multiplicación. Si b es divisor de a, entonces a es resultado de un producto en el que b es uno de los factores: $a = b \times m$. Igualmente, si c es divisor de b, es posible escribir la igualdad $b = c \times l$. Sustituyendo este valor de b en la igualdad anterior, se puede escribir $a = b \times m = (c \times l) \times m = c \times (l \times m)$. Por tanto, c es un divisor de a.

ACTIVIDAD 13: Sabiendo que un número no es divisible por 2, ¿se puede asegurar que no será divisible por 4? ¿Se puede asegurar lo mismo para 7 o 12?

h) Si un número natural es divisor de otros dos, también lo es de su suma y de la diferencia entre el mayor y el menor.

Esta propiedad se puede visualizar, para casos concretos, a través de una representación en el modelo de área. Mostramos en la figura 5.5 el caso de 12, divisor de 60 y de 36, viendo que 12 también es divisor de la suma de ambos números (96) y de la diferencia entre el mayor y el menor (24).

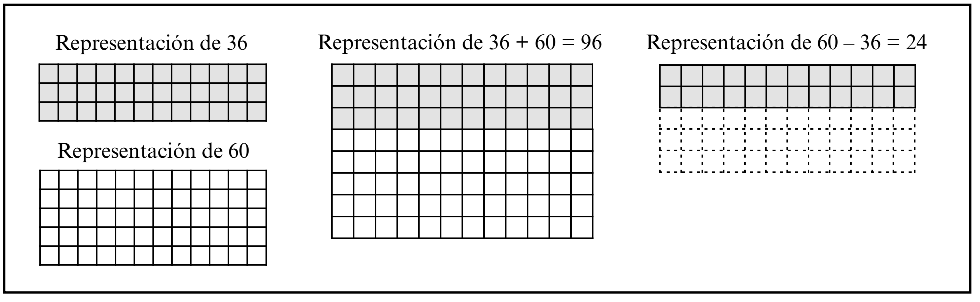


Figura 5.5.—Modelos de área para 36, 60, su suma y su diferencia, como múltiplos de 12.

ACTIVIDAD 14: Demuestra la propiedad *h*) con notación simbólica.

ACTIVIDAD 15: Estudia si se cumple siempre, o en algún caso, que si a es divisor de b, entonces b es divisor de a.

Propiedades de los múltiplos

a) Un número natural siempre es múltiplo de sí mismo.

b) Todos los números naturales son múltiplos del número 1.

c) Los múltiplos de un número son mayores o iguales que dicho número.
d) Todos los números naturales tienen infinitos múltiplos.

ACTIVIDAD 16: Justifica estas propiedades a partir de la definición de múltiplo.

e) Los múltiplos de un múltiplo de un número son también múltiplos de dicho número. Por ejemplo, 60 es múltiplo de 15 ($60 = 4 \times 15$) y 15 es múltiplo de 5 ($15 = 3 \times 5$), entonces 60 es múltiplo de 5.

Esta propiedad se puede visualizar, para casos concretos, a través de una representación en el modelo de área. Mostramos en la figura 5.6 el caso del ejemplo mencionado.

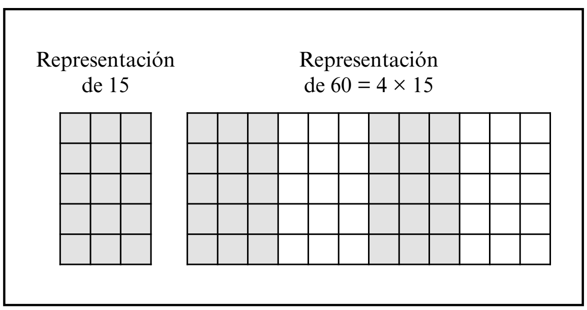


Figura 5.6.—Modelos de área para 15 y 60 como múltiplos de 5.

ACTIVIDAD 17: Demuestra esta propiedad mediante notación simbólica.

f) Si dos números naturales son múltiplos de otro número, también lo son su suma y la diferencia entre el mayor y el menor. Por ejemplo: 20 y 8 son múltiplos de 4; su suma, que es 28, y su diferencia, que es 12, también son múltiplos de 4.

ACTIVIDAD 18: Indaga si esta propiedad se basa en alguna de las propiedades de los divisores y señala la relación entre ellas.

ACTIVIDAD 19: Estudia si siempre, o en algún caso, se cumple que si *a* es múltiplo de *b,* entonces *b* es múltiplo de *a*.

4. NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

El estudio de los números naturales permite apreciar una de las características intrínsecas de las matemáticas: su riqueza en relaciones y patrones. Al operar con los números se detectan relaciones numéricas (véase figura 5.7), algunas de las cuales han conducido a distinguir números que cumplen una determinada propiedad: números pares, impares, primos, compuestos, cuadrados perfectos, amigos, intocables, perfectos...

$$1^3 + 2^3 = 3^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 15^2$$
$$\dots$$

$$4 = 2 \times 2 = 1 + 3$$
$$9 = 3 \times 3 = 1 + 3 + 5$$
$$16 = 4 \times 4 = 1 + 3 + 5 + 7$$
$$25 = 5 \times 5 = 1 + 3 + 5 +7 + 9$$
$$36 = 6 \times 6 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$$
$$\dots$$

Figura 5.7.—Relaciones numéricas.

Las situaciones que exploran relaciones numéricas son útiles para promover el desarrollo y uso de modos de pensamiento matemático en el aula, a partir de la detección y exploración de patrones. Los estudiantes pueden participar de experiencias semejantes a un matemático en su quehacer científico al descubrir nuevos conocimientos mediante la formulación de conjeturas basadas en casos particulares, llegando a la generalización.

Al atender a su número de divisores, los números naturales distintos del uno, se clasifican en:

- **Números primos:** números naturales que tienen exactamente dos divisores: el 1 y el mismo número.
- **Números compuestos:** números naturales que tienen más de dos divisores.

ACTIVIDAD 1: Escribe todos los números primos que conozcas. Incluye al menos los doce primeros números primos (consulta otras fuentes de información si te es necesario).

ACTIVIDAD 2: Los números 2 y 3 son ambos primos y son consecutivos. Investiga si es posible encontrar otros dos números primos que sean consecutivos. Justifica tu respuesta.

ACTIVIDAD 3: Describe las características de los siguientes tipos de números y escribe varios ejemplos de cada uno de ellos: números pares, impares, cuadrados perfectos, amigos, intocables y perfectos. Consulta otras fuentes de información si te es necesario.

Los números compuestos son infinitos y se pueden obtener multiplicando cualquier número por cada uno de los números naturales. El matemático griego Euclides (325-265 a. C.) demostró que también existen infinitos números primos.

Los números primos suscitan un gran interés entre los matemáticos. A partir de su estudio se han planteado interrogantes y suposiciones, muchas de las cuales aún no han sido probadas. Un conocido ejemplo es la conjetura de Goldbach (1690-1764), que afirma que todo número par mayor que 4 es suma de dos números primos impares. Es fácil encontrar ejemplos que cumplen el siguiente resultado: 6 = 3 + 3; 8 = 5 + 3, y 10 = 7 + 3. Entre los matemáticos ha despertado un interés especial encontrar un método para obtener todos los números primos que se deseen. Según se conoce a día de hoy, los números primos se distribuyen en la secuencia numérica de manera irregular y no hay una manera de predecir el siguiente número de la lista.

Se han encontrado números primos con decenas de millones de cifras (si escribiéramos 10 cifras por segundo tardaríamos, al menos, 15 días en escribir uno de esos números). Se sabe también, por ejemplo, que existen 455.052.512 primos menores que 10^{10} y que la diferencia entre dos primos consecutivos puede ser tan grande como se quiera.

¿Cómo saber si un número es primo?

Para saber si un número es primo tenemos que probar que no es divisible por ningún número que sea menor que él. Si n no es divisible entre 2, tampoco puede ser divisible entre 4, 6, 8, 10...; si n no es divisible entre 3, tampoco puede ser divisible entre 6, 9, 12... Por esto los números compuestos 4, 6, 8, 9, 10... no se consideran para saber si un determinado número es o no primo. Probar que un número es primo consiste, por tanto, en probar que no tiene un divisor primo menor que él.

Por consiguiente, la técnica más simple para saber si el número n es o no primo consiste en dividirlo sucesivamente entre 2, 3, 5, 7... (los diferentes números primos inferiores a dicho número). Si ninguna de estas divisiones es exacta, es porque n no tiene ningún divisor primo y, por tanto, n es primo.

La criba de Eratóstenes

Los números primos menores que 100 son los que aparecen sombreados en la figura 5.8. En dicha figura se ha aplicado la criba de Eratóstenes a los números del 1 al 100. El método seguido es el siguiente. Buscamos el primer número primo, que es 2; a partir del 2 tachamos todos sus múltiplos, es decir, los números pares, que no son primos ya que tienen a 2 como divisor. Pasamos al siguiente número de la tabla que es primo, el 3, y a partir de él tachamos todos sus múltiplos contando de 3 en 3. Estos números no son primos, ya que tienen a 3 como divisor. 5 no es múltiplo de ninguno de los números anteriores, luego es primo. Los múltiplos de 5 no son primos, por ello los eliminamos contando sobre la tabla de 5 en 5. Igual procedemos con los restantes números que no aparecen tachados después de 5: 7, 11, 13..., así hasta llegar a 97, que es primo, ya que no es múltiplo de ninguno de los números anteriores. Hemos llevado esta técnica hasta 100, pero puede continuarse para determinar los números primos hasta 1.000, 10.000, etc.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 5.8.—Criba de Eratóstenes aplicada del 1 al 100.

ACTIVIDAD 4: Emplea la criba de Eratóstenes para identificar todos los primos menores de 200.

ACTIVIDAD 5: Una parte de la matemática, conocida como matemática recreativa, explota las relaciones numéricas para crear juegos y acertijos. Busca algunos juegos o pasatiempos numéricos y describe las relaciones numéricas que intervienen.

4.1. Relaciones entre la divisibilidad y los números primos

Entre los números primos y los divisores de un número existen relaciones que dan lugar a propiedades. Enunciamos a continuación alguna de ellas:

> *Todo número natural tiene, al menos, un divisor primo.*

Si el número es primo, como 17, él mismo es su divisor; luego ya tiene un divisor primo. Si el número es compuesto, al menos uno de sus factores es primo, como ocurre en $12 = 3 \times 4$, donde 3 es primo. Si al expresar un número como producto ocurriera que todos sus factores fueran compuestos, podemos seguir razonando de igual modo con uno de esos factores, proceso que lleva a un factor primo, ya que los factores cada vez son menores y alcanzan a 1. Por ejemplo, en $24 = 6 \times 4$ ninguno de sus factores es primo, pero $6 = 3 \times 2$, luego $24 = 3 \times 2 \times 4$, apareciendo entre los factores al menos un número primo.

Teorema fundamental de la aritmética

Consecuencia de la propiedad anterior es el siguiente teorema:

> *Todo número natural mayor que 1 puede escribirse como producto de factores primos de forma única. Simbólicamente:* $\boldsymbol{n = p_1 \times p_2 \times \times p_3 \times \ldots p_k}$*, expresión en la cual los factores son números primos.*

Ejemplos: $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ y $63 = 7 \times 3 \times 3$ son las formas de expresar 16 y 63 como producto de números primos.

Este teorema fue demostrado por Gauss (matemático, astrónomo y físico alemán nacido en 1777) a los 24 años de edad. El teorema muestra que los números primos son los elementos básicos que constituyen la estructura multiplicativa de los números naturales, ya que todo número natural se expresa como producto de factores primos.

ACTIVIDAD 6: Escribe los números 48, 56 y 420 como producto de factores primos.

Factorización de un número

Factorizar un número consiste en escribirlo como producto de factores primos. La expresión de un número natural como producto de factores primos es su factorización. La factorización estándar presenta los números primos en orden creciente de izquierda a derecha, agrupando como potencias, los factores iguales. Por ejemplo, $420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$.

Métodos para factorizar un número natural

La factorización de un número natural es su expresión multiplicativa más importante, pues permite conocer rápidamente sus divisores y sus múltiplos, sus propiedades multiplicativas y sus relaciones con otros números. Presentamos dos métodos para obtener la factorización de un número:

a) Dado un número, se busca un divisor y se expresa el número dado como un producto de dicho divisor por el cociente. Si los dos factores de ese producto son primos, la factorización ha quedado terminada; si alguno de ellos es compuesto, se repite el proceso buscando un divisor de dicho factor, hasta el punto en que todos los factores sean primos. Por ejemplo para factorizar 2.100, sabiendo que 42 es uno de sus divisores, se puede seguir el proceso que indica el diagrama de la figura 5.9, denominado *árbol de factorización.* La factorización en primos que se obtiene es $2.100 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$.

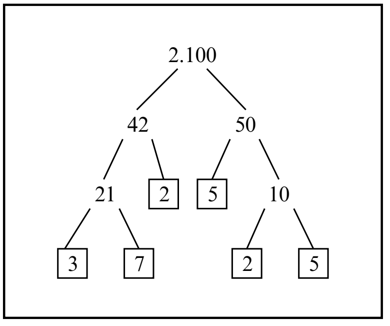


Figura 5.9.—Árbol de la factorización de 2.100.

b) Dado un número, se realizan sucesivas divisiones. Se comienza por el menor factor primo que tenga. El cociente obtenido se vuelve a dividir entre su menor factor primo, y así se continúa hasta llegar a que el cociente sea 1. Con objeto de que los factores queden organizados, este método suele representarse como se muestra en la figura 5.10, para el caso de 2.100.

2.100	2	Se divide entre el menor de los factores (2) todas las veces posibles
1.050	2	
525	3	El menor factor ahora es 3
175	3	
35	5	El menor factor es 5
7	7	El menor factor es 7
1	1	Fin del proceso

Figura 5.10.—Factorización de 2.100 con divisiones sucesivas entre números primos.

En algunos casos no es necesario usar ninguno de estos métodos. Por ejemplo, si se trata de factorizar 100.000, un sentido numérico desarrollado indica que expresando el número en forma de potencia $100.000 = 10^5$ y utilizando la factorización de 10 se llega rápidamente a la solución: $100.000 = 2^5 \times 5^5$.

ACTIVIDAD 7: Realiza la factorización de 1.000, 24^3 y 30.030.

ACTIVIDAD 8: Identifica cuál de estas expresiones no son una factorización: $3^2 \times 10^2$ y $8^2 \times 9^3 \times 5^3$. Transforma en factorizaciones aquellos productos que no lo sean.

5. OBTENCIÓN DE DIVISORES

Presentamos dos problemas y su resolución, la cual requiere del cálculo de los divisores de dos números naturales. A través de la resolución de estos problemas vamos a introducir métodos para la obtención de los divisores de un número, la noción de máximo común divisor y métodos para el cálculo del máximo común divisor.

Problema. Un departamento de 12 profesores debe evaluar 200 solicitudes para una beca. Se pretende hacer comités con igual número de profesores de forma que cada comité evalúe el mismo número de solicitudes. Determinar los comités posibles así como el número de solicitudes que deberá evaluar cada comité.

Resolver el problema requiere conocer los divisores comunes de 12 y 200, ya que el número de comités que se haga ha de coincidir con el número de grupos iguales de solicitudes.

La forma elemental de calcular los divisores de un número es dividirlo entre todos los números naturales inferiores a él y comprobar qué divisiones son exactas. Veamos cómo calcular los divisores de 12. La tabla 5.3 muestra, en gris, las divisiones de 12 donde los restos son cero. Se concluye que los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

TABLA 5.3

Divisiones de 12 entre los números naturales menores o iguales que 12

Divisor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cociente	12	6	4	3	2	2	1	1	1	1	1	1
Resto	0	0	0	0	2	0	5	4	3	2	1	0

Calcular los divisores de 200 por este método resulta muy largo por el elevado número de divisiones a realizar. Por este motivo se recurre a otro método basado en la factorización del número, que es menos engorroso para trabajar con números grandes. El método consiste en hallar todos los divisores de un número a partir de su descomposición factorial, multiplicando todos los factores entre sí, de todas las formas posibles, teniendo en cuenta las potencias a que estén elevados dichos factores.

Para tener seguridad de que están todos los factores y todos los productos posibles de éstos, se organizan, por ejemplo, en una tabla de doble entrada. La tabla 5.4 muestra el proceso descrito y recoge todos los divisores de $200 = 2^3 \times 5^2$.

TABLA 5.4

Divisores de 200

X	1	2	2^2	2^3
1	1	2	4	8
5	5	10	20	40
5^2	25	50	100	200

Cualquier número de esta tabla es divisor de 200, ya que tiene sus mismos factores con exponentes menores o iguales a los de la factorización de 200. Así, por ejemplo, $40 = 2^3 \times 5$, por tanto, es divisor de 200, ya que $200 = 2^3 \times 5^2 = (2^3 \times 5) \times 5 = 40 \times 5$.

Conocidos los divisores de 12 y 200, se aprecia que los divisores comunes son 1, 2 y 4. La respuesta al interrogante formulado en el problema es que son posibles tres tipos de comités que cumplen los requisitos del problema. En un primer caso se formaría un único comité que evaluaría todas las solicitudes. En segundo caso se harían dos comités que evaluarían 100 solicitudes cada uno de ellos, estando compuesto cada comité por seis profesores. En un tercer caso se formarían cuatro comités que evaluarían cada uno 50 solicitudes, estando compuesto cada comité por 3 profesores.

ACTIVIDAD 1: Las tablas 5.5 y 5.6 recogen todos los divisores de $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$ y $3.528 = 2^3 \times 3^2 \times 7^2$, respectivamente. Analiza estas tablas y explica la regla con que han sido construidas.

ACTIVIDAD 2: Calcula los divisores comunes a 504 y 3.528 a partir de los datos de las tablas de la actividad 1.

ACTIVIDAD 3: Halla todos los divisores del número que tiene como descomposición factorial $2^2 \times 5^2 \times 11$.

TABLA 5.5

Divisores de 504

X	1	2	2^2	2^3
1	1	2	4	8
3	3	6	12	24
3^2	9	18	36	72
7	7	14	28	56
	21	42	84	168
	63	126	252	504

TABLA 5.6

Divisores de 3.528

X	1	2	2^2	2^3
1	1	2	4	8
3	3	6	12	24
3^2	9	18	36	72
7	7	14	28	56
	21	42	84	168
	63	126	252	504
7^2	49	98	196	392
	147	294	588	1.183
	441	882	1.764	3.528

5.1. Máximo común divisor de dos números

Problema. Se pretende cubrir el suelo de una habitación de 1.764 cm de largo y 1.400 centímetros de ancho con baldosas cuadradas lo más grandes posible. Hallar la medida que han de tener dichas baldosas para que no sea necesario cortarlas.

La resolución de este problema exige conocer el mayor de todos los divisores comunes de los números 1.764 y 1.400:

> *Todo número tiene un número finito de divisores. Dos números distintos tienen, por tanto, un número finito de divisores comunes. Entre estos divisores comunes hay uno que es el mayor de ellos.*
>
> *Al mayor de los divisores que tienen en común dos números naturales a y b se le denomina* ***máximo común divisor de a y b.*** *Abreviadamente, se escribe MCD(a, b).*

ACTIVIDAD 4: Reflexiona y encuentra cuál sería el mínimo común divisor de dos números naturales.

El mayor de los divisores comunes a dos números *a* y *b* establece una relación importante entre ellos, ya que expresa cuál es el menor número de partes en que se pueden agrupar cantidades con *a* y *b* elementos simultáneamente.

ACTIVIDAD 5: Representa un ejemplo de esta idea para los números 24 y 20 mediante un modelo discreto.

Retomando la resolución del problema planteado, hay que calcular el MCD(1.764, 1.400). Dicho número corresponderá a la medida en centímetros del lado de la baldosa más grande posible. Se podría proceder calculando los divisores de ambos números, identificar los que son comunes y tomar el mayor de ellos. Este método es lento y poco adecuado cuando los números tienen muchos divisores. Presentamos otros dos métodos útiles para casos de números con muchos divisores.

Método basado en la factorización

Si tenemos los dos números factorizados, sabemos que los divisores de cada uno de ellos se pueden determinar a partir de su expresión factorizada, como acabamos de ver. Para el caso del problema planteado, las factorizaciones a utilizar son $1.764 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2$ y $1.400 = 2^3 \times 5^2 \times 7$. Cualquier divisor de 1.764 tiene como factores 2, 3 y 7, con exponentes menores o iguales a los de su factorización: 2, 2 y 2, respectivamente. Cualquier divisor de 1.400 tiene como factores 2, 5 y 7, con exponentes menores o iguales a los de su factorización: 3, 2 y 1, respectivamente.

Un divisor común a 1.764 y 1.400 sólo puede tener como factores primos aquellos que son comunes a los dos números: 2 y 7 en este caso, y cuyos exponentes sean valores menores o iguales a los de dichos factores en las factorizaciones de 1.764 y 1.400: 2 y 1, respectivamente. El mayor (máximo) de los divisores comunes de ambos números será, por tanto, el producto de dichos factores, 2 y 7, elevados a 2 y 1, respectivamente: $2^2 \times 7$. Si se toma, por ejemplo, como exponente de 2 un número menor, como 1, el divisor común dejaría de ser el mayor, y si se toma un exponente mayor que 2, como 3, el número resultante dejaría de ser divisor, en este caso de 1.764.

De ahí la siguiente regla: «el máximo común divisor de dos números es el producto de los factores primos que son comunes a ambas factorizaciones, elevados al menor de los exponentes (es decir, a la menor potencia) con el que aparecen en dichas factorizaciones».

La respuesta al interrogante formulado en el problema es, por tanto, $2^2 \times 7 = 28$. Luego las baldosas cuadradas más grandes posibles necesarias para cubrir el suelo han de medir 28 cm de lado.

ACTIVIDAD 6: Si $a = 2^3 \times 3^4 \times 5$. Escribe la factorización de otro número *b* que cumpla con la condición de que $MCD(a, b) = 2^2 \times 3^3$.

Actividad 7: Encuentra dos números tales que su MCD sea 10^2.

La representación gráfica de la factorización en una cuadricula, como se muestra en la figura 5.11 para los números 1.764 y 1.400, ayuda a aplicar esta regla. Se escribe la factorización del número en una cuadrícula de forma que cada columna corresponda a un número primo, ordenados de forma creciente de izquierda a derecha. La cuadrícula se va rellenando de abajo a arriba, repitiendo cada número primo tantas veces como aparece en la factorización. Al superponer ambas cuadrículas se perciben los factores que producen los divisores comunes. El producto de los factores primos de los cuadrados que aparecen doblemente sombreados (la intersección de ambas factorizaciones) es el máximo común divisor de dichos números.

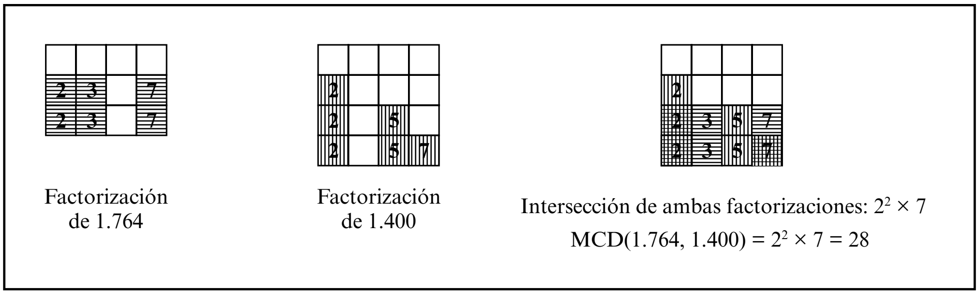


Figura 5.11.—Cálculo del máximo común divisor de 1.764 y 1.400.

Método del algoritmo de Euclides o de las divisiones sucesivas

Euclides fue un importante matemático griego, especialmente conocido por ser autor de la obra *Los elementos,* que recoge gran parte del conocimiento matemático de la cultura griega. En dicha obra aparece un método para calcular el máximo común divisor conocido como Algoritmo de Euclides. Este método se basa en la siguiente propiedad.

En una división entera donde $a = b \times c + r$ (siendo a dividendo, b divisor, c cociente y r resto), el $MCD(a, b) = MCD(c, r)$.

Usar esta propiedad es conveniente cuando la magnitud de los dos números hace tedioso el uso de los métodos anteriores. La aplicación reiterada de esta propiedad da lugar a un método donde el cálculo de los divisores comunes a dos números se sustituye, reiteradamente, por el cálculo de los divisores comunes al menor de ellos y al resto de la división del primero entre el segundo.

Las sucesivas divisiones se recogen ordenadamente en unas cajas. En la tabla 5.7 se muestra un ejemplo con los números 1.764 y 1.400. Tras dividir 1.764 entre 1.400, tenemos que los divisores comunes a 1.764 y 1.400 (dividendo y divisor) son los mismos que los divisores comunes a 1.400 y 364 (divisor y resto). De nuevo, se dividen los dos números, en este caso 1.400 entre 364; el resto ahora es 308. Los divisores comunes a 1.400 y 364 son también los divisores comunes a 364 y 308. Se continúa dividiendo el divisor de esta segunda división entre su resto, y así hasta llegar a una división exacta, con resto 0. El máximo común divisor de los dos números dados coincide con el último divisor obtenido (28).

TABLA 5.7

Algoritmo de Euclides aplicado a los números 1.764 y 1.400

	1 (cociente)	3	1	5	2	**Cocientes**
1.764 (dividendo)	1.400 (divisor)	364	308	56	28	**Divisor**
364 (resto)	308	56	28	0		**Restos**

ACTIVIDAD 8: Calcula el *MCD*(252, 420) utilizando el algoritmo de Euclides.

ACTIVIDAD 9: Calcula el máximo común divisor de $2^3 \times 3 \times 5^4 \times 11$ y $2 \times 3 \times 7^2 \times 11$ con ayuda de su representación gráfica con cuadrícula.

ACTIVIDAD 10: Utiliza la definición de máximo común divisor para calcular el *MCD*(39, 68).

ACTIVIDAD 11: Calcula el máximo común divisor de 6 y 24, de 6 y 60 y de 6 y 420. Indica la peculiaridad del máximo común divisor de estas parejas de números.

ACTIVIDAD 12: Investiga la relación entre el *MCD*(15, 9) y el *MCD*(5 × 15, 5 × 9). A partir de lo investigado, enuncia una conjetura sobre la relación entre el máximo común divisor de dos números y el máximo común divisor de esos dos números multiplicados por otro número natural.

Números primos entre sí

Cuando el máximo común divisor de dos números a y b es 1, se dice que los números son primos entre sí. En este caso los dos números no tienen otro divisor común distinto de la unidad; no comparten factores primos.

ACTIVIDAD 13: Comprueba cuáles de las siguientes parejas de números están formadas por números primos entre sí: 3 y 33; 24 y 25; 64 y 81, y 2^{10} y 10^2.

6. OBTENCIÓN DE MÚLTIPLOS

El cálculo de los múltiplos de un número natural es un proceso sencillo, basta multiplicar el número dado por cualquier otro número natural. Cuando se multiplica un número por la secuencia de los números naturales se obtienen todos los múltiplos del número. Así, los múltiplos de 3 son 3×0, 3×1, 3×2, 3×3, 3×4, 3×5, ..., $3 \times n$ ..., o bien 0, 3, 6, 9, 12, 15, ..., $3n$...

Si un número está factorizado, por ejemplo, $2^2 \times 3^2$, sus múltiplos son 0, $2^2 \times 3^2$, $2 \times 2^2 \times 3^2$, $3 \times 2^2 \times 3^2$, $4 \times 2^2 \times 3^2$, $5 \times 2^2 \times 3^2$, ..., $n \times 2^2 \times 3^2$...

La factorización de un número m que es múltiplo de otro número a incluye a todos los factores primos de a elevados a exponentes mayores o iguales que los de a.

ACTIVIDAD 1: Identifica cuáles de los siguientes números son múltiplos de $8 = 2^3$:

$$3^2;\ 2^2 \times 3;\ 2^3 \times 3;\ 2^2 \times 3^3;\ 2^3 \times 3^3.$$

De forma análoga al caso de los divisores, a través de la resolución de dos problemas vamos a introducir la noción de mínimo común múltiplo y métodos para el cálculo del mismo.

Problema. Jaime y Natalia recorren en bicicleta un circuito cerrado. Jaime tarda en recorrer el circuito 15 minutos y Natalia 12 minutos.

Han estado recorriendo el circuito durante tres horas. Calcula en qué momentos se han encontrado de nuevo en el punto de salida a lo largo de estas tres horas.

Resolver este problema requiere conocer los múltiplos comunes a los tiempos que tardan Jaime y Natalia en recorrer todo el circuito, comprendidos en las tres horas, es decir, en 180 minutos.

Para determinar los múltiplos comunes a 15 y 12 se escriben ordenadamente los múltiplos de cada uno de ellos y se identifican los que son comunes (tabla 5.8). Los números 60 y 120 constituyen los primeros múltiplos comunes. Si se continúan escribiendo múltiplos en cada una de las filas, aparecerán los siguientes múltiplos comunes: 180, 240... Los múltiplos comunes 60, 120 y 180 constituyen la respuesta al problema; por tanto, sabemos que Jaime y Natalia se encontrarán cada hora.

TABLA 5.8

Múltiplos comunes de 15 y 12

N.º	Múltiplos										
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

6.1. Mínimo común múltiplo de dos números

Problema. Un faro se enciende cada 21 minutos y otro cada 5 minutos y 50 segundos. Averigua el tiempo mínimo necesario para que coincidan encendidos.

La solución del problema es el menor de los múltiplos comunes a los números 1.260 (que corresponde a 21 minutos en segundos) y 350 (que es el número de segundos al que equivalen 5 minutos y 50 segundos).

> *Al menor de los múltiplos que tienen en común dos números naturales a y b se le denomina* ***mínimo común múltiplo de a y b.*** *Abreviadamente, se escribe MCM(a, b).*

Para resolver este problema se calcula el $MCM(1.260, 350)$. Dicho número corresponderá al tiempo (en segundos) mínimo que ha de pasar para que coincidan encendidos ambos faros. Como en el problema anterior, se puede proceder obteniendo los múltiplos de ambos números, identificando todos los que son comunes y tomando el menor de ellos. Pero cuando los números son grandes, dicho proceso puede ser largo y tedioso, al incluir muchos cálculos. Por ello se utilizan otros métodos.

ACTIVIDAD 2: Reflexiona cuál sería el máximo común múltiplo de dos números naturales.

Método basado en la factorización

Partimos de los números descompuestos en producto de factores primos: $1.260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ y $350 = 2 \times 5^2 \times 7$. Cualquier múltiplo de 1.260 debe incluir los factores 2, 3, 5 y 7 elevados a exponentes mayores o iguales que los que tiene en 1.260, y cualquier múltiplo de 350 debe incluir los factores 2, 5 y 7 elevados a exponentes mayores o iguales que los que tiene en 350. Por tanto, cualquier múltiplo común a 1.260 y 350 debe incluir tanto los factores primos del primer número como los del segundo, que son 2, 3, 5 y 7, y dichos factores tienen que estar elevados a exponentes mayores o iguales que los que tienen en dichas factorizaciones. Así:

- El exponente del factor 2 debe ser mayor o igual que 2 y que 1.
- El exponente del factor 3 debe ser mayor o igual que 2 y que 0.

- El exponente del factor 5 debe ser mayor o igual que 1 y que 2.
- El exponente del factor 7 debe ser mayor o igual que 1 y que 1.

Luego el menor múltiplo común de 1.260 y 350 es $2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$.

De aquí el siguiente criterio: «el mínimo común múltiplo de dos números es el producto de todos los factores primos, comunes o no comunes, de sus factorizaciones, elevado cada uno de ellos al mayor de los exponentes con que aparecen en las factorizaciones».

Cualquier otro múltiplo común de 1.260 y 350 tendrá esos mismos factores elevados a exponentes mayores o iguales.

La respuesta al interrogante formulado en el problema es, por tanto, $2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 6.300$. Luego al cabo de 6.300 segundos, es decir, de 1 hora y 45 minutos, vuelven a coincidir encendidos ambos faros.

Igual que en el caso del máximo común divisor, la aplicación de este método puede facilitarse con la ayuda de una representación gráfica de la factorización de ambos números. Una vez superpuestas dichas representaciones, se multiplican todos los factores que aparecen en la cuadrícula (figura 5.12).

Método basado en el máximo común divisor

Si se conoce el máximo común divisor de dos números, puede calcularse el mínimo común múltiplo sabiendo que el producto de ambos es igual al producto de los dos números. Por ejemplo, para el caso de los números 1.764 y 1.400, conociendo que el máximo común divisor es 28, se tiene $MCM(1.764, 1.400) = 1.764 \times 1.400/28 = 3.528$.

ACTIVIDAD 3: Calcula el mínimo común múltiplo de 252 y 420 a partir de su máximo común divisor, que has debido calcular en una actividad anterior.

ACTIVIDAD 4: Calcula el mínimo común múltiplo de $2^3 \times 3 \times 5^4 \times 11$ y $2 \times 3 \times 7^2 \times 11$ con ayuda de su representación gráfica en cuadrícula.

ACTIVIDAD 5: Utiliza la definición de mínimo común múltiplo para calcular el $MCM(39, 68)$.

ACTIVIDAD 6: Calcula el mínimo común múltiplo de 6 y 24, de 6 y 60 y de 6 y 420. Indica la peculiaridad del mínimo común múltiplo de estas parejas de números

ACTIVIDAD 7: Investiga la relación que existe entre el $MCM(15, 9)$ y el $MCM(5 \times 15, 5 \times 9)$. A partir de lo investigado, enuncia una conjetura sobre la relación entre el mínimo común múltiplo de dos números y el mínimo común múltiplo de esos dos números multiplicados por otro número natural.

Puedes ampliar información sobre la divisibilidad en Sierra, González, García y González (1989).

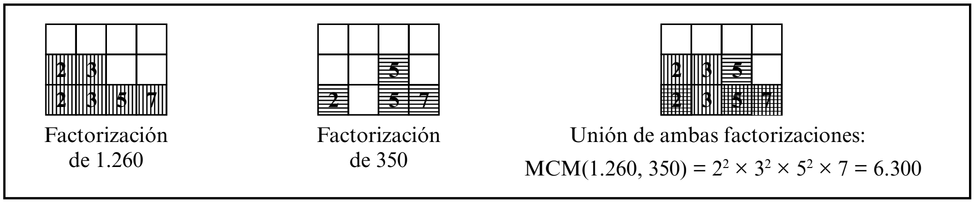


Figura 5.12.—Cálculo del mínimo común múltiplo de 1.260 y 350.

ACTIVIDADES PARA PRACTICAR

1. Un niño tiene 48 bloques cúbicos. ¿Cuántas figuras rectangulares diferentes puede hacer utilizando siempre todos los bloques?

2. Mediante un conteo saltando una cantidad fija, se ha llegado al 100. Escribe los posibles valores de dicha cantidad. ¿Cómo sabes que los tienes todos?

3. Calcula el menor número natural que es divisible por los diez primeros números naturales.

4. El número 12 tiene seis divisores, cuatro de ellos pares (2, 4, 6 y 12) y dos impares (1 y 3). Halla algunos números cuyos divisores sean todos, salvo el 1, pares y describe los números que tienen esta propiedad. Repite la actividad en el caso de que tengan exactamente la mitad de sus divisores pares.

5. Analiza en qué se diferencian las representaciones mediante el modelo de área de los números primos y de los números compuestos.

6. Muestra, utilizando el modelo de área, que la suma de dos números pares siempre es un número par. Investiga qué ocurre en el caso de la suma de dos números impares o de un número par y un número impar, y muestra tu conclusión con el modelo de área.

7. Busca parejas de números que tengan 24 como máximo común divisor. Busca otras parejas que tengan 72 como máximo común divisor. Explica de forma general el método que utilizas para resolver esta actividad.

8. Los criterios de divisibilidad son propiedades que sirven para conocer cuándo un número es divisible por otro, sin necesidad de realizar la división. La tabla siguiente recoge los criterios de divisibilidad de los números 2, 5 y 10. Utiliza el desarrollo polinómico para razonar por qué estos criterios sólo dependen de la cifra de las unidades:

Número	Criterio de divisibilidad
Por 2	Un número es divisible por 2 si, y sólo si, su cifra de las unidades es 0 o par.
Por 5	Un número es divisible por 5 si, y sólo si, su cifra de las unidades es 0 o 5.
Por 10	Un número es divisible por 10 si, y sólo si, su cifra de las unidades es un 0.

9. Analiza la información que se muestra en la siguiente tabla para obtener una regla que permita conocer si un número es divisible por 3.

Número	Divisible por 3	Descomposición	Suma de sus cifras
12	Sí	$1 \times (9 + 1) + 2$	$1 + 2 = 3$
115	No	$1 \times (99 + 1) + 1 \times (9 + 1) + 5$	$1 + 1 + 5 = 7$
135	Sí	$1 \times (99 + 1) + 3 \times (9 + 1) + 5$	$1 + 3 + 5 = 9$
1.520	No	$1 \times (999 + 1) + 5 \times (99 + 1) + 2 \times (9 + 1)$	$1 + 5 + 2 = 8$
2.106	Sí	$2 \times (999 + 1) + 1 \times (99 + 1) + 6$	$2 + 1 + 6 = 9$

10. Cuatro estudiantes están haciendo la factorización de un mismo número. Teniendo en cuenta que aún no han acabado, responde a las siguientes cuestiones sin hacer ningún cálculo:

Ana: 38 × 74 × 4.797.134.197.203.
Benjamín: 37 × 74 × un número impar.
Carlos: 212 × 79 × 36 × un número par.
Lucía: 3 × 3 × 3 × 49 × un número par.

a) ¿Quiénes de ellos puede que estén de acuerdo cuando acaben?
b) ¿Quiénes de ellos seguro que no están de acuerdo al acabar?
c) ¿Pueden ser correctas las cuatro respuestas si concluyen la factorización?

11. Un tren de juguete tiene 100 vagones de colores que responden al siguiente patrón: rojo, naranja, blanco, verde, azul y marrón. Justifica de qué color es el vagón que ocupa el lugar 60 y cuál es el último vagón de color azul.

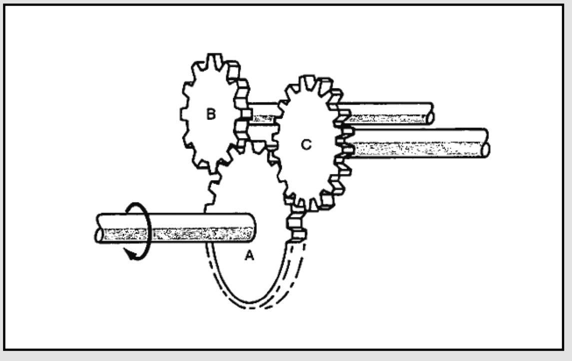
12. La Tierra tarda un año en dar la vuelta alrededor del Sol. Si Saturno tarda 30 años en dar la vuelta al Sol, Júpiter 12 años y Marte 2 años, ¿cada cuánto tiempo se alinean estos cuatro planetas?

13. Una empresa envasa zumos en paquetes individuales de 10 × 6 × 4 centímetros, han pedido que se diseñe un cajón de embalaje que no contenga más de 1.000 envases y en el que no quede sin rellenar ningún espacio. Averigua las dimensiones del cajón y el número de paquetes de zumo que contiene.

14. Elena gestiona el departamento de embalaje y envío de una compañía que hace cubos de 1 centímetro de lado para los colegios: *a*) un tipo de caja contiene 24 cubos. ¿Qué dimensiones tendrá esa caja?; *b*) otro tipo de caja contiene 45 cubos. ¿Puede tener esta caja la misma altura que la caja del apartado *a*)?, ¿y la misma altura y el mismo ancho?, y *c*) ¿es posible hacer cajas con el mismo ancho y el mismo largo que contengan 210, 315 y 525 cubos? Explica cómo la factorización en primos de estos números puede ayudarte a responder a esta cuestión.

15. Durante la clase de matemáticas, el profesor preguntó cuántos rectángulos diferentes se pueden hacer que tengan 26 cm^2 de área. Un alumno respondió rápidamente que si los números debían ser naturales, entonces sólo había 4 posibilidades: *a*) ¿cuáles son esas cuatro posibilidades?; *b*) ¿cómo crees que pudo averiguar el alumno la respuesta tan rápidamente?, y *c*) ¿cuántos rectángulos pueden hacerse con áreas de 10, 77 y 50 cm^2, respectivamente? Explica si es posible averiguarlo de forma rápida.

16. Tres engranajes están dispuestos como se muestra en la imagen. ¿Cuántos dientes debe tener el engranaje A si por cada vuelta completa debe producir un número de vueltas completas de los engranajes B y C? (no hay espacio para más de 50 dientes en el engranaje A):



17. Pablo y Miguel, dos antiguos compañeros de clase, se encuentran años después. Averigua la edad de las hijas de Pablo a partir de la conversación que mantienen:

P.: ¿Cuántos años tienen ya tus tres hijas?

M.: ¡Seguro que lo aciertas! El producto del número de años que tienen es 36 y su suma es igual al número de tu casa.

P.: Me falta un dato

M.: ¡Ah!, es verdad. La mayor toca el piano.

INVESTIGA Y REFLEXIONA

Las siguientes actividades te permitirán profundizar en las nociones y los procedimientos sobre divisibilidad que hemos presentado en este tema.

1. Revisa un libro de texto de 6.º curso de matemáticas de Educación Primaria y haz un informe de los conceptos que intervienen y los tipos de situaciones que se proponen en las actividades que aparecen en el tema o temas que aborden la divisibilidad.

2. Busca en Internet tres juegos matemáticos que estén basados en relaciones de divisibilidad. Para cada juego, describe en qué consiste, enumera los conceptos trabajados en este tema que intervienen y estudia si existe una estrategia ganadora.

3. El estudio de los números primos ha dado lugar a muchos resultados que se creen ciertos, pero que aún no se han podido demostrar. Estos resultados se denominan conjeturas. Busca información sobre conjeturas relativas a los números primos (por ejemplo, la conjetura de Bertrand) y para cada una de ellas pon ejemplos de números para los que sean ciertas.

4. Analiza las relaciones que existen entre los siguientes términos y elabora un mapa conceptual en el que representes dichas relaciones. Listado de términos: número primo, número compuesto, divisor, factor, múltiplo, factorización, máximo común divisor, mínimo común múltiplo, criterios de divisibilidad, división, resto, multiplicación, producto, criba de Eratóstenes, algoritmo de Euclides.

BIBLIOGRAFÍA

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). *El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático.* UNO, 54, 55-67.

Krause, E. F. (1991). *Mathematics for Elementary Teachers. A balanced approach.* Lexington, Massachussets, D.C.: Heath and Company.

Prada Vicente, M. D. y Rodríguez Rodríguez, R. (1982). *Cómo enseñar la divisibilidad.* Madrid: Anaya.

Sierra, M., González, M. T., García, A. y González, M. (1989). *Divisibilidad. Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje.* Madrid: Editorial Síntesis.

Sowder, J., Sowder, L. y Nicherson, S. (2010). *Reconceptualizig mathematics for Elementary School Teachers.* New York: W. H. Freeman and Company.

Steward, I. (2008). *Historia de las matemáticas. En los últimos 10.000 años* (2.ª ed.). Barcelona: Editorial Crítica.

6

Cálculo y estimación

ISIDORO SEGOVIA ALEX
JOSÉ LUIS LUPIÁÑEZ GÓMEZ

Figura 6.1.—¿Cuántas personas asistieron?

El cálculo es una actividad humana básica. Las actividades a las que nos enfrentamos diariamente en situaciones profesionales o personales implican la realización de cálculos aritméticos. Las situaciones educativas no son ajenas a este hecho, por ello dedicamos este capítulo al cálculo. Calcular es determinar un número desconocido partiendo de otros números que son conocidos, e implica el conocimiento y el uso de determinados algoritmos y propiedades.

Es posible calcular usando los algoritmos usuales de suma, resta, multiplicación y división, tal y como se ha mostrado en capítulos precedentes. En esta ocasión introducimos otras formas de cálculo.

La experiencia escolar y especialmente la práctica cotidiana ponen de manifiesto que los algoritmos tradicionales de lápiz y papel han dando paso a otras formas de cálculo. Es habitual que en los medios de comunicación nos enfrentemos a la interpretación de gran cantidad de números que debemos relacionar, como interpretar reclamos publicitarios y tomar decisiones. Por otro lado, en situaciones habituales de compra y venta debemos realizar aproximaciones y cálculos mentales para llevar a cabo actuaciones posteriores. Estos importantes usos del cálculo no deben ser ignorados en la enseñanza de las matemáticas. La opción entre las conocidas cuentas y otras formas de cálculo debe estar suficientemente clara para el profesorado de Educación Primaria: unas y otras formas de cálculo tienen un papel en la vida diaria y todas se deben contemplar en el currículo escolar.

1. EL CÁLCULO Y EL CURRÍCULO ESCOLAR

El cálculo, en cualquiera de sus formas, constituye una formación básica de los escolares. En primer lugar, está vinculado con todos los temas y conceptos de la educación matemática básica: números naturales, enteros, racionales, decimales, funciones, probabilidad, estadística, medida y álgebra. Además, constituye una opción para activar procesos mentales relevantes, ya que ejercita la memoria, la capacidad de deducción, el descubrimiento, el análisis y la síntesis. Finalmente, es, sin duda, una de las partes de la matemática más útiles y necesarias.

Es fundamental que el futuro docente conozca las distintas formas de cálculo, adquiera destreza en su manejo, valore la importancia de cada una de ellas, incluyendo los algoritmos usuales, establezca las relaciones que se dan entre las mismas e identifique las situaciones y momentos en donde cada forma de calcular es más pertinente.

En los temas previos hemos puesto las bases teóricas (sistemas de numeración y conceptos, fundamentos y propiedades de las operaciones) para la justificación de los algoritmos de cálculo de lápiz y papel. También hemos manejado recursos como los ábacos, que ayudan a aprender, comprender y justificar dichos algoritmos. En este tema mostramos la calculadora básica como herramienta de cálculo ineludible, los procedimientos de cálculo mental que requieren de técnicas específicas y el cálculo estimativo, que constituye una forma de calcular muy útil en muchas situaciones de la vida cotidiana y en la resolución de problemas, incluyendo los del contexto escolar.

El manejo de los procedimientos de cálculo que se muestran en este tema tiene un uso en temas posteriores, especialmente los referidos a divisibilidad, números enteros, números racionales, medida, estadística y probabilidad. La calculadora puede ahorrar cálculos de lápiz y papel; el cálculo mental y la estimación permiten prever o evaluar la solución de los problemas que se presentan en cualquiera de esos temas.

Las normativas curriculares de Matemáticas para la Educación Primaria enfatizan que los escolares, a lo largo de esta etapa educativa, deben calcular con fluidez y hacer estimaciones razonables usando los procedimientos adecuados a cada caso. El manejo de la calculadora, el cálculo mental y la estimación forman parte de las destrezas que debe adquirir el estudiante de Educación Primaria desde el Primer Ciclo, además de los algoritmos usuales de lápiz y papel. En todos los casos se hace alusión a que debe existir un equilibrio entre la comprensión conceptual de las operaciones y la capacidad de cálculo. El cálculo mental y la estimación también son componentes centrales del razonamiento cuantitativo y del sentido numérico.

Tanto el cálculo mental como la estimación son formas de realizar cálculos que, necesariamente, deben concluir en una expresión escrita. Por tanto, el estudiante debe ser consciente de la necesidad, primero, de calcular mentalmente y, después, describir el proceso utilizado y el resultado; de otra manera, no desarrollará las competencias numéricas que hemos destacado.

Actividad 1: Describe situaciones cotidianas en las que sea necesario realizar algún tipo de cálculo. Señala en cada caso, al menos, dos modos diferentes para llevar a cabo esos cálculos.

Actividad 2: Complementa algún aspecto de la información curricular sobre cálculo revisando las normativas curriculares estatales o autonómicas.

Actividad 3: Elige tres textos de matemáticas de Educación Primaria en vigor, uno de cada ciclo, y haz un resumen de los contenidos y actividades que están relacionados con el cálculo.

Puedes ampliar información en Jiménez y Girondo (1993).

2. NECESIDAD DE CALCULAR

Los primeros vestigios conocidos de cómputos numéricos están asociados a llevar la cuenta de la cantidad de ganado, contar los miembros de una tribu o los soldados de un ejército; llevar esas cuentas pronto requirió de algún artificio de cálculo. A lo largo de la historia los procedimientos de cálculo han ido evolucionando y adaptándose a las circunstancias y posibilidades del momento, con el fin siempre de desarrollar métodos lo más cómodos, simples, seguros y breves posibles. Al principio, los dedos de las manos, y luego, las piedras, *calculus* en latín, constituyen las primeras formas de cálculo. Después, las piedras se ubicaron en ábacos que permitían una mejor forma de movimiento y agrupación, al mismo tiempo que posibilitaban anotar datos, resultados intermedios y finales (figura 6.2).

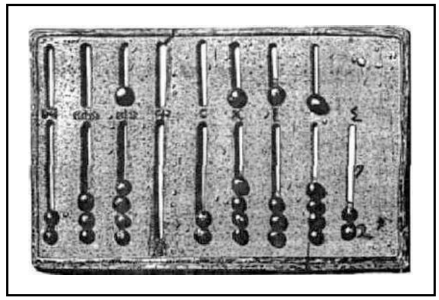


Figura 6.2.—Ábaco romano.

A partir de la introducción del Sistema de Numeración Decimal se comienzan a desarrollar algoritmos variados que evolucionan hasta llegar a los actuales de lápiz y papel. La pugna entre un *abacista* y un *algorista* se muestra en el grabado «La Perla Filosófica», de Gregor Reisch, de 1503. La imagen muestra la cara sonriente del algorista tratando de poner de manifiesto las ventajas de un modo de cálculo sobre el otro.

Figura 6.3.—«La Perla Filosófica», de Gregor Reisch (1503).

Un cambio fundamental en el desarrollo del cálculo lo constituye su mecanización. En el siglo XVII se construyen las primeras máquinas de cálculo; estaban basadas en el uso de engranajes formados por ruedas dentadas donde cada diente representaba un dígito (figura 6.4). Estos aparatos tuvieron un enorme desarrollo en el siglo XX, donde las máquinas registradoras se hacen imprescindibles en los grandes comercios.

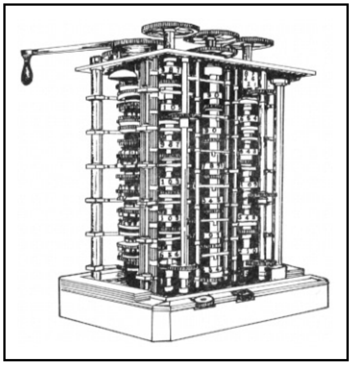


Figura 6.4.—Máquina de calcular de Babbage.

La evolución de las máquinas de calcular aboca en las actuales computadoras y calculadoras. Las calculadoras incorporan una pantalla que muestra representaciones gráficas en dos o tres dimensiones e incluyen procesadores que permiten operaciones con cálculo simbólico (figura 6.5).

Figura 6.5.—Calculadora gráfica de Texas Instruments.

En el momento presente, donde las cantidades asociadas a las distintas actividades humanas van desde las muy pequeñas, que requieren del empleo de los decimales, hasta las muy grandes, que requieren del empleo de la notación científica (por ejemplo, 4×10^{-13} o 5×10^{16}), el cálculo es una actividad prioritaria.

Las situaciones y contextos en los que se usan los números como cantidades constituyen la fenomenología asociada al cálculo. Son muchas las categorías que pueden organizar los fenómenos asociados al cálculo. Una de ellas atiende a los distintos tipos de cantidades y magnitudes, en cuyo caso es posible distinguir dos tipos de fenómenos. Por una parte, aquellos asociados a magnitudes discretas, como, por ejemplo, poblaciones de personas, artículos producidos en una fábrica, etc., y, por otra, aquellos asociados a magnitudes continuas, tales como situaciones asociadas al tiempo y a la longitud.

Uno de los contextos mas frecuentes para el cálculo lo constituye el sistema monetario. Cuando se habla de contabilidad, es habitual referirse al dinero que gestiona una empresa; en general, el cálculo mental y la estimación son frecuentes en situaciones de compra y venta, para calcular valores, cambios, costes y otros.

Los tres tipos de cálculo a los que hace referencia este tema permiten clasificar las situaciones en donde éstos se emplean dependiendo de si el uso de la calculadora, el cálculo mental o la estimación resultan o no adecuados.

ACTIVIDAD 1: Localiza documentación sobre alguna máquina de calcular y amplía la información relativa a la evolución de las herramientas de cálculo mecánico.

ACTIVIDAD 2: Realiza un listado de situaciones relacionadas con las distintas categorías de fenómenos asociados al cálculo que se proponen: calculadora, cálculo mental y estimación.

ACTIVIDAD 3: Revisa la propuesta de organizar los fenómenos asociados al cálculo. Discute otros criterios que permitan organizar esos fenómenos: tamaño de los números, tipo y número de operaciones implicadas, ámbito laboral o profesional donde se emplean...

3. LAS CALCULADORAS

La calculadora forma parte de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los niveles de Educación Primaria. La responsabilidad del docente consiste en planificar cuándo y cómo usarla. La calculadora es un contenido a enseñar y una herramienta a manejar en determinadas situaciones de cálculo. Cuando el objetivo sea reforzar el manejo de los algoritmos usuales de lápiz y papel, los escolares deben prescindir de ella. En otras situaciones el uso de la calculadora es pertinente, como, por ejemplo, en la comprobación del resultado de una operación realizada mediante los algoritmos usuales, mediante cálculo mental o mediante estimación. En la resolución de problemas, la calculadora permite, asimismo, ahorrar tiempo en los cálculos y facilita que los escolares focalicen su atención en el estudio del problema y en la interpretación de los resultados. Por último, la calculadora constituye una herramienta didáctica para llevar a cabo actividades que implican el manejo de los números y las operaciones.

Son muchos los tipos de calculadora que hay en el mercado, que pueden resumirse en los siguientes: básica o de cuatro reglas, educativa o didáctica, científica, programable y gráfica. Centramos nuestra atención en las dos primeras.

3.1. La calculadora básica

La figura 6.6 muestra una calculadora usual para la Educación Primaria que incluye las cuatro operaciones básicas, la raíz cuadrada, el porcentaje y permite trabajar con decimales. Tiene una memoria acumulativa: M+ (añade a la memoria), M− (resta de la memoria) y MRC (informa del contenido de la memoria o lo borra). Hay características de la calculadora que dependen de la marca y modelo, entre ellas el número de dígitos que caben en la pantalla, dígitos ocultos y redondeo o truncamiento en los resultados, si bien las funciones anteriores suelen ser comunes a todas ellas. El docente debe explorar estas características y ayudar a que los escolares las descubran con el fin de evitar su desconocimiento, los errores o las contradicciones, y sacar el máximo provecho al recurso desde el punto de vista del aprendizaje escolar.

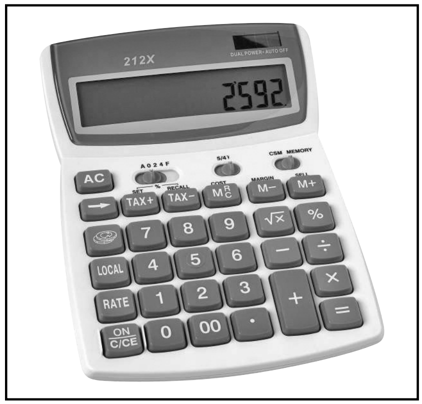


Figura 6.6.—Imagen de calculadora básica.

Explorar algunas de estas características se convierte en ocasiones en una actividad matemática interesante. Algunas cuestiones que se pueden explorar son las siguientes:

- *Número máximo de dígitos en la pantalla*. Se determina tratando de escribir el número con mayor cantidad de dígitos posible, por ejemplo, 99999999. En este caso, sería ocho.

- *Número de dígitos que no se muestran en pantalla*. Se pueden ver dividiendo 1 : 3 y mostrará 0,3333333; multiplicando por 100 se obtiene 33,33333; restando 33 se ve qué ocurre; si el resultado es 0,33333, significaría que la calculadora no trabaja con dígitos ocultos; en caso contrario, sí.
- *¿Redondea o trunca?* Haciendo 4 : 6, puede mostrar 0,6666666 (en este caso trunca lo que no aparece en pantalla) o puede mostrar 0,6666667 (en este caso redondea lo que no aparece en pantalla).
- *¿Qué ocurre cuando un resultado no cabe en la pantalla*? Haciendo 999999999 × 10, suponiendo que sólo caben ocho dígitos, puede aparecer la letra E (error por desbordamiento); la letra E también muestra error por operación incorrecta, como la raíz cuadrada de un número negativo.
- *Jerarquía en las operaciones*. En una secuencia operatoria, las calculadoras básicas realizan, normalmente, las operaciones tal como se van introduciendo. Por ejemplo, si 3 + 4 × 5 da como resultado 35, significa que responde a la secuencia (3 + 4) × 5 y no respeta, por tanto, la prioridad de la multiplicación. No obstante, algunos modelos sí respetan esa jerarquía.
- *Manejo del operador constante*. Una operación interesante en cualquier calculadora es aquella que permite trabajar con una operación y un dato de forma constante. Por ejemplo, cuando se realiza la operación 2 + 3 = 5 la calculadora puede memorizar 2 + y esperar un nuevo dato para hacer la suma; algunas calculadoras lo hacen al revés, es decir, memorizan + 3 y esperan el primer sumando. La misma calculadora puede hacerlo de una u otra forma, según la operación.
- *Cálculo de porcentajes*. La tecla % permite calcular el tanto por ciento de una cantidad, obtener la cantidad reducida o ampliada por el porcentaje y obtener la cantidad de la que conocemos un porcentaje. Por ejemplo 350 × 10% nos determina el 10 por ciento de 350; 350 + 10% determina el 10 por ciento de 350 y se lo suma; en el caso de 350 − 10%, le resta a 350 su 10 por ciento. 350 : 10% nos determina la cantidad de la que 350 es el 10 por ciento.
- *Trabajo con números enteros negativos*. También las calculadoras básicas pueden trabajar con enteros negativos; la tecla +/− permite cambiar un positivo por un negativo, y viceversa. En algunas calculadoras básicas esta tecla no existe; sin embargo, la memoria M − permite transformar un positivo en negativo y operar con él. Por ejemplo, para hacer −5 × 6, podemos escribir la secuencia 5M − 6 × MRC.

ACTIVIDAD 1: Explora tu calculadora realizando las operaciones anteriores.

ACTIVIDAD 2: Determina con tu calculadora el cociente y el resto de la división 26.749 : 276.

ACTIVIDAD 3: Empleando tu calculadora, halla el resultado de la secuencia operatoria siguiente: 234 + 456 × 7 – 29. Cuida la prioridad establecida para las operaciones.

ACTIVIDAD 4: Con la tecla %, calcula el 15% de 2.550.

ACTIVIDAD 5: Averigua de qué cantidad 234 constituye el 25%.

ACTIVIDAD 6: Realiza la operación siguiente –5 × × 7 + (–75). ¿Cómo introduces los datos?

ACTIVIDAD 7: Investiga cómo puedes obtener secuencialmente los números pares o los impares usando la calculadora.

3.2. La calculadora didáctica

En el mercado existe una amplia gama de calculadoras denominadas educativas o didácticas que se diferencian del resto por las posibilidades que añaden y tienen una finalidad puramente escolar. Vamos a hacer referencia a algunas de esas posibilidades.

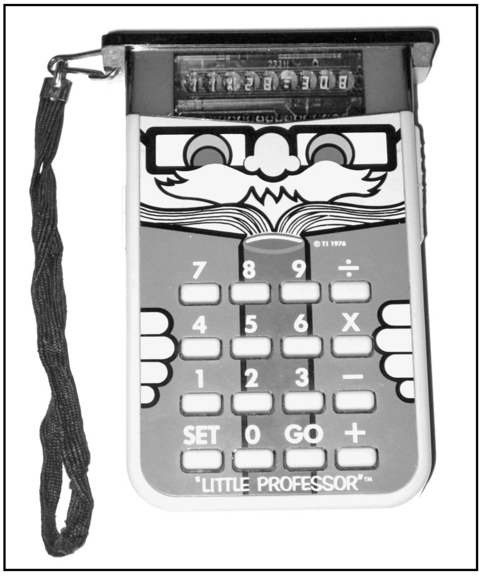


Figura 6.7.—Calculadora didáctica de Texas Instruments.

Un grupo importante de posibilidades está referido a la realización de operaciones que otras calculadoras no contemplan. Entre ellas, destacamos las siguientes:

- *División entera*. Permite obtener el cociente y el resto de la división entre dos números.
- *Trabajo con fracciones*. Permite trabajar con expresiones fraccionarias; incluye una opción que hace posible expresar fracciones y realizar operaciones con ellas sin recurrir a su expresión decimal.
- *Paso de fracción a decimal, y viceversa*. Permite explorar qué tipo de decimales pueden expresarse como fracción en función de la cantidad de cifras de la pantalla. También contempla calcular la expresión decimal de una fracción.
- *Simplificación de fracciones y obtención de fracciones equivalentes*. Identifica el factor de simplificación y permite obtener fracciones equivalentes a una dada indicando el factor de conversión.

Otro grupo importante de funciones está referido a permitir proponer actividades al estudiante y evaluar su resultado. Algunas de ellas tienen que ver con determinar un dato desconocido para que una igualdad sea cierta. Por ejemplo, el dato desconocido puede ser un número (2 + ? = 7) o incluso una operación (2 ? 5 = 7). En algunos casos, la calculadora puede proponer un banco de actividades de un tipo determinado y adjudica una puntuación al escolar de acuerdo con los aciertos que obtenga.

Actividad 8: Compara los resultados de dividir 350 entre 65 mediante la tecla de división usual y la tecla de división entera.

Actividad 9: Con la calculadora didáctica, determina fracciones equivalentes a la fracción 2/5.

Actividad 10: Comprueba con la calculadora didáctica si la fracción 31/45 es equivalente a 93/135.

Actividad 11: Propón 5 actividades distintas con la calculadora didáctica en la que un escolar tenga que determinar datos en operaciones aritméticas, resultados y operaciones.

Puedes ampliar información sobre calculadoras en: Fielker (1986) y Udina (1989).

4. CÁLCULO MENTAL

El cálculo mental (también llamado «de cabeza») se usa en muchas situaciones de la vida cotidiana, bien de forma exacta o bien aproximada. En todas las situaciones se puede emplear el cálculo mental, si bien éste está restringido al empleo de números adecuados, generalmente pequeños o fáciles de manejar, o a través de la estimación en el caso de números grandes.

La escuela no pretende que los escolares emulen a los calculistas que realizan grandes cálculos y compiten con una calculadora o un ordenador. El cálculo mental se practica desde situaciones numéricas básicas, como muestra la figura 6.8.

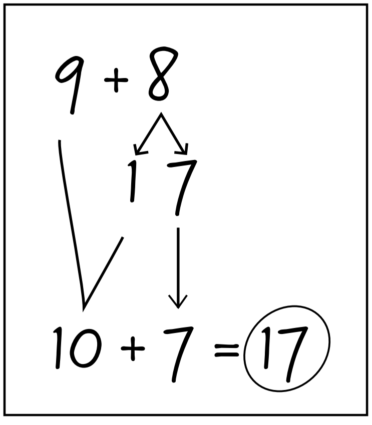


Figura 6.8.—Esquema para el cálculo mental de una suma básica.

4.1. Por qué introducir el cálculo mental en la escuela

La inclusión del cálculo mental en el currículo escolar se debe a varias razones. En primer lugar, contribuye a la mejora y diagnóstico de las concepciones numéricas, ya que ayuda a desarrollar la comprensión del número desde la perspectiva del sistema de numeración decimal; cuando los escolares hacen uso del cálculo mental, emergen los procesos cognitivos, que en el cálculo escrito permanecen ocultos.

En segundo lugar, contribuye a enriquecer y flexibilizar la experiencia numérica y algorítmica, pues refuerza los hechos básicos (como las tablas), ayuda a lograr un sentido de los grandes números, agiliza el pensamiento cuantitativo y contribuye a asimilar las leyes de las operaciones aritméticas.

En tercer lugar, interviene en el desarrollo de las capacidades cognitivas, ya que resulta motivador, favorece la versatilidad e independencia de los procedimientos, fomenta el interés y la concentración y ayuda a pensar y a resolver problemas.

Finalmente, estimula el análisis de situaciones numéricas porque anima a indagar, a prestar atención a todos los pasos, a establecer prioridades, a profundizar en las situaciones y tiene un papel importante en la transición de la aritmética al álgebra (Gómez, 1994).

Otros beneficios del cálculo mental son que:

- Es valorado socialmente y útil para la vida diaria.
- Es ingenioso, flexible y creativo.
- Es necesario para la estimación.
- Refuerza la capacidad para el cálculo escrito.
- Permite el control del cálculo electrónico.
- Permite diagnosticar errores debidos al aprendizaje.
- Facilita la comprensión de las operaciones y sus pasos.
- Desarrolla el pensamiento cuantitativo y el matemático.
- Es beneficioso para la introducción del álgebra.
- Mejora la actitud de los escolares hacia la matemática.

4.2. Bases para las estrategias de cálculo mental

Fundamentos matemáticos del cálculo mental son las propiedades de las operaciones aritméticas, las tablas de las distintas operaciones, relaciones conocidas como doble y mitad, y las reglas del Sistema de Numeración Decimal. Las propiedades de las operaciones se han estudiado en temas anteriores: asociativa, conmutativa y distributiva.

En ocasiones, algunos sujetos son capaces de recordar perfectamente bien la mayor parte de las tablas de multiplicar, pero alguna de ellas les implica cierta dificultad. Si, por ejemplo, he de calcular 8×7 y es la tabla del ocho la que no manejo con soltura, aplicando la propiedad conmutativa de la multiplicación el resultado se puede hallar multiplicando 7×8, con la certeza de que el resultado es el mismo. En otros casos, ante una operación que involucre varias cantidades, es recomendable llevar a cabo las operaciones pertinentes en un orden específico. Así, para sumar $47 + 75 + 25$, es más sencillo sumar primero $75 + 25$ y al resultado, 100, sumarle 47. La propiedad asociativa para la suma confirma la bondad del resultado.

4.3. Estrategias de cálculo mental

A continuación presentamos una amplia variedad de situaciones y sugerimos estrategias para su resolución. Constituyen un repertorio de vías para obtener mentalmente el resultado de una operación que cumple unos determinados requisitos. No se trata de reglas para memorizar, sino de guías para elaborar sus propias estrategias.

Las tablas

El cálculo mental comienza con la memorización de las tablas de sumar y multiplicar de los diez primeros números. Estas situaciones son propicias para aplicar estrategias de cálculo mental y también sencillas; su uso puede generalizarse. En general, estas estrategias están basadas en el uso del doble y el cuadrado de un número y el complemento a 10.

Vemos algunos ejemplos:

$$6 + 7 = 6 + 6 + 1;\ 7 + 9 = 6 + 10;$$

$$8 \times 7 = 7 \times 7 + 7;\ 9 \times 7 = 10 \times 7 - 7$$

Números terminados en ceros

Las operaciones con cantidades acabadas en ceros pueden prescindir de ellos para después añadirlos al final de la operación. Por ejemplo:

$$600 + 700 + 4.500 = (6 + 7 + 45) \text{ cientos} = 5.800$$

$$7 \times 3.000 = (7 \times 3 \text{ y } 000) = 21.000$$

$$36.000 : 500 = 360 : 5 = 72$$

Números formados por unos y ceros

La fundamentación de este algoritmo podemos encontrarla en el algoritmo usual. Así, por ejemplo, para multiplicar por 11 podemos aplicar la siguiente estrategia. Para calcular el resultado de 57×11: «dejo el 7, sumo $5 + 7$, 12, dejo el 2 y llevo 1 al 5, que son 6. Total, 627».

También es posible diseñar un estrategia para multiplicar por 101: $58 \times 101 = 5.858$, o por 1.001: $988 \times 1.001 = 988.988$.

Números formados por nueves

La fundamentación de este algoritmo está basada en complementar 99 a 100. Así, por ejemplo, para calcular 47×99: «$47 - 1 = 46$. $100 - 47 = 53$. Total: 4.653».

ACTIVIDAD 1: ¿Cómo se obtiene la regla anterior? ¿Sirve para todos los números multiplicados por 99? ¿Se puede construir una regla parecida para multiplicar por 999?

Multiplicaciones de números comprendidos entre diez y cien (tabla mayor)

Si existe igualdad en las decenas, se considera el primer número y se le añade las unidades del segundo. El resultado se multiplica por las decenas del segundo y, finalmente, se añade el producto de unidades (por unidades).

Por ejemplo, $25 \times 27 = (25 + 7) \times 2 \times 10 + 7 \times 5 = 675$.

Si existe igualdad en las decenas y sus unidades suman 10, puede realizarse de la siguiente forma: $43 \times 47 = 40 \times 50 + 3 \times 7$.

Si, por el contrario, existe igualdad en las unidades y las decenas suman 10, una estrategia posible es la siguiente: 34 × 74 = «3 × 7 + 4 = = 25, y le añado 4 × 4» = 2.516.

ACTIVIDAD 2: Aplica las estrategias anteriores para calcular mentalmente el resultado de las siguientes operaciones: 34 × 32, 52 × 58 y 47 × 67. Describe la estrategia empleada en casa caso.

Descomposiciones y recomposiciones de uno de los datos

En el caso de operaciones aditivas, pueden aplicarse las siguientes estrategias:

$$63 + 45 = 63 + 40 + 5 = 108$$

$$894 - 632 = 894 - 600 - 32 = 294 - 32 = 262$$

En el caso de operaciones multiplicativas, para la multiplicación, algunas estrategias posibles son las siguientes:

$$41 \times 32 = (40 + 1) \times 32 = 40 \times 32 + 32 = 1.312$$

$$68 \times 111 = 68 \times (100 + 10 + 1) = 6.800 + 680 + 68 = 7.548$$

Para la división, también se pueden aplicar determinadas técnicas, como, por ejemplo:

$$1.500 : 25 = 1.000 : 25 + 500 : 25 = 40 + 20 = 60$$

$$792 : 11 = (770 + 22) : 11 = 770 : 11 + 22 : 11 = 70 + 2 = 72$$

ACTIVIDAD 3: Realiza las operaciones siguientes aplicando las estrategias anteriores: 128 + 265; 349 – 236; 52 × 63; 75 × 49, y 3.600 : 3.

ACTIVIDAD 4: Inventa otras operaciones similares a las de la actividad anterior y resuélvelas.

Descomposición y recomposición de los dos datos

Observa cómo es posible realizar sumas y restas aplicando esta estrategia:

$$725 - 443 = (700 - 400) + 25 - 43$$

$$154 + 26 = (150 + 20) + (4 + 6)$$

$$58{,}4 + 7{,}5 = (58 + 7) + (0{,}4 + 0{,}5)$$

$$725 - 443 = (700 - 400) + (25 - 43) = (700 - 400) - (43 - 25)$$

$$2{,}23 - 1{,}58 = (2 - 1) - (0{,}58 - 0{,}23)$$

ACTIVIDAD 5: Aplica la estrategia de descomponer y componer datos para llevar a cabo las siguientes operaciones: 1.542 – 861; 675 + 357; 14,7 + 13,2; 1.542 – 861, y 75,36 – 17,58.

Otras descomposiciones

A continuación se muestran otras estrategias de descomposición condicionadas a facilitar el cálculo de operaciones aditivas y multiplicativas:

$$461 - 166 = 461 - 161 - 5 = 300 - 5 = 295$$

$$13 - 8{,}25 = (12 - 8) + (1 - 0{,}25)$$

$$25 + 28 = 25 + 25 + 3 \text{ (hacer dobles)}$$

$$54 + 48 = 54 + 46 + 2 = 100 + 2 \text{ (complementar)}$$

$$36 \times 1{,}25 = 36 \times (1 + 1/4) = 36 + 9 = 45 \text{ (cuartos)}$$

$$38 \times 1{,}5 = 38 \times (1 + 1/2) = 38 + 19 \text{ (mitad)}$$

$$7 : 0{,}75 = 27 : 3/4 = (27 : 3) \times 4 = 9 \times 4 = 36 \text{ (tercio)}$$

ACTIVIDAD 6: Aplica alguna de las estrategias anteriores de cálculo mental para obtener el resultado de las siguientes operaciones: 864 − 357; 26,7 − 15,5; 365 + 350; 145 + 73; 28 × 0,25; 36 × × 2,5, y 42 × 0,75.

Multiplicaciones por múltiplos de cinco

Si en un producto uno de los factores acaba en 5, es posible aplicar estrategias específicas como las siguientes:

$$25 \times 16 = 50 \times 16/2 = 400$$

$$25 \times 34 = (100 \times 34)/4 = 3.400/4 = 850$$

$$36 \times 125 = 36 \times 100 + 36 \times 100/4 = 3.600 + 900$$

$$36 \times 75 = 36 \times (50 + 25) = 1.800 + 1.800/2$$

$$38 \times 15 = 38 \times 10 + (38 \times 10)/2$$

ACTIVIDAD 7: Halla el resultado de las siguientes operaciones aplicando estrategias de cálculo mental: 27 × 150; 43 × 155, y 16 × 1.125.

Factorizaciones

Si es posible descomponer alguno de los números en una operación multiplicativa, podemos simplificar los cálculos, tal y como mostramos en los ejemplos siguientes:

$$37 \times 12 = 37 \times 3 \times 4 = 111 \times 4 = 444$$

$$18 \times 15 = 9 \times 2 \times 5 \times 3 = 27 \times 10$$

$$26 \times 33 = 26 \times 11 \times 3$$

$$75 : 15 = (75 : 3) : 5 = 5$$

$$36{,}90 : 6 = (36{,}90 : 3) : 2 = 6{,}15$$

$$1.500 : 25 = 15 \times (100 : 25) = 15 \times 4$$

ACTIVIDAD 8: Aplica la estrategia de factorizar para calcular el resultado de las siguientes operaciones: 17 × 22; 23 × 44, y 64 : 16.

Compensaciones

Otras estrategias se centran en compensar alguno de los números involucrados en función del otro. Algunos ejemplos son los siguientes:

- Añadir y quitar: 81 + 59 = 80 + 60.
- Suma doblando el número intermedio. Por ejemplo: 34 + 36 = 35 + 35 = 70.
- Promediar. Por ejemplo: 60 × 25 es media de 60 × 20 y 60 × 30.
- Doble y mitad. Por ejemplo: 28 × 35 = = 14 × 70 = 980.
- Dobles. Por ejemplo: 16 × 36 = 2 × 2 × × 2 × 2 × 36.

- Conservar. Por ejemplo: 46 − 18 = 48 − − 20 = 28.
- Dividir entre 5, 25, 75... 0,5, 0,25, 0,125. Por ejemplo: 480 : 5 = 480 × 2 : 10 = = 960 : 10 = 96.
- Multiplicar por 0,5, 0,25, 0,125... es dividir por 2, 4, 8... Por ejemplo: 128 × 0,50 = = 128 : 2 = 64.
- Dividir entre 0,5, 0,25, 0,125... es multiplicar por 2, 4, 8... Por ejemplo: 36 : 0,5 = = 36 × 2 = 72.
- Multiplicar por 0,75, 1,25, 1,5... es multiplicar por las fracciones correspondientes. Por ejemplo: 28 × 0,75 = 28 × 3/4 = 28 : : 4 × 3 = 21.
- Dividir entre 0,75, 1,25, 1,5... es dividir las fracciones correspondientes. Por ejemplo: 69 : 0,75 = 69 : 3/4 = 69 : 3 × 4 = 92.

ACTIVIDAD 9: Aplica las estrategias de compensación anteriores para hallar el resultado de las siguientes operaciones: 57 + 61; 30 × 5; 42 × 45; 35 × 8; 87 – 35; 2.400 : 25; 24 × 1,25, y 96 : 1,5.

Redondeo

La estrategia de redondear uno o varios de los números que intervienen en una operación aditiva o multiplicativa también permite calcular el resultado, como muestran los siguientes ejemplos:

- Sumas: 56 + 17 = 56 + 20 − 3 = 73.
- Restas: 265 − 199 = 265 − 200 + 1 = 66.
- Multiplicaciones por números próximos a múltiplos de 10, 100...: 34 × 19 = 34 × × 20 − 34 = 646.
- Multiplicaciones por números acabados en 75: 36 × 7,5 = 36 × (10 − 10/4) = 360 − − 360/4 = 270.
- Por números que les falta la décima parte de su decena más próxima (18, 27, 36, 45, 54...): 67 × 18 = 67 × 20 − 67 × 20/10 = = 1.340 − 134 = 1.206.
- Divisiones con dividendo que le falta un múltiplo del divisor para 10, 100...: 975 : 25 = (1.000 − 25) : 25 = 40 − 1 = 39.
- Dividir restando o sumando múltiplos del divisor: 570 : 38; 570 − 38 × 10 = 190 (anoto 10); 190 − 38 × 5 = 0, y 10 y 5 = 15.

ACTIVIDAD 10: Aplica las estrategias de redondeo anteriores para calcular el resultado de las siguientes operaciones: 127 + 44; 724 – 386; 25 × × 47; 32 × 75; 54 × 27; 985 : 15, y 1.500 : 25.

Puedes ampliar información sobre estrategias de cálculo mental en: Gómez (1988) y Ortiz (2011).

5. CÁLCULO ESTIMATIVO

Desde una perspectiva general, la estimación es un juicio sobre el valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite. En este caso, sólo nos referiremos a la estimación en cálculo, relativa a las operaciones aritméticas y a los juicios que pueden establecerse sobre sus resultados. Por ejemplo, una estimación del resultado de 2.345 multiplicado por 52 es 120.000. Estimar una cantidad consiste, por ejemplo, en valorar que el ancho de esta clase es de 8 metros, aproximadamente.

ACTIVIDAD 1: Justifica por qué 120.000 es una buena estimación del producto anterior. Estima el largo de esta clase.

El concepto general de estimación consiste en valorar mentalmente una cantidad o el resultado de una operación aritmética a partir de alguna información, referencia o experiencia sobre la situación que se debe enjuiciar. La estimación se suele realizar con rapidez y empleando números lo más sencillos posibles. El valor que asigna un sujeto no tiene por qué ser exacto, pero sí adecuado y relevante para tomar decisiones posteriores. Evidentemente, el valor asignado admite distintas aproximaciones dependiendo de quien realice la valoración.

ACTIVIDAD 2: Explica a tus compañeros una ocasión en la que has tenido que hacer una estimación y cómo la has resuelto.

5.1. Por qué introducir la estimación en la escuela

Muchas de las razones dadas para enseñar el cálculo mental respaldan también la enseñanza de la estimación, en cuanto ésta es usualmente una actividad mental. No obstante, la estimación tiene interés en sí misma, ya que se emplea en numerosas situaciones de la vida cotidiana. La estimación es parte de la resolución de problemas en cuanto permite evaluar la coherencia de los resultados, forma parte del currículo escolar y complementa la visión de la matemática asociada exclusivamente a la exactitud y la precisión.

La estimación es una forma de trabajar con los números en situaciones reales que permite realizar una asignación rápida de valores numéricos manteniendo al mismo tiempo un cierto control sobre la validez de esa valoración. Por eso la estimación es útil donde hay cantidades que se expresan mediante números y hay que trabajar con ellas sin tener conocimiento de su valor exacto. Desde una perspectiva muy general, la estimación se emplea en dos tipos de situaciones: cuando no hay posibilidad de conocer los valores exactos o de proporcionar un tratamiento numérico exacto, y cuando, conociendo los valores exactos, sin embargo, se requiere facilitar el cálculo o expresar las medidas con claridad.

Puedes ampliar tu información sobre estimación consultando: Segovia, Castro, Rico y Castro (1989).

5.2. Componentes matemáticas relacionadas con la estimación

La estimación en cálculo es una competencia con la que están relacionados muchos conocimientos matemáticos de carácter conceptual, procedimental y actitudinal. Por tanto, la práctica de la estimación promueve el desarrollo de estos conocimientos.

Desde un punto de vista conceptual, la estimación involucra números aproximados, ya que la aproximación numérica se usa para calcular y la estimación es una aproximación. También tiene que ver con la multiplicidad de procesos y de resultados, ya que, para estimar, es necesario seguir más de un procedimiento; generalmente, son posibles diferentes vías para su realización y los resultados aceptables pueden ser varios.

Desde el punto de vista procedimental, como veremos a continuación, las estrategias de estimación ponen en juego varios procesos matemáticos como la reformulación, para cambiar los números usados en el cálculo; la compensación, que implica hacer ajustes durante o después del cálculo, y la traslación, que tiene que ver con cambiar la estructura del problema. En relación con la consecución y el análisis de resultados, al estimar es necesario determinar el orden de magnitud adecuado, así como valorar la bondad de la estimación. Igualmente, involucra habilidades para trabajar con potencias de 10, para comparar números por tamaños y para calcular mentalmente; también el conocimiento del valor posicional de los números, de los factores básicos y de las propiedades de las operaciones y su uso apropiado.

Finalmente, desde el punto de vista actitudinal, la estimación afianza la seguridad para hacer matemáticas, desarrolla la tolerancia hacia el error y la confianza en que las matemáticas son útiles para resolver problemas.

5.3. Procesos y estrategias de estimación

Existen distintos tipos de procesos asociados a la estimación que, combinados, conforman las diferentes estrategias de estimación. Distinguiremos procesos de reformulación, de traslación y de compensación.

Procesos de reformulación

En estos procesos se lleva a cabo un cambio sobre los datos. Cuando un dato resulta demasiado complicado para poder operar con él, entonces lo sustituimos por un dato próximo, con lo que desaparece la dificultad para poder operar. Este tipo de procesos para estimar relacionado con los datos pueden centrarse en redondear, truncar o sustituir esos datos.

Redondear consiste en suprimir cifras de la derecha de un número y sustituirlas por ceros con el siguiente criterio. Si la última cifra que suprimimos es mayor o igual a cinco, tenemos que aumentar la cifra que le precede en una unidad (exceso); en otro caso, se deja igual (defecto). Por ejemplo, 2.346 redondeado a las decenas es 2.350, mientras que redondeado a las centenas es 2.300.

Truncar consiste en suprimir dígitos de un número a partir de un determinado orden de unidades y sustituirlos por ceros. Por ejemplo, 2.400 es un truncamiento a las centenas de 2.469.

Sustituir. Otro proceso de reformulación consiste en sustituir uno o varios datos por números próximos a los exactos, pero que faciliten la operación entre ellos. Por ejemplo, podemos sustituir la división 368: 7 por 350 : 7, donde el divisor es un múltiplo del dividendo.

ACTIVIDAD 3: Obtén el resultado de redondear a las decenas y centenas la cantidad 16.748 euros.

ACTIVIDAD 4: Obtén el resultado de truncar a las centésimas la cantidad 2,3483 metros.

ACTIVIDAD 5: Un automóvil ha costado 23.654 euros. ¿Cuál es la forma habitual de indicar el coste de manera aproximada? ¿Qué proceso de reformulación se suele utilizar?

ACTIVIDAD 6: Enuncia un problema para cuya solución sea muy conveniente reformular uno o mas de sus datos. Justifica la necesidad de reformular los datos del problema.

Procesos de traslación

En estos procesos se lleva a cabo un cambio sobre las operaciones. En ocasiones, podemos alterar el orden de las operaciones: si debemos estimar el resultado de (1.984 × 47) : 8, podemos actuar así: 47 : 8 ≈ 6, y como 2.000 × 6 = = 12.000, finalmente (1.984 × 47) : 8 ≈ 1.200.

También es posible que transformemos una suma de *n* sumandos en una multiplicación del número *n* por el valor medio aproximado de los sumandos. Por ejemplo, para estimar el resultado de la suma 5.673 + 4.396 + 3.908 + 5.127 + + 6.835, podemos identificar que el valor medio de cada sumando es 5.000, y que, por tanto, esa suma es, aproximadamente, cinco veces 5.000, es decir, 25.000.

ACTIVIDAD 7: Redacta una situación donde se planteen estimaciones como la del ejemplo anterior.

ACTIVIDAD 8: Estima el resultado de la operación $(358 \times 70 \times 19) : 35$ redondeando o truncando y empleando algún cambio en las operaciones.

ACTIVIDAD 9: Estima el resultado de la operación $234 + 653 + 2.568 + 549$ en dos etapas de manera que la segunda mejore la estimación de la primera.

ACTIVIDAD 10: Explica cuál es la mejor forma de estimar el resultado de las operaciones 187×54 y $410 : 37$ de forma que el error que genera un dato se compense con el error que genera el otro dato.

Procesos de compensación

La compensación consiste en reducir el error producido en un sentido, al aproximar uno o varios datos, equilibrándolo con un error en sentido contrario, actuando sobre datos diferentes o sobre el resultado. La idea clave de la compensación consiste en neutralizar un error excesivo, debido a una reformulación o traslación, introduciendo un error en sentido contrario que le sirva de contrapeso.

La compensación se puede centrar en los datos, cuando se realiza durante el proceso de estimación, o en el resultado, cuando el ajuste se realiza al finalizar el cálculo. Las compensaciones más usuales son las primeras. Cada operación suele tener sus propias técnicas de compensación, de acuerdo también con el proceso de reformulación seguido.

Suponemos, por ejemplo, que debemos estimar el resultado de la multiplicación 98×26. Si aproximamos el primer factor a 100 para facilitar la estimación, obtenemos que $98 \times 26 \approx \approx 100 \times 26 = 2.600$. Ahora podemos compensar el error producido por esta estimación disminuyendo el segundo factor, obteniendo que $98 \times 26 \approx 100 \times 25 = 2.500$. Por otro lado, si necesitamos estimar el resultado de la suma $7,4 + 2,8 + 9,2 + 3,7$, una primera aproximación es sumar $7 + 2 + 9 + 3 = 21$. Compensamos entonces el error generado en este truncamiento añadiendo una estimación de la suma de la parte decimal mediante, por ejemplo, una traslación como la que hemos mostrado anteriormente: $0,4 + 0,8 + 0,2 + 0,7 \approx 4 \times 0,5 = 2$. El resultado final de la estimación es, por tanto, $21 + 2 = 23$.

Estrategias de estimación

Los procesos anteriores establecen diferentes técnicas para estimar el resultado de determinados cálculos aritméticos. Obviamente, la obtención aproximada del resultado de un cálculo puede lograrse mediante varias estrategias generales, como las basadas en ensayo y error o en patrones numéricos. Pero la combinación de los procesos anteriores, junto a los algoritmos de cálculo, constituyen estrategias de estimación fundamentales en cálculo.

Un modelo de estrategia en donde se combinan todos los procesos en el orden que se han presentado sería:

Operación aritmética → Reformulación →
→ Traslación → Compensación →
→ Cálculo → Resultado

No obstante, los procesos de estimación y su organización para la resolución de una tarea de estimación dependen de la propia operación y de los datos implicados. Por ejemplo, para estimar el resultado de $383 + 126 + 632$, primero podemos aplicar un truncamiento (reformulación) y tendríamos $300 + 100 + 600$; después, podemos aplicar una compensación añadiendo 150, valor medio del error que se comete al truncar a las centenas. Es decir, la estimación sería 1.150.

ACTIVIDAD 11: Estima el resultado de las operaciones 674 + 127 + 348 + 932; 13.477 – 6.913 y 6.348 × 12 explicando la estrategia seguida.

Puedes ampliar la información sobre la estimación en: Segovia, Castro, Rico y Castro (1989).

ACTIVIDADES PARA PRACTICAR

Con calculadora

1. Determina la expresión decimal completa de la fracción 1/17.

RESOLUCIÓN. Con la calculadora, realizamos la división 1 : 17 y obtenemos 0,0588235. Multiplicando este número, que lo tecleamos, (no debemos utilizar el resultado directo de 1 : 17) por 17 y restando el resultado a 1, obtendremos 0,0000005. Esto significa que en el algoritmo de la división 1 : 17 tendríamos 5 en el resto cuando hemos llegado a la expresión 0,0588235 en el cociente. Dividimos entonces 5 : 17 y nos da 0,2941176, que se corresponde con la secuencia de dígitos que continúa a los ya obtenidos, es decir, que la división de 1 : 17 genera la secuencia, 0,05882352941176. Si multiplicamos ahora 0,2941176 por 17 y se lo restamos a 5, obtendremos 0,0000008, lo que supone un resto de 8 en el momento en que la división genera un cociente de 0,05882352941176. Siguiendo con este proceso, es decir, dividiendo 8 entre 17, obtendremos 0,4705882. Si observamos este resultado, a partir del 470 los números siguientes se repiten según la secuencia del primer cociente. Así pues, hemos llegado al final del período de 1/17, que sería 0,05882352941176470058823529411 7647005882352941176470...

Determina con este proceso la expresión decimal de 1/13.

2. Suponiendo que la tecla X está estropeada ¿cómo podemos obtener con la calculadora el resultado 2.653 × 378?

RESOLUCIÓN. Con el operador constante obtenemos 2. 653 × 3; al resultado le añadimos dos ceros, ya que hemos multiplicado por centenas, y lo acumulamos en la memoria. Hacemos lo mismo con 2.653 × 7; al resultado le añadimos un cero y lo acumulamos en la memoria; igual para 2.653 × 8. Obtendremos el resultado viendo lo acumulado en la memoria.

3. Sin utilizar la tecla de restar, calcula 685 − 348.

4. Sin utilizar la tecla de dividir, calcula 5.674 : 256.

5. Sin usar la tecla de sumar, calcula 8.637 + + 2.378.

6. Obtén el cociente y el resto de la división 2.378 : 71.

7. Determina la expresión decimal de 1/11.

8. Determina la expresión decimal de 1/9.

9. Escribe el número que, seguido de pulsar X =, dé cero.

10. Escribe el número que, seguido de pulsar X =, dé el mayor posible en la calculadora.

11. Determina un divisor de 16.661.

12. Realiza la siguiente resta:

$$23.798.367.569.234 - 273.965.348.277$$

Cálculo mental y estimación

1. De acuerdo con la definición clásica de metro, ¿cuánto mide el radio de la Tierra?

RESOLUCIÓN. El metro es la diezmillonésima parte de la cuarta parte del meridiano terrestre; por tanto, la circunferencia de la Tierra será de unos 40 millones de metros, es decir, 40.000 km. Si empleamos la fórmula de la longitud de la circunferencia, el radio de la Tierra será 40.000 km/2π, es decir, aproximadamente 40.000 : 6, que nos permite obtener unos 6.500 km. ¿Cómo estimar la longitud del Mediterráneo?

2. ¿Qué grosor tiene un folio?

RESOLUCIÓN. Es imposible medir directamente o estimar esa medida, pero, dado que un paquete de 500 folios tiene de grosor unos 5 cm, un folio tendrá de grosor, aproximadamente, 5 cm : 500, es decir, 500 décimas de milímetros, por lo que podemos concluir que un folio mide de grosor aproximadamente una décima de milímetro.

3. En la tabla siguiente, tomada de Gómez (1994), se recoge un listado de 20 operaciones. Calcula mentalmente el resultado de cada operación aritmética que aparece en la tabla. Después, escribe el procedimiento que has empleado y el resultado de las operaciones (no debes utilizar ningún instrumento de cálculo, lápiz y papel o calculadora).

	Operación	Proceso de cálculo	Resultado
1	7 × 998		
2	12 × 13		
3	15 × 48		
4	34 × 36		
5	21 × 21		
6	248 × 50		
7	990 × 75		
8	594 × 11		
9	125 × 16		
10	102 × 108		
11	26 × 33		
12	58 × 52		
13	416 × 25		
14	105 × 111		
15	345 × 101		
16	995 × 8		
17	43 × 25		
18	85 × 86		
19	29 × 31		
20	25 × 75		

4. En la tabla siguiente, tomada de Segovia, Castro, Rico y Castro (1989), que puedes reproducir, se presenta un conjunto de operaciones cuyo resultado se pide estimar. Escribe la estrategia de estimación (mental) y el resultado aproximado de las operaciones. No debes utilizar ningún instrumento de cálculo, lápiz y papel o calculadora.

	Operación	Estrategia de estimación	Resultado
1	76 × 89		
2	93 × 18		
3	145 × 37		
4	824 × 26		
5	187,5 × 0,06		
6	482 × 51,2		
7	64,6 × 0,16		
8	424 × 51,2		
9	12,6 × 11,4		
10	0,47 × 0,26		

	Operación	Estrategia de estimación	Resultado
11	9.208 : 32		
12	4.645 : 18		
13	7.858 : 51		
14	25.410 : 65		
15	648,9 : 22,4		
16	546 : 33,5		
17	1.292,8 : 71,2		
18	66 : 0,86		
19	943 : 0,48		
20	0,76 : 0,89		

INVESTIGA Y REFLEXIONA

Las siguientes actividades te permitirán profundizar en las nociones y los procedimientos sobre cálculo mental y estimación que hemos presentado en este tema:

1. Revisa un periódico de tirada nacional y clasifica la información numérica según sea resultado de estimaciones o datos exactos; explica las razones por las que cada caso se presenta en ese formato.

2. Elabora un listado de actividades profesionales asociadas al empleo de datos exactos; haz lo mismo para el caso de datos aproximados.

3. Revisa un libro de texto de 6.º curso de matemáticas de Educación Primaria y haz un informe del papel de la calculadora en el mismo; igualmente para el caso del cálculo mental y la estimación.

4. Elabora una ficha informativa de tu calculadora en donde se recoja el funcionamiento de las herramientas básicas que se han visto en este tema.

5. Elabora un informe de una página en el que establezcas tu visión de las cuatro modalidades de cálculo, escrito, con calculadora, mental y estimativo, explicitando la relación que existe entre ellas.

BIBLIOGRAFÍA

Fielker, D. (1986). *Usando las calculadoras.* Valencia: Generalitat Valenciana.

Gómez, B. (1988). *Numeración y cálculo.* Madrid: Síntesis.

Gómez, B. (1995). *Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo: Un análisis en la formación de profesores.* Granada: Comares.

Jiménez, J. y Girondo, L. (1993). *Cálculo en la escuela. Reflexiones y propuestas.* Barcelona: Graó.

Ortiz, M. (2011). *Cálculo mental en el aula.* Madrid: Editorial CCS.

Segovia, I., Castro, E., Rico, L., y Castro, E. (1989). *Estimación en cálculo y medida.* Madrid: Síntesis.

Udina i Abello, F. (1989). *Aritmética y calculadoras.* Madrid: Síntesis.

7 Números enteros

ALEXANDER MAZ MACHADO
RAFAEL BRACHO LÓPEZ

Figura 7.1.—Los números negativos aparecen con frecuencia en la vida cotidiana.

Parece apropiado que niños y niñas descubran las distintas ampliaciones de los campos numéricos, no como estructuras matemáticas rigurosas que satisfacen unas propiedades formales y que conforman una cadena de inclusiones, sino en función de un uso progresivo y natural, atendiendo a su dificultad intrínseca. En este sentido, chicos y chicas tienen que trabajar en un primer nivel con los números naturales que se usan para contar los elementos de una colección, descubrir sus operaciones y propiedades y realizar cálculos prácticos con ellos. En un segundo nivel deben alcanzar cierto conocimiento y manejo de los números racionales, inicialmente positivos, en su significado de números fraccionarios. En un tercer paso, requieren descubrir el conjunto de los enteros como aquellos números que permiten abordar y dar respuesta a otras situaciones familiares, como son todas aquellas relacionadas con los números negativos en la vida cotidiana. Más tarde se podrá verificar que con estos números es posible restar dos naturales en todos los casos, cuestión que, junto con el cumplimiento de propiedades, ya se habrá comprobado con anterioridad.

En este capítulo nos proponemos presentar los conocimientos básicos necesarios para un tratamiento de los números enteros en el aula, centrándonos particularmente en sus usos prácticos y sus representaciones.

1. LOS NÚMEROS ENTEROS EN EL CURRÍCULO ESCOLAR

El desarrollo del sentido numérico en la enseñanza obligatoria se orienta, según los expertos, hacia tres objetivos fundamentales:

1. Comprender diferentes formas de representar los números y las relaciones existentes entre ellas.
2. Entender el sentido y el significado de las operaciones numéricas y conocer sus propiedades.
3. Realizar cálculos y estimaciones con la fluidez apropiada.

En la normativa curricular que establece los actuales contenidos mínimos para las enseñanzas Primaria y Secundaria y en los marcos normativos de las comunidades autónomas, que subrayan la importancia de que los estudiantes puedan hacer un uso razonable y razonado de los números, encontramos los siguientes planteamientos:

- Introducir el conocimiento de los distintos conjuntos numéricos sobre situaciones cercanas a los escolares, preferentemente.
- Atribuir mayor importancia a la práctica, orientada a relacionar las diferentes representaciones numéricas con sus aplicaciones.
- Comprender las propiedades de los números, con preferencia al ejercicio de destrezas basadas en cálculos descontextualizados.

Por razón de la introducción paulatina de los distintos campos numéricos, la vigente organización del currículo escolar establece que la familiarización con el conjunto de los números enteros se inicie en el tercer ciclo de la Educación Primaria, tras el estudio previo de los números naturales desde el primer ciclo y de los números racionales, que se introducen primero como fracciones en el segundo ciclo. Más tarde, también en el tercer ciclo de Educación Primaria, se presentan las expresiones decimales de los números racionales.

Inicialmente, el conjunto de los números enteros debe cobrar sentido a partir de la existencia de números menores que cero, que representan situaciones familiares para el alumnado y que amplían la recta numérica. Tanto la comprensión de la relación de orden como las operaciones aritméticas en el conjunto de los números enteros deben introducirse de forma aplicada e intuitiva. Más adelante, en los primeros años de la Enseñanza Secundaria, los estudiantes profundizarán en aspectos formales y en el dominio de las operaciones con números enteros y sus propiedades, según marcan las normas educativas.

ACTIVIDAD 1: Localiza el tratamiento que reciben los números enteros en el currículo nacional y de tu comunidad autónoma; resume aquellos datos que consideres relevantes.

ACTIVIDAD 2: Consulta dos libros de texto actuales para 6.º curso de Primaria y compara sus contenidos y actividades sobre números enteros. Comprueba que se ajustan a las orientaciones.

2. ASPECTOS HISTÓRICOS

Los números enteros tienen una larga presencia en el mundo de las matemáticas, si bien su tratamiento formal actual sólo se completó en la segunda mitad del siglo XIX. Los números negativos fueron utilizados por las antiguas culturas orientales en China e India.

Los números negativos en las culturas orientales

Los primeros indicios que se tienen del uso de los números negativos se remontan a la dinastía Han (alrededor del 200 a. C.) en el libro *Nueve capítulos del arte matemático* (Jiu Zhang Suanshu). En este libro, como en otros textos chinos, los números negativos se usan para resolver ecuaciones mediante reglas de adición y sustracción a través de procedimientos de cálculo con algoritmos particulares. Se encuentran en prácticas de contabilidad, fundamentadas en el uso de palillos de colores rojos (para números positivos) y negros (para números negativos). En el libro *Suanxue Quimeng* (1299) las reglas de los signos también se aplican a la multiplicación.

Por tanto, la distinción entre positivo y negativo estaba caracterizada por el color, la forma (triangular o cuadrada en algunos casos) o la posición (vertical o transversal). Para los registros por escrito de un número negativo, se utilizaba una barra oblicua a través de uno de los dígitos en la notación de barras numéricas ($\equiv||||$ es 34; $\equiv\cancel{||||}$ es −34).

En India, los negativos son mencionados por primera vez en los trabajos de Brahmagupta (628), refiriéndose a cantidades afirmativas y negativas, pero dando las reglas de los signos en los algoritmos para efectuar operaciones con «bienes» y «deudas». Posteriormente, es Mahävïra (850) quien trata estas reglas y acepta el cero. De ahí en adelante la regla de los signos se encuentra en los textos matemáticos hindúes.

La historia nos enseña que, en su origen, los números negativos y positivos son números adjetivados, que se contraponen por alguna cualidad.

ACTIVIDAD 1: Encuentra parejas de acciones que se contrapongan y que puedan calificar cantidades, como ocurre con *ganar* y *perder,* que denotan las cantidades como ganancias o pérdidas.

ACTIVIDAD 2: Justifica cómo se puede entender que una cantidad sea menor que 0.

Los números negativos en Occidente

Fibonacci, en su libro *Flos* (1225), interpreta las soluciones negativas en un problema financiero como una perdida en vez de ganancia, y viceversa. Los números negativos como soluciones de ecuaciones hacen su aparición en Europa en 1484, a través de Nicolás Chuquet. Un ejemplo de su uso es la solución de la ecuación *4.egaux a m.2.*, que en notación moderna equivale a $4x = -2$. En 1489, Johann Witman publica un trabajo donde utiliza por primera vez los signos más (+) y menos (−). Michael Stifel (1487-1567) usó los negativos en las ecuaciones y los llamó *números absurdos*.

Albert Girard, en su *Invention nouvelle en algèbre* (1629), fue quien primero aceptó la existencia de raíces negativas como solución de ecuaciones algebraicas. Además, indica que lo negativo en geometría significa una regresión, un retroceso. Se tiene así una consideración de los negativos como valores algebraicos, cuyo significado no tiene por qué estar vinculado a una magnitud física.

ACTIVIDAD 3: Enuncia un problema cuya expresión algebraica sea: $-3x = 9$.

ACTIVIDAD 4: Investiga y elabora un breve informe acerca de cuándo se comienza a utilizar el signo menos (−) para representar a los números enteros negativos.

Los números negativos en la época de la revolución científica

Descartes (1596-1650), al no hallar cantidades negativas en física no encuentra sentido a los números negativos, que surgen dentro del álgebra, a los que llama falsos. En su *Géométrie* (1637), desarrolla la perspectiva algebraica, si bien continúa condicionado por el razonamiento aritmético cuando considera que son *sensatas y verdaderas raíces* aquellas que son positivas, y que *las raíces negativas son falsas*. A las raíces menores que 0, Descartes las llama *raíces falsas,* y ése es el sentido con que utiliza la denominación. Descartes dota de significado a las raíces negativas de una ecuación mediante su *Geometría Analítica*, como valores situados a la izquierda del origen de coordenadas. De este modo, al transformar las ecuaciones mediante un cambio de origen, evita las soluciones negativas contrarias a la intuición aritmética. Sin embargo, una vez justificada su legitimidad, hace uso directo de ellas.

ACTIVIDAD 5: Representa en la recta numérica los números 0, 1, −1, −5 y −7. Explica cómo cualquiera de esos números es también solución de una ecuación.

John Wallis (1616-1703), en *De Álgebra Tractatus* (1693), trabajó con los negativos con todas sus propiedades, incluso dio reglas para operar con potencias de exponentes negativos. Fue uno de los primeros matemáticos en reconocer la importancia de la generalización de exponentes para incluir así los números negativos, fraccionarios, positivos y, en general, los enteros.

ACTIVIDAD 6: Explica qué representan las notaciones siguientes y calcula su valor: $(-3)^2$; 3^{-2}; 10^{-3}, y $(-10)^3$.

Los números negativos durante la Ilustración

Durante el siglo XVIII, los matemáticos continúan reflexionando acerca de las cantidades negativas. D'Alambert (1717-1783), en el artículo *Negatif* de la *Enciclopedia* (1751), expresa sus reservas respecto a las cantidades negativas; entre otras razones, considera que la complejidad de este concepto presenta dificultades no resueltas, o no suficientemente aclaradas. Una de las dificultades consiste en establecer que su valor es menor que cero. Otra de las dificultades que señala se presenta cuando se toma una cantidad negativa como sumando en vez de como sustraendo, es decir, como si fuese una cantidad positiva, pero *en una falsa posición* respecto del cálculo. De ahí, concluye que no se pueden aceptar las cantidades negativas de manera aislada, pues éstas deben definirse siempre en relación con las cantidades positivas. En este sistema conjunto que reclama D'Alambert, tienen sentido las reglas de los signos para las operaciones.

ACTIVIDAD 7: Justifica la expresión «sumar –4». ¿Tienen sentido expresiones como «tiene –7 años» o «ha subido –5 metros»? Busca una interpretación plausible.

En la discusión sobre la relación de orden, D'Alambert expresa cierta confusión, ya que establece que el paso del positivo al negativo se hace siempre pasando por cero o por infinito. Esto lo justifica estudiando los modos en que cambia el signo de una función analítica, que se puede producir bien mediante un corte con el eje de abscisas o bien mediante el paso por una asíntota vertical de orden impar. La relación de orden entre cantidades positivas y negativas muestra para este autor una de sus limitaciones.

Euler (1707-1783), en su obra *Fundamentos del Álgebra* (1770), acepta las cantidades negativas y justifica su construcción de forma análoga a las positivas, donde se pasa de un número al siguiente sumando la unidad. Para ello pasa de un negativo al siguiente mediante sustracciones sucesivas de la unidad: $0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10$, y así sucesivamente. Además, reconoce estos números como enteros y define para su producto la regla de los signos; Euler propone una justificación algebraica formal de los números negativos basada en procedimientos aritméticos. Comprendió la naturaleza abstracta de los números negativos, pero no dispuso de la estructura algebraica moderna para formalizarlos axiomáticamente, como actualmente se acepta.

A partir del siglo XVIII se dan los primeros pasos para formalizar los números negativos. Así, Laplace (1749-1827) propone justificar la regla de los signos desde un plano formal, desde la coherencia de las operaciones.

Los números negativos en la época contemporánea

Finalmente, es Herman Hankel (1839-1873) quien formaliza y legitima los números negativos como entidades independientes con una estructura algebraica propia en su obra *Theorie der complexen Zahlensysteme* (1867), otorgándoles estatus de números enteros. Hankel afirma que las operaciones y sus propiedades se establecen por definición, creando el correspondiente campo numérico. Esta construcción de los sistemas numéricos parte de la ampliación de un campo numérico a otro y, en cada ampliación, las leyes que son válidas en uno de ellos se extienden también al nuevo campo ampliado; de esta forma las leyes y operaciones válidas para las cantidades positivas también lo son para las negativas.

La respuesta de Hankel al sistema de los números enteros es que su construcción, con sus leyes y su propiedades, sólo tiene justificación en matemáticas. Los números negativos, pese a su simplicidad, carecen de fenómenos que los interpreten en toda su amplitud.

ACTIVIDAD 8: Haz un resumen de cuál es la enseñanza que transmite la historia de los números negativos.

3. SITUACIONES Y CONTEXTOS

Cuando se aborda el estudio de los números enteros en el aula, el objetivo inicial y fundamental debe ser dotar a estos «nuevos» números de significado, estableciendo para ello lazos entre este tipo de números y la realidad cercana a los escolares. Será a través de estas situaciones cómo los chicos y chicas descubrirán la importancia del cero, intuirán la conveniencia de utilizar signos distintos para distinguir entre los números positivos y los negativos, deducirán que los números enteros pueden ordenarse a pesar de que no existe un primer número entero y se acercarán de forma natural a las operaciones con números enteros, entre otras cuestiones importantes. Sólo en la medida en que los alumnos y alumnas dominen estos contextos tendrá sentido establecer la notación simbólica de los números enteros, y profundizar en las operaciones con ellos y en sus propiedades.

Entre las situaciones que se suelen utilizar para introducir los números enteros encontramos cuatro grupos generales: fenómenos físicos, situaciones contables, situaciones temporales o cronológicas y contextos matemáticos. A continuación se describen e identifican estos fenómenos y se muestran ejemplos de ellos.

Fenómenos físicos

Fenómenos con presencia frecuente en la naturaleza se modelizan mediante magnitudes vectoriales y se explican mediante leyes físicas. Cuando las cantidades de una determinada magnitud tienen, además de un módulo o intensidad, también dirección y sentido, permiten atribuir valores positivos o negativos a cantidades con una misma dirección y sentidos opuestos. Esto ocurre con los desplazamientos, velocidades, aceleraciones, fuerzas y otras magnitudes usuales de la mecánica. Estas magnitudes facilitan la introducción de los números negativos en situaciones familiares para los alumnos. También otras magnitudes escalares, como la temperatura o la capacidad, tienen un sistema de medida con un valor cero, convencionalmente establecido, que permite considerar cantidades por encima y por debajo de cero, para las cuales se usan números negativos. Algunas contextualizaciones posibles se relacionan con desplazamientos, deformaciones o fuerzas, temperaturas o capacidades. Veamos algunas de ellas a modo de ejemplo:

Situación 1. Depósitos

Un depósito se está llenando de agua de manera que el nivel sube a razón de 3 cm por minuto. A las doce del medio día el agua se encuentra en un punto señalado por A en el tubo auxiliar.

Respecto al nivel marcado por A, ¿qué altura alcanzará el agua a las doce y cuarto?, ¿qué altura alcanzaba a las doce menos diez?

A las doce y media se cierra el grifo de llenado y se abre un desagüe que vacía el depósito a razón de 2 cm cada minuto. ¿Qué altura alcanza el agua a la una menos diez?:

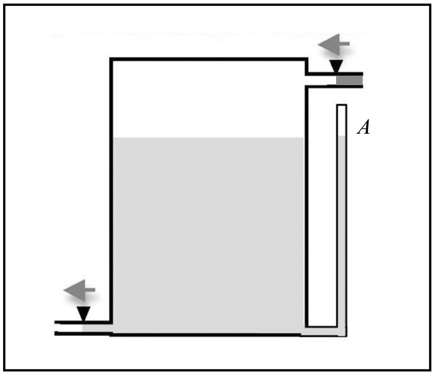


Figura 7.2.—Depósito de agua.

ACTIVIDAD 1: Explica cuál es la situación del depósito que representa el valor −100.

Situación 2. Temperaturas

a) ¿Cuál es la mayor temperatura que puede medir el termómetro de la imagen siguiente? ¿Y la menor?

b) Un día de invierno, las temperaturas mínimas registradas en las capitales de provincias andaluzas fueron las indicadas en la siguiente tabla:

TABLA 7.1

Temperaturas

Ciudad	T. mín.
Almería	4
Cádiz	6
Córdoba	−1
Granada	−3
Hueva	5
Jaén	1
Málaga	8
Sevilla	0

- ¿En qué ciudad hizo más frío?
- ¿En qué ciudad se registró una temperatura mínima más alta?
- ¿Cuántos grados de diferencia hubo entre las temperaturas mínimas de estas dos ciudades?

Fenómenos contables y operaciones comerciales

Estos fenómenos están relacionados con el manejo de capitales mediante la relación debe-haber o pérdidas y ganancias de dinero. Sirven, igual que otras contextualizaciones, para dar significado a los números negativos. Así, cuando giramos un cheque por mayor cantidad de dinero de la que se tiene en la cuenta bancaria, se produce un saldo negativo, y cuando ingresamos dinero, el saldo es positivo. Veamos algún ejemplo:

Situación 3. Movimientos de cuenta

El movimiento de una cuenta bancaria durante ciertos días del mes de mayo viene reflejado en la siguiente tabla:

TABLA 7.2

Movimiento contable

Fecha	Concepto	Haber	Debe	Saldo
				254
1 mayo	Recibo gas		45	
1 mayo	Recibo luz		256	
2 mayo	Nómina	1.654		
3 mayo	Hipoteca		720	
5 mayo	Compras		450	
7 mayo	Hacienda		550	
9 mayo	Ingreso	700		

ACTIVIDAD 2: Completa la columna «Saldo» detrás de cada operación.

Situación 4. Planificación comercial

Un comerciante ha comprado 30 trajes a 200 euros cada uno, pero ha tenido que vender 20 a 180 euros. ¿A qué precio tiene que vender los trajes que le quedan para no perder dinero? ¿Y para ganar 500 euros?

Fenómenos con valor de referencia destacado

Se presentan cuando se recurre a algún elemento determinado para que al compararlo con otros de su misma naturaleza se puedan establecer ciertas relaciones de orden o posición. Son ejemplos de estas situaciones los problemas de posición y los cronológicos.

Situación 5. Cambios de posición

Al final del mes de febrero la canción preferida de Beatriz se encuentra en la lista de «Los

TABLA 7.3.

Almanaque del mes de febrero

Febrero						
Lunes	**Martes**	**Miércoles**	**Jueves**	**Viernes**	**Sábado**	**Domingo**
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28

cuarenta principales» un puesto más abajo que al principio del mismo mes. En la primera semana del mes bajó tres posiciones, en la segunda bajó dos y en la tercera recuperó tres posiciones. En la última semana, ¿subió o bajó posiciones?, ¿cuántas? La canción terminó el mes de enero en tercera posición del *ranking* y la lista se actualiza los domingos por la tarde, ¿en qué lugar se encuentra la canción preferida de Beatriz el jueves 18 de febrero?

Situación 6. Alturas respecto al nivel del mar

Una gaviota sobrevuela la playa a una altura de 12 metros sobre el agua; Juan se encuentra buceando a una profundidad de 8 metros, y una avioneta vuela a una altura de 50 metros sobre el nivel del mar.

ACTIVIDAD 3: Dibuja un esquema con el enunciado descrito en la situación 6. Marca con números positivos o negativos la posición de cada uno de los datos.

Situación 7. El ascensor (juego)

Planteamos esta situación como un juego de tablero para varios jugadores. El tablero es el representado en la tabla de la derecha, y necesitamos, además, un dado numerado con +1, +2, +3, −1, −2 y −3 y una ficha de distinto color para cada jugador.

Reglas del juego:

- Para empezar, todos los jugadores colocan sus fichas en el tercer piso.
- Por turnos, lanzan el dado y mueven sus fichas tantos pisos arriba o abajo, según indique el dado.
- Cuando el resultado de una jugada suponga una «salida del edificio», se pasará el turno sin mover.
- Gana quien consiga llevar el ascensor a la planta baja.

TABLA 7.4

Juego del ascensor

Piso 9.º	
Piso 8.º	
Piso 7.º	
Piso 6.º	
Piso 5.º	
Piso 4.º	
Piso 3.º	
Piso 2.º	
Piso 1.º	
Planta baja	
Sótano 1	
Sótano 2	
Sótano 3	
Sótano 4	

Éste y otros juegos similares permiten que los estudiantes se familiaricen con situaciones en las que se pasa con frecuencia a «uno y otro lado» del cero.

En el mismo contexto se pueden plantear situaciones problemáticas, como, por ejemplo:

a) Un vecino se encuentra en el 5.º piso y va a recoger su coche que se encuentra en el sótano 3. ¿Cuántas plantas debe bajar?
b) A continuación, una señora llama al ascensor desde el sótano 1. El ascensor, ¿sube o baja? ¿Cuántas plantas? Si para ir a su apartamento debe subir 8 plantas, ¿en qué piso está su vivienda?

Situación 8. Cronología

Cleopatra nació en el año 69 a. C., heredó el trono de Ptolomeo XII en el año 51 a. C. y murió con 39 años. ¿Con cuántos años fue reina? ¿En qué año murió?

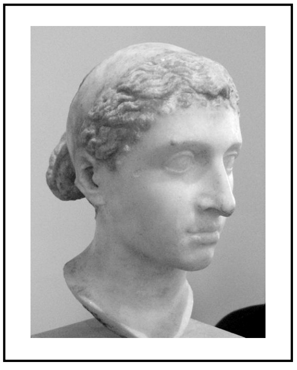


Figura 7.3.—Cleopatra.

Situaciones matemáticas

Con este nombre nos referimos a modelos o situaciones formales que, de alguna manera, se apoyan en los números enteros. Nos referimos a comparaciones de orden, modelizaciones para la práctica de operaciones aritméticas, secuencias numéricas o representaciones y modelos geométricos. Por su conocimiento y difusión generalizada, presentamos un par de ejemplos que muestran la presencia de los números negativos en el plano cartesiano.

Situación 9. Coordenadas en el plano cartesiano (I)

Indica las coordenadas de los vértices de cada uno de los triángulos siguientes:

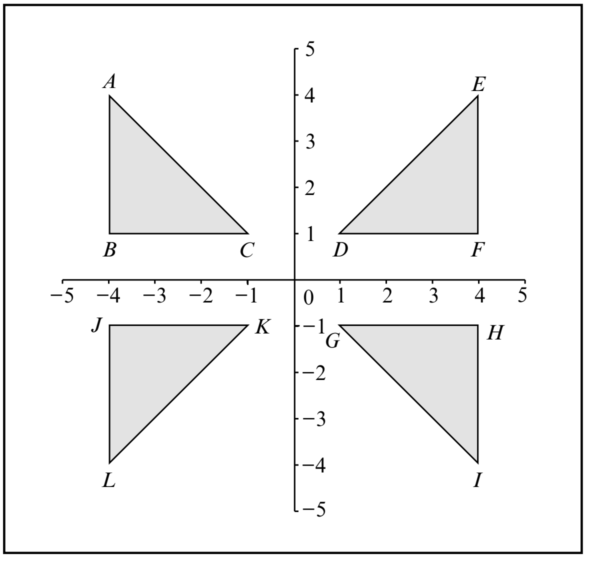


Figura 7.4.—Coordenadas en el plano.

Situación 10. Plano cartesiano (II)

El mosquito P se mueve en línea recta del punto $(-4, +3)$ al $(+5, -3)$ y luego al $(+6, 0)$, y su mosquita M, su mosquita preferida, parte del $(0, -3)$, pasa por $(+4, +1)$ y descansa en el $(+5, -1)$. Dibuja las trayectorias rectilíneas en un plano cartesiano y averigua si se encuentran indicando, en su caso, las coordenadas del punto de encuentro.

Situación 11. Los números enteros como conjuntos de fichas (Krause, 1991)

Podemos representar a los números enteros como conjuntos de fichas de dos colores, por ejemplo, blancas y negras. Las blancas tendrán sentido positivo y las negras negativo.

Las siguientes situaciones representarán al número −5:

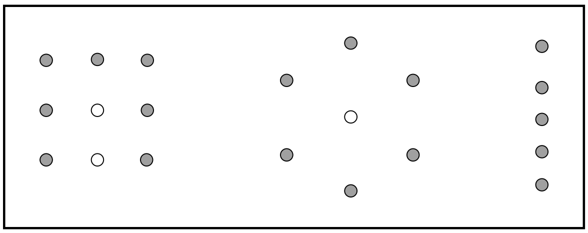


Figura 7.5.—Colecciones de fichas.

Pues bien:

a) Encuentra tres representaciones del número entero +3.
b) Piensa una definición de suma de números enteros basada en este tipo de representaciones.
c) Realiza la operación (−5) + (+3) utilizando tres elecciones distintas de los representantes de cada sumando. La suma que has definido, ¿es independiente de los representantes?
d) ¿Cuál puede ser la representación más sencilla (representante canónico) de cada número entero?
e) Comprueba el cumplimiento o no de las propiedades conmutativa, asociativa y elemento neutro para la suma de números enteros que has definido.

También podemos incluir en este tipo de situaciones una gran variedad de juegos que pueden tener gran interés en el aula:

Situación 12. Juego de pistas (Alsina et al., 1982)

Participan de cuatro a seis jugadores.

Material. Un tablero como el del modelo, dos dados de diferente color (uno para avanzar en sentido positivo y otro para hacerlo en sentido negativo) y unas 20 tarjetas con mensajes de este tipo o parecidos:

- Tira otra vez.
- Vuelve a comenzar.
- Pasa al opuesto.
- Pasa al opuesto más 5 positivo.
- Pasa al opuesto más 6 negativo.
- Pasa al opuesto menos 7 negativo.
- Pasa al opuesto menos 4 negativo.
- Tira una vez el dado positivo.
- Tira una vez el dado negativo.
- Dos turnos sin tirar.
- Corre 8 espacios en sentido positivo.
- Corre 5 espacios en sentido negativo.

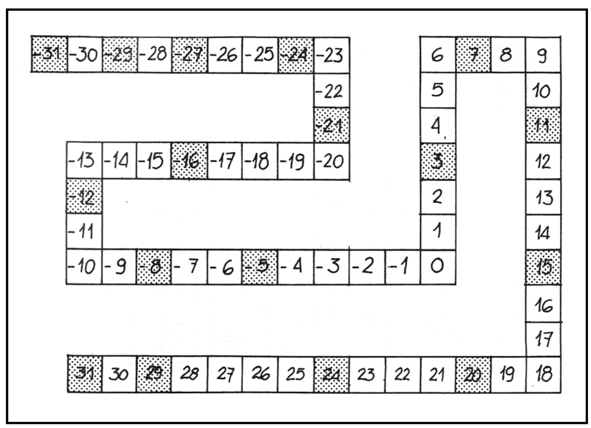


Figura 7.6.—Juego de pistas.

Desarrollo. Al comenzar, cada jugador escogerá el color del dado que usará en toda la partida. Se juega igual que en el Juego de la Oca, teniendo en cuenta que cuando se caiga en una casilla pintada se tendrá que escoger la tarjeta que toque y seguir sus instrucciones. Gana el primero que llegue a la meta propuesta.

ACTIVIDAD 4: Enuncia varias cuestiones dirigidas a alumnos de 6.º de Primaria basadas cada una de ellas en situaciones problemáticas que estén relacionadas con fenómenos físicos, cronológicos, contables, de referencia y matemáticos, respectivamente.

4. DE LA FAMILIARIZACIÓN A LA FORMALIZACIÓN

Aquellas situaciones de la vida cotidiana en que los números enteros están presentes, de una manera u otra, sirven como punto de partida para iniciar el trabajo de los escolares sobre este tema. Además de comprender la necesidad de ampliar el campo de los números para dar respuesta a estas necesidades, los alumnos podrán interpretar de forma significativa operaciones y relaciones importantes como son la adición de números enteros o bien su relación de orden, que, de otra manera, no serían fáciles de entender cuando entran en juego los números negativos.

Sin embargo, el significado asociado a contextos reales cercanos a otras operaciones con números enteros no es ni mucho menos intuitivo. Por ejemplo, la resta de deudas no tiene soporte intuitivo fácil. Aún resultan más complicadas las cosas cuando entra en juego la multiplicación, puesto que poco o ningún sentido tiene para ellos multiplicar desplazamientos, temperaturas u otras cantidades dirigidas. Como se ha comentado, históricamente, los números enteros surgen como respuesta a problemas de naturaleza matemática más que por otros de índole doméstica o natural, para lo cual sería suficiente con los números adjetivados. Esto conlleva un desarrollo matemático formal, necesario para el conocimiento de estos números, de sus operaciones y de sus propiedades, así como un manejo adecuado de las operaciones con estos números.

Por todo ello, al considerar los números enteros como tema de estudio, no podemos obviar estos problemas. A nivel metodológico parece adecuado que en la enseñanza obligatoria se introduzca este conjunto numérico de manera natural e intuitiva y utilizar esta cercanía para la familiarización y descubrimiento de las operaciones y propiedades iniciales. En algún momento habrá que iniciar la formalización que debe planificarse y ponderarse de manera racional, vinculada, siempre que sea posible, hacia cuestiones prácticas y atractivas para el alumnado.

En esta sección se presentan alternativas de formalización, desde vías de aproximación que tienen que ver con las aplicaciones de partida hasta otras que siguen métodos formales.

4.1. Modelos de aproximación al conjunto de los números enteros

A grandes rasgos, y en función de las situaciones de partida, podemos clasificar las distintas vías de aproximación al conjunto de los números enteros Z en modelos aritméticos, algebraicos y geométricos, dependiendo del campo en que se encuentre el problema de partida y los conceptos que se empleen en su construcción teórica.

Si bien los modelos algebraicos tienen un interés particular, habida cuenta que los números negativos aparecen como soluciones a ecuaciones imposibles de resolver en el conjunto de los números naturales, nos centramos en los modelos aritméticos y presentamos el modelo geométrico de la recta real. Cuando se introducen en Primaria los números enteros, los estudiantes aún no están familiarizados con los elementos de naturaleza algebraica.

Modelos aritméticos

Estos modelos introducen los números negativos como necesidad de resolver el problema de la resta de dos números naturales cualesquiera. Existen otras alternativas más directas que, apoyadas en situaciones concretas, definen los números enteros como restas y plantean las operaciones con ellos de forma directa, reducen la resta a una suma y utilizan la propiedad distributiva para llegar a la multiplicación de números negativos.

Nosotros presentamos de forma sucinta un método inductivo y experimental, más formal y fundamentado. En este modelo los números enteros y sus operaciones se definen a partir de las tablas construidas para las operaciones de números naturales. Así, por ejemplo, los números positivos se identifican con los números naturales, y para introducir los números negativos se parte de las tablas de restar en N.

Entre las regularidades que se observan en la tabla 7.5, se observa que diferencias como $0 - 1$, $1 - 2$, $2 - 3$, etc., no tienen como resultado un número natural; también se interpreta que deberían tener el mismo resultado. Para dar solución a estas limitaciones se les asigna un nuevo ente matemático, denominado «opuesto de 1», que se simboliza por **−1.**

A las diferencias $0 - 2$, $1 - 3$, $2 - 4$, etc., se les asigna el «opuesto de 2», que se simboliza por **−2**, y así sucesivamente se pueden construir los números negativos como valores simétricos de los naturales.

TABLA 7.5

Tabla de restar

4 − 0 = 4	4 − 1 = 3	4 − 2 = 2	4 − 3 = 1	4 − 4 = 0	4 − 5 = ?	4 − 6 = ?
3 − 0 = 3	3 − 1 = 2	3 − 2 = 1	3 − 3 = 0	3 − 4 = ?	3 − 5 = ?	3 − 6 = ?
2 − 0 = 2	2 − 1 = 1	2 − 2 = 0	2 − 3 = ?	2 − 4 = ?	2 − 5 = ?	2 − 6 = ?
1 − 0 = 1	1 − 1 = 0	1 − 2 = ?	1 − 3 = ?	1 − 4 = ?	1 − 5 = ?	1 − 6 = ?
0 − 0 = 0	0 − 1 = ?	0 − 2 = ?	0 − 3 = ?	0 − 4 = ?	0 − 5 = ?	0 − 6 = ?

ACTIVIDAD 1: Continúa la secuencia de las diferencias que tienen el mismo resultado que 0 – 3. Continúa igualmente la secuencia de las diferencias que tienen igual resultado que 0 – 6. Haz lo mismo con la secuencia de diferencias que comiencen por 0 – 10. Simboliza cada una de ellas con su notación negativa.

ACTIVIDAD 2: Explica por qué retroceder 7 m es semejante con avanzar primero 2 m y luego retroceder 9 m. Escribe todas las diferencias que hay en la tabla que tienen por resultado –7; escribe también las diferencias con resultado –15. ¿Qué significan cada una de estas secuencias? ¿Por qué se les llama «el opuesto de»?

Números enteros

De forma general, para cada número natural $\boldsymbol{n}$ hemos definido su opuesto $\boldsymbol{-n}$, con la condición: $\boldsymbol{n + (-n) = 0}$. El conjunto de todos los números enteros, que se escribe Z, es el formado por los números positivos (naturales) y por los números negativos que acabamos de definir:

$$Z = \{..., -n \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots n, ...\}$$

Esta nueva secuencia numérica formada por los números negativos cuenta con una relación de orden. En las columnas de la tabla 7.5 observamos que todos los números van disminuyendo una unidad, por lo que se puede inferir:

$$\ldots < -5 < -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \ldots$$

En ocasiones, los números positivos se representan con el signo «+» delante; así, la notación +3 indica el número «positivo 3». Pero lo usual es que los números positivos se escriban sin el signo, ya que se identifican con los naturales.

ACTIVIDAD 3: Ejemplifica el negativo –3 de varias maneras distintas.

Suma de enteros

Para definir la suma de dos números enteros cualesquiera se recurre a la misma estrategia: comenzar con situaciones reales, plantear problemas matemáticos a partir de ellos e inferir generalizaciones desde un modelo como el siguiente:

TABLA 7.6

Tabla de sumar

$4 + (-2) = ?$	$4 + (-1) = ?$	$4 + 0 = 4$	$4 + 1 = 5$	$4 + 2 = 6$
$3 + (-2) = ?$	$3 + (-1) = ?$	$3 + 0 = 3$	$3 + 1 = 4$	$3 + 2 = 5$
$2 + (-2) = ?$	$2 + (-1) = ?$	$2 + 0 = 2$	$2 + 1 = 3$	$2 + 2 = 4$
$1 + (-2) = ?$	$1 + (-1) = ?$	$1 + 0 = 1$	$1 + 1 = 2$	$1 + 2 = 3$
$0 + (-2) = ?$	$0 + (-1) = ?$	$0 + 0 = 0$	$0 + 1 = 1$	$0 + 2 = 2$
$(-1) + (-2) = ?$	$(-1) + (-1) = ?$	$(-1) + 0 = ?$	$(-1) + 1 = 0$	$(-1) + 2 = ?$
$(-2) + (-2) = ?$	$(-2) + (-1) = ?$	$(-2) + 0 = ?$	$(-2) + 1 = ?$	$(-2) + 2 = ?$

Se observa que en las columnas 3.ª, 4.ª y 5.ª se conocen los resultados donde van apareciendo los términos de la secuencia numérica en el orden establecido y en sentido descendente. Resulta fácil inferir los términos de las dos últimas filas de esta tabla, inferencia que puede extenderse al resto de columnas.

ACTIVIDAD 4: Copia y completa los datos que aparecen con interrogación en la tabla 7.2 según los resultados que se infieren.

Si observamos los resultados de la tabla ya completa, las reglas generales, válidas para la suma de dos números enteros cualesquiera, dicen que:

- La suma de dos positivos es siempre otro positivo, cuyo valor es la suma de sus valores:

$$(a) + (b) = (a + b)$$

- La suma de dos negativos es siempre un negativo, cuyo valor es la suma de sus valores:

$$(-a) + (-b) = -(a + b).$$

- La suma de un positivo $(+a)$ y un negativo $(-b)$ tiene tres soluciones posibles:
  1. El valor del positivo es mayor que el del negativo, $a > b$, entonces $a + (-b) = a - b$.
  2. El valor del negativo es mayor que el positivo, $b > a$, entonces $a + (-b) = -(b - a)$.
  3. Positivo y negativo tienen el mismo valor, $a = b$, entonces $a + (-a) = 0$.

ACTIVIDAD 5: Ejemplifica las reglas de la suma con situaciones de ganancia-pérdida, avance-retroceso y haber-deuda.

Producto de enteros

En el caso de la multiplicación no hay situaciones concretas que puedan ilustrar todas las reglas del producto. Sí es posible establecer las definiciones apropiadas a partir de la tabla 7.7. En la tabla se utilizan propiedades conocidas del producto de los números naturales, como el hecho de que un número por 0 da como resultado 0, y que un número por la unidad, 1, es igual al mismo número.

TABLA 7.7

Tabla de multiplicar

$4 \times (-2) =$?	$4 \times (-1) =$?	$4 \times 0 = 0$	$4 \times 1 = 4$	$4 \times 2 = 8$
$3 \times (-2) =$?	$3 \times (-1) =$?	$3 \times 0 = 0$	$3 \times 1 = 3$	$3 \times 2 = 6$
$2 \times (-2) =$?	$2 \times (-1) =$?	$2 \times 0 = 0$	$2 \times 1 = 2$	$2 \times 2 = 4$
$1 \times (-2) = -2$	$1 \times (-1) = -1$	$1 \times 0 = 0$	$1 \times 1 = 1$	$1 \times 2 = 2$
$0 \times (-2) = 0$	$0 \times (-1) = 0$	$0 \times 0 = 0$	$0 \times 1 = 0$	$0 \times 2 = 0$
$(-1) \times (-2) =$?	$(-1) \times (-1) =$?	$(-1) \times 0 = 0$	$(-1) \times 1 = -1$	$(-1) \times 2 =$?
$(-2) \times (-2) =$?	$(-2) \times (-1) =$?	$(-2) \times 0 = 0$	$(-2) \times 1 = -2$	$(-2) \times 2 =$?
$(-3) \times (-2) =$?	$(-3) \times (-1) =$?	$(-3) \times 0 = 0$	$(-3) \times 1 = -3$	$(-3) \times 2 =$?
$(-4) \times (-2) =$?	$(-4) \times (-1) =$?	$(-4) \times 0 = 0$	$(-4) \times 1 = -4$	$(-4) \times 2 =$?

A partir de estos datos se observan regularidades de orden que sirven para inferir los datos que faltan y completar la tabla. De este modo, es posible definir de manera generalizada el producto de dos números enteros cualesquiera.

ACTIVIDAD 6: Copia y completa los datos que aparecen con interrogación en la tabla 7.7 según los resultados que se infieren. Generalizando, indica cómo se definiría el producto de números enteros dependiendo de que éstos sean positivos o negativos.

Si observamos los resultados de la tabla 7.7 ya completa, las reglas generales, válidas para el producto de dos números enteros cualesquiera, dicen que:

- El producto de dos números positivos es siempre otro positivo cuyo valor es el producto de sus valores:

$$(a) \times (b) = (a \times b)$$

- El producto de dos negativos es siempre un positivo cuyo valor es el producto de sus valores:

$$(-a) \times (-b) = (a \times b)$$

- El producto de un positivo (a) por un negativo ($-b$) es siempre negativo y su valor es el producto de sus valores:

$$(a) \times (-b) = -(a \times b)$$

Modelos geométricos: la recta numérica

En la interpretación y comprensión de los números enteros desempeñó un papel importante su utilidad en geometría mediante el uso en los sistemas de coordenadas, donde los números negativos se hacen indispensables para describir todas las posibles posiciones de los diferentes objetos geométricos.

Los distintos modelos para introducir los números enteros desde una perspectiva geométrica se basan, todos ellos, en la recta numérica como soporte intuitivo.

Sea la recta «r» horizontal y A un punto sobre ella que se considera como punto origen o *punto cero;* este punto A determina dos semirrectas con sentidos opuestos.

La semirrecta de la derecha se considera con sentido positivo, mientras que la semirrecta de la izquierda se considera con sentido negativo.

Sea A_1 un punto situado a la derecha de A, que elegimos como *punto unidad,* ya que el *segmento AA_1 se toma como unidad.*

Con unidad de longitud AA_1 se determinan los puntos: A_1, A_2, A_3, A_4 ..., A_n ..., situados a la derecha de A, consecutivos y en orden creciente, tales que la distancia entre dos consecutivos es la unidad. De igual manera, se determinan los puntos A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 ..., A'_n ..., situados a la izquierda del origen, de modo consecutivo y ordenado.

Los puntos A, A_1, A_2, A_3 ..., A_n ..., en la semirrecta positiva, se identifican con los números naturales o positivos: 0, 1, 2, 3 ..., n ..., mientras que los puntos en la semirrecta negativa A'_1, A'_2, A'_3 ..., A'_n ..., se identifican con los números negativos: -1, -2, -3 ..., $-n$, respectivamente.

De esta forma se establece un criterio en la recta que permite identificar puntos con números, dando lugar a una representación del conjunto de los números enteros que se llama recta numérica entera, como muestra la figura 7.7.

Esta representación contribuye a interpretar las operaciones de suma y multiplicación y la relación de orden.

La suma consiste en una traslación en un sentido u otro, que depende de que el segundo sumando sea un número positivo o negativo.

Para sumar un número entero positivo se parte de la situación del primer sumando en la recta entera y se avanza hacia la derecha tantas unidades como indica el segundo sumando. *Ejemplo.* Para realizar $(-1) + 5$ nos situamos en el punto (-1) y avanzamos 5 unidades hacia la derecha, hasta situarnos en el 4, es decir, $(-1) + 5 = 4$.

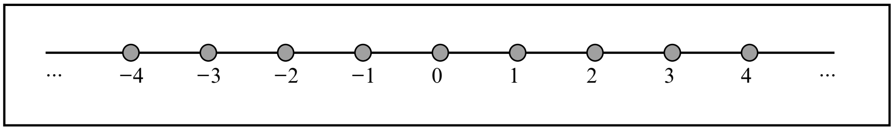


Figura 7.7.—Representación de los números enteros en la recta numérica (recta entera).

Igualmente, para sumar un número negativo se parte de la situación del primer sumando en la recta y se avanza hacia la izquierda tantas unidades como indica ese segundo sumando. *Ejemplo.* Para realizar 4 + (−3) nos situamos en el punto 4 y avanzamos 3 unidades hacia la izquierda, hasta alcanzar 1, es decir, 4 + (−3) = 1.

La resta de dos enteros consiste en sumar al minuendo el opuesto del sustraendo, con lo cual una resta se reduce a la suma del opuesto. Sobre la recta numérica, consiste en una translación. En este caso el desplazamiento es a la izquierda cuando se resta un número positivo, y a la derecha si se resta uno negativo.

ACTIVIDAD 7: Dibuja la recta numérica y, basándote en ella, realiza las siguientes operaciones:

a) (+ 2) + (+ 5). *b*) (–5) + (+ 3).
c) (–2) + (–4). *d*) (–2) – (–5).
e) (+ 2) × (+ 3). *f*) (+ 2) × (–3).
g) (–2) × (–3).

ACTIVIDAD 8:

a) Mediante ejemplos numéricos, verifica la propiedad asociativa para la suma de números enteros.
b) Mediante un ejemplo numérico sencillo, verifica la propiedad conmutativa de la multiplicación de números enteros.

También la multiplicación de números enteros tiene una interpretación en la recta numérica. La multiplicación se entiende como una dilatación o ampliación respecto al origen cuando se trata de multiplicar por un número positivo; como una dilatación seguida de una simetría respecto del origen, cuando se multiplica por un número negativo.

ACTIVIDAD 9: Interpreta sobre la recta numérica los siguientes productos:

4 × 3; 3 × (–2); (–4) × 2; (–3) × (–5)

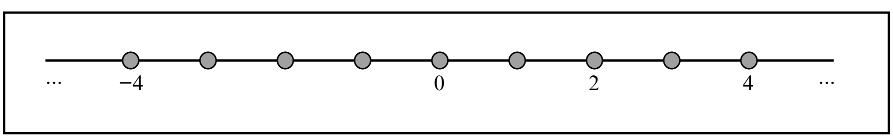


Figura 7.8.—Producto de números enteros basado en la recta entera.

ACTIVIDADES PARA PRACTICAR

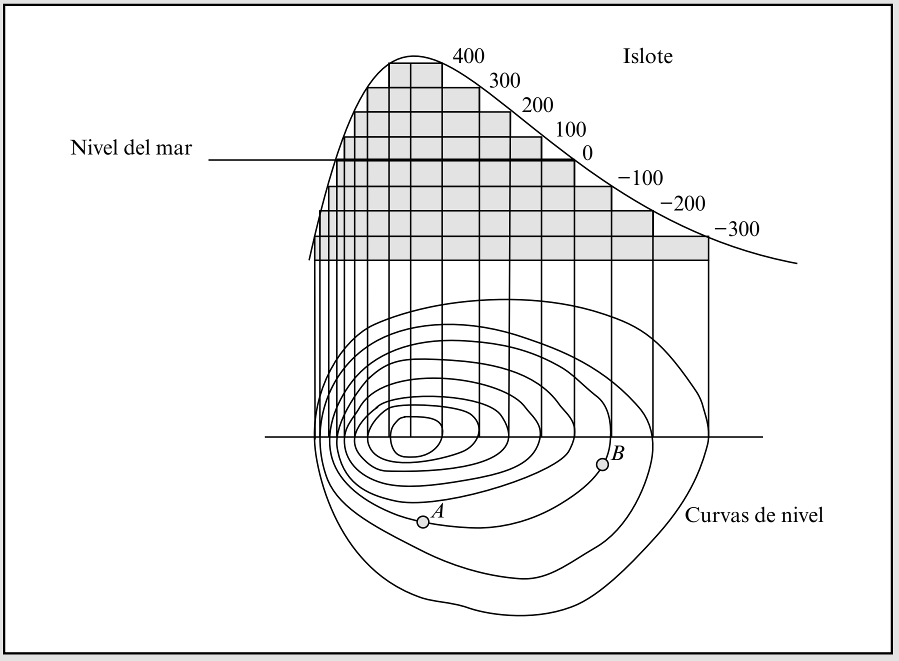
1. Ya sabes que para medir alturas o profundidades se toma como referencia el nivel del mar. En las dos tablas siguientes se indican las alturas de algunas montañas y las profundidades de algunas fosas marinas conocidas:

Montañas	Altura en metros
Teide	3.718
Everest	8.848
Mont Blanc	4.810

Fosas	Profundidad
F. de Puerto Rico	9.219
F. de las Marianas	10.863
F. de Filipinas	10.540

- ¿Qué montaña es la más alta?
- ¿Qué fosa es la más profunda?
- ¿Qué diferencia de altura hay entre el Everest y el Teide?
- ¿Qué diferencia de altura existe entre la Fosa de las Marianas y la de las Filipinas?
- ¿Cuál es la diferencia entre el pico más alto y la fosa más profunda?

2. En la siguiente figura la parte superior representa un islote en el que se indica a la derecha la elevación o la profundidad. La parte inferior es un plano de relieve en el que las líneas cerradas son las denominadas curvas de nivel, que unen los lugares que se encuentran a la misma altura o profundidad:



a) Sitúa sobre las curvas de nivel un punto C que se encuentre a una altura de 200 metros, un punto D que se encuentre a una profundidad de 100 metros, un punto E que se sitúe a una profundidad de 300 metros y otro punto F que se encuentre sobre el nivel del mar.

b) ¿Qué diferencia de altura hay entre los puntos A y B? ¿Y entre los puntos C y D? ¿Y entre los puntos D y E?

c) La zona en la que se ubica el islote ha tenido una elevación, de manera que el nivel del mar baja 10 metros. ¿Qué valores corresponden ahora a las distintas curvas de nivel? ¿Cuál es la diferencia de altura entre C y D?

3. Una fábrica tiene 10 pisos sobre la calle y 5 sótanos. El montacargas se mueve a una velocidad de tres pisos por minuto. Al pasar por cada piso se enciende una señal luminosa que indica si el ascensor sube 5 o baja 6. En un momento determinado, el montacargas se encuentra en la planta baja (planta cero) y la señal indica 5:

a) ¿Dónde estaba el montacargas hace dos minutos si en ese tiempo no ha habido paradas ni cambio de dirección?

b) ¿Dónde estará tres minutos después?

4. En una piscina hay 40.000 litros de agua. Por un grifo entran 20 litros por minuto y por un desagüe salen 28 litros por minuto. ¿Cuánta agua habrá en la piscina al cabo de cinco horas?

5. Pitágoras, filósofo y matemático griego, vivió entre los años 582 y 496 a. C. ¿A qué edad murió? ¿Cuántos años hace de eso?

6. *a*) Completa con números enteros los siguientes cuadrados mágicos. Recuerda que la suma de los números que están en horizontal, en vertical y también los que están en las dos diagonales tiene que ser siempre la misma:

		−3
−2	0	
3		

	5	
	1	
4	3	

b) Si sumas los números de las casillas que ocupan los mismos lugares en los cuadrados anteriores, obtienes otro cuadrado 3 × 3. Comprueba y responde: este nuevo cuadrado, ¿es un cuadrado mágico?:

		−3
−2	0	
3		

+

	5	
	1	
4	3	

=

	1	
7		

7. Muestra que la suma de cuadrados mágicos es siempre un cuadrado mágico.

8. Completa las siguientes tablas de operaciones con números enteros:

+	−3		−1	
+2		+2		
−4				
	0	+3		+5
−1				

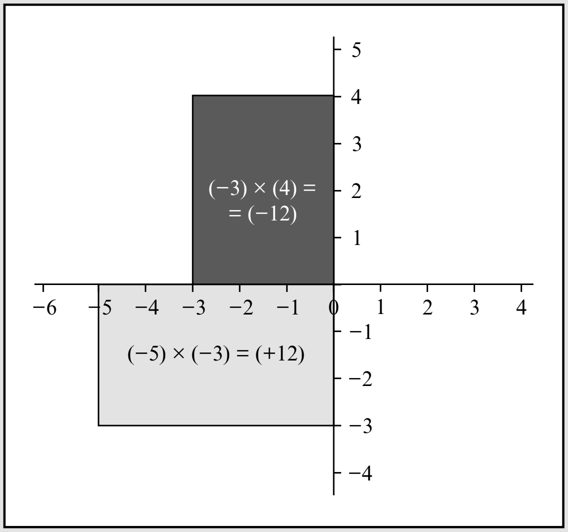
×		+6	−4	−5
			+10	
−7				
		+48		−40
−2	−2			

9. Tenemos un producto de cincuenta números enteros no nulos de los cuales sólo 17 son negativos. ¿Cuál es el signo del producto final? Razona la respuesta.

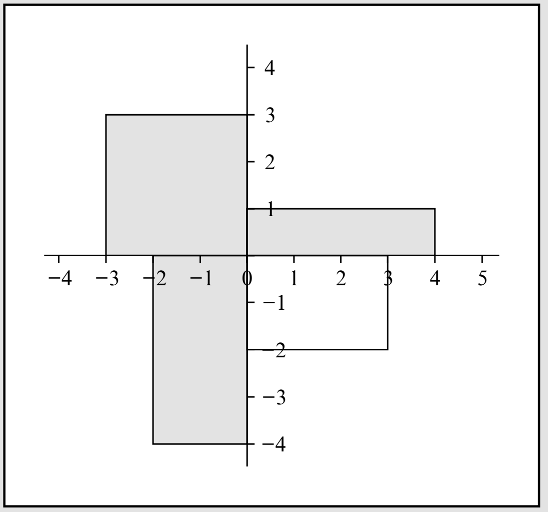
10. A continuación vamos a interpretar un sentido del producto de números enteros haciendo uso de los ejes de coordenadas:

- Traza unos ejes de coordenadas. Dichos ejes dividen al plano en cuatro cuadrantes.
- Representamos los productos de números enteros como áreas de rectángulos que se sitúan en cada cuadrante en función de sus factores; dibujamos la superficie con color blanco cuando el producto sea positivo y con color negro cuando sea negativo.

Así, en la figura siguiente se representan los productos (−3) × (+ 4) y (−5) × (−3):



Pues bien, expresa las áreas siguientes como productos y colorea los rectángulos según su signo:



INVESTIGA Y REFLEXIONA

Las siguientes actividades permiten profundizar en los conceptos sobre números enteros y en su tratamiento didáctico:

1. A continuación te proponemos que plantees varias cuestiones relacionadas con la siguiente situación hipotética.

En la segunda quincena de junio vamos a acampar en la Laguna de la Caldera (Sierra Nevada), que se encuentra a 3.050 m de altitud. La distancia de Granada al albergue es de 27,5 km, y del albergue a la laguna de 6,35 km. Estaremos allí 3 días (2 noches). Al preparar la mochila debes tener en cuenta que las temperaturas en esta época del año suelen oscilar entre los 30 ºC al mediodía y los 3 ºC bajo cero en la noche. El precio de la excursión es de 15 euros.

Utilizando la información del texto, formula preguntas que cumplan las siguientes condiciones:

a) Que se resuelvan con una suma y una multiplicación.
b) Que utilicen números positivos y negativos.
c) Que utilicen unidades de longitud.
d) Que intervengan unidades de tiempo y dinero y el resultado sea negativo.
e) Que requieran datos que no estén en la información inicial, pero que puedan conseguirse en Internet (Seminario C.I.E.M., 1995).

2. Revisa un libro de texto de 6.º curso de matemáticas de Educación Primaria y analiza de qué forma se presentan los números enteros en el libro. Reflexiona sobre el nivel de formalización que se aborda y estudia y comenta el tipo de ejercicios que se proponen.

3. Elabora un listado de 10 situaciones problemáticas relacionadas con los números enteros. Identifica de qué tipo es cada una de ellas.

4. Elabora una muestra de ejercicios y problemas variados sobre números enteros (puedes utilizar varios libros de texto), propón su realización a varios escolares con edades y conocimientos adecuados y analiza los resultados.

5. Lleva a cabo una reflexión sobre las dificultades personales con los números enteros (tareas más difíciles, errores usuales, etc.).

6. Busca recursos informáticos para trabajar los números enteros. Analiza qué tipo de actividades proponen y comenta su interés didáctico.

7. Elabora un mapa conceptual sobre los números enteros, su utilidad en diversos contextos y situaciones, los conceptos que están relacionados con ellos y la forma en que se relacionan.

BIBLIOGRAFÍA

Alsina, C., Barba, D., Batlle, I., Burgués, C., Giménez. J. y Partegás, J. (1982). *Didáctica de los números enteros*. Madrid: Nuestra Cultura.

González-Mari, J. L. (2001). Relatividad aditiva y números enteros. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de las Matemáticas en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis.

Jimeno, M. (1990). Vías de acceso a *Z*. En J. L. González, M. D. Iriarte, A. Ortiz, I. Vargas-Machuca, M. Jimeno, A. Ortiz y otros (Eds.), *Números enteros*. Madrid: Síntesis.

Krause, E. F. (1991). *Mathematics for Elementary Teachers. A balanced approach*. Lexington, Massachussets D.C.: Heath and Company.

NCTM (2000). *Principios y estándares para la Educación Matemática* (versión española de *Principles and Standards for School Mathematics,* traducida por Fernández-Reyes, M.). Sevilla: SAEM THALES-NCTM.

Seminario C.I.E.M. (1995). *Resolución de problemas en el tercer ciclo de EGB*. Granada: SAEM THALES-Universidad de Granada.

8 Números racionales

PABLO FLORES MARTÍNEZ
MANUEL TORRALBO RODRÍGUEZ

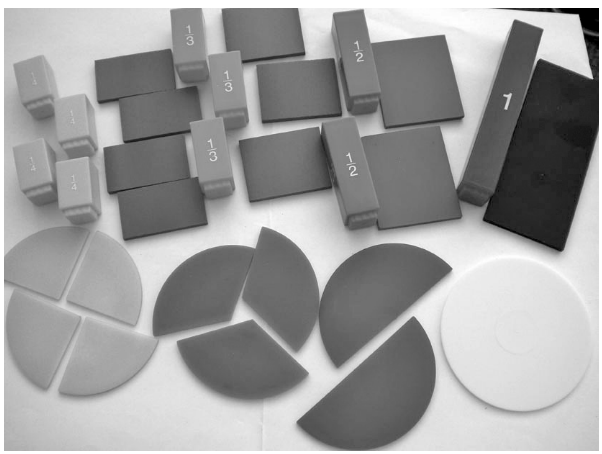


Figura 8.1.—¿Cuánto es la mitad de un cuarto de círculo?

Los números naturales permiten resolver multitud de problemas en los cuales se manejan cantidades discretas, es decir, cantidades que se pueden medir por reiteración de una unidad. En estos casos la cantidad o cantidades a medir siempre son múltiplos de la unidad. Hay otras situaciones en las que la unidad de medida es mayor que la cantidad que se quiere medir. Así ocurre cuando hay que repartir una torta entre tres niños. La unidad de medida —torta— es mayor que la cantidad que se quiere medir: parte de torta que corresponde a cada niño. En éstos y en muchos otros casos la unidad de medida es mayor que la cantidad que se quiere medir, y para ello hay que medir por comparación. Si se comparan dos medidas en una magnitud continua, surge la idea de razón, y con ella la de número racional.

En la vida cotidiana es necesario medir cantidades de distintas magnitudes como longitud, área, capacidad, peso y tiempo, muchas de ellas menores que la unidad de medida, para lo cual se necesita extender la aritmética más allá de los números naturales. A veces se puede reducir el problema de medir al de contar, escogiendo una unidad de medida suficientemente pequeña. Hay otras situaciones en que aquello que se mide no contiene a la unidad un número exacto de veces, por lo cual sólo se puede decir que su medida está entre dos enteros consecutivos (el bolígrafo mide entre 14 y 15 centímetros, por ejemplo). Para abordar y resolver estos problemas dividimos la unidad en partes iguales. Los números que se obtienen al medir cantidades en magnitudes continuas a partir de la división de la unidad en partes iguales se llaman números racionales. Se pueden expresar de diversas formas, las más conocidas son la notación fraccionaria y la decimal. Estas dos notaciones tienen un uso muy amplio, por ello son importantes y se enseñan en Educación Primaria como fracciones y números decimales. En este texto se considera que las fracciones y los decimales son objetos matemáticos que representan a los números racionales.

ACTIVIDAD 1: Menciona ejemplos de uso de fracciones para medir cantidades de longitud, área, capacidad, peso y tiempo.

Con los números racionales se produce una generalización matemática importante. Entre los naturales no siempre es posible hacer una división, como en el caso de 5 : 2, ya que no hay un número natural que multiplicado por 2 dé como resultado 5. Con dos números racionales cualesquiera siempre se puede efectuar la división entre ellos, exceptuando el caso de divisor 0.

Las operaciones entre estos números mantienen las propiedades aritméticas que verifican las operaciones entre naturales. Se dice entonces que las operaciones entre los números racionales amplían las operaciones de los naturales, ya que constituyen un conjunto en el que siempre se pueden efectuar la multiplicación y la división. El conjunto de los números racionales se identifica como aquel en que tiene solución cualquier ecuación de la forma $\boldsymbol{a \times x = b}$, siendo $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ números racionales con $\boldsymbol{a \neq 0}$.

ACTIVIDAD 2: Escribe los enunciados de las propiedades que cumplen las operaciones con números naturales. Explica por qué es conveniente que los números racionales mantengan esas mismas propiedades.

1. NÚMERO RACIONAL Y CURRÍCULO ESCOLAR

La normativa curricular para las matemáticas de Educación Primaria enfatiza que los escolares, a lo largo de esta etapa educativa, deben desarrollar el sentido numérico, es decir, adquirir un conocimiento reflexivo de las relaciones numéricas y de sus operaciones. Esto requiere comprender y dominar la estructura del sistema de numeración decimal y utilizarlo para resolver problemas cotidianos y científicos.

Si bien los números racionales no aparecen formalmente antes del segundo ciclo de la Educación Primaria, desde los primeros años el escolar se relaciona con la medida de magnitudes continuas, como la longitud, el tiempo, el peso... En todas ellas aparecen medidas racionales como medio metro, un cuarto de hora o tres cuartos de kilo, empleando inicialmente una notación verbal. La introducción del euro obliga a utilizar cantidades decimales de moneda desde edades tempranas.

Durante el segundo ciclo de Primaria se lleva a cabo la introducción de los números fraccionarios y la fracción para expresar particiones y relaciones, siempre en contextos reales. Su uso va dirigido a comparar las partes de un objeto y ordenarlas bien por tamaño o bien mediante su representación gráfica. Simultáneamente, se mejora la medida, que obliga a emplear partes fraccionarias de la unidad.

La partición lleva a las fracciones unitarias, obteniendo las restantes fracciones como repeticiones de las fracciones unitarias ($\frac{2}{3}$ son 2 veces $\frac{1}{3}$). Las fracciones unitarias facilitan el comienzo operatorio con fracciones, tanto en situaciones de fraccionamiento como de medida.

ACTIVIDAD 1: Explica brevemente qué es una fracción unitaria. Escribe simbólicamente las diez fracciones unitarias más sencillas que conozcas.

Es en el tercer ciclo donde se desarrolla el estudio del número racional, trabajando las fracciones de manera más amplia y general. Se introduce formalmente la expresión decimal y su uso en el cálculo de porcentajes, con lo que se cubren las formas usuales de representar los números racionales. Relacionar las distintas representaciones entre sí es una tarea específica de este ciclo, que aboga por emplear los racionales para interpretar información de la vida cotidiana y resolver problemas.

Las operaciones, siempre en contextos sencillos que reflejen problemas del entorno, se realizan con fracciones y decimales, llegando a efectuar cálculos mentales y con calculadora. Finalmente, algunos algoritmos pueden introducirse como simplificaciones de cálculos realizados por otros medios sin llegar a convertirse en conceptos matemáticos, siendo importante que los escolares los comprendan.

El trabajo iniciado con las fracciones unitarias permite relacionar fácilmente las expresiones fraccionaria y decimal de un mismo número, especialmente con las fracciones decimales (0,7 es 7 décimas, es decir, 7 veces $\frac{1}{10}$).

El currículo, siguiendo ideas de Bruner, distingue tres actuaciones con los números racionales que deben estar relacionadas y cuya introducción es progresiva (figura 8.2):

- Acción manipulativa sobre objetos, fraccionando, repartiendo y agrupando.
- Representaciones icónicas de las fracciones y de las acciones con las representaciones.
- Representación simbólica, para expresar las acciones anteriores.

En Educación Primaria se enfatiza la manipulación y representación antes de llegar a la simbolización, acción a la que siempre deben preceder las otras dos.

ACTIVIDAD 2: Haz un esquema que resuma cómo se contemplan los números racionales en el currículo de Primaria.

ACTIVIDAD 3: Haz un resumen de los contenidos y actividades relacionados con números racionales de tres textos de matemáticas de Educación Primaria que estén en vigor, uno de cada ciclo.

ACTIVIDAD 4: Explica por qué la ecuación $a \times x = b$, con $a \neq 0$ tiene solución en el conjunto de los racionales. ¿Cuál es la solución?

Puedes ampliar información sobre este tema en: Llinares y Sánchez (1993), Alcalá (1986) y NCTM (2003).

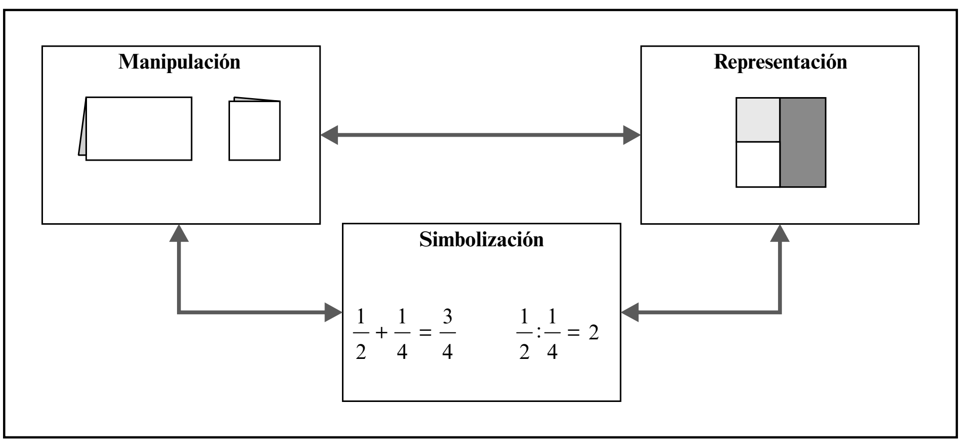


Figura 8.2.—Aprendizaje de los números racionales en Educación Primaria.

2. PARTIR Y MEDIR

El origen histórico de los números racionales se encuentra en las acciones de fraccionar, repartir y medir. Para medir longitudes y áreas que son partes de la unidad de medida, los babilonios y egipcios dividen la unidad en partes iguales, generando las fracciones unitarias. Estas fracciones unitarias permiten obtener fracciones más complejas. Parece que el ojo de Horus (figura 8.3) representa cantidades fraccionarias con las que obtener fechas. Para representar el día decimoctavo del mes, que es el dieciocho treintavos, descomponen en la mitad más un décimo de mes $\left(\frac{18}{30} = \frac{15}{30} + \frac{3}{30} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\right)$.

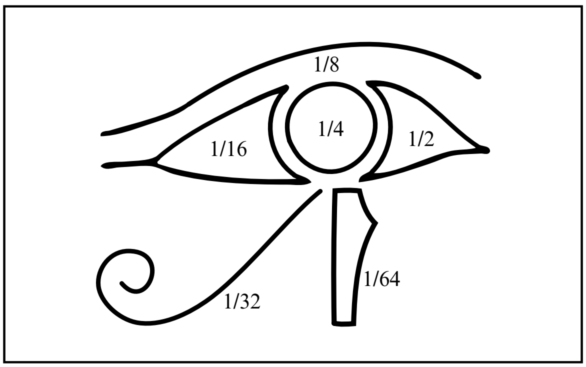


Figura 8.3.—Ojo de Horus.

La matemática griega da el paso de la medida empírica a la medida formal, abordando con fundamento la medida de magnitudes continuas. A partir de la medida de segmentos, los matemáticos griegos establecen relaciones de proporcionalidad, dando lugar a las razones entre segmentos, por lo que son precursores de la medida abstracta de longitudes. Son muy conocidas las fracciones que representan proporciones entre longitudes de cuerdas que dan lugar a sonidos armónicos, que se atribuyen a Pitágoras. Cuando los matemáticos griegos generan un proceso infinito al comparar la longitud de la diagonal de un cuadrado con la longitud de su lado, descubren la «incomensurabilidad» o imposibilidad de medir un segmento con otro determinado. Surge así una importante crisis en la historia de la matemática que hace a los griegos dirigir su atención a la geometría.

La matemática árabe, valiéndose del Sistema de Numeración Decimal, da un auge importante al manejo de los números racionales. En la aritmética de Fibonacci (1170-1250), podemos encontrar cálculos con fracciones, empleadas para resolver problemas. Simon Stevin (1548-1620) sistematiza los números racionales, aportando la notación decimal. René Descartes (1596-1650) interpreta la fracción entre longitudes para indicar su división. Estos resultados mejoran con la notación actual, que hace que las fracciones representen a los números racionales, con sus propias reglas de cálculo.

La formalización del conjunto de números racionales llegará en el siglo XIX, definiendo la fracción como un par de números enteros, el segundo distinto de cero. La relación de equivalencia entre fracciones ($\frac{a}{b}$ es equivalente a $\frac{c}{d}$ si, y solo si, $a \times d = b \times c$), lleva a definir un número racional como clase de equivalencia de fracciones. Se genera así el conjunto $Q = \frac{Z \times Z^*}{R}$, que en álgebra se llama cuerpo de fracciones de los números enteros.

En resumen, actualmente los racionales permiten:

- Expresar partes de la unidad.
- Generalizar la división para resolver cualquier ecuación de la forma $a \times x = b$, siendo a y b números racionales, $a \neq 0$. En este caso, $x = \frac{b}{a}$.

- Medir cantidades continuas de manera empírica o formal cuando dichas cantidades son mensurables.

Por tanto, los contextos más frecuentes en los que se usan los racionales son aquellos que requieren una partición (reparto), generalmente en situaciones de contrato, convenio o reparto. Pero también los que requieren expresar y operar con las unidades del sistema métrico, las unidades o períodos temporales, y otras medidas. Se aprecia que los racionales están especialmente indicados en usos matemáticos y científicos, ligados a problemas de proporcionalidad.

En conclusión, los números racionales están indicados para medir, repartir y, en general, dividir, pero también para el razonamiento proporcional. Puedes ampliar información sobre el tema en el artículo del Grupo de la APMA (1984).

3. SIGNIFICADOS DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Vamos a estudiar los significados principales que tienen los números racionales y, posteriormente, examinaremos las formas de representarlos.

3.1. Significados del número racional

Los siguientes enunciados muestran usos distintos de los números racionales:

a) Ana se comió $\frac{3}{8}$ de la tarta.
b) A Daniel le corresponden los $\frac{2}{5}$ de 10.000 €.
c) Hemos repartido 3 pizzas entre 4 chicos.
d) En media hora, Luis ha adelgazado un cuarto de kilo.
e) La rebaja es del 10%. La probabilidad es de $\frac{1}{3}$. Las apuestas se pagan 1 a 5.

Observamos que en las cuatro primeras situaciones hay un *todo* [la *tarta,* en *a*), *10.000 €* en *b*), la *pizza* en *c*), la *hora* y el *kilo* en *d*)]. El racional es una parte o **porción** de un todo.

En estas situaciones, un todo T se considera fragmentado en n partes iguales de medida P:

$$T = n \times P$$

lo cual también se expresa por $P = (1/n) \times T$.

La parte P es la fracción enésima del todo T.

Sin embargo, en el último de los enunciados se expresa una **razón** o relación de proporcionalidad, es decir, una relación entre dos o más partes: precio total y precio comercial; casos favorables y casos posibles y cantidad apostada y cantidad ganada.

En un todo (conocido o desconocido) se consideran dos partes, P_1 y P_2, donde la fracción expresa la relación entre las partes: $k/n = P_1 : P_2$.

Por tanto, distinguimos dos modos de interpretar el significado del número racional: **porción** y **razón.** En este capítulo trabajamos sobre el significado de porción o parte.

Cuando el racional expresa una **porción,** puede, a su vez, tener diversos significados, como se aprecia en los ejemplos:

- **Parte-todo:** el número racional expresa una relación multiplicativa entre el número de partes que forman la *porción* y el total de partes consideradas. $\frac{3}{8}$ *expresa la comparación entre los 8 trozos que se han hecho de la tarta y los 3 que ha tomado Ana para su porción,* en el ejemplo *a*).
- **Cociente:** el número racional es visto como la porción que resulta de una división (generalmente reparto) entre dos cantidades;

en este caso, el *todo* es la unidad de la cantidad a repartir. *Se parte cada pizza en 4 partes para entregar un trozo de cada pizza a cada uno de los chicos,* en *c*).

- **Medida:** el número racional expresa una comparación multiplicativa entre dos cantidades, tomando como unidad *(todo)* una de ellas. *Luis ha adelgazado una cuarta parte de la unidad de peso, durante un tiempo que es la mitad de una hora,* en *d*).
- **Operador:** el número racional expresa una operación multiplicativa sobre una cantidad *(todo),* indicando una división en tantas partes iguales como dice el denominador y una multiplicación por el número de partes que dice el numerador. *Para entregar la porción a Daniel,* en *b*), *se divide 10.000 en 5 partes, y lo que resulta se multiplica por 2*.

Pero el número racional también puede expresar una **razón** entre dos cantidades de la misma magnitud. En este caso, el todo no está definido, ya que propone la relación entre dos magnitudes: *la razón entre una longitud en la realidad y su imagen en el mapa (en una proporción de 1 a 20.000); el precio y la rebaja (en una proporción de 20 a 100); la posibilidad de que ocurra algo y las posibilidades totales (en una proporción de 1 a 3) y el dinero apostado y el ganado (de 1 a 5),* en *e*).

En Educación Primaria se trabaja especialmente la fracción y el número racional concebido como ***porción,*** por lo que es muy importante en cada caso identificar el *todo* o unidad a que se refiere.

3.2. Representaciones del número racional

Las expresiones $\frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ anteriores son formas de representar los números racionales.

La notación usual de los números racionales $\frac{a}{b}$ indica sus dos componentes. El número de partes que se realizan, *b,* se llama *denominador;* el número de partes que se toman, *a,* se llama *numerador*.

Con esta notación identificamos y operamos con números racionales. En general, los números racionales tienen cuatro representaciones básicas: *fracción, número decimal, lenguaje verbal* y *lenguaje pictórico*. En la figura 8.4, un naipe muestra distintos ejemplos de cómo representar el número racional *un quinto*.

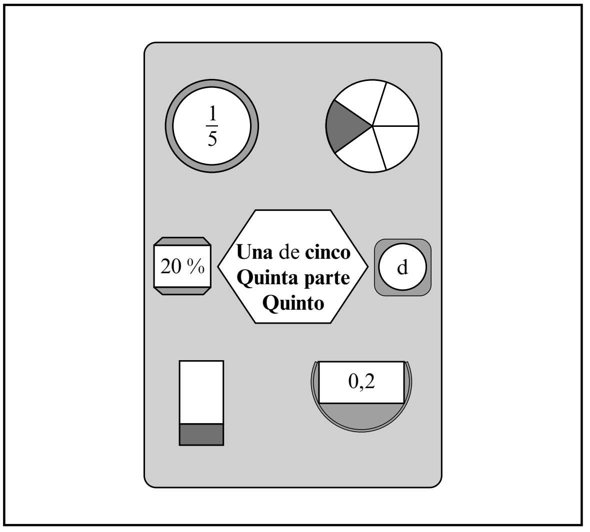


Figura 8.4.—Naipe con diversas representaciones del racional (Coriat, 1989).

Se representa un número racional en forma de *fracción* cuando se emplea su notación mediante dos números enteros (numerador y denominador) separados por una raya que los distingue.

Un número racional se expresa verbalmente con dos numerales, un cardinal en función adjetiva, que designa el numerador: un, dos, ocho, y un numeral ordinal en función sustantiva, que designa al denominador: quinto, sexto, décimo (*RAE,* p. 245).

En la figura 8.4 aparecen otras expresiones verbales de una fracción.

La representación *decimal* se construye generalizando los principios del Sistema Decimal de Numeración para expresar los números racionales. Distingue entre *parte entera* y *parte decimal,* tal como se presentará en el tema siguiente. Actualmente, hablamos de *1,25 €* para referirnos a una cantidad racional de dinero. El capítulo 9 está dedicado a estudiar los números decimales.

Por último, la representación *pictórica* requiere usar modelos gráficos para expresar el número racional. Los modelos pueden ser geométricos o materiales. En los modelos geométricos recurrimos a magnitudes geométricas continuas familiares, como la longitud, la superficie o el volumen, dando lugar a representaciones con diversas formas. En la figura 8.4 aparecen representaciones de la magnitud superficie, con un *todo* rectangular o circular. La representación con la magnitud longitud puede hacerse de dos formas, como segmentos o como puntos de la recta numérica, tal como aparece en la figura 8.5 (i) y (ii).

También se recurre a magnitudes discretas para representar racionales, como en dicha figura 8.5 apartado (iv), en el que la fracción 3/12 expresa una porción de una cantidad total de puntos (3 puntos sombreados de 12).

ACTIVIDAD 1: Amplía la información relativa a la evolución histórica de los números racionales. Infórmate de cuándo se introdujo la raya de fracción y quién lo hizo. Redacta un breve informe de cómo expresaban las fracciones los árabes.

ACTIVIDAD 2: Busca ejemplos de situaciones en las que se emplean los números racionales, identifica contextos y fenómenos concretos.

ACTIVIDAD 3: En un libro de texto, identifica diversas formas pictóricas para representar un número racional, especialmente en forma fraccionaria. Señala el *todo* de referencia de cada fracción e identifica las magnitudes.

ACTIVIDAD 4: Represente de todas las formas que conozcas el número racional $\frac{1}{4}$.

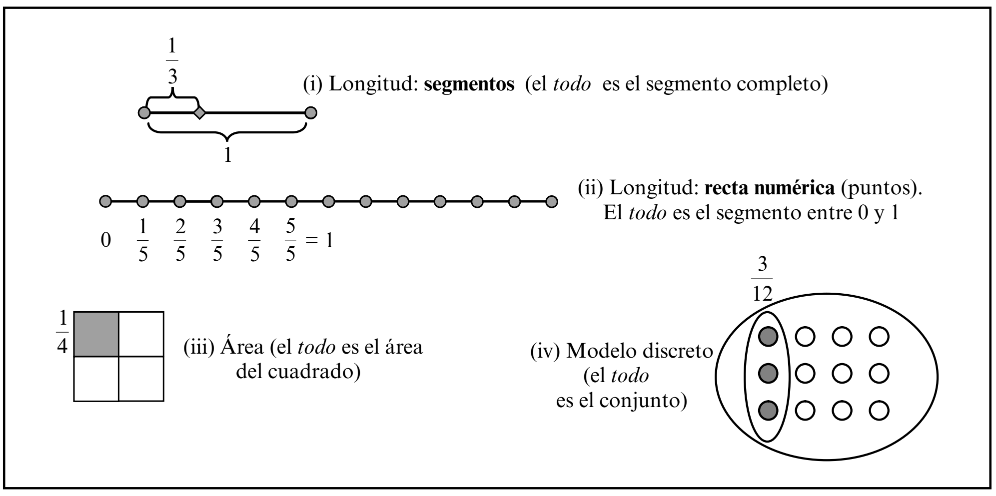


Figura 8.5.—Diversas representaciones pictóricas del racional.

4. LAS FRACCIONES

La primera representación de los números racionales que apareció en la historia fue la fraccionaria. Tal como observamos en la figura 8.6, medir una tira de papel (A) tomando como unidad otra (B), es ver cuántas veces A contiene a B. Después de colocar dos veces B sobre A queda un trozo menor que B. Para medir este trozo se divide B en partes iguales. Una manera fácil es dividirla por la mitad. En la figura se aprecia el proceso completo, que se cierra cuando alguna fracción de la unidad cabe en el trozo que queda por medir.

Se observa en esta figura que:

$$A = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{16 + 2 + 1}{8} = \frac{19}{8} \text{ veces } B$$

La fracción $\frac{19}{8}$ expresa que para obtener A hay que dividir B en 8 partes y una de ellas tomarla 19 veces.

En la situación planteada se ha comenzado por tomar *fracciones unitarias,* es decir, fracciones cuyo numerador es 1, que resultan de dividir un todo en partes iguales y tomar una de ellas, en la figura $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$.

A partir de ellas se ha obtenido una *fracción no unitaria,* $\frac{19}{8}$, que se interpreta como *19 veces* $\frac{1}{8}$.

Las fracciones en las que la porción es más grande que el todo de referencia se llaman *fracciones impropias* (en el ejemplo se considera la

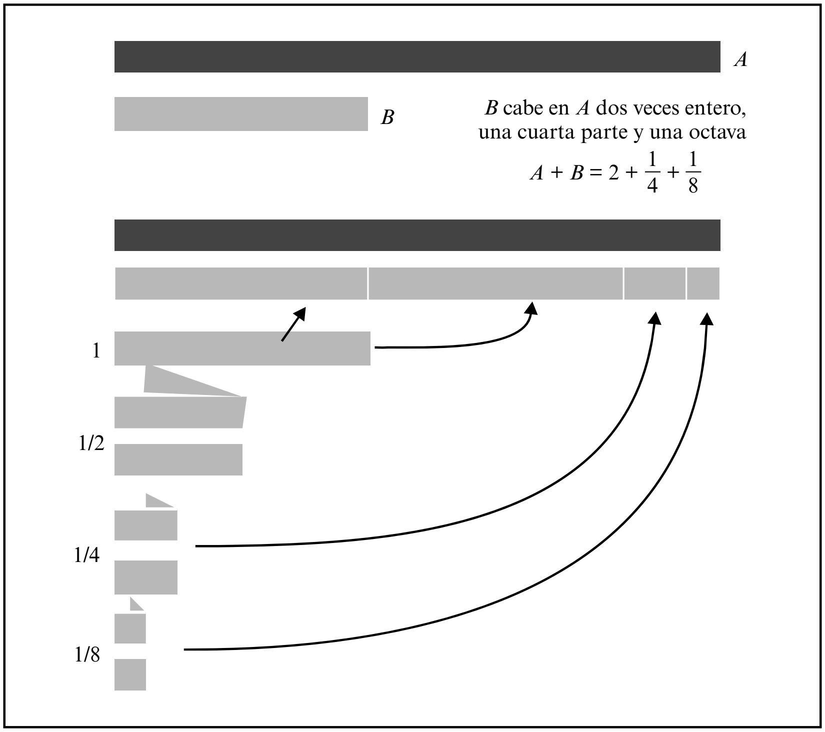


Figura 8.6.—Medida empleando fracciones.

fracción $\frac{19}{8}$, que expresa que A es19 veces $\frac{1}{8}$ de B, indicando que A es mayor que B).

Para expresar una fracción impropia se emplea la notación de *número mixto,* que encontramos en expresiones como *kilo y medio* o *dos horas y cuarto*. La notación mixta destaca la parte entera completa, dejando la *fracción propia* restante. Así, *kilo y medio* o $1\frac{1}{2}$ y *dos horas y cuarto* o $2\frac{1}{4}$ *horas,* también podrían expresarse como $1\frac{1}{2}$ *kilo* $= 3$ *veces* $\frac{1}{2}$ *kilo* $= \frac{3}{2}$ *kilo,* y $2\frac{1}{4}$ *horas* $= 9$ *veces* $\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ *horas*.

Las fracciones se utilizan en Educación Primaria para fraccionar y para realizar algunas operaciones. Inicialmente, se parte de situaciones prácticas cotidianas, empleando representaciones tanto manipulativas como pictóricas. Posteriormente, se trabaja directamente con las representaciones gráficas y se introduce progresivamente su representación simbólica. Realizar ejercicios que relacionen los fraccionamientos manipulativos con representaciones gráficas y con la expresión simbólica dota de sentido a las representaciones simbólicas. Mediante esta estrategia, el escolar llega a entender y resolver problemas sencillos partiendo de representaciones simbólicas.

ACTIVIDAD 1: Busca en la calculadora la tecla para escribir los números en forma de fracción. Busca en ella la forma de pasar una fracción impropia a número mixto.

ACTIVIDAD 2: Expresa una regla para diferenciar entre fracciones propias y fracciones impropias.

ACTIVIDAD 3: Expresa una regla para escribir una fracción impropia como número mixto. Explícala con un ejemplo.

4.1. Fraccionar, identificar y relacionar

Reparte esta torta entre tus tres hermanos. Heredamos una quinta parte de la finca. Estas situaciones son ejemplos de fraccionamiento que se ilustran en la figura 8.7. Fraccionar es partir un todo en trozos iguales. Requiere dos condiciones: que las partes sean iguales (fraccionamiento *equitativo*) y que las partes cubran el todo (fraccionamiento *exhaustivo*).

En un fraccionamiento intervienen tres datos: dos cantidades, el todo y la parte, y la relación entre ellas, que es la fracción. Las actividades y problemas que se plantean tratan de obtener uno de los tres datos, conocidos los otros dos.

Determinar cuánto pesa un trozo de $\frac{3}{4}$ *de un queso que pesa un kilo. Calcular cuánto pesa un pollo si* $\frac{1}{4}$ *del peso total son 200 gramos. Averiguar qué fracción de hora son 12 minutos.* Estos ejemplos son situaciones de fraccionamiento. En la primera se conoce la medida del todo: un queso de un kilo, y la fracción; la incógnita es la medida de la porción. En la segunda se conoce la medida de la porción (200 gramos) y la fracción, y la incógnita es la medida del todo. En la tercera se conoce el todo (la hora, 60 minutos) y la porción (12 minutos) y la incógnita es la fracción.

El fraccionamiento se puede hacer de diversas formas: manipulando objetos, dividiendo representaciones y aprovechando materiales didácticos, con recursos geométricos y mediante operaciones aritméticas.

La figura 8.8 muestra diversos fraccionamientos de una hoja de papel (todo) y el tamaño de las partes fraccionarias correspondientes. Es un ejemplo de acción manipulativa con material.

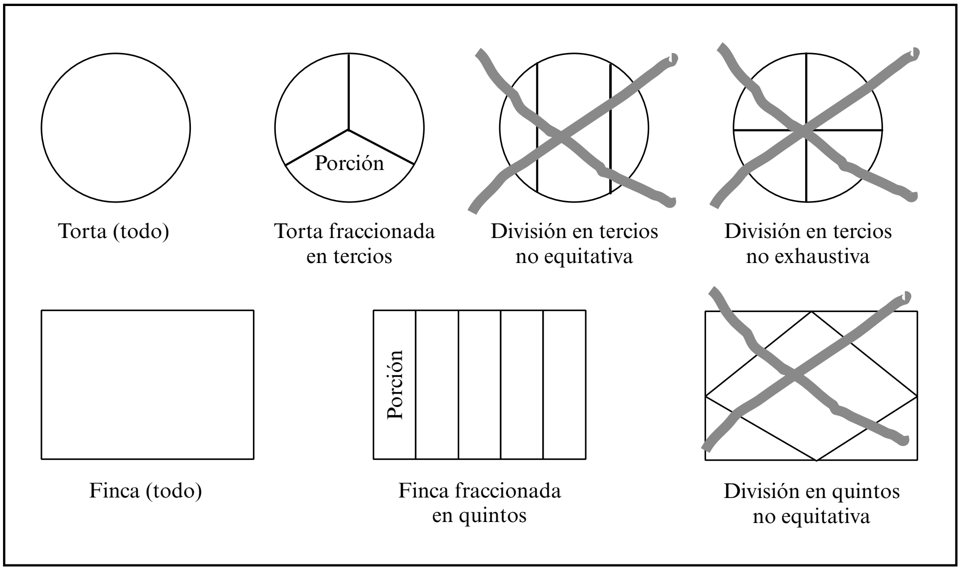


Figura 8.7.—Fraccionamiento de la torta y de la finca.

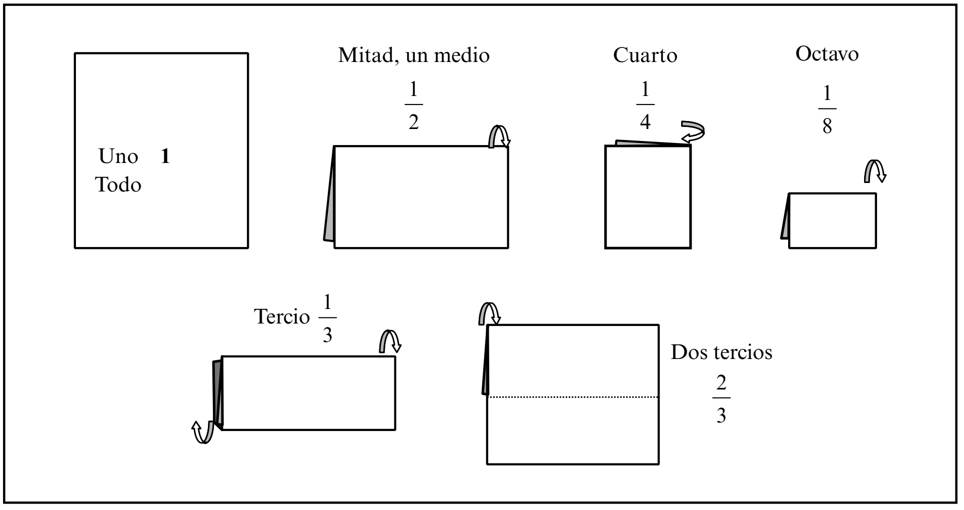


Figura 8.8.—Fraccionamiento de una hoja de papel.

Un folio o una tira de papel son un buen recurso para iniciar el fraccionamiento, ya que permite identificar las partes por superposición.

ACTIVIDAD 4: Recorta varias tiras de papel de la misma longitud. Utiliza una tira distinta para obtener $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{7}$. Explica cómo has llegado a obtener cada parte fraccionaria.

El fraccionamiento se puede hacer en representaciones geométricas, generalmente con modelos de área, como en la figura 8.9. Se muestran en ella dos ejemplos de fraccionamientos que no satisfacen alguna de las condiciones indicadas: la equitatividad y la exhaustividad. Tampoco se cumplen en fraccionamientos de la torta que lleven a trozos diferentes, o los que dejan una parte de la torta sin repartir.

En las figuras 8.8 y 8.9 se han llevado a cabo distintos fraccionamientos y se ha expresado el resultado en forma simbólica.

ACTIVIDAD 5: Representa gráficamente la fracción 1/3 en distintas figuras.

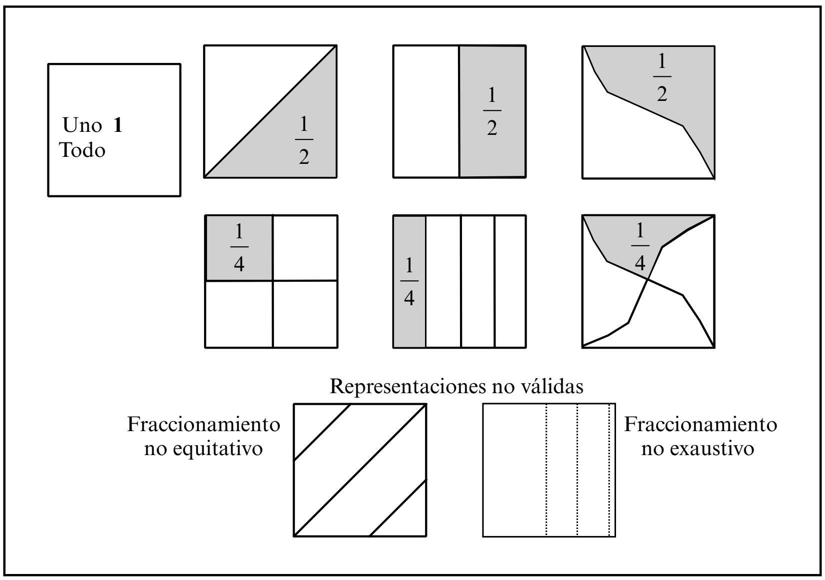


Figura 8.9.—Fraccionamiento en representaciones.

Relacionar formas de representar los números racionales es una acción necesaria en su aprendizaje.

Otro recurso didáctico para trabajar las fracciones y los números racionales es el Diagrama de Fracciones (figura 8.10). En el diagrama se presenta el fraccionamiento ya realizado, y se pueden *identificar* fracciones equivalentes o números racionales.

El lector puede construir su propio fraccionamiento de segmentos empleando para ello el procedimiento expresado en la figura 8.11. Se parte de un conjunto de segmentos paralelos de igual longitud, situados a la mis-

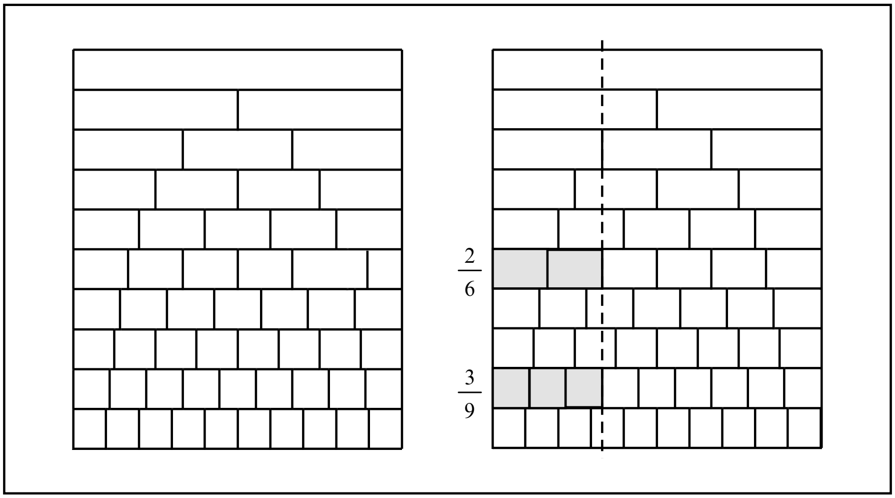


Figura 8.10.—Diagrama de fracciones.

ma distancia. Colocando la regla que pase por el punto *O* (origen) del primero, y haciéndola pasar por los extremos de los demás segmentos, se obtiene la primera fracción unitaria correspondiente a cada división natural.

También se puede hacer el fraccionamiento de una cantidad mediante las operaciones aritméticas de los números naturales, especialmente la división. Así, para cualquier magnitud, el fraccionamiento de 12 unidades da como resultados los mostrados en la tabla 8.1.

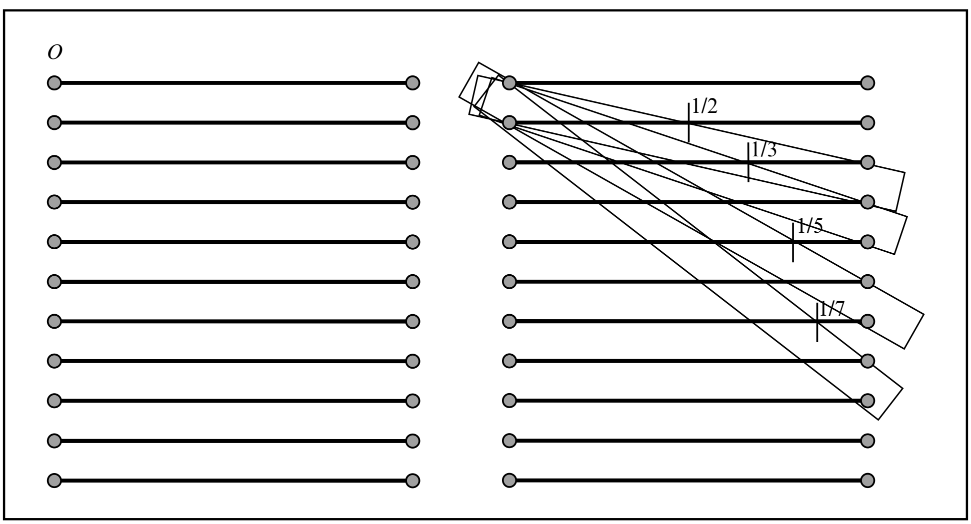


Figura 8.11.—Obtención de fracciones unitarias de segmentos iguales.

TABLA 8.1

Medida de partes fraccionarias conocida la medida del todo

Fracción	Porción
Todo 1	12 unidades
Mitad $\frac{1}{2}$	6 unidades
Cuarto $\frac{1}{4}$	3 unidades
Tercio $\frac{1}{3}$	4 unidades
Sexto $\frac{1}{6}$	2 unidades
Tres cuartos $\frac{3}{4}$	9 unidades

La tabla muestra que la relación entre 6 unidades y 12 unidades es de $\frac{1}{2}$; esta fracción expresa la medida de 6 respecto de 12 unidades.

Igualmente, la relación entre 3 unidades y 12 unidades es $\frac{1}{4}$; la fracción $\frac{1}{4}$ expresa la medida de 3 respecto a 12 unidades.

Éste es un tipo habitual de problema escolar con fracciones, dado el *todo* obtener fracciones de él. La fracción expresa en cada caso la medida de la parte respecto del todo. En el ejemplo, el *todo* es de 12 unidades, del que se calculan fracciones unitarias. Para obtener fracciones no unitarias se consideran varias fracciones unitarias: *tres cuartos de 12 unidades* son *tres veces el cuarto de 12 unidades,* es decir, *tres veces 3,* o sea, *9 unidades*.

ACTIVIDAD 6: Plantea enunciados de problemas en los que haya que calcular distintas fracciones de 12 km. ¿Cuál es la medida de 2 km respecto de los 12 km?

Plantea enunciados en los que haya que determinar la fracción que relaciona botellas de $\frac{1}{3}$ de litro con botellas de $\frac{1}{4}$ de litro.

ACTIVIDAD 7: Construye una tabla de fracciones, similar a la tabla 8.1, donde el todo mida 18 unidades. Enuncia problemas que se puedan plantear a partir de esa tabla.

ACTIVIDAD 8: Generaliza el proceso de fraccionamiento de un número hasta obtener qué significa la fracción $\frac{m}{n}$ de ese número. Busca problemas de fraccionamiento en los libros de Educación Primaria y resuélvelos.

ACTIVIDAD 9: Generaliza el proceso estudiado para obtener los elementos del fraccionamiento en todas las posibilidades. Busca enunciados de problemas de este tipo en los libros de Educación Primaria e identifica en cada caso las unidades del todo, las unidades de las porciones y las fracciones; explica el proceso de resolución.

5. EQUIVALENCIA DE FRACCIONES: NÚMEROS RACIONALES

Una fracción indica la medida de una parte respecto de un todo. Cuando dos fracciones distintas producen igual resultado, es decir, dan lugar a la misma parte de un todo, *se dice que son equivalentes, ya que producen el mismo resultado*.

En la figura 8.10, trazando una recta vertical, se encuentran porciones que coinciden, como $\frac{2}{6}$ y $\frac{3}{9}$. Estas dos fracciones son equivalentes, ya que dan como resultado la misma parte del rectángulo. También estas dos fracciones son equivalentes a la fracción $\frac{1}{3}$. En estos casos, dos o más fracciones expresan la medida de una misma parte respecto de un mismo todo.

La coincidencia de partes de un mismo *todo* lleva a la *equivalencia de fracciones*.

ACTIVIDAD 1: Localiza en la figura 8.10 distintas fracciones equivalentes a la fracción $\frac{1}{2}$. Justifica en cada caso la equivalencia de fracciones localizada.

La definición de equivalencia se mantiene con todos los significados del número racional:

- Dos fracciones que expresan una *parte de un todo* son equivalentes cuando la porción expresada es la misma *($\frac{3}{9}$ de una tarta es la misma porción que $\frac{2}{6}$).*
- Dos *operadores* son equivalentes cuando producen igual resultado al aplicarlos a la misma cantidad *($\frac{3}{9}$ de 60 es 20, lo mismo que $\frac{2}{6}$ de 60).*
- Dos *cocientes* son equivalentes cuando los resultados de las dos divisiones son iguales *(al repartir tres tartas entre 9 niños le corresponde la misma porción «$\frac{3}{9}$» que si se reparten 2 tartas entre 6, «$\frac{2}{6}$»).*
- Dos fracciones que expresan *medida* son equivalentes cuando resulta la misma cantidad de los dos fraccionamientos de la unidad *($\frac{1}{2}$ metro es una medida que resulta de dividir el metro en 2 partes iguales y tomar 1, medida que coincide con la obtenida al dividirlo en 4 partes iguales y tomar 2, $\frac{2}{4}$ de metro).*

ACTIVIDAD 2: Localiza dos operadores equivalentes y justifica esa relación; localiza dos medidas equivalentes y justifica esa relación.

¿Cómo probar que dos fracciones son equivalentes?

Tomamos de nuevo las fracciones equivalentes $\frac{2}{6}$ y $\frac{3}{9}$. Desde el punto de vista numérico, se observa que los términos de estas fracciones guardan relaciones multiplicativas entre ellos ($2 \times 9 = 3 \times 6$). También se aprecia que ambas fracciones se relacionan con $\frac{1}{3}$ mediante operaciones multiplicativas $\left(\frac{2}{6} = \frac{2 \times 1}{2 \times 3}; \frac{3}{9} = \frac{3 \times 1}{3 \times 3}\right)$.

Los criterios multiplicativos son suficientes para probar que dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes.

Tenemos que la fracción $\frac{a}{b}$ es equivalente con la fracción $\frac{a \times d}{b \times d}$; igualmente, la fracción $\frac{c}{d}$ es equivalente con la fracción $\frac{c \times b}{d \times b}$.

En este caso, si $a \times d = b \times c$, entonces son iguales las fracciones $\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{b \times d}$, con lo que las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ también son equivalentes.

Todo ello se reduce a la expresión:

$$\frac{a}{b} \text{ es equivalente a } \frac{c}{d}$$
$$\text{si, y sólo si, } a \times d = b \times c$$

¿Cómo se obtienen fracciones equivalentes a otra dada?

En la figura 8.12 aparece una serie de fracciones equivalentes sobre un círculo. Cada una de ellas muestra un mismo resultado: 1 parte de 2 mide igual que 2 partes de 4, igual que 3 partes de 6 e igual que 4 partes de 8.

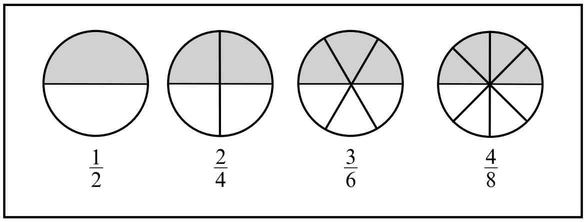


Figura 8.12

ACTIVIDAD 3: ¿Cuál es la regla de formación de las fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$? Descríbela. Representa otras dos fracciones equivalentes con $\frac{1}{2}$.

Podemos decir que 1 parte de 2 es equivalente con 2 partes de 4, que, a su vez, es equivalente con 3 partes de 6 y con 4 partes de 8, y así sucesivamente. Todas estas fracciones muestran la medida de una misma parte respecto de un todo.

ACTIVIDAD 4: Representa en un rectángulo las fracciones $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{6}$; justifica que son fracciones equivalentes. Encuentra y dibuja otras dos fracciones equivalentes con las dos anteriores.

ACTIVIDAD 5: Representa en un rectángulo fracciones equivalentes a la fracción $\frac{2}{5}$.

ACTIVIDAD 6: Descubre el dato que falta en cada caso: 1 parte de 2 es equivalente con 7 partes de *X*; 3 partes de 5 son equivalentes con *X* partes de 20, y 2 partes de *X* son equivalentes con 4 partes de 20. Justifica en cada caso el valor que has obtenido.

Si partimos de una fracción $\frac{a}{b}$, el valor de b indica las partes o unidades que tiene la totalidad, y a el número de unidades o partes que se toman. Se construye una fracción equivalente con $\frac{a}{b}$ multiplicando por un mismo número, n, el total de unidades del todo y el total de unidades que se toman, es decir, mediante la fracción $\frac{n \times a}{n \times b}$.

También se obtienen fracciones equivalentes con la fracción $\frac{a}{b}$ dividiendo ambos valores entre un divisor común d, $\frac{a \div d}{b \div d}$.

ACTIVIDAD 7: Ejemplifica, mediante una representación gráfica, las dos propiedades que acabamos de enunciar.

ACTIVIDAD 8: Estudia razonadamente si son equivalentes las siguientes fracciones: $\frac{999.009}{17}$ y $\frac{5.870.470}{999}$.

ACTIVIDAD 9: Analiza qué quiere decir que las fracciones $\frac{5}{10}$ y $\frac{10}{24}$ son equivalentes. Aplica este razonamiento a estudiar si las siguientes acciones de Pedro y Ana son equivalentes: *Pedro ha retirado 5 bombones de una caja de 12* $\left(\text{los } \frac{5}{12}\right)$*, y Ana ha retirado 10 bombones de una caja de 24* $\left(\text{los } \frac{10}{24}\right)$.

Qué es un número racional

Un número racional es el conjunto de todas las fracciones equivalentes con una fracción dada.

Así, $\left\{\frac{1}{2}; \frac{2}{4}; \frac{3}{6}; \frac{4}{8}; \frac{5}{10}; ...; \frac{n}{2n}; ...\right\}$ es un número racional.

$\left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{6}; \frac{3}{9}; \frac{4}{12}; ...; \frac{n}{3n}; ...\right\}$ es otro número racional.

ACTIVIDAD 10: Escribe otros dos números racionales. Explica por qué al escribir un número racional con notación de conjunto se ponen puntos suspensivos.

La notación de un número racional como conjunto es una notación compleja que no utilizan los estudiantes de Primaria. Por ello, para representar un número racional, usualmente empleamos sólo una cualquiera de las fracciones que lo forman.

Todas las fracciones equivalentes representan al mismo número racional, por tanto, son infinitas las fracciones que representan el mismo número racional. Así, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$ y $\frac{1}{2}$ representan el mismo número racional.

Fracción irreducible

Cada número racional tiene una fracción cuyo numerador y denominador son números primos entre sí. Esta fracción se llama *irreducible,* ya que no hay otra fracción equivalente cuyos términos sean menores. Las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ son irreducibles.

ACTIVIDAD 11: Escribe tres fracciones irreducibles y otras tres que no lo sean. Justifica en cada caso la elección hecha.

6. ORDEN Y DENSIDAD DE LOS RACIONALES

Los racionales tienen un orden. En el diagrama de fracciones de la figura 8.10 aparecen ordenadas las representaciones fraccionarias de varios números racionales. Se aprecia que el orden es contrario al tamaño de los denominadores. Si se toman las fracciones como porciones, sucede que cuando el *todo* se divide en mayor número de partes, cada una de ellas es más pequeña; por tanto, las fracciones unitarias son menores conforme aumentan sus denominadores.

ACTIVIDAD 1: Escribe de menor a mayor, y con los signos correspondientes de la relación de orden, las fracciones unitarias desde $\frac{1}{2}$ hasta $\frac{1}{5}$.

ACTIVIDAD 2: Escribe una fracción unitaria menor que $\frac{1}{100}$ y otra mayor.

Como cualquier fracción $\frac{a}{b}$ expresa a veces $\frac{1}{b}$, se pueden comparar dos fracciones que representen porciones comparando las fracciones unitarias correspondientes y el número de ellas que tomamos. Así, $\frac{2}{6}$ es mayor que $\frac{1}{9}$, ya que al dividir el todo en 6 se obtienen porciones mayores que si se divide en 9, y además de las primeras tenemos 2 porciones. No siempre es tan fácil hacer la ordenación, como, por ejemplo, al comparar $\frac{4}{6}$ y $\frac{7}{9}$. Para compararlas existen diferentes estrategias; la más conocida consiste en expresar ambas mediante fracciones equivalentes con iguales denominadores $\frac{4}{6} = \frac{4 \times 9}{6 \times 9} = \frac{36}{54}$, que es menor que $\frac{7}{9} = \frac{7 \times 6}{9 \times 6} = \frac{42}{54}$, ya que 36 es menor que 42.

La ordenación de los racionales tiene una propiedad fundamental que los diferencia de los enteros, los racionales son ***densos.***

Los números racionales sirven para medir magnitudes continuas, como la longitud. Esta magnitud se dice que es continua ya que existen cantidades de longitud tan próximas a otra como se nos ocurra. Se pueden ordenar estas cantidades ordenando los segmentos que las representan. Si se parte de dos segmentos de longitudes $\frac{2}{5}$ dm y $\frac{4}{5}$ dm, siempre hay un tercer segmento con una longitud intermedia, en este caso uno de longitud $\frac{3}{5}$ dm. Pero también hay segmentos que son a la vez mayores que $\frac{2}{5}$ dm y menores que $\frac{3}{5}$ dm. Para expresar su medida en decímetros se recurre a fracciones equivalentes a estas medidas y se busca un número *l,* que sea $\frac{2}{5} \leq l \leq \frac{3}{5}$, o, lo que es lo mismo, $\frac{4}{10} \leq l \leq \frac{6}{10}$, para lo cual sirve el número $\frac{5}{10}$, que da lugar al segmento de longitud $\frac{5}{10}$ dm. El proceso se puede continuar buscando un nuevo número *m,* tal que $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} \leq m \leq \frac{5}{10}$, y así buscar el punto medio de manera indefinida.

Esto lleva a considerar que entre cada dos números racionales siempre se encuentra otro número racional. Esta propiedad se conoce como *propiedad de densidad,* y caracteriza a los racionales como un conjunto *denso*.

Actividad 3: Obtén un número racional comprendido entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{5}$. Obtén otro número racional comprendido entre $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{7}$.

7. OPERACIONES CON RACIONALES

Se ha planteado el fraccionamiento como un tipo de problemas que resuelven las fracciones. En otros problemas los números racionales son datos con los que hay que operar para obtener la solución. Ejemplos de ello son: *calcular cuánto tiempo emplea un escolar en hacer los deberes, si tarda media hora en hacer los ejercicios de matemáticas y tres cuartos de hora en hacer los de lengua,* o bien: *averiguar cuántos deberes de matemáticas puede hacer en 3 horas*. En el primero hay que realizar una suma con los tiempos, y en el segundo multiplicar o dividir números racionales.

Los escolares de Educación Primaria están aprendiendo los números racionales. Por este motivo conviene partir de acciones para realizar operaciones con ellos, empleando materiales didácticos y representaciones, antes de pasar a la expresión simbólica. Se ha comentado que las expresiones meramente simbólicas de las operaciones con números racionales no son objeto específico de este ciclo. Por tanto, el docente debe disponer de los medios para realizar las operaciones con representaciones tanto materiales como gráficas.

Las operaciones con números racionales deben obedecer a problemas en situaciones en que tengan sentido. Para examinar qué problemas son indicados en cada operación hay que revisar el tipo de problemas que corresponden a las operaciones aritméticas cuando los datos son números racionales.

Como en los apartados anteriores, se van a examinar problemas en los que los números racionales sean porciones, es decir, se refieran a *partes de un todo*. Resolver los problemas por medio de representaciones, manipulativas en principio y luego gráficas, permite concluir expresando simbólicamente el resultado. Cuando se puedan traducir las acciones a símbolos y operaciones, será fácil establecer procedimientos mecánicos puramente simbólicos. Si no es así, habrá que buscar estrategias para simplificar los cálculos; a estas estrategias las llamamos algoritmos.

Al realizar operaciones con fracciones hay que distinguir dos pasos:

I. Obtener aquella parte que es resultado del problema.
II. Expresar esa parte por medio de una fracción.

La primera acción requiere trabajar con objetos o con representaciones; la segunda necesita identificar elementos, señalar quién es el todo y quién la parte, qué tamaño tiene la parte en relación al todo, y la forma de expresarla simbólicamente.

Identificar la operación con fracciones con el segundo paso y con el procedimiento simbólico necesario para ello es simplificar su significado, dando excesiva importancia a las operaciones con símbolos, sin que ello esté asentado en significados. Esto repercute en que el escolar de Educación Primaria tenga dificultades para abordar y resolver problemas que requieren la operación. Reiteramos que un número racional (y, por tanto, la fracción) sólo está determinado cuando se conocen dos términos, la *parte* y el *todo*.

Puedes ampliar información sobre el tema en los libros de Canals (2009) y Alcalá (1986).

7.1. Suma y resta de números racionales

Aquellas situaciones en que se presentan sumas y restas de números racionales son similares a las ya estudiadas para los números naturales. Tienen sentido al considerar el número racional como porción, preferentemente como parte de un todo. Distinguimos los siguientes tipos de problemas aditivos:

- Problema aditivo *a*) de **Cambio.** Ejemplo. *Había media tarta y se han comido un cuarto, ¿qué porción de tarta queda?*
- Problema aditivo *b*) de **Combinación.** Ejemplo. *Se pica un cuarto de kilo de carne de cerdo y medio kilo de carne de ternera, ¿cuánto pesa el total de carne picada?*
- Problema aditivo *c*) de **Comparación.** Ejemplo. *Juan tarda un cuarto de hora en ir a su casa y Ana media hora más que Juan. ¿Cuánto tarda Ana?*

ACTIVIDAD 1: Enuncia tres problemas de suma y resta de números racionales, uno por cada uno de los tipos presentados. Explica en cada caso por qué el problema es del tipo propuesto.

Para resolver cada uno de estos problemas se emplea un *todo* común, en el que se pueden representar las fracciones sumandos y resultado. Para resolverlos se dan los pasos indicados, que en el caso de suma y resta son los siguientes:

I. Obtener la porción resultado del problema, juntando o separando fracciones, en dos etapas:
   i. Manipulando objetos.
   ii. Manejando las representaciones.
II. Expresar la porción por medio de una fracción. Identificar la porción resultado mediante una porción y por su nombre.

La figura 8.13 muestra cómo se obtiene el resultado de los problemas *a*), *b*) y *c*) empleando dos materiales, la **torre de fracciones** (piezas encajables) y las **piezas de fracción** (piezas de madera) (en la figura, en línea discontinua, paso I.i).

Para identificar el resultado con una fracción, se toman piezas y se prueba hasta identificar cuál corresponde con el resultado obtenido (paso II.i, recuadrado en la figura 8.13).

Mas adelante veremos cómo se resuelve mediante representaciones gráficas de las fracciones (paso I.ii).

Para el paso II existen estrategias que facilitan la determinación de la fracción que expresa el resultado. En los problemas anteriores, el proceso se simplifica cuando las fracciones sumandos se refieren a la misma división del todo, al mismo denominador. Para ello se busca expresar las fracciones sumandos con fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. Así, por ejemplo, la mitad puede expresar-

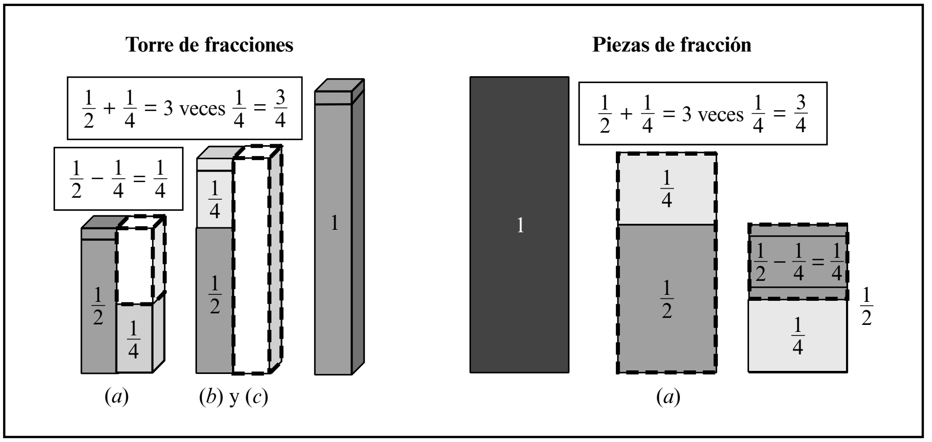


Figura 8.13.—Resolución de los problemas mediante acciones con materiales didácticos.

se como dos cuartos $\left(\frac{2}{4}\right)$. Por tanto, la suma o resta de un medio con un cuarto se convierte en suma y resta de los numeradores (2 y 1), refiriendo el resultado a la fracción unitaria común $\left(\frac{1}{4}\right)$. Esto se representa simbólicamente de la siguiente forma:

Problema aditivo *a*):

$$\frac{1}{2}\ tarta - \frac{1}{4}\ tarta = 2 \text{ veces } \frac{1}{4}\ tarta - \frac{1}{4}\ tarta = \\ = \frac{1}{4}\ tarta$$

Problema aditivo *b*):

$$\frac{1}{4}\ kg\ cerdo + \frac{1}{2}\ kg\ ternera =$$

$$= \frac{1}{4}\ kg\ cerdo + 2 \text{ veces} \frac{1}{4}\ kg\ ternera = \\ \frac{3}{4}\ kg\ carne$$

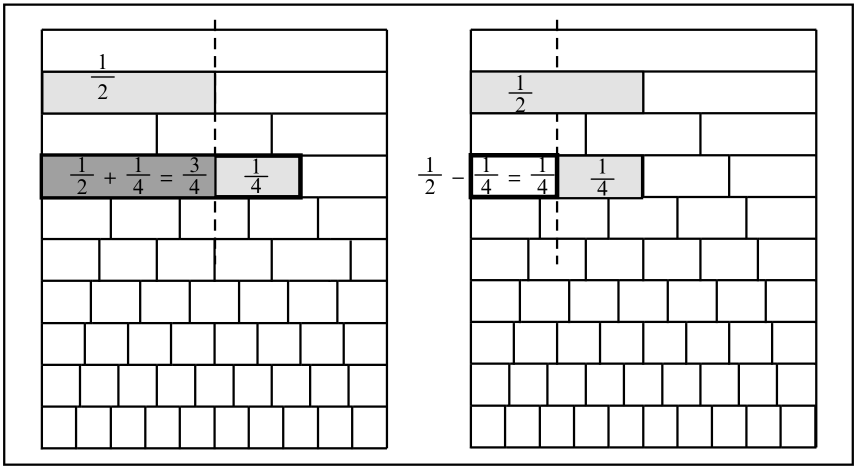


Figura 8.14.—Resolución de la suma y resta con el diagrama de fracciones.

Problema aditivo *c*):

$$\frac{1}{4}\ h\ Juan + \frac{1}{2}\ h\ más = \frac{1}{4}\ h + 2 \text{ veces } \frac{1}{4}\ h =$$
$$= \frac{3}{4}\ h\ Ana$$

En resumen, la suma y resta de dos fracciones (números racionales) se reduce a juntar o separar porciones del mismo todo (paso I). Para obtener la fracción resultado (paso II) se expresan ambos sumandos con el mismo denominador.

La igualación de denominadores de los sumandos se realiza, al principio, probando y buscando fracciones equivalentes a los sumandos, hasta obtener aquellas que tienen el mismo denominador. Más adelante se puede sistematizar el proceso mediante diversos métodos, como empleando diagramas o representaciones gráficas. Por ejemplo, con el **diagrama de fracciones** se observa que las fracciones equivalentes están en la misma recta vertical. Ello lleva a realizar las operaciones indicadas como se aprecia en la figura 8.14, pasando a operar en una fila en la que sea posible representar los sumandos.

Con otro material, las **transparencias de fracciones,** se puede resolver mediante otro procedimiento (figura 8.15). Las Transparencias de Fracciones son naipes de dos materiales, unos en cartulina, opacos, y otros en plástico transparente. En ellos hay cuadrados divididos para representar fracciones.

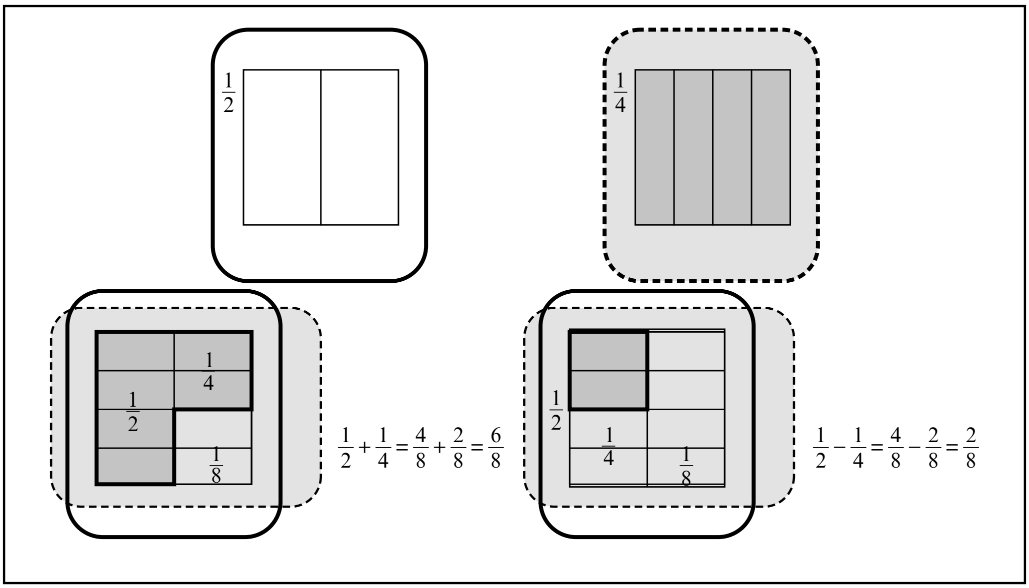


Figura 8.15.—Resolución de problemas mediante transparencias de fracciones.

Si se coloca de forma perpendicular el naipe transparente dividido en *cuartos* sobre el naipe dividido en *medios*, se obtiene un cuadrado dividido en 8 partes, en el que vemos las porciones sumandos expresadas en *octavos*. Así, $\frac{1}{2}$ corresponde a 4 partes $\left(\frac{1}{2} = \frac{4}{8}\right)$, y $\frac{1}{4}$ a 2 partes $\left(\frac{1}{4} = \frac{2}{8}\right)$, o, lo que es lo mismo, $\frac{1}{2}$ es 4 veces $\frac{1}{8}$

y $\frac{1}{4}$ es 2 veces $\frac{1}{8}$. Por tanto, la suma será 6 veces $\frac{1}{8}$, y la resta 2 veces $\frac{1}{8}$. Podemos dibujar ambas sombreando estas partes, aunque el resultado no siempre se puede poner en forma de rectángulo.

Resolverlo con transparencias da pistas para hacerlo mediante un material más versátil, el **papel cuadriculado.** Se trata de dibujar una representación del todo común de manera que se puedan dibujar fácilmente las fracciones sumandos. Generalmente se representa el todo en forma de rectángulo. En primer lugar hay que seleccionar las dimensiones del rectángulo sobre el que se representan las fracciones. Los denominadores de los dos sumandos permiten identificar la base y la altura del rectángulo, ya que expresan la cantidad de veces en que hay que dividir el todo para expresar cada sumando.

En la figura 8.16 están resueltas la suma y la resta de los problemas anteriores. Una vez dibujado el rectángulo, sobre él se toman las dos fracciones sumandos. Para ello se divide por las líneas horizontales para un sumando y verticales para el otro. Se sombrean las fracciones sumandos y se identifican cuántas porciones unidad (cuadritos, que son fracciones unitarias del todo) tiene cada una de ellas. Sumando o restando estas cantidades de cuadritos obtenemos la porción resultante, y su expresión en forma de fracción.

Las soluciones encontradas mediante las transparencias y las representaciones gráficas en papel cuadriculado llevan a las siguientes apreciaciones:

- Se pueden hacer sumas y restas de porciones con cualquier denominador empleando representaciones adecuadas (paso I).
- Sólo se puede obtener la fracción que representa el resultado de la operación (paso II) cuando ambas fracciones están referidas al mismo denominador.
- Para igualar denominadores se buscan fracciones equivalentes a los términos que

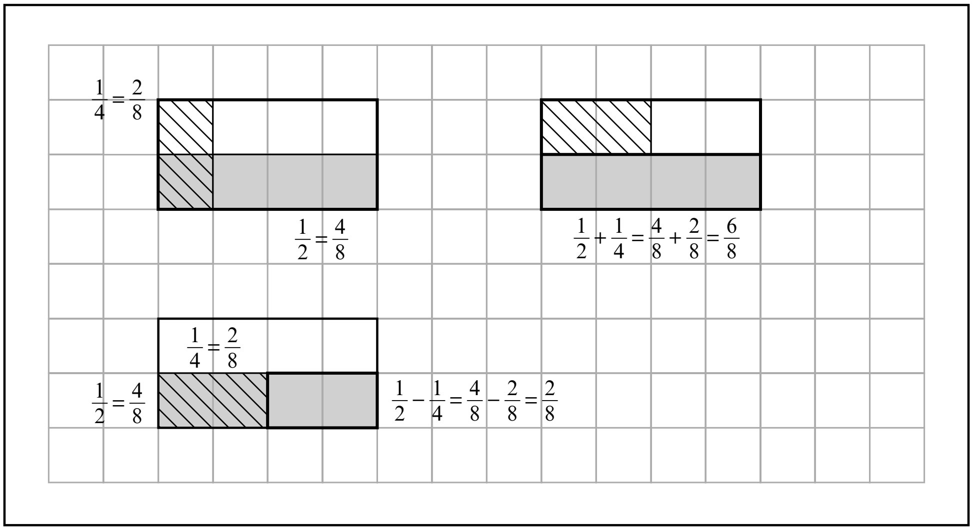


Figura 8.16.—Resolución de problemas mediante papel cuadriculado.

tengan el mismo denominador. El procedimiento más sencillo para obtenerlas es emplear aquellas que tengan como denominador el producto de los denominadores.

Es muy importante que los escolares sean capaces de realizar las operaciones con representaciones y, con ello, puedan resolver problemas de suma y resta de fracciones. Se deja para Secundaria la búsqueda del algoritmo óptimo, consistente en buscar fracciones equivalentes cuyo denominador común sea el mínimo común múltiplo de los denominadores, cuyo objetivo es lograr el mínimo denominador común. Este método requiere dominar la divisibilidad y relacionarla con el tratamiento meramente simbólico de las fracciones, lo que no es prioritario para las finalidades de la Educación Primaria, que se centra en el concepto de número racional y no sobre sus algoritmos de cálculo.

ACTIVIDAD 2: Resuelve, mediante los recursos gráficos, los problemas que enunciaste en la actividad 1.

Puedes ampliar información sobre el tema en los libros de Alcalá (1986) y Canals (2009).

7.2. Producto y división de números racionales

Sumar es reunir partes y restar es retirar partes. Sin embargo, las operaciones multiplicativas no tienen una correspondencia tan fácil con las acciones con porciones. Por ello, los pasos destacados anteriormente se convierten aquí en los siguientes:

I. Obtener la porción resultado del problema, juntando o separando, en dos etapas:
   i. Observando relaciones entre porciones.
   ii. Manejando las representaciones.

II. Expresar la porción por medio de una fracción. Identificar el resultado con ayuda de una parte y mediante su nombre.

A partir de los materiales y recursos empleados en la enseñanza de las fracciones se aprecian relaciones multiplicativas entre los números racionales. Así, en el Diagrama de Fracciones se observa que:

a) Un medio es el doble de un cuarto.
b) Un medio contiene ocho veces a un dieciseisavo.
c) La quinta parte de un medio es un décimo.

Relaciones que se expresan con notación simbólica y operaciones de diversas formas:

a) $\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$; $\quad 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$;

$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$; $\quad \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2} = 8 \times \frac{1}{16}$; $\quad \frac{1}{2} : \frac{1}{16} = 8$; $\quad \frac{1}{16} : \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

c) $\frac{1}{2} : 5 = \frac{1}{10}$; $\quad \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$

ACTIVIDAD 3: Encuentra relaciones multiplicativas entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{10}$. Expresa estas relaciones de cuatro maneras posibles. Encuentra y escribe, igualmente, relaciones multiplicativas entre $\frac{5}{6}$ y $\frac{1}{3}$.

Buscar relaciones multiplicativas entre números racionales es el primer paso hacia el aprendizaje de estas operaciones (I). Estas relaciones son comparaciones multiplicativas entre números racionales.

Los problemas multiplicativos con números racionales corresponden a los mismos tipos que estudiamos para los naturales, y aparecen nuevos problemas de proporcionalidad.

Se pueden clasificar en:

a) Problema multiplicativo Fracción de fracción. Ejemplo. *Al comprar mitad de cuarto de kilo de jamón, ¿qué fracción del kilo se compra?*
b) Problema multiplicativo de Comparación. Ejemplo. *¿Cuántos vasos de tercio de litro se llenan con litro y medio de agua?*
c) Problema multiplicativo Producto de medidas. Ejemplo. *La base en kilómetros de un campo rectangular es de tres quintos y su altura de medio kilómetro, ¿cuánto mide su superficie?*

ACTIVIDAD 4: Redacta el enunciado de un problema de cada uno de estos tipos. Explica por qué es del tipo elegido en cada caso.

Para aprender a resolver estos problemas, como en el caso de la suma y la resta, hay que comenzar actuando. En la enseñanza hay que ejercitar las operaciones, preferentemente a partir de representaciones gráficas. Para ello se transforman las operaciones en relaciones entre porciones o representaciones. Una vez resuelto, se pasa a simbolizar.

Los algoritmos de la multiplicación y división de fracciones son sencillos de recordar; por tanto, parecen fáciles de enseñar y aprender. No es así, ya que estos algoritmos son difíciles de comprender.

Los algoritmos del producto y la división de racionales son meras reglas mnemotécnicas que resumen los cálculos que se hacen, pero estas reglas no reflejan claramente las acciones que corresponden a los cálculos. Por este motivo estos algoritmos no debieran formar parte de la enseñanza Primaria, salvo para escolares muy avanzados. Para que el estudiante los comprenda se muestra a continuación su significado en casos sencillos.

Para resolver los problemas antes enunciados mediante materiales y representaciones, comenzamos por buscar relaciones entre las fracciones. Se aprecia que:

- Se obtiene *mitad de cuarto* con el diagrama de fracciones, las transparencias y el papel cuadriculado, tal como aparecen en la figura 8.17. En todos ellos hay dos fracciones factores: $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$. La segunda se refiere al kilo *(un cuarto de kilo),* por lo que su *todo* es el kilo. La primera *(mitad),* tiene como *todo* lo resultante de la primera (el cuarto de kilo). El resultado se refiere al kilo. Ésta es una cualidad importante en la fracción de fracción, cambiamos de *todo* de referencia [problema multiplicativo *a*)].
- En el problema multiplicativo *b*) se compara (o mide) *litro y medio* $\left(1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\right)$ con *tercios de litro* $\left(\frac{1}{3}\right)$. El resultado es una medida, cuál fracción de una de ellas es la otra. En la figura 8.18 aparece su resolución mediante el papel cuadriculado, único material representado que admite fracciones impropias. Se aprecia que el problema se simplifica cuando se expresan las fracciones en la misma unidad de división (mismo denominador). Es decir: *cuántas veces 3 vasos de un sexto de litro* $\left(\frac{3}{6} = \frac{1}{3}\right)$ *caben en 9 veces un sexto de li-*

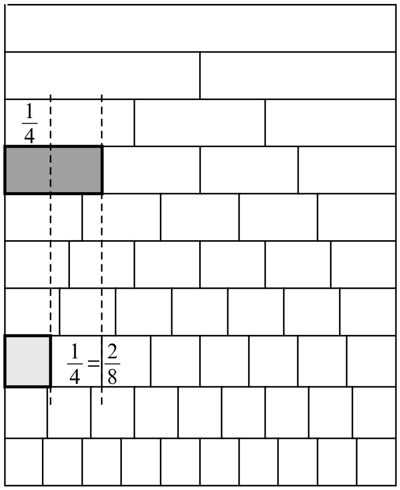


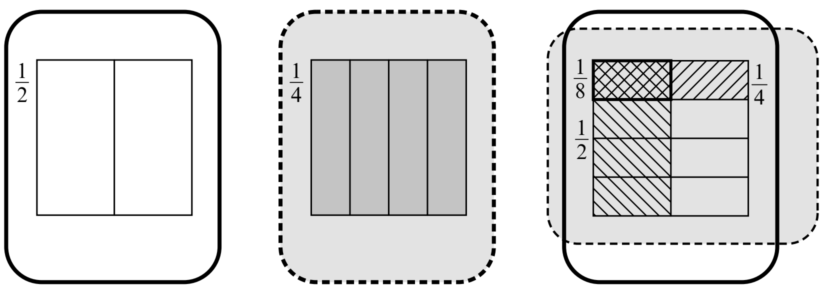
Diagrama de fracciones

$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = 2 \text{ } \textit{veces} \text{ } \frac{1}{8}$

Mitad de $\frac{1}{4}$ es $\frac{1}{8}$

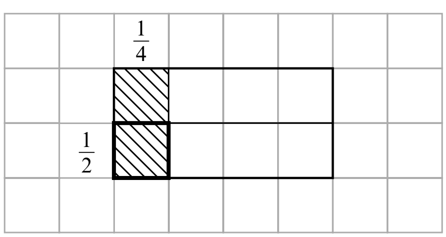
$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

Transparencias de fracciones



$\frac{1}{2} \textit{ de } \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{8}$

Papel cuadriculado



Se dibuja un rectángulo de lados 2 y 4 (para hacer medios y cuartos) y sobre él $\frac{1}{4}$. Se obtiene la mitad del trozo, que será $\frac{1}{8}$, ya que ha quedado dividido el rectángulo en 8 trozos.

Figura 8.17.—Mitad de cuarto con diversos materiales. Problema multiplicativo *a*).

tro $\left(\frac{9}{6}=\frac{3}{2}\right)$. Muchos problemas de división de fracciones, especialmente los de comparación, se resuelven de manera intuitiva comparando fracciones del mismo denominador.

- Los problemas de cálculo de áreas [problema multiplicativo *c*)] corresponden a problemas combinatorios de multiplicación. Estos problemas consisten en el cálculo de superficies a partir de longitudes. El área se mide por la cantidad de cuadrados unidad que caben en el rectángulo. Se resuelve este problema con transparencias y papel cuadriculado (figura 8.19). Las transparencias dan una idea más precisa, ya que la base y la altura son fracciones referidas al mismo *todo,* el lado del cuadrado. Esto no ocurre en el papel cuadriculado, en el que el *todo* de la altura (figura 8.19) es 2 lados del cuadrado, mientras que el de la base es cinco veces el lado. El *todo* de área es la superficie del cuadrado completo, tal como se aprecia con las transparencias.

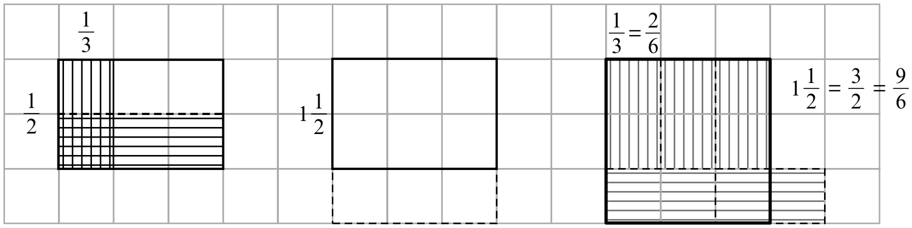
De estas resoluciones se sacan las siguientes observaciones:

- La multiplicación de números racionales corresponde a problemas de *fracción de fracción* o problemas *combinatorios*. En ambos hay que multiplicar los denominadores para obtener el total de divisiones del todo, y multiplicar numeradores para obtener cuántas de esas divisiones forman el resultado.
- El algoritmo de la división de fracciones es una regla mnemotécnica que resume las operaciones que se realizan, bien para igualar denominadores (problemas de comparación o medida), bien para buscar la fracción que realiza la operación contraria a la multiplicación (problemas de proporcionalidad), o bien para obtener fracciones que se puedan dividir numerador entre numerador y denominador entre denominador. Puedes ampliar información sobre el tema en el artículo de Flores (2008).
- En los problemas multiplicativos hay cambios en los todos de referencia. El resultado hay que expresarlo indicando quién es la fracción y el *todo* a que se refiere.

ACTIVIDAD 5: Resuelve con material manipulativo los enunciados de los problemas que has redactado en la actividad 4.

ACTIVIDAD 6: Busca en los libros de Educación Primaria problemas de operaciones con fracciones. Identifica las operaciones y los todos correspondientes a cada fracción. Clasifícalos indicando qué significa la operación en cada caso.

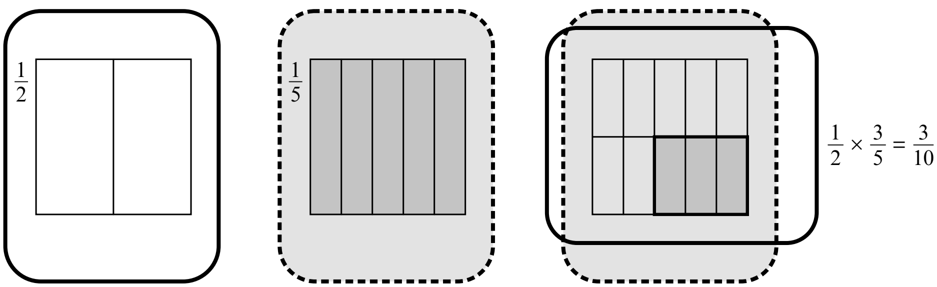
ACTIVIDAD 7: Resuelve los problemas encontrados en los libros de texto empleando materiales didácticos.



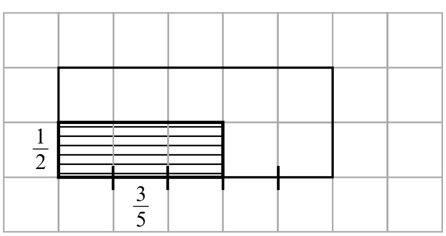
Rectángulo de lados 2 y 3 representan un litro (permite hacer medios y tercios). Se dibujan medios y tercios. Se añade medio rectángulo para tener $1\frac{1}{2}$ *litro* = $\frac{3}{2}$ *litro* = $\frac{9}{6}$ *litro*. Se rellena la figura con tercios (2 cuadrados). En $\frac{9}{6}$ hay 4 veces $\frac{2}{6}$ y sobra un cuadrado, que es la mitad de porción de tercio. Luego $1\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{3}{2} : \frac{1}{3} = \frac{9}{6} : \frac{2}{6} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$.

O sea, $\frac{1}{3}$ cabe 4 veces y media en $\frac{3}{2}$.

Figura 8.18.—Comparación de fracciones con papel cuadriculado. Problema *b*).



Papel cuadriculado $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$



Partir de rectángulo de lados 2 y 5 (para hacer medios y quintos). El *todo* de la longitud de la base es el lado de 5 cuadrados, y el *todo* de la longitud de la altura es el lado de 2 cuadrados.

Tomar lados indicados $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{2}$ y formar el rectángulo, que contiene 3 de los 10 cuadrados del rectángulo original. Luego el área del rectángulo es $\frac{3}{10}$ del rectángulo original.

Figura 8.19.—Cálculo del área de transparencias y papel cuadriculado. Problema *c*).

ACTIVIDADES PARA PRACTICAR

Actividades con fracciones

1. *Las fracciones nos ayudan a resolver problemas*. Ana, Luis y Carlos van de excursión. Ana lleva 2 tortillas mientras que Luis lleva 3 y Carlos no lleva comida, pero comen los tres la misma cantidad. Carlos quiere compensar lo recibido y decide hacerles un regalo a cada uno, gastándose 20 € en total ¿Cuánto debe gastarse en el regalo de Ana y cuánto en el de Luis para corresponderles en la misma proporción que ellos le dieron de comer?

RESOLUCIÓN. En total tienen 5 tortillas, con lo que tocan cada uno a $\frac{5}{3}$ de tortilla, es decir, $1\frac{2}{3}$ tortilla. Tal como se aprecia en la figura 8.20, Ana le ha dado a Carlos $\frac{1}{3}$ de tortilla, mientras que Luis le ha dado $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ de tortilla. Por tanto, Luis le ha dado cuatro veces lo que le ha dado Ana. Si Carlos quiere responder a su atención de manera proporcional, deberá gastarse 4 € en el regalo de Ana y 16 € (4 veces 4 €) en el de Luis.

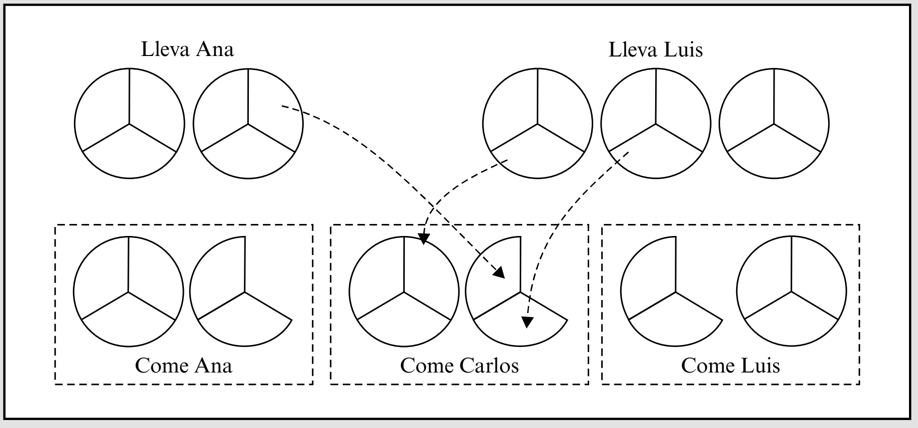
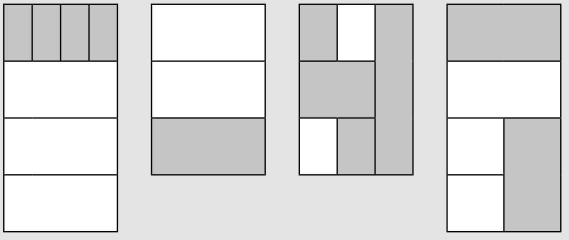


Figura 8.20.—Distribución de las tortillas entre los tres amigos.

Problemas con fracciones

1. Expresa con una fracción la parte del rectángulo que aparece sombreada en cada caso de la figura y propón formas diferentes de representar dichas fracciones en el mismo rectángulo:



2. Identifica la operación que corresponde a cada enunciado estudiando si hay equivalentes. Determina la fracción resultado:

a) La mitad de la tercera parte.
b) Tercera parte de la mitad.
c) Un medio de la tercera parte.
d) La porción de la tercera parte que es un sexto.
e) Lo que la tercera parte contiene a la mitad.
f) Lo que la mitad contiene a la tercera parte.
g) El lado de un rectángulo de área $\frac{1}{2}$ y lado $\frac{1}{3}$.
h) El área de un rectángulo de lados $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.
i) El área de un rectángulo triple del que tiene de área $\frac{1}{2}$.
j) El área de un rectángulo mitad del que tiene de área $\frac{1}{3}$.

3. Resuelve los siguientes problemas con fracciones mediante material manipulativo o representaciones. Indica quién es el todo de cada fracción:

a) En una clase hay 14 chicas, que son los dos tercios de la clase, ¿qué número hay de alumnos?
b) Jorge pedalea a 8 km por hora. Al cabo de 45 minutos, ¿a qué distancia está de su casa?
c) Un terreno mide 200 metros cuadrados. ¿Cuánto miden las 5/8 partes del terreno?
d) La tasa de crecimiento anual del índice de precios es de 3/100. Si he comprado un piso de 120.000 euros y el año próximo lo vendo por 122.000 euros, ¿he ganado dinero?
e) Una persona gasta cada mes la quinta parte de su salario mensual en alimentación y la sexta parte en alquiler del piso, tras lo que le quedan 570 euros. ¿Cuál es su salario?
f) En cada revisión se corrigen 9/10 de los errores de un manuscrito. Un manuscrito se ha revisado dos veces y aún quedan 23 errores. ¿Cuántos errores había?
g) Un grifo completamente abierto tarda 9/2 horas en llenar un depósito. ¿Cuánto tardará en llenarlo si sólo se abre hasta los 3/4 de su máximo caudal?
h) A Ana le quedan los 6/9 de una bolsa de caramelos y los reparte entre Eva y Juan. A Eva le da un tercio y a Juan 6/9. ¿Qué parte de la bolsa le queda a Ana? ¿Quién tiene más caramelos?

4. Busca problemas de fraccionamiento y de operaciones con fracciones en libros de texto de Educación Primaria. Resuélvelos empleando modelos y recursos, especialmente con el papel doblado, diagrama de fracciones, transparencias de fracciones y papel cuadriculado.

INVESTIGA Y REFLEXIONA

Las siguientes actividades te permitirán profundizar en las nociones y los procedimientos sobre números racionales y fracciones.

1. Revisar un periódico de tirada nacional e identificar las informaciones que están relacionadas con números racionales. Señalar las formas en que se representan.
2. Elaborar un listado de actividades profesionales asociadas al empleo de racionales.
3. Revisar libros de texto de 6.º curso de matemáticas de Educación Primaria y estudiar cómo se representan los números racionales. Identificar los significados de los números racionales que se emplean. Estudiar el tipo de ejercicios planteados y el papel que desempeñan los racionales.
4. Estudiar el significado de las operaciones con números racionales que se proponen en los libros de texto y compararlo con lo estudiado en este tema.
5. Elaborar un mapa conceptual sobre los números racionales, su utilidad en diversos contextos y situaciones, los conceptos que están relacionados con ellos y la forma en que se relacionan.
6. Buscar recursos informáticos para trabajar los números racionales, preferentemente en forma fraccionaria. Estudiar qué tipo de actividades proponen.
7. Trabajar con la calculadora. Las calculadoras científicas tienen en la actualidad una tecla que permite expresar en notación fraccionaria. Buscar la tecla correspondiente y la manera de realizar las siguientes operaciones empleando la calculadora:
   - Simplificar fracciones hasta obtener la *fracción irreducible*.
   - Pasar de fracción impropia a notación mixta.
   - Convertir notación fraccionaria en decimal, y viceversa.

BIBLIOGRAFÍA

Alcalá, M. (1986). *Fracciones*. Granada: MCEP.
Canals, M. A. (2009). *Fracciones*. Barcelona: Associació de Mestres Rosa Sensat.
Coriat, M. (1989). Baraja de fracciones. *Suma 3,* pp. 69-72.
Flores, P. (2008). El algoritmo de la división de fracciones. *Épsilon,* 70, vol. 25(3), pp. 27-40.
Grupo del APMA (1984). Estudio metodológico del número fraccionario en 6.º de EGB. *Epsilon 3,* pp. 3-24.
Llinares, S. y Sánchez, M. V. (1997). *Fracciones*. Madrid: Síntesis.
NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.

9 Decimales

JUAN FRANCISCO RUIZ HIDALGO
ENRIQUE CASTRO MARTÍNEZ

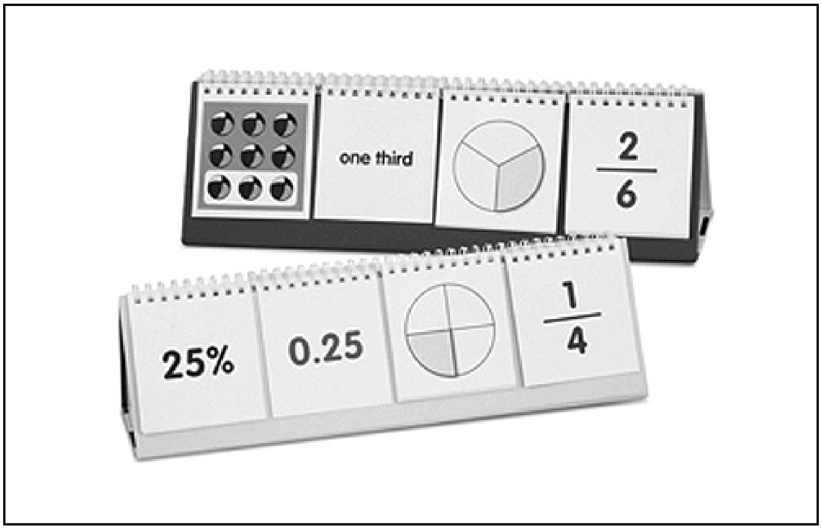


Figura 9.1.—¿Son todas las representaciones de los racionales igual de cotidianas?

Al sistema usual de numeración indo-arábigo de base 10 se le denomina también sistema de numeración decimal (del latín *decimus,* que significa décimo). Expresiones del tipo 0,45 o 2.011 forman parte de este sistema; sin embargo, de manera coloquial, nos referimos a 0,45 como decimal mientras que a 2.011 nos referimos como número entero. Para establecer un criterio común, a lo largo del capítulo se entenderá por *decimal* o *decimales* las representaciones de números racionales que correspondan con las expresiones a las que nos referimos habitualmente como la expresión 0,45.

El número racional se suele representar de diferentes formas, de entre las que destacan la fraccionaria, la pictórica y la decimal. De ellas, es esta última la que sobresale por diferentes motivos, entre los que se pueden destacar: que aparece de forma intuitiva como generalización del número natural, que se usa en muchas situaciones reales o que las operaciones con decimales son más sencillas que las operaciones con fracciones.

Los decimales se extienden cada vez más, permitiendo expresar no sólo números menores que una unidad, sino también cantidades grandes, formando parte de las tecnologías de la información y comunicación y facilitando la compresión de los aparatos electrónicos.

Descubrirlos, analizarlos y conocer sus propiedades son elementos esenciales para conocer mejor la realidad, valorarla y poder tomar decisiones correctas.

1. LOS DECIMALES EN EL CURRÍCULO ESCOLAR

La Educación Primaria tiene como primer objetivo utilizar los saberes asociados a los números y las formas para conseguir que el escolar sea capaz de analizar situaciones variadas relacionadas con la realidad. Para conseguirlo, las matemáticas deben ser útiles en la vida cotidiana y en el mundo laboral, y los contenidos del aprendizaje deben estar inmersos en contextos funcionales y familiares al escolar.

Los decimales se ajustan a los propósitos anteriores de utilidad y de diversidad de aplicación en situaciones cotidianas: la notación decimal aparece en precios (véase figura 9.2) y en cantidades relacionadas con capacidad, longitud, masa (véase figura 9.3), etc. Pero, además de este aspecto práctico, es importante destacar que son indispensables para la adquisición de competencias relacionadas con otros temas propios de las matemáticas, como son la medida y el tratamiento de la información, el azar y la probabilidad.

Los contenidos específicos relacionados con los decimales que hay que abordar en Primaria son: la expresión decimal, el valor posicional de los dígitos, las equivalencias entre decimales o la expresión de partes mediante el uso de porcentajes. De especial importancia es el contenido referente a la correspondencia entre fracciones y decimales como formas distintas de representar el mismo tipo de números, los racionales.

Figura 9.2.—Etiqueta identificativa de un producto envasado.

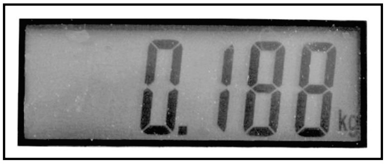


Figura 9.3.—Pantalla de una báscula digital.

Con respecto a las destrezas, se han de trabajar los algoritmos, el cálculo de porcentajes y el uso de la calculadora, siempre aplicados a situaciones reales. Esto permitirá introducir otros contenidos como los de aproximación y error para poder discutir la idoneidad de los resultados dentro de sus contextos. Los problemas se convierten en una herramienta ideal para este fin.

ACTIVIDAD 1: Describe situaciones habituales del escolar en las que aparezcan números decimales. Haz una lista de cantidades que encuentres en tu entorno familiar cuyas medidas sean números pequeños y escríbelas con notación decimal.

ACTIVIDAD 2: Hay profesiones en las que es frecuente trabajar con cantidades muy pequeñas; describe en qué situaciones se emplean tales cantidades. También en tus estudios has podido encontrar cantidades escritas con números pequeños; consulta tu información y escríbelas.

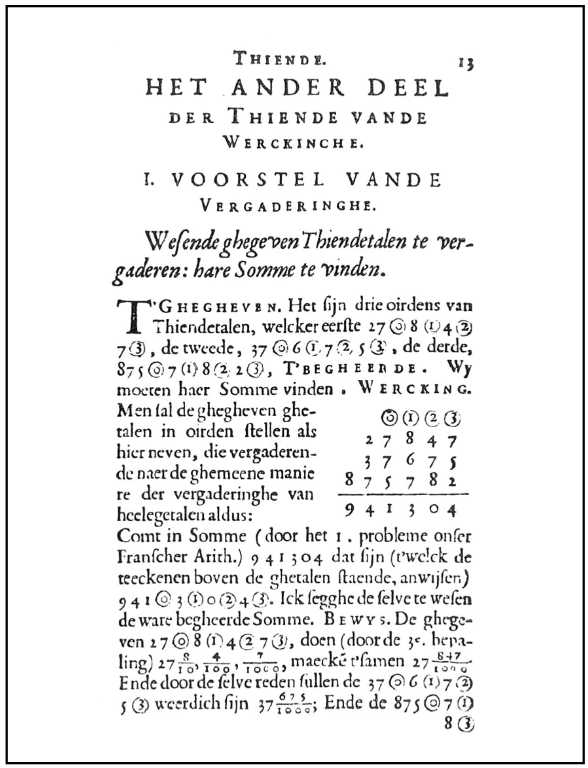
ACTIVIDAD 3: Revisa la normativa curricular y compara el ciclo escolar en el que aparecen los contenidos relacionados con decimales con la aparición de los decimales en diferentes textos de matemáticas de Educación Primaria.

2. HISTORIA DE LA NOTACIÓN DECIMAL

A comienzos del siglo XVI, las fracciones se siguen utilizando en Europa para las operaciones comerciales y las finanzas, lo cual requería gran esfuerzo en los cálculos y resultaba poco práctico para el desarrollo del comercio que se estaba produciendo. También la navegación, los sistemas de créditos de los bancos y, en general, el desarrollo científico y social requerían métodos de cálculo con algoritmos eficientes, conocidos por muchas personas y fácilmente transmisibles. Es entonces cuando se introducen los decimales, que, aunque conocidos en culturas anteriores, no habían tenido un uso práctico previo.

El matemático François Viète (1540-1603) muestra interés por que la utilización de múltiplos y submúltiplos de 10 sustituyera a las expresiones fraccionarias en las matemáticas.

En 1585 se publica de *De Thiende* (*La Décima*, véase figura 9.4), del flamenco Simon Stevin (1548-1620). Este texto se dirige a astrónomos, agrimensores, tapiceros, vinateros, geómetras, banqueros y todo tipo de mercaderes; es el primer libro de la historia que se dedica al estudio de los decimales en exclusiva. Su contenido está dedicado a la notación, las operaciones y los usos de los decimales.



THIENDE. 13

HET ANDER DEEL DER THIENDE VANDE WERCKINCHE.

I. VOORSTEL VANDE VERGADERINGHE.

Wesende ghegeven Thiendetalen te vergaderen: hare Somme te vinden.

T'GHEGHEVEN. Het sijn drie oirdens van Thiendetalen, welcker eerste 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③, de tweede, 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③, de derde, 875 ⓪ 7 ① 8 ② 2 ③, T'BEGHEERDE. Wy moeten haer Somme vinden. WERCKING. Men sal de ghegheven ghetalen in oirden stellen als hier neven, die vergaderende naer de ghemeene maniere der vergaderinghe van heelegetalen aldus:

	⓪	①	②	③
2	7	8	4	7
3	7	6	7	5
8 7	5	7	8	2
9 4	1	3	0	4

Comt in Somme (door het 1. probleme onser Franscher Arith.) 941304 dat sijn (t'welck de teeckenen boven de ghetalen staende, anwijsen) 941 ⓪ 3 ① 0 ② 4 ③. Ick segghe de selve te wesen de ware begheerde Somme. BEWYS. De ghegeven 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③, doen (door de 3e. bepaling) $27\frac{8}{10}, \frac{4}{100}, \frac{7}{1000}$, maecken t'samen $27\frac{847}{1000}$. Ende door de selve reden sullen de 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③ weerdich sijn $37\frac{675}{1000}$; Ende de 875 ⓪ 7 ① 8 ③

Figura 9.4.—Página 13 de *De Thiende* en la que se explica la suma.

La notación de Viète y la de Stevin no coinciden con la actual. John Napier introduce en 1620 la «coma decimal» para separar la parte entera de la parte decimal. Transcurridos casi 400 años desde que se empezó a usar esta notación, no hay acuerdo aún en cómo escribir los decimales. En los países escandinavos la parte decimal es de menor tamaño, $3,^{14}$, y en países anglosajones la separación entre las partes se indica con un punto, 3.14, notación fomentada por el uso de calculadoras (véanse figuras 9.2 y 9.3).

Los números decimales se consolidan e implantan definitivamente con el Sistema Métrico Decimal (SMD). Con la entrega, en 1799, a los Archivos de la República, en París, de los patrones del metro y el kilogramo, en presencia de funcionarios de varios países y de científicos importantes de la época, se proclama oficialmente el Sistema Métrico Decimal. Pronto se extiende a la mayor parte de las naciones europeas. En España se adopta legalmente en 1849. En la actualidad el sistema es universal, y sólo hay tres países donde el SMD no es oficial.

Para indicar los múltiplos de la unidad se adoptan prefijos tomados de términos griegos (*deca* para 10 veces, *hecto* para 100 veces, *kilo* para 1.000 veces y *miria* para 10.000 veces). Para indicar los submúltiplos de la unidad se toman prefijos procedentes del latín (*deci* para 0,1, *centi* para 0,01 y *mili* para 0,001), junto con un sistema de notaciones y reglas para su empleo. Estas normas y prefijos son comunes para todas las magnitudes y se fundamentan en el sistema decimal de numeración. En el capítulo 14 estudiaremos con mayor detalle el Sistema Métrico Decimal.

La economía de las reglas de notación y de los algoritmos en el Sistema Métrico Decimal deben gran parte de su éxito a la ampliación del sistema decimal de numeración a las fracciones mediante las unidades decimales, es decir, a la notación decimal. Los números decimales sostienen el Sistema Internacional de Unidades hoy día, ya que esta notación permite trabajar con los distintos órdenes de unidades de magnitudes muy diferentes según una estructura compartida. Los números decimales proporcionan un sistema de notación y unas reglas comunes para la comparación, transformación y operación entre cantidades que dotan al sistema de una gran potencialidad, versatilidad y simplicidad.

ACTIVIDAD 1: Busca información sobre la notación decimal de Stevin y compárala con la actual. Escribe varios números decimales con las dos notaciones. Señala alguna ventaja de la notación de Stevin. Señala alguna ventaja de la notación actual. ¿Cuál de ellas parece más eficiente?

3. AMPLIANDO EL SISTEMA DE NUMERACIÓN

De las diversas representaciones que tienen los números racionales: pictórica, fraccionaria, porcentual y decimal, los decimales son los más habituales en la vida cotidiana y, en ocasiones, suelen ser entendidos como entidades diferenciadas de las fracciones e, incluso, de las representaciones pictóricas. De hecho, muchas personas asocian los decimales con números, mientras que las fracciones no dejan de ser para ellas áreas de figuras coloreadas. Un logro importante para el docente sería conseguir que el escolar comprendiese la relación fracción-decimal y que fuese capaz de ver que ambos sistemas no son más que diferentes representaciones del mismo concepto.

Con esta intención, las diferentes formas de introducir los decimales, bien sea a partir del sistema de numeración decimal, bien a partir de la medida, deben ser complementadas con el uso de estrategias, modelos y materiales distintos que permitan establecer conexiones entre las fracciones y los decimales.

3.1. Fracciones decimales y notación decimal

El sistema de numeración decimal permite expresar cualquier cantidad entera de objetos como combinación de las potencias sucesivas de 10. Así, diez unidades hacen una decena, diez decenas hacen una centena y diez veces una centena hacen una unidad de millar, con independencia de los objetos o cantidades que se consideren. Con 537 objetos indicamos 7 objetos sueltos, mas 3 veces 10 objetos, mas 5 veces 100 objetos.

Cuando se fracciona o reparte un objeto en partes iguales el sistema de numeración decimal permite expresar cualquier cantidad menor que la unidad mediante combinación de fracciones cuyos denominadores son potencias sucesivas de 10. Veamos cómo surgen estas fracciones. Al dividir una unidad en 10 partes iguales, cada una de esas diez partes iguales se denomina *décima*; cada una de las 10 partes iguales en que se divide una décima se llama *centésima,* y así, sucesivamente, mediante los prefijos usuales mas el sufijo *-ésima,* se pueden definir y nombrar las sucesivas partes decimales de la unidad que se obtienen al dividir en 10 partes iguales una unidad de un orden anterior.

La notación fraccionaria sirve para nombrar y representar lo dicho: dada la unidad 1, su décima parte, $\frac{1}{10}$, verbalmente, una décima, se escribe en notación decimal: 0,1.

Repitiendo el proceso, dada la décima parte de una décima, $\frac{1}{10}$ de $\frac{1}{10}$, es decir, $\frac{1}{100}$ es una centésima; en notación decimal: 0,01.

Cuando se reitera este proceso dividiendo cada parte, a su vez, en diez partes iguales, los denominadores son las sucesivas potencias de 10, y aparecen así las *fracciones decimales unitarias,* a las que se denominará *orden decimal.*

La tabla siguiente muestra el nombre de los distintos órdenes decimales, acompañados cada uno de su expresión como fracción, su notación decimal y su significado:

TABLA 9.1

Órdenes decimales

Orden decimal	Expresión como fracción decimal	Notación decimal	Significado
Décima	$\frac{1}{10}$	0,1	Cada una de las 10 partes iguales en que se divide la unidad.
Centésima	$\frac{1}{100}$	0,01	Cada una de las 100 partes iguales en que se divide la unidad.
Milésima	$\frac{1}{1.000}$	0,001	Cada una de las 1.000 partes iguales en que se divide la unidad.
Diezmilésima	$\frac{1}{10.000}$	0,0001	Cada una de las 10.000 partes iguales en que se divide la unidad.
En general	$\frac{1}{10^n}$	0,0 ... 01	Cada una de las 10^n partes iguales en que se divide la unidad.

La notación introducida para los decimales facilita utilizar los materiales de las fracciones para fomentar su relación con los decimales. Si tomamos como unidad un cuadrado, puede dividirse en 100 partes iguales, como en la figura 9.5. Cada uno de los cuadraditos obtenidos representa 1 centésima: $\frac{1}{100}$, o 0,01.

La cantidad señalada en gris muestra 41 cuadraditos, es decir, 0,41.

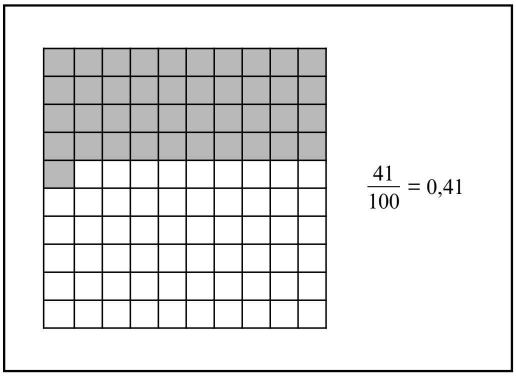


Figura 9.5.—Uso del cuadrado para expresar la notación decimal.

ACTIVIDAD 1: Completa la tabla anterior hasta el orden de la diezmillonésima.

ACTIVIDAD 2: Localiza en el entorno familiar objetos que se pesen en décimas de gramos; recipientes cuya capacidad se exprese en centésimas de litro; duraciones que se midan en milésimas de segundo y objetos distintos cuyas longitudes se midan en décimas, centésimas, milésimas o diezmilésimas de metro.

ACTIVIDAD 3: Escribe como fracciones los siguientes decimales: 0,02 y 0,012.

ACTIVIDAD 4: Representa en un rectángulo los números quince centésimas y cuarenta centésimas.

Relaciones entre los distintos órdenes decimales

El hecho de que cada orden decimal se obtenga dividiendo en diez partes iguales el anterior permite obtener la relación entre los distintos órdenes, como se muestra en la siguiente tabla:

La unidad son 10 décimas	**La unidad son 100 centésimas**	**La unidad son 1.000 milésimas**
$1 = 10 \times 0{,}1$	$1 = 100 \times 0{,}01$	$1 = 1.000 \times 0{,}001$
Luego también $1 = 1{,}0$	Luego también $1 = 1{,}00$	Luego también $1 = 1{,}000$

Por tanto: $1 = 1{,}0 = 1{,}00 = 1{,}000 = ...$ Los ceros a la derecha en la parte decimal no tienen valor.

Del mismo modo que para las unidades:

Una décima son 10 centésimas	**Una décima son 100 milésimas**
$0{,}1 = 10 \times 0{,}01$	$0{,}1 = 100 \times 0{,}001$
También $0{,}1 = 0{,}10$	También $0{,}1 = 0{,}100$

Una centésima son 10 milésimas	**Una centésima son 100 diezmilésimas**
$0{,}01 = 10 \times 0{,}001$	$0{,}01 = 100 \times 0{,}0001$
Luego $0{,}01 = 0{,}010$	Luego $0{,}01 = 0{,}0100$

Las unidades decimales mantienen el principio general del sistema decimal de numeración: cada 10 unidades de un mismo orden dan 1 unidad del orden inmediato superior.

ACTIVIDAD 5: Expresa cuántas millonésimas son una unidad, una décima y una centésima. Escribe 0,4 como centésimas y como milésimas.

ACTIVIDAD 6: Justifica cuales de las siguientes igualdades son verdaderas y cuáles no:

1,00 = 0,100; 0,2 = 0,2000; 3,000 = 0,300;
0,002 = 0,020; 0,04 = 0,0400

3.2. La coma y el valor de cada dígito

La moneda es un modelo útil para la introducción de los decimales como extensión del sistema de numeración decimal. La unidad de moneda está dividida en cien partes denominadas céntimos. Si en un monedero Jaime lleva quince euros y veintitrés céntimos, la parte entera, 15 € se escribirá de manera habitual, y la parte decimal, los 23 céntimos pueden expresarse, según la notación anterior, como 0,23 €. Combinando ambas expresiones, separadas por la coma, en la parte izquierda, la denominada *parte entera,* se sitúa el número entero de euros, y en la parte a la derecha de la coma, la *parte decimal,* se sitúa la parte fraccionaria de un euro (véase figura 9.6).

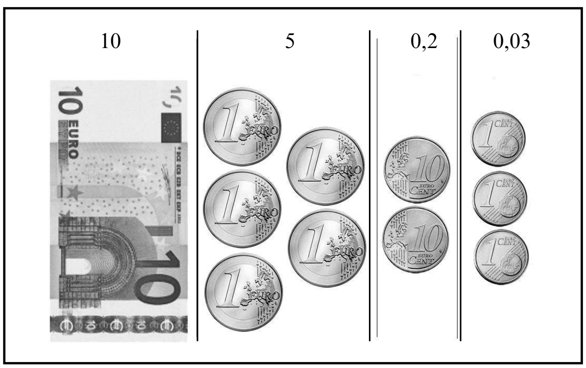


Figura 9.6.—Quince euros y veintitrés céntimos.

La expresión fraccionaria de la cantidad anterior, $15{,}23 = 10 + 5 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100}$, da lugar a una presentación de los decimales usual en los libros de texto de Educación Primaria, una tabla de valor posicional en la que los encabezados están formados por los nombres decimales de las fracciones decimales correspondientes: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, etc.:

Decenas (**D**)	Unidades (**U**)	,	Décimas (**d**)	Centésimas (**c**)
1	5	,	2	3

Una vez establecida la relación entre las diferentes posiciones y que cada 10 elementos de un orden constituyen una unidad de orden superior, la discusión se centra en el lugar que ocupa la coma. En este sentido, referirse a la moneda limita el uso de las tablas de valor posicional, ya que el euro, como unidad, fija la posición en que ha de situarse la coma. Mediante el uso de otros materiales, como las regletas de Cuisenaire o recursos semejantes, se puede modificar la posición de la coma cambiando el foco de atención entre las diferentes cifras. Así, si tomamos los bloques multibase en base 10, cada 10 cubos forman una barra, cada 10 barras forman una placa y 10 placas forman un bloque (figura 9.7).

Si se observa la figura 9.8 con atención, es posible realizar diferentes lecturas decimales de la cantidad que se muestra mediante los bloques multibase.

Si la unidad que se toma en cuenta es el cubo, se contabilizan un total de 1.249 cubos.

En el caso de que se desee saber cuántas barras hay, el número entero de barras es 124, a las que hay que añadir las 9 décimas partes de barra formadas por los cubos; luego el número de barras es 124,9.

Si se toma otro elemento como unidad de referencia y se consideran las placas, el resultado es 12,49 placas.

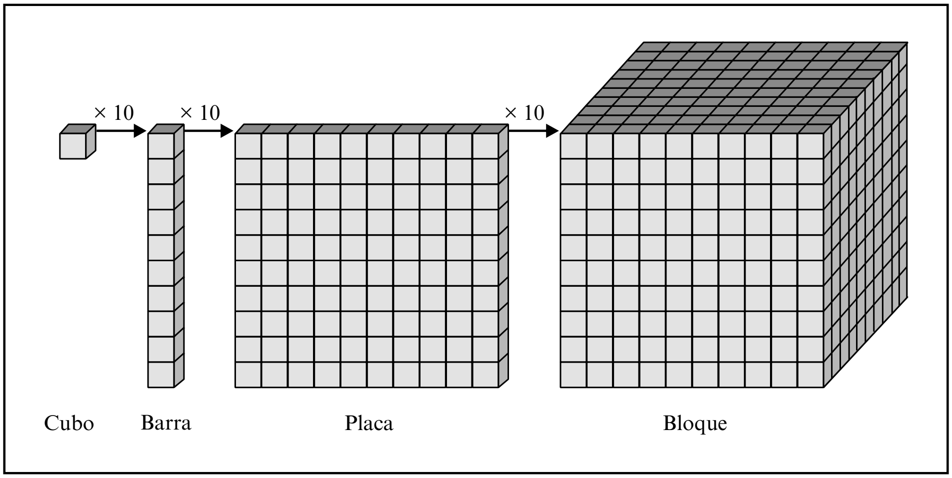


Figura 9.7.—Bloques multibase. Cada 10 elementos forman otro nuevo.

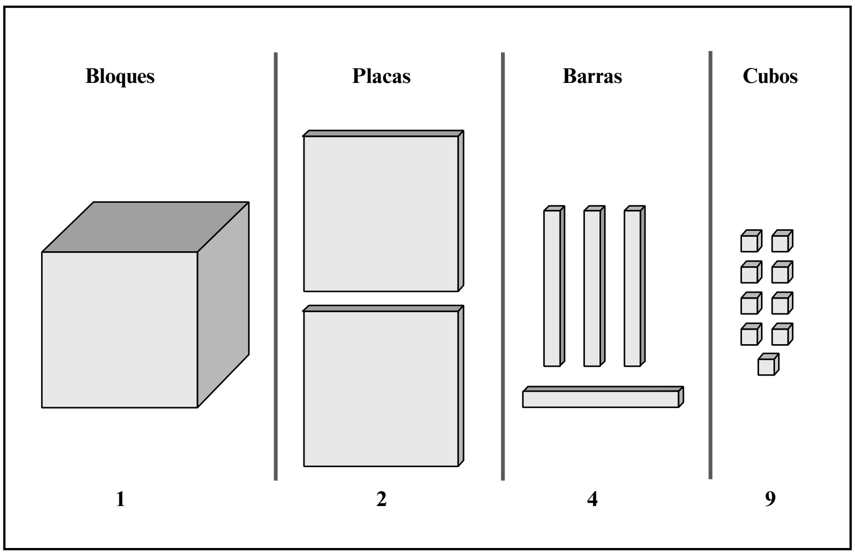


Figura 9.8.—Representación con bloques multibase de 12,49.

Al cambiar el elemento que se considera unidad cambia la posición de la coma. Los materiales facilitan la interpretación del cambio, pero, en general, no se requiere de ellos. Es suficiente con el uso adecuado del vocabulario de los decimales y, como ayuda, se pueden usar las tablas de valor posicional. En la siguiente tabla, se sitúa el número 23,86; al mover la coma se indica el valor de la cantidad refiriéndose a la posición que ocupa el separador:

TABLA 9.2

Expresiones decimales de una misma cantidad

D	U,	d	c	Expresión verbal
2	3,	8	6	23 unidades y 86 centésimas.
2	3	8,	6	238,6 décimas = 238 décimas y 6 centésimas.
2,	3	8	6	2,386 decenas = 2 decenas y 386 centésimas.

Cada una de las expresiones de la tabla anterior se puede justificar mediante el uso de las fracciones:

$$23{,}86 = \frac{2.386}{100} = \frac{238}{10} + \frac{6}{100} = 2 \times 10 + \frac{386}{100}$$

En la tabla anterior, al número 23,86 se le han dado tres expresiones verbales y simbólicas, de las muchas que se podrían haber asignado. El análisis de cualquiera de estas expresiones verbales puede ser confuso para la interpretación de la cantidad. Tomando, por ejemplo, las más natural, «veintitrés unidades y ochenta y seis centésimas», se encuentra una descoordinación en la parte decimal entre el valor del número 86 (decenas) y el valor posicional que tiene, centésimas. En 0,111, «ciento once milésimas», el valor 111 (cientos) no se corresponde con los miles de las milésimas.

ACTIVIDAD 7: Utilizando el material multibase, toma 2 bloques, 3 placas, 7 barras y 5 cubos. Asigna el valor unidad, por turnos, a cada uno de los elementos y escribe el número decimal correspondiente.

ACTIVIDAD 8: Con el material multibase, representa los decimales 1,045 y 263,8.

El Sistema Métrico Decimal

El Sistema Métrico Decimal ofrece, igual que el sistema monetario, modelos concretos para introducir los decimales y trabajar con ellos. También muestra la importancia de la elección de la unidad y cómo esta elección incide sobre la posición en la que se coloca la coma. Instrumentos de medida como la regla graduada o la cinta métrica sirven para determinar medidas; además, sus resultados se dan con unidades de diferente orden. Así, los resultados de la cinta métrica más común se dan en metros, mientras que los de la regla graduada se dan en centímetros, con la subdivisión en milímetros (figura 9.9).

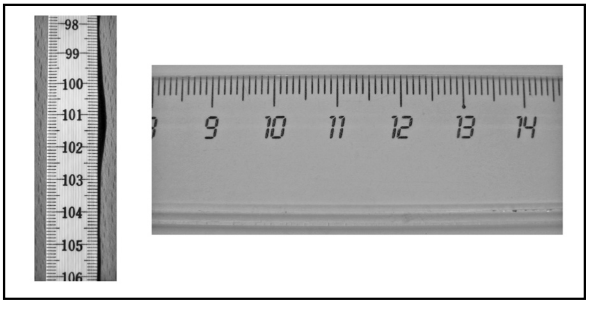


Figura 9.9.—Cinta métrica de sastre y regla escolar.

Una vez escritos los distintos órdenes de unidades que forman una cantidad se elige una unidad para expresar la cantidad total con un solo número. Lo más destacable no es cuál es la unidad que se ha elegido, ya que ésta puede cambiar sin que cambie la cantidad medida. De nuevo, la tabla de valor posicional es de gran ayuda para colocar la coma que determina cuál de las unidades de longitud del sistema se va a utilizar como referencia:

TABLA 9.3

Expresiones decimales de una misma longitud

Kilómetros (km)	**Hectómetros (hm)**	**Decámetros (dam)**	**Metros (m)**	**Decímetros (dm)**	**Centímetros (cm)**	**Milímetros (mm)**
		4	5	3	7	
4 decámetros, 5 metros, 3 decímetros y 7 centímetros						
45,37 metros 4,537 decámetros 0,04537 kilómetros 4.537 centímetros 45.370 milímetros						

La cantidad inicial: 4 dam, 5 m, 3 dm y 7 cm se dice que está escrita en forma *compleja* porque viene dada mediante distintas unidades.

Las otras cantidades: 45,37 m, 4,537 dam, 4.537 cm y 45.370 mm son cantidades *incomplejas,* cada una de ellas viene dada por una sola unidad.

ACTIVIDAD 9: Expresa en forma incompleja las cantidades: 3 kg, 20 g; 7 km, 3 hm y 2 dm; 4 cm y 2 mm. En cada caso hazlo con dos unidades distintas de manera que en una de ellas haya que utilizar notación decimal y en la otra no.

3.3. Recta numérica y ordenación

Una de las representaciones más comunes de los números es la recta numérica, donde ya se han situado los naturales. Para extender esta representación a los números decimales se divide cada segmento unidad en diez partes iguales. Esta primera división de la unidad determina la posición de las décimas. Para representar el segundo orden decimal, las centésimas, se subdivide cada uno de los segmentos anteriores, a su vez, en otras diez partes. La figura 9.10 muestra, mediante tres pasos, la representación del número 1,47 sobre la recta numérica.

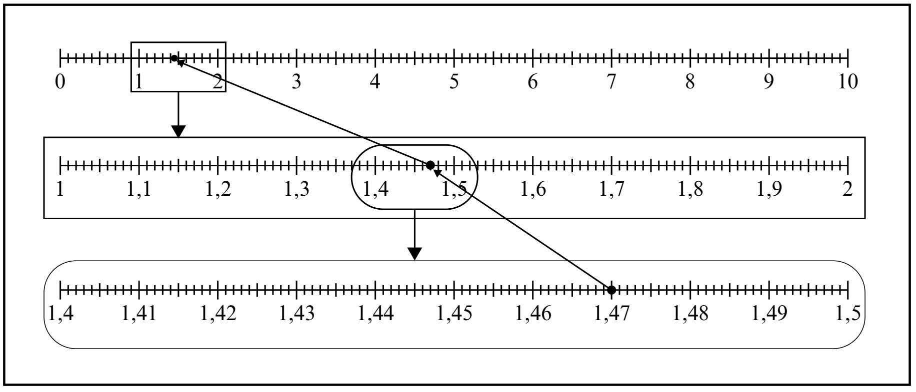


Figura 9.10.—Representación de decimales sobre la recta real.

Esta representación muestra que cuando se divide el segmento [1,4; 1,5] en diez partes, el segmento original [1; 2] se ha dividido, a su vez, en 100 partes, lo que muestra que desde ese momento la notación más adecuada para 1,4 será 1,40, y para 1,5 será 1,50, y confirma que los ceros a la derecha se pueden añadir siempre que sea necesario.

Este proceso reiterado de dividir en 10 partes iguales cada intervalo puede continuar hasta que sea necesario. Si se quiere representar, por ejemplo, el decimal 1,4743, se debe dividir el intervalo [1,474; 1,475] en 10 partes, lo que supone haber dividido el intervalo [1,47; 1,48] en 100 partes y el intervalo [1,4; 1,5] en 1.000 partes, y, a su vez, el intervalo [1; 2] en 10.000 partes iguales. El límite de divisiones que pueden hacerse dependerá del número de dígitos decimales que se deseen representar, permitiendo observar una importante propiedad de los números decimales: la *densidad*.

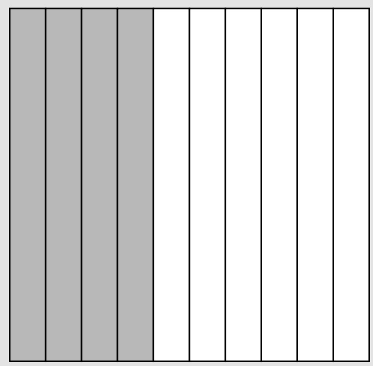
La densidad de los números decimales expresa que entre dos números decimales hay siempre otro decimal intermedio.

Así, entre 0,1 y 0,01 está 0,05: $0{,}01 < 0{,}05 < 0{,}10$, e igual ocurre con cualquier par de números decimales. Por este motivo, *un número decimal no tiene anterior ni siguiente,* ya que entre dos decimales hay muchos otros. Si pensamos en números pequeños, números comprendidos entre 0 y 1, encontramos una propiedad muy interesante: *no hay ningún número entre 0 y 1 que sea menor que todos.* Veamos el razonamiento. Si suponemos que a es ese menor número, por muy cerca que esté de 0, siempre hay otro número b entre 0 y a que es menor que a; luego a no puede ser el menor número entre 0 y 1. Por el mismo motivo, tampoco b cumple esa propiedad. No hay número entre 0 y 1 con la propiedad de ser menor que todos.

ACTIVIDAD 10: El lenguaje verbal genera problemas en ocasiones. Al realizar una compra, el tendero me indicó que el precio de la misma ascendía a diez con nueve. Tras mirar mi monedero, le entregué un billete de diez euros y una moneda de 10 céntimos. Sin embargo, él me indicó que faltaba dinero. Escribe las cantidades mencionadas e indica por qué se produjo la confusión.

ACTIVIDAD 11: Observa la figura y escribe el número decimal representado. ¿Qué decimales hay entre 0,3 y 0,4?

Añade al dibujo diez bandas horizontales. ¿Qué decimales hay ahora entre 0,3 y 0,4? ¿Y entre 0,35 y 0,36?:



Comparación de expresiones decimales

Al considerar la relación entre los distintos órdenes decimales vimos que los ceros que se escriban a la derecha en la parte decimal de un número no tienen valor de cantidad. Razones que justifican esta regla son:

- Por un lado, la ausencia de valor de esas cifras, como ocurre, por ejemplo, en 60 centésimas, que son seis décimas y ninguna centésima, lo cual indica que la centésima no tiene valor y se puede eliminar.
- Por otro lado, la expresión de las fracciones como decimales y la equivalencia de

fracciones. Vemos un ejemplo en el que al multiplicar denominador y numerador por el mismo número se construyen fracciones equivalentes:

$$1{,}2 = \frac{12}{10} = \frac{12}{10} \times \frac{10}{10} = \frac{120}{100} = 1{,}20 = \ldots = 1{,}200 =$$

$$= 1{,}2000 = \ldots$$

El orden de los números naturales viene determinado por el valor del dígito de mayor orden, que es el que ocupa la posición más a la izquierda; en caso de coincidencia, se compararán los siguientes dígitos hacia la derecha. Informalmente, se comparan según *su tamaño,* es decir, según su número de dígitos: es mayor el que mayor número de dígitos tiene; si tienen igual número dígitos, se van comparando sus cifras, comenzado por la de mayor orden; es mayor aquel que antes presenta una cifra mayor en el orden más elevado.

En caso de que la parte entera sea igual, un decimal será mayor que otro si al comparar sólo la parte decimal, la del primero resulta mayor que la del segundo. Veamos qué ocurre con aquellos números cuya parte entera es la misma y cuya comparación hay que hacer sólo con su parte decimal.

Los números decimales no siguen la misma regla que los enteros, no se pueden comparar atendiendo a su tamaño: 0,0001 *tiene más cifras* que 0,01, pero una diezmilésima es menor que una centésima: 0,0001 < 0,01.

En esta ocasión, como en muchas otras, ocurre que los números decimales no aparecen escritos con la misma cantidad de dígitos decimales; esto se puede solventar añadiendo ceros hasta igualarlos en el número de cifras.

Por ejemplo, 36,77 es mayor que 13,88 porque la parte entera es mayor. Cuando las partes enteras son iguales, como 1,25 y 1,12, hay que recurrir al siguiente dígito. Así, 1,25 es mayor que 1,12 porque 1,25 tiene dos décimas, mientras que 1,12 sólo posee una décima.

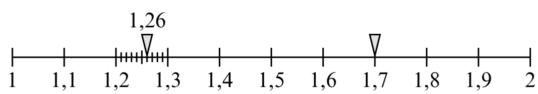
Una forma sencilla de comparar es añadir los ceros: 1,7 es mayor que 1,56 porque tiene la misma parte entera, y si se escribe 1,7 = 1,70 para igualar el número de dígitos decimales, se observa que 70 es mayor que 56:

U,	**d**	**c**
1,	$\boxed{7}$	
1,	$\boxed{5}$	6

→ 1,7 tiene 7 décimas mientras que 1,56 sólo tiene 5,6 décimas

Otra forma de comparar decimales consiste en expresarlos como fracciones o realizar su representación sobre la recta real:

$$1{,}7 = \frac{17}{10} = \frac{170}{100} > \frac{126}{100} = 1{,}26$$



Consideramos el siguiente problema: *Paula tiene 1,2 € y Jaime tiene 1,11 €. ¿Cuál de los dos tiene más?* La expresión oral de las cantidades puede inducir a error: «uno coma dos frente a uno coma once; los dos tienen un euro entero, y como once es mayor que dos, Jaime tiene más dinero que Paula». En este razonamiento se ha considerado el número de decimales en lugar del valor posicional de los dígitos. Es recomendable que se añadan ceros hasta que ambos decimales tengan el mismo número de cifras.

Además de ayudar a ordenar, añadir ceros a la derecha es un recurso que se utiliza para construir decimales que tengan ciertos requisitos. Es común entre los escolares tener dificultades para encontrar números comprendidos entre dos cantidades dadas, como, por ejemplo, 1,5 y 1,6. El hecho de que entre 5 y 6 no hay números naturales conduce a la conclusión de que es imposible encontrar un número entre ambos. De nuevo, añadiendo un cero (o más) a la derecha de dichos números, se pueden encontrar números en dicho intervalo:

$$1{,}5 = 1{,}50 < 1{,}56 < 1{,}60 = 1{,}6$$

Ejemplo. El número 0,25 unidades puede expresarse de muchas maneras diferentes, bien porque al utilizar el lenguaje verbal se cambia la referencia principal (0,25 unidades = 2,5 décimas), o bien porque se añaden ceros a la derecha de la parte decimal (0,25 = 0,250000). En cualquiera de los casos se trata de expresiones distintas del mismo número, éste no cambia.

ACTIVIDAD 12: ¿Qué número representa la cantidad 28 centésimas y 12 décimas?

ACTIVIDAD 13: Escribe tres números positivos menores que 0,01.

ACTIVIDAD 14: Escribe tres números mayores que 1,9 y menores que 2.

ACTIVIDAD 15 *(calculadora):* Usando sólo una vez las teclas 7, 5, 3 y · de la calculadora, escribe: el menor número decimal. El número decimal más cercano a 0,5.

4. OPERACIONES CON DECIMALES FINITOS

Trabajar con decimales en lugar de fracciones facilita la realización de cálculos. Los algoritmos con fracciones necesitan dominar determinadas destrezas, mientras que las operaciones con decimales se aprenden como generalización de las operaciones con naturales y, en consecuencia, se recuerdan con mayor facilidad. No obstante, como se verá, la justificación de los algoritmos requiere representar el decimal como fracción y utilizar los algoritmos de las fracciones.

Esta faceta de los decimales facilita la contextualización de los algoritmos de cálculo mediante su uso en situaciones cotidianas, determinante para dotar de significado a las operaciones y que no se conviertan en meras rutinas que hay que memorizar. La clasificación que se ha realizado en los capítulos correspondientes sobre los problemas aritméticos es igualmente válida para los decimales. Consecuentemente, para la adición y sustracción se consideran problemas de cambio, de combinación, de comparación e igualación; en la multiplicación y división se consideran problemas de proporcionalidad simple, de comparación multiplicativa y de producto cartesiano.

A continuación, se describen los algoritmos, mostrando situaciones problemáticas correspondientes a algunos de los tipos de problemas mencionados.

4.1. Algoritmos de la adición y la sustracción

Los algoritmos usuales para la adición y la sustracción de decimales se presentan como una generalización de esos mismos algoritmos para naturales. La principal precaución a tener es situar la coma decimal de manera adecuada.

Problema. Después de revisar los bolsillos del pantalón antes de meterlo en la lavadora, he encontrado 13,45 € en el bolsillo izquierdo y 2,6 € en el derecho. ¿Cuánto dinero llevaba en el pantalón?

Este sencillo problema de combinación, en el que hay que realizar la suma 13,45 + 2,6 permite introducir el algoritmo; también permite justificar por qué la suma de decimales se hace de esa forma determinada. El escolar, familiarizado con la moneda e introducido previamente en el mundo decimal, entiende rápidamente que los euros se suman con los euros y los céntimos con los céntimos, y que hay que añadir un cero a la izquierda de 2,6 para poder leerlo en el lenguaje de la moneda.

Para sumar o restar decimales se siguen los siguientes pasos:

1. Colocar los números en columnas, haciendo coincidir verticalmente los distintos órdenes de unidades. La coma, por tanto, debe estar alineada verticalmente en todos los términos. En caso necesario, añadir ceros:

$$\begin{array}{cccc} & \mathbf{D} & \mathbf{U,} & \mathbf{d} & \mathbf{c} \\ & 1 & 3, & 4 & 5 \\ + & & 2, & 6 & \boxed{0} \\ \hline & 1 & 6, & 0 & 5 \end{array} \longleftarrow \text{Cero añadido}$$

2. Sumar o restar según los algoritmos de los números naturales.
3. Situar la coma en el resultado debajo de la coma de los otros términos de la operación.

Además de la situación en la que se plantee un problema, que ayuda a comprender el algoritmo, se encuentra una justificación del mismo mediante la identificación oral de la cantidad. En la operación anterior, la suma de 13 unidades y cuarenta y cinco centésimas más dos unidades y 6 décimas, puede ser interpretada como la adición de 1.345 centésimas con 260 centésimas, cuyo resultado es 345 + 1.260 = 1.605 centésimas, es decir, 16,05. Esta expresión oral tiene su representación equivalente con fracciones de la forma:

$$13{,}45 + 2{,}6 = \frac{1.345}{100} + \frac{26}{10} = \frac{1.345}{100} + \frac{260}{100} =$$
$$= \frac{1.605}{100} = 16{,}05$$

ACTIVIDAD 1: El algoritmo de la sustracción es similar al de la suma. Descríbelo verbalmente.

ACTIVIDAD 2: Realiza la siguiente suma de tres formas diferentes: 2 unidades y 57 centésimas más 0,567 decenas.

4.2. Algoritmo del producto

El siguiente problema de producto cartesiano, en el que hay producto de medidas, es un ejemplo de multiplicación de decimales.

Problema. Un edificio con forma de prisma rectangular mide 5,6 m de altura y su base tiene 12,37 m^2 de área. ¿Cuál es su volumen?

La dificultad del algoritmo, como generalización del algoritmo del producto de números naturales, consiste en determinar la posición de la coma. Tiene dos pasos:

1. Multiplicar los decimales según el algoritmo del producto para los naturales.
2. Situar correctamente la coma en el resultado del producto. Para ello se suma el número de dígitos decimales de ambos factores del producto, lo que determina el número de cifras decimales que tiene el resultado. Si el número de cifras del producto es menor que el de cifras decimales, se completa con ceros a la izquierda hasta situar la coma:

$$\left.\begin{array}{cccccc} & & 1 & 2, & \boxed{3\ 7} \\ & \times & & & 5, \boxed{6} \\ \hline & & 7 & 4 & 2\ 2 \\ + & 6 & 1 & 8 & 5 \\ \hline & 6 & 9, & \boxed{2} & \boxed{7\ 2} \end{array}\right\} \; 2 + 1 = 3 \text{ decimales}$$

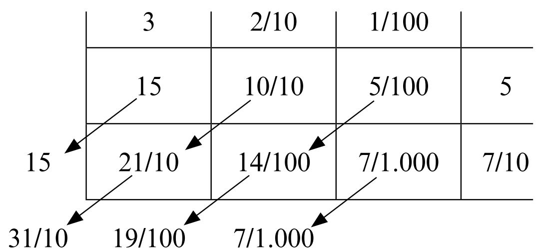
Como ocurría con la adición y la sustracción, el uso de las fracciones permite la justificación del algoritmo. En el ejemplo, 1.237 centésimas multiplicado por 56 décimas requiere realizar una doble operación.

Por un lado, $1.237 \times 56 = 69.272$, y, por otro, tener en cuenta que centésimas por décimas son milésimas; el resultado bien dado en milésimas es: 69,272:

$$12{,}37 \times 5{,}6 = \frac{1.237}{100} \times \frac{56}{10} = \frac{1.237 \times 56}{100 \times 10} =$$

$$= \frac{69.272}{1.000} = 69{,}272$$

Otra forma de justificar es utilizar cada uno de los valores posicionales y usar algún algoritmo clásico. Mediante, por ejemplo, el algoritmo de la celosía, se multiplicará $3{,}21 \times 5{,}7$ teniendo en cuenta las descomposiciones $3{,}21 = 3 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100}$ y $5{,}7 = 5 + \frac{7}{10}$:



De esta forma:

$$3{,}21 \times 5{,}7 = 15 + \left(\frac{10}{10} + \frac{21}{10}\right) + \left(\frac{5}{100} + \frac{14}{100}\right) +$$

$$+ \frac{7}{1.000} = 15 + \frac{31}{10} + \frac{19}{100} + \frac{7}{1.000} =$$

$$= 15 + \left(3 + \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10} + \frac{9}{100}\right) + \frac{7}{1.000} =$$

$$= 18 + \frac{2}{10} + \frac{9}{100} + \frac{7}{1.000} = 18{,}297$$

ACTIVIDAD 3: Realiza los siguientes productos de dos formas diferentes: por un lado, usando el algoritmo del producto, y, por otro, mediante su expresión fraccionaria: *a*) $8{,}36 \times 12{,}04$ y *b*) $15{,}268 \times 0{,}41$.

ACTIVIDAD 4: Inventa un problema de comparación multiplicativa en el que la operación sea $0{,}8 \times 4{,}33$.

ACTIVIDAD 5: Explica la siguiente regla: «Cuando se multiplica un número por la unidad seguida de ceros, el resultado se obtiene corriendo la coma hacia la derecha».

ACTIVIDAD 6: Justifica la siguiente regla: «Multiplicar por una centésima es lo mismo que dividir entre 100».

4.3. Algoritmo de la división

Los tipos de problemas que se plantean para la división son los mismos que para la multiplicación. A pesar de ello, el algoritmo es significativamente diferente. De hecho, aunque vuelve a generalizar el algoritmo de la división para naturales, aparecen varios casos diferentes. En lugar de tratarlos uno a uno, se presentan algunos casos que se pueden considerar generales, a los que se puede recurrir. Como ha ocurrido con el resto de las operaciones, la cercanía del enunciado con las rutinas del escolar se considera muy importante.

Problema. Un lechero debe distribuir 250 litros de leche entre las 8 tiendas habituales. ¿Qué cantidad de leche debe dejar en cada tienda si deja en todas la misma cantidad?

En este problema de proporcionalidad simple, si el lechero quiere ajustar las cantidades, debe realizar una división en la que no haya resto. Para conseguirlo, deberá considerar que los 2 litros de resto al dividir 250 entre 8 se pueden seguir dividiendo, pero en el cociente quedarán partes de litro, es decir, decimales:

$$\begin{array}{ccc|l} 2 & 5 & 0 & \underline{\;8\qquad} \\ & 1 & 0 & \;3\;\;1 \\ & & 2 & \end{array}$$

Subdividiendo los 2 litros en 20 dl o en 200 cl, si es necesario, y añadiendo la coma una vez que el resto es menor que el divisor, se puede continuar realizando la operación:

$$\begin{array}{ccccc|l} \mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{U,} & \mathbf{d} & \mathbf{c} & \\ 2 & 5 & 0 & & & \underline{\;8\qquad\qquad} \\ & 1 & 0 & & & 3\;\;1,\boxed{2\;\;5} \\ & & 2 & 0 & & \text{D U, d c} \\ & & & 4 & 0 & \\ & & & & 0 & \end{array}$$

Así, el lechero consigue repartir toda su leche entre las 8 tiendas.

Los dos siguientes casos resumen todas las posibilidades de división entre decimales.

Caso 1. Si el divisor es un número natural

La operación se realiza de forma análoga a la división de naturales hasta que hay que «bajar» la primera cifra decimal, momento en el que se le pondrá coma al cociente para continuar la división como si de naturales se tratara. La división terminará en el momento en que el resto sea cero, o cuando los restos comiencen a repetirse:

$$\begin{array}{cccc|l} \mathbf{D} & \mathbf{U,} & \mathbf{d} & \mathbf{c} & \\ 2 & 5, & 6 & & \underline{\;4\qquad} \\ & 1, & 6 & & \;\;6,\;4 \\ & & 0 & & \;\;\text{U, d} \end{array}$$

De nuevo, las operaciones con fracciones justifican la operación:

$$25{,}6 : 4 = \frac{256}{10} : 4 = \frac{256}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{256}{4} \times \frac{1}{10} =$$

$$= 64 \times \frac{1}{10} = \frac{64}{10} = 6{,}4$$

Caso 2. El divisor no es natural

La división se transforma en una operación equivalente a otra en la que el divisor es natural mediante productos de potencias de 10, empleando la propiedad conmutativa de la multiplicación:

$$63{,}24 : 3{,}1 = \frac{63{,}24}{3{,}1} = \frac{63{,}24}{3{,}1} \times \frac{10}{10} = \frac{632{,}4}{31} =$$

$$= 632{,}4 : 31 = 20{,}4$$

El uso de materiales es útil para dar sentido al algoritmo de la división. Por ejemplo, si se desea dividir 11 : 4, se puede recurrir al material multibase. Se toman las placas como unidad y se representan las 11 unidades en placas, de las que se pueden hacer cuatro grupos de 2 placas y sobran 3 placas. Estas 3 placas, a su vez, corresponden a 30 barras, que se vuelven a dividir en cuatro grupos de 7 barras, sobrando 2 barras. Para terminar, las 2 barras, o 20 cubos, se dividen en cuatro grupos de 5 cubos, lo que da un cociente de 2,75 (véase figura 9.11).

ACTIVIDAD 7: Comprueba: «Dividir entre el uno seguido de ceros es equivalente a mover la coma hacia la izquierda tantos ceros como haya».

ACTIVIDAD 8: Realiza las siguientes divisiones: *a*) 1.520,2 : 128 y *b*) 555 : 1,25.

ACTIVIDAD 9: Realiza la división 15 : 8 utilizando material multibase.

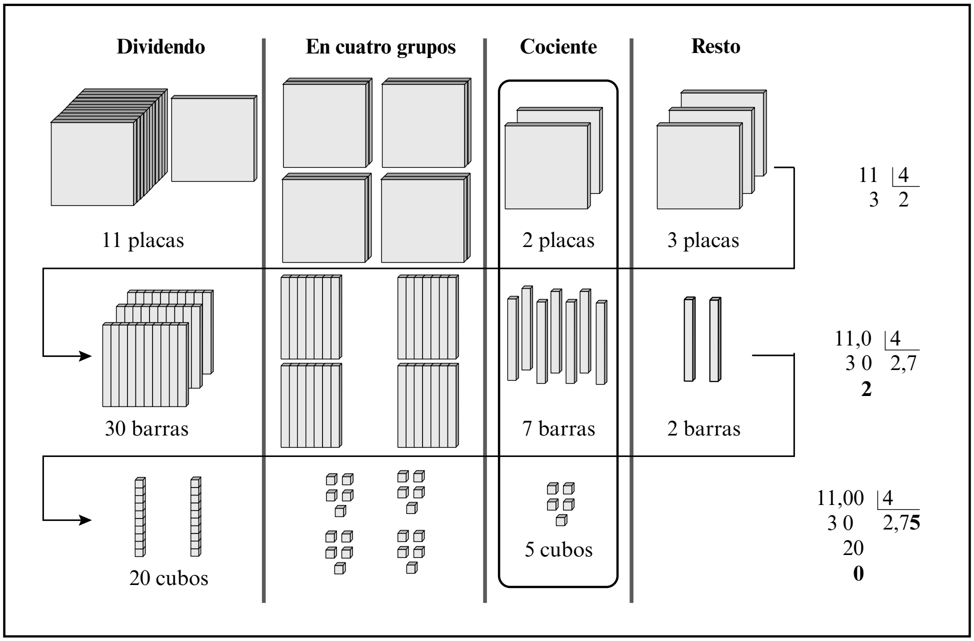


Figura 9.11.—División 11 : 4 = 2,75 utilizando material multibase.

5. ¿CUÁNTOS DECIMALES TIENE UNA FRACCIÓN?

Una de las situaciones que pueden darse cuando se está realizando una división entre enteros o decimales es que no sea posible obtener resto cero. Si tenemos en cuenta una situación como la siguiente:

Problema. Un padre con 3 hijos quiere repartir 10 € entre ellos.

Este padre tendrá la dificultad de que la división no es exacta, incluso si recurre a los decimales. La cuestión es que, haga lo que haga y divida cuantas veces quiera, el resto siempre saldrá 1. ¿Qué puede hacer?

La situación anterior es tan cercana a la realidad que conviene plantear el problema detenidamente.

5.1. De fracción a decimal. La familia de los decimales

Hasta ahora hemos tratado sólo con expresiones decimales que tienen un número finito de cifras, resultado de la representación de las fracciones cuyo denominador es una potencia de 10. La descomposición en factores primos de 10 (2 × 5) deja intuir que son 2 y 5 los responsables de que el decimal tenga un número determinado de cifras. ¿Qué ocurre, entonces, si el divisor de una fracción tiene otros divisores primos distintos de 2 y 5?

Si se toma el ejemplo de la división 10 : 3, se observa que aunque se siga repitiendo la operación, el resto y el cociente se continuará repitiendo indefinidamente:

$$\begin{array}{r|l} 1\ 0,\ 0 & 3 \\ \cline{2-2} 1\ 0 & 3,\ 3 \\ 1 & \end{array}$$

Este hecho permite definir un tipo de decimales llamados *decimales periódicos,* caracterizados por una repetición de cifras indefinida y secuenciada en el cociente. Para escribirlo se requiere una infinidad de cifras repetidas; esta reiteración de una o varias cifras se resume mediante un arco sobre los dígitos que se repiten. En el caso de 3,33333..., la cifra que se repite, 3, se denomina *período,* y se expresa por $3,\overline{3}$.

Es importante saber que todas las fracciones se pueden expresar como decimales y que estas representaciones pueden ser de varios tipos:

1. *Decimal finito*. Se presentan cuando los factores primos en el divisor son, exclusivamente, 2 y 5. Se caracterizan por obtener resto 0. Por ejemplo 17 : 8 = 2,125.
2. *Decimal periódico*. Se presentan cuando los factores primos del divisor son distintos de 2 y 5. Se caracterizan por la repetición de los restos y los cocientes. Por ejemplo, $27 : 11 = 2,\overline{45}$.
3. *Decimal periódico mixto.* Un tercer tipo de decimales aparecen cuando el denominador de la fracción incluye los factores primos 2 o 5 y otros números primos distintos. En estos casos, aparecerán cifras que no se repitan y otras que sí lo hagan, lo que hará que sea realmente importante señalar bien cuáles son las cifras repetidas. Así, en la fracción $67 : 66 = 1,0\overline{15}$ el número cero es un decimal que no se repite, decimal finito, y las cifras 1 y 5 serán de carácter periódico, lo que significa que se podría expresar 1,0151515151515...

Obtener la expresión decimal de una fracción consiste en realizar la división hasta conseguir un resto cero (decimal finito) o un resto repetido (decimal periódico). Esta situación es inevitable, ya que, dada una fracción irreducible, por ejemplo, $\frac{8}{11}$, todos los restos resultantes al realizar la división han de ser menores que el denominador, en este caso 11, lo que significa que cuando hayan aparecido 10 restos se ha debido repetir alguno de ellos y, por tanto, el bloque de decimales del cociente habrá comenzado a repetirse. Así, la fracción $\frac{1}{3}$ podrá tener, como mucho, un período de $3 - 1 = 2$ dígitos.

De decimal a fracción

El paso contrario, es decir, dado un decimal obtener una fracción que lo represente, es sencillo cuando se trata de decimales finitos, pues basta considerar el número sin coma y dividirlo entre la potencia de 10 adecuada. Por ejemplo, $1,85 = \frac{185}{100}$.

Pero, ¿qué ocurre con los decimales periódicos? ¿Cómo se pueden representar en forma de fracción?

El paso de decimal periódico a fracción depende de si éste es o no mixto. Para el caso de decimales que contienen únicamente dígitos periódicos, se nombra el número, *n,* y se multiplica por la potencia de 10 igual al número de dígitos del período. Finalmente, se resta el número al resultado de la multiplicación.

Por ejemplo, dado el decimal $n = 0,\overline{87}$, se multiplica por 100, pues tiene dos dígitos periódicos y se realiza la sustracción:

$$\begin{array}{rr} & 100\,n = 87,\,878787... \\ - & n = \;\;0,\,878787... \\ \hline & 99\,n = 87,\,000000... \end{array}$$

de donde $n = \frac{87}{99} = \frac{29}{33}$.

ACTIVIDAD 1: Operar con decimales no finitos no es tan sencillo como hacerlo con decimales finitos. Para realizar cálculos, primero se expresan en forma fraccionaria y, posteriormente, se opera. Realiza las operaciones: $1,\overline{25} + 1,\overline{7}$ y $0,\overline{8} \times 0,7\overline{1}$.

ACTIVIDAD 2: Determina, sin realizar la división, si las siguientes fracciones generan decimales finitos o periódicos: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{25}$ y $\frac{1}{30}$.

ACTIVIDAD 3: ¿Cuántas cifras como máximo puede tener el período de la representación decimal de la fracción $\frac{3}{7}$?

5.2. Aproximar

La concreción a situaciones reales de los problemas de división planteó una nueva cuestión, como se vio al principio de este epígrafe. En el problema propuesto, el padre podría dar a cada uno de sus hijos 3,33 €, es decir, 3 € y 33 céntimos, pero al finalizar el reparto le sobraría 1 céntimo. Aunque el padre conozca la solución formal del reparto $3,\overline{3}$ €, es incapaz de dar esta cantidad a cada uno. La fracción de moneda se lo impide, estando obligado a usar una cantidad parecida, aunque no la exacta. En matemáticas esta cuestión se conoce como aproximación, y responde a la sencilla pregunta de ¿cuántos decimales hay que poner para responder satisfactoriamente a la situación?

En la práctica, el resolutor de un problema tendrá que adaptarse al contexto. Así, por ejemplo, en el problema mencionado, el padre tendrá que pensar qué hace con ese céntimo que le sobra. En situaciones de medida directa, cuando el escolar está trabajando con regla graduada, báscula o balanza, vasos graduados, etcétera, deberá restringir el número de decimales usados a la precisión del instrumento de medida (véase figura 9.12).

Figura 9.12.—Tornillo micrométrico.

Sin embargo, cuando se trabaja con medidas indirectas, las operaciones y, en particular, las multiplicaciones y divisiones permiten obtener muchos más decimales de lo que sería razonable si se utilizase un instrumento. Esto es lo que ocurre también cuando se resuelven problemas de comparación multiplicativa o de producto cartesiano.

Ejemplo. Si el área de una habitación rectangular es 12 m^2 y uno de sus lados mide 3,9 m, ¿cuánto mide el otro lado?

En este problema de producto cartesiano, el resolutor debe dividir 12 : 3,9 para obtener un decimal periódico: 3,076923076923... ¿Cuántas de estas cifras debe considerar para resolver este problema? Parece razonable considerar hasta los centímetros o, como mucho, hasta los milímetros, es decir, 3,07 m o 3,076 m. Pero, ¿cómo saber si esos números son los más adecuados?

Tomar un decimal finito en lugar de otro decimal o de un racional por el proceso de seleccionar cierto número de dígitos es lo que se conoce como *aproximación*. Esta aproximación, tal y como se indica en el capítulo 5, se puede realizar por *truncamiento,* como en el ejemplo, en el que se ha cortado el número 3,076923 ≈ 3,07 sin tener en cuenta los dígitos posteriores o por *redondeo,* si para hacer la aproximación se tiene en cuenta la siguiente cifra. El valor de la siguiente cifra, cuando es mayor o igual que 5, determina si al dígito al que se va a aproximar se le suma 1. En el caso de 3,076923, al redondear a las centésimas, el valor de las milésimas, 6, indica que a las centésimas hay que añadirle 1, y, por tanto, la aproximación por redondeo será 3,076923 ≈ 3,08.

En cualquiera de los dos casos descritos para aproximar, ya sea por redondeo o por truncamiento, hay que ser consciente de que al sustituir el número original por otro se está cometiendo un *error.* El cálculo del error consiste en restar el número y la aproximación.

Hacer que ese error no tenga importancia, sea despreciable, dentro del contexto o situación en que se plantee el problema es el objetivo de toda buena aproximación. Se debe encontrar un límite al error que se pueda admitir y que no suponga variaciones importantes en los resultados. Esto es lo que se conoce como *acotar el error.* En general, al aproximar a cierto orden decimal el error cometido será menor que ese orden decimal. Por ejemplo, si se aproxima a las centésimas, el error será menor que una centésima.

Ejemplo. Se quiere aproximar el número $\frac{2}{11} = 0{,}\overline{18}$. Primero se determina el orden de aproximación, es decir, décimas, centésimas y milésimas y, posteriormente, se estudia su error. Si se aproxima a las décimas, para truncar, se corta el decimal: 0,1. Para redondear se requiere observar los dos primeros decimales y determinar si 0,18 es más cercano a 0,1 o a 0,2. En este caso, es a 0,2. A continuación se resta el número y la aproximación y se considera el valor positivo de la resta:

Truncamiento a las décimas: 2/11 ≈ 0,1.

Error $\left|\frac{2}{11} - 0{,}1\right| = \frac{2}{11} - \frac{1}{10} = \frac{20-11}{110} = \frac{9}{110} = 0{,}0\overline{81}$ menor que 1 décima.

Redondeo a las décimas. 0,2. Error $\left|\frac{2}{11} - 0{,}2\right| = \frac{2}{10} - \frac{2}{11} = \frac{22-20}{110} = \frac{2}{110} = 0{,}0\overline{18}$ menor que 1 décima.

La calculadora y el redondeo están muy relacionados. Una calculadora tiene un número limitado de dígitos en pantalla. Cuando el número de dígitos decimales sobrepasa el número de cifras que se pueden ver, la calculadora debe aproximar el resultado a ese número de cifras. Cuando la calculadora es científica, se puede configurar dicha aproximación y elegir si es por truncamiento o por redondeo, pero, en general, el usuario desconoce qué tipo de estimación hace la calculadora.

Otro de los problemas de la calculadora es que al cortar el número de cifras decimales, en ocasiones, no es fácil determinar el decimal asociado a ciertas fracciones. Al intentar expresar en decimal $\frac{23}{7}$ se obtuvo 3,285714286, lo que impidió determinar con certeza el período del decimal, que es, exactamente, 285714. El problema surgió porque la calculadora redondeó el resultado como se observa en la figura 9.13.

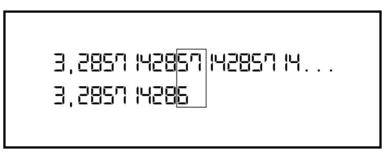


Figura 9.13.—Redondeo realizado por calculadora.

ACTIVIDAD 4 *(calculadora):* Averigua si tu calculadora trunca o redondea cuando aproxima un decimal.

ACTIVIDAD 5 *(calculadora):* Determina el período del decimal que corresponde a la fracción $\frac{2}{225}$.

Estimar con decimales

La aproximación es uno de los tipos de procesos asociados a la estimación y, en general, los procesos para realizar cálculos estimados con decimales son semejantes a los descritos en el capítulo 5: reformulación, traslación y compensación.

No vamos a describir los procesos de nuevo, pero es interesante realizar algunas reflexiones sobre la estimación con decimales. En primer lugar, en situaciones de adición o sustracción, una buena estimación puede ayudar al escolar a situar bien la coma. Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo. En la mano izquierda llevo 1,576 kg de manzanas y en la derecha 1,46 kg de naranjas. ¿Cuánto peso llevo de más en la mano izquierda?

El escolar que tenga una visión clara del sistema de numeración se dará cuenta de que la diferencia debe rondar los 0,1 kg, lo que le ayudará a evitar alinear los dos 6 para realizar la resta. En general, la estimación ayudará a comprender el significado de la coma y el concepto de decimal.

Para la multiplicación, el problema de situar la coma es más complicado, pero, en determinados casos, la estimación puede dar pistas sobre dónde debe ir. Si se considera el problema:

Ejemplo. Un modelo de botella de vino tiene una capacidad de 1,1 litros. ¿Cuánto vino cabe en 5 botellas?

Estimando que la capacidad de 5 botellas debe ser más de 5 litros, pero en ningún caso tiene sentido que llegue a 55 litros, se eliminan los posibles resultados de la multiplicación exacta 0,55 litros y 55 litros.

ACTIVIDAD 6: En la división 999 : 40 = 24.975 se ha borrado la coma en el cociente. Utiliza esta información para estimar el cociente exacto de las siguientes divisiones:

999 : 4; 999 : 400; 999 : 0,4; 9,99 : 4

Los números grandes y pequeños. Notación científica

Expresiones como la ciudad de Decimópolis tiene una población de 1,25 millones de habitantes o el presupuesto para determinada obra asciende a 12,3 miles de millones de euros aparecen en los medios de comunicación a diario y presentan un ejemplo de la importancia de la posición de la coma. Los números anteriores muestran cómo los decimales también se pueden usar para representar partes de la unidad cuando ésta no es exactamente la unidad convencional. El número 1,25 millones de habitantes no se refiere a habitantes, sino a millones de personas, lo que en escritura convencional sería 1.250.000 habitantes, y el presupuesto de la obra anterior es 12.300.000.000 €.

Para este tipo de números se usa la *notación científica,* que, como su nombre indica, es un tipo de notación especialmente adecuada para expresar números relacionados con datos científicos. Se caracteriza porque, de todos los dígitos, se utiliza sólo una cifra entera y el resto componen la parte decimal. Para compensar la posición de la coma, dicho número se multiplica por una potencia de 10 adecuada para dar equivalencia a la expresión, potencia que viene determinada por el número de lugares que se mueve la coma. En los ejemplos anteriores:

1.250.000 habitantes = 1,25 millones
de habitantes = $1{,}25 \times 10^{6}$ habitantes

12.300.000.000 € = $1{,}23 \times 10^{10}$ €

Este tipo de notación también es adecuada para números especialmente pequeños. Un ejemplo habitual son los pesos de las partículas subatómicas como el protón, cuyo peso es $1{,}67262 \times 10^{-27}$ kg = 0,00000000000000000000000000167262 kg, o el electrón, que pesa $9{,}1 \times \times 10^{-31}$ kg = 0,0 (30 ceros) 91 kg.

De manera habitual, los resultados obtenidos en una calculadora científica son más grandes o más pequeños de lo que la calculadora puede mostrar en la pantalla. En estos casos aparecen en la parte derecha dos cifras nuevas que significan que el número está expresado en notación científica.

En la multiplicación de la figura 9.14 el producto dado por la calculadora corresponde a la aproximación del resultado exacto expresada en notación científica. Hay que llamar la atención, puesto que, normalmente, en las calculadoras científicas no aparece la base 10, que el estudiante debe añadir. Así, el resultado anterior se expresa como $4{,}549382675 \times 10^{11}$, y se corresponde con un número cercano a 4 centenas de miles de millones.

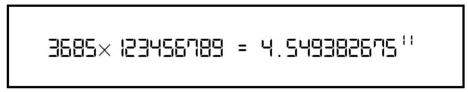


Figura 9.14.—Notación científica expresada por una calculadora.

Actividad 7 *(calculadora):* Para introducir en la calculadora un número en notación científica se usa la tecla EXP, lo que significa que se pueden realizar operaciones entre cantidades denotadas científicamente. Realiza las siguientes operaciones con la calculadora y expresa el resultado con todas sus cifras:

$$1{,}25 \times 10^{8} + 3{,}34 \times 10^{-8}$$

$$4{,}5 \times 10^{3} - 4{,}5 \times 10^{4}$$

ACTIVIDADES PARA PRACTICAR

Con calculadora

1. Utiliza la calculadora para decidir cuál de los siguientes decimales es mayor: 25,111 o 25,3.

   Resolución. La calculadora no posee ninguna tecla con la que comparar dos números. Para determinar cuál es mayor se realiza la resta del primero menos el segundo. Puesto que el resultado es un número negativo, 25,3 es mayor que 25,111.

2. Usando sólo las teclas 1, 5, 9 y ·, escribe el menor número que puedas que sea más cercano a 0,6.
3. Calcula la expresión decimal de las siguientes fracciones:

$$\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$$

Describe la regularidad que se observa.

4. Realiza las siguientes operaciones:

a) $2{,}5 \times 10^{8} + 3{,}4 \times 10^{6}$.
b) $1{,}1 \times 10^{-3} : 1{,}88 \times 10^{-6}$.
c) $7{,}34 \times 10^{8} \times 1{,}44 \times 10^{-9}$.
d) $3{,}95 \times 10^{-3} - 3{,}95 \times 10^{-2}$.

5. Calcula los metros que recorre la luz en un año, es decir, calcula un año luz.

6. Calcula la superficie de un componente electrónico rectangular de dimensiones 3,5678 mm y 1,89457 mm. Expresa el resultado en notación científica y en metros.

7. Existe una marca comercial de cerveza que utiliza el valor 0,0 para indicar que su cerveza no contiene alcohol. ¿Es posible que dicha cerveza contenga alcohol?

Actividades

1. En los algoritmos de la adición y la sustracción se suman las cantidades con las correspondientes que ocupan la misma posición: décimas con décimas, centésimas con centésimas, etc. Justifícalo con un ejemplo.

RESOLUCIÓN. La justificación requiere las operaciones con fracciones. Si se desea restar, por ejemplo, 12,7 menos 3,4 y se expresan los órdenes de cada cifra:

$$12{,}7 = 1 \times 10 + 2 + \frac{7}{10}$$

$$3{,}4 = 3 + \frac{4}{10}$$

$$12{,}7 - 3{,}4 = \left(12 + \frac{7}{10}\right) - \left(3 + \frac{4}{10}\right) =$$

$$= (12 - 3) + \left(\frac{7}{10} - \frac{4}{10}\right) = 9 + \frac{3}{10} = 9{,}3$$

2. Escribe la fracción irreducible que representa al decimal $1{,}8\overline{75}$.

RESOLUCIÓN. El decimal es periódico mixto puesto que uno de sus decimales, el 8, no se repite, mientras que la parte decimal, 75, se repetirá indefinidamente. Para expresarlo en formato fraccionario, le asignamos un nombre al número, $n = 1.8\overline{75}$, y lo multiplicamos por una potencia de 10 igual al número de cifras decimales (sin tener en cuenta las repeticiones). En este caso, $1.000n = 1.875{,}\overline{75}$. A continuación, se multiplica el número original por otra potencia de 10 correspondiente al número de decimales finitos que tenga, que aquí es $10n = 18{,}\overline{75}$. Para terminar, se restan las cantidades y se despeja el valor de *n:*

$$\begin{array}{rl} 1000\,n = & 1.875{,}75757575\ldots \\ -\quad 10\,n = & 18{,}75757575\ldots \\ \hline 990\,n = & 1.857 \end{array}$$

$$\text{Luego } n = \frac{1.857}{990} = \frac{619}{330}$$

3. Redondea 16/49 a las centésimas y calcula el error que se comete.

RESOLUCIÓN. Al realizar la división se obtiene $\frac{16}{49} \approx 0{,}32653031$. Puesto que la cifra de las milésimas es superior o igual que 5, el redondeo se hará añadiendo 1 a la cifra de las centésimas; luego será 0,33. El error cometido se obtiene calculando el valor absoluto de la resta del número menos la aproximación:

$$\left|\frac{16}{49} - 0{,}33\right| = \left|\frac{16}{49} - \frac{33}{100}\right| = \left|\frac{1.600}{4.900} - \frac{1.617}{4.900}\right| =$$

$$= \frac{17}{4.900} \approx 0{,}0034673$$

4. Realiza la siguiente suma: $1,\overline{23} + 4,\overline{8}$.

RESOLUCIÓN. No existe un algoritmo para operar con decimales periódicos. Para hacer operaciones con ellos se requiere encontrar una expresión fraccionaria de los mismos, realizar la operación y, posteriormente, volver a representarlos como decimal. En este caso:

$$1,\overline{23} + 4,\overline{8} = \frac{122}{99} + \frac{44}{9} = \frac{122 + 484}{99} = \frac{606}{99} = \frac{202}{33} = 6,\overline{12}$$

5. Representa en la recta numérica los decimales: 1,6 − 1,44 − 1,30 − 1,95 − 1,11 y utiliza su representación para ordenarlos de menor a mayor.

6. Ordena de mayor a menor los decimales: 0,99 − 0,134 − 0,001 − 0,1 − 0,12 − 0,9.

7. Escribe nueve decimales mayores que 3,5 y menores que 3,6. ¿Hay más decimales entre esos dos valores?

8. Clasifica los decimales y exprésalos en forma de fracción irreducible.

9. Redondea los decimales siguientes para que el error cometido sea menor que el indicado:

a) 23,76543 con un error menor que una décima.
b) 0,003612 con un error menor que una milésima.

10. Redondea los siguientes decimales a las centésimas y determina el error que se comete:

a) 111,657.
b) 9,9898.
c) 0,10101.
d) 25/7.

11. Expresa los siguientes números en notación científica:

a) 123.456.000.000.
b) Cien mil cuatrocientos veinticinco millones.
c) Una diezmillonésima.
d) 0,00000987.

12. La población de tres ciudades es: ciudad *A* 1.235.689 habitantes, ciudad *B* 888.996 habitantes y ciudad *C* 123.488.648 habitantes:

a) Escribe la población de cada una de las ciudades expresándola en miles de habitantes.
b) Expresa la población de cada una de las ciudades en notación científica.

13. Realiza las siguientes operaciones:

$8,1\overline{03} + 1,4$ $8,25 \times 0,34$

$0,001 : 16$ $0,1 \times 89,67$

INVESTIGA Y REFLEXIONA

1. Existen números muy conocidos, como π o $\sqrt{2}$, que no forman parte de los números racionales, luego no se pueden expresar como fracción y no tienen una expresión decimal ni finita ni periódica. Estos números son los irracionales. Cuando se opera con ellos, se utilizan aproximaciones como $\pi \approx 3{,}14$, que serán más o menos adecuadas dependiendo del contexto en el que nos situemos. Investiga sobre los números irracionales:

   a) Utiliza los recursos de Internet para averiguar cuántos decimales de π se han calculado hasta el momento.
   b) Identifica situaciones escolares en las que aparece π.
   c) Calcula el número $\sqrt{2}$ con la calculadora. Redondéalo a las milésimas y calcula el error cometido.
   d) Investiga la forma de representar sobre la recta numérica el valor $\sqrt{2}$.

2. Cuando se multiplican dos decimales menores que 1, ¿por qué el producto es menor que ambos? Justifica la respuesta usando una representación gráfica.
3. Cuando se dividen decimales menores que uno, ¿por qué el cociente es mayor que ambos? Justifica la respuesta usando una representación gráfica.
4. En las gasolineras, los precios del litro de combustible vienen dados en euros con tres cifras decimales:

   a) Determina por qué, si en la realidad sólo nos pueden cobrar con dos decimales.
   b) Trata de determinar si el precio final consiste en un redondeo o un truncamiento del precio real calculado con tres decimales.

5. En la actualidad, las tarifas en los aparcamientos públicos se establecen en euros por minuto o fracción de minuto. Sin embargo, existe un precio máximo por día. En un aparcamiento, averigua cuál es el precio del minuto y cuál es el máximo por día, y determina a partir de qué momento el aparcamiento es gratuito.

BIBLIOGRAFÍA

Castro, E. (Ed.) (2001). *Didáctica de la Matemática en la educación primaria*. Madrid: Síntesis.

Centeno, J. (1997). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid. Síntesis.

Chapin, S. H. y Johnson, A. (2000). *Math Matters Grades K-6*. California: Math Solutions Publications.

Flores, P. (2008). «El algortimo de la división de fracciones». *Epsilon*, n.º 70, vol. 25 (3), pp. 29-40.

Krause, E. (1991). *Mathematics for Elementary Teachers. A balanced approach.* Lexington, Massachusetts: D. C. Heath and Company.

Van del Walle, J. A. (2007). *Elementary and middle school Mathematics: teaching developmentally*. Pearson Education, Inc.

10

Geometría elemental del plano

MARÍA CONSUELO CAÑADAS SANTIAGO
FRANCISCO RUIZ LÓPEZ

Figura 10.1.—Flor pentámera y pentágono estrellado.

La geometría tiene una presencia importante en nuestro entorno. En la naturaleza se pueden observar conchas de crustáceos, telas de araña, copos de nieve, girasoles o estrellas que permiten visualizar diferentes elementos geométricos. En la figura 10.1 se observa una flor pentámera que evoca un pentágono regular y un pentágono estrellado.

La representación gráfica tiene un papel fundamental en la geometría del plano, pues pone de manifiesto tanto los elementos como sus relaciones y puede facilitar la percepción de figuras, elementos geométricos y sus propiedades. En este tipo de representación intervienen herramientas que facilitan la construcción de algunos de los elementos geométricos que abordamos en este capítulo. El proceso de construcción con instrumentos de dibujo proporciona la oportunidad para practicar los conocimientos aprendidos y para la identificación y caracterización de propiedades de las figuras geométricas planas. Entre los instrumentos que utilizaremos en este capítulo están la regla, la escuadra, el cartabón, el compás y el semicírculo graduado. Se parte de la base de que el lector conoce estos utensilios y sabe usarlos, por lo que nos centraremos en resaltar su utilidad para la construcción de algunos elementos de la geometría plana.

Además de los instrumentos de dibujo, existen numerosos materiales manipulativos didácticos para la enseñanza y aprendizaje de la geometría plana. Cobran también especial relevancia los programas de geometría dinámica, que son programas interactivos que permiten dibujar figuras geométricas, desplazarlas, modificarlas, encontrar propiedades y relaciones entre ellas, realizar conjeturas y comprobarlas. Geogebra es uno de estos programas, cuenta con la ventaja de trabajar con un marco geométrico y otro algebraico (de ahí su nombre) y está accesible de forma gratuita en Internet.

1. EL INICIO DE LA GEOMETRÍA

Se considera que la geometría se encuentra en el origen de la historia de las matemáticas. Los vestigios de la geometría están presentes en la vida del ser humano desde la prehistoria. Los conceptos geométricos más antiguos de los que se tienen noticias por descubrimientos arqueológicos pertenecen a tiempos prehistóricos. Como ocurre con cualquier ámbito de la cultura, nos tenemos que atener a la información recabada mediante utensilios e imágenes que se han conservado durante milenios y a las interpretaciones que proporcionan la Arqueología y la Antropología Social. En edificios, sepulturas y herramientas se descubren formas y figuras que atienden a ciertas propiedades geométricas. En la alfarería, la cestería y los tejidos del neolítico se observan figuras geométricas, congruencias o simetrías, que son, en esencia, partes de la geometría elemental.

Se sabe que los pobladores de esta época de la historia conocían elementos de la geometría plana como el triángulo, el cuadrado y el rectángulo, el círculo y el hexágono regular inscrito en él, la esfera, el cilindro, el prisma rectangular, el cubo, el tetraedro y el octaedro regulares, entre otros. Además, se hace patente cómo estos pobladores utilizan algunas propiedades simétricas de las figuras y el planteamiento de problemas geométricos prácticos.

Es arriesgado asignar una fecha para el inicio de la geometría. Heródoto y Aristóteles no se aventuraron a situar los orígenes de la geometría antes de la civilización egipcia. Ambos pensadores exponen dos teorías acerca del origen de la geometría. El primero defiende una teoría basada en la necesidad práctica y el segundo una teoría basada en el ocio y el ritual sacerdotal. La interpretación de Heródoto ha sido la que más ha trascendido, quizá por su relación con el pueblo. Este historiador griego justifica el inicio de la geometría por la necesidad de los agricultores por mantener las lindes de los campos con las inundaciones producidas por el Nilo cada año. Esto hizo que los agrimensores o tensadores de cuerdas desarrollaran técnicas geométricas para la división del plano. La geometría como rama de la matemática se consolida hacia la primera mitad del siglo VI a. C., momento en el que pasa a ser de una herramienta útil para la agricultura (de ahí su nombre, ya que geometría significa «medida de la tierra») a ser un campo de trabajo de filósofos, matemáticos y pensadores.

ACTIVIDAD 1: La geometría griega fue incapaz de resolver dos famosos problemas de la geometría plana únicamente mediante regla y compás (únicos instrumentos válidos en esta época para hacer construcciones geométricas): *a*) la cuadratura del círculo y *b*) la trisección de un ángulo cualquiera. Infórmate y haz un resumen sobre estos problemas, en qué consistían y, si ya han sido resueltos, explica en qué modo y mediante qué métodos.

2. LA GEOMETRÍA EN EL CURRÍCULO

La geometría como disciplina matemática tiene por objeto el estudio riguroso del espacio y de las formas (figuras y cuerpos) que en él se pueden considerar. Un enfoque deductivo y preciso de la geometría requiere axiomas y demostraciones que son inadecuadas para la mayoría de los estudiantes de Educación Primaria. Por ello, en estos niveles de la enseñanza se recurre a un enfoque experimental e intuitivo.

Los conocimientos geométricos se consideran básicos para los escolares, y así lo recogen las normativas curriculares de Educación Primaria en España. Conocer y manejar formas y figuras geométricas, establecer relaciones entre ellas, identificar relaciones geométricas que se presenten en la realidad, clasificar de acuerdo con diferentes criterios y construir, dibujar y modelizar mediante diferentes herramientas son parte de los objetivos propuestos en Educación Primaria. En los contenidos relacionados con la geometría se destaca el papel de los materiales manipulativos en la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina, ya sean físicos o virtuales. Estos materiales facilitan a los escolares una aproximación a los conceptos geométricos a través de modelos reales con los que pueden interactuar. Por ello, se hace necesario que los futuros maestros sean capaces de reconocer, enunciar propiedades, caracterizar, definir, manejar y construir objetos geométricos. También es preciso que logren establecer relaciones entre estos elementos.

Estas capacidades deben ir acompañadas de otras más generales vinculadas a las competencias de representación, argumentación, justificación y resolución de problemas. Así, es importante que los futuros maestros justifiquen algunas propiedades de la geometría del plano, representen figuras geométricas mediante variadas herramientas y logren plantear y resolver problemas empleando conceptos de geometría plana.

3. SITUACIONES

La geometría es una rama de las matemáticas muy intuitiva y concreta, de las más ligadas a la realidad. El origen de la observación de elementos geométricos por el hombre se encuentra en la naturaleza. La simetría aparece con frecuencia en multitud de paisajes, tanto en el mundo animal como en el vegetal. Además, los seres vivos «utilizan» elementos geométricos en sus construcciones, como, por ejemplo, las telas tejidas por las arañas, los panales de miel de las abejas o las formas en hélice de crecimientos de muchas plantas.

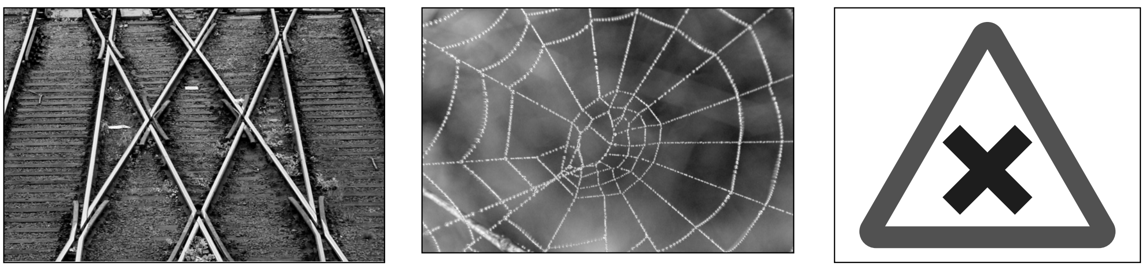
Las formas más utilizadas en la obra humana están condicionadas por la funcionalidad por una parte y también por la propia física, y más concretamente por la gravedad, que condiciona la estabilidad de las construcciones. Por ello, las paredes suelen ser verticales, lo que favorece la presencia de ángulos rectos y rectángulos (puertas, ventanas, techos, paredes, suelos, etc.) en la construcción. Los ángulos rectos también se observan en muebles y otros objetos del entorno como carteles, tarjetas de crédito, DNI, folios, etc.

La arquitectura y la construcción han supuesto un importante motor para el desarrollo de la geometría. Del mismo modo, la creación artesana ha desempeñado un papel relevante jugando con formas, volúmenes, sombras y colores dando lugar a obras de arte y a producciones artesanales. Como ejemplos, sirven los trabajos de taracea que recubren el plano, o los típicos faroles granadinos, semejantes a originales poliedros de cristales de colores. Igualmente, la geometría es primordial en el arte. El diseño gráfico, la fotografía, el cine y otros campos de expresión artística dan muestras del papel de la geometría.

El triángulo es el único polígono rígido, por ello se utiliza para dar solidez en estructuras ligadas a la construcción y postes de electricidad, así como en edificios. La Torre Eiffel, de París, se ha convertido en el símbolo de la ciudad. Con una altura de 320 metros, sigue en pie desde que el arquitecto que le da nombre la construyera para la Exposición Universal de 1900. La estabilidad de dicha torre es debida en gran parte a su estructura triangular.

En carreteras o vías del tren se utilizan paralelismo y perpendicularidad para dar estabilidad al medio de transporte. En este mismo ámbito se utilizan figuras geométricas básicas como el triángulo, el cuadrado o el círculo en las señales de tráfico.

En la figura 10.2 se recogen imágenes como ejemplos de la geometría en nuestro entorno.



Vías del tren — Tela de araña — Señal de tráfico

Figura 10.2.—Geometría en nuestro entorno.

En la enseñanza y aprendizaje de la geometría en Educación Primaria toma una especial relevancia el juego. Hay juegos populares que se basan en los desplazamientos por el espacio (juegos de corro, juegos deportivos...) o por un circuito plano, cumpliendo con unas reglas (billar, ajedrez, parchís, barcos, o sobre una pantalla de ordenador). Otros juegos utilizan figuras geométricas planas (como los puzzles) o espaciales (cubo de Rubik, juegos de construcción, columpios y utensilios lúdicos de los parques infantiles). En la figura 10.3 se observan algunos elementos de la geometría plana en el campo de fútbol.

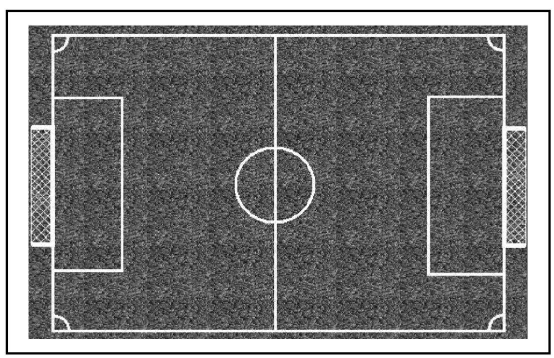


Figura 10.3.—Elementos geométricos en el campo de fútbol.

4. ELEMENTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA PLANA

Thales de Mileto fue uno de los primeros griegos que consideró que los elementos geométricos no se pueden establecer mediante ensayo y error, sino a través de la observación y la experimentación por medio de un razonamiento lógico. Sus esfuerzos sentaron las bases del trabajo más conocido de Euclides: *Los Elementos de Euclides*. Thales y Euclides, junto con otros griegos, hicieron que la geometría ganara abstracción y se desvinculara del mundo eminentemente físico. Desde ese momento y hasta la actualidad, este tipo de geometría ha tenido un peso importante en la enseñanza de las matemáticas en los niveles escolares y se conoce con el nombre de *geometría euclidea*. Este desarrollo de la geometría se basa esencialmente en el desarrollo de cadenas lógicas a partir de cinco postulados y de algunas nociones comunes. Los cinco postulados son:

1. Por dos puntos diferentes sólo se puede trazar una recta.
2. Todo segmento rectilíneo se puede prolongar indefinidamente.
3. Con un centro y un radio dados, sólo se puede trazar una circunferencia.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si una recta corta a otras dos formando a un lado ángulos internos, y la suma de estos es menor que dos ángulos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán de ese lado.

Para la aplicación de estos postulados se hace preciso partir de algunos elementos de la geometría plana desde los cuales se definan otras relaciones y conceptos geométricos. Comenzamos con los *primeros elementos* o *elementos básicos* de la geometría: plano, punto y recta.

Asumimos que un papel o cualquier otra superficie plana, como un espejo, un cristal, el tablero de una mesa, una lámina de agua o la superficie de una pantalla, son imágenes de un plano. Un plano es la abstracción de una superficie plana.

4.1. Plano

Un plano tiene dos dimensiones. Euclides, en sus *Elementos* (Libro I, def. 5.ª), afirma que *superficie es aquello que sólo tiene longitud y anchura*. Usualmente representamos un plano mediante superficies como la que evoca la figura 10.4.

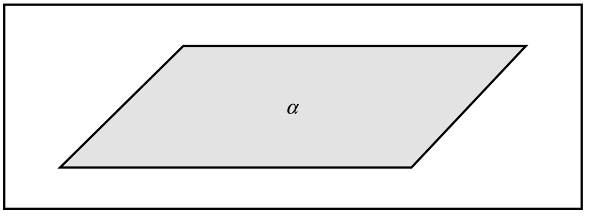


Figura 10.4.—Superficie plana.

Los planos se suelen nombrar por medio de letras del alfabeto griego, como el de la figura 10.4, que se ha nombrado mediante la letra α. En general, salvo que sea necesario distinguir entre dos o más planos, tomamos la superficie del libro como representación del plano.

ACTIVIDAD 1: Identifica superficies planas en tu entorno. Nombra una superficie plana en tu casa, en la clase, en un campo de deportes o en tu barrio.

Un plano está formado por puntos. Un plano es un conjunto y sus elementos son los puntos. En la geometría usual la noción de plano incluye que es ilimitado en todas sus direcciones y que consta de infinitos puntos.

4.2. Punto

Un punto no tiene dimensiones, sirve para indicar posición. El modo de representar un punto sobre un plano es mediante una marca (×) o (•). Los puntos se nombran con letras mayúsculas. La figura 10.5 representa un punto P como elemento del plano α.

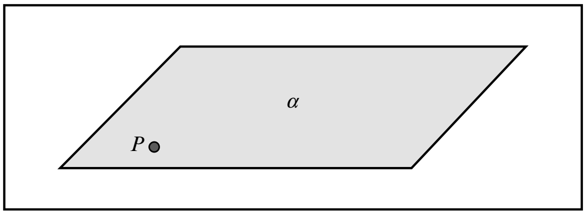


Figura 10.5.—Punto P en el plano α.

ACTIVIDAD 2: Identifica posiciones en tu entorno que se puedan abstraer como puntos. Nombra dos o más objetos que evoquen puntos en tu casa, en el aula, en un campo de deportes y en el plano de tu ciudad.

Si en un plano se marcan dos puntos A y B, podemos trazar varios caminos entre A y B con una sola dimensión. Estos caminos muestran distintas líneas que pasan por los puntos A y B (figura 10.6).

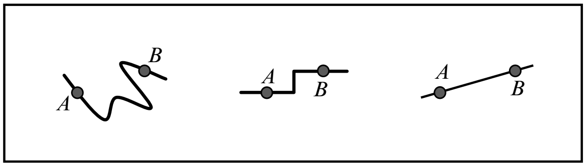


Figura 10.6.—Líneas que pasan por dos puntos.

4.3. Rectas

Una de las líneas que pasan por dos puntos A y B es la *línea recta*. Una línea recta se entiende como el camino más corto entre esos dos puntos en el plano, y tiene sólo una dimensión: *longitud*.

Una línea recta se nombra con una letra minúscula del alfabeto arábigo. Así, m es la recta que pasa por A y por B. Las líneas rectas tienen infinitos puntos. Su trazado se hace apoyando y desplazando un lápiz sobre una regla.

La idea de recta o segmento puede ser trabajada con los escolares a partir de objetos físicos: el borde de un folio o de una pizarra, una cuerda estirada, el itinerario más corto entre dos pueblos, etc. Es importante tener en cuenta que aunque la recta en estos modelos tenga un inicio y un fin, esto no ocurre en la recta como objeto geométrico, que tiene una extensión ilimitada.

ACTIVIDAD 3: Abstrae e identifica líneas rectas en tu entorno. Nombra una línea recta que puedas reconocer en tu casa, en la clase, en un campo de deportes o en tu barrio. Señala para cada recta dos puntos que la determinen.

Rectas que se cortan

Dos rectas m y n que se cortan determinan un punto. E es el punto de corte de las rectas m y n. Dos rectas determinan un punto de corte único (figura 10.7).

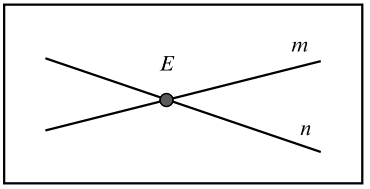


Figura 10.7.—Rectas que se cortan.

Dos puntos siempre están alineados. Sin embargo, tres o más puntos pueden estarlo o no. Tres puntos no alineados determinan siempre un plano. Por ello las banquetas con tres patas o los trípodes nunca están cojos.

Por un mismo punto pasan infinitas rectas.

ACTIVIDAD 4: Marca un punto P y traza 4 rectas que pasen por ese punto. ¿Cuántas rectas más puedes trazar que pasen por el punto P?

Al conjunto de todas las rectas que pasan por un punto P se le llama *haz de rectas* (véase figura 10.8).

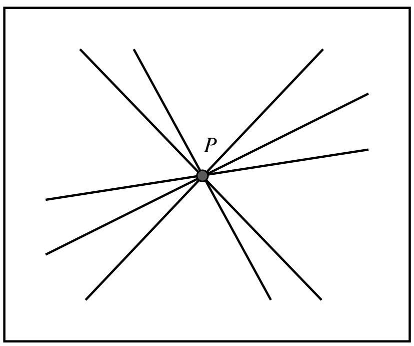


Figura 10.8.—Haz de rectas.

Rectas paralelas

Cuando dos rectas no se cortan se dice que *tienen la misma dirección*. Las rectas p y q de la figura 10.9 son *paralelas*.

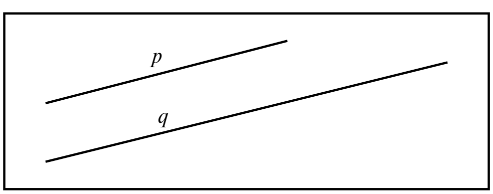


Figura 10.9.—Rectas paralelas.

ACTIVIDAD 5: Identifica pares de líneas rectas en tu entorno. Nombra un par de líneas rectas que se corten en tu casa, en la clase y en tu ciudad. Señala para cada par de rectas el punto de corte que determinen. Nombra un par de líneas paralelas en los mismos entornos.

4.4. Semirrectas

Un punto O sobre una recta r la divide en dos partes distintas, que se llaman semirrectas. El punto O se dice que es el origen de las dos semirrectas que determina (figura 10.10).

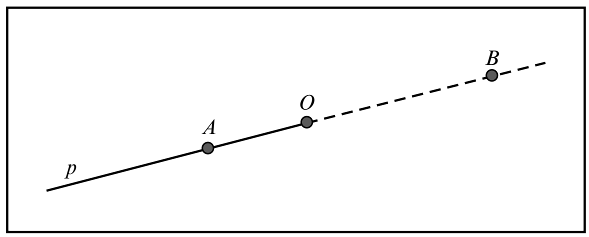


Figura 10.10.—Semirrectas determinadas por un punto O en una recta r.

Las dos semirrectas que determinan un punto sobre una recta se dice que tienen sentidos distintos a partir de su extremo. Distinguimos las semirrectas señalando otro punto en cada una de ellas. Así, las dos semirrectas tienen extremo en O, una de ellas es la que pasa por A (trazado continuo en la figura 10.10), mientras que la otra pasa por B (trazado discontinuo).

4.5. Segmento

Segmento es la parte de la recta delimitada por dos de sus puntos A y B; se denota por $\overline{AB}$, o bien por una letra minúscula a (figura 10.11).

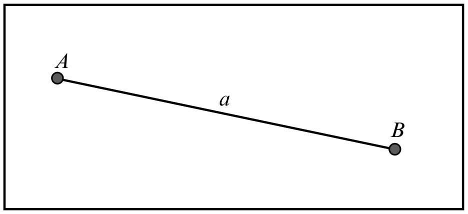


Figura 10.11.—Segmento $\overline{AB}$.

El segmento $\overline{AB}$ representa la distancia entre los puntos A y B.

ACTIVIDAD 6: Marca dos puntos *A* y *B*. Dibuja las siguientes figuras y establece las relaciones y diferencias entre ellas:

1. La recta que pasa por los puntos *A* y *B*.
2. La semirrecta con extremo en el punto *A* y que pasa por el punto *B*.
3. La semirrecta con extremo el punto *B* y que pasa por *A*.
4. El segmento de los extremos *A* y *B*.

ACTIVIDAD 7: Identifica segmentos en tu entorno. Señala sus puntos extremos en cada caso.

Dos segmentos son *consecutivos* cuando tienen un extremo en común. Los segmentos *a* y *b* de la figura 10.12 son consecutivos, ya que tienen en común el extremo *B*.

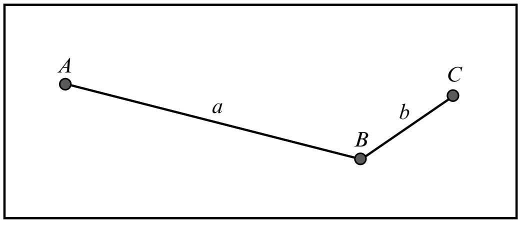


Figura 10.12.—Segmentos consecutivos.

Mediatriz de un segmento

La recta perpendicular a un segmento en su punto medio es su *mediatriz.*

En la figura 10.13 se observa el resultado de un procedimiento para trazar la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

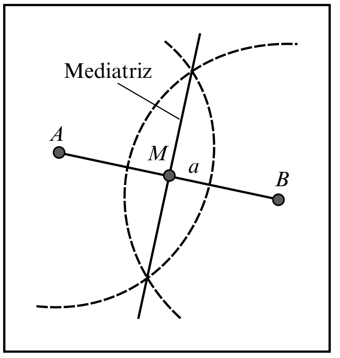
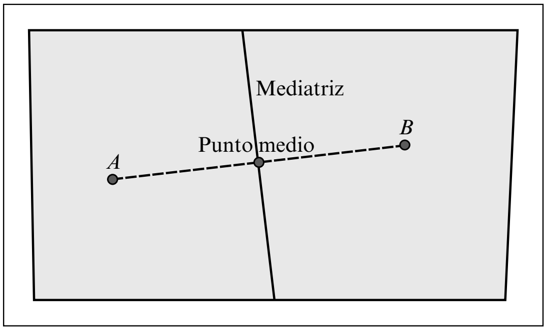


Figura 10.13.—Mediatriz del segmento *a*.

ACTIVIDAD 8: Traza un segmento y, sin medir su longitud, construye su mediatriz: *a*) utilizando instrumentos de dibujo, y *b*) utilizando el programa Geogebra.

Ejemplo de aplicación. Dividimos a los estudiantes de la clase en dos equipos y cada equipo debe recoger las bolas de un color que habrá en un recipiente, unas son blancas y otras negras. Ganará el equipo que recoja antes las bolas del color que le corresponda. ¿Dónde se debería situar el recipiente con las bolas si queremos que el juego sea justo para ambos equipos? Si se representan los puntos de partida de cada equipo como puntos en el plano, siendo *A* el punto donde se encuentra un equipo y *B* el punto donde se encuentra otro equipo, para que el juego sea justo, es necesario poner el recipiente a la misma distancia de *A* y de *B:*



Una opción para que el juego sea justo sería situar el recipiente en el punto medio del segmento $\overline{AB}$ (véase figura). Sin embargo, existen otros puntos que equidistan de A y de B. Todos estos puntos forman parte de la misma recta: la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

4.6. Ángulos en el plano

Semiplanos

Al trazar una recta r en un plano, ésta lo divide en dos partes. Cada una de las partes en que un plano queda dividido por cualquiera de sus rectas se llama *semiplano* (véase figura 10.14).

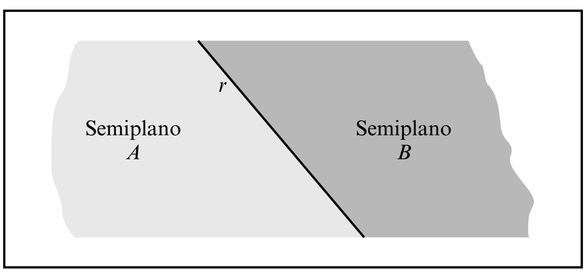


Figura 10.14.—Semiplanos determinados por una recta r.

La recta que divide al plano es *la frontera* de los dos semiplanos.

ACTIVIDAD 9: Identifica semiplanos en tu entorno cercano. Indica cuál es la frontera en cada caso.

Ángulos

Consideremos dos rectas p y r que se cortan en el punto V. Cada una de las rectas es la frontera de dos semiplanos. La figura 10.15 muestra la intersección de uno de los semiplanos de p con uno de los semiplanos de r. Esta región es un *ángulo de vértice V* cuyos lados son dos semirrectas, una de p y otra de r.

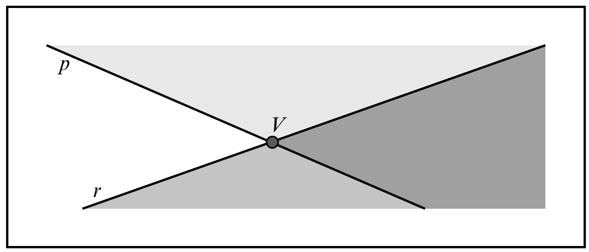


Figura 10.15.—Ángulo como intersección de dos semiplanos de rectas que se cortan.

En general, dos rectas p y r determinan cuatro regiones. Cada una de esas regiones es un *ángulo*. Los ángulos se suelen denotar con letras del alfabeto griego. El punto V, corte de las rectas, es vértice común de los ángulos α, β, γ y δ (véase figura 10.16).

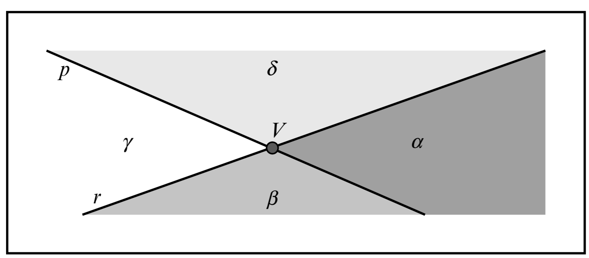


Figura 10.16.—Ángulos que forman dos rectas que se cortan.

Actividad 10: Identifica ángulos en tu entorno cercano: en el aula, en el campo de deportes y en la ciudad.

Dos semirrectas que tienen el mismo punto de origen determinan dos semiplanos. En la figura 10.17 se observa el origen común de dos semirrectas (A) y los dos semiplanos (uno sombreado y otro blanco). Al prolongar las dos semirrectas, una de las partes vuelve a quedar dividida *(parte cóncava),* mientras que la otra no *(parte convexa).*

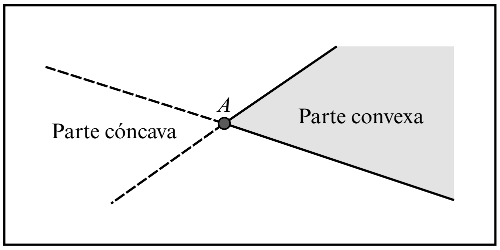


Figura 10.17.—Partición del plano mediante dos semirrectas.

Rectas perpendiculares

Cuando dos rectas que se cortan forman ángulos iguales se dice que son *perpendiculares* (figura 10.18). Cada uno de esos cuatro ángulos iguales es un *ángulo recto.*

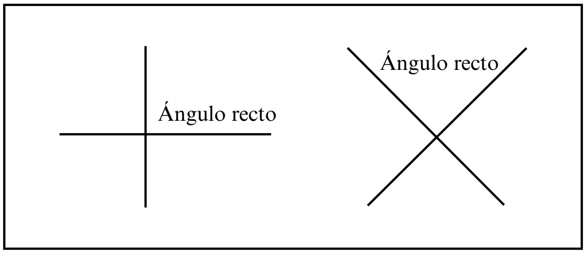


Figura 10.18.—Ángulos rectos.

Actividad 11: Identifica rectas perpendiculares en el entorno urbano de tu ciudad.

Actividad 12: Describe objetos en los que se identifiquen ángulos rectos. Dibuja un objeto que esté construido a partir de un ángulo recto.

Comparación y medida de ángulos

La valoración de un ángulo se hace por comparación con un ángulo recto (figura 10.18). Así: *a*) un ángulo se dice que es *agudo* cuando es menor que un recto, y *b*) un ángulo se dice que es *obtuso* cuando es mayor que un recto. En la figura 10.19 se recogen ejemplos de los tres tipos de ángulos mencionados.

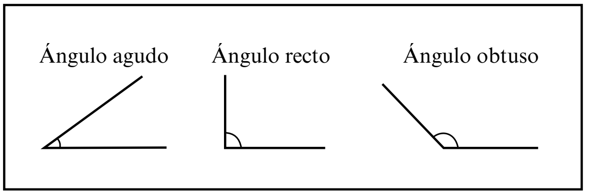


Figura 10.19.—Tipos de ángulos.

Actividad 13: Describe objetos en los que se identifiquen ángulos agudos y otros objetos en que se identifiquen ángulos obtusos. Dibuja un objeto que esté construido a partir de un ángulo agudo.

La amplitud de los ángulos se mide en grados. Un grado se simboliza: 1.º. Un ángulo recto mide 90º (90 grados).

Un ángulo de 180º se llama *ángulo llano* y un ángulo de 360º *ángulo completo.* Un ángulo completo equivale al ángulo total de una circunferencia.

Los ángulos agudos miden menos de 90º y los obtusos más de 90º.

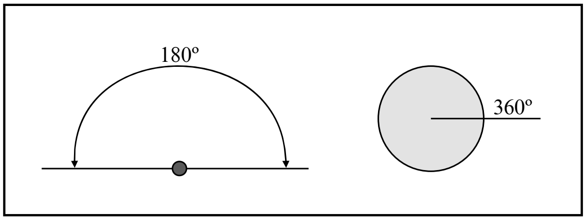


Figura 10.20.—Ángulo llano y ángulo completo.

ACTIVIDAD 14: Localiza en tu entorno distintos ángulos llanos y completos. Justifica en cada caso por qué esos ángulos son llanos o completos.

ACTIVIDAD 15: Con las agujas de un reloj, señala dos horas distintas de manera que el ángulo que formen sea agudo. Marca también tres horas distintas donde las agujas formen un ángulo recto. Escribe una hora donde las agujas formen un ángulo llano.

El *semicírculo graduado* o *transportador de ángulos* es un instrumento de dibujo útil para medir ángulos. Se muestra un ejemplo de esta herramienta en la figura 10.21.

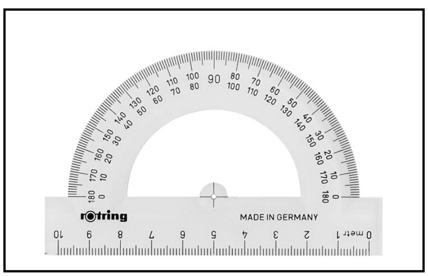


Figura 10.21.—Transportador de ángulos.

ACTIVIDAD 16: Utiliza un semicírculo graduado para medir los ángulos propuestos en la actividad anterior.

ACTIVIDAD 17: Traza ángulos de distintos tipos y obtén su medida con el transportador de ángulos.

Relaciones entre ángulos

Al trazar dos ángulos se pueden establecer dos tipos de relaciones: *a*) según las relaciones entre sus medidas, y *b*) según las posiciones relativas que mantienen.

Estas dos relaciones dan lugar a una serie de ángulos reconocidos por nombres que recogemos en la siguiente tabla, junto con su definición.

TABLA 10.1

Tipos de relaciones entre ángulos

Nombre de los ángulos	Definición
Según la relación entre sus medidas	
Ángulos congruentes	Su amplitud tiene la misma medida.
Ángulos complementarios	La suma de sus amplitudes es 90º.
Ángulos suplementarios	La suma de sus amplitudes es 180º.
Ángulos conjugados	La suma de sus amplitudes es 360º.
Según la posición de los ángulos	
Ángulos adyacentes	Tienen un vértice y un lado común, pero no tienen ningún punto interior común.
Ángulos consecutivos	Tienen un lado y el vértice comunes.
Ángulos opuestos por el vértice	Los lados son semirrectas opuestas.

ACTIVIDAD 18: Dibuja un par de ángulos complementarios, un par de ángulos suplementarios y un par de ángulos conjugados utilizando la medida de su amplitud.

ACTIVIDAD 19: Identifica diferentes relaciones entre ángulos en la figura 10.16.

Bisectriz de un ángulo

> *La **bisectriz** de un ángulo es la semirrecta que lo divide en dos ángulos iguales.*

Una de las formas de trazar la bisectriz es la que se muestra en la figura 10.22 para el ángulo que se forma entre las rectas *a* y *b,* cuyo vértice es el punto *A* en que se cortan. Trazando la circunferencia *c* con centro en *A,* obtenemos los puntos *E* y *D* como puntos de corte de *c*-*b* y *c*-*a,* respectivamente. Unimos estos dos puntos mediante el segmento $\overline{DE}$. La mediatriz de este segmento es la bisectriz del ángulo que forman *a* y *b*.

Cualquier punto de la bisectriz de un ángulo es equidistante a las dos rectas que determinan dicho ángulo.

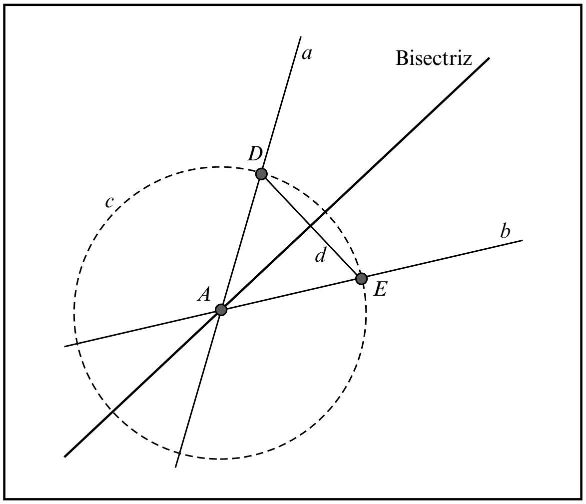
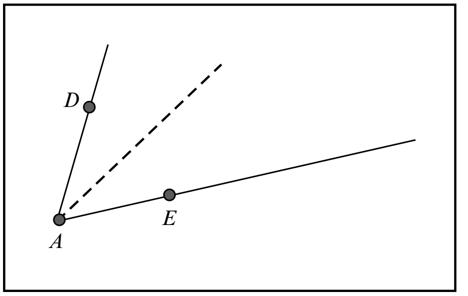


Figura 10.22.—Bisectriz del ángulo que forman las rectas *a* y *b.*

ACTIVIDAD 20: Utiliza las propiedades de la mediatriz de un segmento para justificar que, según el proceso descrito, se ha conseguido la bisectriz del ángulo pretendido.

Ejemplo de aplicación. Dos remolcadores tienen que tirar de un barco para trasladarlo hasta el astillero más cercano. Para ello, han de moverse a igual velocidad, ejerciendo la misma fuerza y a una separación constante para no chocar entre sí. Esta situación se puede representar con el esquema que se recoge en la figura siguiente, siendo *A* el barco que es remolcado, y *D* y *E* los remolcadores:



La semirrecta punteada representa el recorrido que haría el barco al ser remolcado. Esa semirrecta tiene la propiedad de que equidista de los puntos *D* y *E*. Además, esa semirrecta divide en dos regiones iguales a la región delimitada por los remolcadores y el barco remolcado. Se trata, pues, de la bisectriz del ángulo que forman las semirrectas determinadas por los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{AE}$.

5. POLIGONALES

Existen trazados, diferentes de las rectas, que podemos realizar sobre el papel y que dan lugar a la definición de otros elementos geométricos. En la figura 10.23 se recogen diferentes trazados. Algunos de ellos son poligonales y otros no, tal y como indican las etiquetas correspondientes.

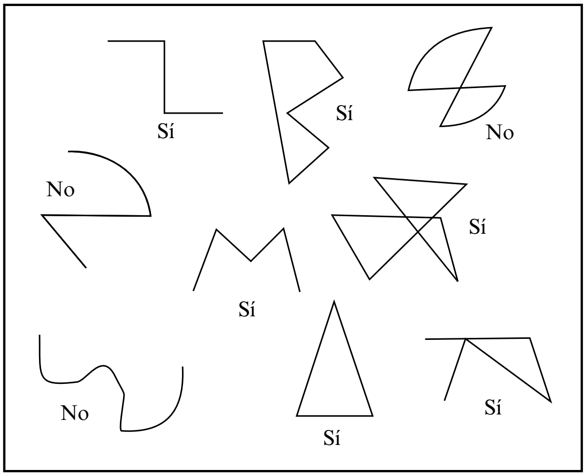


Figura 10.23.—Líneas poligonales y no poligonales.

Una poligonal es un conjunto finito ordenado de segmentos consecutivos, de forma que el extremo de uno de ellos coincide con el origen de otro. Los *vértices de la poligonal* son los extremos de los segmentos que la componen.

ACTIVIDAD 1: Comprueba, utilizando la definición de poligonal, que las etiquetas de las líneas de la figura 10.23 son correctas.

5.1. Tipos de poligonales

Las poligonales pueden ser *abiertas* o *cerradas*, y *simples* o *no simples*. En la figura 10.24 caracterizamos con estos términos las poligonales de la figura anterior.

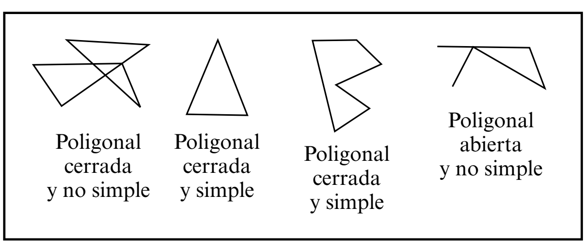


Figura 10.24.—Tipos de poligonales.

ACTIVIDAD 2: Observando los ejemplos de la figura 10.24, elabora una definición para una poligonal abierta y otra para una poligonal cerrada. Igualmente, la definición de poligonal simple y la definición de poligonal no simple.

6. POLÍGONOS SIMPLES

Es fácil identificar polígonos en nuestro entorno utilizando tus conocimientos generales.

ACTIVIDAD 1: Realiza un boceto en tu cuaderno de los polígonos que reconozcas en la fotografía siguiente:

Para definir un polígono simple, utilizaremos la idea de poligonal.

*Un **polígono simple** es una figura del plano delimitada por una poligonal cerrada y simple.*

En este apartado haremos referencia a ellos como polígonos. Los *vértices* de la poligonal son los vértices del polígono. Los *lados del polígono* son los segmentos que unen dos vértices consecutivos.

En la figura 10.25 se representan dos polígonos con los vértices identificados. Cada polígono delimita dos regiones en el plano, la interior y la que queda fuera. Las letras mayúsculas: *A, B, C*... y *H, I, J,* etc., denotan los vértices de la poligonal que delimitan al polígono. Los lados del polígono se denotan por los vértices que lo delimitan y un segmento sobre las letras: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, etc. Los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{CG}$, con trazos discontinuos, son diagonales del polígono 1, y el segmento $\overline{LI}$ es una diagonal del polígono 2.

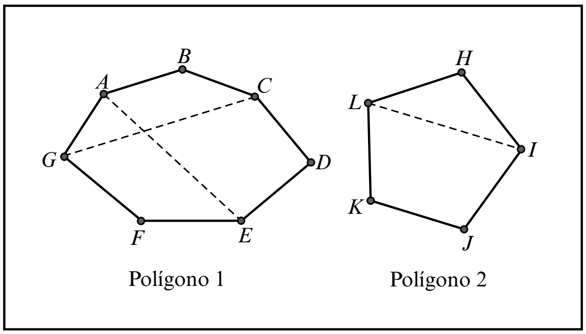


Figura 10.25.—Polígonos 1 y 2.

Diagonal *de un polígono es el segmento que une dos vértices no consecutivos.*

ACTIVIDAD 2: Traza todas las diagonales de los polígonos 1 y 2.

Ángulos interiores y exteriores de un polígono

En la figura 10.26 se observa el vértice *H* de un pentágono. Al trazar las rectas sobre las que se encuentran los lados del pentágono que tienen a *H* como punto en común, se forman cuatro ángulos. En dicha figura se observan su ángulo interior (β) y sus ángulos exteriores, γ y θ, para el vértice *H*.

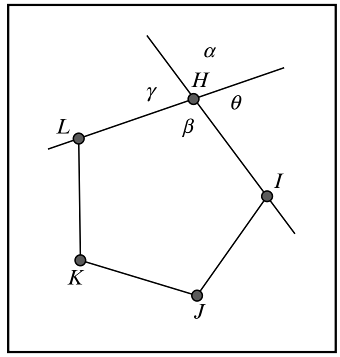


Figura 10.26.—Ángulos interiores y exteriores.

ACTIVIDAD 3: Traza un triángulo *ABC* y dibuja sus ángulos interiores y exteriores.

El geoplano es un material didáctico que consiste en una superficie punteada que permite la representación de diversas figuras. Existen geoplanos cuadrados, triangulares y circulares y facilitan el estudio de las propiedades de las figuras. Se pueden fabricar con un tablero de madera en el que se introducen clavos en los nodos de la red. Las figuras se construyen mediante gomas elásticas. En la figura 10.27 se recogen algunos polígonos representados en un geoplano cuadrado (izquierda) y en un geoplano triangular o isométrico (derecha).

6.1. Clasificación de polígonos

Los polígonos se suelen nombrar en función del número de ángulos que tienen utilizando prefijos griegos, hasta el polígono de 12 lados. Con un mayor número de ángulos se llaman *n-polígonos*. En la tabla 10.2 se recogen los nombres de los polígonos de entre 3 y 12 lados.

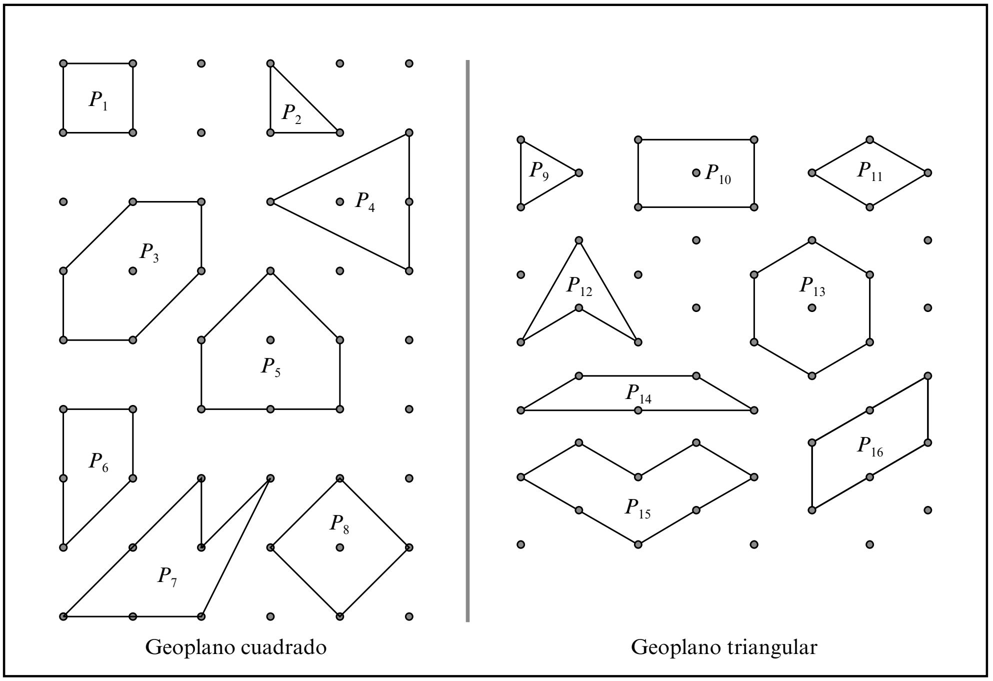


Figura 10.27.—Polígonos en el geoplano.

TABLA 10.2

Nombre de polígonos

Número de lados del polígono	Nombre del polígono
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Nonágono
10	Decágono
11	Eneágono
12	Dodecágono

ACTIVIDAD 4: Nombra los polígonos de la figura 10.27 según su número de lados.

ACTIVIDAD 5: Identifica en tu entorno distintas figuras con forma de polígono. Agrupa las que tienen igual número de lados, desde las que tienen 3 lados hasta las que tienen 12 lados. Dibuja un ejemplo de cada uno de estos polígonos.

Regularidad y convexidad

Hay dos criterios generales para la clasificación de polígonos: *a*) regularidad, y *b*) convexidad.

Un polígono es ***regular*** *si tiene todos sus lados y ángulos iguales.*

ACTIVIDAD 6: Clasifica, según su regularidad, los polígonos de la figura 10.27.

La convexidad se puede definir en términos de la amplitud de cada uno de los ángulos interiores de un polígono.

*Un **polígono convexo** tiene todos sus ángulos inferiores a 180º. Un polígono cóncavo tiene, al menos, un ángulo con una amplitud mayor de 180º.*

En la figura 10.28 se observa un polígono cóncavo, ya que el ángulo α es mayor de 180º (véase imagen izquierda).

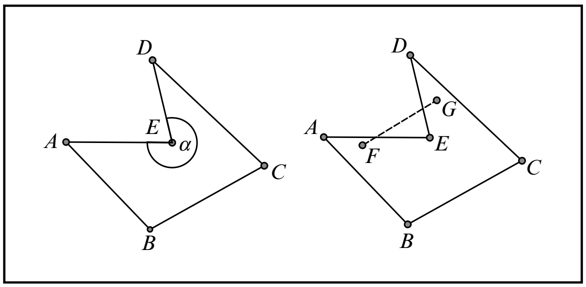


Figura 10.28.—Polígono cóncavo.

Existe otro modo de caracterizar la convexidad equivalente al anterior. Un polígono se dice que es cóncavo cuando en él existen dos puntos tales que el segmento que los une no queda totalmente incluido dentro del polígono. En la figura 10.28 se comprueba esta característica (parte derecha), estando los puntos F y G en el polígono y el segmento que determinan no.

ACTIVIDAD 7: Clasifica los polígonos de la figura 10.27 en función de su convexidad.

6.2. Centro y apotema de un polígono regular

Además de los elementos considerados para los polígonos en general, en los polígonos regulares se distinguen *centro* y *apotema*.

El centro de un polígono regular es el punto interior que se halla a igual distancia de sus vértices. La apotema es el segmento determinado por el centro y el punto medio de uno de sus lados. En la figura 10.29 se muestran el centro y la apotema de un pentágono regular.

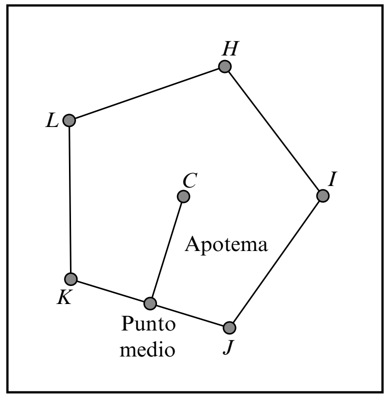


Figura 10.29.—Centro y apotema de un pentágono regular.

ACTIVIDAD 8: Dibuja con regla y compás un hexágono regular. Señala el centro y la apotema de ese hexágono.

Cualquier polígono se puede descomponer en triángulos. A continuación tratamos este tipo de polígonos.

7. TRIÁNGULOS

El triángulo es el polígono de tres lados, y es el único polígono rígido.

Un triángulo lo determinan tres rectas *m, n* y *p,* que se cortan dos a dos (figura 10.30). Los puntos de corte *A, B* y *C* no están alineados y son los vértices del triángulo *ABC*. Los segmentos determinados por dos vértices, *AB, BC* y *AC,* son los lados del triángulo.

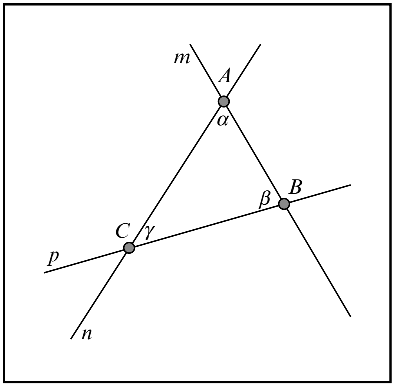


Figura 10.30.—Triángulo.

ACTIVIDAD 1: Construye figuras con forma de triángulo utilizando palillos de dientes como lados y bolas de plastilina como vértices. Construye también un cuadrilátero con esos mismos materiales. Comprueba que el triángulo es indeformable y el cuadrilátero no.

Un triángulo queda determinado por:

1. *Tres rectas*. Consideradas tres rectas *m, n* y *p,* éstas tienen que cortarse dos a dos.
2. *Tres puntos*. Considerados tres puntos *A, B* y *C*. Para que tres puntos determinen un triángulo dichos puntos no pueden estar alineados.
3. *Tres segmentos*. Considerados tres segmentos, para construir un triángulo con esos segmentos, es necesario que cumplan la propiedad triangular.

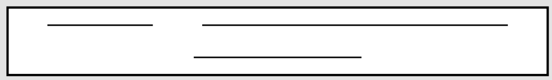
Propiedad triangular: *en un triángulo, cada lado es menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia.*

La propiedad triangular permite conocer cuándo se puede construir un triángulo a partir de tres segmentos.

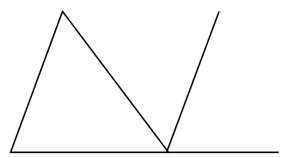
4. *Tres ángulos interiores*. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es siempre de 180º.

ACTIVIDAD 2: Comprueba que si dos o tres de las rectas *m, n* y *p* son paralelas, entonces no se puede construir un triángulo con ellas.

ACTIVIDAD 3: Toma los tres segmentos siguientes. Comprueba que no es posible construir un triángulo con ellos. Presenta un argumento que muestre por qué no es posible construir este triángulo:



La figura 10.31 presenta una demostración geométrica de esta propiedad.



Utilizando las propiedades del paralelismo, podemos afirmar que $\sigma = \sigma'$ y que $\tau = \tau'$. $\phi' + \sigma' + \tau' = 180º$, por lo que $\phi + \sigma + \tau = 180º$

Figura 10.31.—Suma de los ángulos interiores de un triángulo.

ACTIVIDAD 4: Dibuja un triángulo en un folio. Mide sus tres ángulos interiores con el semicírculo graduado y comprueba que suman 180º. Haz esta misma comprobación utilizando el doblado y cortado de papel.

ACTIVIDAD 5: Justifica cuánto suman los ángulos exteriores de un triángulo.

7.1. Igualdad de triángulos

Se dice que dos triángulos son iguales si se cumple una de las siguientes características: *a*) tienen los 3 ángulos iguales; *b*) tienen los 3 lados iguales, y *c*) tienen dos lados iguales y el ángulo comprendido entre ellos también es igual.

7.2. Clasificación de los triángulos

Las clasificaciones de los triángulos atienden a dos criterios: *a*) la amplitud de sus ángulos, y *b*) la longitud de sus lados.

Atendiendo al primer criterio, un triángulo puede ser *acutángulo, rectángulo* u *obtusángulo*.

Según el segundo criterio, un triángulo puede ser *equilátero, isósceles* o *escaleno*.

Un triángulo se puede caracterizar según ambos criterios. En la figura 10.32 mostramos un ejemplo de triángulo rectángulo escaleno.

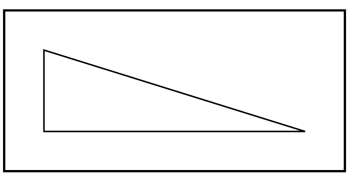


Figura 10.32.—Triángulo rectángulo escaleno.

ACTIVIDAD 6: Clasifica los triángulos de la figura 10.27 según los dos criterios presentados.

ACTIVIDAD 7: Elabora una tabla de doble entrada con los tipos de triángulos según ambos criterios y construye con Geogebra un triángulo de cada uno de los tipos que sean posibles.

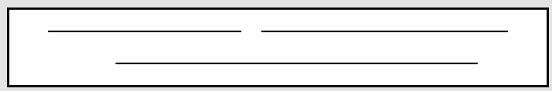
7.3. Construcción de triángulos

El programa Geogebra se puede utilizar para la construcción de triángulos. En este apartado presentamos otras dos formas de construirlos.

Con instrumentos de dibujo

Es posible construir un triángulo con regla y compás dados los tres segmentos que constituyen sus lados.

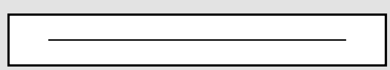
ACTIVIDAD 8: Construye un triángulo con regla y compás sabiendo que sus lados son los siguientes segmentos. Explica el proceso que has seguido:



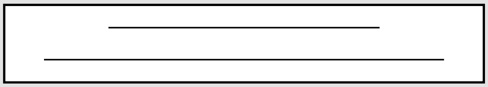
También es posible construir un triángulo con regla, compás y semicírculo graduado, a partir de la siguiente información: *a*) dos ángulos y un lado, o *b*) dos lados y un ángulo.

Supuestos conocidos dos ángulos y un lado, describimos el proceso de construcción del triángulo con regla, compás y semicírculo graduado. Se traza el segmento dado. Con el semicírculo se dibujan los dos ángulos tomando como vértices los extremos del segmento. Con un lado de cada ángulo coincidiendo con el segmento y en el mismo semiplano respecto al segmento dado. Los lados no comunes de los dos ángulos se cortarán formando el tercer vértice.

ACTIVIDAD 9: Siguiendo las instrucciones anteriores, construye un triángulo con dos ángulos de amplitudes 40º y 45º, respectivamente, cuyo lado sea el siguiente segmento:



ACTIVIDAD 10: Construye un triángulo con regla, compás y semicírculo graduado sabiendo que tiene un ángulo de amplitud 40º y dos lados que son los segmentos siguientes. Describe el proceso que has seguido:



Con papiroflexia

El papel es un material manipulativo que puede resultar útil para el trabajo escolar en geometría. Tiene la ventaja, sobre otros recursos, que es familiar para los escolares y de fácil adquisición.

ACTIVIDAD 11: Sigue los pasos que se describen en el documento disponible en http://funes.uniandes.edu.co/932/ para construir, a partir de un folio: *a*) un triángulo isósceles, y *b*) un triángulo equilátero.

7.4. Elementos notables de un triángulo

Presentamos los *elementos notables* del triángulo, que desempeñan un papel relevante para estudiar propiedades y características de este polígono.

Medianas y baricentro

Podemos estar interesados en construir un triángulo y suspenderlo de un punto de tal forma que permanezca en equilibrio. En ese caso, el punto por el que debemos colgarlo es el *centro de un triángulo*. Este punto se considera el centro de gravedad del triángulo, o punto que se comporta como si toda la masa del triángulo estuviera concentrada en él; se le conoce como *baricentro,* y es el punto donde se cortan las medianas.

Medianas *de un triángulo son los segmentos que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto. El baricentro G de un triángulo es el punto donde se cortan sus medianas.*

En la figura 10.33 el punto P es el punto medio del lado AB; M es el punto medio del lado AC, y N es el punto medio del lado BC.

AN es una mediana del triángulo, ya que une un vértice A con el punto medio N del lado opuesto BC. También los segmentos BM y CP son medianas del triángulo ABC.

El punto G de la figura 10.33 es el *baricentro* de ese triángulo, punto donde se cortan las tres *medianas*.

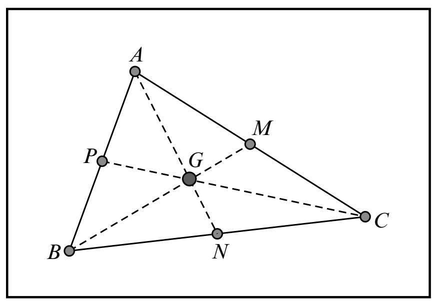


Figura 10.33.—Medianas y baricentro de un triángulo.

ACTIVIDAD 12: Utiliza Geogebra para dibujar un triángulo cualquiera; traza sus medianas y su baricentro.

Alturas y ortocentro

Cada triángulo tiene tres alturas, una por cada vértice.

> *La **altura** de un triángulo correspondiente a un vértice es el segmento perpendicular trazado desde ese vértice al lado opuesto o a la prolongación del lado.*

En la figura 10.34 se observa que la perpendicular al lado opuesto que pasa por el vértice A lo corta en el punto M, punto que se llama *pie de la altura*. En este caso, ha sido necesario trazar las dos prolongaciones de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ (con trazo punteado) para dibujar las dos alturas. Las tres rectas sobre las que se encuentran las alturas tienen un trazo discontinuo. Las tres alturas del triángulo ABC son: $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CP}$.

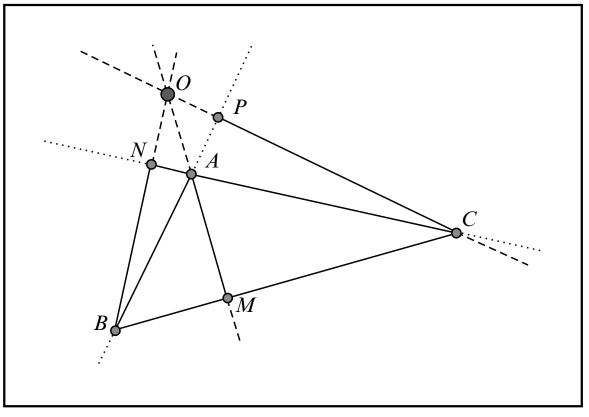


Figura 10.34.—Alturas y ortocentro de un triángulo.

Las tres alturas del triángulo de la figura 10.34 se cortan en un punto. Esto ocurre en cualquier triángulo. El punto donde se cortan las tres alturas del triángulo se llama *ortocentro,* y lo notaremos con la letra O.

> *El **ortocentro** de un triángulo es el punto en el que se cortan sus tres alturas.*

ACTIVIDAD 13: Dibuja un triángulo en el que una o dos alturas queden fuera de él.

Como se observa en la figura 10.35, las tres alturas de un triángulo no siempre están dentro del triángulo. Sin embargo, al menos una de las alturas de cualquier triángulo está dentro del mismo. Salvo en los triángulos equiláteros, las tres alturas no tienen la misma longitud.

ACTIVIDAD 14: Construye con Geogebra un triángulo, dibuja sus alturas y determina su ortocentro. Arrastra los vértices del triángulo hasta conseguir que sea sucesivamente acutángulo, rectángulo y obtusángulo. ¿Dónde se sitúa el ortocentro en cada uno de estos casos?

Mediatrices y circuncentro

Es posible que nos interese conocer el punto que equidista de tres puntos no alineados. Por ejemplo, si tres pueblos deciden instalar un depósito de agua que esté a la misma distancia de ellos, estaríamos ante una situación de este tipo. Un esquema de la situación, donde A, B y C son los pueblos, se recoge en la figura 10.35.

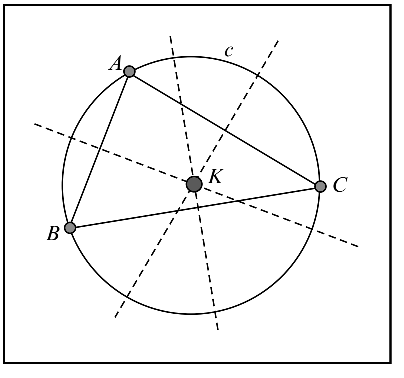


Figura 10.35.—Mediatrices, circuncentro y circunferencia circunscrita de un triángulo.

El punto que equidista de los tres puntos se llama *circuncentro* (K en la figura 10.35) y se llama así por ser el centro de la *circunferencia circunscrita* (c), que es la que pasa por los tres puntos no alineados. El circuncentro es el punto de corte de las mediatrices del triángulo, que son las mediatrices de cada uno de sus lados.

> *El **circuncentro** de un triángulo es el punto donde se cortan sus mediatrices.*

Como se observa en la figura 10.35, el radio de la circunferencia circunscrita es el segmento que une K con cualquiera de los tres vértices del triángulo.

ACTIVIDAD 15: Construye con Geogebra un triángulo, dibuja sus mediatrices y determina su circuncentro. Arrastra los vértices del triángulo de modo que éste sea sucesivamente acutángulo, rectángulo y obtusángulo. ¿Dónde se sitúa el circuncentro en cada uno de estos casos?

Recta de Euler

Si trazamos el baricentro, el ortocentro y el circuncentro de un mismo triángulo, se observa que los tres puntos están alineados. La recta que los contiene se llama *recta de Euler*.

ACTIVIDAD 16: Construye un triángulo cualquiera con Geogebra y comprueba que los tres elementos notables presentados están alineados. ¿Qué ocurre cuando el triángulo es equilátero?

Bisectrices e incentro

Las bisectrices de un triángulo son las bisectrices de cada uno de sus ángulos interiores. Al trazar las tres bisectrices de un triángulo ABC, éstas se cortan en un punto I, llamado *incentro,* ya que resulta ser el centro de la *circunferencia inscrita* al triángulo, es decir, la circunferencia interior al triángulo cuyos lados son tangentes a ella, como indica la figura 10.36.

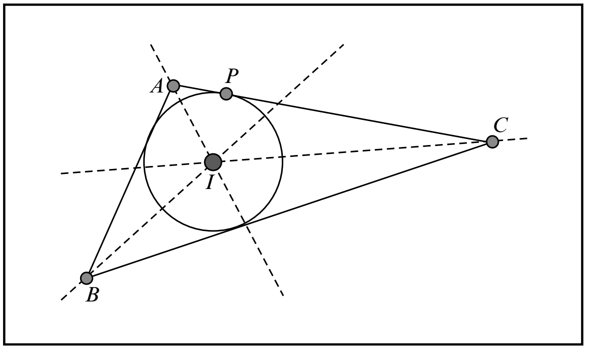


Figura 10.36.—Bisectrices, incentro y circunferencia inscrita.

El radio de la circunferencia inscrita es el segmento que une el punto I con el pie de la perpendicular desde I a un lado. En la figura 10.36 está marcado mediante $\overline{IP}$.

ACTIVIDAD 17: Construye el incentro de un triángulo. Traza la circunferencia inscrita al mismo, teniendo cuidado de tomar el radio sobre la perpendicular desde I a un lado.

8. CUADRILÁTEROS

Los cuadriláteros son los polígonos de cuatro lados.

ACTIVIDAD 1: Utiliza el compás y el semicírculo graduado para identificar en la figura 10.28: *a*) un cuadrilátero que tenga sus lados iguales y sus ángulos diferentes, y *b*) un cuadrilátero que tenga sus ángulos iguales y sus lados diferentes.

El cuadrado es el único cuadrilátero regular y tiene una especial relevancia porque recubre el plano y es el que se considera como unidad del sistema internacional de medida de superficie, como se verá en capítulos posteriores.

ACTIVIDAD 2: Construye los 20 cuadrados que son posibles en un geoplano 4 × 4.

8.1. Clasificación de los cuadriláteros

ACTIVIDAD 3: Identifica al menos 10 objetos en tu entorno que tengan forma de cuadriláteros. Clasifícalos atendiendo a la regularidad y a la convexidad.

Además de los criterios generales de clasificación de polígonos (regularidad y convexidad) presentados, los cuadriláteros se pueden clasificar atendiendo a otras propiedades de sus elementos.

En la figura 10.37 hay diferentes tipos de cuadriláteros. Existen dos clasificaciones habituales para los cuadriláteros: *a*) según el número de lados iguales, y *b*) según el número de ángulos iguales. Estas dos características permiten construir una tabla de doble entrada teniendo en cuenta ambos criterios.

ACTIVIDAD 4: Copia la siguiente tabla en tu cuaderno y construye en el geoplano los cuadriláteros que corresponden en cada celda. La X indica que no existen cuadriláteros con esas características. Explica las causas por las que hay celdas que no puedes cumplimentar:

		Según los lados		
		4 iguales	Iguales 2 a 2	Otros
Según los ángulos	4 iguales			X
	Iguales 2 a 2			
	Otros	X		

Esta clasificación permite establecer grupos de cuadriláteros, pero no es la única. A continuación se presentan otras características de estos polígonos que pueden dar lugar a otras clasificaciones.

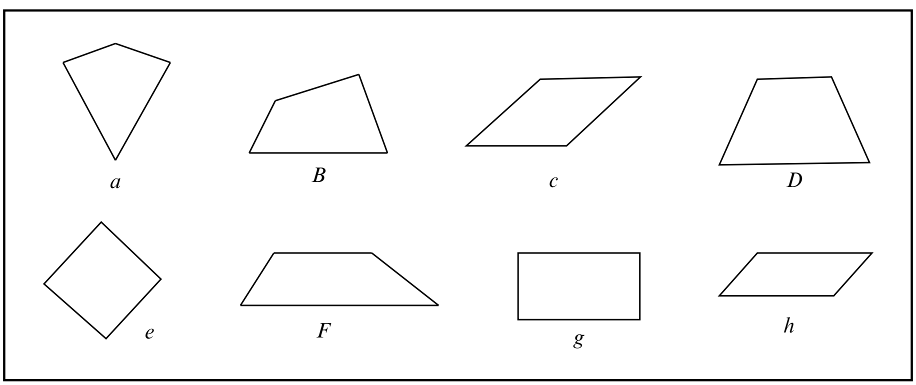


Figura 10.37.—Cuadriláteros.

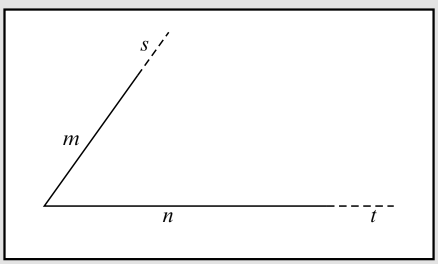
Paralelogramos

Los ***paralelogramos*** *son los cuadriláteros que tienen los lados paralelos dos a dos.*

ACTIVIDAD 5: Recorta tres bandas de papel, dos de la misma anchura y una diferente. Superpón las dos bandas de igual anchura e identifica diferentes paralelogramos en la parte superpuesta en función de la posición de las dos bandas. Haz lo mismo superponiendo dos bandas de diferente anchura. Así, obtendrás los diferentes tipos de paralelogramos.

ACTIVIDAD 6: Identifica qué cuadriláteros de la figura 10.37 son paralelogramos.

ACTIVIDAD 7: Reproduce el siguiente dibujo en tu cuaderno y construye un paralelogramo de lados *m* y *n* sobre las rectas *s* y *t*:



Se distinguen tres tipos de paralelogramos: *a*) rectángulos, que tienen los cuatro ángulos rectos; *b*) romboides, con lados iguales dos a dos y ángulos iguales dos a dos, y *c*) rombos, con los cuatro lados iguales y los ángulos iguales dos a dos.

ACTIVIDAD 8: Dibuja el único cuadrilátero que es rombo y rectángulo.

ACTIVIDAD 9: Nombra los paralelogramos de la figura 10.37.

No paralelogramos

Teniendo en cuenta la definición de paralelogramo, los polígonos *no paralelogramos* son los cuadriláteros que tienen uno o ningún par de lados paralelos. Los primeros son los *trapecios,* y los segundos son los *trapezoides*.

Los trapecios pueden ser isósceles o escalenos (véase figura 10.38).

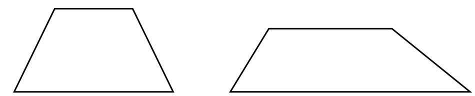


Figura 10.38.—Trapecios.

Si el trapecio escaleno tiene un ángulo recto, se llama *trapecio escaleno rectángulo*.

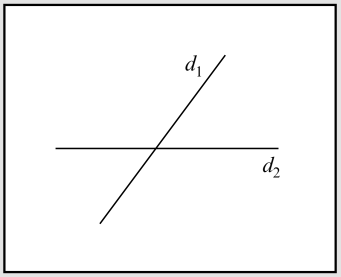
Si el trapezoide tiene dos lados iguales, es una *cometa*.

ACTIVIDAD 10: Identifica y nombra los trapezoides de la figura 10.37.

Otros criterios de clasificación

El número de ángulos rectos y la perpendicularidad de las diagonales también permiten establecer otras clasificaciones de los cuadriláteros.

ACTIVIDAD 11: Utilizando los instrumentos de dibujo, y considerando que las diagonales del cuadrilátero están sobre las rectas d_1 y d_2, construye: *a*) un paralelogramo, *b*) un rectángulo, *c*) un trapecio isósceles y *d*) un cuadrilátero cóncavo:



ACTIVIDAD 12: Al trazar una diagonal en un cuadrilátero, queda dividido en dos triángulos. Utilizando esta característica, razona cuánto suman los ángulos interiores de un cuadrilátero.

9. POLÍGONOS NO SIMPLES

Los *polígonos no simples* tienen más de una región interior o, equivalentemente, están construidos mediante una poligonal cerrada y no simple. En la figura 10.39 se observan algunos ejemplos.

Los *polígonos estrellados* son un tipo particular de polígonos no simples. En la figura 10.40 hay un pentágono estrellado en un elemento decorativo; se llama así por haberse construido uniendo vértices alternos de un pentágono de forma continua. Su nombre recoge la apariencia de estrella que tienen estas figuras.

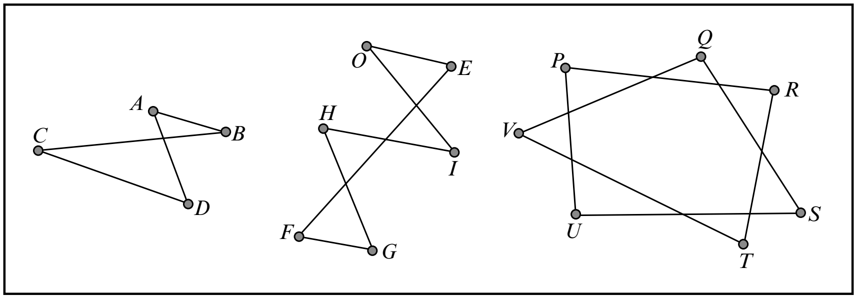


Figura 10.39.—Polígonos no simples.

La *estrella pitagórica* o *pentagrama* es también un pentágono estrellado (véase figura 10.40) y fue utilizado por los pitagóricos como signo secreto para reconocerse unos a otros.

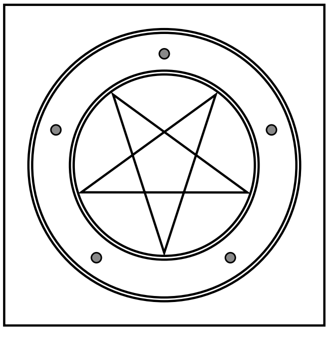


Figura 10.40.—Pentagrama.

La figura 10.41 es un heptágono estrellado, observándose el heptágono a partir del cual se ha construido con un trazo discontinuo.

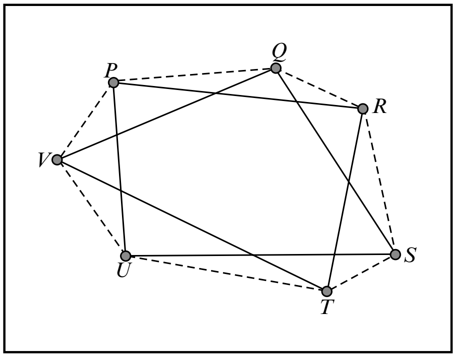
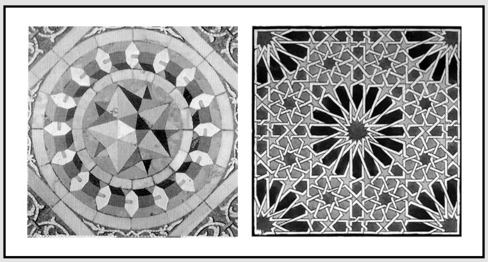


Figura 10.41.—Construcción de un heptágono estrellado.

A partir de un polígono puede construirse más de un polígono estrellado. El polígono de la figura 10.41 es el heptágono estrellado, que se identifica mediante el código 7/2. El 7 indica el número de vértices, y el 2 el número de saltos entre los vértices del polígono inicial.

Los *polígonos regulares estrellados* son los que se construyen a partir de polígonos regulares y tienen una presencia destacada en el arte.

ACTIVIDAD 1: Construye polígonos estrellados que se ajusten a los de la figura lo máximo posible. Escribe los códigos que permiten identificar los polígonos estrellados de la figura que has construido.



10. FIGURAS CURVILÍNEAS

Una *curva* es una línea que, sin tener vértices, va cambiando de dirección. Se llama *curva cerrada* a aquella en la que el punto inicial coincide con el punto final. En caso contrario, se llama *curva abierta*. Una *curva simple* es la que no tiene puntos de intersección consigo misma.

10.1. Circunferencia y círculo

La *circunferencia* es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de otro llamado *centro.* El *círculo* es la región del plano que queda delimitada por la circunferencia. Todos los segmentos que unen el centro con un punto cualquiera de la circunferencia se llaman radios y su medida es constante en una circunferencia. En la figura 10.42 se representan los principales elementos del círculo y de la circunferencia.

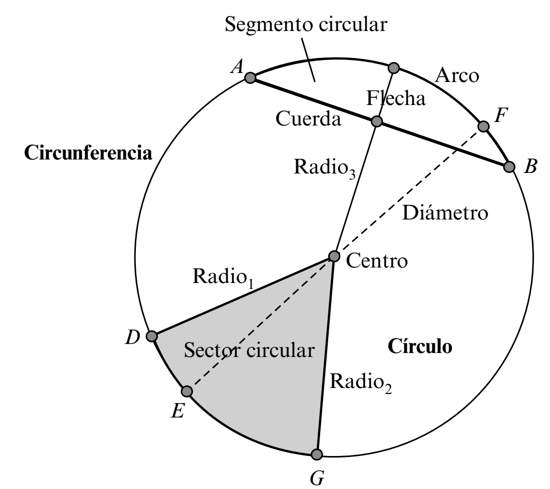


Figura 10.42.—Elementos del círculo y de la circunferencia.

ACTIVIDAD 1: En las siguientes afirmaciones hay unos números donde falta una palabra o una expresión que describe elementos de la figura 10.42. Copia esos números en tu cuaderno, junto con el texto que creas le corresponda. Completa las siguientes afirmaciones para conseguir las definiciones de los diferentes elementos representados en la figura 10.42:

- La medida de una (1) es su longitud.
- Una cuerda es cualquier (2) que une dos puntos de la circunferencia.

- Un diámetro es la (3) de mayor longitud posible.
- Un diámetro siempre pasa por el (4) de la circunferencia.
- Un diámetro divide al (5) en (6) semicírculos y a la (7) en dos (8).
- Un arco es una porción de (9) comprendida entre dos puntos de la misma.
- El arco de mayor longitud siempre es (10).
- Una flecha es un segmento de un (11), de forma que une el punto medio de dos puntos de la circunferencia y el punto de corte de la circunferencia con el radio.
- Un (12) es la porción de círculo comprendida entre una cuerda y su arco correspondiente.
- Sector circular es la porción de círculo comprendida entre dos (13) y el arco correspondiente.

ACTIVIDAD 2: Busca imágenes que estén relacionadas con la circunferencia y el círculo. Nombra los elementos que observes.

10.2. Posiciones relativas entre figuras curvilíneas y rectas

Hay diferentes posiciones relativas entre una recta y una circunferencia.

En la figura 10.43 podemos observar las siguientes relaciones:

- La recta *a* es exterior a C_1.
- La recta *a* es tangente a C_3 y secante a C_4.
- C_1 y C_4 son circunferencias exteriores.
- C_1 y C_3 son circunferencias tangentes exteriores.
- C_4 y C_5 son circunferencias tangentes interiores.
- C_3 y C_4 son circunferencias secantes.
- C_1 y C_2 son circunferencias concéntricas.
- La región comprendida entre C_1 y C_2 es una corona circular.
- La región comprendida entre los dos arcos de C_1 y C_2 es una lúnula circular.

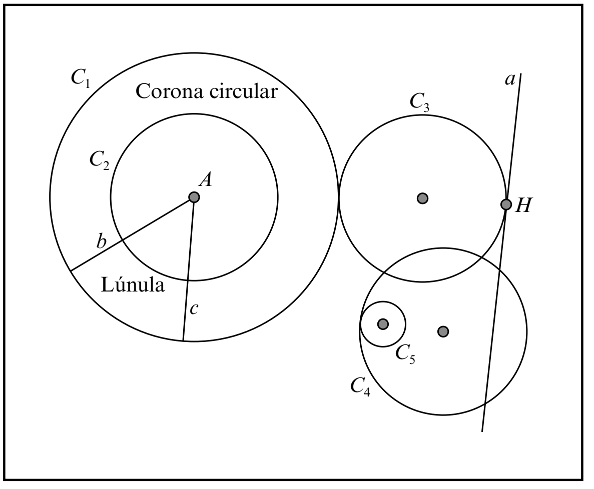


Figura 10.43.—Posiciones relativas entre figuras curvilíneas y rectas.

ACTIVIDAD 13: Busca imágenes en las que se observen figuras curvilíneas y rectas. Nombra los elementos que identifiques.

ACTIVIDADES PARA PRACTICAR

1. ¿Cuál es el máximo número de puntos en que pueden cortarse dos rectas? ¿Y tres rectas? ¿Y cuatro? ¿Y 40 rectas? ¿Y *n* rectas?

2. Sabiendo que un polígono tiene 35 diagonales, ¿cuántos lados puede tener ese polígono?

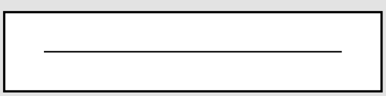
3. Si conocemos que en el vértice de un polígono confluyen 9 diagonales, ¿de qué tipo de polígono se trata?

4. Si una recta es paralela a otra y ésta es perpendicular a una tercera, ¿cómo son entre sí la primera y la tercera?

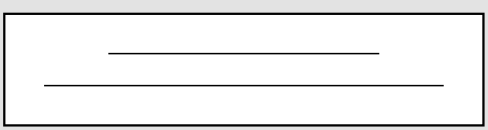
5. Si una recta es perpendicular a otra y ésta es paralela a una tercera, ¿cómo son la primera y la tercera?

6. Para cada uno de los apartados siguientes, cuando sea posible, construye con regla, compás y semicírculo graduado los triángulos con los datos dados. En caso de que no sea posible construir ningún triángulo con los datos de cada apartado justifica por qué no se puede:

a) Un ángulo de 45º y otro de 90º y uno de sus lados es el siguiente segmento:

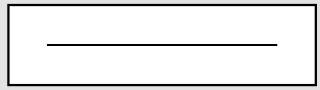


b) Un ángulo de 35º cuyos lados son los siguientes segmentos:



c) Los ángulos miden 70º, 30º y 20º.

d) Dos lados son iguales. Un ángulo mide 4º y un lado es el siguiente segmento:



7. Sin utilizar el semicírculo graduado, ¿qué ángulo dirías que forman las agujas de un reloj a las 2:55?

8. Para cada una de las propiedades siguientes, dibuja todas las figuras que la cumplan:

a) Cuadrilátero que tiene un solo par de lados paralelos y puede tener dos ángulos rectos.
b) Cuadrilátero que tiene sólo dos ángulos rectos consecutivos cuyas diagonales son iguales.
c) Cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos e iguales, sus ángulos son todos iguales a un recto y las diagonales se cortan en su punto medio.
d) Cuadrilátero que tiene dos lados paralelos y otros dos no paralelos e iguales.

9. Si trazas dos radios en una circunferencia, ¿cuántos sectores circulares obtienes?

10. Si trazas una cuerda, ¿cuántos segmentos circulares obtienes?

11. Utiliza un triángulo construido a partir del doblado del papel para marcar sus medianas y el baricentro. Utiliza la regla para comprobar que el baricentro se encuentra a 2/3 de la longitud de la mediana medido desde el vértice y a 1/3 medido desde el punto medio del lado.

12. Comprueba mediante la papiroflexia que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180º.

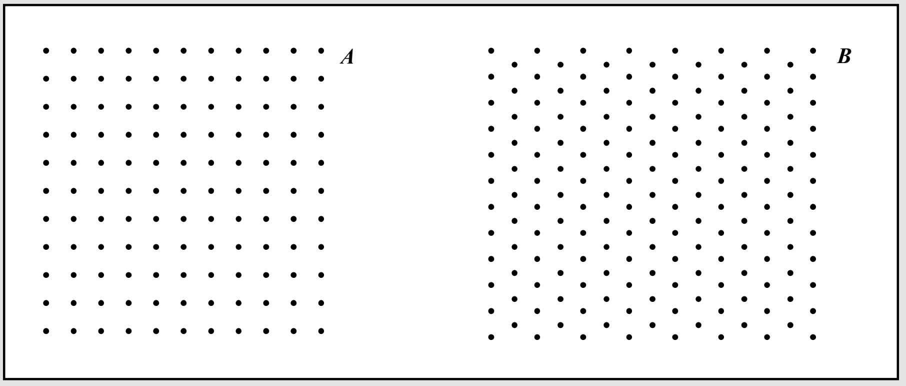
13. Explica por qué para afirmar que un triángulo es equilátero sólo es necesario comprobar una de las dos propiedades presentadas para los polígonos regulares.

14. Comprueba para una bisectriz de un ángulo que hayas construido tú que cualquier punto de esa bisectriz equidista de las dos rectas que forman el ángulo.

15. Justifica que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

16. ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un polígono regular convexo de *n* lados?

17. Las siguientes tramas representan un geoplano cuadrado (*A*) y uno isométrico (*B*). Cópialas en tu cuaderno y dibuja todos los tipos de polígonos regulares que sea posible construir, considerando que los vértices deben estar en los puntos:



INVESTIGA Y REFLEXIONA

1. Busca un medio de comunicación escrito donde se haya publicado algo relacionado con la geometría del plano. Identifica qué elementos trata y qué relaciones establece.

2. Dentro del mundo de la arquitectura, identifica elementos geométricos que se utilicen en la profesión y muestra algún edificio o construcción donde se observen elementos de la geometría del plano.

3. Revisa dos libros de 3.º de Educación Primaria y haz una comparación de los elementos de la geometría plana que se trabajan y de las relaciones que se ponen de manifiesto. Establece las diferencias y similitudes entre los textos de ambos libros.

BIBLIOGRAFÍA

Baroody, A. J. y Coslick, T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Canals, M. A. (1997). La geometría en las primeras edades escolares. *SUMA, 25,* 31-44.

Castro, E. (Ed.) (2001). *Didáctica de la Matemática en la educación primaria*. Madrid: Síntesis.

Ferrero, L, Gaztelu, I, Martín, P. y Martínez, L. (2008). *Matemáticas segundo ciclo 4*. Madrid: Anaya.

García, J. y Bertrán, C. (1987). *Geometría y experiencias*. Madrid: Alhambra.

Jacobs, H. (1987). *Geometry*. San Francisco, CA: W. H. Freeman and Co.

Krause, E. F. (1991). *Mathematics for elementary teachers*. Massachusetts: Heath and Company.

O'Daffer, P. G. y Clemens, S. R. (1977). *Geometry: An investigative approach*. California: Addison Wesley.

Geometría del espacio 11

MOISÉS CORIAT BENARROCH

Con ayuda de la geometría damos cierto sentido al espacio, a nuestro propio esquema corporal y a nuestra imagen corporal. Cuando estudiamos geometría nos apoyamos en el espacio físico para aprender cosas sobre un espacio imaginado, que está en nuestro pensamiento y que permite a todos dar sentido a ese espacio físico. Por ejemplo, cuando nos hallamos ante un paso de cebra (es decir, unas capas de pintura blanca convenientemente extendidas sobre una parte del asfalto) posiblemente pensamos en *rectángulos paralelos* o en *líneas paralelas*. Estas tres palabras (rectángulo, línea y paralelas) son términos geométricos con los que nos entendemos mejor que hablando de capas de pintura blanca.

Las estrellas son objetos inmensamente grandes comparados con el tamaño de una persona, pero están a tanta distancia que no hay inconveniente en decir que son *puntos* luminosos. Cada estrella está en algún lugar de nuestra galaxia, pero preferimos ubicarla en la bóveda celeste, es decir, en una *esfera* (que vemos desde dentro) en la que nos conviene considerar situadas las estrellas, aunque sabemos que no están en esa esfera; si participáramos en un viaje interestelar descrito en algún libro de ciencia ficción, la bóveda celeste nos serviría de poco y tendríamos que usar otro objeto geométrico.

Requisitos en el aprendizaje de la geometría del espacio son: tiempo (porque tenemos que meditar sobre lo que es espacio físico y lo que es espacio geométrico ante casi todas las situaciones que afrontamos), paciencia (porque ayuda a nuestra imaginación a comprender los objetos geométricos y las manipulaciones que hacemos sobre ellos, así como a expresar estas acciones con las frases y términos adecuados) y confianza (para trabajar solos o en equipo, para establecer sin lugar a dudas que lo que otros han comprendido nosotros también podemos comprenderlo).

1. RECONOCIMIENTO DE OBJETOS. OBJETOS GEOMÉTRICOS

Reconocer objetos significa referirse a ellos usando su nombre habitual, aunque, en ocasiones, disponemos de varios nombres para referirnos al mismo objeto. Para reconocer objetos en el espacio, lo mejor es tocarlos, si se puede, u observarlos desde varios puntos de vista. Una fotografía de un objeto solamente aporta un punto de vista.

El reconocimiento y descripción de objetos geométricos en el espacio exigen una cierta pericia.

Algunos *objetos geométricos* se asocian con gran facilidad a objetos físicos que forman parte de nuestra vida cotidiana: ortoedro —caja de zapatos—, esfera —pelota de baloncesto—, pirámide —Pirámide de Keops—, cilindro —moneda—, cono —cucurucho—, elipsoide —huevo de zurcir—...

Figura 11.1.—Algunos objetos físicos mencionados.

ACTIVIDAD 1: Construye un cucurucho (cono) usando un folio y papel autoadhesivo. Explica qué objetos, parecidos a los de la figura anterior, se construyen con más facilidad.

En general, para asociar un objeto, que podemos tocar, con un objeto geométrico, que está en nuestro pensamiento, conviene omitir algunas características, como el material de fabricación o su carácter macizo o hueco, y conviene también buscar los elementos principales que lo forman, evitando detalles no relevantes desde un punto de vista geométrico.

Por ejemplo, una mesa sencilla de madera, la asociaremos con cinco ortoedros: cuatro de ellos, idénticos, son las patas, y el quinto, muy diferente a los otros cuatro, el tablero, que sirve para leer o alimentarse, planchar o escribir. Para hacer esta asociación, hemos renunciado a muchos detalles y, por supuesto, a los ensambles entre las piezas que dan rigidez a la mesa. Nada obliga a que las cuatro patas sean ortoedros, pero es conveniente que sean iguales.

ACTIVIDAD 2: Tenemos cuatro objetos que vamos a usar como patas de una mesa cuya tabla será un ortoedro. ¿Puede tratarse de cuatro esferas iguales?, ¿cuatro conos iguales?, ¿cuatro cilindros iguales? Justifica la respuesta a estas preguntas.

Para caracterizar geométricamente un ortoedro nos apoyamos en cuatro ideas básicas:

1.ª El objeto ocupa una porción limitada del espacio.
2.ª Sus caras son completamente lisas y llanas. Geométricamente hablando, sus caras son planas y se llaman rectángulos.
3.ª Dos caras, cuando están unidas, son perpendiculares.
4.ª Dos caras, cuando no están unidas, son paralelas.

Si un cuerpo cumple las cuatro condiciones, tenemos un ortoedro. Más adelante veremos otra caracterización.

ACTIVIDAD 3: La pirámide tiene caras planas, pero la unión de caras NO se produce mediante ángulos rectos. En la esfera, tenemos una sola cara curva. En el cilindro, es fácil observar dos caras planas (que son círculos) y una cara curva. Pirámide, esfera, cilindro, ¿son ortoedros?

Una de las actividades geométricas más comunes consiste en preguntarse «¿qué ocurre si modifico una condición o varias?», y en intentar responder.

ACTIVIDAD 4:

Si mantenemos las condiciones 1.ª y 4.ª, con las que caracterizamos el ortoedro, y modificamos la 2.ª, admitiendo que algunas caras (o todas) sean paralelogramos (es decir, sin limitarnos a que sean rectángulos) y también la 3.ª, admitiendo que dos caras cualesquiera, si están unidas, no han de ser necesariamente perpendiculares, obtenemos una nueva familia llamada «paralelepípedos». (Conviene recordar que, en el plano, todos los rectángulos son paralelogramos, pero hay paralelogramos que no son rectángulos.) La familia de los ortoedros está dentro de la familia de los paralelepípedos:

a) Si, de las condiciones que caracterizan el ortoedro, modificamos solamente la 2.ª condición, así: todas las caras son cuadradas, obtenemos un caso particular de ortoedro, caso fundamental y básico de toda la geometría. ¿Qué nombre recibe el cuerpo geométrico de la Figura 11.2?

Figura 11.2.—Foto del cuerpo pedido, construido usando el material Polydron[R].

b) Las condiciones 2.ª, 3.ª y 4.ª las vamos a cambiar ahora del siguiente modo. Exigimos que haya dos caras paralelas que sean polígonos regulares; exigimos también que esas caras se unan mediante rectángulos formando ángulos rectos con ellas. En la figura 11.3 se ilustran esas condiciones usando hexágonos regulares. Ahora hemos obtenido una nueva familia: los prismas regulares rectos. En esta familia es costumbre distinguir los prismas según el polígono regular usado. En la figura 11.3 se observan los 6 rectángulos y los 2 hexágonos regulares.

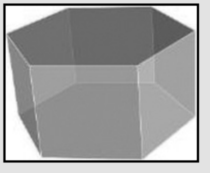


Figura 11.3.—Prisma hexagonal recto.

ACTIVIDAD 5: ¿Qué condiciones caracterizan, a la vez, a los ortoedros, a los paralelepípedos, a los cubos y a los prismas rectos de base cuadrada?

ACTIVIDAD 6: ¿Qué diferencia hay entre un prisma recto de base cuadrada y un cubo? Justifica la afirmación siguiente: «El cubo es un caso particular de prisma recto de base cuadrada».

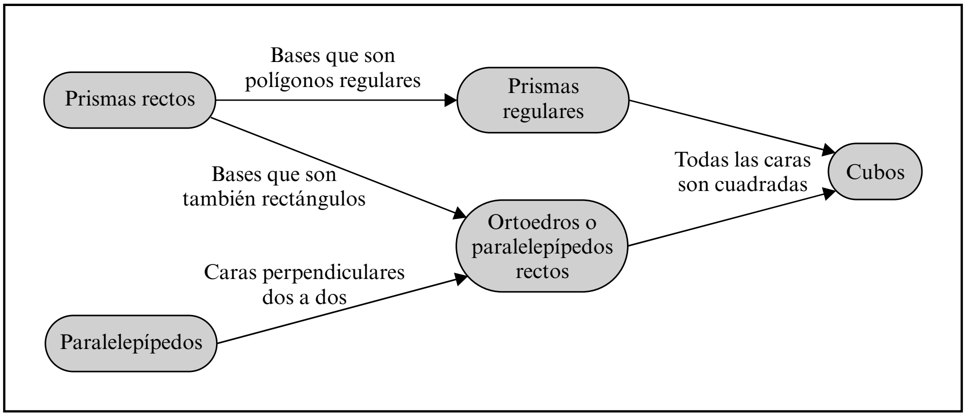


Figura 11.4.—Relaciones entre prismas rectos, paralelepípedos, ortoedros y cubos.

Entre las familias mencionadas en las actividades 4 a 6, se dan las relaciones ilustradas en la figura 11.4.

2. SOBRE LA HISTORIA DE LA GEOMETRÍA

Hay quien dice que aprender geometría es como construir, pacientemente, un castillo de naipes. ¡De naipes, que con un soplo se van al suelo! Euclides desarrolló su labor alrededor del año −300 EC y escribió *Los Elementos;* este libro pudo resistir unos 2.000 años sin que el castillo de naipes se tambalease. El soplo final lo proporcionó David Hilbert (1862-1943), con su obra *Fundamentos de la geometría,* varias veces retocada por su autor; no sabemos cuánto tiempo se mantendrá este nuevo castillo sin caerse; sus primeros cien años han supuesto un progreso considerable en la investigación de los geómetras. En *Los Elementos* no se desarrolla la geometría del espacio de manera comparable al desarrollo de la geometría plana y la medida de longitudes y áreas.

Hoy por hoy, sabemos enseñar *Los Elementos* desde la Educación Infantil, pero los fundamentos (de Hilbert) solamente pueden estudiarse en las facultades de matemáticas, porque se necesita un dominio del método axiomático.

Euclides intentó definir el *punto,* la *recta* y el *plano*. *Los Elementos* comienzan así: «Un punto es lo que no tiene partes». En cambio, Hilbert preconizó que el punto, la recta y el plano no se pueden definir; en su axiomática, los denomina «términos primitivos» de la geometría.

La geometría del espacio está muy unida también a las técnicas de proyección y de diseño arquitectónico que se desarrollaron con la etapa que los historiadores llaman Renacimiento. Obras como *La divina proporción,* de Luca Pacioli (1447-1508) son de fácil acceso y permiten disfrutar bellas representaciones planas de cuerpos geométricos.

En la misma época que Hilbert, Félix Klein (1849-1925) propuso un enfoque de la geometría que la conectaba con la teoría de grupos que, en esos años, se estaba desarrollando. El enfoque de Klein es de uso habitual a partir de un cierto nivel de desarrollo de la geometría, pero queda fuera de este capítulo.

Las nuevas tecnologías han traído una nueva manera de trabajar la geometría con el desarrollo de poderosas y fácilmente accesibles aplicaciones informáticas, que permiten darse una idea de determinadas propiedades de cuerpos geométricos o de transformaciones realizadas sobre esos cuerpos. La simulación del movimiento permite acercarse a técnicas de 3D en la pantalla. Se ha acuñado la expresión «geometría dinámica» para referirse a las situaciones geométricas que se resuelven manejando programas de geometría.

3. CONSIDERACIONES CURRICULARES

Son muy pocos los que estudian la geometría al modo de Hilbert. Por ello, es costumbre considerar que la formación geométrica propuesta en la educación obligatoria debe abarcar cuatro campos geométricos: las proyecciones, la geometría analítica, la geometría de transformaciones y la geometría sintética, basada en demostraciones que exigen un rigor, pero no el del método axiomático.

En nuestros currículos, la geometría se ha venido reduciendo durante muchos años a la geometría analítica, tanto en Primaria, con el estudio irreflexivo de fórmulas de áreas y de volúmenes, como en Secundaria, con el enorme peso asignado a la resolución de ecuaciones para describir intersecciones de rectas del plano o de planos del espacio, o posiciones relativas de unas y otros, sin atender a la intuición de los alumnos. Sin esa intuición, los avances son imposibles o muy costosos en tiempo de estudio. A su vez, el desarrollo de esa intuición exige tiempo.

Los maestros de las nuevas promociones deberían incluir entre sus compromisos educativos la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría intuitiva. Un simple lema bastaría: «más tiempo dedicado a manipular material didáctico y menos tiempo dedicado a fórmulas».

Como no sabemos definir en clase lo que es el punto, la recta o el plano, conviene que nos acostumbremos a apoyarnos en los objetos reales para ayudar a los niños a elaborar sus propias ideas sobre estos tres objetos geométricos esenciales. Así, el punto de la gramática es un buen ejemplo de punto, como lo es también la estrella (porque está muy lejos); un hilo tenso es un buen ejemplo de segmento rectilíneo, y un folio nuevo sirve como ejemplo de plano.

El maestro y el niño trabajan juntos en clase, pero no razonan de la misma manera. Por ejemplo, si decimos que «una estrella es un punto», el maestro está usando el punto (su idea de punto) como modelo para mencionar la estrella, mientras que el niño está usando un objeto (la estrella) como modelo para elaborar una idea de punto (figura 11.5.)

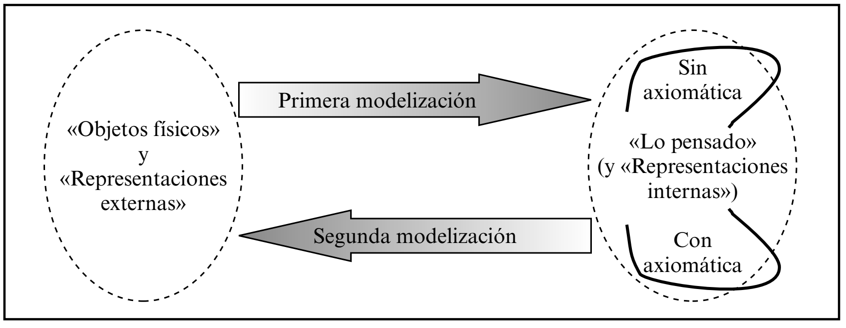


Figura 11.5.—Experiencias matemáticas de las personas.

La primera modelización que muestra la figura 11.5 la hacemos todos en cualquier momento. Para la segunda modelización, es necesaria una cierta experiencia matemática previa, por eso a los niños les cuesta tanto y la realizan con lentitud.

En el apartado primero, hemos manejado (sin decirlo) las dos modelizaciones. Por ejemplo cuando escribimos «caja de zapatos —ortoedro—», en el primer caso nos referimos a objetos físicos y con la palabra ortoedro a algo que somos capaces de pensar y que tiene las principales características de la forma de la caja de zapatos.

La meta de los currículos escolares de geometría es la de avanzar en nuestra manera de mirar a nuestro alrededor con algunas ideas de la geometría.

Los niños captan, desde muy pequeños, la idea de que *la forma* es uno de los atributos o características de los objetos, pero han de ir madurando para darse cuenta de que todo objeto puede ser analizado geométricamente estudiando sus partes y las relaciones entre ellas, mediante preguntas que pueden llegar a ser muy difíciles de responder si no se ha preparado antes el camino.

La geometría elemental no se debe estudiar sin materiales didácticos y sin que los niños y preadolescentes manipulen objetos físicos asociados con objetos geométricos. Los materiales geométricos descargan a la persona del esfuerzo que tiene que realizar para imaginar lo que le están pidiendo; con los materiales, se acerca más o mejor a «ver» eso que le están pidiendo o a deducirlo. Lo sorprendente es que bajo ciertas condiciones en la manera de enseñar, que son fáciles de satisfacer, el aprendizaje resulta más eficiente y ameno.

4. DEL ESPACIO AL PLANO

Cuando se quieren comunicar ideas geométricas, el manejo de objetos físicos resulta un poco engorroso, por eso recurrimos a representaciones planas de los cuerpos geométricos. Hay dos tipos de representaciones planas: proyecciones y desarrollos planos.

4.1. Ideas sobre las proyecciones

Las proyecciones son de dos tipos: las vistas en perspectiva y las vistas usando planos de proyección privilegiados.

ACTIVIDAD 1: Usando papel transparente, coloca la figura 11.6.*b* sobre la 11.6.*a*. Enuncia algunas diferencias entre la foto del balón y la representación de la esfera en perspectiva caballera. Sugerencia: copia las figuras en acetatos, que son transparentes; como referencia común, conviene elegir un punto bien marcado de cada figura.

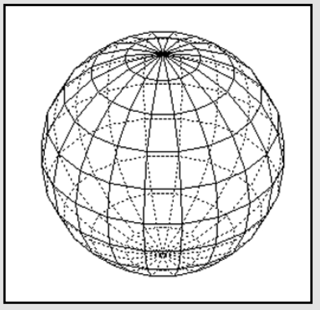


Figura 11.6.*a*.—Esfera en perspectiva caballera.

Figura 11.6.*b*.—Foto de balón esférico.

La figura 11.7 muestra un cubo en perspectiva isométrica; en la práctica se dibuja un hexágono regular, su centro y tres medias diagonales alternas del hexágono. Se dibuja cómodamente usando papel isométrico, es decir, papel pautado, formando triángulos equiláteros.

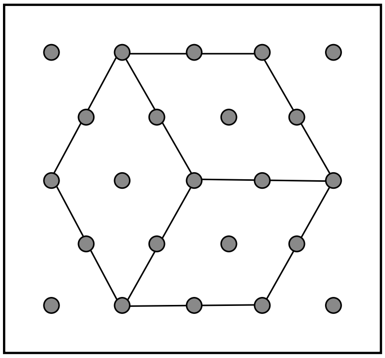


Figura 11.7.—Cubo en perspectiva isométrica

Hay varios métodos para representar en perspectiva que se han hecho más accesibles gracias a los editores de gráficos incorporados en muchos paquetes informáticos.

La foto con la que comienza este capítulo ilustra, informalmente, los elementos básicos de una proyección: hay un punto que la genera (en nuestro caso, un foco de luz, cuyos rayos fueron captados por la cámara) y un plano en el que se produce esa proyección (en nuestro caso, la pista de carreras), hay un objeto que se proyecta (en nuestro caso, los corredores, atrapados por la fotografía mientras estaban en el aire) y la proyección propiamente dicha (en nuestro caso, las respectivas sombras). Esta magnífica foto es el resultado de una intuición del fotógrafo; no ha sido pensada geométricamente.

Otras representaciones planas las constituyen las vistas llamadas *planta, alzado* y *perfil*. Se trata de tres planos mutuamente perpendiculares sobre los que indicamos cómo se vería el cuerpo visto desde tres puntos de proyección. Si alguien va a alquilar o comprar un piso, suele pedir un plano de la planta, donde se ve la distribución básica del espacio disponible; sin embargo, un proyecto para amueblar una habitación, probablemente necesitará las tres vistas indicadas. Normalmente, se elige el alzado y los otros dos planos son los planos perpendiculares a éste; se elige una línea de visión y el plano perpendicular a esa línea es el alzado. El capítulo 13 incluye proyecciones de varios objetos según tres planos.

ACTIVIDAD 2: Si colocamos un ortoedro con sus planos paralelos a los tres planos de planta, alzado y perfil, sus vistas son precisamente los tres rectángulos que sirven para construirlo. ¿Cuáles serán las tres vistas correspondientes a un cuaderno de anillas colocado también paralelo a los tres planos de proyección? Sugerencias: se pide solamente un dibujo a mano alzada; como plano de alzado, conviene elegir la portada del cuaderno.

4.2. Ideas sobre los desarrollos

Los desarrollos son configuraciones planas, muestran combinaciones de las caras visibles de los objetos que, debidamente recompuestas, lo producen.

La figura 11.8 incluye un desarrollo correcto y otro aparente, pero incorrecto, de un cubo. El de la izquierda es correcto porque permite recomponer el cubo. La configuración de la derecha no es un desarrollo de un cubo porque no permite recomponerlo.

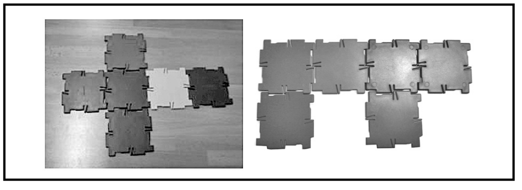


Figura 11.8.—Configuraciones planas de seis cuadrados.

ACTIVIDAD 1: Construye seis cuadrados idénticos; con ellos, prepara, sucesivamente, tres configuraciones que sean desarrollos de un cubo y otras tres que no lo sean.

ACTIVIDAD 2: Consideramos un rollo de papel de cocina completamente desenrollado. Una persona dice: «es el desarrollo de un cilindro, porque al recomponerlo obtenemos de nuevo el cilindro». ¿Qué idea clave no ha tenido en cuenta esa persona?

Hay que tener cuidado, porque algunos cuerpos del espacio no se pueden desarrollar exactamente; por ejemplo, no existe un desarrollo perfecto de la esfera, aunque sí los hay del cono y el cilindro.

ACTIVIDAD 3:

a) Realiza el desarrollo de los siguientes cuerpos físicos: cucurucho cónico, caja de zapatos, maqueta de la pirámide de Keops, lata de refresco. Sugerencia: considera estos objetos como cuerpos geométricos, usa papel y lápiz y dibuja zonas para asegurar la unión con pegamento.

b) Considera distintas representaciones de una pirámide de base cuadrada (foto, dibujo en perspectiva, desarrollo...), ordénalas según un criterio de preferencia personal y explica ese criterio.

c) Consideramos un pupitre escolar. Realiza varias representaciones del pupitre y elige razonadamente una de ellas, indicando sus cualidades frente a las otras. Sugerencia: simplifica el diseño cuanto sea necesario; para ello, usa fotos que expliquen esa simplificación.

5. ÁNGULOS EN EL ESPACIO

5.1. Ángulo sólido

Un caso sencillo de proyección recibe el nombre de proyección cónica. Si contemplamos un objeto y suponemos que, de cada uno de los puntos visibles de éste, sale un rayo de luz hacia un ojo, asimilando el centro de la pupila a un punto, el objeto lo consideramos envuelto por un cono; la abertura de ese cono se llama ángulo sólido: cada corte transversal que demos en ese cono deja una superficie que genera una proyección cónica.

Los retroproyectores y los proyectores cinematográficos aprovechan esta idea, enviando a una pantalla (que es parte de esa proyección cónica) una imagen muy pequeña que consideramos puntual. En la figura 11.9 se adivina la imagen «saliendo» y atravesando el cristal de la cabina de proyección, camino de la pantalla.

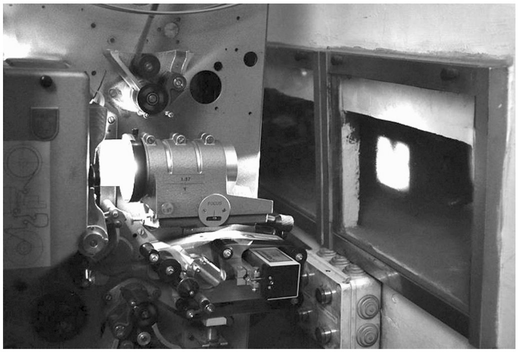


Figura 11.9.—Proyector de cine.

5.2. Ángulo diedro

Cuando dos planos se cortan, lo hacen mediante una recta, y, si consideramos que esas caras son ilimitadas, dividen el espacio en cuatro partes. Cada una de esas partes, incluyendo las propias caras, se llama ángulo diedro. El ángulo diedro se mide con la ayuda de un ángulo plano: se elige un punto de la recta común y se trazan perpendiculares a ésta contenidas en los semiplanos elegidos; el ángulo de estas perpendiculares es una medida del ángulo diedro. La figura 11.10 ilustra todo lo dicho y muestra un diedro recto.

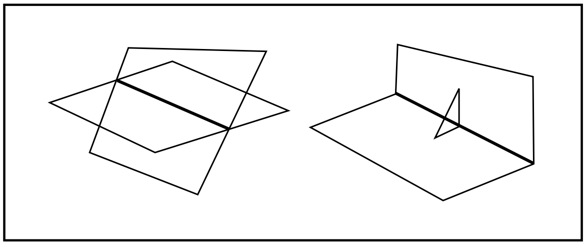


Figura 11.10.—Izquierda, dos planos se cortan y determinan cuatro diedros; la línea de corte de ambos planos está resaltada. Derecha, un diedro recto.

5.3. Partes convexas y cóncavas del espacio

Consideramos tres semirrectas con origen en el mismo punto y que no están en el mismo plano. Cada dos de esas semirrectas forman un plano, que llamaremos cara. Las tres rectas, conjuntamente, dividen el espacio en dos partes, como indica la figura 11.11.

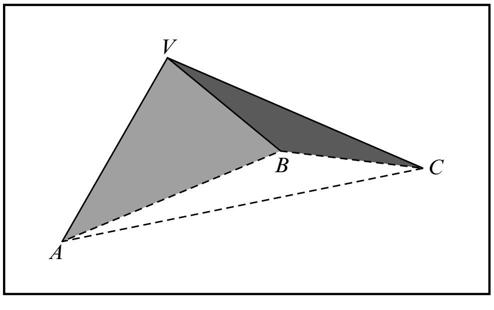


Figura 11.11.—Tres planos que concurren en un punto.

Las tres semirrectas están definidas por los segmentos *V-A, V-B* y *V-C* y el vértice común es *V*. Se ha coloreado una parte del plano *V-A-B* y una parte del plano *V-B-C*. El triángulo *A-B-C* se ha pintado de trazos para indicar que es un límite de la figura que no es relevante considerar, ya que las semirrectas indicadas no acaban.

Vamos a distinguir esas dos partes con la idea de convexidad. Una de las partes tiene la siguiente propiedad: al prolongar cualquier cara, es imposible «entrar» en esa parte. En la figura 11.11, esa parte corresponde a la región «más pequeña» de las dos. Esta parte se denomina *parte convexa*. La otra se llama parte cóncava, y se caracteriza por el hecho de que, al prolongar una de las caras, atravesamos esa parte. En la figura 11.11, la parte convexa es la que queda «dentro» de los tres planos *V-A-B, V-B-C* y *V-C-A*.

ACTIVIDAD 1: En un folio, marca tres semirrectas con un vértice común. Usa esas semirrectas como líneas de pliegue y construye (en el espacio) el objeto dibujado en la figura 11.11. Indica, razonadamente, la parte cóncava y la parte convexa.

ACTIVIDAD 2: Coloca dos cajas de zapatos iguales (dos ortoedros iguales) de manera que: *a*) se generen partes cóncavas, y *b*) no se generen partes cóncavas. Sugerencia: en el segundo caso, coloca exactamente uno junto al otro.

5.4. Ángulo triedro (o triedro), ángulo tetraedro y ángulo poliedro

Si tenemos tres semirrectas concurrentes que no están en el mismo plano, la parte convexa que determinan se llama ángulo triedro o, simplemente, triedro. El ángulo triedro incluye las caras y las semirrectas, que se llaman aristas. El punto común (*V*) se llama vértice. (En la figura 11.11, el triedro corresponde a la parte de espacio que hay «dentro» de *V-A, V-B* y *V-C*.)

Si tenemos cuatro rectas concurrentes de manera que ningún grupo de tres de ellas esté en el mismo plano, la parte convexa asociada se llama ángulo tetraedro. El ángulo tetraedro incluye las caras y las líneas, que se llaman aristas. El punto común se llama vértice, y, a veces, cúspide.

Si tenemos varias semirrectas concurrentes, de manera que ningún grupo de tres de ellas esté en el mismo plano, la parte convexa asociada se llama ángulo poliedro. El ángulo poliedro incluye sus caras, aristas y el vértice o cúspide. La figura 11.12 muestra la representación en el plano de un ángulo tetraedro; se observan las 4 caras, las 4 aristas y el vértice o cúspide, punto del que parten las cuatro semirrectas.

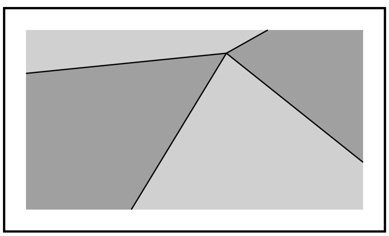


Figura 11.12.—Un ángulo tetraedro.

Conviene tener cuidado con los nombres. Si nos referimos a un ángulo tetraedro o a un ángulo hexaedro, no olvidaremos la palabra «ángulo», porque si decimos solamente «hexaedro», estaremos hablando de cuerpos geométricos, no de ángulos poliedros.

ACTIVIDAD 1: Dibuja a mano alzada un ángulo pentaedro. En un folio, marca semirrectas con un vértice común y construye, por pliegues y recortes, en el espacio, un ángulo pentaedro.

ACTIVIDAD 2: Indica, observando la figura 11.3, los doce triedros que se muestran. Sugerencia: conviene usar letras mayúsculas para los vértices y dos letras mayúsculas para los segmentos en que se apoyan las semirrectas, como hicimos en la figura 11.11.

6. POLIEDROS

6.1. Idea de poliedro

Si varios ángulos poliedros cierran, conjuntamente, una parte del espacio, el correspondiente cuerpo geométrico se denomina poliedro. El ortoedro es un poliedro formado por ocho triedros, como se observa considerando que, en cada vértice del ortoedro, confluyen tres caras y tres aristas. La pirámide de base cuadrada es un poliedro formado por un ángulo tetraedro (el de la cúspide) y cuatro ángulos triedros. El cono no es un poliedro porque una de sus caras no es plana; esfera, elipsoide o cilindro no son poliedros.

ACTIVIDAD 3: Explica la afirmación de que ni la esfera ni el elipsoide ni el cilindro sean poliedros.

En la figura 11.13 hay dos cuerpos, uno es poliedro convexo y el otro no. Uno de ellos no es convexo, aunque tiene todas sus caras planas.

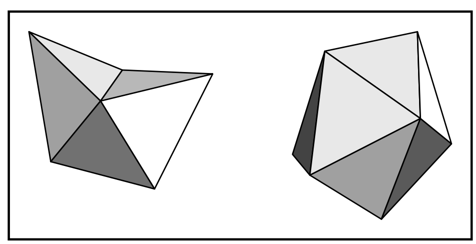


Figura 11.13

En la figura 11.13, el cuerpo de la izquierda no es un poliedro convexo; su parte superior es como una cunita: si prolongamos uno de los dos triángulos que forman esa cunita, atravesamos el cuerpo. Nada de esto ocurre con el otro cuerpo, en ninguna de sus caras. Por eso, al de la derecha le llamamos poliedro y al de la izquierda, de momento, no.

6.2. Caracterización de poliedros

Para caracterizar un poliedro es obligatorio que demos respuesta a las siguientes preguntas: ¿Cuántos vértices, cuántas caras y cuántas aristas tiene? ¿Cuáles son los ángulos poliedros que lo forman y cuánto miden? En este capítulo damos respuesta completa en el caso de los ortoedros.

El ángulo triedro más fácil de medir es el llamado triedro recto, que está formado por tres caras mutuamente perpendiculares o tres ángulos diedros rectos. Esto ocurre en casi todos los rincones de una habitación, cuando de ese rincón salen dos paredes verticales, perpendiculares entre sí, y el suelo, perpendicular a esas paredes. El triedro recto tiene un papel esencial en muchos muebles y habitaciones, por eso conviene reconocerlo. La figura 11.2 muestra una foto de un cubo y se ve uno de sus triedros.

En un poliedro, el número de ángulos poliedros coincide con el número de sus vértices, pero este número no da información sobre esos ángulos poliedros. El tipo de ángulo poliedro lo da el número de caras o de aristas que llegan a cada vértice; este número se llama *orden* del vértice: en todo triedro, el vértice es de orden tres, en todo ángulo tetraedro, el vértice es de orden cuatro.

ACTIVIDAD 1: Razona si las siguientes afirmaciones sobre el ortoedro son verdaderas o falsas:

1. Un ortoedro es un poliedro que tiene 8 vértices de orden tres, 6 caras y 12 aristas.
2. Los ocho ángulos poliedros son triedros rectos.

ACTIVIDAD 2: Razona si las siguientes afirmaciones sobre la pirámide de base cuadrada son verdaderas o falsas. No medimos los ángulos poliedros mencionados:

1. Una pirámide de base cuadrada es un poliedro que tiene 5 caras, 8 aristas y 5 vértices, de los cuales, uno es de orden cuatro y los otros cuatro son de orden tres.
2. Los cuatro triedros son iguales (no medimos ni el ángulo tetraedro, asociado al vértice de orden cuatro, ni los cuatro ángulos triedros, asociados a los vértices de orden tres).

6.3. Clasificación de poliedros elementales

La clasificación de poliedros la iniciamos ya, sin decirlo así, cuando aprendimos a distinguir entre prismas rectos, ortoedros y cubos. En la figura 11.4 se indican algunas relaciones entre estas familias. Ahora describiremos algunas familias de poliedros relativamente sencillas. Indicaremos, en este orden, los vértices y su orden (V y O), las caras (C) y su tipo y las aristas (A).

Poliedros regulares

Todas sus caras son polígonos regulares idénticos, tienen todos sus vértices del mismo orden y tienen todos sus ángulos poliedros iguales y de la misma medida. Solamente hay 5 poliedros regulares: cubo (8V, O3, 6C cuadradas, 12A), tetraedro (4V, O3, 4C triángulos equiláteros, 6A), octaedro (6V, O4, 8C triángulos equiláteros, 12A), icosaedro (12V, O5, 20C triángulos equiláteros, 30A) y dodecaedro (20V, O3, 12C pentágonos regulares, 30A). La figura 11.14 muestra dos vistas de cada poliedro regular.

Conviene tener presente que otros poliedros llevan en su nombre la palabra «regular», pero no son poliedros regulares.

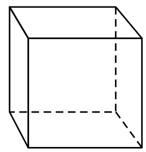
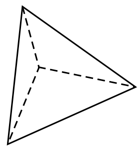
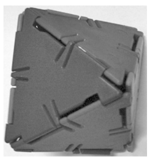
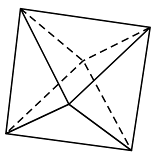
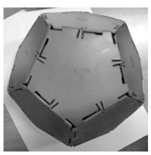
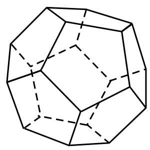
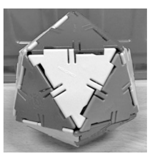
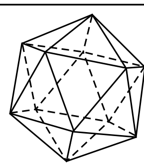
Nombre	Como objeto	Como estructura
Cubo		
Tetraedro		
Octaedro		
Dodecaedro		
Icosaedro		

Figura 11.14.—Los cinco poliedros regulares.

Prismas regulares

Tienen dos caras que son polígonos regulares, paralelas y colocadas de manera que sus lados son paralelos y se unen por rectángulos. Si el polígono regular tiene n lados, la descripción del prisma regular correspondiente es la siguiente: ($2nV$, $O3$, nC rectángulos + $2C$ polígonos regulares de n lados, $3nA$). Por ejemplo, el prisma hexagonal regular tiene 12 vértices de orden tres, 6 caras rectángulos + 2 hexágonos regulares y 18 aristas. En la figura 11.3 se dibujó un prisma hexagonal regular. (Todos los prismas regulares son rectos, por eso no es necesario incluir la palabra «recto».)

La figura 11.15 muestra el desarrollo de un prisma hexagonal regular.

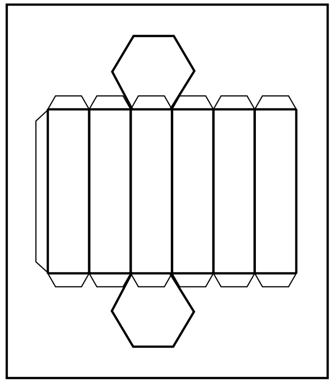


Figura 11.15.—Desarrollo de un prisma hexagonal regular.

ACTIVIDAD 3: Describe y realiza el desarrollo de un prisma pentagonal regular. Recórtalo y construye el prisma.

Pirámides regulares

Tienen una cara que es un polígono regular y el resto de sus caras son triángulos isósceles (o equiláteros) iguales. El polígono regular se llama base de la pirámide; el vértice opuesto a la base se llama cúspide de la pirámide. Si el polígono regular tienen n lados, la descripción de la pirámide regular correspondiente es la siguiente: ($1V$, On + nV, $O3$, nC triángulos isósceles + $1C$ polígono regular de n lados, $2nA$). Por ejemplo, la pirámide hexagonal regular tiene 6 vértices de orden tres y cúspide de orden seis, 6 triángulos isósceles y 1 hexágono regular, 12 aristas. En la figura 11.16 se muestra una pirámide hexagonal regular.

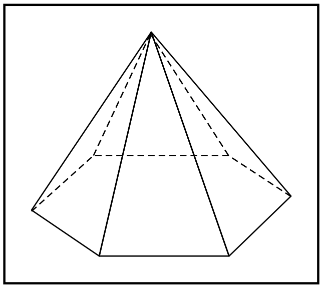


Figura 11.16.—Pirámide hexagonal regular.

ACTIVIDAD 4: Realiza el desarrollo plano de una pirámide hexagonal regular. Sugerencias: dibuja un hexágono regular y seis triángulos isósceles iguales cuyas bases coincidan con el lado del hexágono.

ACTIVIDAD 5: Describe y dibuja una pirámide pentagonal regular.

Igual que con los prismas, las pirámides regulares son todas rectas; esto significa que la línea definida por la cúspide y el centro del polígono regular es perpendicular al plano de ese polígono.

Si tenemos un cuerpo con forma de pirámide, podemos apoyarlo sobre cualquiera de sus caras. Sin embargo, la base (el polígono regular de mayor número de lados) y la cúspide de la pirámide (el vértice de mayor orden) no dependen de la colocación del objeto. Se menciona aquí esta cuestión porque se trata de un error extendido entre personas que se inician en la geometría del espacio.

Dipirámides regulares o bipirámides regulares

Resultan de la unión de dos pirámides regulares iguales por sus bases, con desaparición de éstas. Por ejemplo, la dipirámide hexagonal regular se caracteriza así: 2 vértices de orden seis y 6 vértices de orden tres, 12 caras triángulos isósceles, 18 aristas.

ACTIVIDAD 6: Comprueba que el octaedro es una dipirámide, razonando la respuesta. Dibuja el desarrollo de una dipirámide hexagonal regular.

ACTIVIDAD 7: Considerando sus vértices, caras y aristas, caracteriza las dos familias siguientes de poliedros: prismas regulares de base cuadrada y ortoedros. Explica por qué el cubo pertenece a ambas familias.

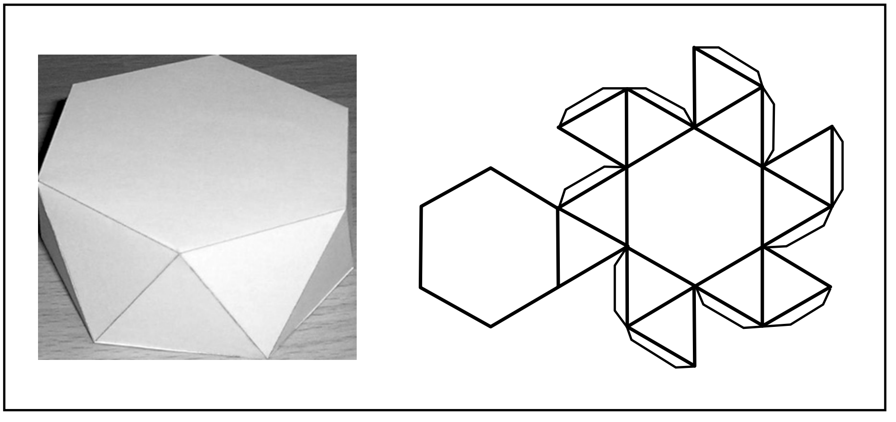


Figura 11.17.—Antiprisma hexagonal regular (izquierda) y su desarrollo (derecha).

Antiprismas regulares o tambores regulares

Los antiprismas tienen dos caras (que son polígonos regulares) paralelas y colocadas de manera que los lados queden simétricamente girados, unidas por triángulos rectángulos isósceles (o equiláteros) iguales. Si el polígono regular tiene n lados, la descripción del antiprisma regular correspondiente es la siguiente: ($2nV$, $O4$, $2nC$ triángulos isósceles + $2C$ polígonos regulares de n lados, $4nA$). Por ejemplo, el tambor hexagonal regular tiene 12 vértices de orden cuatro, 12 caras triángulos isósceles y 2 hexágonos regulares, 24 aristas, como se observa en la figura 11.17.

En la figura 11.17, el antiprisma se construyó con cartulina; los pliegues se consiguieron apoyando una regla en las líneas de pliegue y levantando un poco éstas.

> ACTIVIDAD 8: Construye un octaedro y determina si este poliedro es también un tambor. En caso afirmativo, ¿qué nombre recibe como tambor?

Poliedros semirregulares

Se llaman así los poliedros cuyas caras son todas polígonos regulares. Los poliedros regulares son también poliedros semirregulares. Por ejemplo, de todas las bipirámides regulares pentagonales, solamente es semirregular la que tiene como caras que se unen en la cúspide triángulos equiláteros.

Otras familias de poliedros elementales

• Los *deltaedros* son poliedros formados por triángulos equiláteros; tres poliedros regulares (tetraedro, octaedro e icosaedro) son deltaedros, pero hay muchos otros; por ejemplo, el poliedro de la figura 11.13 (es decir, el que está dibujado a la derecha) también es un deltaedro, en cambio, el otro cuerpo, a veces, recibe el apelativo de «deltaedro cóncavo».

• Los *poliedros eulerianos* son los que cumplen la siguiente relación entre el número de caras (C), de vértices (V) y de aristas (A): $C + V - A = 2$. Todos los poliedros mencionados hasta ahora son eulerianos.

• Se obtienen familias de poliedros y nuevos poliedros estudiando transformaciones de poliedros.

• Nuevas familias de poliedros se consideran en los ejercicios de final de capítulo.

> ACTIVIDAD 9: Elige tres familias de poliedros estudiadas y comprueba que los poliedros de cada familia cumplen la condición de Euler, antes enunciada. Por ejemplo, en el cubo, que tiene 6 caras, 8 vértices y 12 aristas, se cumple que 6 + 8 – 12 = 2.

Reflexión sobre los términos empleados y las ideas desarrolladas

Hemos visto que el octaedro es un poliedro regular, una dipirámide regular de base cuadrada y un antiprisma regular de base triangular. En general, un cuerpo geométrico puede pertenecer a varias familias; sin embargo, cada una de las familias tiene propiedades características que las distinguen de las otras. Si usamos el término «octaedro», se piensa en los poliedros regulares; si lo consideramos como una dipirámide regular de base cuadrada, debemos precisar que sus caras son triángulos equiláteros: «la dipirámide regular de base cuadrada cuyas caras son triángulos equiláteros» es lo mismo que el «octaedro». Cada expresión enfatiza su pertenencia a una familia u otra.

Algunos geómetras piensan que la geometría no es más que la ciencia de las clasificaciones; la geometría estaría terminada si supiéramos todas las familias a las que pertenece cualquier objeto geométrico.

ACTIVIDAD 10: Enuncia otros dos nombres adecuados para el «prisma regular de base cuadrada cuyas caras son cuadrados».

ACTIVIDAD 11: Razona si las siguientes familias corresponden a la denominación de poliedros semirregulares:

a) Prismas regulares.
b) Antiprismas regulares.
c) Pirámides regulares.

En ocasiones, los juegos con los términos (es decir, en relación con las familias en las que incluimos a un objeto geométrico) pueden causar dificultad. Si decimos que «el tetraedro es también una pirámide regular de base un triángulo equilátero», parece correcto, pero surgirá una dificultad cuando alguien pregunte cuál es su cúspide y cuál es su base, ya que cualquier cara puede servir de base y el vértice que no está en ella puede servir como cúspide. Sin embargo, esto no ocurre en las pirámides. En general, esperamos que la base de una pirámide sea, por lo menos, un cuadrilátero; en ese caso, solamente hay una base (el cuadrilátero) y una cúspide (el vértice de la pirámide que no está en la base). También hemos encontrado una dificultad (sobre todo, para los principiantes) cuando decimos que «la pirámide regular de base cuadrada no es un poliedro regular»; resulta chocante que usemos la palabra regular en el nombre de la pirámide y que, a la vez, excluyamos esa pirámide del colectivo de poliedros regulares: conviene tener cuidado con el nombre del objeto geométrico y distinguirlo bien de los nombres de las familias a las que pertenece o no.

Cuestiones como las que hemos mencionado suelen ser vividas por los principiantes como «arenas movedizas» o «trampas» preparadas por los profesores; sin embargo, con un poco de tesón, esfuerzo y práctica, se acaban comprendiendo y dominando los significados que conllevan. A veces, las supuestas «trampas» proceden de un cambio de criterio. Por ejemplo, si en la definición que hemos dado de poliedro quitamos la condición de convexidad, queda una familia amplísima de cuerpos geométricos que se denominarán poliedros; en ese supuesto, lo que aquí hemos llamado poliedros se llamarían poliedros convexos y, en ese caso, un poliedro como el de la figura 11.13 izquierda se llamaría poliedro cóncavo. Sobre poliedros cóncavos, véase el número 14 de «Actividades para practicar», y sobre poliedros estrellados, el número 5 de «Investiga y reflexiona», ambos de este capítulo.

7. ESTUDIO DEL CUBO

El cubo merece un estudio especial, al menos por tres razones.

La primera razón ya la hemos indicado: se trata de un poliedro regular y su construcción es sencilla.

La segunda razón también es geométrica. Si imaginamos una colección enorme de cubos iguales, hasta un niño puede apilarlos de manera que dos cubos cualesquiera estén unidos por sus caras y los cubos, una vez colocados, no dejen huecos entre sí; esto se llama «compactar el espacio». El cubo no es el único cuerpo que compacta el espacio, pero es el más sencillo.

Como consecuencia de la segunda razón, viene la tercera; hay un cubo particular que se elige como unidad de volumen: el metro cúbico. El metro cúbico es un cubo cuyas aristas miden, cada una, un metro exactamente.

Por otra parte, el cubo tiene propiedades cuyo estudio ayuda a comprenderlo mejor.

Cada uno de los 8 vértices del cubo lo es de un triedro recto; sus 6 caras son cuadradas y el número de sus aristas es 12.

Los centros de 4 aristas paralelas definen un plano que divide el cubo en dos partes iguales. Por eso el plano en el que están esos puntos se llama plano de simetría. También dos aristas paralelas que no comparten cara definen un plano de simetría del cubo.

ACTIVIDAD 1: ¿Cuántos planos de simetría tiene el cubo? Dibuja un cubo y marca sus planos de simetría. Sugerencias: usa papel isométrico, utiliza como referencia la figura 11.18 y aplica lo que ahí se ve a todas las caras.

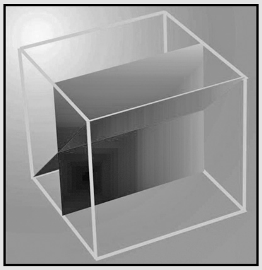


Figura 11.18.—Dos planos de simetría del cubo.

Cada plano de simetría se apoya en dos líneas paralelas. En algunos casos, esas líneas son diagonales de cara; en otros, no.

Si unimos dos vértices opuestos de una misma cara, el segmento obtenido se llama *diagonal de cara*. Si se conoce la medida de la arista, la medida de la diagonal de cara se calcula usando el teorema de Pitágoras.

Por cada vértice del cubo pasan, como sabemos, tres caras. Si unimos el vértice de ese triedro con el único vértice que no pertenece a ninguna de esas caras, obtenemos un segmento llamado *diagonal* del cubo. El cubo tiene 4 diagonales iguales que se cortan en un punto llamado *centro* del cubo. Cada cara del cubo, con las 4 medias diagonales que parten de ella, determina una pirámide regular de base cuadrada con vértice en el centro del cubo, de manera que es muy fácil descomponer el cubo en 6 pirámides particulares. Todo lo dicho se ilustra en la figura 11.19.

En la figura 11.19 se observa que las cúspides de las 6 pirámides coinciden en el centro del

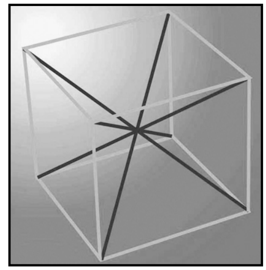


Figura 11.19.—Cubo, sus 4 diagonales y descomposición en 6 pirámides regulares de base cuadrada iguales.

cubo. Cada cara del cubo es la base de una pirámide. Solamente se muestra el armazón de los poliedros mencionados.

Las dos figuras, 11.18 y 11.19, representan objetos geométricos «dentro» del cubo (aunque los planos se extienden indefinidamente).

ACTIVIDAD 2: Conviene hacerse una idea de todo lo anterior viendo el cubo y considerando sus aristas como varillas de un armazón en el espacio. Construye con pajitas de refresco la maqueta de un cubo. Con cartulinas e hilos, muestra ejemplos de sus planos de simetría, de las diagonales de cara, de las diagonales y de las 6 pirámides de base cuadrada iguales en que se descompone.

La medida de la diagonal del cubo constituye una generalización del teorema de Pitágoras en el espacio de tres dimensiones. Como las aristas son iguales, si representamos la medida de la diagonal con la letra d y la medida de la arista con l, se cumple:

$$d^2 = l^2 + l^2 + l^2$$

En un ortoedro, las aristas son (en general) todas diferentes; en este caso, las cuatro diagonales, que siguen siendo iguales, se obtienen mediante la expresión:

$$d^2 = l^2 + m^2 + n^2$$

siendo l, m y n las medidas de las tres aristas (largo, ancho y alto del ortoedro, respectivamente).

ACTIVIDAD 3: Observa con un solo ojo el armazón del cubo construido en la actividad anterior, de manera que obtengas cada una de las vistas indicadas en la figura 11.20.

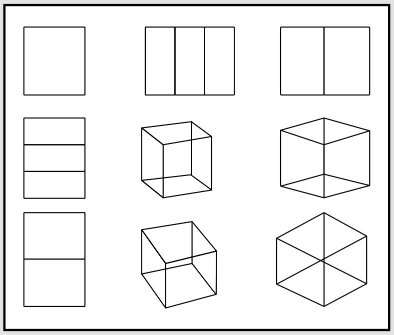


Figura 11.20.—Nueve vistas del cubo.

ACTIVIDAD 4: La figura 11.21 indica que es posible cortar un cubo por un plano (como si fuera con una guillotina) para dejar a la vista un hexágono regular. Describe las 6 líneas que configuran ese hexágono y su posición en las caras del cubo.

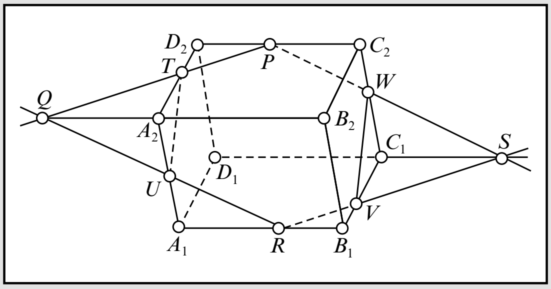


Figura 11.21.—Sección hexagonal de un cubo.

El hexágono del que hablamos queda definido por los puntos *T, P, W, V, R* y *U*.

Comparando la figura 11.21 con el dibujo de la esquina inferior derecha en la figura 11.20, aprendemos algo más del cubo. En ambos casos, vemos un hexágono regular. En la figura 11.21, el hexágono lo obtenemos como sección plana del cubo, mientras que en la figura 11.20 el hexágono regular surge como proyección o vista en perspectiva.

ACTIVIDAD 5: Dibuja un hexágono regular. A partir de él, reconstruye, sucesivamente, dos cubos: uno, considerando que ese hexágono es una perspectiva isométrica del cubo, y otro, suponiendo que ese hexágono es una sección plana del cubo. Aprovecha, respectivamente, las figuras 11.20 y 11.21. Compara los dos cubos obtenidos y justifica si son iguales o no.

Si marcamos los puntos medios de las aristas de un cubo y separamos los 8 vértices, cortando mediante planos que pasan por los tres puntos marcados más próximos a cada vértice, obtenemos un poliedro cuyas caras son cuadrados y triángulos equiláteros. (figura 11.22.)

Curiosamente, si partimos de un octaedro, marcamos los puntos medios de sus aristas y separamos los 6 vértices. Cortando mediante planos que pasen por los cuatro puntos marcados más próximos a cada vértice, obtenemos el mismo poliedro. Por esta razón, este poliedro se denomina cuboctaedro. El desarrollo del cuboctaedro se muestra en la figura 11.22.

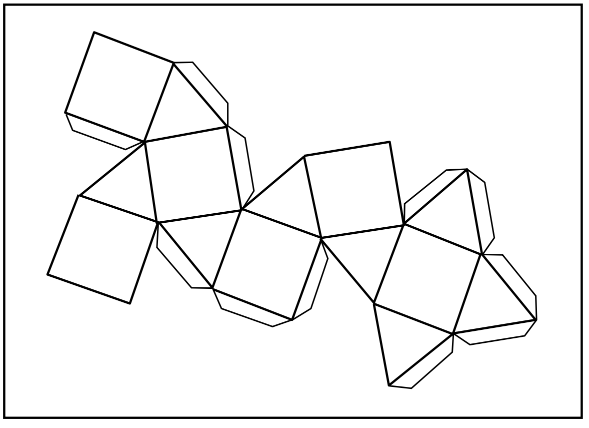


Figura 11.22.—Desarrollo del cuboctaedro.

ACTIVIDAD 6: Usando el desarrollo del cuboctaedro, construye el poliedro y descríbelo indicando el número de sus vértices y sus órdenes, las caras y sus tipos y las aristas.

ACTIVIDAD 7: Con papel o cartulina, escuadra y cartabón y unas tijeras, se consiguen resultados de gran valor geométrico. Por ejemplo, doblamos un folio y marcamos, perpendicularmente a la línea de pliegue, dos segmentos del mismo tamaño, no muy largos, de 1 o 2 centímetros, y distantes entre sí 3 o 4 centímetros. Seguidamente, damos dos tijeretazos, cortando el papel, precisamente sobre esos dos segmentos y hasta la marca. Al abrir el folio, parece que no hay nada, pero podemos entresacar el pliegue que quedó en la parte cortada y obtenemos un escalón. Este pliegue es paralelo al pliegue principal:

a) Diseña y construye un podio de cartulina: tres escalones en línea de diferentes tamaños, como en las Olimpiadas.
b) Diseña y construye una escalera de cartulina. (Todos los escalones de la misma anchura.)
c) Inventa un objeto de adorno, diséñalo y constrúyelo como obra de ingeniería con cartulina.

8. CUERPOS REDONDOS

Si nos preguntan sobre ellos, hacemos un gesto con las manos para indicar algo redondo o mencionamos ejemplos de cuerpos redondos, como una pelota o una lata de refrescos.

De un cuerpo geométrico o de un objeto físico decimos que es redondo si tiene, al menos, una parte redonda en su superficie; el cono, el cilindro, la esfera, la bola, el toro (que corresponde a objetos como la rueda o el «donuts», véase figura 11.23) y el elipsoide son ejemplos muy conocidos de cuerpos redondos, pero también son redondos una semiesfera, un cono o un cilindro cortados por cualquier plano.

Figura 11.23.—«Donuts», como modelo físico del toro.

No hemos avanzado mucho: no hemos dicho lo que es una cara redonda; por ejemplo, en el espacio, un círculo no es redondo. En un objeto geométrico, aceptamos que una cara redonda es una cara que en cada uno de sus puntos toca un plano diferente, pero esta idea es difícil de manejar de manera intuitiva.

En lugar de definir geométricamente qué es «la redondez», veamos criterios experimentales sencillos que permiten afirmar si un cuerpo es redondo. Si ponemos en el suelo un cuerpo redondo (como una lata de refresco) sobre una cara redonda y un poliedro (como un prisma de base pentagonal regular) sobre una cara, al darle a ambos un suave empujón por arriba, paralelo al suelo, observamos que la lata se pone a rodar, mientras que el prisma, como mucho, se desplaza, pero no rueda. Así, diremos que un cuerpo es *redondo* si tiene una cara sobre la que puede rodar. Esta definición de cuerpo redondo no es geométrica, pero tiene su utilidad parcial, pues permite establecer, en parte, qué cuerpos son redondos y cuáles no.

Además, permite comparar el grado de redondez de algunos cuerpos.

Un cuerpo con forma de esfera es el que mejor rueda, en el siguiente sentido: un suave golpe en cualquier dirección predeterminada hace que el objeto ruede en esa dirección.

Esto no le ocurre a un cuerpo con forma de elipsoide; si no se tiene mucho cuidado al colocarlo de una manera determinada y al dar el pequeño golpe, no conseguiremos que ruede en línea recta. Rueda mucho mejor si el golpe se da perpendicularmente al eje mayor, que corresponde a la parte más ancha.

El cilindro rueda fácilmente en una sola dirección, que es paralela a las caras circulares.

El cono, al recibir un suave golpe, rueda girando alrededor de una línea que va desde su vértice hasta el borde de la circunferencia.

ACTIVIDAD 1: Explica cómo rueda cada uno de los siguientes cuerpos físicos: un toro o rueda; un huevo de zurcir, y una botella tronco-cónica.

Otra manera de considerar algunos cuerpos redondos se basa en la idea de hacer girar en el espacio un objeto plano. Se obtienen así los llamados cuerpos de revolución. En la figura 11.24 se presenta el cilindro, que se obtiene al hacer girar un rectángulo sobre uno de sus lados.

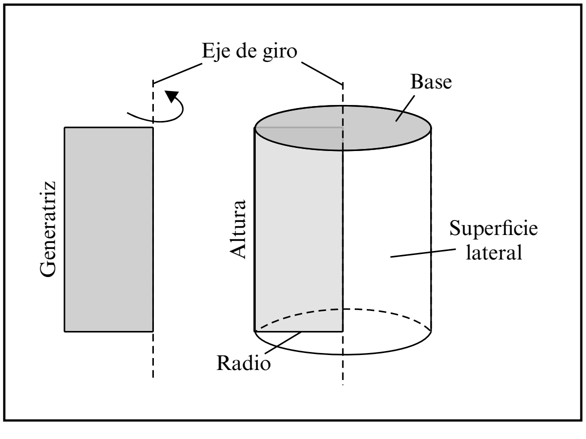


Figura 11.24.—Generación del cilindro mediante el giro de un rectángulo.

Véase el número 5 de «Actividades para practicar» de este capítulo.

9. MATERIALES PARA LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Conviene distinguir los materiales usados para presentar alguna idea que los alumnos y profesores practiquen. Mencionamos solamente los del segundo grupo.

Para construir poliedros, el mejor material (y más cómodo) es el polydron. No se necesita mucha fuerza para enlazar las piezas, aunque sí un poco de maña para cerrar el poliedro (es decir, para poner correctamente el último polígono).

Otros materiales para construir poliedros son los troqueles y los «desarrollos». Los troqueles son láminas con polígonos regulares de cartulina (más o menos gruesa), todos con un lado en común, con pestañas para unir dos polígonos mediante gomas elásticas. La figura 11.25 muestra una instantánea del proceso de construcción de una pirámide regular de base cuadrada usando troqueles; se ve un desarrollo del poliedro preparado para ser levantado. Cada arista quedará visible con ayuda de las gomas elásticas; cada goma enlaza dos pestañas de dos polígonos diferentes.

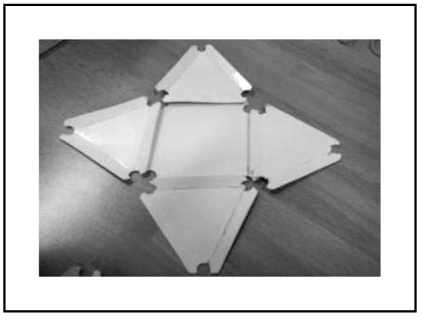


Figura 11.25.—Uso de troquelados para construir poliedros.

Los desarrollos son baratos; suelen venderse en tiendas de manualidades y se necesitan tijeras y pegamento para construir poliedros con ellos; también conviene disponer de una regla para iniciar bien los pliegues. Hay desarrollos de algunos cuerpos redondos; algunos, como el de la esfera, son matemáticamente falsos, pero funcionan bien en clase.

Para construir armazones de poliedros, es mejor recurrir a pajitas de refresco; tienen el inconveniente de que los enlaces para formar ángulos poliedros que no sean rectos resultan difíciles; hay versiones comerciales escolares (de plástico, como en la figura 11.26) que resuelven este problema, pues contienen enlaces flexibles que permiten incluso construir ángulos hexaedros.

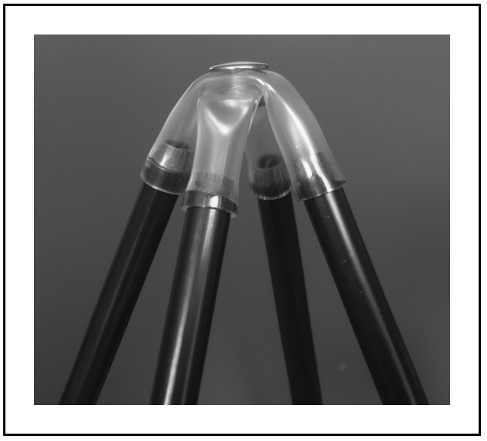


Figura 11.26.—Proceso de construcción de un ángulo tetraedro.

La figura 11.26 muestra que se han colocado tres varillas en el enlace flexible; se observa que solamente queda hueco para una varilla. Este enlace podría utilizarse como triedro o como ángulo tetraedro, pero no como ángulo poliedro de orden superior. Para éstos, será necesario recurrir a enlaces con más conexiones, que también están disponibles.

Para trabajar a fondo los cubos y, en general, los ortoedros, se utiliza también el material llamado «corcho blanco» o «porespán». Suelen encontrarse precortados los cubos y algunos poliedros. Si se les añaden seguetas (térmicas o mecánicas), se pueden hacer secciones planas y estudiarlas experimentalmente. En la figura 11.27 se han marcado los tres primeros puntos de corte para construir un cuboctaedro. (El desarrollo de este poliedro se muestra en la figura 11.22.)

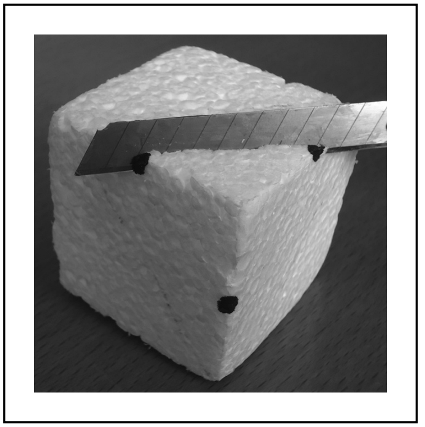


Figura 11.27.—Cortador intentando generar un cuboctaedro.

Cubos iguales de colores, en cuyas caras vemos 5 entrantes y un saliente, permiten elaborar configuraciones de cubos que son de utilidad. Una marca registrada se denomina «multilink».

La fotografía y el vídeo son recursos muy usados actualmente para observar geométricamente nuestro entorno urbano o natural.

En la red Internet se tiene acceso a diferentes programas (incluso de «realidad virtual») que ayudan a observar, de diferentes maneras, la inmensa mayoría de los poliedros, y así comprenderlos mejor; buena parte de esa información se encuentra en inglés.

También se encuentran tablas con datos relativos al número de vértices, caras y aristas y medidas de todos los ángulos poliedros que entran en cada poliedro. Igualmente, se tiene acceso a desarrollos planos de casi todos los poliedros, muchos con autorización para imprimir, que son fáciles de recortar y pegar.

ACTIVIDADES PARA PRACTICAR

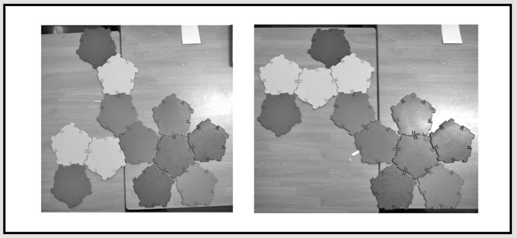
1. Construye los 11 desarrollos diferentes del cubo, es decir, 11 configuraciones planas de 6 cuadrados iguales que, al levantarlas, den, todas ellas, un cubo.

2. Calcula:

a) La diagonal de un cubo cuya arista mide 2 m.
b) La arista de un cubo cuya diagonal mide 2 m.

3. Calcula la diagonal de un ortoedro cuyas aristas miden 2, 3 y 4 cm.

4. Las dos configuraciones planas siguientes están hechas con 12 pentágonos regulares; al levantarlas, una de ellas permite obtener un dodecaedro y la otra no. Explica cuál de las siguientes figuras corresponde al desarrollo de un dodecaedro y justifica por qué la otra no permite obtenerlo. Los 6 pentágonos de la parte inferior derecha, en ambas figuras, permiten construir medio dodecaedro:



5. Si tenemos una figura plana y la hacemos girar en el espacio de alguna manera, a veces se obtienen cuerpos que se denominan *cuerpos de revolución,* como el ejemplo de la figura 11.24. En las preguntas *a*) a *e*) se pide una explicación y un dibujo:

a) ¿Qué cuerpo de revolución se obtiene haciendo girar en el espacio un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos?
b) ¿Qué cuerpo de revolución se obtiene haciendo girar en el espacio un triángulo rectángulo alrededor de la hipotenusa?
c) ¿Y si hacemos girar un semicírculo alrededor de su diámetro?
d) ¿Hay una figura plana que, por revolución con respecto a un lado, genera un tronco de cono?
e) Un toro se obtiene mediante el giro de un círculo alrededor de un eje. ¿Cómo deben colocarse el círculo y el eje de giro para conseguir el toro?
f) Haz una lista de cuerpos redondos conocidos y de las figuras planas que, por revolución, los generan.

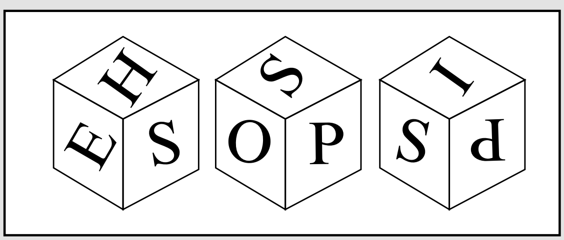
6. Si unimos dos cubos iguales por una de sus caras, tenemos un dicubo. Hay muchas maneras de hacerlo, pero siempre se obtiene la misma forma; por eso decimos que *hay un solo dicubo*. En cambio, hay dos tricubos, llamados, respectivamente, «I» y «L», por las letras cuya forma parecen replicar:

a) Usando papel isométrico, dibuja estos dos tricubos.
b) Justifica cuál de estos objetos es cóncavo y cuál es un ortoedro.

7. Si un cilindro perfora una bola y la atraviesa, deja una huella que llamamos orificio cilíndrico. ¿Qué nombre propondremos para la huella que deja un cono que perfora una bola y la atraviesa?

8. Aunque resulte sorprendente, geométricamente hablando, es posible hacer un orificio en un cubo de manera que por ese orificio pase un cubo más grande que el que teníamos. ¿Cómo debe hacerse tal orificio? En la foto siguiente, se observa un boquete por el que cabe un cubo más pequeño que el cubo dado. La pregunta tiene solución geométrica si el segundo cubo es un poco más grande que el cubo dado. Si es mucho más grande, la respuesta es negativa:

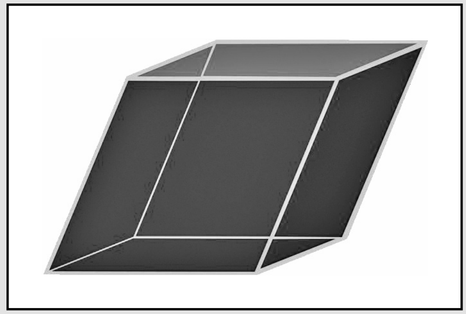
9. En un dado cúbico se han grabado seis letras, una en cada cara, como ilustra la figura siguiente:



a) ¿Qué letra pusieron en la cara paralela a la de H?

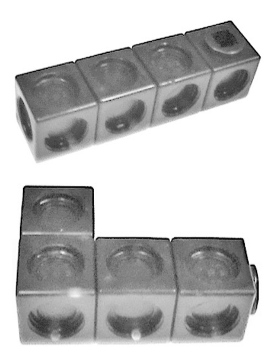
b) ¿Cuáles son los tres pares de letras situados en caras paralelas.

10. Un romboedro es un poliedro formado por 6 caras idénticas que son rombos. El romboedro es el principal ejemplo de paralelepípedo (o de prisma no recto), como muestra la figura siguiente:



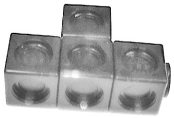
Combinando dos tetraedros y un octaedro que tengan la misma arista, obtén un romboedro. Fotografía las principales etapas de la construcción.

11. Con el material multilink se pueden construir no solamente los tricubos ya mencionados, sino también tetracubos, pentacubos, etc. Los tetracubos se construyen a partir de los tricubos, probando configuraciones nuevas; en total, hay ocho, que se muestran a continuación:

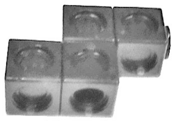


Tetracubo «I».

Tetracubo «L».



Tetracubo «T».



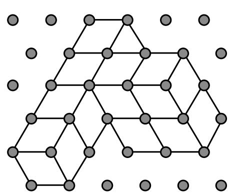
Tetracubo «S» o tetracubo «Z».

Tetracubo «O».

Tetracubo «Y».

Dos tetracubos que parecen idénticos, pero que no lo son. Ocurre con ellos como con las manos, que uno es imagen especular del otro.

A continuación se muestran dos composiciones distintas de ocho cubos, una hecha con cubos multilink y otra en papel isométrico:



De una de ellas (sólo de una) se pueden extraer, sucesivamente, los ocho tetracubos:

a) ¿Cuál permite extraer sucesivamente todos los tetracubos?
b) ¿Cuál es el tetracubo que no se extrae usando la otra composición?
c) En la composición de la respuesta *a*), intenta quitar algún cubo, sin que ello signifique dejar de obtener los ocho tetracubos. ¿Cuál es o cuáles son los cubos que se pueden quitar?

12. Menciona dos familias de poliedros a las que pertenece el cuboctaedro y otras dos a las que no pertenece. (Puedes ver un desarrollo del cuboctaedro en la figura 11.22.)

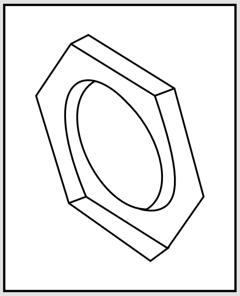
13. Planea y realiza un paseo geométrico por algún parque; procura reconocer objetos geométricos en el llamado «mobiliario urbano» y en los jardines. Registra fotográficamente los objetos observados y el nombre geométrico más probable.

14. Se llama poliedro cóncavo a cualquier cuerpo geométrico que cumple todas las condiciones para ser poliedro, excepto la de ser convexo. En este caso, lo que hemos llamado «poliedro» se denomina «poliedro convexo». En los poliedros cóncavos somos capaces de encontrar una cara cuya prolongación atraviese el poliedro. En este caso, el objeto que se ve en la figura 11.13, a la izquierda, es un poliedro cóncavo. Cuando nos damos este permiso, podemos decir, por ejemplo, que 6 de los tetracubos mostrados en el ejercicio 11 son poliedros cóncavos; solamente el «I» y el «O» son convexos. Busca cuatro deltaedros cóncavos. Uno de ellos, está dibujado en la figura 11.13.

15. Encuentra poliedros (distintos del cubo) que compactan el espacio.

INVESTIGA Y REFLEXIONA

1. Un *objeto imposible* es un objeto que se puede dibujar en el plano pero no se puede construir. La figura siguiente muestra una tuerca imposible:



También se conocen *escenas imposibles,* es decir, configuraciones planas que no pueden realizarse en el espacio. Las películas incluyen muchos trucos ópticos. Posiblemente, la escena imposible más antigua conocida data de hace unos 1.000 años, y se muestra a continuación:

Esta *Adoración de los Reyes Magos* es del año 1025; incluye tres pilares en una configuración imposible, porque el pilar central debería estar delante de las figuras, pero en ese caso impediría su contemplación:

a) Busca tres objetos imposibles y explica en qué consiste su imposibilidad.
b) Busca tres escenas imposibles y explica en qué consiste su imposibilidad.

(Sugerencia: busca información sobre el pintor M. C. Escher.)

2. Tomando como ejemplo la tuerca imposible de la actividad anterior, dibuja su planta, su alzado y su perfil. Describe las dificultades que surgen.

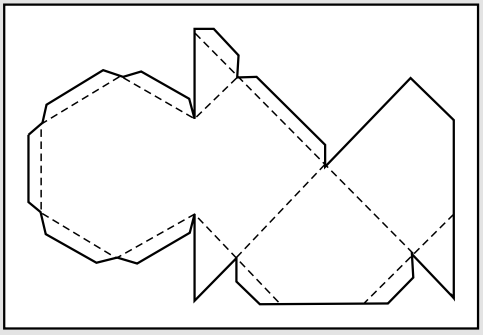
3. Para resolver este ejercicio se necesita una pelota de baloncesto y una cuerda. Se recomienda trabajarlo entre dos personas:

a) Anudar la cuerda siguiendo la línea del ecuador de la pelota. (El ecuador es un círculo máximo de la esfera, es decir, un círculo que pasa por dos puntos diametralmente opuestos de la esfera.) Guardar la cuerda, ya desanudada, para recordar aproximadamente la medida del ecuador.
b) Supongamos que ahora la cuerda rodea la pelota, paralelamente al ecuador, dejando 1 cm de distancia con respecto a dicho ecuador (o bien, con otras palabras, supongamos que tenemos otra pelota cuyo radio mide 1 cm más que el radio de la primera pelota y que queremos medir el

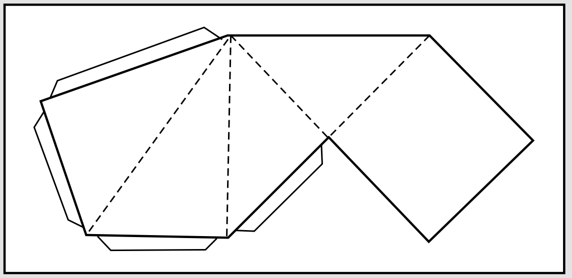
ecuador de esta nueva pelota). Razonadamente, estima cuánto ha aumentado la longitud de la cuerda.

4. Hemos visto que los cubos compactan el espacio y que seis pirámides regulares de base cuadrada iguales compactan un cubo. En este ejercicio estudiaremos diferentes maneras de construir un cubo con otros cuerpos:

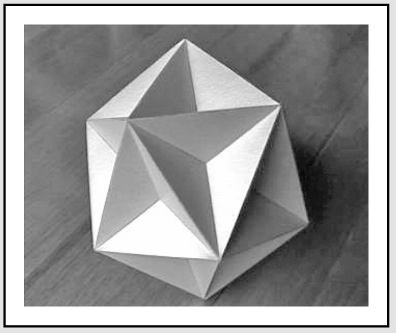
a) Fabrica dos poliedros idénticos a partir del desarrollo siguiente y compón con ellos un cubo. ¿Qué nombre puede darse a este poliedro? ¿En qué otra figura de este capítulo se ve este cuerpo en el espacio?:



b) Fabrica tres poliedros iguales a partir del desarrollo siguiente y compón con ellos un cubo. ¿Qué nombre cabe proponer para el objeto dado? Identifica alguna familia mencionada en este capítulo de la que forme parte o propón un nombre para esa nueva familia:



5. Los *poliedros estrellados* son poliedros cóncavos que tienen varios planos de simetría (deben ser más de dos). Todos son muy bellos. La figura siguiente muestra el *gran dodecaedro estrellado*:



Busca algunos poliedros estrellados. La construcción de un poliedro estrellado exige cartulina, pegamento, medios de dibujo y maña.

12 Movimientos geométricos en el plano

FRANCISCO RUIZ LÓPEZ
JUAN FRANCISCO RUIZ HIDALGO

La belleza tiene frontera común con la simetría.

H. WEYL

La simetría, más allá de ser un concepto matemático, es un lenguaje utilizado por plantas y animales como medio para comunicarse. Valiéndose de los códigos de la simetría, los seres vivos pueden enviar mensajes de atracción, mostrar que son genéticamente sanos o atraer insectos para la polinización de las flores. Los seres humanos tampoco son ajenos al uso de la simetría, ya que, como reflejo de su uso por la propia naturaleza, ésta se encuentra plagada de regularidades que se pueden entender y estudiar con las claves que la simetría proporciona. Asimismo, herramientas, objetos ornamentales, edificios y multitud de obras artísticas y artesanales están poblados de simetría en sus diferentes manifestaciones.

Aunque existen movimientos geométricos que no conservan las distancias, como las homotecias, semejanzas o las inversiones, en este capítulo se abordan las isometrías, o transformaciones que conservan las distancias, ya que constituyen un importante objeto de enseñanza en la escuela y ofrecen un enfoque dinámico para el aprendizaje de la geometría, proporcionando nuevos elementos de estudio de las figuras geométricas.

1. LAS ISOMETRÍAS EN EL CURRÍCULO ESCOLAR

El reconocimiento e identificación de formas es una de las aportaciones primordiales que la matemática ofrece con objeto de obtener modelos que representen situaciones concretas o encontrar regularidades que permitan mejorar el conocimiento del mundo que nos rodea. Es en la educación obligatoria, en particular en la Educación Primaria, donde se deben trabajar las capacidades y conocimientos necesarios que faciliten la comprensión del entorno habitual. Entre las competencias, no estrictamente matemáticas, que ayudan a entender y describir nuestro ambiente cotidiano se incluyen el conocimiento e interacción con el mundo físico, la competencia digital o la expresión cultural y artística. Además de las destrezas matemáticas de visualización, la mejora de las capacidades para realizar construcciones o la manipulación mental de figuras planas, que se han tratado en los capítulos anteriores, en la formación general también se debe incluir el reconocimiento de relaciones geométricas. ¿Qué regularidades se pueden encontrar en los objetos?, ¿cómo nos ayudan estas regularidades a comprender nuestro entorno?, ¿cómo tratan las matemáticas estas propiedades y relaciones entre figuras? Éstas son preguntas que se tratan de responder a lo largo del presente capítulo.

El trabajo en este tema y su desarrollo debe hacerse desde una perspectiva experimental, usando elementos lo más cercanos posible al escolar: espejos, juegos infantiles basados en construcciones, figuras de papel u obras de arte, son algunos ejemplos de objetos que forman parte del día a día de cualquier escolar. Estos objetos permiten crear una doble vertiente de aprendizaje: por un lado, el análisis de sus propiedades matemáticas mejorará el conocimiento de la realidad y acercará al escolar al mundo matemático de las isometrías; por otro lado, la adquisición de los conceptos y el desarrollo de las destrezas propias de este tema matemático debe generar en el alumnado la seguridad y los conocimientos suficientes para permitirle realizar un análisis de los objetos reales de forma cada vez más autónoma.

La importancia del tema, tanto para la formación intelectual general como para su uso en la vida habitual del escolar, justifica su inclusión en los programas para la formación de los futuros maestros, estudiantes del Grado en Magisterio de Educación Primaria. Estos profesores tienen que desarrollar, en un nivel idóneo, sus conocimientos de las destrezas necesarias para realizar todas las tareas que se exigen en la Educación Primaria, y también con el dominio apropiado para promover en los escolares de esos niveles la adquisición de las competencias mencionadas con anterioridad.

Es importante resaltar la utilidad del uso de programas de geometría dinámica para el desarrollo de este tema por su versatilidad frente a la rigidez de las construcciones con regla y compás.

ACTIVIDAD 1: Revisa la normativa curricular y selecciona aquellos contenidos referentes a regularidades y simetrías, clasificándolos según su ciclo educativo.

Figura 12.1.—Vasija sumeria.

2. ASPECTOS HISTÓRICOS

La palabra *simetría* ha estado ligada, por una parte, a las ideas de belleza, de armonía, de equilibrio y proporción; también refleja compensación y estabilidad entre las partes que integran un objeto. Para Vitruvio, *la simetría resulta de la proporción, y ésta es el carácter conmensurable de las varias partes constituyentes con el todo*. Debido a estas características (belleza, armonía, equilibrio y proporción) que atesoran las figuras simétricas, el ser humano las ha incluido a lo largo de su historia en muchas de las obras que ha realizado, especialmente en aquellas destinadas a su contemplación. Así la simetría ha estado presente en palacios, templos y objetos decorativos en general por medio de elementos tan conocidos como frisos, rosetones y mosaicos, así como otras figuras con simetría bilateral.

El arte sumerio ofrece numerosas muestras de simetría bilateral a través de ornamentaciones como la vasija de plata del rey Entemena (2400 a. C.), en la que se representa como figura principal un águila con cabeza de león, con las alas desplegadas y clavando cada una de las garras de manera simétrica sobre un ciervo (figura 12.1).

En el arte persa cabe destacar las esfinges de leones alados realizadas en ladrillo esmaltado, en el palacio de Darío, en Susa (siglo V a. C). A partir de aquí, la historia del arte está poblada de figuras con toda clase de simetrías. Destacan el Renacimiento y el fascinante dominio de la simetría del arte islámico.

A pesar de que la idea de simetría está tradicionalmente vinculada con la geometría, el concepto matemático que la caracteriza procede del álgebra, y más concretamente surge como consecuencia de indagar en métodos algebraicos para la resolución de ecuaciones. Por ello los orígenes de la simetría hay que buscarlos en la antigua Babilonia, hace más de 3.000 años.

Tenemos constancia, a través de las tablillas de escritura cuneiforme, de que los babilonios desarrollaron métodos para resolver ecuaciones cuadráticas, lo que hicieron muy probablemente a través de la geometría. También parece que utilizaron ciertas tablas numéricas para resolver algunos tipos de ecuaciones cúbicas.

Posteriormente, griegos, persas, árabes e italianos renacentistas se ocuparon del tema, y en torno al año 1800 Gauss demostró el teorema fundamental del álgebra, que en la actualidad se enuncia como sigue: «todo polinomio de grado *n* tiene *n* raíces reales o complejas».

Matemáticos como Vandermonde, Joseph-Louis Lagrange, Ruffini, Abel y Galois utilizaron el concepto de *simetría* en relación con las soluciones de ecuaciones mediante radicales, es decir, considerando las raíces de una ecuación y comprobando si las relaciones entre ellas se siguen cumpliendo al permutar dichas soluciones. De esta forma, elevando el nivel de abstracción, surge el potente concepto matemático de *grupo,* y con él un cálculo de simetrías y un nuevo lenguaje denominado *teoría de grupos*.

Finalmente, en el año 1980, diversos equipos de matemáticos concluyeron el ansiado *Atlas de la simetría,* o tabla que recoge los «ladrillos» a partir de los cuales se construyen todas las posibles simetrías.

3. USOS Y CONTEXTOS

Cada vez existe mayor interés en poner de manifiesto, mediante ejemplos adecuados, que a través de las matemáticas se entiende mejor el mundo, aunque a veces es difícil encontrar situaciones en la vida cotidiana que ilustren en el aula este objetivo básico de esta ciencia. En la enseñanza de las isometrías se pueden mostrar diversidad de situaciones cotidianas en las que la simetría desempeña un papel fundamental, tanto en el entorno natural como en el mundo que los seres humanos han construido.

La simetría está presente en la naturaleza de forma manifiesta y patente. Está asociada a conceptos tales como armonía, patrones reiterados, equilibrio, belleza y, más generalmente, a *regularidad*. No se trata sólo de una cuestión estética, sino que su función tiene que ver con el lenguaje y la supervivencia, pues la simetría constituye una forma de comunicar información sobre alimentos o sobre transmisión genética entre los animales y las plantas.

En efecto, basta con dar un paseo por el campo o por la ciudad para detectar regularidades de toda índole, y en especial de tipo geométrico. Encontramos simetrías en los reflejos de las quietas aguas de un lago, en el cuerpo de una mariposa, en las semillas de una manzana cortada por un plano adecuado, en la disposición de los pétalos de las flores, etc. Podemos encontrar simetrías en las celdillas hexagonales de los panales de miel, cuya construcción permite a las abejas minimizar el gasto de cera, almacenando la mayor cantidad posible de miel.

Los ojos de algunos insectos y crustáceos están compuestos de celdillas hexagonales sensoriales que son capaces de distinguir entre la presencia o falta de luz, así como de diferenciar colores (figura 12.2). La visión del ojo de la abeja es muy limitada, lo que le ha llevado a desarrollar una gran habilidad para detectar simetría, ya que ésta es la manera que tiene la flor de comunicar a la abeja que «aquí hay comida». Al mismo tiempo, la planta se vale de la simetría para garantizarse la polinización por medio de los insectos.

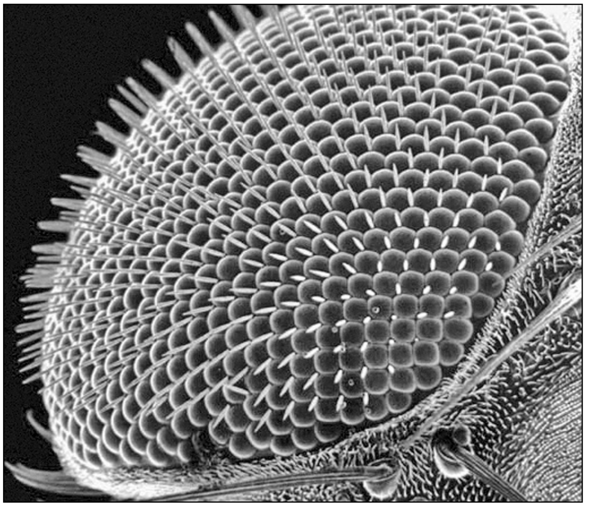


Figura 12.2.—Ojo de insecto.

Sólo las plantas y animales mejor adaptados poseen la energía suficiente como para invertir una parte de ella en producir formas bien equilibradas, es decir, simétricas. Las flores más simétricas tienen una mayor producción de néctar, y los animales están programados genéticamente para ser atraídos por aquellas plantas con una dosis mayor de simetría, que indica salud y buenos genes.

La simetría desempeña también un papel básico en la función motora de los animales, pues aquellos que poseen un número par de patas disponen de un mayor equilibrio, son los que más rápido se mueven y, por tanto, pueden conseguir comida más fácilmente o huir de sus depredadores de manera más eficaz. La selección natural favorece las formas simétricas en los seres vivos.

A nivel microscópico, podemos encontrar simetría en muchos virus, con formas icosaédricas, dodecaédricas o esféricas, utilizada precisamente como una poderosa arma para transmitir su carga genética. Cabe destacar la simetría de la estructura molecular del ADN.

La simetría se encuentra presente también en la materia inerte, como en las gotas de agua o en las pompas de jabón, que adoptan la forma esférica por ser ésta la que precisa menos energía. Las primeras clasificaciones de la simetría llegaron con el estudio de los cristales minerales. Para su clasificación, era necesario sistematizar las posibles combinaciones de elementos de simetría, que quedaron establecidas en 32 clases cristalinas en total. La cristalografía se vale del uso de rayos X para entender la disposición simétrica de los átomos en los cristales o para ver por qué la simetría de los copos de nieve es hexagonal.

El mundo técnico y artificial, producto de la actividad humana, tampoco es ajeno a la simetría. Basta observar el entorno urbano para encontrar toda clase de regularidades en edificios, obras de arte, señales de tráfico, e incluso en los logotipos comerciales y en los símbolos religiosos y sociales. Objetos recreativos, como el tobogán infantil o un tiovivo, evocan la traslación y la rotación, respectivamente. También encontramos regularidades geométricas en los juegos (parchís o ajedrez), la literatura (palíndromos), la música, etc. Encontramos simetría en una cuadrícula o en mosaicos y en las cenefas y adornos de palacios como la Alhambra, o en rosetones propios de una catedral gótica. Multitud de diseños y objetos artesanales de cualquier cultura (jarrones, alfombras, tatuajes, etc.) ofrecen la oportunidad de observar simetría en sus diversas manifestaciones.

4. QUÉ ES LA SIMETRÍA

Todos los ejemplos mencionados anteriormente son identificados como regularidades, vinculadas con armonía, equilibrio y belleza, características que hemos expresado por medio de la palabra *simetría*. Pero este término es genérico y se puede prestar a confusión. La idea común de simetría está muy vinculada a la simetría bilateral o axial como una propiedad característica de una figura. Para distinguir unas regularidades de otras podemos especificar el tipo de simetría que posee un objeto. Así, hablamos de *simetría bilateral* o *simetría axial* (respecto de un eje), o bien de *simetría rotacional, simetría central* o *simetría en deslizamiento*. Cuando existen patrones de repetición, como en los frisos o los mosaicos, aparece, además, otra isometría llamada *traslación*.

A pesar de que comúnmente se suele hablar de objetos simétricos como algo estático, la simetría tiene que ver con el movimiento, con lo que se puede hacer con un objeto o con los modos de transformarlo sin modificar sus dimensiones. Imaginemos un triángulo equilátero recortado en cartulina (figura 12.3). Si una persona cierra los ojos mientras otra le da la vuelta al triángulo a lo largo de una de sus alturas, por ejemplo, al abrir los ojos de nuevo la primera persona verá el triángulo como antes de ser transformado. Se dice que se ha sometido al triángulo a una simetría, que en este caso llamamos reflexión o simetría axial, y que el triángulo equilátero es simétrico respecto de su altura.

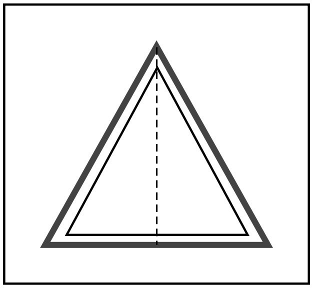


Figura 12.3.—Eje de simetría del triángulo equilátero.

Pero, además de la transformación anterior, el triángulo también puede ser rotado un ángulo de 120º alrededor de su centro, con el mismo resultado de permanecer idéntico. Decimos en este caso que el triángulo tiene simetría rotacional. Así pues, el triángulo equilátero posee tres ejes de simetría (las tres alturas) y tres rotaciones alrededor de su centro de 120º, 240º y 360º que lo transforman de manera simétrica. Estas seis transformaciones constituyen el grupo de simetría del triángulo equilátero.

ACTIVIDAD 1: Dibuja un rectángulo en una cartulina y recórtalo. Transfórmalo de manera que el rectángulo sea idéntico al de la posición inicial. ¿De cuántas formas puedes conseguirlo? ¿Qué transformaciones has efectuado? ¿Cuáles son los ejes de simetría y los ángulos de rotación de un rectángulo?

ACTIVIDAD 2: Dibuja un cuadrado y todos los ejes de simetría que tiene. Explica a continuación los giros del cuadrado que no lo modifican.

5. TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

El estudio de las simetrías en matemáticas se hace mediante la noción de transformación geométrica. Una transformación geométrica es una aplicación del plano en el plano, es decir, una aplicación que a cada punto del plano P le hace corresponder otro punto del plano P' y solo uno. Aquellas transformaciones que conservan las distancias se llaman isometrías.

Una isometría o movimiento rígido es una transformación de los puntos del plano que conserva las distancias, y, por tanto, los ángulos. Dicho de otra forma, si P' y Q' son los puntos transformados de P y Q, respectivamente, se cumple que $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$. Las isometrías también transforman puntos alineados en puntos alineados.

5.1. Traslación

La traslación es la transformación más simple. La translación de vector **v** se representa por T_v. Consiste en un movimiento de los puntos del plano en el que todos ellos se trasladan, es decir, se mueven en la misma dirección, la del vector, y a la misma distancia, el módulo del vector.

ACTIVIDAD 1: Describe un movimiento de traslación diferente para una situación familiar, escolar, deportiva o profesional. Caracteriza, en cada caso, la correspondiente traslación.

Dados un punto P y un vector **v,** se dice que P' es el punto trasladado de P mediante **v** si el segmento $\overline{PP'}$ determina un vector equivalente a **v,** es decir, tiene la misma dirección y sentido que **v** y la distancia $\overline{PP'}$ es el módulo del vector **v** (figura 12.4).

Una traslación queda determinada mediante su vector de traslación. Se suele expresar mediante $T_v(P) = P'$ que el punto P' es el trasladado de P mediante el vector v. Segmentos y rectas se transforman mediante la traslación en segmentos y rectas paralelos a los iniciales, como se ve en la figura donde $\overline{AB} \,//\, \overline{A'B'}$; $\overline{BC} \,//\, \overline{B'C'}$, etc.

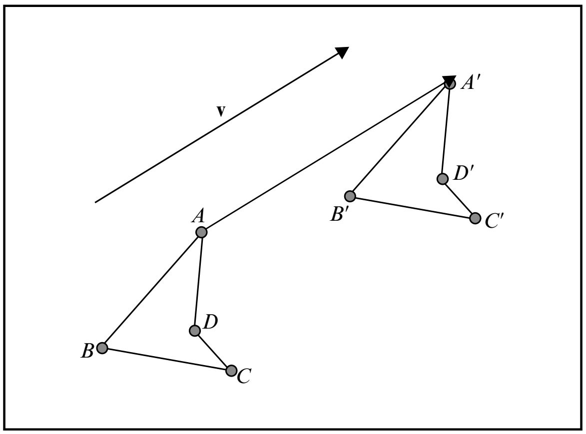


Figura 12.4.—Traslación según un vector **v**.

Un segmento $\overline{AB}$ y su segmento trasladado $\overline{A'B'}$ tienen la misma medida, por este motivo se dice que la traslación es una isometría, ya que conserva las distancias.

Una traslación queda determinada dando un vector. Los segmentos y rectas se transforman mediante la traslación en segmentos y rectas paralelos a los iniciales, como se ve en la figura 12.4, donde $\overline{AB} \,//\, \overline{A'B'}$; $\overline{BC} \,//\, \overline{B'C'}$, etc.

En una traslación, todos los puntos se mueven, no existen puntos dobles, es decir, puntos que se transformen en ellos mismos, pues todos los puntos se desplazan por igual en la misma dirección.

Si consideramos una recta que tenga la misma dirección que el vector **v,** sus puntos se trasladan en la misma recta; cada punto de la recta se transforma en otro punto de la misma recta. Estas rectas se llaman invariantes porque se transforman en sí mismas.

Si se fija un sentido en la notación de la figura inicial, este mismo sentido se respeta en la figura imagen o trasladada. En el caso del polígono de la figura 12.4 se ha elegido el sentido contrario al de las agujas del reloj. Si la figura inicial se nombra como $ABCD$, su imagen mediante la traslación respeta esta notación, y es nombrada por $A'B'C'D'$. Se dice entonces que:

> *La **traslación conserva la orientación.** Es una **isometría directa.***

5.2. Simetría axial

Una *simetría axial de eje la recta r* es una transformación, notada mediante S_r, de los puntos del plano donde cada punto P se transforma en otro punto P', de tal manera que la recta r es mediatriz del segmento $\overline{PP'}$. La expresión $S_r(P) = P'$ indica que el punto P' es el simétrico de P mediante la simetría axial de eje la recta r.

El punto P', simétrico de P respecto de r, también se llama *punto reflejado* de P respecto de la recta r.

Una simetría axial queda determinada por un eje de simetría, ya sea una recta r o un segmento. Todos los puntos de la recta r son puntos dobles, pues se transforman en ellos mismos:

> *El **eje de simetría** es una recta de puntos dobles, y es invariante mediante dicha simetría.*

Para construir la figura reflejada F' de otra figura F respecto de una recta r, se trazan los puntos reflejados de algunos puntos de la figura F uniendo posteriormente dichos puntos en el orden adecuado, es decir, si la figura inicial F es nombrada como $ABCDE$, se unen los puntos $A'B'C'D'E'$ de F' en ese orden (figura 12.5).

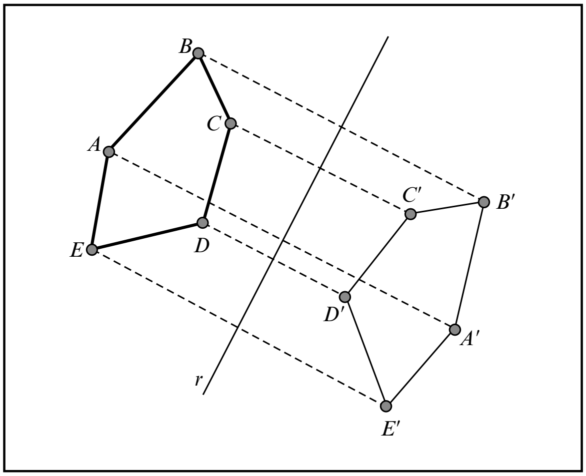


Figura 12.5.—Reflexión axial de una figura respecto de la recta r.

De aquí se desprende que *la reflexión es un movimiento inverso,* pues cambia la orientación de las figuras, ya que la figura inicial $ABCDE$ se ha nombrado siguiendo el sentido de las agujas del reloj, y en cambio al nombrar la figura imagen $A'B'C'D'E'$ queda determinado el sentido contrario.

Cuando una figura y su simétrica según un eje, coinciden globalmente, se dice que la figura es simétrica respecto de dicho eje. Éste es el caso, por ejemplo, de la letra A, que posee un eje de simetría vertical (figura 12.6).

ACTIVIDAD 2: Clasifica las letras de acuerdo con el número de ejes de simetría que tienen y dibújalos (figura 12.7).

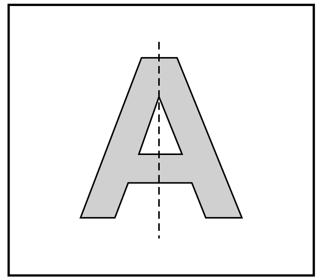


Figura 12.6.—Eje de simetría de la letra A.

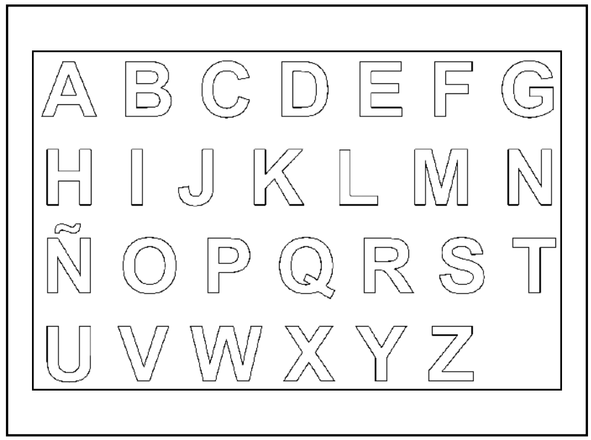


Figura 12.7.—Letras del abecedario.

5.3. Giro o rotación en el plano

Sea O un punto fijo del plano y $\alpha = MPN$ un ángulo orientado. Se llama giro $G(O, \alpha)$ de centro O y ángulo de giro α a la transformación del plano en la que un punto cualquiera P se transforma en otro punto P' de manera que la distancia de los puntos P y P' al punto O es la misma: $\overline{OP} = \overline{OP'}$ y, además, el ángulo formado por $POP' = \alpha$.

En este caso se dice que el punto P' es resultado de girar el punto P, alrededor del punto O un ángulo α, lo cual se expresa por: $G(O, \alpha)(P) = P'$.

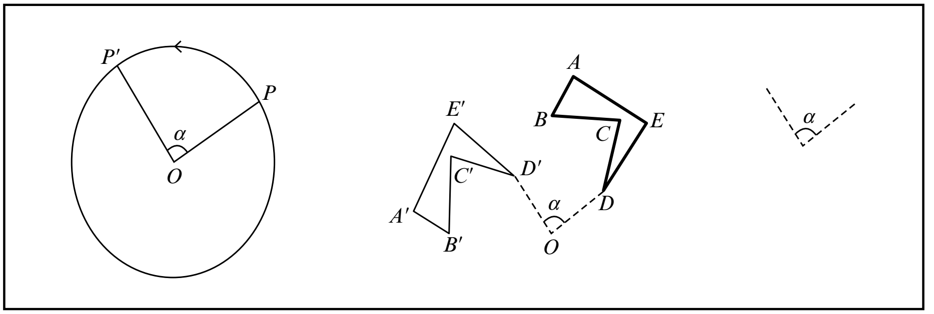


Figura 12.8.—Giro de un punto P y una figura con centro en O y ángulo de giro α.

Si se realiza el mismo giro para cada uno de los puntos de una figura cualquiera $ABCDE$, y se unen los correspondientes puntos transformados en el mismo orden que en la figura inicial, se obtiene la figura $A'B'C'D'E'$, que es la figura rotada de $ABCDE$ alrededor del punto O según el ángulo establecido α (figura 12.8).

Esta construcción respeta la orientación de la figura, pues la notación $ABCDE$ determina un sentido contrario a las agujas del reloj, y es ese mismo sentido el que determina la imagen $A'B'C'D'E'$. Por tanto:

*Un **giro** es una isometría directa.*

En una rotación existe un único punto doble, que es su centro de rotación O.

Al clasificar las letras de la figura 12.7 atendiendo a sus ejes de simetría, la letra N queda incluida en el grupo de aquellas letras que no poseen ningún eje de reflexión. No obstante, se detecta en esa letra algún tipo de regularidad. Si la giramos 180º en torno al punto medio del trazo central, la letra tiene el mismo aspecto inicial.

Si al girar una figura un determinado ángulo alrededor de un punto, la figura resultante permanece globalmente idéntica a la figura inicial, decimos que esa figura posee *simetría rotacional*.

5.4. Simetría central

La rotación de 180º alrededor de un punto O recibe el nombre especial de *simetría central* respecto de O. Para realizar una simetría central de un punto A basta unir dicho punto con el centro de simetría O, prolongando el segmento de manera que las distancias $\overline{AO}$ y $\overline{OA'}$ sean iguales (figura 12.9). Al tratarse de un giro, la simetría central es una *simetría directa*.

ACTIVIDAD 3: Analiza qué letras mayúsculas del abecedario poseen simetría central.

6. COMPOSICIÓN DE ISOMETRÍAS

A partir de una figura F se pueden aplicar dos o más transformaciones geométricas consecutivamente. Cuando a una figura F se le aplica una isometría, se obtiene su imagen F'. A continuación, es posible aplicar a F' otra isometría, obteniendo la imagen F'' de F'. Decimos que F'' resulta de aplicar a la figura F la composición de las dos isometrías anteriores. Consideramos algunos casos de interés.

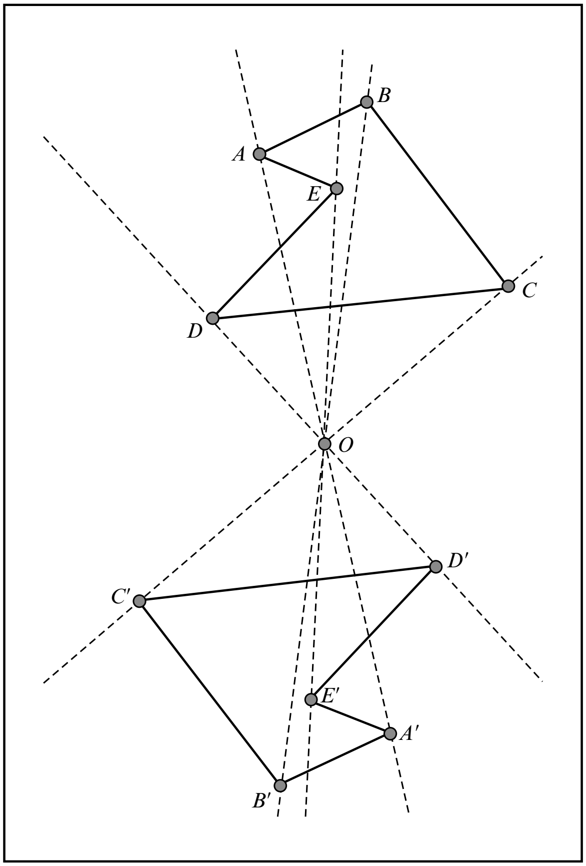


Figura 12.9

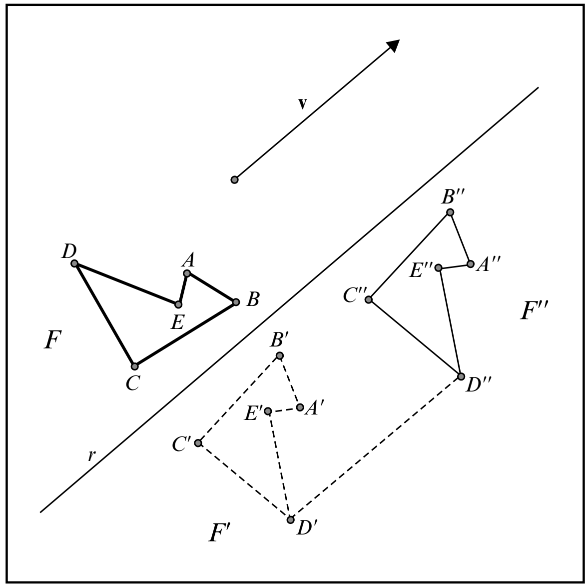


Figura 12.10.—Simetría en deslizamiento.

6.1. Simetría en deslizamiento

Sea una figura cualquiera *ABCDE,* un eje de simetría r y un vector **v** paralelo a r (figura 12.10). La figura simétrica de F respecto de r es la figura F': $S_r(F) = F'$. A su vez, podemos trasladar esta figura según el vector **v,** obteniendo la figura F'': $T_{\mathbf{v}}(F') = F''$. En este caso se dice que F'' es la figura deslizada de F respecto del eje r y el vector **v.** El deslizamiento es, por tanto, una *isometría inversa,* ya que se compone de una isometría directa, que es la traslación, y una inversa, como es la reflexión.

Un ejemplo de simetría en deslizamiento lo constituyen las huellas que dejan los pies de una persona al caminar en línea recta por la arena de la playa.

ACTIVIDAD 4: Describe una simetría en deslizamiento para una situación deportiva, artística o profesional. Caracteriza, en cada caso, el correspondiente eje de simetría y el vector de traslación.

6.2. Composición de dos reflexiones de ejes paralelos

Sean dos rectas paralelas r y r'. Consideramos las dos simetrías correspondientes a estas rectas, S_r y $S_{r'}$, y vamos a aplicar consecutivamente esas dos simetrías a una figura F.

La figura simétrica de F respecto de r es la figura F': $S_r(F) = F'$.

A su vez, podemos obtener la figura simétrica a ésta según la recta r', obteniendo la figura F'': $S_{r'}(F') = F''$ (figura 12.11).

Las figuras F y F' son reflejadas una de otra respecto de la recta r, y también lo son las figuras F' y F'' respecto de la recta r'.

¿Cómo se puede pasar directamente de F a F''? Vemos que ambas figuras están igualmente orientadas; se trata, por tanto, de un movimiento directo. La isometría buscada es una traslación de vector **v**, que lleva cada punto A sobre A''.

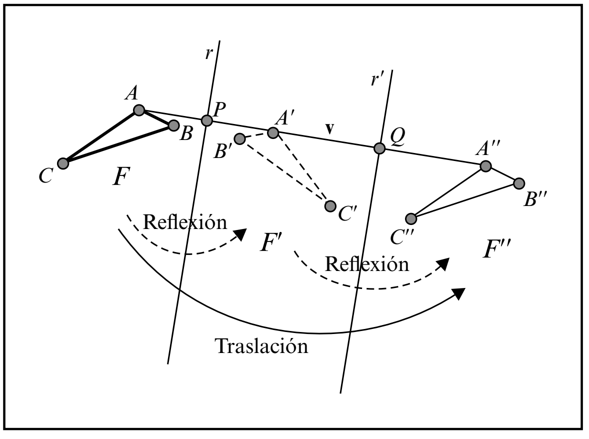


Figura 12.11.—La traslación como composición de dos reflexiones de ejes paralelos.

Este vector **v** debe ser perpendicular a los dos ejes de reflexión, por la forma en que se construye la simetría axial:

> *La composición de dos reflexiones de ejes paralelos equivale a una traslación, cuyo vector es perpendicular a los ejes de simetría y su módulo es el doble de la distancia que hay entre dichos ejes.*

ACTIVIDAD 5: Razona qué isometría es equivalente a la composición de tres reflexiones de ejes paralelos. Generaliza el resultado cuando se trata de *n* reflexiones de ejes paralelos.

ACTIVIDAD 6: Describe una situación en la que se produzca una composición de simetrías de ejes paralelos.

6.3. Composición de dos reflexiones de ejes que se cortan

Consideremos ahora dos ejes de simetría, r y r', que se cortan en un punto O, formando entre ellos un ángulo β. Sea F la figura inicial, situada en la parte derecha de la figura 12.12. Su imagen mediante la reflexión respecto de la recta r es F': $S_r(F) = F'$.

A esta figura F' le aplicamos a su vez una reflexión respecto de r', y se obtiene la figura F'': $S_{r'}(F') = F''$.

Se trata ahora de ver cuál es la isometría que transforma directamente F en F''.

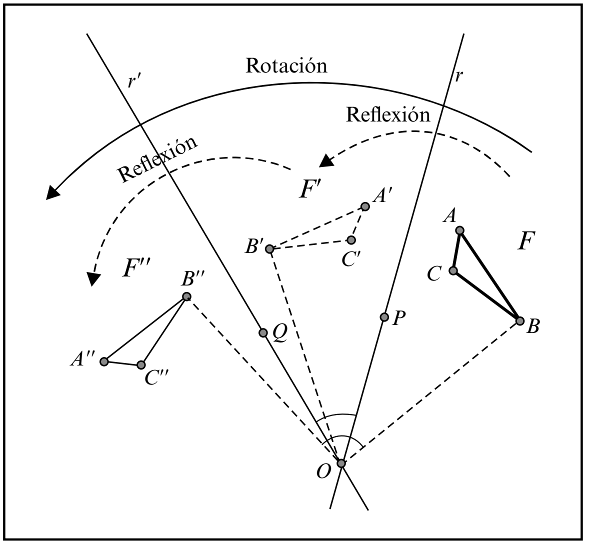


Figura 12.12.—La rotación como una composición de dos reflexiones de ejes que se cortan.

En este caso, F'' no es resultado de trasladar F, como antes, ya que no es posible desplazar

F sobre F'' siguiendo un vector de forma que ambas figuras coincidan. Para que F se transforme en F'' hay que girar la figura F alrededor del punto O un ángulo α:

> *La composición de dos reflexiones de ejes que se cortan equivale a una rotación, cuyo centro es el punto de corte de los ejes, y la amplitud del ángulo de giro es el doble de la del ángulo que forman dichos ejes.*

7. ROSETONES, FRISOS Y MOSAICOS

Los rosetones, frisos y mosaicos constituyen la principal manifestación de la simetría, tanto en la naturaleza, atendiendo al principio de economía de recursos, como en la obra humana, como reflejo de la observación activa por parte de los seres humanos de su entorno natural, así como de su sentido estético. Estos objetos pueden ser vistos como regularidades, en las que existe un patrón de repetición, pero también como el resultado de un proceso dinámico por medio de isometrías.

7.1. Rosetones

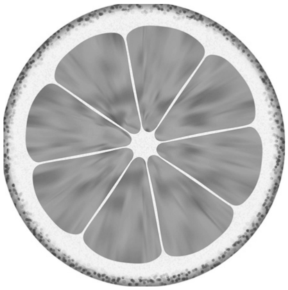
Si al girar una figura en torno a un punto O un determinado ángulo $\alpha = 360°/n$, dicha figura coincide globalmente n veces con la figura de partida en el transcurso de una vuelta completa, se dice que esa figura posee simetría rotacional de orden n. Nótese que toda figura plana tiene, al menos, simetría rotacional de orden 1. Se puede utilizar esta idea para generar figuras con simetría rotacional, llamados rosetones (figura 12.13), como los que ofrecen tanto la naturaleza como el arte. En la materia viva es frecuente encontrar simetría pentámera como en la estrella de mar, multitud de flores así como en la disposición de las semillas dentro de algunas frutas como la manzana. Las medusas presentan simetría derivada del cuadrado. La simetría en el mundo inanimado no suele estar asociada al pentágono, ya que los cristales solamente admiten simetrías rotacionales de orden 2, 3, 4 y 6. Un ejemplo típico de simetría hexagonal se presenta en los copos de nieve.

En el ámbito del arte o del diseño industrial destacan, entre otros, rosetones de iglesias, ornamentos de cerámica y logotipos de marcas comerciales (figura 12.14).

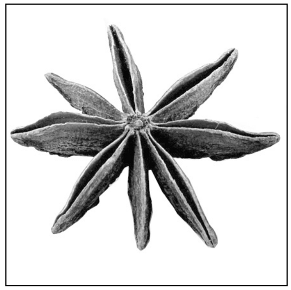
7.2. Frisos

Los frisos o cenefas son bandas ornamentales que se obtienen mediante la repetición de una figura base a lo largo de una franja rectangular. Teóricamente, esta banda está concebida con una longitud indefinida, aunque con una anchura determinada. La historia del arte está densamente poblada de estos frisos, destacando los de los palacios persas, como los famosos *arqueros reales de Darío,* los que pintaban los egipcios sobre paredes y muros (figura 12.15), los que se encuentran en los templos griegos, los frisos de cerámica o de yesería en mezquitas, madrassas y palacios árabes y, en resumen, variados ornamentos presentes en alfombras, tapices, balcones, escaleras, etc.

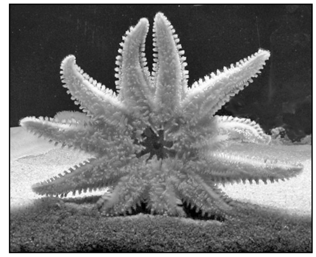
Un friso se genera a partir de una figura base, que ha podido ser previamente transformada mediante alguna isometría, y que es trasladada posteriormente según un vector determinado. Existen solamente siete formas de realizar frisos, dependiendo de las isometrías a que sometamos previamente a la figura inicial antes de aplicarle las sucesivas traslaciones. Por ejemplo, el más simple, llamado F1, sólo contiene traslaciones (figura 12.16).



Naranja

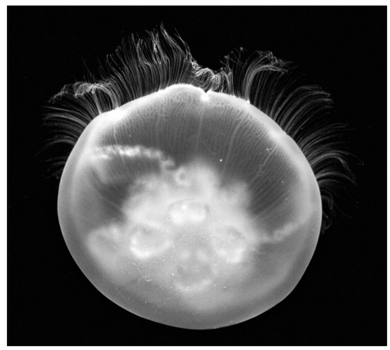


Anís estrellado



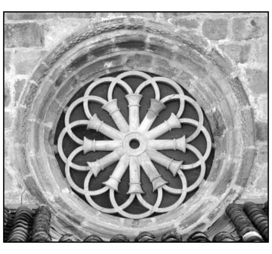
Estrella de mar

Lirio

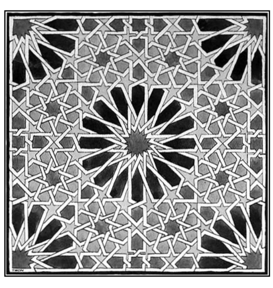


Medusas

Figura 12.13.—Simetría rotacional en la materia viva.

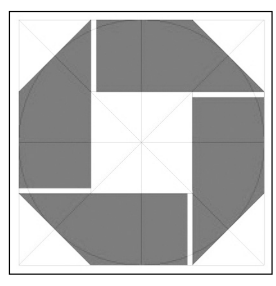


Rosetón en una iglesia



Detalle de mosaico
en La Alhambra

Logotipo de marca
de coche



Logotipo de entidad
bancaria

Figura 12.14

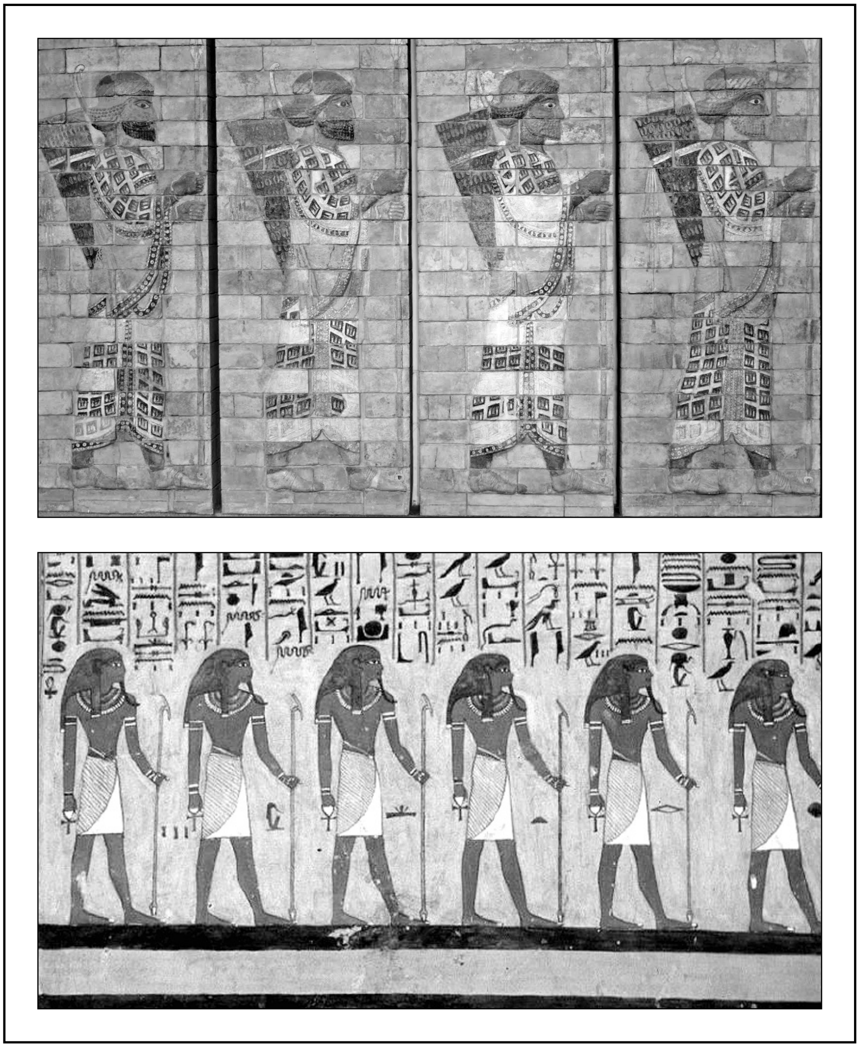


Figura 12.15.—*Arqueros reales de Darío* y friso en templo egipcio.

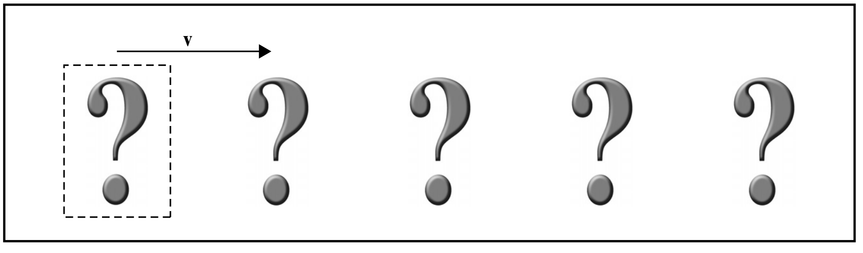


Figura 12.16.—Friso con sólo traslaciones.

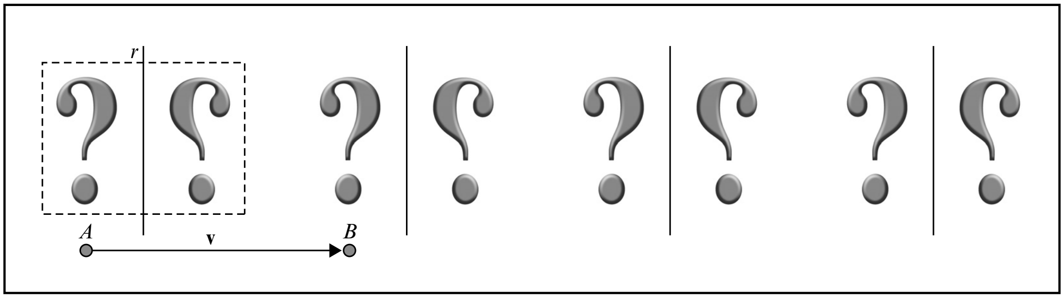


Figura 12.17.—Friso con reflexión vertical.

También cabe realizar el friso llamado F3, en el que aparece la reflexión de eje vertical (figura 12.17).

ACTIVIDAD 1: Utiliza una figura base, como la de la figura anterior (el signo de interrogación) y construye tres frisos distintos de los dos anteriores.

7.3. Mosaicos o teselados planos

Igual que ocurre con los frisos, la historia de la ornamentación está repleta de mosaicos o teselados planos realizados en suelos, techos, paredes, puertas y diversos objetos (figura 12.18). La palabra teselado proviene del latín *«tessella»* o pequeño guijarro de arcilla o cerámica utilizada en la composición de los antiguos mosaicos romanos:

> *Un* ***mosaico*** *o* ***teselado*** *plano es el cubrimiento de una superficie plana mediante repetición de algún motivo inicial en el que no existen huecos ni solapamientos.*

Los teselados se generan mediante la aplicación de isometrías planas sobre alguna figura base, extendiendo dicho proceso en dos direcciones, en lugar de una sola dirección como ocurre en los frisos.

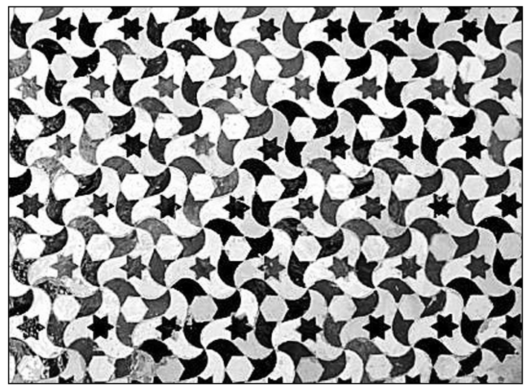


Figura 12.18.—Teselado en La Alhambra.

Cuando las piezas que conforman el teselado son polígonos, dicho cubrimiento se llama teselado poligonal. El requisito de que no haya huecos ni solapamientos en un mosaico lleva a la condición de que la suma de los ángulos que concurren en un vértice debe ser 360º exactamente.

Teselados poligonales regulares

Indagar sobre los teselados que se pueden realizar con polígonos es una cuestión de ángulos principalmente. Si queremos averiguar qué polígonos regulares por sí solos teselan el plano, debemos tener en cuenta el valor de los ángulos interiores de dichos polígonos, y ver con cuáles de ellos se suman 360º exactamente.

Los únicos polígonos regulares que cumplen esta condición son el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular, y generan los *teselados* o *mosaicos regulares.*

La notación es la que aparece en la figura 12.19, que identifica con un número el tipo de polígono (con 3, 4 o 6 lados) que lo forma, y ese número se escribe tantas veces como polígonos se juntan en un vértice.

Estos teselados se dice que son *uniformes* por tener todos los vértices iguales.

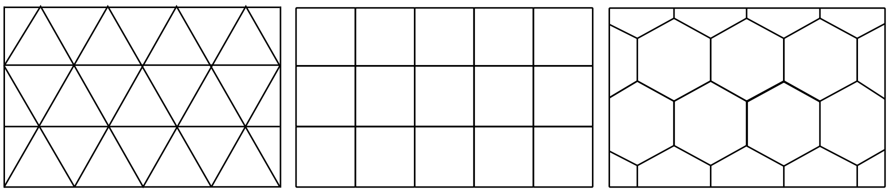


Figura 12.19.—Teselados regulares.

ACTIVIDAD 2: Comprueba que no es posible cubrir el plano sin dejar huecos y sin que se produzcan solapamientos con otros polígonos regulares, como, por ejemplo, de 5 y 8 lados.

Teselados poligonales semirregulares

Si en lugar de utilizar solamente un tipo de polígonos regulares se utilizan varios de ellos, se puede indagar sobre qué combinaciones de estos polígonos permiten obtener 360º en torno a un vértice. Por ejemplo, se pueden juntar tres triángulos equiláteros y dos cuadrados en torno a cada vértice del teselado, ya que la suma de sus ángulos es: $3 \times 60º + 2 \times 90º = 360º$. Siguiendo la notación anterior, este teselado lo notamos mediante {3,3,3,4,4}, por estar cada vértice rodeado de 3 triángulos equiláteros y 2 cuadrados (figura 12.20, primera fila de la segunda columna de la tabla).

Existen otras combinaciones de polígonos regulares que se pueden juntar de manera que la suma de los ángulos que concurren en un vértice sumen exactamente 360º.

La tabla de la figura 12.20 muestra las 21 combinaciones posibles de polígonos regulares, que pueden dan lugar a teselados regulares o semirregulares. No todos esos teselados son uniformes, en el sentido de que en cada vértice concurren el mismo número y tipo de polígonos en el mismo orden, es decir, no todos cumplen la condición de que todos los vértices sean iguales. Si seleccionamos los que sí cumplen esta condición, resultan ser solamente ocho y se llaman *teselados semirregulares uniformes* (figura 12.21).

ACTIVIDAD 3: Utiliza Geogebra para realizar tres de los teselados semirregulares uniformes de la figura 12.21.

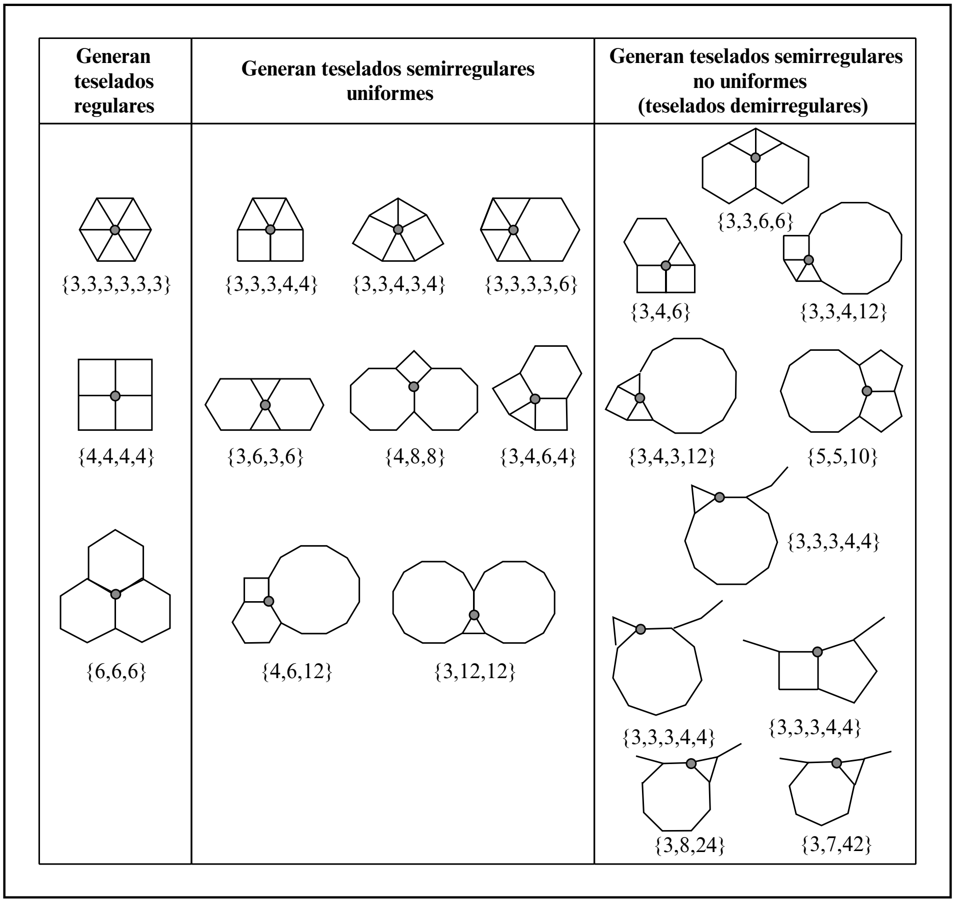


Figura 12.20.—Combinaciones de polígonos regulares que generan teselados regulares o semirregulares.

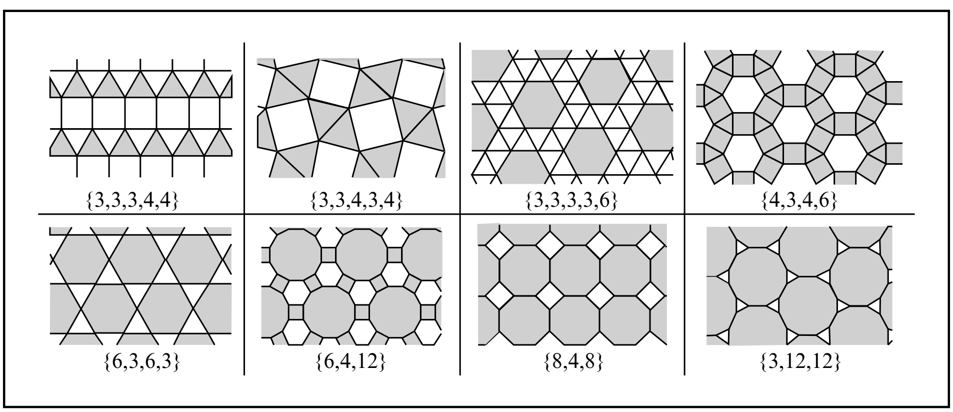


Figura 12.21.—Teselados semirregulares uniformes.

Teselados irregulares

Combinando adecuadamente polígonos regulares e irregulares se construyen teselados denominados irregulares. A veces, los huecos que dejan ciertos polígonos, constituyen nuevos polígonos que forman parte del teselado. La figura 12.22 muestra dos formas distintas de combinar pentágonos regulares para obtener mosaicos irregulares.

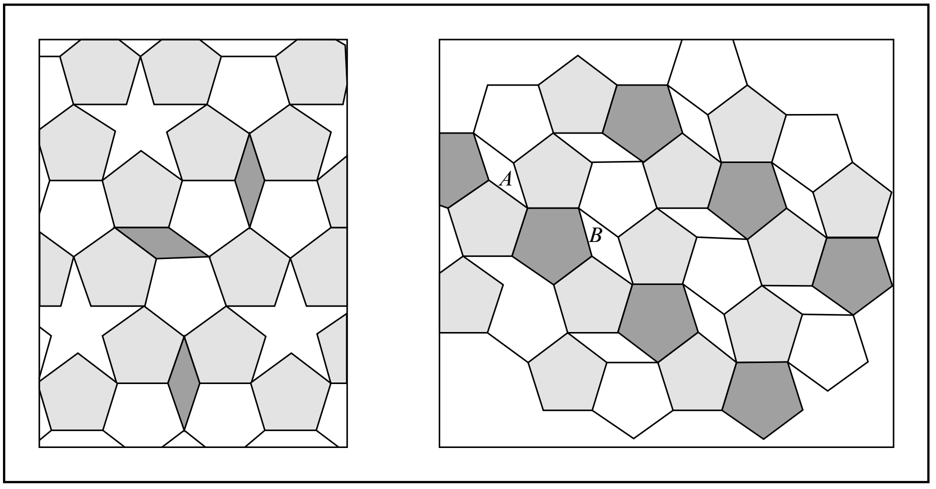


Figura 12.22.—Mosaicos irregulares utilizando pentágonos regulares.

Teselados generados por un solo tipo de polígono no regular

El uso exclusivo de un solo tipo de polígono regular conduce a la obtención de los tres mosaicos regulares vistos anteriormente. Pero se puede indagar sobre la posibilidad de teselar el plano con copias exactas de un determinado polígono no regular. ¿Con qué clase de polígonos es posible hacerlo?

Comencemos probando con ***triángulos.*** Consideremos el caso de un triángulo cualquiera, por ejemplo, escaleno.

ACTIVIDAD 4: Utiliza Geogebra para dibujar un triángulo cualquiera y realizar varias copias de él. Imprime la hoja y recorta dichos triángulos. Comprueba que puedes teselar el plano con ellos. Explica por qué ocurre así.

Consideremos ahora los ***cuadriláteros.*** Dibujemos un trapezoide, que es el más irregular de los que existen, realicemos copias de él y tratemos de juntarlos de modo que teselen el plano. Como la suma de los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero es 360º, si se disponen de tal modo que en torno a cada vértice se sitúe cada uno de los cuatro ángulos del cuadrilátero, se cumplirá la condición requerida para teselar, es decir, que los ángulos alrededor de cada vértice sumen 360º (compruébese en la figura 12.23). Por consiguiente, se puede concluir que, utilizando copias idénticas:

Todos los triángulos teselan el plano.

Todos los cuadriláteros teselan el plano.

ACTIVIDAD 5: Utiliza Geogebra para realizar el teselado de trapezoides de la figura 12.23. Partiendo del cuadrilátero *ABCD* de la parte superior, ¿qué isometrías has utilizado para generar todo el teselado? Modifica con el puntero el polígono de partida anterior arrastrando alguno de sus vértices, y observa cómo cambia el teselado.

ACTIVIDAD 6: Utiliza Geogebra para realizar un teselado con cada uno de los otros tipos de cuadriláteros que existen.

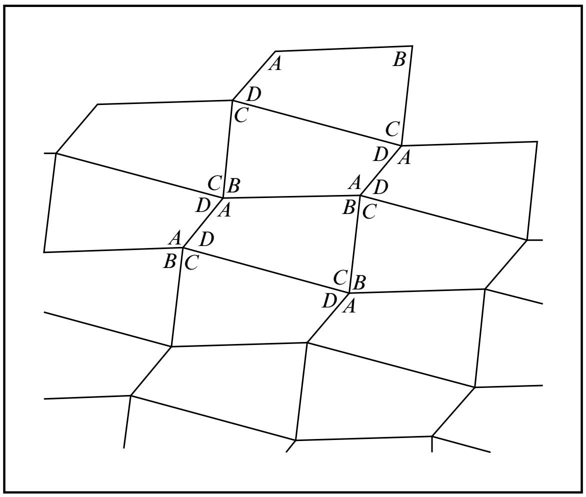


Figura 12.23.—Teselado con trapezoides iguales.

En cuanto a teselados ***pentagonales,*** *el pentágono regular no tesela el plano* por sí mismo, ya que su ángulo interior es de 108º, y ocurre que 360º no es un múltiplo suyo. Pero existen otros pentágonos no regulares con los que sí se pueden realizar mosaicos, como el llamado teselado de *El Cairo,* compuesto de pentágonos de lados iguales, pero de ángulos distintos. Su nombre se debe a que se utilizaron pentágonos de este tipo para embaldosar algunas de las calles de la ciudad que le da nombre (figura 12.24). Así pues, se puede establecer que:

Existen pentágonos no regulares que teselan el plano.

ACTIVIDAD 7: Utiliza Geogebra para dibujar un pentágono en forma de casita y comprueba que se puede teselar el plano con él.

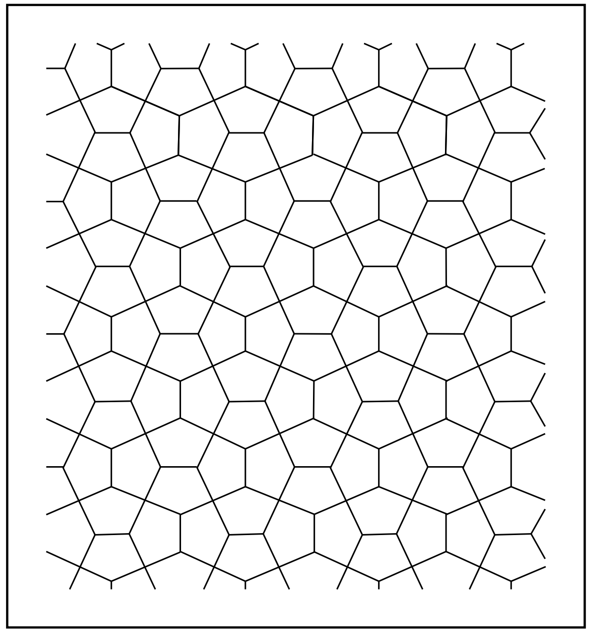


Figura 12.24.—Teselado pentagonal.

Sabemos que los ***hexágonos*** regulares generan uno de los tres mosaicos regulares del plano. Pero, ¿existen hexágonos no regulares que teselen el plano? En el teselado de *El Cairo* se puede observar cómo cada cuatro pentágonos forman un hexágono no regular.

Otra forma de conseguir hexágonos, a partir de polígonos que embaldosan el plano, es unir dos cuadriláteros por uno de sus lados y eliminar el lado común. La figura 12.25 muestra las cuatro maneras distintas de obtener estos hexágonos.

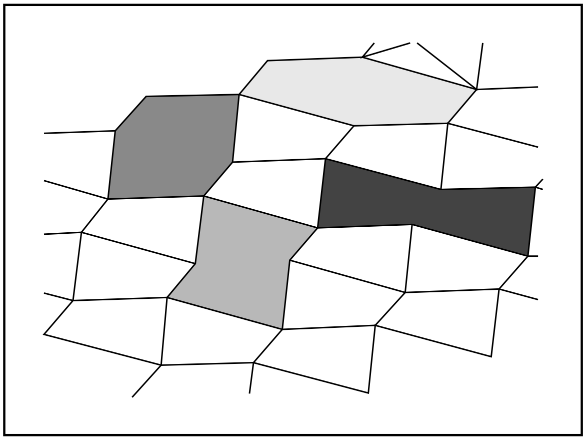


Figura 12.25.—Baldosas hexagonales a partir de cuadriláteros.

ACTIVIDAD 8: Utiliza Geogebra para realizar el teselado de trapezoides de la figura 12.23. Imprime cuatro copias y colorea cada una de ellas con un teselado generado por cada uno de los hexágonos obtenidos anteriormente. ¿Cómo son los lados de estos hexágonos?

En cuanto a teselados con hexágonos, se puede concluir que:

Además de los hexágonos regulares, existen otros hexágonos no regulares que también teselan el plano.

Existen otras figuras, ya sean cóncavas o convexas, con las que se pueden realizar teselados planos. Una manera de obtener estas figuras para que recubran el plano sin huecos ni solapamientos es partir de un polígono que tesele el plano, y modificar sus lados mediante el uso de isometrías de manera que la nueva figura conserve su superficie. Por ejemplo, la figura 12.26 muestra un conocido mosaico de La Alhambra. Partiendo del triángulo equilátero, se ha modificado cada uno de sus lados usando el compás, de manera que la figura resultante de lados curvos, llamada pajarita, tiene la misma superficie que el triángulo equilátero de partida y, por tanto, cubre también el plano sin huecos ni solapamientos.

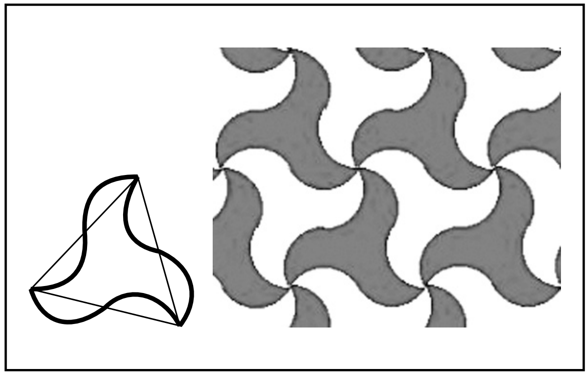


Figura 12.26.—Teselado de la pajarita, en La Alhambra.

La figura 12.27 muestra cómo se obtiene una tesela básica por traslación según los vectores **u** y **v** a partir del cuadrado. También se pueden obtener este tipo de «baldosas» utilizando giros, reflexiones y deslizamientos. La obra gráfica del grabador holandés M. C. Escher está repleta de estos teselados irregulares, y se les da el nombre de teselados tipo Escher.

El teselado de reptiles de la figura 12.28 se ha obtenido a partir de un hexágono regular, modificado mediante isometrías por medio de un programa de geometría dinámica.

ACTIVIDAD 9: Busca información en Internet sobre los teselados en la obra de M. C. Escher y construye uno de los mosaicos de este autor.

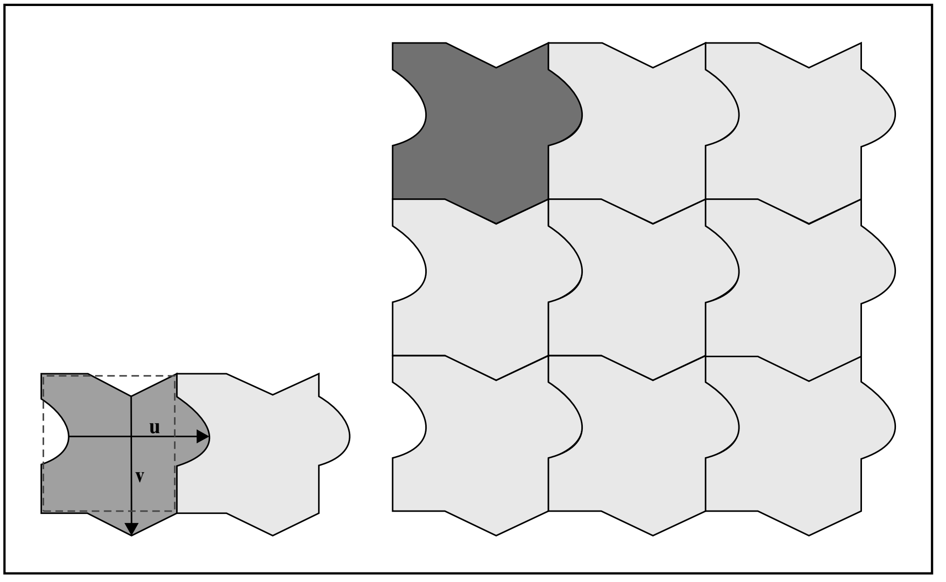


Figura 12.27.—Tesela básica y teselado tipo Escher a partir de un cuadrado.

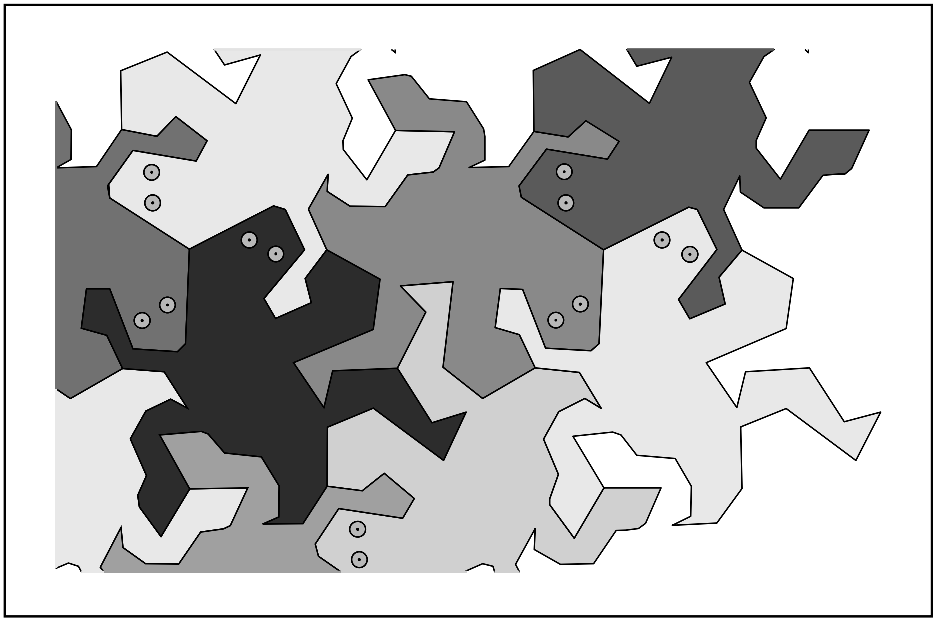


Figura 12.28.—Mosaico con reptiles tipo Escher.

Grupos cristalográficos planos

Del mismo modo que solamente existen siete tipos de frisos posibles a partir de una figura base, si se desea cubrir el plano utilizando isometrías partiendo de un motivo mínimo, sin huecos ni solapamientos, resulta que solamente es posible hacerlo de 17 formas distintas. A estas formas de teselar el plano se les llama grupos cristalográficos planos, o grupos de Fedorov, ya que su estudio surge en el seno de la cristalografía al tratar de averiguar las diferentes posibilidades que tienen los átomos y moléculas para disponerse en los cristales formando las redes cristalinas.

Estos grupos de isometrías del plano se encuentran decorando multitud de tejidos, papel pintado para decorar paredes, alfombras, etc. Merece ser destacado el hecho de que aunque el teorema que demuestra que solamente son posibles 17 grupos de simetría en el plano corresponde a finales del siglo XIX, en las paredes, suelos, techos, puertas, muros y fuentes de La Alhambra de Granada se encuentran ejemplos de cada uno de estos grupos cristalográficos, mostrando que los nazaríes conocían todas las posibilidades de construir teselados mediante la repetición de patrones geométricos.

7.4. Materiales para la enseñanza y aprendizaje de las isometrías planas

Además de los útiles habituales de dibujo, como la regla, el compás, la escuadra y el transportador de ángulos, se puede utilizar otros materiales para asimilar los conceptos y propiedades de las isometrías, especialmente de las reflexiones:

Plegado de papel y tijeras. Se utilizan para realizar frisos, rosetones, mosaicos y figuras con simetría bilateral.

Un rectángulo hecho de metacrilato semitransparente, denominado *Mira,* permite al mismo tiempo reflejar la imagen y ver a través de él, lo que facilita el dibujo de la figura reflejada de otra (figura 12.29).

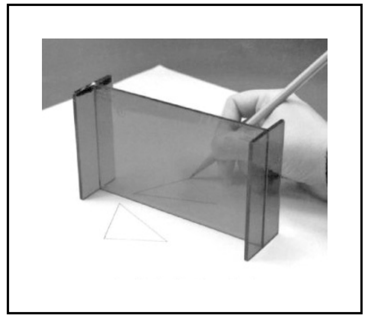


Figura 12.29.—Mira.

Libro de espejos (figura 12.30). Constituido por dos espejos rectangulares iguales unidos por un lado con cinta adhesiva, de manera que se

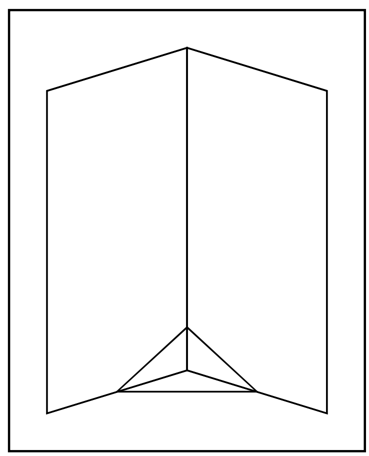


Figura 12.30.—Libro de espejos.

pueda abrir o cerrar un ángulo determinado. Al dibujar un segmento sobre el papel y colocar el libro sobre él, se puede obtener por reflexión los polígonos regulares dependiendo del ángulo diedro del libro.

ACTIVIDAD 10: Realiza la experiencia anterior y ayúdate de un semicírculo graduado para medir el ángulo diedro que tiene el espejo en cada caso para el triángulo equilátero, el cuadrado, y el pentágono, hexágono y heptágono regulares.

ACTIVIDADES PARA PRACTICAR

1. Dibuja los ejes de simetría que tienen los distintos tipos de triángulos y cuadriláteros. Indica el orden de los centros de rotación en los polígonos anteriores que posean simetría rotacional.

2. Dibuja en papel cuadriculado el cuadrado de vértices $A(1,1)$; $B(3,1)$; $C(3,3)$ y $D(1,3)$. Supongamos que se traslada dicho cuadrado de manera que el vértice C quede en el origen. ¿Cuáles son las coordenadas de los demás vértices?

3. Dibuja en papel cuadriculado el triángulo de vértices $A(-1,5)$, $B(2,0)$ y $C(3,1)$. Si se somete a este triángulo a una traslación según el vector (4,1), ¿cuáles son las coordenadas del vértice correspondiente B' trasladado de B?

4. Dibuja un triángulo rectángulo isósceles y realiza con él una reflexión cuyo eje sea la recta que contiene a la hipotenusa. De igual forma, realiza un giro cuyo centro sea un vértice y con un ángulo de giro de + 45º. Repite el giro, pero con centro en el punto medio de la hipotenusa y ángulo + 90º.

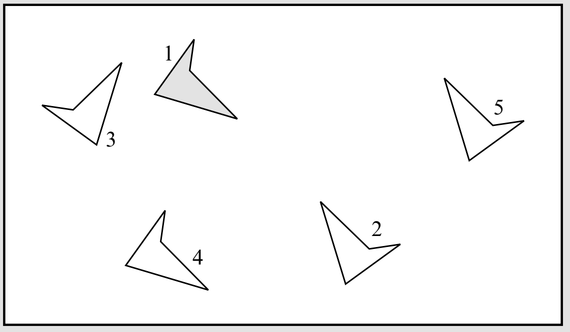
5. Dibuja un trapecio isósceles formado por tres triángulos equiláteros unidos cada dos de ellos por un lado. Somete a ese trapecio a las siguientes transformaciones y dibuja lo que resulta en cada caso:

a) Una reflexión cuyo eje sea la base mayor del trapecio.

b) Un giro con centro en un vértice del trapecio y ángulo de giro + 60º.

c) Una traslación cuyo vector sea una diagonal del trapecio (elige el sentido que desees).

6. Al polígono 1 se le ha sometido a una traslación, un giro, una reflexión y un deslizamiento. Ayúdate de regla y compás para averiguar qué figura corresponde a cada imagen. Dibuja el eje de reflexión, vector de traslación, centro y ángulo de rotación y eje y vector de deslizamiento:

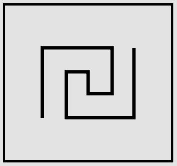


7. Dibuja una figura sencilla no simétrica. Realiza las isometrías adecuadas que pongan de manifiesto que:

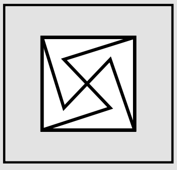
a) Dos reflexiones consecutivas de ejes que se cortan equivalen a una rotación. Determina su centro de rotación y su ángulo.

b) La composición de dos simetrías consecutivas de ejes paralelos equivale a una traslación. Determina el vector de traslación.

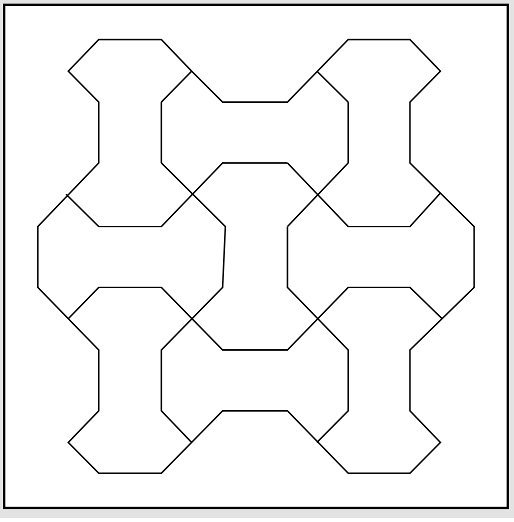
8. Construye un friso con la pieza siguiente. Explica las isometrías que has utilizado:



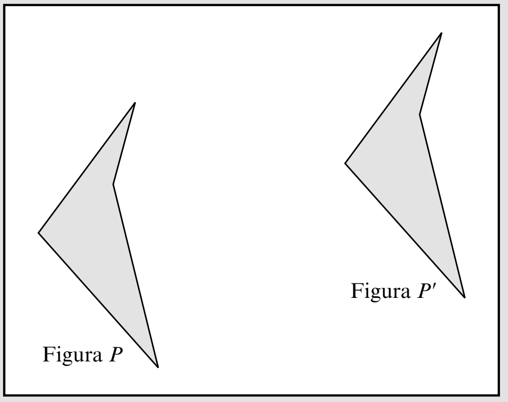
9. Construye un mosaico con la pieza siguiente. Explica las isometrías que has utilizado:



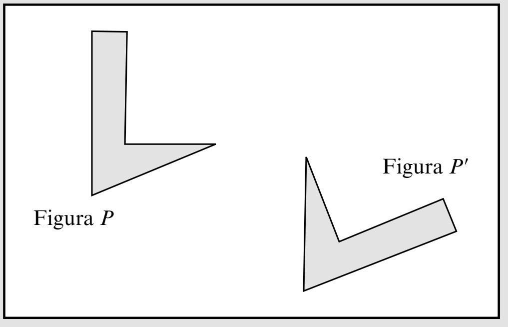
10. Analiza la figura base del siguiente mosaico y explica las isometrías que se deben utilizar para obtenerla del cuadrado:



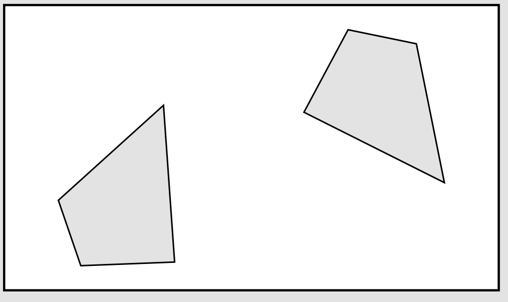
11. La figura P' es la trasladada de la figura P mediante un vector de traslación. Determina dicho vector:



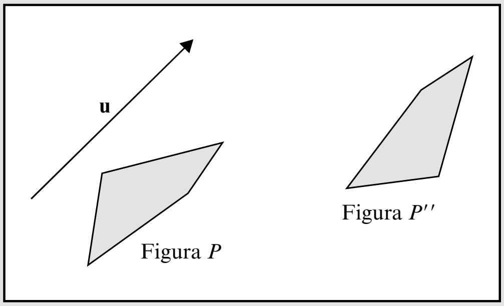
12. La figura P' es reflejada de la figura P según un eje de reflexión. Determina este eje:



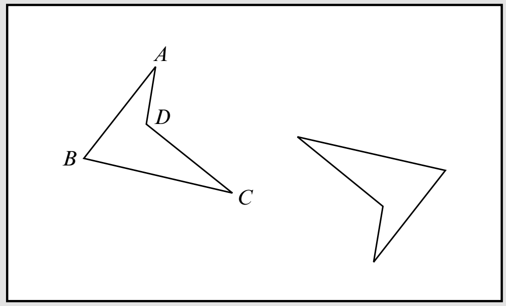
13. Las figuras siguientes están giradas una de otra. Encuentra el centro y ángulo de giro:



14. La figura P' se obtiene de la figura P mediante un deslizamiento cuyo vector es **u.** Encuentra el eje de simetría de dicho deslizamiento:



15. Etiqueta los vértices de la figura transformada de $ABCD$ mediante una simetría central y encuentra el centro de dicha simetría:



INVESTIGA Y REFLEXIONA

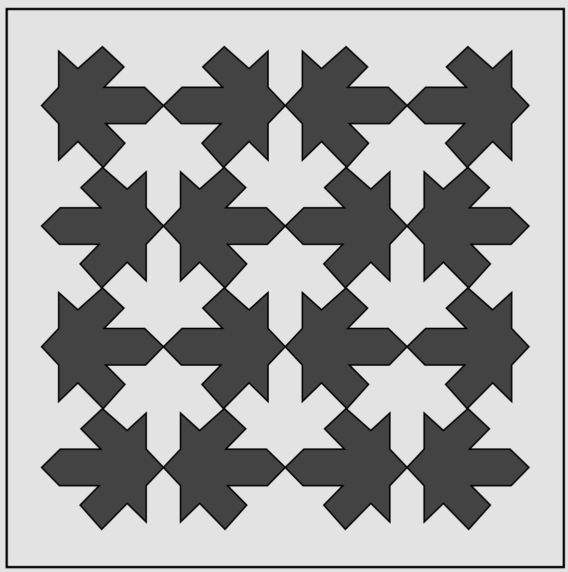
1. Indica objetos y situaciones de la vida cotidiana que tengan relación con los distintos tipos de isometrías.

2. Indica qué isometrías pueden utilizarse para describir cada una de las siguientes situaciones:

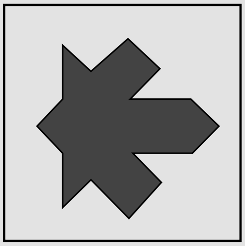
a) Huellas de los pies en la arena.
b) La mano derecha de una persona apoyada en el pasamanos al subir una escalera vertical.
c) Las dos manos de una persona apoyada en el pasamanos al subir una escalera vertical.
d) Bajar el volumen en una radio.

3. Analiza la composición del mosaico de la columna siguiente:

a) Indica qué regularidades percibes.



b) Escribe la secuencia de instrucciones a seguir para poder construirlo a partir de la pieza siguiente:



4. Mediante doblado de papel y recorte con tijeras, construye:

a) Un rosetón con simetría rotacional de orden 8.
b) Un friso.
c) Un mosaico.

5. Busca en Internet páginas en las que se realicen análisis de obras de arte mediante la utilización de programas de geometría dinámica.

BIBLIOGRAFÍA

Alsina, C., Pérez, R. y Ruiz, C. (1989). *Simetría dinámica*. Madrid: Síntesis.

Castro, E. (Ed.) (2001). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria.* Madrid: Síntesis.

Du Sautoy, M. (2009). *Simetría. Un viaje por los patrones de la naturaleza*. Barcelona: Acantilado.

Gardner, M. (1985). *Izquierda y derecha en el cosmos*. Barcelona: Salvat.

Godino, J. D. y Ruiz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1996). *El grupo de isometrías del plano*. Madrid: Síntesis.

Stewart, I. (2008) *Belleza y verdad. Una historia de la simetría*. Barcelona: Crítica.

Weyl, H. (1991). Simetría. Madrid: McGraw-Hill.

13 Sentido espacial

JOSÉ LUIS LUPIÁÑEZ GÓMEZ
PABLO FLORES MARTÍNEZ

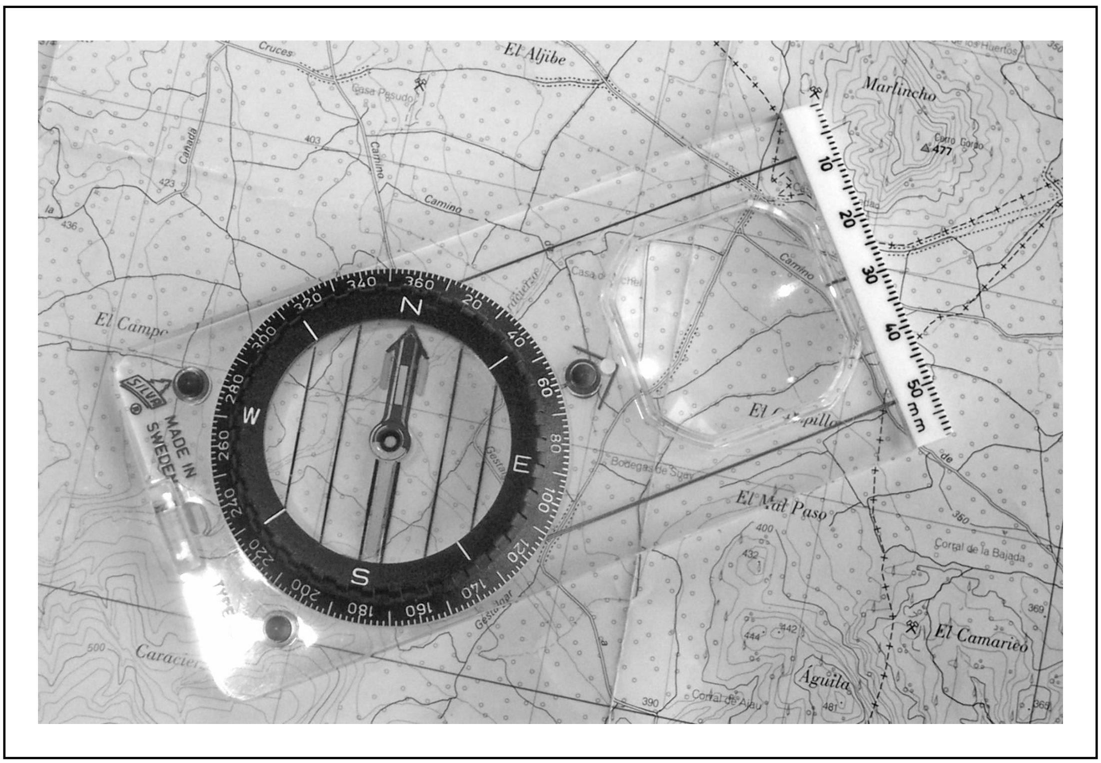


Figura 13.1.—¿Dónde estoy?

Leer e interpretar mapas, localizar dónde hemos aparcado el coche, saber en qué punto del camino estamos, imaginar cómo quedará la distribución de una habitación al verla en un plano o hacer un dibujo de una figura o de una construcción de nuestro entorno, son actividades que solemos realizar con asiduidad. ¿Qué papel tienen las matemáticas en esas acciones? ¿Es posible desarrollar y mejorar nuestra capacidad para llevarlas a cabo?

En los temas anteriores has explorado formas geométricas y estudiado varias de sus propiedades y relaciones, tanto en el plano como en el espacio. También has visto cómo pueden transformarse mediante determinados movimientos. Pero el aprendizaje de la geometría incluye otros aspectos, como los ejemplificados antes, que deben incorporarse a las matemáticas escolares. Por tanto, las expectativas de aprendizaje sobre la geometría deben contemplar dos facetas distintas y complementarias: los *contenidos geométrico*s (temas anteriores) y el *sentido espacial*.

El sentido espacial tiene que ver con la percepción del modo en el que las formas geométricas y sus relaciones se presentan en nuestro entorno y con el papel que asumen en él. El sentido espacial incluye la habilidad para imaginar y visualizar mentalmente objetos y relaciones espaciales y para describir geométricamente posiciones y localizaciones. Las personas con sentido espacial aprecian y comprenden la presencia de nociones geométricas en distintas manifestaciones artísticas y en la naturaleza, y son capaces de usar sus conocimientos geométricos para situarse y para describir y analizar el mundo. Como vemos en este tema, es fundamental vivir experiencias geométricas para desarrollar el sentido espacial.

1. SENTIDO ESPACIAL EN EL CURRÍCULO ESCOLAR

La competencia matemática básica que deben desarrollar los escolares de Educación Primaria tiene que ver con representar e interpretar la realidad y el entorno, para lo cual es fundamental que el futuro docente desarrolle conocimientos y destrezas para promover ese aprendizaje.

En Educación Primaria, los escolares deben ser capaces de describir posiciones y movimientos empleando distintos referentes, incluyendo la utilización de sistemas de coordenadas. También deben desarrollar habilidades para interpretar y describir verbalmente y por escrito croquis de itinerarios, mapas y planos, así como elaborar los suyos propios.

Las capacidades de orientación y representación espacial son también objeto de aprendizaje y, por esta razón, los futuros docentes han de desarrollar un lenguaje que les permita describir formas y figuras espaciales y aproximar su representación en el plano usando diversas estrategias y técnicas. También han de usar nociones básicas de movimientos geométricos y sus propiedades para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana y para valorar expresiones artísticas.

Finalmente, el manejo de puntos de referencia y de técnicas de localización para desenvolverse en el medio que nos rodea forma parte de las necesidades formativas de los escolares de Educación Primaria. Además, el desarrollo del sentido espacial permite avanzar y profundizar en el conocimiento de otros contenidos, como la medida, el razonamiento proporcional, el álgebra o los números enteros.

ACTIVIDAD 1: Localiza en el currículo de Educación Primaria los contenidos relacionados con el sentido espacial en cada uno de los tres ciclos educativos.

En el currículo de Educación Primaria, este tipo de contenidos hace necesario que el profesorado de este nivel domine y profundice en dos componentes centrales del sentido espacial: la orientación y la visualización.

Estas dos componentes facilitan la ubicación en el espacio. Se manifiestan cuando la información visual se transforma en imágenes mentales, empleando representaciones gráficas o de otro tipo. Por tanto, los elementos que vamos a trabajar en este tema se presentan en forma de información geométrica (como ubicación, figuras geométricas del entorno físico o matemático o posición relativa de estas figuras), representaciones de esta información en forma gráfica (como representación de puntos, de polígonos, de ejes coordenados, de formas espaciales en perspectiva o en desarrollo plano), representaciones mentales de las formas (imágenes mentales de los elementos geométricos y sus representaciones) y expresiones verbales que actúan como descripciones. La orientación y la visualización tienen sentido cuando ayudan a resolver problemas por medio del empleo adecuado de los elementos geométricos en cualquiera de estas formas de representación.

> ***Orientación:*** *se refiere al uso de la geometría de coordenadas y a otras formas de especificar el lugar que ocupan los objetos en el plano y en el espacio, incluyendo los sistemas de localización en la esfera terrestre y el manejo e interpretación de mapas y de planos.*
>
> ***Visualización (geométrica):*** *incluye el reconocimiento de formas en el entorno, el desarrollo de relaciones entre objetos en dos y tres dimensiones y la habilidad para representar y reconocer objetos desde diferentes perspectivas.*

Puedes ampliar información sobre orientación y visualización en: NCTM (2003).

2. ORIENTACIÓN

La orientación tiene que ver con la capacidad del ser humano para ubicarse en el espacio que le rodea, así como para identificar y describir localizaciones y posiciones de objetos. Las matemáticas emplean para ello diferentes tipos de referencia, destacando entre ellos los sistemas de coordenadas, que, a su vez, desempeñan un importante papel en otros campos de las matemáticas, como el álgebra.

Para orientarse hay que relacionar la posición y los itinerarios con representaciones de la realidad (mapas, planos y sistemas de coordenadas), interpretando adecuadamente los símbolos que se emplean en estos sistemas. Por tanto, exige relacionar la posición real con representaciones gráficas, simbólicas y verbales.

En un primer nivel, los niños comienzan por emplear palabras y expresiones que permiten describir su posición o la de algunos objetos: detrás, delante, arriba, abajo, dentro, fuera... Estos términos se usan a diario en actividades cotidianas.

Actividades geométricas o de medida pueden apoyarse en el uso de una cuadrícula que parcela y organiza el plano, lo cual trae consigo el uso de un sistema de referencia estructurado. El empleo de un sistema de coordenadas implica un uso más analítico de las matemáticas, ya que el sistema de coordenadas, entre otras características, permite ubicar en el plano números negativos. Estas coordenadas se pueden emplear, por ejemplo, para estudiar y llevar a cabo transformaciones de figuras como las presentadas en el tema anterior o para estudiar determinadas propiedades de elementos geométricos, como la pendiente de las rectas.

La orientación también implica la interpretación y la elaboración de mapas y planos, ya que se emplean con asiduidad en los viajes para usar algún medio de transporte urbano o para indicarle a otra persona cómo llegar a un lugar determinado.

2.1. Determinación y descripción de posiciones

El primer recurso del que disponemos para describir el lugar que algo o alguien ocupa es el propio lenguaje, ya que existe una notable cantidad de palabras que refieren posiciones y situaciones.

ACTIVIDAD 1: Elabora una la lista de términos que puedan emplearse para describir el lugar que ocupa un objeto. Trata de clasificarlos de acuerdo con algún criterio, como, por ejemplo, distinguir los que se refieren a la posición de los que expresan distancia.

Estos términos se usan también para describir trayectorias, que es lo que se hace para indicar una dirección. En la figura 13.2 aparece una trama cuadrada en la que se han marcado dos puntos, *A* y *B*. Si únicamente se puede avanzar a través de la trama punteada, es posible describir con precisión el camino que un móvil puede seguir para ir desde *A* hasta *B: avanza cinco casillas hacia arriba, gira a la derecha y avanza otras seis casillas*.

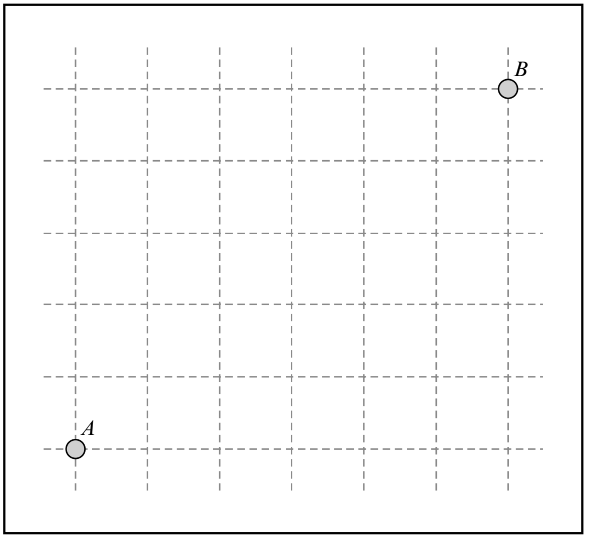
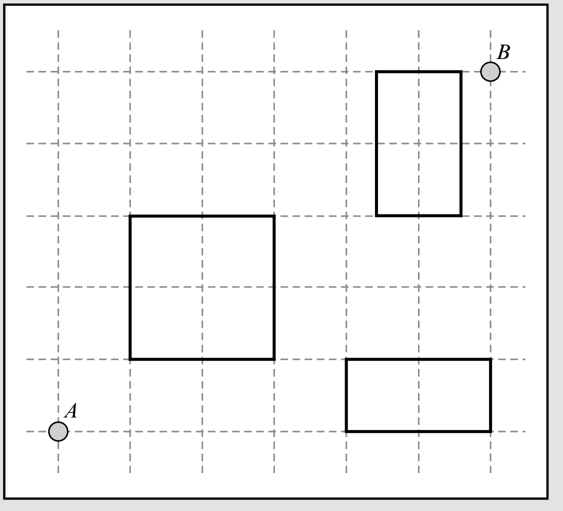


Figura 13.2.—Diferentes caminos para ir de *A* hasta *B*.

ACTIVIDAD 2: ¿Cuántos caminos diferentes se pueden usar para ir desde *A* hasta *B*? ¿Cuál de ellos es el más corto?

ACTIVIDAD 3: La siguiente trama representa el plano de una ciudad en la que existen los edificios que se muestran. Describe con precisión el camino más corto para ir desde *A* hasta *B*. Oculta la trama y, fijándote únicamente en la descripción del recorrido que acabas de hacer, describe el recorrido inverso para ir desde *B* hasta *A*. Después de hacerlo, comprueba si has cumplido tu objetivo:



Desde la Edad Media, los núcleos urbanos comenzaron a organizar sus calles y vías con un trazado de forma cuadriculada, por las evidentes ventajas que esto supone para desplazamientos y para orientarse. En el siguiente grabado, de 1752, puedes ver cómo ya aparecen calles rectas que contrastan con otras más intrincadas en una misma población (véase figura 13.3).

Algunas ciudades más modernas, han puesto en práctica esta organización urbana de una manera muy operativa, como es el caso de Manhattan (uno de los distritos de Nueva York). En la figura 13.4 puedes ver parte de un plano de la ciudad, en el que se observa la relación de perpendicularidad de las calles entre

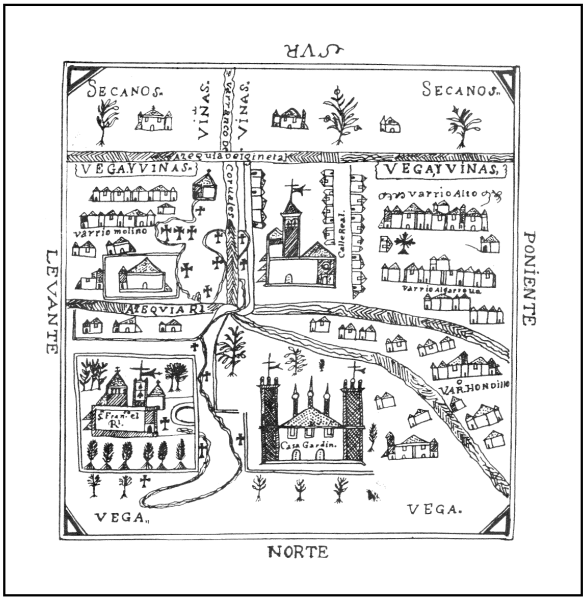


Figura 13.3.—Plano de la localidad de La Zubia (Granada) en 1752.

sí. Para facilitar aún más la descripción de lugares, las calles (en la imagen, verticales) se denominan usando la lectura cardinal de los números naturales, creciendo desde el sur hacia el norte y distinguiendo si están al este (E) o al oeste de la ciudad (W), mientras que las calles horizontales se denominan avenidas y se numeran con la lectura ordinal de los naturales. De esta manera, para indicar dónde se encuentra la Ópera de Nueva York, diremos que está en la esquina de la Calle 62 (oeste) con la Novena Avenida.

ACTIVIDAD 4: Usando algún callejero, investiga si en la ciudad en la que vives existen algunas calles o avenidas que sigan una estructura de organización similar a los ejemplos que hemos visto.

Este método para organizar las calles introduce un sistema de coordenadas, ya que, mediante dos datos, es posible localizar lugares concretos. A continuación profundizamos en los sistemas de coordenadas como método de localización.

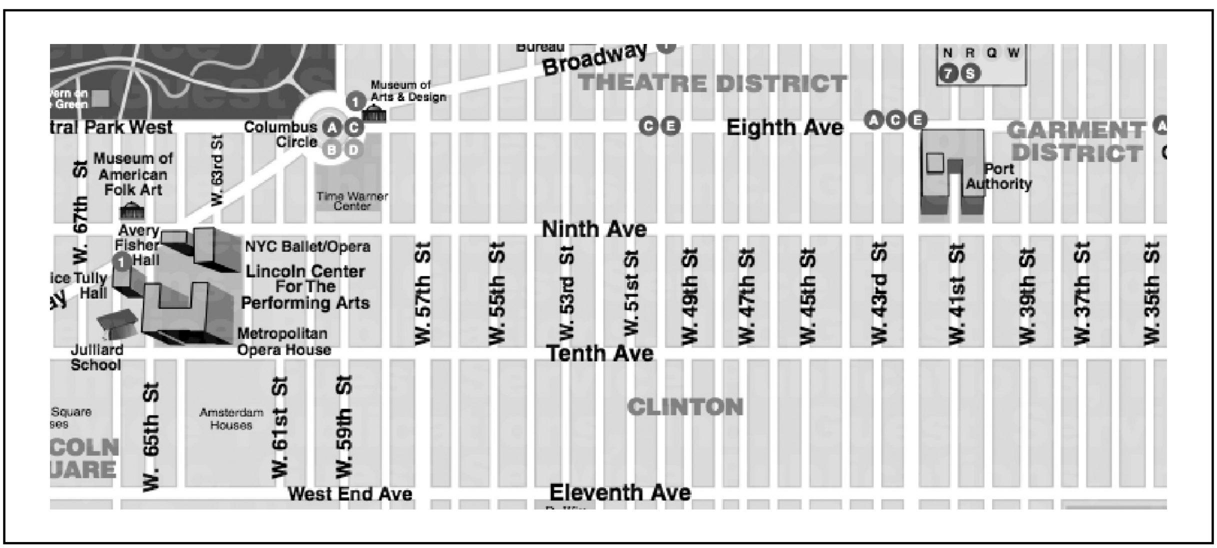


Figura 13.4.—Plano parcial de Manhattan (Nueva York).

¿Has jugado alguna vez al popular juego de los barquitos? ¿Recuerdas las reglas de juego? Cada jugador dispone de una flota para destruir la de su oponente, y para disponer sus barcos y controlar dónde los tiene su oponente, se emplea una sencilla técnica de localización: un sistema de filas y columnas que determina de manera precisa la posición de cada barco. Este método constituye un sistema de coordenadas. Las hojas de cálculo también emplean este sistema para organizar las celdas de trabajo, como muestra la imagen siguiente, en donde está resaltada la celda $A1$.

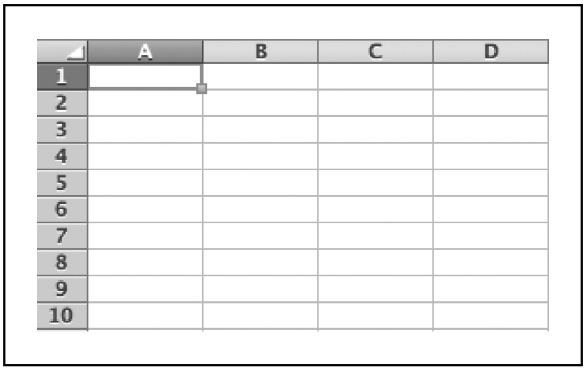


Figura 13.5.—Ejemplo de uso de coordenadas en una hoja de cálculo.

2.2. Coordenadas cartesianas

El sistema de coordenadas más empleado en matemáticas es el *cartesiano,* denominado así porque se atribuye al filósofo y matemático francés René Descartes (1596-1650). Este sistema permite localizar un punto en el plano o en el espacio mediante una pareja de números enteros (en el plano) o una terna de números enteros (en el espacio).

En el caso del plano, se emplean dos ejes perpendiculares que suministran los descriptores horizontal y vertical de cada punto. Para ello, los ejes se dividen en marcas realizadas en intervalos regulares (siguiendo el diseño de la recta numérica). El eje horizontal se suele denominar *eje x* (o eje de *abscisas*), mientras que el vertical se denomina *eje y* (o eje de *ordenadas*). El punto de corte de ambos ejes se denomina *origen de coordenadas*. Como se aprecia en la figura 13.6, la localización de un punto se describe mediante un par de números que representan la intersección de rectas paralelas a los ejes con los propios ejes, de manera que las coordenadas expresan la distancia de ese punto al origen de coordenadas según cada uno de los ejes. Es importante señalar que los números enteros negativos se representan hacia la izquierda y hacia abajo, según el eje considerado. Los dos ejes dividen el plano en cuatro zonas que se denominan *cuadrantes*. En este ejemplo se han representado cuatro puntos A, B, C y D de coordenadas (1, 2) (2, 1) (−3, 1) y (−1, −2), respectivamente, además del origen de coordenadas (0, 0).

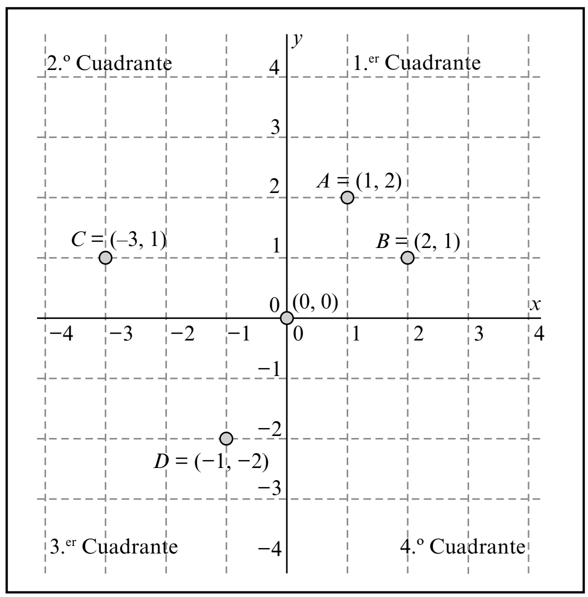


Figura 13.6.—Coordenadas cartesianas en el plano.

ACTIVIDAD 5: Usando los puntos representados en la figura 13.6, señala las coordenadas de los dos vértices restantes de un cuadrado que tenga por lado el segmento *AC*. Haz lo mismo, pero suponiendo que el segmento *AC* es la diagonal del cuadrado (en esta ocasión, tienes que obtener las coordenadas de sus cuatro vértices).

Este sencillo método de localización en el plano tiene mucha utilidad en las matemáticas escolares, pues se emplea en varios temas que forman parte del currículo de Educación Obligatoria. Un campo de aplicación interesante es el estudio de las transformaciones geométricas que has estudiado en el tema anterior, pues permite establecer conexiones entre localización y movimientos.

Así, por ejemplo, es posible usar coordenadas para llevar a cabo una traslación de una figura y describir en términos de coordenadas la posición de la figura transformada. En el ejemplo de la figura 13.7, realizado con GeoGebra, al triángulo *T* se le ha aplicado una traslación mediante un vector **u,** dando como resultado el triángulo *T′*:

ACTIVIDAD 6: Describe cómo es posible construir el triángulo *T′* usando las coordenadas del triángulo original *T* y la información que suministra el vector de traslación.

El uso de las coordenadas cartesianas en el espacio tiene un funcionamiento análogo al del plano, salvo por el hecho de que cada punto queda delimitado por tres coordenadas según la posición que ocupe en relación con cada uno de los tres ejes (que se suelen denominar *x, y* y *z*).

ACTIVIDAD 7: Explora en Internet cómo se representan puntos en el espacio empleando coordenadas cartesianas y esboza un ejemplo.

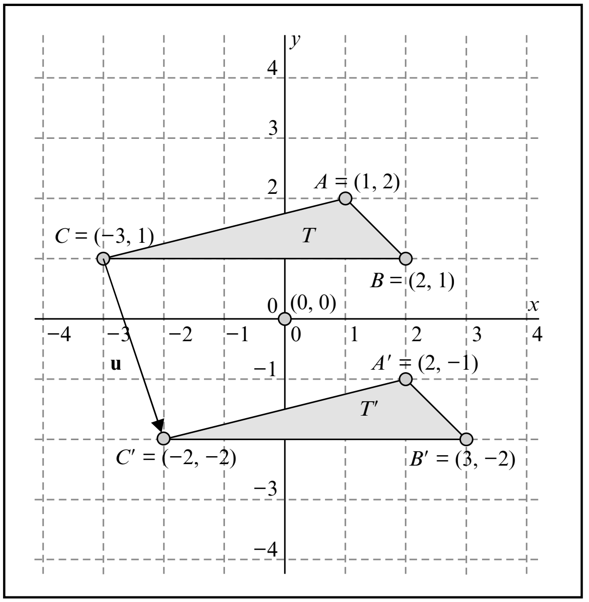


Figura 13.7.—Traslación de un triángulo usando coordenadas cartesianas.

2.3. Sistemas de localización terrestre

Uno de los sistemas de coordenadas más importantes y más empleados en todo el mundo es aquel que permite localizar puntos en la superficie terrestre. El desarrollo de sistemas y técnicas de navegación marítima potenció desde la antigüedad la exploración y la puesta en práctica de métodos de localización terrestre, hasta el establecimiento de las coordenadas geográficas que sigue patente y en uso en la actualidad.

Las coordenadas geográficas se apoyan en una serie de arcos de circunferencias que pueden trazarse sobre el globo terráqueo. Si representamos la superficie terrestre en dos dimensiones, esos arcos se ven como muestra la figura 13.8.

Las líneas horizontales se denominan paralelos, mientras que las verticales se denominan

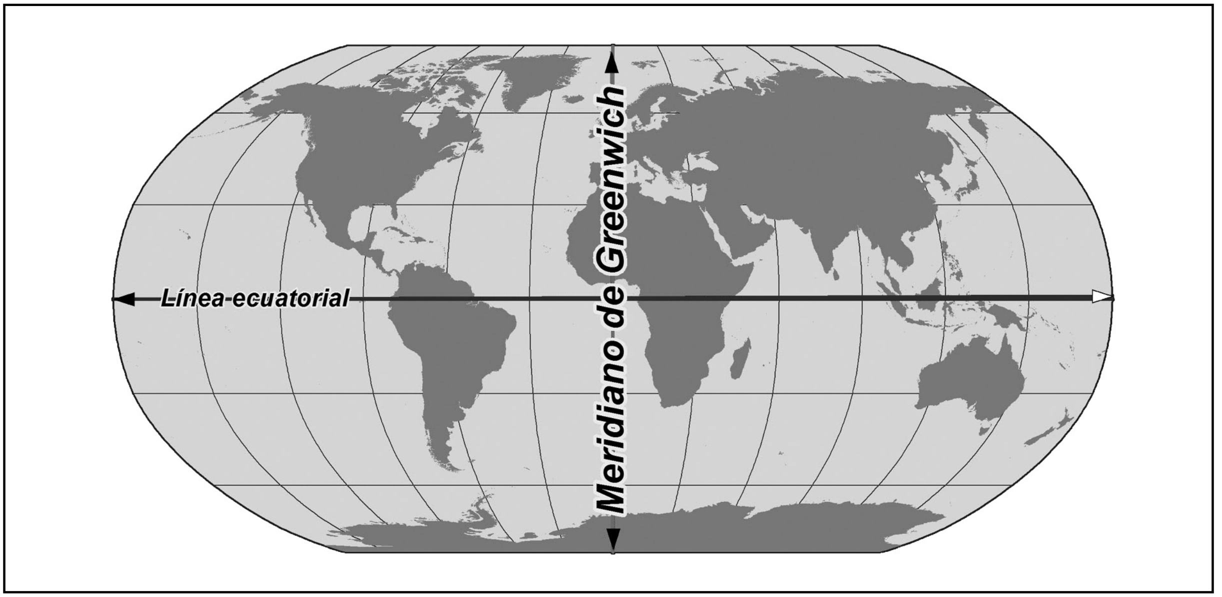


Figura 13.8.—Superficie terrestre con indicación de meridianos y paralelos.

meridianos; la conjunción de ambas configura el sistema de coordenadas geográficas. Este sistema considera un paralelo de referencia, el Ecuador, y un meridiano, el de Greenwich (o meridiano cero). Cualquier punto de la superficie terrestre queda determinado por la distancia a la que éste se encuentra del Ecuador (latitud) y a la que se encuentra del meridiano de Greenwich (longitud). Estas distancias se expresan considerando como unidad de medida grados sexagesimales.

El Ecuador determina dos hemisferios, el norte y el sur. Asignada la latitud de 0º en él, los puntos que quedan en el hemisferio norte se representan con grados positivos, mientras que los que quedan en el hemisferio sur se miden con grados negativos. El Meridiano de Greenwich establece un valor de la longitud de 0º, y también determina dos hemisferios. Los puntos que quedan a la derecha del Meridiano de Greenwich están en el hemisferio oriental y se miden con grados positivos, mientras que a la izquierda se determina el hemisferio occidental y, en él, los puntos se miden con grados negativos. Si sólo se emplean medidas positivas de los grados, es necesario indicar si están al Norte o al Sur del Ecuador y al Este o al Oeste del Meridiano de Greenwich.

ACTIVIDAD 8: Observa el mapa de la figura 13.8 y localiza, aproximadamente, la capital de Australia (Canberra), la capital de Brasil (Brasilia), Madrid y la capital de la República de Sudáfrica (Pretoria). ¿A cuál de esas ciudades corresponderán las siguientes coordenadas geográficas?:

a) Latitud: –33º 55'; Longitud: 18º 27'.
b) 15º 45' Sur y 47º 57' Oeste.
c) Latitud: 40º 25'; Longitud: –3º 45'.
d) –35º 15' y 149º 28' Este.

ACTIVIDAD 9: Investiga, explica y ejemplifica qué otro uso importante se hace de la estructuración de la esfera terrestre en meridianos en relación con la medida del tiempo.

Los sistemas de posicionamiento global, o GPS, brindan con rapidez y precisión la localización exacta de donde estamos y, de hecho, muchos establecimientos y puntos de interés indican cuáles son sus coordenadas geográficas para que se introduzcan en estos dispositivos y se pueda acceder a ellos. Los GPS se conectan a una red de más de 20 satélites situados a unos 20.000 kilómetros de la superficie terrestre y, mediante un elaborado proceso de triangulación, determinan con muy poco margen de error el lugar que ocupamos en cada momento.

2.4. Lectura e interpretación de mapas y planos

Observa la siguiente imagen de un plano de Granada en el que hemos marcado cuatro localizaciones (véase figura 13.9).

Las cuatro localizaciones (*A, B, C* y *D*) se corresponden, aproximadamente, con cuatro estaciones de la línea 1 del Metropolitano de Granada. La denominación de esas estaciones es la siguiente: *A,* «Hípica»; *B,* «Andrés Segovia»; *C,* «Palacio de los Deportes», y *D,* «Nuevos Cármenes». Es fácil observar que esas cuatro estaciones no están alineadas y que, además, no se encuentran entre sí a la misma distancia. Sin embargo, esas dos características no se recogen en la figura 13.10, que muestra el esquema completo de esa línea de metro con las estaciones anteriores.

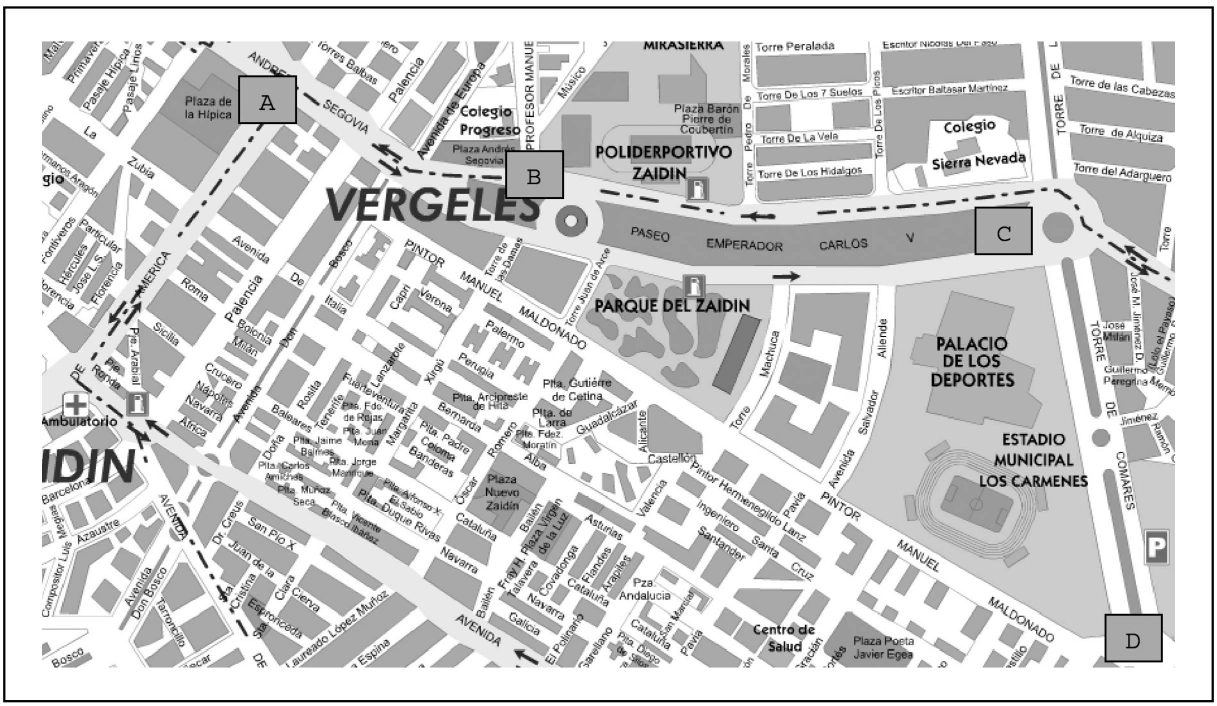


Figura 13.9.—Plano de una zona de Granada.

¿Significa esto que el esquema de la línea es incorrecto o que no es útil? En absoluto. Este modo de representar líneas de transporte es muy empleado y resulta muy útil para los usuarios, ya que pone el foco de atención en las posibilidades que existen para ir de un lugar a otro. Para realizar este estudio se presta atención a las conexiones existentes, independientemente de si son o no rectilíneas. Para ello, se coloca el plano en una superficie elástica, que permite deformarla sin romperla, las líneas rectas se pueden hacer curvas, pero si una poligonal es abierta, seguirá siendo abierta y si un punto está sobre la poligonal, al deformarlo seguirá estando sobre ella.

Del estudio de las propiedades que se mantienen cuando se deforma una superficie sin romperla se ocupa una parte de la matemática denominada *topología*. Sus razonamientos nos permiten diferenciar líneas abiertas y cerradas, las que se cortan a sí mismas y las que no lo hacen, o qué regiones son continuas o tienen huecos. Son razonamientos topológicos los que se hace, por ejemplo, para determinar si se puede ir de un punto a otro en una ciudad sin saltar un río, o evitando una zona que está cortada al tráfico o colapsada.

ACTIVIDAD 10: El escritor sudafricano J. R. R. Tolkien ideó un complejo mundo imaginario para su famosa obra *El Señor de los Anillos* y lo denominó la *Tierra Media*. En esta novela, un *hobbit* llamado *Frodo Bolsón*, debe abandonar su residencia en *Hobbiton,* para llevar a cabo una importante misión en el *Monte del Destino*, en *Mordor*. Localiza un mapa de la *Tierra Media* en un ejemplar del libro o usando Internet y estudia si *Frodo* podría llegar a su destino sin cruzar ningún río. Representa esa posible ruta usando un sistema de segmentos y puntos como el de la figura 13.10, de forma que permitiese a otro *hobbit* reproducir la ruta entre *Hobbiton* y el *Monte del Destino* de la forma más fiel posible.

2.5. Grafos: redes de puntos y trazos

Como ejemplifica la figura 13.10, los elementos básicos para la elaboración de planos son puntos y trazos. Los planos deformados tratan de mantener posiciones, pero se preocupan más de dar una imagen sencilla que de reproducirla con fidelidad. Para construir los planos y decidir cuál es más adecuado, las matemáticas se abstraen del significado de los elementos que aparecen en ellos y buscan estudiar sus relaciones, obteniendo teorías que tienen una amplia aplicación. Este tipo de construc-

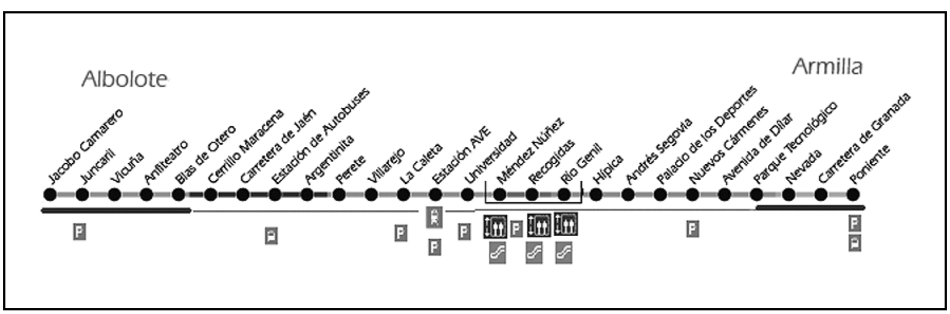


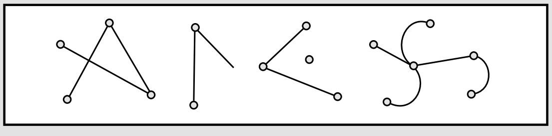
Figura 13.10.—Esquema de la línea 1 del transporte Metropolitano de Granada.

ciones a base de puntos (o vértices) y trazos (o aristas) que los unen se denominan *grafos* y constituyen un campo de estudio e investigación que tiene importantes aplicaciones en nuestra sociedad.

Uno de ellos tiene que ver con las líneas de telefonía móvil, ya que los repetidores actúan como vértices y los segmentos en ese caso son las líneas que habilitan. La riqueza de relaciones entre vértices y lo complejo del grafo creado están detrás de la capacidad de cobertura de una compañía y de evitar que la caída de uno de los repetidores rompa la cadena y origine problemas de conexión. Otro ámbito de aplicación de la teoría de grafos se sitúa en el estudio y la creación de redes sociales. En este caso, cada uno de los vértices del grafo es una persona, y dos vértices se unen mediante una arista si esas dos personas se conocen o tienen algo en común. Esto va generando cadenas de gente conocida o con las que se comparte algo y permite hacer estudios de compatibilidad, de preferencias, de liderazgo o para establecer relaciones.

La definición de grafo es muy sencilla. Un grafo es una colección finita de puntos *(vértices),* unidos por curvas simples *(aristas),* de manera que cada arista une dos vértices y no es posible que existan vértices o aristas aisladas. El *grado* (o el *orden*) de un vértice en un grafo es el número de aristas que confluyen en él. Así, es posible distinguir vértices pares e impares, según sea par o impar su grado.

ACTIVIDAD 1: Señala cuáles de las siguientes cuatro figuras constituyen un grafo y cuáles no, indicando en ese caso la característica que no satisfacen. Señala también el grado de cada uno de los vértices que los componen:



El grafo es un modelo matemático de estas situaciones, pero la generalidad de su definición permite aplicarlo a otros problemas de la geometría de la superficie elástica o topología. El estudio de una línea de metro también permite determinar si se podría recorrer un trayecto sin pasar dos veces por el mismo tramo. Este problema es similar a los clásicos juegos que analizan qué figuras se pueden dibujar de un sólo trazo sin levantar el lápiz del papel. Analizar estos problemas puede ser algo complejo, está relacionado con la teoría de grafos, pero se pueden abordar en la Educación Primaria. Al final del tema proponemos algunas actividades de este tipo.

ACTIVIDAD 12: Dibuja algunos ejemplos de grafos: uno que tenga cinco vértices pares, otro que tenga sólo tres vértices que sean impares y un tercero que tenga cuatro vértices impares.

Además de las aplicaciones ya citadas, los grafos también se emplean para diseñar sistemas de buscadores de Internet y para estudiar y entender los cambios que pueden afectar a determinadas especies en su hábitat. En las actividades finales del tema se proponen algunos problemas sobre grafos que puedes usar para desarrollar esa parcela de tu sentido espacial.

Puedes ampliar información sobre grafos en: Coriat y otros (1989).

3. VISUALIZACIÓN GEOMÉTRICA

Algunos autores definen la visualización como aquella *geometría que hacemos con la mente;* otros se refieren a ella como la *imaginación espacial*. Aunque la visualización tiene cabida en todos los bloques de contenido de las matemáticas, en este capítulo nos centraremos en su papel en geometría. En este caso, la visualización tiene que ver con las habilidades necesarias para observar, interpretar, analizar y comunicar información visual sobre objetos reales o nociones geométricas. La visualización implica ser capaz de generar imágenes mentales de formas y figuras, viéndolas desde diferentes perspectivas y prediciendo posibles resultados de transformaciones y movimientos.

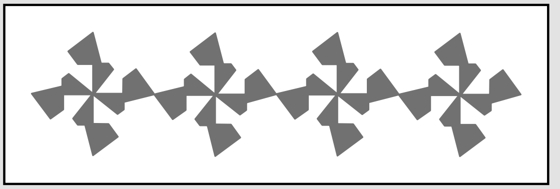
La visualización exige la coordinación mental del plano y el espacio, por eso es importante desarrollar la habilidad para representar en el plano figuras espaciales, y viceversa. También se pone en juego la relación entre dos y tres dimensiones cuando se cortan o seccionan sólidos, ya que si cortamos un sólido dividiéndolo en dos partes, podemos generar un polígono en la superficie del corte.

A continuación se exploran y ejemplifican varias de estas habilidades que configuran la visualización geométrica. Puedes ampliar esta información en: Gutiérrez (2006).

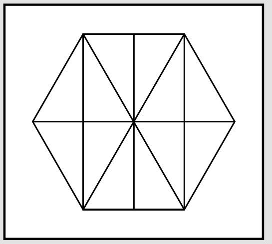
3.1. Identificación visual

Tiene que ver con reconocer una o varias figuras desde un punto de vista puramente matemático, sin considerar otro contexto. Esta habilidad se emplea, por ejemplo, cuando se identifica el motivo o la tesela básica que genera un friso o un mosaico (como se describe en el tema 12) o cuando se identifica una figura haciendo abstracción de otras informaciones geométricas. También cuando se completan figuras que están esbozadas por algunos elementos como, por ejemplo, sus vértices.

ACTIVIDAD 1: Identifica y describe cuál es el motivo mínimo que se emplea para generar el siguiente friso mediante transformaciones geométricas:



ACTIVIDAD 2: Señala cuadriláteros diferentes que encuentres en la siguiente figura y descríbelos:



ACTIVIDAD 3: Representa todos los triángulos diferentes que tienen sus vértices en los puntos de un geoplano de 9 puntos (3 × 3).

Esta habilidad de identificación visual también se desarrolla y se pone en juego al estudiar los resultados de seccionar un sólido geométrico y observar la forma que genera el corte. Veamos un ejemplo. La figura 13.11 representa un cubo al que le hemos realizado un corte usando un hilo. Como puedes comprobar, el corte ha generado un contorno triangular en el cubo y la parte seccionada es una pirámide de base triangular (vista desde arriba).

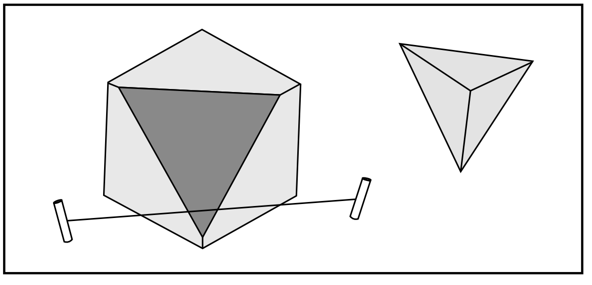


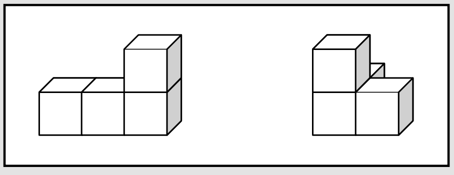
Figura 13.11.—Sección de un cubo.

ACTIVIDAD 4: Estudia si sería posible obtener un triángulo escaleno al seccionar un cubo. ¿Y un cuadrado? Si crees que sí, explica cómo deberías realizar el corte con el hilo.

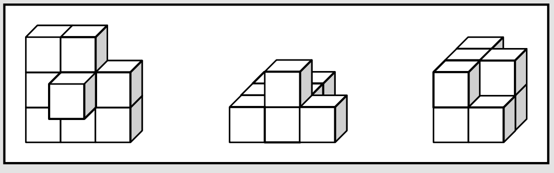
Este tipo de actividades permiten que los escolares exploren cómo obtener sólidos seccionando otros, lo cual implica que razonen sobre las propiedades y características de esos sólidos. Pero también facilitan que desarrollen su capacidad para intuir mentalmente la forma de la sección y la de la parte seccionada. Por otro lado, descomponer formas ayuda a desarrollar y recordar determinadas fórmulas de volumen y área.

La actividad inversa, de recomposición de figuras, también promueve el desarrollo de la visualización geométrica, tal y como mostramos en la actividad siguiente.

ACTIVIDAD 5: Las dos figuras siguientes están formadas por cuatro cubos cada una:



Explora si, componiendo esas dos figuras, es posible construir cada una de las tres siguientes:



3.2. Conservación de la percepción

Es la habilidad de extraer información de figuras y formas espaciales que no se pueden ver al completo. En estos casos, es necesario inferir esa información partiendo de los referentes a los que sí tenemos acceso. Por ejemplo, a partir de la pirámide de cubos representada en la figura 13.12, en la que no se ven todos los cubos, ¿eres capaz de calcular cuántos hay?

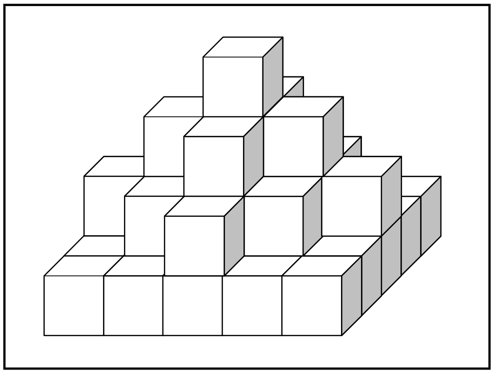


Figura 13.12.—¿Cuántos cubos hay?

Esta habilidad también se pone en juego para reconocer que un determinado objeto o figura mantiene su forma y sus dimensiones si se oculta parcial o completamente o si se modifica su posición. Así, por ejemplo, es evidente que si se gira la pirámide anterior, la cantidad de cubos no cambiará (figura 13.13).

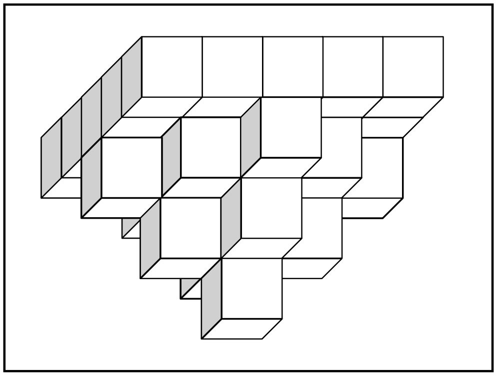
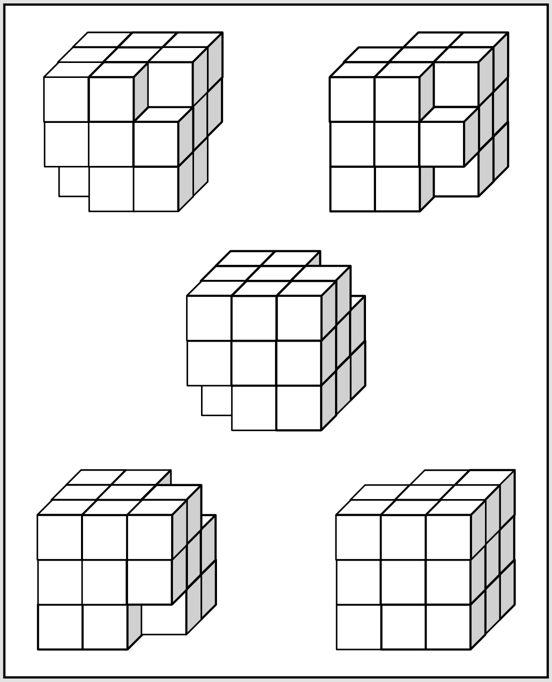


Figura 13.13.—¿Siguen siendo los mismos cubos?

ACTIVIDAD 6: Cada una de las siguientes figuras se han formado uniendo cubos exactamente iguales. En cada una de ellas hemos quitado uno o más de esos cubos. Compara cada una de las figuras con otra. ¿Cuál de esas parejas de figuras podría ser la misma teniendo en cuenta la esquina oculta?



3.3. Percepción de relaciones espaciales

Esta habilidad relacionada con la visualización geométrica tiene que ver con identificar las características y propiedades básicas de objetos en el espacio, así como las relaciones entre ellos. Su desarrollo puede promoverse mediante, por ejemplo, la representación en el plano de formas y objetos espaciales, así como mediante el proceso inverso, explorar e imaginar cómo se verá en el espacio una figura que está representada en el plano. Veamos ejemplos de ambos tipos de actuaciones.

Existen diferentes modos de representar formas espaciales en el plano, siendo uno de los más habituales la denominada *proyección paralela*. Todas las figuras incluidas en el apartado anterior son de esta clase. En este tipo de representación se conserva el paralelismo en todas las direcciones. Otra forma de representación es la denominada *proyección isométrica,* que emplea una trama de puntos que forman triángulos equiláteros. Para representar sólidos en este tipo de proyección, sus vértices deben coincidir con los puntos de esa trama (véase la figura 13.14).

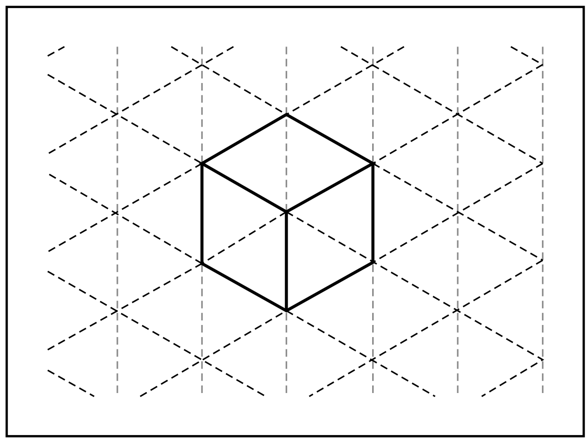


Figura 13.14.—Proyección isométrica de un cubo.

Un tipo de representación muy empleado en dibujo técnico es la *proyección ortogonal,* pues resulta especialmente útil para representar sólidos de gran complejidad y, sobre todo, para mostrar objetos reales con un alto grado de precisión. Este método se basa en extraer vistas del objeto desde distintos puntos de vista, tal y como se ha visto en el capítulo 11 y como muestra la figura 13.15.

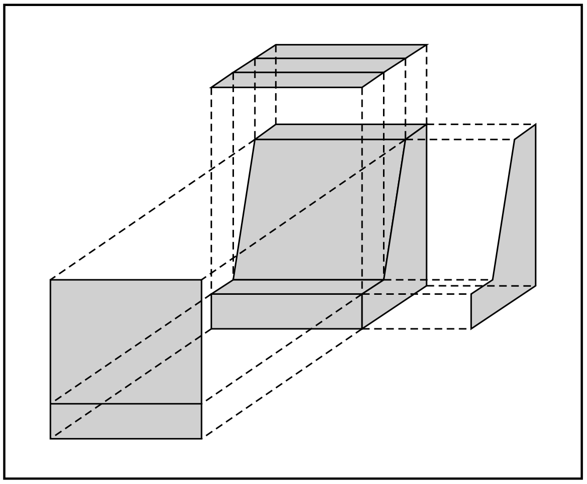


Figura 13.15.—Proyecciones ortogonales de un figura.

No es fácil establecer cuál de estos tipos de representaciones es el más sencillo para los escolares, si bien el uso de las proyecciones isométrica y ortogonal requiere de un entrenamiento específico. La proyección isométrica implica que, en ocasiones, no se percibe con claridad lo que se quiere representar, ya que si en el ejemplo anterior se hubiera representado una caja con forma cúbica (figura 13.14), no es sencillo distinguir cuál es la cara abierta. Pero, en conjunto, el trabajo con los diferentes modos de representar en el plano formas y objetos espaciales promueve el desarrollo de la visualización geométrica.

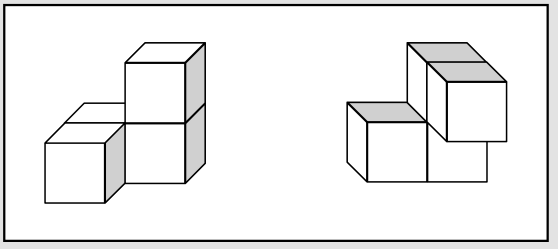
La actividad inversa es igualmente interesante. Es posible partir de alguna de las proyecciones anteriores para dibujar una perspectiva aproximada de la figura original. En el estudio de los desarrollos planos de determinados poliedros también se enfatiza esta capacidad, tal y como queda descrito en el capítulo 11.

Puedes ampliar información sobre percepción de figuras espaciales en: Alsina, Burgués y Fortuny (1988).

3.4. Discriminación visual

Es la habilidad que permite comparar y clasificar varios objetos de acuerdo con sus semejanzas y diferencias. Esta capacidad se pone en juego, por ejemplo, al resolver los juegos de diferencias que, en ocasiones, incluyen periódicos y revistas. La siguiente actividad es un ejemplo de cómo el profesor de Educación Primaria puede promover esta capacidad en sus escolares usando figuras espaciales.

ACTIVIDAD 7: Estudia si son diferentes las dos figuras siguientes o, por el contrario, son exactamente iguales pero situadas en una posición diferente. Elabora un argumento que apoye tu decisión:



También existen juegos de mesa que, de una forma lúdica y entretenida, fomentan la puesta en juego de la habilidad de discriminación visual. Un ejemplo es «Jungle Speed», que en poco tiempo se ha convertido en un juego muy popular en reuniones de amigos. Las reglas son sencillas: hay un mazo de cartas con diferentes ilustraciones que se reparten entre los jugadores, todas boca abajo. Uno tras otro, los jugadores sacan carta y la dejan boca arriba delante de cada uno. Cuando dos cartas que tienen exactamente la misma ilustración coinciden en la mesa (sin importar el color), los dos jugadores que las hayan sacado tienen que agarrar lo antes posible una figura de madera situada en el centro de juego. Quien lo consiga primero da al perdedor las cartas que tenga descubiertas sobre la mesa, pero si alguien coge la figura por error, se lleva todas las cartas descubiertas que haya sobre la mesa en ese momento. Gana el juego quien se quede sin cartas. El reto básico es distinguir con rapidez los dibujos de las cartas, pues algunos son muy similares entre sí y entre las ilustraciones se representa una buena cantidad de polígonos.

Este tipo de juego, y otros similares, tienen cabida en el aula de matemáticas, ya que, entre otras facetas, promueven el desarrollo de la habilidad de los escolares para discriminar figuras geométricas.

Los escolares poseen habilidades de visualización en distinto grado. Para promover su desarrollo hay que realizar un trabajo gradual y en equipo. Todas las habilidades requieren crear imágenes mentales. Por tanto, se favorecen cuando se realizan actividades con materiales manipulativos que tengan diversas formas, por lo que los mecanos y construcciones pueden ser buenos apoyos. Para crear imágenes mentales hay que promover la construcción de representaciones de las formas, empleando para ello soportes variados, como el papel cuadriculado o isométrico, o los programas de geometría dinámica.

Evocar los objetos y formas y sus representaciones, tanto por nuevas representaciones como mediante mensajes verbales, orales o escritas, es el último paso de esta graduación en la creación de habilidades.

ACTIVIDAD 8: Sin emplear ningún referente, imagina un triángulo isósceles. Gíralo 180º respecto de la base. Identifica la figura que resulta al unir el triángulo inicial y su transformado.

Trabajar en equipo colabora también en el desarrollo de las habilidades de visualización, al permitir que unos escolares expongan a otros sus argumentos, muestren sus capacidades gráficas y abran el repertorio de destrezas que los demás ponen en juego.

En resumen, la visualización, necesaria para situarse en el espacio que nos rodea, se favorece mediante el juego, la representación, la narración y compartiendo situaciones que requieran del espacio. Jugar a «Tres en raya», «Conecta 4», «Tetris», «Damas» o «Damas chinas» facilita la relación del escolar con el espacio en un ambiente lúdico, que le predispone a emplear y desarrollar habilidades visuales para tener una visión del juego completo. Las construcciones, los mecanos, la práctica de deportes de pelota o el billar, entre otros, también colaboran a dar importancia a la visión de la jugada, a saber situar a los compañeros en el campo y a percibir la colocación de piezas o personas respecto de otras, y todo ello requiere y colabora a desarrollar la visión espacial.

Puedes ampliar información sobre visualización en: Gracia (1995).

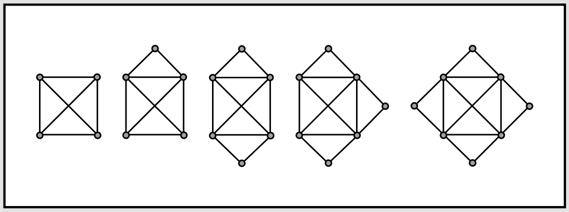
ACTIVIDADES PARA PRACTICAR

1. En un plano cartesiano, construye un triángulo que tenga sus vértices en los puntos (0, 0), (3, 1) y (1, 3) y considera la recta que pasa por los puntos (−2, 2) y (2, −2). Usando coordenadas cartesianas, calcula el simétrico del triángulo tomando como eje de simetría la recta anterior. Explica el método que sigues.

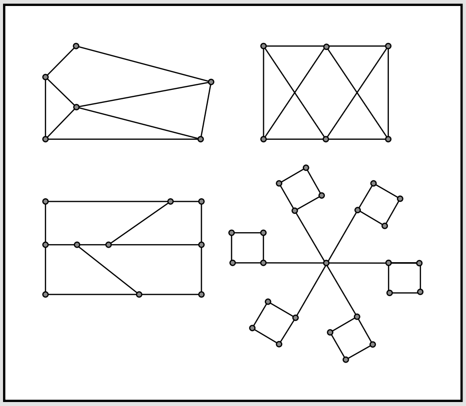
2. Investiga en qué consiste el método de representación con coordenadas polares y compara las ventajas o inconvenientes que tiene en relación con las coordenadas cartesianas.

3. Invéntate parejas de coordenadas geográficas que sean considerablemente diferentes entre sí. Trata de imaginar qué ciudades podrán tener esas coordenadas como valores de latitud y longitud. Comprueba tu estimación usando la aplicación *Google Earth*.

4. Un grafo se denomina trazable (o euleriano) si es posible recorrerlo de un solo trazo pasando una sola vez por cada una de sus aristas. Comprueba si los siguientes grafos son trazables:

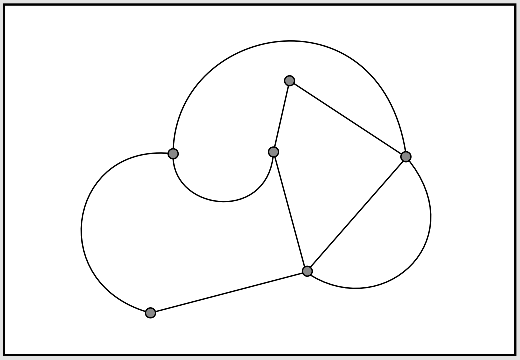


5. Añade una o dos aristas a los siguientes grafos para que sean trazables, si es que no lo son:



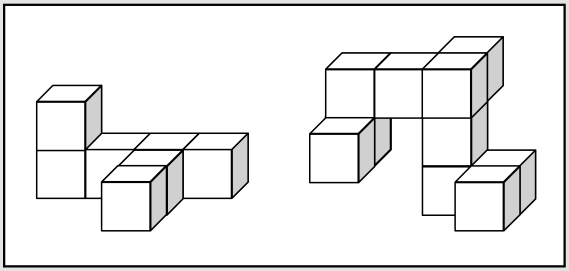
6. Inma es la nueva responsable de repartir el correo en los buzones de las viviendas del centro de su ciudad. Ella quiere encontrar una ruta que pase una sola vez por cada calle:

a) En el plano siguiente se muestran las calles que tiene que recorrer, siendo cada punto un cruce de calles. ¿Puedes ayudar a Inma a encontrar la ruta deseada?

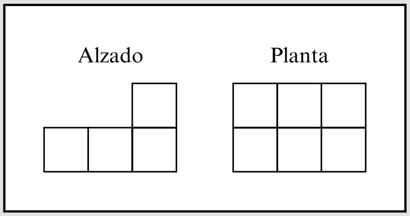


b) Inma ha pensado que una manera de ahorrar tiempo sería, además de pasar una sola vez por cada calle, empezar y terminar en el mismo lugar ¿Es posible encontrar ahora la ruta óptima?

7. Deduce y representa la proyección ortogonal de cada una de las siguientes figuras:

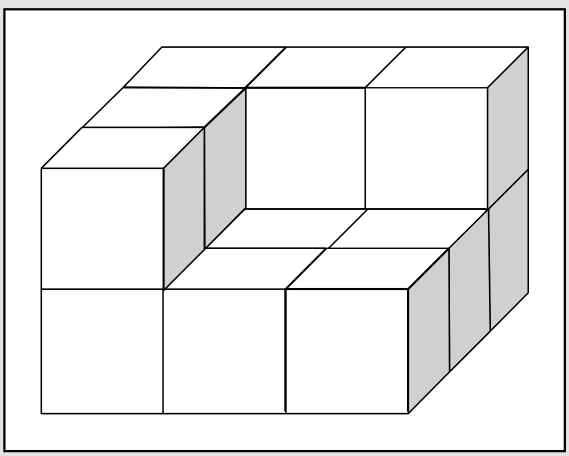


8. Representa en perspectiva, al menos, tres figuras diferentes que admitan las siguientes vistas:

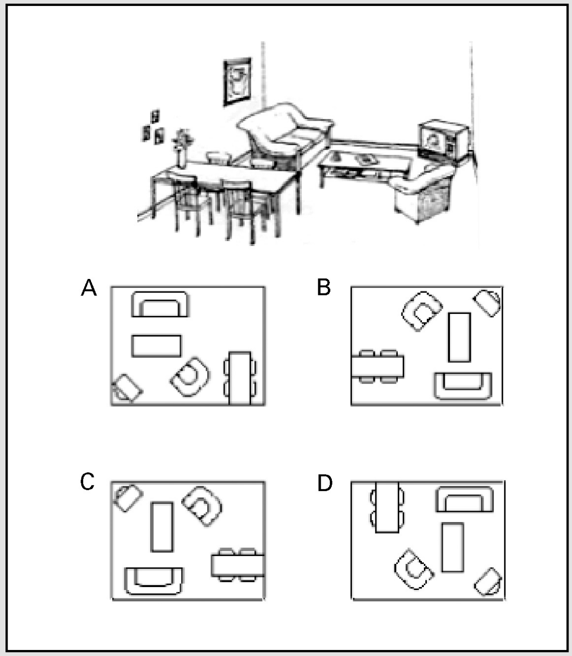


9. El lado de cada uno de los cubos que forman la figura siguiente mide un metro. Calcula cuál es el área total de la figura (incluyendo la base):

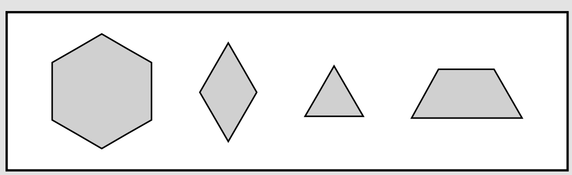
a) ¿Es posible disminuir el área de la figura en dos metros cuadrados moviendo un solo cubo?
b) ¿Es posible aumentar en dos metros cuadrados el área original de la figura moviendo un único cubo?:



10. Elige cuál de los cuatro planos (*A, B, C* o *D*) representa con más fidelidad la habitación mostrada en la imagen siguiente (problema propuesto en el proyecto PISA). ¿En qué basas tu elección?:



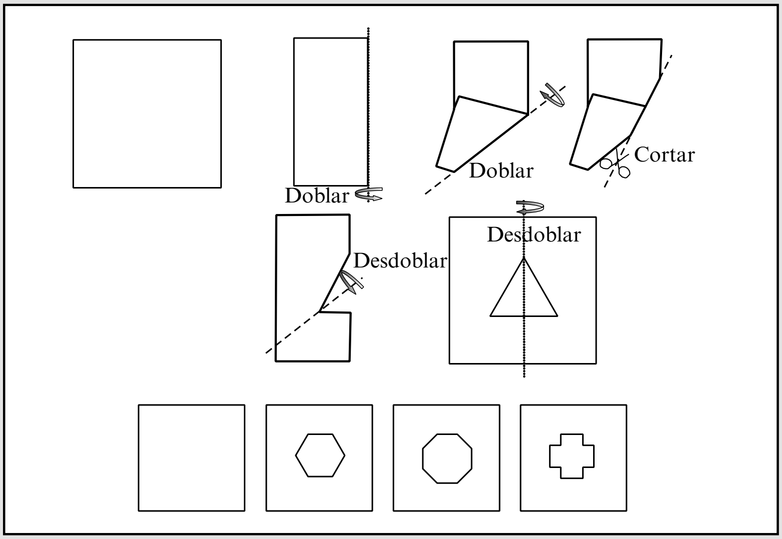
11. En la imagen siguiente, hemos representado un hexágono regular y, junto a él, tres tipos diferentes de polígonos: un rombo, un triángulo equilátero y un trapecio isósceles. Investiga de cuántas formas puedes reproducir el hexágono usando esos tres polígonos (puedes usar más de una copia de cada uno). Elabora un argumento que asegure que no existen más de los que hayas encontrado:



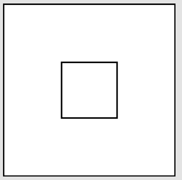
INVESTIGA Y REFLEXIONA

Las siguientes actividades te permitirán profundizar en las nociones y los procedimientos sobre sentido espacial que hemos presentado en este tema.

1. Realiza un breve informe del desarrollo histórico de las coordenadas geográficas, destacando los momentos claves en su evolución.
2. ¿Has visto alguna vez alguna película o serie de televisión en la que alguien diga una expresión del tipo tenemos un «enemigo a las dos»? ¿Cómo crees que funciona ese método de orientación en el que se usan las horas? Explica las conclusiones a las que llegues, aportando algunos ejemplos.
3. En la antigüedad, se desarrollaron métodos de orientación que hoy en día siguen estando vigentes, y que se basan en el sol, la luna o las estrellas. Investiga cómo pueden usarse los astros para orientarnos y saber dónde estamos o hacia dónde dirigirnos y elabora un informe en el que también incluyas información sobre el uso del *astrolabio* y de la *brújula*.
4. ¿Sois afines tus amigos y tú? Propón a un grupo de amigos que escriban cuál es su deporte favorito, su grupo musical predilecto, cuál es su principal hobby o todo lo que se os ocurra. Después representa con un punto a cada uno de los que han contestado (incluyéndote a ti) y une con segmentos aquellos que comparten una afición. ¿Qué obtienes? ¿Cómo se interpreta que un punto tenga un grado alto? ¿Y si un punto queda aislado? ¿Te sorprenden los resultados?
5. Actividad recortar. Siguiendo el modelo, dobla la hoja de papel de manera que con un solo corte se obtengan polígonos como los de las siguientes figuras:



6. Dibuja o describe cómo debería ser una figura para que su alzado y su planta se vean como la imagen siguiente, sabiendo que se trata de una figura maciza, sin huecos:



BIBLIOGRAFÍA

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. M. (1988). *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Síntesis.

Coriat, M., Sancho, J., Marín, A. y Gonzalvo, P. (1989). *Nudos y nexos: redes en la escuela*. Madrid: Síntesis.

Gracia, F. (1995). *Imágenes*. Granada: Proyecto Sur.

Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre la enseñanza de la geometría. En P. Flores, F. Ruiz y M. de la Fuente (Coords.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 15-58). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Magnitudes y medida. Medidas directas

14

MARÍA JOSÉ GONZÁLEZ LÓPEZ
PEDRO GÓMEZ GUZMÁN

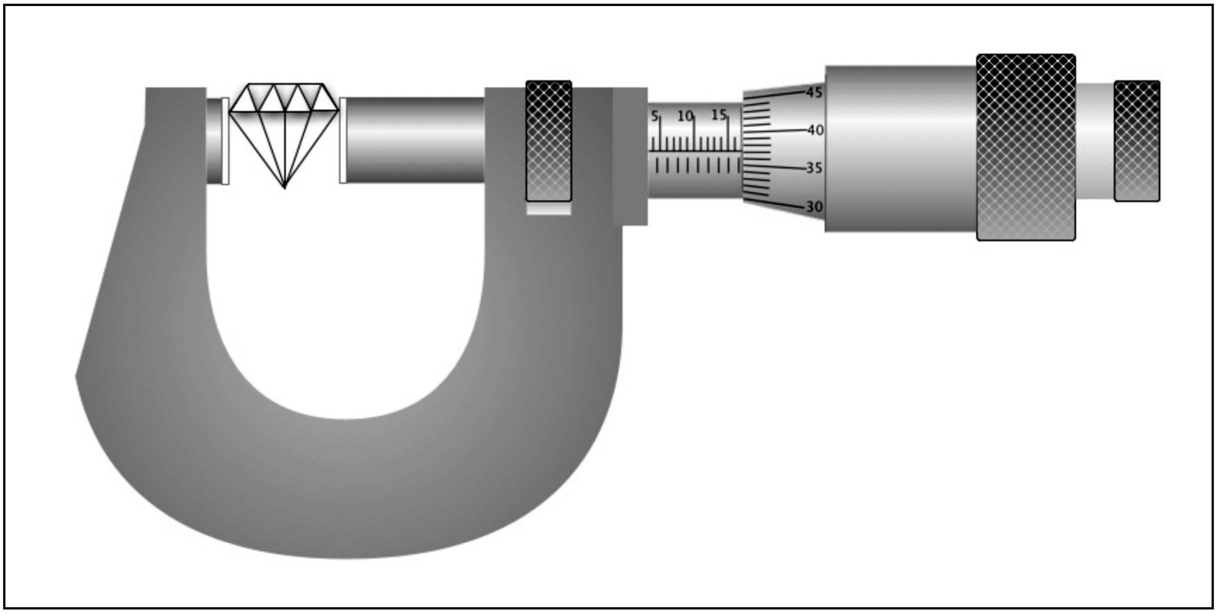


Figura 14.1.—Instrumentos de medida: tornillo micrométrico.

A lo largo de la historia, son numerosas las situaciones en que el ser humano ha identificado cualidad es de los objetos y las ha cuantificado. Comparar, ordenar, clasificar y repartir es más fácil si en vez de tener terrenos de cultivo de forma irregular disponemos de números que representan su superficie. Se pone de manifiesto así la importancia de identificar las cualidades medibles, es decir, las magnitudes. En todas las disciplinas se trabaja con magnitudes; incluso cuando hablamos de cualidades, que, a priori, son difíciles de cuantificar acabamos encontrando maneras de codificarlas mediante números. Por ejemplo, manipulamos el color mediante el espectro o desarrollamos procesos complejos para medir la inteligencia mediante un coeficiente. Lo importante es encontrar una unidad de medida a la que referir la cantidad de magnitud que percibimos. La gran variedad de magnitudes que podemos imaginar va acompañada de una enorme variedad de estrategias para medirlas. En la etapa Primaria, las magnitudes que se estudian usualmente son el tiempo, la longitud, la superficie, el volumen, la masa, el valor monetario y la amplitud de ángulos. A través del estudio de estas magnitudes en contextos diversos, los escolares, por un lado, las perciben y reconocen, y, por otro lado, aprenden y practican estrategias para medir cantidades de esas magnitudes. Estas estrategias también son variadas: directas e indirectas, convencionales y no convencionales, exactas y aproximadas. La medida constituye así uno de los contextos más propicios para dotar de sentido a las nociones numéricas y geométricas de la etapa Primaria.

Dada su amplitud, este tema, tiene vínculos con varios capítulos de este libro. El capítulo presente aborda el planteamiento general sobre la medida y se centra en la medición directa. Las actividades que se plantean son, fundamentalmente, de dos tipos: orientadas a profundizar en el conocimiento de los conceptos matemáticos que intervienen en el tratamiento de las magnitudes, y orientadas a analizar tareas para los escolares de Primaria a partir de distintos criterios.

1. MAGNITUDES Y MEDIDA EN EL CURRÍCULO ESCOLAR

En el tratamiento escolar de las nociones de magnitud y medida en Primaria, se intercalan los aspectos más conceptuales, ligados a la percepción de la magnitud, con aspectos procedimentales, relacionados con las estrategias para medir. Estas ideas están presentes en todos los cursos de Primaria. Son contenidos con un gran valor formativo y funcional: intervienen en el desarrollo de la capacidad para utilizar y relacionar los distintos tipos de números y sus operaciones; contribuyen al aprendizaje de los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático en situaciones reales; permiten interpretar y expresar informaciones, datos y argumentaciones con contenido numérico, aritmético y geométrico, y fomentan el uso y la selección de estrategias, técnicas e instrumentos de medida adecuados a cada situación.

En su estudio, en Primaria aparecen dos focos de atención diferenciados: la percepción de la magnitud y la utilización de técnicas de medida. Estos dos focos abordan, de manera interrelacionada, distintas nociones matemáticas, como la cantidad, la unidad o la medida, que detallaremos más adelante. Son nociones que se presentan bajo distinta apariencia, dependiendo del tipo de magnitud que se estudie.

En la etapa Primaria, las magnitudes que se estudian usualmente son el tiempo, la longitud, la superficie, el volumen, la masa, el valor monetario y la amplitud de ángulos.

Las magnitudes geométricas —longitud, superficie y volumen—, junto con la masa, tienen un tratamiento preferente, ya que cuentan con una materialización que permite manipularlas de forma concreta: el proceso de percepción de estas magnitudes se apoya en la utilización de objetos cotidianos; es posible comparar y clasificar objetos con estos atributos desarrollando estrategias de medida personales, que tienen un papel primordial; sobre ellas se perciben de forma concreta las transformaciones que conservan la magnitud; su medición se presta al empleo de unidades de medida no convencionales (palmos, pasos, recipientes...) y al empleo de instrumentos de medida clásicos (cinta métrica, balanza o transportador), y cuentan con modelos, como el geoplano, el tangram o los policubos, que facilitan el estudio de las propiedades de la magnitud. Es posible, por tanto, trabajar numerosas estrategias de medida de tipo directo que, posteriormente, tienen continuidad en etapas posteriores, en las que se profundiza en la medición indirecta mediante el empleo de fórmulas de área y volumen. Una vez que se introducen las unidades estandarizadas, el estudio del sistema métrico decimal sirve de base para el establecimiento de equivalencias entre distintas unidades de medida, múltiplos y submúltiplos. Se plantean numerosas situaciones aplicadas, algunas de las cuales están especialmente indicadas para desarrollar estrategias de estimación, aspecto que se considera fundamental en la etapa.

Por abuso de terminología, hablaremos en este capítulo, indistintamente, de peso y masa, aunque sean magnitudes distintas: la masa es la cantidad de materia que tiene un cuerpo, mientras que el peso es la fuerza que ejerce la gravedad sobre una masa en un lugar determinado. También hablaremos, indistintamente, de capacidad y de volumen, ya que pueden considerarse magnitudes equivalentes, aunque hay autores que utilizan el término capacidad cuando se refieren a la cualidad que tiene un objeto de ser recipiente, de poder contener otros objetos —líquidos o áridos—, principalmente, mientras que usan el término volumen cuando indican el espacio ocupado por el recipiente.

El tiempo se estudia vinculado al empleo del reloj y al lenguaje de las fracciones (medios y cuartos); posteriormente, se manipula el sistema sexagesimal, con el cual se introduce la idea de periodicidad; las horas de 60 minutos y los minutos de 60 segundos obligan a realizar operaciones elementales en un sistema de base 60 para poder expresar el tiempo en situaciones cotidianas.

El valor monetario se distingue de las demás magnitudes en que el proceso de asignación de un valor no tiene un procedimiento objetivo ni estandarizado. Su estudio se centra en el manejo de un sistema monetario: las monedas y sus equivalencias. Estos elementos son de gran interés en el aprendizaje del sistema de numeración decimal y los algoritmos de las operaciones.

La amplitud angular es la última magnitud geométrica que se introduce. Surge de nuevo la idea de periodicidad y la necesidad de realizar intercambios entre el grado y el radián.

ACTIVIDAD 1: Utilizando el currículo de matemáticas para Educación Primaria oficial en tu comunidad, responde a las siguientes cuestiones:

- Secuencia las magnitudes que se tratan en la etapa Primaria por curso o ciclo.
- ¿Qué unidades de medida aparecen (además de las convencionales)?
- ¿Qué tratamiento tiene la estimación?
- La medida de longitudes aparecerá en, al menos, dos cursos consecutivos. Muestra dos tareas sobre la longitud para escolares de Primaria en las que, desde tu punto de vista, se aprecien las diferencias del tratamiento que se da a esta magnitud en los dos cursos considerados. Justifica tu respuesta.

2. CONTEXTOS E HISTORIA DE LAS MAGNITUDES Y SU MEDIDA

Cuantificar las propiedades de los objetos ha sido una de las primeras necesidades humanas: era necesario estimar a qué distancia estaba una presa, registrar la cantidad de animales de una manada, determinar cuánto tiempo había de pasar para la recolección, estimar la cantidad de grano que produciría un terreno, etc. Los sistemas de medida y las estrategias para medir han tenido una evolución muy distinta dependiendo del tipo de magnitud considerada. Si nos fijamos en la evolución de las unidades de medida empleadas, se suelen distinguir, tres períodos:

- Período antropométrico: el ser humano toma como unidades partes de su cuerpo (palmo, pie, brazo...).

- Período ergométrico: las unidades son objetos y resultados del trabajo (jornada, fanega...).
- Período convencional: se buscan unidades estandarizadas e inmutables; este período acaba dando lugar al Sistema Métrico Decimal y al Sistema Internacional de Unidades, que trataremos en detalle más adelante.

Veamos ejemplos de esta evolución en algunas magnitudes.

La longitud es una de las magnitudes más utilizada en la vida cotidiana. El cuerpo humano proporciona las primeras unidades de medida: el pie, el codo, el paso, la pulgada (que es el pulgar), la milla (mil pasos —*mille passus*— en el imperio romano, donde un paso eran dos zancadas...). Las distancias largas se miden mediante otras magnitudes, como el tiempo: dos lugares están separados por un mes de viaje. Pero para realizar transacciones comerciales se requiere una unidad más exacta, una varilla que se coloca en algún lugar público, un templo o un mercado. Además, distintos pueblos necesitan referirse a la misma unidad. En la Primera Conferencia General de Pesos y Medidas (París, 1899) se define el *metro* como la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre, y se materializa mediante una barra de platino iridiado.

ACTIVIDAD 1: Explica cómo realizaron Jean Delambre y Pierre Méchain, en el siglo XVIII, la medición del cuadrante del meridiano terrestre que va desde Dunquerque (Francia) a Barcelona.

La medición de superficies es una necesidad posterior a la longitud. Cobra auge en civilizaciones bien establecidas en las que la ganadería y la agricultura son actividades comerciales: la tierra es un bien que se posee, se reparte y genera riqueza. Surgen así las medidas agrarias, que expresan la superficie relacionándola con otras magnitudes, fundamentalmente el tiempo y la capacidad. Por ejemplo, una yugada es la tierra labrada por una yunta de caballerías en una jornada; una fanega, originalmente, es un saco para transportar tierra y se usa como medida de capacidad de áridos, pero también se interpreta como la cantidad de terreno necesaria para sembrar una fanega de grano. Estas medidas son arbitrarias según la zona. También, como continuamos haciendo hoy en día, se recurre a las magnitudes lineales para expresar la superficie: en Egipto, el codo de tierra correspondía a 100 codos cuadrados; los romanos usan el pie cuadrado o la *decempeda* cuadrada (100 pies cuadrados)...

ACTIVIDAD 2: El marjal es todavía, en la Vega de Granada, la unidad de medida de superficie normalmente utilizada en todo tipo de transacciones agrarias, y equivale exactamente a la superficie del Patio de los Leones de La Alhambra: 528,42 m². Sus orígenes se remontan al período de la dinastía nazarí (siglos XIII al XV), en el Reino de Granada.

Ilustra unidades históricas de medida que estén aún en uso en tu localidad.

La masa también es una magnitud imprescindible en la vida cotidiana. Los granos de trigo son suficientemente parecidos entre sí, por lo que la masa de un objeto se puede expresar en términos del número de granos de trigo que equivalen a él. Un disco o una placa de bronce o mármol también son buenos patrones de medida, gracias a su dureza, que las hace invariantes con el paso del tiempo. También se usan otros patrones que hacen referencia a medidas de longitud, como el *talento,* definido en Grecia como el peso de un pie cúbico de agua. La balanza de platillos o la balanza romana son instrumentos imprescindibles para obtener el peso de un objeto a partir de la idea de equilibrio. En 1899, se define el *kilogramo* como la masa de un litro de agua pura a su densidad máxima.

La capacidad es útil, tanto para líquidos como para áridos, aunque históricamente se han empleado distintas unidades para unos y otros. Las unidades de medida de capacidad derivan de los nombres de los recipientes empleados para el almacenamiento —por ejemplo, el almud, el barril, la cántara o la arroba—. En algunos casos, la capacidad se sustituye por el peso, especialmente por la dificultad que tiene reproducir a mano, con capacidad fija, recipientes como los odres de piel de cabra o los tarros de cerámica. En 1899, se define el *litro* como la capacidad de un recipiente de un decímetro cúbico (0,001 m^3), que también es descrito como el volumen ocupado por una masa de 1 kg de agua pura en su máxima densidad y a presión normal.

La medida del tiempo está asociada a la cuantificación de los fenómenos cíclicos que afectan a la vida del hombre. El Sol y la Luna nos permiten identificar el día y la semana. Con la sombra de una varilla sobre una tabla graduada es posible saber cuánto tiempo ha pasado desde que amaneció. El tamaño de la sombra también permite identificar las estaciones del año. Esta idea parece tener más de 4.000 años de antigüedad. La clepsidra o el reloj de arena miden el tiempo sin necesidad del Sol, y son buenos ejemplos de unidades de medida. Pero hasta el siglo XX, la hora, el minuto y el segundo fueron nociones imprecisas y arbitrarias, asociadas a la cambiante duración del día solar. Hasta 1964 se definió el segundo como la 1/86.400 parte del día solar medio del año 1900. Posteriormente, en 1967, y gracias a la construcción del reloj atómico, la XII Conferencia General de Pesas y Medidas definió el *segundo* como la duración de 9.192.631.770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.

ACTIVIDAD 3: Busca el origen de algunas unidades de medida de tiempo y responde a las siguientes preguntas: ¿por qué se divide el año en 365 días?, ¿y en 12 meses?, ¿por qué el día se divide en 24 horas?, ¿y las horas en 60 minutos? ¿y los minutos en 60 segundos?

El manejo de unidades de medida evoluciona simultáneamente con los instrumentos para medir y las técnicas de medida. Desde el punto de vista matemático, este proceso da lugar a una interesante relación entre la aritmética y la geometría:

- Encontrar particiones de la unidad y representarlas mediante números adecuados da lugar a la idea de fracción y de número decimal.
- La necesidad de seguir subdividiendo una unidad de forma indefinida para encontrar la precisión adecuada está relacionada con la idea de infinito.
- La necesidad de encontrar una medida común, por un lado, genera propiedades de la divisibilidad, mientras que, por otro lado, da lugar a los inconmensurables como idea geométrica y a los irracionales como conjunto de números.
- La necesidad de medir contornos irregulares o curvos («cuadrar» una superficie o un volumen) es una fuente de ideas para encontrar estrategias para medir: la descomposición y el completado, que veremos más adelante, junto con las técnicas de exhausción, se siguen empleando, tal y como se hacía en Grecia, para justificar el área del círculo o el volumen de la esfera.

ACTIVIDAD 4: Busca información para entender y explicar el método empleado por Arquímedes para expresar el volumen de la esfera y el área del círculo.

3. MAGNITUD. TIPOS DE MAGNITUDES

¿Qué es una magnitud? *Es una propiedad física que puede ser medida.* Esta definición del Diccionario de la Real Academia Española genera numerosas dudas tan pronto como tratamos de buscar ejemplos o pensamos en el comportamiento de las propiedades de los objetos: ¿cómo se puede medir el aroma?, ¿y el brillo?, ¿qué ocurre si juntamos dos líquidos de distinta temperatura? Inmediatamente, empezamos a percibir una amplia variedad de propiedades que nos permiten distinguir unas magnitudes de otras. Tenemos, por tanto, distintas formas de clasificar las magnitudes según distintos criterios:

- Al juntar dos líquidos de distinta temperatura obtenemos un líquido cuya temperatura no es la suma de las temperaturas originales. Sin embargo, si eliminamos un tabique que separa dos habitaciones, la habitación resultante tiene por superficie la suma de las superficies de las habitaciones originales. La superficie es una magnitud *extensiva,* mientras que la temperatura es *intensiva*.
- La altura de un edificio puede tomar cualquier valor, dentro de ciertos límites. Si encontramos dos edificios de alturas 14 m y 15 m, no hay impedimento para que haya otro que mida 14,5, otro que mida 14,52, otro de 14,257, etc. Sin embargo, si vamos de compras, no encontraremos ningún precio menor de 1 céntimo. Algunas veces, vemos precios escritos con más de dos decimales, por ejemplo, el precio de la gasolina, pero para abonar el gasto que hayamos realizado hay que hacer un redondeo, ya que no podríamos pagar ni podrían darnos la vuelta de cantidades menores que 1 céntimo. La altura de un edificio —la longitud— es una magnitud *continua,* mientras que el valor monetario es una magnitud *discreta*.
- Si queremos medir el largo de una habitación rectangular, superponemos una cinta métrica, lo cual permite determinar cuántas veces se repite el centímetro hasta cubrir ese largo. Pero si deseamos saber la superficie del suelo de la misma habitación, no superponemos centímetros cuadrados y contamos cuántos caben, sino que calculamos su largo y su ancho y hacemos su multiplicación. La longitud es una magnitud *fundamental,* mientras que la superficie es una magnitud *derivada*. En general, el carácter fundamental o derivado de una magnitud no es una propiedad intrínseca de esa magnitud, sino que depende del sistema de unidades que se establezca. Lo esencial es haber establecido relaciones entre varias magnitudes; fijando algunas de ellas como fundamentales, las demás serán derivadas de ellas. Más adelante veremos las magnitudes fundamentales y derivadas en el Sistema Internacional de Unidades.
- Podemos decir que una bola de billar tiene una masa de 210 g. Pero si decimos que hemos golpeado a la bola con una fuerza de 5 N, no estaremos dando idea del movimiento que ha producido dicha fuerza; para dar esta información necesitamos decir en qué dirección y sentido hemos ejercido dicha fuerza. La masa es una magnitud *escalar* y la fuerza es una magnitud *vectorial*.

ACTIVIDAD 1: Sitúa las magnitudes que se tratan en Primaria según la clasificación anterior. Busca otros ejemplos de magnitudes de cada uno de los tipos.

4. ESTRUCTURA CONCEPTUAL DE LA NOCIÓN DE MAGNITUD

El proceso de constitución de la idea de magnitud y de su medida involucra distintos conceptos y procesos matemáticos: una vez identificada la *magnitud,* se llevan a cabo procesos de clasificación y seriación que contribuyen al desarrollo de la idea de *cantidad de magnitud;* ésta es una noción que necesita un cierto grado de abstracción, ya que requiere concebir la idea de cantidad como el valor de una cualidad compartida por una colección de objetos distintos: todos los objetos con la misma longitud forman parte de la misma clase, tienen esa misma cantidad de magnitud; en particular, es necesario identificar qué acciones sobre un objeto conservan una determinada cantidad de magnitud del mismo. El siguiente proceso es asociar un número a una cantidad de magnitud, es decir, *comparar con una unidad* para obtener la *medida* de esa cantidad. Para ello, es necesario establecer un convenio: fijamos una cantidad de magnitud como referencia, es decir, una *unidad de medida,* y determinamos el número de veces que esa unidad ha de reiterarse hasta obtener la cantidad de magnitud que tenemos. La obtención de la medida se realiza siguiendo estrategias variadas, asociadas a cada tipo de magnitud y diferentes según la unidad de medida utilizada. Las equivalencias entre distintas unidades de medida y, por consiguiente, la obtención de la medida mediante distintas unidades, completan el conjunto de procesos propios de este tema en Primaria. En la figura 14.2 mostramos un esquema de este proceso.

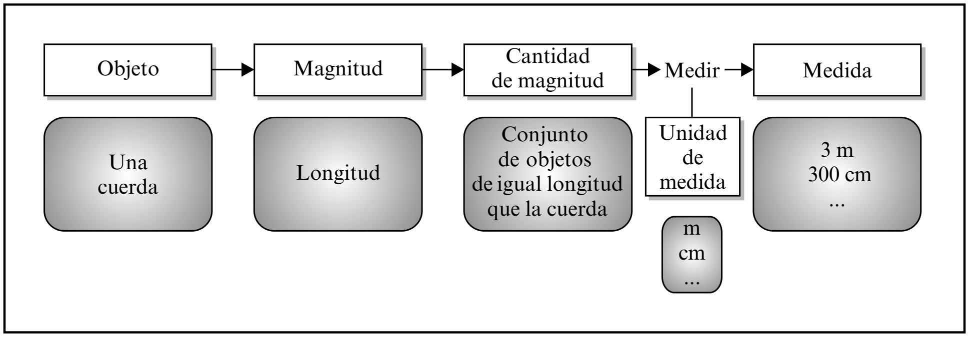


Figura 14.2.—Conceptos y procesos principales del tema.

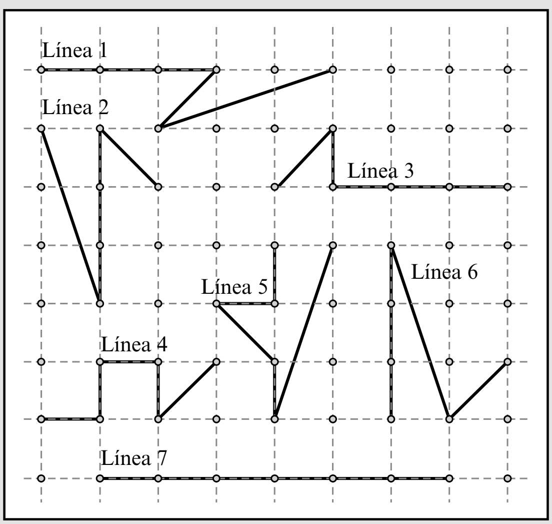
5. CANTIDAD DE MAGNITUD

Las acciones de clasificar y ordenar aparecen vinculadas de forma natural a la idea de magnitud. Estas acciones se llevan a cabo mucho antes de que se trate formalmente la medida y constituyen un antecedente necesario para ella. Es posible decidir si dos tiras de papel son iguales sin más que poner una al lado de la otra. También es posible ordenar un par de objetos según su peso sin más que sujetarlos con la mano, aunque si son varios objetos, ya no será tan fácil ordenarlos mediante este método.

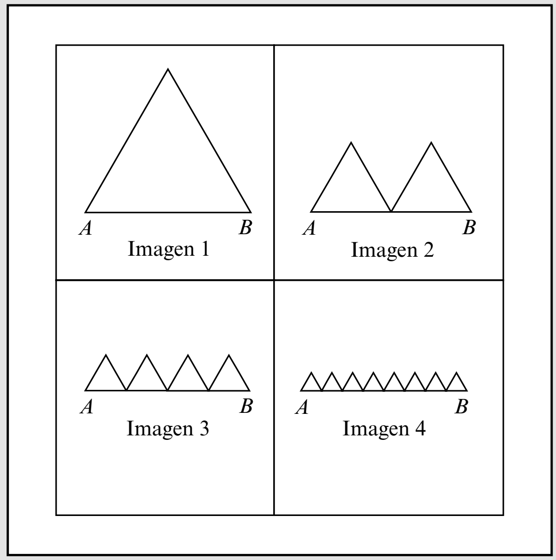
ACTIVIDAD 1: Identifica propiedades de las piezas de un tangram que sean magnitudes. Establece comparaciones directas entre dichas magnitudes que te permitan igualar u ordenar las distintas piezas.

La clasificación de objetos atendiendo a su igualdad respecto de una magnitud da lugar a la idea de cantidad de magnitud. Esta noción surge al considerar como equivalentes todos los objetos que son iguales respecto de la magnitud considerada. Por ejemplo, un folio es equivalente a una baldosa, a una pantalla de ordenador, a una bandeja, a un pañuelo, etc., siempre que tengan la misma cantidad de superficie. Esa cantidad es la cualidad común compartida por todos los objetos que se pueden clasificar bajo el criterio «tanto... como».

ACTIVIDAD 2: Considera las siguientes líneas poligonales en el geoplano. Agrupa aquellas que tengan la misma longitud. Observa que para resolver esta actividad no es necesario utilizar una unidad de medida preestablecida, basta establecer comparaciones que permitan garantizar la igualdad o diferencia entre longitudes:



ACTIVIDAD 3: En las cuatro imágenes siguientes se muestran triángulos equiláteros construidos sobre un segmento *AB*. En cada imagen, los triángulos que aparecen son iguales entre sí. ¿Qué puedes decir de la longitud de los perímetros de las figuras que aparecen en estas imágenes? Explica tu respuesta:



En la actividad 2, las líneas 1, 2, 5 y 6 tienen la misma longitud, muestran la misma cantidad.

En la actividad 3 los perímetros de las distintas imágenes tienen la misma longitud, muestran la misma cantidad.

6. MEDIR. MEDIDA DE MAGNITUDES

Medir *es asignar un número a una cantidad de magnitud. Dicho número es su* ***medida*** *e indica las veces que esa cantidad de magnitud contiene a la unidad de medida, es decir, a la cantidad que se toma como referencia o patrón.*

Podemos comparar y ordenar magnitudes sin necesidad de utilizar el número que nos da su medida. De hecho, durante siglos se ha hecho así. Pensemos en momentos históricos en los que sólo se admitían los números naturales y sus fracciones y, sin embargo, se utilizaban sofisticados métodos geométricos para establecer relaciones entre magnitudes continuas como la longitud, la superficie o el volumen. Pero la asignación de un número a una magnitud facilita su tratamiento. Así, se acaban desarrollando vínculos entre la aritmética y la geometría que proporcionan interesantes procedimientos de medida.

Los procedimientos de medida de magnitudes pueden ser muy sofisticados y dependen de cada tipo de magnitud. En Primaria, las magnitudes longitud, superficie, capacidad, amplitud angular y masa se materializan de forma sencilla y tienen modelos que se prestan especialmente bien al estudio de los procesos implicados en la medida de magnitudes; en algunos de ellos nos detendremos más adelante, tras hablar de la unidad de medida. El tiempo se mide mediante instrumentos que proporcionan la medida sin que se perciba el procedimiento empleado, por lo que su estudio se reduce a hacer intercambios entre unidades de medida. Lo mismo ocurre con el valor monetario.

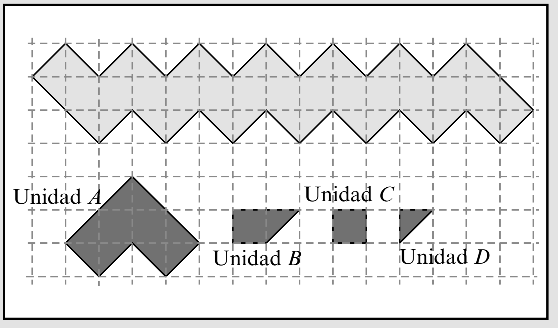
7. UNIDAD DE MEDIDA

En los procedimientos informales de comparación de magnitudes aparecen las primeras ideas sobre la *unidad de medida,* por ejemplo, cuando se utiliza una parte del propio cuerpo como término común de comparación de longitud, o una varilla para construir una torre de la misma altura que otra dada. En un primer momento se toman unidades arbitrarias que sólo sirven para medir un objeto; después se toman unidades que dependen de la forma o el tamaño de los objetos —grandes para objetos grandes y pequeñas para objetos pequeños—; hasta que, progresivamente, se forma la idea de unidad desvinculada de los objetos que van a medirse tanto en forma como en tamaño.

Las primeras unidades de longitud que manejan los escolares son el palmo, el pie y el paso; también usan objetos de uso cotidiano, como un palillo, un lápiz o un folio. Con estos objetos se mide el largo de una mesa o el ancho de la clase. Los escolares perciben que distintas unidades proporcionarán distintos valores para la medida. También perciben la necesidad de usar múltiplos de una unidad —para medir con eficacia objetos grandes— y submúltiplos —para mejorar la precisión de la medida—.

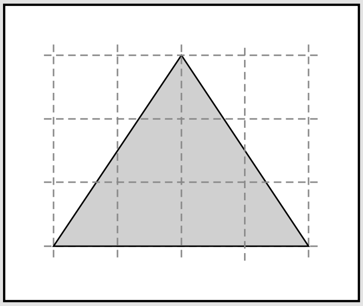
La idea de pavimentar una superficie rectangular contando el número de baldosas necesario permite introducir el concepto de unidad de superficie. Trabajar con baldosas de distintas formas y tamaños proporcionará diferentes valores a la medida, aunque la cantidad de superficie no cambie. Pero con la superficie aparecen otras magnitudes, como la forma o las dimensiones lineales (largo, ancho...) que interfieren en la idea de unidad.

ACTIVIDAD 1: Mide el área de la figura siguiente utilizando cada una de las unidades *A*, *B*, *C* y *D*:

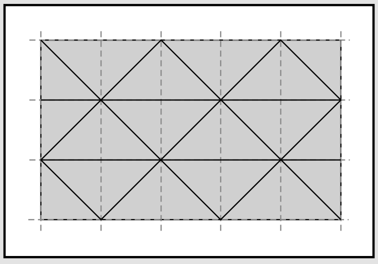


ACTIVIDAD 2:

a) Si afirmamos que el área del triángulo siguiente es de 12 unidades, ¿qué unidad de medida estaremos empleando?:



b) ¿Cuál puede ser la unidad de medida si afirmamos que la figura siguiente tiene un área de 30 unidades?:



ACTIVIDAD 3: Localiza actividades en un libro de texto de Primaria en las que se trabaje la idea de unidad de medida, por ejemplo, tareas en las que se pida medir algún objeto empleando distintos referentes (un lápiz, un libro, la palma de la mano, el pie, etc.), o tareas en las que se solicite algún tipo de justificación sobre el manejo de distintas unidades de medida, como la siguiente:

Pepe y Pepa miden el ancho de su aula en pasos y en pies. Obtienen los siguientes resultados:

Pepa: 9 pasos, o también 22 pies.
Pepe: 5 pasos, o también 17 pies.

Explica por qué obtienen distintas medidas. ¿Quién crees que es más alto de los dos? ¿Por qué?

En la capacidad, las unidades de medida se materializan mediante distintos recipientes, de distinta forma y tamaño. Es importante usar recipientes de la misma forma aunque de distinta capacidad, y de distinta forma aunque de la misma capacidad.

En la masa, se pueden construir balanzas romanas, con cuerdas y varillas, que permiten utilizar unidades de medida no convencionales, como fichas, piedras, etc. Se pueden establecer comparaciones entre masa y capacidad, precisamente para mostrar que son magnitudes independientes.

Las unidades de medida de tiempo se pueden materializar mediante un reloj de arena o de sol, aunque también se manejan unidades como el día, la semana, etc., más difíciles de concretar si no es a través de un modelo (calendario) en el que se señale el paso del tiempo. Es importante relacionar entre sí las distintas unidades de tiempo que, adicionalmente al tratamiento de medios y cuartos habitual en la capacidad y el peso, ahora emplea múltiplos de 60.

El tratamiento de las unidades monetarias también se centra en el manejo de múltiplos y submúltiplos. Las monedas de distinto valor constituyen un modelo muy interesante para tratar la descomposición de números a través del sistema decimal de numeración y las operaciones aritméticas.

El grado, como unidad angular, tiene mucha similitud con las unidades de medida de longitud: se representa mediante una marca en el transportador y el ángulo se mide superponiendo el transportador sobre el ángulo. Sin embargo, la unidad radián es mucho más compleja por la dificultad de tratar la idea de número de veces cuando se manejan cantidades como π radianes. Aunque el radián se introduce en Primaria, su estudio se desarrolla fundamentalmente en Secundaria. El intercambio entre unidades de medida radián y grado se trata en el contexto numérico, utilizando la relación π radianes = 180º, que se aplica habitualmente en forma de regla de tres.

ACTIVIDAD 4: Identifica o diseña tareas de Primaria en las que:

- Se utilicen unidades de medida no convencionales.
- Se perciba la relación entre la unidad de medida elegida y la medición obtenida.
- Se exprese la misma cantidad de magnitud mediante distintas unidades de medida.
- Haya que elegir la unidad de medida adecuada a la cantidad de magnitud de que se dispone.

7.1. El Sistema Métrico Decimal y el Sistema Internacional de Medidas

Como hemos visto en una sección anterior de este capítulo, la diversidad de unidades de medida de magnitudes que se han empleado a lo largo de la historia es ingente. Pero el intercambio comercial, cultural y científico requiere que se utilicen nombres y referentes compartidos por todos. También es importante que los múltiplos y submúltiplos de la unidad se expresen de forma que las operaciones aritméticas entre ellos sean sencillas. Estas ideas se concretan por primera vez tras la Revolución Francesa. Distintos científicos se proponen establecer un sistema de medidas neutral y compartido por todas las naciones. Adoptan dos principios básicos para llevar a cabo esta tarea: las unidades han de estar basadas en la observación científica y deben ser coherentes con el sistema de numeración decimal. Este proceso conduce a la celebración en París, en 1889, de la Primera Conferencia General de Pesas y Medidas, que valida los cálculos realizados para construir el metro, definido como la diezmillonésima parte de la longitud del cuadrante del meridiano terrestre. A partir del metro se describen las unidades de las demás magnitudes que conforman el Sistema Métrico Decimal:

- El metro cuadrado para la superficie.
- El metro cúbico para el volumen.
- El litro, que es la capacidad de un recipiente de un decímetro cúbico.
- El kilo, que es la masa de un litro de agua.

La Conferencia General de Pesas y Medidas se repite cada cuatro años y toma decisiones en materia de metrología. En la Undécima Conferencia Internacional de Pesas y Medidas, celebrada en 1960, se establece el Sistema Internacional de Unidades (SI), también llamado Sistema Internacional de Medidas. Este sistema define las siete magnitudes fundamentales que aparecen en la tabla 14.1. En España, el Real Decreto 2032/2009, establece que:

> *El Sistema Legal de Unidades de Medida obligatorio en España es el Sistema Internacional de Unidades (SI) adoptado por la Conferencia General de Pesas y Medidas y vigente en la Unión Europea.*

TABLA 14.1

Magnitudes fundamentales en el SI

Magnitud	Unidad básica	Símbolo
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	Amperio	A
Temperatura	Kelvin	K
Cantidad de sustancia	Mol	mol
Intensidad luminosa	Candela	cd

El SI también describe numerosas magnitudes derivadas; mostramos algunos ejemplos en la tabla 14.2. Hemos incluido en dichas tablas las unidades de medida que se adoptan para cada magnitud y el símbolo que se emplea en cada caso.

TABLA 14.2

Algunas magnitudes derivadas en el SI

Magnitud	Unidad básica	Símbolo
Superficie	Metro cuadrado	m^2
Volumen	Metro cúbico	m^3
Amplitud	Radián	rad
Velocidad lineal	Metro por segundo	m/s
Aceleración lineal	Metro por segundo cuadrado	m/s^2
Densidad	Kilogramo por metro cúbico	kg/m^3
Velocidad angular	Radián por segundo	rad/s
Aceleración angular	Radián por segundo cuadrado	rad/s^2

Para manejar los múltiplos y submúltiplos de las unidades de medida anteriores se emplean los convenios que aparecen en la tabla 14.3 sobre los nombres y los símbolos.

ACTIVIDAD 1: Busca actividades de Primaria en las que se ponga de manifiesto la importancia de utilizar un sistema de unidades compartido; por ejemplo, un problema como el siguiente, en el que una interpretación errónea de las unidades dé lugar a un malentendido:

Juan tiene un amigo inglés que compite con una moto de cross. Su moto consume unos 5 galones de gasolina en cada carrera. Ha llegado a España para una competición y pide recargar 5 en una gasolinera, sin indicar las unidades. ¿Crees que podrá terminar la carrera?

ACTIVIDAD 2: Los alumnos de Primaria han de establecer relaciones entre múltiplos y submúltiplos de distintas unidades de medida. Identifica algún tipo de representación gráfica que puedes utilizar, como maestro, para presentar en el aula los múltiplos y submúltiplos del metro (desde el mm hasta el km) y del metro cuadrado (desde el mm^2 hasta el km^2).

TABLA 14.3

Convenios para múltiplos y submúltiplos de una unidad de medida

Factor	Prefijo	Símbolo
10^{24}	yotta	Y
10^{21}	zeta	Z
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10^{1}	deca	da

Factor	Prefijo	Símbolo
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a
10^{-21}	zepto	z
10^{-24}	yocto	y

8. MEDICIÓN DIRECTA. PROCEDIMIENTOS DE MEDIDA

> *Decimos que una medición es* ***directa*** *cuando la medida se obtiene reiterando sucesivamente la unidad de medida, con sus múltiplos y submúltiplos, hasta completar la cantidad de magnitud de que se disponga.*

Por ejemplo, la medición es directa cuando utilizamos un metro para medir una cuerda, cuando embaldosamos un suelo y contamos las baldosas utilizadas, cuando ponemos pesas en una balanza de dos platos hasta conseguir el equilibrio, etc.

Cuando no podemos obtener una medida por comparacion directa con la unidad, sino que aplicamos alguna fórmula o realizamos alguna operación matemática que, posiblemente, utiliza magnitudes distintas de la que deseamos medir, estamos haciendo una medición indirecta. Por ejemplo, la medición es indirecta cuando para obtener la superficie de un objeto rectangular multiplicamos su largo por su ancho.

A continuación nos detendremos en analizar los procedimientos de medida empleados en Primaria para obtener medidas de longitud, área y volumen. Las demás magnitudes estudiadas en Primaria se miden a través de instrumentos y proporcionan menos riqueza desde el punto de vista de los procedimientos de medida. Así, para medir la masa de un objeto, el instrumento de medida por excelencia es la balanza. En este caso, la representación de la unidad de medida no tiene, en general, relación directa con el objeto a medir: un conjunto de pesas sirve igualmente para pesar algodón o arena. Lo mismo ocurre con la medida del tiempo a través de distintos tipos de relojes. El valor monetario viene dado por procedimientos ajenos al sujeto. Las medidas angulares se miden, mediante instrumentos como el transportador, por superposición directa sobre el objeto a medir, o el sextante, con el cual basta encuadrar adecuadamente el origen y el final de la apertura que se desee medir.

8.1. Procedimientos de medida de longitud

Disponemos de numerosos instrumentos de medida de longitud: regla, cinta de medir, metro de carpintero, rueda graduada, pie de rey o calibrador, astrolabio, altímetro, tornillo micrométrico (figura 14.1), esferómetro (figura 14.3), etc.

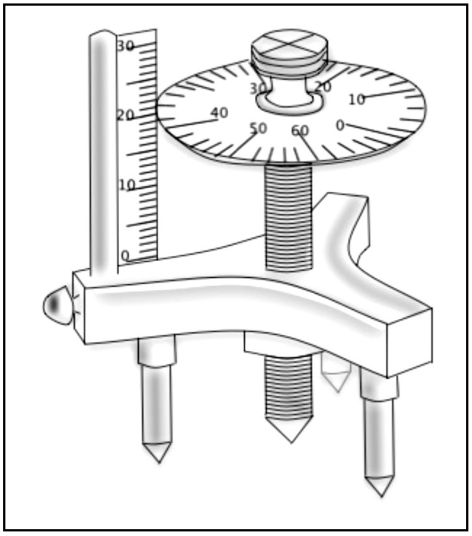


Figura 14.3.—Esferómetro.

> *En los objetos cotidianos que manejan los alumnos en el aula, la longitud se mide reiterando la unidad de medida sobre el objeto a medir al superponer algún tipo de regla o cinta graduada. En estos casos, medir está asociado a la idea de contar.*

Si la unidad es muy grande, se subdivide y se establecen las equivalencias. El objeto se puede trasladar o girar para poder compararlo con la unidad de medida. Se puede trocear en partes y su longitud será la suma de las longitudes de las distintas partes. Si el objeto está curvado, habrá que desenrollarlo o rectificarlo para obtener su medida de forma directa: para medir el contorno de un círculo, el perímetro de un árbol o la talla de cintura de una persona, superponemos un hilo o una cinta que luego estiraremos sobre una regla. Cualquier otro proceso para medir objetos curvos de forma directa y exacta puede resultar muy sofisticado. Más adelante lo retomaremos desde el punto de vista de la estimación. Cuando la longitud hace referencia a una distancia en el plano, tiene la peculiaridad de que la medición se debe realizar en línea recta. En este caso, la suma de los caminos más cortos entre varios puntos no coincide con el camino más corto entre el primero y el último.

ACTIVIDAD 1: La casa de Juana está a 200 m del colegio. La de Juan está a 500 m del colegio. ¿Puedes determinar a qué distancia se encuentran las casas de Juana y Juan entre sí? Razona la respuesta.

El cálculo de la longitud como conteo de las veces que se repite la unidad lleva implícito el uso de los números naturales para expresar la medida. Si tenemos cantidades no enteras, podemos considerar los submúltiplos de la unidad, pero también podemos expresar su medida sin necesidad de utilizar números nuevos: la altura de una persona se expresa mediante una pareja de números naturales: 1 m 65 cm. Gracias a que el convenio de múltiplos y submúltiplos del metro utiliza el 10 como base, podemos establecer la equivalencia entre dicha pareja de naturales y el número decimal: 1,65 m. La medida también es uno de los contextos de uso destacados para los números racionales: la fracción surge como necesidad de expresar cantidades de magnitud menores que la unidad.

ACTIVIDAD 2: Ana estaba haciendo un dibujo de colores con tiras de papel de diferentes tamaños y colores. Además, contaba con una tira blanca que representa la unidad. A mitad de su trabajo, se dio cuenta de que le sobraban muchas tiras grandes y le faltaban tiras pequeñas, por lo que decidió cortar algunas de las grandes:

a) Cortó una tira de 5/3 en dos trozos. Si sabemos que uno de los trozos que obtuvo mide de 1/5, ¿cuál es la medida del otro trozo?

b) Luego, cortó otra pieza de 1/2 en dos trozos, de forma que uno de ellos medía 1/3 de tira blanca. ¿Cuál es la medida del otro trozo? Haz un dibujo para responder.

La idea de contar un número de veces (naturales) y de fraccionar la unidad (decimales y fracciones) se representa bien en la recta numérica. Pero en la recta hay muchos más números que también representan longitudes y que no se pueden expresar de forma exacta mediante decimales ni fracciones: los números irracionales. ¿Es posible obtener, mediante un procedimiento de medición directa, una medida irracional? Éste es el problema de los inconmensurables, que tiene su origen en la época griega. En una figura tan simple como el cuadrado, si tomamos el lado de un cuadrado como unidad de medida de longitud, no importa cuántas veces lo subdividamos, no podremos expresar con él la medida de la diagonal; dicho de otro modo, no es posible establecer una razón entre la diagonal y el lado de un cuadrado. Cuando medimos en situaciones cotidianas no surge esta cuestión, ya que obtenemos una medida aproximada y seguimos haciendo subdivisiones de la unidad hasta obtener la precisión adecuada a cada situación. En situaciones escolares, el Teorema de Pitágoras se utiliza con frecuencia como procedimiento de medida de longitudes y proporciona números irracionales como medida. Se profundiza en esta idea en el capítulo de medición indirecta, ya que, precisamente, la idea de inconmensurabilidad implica la imposibilidad de obtener un número irracional mediante un procedimiento de medición directa.

8.2. Procedimientos de medida de superficie

En Primaria, normalmente, se manipulan superficies planas. Aunque se trabaje con objetos en el espacio, su superficie se mide tras haber obtenido algún modelo plano; por ejemplo, la superficie de un prisma se obtiene tras desarrollarlo.

Para medir la superficie, se comienza por procedimientos de tipo geométrico que permiten obtener la medida de forma directa. Posteriormente, se introducen los métodos de medición indirecta, con el empleo de las fórmulas de área.

Los procedimientos geométricos se basan en:

- Comparar superficies por superposición.
- Pavimentar superficies con una unidad de medida (cuadricular).
- Descomponer una superficie en partes y sumar el área de cada parte.
- Recortar y recolocar una superficie.
- Completar una superficie con otras que nos faciliten el cálculo de la original.

Con frecuencia, estos métodos aparecen combinados. Por ejemplo, para medir el área de la figura 14.4*a*), utilizando como unidad de medida el cuadrado de la cuadrícula, descomponemos la figura y la recolocamos de forma que resulte muy fácil contar los 18 cuadrados que la componen [figura 14.4*b*)].

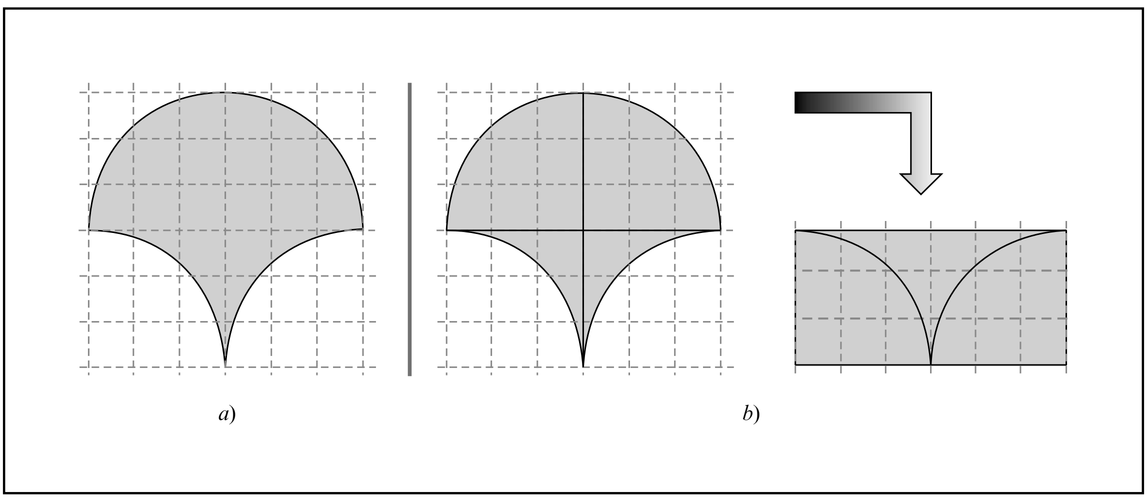


Figura 14.4

Para medir el área de la figura 14.5*a*), utilizando como unidad de medida el cuadrado de la cuadrícula, la completamos y calculamos el área de distintos trozos de su complemento, es decir, de los polígonos *A, B* y *C* de la figura 14.5*b*).

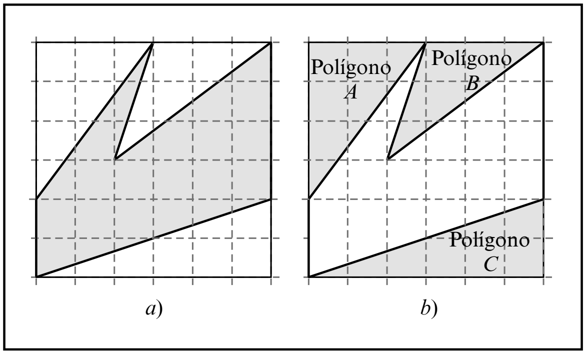


Figura 14.5

El área de cada uno de los polígonos *A, B* y *C* se puede obtener, de nuevo, completando cada uno de ellos al rectángulo que lo enmarca. En el caso del polígono *A* observamos (figura 14.6*a*) que dicho rectángulo mide 12 unidades, por lo que el polígono *A* mide la mitad, 6 unidades. Análogamente, vemos que el polígono *C* mide 6 unidades y el polígono *B* mide $12 - 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ unidades [figura 14.6*b*)].

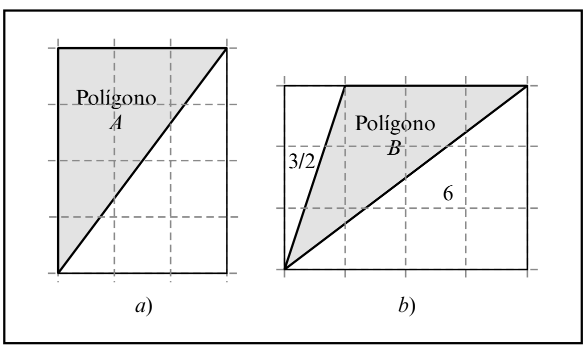
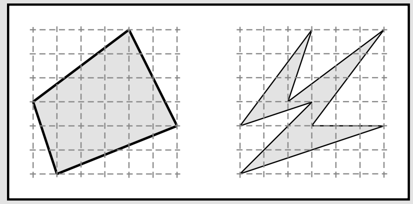


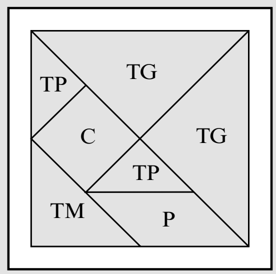
Figura 14.6

Por tanto, el área de la figura original será $36 - 6 - 6 - \frac{9}{2} = \frac{39}{2}$ unidades.

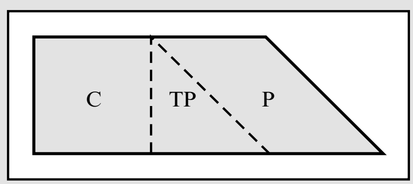
ACTIVIDAD 3: Tomando como unidad de medida el cuadrado de la cuadrícula, calcula el área de las figuras siguientes:



ACTIVIDAD 4: Vamos a denominar a las piezas del tangram como se indica en el dibujo (TG Triángulo Grande, TM Triángulo Mediano, TP Triángulo Pequeño, C Cuadrado y P Paralelogramo):



Considera como unidad de medida el trapecio siguiente, construido con las piezas C, TP y P del tangram:

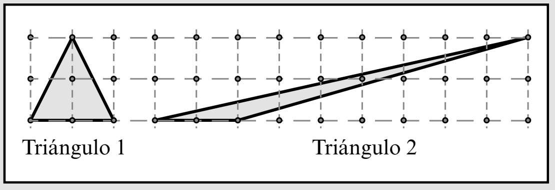


Utilizando esta unidad de medida:

a) Determina el área del triángulo TG.
b) Construye, con las piezas del tangram, una figura de área 2.
c) ¿Es posible construir con piezas del tangram una figura de área 7/2?

Sobre las figuras geométricas que se estudian en Primaria se manejan simultáneamente distintos atributos: la superficie, el perímetro, la anchura o la largura. Es frecuente que los escolares establezcan vínculos incorrectos entre ellos. Por ejemplo, consideran que si una figura tiene mayor área que otra, también tendrá mayor perímetro. Algunas actividades que permiten poner de manifiesto la independencia entre el perímetro y el área son las que aparecen a continuación.

ACTIVIDAD 5: Observa los dos triángulos siguientes. Compara sus áreas y sus perímetros:



ACTIVIDAD 6: Tomando las unidades estándar en el geoplano:

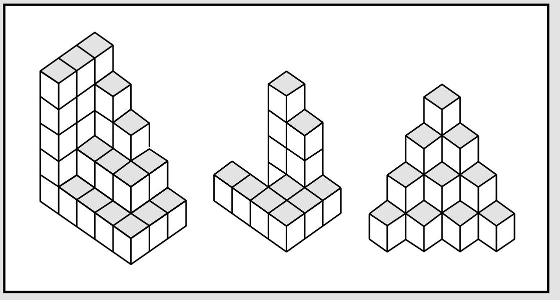
- Construye tres figuras que tengan área 12, pero con distinto perímetro.
- Construye tres figuras que tengan perímetro 16, pero con distinto área.

8.3. Procedimientos de medida de capacidad/volumen

La medida directa de la capacidad se realiza mediante la reiteración de la unidad en situaciones de llenado y/o vaciado y de inmersión; por ejemplo, se mide la cantidad de vasos que caben en un recipiente llenándolo con agua o arena, o se vierte su contenido en un vaso medidor, o se introduce un recipiente en otro más grande y se mide la cantidad de agua desplazada.

Cuando la capacidad se interpreta como espacio ocupado, se realizan procedimientos geométricos similares a los vistos para la superficie: rellenar un volumen con cubitos, descomponerlo en trozos y sumar cada parte, recortar y recolocar trozos, completar y restar después. En estos casos, aparecen interesantes problemas de visualización. Dado que ya no interviene la referencia a los líquidos, se expresa la unidad cúbica mediante el cubo de las dimensiones lineales, de forma que el litro queda sustituido por el dm^3.

ACTIVIDAD 7: Calcula el volumen de las siguientes figuras, tomando como unidad uno de los cubitos pequeños que las forman:



También ocurre que acciones como, por ejemplo, recortar y recolocar, que se materializaban de forma muy sencilla con la superficie, están ahora muy limitadas a figuras con forma de prisma. Por ello, se utilizan otras propiedades, entre las que cabe destacar el Principio de Cavalieri:

Si en dos objetos de igual altura las áreas de las secciones producidas por planos paralelos a la base son iguales, los objetos tienen el mismo volumen.

Gracias a esta propiedad podemos afirmar que todos los objetos de la figura 14.7, que han sido construidos con la misma altura y manteniendo el mismo área en la base, tienen el mismo volumen.

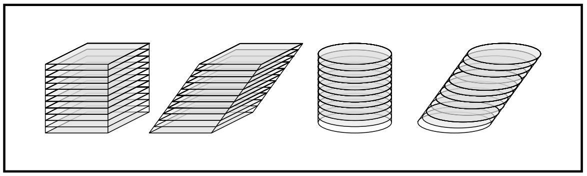
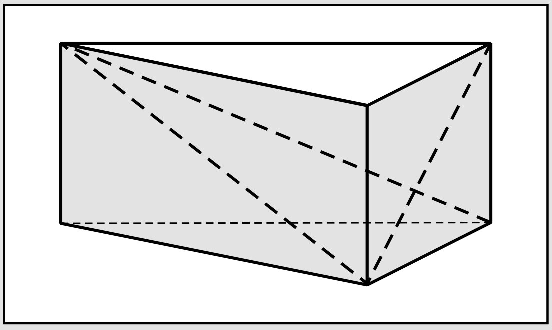


Figura 14.7.—Objetos con el mismo volumen.

ACTIVIDAD 8: Cortando un prisma triangular como el de la figura por las líneas punteadas, se obtienen tres pirámides triangulares. Construye un modelo de esta situación con cartulina. Justifica por qué las tres pirámides obtenidas tienen el mismo volumen:



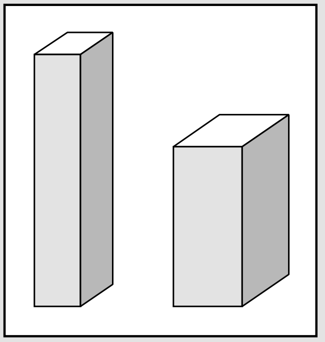
Indicación. Busca en cada pareja de pirámides dos bases iguales y comprueba si se puede usar el Principio de Cavalieri.

Igual que tratamos la independencia entre el perímetro y el área, es importante poner de manifiesto la independencia entre el área y el volumen mediante actividades como las siguientes:

ACTIVIDAD 9:

a) Con seis cubos unidad, construye cuatro objetos que tengan distinta superficie lateral.
b) Utilizando los seis cubos, ¿es posible construir figuras que tengan la misma superficie lateral pero distinto volumen?

ACTIVIDAD 10: Con dos folios iguales construye dos prismas sin tapa, uno poniendo el folio en vertical y el otro en horizontal, como indica la figura. ¿Tienen el mismo área lateral? ¿Y el mismo volumen?:



9. ESTIMACIÓN

En el capítulo 6 se introdujo la noción genral de estimación. En el caso de la medida, *estimar consiste en valorar el resultado de una medición sin ayuda de instrumentos, bien directamente, bien combinando con algún cálculo.* Al realizar estimaciones ponemos en juego las capacidades siguientes, que pueden considerarse requisitos previos a la elaboración de estrategias propias de estimación:

- Interiorización: tenemos una referencia perceptiva de las unidades de medida usuales para la magnitud que deseamos medir; por ejemplo, para medir un apartamento, tenemos una percepción de lo que representa 1 m^2 y expresaremos su superficie en m^2.
- Conocemos referentes: tenemos una idea de la cantidad de magnitud de objetos próximos al que vamos a medir; por ejemplo, sabemos que un apartamento medirá alrededor de 60 m^2.
- Conocemos algunas estrategias para el cálculo de la medida de ciertos trozos; por

ejemplo, sabemos que al multiplicar el largo por el ancho de cada habitación obtendremos su área, luego aplicamos el Teorema de Pitágoras para calcular la longitud de una diagonal, etc.

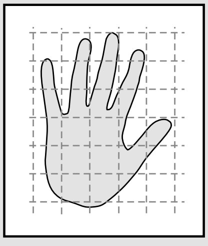
ACTIVIDAD 1 *(para interiorizar unidades):* Haz una lista de objetos cuya longitud mida, aproximadamente, 1 km, 1 m, 1 dm, 1 cm y 1 mm.

ACTIVIDAD 2 *(para establecer referentes):* Indica qué medida aproximada asignarías a los siguientes objetos:

- Longitud de un coche.
- Superficie de una cancha de tenis.
- Volumen de una piscina olímpica.
- Peso de un coche.

Si bien la comparación es un proceso básico en la estimación, se pueden clasificar las estrategias propias de estimación en dos grandes grupos: estrategias en las que la comparación es el único proceso y estrategias en las que, además, se realizan procesos de descomposición/recomposición. Por ejemplo, hacemos sólo comparación cuando para estimar la altura de una puerta nos colocamos al lado, comparamos con nuestra estatura y observamos que, aproximadamente, la altura de la puerta es de 1 y 1/3 de nuestra altura. En otros casos, es importante descomponer y recomponer, como en la actividad siguiente.

ACTIVIDAD 3: Estima la superficie de la palma de la mano:



Otro criterio importante que condiciona el tipo de estrategias es la relación entre el tamaño de la unidad de medida y del objeto a medir. Así, por ejemplo, cuando queremos estimar la altura de un edificio contamos el número de pisos y estimamos la altura de cada piso, por ejemplo, a partir de nuestra altura. Pero para estimar el grosor de un folio, apilamos un montón, estimamos su altura y la cantidad de folios que lo componen, y hacemos una división numérica.

ACTIVIDAD 4: Indica qué procedimiento utilizarías para estimar:

a) La altura de tu habitación.
b) La longitud de la costa española.
c) El peso de tu cabeza.
d) El volumen de una gota de agua.

ACTIVIDAD 5: ¿Sabrías explicar el tamaño de un millón de euros? Si llenamos una maleta con un millón de euros en monedas de 1 euro, ¿crees que una persona podría con ella? Estima el peso de 1 millón de euros en billetes de 500 euros, en billetes de 20 euros y en monedas de 2 euros.

La estimación está muy vinculada a la percepción visual. Por ello, es interesante estimar medidas en situaciones que pongan a prueba nuestros sentidos. Las actividades de medida de longitud de contornos curvos proporcionan un contexto muy rico para este propósito. Por ejemplo, ¿cómo estimar la longitud de la espiral de la figura 14.8?

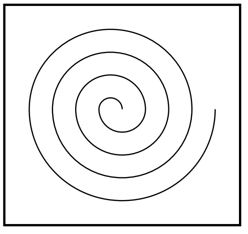


Figura 14.8.—Espiral.

Una posibilidad es la siguiente:

- Trocear en partes de tipo semicircunferencia.
- Estimar la longitud de dos partes consecutivas y la relación entre ellas.
- Utilizar la relación obtenida para estimar la longitud de cualquier semicircunferencia y, finalmente, sumar.

Para estimar la longitud de cada semicircunferencia (sin emplear fórmulas) se pueden realizar procesos de encuadramiento, es decir, de acotación de la medida entre dos valores. Por ejemplo, la longitud de la semicircunferencia se puede encuadrar utilizando polígonos por fuera y por dentro, como ya hicieron los griegos en el método de exhausción (figura 14.9):

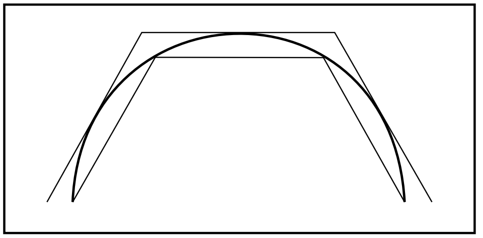
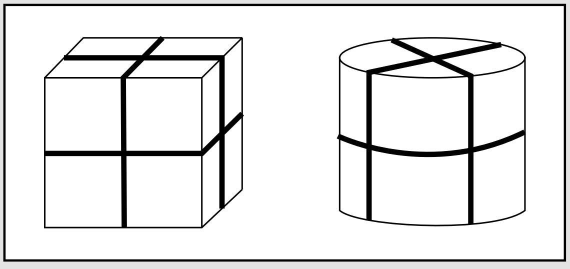


Figura 14.9.—Encuadramiento de la longitud de la semicircunferencia.

Para profundizar en este tema puedes consultar: Segovia, Castro, Rico y Castro (1998).

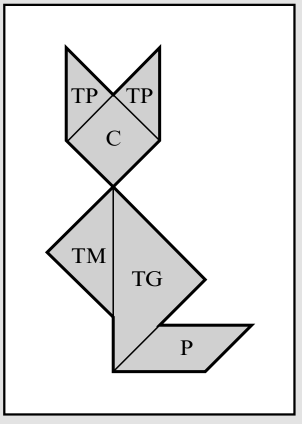
ACTIVIDADES PARA PRACTICAR

1. La figura siguiente muestra dos cajas de regalo atadas con una cinta. La primera caja es un cubo de 10 cm de arista; la segunda es un cilindro de altura y diámetro de 10 cm. ¿Qué puedes decir de la longitud de las cintas de estas cajas? Justifica tu respuesta:



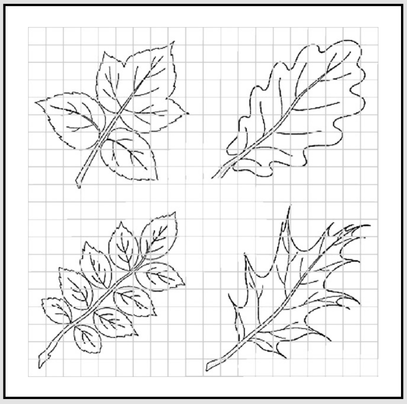
2. Determina la superficie de cada una de las piezas del tangram utilizando como unidad de medida el paralelogramo.

3. Considera la figura siguiente, formada con algunas piezas del tangram:



a) Construye otra figura con igual perímetro y diferente área.
b) Construye una figura con igual área y diferente perímetro.

4. ¿Cuáles de las siguientes figuras tienen mayor cantidad de superficie?:



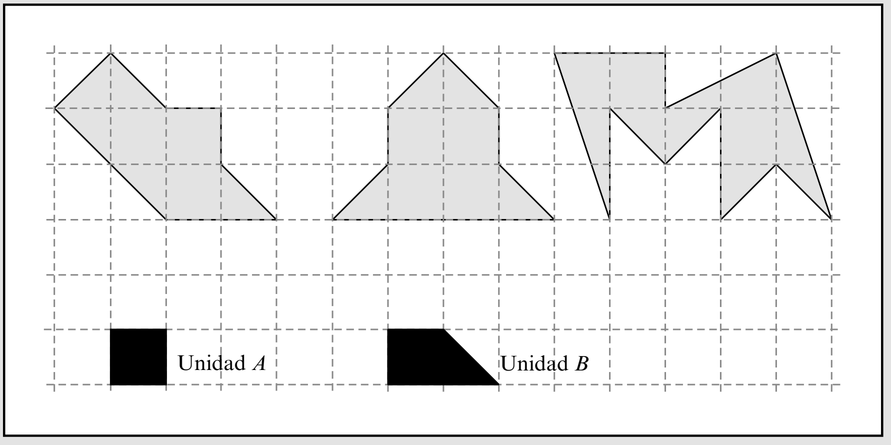
5. Determina el área de las siguientes figuras tomando las dos unidades, *A* y *B*:

6. Tomando como unidad de medida el cuadrado del geoplano, representa en el geoplano triángulos que tengan área 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5...

7. Indica qué estrategias de medida directa utilizarías en un aula de Primaria para obtener las medidas de los siguientes objetos:

a) La superficie de la pizarra.
b) La capacidad de la papelera de clase.
c) El volumen del aula.
d) El peso de la silla.

8. Viajamos a Madrid en un autobús que ya no tiene que realizar más paradas. A las 13:55 vemos un panel que indica que Madrid está a 185 km. ¿Será posible llegar antes de las 16:00?



INVESTIGA Y REFLEXIONA

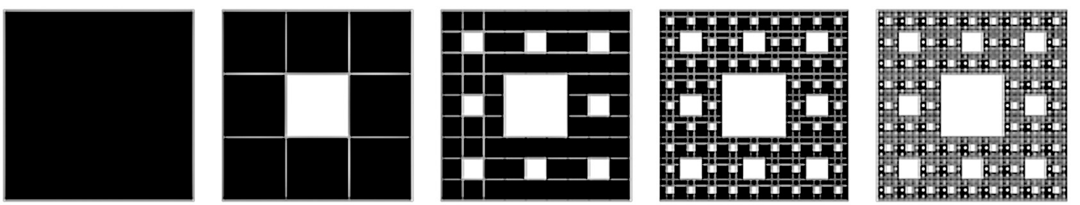
1. Localiza la fotografía aérea de un incendio. ¿Cómo harías una estimación de la superficie quemada?

2. Investiga y realiza un informe de las unidades antiguas, los instrumentos de medida antiguos y procedimientos de medición que se siguen utilizando en tu población de origen.

3. Investiga en medios de comunicación e Internet y realiza un informe sobre las medidas que caracterizan los distintos ámbitos del desarrollo sostenible.

4. La alfombra de Sierpinski es un objeto geométrico que se construye de la manera siguiente:

- Se toma un cuadrado, que se divide en 9 cuadrados iguales. Se recorta el cuadrado central.
- Con cada uno de los cuadrados que han quedado, se repite el mismo procedimiento.
- Se vuelve a repetir tantas veces como se desee.



Estima la superficie de la alfombra de Sierpinski después de haber repetido el procedimiento unas 100.000 veces. Estima también el perímetro.

BIBLIOGRAFÍA

Castro, E. (Ed.) (2001). *Didáctica de la Matemática en la educación primaria*. Madrid: Editorial Síntesis.

Chamorro, C. y Belmonte, J. M. (1988). *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales.* Madrid: Síntesis.

Del Olmo, M. A., Moreno, M. F. y Gil, F. (1989): *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: Síntesis.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2003). *Medida y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Disponible en http://www.ugr.es/local/jgodino/

Segovia, I., Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1998). *Estimación en cálculo y medida.* Madrid: Síntesis.

Socas, M. (Coord.) (2003). *La medida en la educación primaria*. Las Palmas de Gran Canaria: Dirección General de Ordenación e Innovación Educativa.

15 Proporcionalidad entre magnitudes. Medidas indirectas

FRANCISCO FERNÁNDEZ GARCÍA
ISIDORO SEGOVIA ALEX

Bombilla convencional a sustituir	Lámpara de bajo consumo que ofrece la misma intensidad de luz	Ahorro en kwh durante la vida de lámpara	Ahorro en coste de electricidad durante la vida de la lámpara (euros)
40 W	9 W	248	35
60 W	11 W	392	55
75 W	15 W	480	67
100 W	20 W	640	90
150 W	32 W	944	132

Coste considerado por kwh: 0,14 euros

Figura 15.1.—El ahorro en euros es proporcional al de kwh de la vida de la lámpara.

En muchos casos y contextos, las cantidades de una misma magnitud o de distintas magnitudes, sean discretas o continuas, tienen una relación sencilla que permite determinar la medida desconocida de una en función de otra cantidad, de la que se conoce su medida. Por ejemplo, según la figura 15.1, podremos saber la potencia que debe tener una lámpara de bajo consumo que sustituya a una convencional y el ahorro energético y económico que va a suponer. Es la relación de proporcionalidad directa la que liga unas cantidades con otras a través de la multiplicación, que puede resumirse en la expresión $y = k\,x$.

Esta relación, en unos casos está establecida por la propia naturaleza, como, por ejemplo, la relación entre la altura y la longitud de la sombra de una persona; en otros casos, la relación se establece mediante un convenio que facilita la medida de determinadas cantidades cuando su medición directa es muy difícil y costosa. Por ejemplo, un reloj clásico, a través del movimiento circular y regular (movimiento angular) de sus manecillas, permite medir cantidades de tiempo.

Casos especiales de medida lo constituyen las medidas de las cantidades de superficie y volumen. No es fácil manejar instrumentos de medida que permitan realizar directamente la medición de, por ejemplo, la superficie de una habitación o el volumen de una caja. Otro caso especial de medida lo constituyen aquellas cantidades que, existiendo instrumentos para su medición, sin embargo, o las cantidades no son accesibles o bien no es fácil realizar esta medición, como, por ejemplo, la altura de un gran árbol o la longitud de una circunferencia.

En todos los casos referidos, la relación de proporcionalidad resuelve el problema, bien a través de operaciones aritméticas sencillas, como la longitud de una circunferencia a través de la multiplicación del valor de π por la longitud del diámetro, o bien a través de aparatos que se construyen, como el teodolito. Así, la medida de una cantidad que puede ser difícil o imposible de medir directamente se obtiene a través de la medida de otra cantidad cuya medición resulta sencilla.

En este capítulo nos referimos a las medidas indirectas con base en la proporcionalidad. En primer lugar, se presenta la proporcionalidad en el currículo escolar para, después, hacer referencia a las situaciones y contextos donde ésta se usa. Las referencias históricas ponen de manifiesto la necesidad y utilidad de estos conocimientos matemáticos a lo largo del tiempo. A continuación, se presentan los conceptos básicos asociados a la proporcionalidad y se construyen las herramientas que permiten resolver las situaciones de medida que se han indicado.

1. LA PROPORCIONALIDAD Y EL CURRÍCULO ESCOLAR

El tratamiento de los temas en los que se aborda y desarrolla el razonamiento proporcional corresponde a la Enseñanza Secundaria. Sin embargo, un objetivo en la Enseñanza Primaria es apreciar la importancia de la actividad matemática en cuestiones de la vida cotidiana, como las referentes a temas de economía, consumo, alimentación y otras relaciones de proporcionalidad. Igualmente, corresponde a esta etapa estudiar los mensajes e informaciones que se reciben a través de los medios de comunicación en los que se relacionan diversas magnitudes, lo cual requiere una preparación básica de los ciudadanos como usuarios, emisores y receptores inteligentes de información.

Por otra parte, en los contenidos de Primaria referentes a la *medida,* se alude a la necesidad de operar con partes más pequeñas que el objeto medido y se especifica que se deberá trabajar en correlación con los contenidos numéricos y las relaciones entre la totalidad del objeto y las partes, así como su expresión métrica.

El razonamiento relacionado con la razón de cantidades y la proporción es un instrumento intelectual usado, normalmente con éxito, por sujetos con una mínima capacidad en matemáticas en contextos y situaciones sencillas. No obstante, el esquema operativo de la proporcionalidad, que exige el conocimiento de la igualdad de dos razones y una estrategia compensatoria entre sus términos, es difícil y no se alcanza hasta la etapa de las operaciones formales; incluso algunos adultos no llegan a su dominio completo.

Estas razones nos llevan a considerar conveniente la incorporación de un capítulo de esta índole para la formación de profesores de Primaria, en el que se aborde la proporcionalidad desde una triple perspectiva:

- Como instrumento de trabajo científico: longitud, superficie, volumen, velocidad, densidad, escala, etc., son conceptos en los que está implicada la proporcionalidad.
- Como estructura conceptual que relaciona gran diversidad de nociones básicas.
- Como campo de entrenamiento y práctica en un razonamiento matemático básico.

2. IMPORTANCIA SOCIAL Y CULTURAL DE LA PROPORCIONALIDAD

Los contextos donde la proporcionalidad tiene un papel relevante pueden clasificarse en dos grandes familias: contextos asociados con leyes de la naturaleza y contextos donde la proporcionalidad se establece por medio de un convenio.

En el primer caso estarían, por ejemplo, la relación entre el peso y la masa de un objeto, la relación entre un ángulo y el arco que subtiende en una determinada circunferencia, la capacidad y el volumen de un recipiente, el volumen de líquido y su altura en una vasija, la longitud y superficie de determinados objetos planos, la altura y la sombra que proyecta un cuerpo y el tamaño percibido y la distancia a la que nos encontramos de un objeto, entre otros.

En el segundo contexto se incluyen diferentes situaciones, fundamentalmente de carácter comercial, artesanal o industrial, todas ellas resultado de reglas o convenios socialmente establecidos. Cuando el dinero interviene como una magnitud con la cual las demás establecen relaciones de proporcionalidad, estamos ante situaciones comerciales, como son las relaciones del peso de productos /euros, cartones de leche/ euros, longitud de tela/euros, etc. Otras vienen referidas a repartos, por ejemplo, los beneficios de una empresa entre sus accionistas. Situaciones artesanales o profesionales son, a su vez, las que tienen que ver con recetas o mezclas para la obtención de medicinas, bebidas, pinturas y recetas de cocina, entre otras. Situaciones industriales afectan a cualesquiera tipos de composiciones para obtener productos en que intervienen cantidades de distinta procedencia, según porcentajes establecidos, como es el caso de aleaciones como la del bronce, la composición de tejidos y de carburantes y muchos otros productos basados en fórmulas. Se incluyen también las representaciones a escala.

La importancia y uso de la proporcionalidad en la vida cotidiana hacen que exista una terminología propia que se ha instalado en el lenguaje usual. En los medios de comunicación, como periódicos y revistas, en libros, en la radio, la televisión y la Red aparecen con reiterada frecuencia las palabras proporción, desproporción, razón, porcentaje, relación y otros términos derivados de los anteriores (proporcionado, desproporcionado...).

El término *proporción* tiene varias acepciones y es sinónimo, entre otros, de armonía, simetría, ponderación, equilibrio, consonancia, correspondencia, tamaño, escala, porcentaje, tanto por ciento, cupo, norma, ocasión, conveniencia... Como antónimos, tiene: desproporción, desequilibrio, asimetría, desmesura...

También es habitual el uso de expresiones coloquiales como «tal cosa ha tomado grandes proporciones», en sentido del tamaño de un determinado suceso (el incendio adquirió enormes proporciones; el contagio afecta a una gran proporción de los refugiados; una notable proporción de ciudadanos muestra su preocupación por los hechos acaecidos...).

Hay que hacer referencia a la percepción innata y/o educada del tamaño de los objetos. Cuando se ve una fotografía o imagen de una persona, automáticamente se interpreta que es una reproducción reducida de esa persona y es posible establecer algunas relaciones y comparaciones sobre sus dimensiones con otras personas u objetos.

También las representaciones gráficas estadísticas, como los diagramas de barras, los diagramas de sectores y los pictogramas (figura 15.2), aparecen con frecuencia en los medios de comunicación, donde las superficies de los rectángulos, sectores o figuras son proporcionales a las cantidades que se quieren representar.

ACTIVIDAD 1: Recoge diversas informaciones aparecidas en los medios de comunicación o en la Red, relativas a tu ciudad o comunidad, en que aparezcan representaciones, en un caso de un pictograma, en otro de un diagrama de barras y en otro de un diagrama de sectores. Explica, en cada caso, la información recogida y la relación e idoneidad con su representación.

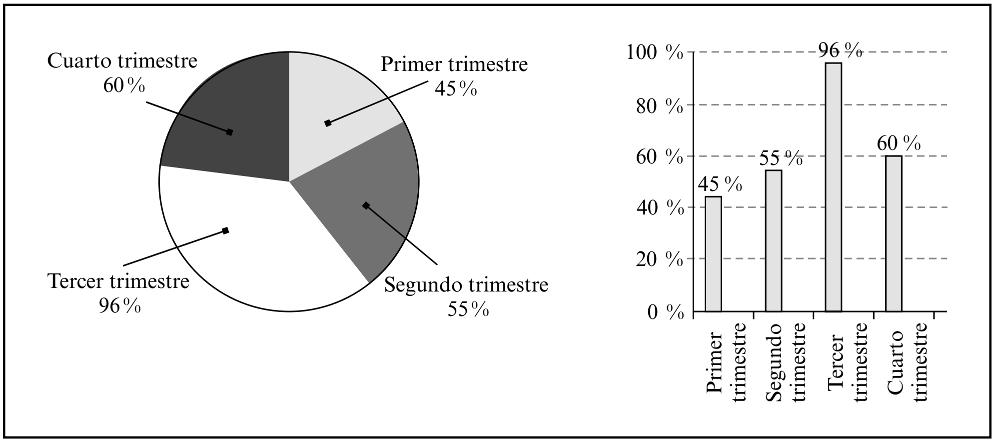


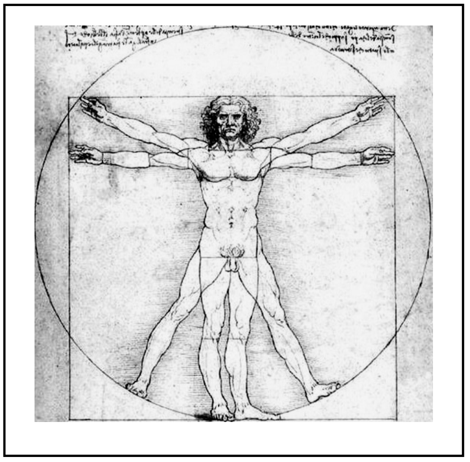
Figura 15.2

3. ALGUNAS CONSIDERACIONES HISTÓRICAS

El concepto de proporción es conocido desde la antigüedad: hay referencias en el papiro Rhind del antiguo Egipto (1850 a. C.). También conocemos su utilización en Babilonia, en la China antigua, en la India y en Grecia.

La noción de proporción viene asociada desde antiguo con la idea de precisar cuantitativamente la noción de *semejanza,* que se recoge en el conocido Teorema de Tales[1] y es de uso corriente entre los arquitectos. Se trata de comparar cosas de la misma especie, de igual magnitud o de hallar sus razones, es decir, de establecer la relación entre sus medidas.

Enorme importancia tiene en las artes plásticas, como pintura arquitectura o escultura, *la proporción áurea* $\frac{a + x}{a} = \frac{a}{x}$, que utilizaron, sobre todo, las culturas griega y romana.



[1] **Tales de Mileto.** Matemático y filósofo griego, se supone que vivió entre los siglos VII y VI a. C.; es el más antiguo e ilustre de los siete sabios de Grecia. Los sacerdotes egipcios debieron enseñarle las nociones elementales y los fundamentos de la «verdadera geometría», que Tales introdujo en Grecia. Se le atribuyen la resolución del problema consistente en inscribir un triángulo en una circunferencia y la determinación de un objeto a partir de su sombra o la distancia de los barcos a la costa, así como algunas relaciones entre los ángulos y lados del triángulo. Se hizo célebre al predecir un eclipse de sol, seguramente el de 585 a. C., que accidentalmente sólo fue visible en las costas de Asia Menor.

4. PROPORCIONALIDAD ENTRE MAGNITUDES

4.1. Relaciones entre magnitudes

En el entorno familiar, en las relaciones económicas, en el estudio de los fenómenos físicos y sociales y en muchas otras circunstancias, asociamos cantidades de dos magnitudes. Hay cuatro formas usuales para expresar la relación entre cantidades de dos magnitudes: enunciado verbal, tabla de valores, representación gráfica y expresión simbólica.

Una relación entre las magnitudes «tiempo» y «dinero» puede venir dada por el enunciado: «Por cada hora de trabajo cobra 12 €».

La tabla 15.1 relaciona cantidades de esas dos magnitudes: tiempo (antecedente) y dinero (consecuente), según la relación indicada, que expresa el dinero cobrado por una persona según las horas de trabajo.

TABLA 15.1

Tiempo	Dinero
1 hora	12 €
2 horas	24 €
3 horas	36 €
4 horas	48 €
...	...

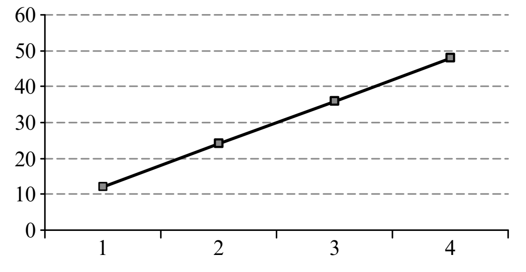


Figura 15.3.—Relación lineal entre tiempo y dinero.

La relación establecida en la tabla 15.1 puede expresarse de manera gráfica (figura 15.3), donde puede observarse que los puntos se ajustan a una línea recta.

También esta relación entre el tiempo y el dinero puede expresarse de manera simbólica $y = 12x$, donde x son las cantidades de tiempo e y el dinero percibido.

4.2. Razón y tasa

Una cantidad se expresa mediante una medida (número) y una unidad. Ejemplos de cantidades son: 3 horas, 8 kg, 40 €, 200 g, 38 km y 38.000 m.

Al dividir dos cantidades, se dividen las medidas y se dividen las unidades.

Ejemplo. 36 €/3 h = 36/3 €/h = 12 €/h (lo que significa que se pagan 12 € por cada hora de trabajo).

> *Un cociente de cantidades con unidades diferentes se llama **tasa.***

El precio de una unidad (1 kg de un producto) o de un objeto son ejemplos de tasas.

> *Un cociente de cantidades con la misma unidad se llama **razón.***

Ejemplo. 8 kg/200 g = 8.000/200 g/g = 40 (esto significa que hemos hecho 40 partes iguales al dividir un total de 8 kg en grupos de 200 g); una razón se expresa mediante un número sin dimensiones.

4.3. Proporcionalidad directa: magnitudes directamente proporcionales

Las representaciones anteriores: enunciado, tabla, gráfico y fórmula son características de las relaciones de proporcionalidad directa entre magnitudes. Cuando hay una relación de proporcionalidad directa entre dos magnitudes también se dice que *las magnitudes son directamente proporcionales*.

> *Una relación entre dos magnitudes se dice de* ***proporcionalidad directa*** *cuando la relación entre las medidas de sus cantidades viene dada por una función lineal $y = kx$ (k es la constante de proporcionalidad o coeficiente de la función).*

Conocido el valor de k (constante de proporcionalidad) podemos determinar cualquier valor de y dado el valor de x. El valor de k se obtiene dividiendo un valor conocido de y entre su correspondiente valor de x. En el caso del ejemplo de la tabla 5.1, $k = 24/2 = 12$.

La tabla 15.1 muestra otras caracterizaciones de una relación de proporcionalidad entre magnitudes:

a) Dos magnitudes son directamente proporcionales si cuando se duplica, triplica, etc., la medida de una cantidad de la primera magnitud, la medida de la correspondiente cantidad de la otra magnitud también se duplica, triplica, etc.

b) Dos magnitudes son directamente proporcionales si la *tasa* entre la medida de una cantidad de la segunda magnitud y su correspondiente en la primera es una constante k. El coeficiente de la función lineal k es la tasa o constante de proporcionalidad.

c) Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando la *razón* de dos cantidades cualesquiera de la primera magnitud es igual a la razón de las cantidades correspondientes de la segunda magnitud. Proporción es la igualdad de dos razones.

ACTIVIDAD 1: La lista muestra pares de magnitudes entre las que, en cada caso, se ha establecido una relación. Justifica cuáles de estas relaciones son de proporcionalidad directa:

- Velocidad-tiempo, cuando un vehículo recorre un espacio a velocidad constante.
- Edad de un niño-número de calzado que usa.
- Número del calzado-longitud de la suela.
- Superficie de una habitación-coste de enlosarla.
- Recaudación de una película-coste de producirla.
- Tiempo dedicado al estudio-resultado de los exámenes.
- Número de quilates de una piedra preciosa-coste de la joya.
- Altura del agua en un depósito-presión del agua sobre las paredes del depósito.
- Altura del agua en un pantano-energía eléctrica que se produce en ese pantano.
- Venta de vehículos-grado de contaminación ambiental.
- Número de visitantes a un monumento-grado de deterioro del monumento.
- Dilatación del mercurio en un termómetro-temperatura.
- Coste postal de un paquete-peso.

ACTIVIDAD 2: Considera la tabla:

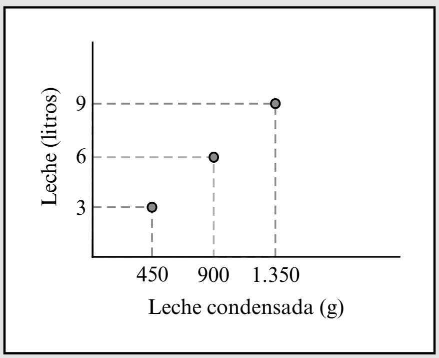
Número de piezas (p) fabricadas por un operario	Tiempo invertido en horas (h)
6 p	8 h
9 p	12 h
12 p	16 h

Hay dos posibles tasas:

1.ª El número de piezas que el operario produce en una hora.
2.ª El tiempo que tarda el operario en fabricar una pieza.

Calcula estas dos tasas y enuncia qué relación corresponde a cada una.
La relación entre las dos magnitudes, ¿es de proporcionalidad directa?
En caso afirmativo, expresa la relación mediante un enunciado verbal, una gráfica (ampliada con más valores) y una fórmula.

ACTIVIDAD 3: Con ayuda de la gráfica justifica que las magnitudes que aparecen relacionadas son directamente proporcionales y expresa la relación mediante un enunciado verbal, una tabla y una fórmula:



Escalas

Las representaciones de un territorio o de un objeto que se hacen en geografía, urbanismo, ingeniería o arquitectura reducen los territorios u objetos que reproducen mediante una tasa de reducción denominada ***escala.*** Expresiones como ***1:100.000*** indican una tasa de reducción de 10^{-5}, y vienen acompañadas de la indicación de que —en el ejemplo— 1 cm en el dibujo equivale a 1 km de la realidad.

Otras veces, se reproduce un objeto microscópico, por lo que hay que emplear una tasa de ampliación, que también se denomina escala. Su notación en estos casos es del tipo 1×10.000, que indica que cada centímetro en el dibujo corresponde a 10^{-4} cm en la realidad.

ACTIVIDAD 4: Busca en un atlas, en un mapa de carreteras y en un plano de tu población la escala a que están construidos. Mide, en los planos, diferentes distancias y calcula, en cada caso, la distancia real.

Una aplicación usual de la proporcionalidad directa es la representación a escala de terrenos, edificios u objetos en general. En este caso se establece una proporcionalidad entre las dimensiones de los objetos o distancias reales y las correspondientes dimensiones de las proyecciones del terreno o del edificio sobre un plano, mapa o maqueta. La constante de proporcionalidad que permite pasar de la realidad a la representación se llama *escala*.

De esta forma se puede medir un segmento (cantidad de longitud) sobre el mapa o plano y, aplicando la escala, conocer su medida en la realidad.

ACTIVIDAD 5: Trabaja sobre un plano a escala de la ciudad en la que estudias. Localiza la escala a la que está construido e interpreta ese dato.
Mide con una regla la distancia en el mapa entre tu casa y el centro donde estudias. Calcula la distancia real. Determina dos puntos que disten de tu casa 1 km.

Sombras o proyecciones de objetos

Los focos luminosos proyectan o arrojan una sombra o imagen de los objetos afectados que, en condiciones adecuadas, tiene dimensiones proporcionales a las del objeto inicial.

Un ejemplo clásico lo constituyen las longitudes de las sombras de un palo, un hombre o un edificio, que son proporcionales a sus alturas.

Esta proporcionalidad permitió, en la antigüedad, calcular alturas de grandes edificaciones, midiendo su sombra en el momento en que la sombra de un palo coincidía con su longitud.

ACTIVIDAD 6: Localiza aparatos que trabajen con proyecciones de imágenes y haz un listado de los más conocidos, así como de las tasas de proporcionalidad con las que trabajan.

4.4. Proporcionalidad inversa

En una colección de rectángulos, todos ellos con superficie 60 cm^2, consideramos la relación entre sus bases y sus alturas. La tabla 15.2 relaciona la base y la altura de varios de los rectángulos mencionados.

TABLA 15.2

Base	Altura
1 cm	60 cm
2 cm	30 cm
3 cm	20 cm
4 cm	15 cm
...	...

La relación establecida en el enunciado inicial, que se muestra en la tabla 15.2, puede expresarse mediante una gráfica (figura 15.4), donde se observa que los puntos se ajustan a una línea curva que es una hipérbola.

También la relación entre la base y la altura puede expresarse mediante la fórmula $y = 60/x$,

Figura 15.4.—Relación inversa entre base y altura de un rectángulo fijada su área.

donde x es la medida de la base e y la de la altura.

Las representaciones anteriores, tabla, gráfico y fórmula, son características de las relaciones de proporcionalidad inversa entre magnitudes.

Una relación entre dos magnitudes se dice que es de ***proporcionalidad inversa*** *cuando la relación entre las medidas de sus cantidades se ajusta a una función del tipo $y = k/x$ (k es la constante de proporcionalidad).*

Cuando una relación entre dos magnitudes es de proporcionalidad inversa se dice que las magnitudes son inversamente proporcionales. La tabla 15.2 muestra otras caracterizaciones de la proporcionalidad inversa entre magnitudes:

a) Dos magnitudes son inversamente proporcionales si cuando se duplica, triplica, etc., la medida de las cantidades de la primera magnitud, la medida de las cantidades de la otra magnitud se hace mitad, tercera parte, etc.

b) Dos magnitudes son inversamente proporcionales si el producto de la medida de una cantidad de la segunda magnitud por su correspondiente en la primera es una cantidad constante k.

c) Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando la razón de dos cantidades de la primera magnitud es igual a la inversa de la razón de las cantidades correspondientes de la segunda magnitud.

ACTIVIDAD 7: Inventa tres ejemplos de relaciones entre dos magnitudes, en un determinado contexto, que sean de proporcionalidad inversa. Justifica en cada caso que la relación establecida es de proporcionalidad inversa.

ACTIVIDAD 8: Considera las siguientes relaciones entre magnitudes:

Primera: «Cada caballo necesita 5 kg de forraje diarios».

¿Cuáles magnitudes son las que se relacionan? Elabora una tabla que relacione distintas cantidades de ambas magnitudes. ¿De qué tipo es la relación? ¿Cómo lo justificas?

Segunda: «Con el forraje actual del almacén hay para alimentar 4 caballos durante 15 días».

¿Cuáles son las magnitudes? ¿De qué tipo es la relación? ¿Cómo lo justificas?

Analiza y describe las diferencias y semejanzas entre las características de las relaciones anteriores.

5. MEDIDA INDIRECTA MEDIANTE PROPORCIONALIDAD

Algunas magnitudes son difíciles de medir directamente, pues el hecho de comparar una cantidad cualquiera con la unidad de medida puede ser arduo y, a veces, muy costoso. Si se conoce una segunda magnitud que se pueda medir fácilmente, y que sea proporcional con la magnitud inicial (difícil de medir), entonces, al determinar la constante de proporcionalidad entre ambas, se establece una relación entre cantidades homólogas y la medida de las cantidades de una permitirá calcular la medida de las cantidades de la otra.

La magnitud *longitud* tiene un papel destacado, pues es fácil de medir y permite su utilización como modelo para medir muchas otras magnitudes llamadas lineales. La longitud también sirve, a través de la proporcionalidad, de referencia para la medida indirecta de gran parte de las magnitudes que se utilizan en el entorno escolar.

De esta forma, la medida indirecta de cantidades de ciertas magnitudes se deriva de la medida de cantidades de otra magnitud, fundamentalmente de la longitud, de fácil acceso y manipulación.

5.1. Medida de longitudes a través de otras longitudes

Longitud de la circunferencia

La longitud L de una circunferencia (figura 15.5) es directamente proporcional a la lon-

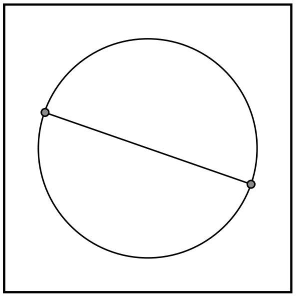


Figura 15.5

gitud de su diámetro D, siendo la constante de proporcionalidad que relaciona ambas medidas el número π. Este valor puede obtenerse de manera experimental y aproximada midiendo diferentes circunferencias y los diámetros respectivos.

La razón, la constante de proporcionalidad (k), entre ambos, L y D, es el número π:

$$\frac{L}{D} = \pi$$

de donde se obtiene la fórmula de la longitud de la circunferencia:

$$L = \pi D = 2\pi R$$

Por tanto, para medir la longitud de una circunferencia basta medir su diámetro, o su radio, y multiplicar por la constante de proporcionalidad.

ACTIVIDAD 1: Explica por qué si π es un valor constante para toda circunferencia, sin embargo, las circunferencias tienen longitudes distintas.

Proporcionalidad de segmentos. Teorema de Tales

Hay gran cantidad de situaciones donde las longitudes se relacionan de manera directamente proporcional. La estructura geométrica que recoge estas relaciones se conoce como *Teorema de Tales,* y se desarrolla a continuación.

Sean dos rectas, r y r', que se cortan por un haz de rectas paralelas, p_1, p_2, p_3. Los puntos, $A, B, C, \ldots$, y $A', B', C', \ldots$, de corte de las rectas del haz con r y r', respectivamente, determinan dos familias de segmentos en cada una de las rectas:

$AB, AC, BC, CD, \ldots$, en r y $A'B'$, $A'C'$, $B'C$, $C'D'$, ..., en r'.

En este caso, la razón entre dos segmentos cualesquiera determinados en una de las rectas y los correspondientes segmentos determinados en la otra es un valor constante, o razón de proporcionalidad (figura 15.6).

Por este motivo, las familias de segmentos de ambas rectas son proporcionales.

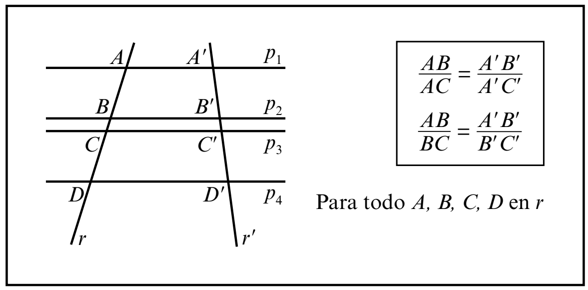


Figura 15.6

ACTIVIDAD 2: Razona con detalle y justifica la relación de proporcionalidad entre ambas familias de segmentos.

Triángulos en posición de Tales

Como aplicación práctica del Teorema de Tales, se muestran los siguientes resultados de proporcionalidad geométrica:

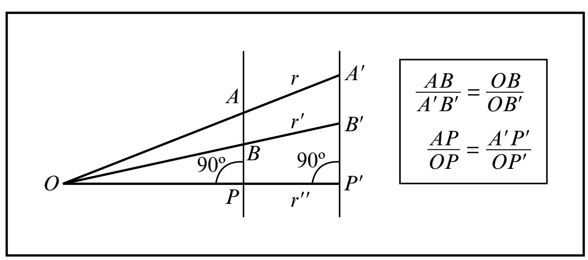


Figura 15.7

Los triángulos APO y $A'P'O$ (figura 15.7) son semejantes ya que tienen los tres ángulos iguales; de ahí que las relaciones entre segmentos que se derivan del Teorema de Tales sean aplicables a cualquier par de triángulos semejantes que, en este caso, se dicen «en posición Tales».

ACTIVIDAD 3: ¿Cuántos segmentos distintos se localizan en la figura 15.7? Argumenta con qué número mínimo de segmentos puedes determinar todos los demás.

Cuarta proporcional de tres longitudes

Del esquema anterior, y teniendo en cuenta que estas relaciones son válidas también cuando los segmentos AP y $A'P'$ (figura 15.8) tienen cualquier otra inclinación respecto al segmento OP, podemos determinar una longitud c, cuarta proporcional de tres longitudes dadas a, b, d.

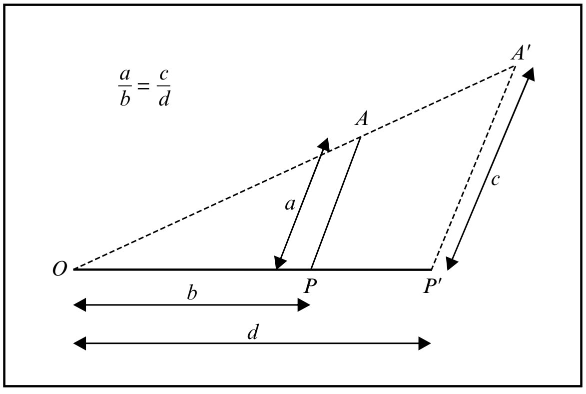


Figura 15.8

ACTIVIDAD 4: Localiza información sobre lo que es una tercera proporcional. Haz un esquema que lo explique.

Distancias inaccesibles

Uno de los usos más importantes del Teorema de Tales se refiere a la determinación de alturas o distancias inaccesibles.

Ejemplo. Si conocemos la sombra que proyecta un pino (figura 15.9) y medimos la altura y la sombra que proyecta una señal de tráfico a la misma hora del día, podemos determinar la altura del pino aplicando los resultados del Teorema de Tales. El esquema de resolución es el siguiente.

El triángulo ABC (figura 15.9) es semejante al triángulo DEF, por tanto, sus lados son proporcionales y puede establecerse la siguiente proporción:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \quad \text{de donde} \quad AB = \frac{BC \times DE}{EF}$$

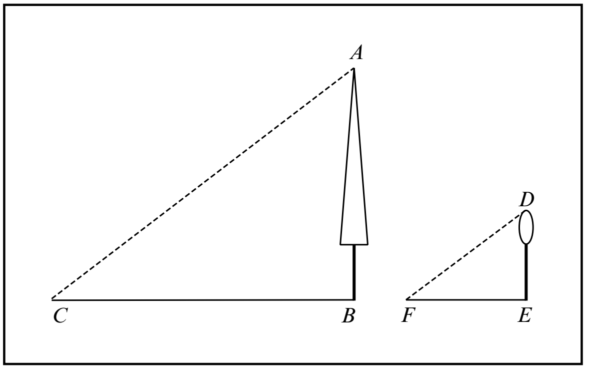


Figura 15.9

ACTIVIDAD 5: La sombra sobre el suelo de la torre de la iglesia tiene una longitud de 18 m. A la misma hora, y cerca de la iglesia, Javier, que mide 1,5 m de altura, comprueba que su sombra mide 1 m sobre el suelo. ¿Qué altura tiene la torre de la iglesia?

ACTIVIDAD 6: La sombra de los edificios varía a lo largo del día. ¿Varía también su altura? ¿Por qué ocurre esto? Inventa el enunciado de un problema que relacione sombras de objetos con longitudes. Explica qué propiedades utilizas para resolver el problema.

ACTIVIDAD 7: Otra forma de medida indirecta de longitudes, a partir de otras longitudes, es la que nos proporciona el Teorema de Pitágoras ($h^2 = a^2 + b^2$).

Busca en Internet o en libros de texto escolares la demostración de este teorema basada en los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo y compruébala manipulativamente utilizando papel y tijeras.

5.2. Relación entre las magnitudes amplitud y longitud

Puede observarse que a un ángulo central mitad de otro (figura 15.10) le corresponde la longitud mitad del arco del primero.

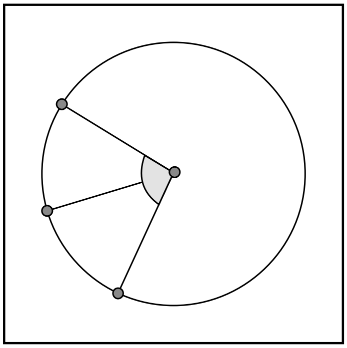


Figura 15.10

Las magnitudes ángulo central y arco correspondiente en una circunferencia son directamente proporcionales. Su constante de proporcionalidad se establece mediante el cociente entre la medida de un ángulo y la del arco correspondiente.

Al ángulo de 360º le corresponde como arco la longitud de toda la circunferencia, es decir, πD. Por tanto, la constante de proporcionalidad entre la medida de los ángulos y la de los arcos que subtienden es:

$$\frac{360}{\pi D}$$

De este modo, la relación entre amplitud de un ángulo y la longitud del arco que subtiende es:

$$\text{Amplitud del ángulo} = \frac{360}{\pi D} \times \text{longitud del arco}$$

De manera recíproca, puede obtenerse la medida de la longitud de un arco a través de la medida del ángulo correspondiente. En este caso, la constante de proporcionalidad es $\frac{\pi D}{360}$:

$$\text{Longitud del arco} = \frac{\pi D}{360}: \times \text{Amplitud del ángulo}$$

5.3. Medidas indirectas de otras magnitudes

Superficie

Como se indicó, no es usual medir una superficie de manera directa, salvo en algunas situaciones específicas asociadas a un contexto escolar. En general, la superficie rectangular se mide indirectamente a través de la longitud de sus dimensiones: si se fija la base, la medida de su superficie es directamente proporcional a la longitud de su altura. El área del rectángulo constituye una referencia, a partir de la cual pueden obtenerse las áreas de los restantes polígonos por descomposición y recomposición.

Superficie del rectángulo

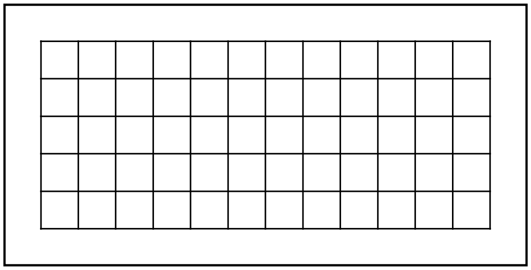


Figura 15.11

El rectángulo de la figura 15.11 tiene 12 unidades de longitud en su base, que coinciden con el número de unidades cuadradas de cada fila, y 5 unidades de altura, que coinciden con el número de unidades cuadradas de cada columna. El número total de unidades cuadradas se obtiene multiplicando el número de unidades de cada fila por el número de unidades de cada columna, es decir, 12 × 5. Por tanto, la superficie del rectángulo se obtiene multiplicando la medida de su base por la de su altura:

$$\text{Superficie del rectángulo} = \text{Longitud de la base} \times \times \text{Longitud de la altura}$$

$$S_{\text{rectángulo}} = \text{Base} \times \text{Altura}$$

Superficie del romboide

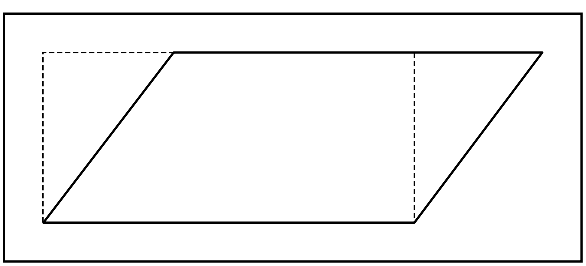


Figura 15.12

Como se observa en la figura 15.12, el romboide se transforma en un rectángulo de igual base e igual altura. Por tanto, la superficie del romboide será la misma que la del rectángulo en que se transforma:

$$S_{\text{romboide}} = \text{Base} \times \text{Altura}$$

Superficie del triángulo

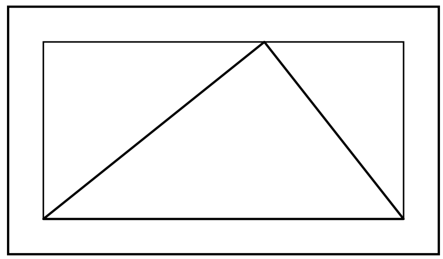


Figura 15.13

El triángulo de la figura 15.13 se ha enmarcado en un rectángulo que tiene igual base y altura que el triángulo, como puede observarse. La superficie del triángulo es, por tanto, la mitad de la del rectángulo. Es decir:

$$S_{\text{triángulo}} = \frac{\text{Superficie del rectángulo}}{2} = \frac{\text{Base} \times \text{Altura}}{2}$$

Superficie del trapecio

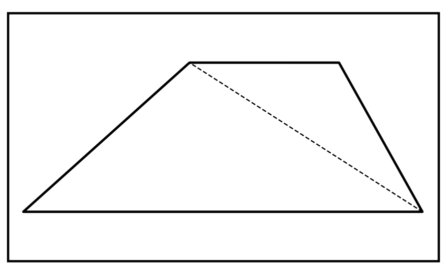


Figura 15.14

Un trapecio como el de la figura 15.14 puede descomponerse en dos triángulos: uno, tiene de base la base mayor del trapecio, y altura, la del trapecio, y el otro tiene de base la menor del trapecio, y altura, la misma que la del trapecio. Por tanto, la superficie del trapecio será la suma de la superficie de los dos triángulos:

$$S_{\text{trapecio}} = \frac{\text{Base mayor} \times \text{Altura}}{2} + \frac{\text{Base menor} \times \text{Altura}}{2} = \frac{(\text{Base mayor} + \text{Base menor}) \times \text{Altura}}{2}$$

ACTIVIDAD 8: Las dos rectas *AA′* y *BC* son paralelas. Justifica cuál de los tres triángulos *ABC, A′BC* y *A″BC* tiene mayor superficie:

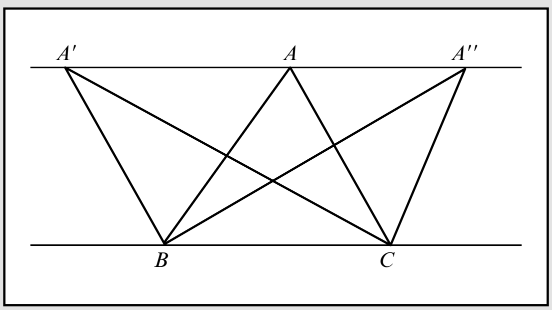


Figura 15.15

ACTIVIDAD 9: Dibuja un hexágono regular inscrito en una circunferencia. Determina la superficie de ese polígono regular dada la longitud del lado y la de su apotema.

ACTIVIDAD 10: Razona cómo se obtiene la fórmula de la superficie del rombo conocida la medida de sus diagonales.

Superficie de un polígono cualquiera

Para un polígono cualquiera, como el de la figura 15.16, la medida de su superficie se puede obtener a través de la descomposición de figuras conocidas, como es el caso del triángulo.

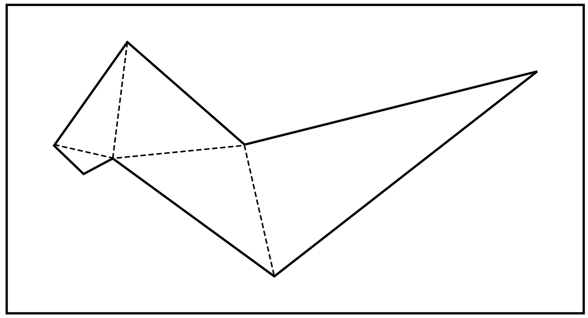


Figura 15.16

Superficies no poligonales

Cuando una superficie no está delimitada por segmentos, entonces se determina de manera aproximada transformando la figura en un polígono (véase figura 15.17).

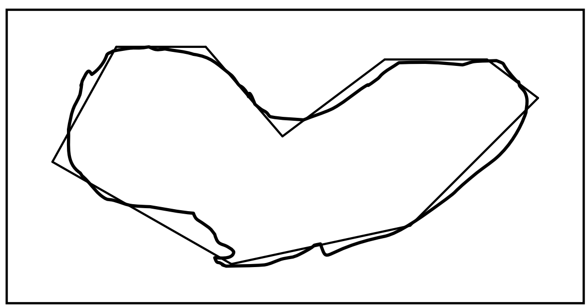


Figura 15.17

Superficie del círculo

El círculo no es un polígono, pero, mediante polígonos, puede ser aproximado tanto como uno desee. El círculo se puede aproximar mediante un polígono regular de muchos lados cuyo radio es el mismo que el del círculo. Cuantos más lados tenga, más próxima será la superficie del círculo a la del polígono (figura 15.18).

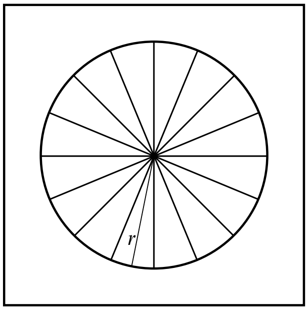


Figura 15.18

Una aproximación a la superficie del círculo se puede obtener mediante la fórmula de la superficie del polígono regular:

$$\text{Superficie del círculo} = \frac{\text{Perímetro} \times \text{Apotema}}{2}$$

Considerando una situación límite en cuanto al número de lados, el perímetro del polígono coincide con la longitud de la circunferencia y la apotema con el radio:

$$\text{Superficie del círculo} = \frac{2\pi r x r}{2} = \pi r^2$$

Superficie del sector circular

Conocida la longitud del arco, o la amplitud del ángulo interior de un sector circular, puede obtenerse su superficie a través de la proporcionalidad entre longitud y superficie, o amplitud y superficie. En el primer caso, la constante de proporcionalidad es $\frac{\pi r x r}{2\pi r} = \frac{r}{2}$; por tanto, la superficie del sector circular de radio r y arco l será $\frac{lr}{2}$; podemos observar que esta expresión coincide con la del área de un triángulo cuya base sería el arco y su altura el radio.

Si conocemos el ángulo α asociado a un sector, entonces la constante de proporcionalidad será $\frac{\pi r x r}{360}$, y la superficie del sector será $\frac{\pi r x r}{360}\alpha$.

Volumen

La medida del volumen de los cuerpos geométricos también se hace a través de la longitud. Se considera para ello la relación que existe entre el volumen y una de las dimensiones cuando las otras dos dimensiones se mantienen fijas.

Volumen del prisma

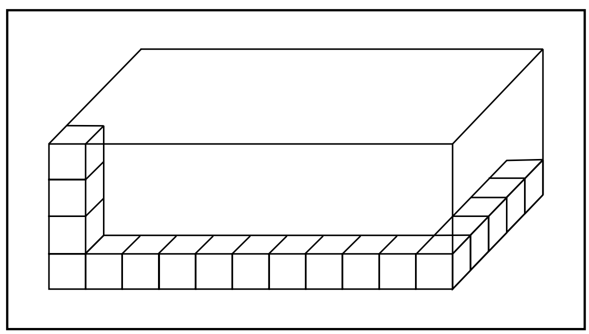


Figura 15.19

En la figura 15.19 hay un prisma de base rectangular que imaginamos relleno de cubitos. Cada cubito es una unidad de medida de volumen. El número de unidades de volumen que rellenan el prisma se obtiene determinando el número de cubitos de la base por el número de cubitos de la altura, es decir, el producto de la anchura por la largura:

$$V_{\text{prisma}} = \text{Ancho} \times \text{Largo} \times \text{Alto} =$$
$$= \text{Superficie de la base} \times \text{Altura}$$

Para cualquier tipo de prisma la fórmula es la misma, de acuerdo con el Principio de Cavalieri visto en el tema anterior.

Este principio muestra sentido cuando consideramos un prisma formado por un mazo de cartas de una baraja que podemos moldear a nuestro antojo, de forma recta o inclinada, como en la figura 15.20. El volumen, espacio ocupado, siempre es el mismo.

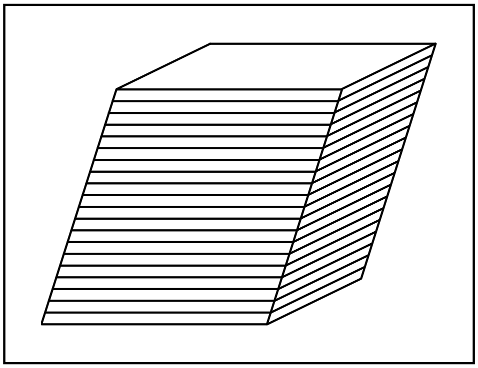


Figura 15.20

Volumen de la pirámide

En la figura 15.21 se ve que un cubo puede descomponerse en seis pirámides iguales, con bases en cada una de las caras y de altura la mitad de la arista del cubo. Por tanto, una pirámide cuadrangular de altura $l/2$ y superficie de la base l^2 tendrá de volumen la sexta parte del volumen de un cubo de arista l, que es l^3.

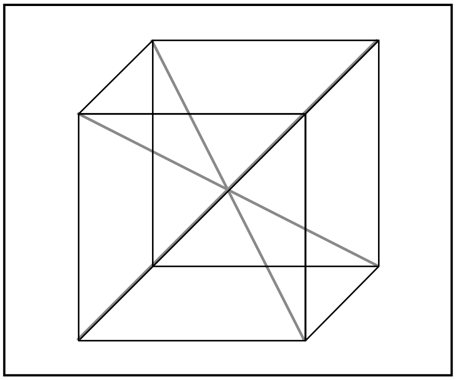


Figura 15.21

Entonces:

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{6}l^3 = \frac{1}{6}l^2\, l = \frac{1}{6}\,\text{Área de la base} \times$$
$$\times\, 2h = \frac{1}{3}\,\text{Área de la base} \times \text{Altura}$$

El Principio de Cavalieri permite extender esta fórmula a otros tipos de pirámides.

Volumen de cuerpos redondos

Las fórmulas para el cálculo de la medida de volúmenes de cilindros y conos se derivan también del Principio de Cavalieri. El del cilindro es igual al volumen de un prisma que tiene como área de la base la del círculo base del cilindro, y el cono es igual al volumen de una pirámide que tiene como área de la base la del círculo base del cono.

Para más información sobre volumen de un cuerpo, véase: García y Bertrán (1988).

5.4. Instrumentos de medida indirecta

Los instrumentos que se utilizan para medir de forma indirecta cantidades de una magnitud suelen estar relacionados con las unidades de longitud o de amplitud.

A partir de estas dos magnitudes, y teniendo en cuenta las constantes de proporcionalidad, se construyen instrumentos que transforman automáticamente la medida de una cantidad de una magnitud en la medida de la correspondiente cantidad de otra magnitud.

Los termómetros que miden la temperatura corporal son aparatos que relacionan la dilatación del mercurio en un capilar de cristal, por efecto del calor, con la longitud que alcanza el mercurio en ese capilar dentro de una escala de temperaturas ya determinada (normalmente entre 35 ºC y 41 ºC). De esta forma, medimos la temperatura corporal de una persona de forma indirecta, puesto que lo que realmente se mide es una longitud (la diferencia de longitudes en el capilar de mercurio) en una escala con una unidad y subunidades de longitud determinadas de antemano, en laboratorios, por otros métodos más sofisticados y complejos.

El instrumento que mide la velocidad y la aceleración en los vehículos es una pantalla circular graduada cuya escala recorre una aguja que gira en torno al centro de la pantalla. En realidad, estos instrumentos miden una amplitud, es decir, un ángulo que, mediante una proporción que se establece en el proceso de fabricación, se corresponde con los giros de los ejes que transmiten el movimiento a las ruedas.

ACTIVIDAD 11: Indica los instrumentos y las magnitudes que se utilizan en la medida indirecta de las siguientes magnitudes: peso, volumen del sonido en un ordenador, presión atmosférica, humedad del aire, tiempo, velocidad del viento, voltaje, amperaje, volumen de agua en un pantano, intensidad del brillo en un televisor, intensidad luminosa (lámpara) y calor producido por una estufa.

6. PROPORCIONALIDAD ARITMÉTICA

6.1. Regla de tres

Regla de tres simple directa

La maqueta de este edificio está realizada a escala:

A 5 mm de longitud en la maqueta, corresponden 4 m en la realidad.

Esta información relaciona de modo directamente proporcional dos longitudes.

Midiendo en la maqueta una distancia podemos averiguar la longitud real. Esto permite determinar, por ejemplo, la altura de un edificio sin más que medir su altura en la maqueta y establecer la relación:

Maqueta		*Realidad*
5 mm	————	4 m
35 mm	————	x m

La igualdad de las razones entre las dos magnitudes da una proporción que permite determinar la longitud desconocida:

$$\frac{5}{35} = \frac{4}{x}; \qquad x = \frac{35 \times 4}{5} = 28 \text{ m}$$

Un enunciado verbal se dice de proporcionalidad directa cuando dos magnitudes M y M' se relacionan de modo directamente proporcional.

La relación viene dada por la tasa o constante de proporcionalidad de la relación, o bien por una cantidad **a** de M y su correspondiente cantidad **b** de M'.

Un problema es de *regla de tres simple directa* cuando se conoce una tercera cantidad **c** de M (o bien **d** de M') y preguntan por la cantidad que corresponde en M' -**d**- (o, respectivamente, por la que corresponde en M -**c**-).

Para la resolución de estos problemas una estrategia adecuada consiste en:

1. Comprobar que la relación entre las magnitudes M y M' es de proporcionalidad directa.
2. Organizar la información con un esquema como el de la figura 15.22.

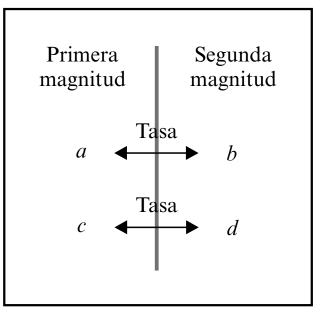


Figura 15.22

3. Concretar la pregunta del problema, que consiste en hallar una cuarta cantidad, usualmente representada por **x.**
4. Expresar la proporción entre las cantidades relacionadas:

   c/a = x/b, si se desconoce **d**

   o bien:

   x/a = d/b, si se desconoce **c**

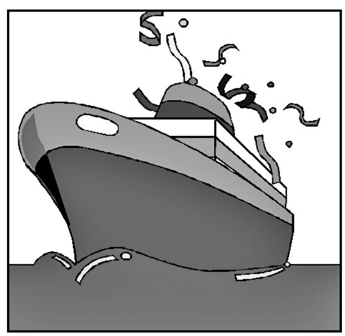
5. Calcular el valor desconocido; cuando es conveniente se hace una aproximación.
6. Comprobar el resultado e ***interpretarlo*** con las unidades adecuadas.

ACTIVIDAD 1: Plantea y resuelve el siguiente problema siguiendo los pasos anteriores: Contador es capaz de hacer una contrarreloj a la velocidad media de 42,800 km/h. Si empleó 1 h 16 m 11 s con esa velocidad media, ¿qué distancia recorrió en la etapa?

Al método de averiguar una cantidad que forma proporción con otras tres conocidas, de magnitudes directamente proporcionales, se le llama ***regla de tres simple directa.***

Regla de tres simple inversa

Cuando dos magnitudes son inversamente proporcionales, como las del ejemplo, igualando la razón de la primera con la inversa de la segunda establecemos una proporción que nos permite determinar la cantidad desconocida:



En el puerto, las grúas descargan los barcos mercantes. Dos grúas iguales descargan este barco en 12 horas. ¿En cuánto tiempo lo descargarían tres grúas al mismo ritmo de trabajo?:

N.º de grúas		*Tiempo*
2 grúas	————————	12 h
3 grúas	————————	x h

Formamos la proporción con la razón inversa de la segunda magnitud y calculamos el término desconocido:

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{12}; \qquad x = \frac{2 \times 12}{3} = 8 \text{ h}$$

Problemas de proporcionalidad inversa son aquellos problemas de enunciado verbal en que dos magnitudes M y M' se relacionan de modo inversamente proporcional.

Una relación entre dos magnitudes es de **proporcionalidad inversa** cuando el **producto de dos cantidades relacionadas** permanece o se supone **constante.**

La relación viene dada por el valor constante de la relación, que resulta de multiplicar una cantidad **a** de M por su correspondiente cantidad **b** de M': $a \times b = k$.

Un problema es de *regla de tres simple inversa* cuando se conoce una tercera cantidad **c** de M (o bien **d** de M') y preguntan por la cantidad que corresponde en M' **-d-** (o, respectivamente, por la que corresponde en M **-c-**).

Para la resolución de estos problemas, una estrategia adecuada consiste en:

1. Comprobar que la relación entre las magnitudes M y M' es de proporcionalidad inversa.
2. Organizar la información con un esquema como el de la figura 15.23.
3. Concretar la pregunta del problema, que consiste en hallar una cuarta cantidad, usualmente representada por **x.**

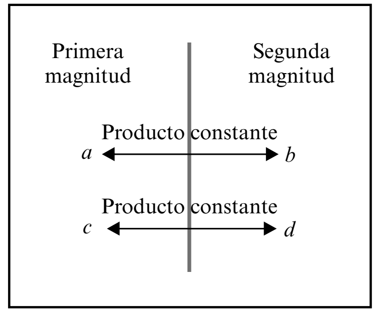


Figura 15.23

4. Expresar la relación entre las cantidades:

   a b = x c, si se desconoce **d**

   o bien:

   b a = d x, si se desconoce **c**

5. Calcular el valor desconocido; cuando sea conveniente haz una aproximación.
6. Comprobar el resultado e ***interpretarlo*** con las unidades adecuadas.

*Al método de averiguar una cantidad que forma proporción con otras tres conocidas, entre magnitudes inversamente proporcionales, se llama **regla de tres simple inversa.***

ACTIVIDAD 2: Indica cuáles de las siguientes relaciones son de proporcionalidad directas cuáles de proporcionalidad inversa y cuáles relacionan magnitudes no proporcionales:

- Para arbolar una calle de 900 m de longitud se colocan 60 árboles.
- Un ciclista tarda 4 h en recorrer una etapa a una velocidad de 38 km/h.
- Usando bolsas de 10 kg, un agricultor necesita 238 bolsas para embolsar su cosecha.

- Un acertante de la Primitiva con 3 aciertos cobra 8 euros.
- Un metro cuadrado se cubre con 9 losetas.
- Un niño de 12 años pesa 43 kg.
- Tres obreros terminan una tapia en 15 días.
- Dos grifos iguales llenan un depósito en 10 horas.
- En un círculo, un sector de 60º de amplitud tiene 32 cm^2 de superficie.

ACTIVIDAD 3: Establece una relación de proporcionalidad inversa entre las magnitudes *número de personas* y *días que disponen de alimento*.

Regla de tres compuesta

Se establece una proporcionalidad compuesta entre magnitudes cuando dos o más magnitudes están, cada una de ellas, relacionadas mediante una proporcionalidad con otra magnitud.

Al método de averiguar una cantidad desconocida en una proporcionalidad compuesta se le llama ***regla de tres compuesta.***

Para resolver un problema de este tipo hay que: *a*) comprobar el tipo de relación, proporcionalidad directa o inversa, entre las magnitudes; *b*) formar la proporción correspondiente, y *c*) calcular el término desconocido.

Ejemplos:

1. *El transporte de 4.500 kg de mercancía a 25 km de distancia cuesta 100 euros. ¿Cuánto cuestan 9.000 kg a una distancia de 50 km?*

En esta situación, el **precio** depende de la distancia de transporte (longitud) y del peso. Cada una de las relaciones establecidas entre las magnitudes iniciales y el precio son de proporcionalidad directa, ya que:

A doble distancia → doble precio:
A doble peso → doble precio

El problema planteado es el siguiente:

4.500 kg a 25 km → 100 euros.
9.000 kg a 50 km → y euros.

La estructura de la relación se puede justificar en dos pasos:

Primero: *4.500 kg a 25 km → 100 euros.*
9.000 kg a 25 km → x euros.

$$\text{De donde } \frac{4.500}{9.000} = \frac{100}{x}$$

Segundo: *9.000 kg a 25 km → x euros*
9.000 kg a 50 km → y euros

$$\text{De donde } \frac{25}{50} = \frac{x}{y}$$

De forma resumida, sustituyendo el valor de x que se obtiene en el primer paso:

$$\frac{4.500}{9.000} \times \frac{25}{50} = \frac{100}{y}$$

Es decir, que el producto de las razones de las primeras será igual a la tercera razón.

2. *Si se abren 2 compuertas de un pantano que arrojan 5.000 litros de agua por segundo, tardan 16 días en vaciarlo. ¿Si se abren cuatro compuertas que arrojan 10.000 litros por segundo, ¿cuántos días tarda en vaciarse?*

En esta otra situación la magnitud **tiempo** depende proporcionalmente de las magnitudes **n.º de compuertas** y **volumen** (litros por segundo que arrojan); en este caso, las dos relaciones son inversas, ya que:

A doble n.º de compuertas → mitad de tiempo.
A doble volumen arrojado → mitad de tiempo.

2 compuertas a 5.000 litros → 16 días
4 compuertas a 10.000 litros → x días

Para su resolución podemos proceder en dos pasos como en el caso anterior, concluyendo que el producto de las razones inversas de las primeras será igual a la tercera:

$$\frac{4}{2} \times \frac{10.000}{5.000} = \frac{16}{x}$$

ACTIVIDAD 4: Caracteriza y resuelve el problema siguiente mediante dos pasos y extrae un algoritmo resumen para la resolución de este tipo de problemas: «Se construyen 5 metros de muro con 32 albañiles en 7 días. ¿Cuántos días son necesarios para construir 15 metros de muro con 28 albañiles».

6.2. Porcentaje. Tanto por ciento

El porcentaje ya ha sido comentado en un tema anterior; lo estudiamos ahora como caso singular dentro de la proporcionalidad directa.

El *tanto por ciento (%)* es una ***relación de proporcionalidad directa*** entre las cantidades de dos ***magnitudes.***

En un tanto por ciento, la relación viene dada por dos medidas. La cantidad de la primera magnitud mide siempre 100. La cantidad de la segunda magnitud tiene por medida el número que aparece en el tanto por ciento. Ambas cantidades se expresan en la misma unidad de medida.

Ejemplo. Si el 73% de la leche es agua, ¿qué cantidad de agua hay en 75 litros de leche?

100 litros de leche → 73 litros de agua
75 litros de leche → x litros de agua

ACTIVIDAD 5: En las rebajas hacen un 20% de descuento. Si unas zapatillas de deporte han costado 60 euros, ¿qué precio marcaban antes de las rebajas?

6.3. Repartos proporcionales

Reparto directamente proporcional o prorrateo

Una de las propiedades de las proporciones es que *cuando dos magnitudes son directamente proporcionales, a la suma de cantidades de una magnitud le corresponde la suma de las cantidades homólogas de la otra magnitud.*

Hay situaciones en las que una cantidad se debe repartir en partes que no son iguales. Imaginemos la siguiente situación:

Se reparten para obras 250.000 euros entre los pueblos:

Cantoria .... 5.000 habitantes
Almuñécar .... 35.000 habitantes
La Zubia........................ 10.000 habitantes

Para que en el reparto corresponda la misma cantidad por habitante, el reparto ha de hacerse directamente proporcional al número de ellos:

$$\frac{a}{5.000} = \frac{b}{35.000} = \frac{c}{10.000} =$$
$$= \frac{a + b + c}{5.000 + 35.000 + 10.000} = \frac{250.000}{50.000} = 5$$

En donde *a, b* y *c* son las cantidades que corresponden a cada pueblo. Por tanto, obtenemos:

Para Cantoria .... $a = 25.000$ €
Para Almuñécar .... $b = 175.000$ €
Para La Zubia .... $c = 50.000$ €

Reparto inversamente proporcional

Cuando las magnitudes que se relacionan lo hacen de forma inversamente proporcional, la constante de proporcionalidad se obtiene por la multiplicación de las cantidades homólogas.

Veamos el siguiente ejemplo:

Se va a repartir una ayuda para rehabilitación de viviendas de 55.000 euros entre tres familias en proporción inversa a los ingresos anuales que obtienen:

Familia Jiménez .... *15.000 € de ingresos*
Familia López .... *30.000 € de ingresos*
Familia Pérez .... *45.000 € de ingresos*

Para que el reparto sea de tal forma que reciba más quien menos tiene, ha de verificar que:

$$a \times 15.000 = b \times 30.000 = c \times 45.000 = k$$

Para poder aplicar la propiedad que hemos empleado en el ejercicio anterior hemos de expresar esta igualdad en forma de igualdad de razones (con el fin de facilitar las operaciones tomaremos sólo los miles de euros y la proporción se mantiene). Es decir:

$$\frac{a}{1/15} = \frac{b}{1/30} = \frac{c}{1/45} = \frac{a+b+c}{1/15 + 1/30 + 1/45} =$$
$$= \frac{55.000}{1/90} = \frac{55.000 \times 90}{11} = 450.000$$

Despejando en cada caso, se obtiene:

Familia Jiménez .... $a = 30.000$ €
Familia López .... $b = 15.000$ €
Familia Pérez .... $c = 10.000$ €

ACTIVIDADES PARA PRACTICAR

1. Identifica las magnitudes relacionadas en los siguientes problemas, justifica que entre ellas existe una proporcionalidad, estudia el tipo de la misma y resuélvelos:

a) En un hotel tienen carne para alimentar a 38 huéspedes durante 6 días. Si se marchan 26 huéspedes, ¿para cuántos días habrá carne?
b) En una granja, 80 gallinas consumen 60 kg de pienso al cabo de una semana. ¿Qué gasto de pienso tendrán 60 gallinas durante un mes?
c) Cuatro máquinas siegan un campo de 800 ha en 3 días. ¿Cuánto tardarán tres máquinas en segar un campo de 900 ha al mismo ritmo de trabajo?

2. Estudia cuál de las siguientes situaciones corresponde a una proporcionalidad entre medidas y cuál de ellas permite aplicar el Teorema de Tales; haz un dibujo en que se aprecien los triángulos semejantes y resuélvelas:

- Una escalera que está apoyada sobre la pared de un edificio mide 7,25 m. La distancia del pie de la escalera al edificio es de 1,75 m ¿A qué altura se encuentra el extremo superior de la escalera?

- Juan, que mide 1,85 m de estatura, proyecta una sombra de 25 cm; la sombra de su hijo a la misma hora del día es de 17 cm. ¿Cuál es la estatura del hijo?

3. ¿En cuáles de las situaciones siguientes se puede aplicar el Teorema de Pitágoras? Identifica los triángulos rectángulos y las medidas que conoces y resuélvelas:

a) En un triángulo equilátero, su lado mide 25 cm. ¿Cuánto mide su altura?
b) Los lados de un triángulo miden 3, 4 y 5 cm. ¿Cuánto mide la altura construida sobre el lado mayor?

4. En un texto antiguo de agrimensura se lee el siguiente método para medir la anchura de un río *AB* con dos bastones desiguales: «*Clávese bien a plomo el bastón menor (EB) en la orilla B, y el otro CD váyase separando hasta que su parte superior D y el punto E del otro se vea el punto A, y mídase la distancia CB, que sea de 32 pies. Dígase luego la diferencia de la altura de los dos bastones, que sea de dos pies, es a la altura del menor EB, que sea de 4 pies, como la distancia CB, que son 32 pies, es a la anchura del río, es decir, 2/4 = 32/AB, de donde AB tiene 64 pies».* Explica el fundamento matemático del procedimiento empleando un dibujo.

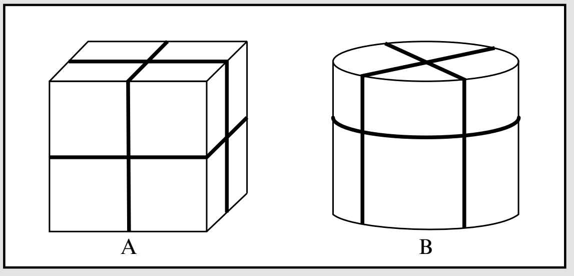
5. Determina la superficie y el volumen de los siguientes cuerpos y estudia qué relación existe entre ambos volúmenes. Suponiendo que los cuerpos anteriores fuesen huecos, calcula su capacidad: *a*) un cono cuya base tiene de radio 7 cm y cuya altura es de 20 cm; *b*) un cilindro cuya base tiene de radio 7 cm y cuya altura es de 20 cm.

6. Indica las medidas que se deben tomar para determinar el volumen de una caja de zapatos (ayúdate de un dibujo). ¿Cuál será su volumen aproximado?

7. Si se aumenta al doble las medidas de un ladrillo macizo rectangular (de los habituales en la construcción), ¿se puede decir que su peso será el doble?

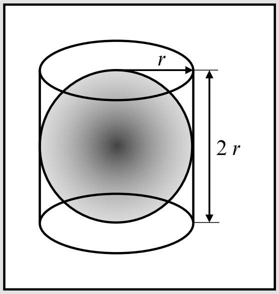
8. Calcula y mide el camino más corto que ha de seguir una mosca para ir desde una esquina del techo de una habitación de dimensiones 4, 3 y 2 m hasta la esquina opuesta (del suelo) suponiendo que: *a*) va volando y *b*) va andando.

9. La figura muestra dos cajas de regalo atadas con una cinta. La caja A es un cubo de 10 cm de arista. La caja B es un cilindro de altura y diámetro de 10 cm. Indica si ambas cintas son de igual tamaño, o si alguna de ellas es más grande, y justifica tu respuesta:

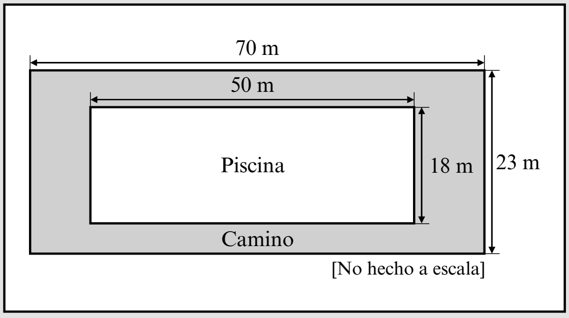


10. El diámetro de Júpiter es 11 veces mayor que el diámetro de la Tierra. *a*) ¿cuántas veces es mayor el área de la superficie de Júpiter?, y *b*) ¿cuántas veces es mayor el volumen?

11. Arquímedes demostró que el volumen de una esfera es los dos tercios del volumen del cilindro circular recto que la contiene (de manera ajustada). Demuestra que el área de la esfera es también los dos tercios del área de la superficie total del cilindro:



12. ¿Cuál es el área del camino que rodea a la piscina de la figura? Explica cómo has obtenido tu respuesta.



13. Una expedición de 9 personas prepara avituallamiento para 24 días. A última hora se añaden 3 personas más. ¿Para cuántos días tendrán alimentos consumiendo las mismas cantidades diarias? Y en el caso de acortar la expedición a 15 días, ¿para cuántas personas hubiera habido alimentos?

14. Una bomba de agua saca 12 litros por segundo. Para vaciar una piscina se utilizan dos bombas durante 3 h 15 m. Para vaciar otra piscina igual se están utilizando tres bombas que sacan 9 litros por segundo. ¿Cuánto tardará en vaciarse esta otra piscina?

15. En un lago se recogen 600 peces, se marcan y se devuelven al lago. Al cabo de un tiempo se pescan otra vez 600 peces y resulta que 40 están marcados. Suponiendo que esta última recogida es una muestra que representa al total, ¿qué porcentaje de peces están marcados? ¿Cuántos peces tiene el lago?

16. El Gobierno propone subir los impuestos por ventas de libros del 4% al 5% y explica que es una subida del 1%. Sin embargo, la oposición dice que es una subida del 25%. ¿Quién tiene razón?

17. Una solución de agua oxigenada tiene una riqueza del 30% y otra solución tiene el 3% de riqueza. ¿En qué proporción deben mezclarse ambas soluciones para obtener una nueva con un 20% de riqueza de agua oxigenada?

18. Tres socios tienen 100, 96 y 48 acciones, respectivamente, de una empresa. Si el segundo ha obtenido 3.600 euros de beneficios, ¿cuál ha sido la ganancia de los tres?

19. El testamento del Sr. García especifica que 1.000.000 de euros se repartan de forma inversa a las edades de sus hijos, que son: 12, 15 y 18 años, respectivamente. ¿Cuánto le corresponde a cada hijo?

INVESTIGA Y REFLEXIONA

1. Realiza un informe sobre el papel de la proporcionalidad en tu vida cotidiana.
2. Busca información sobre la idea matemática de «semejanza» y realiza un informe sobre su relación con la proporcionalidad.
3. Busca información sobre la idea de «escala gráfica» y realiza un informe sobre su relación con la proporcionalidad.
4. Busca información sobre el «compás de reducción» o «pantógrafo» y realiza un informe sobre su relación con la proporcionalidad.
5. Revisa un libro de matemáticas de 6.º curso de Educación Primaria y describe qué contenidos tienen relación con este tema.

BIBLIOGRAFÍA

Fernández, F., Castro, E., Segovia, I. y Rico, L. (1996). El lenguaje matemático. En A. Romero (Ed.), *Lenguajes y Enseñanza*. Granada: Fundación Educación y Futuro.

Fiol, M. L. y Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad Directa. La forma y el número*. Madrid: Síntesis.

García, J. y Bertrán, C. (1988). *Geometría y experiencias*. Madrid. Editorial Alhambra.

Granada Mats (1985). *Matemáticas. 7.º E.G.B.* Madrid: Algaida.

Hiebert, J. y Behr, M. (1988). Introduction: Capturing the major themes. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*. Reston, VA.: NCTM.

Karplus, R y Peterson, R. W. (1970). *Intellectual development beyond elementary school IV: Ratio, a survey*. Berkeley, CA: University of California. Lawrence Hall of Science.

Lamon, S. J. y Lesh, R. (1992). Interpreting Responses to Problem with Several Levels and Types of Correct Answers. En R. Lesh y S. J. Lamon (Eds.), *Assessment of Authentic Performance in School Mathematics*. Washington, DC: AAAS Press.

Rico, L. (Coord.), Castro, E., Marín, A., Puig, L., Sierra, M. y Socas, M. (1997). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori.

Estadística 16

LUIS SERRANO ROMERO

En esta imagen percibimos la ventaja de utilizar una lupa que amplía la visión de una información proporcionada por la prensa. Este instrumento permite ver con más nitidez los datos plasmados de forma numérica y gráfica relativos a la evolución del mercado en el caso de la imagen o a cualquier otro campo en otros casos. Esta necesidad de mejorar la nitidez no sólo se produce en la percepción visual, sino también en la conceptual; necesidad de conocer desde todos los puntos de vista los datos que nos muestran y utilizar las herramientas matemáticas que nos permitan emitir un juicio imparcial. A ello contribuye el conocimiento de las herramientas estadísticas.

Este capítulo y el siguiente abordan un campo diferente de las matemáticas al tratado en capítulos anteriores; son las matemáticas de la incertidumbre, de la inexactitud, el mundo de la estocástica. Como complemento a las Ciencias Exactas, como se ha llamado tradicionalmente a las matemáticas, esta parte de la disciplina estudia los hechos no deterministas que también tienen un tratamiento matemático. Su desarrollo se hace en dos temas: estadística y probabilidad, ambos relacionados con fenómenos o acontecimientos que ocurren aleatoriamente.

1. NECESIDAD DE LA ESTADÍSTICA. EVOLUCIÓN HISTÓRICA

Los datos y la representación numérica de la información son necesarios para entender el mundo que nos rodea. Se usan para tomar decisiones en campos muy distintos del hacer humano por profesionales de la medicina, ingenieros, políticos, educadores, empresarios, por el ciudadano y el consumidor en general, resoluciones basadas en datos relativos al mercado, a la investigación, a los costes y a un sinfín de datos numéricos que dan información. Cada ciudadano debe ser capaz de entender e interpretar esa información numérica, y el profesional comunicar con este lenguaje la información de forma adecuada. Igual que la alfabetización permite comunicarse mediante palabras y frases escritas, la estadística contribuye a usar y entender los datos de forma comprensible y adecuada.

La estadística es la ciencia de los datos. Como disciplina científica, tiene una corta historia, pero como técnica para organizar información numérica tiene gran antigüedad. Hay múltiples documentos que acreditan la necesidad de los estados por conocer sus recursos, composición de la población y otras magnitudes. Así, lo podemos encontrar desde el antiguo Egipto, donde los faraones recabaron datos de los bienes y población; en el *Kuan Tzu* chino, que muestra referencias a censos de población y agricultura o en el *Antiguo Testamento (Números),* donde se hace un recuento de la población hebrea o también los griegos y romanos realizaron censos con fines recaudatorios, y lo mismo se ha producido en otras civilizaciones en el devenir de la humanidad.

Como toda ciencia, ha necesitado un proceso de elaboración. Posteriormente al simple almacenamiento de datos, éstos deben ser adecuadamente resumidos y estructurados para su fácil interpretación. Este paso lo inició el comerciante londinense John Graunt, quien publicó en 1662 un trabajo realizado a partir de las *Tablas de Mortalidad* de Londres. Utilizando estos datos, calculó la población londinense y elaboró un estimador con el que averiguó la población de Inglaterra.

Ha habido diferentes momentos históricos en el desarrollo de la estadística, pero debemos resaltar la aportación del matemático belga Adolphe Quételet. Influido por Laplace, desarrolló su interés por las probabilidades, su relación con los datos y las aplicaciones a temas humanos. En 1844 publica estudios sobre el análisis de las frecuencias y es el primero en utilizar la ley normal, a la que llama «ley de las causas accidentales», al presentar un estudio sobre el valor de la media como valor central, donde se concentran las medidas más típicas que describen los rasgos físicos del ser humano, según la curva normal. Fue el organizador de la Primera Conferencia Internacional de Estadística en 1853. El reconocimiento de la estadística, como ciencia se produce en 1834, cuando se funda la *Real Sociedad Estadística* tras incluirse esta disciplina como una sección diferenciada en la *Asociación Británica para el Avance de la Ciencia.* En 1885, tras la celebración de una década de congresos internacionales, entre 1853 y 1876, se establece el *International Statistical Institute (ISI),* cuyo objetivo principal es mantener «uniformidad en los métodos de recogida y resumen de datos estadísticos, llamando la atención de los gobiernos para que resuelvan sus problemas mediante el uso de estadísticas». Posteriormente se crea, en 1991, dependiente del *ISI,* el *IASE (International Association for Statical Education),* que «tiene por objeto promover, apoyar y mejorar la educación estadística en todos los niveles en todo el mundo».

La estadística tiene como campo de trabajo el estudio de los conjuntos de datos numéricos obtenidos de una población, y como herramienta el cálculo de probabilidades, herramienta ya desarrollada en el siglo XIX, cuyo uso en el campo estadístico no se lleva a cabo hasta finales del XIX o principios del XX. Francis Galton (1822-1911) y Karl Pearson (1857-1936) hacen una renovación en la estadística al introducir una metodología empírica con el estudio de la regresión y la correlación, que aplican a campos como la antropología, la psicología, la biología y otras disciplinas. Posteriormente, Ronald Fisher (1890-1962) establece los fundamentos teóricos de la inferencia estadística al considerar que el objeto de los métodos estadísticos es la reducción de datos y que pequeñas muestras aleatorias pueden ser representativas de una hipotética población infinita, además de introducir este autor como método de estimación el de máxima verosimilitud.

Hoy en día, la estadística se aplica en multitud de campos y, según su aplicación, ésta se clasifica en diferentes tipos. Por un lado, la *estadística descriptiva* se ocupa de la obtención de datos, análisis y elaboración de un conjunto de medidas y representaciones que los describen, generalizan y se difundan; por otro lado, la *estadística inferencial,* encargada de la comparación de esos datos con modelos probabilísticos asociados a fenómenos aleatorios de las observaciones, obteniendo inferencias y predicciones sobre la población del conjunto de datos y su aplicación a una amplia gama de investigaciones de todas las ciencias.

ACTIVIDAD: Describe situaciones de la vida cotidiana en las que se usen cálculos estadísticos. Explica razonadamente por qué entiendes que se utilizan estos cálculos en las presentaciones de informaciones.

Enuncia dos razones a favor y dos en contra de la influencia del uso de la Estadística en la investigación y comunicación.

2. LA ESTADÍSTICA EN EL CURRÍCULO ESCOLAR

El tratamiento de la información ha evolucionado desde sus inicios hasta la actualidad; su uso se considera ahora como parte del quehacer humano diario. En los inicios de este siglo el ciudadano dispone de una ingente cantidad de información que ha sobrepasado cualquier previsión anterior. El avance de las nuevas tecnologías y de la red de Internet han hecho posible la ampliación de la comunicación y la accesibilidad a datos que otrora ni podríamos imaginar su disponibilidad.

Disponer de toda esta información no hace que estemos verdaderamente informados. En muchas ocasiones, el bosque de información impide percibir los datos necesarios y puede desorientar para tomar decisiones, lo cual repercute en el individuo y en la comunidad.

Desde fechas relativamente recientes, se incluyen en los contenidos curriculares de la enseñanza de las matemáticas, a partir de la Educación Primaria, unos temas que abordan el tratamiento de la información y su organización para su comprensión. Con ellos se trabajan aspectos que, en currículos anteriores, no se consideraban. Las expectativas pretenden que el escolar sea competente en «el tratamiento de la información y la competencia digital», para proporcionar al alumno «autonomía e iniciativa personal», competencia ésta también a conseguir en la Educación Primaria.

Al finalizar estos niveles educativos el alumno debería estar capacitado para obtener información, ordenarla y utilizarla a fin de que pueda realizar cálculos estadísticos y elaborar con ellos tablas elementales de forma clara y precisa, además de elaborar gráficos intuitivos sencillos que permitan emitir juicios sobre tomas de decisiones sencillas e imparciales.

El futuro profesor de estos niveles educativos ha de dominar estos conocimientos a fin de poder transmitirlos de forma inequívoca para que el alumno de Primaria adquiera un dominio reflexivo de estas herramientas que le permita realizar juicios estocásticos de forma razonada en situaciones sencillas. Estos contenidos necesitan de un tratamiento experimental con elementos familiares al alumno de Primaria, donde pueda realizar pruebas, elaborar conjeturas y enunciar predicciones, realizar cálculos oportunos con los datos obtenidos, comprobar los resultados, confrontar los juicios previos y hacer estimaciones de posibles situaciones posteriores, entre otras.

Los contenidos estadísticos como frecuencia, media aritmética, rango, gráfico de barras, y otros, se tratarán de forma más específica en el último ciclo de la Educación Primaria, momento en el que el alumno debe disponer del dominio de otros contenidos aritméticos necesarios para los cálculos estadísticos. Sin embargo, conviene introducir estos contenidos desde los primeros ciclos de forma lúdica y cercana al alumno, a fin de iniciarle en el recuento de datos, en la representación gráfica elemental y en el uso de materiales manipulables que ayuden a afianzarlos.

Además, se ha de iniciar al alumno de Primaria en la utilización de las nuevas tecnologías para los cálculos estadísticos y para su representación gráfica, pero este proceso será en un momento posterior a la comprensión de los procedimientos manuales, igual que sucede con los algoritmos aritméticos, que se comprenden en primer lugar y, posteriormente, se trabajan con la calculadora.

3. CONCEPTOS BÁSICOS

3.1. Población, muestra, variable

En estadística, se entiende por *población* un conjunto de individuos o elementos sobre los que se considera una característica que varía de un individuo a otro. A esa característica, cuya presencia en la población tratamos de cuantificar, la llamaremos *variable estadística,* y esa cuantificación la ordenaremos en tablas expresando su *frecuencia* o *veces que se produce esa variable en la población*. La *población,* generalmente, es demasiado grande para poder examinar esa *variable* en todos sus elementos o miembros, por lo que elegimos una parte, un subconjunto de ella que llamaremos *muestra,* que deberá representar a la *población*, es decir, que cada elemento de la *población* tenga la misma probabilidad de pertenecer a la *muestra*. Diremos entonces que la *muestra es representativa* de esa población. En adelante, y dada la imposibilidad de tomar siempre todos los datos de la *población,* algunos ejemplos, actividades y contenidos conceptuales de este tema se referirán a datos de muestras de supuestas poblaciones finitas o infinitas numerables.

ACTIVIDAD 1: Sexo, edad, peso, estatura... son variables estadísticas de cualquier grupo humano. Identifica otras tres variables en la población de los estudiantes de tu universidad. Describe otras dos poblaciones distintas e identifica tres variables estadísticas en cada una de ellas.

ACTIVIDAD 2: Busca un periódico y localiza en su información distintas poblaciones con sus correspondientes variables.

3.2. Tipos de variables

Si los valores de una *variable estadística* puede medirse y expresarse mediante una cantidad numérica, se trata de una *variable cuantitativa,* en caso contrario será *variable cualitativa* o *categórica*. Ejemplos de *variable cuantitativa* son el peso, la altura, la edad o el número de hermanos, y de *variable cualitativa* el sexo, el color del pelo, las calificaciones de una asignatura, etc. Si la diferencia entre dos valores de una *variable cuantitativa* se puede hacer tan pequeña como queramos, se dice que ésa es una *variable continua*; por ejemplo, la *variable cuantitativa* peso es *continua,* ya que la diferencia entre los pesos de dos sujetos puede medirse en unidades suficientemente pequeñas. Sin embargo, hay otras *variables cuantitativas* que no tienen pequeñas diferencias entre dos valores, y se llaman *variables cuantitativas discretas;* por ejemplo, el número de hermanos es una *variable cuantitativa discreta,* ya que la menor diferencia entre dos valores de esta variable es «un hermano», no medio, ni un cuarto. Para la cuantificación de las *variables discretas* se usan los números enteros y los naturales, mientras que para las *variables continuas* se usan los números decimales o las expresiones decimales de los números racionales.

Cuando se quiere estudiar estadísticamente una *variable cualitativa* le asignamos unos valores cualitativos o *categorías,* como muestra el ejemplo 1; con ello podremos realizar determinados recuentos y representaciones estadísticas (frecuencia, representación gráfica...), pero no realizar cálculos estadísticos que requieran operaciones aritméticas con esos valores, como media, desviación típica, y otros.

Ejemplo 1. En la siguiente tabla se muestran algunos datos sobre los caramelos y golosinas que comercializa la empresa Dulcilandia:

Nombre	Precio	Cantidad	Azúcar	Código
Tuttifrutti	12,50	2.340	Sí	C123
Grobolip	20,00	1.320	No	G243
Choco Cup	15,75	1.500	Sí	C324
Chup Glob	22,30	2.100	Sí	N015

En esta tabla, cada columna corresponde a una *variable:* nombre, precio, cantidad, azúcar y código, siendo *cualitativas* o *categóricas* las variables nombre, azúcar y código, y *cuantitativas* o *numéricas* precio y cantidad; de éstas, la variable precio es *continua,* mientras que la variable cantidad es *discreta*.

ACTIVIDAD 3: Busca ejemplos sobre población, muestra y variable estadística en la observación de diferentes resultados obtenidos de informes o de trabajos de investigación educativa. Utiliza información de la página Web del Instituto Nacional de Estadística.

3.3. Frecuencias. Tipos de frecuencias

Para el estudio e interpretación de los datos de una determinada *variable,* en un conjunto de datos que llamaremos *muestra,* utilizamos procedimientos numéricos y representaciones gráficas que, al visualizar los datos, hacen más fácil su interpretación. En ambos casos se parte de unos datos, tomados de una *muestra,* que se pueden haber obtenido, por ejemplo, en una encuesta, y a partir de ello se elabora una *tabla estadística de frecuencias* en la que se incluyen, en una columna o fila, los datos, es decir, valores de la variable a estudio, ordenados de forma creciente, y en la columna o fila contigua las *frecuencias absolutas* de esos valores o el número de veces que esos valores aparecen en el recuento efectuado, dejando una última celda para incluir la suma total de las frecuencias absolutas, que será el número total de observaciones de datos. En la siguiente columna o fila se representan los valores de las frecuencias relativas de cada uno de los datos, entendiendo por *frecuencia relativa el cociente entre la frecuencia absoluta y la cantidad de datos observados;* en la última celda se incluirá la suma de todas las frecuencias relativas, que habrá de ser uno. Decimos entonces que tenemos la *distribución estadística* de la *variable,* representada en una tabla estadística.

Esta *tabla de frecuencias* se suele extender añadiendo el *porcentaje* de cada uno de esos datos, que es igual al producto de la frecuencia relativa por 100. Como podemos suponer, también en la última celda incluiremos la suma de todos los porcentajes, que deberá ser 100. Estas tablas de frecuencias se pueden usar tanto para variables cuantitativas como para variables cualitativas, en este caso, siempre que se categoricen, es decir, que a cada cualidad se le asigne un número natural. Además, se suelen incluir los valores de las *frecuencias absolutas y relativas acumuladas,* entendiendo por tales los valores que se van obteniendo en cada caso al sumar una frecuencia con el valor de las frecuencias anteriores. Esto lo podemos observar en el siguiente ejemplo, donde presentamos el valor de cada *frecuencia absoluta acumulada como suma de ese valor con los valores de todas las anteriores frecuencias absolutas*. Análogamente, se puede definir el concepto de *frecuencia relativa acumulada*.

Ejemplo 2. Las puntuaciones de 30 alumnos en un examen han sido las siguientes:

3, 4, 5, 6, 7, 2, 1, 3, 4, 6, 8, 7, 3, 6, 9, 7, 1, 2, 1, 3, 6, 7, 3, 5, 8, 7, 1, 6, 3 y 5

Observamos que la variable es cuantitativa discreta, ya que los datos son números enteros. El valor o tamaño de la muestra es $N = 30$.

En la tabla 16.1 mostramos las frecuencias absolutas, relativas y acumuladas.

TABLA 16.1

Tabla de frecuencias

x_i **Datos**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	Σ
f_i	4	2	6	2	3	5	5	2	1	30
f_a	4	6	12	14	17	22	27	29	30	30
f_r	$\frac{4}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{1}{30}$	1
f_{ra}	$\frac{4}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{12}{30}$	$\frac{14}{30}$	$\frac{17}{30}$	$\frac{22}{30}$	$\frac{27}{30}$	$\frac{29}{30}$	$\frac{30}{30}$	$\frac{30}{30}$

f_i = Frecuencia absoluta.
f_a = Frecuencia absoluta acumulada.
f_r = Frecuencia relativa.
f_{ra} = Frecuencia relativa acumulada.

ACTIVIDAD 4: Se ha preguntado a los 30 alumnos de la clase el número de personas que, incluido el alumno, conviven en su casa, obteniéndose la siguiente lista:

3, 4, 7, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 8, 4, 4, 3, 5, 3, 2, 4, 2, 6, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 2, 4 y 3

a) Construye la tabla con la distribución de frecuencias de esta variable, indicando las frecuencias absolutas, relativas y sus correspondientes acumuladas.
b) ¿Qué proporción de hogares están compuestos por cuatro o menos personas?

Los anteriores estudios pueden ser útiles para variables discretas o para variables continuas con pocos datos. Si la variable a estudiar es continua, por ejemplo, peso, altura, temperatura o tiempo, o si es discreta con gran cantidad de datos, es engorroso elaborar una tabla estadística con todos esos datos, por lo que se dividen en grupos que llamamos *intervalos de clase,* según la diferencia de los valores menor y mayor de los datos. En cada uno de estos intervalos, a sus valores extremos los llamamos *extremos del intervalo,* o *extremos de la clase,* y al valor medio de ese intervalo lo llamaremos *marca del intervalo,* o *marca de la clase*.

En estos casos se suman las frecuencias de todos los datos incluidos en cada intervalo para obtener la frecuencia del intervalo o *frecuencia de la clase.* La tabla estadística en este caso tendrá en su primera columna o fila los valores de los extremos del intervalo de la clase y para cálculos estadísticos se le asignará el valor de la *marca de la clase;* en las restantes columnas o filas se dispondrán los datos igual que se hizo en las anteriores tablas de valores discretos. Véase el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. Mostramos un ejemplo de variable cuantitativa continua. En este caso la variable es la altura, expresada en centímetros, de una muestra de 81 personas, como se indica en la tabla 16.2.

TABLA 16.2

Altura en centímetros

175	175	190	171	189	158	176	183	180
174	159	178	167	191	183	168	185	178
188	168	165	165	188	167	188	188	190
176	166	167	169	183	172	179	190	191
179	190	159	170	180	179	169	191	195
190	199	172	175	178	165	159	175	179
182	170	168	180	179	170	169	169	183
180	171	169	185	183	190	179	189	188
179	167	171	188	160	195	180	188	185

TABLA 16.3

Intervalos

Intervalos	**Marca**	**Frecuencias**
[158-165]	161,5	8
(165-172]	168,5	21
(172-179]	175,5	17
(179-186]	182,5	14
(186-193]	189,5	18
(193-200]	196,5	3
Total		81

En primer lugar, deberemos ordenar los datos en orden creciente y decidir la cantidad de intervalos, en nuestro caso establecemos seis intervalos desde el valor mínimo x_1 = 158; con una diferencia entre los extremos de los intervalos de 7, obtenemos la tabla 16.3 de distribución de frecuencias de intervalos. Notemos que los intervalos están determinados por dos valores, entre corchetes o paréntesis, por ejemplo, el intervalo (172-179]; esto quiere decir que el valor cercano al paréntesis o extremo inferior, 172 en nuestro caso, no está incluido en este intervalo, pues corresponde al intervalo anterior, y el valor cercano al corchete o extremo superior, 179 en este caso, sí está en este intervalo y no en el intervalo cuarto de nuestro ejemplo. Para determinar las *marcas* se calculan las medias aritméticas de cada uno de los intervalos; la marca del intervalo (172-179] es $\frac{172 + 179}{2} =$ $= 175{,}5$, que es la media de estos valores.

ACTIVIDAD 5: Los pesos de un grupo de personas, expresados en kilogramos, son:

63; 66; 76; 66; 73; 74; 71; 57; 78; 65; 68; 63; 62; 61; 59; 66; 79; 66; 64; 58; 65; 61; 74; 61; 68; 56; 67; 53; 69; 70; 67; 69; 69; 63; 66; 71; 65; 74; 61; 71.

Construye una tabla de frecuencias con las frecuencias absolutas, relativas y acumuladas.

ACTIVIDAD 6: Las marcas de clase de una distribución de frecuencias de los pesos de un grupo de estudiantes son: 58; 62; 66; 70; 74; 78, y 82 kilogramos:

a) Halla el tamaño de intervalo de cada clase.
b) Halla los límites reales de cada intervalo.
c) Representa en un segmento de recta esos intervalos.

Soluciones:

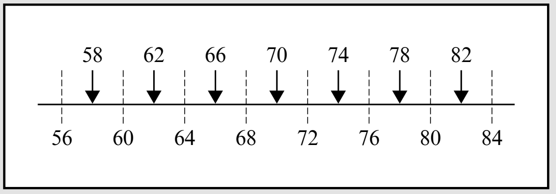
a) Según los datos, el tamaño de intervalo de cada clase es igual a la diferencia entre las sucesivas marcas de cada clase, es decir, 62 – 58 = 66 – 62 = ... = 4 kilogramos.

b) Como los intervalos tienen el mismo tamaño, los límites reales de cada clase están en los puntos medios entre las marcas de la clase. Estos valores son 1/2(58 + 62); 1/2(62 + 66) ... 1/2(78 + 82), lo que nos da los siguiente valores: 60, 64, 68 ... 80.

Para hallar el límite inferior real del primer intervalo, cuya marca es 58, se resta 60 (punto medio entre las marcas de las clases primera y segunda) menos 4 (tamaño de intervalos), siendo 56 el límite real inferior del primer intervalo y 80 + 4 = 84 el límite real superior del último intervalo.

Con ello se puede decir que el primer intervalo será [56, 60).

c) Se sitúan en el eje *X* las marcas 58, 62, 66, 70... y se representan los límites de cada intervalo por segmentos verticales, resultando el siguiente gráfico:



4. MEDIDAS DE UNA DISTRIBUCIÓN ESTADÍSTICA

Para el estudio de una característica cuantitativa en una distribución de datos de una población se ordenan numéricamente los datos obtenidos de una muestra y se agrupan en una tabla de frecuencias. Tras ello, pasamos al análisis de esos datos y obtenemos diferentes valores o parámetros de esa distribución. De los datos de la muestra, obtenemos tres tipos de medidas descriptivas: *medidas de centralización, medidas de posición* y *medidas de dispersión.* Las *medidas de centralización* describen la tendencia de agrupamiento cerca de posiciones centrales, y son la *media,* la *moda* y la *mediana*. Las *medidas de posición* son medidas que dividen al conjunto de datos en grupos con igual cantidad de individuos; a este grupo lo llamamos *cuantiles,* y, según su extensión se denominarán *percentiles, cuartiles* o *deciles.* Un tercer tipo de medida son las *medidas de dispersión,* que describen la dispersión o diseminación de los datos respecto a los valores centrales; citaremos el *rango,* la *desviación media,* la *varianza* y la *desviación típica*.

4.1. Medidas de centralización

Estas medidas describen el agrupamiento de los datos en torno a unos valores cercanos al centro, lo que permitirá conocer cómo están distribuidos esos valores respecto a esas medidas centrales. Estas medidas resumen en unos pocos valores los datos de toda una población, aunque no coincidan con ninguno de sus datos. Esta consideración, un poco simplista, es muy útil en los tratamientos estadísticos, ya que, por ejemplo, nos puede dar idea de la simetría y forma de la gráfica estadística que podamos construir posteriormente, al ver, por ejemplo, cómo de agrupados o dispersos están los datos respecto a las medidas que se estudian a continuación.

Las principales medidas son:

Media o ***media aritmética:*** es el cociente de dividir la suma de todos los valores entre el número total de valores; se suele representar por $\overline{x}$. El cálculo para obtener la media se sintetiza en la siguiente fórmula: $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{N}$, siendo:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \dots x_n f_n$$

es decir, que es igual a la suma de cada uno de los valores de la variable x desde el valor primero ($i = 1$) hasta el último valor ($i = n$) de la variable, multiplicados cada uno de ellos por cada una de sus frecuencias absolutas (f_i). El valor N es la suma de todas las *frecuencias absolutas,* o sea, la cantidad de sucesos o datos de la muestra.

En el ejemplo 2, la *media* es:

$$\overline{x} = \frac{\begin{array}{c}(1 \times 4) + (2 \times 2) + (3 \times 6) + (4 \times 2\ ) + \\ + (5 \times 3) + (6 \times 5) + (7 \times 5) + \\ + (8 \times 2) + (9 \times 1)\end{array}}{30} =$$

$$= 4.6333\ldots \approx 4,\,6\hat{3}$$

Este valor, aunque no corresponde a alguna de las puntuaciones del ejemplo, aporta la información de una puntuación centrada que representa a todas ellas. Por ello hemos de tener en cuenta las características o propiedades siguientes:

Propiedades:

- Es una medida única para una serie de datos, y para conocer cómo de dispersos están los datos respecto de ella, se usa acompañada de una medida de dispersión.
- Puede estar condicionada por valores atípicos o dispersos, y los valores altos o bajos tienen mucho «peso» en su cálculo. Por ejemplo, si en una empresa el salario de 20 empleados es de 1.500 euros cada uno y el de un directivo es de 30.000 euros, éste tiene tanto peso como los veinte empleados, pero el cálculo de la media nos dirá que el salario medio será 2.857,15 euros por persona.
- Su cálculo nos dará un valor que puede no coincidir con uno de los datos; por ejemplo, en el cálculo con datos de núme-

ros naturales puede dar como resultado un número decimal, que no se corresponde con ese conjunto numérico. Si en el cálculo del número medio de aprobados en una asignatura puede resultar un número decimal que no corresponde a un número de personas físicas, no puede haber 17,36 aprobados.
- En el cálculo con variables continuas, si los datos están agrupados por intervalos, el valor de la *media* puede oscilar según la cantidad y tipo de intervalos.

Moda: es el dato con mayor frecuencia en la distribución de frecuencias y se suele representar por *Mo*. Puede ocurrir que todos los valores tengan la misma frecuencia, en cuyo caso no hay moda, o que existan dos, tres o más valores con la máxima frecuencia, en los que la distribución será bimodal, trimodal, etc. En el ejemplo 2, $Mo = 3$.

Propiedades:

- Es la medida representativa en distribuciones de escala nominal, es decir, cuando hay datos que no se pueden ordenar.
- Se usa con variables cualitativas al no necesitar cálculos aritméticos.
- Puede no tener un valor único.
- Es un valor muy sensible a variaciones muestrales al ser independiente de la mayor parte de los datos.
- No siempre se sitúa en el centro de la distribución.

Mediana: es el valor que ocupa el lugar central en la distribución estadística ordenada numéricamente; se representa por *Med*. Su cálculo es sencillo, se ordenan todos los valores de forma creciente. Si el número de datos es impar, el valor central es el valor de la mediana; si el número de datos es par, se seleccionan los dos valores centrales y la *mediana* será la media aritmética de esos dos valores centrales. En el ejemplo 2, para calcular la mediana, vemos que la muestra es de 30 datos, por lo que para calcularla ordenamos los datos y ésta deberá estar entre los valores 15.º y 16.º; para ello hacemos la media de los valores correspondientes a los puestos 15.º y 16.º y nos da 5, luego $Med = 5$.

Propiedades:

- No le afecta la dispersión de la distribución estadística.
- Su valor varía si los datos están agrupados en intervalos según la amplitud de éstos.

ACTIVIDAD 1: Calcula las medidas de tendencia central de la distribución de datos de la actividad 5 del apartado 3.3.

4.2. Medidas de posición

Estas medidas resultan prácticas para observar cómo están distribuidos los datos en cada grupo de partes iguales, su variación o dispersión. Para ello se divide el conjunto ordenado de datos en partes iguales o intervalos con el mismo número de elementos o valores, llamando a cada uno de ellos *cuantil*.

Por ejemplo, si tenemos un conjunto de 700 datos sobre una variable estadística, para hacer veinte cuantiles, primero ordenamos crecientemente los datos obtenidos de esa variable y, posteriormente, hacemos los veinte grupos o clases, llamamos a cada una de esas clases o grupos cuantil y en cada cuantil habrá 35 datos de la variable.

Los cuantiles varían de nombre según su amplitud, recibiendo los siguientes nombres:

- *Cuartil:* es cada uno de los tres valores que dividen al conjunto ordenado de datos en cuatro partes iguales. Si dividimos ese conjunto de datos en dos partes iguales, obtendríamos la *mediana,* que es igual al valor del *segundo cuartil,* que denotaremos como Q_2, luego $Med = Q_2$. Al dividir las dos mitades resultantes en dos partes iguales, resultan dos valores correspondientes al *primer cuartil* Q_1 y *tercer cuartil* Q_3, respectivamente.

  En el ejemplo 2, la *mediana,* cuyo valor es 5 equivale al cuartil segundo, luego $Med = Q_2 = 5$; el *cuartil primero* será el valor situado en el punto medio de la primera mitad, es decir, al ordenar los datos es el valor situado en el lugar octavo y su valor es $Q_1 = 3$; análogamente, el *tercer cuartil* $Q_3 = 7$, valor que ocupa el lugar vigésimo tercero.
- *Percentil:* es cada uno de los 99 valores que dividen los datos ordenados en cien partes iguales.
- *Decil:* es cada uno de los 9 valores que dividen los datos ordenados en diez partes iguales.

ACTIVIDAD 2: Calcula las medidas de posición de los datos de la actividad 2 del apartado 3.3.

ACTIVIDAD 3: Utiliza la página Web del Instituto Nacional de Estadística para obtener datos sobre la evolución de la educación universitaria en los últimos cinco años. De estos datos, calcula las diferentes medidas de tendencia central y de posición según estos resultados y haz un estudio comparativo de estas variables en esos cinco años.

4.3. Medidas de dispersión

Con las medidas centrales ignoramos gran parte de información sobre los datos, por ello es conveniente considerar cómo esos datos están distribuidos en torno a los valores centrales y cómo de dispersos o separados están los valores extremos en ese conjunto de datos. Para ello, se introducen las medidas de dispersión, entre las que destacan:

Rango: indica la diferencia entre los valores máximo y mínimo de todos los datos. Este valor da una primera aproximación sobre la dispersión de los datos. Si el rango es grande, puede que los datos estén muy alejados unos de otros, lo que indicaría poca representatividad de los valores centrales; en caso de que el rango sea pequeño, sucedería lo contrario. También se usa como medida de dispersión el *rango* o *recorrido intercuartílico (RIQ),* que mide la diferencia entre los valores del primer y tercer cuartiles.

En el ejemplo 2, el *rango* es $9 - 1 = 8$, y el *rango intercuartílico* será $Q_3 - Q_1 = 7 - 3 = 4$.

Desviación media: es la media aritmética de los valores absolutos de las diferencias de cada dato con la *media* de la distribución. Su cálculo sería:

$$\text{Desviación media} = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i |x_i - \overline{x}|}{N}$$

Ejemplo 4. Dados los datos 20, 19, 18, 10, 2, 1 y 0, calculamos primero su *media,* $\overline{x} = 10$ y para la desviación media podemos realizar los cálculos que mostramos en la tabla 16.4.

Como hay siete datos, la desviación media será $\frac{54}{7} = 7{,}714$.

Observa que $\sum(x_i - \overline{x}) = 0$, de ahí la dificultad de que la suma de las desviaciones respecto de la *media* sea cero, lo cual justifica el uso del valor absoluto. Por eso esta medida de la dispersión global raramente se emplea. Para salvar esto se usa la siguiente medida, que con-

TABLA 16.4

Cálculo de la desviación media

x_i	20	19	18	10	2	1	0	
f_i	1	1	1	1	1	1	1	
$x_i - \overline{x}$	10	9	8	0	−8	−9	−10	$\sum(x_i - \overline{x}) = 0$
$\lvert x_i - \overline{x}\rvert$	10	9	8	0	8	9	10	$\sum\lvert x_i - \overline{x}\rvert = 54$

siste en elevar al cuadrado las desviaciones antes de hacer su promedio.

Varianza: creada por Ronald Fisher en 1918, indica la dispersión de una variable aleatoria de su valor medio o esperado, por ello se calcula como la media aritmética de los cuadrados de las diferencias entre cada valor y la media de la distribución estadística, es decir:

$$\text{Varianza} = \frac{f_1(x_i - \overline{x})^2 + f_2(x_2 - \overline{x})^2 + \ldots \\ \ldots f_n(x_n - \overline{x})^2}{N}$$

Esta media se hace con las diferencias al cuadrado para evitar los valores negativos que resulten y su valor se simboliza con la letra griega sigma minúscula al cuadrado, σ^2, sintetizándose su cálculo en la siguiente fórmula:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i(x_i - \overline{x})^2}{N}$$

Para calcular la varianza en el ejemplo 2 (recordemos que la *media* valía $\overline{x} = 4.6\hat{3}$ y $N =$ $= 30$), elaboramos la tabla 16.5:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i(x_i - \overline{x})^2}{N} = \frac{162{,}97}{30} = 5{,}4323$$

Desviación típica: el valor de la varianza está en una unidad distinta que la variable y se expresa en unidades cuadradas. Por eso se debe usar la desviación típica, que, al ser la raíz cuadrada de la varianza, sí está expresada en la misma unidad. La desviación típica o estándar se representa con σ y es la raíz cuadrada positiva de la varianza.

TABLA 16.5

Cálculo de la varianza

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
f_i	4	2	6	2	3	5	5	2	1	
$x_i - \overline{x}$	−3,63	−2,63	−1,63	−0,63	0,37	1,37	2,37	3,37	4,37	
$(x_i - \overline{x})^2$	13,18	6,92	2,66	0,40	0,14	1,88	5,62	11,36	19,10	$\sum f(x_i - \overline{x})^2$
$f_i(x_i - \overline{x})^2$	52,71	13,83	15,94	0,79	0,41	9,38	28,08	22,71	19,10	162,97

En el ejemplo 2, $\sigma = \sqrt{5{,}43} = 2{,}33$.

En distribuciones estadísticas con valores atípicos, por ejemplo, cuando las medidas de tendencia central no representen a la distribución, la *varianza* y la *desviación típica* se pueden ver influenciadas por estos valores. En estos casos no se aconseja utilizar estas medidas para estudiar la dispersión, se debe estudiar la dispersión entre los diferentes rangos en cuartiles y su dispersión respecto de la mediana.

Propiedades de la varianza y la desviación típica:

- Son medias muy sensibles a las puntuaciones extremas.
- No se pueden hallar si no se puede calcular la media.
- La varianza viene expresada en las unidades al cuadrado de los datos.
- Al comparar la desviación típica con los datos, cuanto más pequeña sea ésta, mayor será la concentración de los datos alrededor de la media.

ACTIVIDAD 4: En la siguiente tabla se presenta la distribución de las alturas de un grupo de personas:

Alturas	Frecuencias
[152,5; 157,5)	5
[157,5; 162,5)	18
[162,5; 167,5)	26
[167,5; 172,5)	16
[172,5; 177,5)	15
[177,5; 182,5)	12
[182,5; 187,5)	8

a) ¿Cuál es la dimensión de la muestra?
b) Calcula la marca de cada clase.
c) Halla las medidas de dispersión de estos datos.

5. GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

La presentación de los datos en forma de tablas estadísticas resulta útil para apreciar cómo se distribuyen y para el posterior cálculo de otros parámetros estadísticos, pero es más intuitiva su presentación en forma gráfica. Podemos diferenciar estas representaciones gráficas según el carácter de la variable a estudiar, distinguiendo entre representaciones de variables cualitativas y cuantitativas, diferenciando también en estas últimas los tipos de variables discretas de las continuas. Para la representación de estas gráficas usamos la proporcionalidad entre las frecuencias absolutas o relativas de los datos y las superficies o longitudes que las representan.

5.1. Gráficos de variables cualitativas

Diagrama de barras. El primer gráfico estadístico se debe a Edmund Halley (descubridor del cometa Halley), quien lo utilizó en sus *análisis gráficos de las presiones atmosféricas*. Willian Playfair fue quien ideó el gráfico de barras en 1786 para representar en un diagrama cartesiano las tablas de frecuencias.

Para su construcción, en un sistema de ejes de coordenadas cartesianas, elegimos en el eje de las abscisas tantos lugares equidistantes como valores queremos representar de la variable, y el eje de las ordenadas se divide en partes directamente proporcionales a las frecuencias relativas o absolutas de los valores de la variable. Cada uno de estos valores de la variable se representa en el eje de abscisas y la longitud de su barra será proporcional a su frecuencia.

Representamos en la figura 16.1 el diagrama de barras de los datos de una empresa de alquiler de automóviles, siendo las seis marcas de vehículos más demandadas en la última semana las que indicamos a continuación, y entre paréntesis la cantidad de vehículos alquilados de cada marca: Peugeot (12); Toyota (15); Ford (18); Seat (16); BMW (7), y Honda (9). Como es una variable cualitativa, «marca de automóviles», asignaremos a cada una de esas marcas una etiqueta para identificar su representación en forma de barra; estas etiquetas son las respectivas iniciales de las marcas: Peugeot (P); Toyota (T); Ford (F); Seat (S); BMW (B), y Honda (H), etiquetas que situamos equidistantes en el eje de las abscisas, mientras que en el de las ordenadas se sitúan las frecuencias (veces que se ha alquilado cada marca).

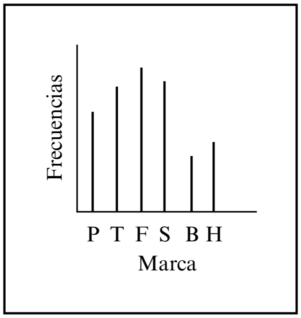


Figura 16.1

Diagrama de sectores. Ideado por William Playfair en 1801, consiste en repartir el círculo en tantas partes como valores tenemos de la variable, proporcionalmente a la frecuencia de cada valor. Para visualizar el reparto total de la *población* es útil el tamaño relativo de cada parte y, aunque lo situemos entre los gráficos de las variables cualitativas, también se puede utilizar para la comparación de variables cuantitativas.

Para su construcción, se reparte el círculo en partes proporcionales a las frecuencias relativas de los valores de la variable, correspondiéndole a cada valor un sector circular de amplitud proporcional a su frecuencia. Por ello, si a toda la *población* le corresponde una amplitud de 360º, para hallar la amplitud de un valor o categoría x_i cuya frecuencia relativa es f_i, multiplicamos 360 por f_i; el resultado será la amplitud del sector circular correspondiente al valor o categoría x_i.

Aunque con los diagramas de barras y los de sectores captamos rápidamente cómo está distribuida la variable cualitativa, éstos no son imprescindibles, sobre todo cuando se trata de pocos datos, ya que en el estudio de las variables cualitativas las podemos describir de forma aislada con facilidad, sin ayudarnos de gráficos.

Resaltamos una diferencia entre el diagrama de barras y el gráfico de sectores: con el primero se comparan rápidamente todas las categorías o clases, mostrando la altura o longitud de las barras la cantidad de individuos de cada clase, mientras que con el diagrama de sectores visualizamos la relación de cada categoría con el total.

Ejemplo 5. Las calificaciones de los alumnos de una clase de 65 alumnos son las siguientes: 14 suspensos, 23 aprobados, 17 notables y 11 sobresalientes.

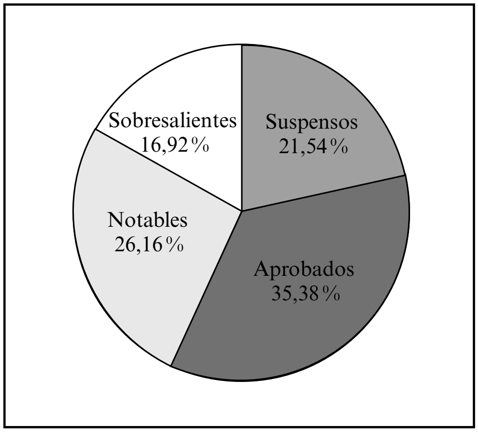


Figura 16.2

En este ejemplo podemos apreciar las diferencias en la variable «calificaciones» por el peso que tiene cada una de esas calificaciones, por el predominio de los aprobados sobre los demás y, dentro de los demás valores, apreciar que son casi iguales entre ellos, sin necesidad de usar ningún gráfico.

Pero en la figura 16.2 mostramos el gráfico de sectores de esta distribución. En el mismo se indican los porcentajes de cada calificación según el total de los 65 alumnos de la muestra.

Ejemplo de ambos diagramas. Según el Instituto Nacional de Estadística, las principales causas de defunción en España en el año 1996 fueron:

Enfermedades del aparato circulatorio	133.499
Enfermedades tumorales	89.204
Enfermedades del aparato respiratorio	34.718
Enfermedades del aparato digestivo	18.861
Enfermedades del sistema inmunológico	5.504
Envenenamiento y traumatismos	16.324

Según estos datos, para realizar los gráficos de barras y de sectores asignamos las siguientes etiquetas a estas seis categorías: Enfermedades del aparato circulatorio (C); Enfermedades tumorales (T); Enfermedades del aparato respiratorio (R); Enfermedades del aparato digestivo (D); Enfermedades del sistema inmunológico (I), y Envenenamiento y traumatismos (E). Con lo indicado en cada uno de los anteriores apartados, realizamos los gráficos que muestran las figuras 16.3 y 16.4. ¿Cuál de estos gráficos muestra mejor la relación de cada enfermedad con el total de causas de defunción?

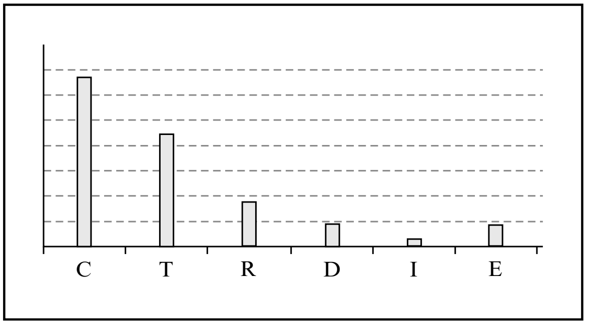


Figura 16.3.—Diagrama de barras.

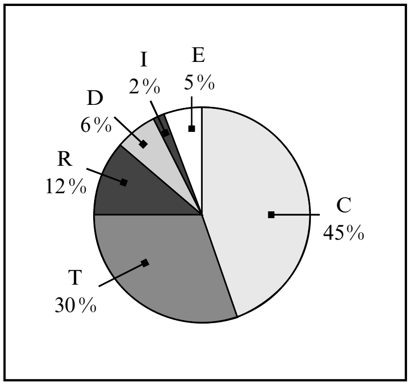
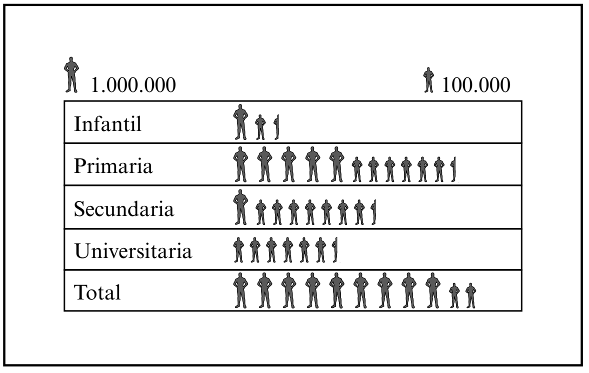


Figura 16.4.—Diagrama de sectores.

Pictograma. Es una representación típica de las variables cualitativas, que consiste en representar la variable a estudiar mediante un icono que simboliza la variable en estudio y con tamaño proporcional a la frecuencia absoluta o relativa de cada valor o *categoría*.

En el siguiente gráfico se muestra la distribución de la población estudiantil, desde la Educación Infantil hasta la universitaria, de un país imaginario. En este caso se representa cada millón de estudiantes por un icono mayor que el correspondiente a cien mil estudiantes:



5.2. Gráficos de variables cuantitativas

Histograma. El término histograma se debe a Karlw Pearson (1857-1936), pero el modo de representación gráfica fue usado previamente por William Playfair (1759-1823) y por Adolphe Quetelet (1796-1874), quien lo usó en sus trabajos sobre ciencias sociales.

Es un gráfico utilizado principalmente para variables continuas con gran cantidad de datos, que para su estudio se suelen agrupar en intervalos. Para ello, debemos determinar el *rango* de cada intervalo de la variable dividiendo el conjunto de valores de la variable en tantas partes como deseemos, obteniendo así los *intervalos* o *clases;* el valor medio de cada intervalo se llama *marca de la clase,* como se vio en el anterior apartado «Frecuencias. Tipos de frecuencias» de este capítulo.

En la figura 16.5 presentamos el histograma de los 81 datos del ejemplo 3, agrupados en los seis intervalos que se indican en la tabla 16.3. Destaquemos que en el histograma los rectángulos son contiguos, mientras que en el diagrama de barras éstas están separadas al ser variables discretas.

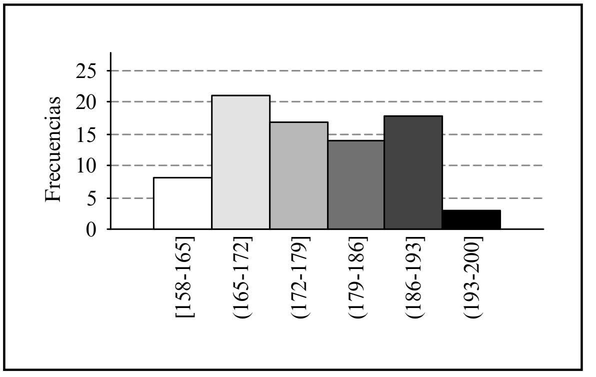


Figura 16.5.—Histograma.

Polígono de frecuencias. Es la línea poligonal que se obtiene al unir los extremos de las barras en un *diagrama de barras* o los extremos de las *marcas de clase* en un histograma. Los vértices de este polígono se determinan por las frecuencias de los datos, e indican la evolución de las frecuencias en el recorrido de todos los valores de la variable.

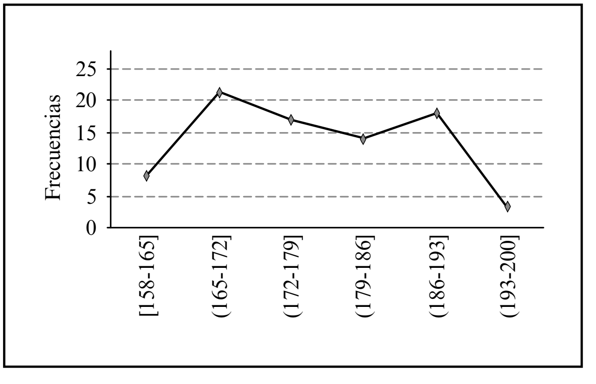


Figura 16.6.—Polígono de frecuencias de la tabla 16.3.

Polígono de frecuencias acumuladas. Si representamos las frecuencias acumuladas, sale un polígono creciente con la suma de las frecuencias. En la figura 16.7 representamos el polígono de frecuencias acumuladas de las puntuaciones del ejemplo 2.

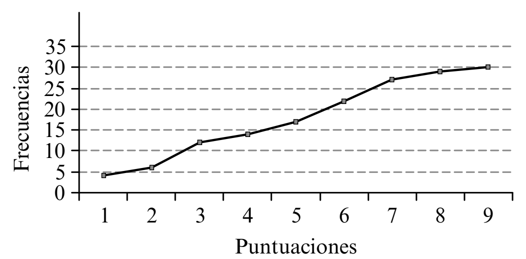


Figura 16.7.—Polígono de frecuencias acumuladas del ejemplo 2.

Vemos que el trazo de este polígono va creciendo desde el valor 1 de la variable puntuaciones, con una frecuencia 4, hasta el valor 9, donde se han acumulado las frecuencias de todos los valores anteriores de la variable, tomando en este punto el valor 30, equivalente al total de valores del recuento.

Diagrama de tallo y hojas. John Tukey, en 1970, introduce este modo de representar los datos como una variante del diagrama de barras y del histograma. Según Tukey: «Mientras que el histograma utiliza una marca no cuantitativa para indicar un valor de datos, está claro que la mejor marca es un dígito».

Este diagrama se utiliza para un conjunto no muy numeroso de datos, que se agrupan según sus frecuencias, obteniendo un diagrama semejante al de barras, donde las barras estarían simbolizadas por la información numérica. Se realiza separando la cifra de las unidades de cada dato, que constituirán las hojas, de las demás cifras, que serán el tallo. Se ordenan ascendentemente en una columna los tallos y en cada tallo se colocan a su derecha o izquierda, en fila, sus hojas o unidades correspondientes, también en orden creciente.

En la figura 16.8 representamos, en un diagrama de tallo y hojas, los datos del ejemplo 3. Se puede observar que los tallos representan los decímetros de las alturas del ejemplo y las hojas serán las unidades de cada uno de esos decímetros; así, por ejemplo, al tallo 15 corresponden las hojas 8, 9, 9, 9, ya que hay un sujeto de 158 cm y tres de 159 cm de altura.

Frecuencias	Tallos	Hojas
4	15	8999
17	16	05556777788899999
25	17	0001112245555668889999999
23	18	00000233333555888888899
13	19	000000111559

Figura 16.8

Diagrama de caja y bigotes. También se debe a Tukey este modo de representación gráfica que a veces se llama *diagrama de la mediana en recuadro,* ya que representa los siguientes cinco valores característicos de una distribución estadística: *mínimo (Mín.); primer cuartil (Q_1); mediana (Med.); segundo cuartil (Q_2); tercer cuartil (Q_3),* y *máximo (Máx.)*. Con ello da una idea mejor que otros gráficos sobre el sesgo y la dispersión de esa distribución. Para su construcción elaboramos un rectángulo *(caja)* en el que los lados estrechos representan los cuartiles Q_1 y Q_3, respectivamente, quedando entre ellos el 50% de todos los datos; en el interior de esta *caja,* una línea simboliza la *mediana,* y de la caja parten dos segmentos laterales *(bigotes),* cuyos extremos corresponden a los valores *mínimo* y *máximo*, que se encuentran a menos de 1,5 veces el recorrido intercuartílico *(RIQ)*. Si algún dato se encuentra a más de este último valor (1,5 × *RIQ*), se considera que es una observación atípica y se representa individualmente fuera de estos límites. Este gráfico es muy útil para representar las diferencias entre grupos.

Con los datos del ejemplo 3 calculamos los cuartiles; el primero será el valor tal que el 25% de los datos sean menores o iguales a él; como hay 81 datos, el 25% de 81 = 20,25, por lo que $Q_1 = 169$, que ocupa el lugar 21. Análogamente, calculamos el 50% de 81 = 40,5; luego $Q_2 = Med = 179$ y el 75% de 81 = 60,75 resultando $Q_3 = 188$. Con estos valores trazamos el gráfico que se muestra en la figura 16.9.

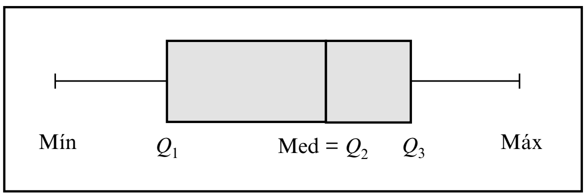


Figura 16.9.

ACTIVIDAD 1: Con los datos de la actividad 5 del apartado 3.3 construye un gráfico estadístico en el que se visualicen las características principales de esa distribución. ¿Qué tipo de variable es la de esos datos? Justifica el tipo de gráfico que has utilizado.

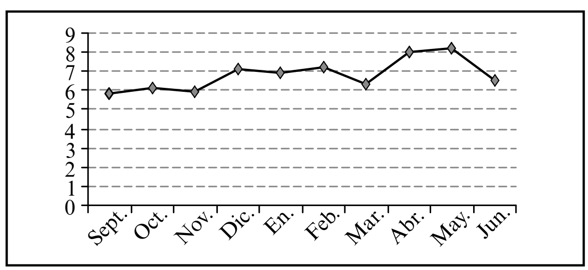
ACTIVIDAD 2: Para representar gráficamente las características de los datos de la variable de la actividad 4 del apartado 4.3, ¿qué gráfico usarías? Justifica tu respuesta. Realiza el gráfico.

5.3. Gráficos temporales

Independientemente de los tipos de variable estadística que se han descrito anteriormente, es frecuente estudiar la evolución de una variable a lo largo de un tiempo. Este tipo de representación se usa con frecuencia en ciencias, economía, biología, educación, antropología y otras disciplinas. En estos gráficos se representa la variable situando en el eje de las abscisas los períodos temporales en los que se midió la variable, y en el eje de las ordenadas los valores que han tomado esas variables en ese recorrido temporal.

En estos gráficos observaremos la evolución general y las desviaciones significativas. Con ello obtendremos el aspecto general que aparece con frecuencia y lo denominaremos tendencia. Esta tendencia puede ser de tipo estacionario o constante; en este caso su gráfica será una línea recta paralela al eje de las abscisas, o puede ser variable creciente, decreciente lineal o curvo.

Estos tipos de gráficos los podemos encontrar, por ejemplo, al representar la evolución del crecimiento de un bebé, la evolución del precio del petróleo en un lustro o la evolución de las calificaciones de una asignatura a lo largo del curso. En el gráfico siguiente mostramos la evolución de las calificaciones mensuales de la materia matemáticas de un alumno de segundo de Educación Secundaria en un curso académico:



En esta representación, que en realidad es un polígono de frecuencias, debemos hacer notar que en el eje de las abscisas se representan intervalos temporales.

ACTIVIDAD 3: Obtén de un periódico un gráfico de la evolución temporal de algún producto. Explica esta gráfica indicando la tendencia y su relación con el comentario que se hace en la prensa.

ACTIVIDAD 4: La tabla 16.6 indica los datos de la variable x_i = número de hermanos que tienen los alumnos (*A*) de una clase y también del número de hermanos que han tenido sus padres (*P*) y madres (*M*).

Según los datos de la tabla, ¿cuántos alumnos hay en la clase?

Con estos datos calcula las medidas de tendencia central y las de dispersión para cada grupo de la tabla. Elabora también un gráfico de barras y un polígono de frecuencias de cada uno de los tres grupos de la tabla.

¿Cómo están distribuidos cada uno de estos grupos, según los cálculos realizados? ¿Cuál presenta más dispersión?

Emite un juicio comparativo de estas tres distribuciones estadísticas.

TABLA 16.6

Número de hermanos

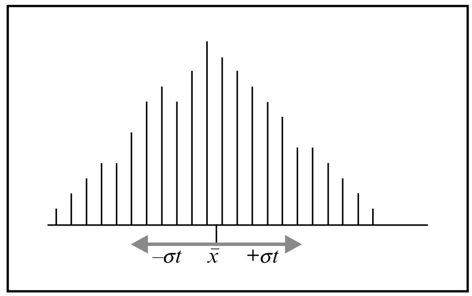
	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	f_i	9	18	4	2	1	0	0	0	0
P	f_i	2	4	9	7	6	3	2	1	0
M	f_i	3	3	4	7	5	6	3	2	1

6. INTERPRETACIÓN DE DATOS ESTADÍSTICOS

6.1. Significado gráfico de la desviación típica

En la actividad 4 del apartado anterior hemos comparado las distribuciones de la variable «número de hermanos» en tres grupos de personas, y lo hemos hecho comparando sus medidas de tendencia central y de dispersión. Veamos la utilidad de estas medidas para interpretar los datos de una distribución estadística.

Los parámetros $\bar{x}$ y σ son muy útiles en estudios estadísticos para la dispersión de los datos en torno al valor medio. Según la *desigualdad de Chebyschev,* si una distribución estadística de datos tiene una varianza muy pequeña, los datos estarán muy cerca de la media:



Ese intervalo se representa por $(\bar{x} - \sigma t; \bar{x} + \sigma t)$ y contiene todos los números reales de la variable *x* comprendidos entre sus extremos, es decir, aquellos que cumplan $\bar{x} - \sigma t < x < \bar{x} + \sigma t$.

Esto se puede traducir como: *La frecuencia relativa de los valores x que caen fuera del intervalo de centro $\bar{x}$ y de radio σt es igual o menor que $\frac{1}{t^2}$*; esta relación, denominada *desigualdad de Chebyschev,* la representamos así: $\frac{\sum f_i}{N} \leq \frac{1}{t^2}$, desigualdad que se aplica tanto en distribuciones estadísticas de variables discretas como continuas, y que permitirá tomar decisiones estadísticas con cierto grado de fiabilidad.

Ejemplo 6. La estatura media de una población de 220 personas es de 1,81 metros, con una desviación típica de 0,01. ¿Cuántas personas miden entre 1,77 m y 1,85 m?

Solución. Utilizando la *desigualdad de Chebyschev,* calcularemos el valor de t, según el intervalo que nos dan (1,77; 1,85) = (1,81 − 0,01t; 1,85 + 0,01t), de donde podemos decir que $1{,}77 = 1{,}81 - 0{,}01t \Rightarrow t = 4$, por lo que la frecuencia relativa de las personas que están fuera del intervalo es $\frac{\sum f_i}{N} \leq \frac{1}{t^2} = \frac{1}{4^2} = 0{,}0625$, es decir, que el 6,25% de las personas quedará dentro del intervalo, y el complementario fuera. Para calcular este grupo de personas que quedan fuera de ese intervalo se calcula 1 − 0,0625 = 0,9375, lo que quiere decir que al menos el 93,75% queda dentro. Como hay un conjunto de 220 personas, el 93,75% de 220, que es 206, queda con seguridad dentro del intervalo.

6.2. Normalidad de una distribución estadística

En la representación gráfica de las variables estadísticas podemos obtener gráficos totalmente distintos, según el tamaño de la muestra tomada y según la variable a estudio. Si el tamaño de la muestra es suficientemente grande y la gráfica resultante del histograma tiende a tener una forma acampanada y ligeramente simétrica, parecida a la que se presenta en la figura 16.10, decimos que esta gráfica casi acampanada representa un conjunto de datos que son *normales*. Si el gráfico de la distribución de datos se aproxima a esa representación, como se muestra en la figura 16.11, decimos que la distribución estadística es aproximadamente normal, y si hay una importante desviación de la simetría, diremos que la distribución es asimétrica, que puede ser por la izquierda, si la cola a la izquierda es más larga que la de la derecha (figura 16.12), o por la derecha, en caso contrario.

En una distribución normal simétrica, las medidas de tendencia central son iguales, es decir, *Moda* = *Media* = *Mediana*. Sin embargo, si la gráfica es ligeramente asimétrica, hay cierta variación en estas medidas y se cumple la siguiente igualdad:

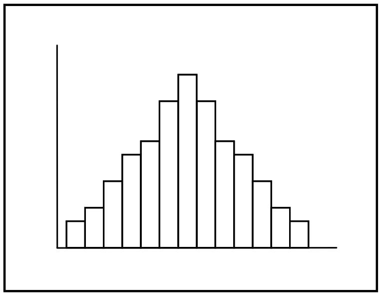


Figura 16.10

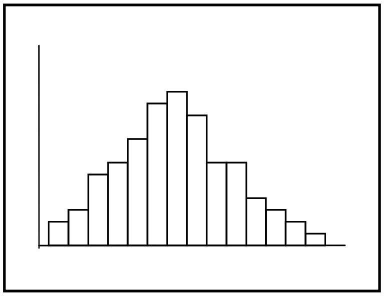


Figura 16.11

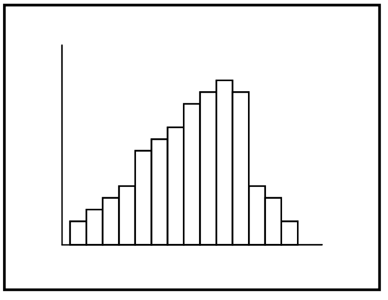


Figura 16.12

$$\textit{Media} - \textit{Moda} \cong 3\,(\textit{media} - \textit{mediana})$$

6.3. Regla empírica de la distribución normal

Si en una *población* obtenemos una *muestra* de *datos* con una distribución aproximadamente normal cuya *media muestral* es $\overline{x}$ y su desviación típica muestral es s, se cumple la siguiente regla:

- Casi el 68% de los datos se encuentra a menos de una desviación típica de la media, es decir, en el intervalo $(\overline{x} - s, \overline{x} + s)$.
- Casi el 95% de los datos se encuentra a menos de dos desviaciones típicas de la media, es decir, en el intervalo $(\overline{x} - 2s, \overline{x} + 2s)$.
- Casi el 99,7% de los datos se encuentra a menos de tres desviaciones típicas de la media, es decir, en el intervalo $(\overline{x} - 3s, \overline{x} + 3s)$.

ACTIVIDAD 1: Las puntuaciones de unos concursantes se muestran en el siguiente gráfico de tallo y hojas:

9	0, 1, 4
8	3, 4, 4, 5, 7, 9
7	0, 1, 3, 5, 5, 8, 9
6	0, 2, 4, 5, 6
5	0, 3, 5, 8

Según esos datos, obtén la media y la desviación típica de la muestra y averigua, mediante la regla empírica, si esta distribución se puede considerar normal.

ACTIVIDAD 2: Con los datos de la figura 16.8, realiza un histograma con cinco intervalos y compáralo con el gráfico de esa figura. Calcula la media y la desviación típica de esa distribución y explica si se puede considerar que es una distribución normal.

ACTIVIDADES PARA PRACTICAR

1. Una empresa de zapatos de deporte ha realizado un estudio para determinar cuántos zapatos debe hacer de cada número. Para ello, ha encuestado a un grupo de alumnos de Primero de Magisterio y ha obtenido que calzan los siguientes números: 41, 42, 39, 39, 41, 40, 37, 45, 43, 41, 39, 38, 38, 40, 41, 41, 38, 43, 40, 39, 41, 39, 44, 38 y 39. Elabora un estudio estadístico que lleve a organizar los datos en una tabla, a hacer representaciones gráficas adecuadas y a calcular la media y el rango. Extrae conclusiones a partir de estas medidas y gráficos.
2. Inventa tres conjuntos diferentes de medidas (naturales) que tengan por moda 5 y por media 8, con diferentes rangos.
3. Un estudio estadístico sobre calificaciones en la asignatura de matemáticas del primer curso de ESO da como resultado una media de 5,7 y una desviación típica de 2, ¿qué quieren decir estas medidas? ¿En qué unidades están expresados estos números? ¿Cómo considerarías este curso?
4. Suponiendo una población de 10 alumnos, inventa unos datos que den como resultado la media de 5,7 y un rango de 5. Analiza el tipo de variable que estás estudiando.
5. En un seminario docente se encuentran 14 alumnos y 4 profesores. Si los estudiantes tienen un promedio de edad de 20 años y los profesores de 36, ¿cuál crees

que es la edad en promedio del grupo? Razona la respuesta: *a*) 28 años, *b*) 23,5 años y *c*) ninguna de las anteriores.

6. Para el caso de una población de 5 alumnos, inventa unos datos cuya mediana esté por encima de la media, y viceversa. Inventa datos para que coincidan media, mediana y moda, y el rango sea 4.

7. En la siguiente tabla se indica los cinco grupos de empleados que tienen las empresas *A* y *B* y el salario que cobra cada uno de los empleados de esos grupos. ¿En cuál de estas dos empresas el salario está repartido de forma más equitativa?

Explica tu respuesta utilizando criterios estadísticos:

Empresa *A*			**Empresa *B***		
Grupos	**N.º de empleados**	**Salario en € por empleado**	**Grupos**	**N.º de empleados**	**Salario en € por empleado**
1.º	17	700	1.º	15	1.100
2.º	22	1.100	2.º	20	1.200
3.º	35	1.575	3.º	25	1.500
4.º	20	1.500	4.º	14	2.000
5.º	5	2.500	5.º	3	5.500

8. Según el Ministerio de Educación, el gasto público en Educación en el año 2008, para el conjunto de administraciones y universidades públicas, ha sido de 48.873.573 euros. La distribución de estas inversiones se indica en la tabla siguiente:

Gasto público en Educación, año 2008	
Educación no universitaria	35.008.033
Educación universitaria	10.374.722
Formación ocupacional	1.740.530
Becas y ayudas totales	1.750.288
Total	48.873.573

- Representa, en un diagrama de barras y en un diagrama de sectores, la distribución de estos datos y haz un estudio comparativo de ambos gráficos (diferencias, similitudes, etc.). Indica, razonadamente, cuál te parece más apropiado.
- ¿Sería adecuado utilizar un histograma o un polígono de frecuencias para representar esta distribución de datos? Justifica tu respuesta.

9. Toma, del conjunto de tus compañeros de clase, los datos de las siguientes variables de cada uno de ellos: peso, altura, edad, sexo y cantidad de euros que tiene en el bolsillo. De estos datos, elabora una tabla de frecuencias de cada una de las variables y calcula todas las medidas estadísticas tratadas en el tema (de posición central y de dispersión) de cada variable:

- Según estos datos, indica cuál crees que es la medida más representativa de cada variable y cuál el sujeto más representativo.
- Estudia si hay relación entre dos de las anteriores variables que estimes estén relacionadas. Representa en un diagrama cartesiano esta posible relación entre ambas variables.

INVESTIGA Y REFLEXIONA

1. Utiliza una hoja de cálculo electrónica para elaborar cálculos estadísticos y gráficos propuestos en este tema. Simultáneamente, usa una calculadora electrónica o calculadora gráfica, en el modo estadística, para hacer también estos cálculos e investiga si hay discrepancia entre las soluciones aportadas por ambos medios.

2. Describe qué contenidos de los tratados en este capítulo se incluyen en libros de Educación Primaria; indica también en qué niveles se desarrollan y qué tratamiento y justificación tienen.

3. Busca en libros de otros niveles educativos que incluyan contenidos que no has encontrado en Primaria e intenta explicar, en cada caso, por qué se deben tratar dichos contenidos en cada uno de esos niveles.

4. Encuentra en la prensa artículos en los que se presenten datos estadísticos y analiza los datos o gráficos junto con el texto que presenta la noticia. ¿Estás de acuerdo con el modo de presentación de estos gráficos y datos? ¿Sustituirías éstos por otros más intuitivos?

5. Busca en Internet alguna página simuladora de cuestiones y datos estadísticos. Para ello, puedes utilizar, por ejemplo, la página web dedicada al National Council of Teacher of Mathematics, o, si lo prefieres, la del proyecto Descartes del Ministerio de Educación para considerar todas las propuestas que se hacen en este tema sobre situaciones estadísticas e investigar su aplicabilidad a la enseñanza del futuro docente.

BIBLIOGRAFÍA

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada.

Castro, E. (Ed.) (2001). *Didáctica de la Matemática en la educación primaria*. Madrid: Síntesis.

Díaz Godino, J. (Dir.) (2004). *Matemáticas para maestros*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática (http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/).

Nortes Checa, A. (1987). *Encuestas y precios*. Madrid: Síntesis.

Ross, S. (2008). *Introducción a la Estadística*. Barcelona: Reverte.

Probabilidad 17

JUAN LUIS PAREJA PÉREZ

El origen del cálculo de probabilidades está ligado a los juegos de azar. El propio término «azar» proviene de la costumbre de marcar con una flor (en árabe, *az-zahr*) alguna de las caras de la taba o astrágalo, antecesor del dado cúbico, que se usaba en este tipo de juegos.

El estudio de los juegos de azar le proporcionó sus primeros problemas (problema del reparto de apuestas, problema de la ruina de un jugador...) y sus nociones básicas (probabilidad de un suceso, esperanza de ganar...). En la actualidad, es una teoría matemática que mantiene estrechas relaciones con otras ciencias en las que el azar está presente. Ésta es una muestra de situaciones en las que se aplica o se puede aplicar:

- El estudio del efecto de un fertilizante en el crecimiento de un cereal.
- El estudio del efecto de una vacuna contra una enfermedad.
- El análisis de la propagación de una enfermedad.
- La elaboración de los horarios del personal de un hipermercado.
- La determinación de la cuota que deben pagar los asegurados de una compañía.

- La previsión del tiempo.
- El control de la calidad de los productos elaborados en una fábrica.
- El estudio de la intención de voto en unas elecciones generales.

El cálculo de probabilidades es la base de la llamada estadística matemática o inferencial, en la que se amplía (en cierto sentido, se «generaliza») a una población el resultado obtenido en una muestra de la misma. Naturalmente, cuando se hace esta generalización se comete un error, cuyos márgenes se pueden controlar, que se mide en términos de probabilidad. A su vez, la estadística matemática constituye una herramienta fundamental en la investigación científica.

En definitiva, el cálculo de probabilidades resulta necesario para entender tanto el mundo físico como el social.

1. EL CÁLCULO DE PROBABILIDADES COMO TEORÍA MATEMÁTICA

1.1. Orígenes. Siglo XVII

Al contrario de lo que ocurre con otras partes de las matemáticas, en las que su origen se pierde en la noche de los tiempos, los historiadores coinciden en situar el inicio del cálculo de probabilidades en el año 1654. En este año se estableció una correspondencia entre Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1665) a propósito de dos problemas que Antoine Gombauld, el caballero de Méré, propuso a Pascal:

1. *El problema de los dados*. ¿Qué es más probable, obtener al menos un 6 en cuatro lanzamientos de un dado u obtener, al menos, un doble 6 al lanzar 24 veces dos dados? Méré también preguntó cuál sería el número de lanzamientos (simultáneo de dos dados) necesario para obtener un doble 6 con una probabilidad superior a 1/2.
2. *El problema del reparto*. Se lanza una moneda varias veces. Por cada «cara» obtenida, *A* recibe 1 punto, y, por cada «cruz» el punto lo recibe *B*. Ganará la apuesta el primero que obtenga 5 puntos. Al cabo de 7 jugadas, *A* tiene 4 puntos y *B* tiene 3 puntos. Si en este momento se interrumpe el juego, ¿cómo debe repartirse la apuesta de la manera más equitativa: proporcionalmente a los resultados ya obtenidos, o sea 5/3, o proporcionalmente a los puntos todavía no distribuidos, o sea 2/1?

Con anterioridad, se habían estudiado problemas relacionados con los juegos de azar [Paccioli (italiano, 1544-1514), Tartaglia (italiano, 1499-1551), Cardano (italiano, 1501-1576), Galileo (italiano, 1564-1642)], pero fue la primera vez que se resolvió un problema no trivial.

1.2. Consolidación. Siglos XVIII y XIX

Durante estos siglos se produce un enorme desarrollo del estudio matemático de la probabilidad. Los trabajos se van desvinculando de los juegos de azar y aparecen nuevas aplicaciones.

Éstos son algunos de los libros y autores más relevantes de estos siglos:

Ars Conjectandi (1713), de Jacob Bernoulli (1654-1705). En esta obra se establece y demuestra la ley de los grandes números, que es la base de la interpretación frecuentista de la probabilidad. También se enuncia el principio de la razón insuficiente, en que se basa la interpretación clásica de la probabilidad.

The Doctrine of Chances (1718), de Abraham de Moivre (francés, 1667-1754). Aparece por primera vez la expresión que caracteriza la distribución normal.

Théorie analytique des probabilités (1812), de Pierre-Simon Laplace (francés, 1749-1827), que tuvo una extraordinaria influencia. Entre los contenidos del tratado, se encuentran la que hoy llamamos definición clásica de probabilidad y la regla de Bayes.

En estos años se ampliaron los campos a los que aplicar el cálculo de probabilidades. A mediados del siglo XVIII se fundó la primera compañía de seguros que hizo uso de la ciencia actuarial, en particular del cálculo de probabilidades. El propio Laplace utilizó su teoría en astronomía. En 1859, Maxwell propuso un modelo probabilístico para la distribución de las velocidades de las moléculas en un gas. En 1866, Mendel publicó sus estudios sobre la herencia, en los que empleó argumentos probabilísticos.

1.3. Consagración

En el Congreso Internacional de Matemáticos de 1900, en París, el matemático David Hilbert (1862-1943) presentó diez problemas pendientes de resolver en aquel momento. El problema número 6, titulado *Tratamiento matemático de los axiomas de la física*, empieza así: «Las investigaciones sobre los fundamentos de la geometría sugieren el problema: tratar de la misma manera, por medio de axiomas, aquellas ciencias físicas en las que las matemáticas tienen un papel importante; en primera fila están la teoría de la probabilidad y la mecánica».

En 1933, Andrey Kolmogorov (ruso, 1903-1987) publicó los *Fundamentos de la Teoría de la Probabilidad,* donde establece la esperada axiomatización de la teoría. El cálculo de probabilidades se convirtió así en otra rama de las matemáticas.

2. LA PROBABILIDAD EN EL CURRÍCULO DE PRIMARIA

El estudio del azar y la probabilidad ha ido en aumento en los primeros niveles educativos durante los últimos años. Las sucesivas normativas curriculares que establecen las enseñanzas mínimas y el currículo de Primaria lo ponen de manifiesto.

La Orden ECI/2211/2007, en sus planteamientos, pone de relieve explícitamente el papel que debe tener la probabilidad en el currículo:

> «Se entienden así las matemáticas como un conjunto de ideas y formas de actuar que conllevan no sólo utilizar cantidades y formas geométricas, sino, y sobre todo, hacerse preguntas, obtener modelos e identificar relaciones y estructuras, de modo que, al analizar los fenómenos y situaciones que se presentan en la realidad, se puedan obtener informaciones y conclusiones que inicialmente no estaban explícitas. Concebidas de esta forma, las matemáticas incorporan las características que les han sido tradicionalmente asignadas y que se identifican con la deducción, la precisión, el rigor, la seguridad, etc., pero son y aportan mucho más de lo que se deduce de estos términos. También lo son inducción, estimación, aproximación, probabilidad y tentativa, y mejoran la capacidad de enfrentarse a situaciones abiertas, sin solución única y cerrada.»

Esta tendencia también se aprecia en el currículo de la educación básica de otros países. Las recomendaciones contenidas en los Principios y Estándares para la Educación Matemática, publicados por NCTM en el año 2000, extienden la posibilidad de tratar informalmente contenidos relacionados con la probabilidad desde la Educación Infantil (etapa Pre-K-2). También son más explícitas en cuanto a las expectativas. Como ejemplo, en la etapa 6-8 (equivalente al tercer ciclo de Primaria), el alumno debería:

- Comprender y utilizar la terminología apropiada para describir sucesos complementarios y mutuamente excluyentes.
- Utilizar la proporcionalidad y una comprensión básica de la probabilidad para formular y comprobar conjeturas sobre los resultados de experimentos y simulaciones.
- Calcular probabilidades de sucesos compuestos sencillos utilizando métodos como listas organizadas, diagramas de árbol y modelos de áreas.

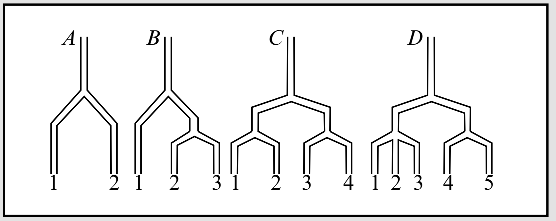
Los cambios que se están produciendo en relación con el tema que nos ocupa responden, casi con seguridad, a las propuestas surgidas a partir de investigaciones recientes realizadas en educación matemática y a la constatación de la presencia creciente de lo aleatorio en lo cotidiano.

Existen limitaciones en los escolares de primer y segundo ciclos para abordar determinados aspectos relacionados con la probabilidad: no poseen habilidad para distinguir entre azar y necesidad, no dominan la comparación por razón y tampoco han desarrollado el pensamiento combinatorio. Sin embargo, parece demostrado que pueden hacer juicios probabilísticos intuitivamente.

Por estas razones, las limitaciones psicológicas e instrumentales no deben impedir que el escolar realice actividades en las que esté involucrado el azar desde una edad temprana.

ACTIVIDAD 1: Revisa los textos actuales de matemáticas de una editorial determinada para la Educación Primaria y haz un listado, curso por curso, con los contenidos y actividades relacionados con el azar y la probabilidad.

ACTIVIDAD 2: El siguiente diagrama muestra cuatro tipos de canales. En cada uno de ellos se introduce una bola por la parte superior que recorrerá el canal hasta alcanzar una de las salidas inferiores. ¿En qué canal será más probable que salga por aquel que tiene la etiqueta «1»? ¿Es más fácil que salga por «2» en el canal *B* o en el canal *C*? Justifica tus respuestas:



3. EL LENGUAJE DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

3.1. Experimento aleatorio. Experimentos simples y compuestos

El cálculo de probabilidades es la rama de las matemáticas que elabora modelos matemáticos para aquellas situaciones o fenómenos del mundo real que involucran incertidumbre o aleatoriedad.

Los fenómenos aleatorios (del latín *alea,* que significa «dado») se caracterizan por su imprevisibilidad: cuando se repiten en condiciones idénticas, se observan resultados distintos.

En los fenómenos deterministas el resultado será el mismo si concurren las mismas condiciones.

Muchos fenómenos aleatorios se producen en el mundo real de manera espontánea; por ejemplo, los fenómenos atmosféricos o la herencia genética. Para producir y estudiar otros se realizan acciones o se llevan a cabo procedimientos intencionados, es decir, se experimenta.

> *Se denomina* ***experimento aleatorio*** *al conjunto de acciones que dan lugar a un fenómeno aleatorio determinado.*
>
> *La observación del fenómeno forma parte del propio experimento aleatorio.*

Ejemplos de experimentos aleatorios son: lanzar una moneda, girar una ruleta, extraer una bola de una urna o administrar una vacuna experimental. Registrar el sexo de los recién nacidos durante un mes en una determinada ciudad es la observación de un fenómeno aleatorio que ocurre de manera natural: el sexo de los recién nacidos.

Las características de un experimento aleatorio (e.a.) son las siguientes:

- El resultado del experimento no puede conocerse de antemano.
- Los resultados posibles deben estar bien determinados.
- En principio, debe poder repetirse en condiciones idénticas.

Por ejemplo, al lanzar un dado no conocemos qué cara mostrará, pero sí cuáles podrían ser sus valores. Los resultados posibles son: 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Además, puede repetirse el lanzamiento sin que se alteren las condiciones del mismo.

> *Un experimento aleatorio con una sola prueba se denomina* ***experimento simple.***
>
> *Un experimento aleatorio que consiste en dos o más experimentos simples, que se realizan sucesivamente, se denomina* ***experimento compuesto.***

Ejemplos de experimentos simples:

1. Lanzar una moneda.
2. Lanzar simultáneamente dos monedas.

Ejemplos de experimentos compuestos:

1. Lanzar una moneda y, a continuación, lanzarla de nuevo.
2. Lanzar una moneda y, a continuación, extraer una bola de una urna.

3.2. Resultados posibles. Espacio muestral

Como se ha dicho, los resultados posibles de un experimento aleatorio deben estar bien determinados. El número de resultados posibles de un experimento aleatorio puede ser finito o infinito. En este tema sólo se considerarán experimentos aleatorios, con un número finito de resultados posibles.

En muchas ocasiones, no resulta fácil enumerar los resultados posibles de un experimento aleatorio. Por ejemplo, al extraer 6 bolas simultáneamente de una urna que contiene 49 bolas numeradas consecutivamente a partir de 1, el número de resultados posibles es 13.983.816. Para hacer este cálculo se ha hecho uso de la técnica combinatoria. En este tema sólo se considerarán experimentos que tengan un número manejable de resultados posibles y dicho número pueda obtenerse contando o aplicando estrategias ya estudiadas en los capítulos 3 y 4.

> *Todos los resultados que pueden ocurrir al realizar un experimento aleatorio constituyen un conjunto que se denomina* ***espacio muestral,*** *espacio de posibilidades o universo. Para representarlo, emplearemos la letra Ω.*

Ejemplo. En el experimento consistente en lanzar un dado cúbico habitual, el espacio muestral sería $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, entendiendo cada elemento i como «sale i».

ACTIVIDAD 1: Describe y determina el espacio muestral asociado a los siguientes experimentos aleatorios:

- Lanzar dos dados simultáneamente.
- Lanzar tres monedas, una de 50 céntimos, una de un euro y una de 2 euros.
- Extraer una bola de una urna y, sin devolverla a la urna, extraer una segunda bola. Composición de la urna: cuatro bolas numeradas del 1 al 4.

3.3. Sucesos

En el cálculo de probabilidades se habla de *suceso* (también *evento* o acontecimiento) para referirse a cualquier conjunto de resultados posibles. Suelen usarse letras mayúsculas para nombrarlos.

Por ejemplo, al lanzar un dado se pueden considerar los sucesos $A = \{1\}$ o $B = \{2, 4, 6\}$. Los mismos sucesos quedarían bien determinados así: «obtener 1» y «obtener par», respectivamente.

Un suceso *ocurre* cuando el resultado obtenido en la realización del experimento aleatorio está entre los que lo forman.

Por ejemplo, si al lanzar un dado sale 2, el suceso «obtener par» ha ocurrido.

Algunas definiciones relativas a los sucesos

Suceso seguro: es aquel que ocurre siempre.

Suceso imposible: es el que no ocurre nunca. Se emplea el símbolo $\varnothing$ para representarlo.

Suceso simple o elemental: es aquel que no puede descomponerse en otros. Cada uno de los resultados posibles constituye un suceso simple.

Suceso compuesto: es aquel que está formado por más de un resultado posible.

Suceso complementario de un suceso *A:* es el suceso «A no ocurre». Se representa mediante $\overline{A}$.

Suceso unión de dos sucesos A y *B:* es el suceso definido por «al menos uno de los sucesos A o B ocurren». Se representa mediante $A \cup B$.

Suceso intersección de dos sucesos A y *B:* es el suceso «A y B ocurren (a la vez o uno detrás de otro)». Se representa mediante $A \cap B$.

Dos sucesos A y B son *excluyentes,* o mutuamente excluyentes o incompatibles, si no pueden ocurrir a la vez. Es decir, si ocurre A, entonces no ocurre B, y si B ocurre, entonces A no ocurre. Dicho de otro modo, cuando A y B no tienen ningún elemento en común.

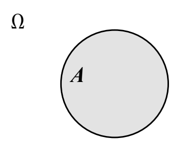
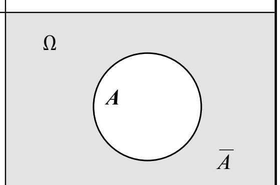
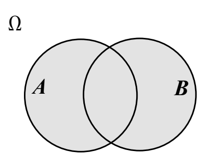
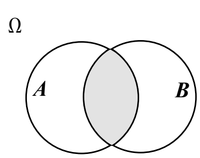
Ejemplos:

- Al lanzar un dado, el suceso «obtener una cara cualquiera» es seguro, y el suceso «obtener un 7» es imposible.
- Al lanzar un dado, el suceso complementario de $A = \{1, 2\}$ es $\overline{A} = \{3, 4, 5, 6\}$.
- El suceso complementario de A = «dos personas tienen su cumpleaños en el mismo mes» es $\overline{A}$ = «dos personas tienen su cumpleaños en distinto mes».
- Al lanzar dos dados, si A = «obtener la misma puntuación en los dos dados» y B = = «la suma de las puntuaciones de los dos dados es 11 o más», el suceso unión es $A \cup B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5),$

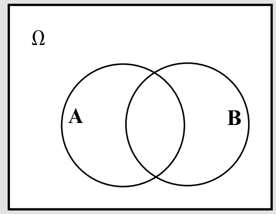
(6, 6), (5, 6) (6, 5)}, y el suceso intersección es $A \cap B = \{(6, 6)\}$.

- Al lanzar una moneda, los sucesos A = «sale cara» y B = «sale cruz» son excluyentes: si ocurre A, no puede ocurrir B, y viceversa.
- Al lanzar dos dados, los sucesos A = «obtener en los dos dados una puntuación inferior a 3» y B = «obtener en los dos dados una puntuación impar» no son excluyentes, puesto que si se obtiene (1, 1), ocurriría A y también B.

Una representación gráfica muy empleada para apoyar estas definiciones es el diagrama de Venn, también empleado en lógica y teoría de conjuntos.

Suceso	Símbolo	Representación (en gris)
A ocurre	A	
A no ocurre	$\bar{A}$	
Al menos uno de los sucesos A o B ocurre	$A \cup B$	
A y B ocurren (a la vez)	$A \cap B$	

ACTIVIDAD 2: Colorea en un diagrama de Venn como éste la zona que representa los siguientes sucesos:



- Ocurre A, pero no B.
- Ocurren A o B, pero no los dos a la vez.
- No ocurren ni A ni B.
- No ocurren A y B a la vez.

ACTIVIDAD 3: Se lanzan dos dados simultáneamente. Describe por extensión (es decir, especificando cada uno de sus elementos) los sucesos: A = «sacar la misma puntuación en ambos dados» y B = «alguna de las puntuaciones es impar». Determina $A \cap B$ y $\bar{A}$.

4. PROBABILIDAD

El intento de medir *cuánto* puede ocurrir un suceso conduce a la noción de probabilidad. Existen diferentes puntos de vista sobre la forma de realizar esta medida.

Se puede asignar una probabilidad a un suceso para expresar:

a) La frecuencia con que se presentará el suceso al repetir el experimento un número ilimitado de veces en idénticas condiciones. Se llama interpretación frecuentista.

b) La proporción o cociente existente entre el número de resultados que forman el suceso y el número total de resultados posibles. Se llama interpretación clásica.

c) El grado de creencia personal en la posibilidad de que el suceso ocurra. Se llama interpretación subjetiva

La interpretación frecuentista de la probabilidad se basa en una ley empírica que asegura la «estabilidad a la larga» de las frecuencias de los resultados posibles de un experimento aleatorio repetido en condiciones idénticas, como muestra la figura 17.1. Como consecuencia, a medida que el número de ensayos aumente, la frecuencia relativa de un suceso se aproximará más y más a lo que entendemos que es su probabilidad.

En la práctica, al no poder repetir el experimento aleatorio un número infinito de veces, su frecuencia relativa, aunque el experimento se repita muchas veces, es sólo una estimación de la probabilidad del suceso. Existe otra limitación: hay experimentos que sólo pueden realizarse una vez.

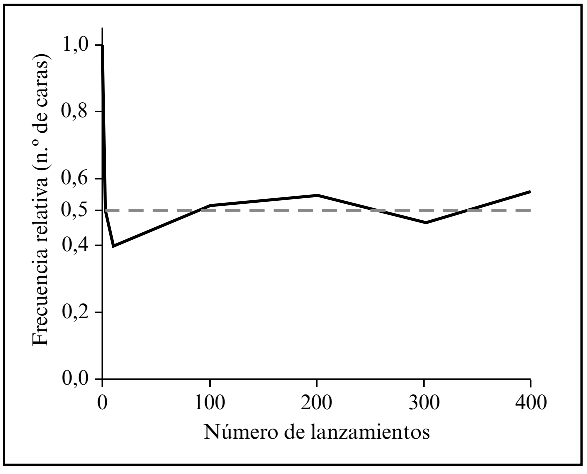


Figura 17.1.—Frecuencia relativa de «cara» en una serie de 400 tiradas.

La interpretación clásica se basa en el principio de la razón insuficiente de Jacob Bernouilli, también llamado principio de indiferencia:

> «Convenimos en que dos acontecimientos son igualmente probables si, después de tener en cuenta todas las evidencias que se puedan, uno de ellos no puede esperarse con preferencia al otro.»

Esta interpretación supone la equiprobabilidad de todos los resultados posibles. Esto constituye una limitación y, en muchas ocasiones, una exigencia difícilmente comprobable. Además, sólo es aplicable cuando el número de resultados sea finito.

La interpretación subjetiva se basa en la experiencia, conocimiento o información que la persona tenga sobre el suceso cuya probabilidad se pretende medir. Por este motivo, personas diferentes podrían asignar valores diferentes a la probabilidad de un mismo suceso. Al hacer uso de estos juicios probabilísticos las personas deben ser coherentes; es decir, la probabilidad asignada a un suceso no debe contradecir la probabilidad asignada a otro. Por ejemplo, si una persona cree que la probabilidad de encontrar una gasolinera abierta a las 3 de la madrugada es 0,01, también debe creer que la probabilidad de no encontrarla es 0,99, para ser coherente.

La probabilidad, interpretada como frecuencia o como proporción, será un número comprendido entre 0 y 1. Por ello, a la probabilidad subjetiva también se le exige que varíe entre 0 y 1 (véase figura 17.2).

Actividad 1: Lee con atención los siguientes enunciados y explica para cada uno de ellos qué interpretación de la probabilidad se está aplicando en cada situación:

a) Si una moneda se lanza 1.000 veces y sale cruz en 300 ocasiones, se puede decir que la probabilidad de obtener cruz con esa moneda es 0,3 aproximadamente.

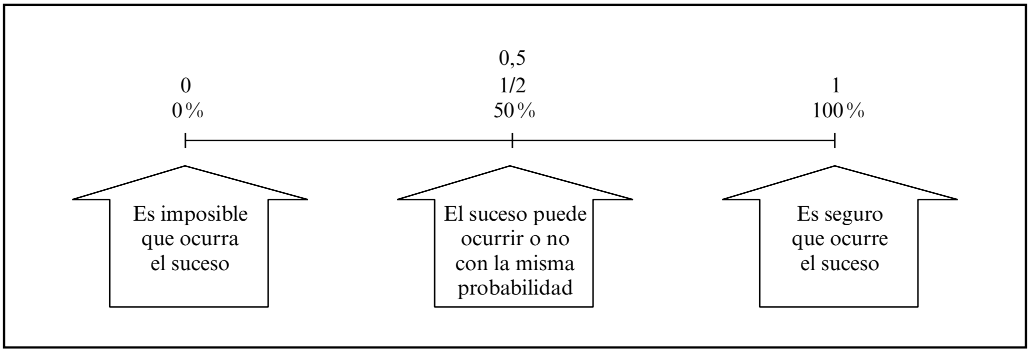


Figura 17.2.—Escala de probabilidad.

b) Según datos recogidos del censo del año 2000 en una ciudad, la probabilidad de que una persona elegida al azar ese año estuviera soltera es 8.327/12.317 ≈ ≈ 0,676.

c) La oficina del Defensor del Pueblo considera que la probabilidad de ser despedido de manera improcedente es 0,1, aproximadamente, basándose en que ha encontrado 15 despidos improcedentes en una muestra aleatoria de 150 expedientes de despido. Sin embargo, el Ministerio de Trabajo, que ha revisado todos los expedientes de despido, afirma que la probabilidad de que un despido sea improcedente es 0,05.

d) Un experto comentarista deportivo afirma que el atleta *A* tiene un 90% de posibilidades de conseguir un récord del mundo en el salto con pértiga.

e) Un meteorólogo piensa que la probabilidad de que llueva torrencialmente en puntos aislados de una región durante los próximos dos días es alta.

ACTIVIDAD 2: Sitúa en la escala de probabilidad el punto o el segmento correspondiente a las siguientes expresiones relativas a un suceso: «es cierto», «es imposible», «es casi imposible», «es poco probable», «es seguro», «es posible», «es bastante probable» y «es muy probable».

4.1. Axiomática de la probabilidad

Sea un espacio muestral Ω correspondiente a un experimento aleatorio. La probabilidad de un suceso A, representada por $P(A)$, verifica:

I. $P(A)$ es un valor comprendido entre 0 y 1.
II. $P(\Omega) = 1$.
III. Si A y B son sucesos excluyentes, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

La definición axiomática no dice cómo asignar las probabilidades a los sucesos. Sólo exige que, sea cual sea la interpretación que se adopte, deben verificarse los axiomas.

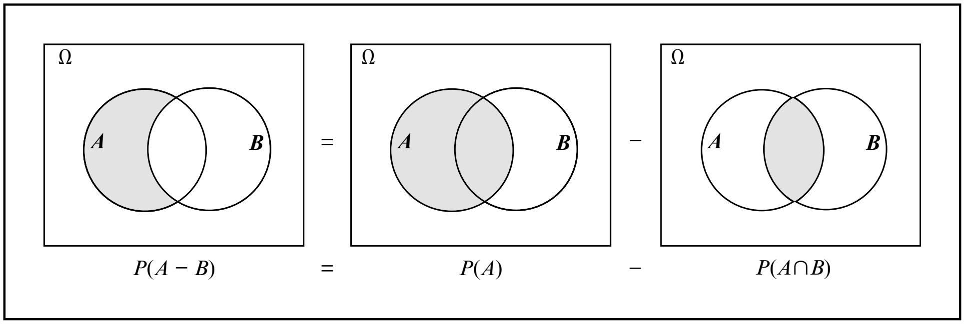
Como consecuencias de estos axiomas:

1. Si $A_1, A_2 ..., A_n$ son sucesos excluyentes dos a dos, es decir, no hay dos sucesos que tengan algún elemento en común, entonces $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$.
2. $P(A) = 1 - P(A)$.
3. $P(\emptyset) = 0$.
4. Si $A - B$ representa el suceso que contiene los elementos de A que no están en B, entonces $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Justificaciones gráficas:

Como alternativa a las demostraciones formales, se puede recurrir a justificaciones basadas en diagramas de Venn. Para ello, tenemos que considerar que el área del objeto (círculo, rectángulo, etc.) que representa un suceso es su probabilidad.

Así, por ejemplo, la propiedad 4 puede quedar justificada del siguiente modo:



ACTIVIDAD 3: Justifica gráficamente las propiedades 1, 2 y 5.

5. ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES

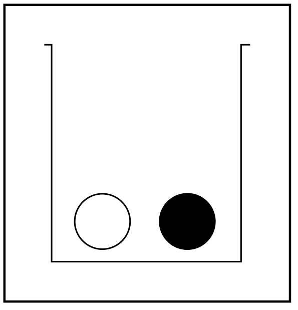
Una vez que se conocen las probabilidades de los sucesos simples, la definición axiomática de probabilidad resuelve el problema de la asignación de un valor a la probabilidad de un suceso cualquiera.

La probabilidad de un suceso es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos simples que lo forman.

5.1. Experimentos simples

Ejemplo 1. Urna con dos bolas distintas:

En una urna hay dos bolas idénticas, salvo en su color, una blanca y otra negra. Si extraes una bola al azar y, sin mirar cuál es, dices que es blanca, ¿crees que tienes más probabilidad de acertar que si hubieras dicho negra?:



La posibilidad de acertar es la misma si se escoge blanca o negra. Esto también se podría haber expresado así: «si digo blanca, acertaré el 50% de las veces», o «si digo blanca, acertaré la mitad de las veces», o «si digo blanca, acertaré una de dos».

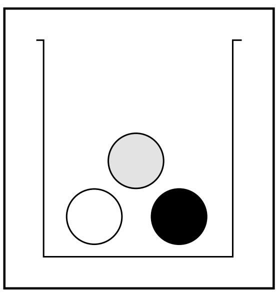
La respuesta no exige gran esfuerzo, surge casi naturalmente, por «sentido común». No obstante, vamos a examinarla con más detenimiento.

El espacio muestral es Ω = {●,○}. Hay, pues, dos resultados posibles que se pueden considerar igualmente probables porque no hay motivos para pensar que sea más fácil extraer blanca que negra. Como $P(\{\Omega\}) = 1$, debe ser P({●}) = P({○}) = 1/2.

El suceso A = «extraer blanca» es {○}. Por tanto, $P(A) = 1/2$.

Ejemplo 2. Urna con tres bolas distintas:

En una urna hay tres bolas idénticas, salvo en su color, una blanca, una negra y una gris. Si extraes una bola al azar y, sin mirar cuál es, dices que es blanca, ¿qué probabilidad tienes de acertar?



Todavía es posible responder esta pregunta sin recurrir a excesivos cálculos: «acertaré... el 33,3% de las veces/la tercera parte de las veces/ una de tres». Además, si hubiera elegido otro color cualquiera, la respuesta sería la misma.

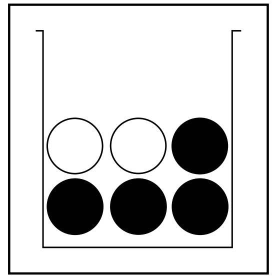
Espacio muestral Ω = {●,○,◌} con elementos equiprobables.

Como consecuencia P({●}) = P({○}) = = P({◌}) = 1/3.

El suceso A = «extraer blanca» es {○}. Por tanto, $P(A) = 1/3$.

Ejemplo 3. Urna con dos tipos de bolas en distinto número:

En una urna hay seis bolas idénticas, salvo en su color, dos son blancas y cuatro son negras. Si extraes una bola al azar y, sin mirar cuál es, dices que es negra, ¿qué probabilidad tienes de acertar?:



Espacio muestral Ω = {○,○,●,●,●,●} con elementos equiprobables.

Como consecuencia, P({○}) = P({○}) = P({●}) = P({●}) = P({●}) = P({●}) = 1/6.

El suceso A = «extraer negra» es {●,●,●,●}. Por tanto:

$P(A)$ = P({●}) + P({●}) + P({●}) + P({●}) =

$$= 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 4/6.$$

El suceso A está compuesto de cuatro sucesos simples, que siempre son excluyentes. La probabilidad de A es la suma de las probabilidades de los sucesos simples que lo forman.

En general, en un espacio muestral con n elementos equiprobables, si un suceso es unión de k sucesos simples, su probabilidad es k/n (regla de Laplace).

Esta regla se enuncia habitualmente así:

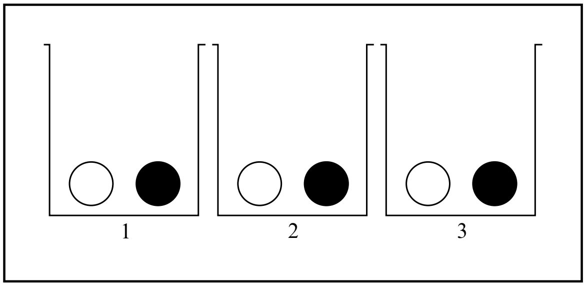
Si Ω es un espacio muestral equiprobable y A es un suceso de Ω:

$$P(A) = \frac{\textit{Número de casos favorables a A}}{\textit{Número de casos posibles}}$$

entendiendo que el número de casos posibles es el número de elementos de Ω, y que los casos favorables a A son los elementos de A.

5.2. Experimentos compuestos

Ejemplo 4. Se numeran y ordenan tres urnas, todas ellas con la misma composición de bolas, una (B)lanca y una (N)egra. Se extrae una bola de cada urna. Si es blanca la obtenida, en la urna *i-ésima* escribiré B_i, y si es negra, N_i.



¿Qué será más «fácil», obtener B_1, B_2, B_3, (es decir, todas blancas) u obtener B_1, N_2, N_3 (es decir, blanca de la primera urna y negra en las dos restantes)?

Como lo que ocurre en una urna es independiente de lo que ocurre en cualquier otra, y en cada una es igualmente probable que se extraiga B o N, las dos secuencias propuestas son igualmente probables.

Para determinar su probabilidad se construye el espacio muestral asociado a este experimento.

Los elementos de este espacio muestral serían ternas ordenadas. Se obtendrán en dos etapas:

a) En primer lugar, combinando los resultados posibles al extraer una bola de cada una de las urnas 1 y 2:

	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{N_2}$
$\boldsymbol{B_1}$	B_1B_2	B_1N_2
$\boldsymbol{N_1}$	N_1B_2	N_1N_2

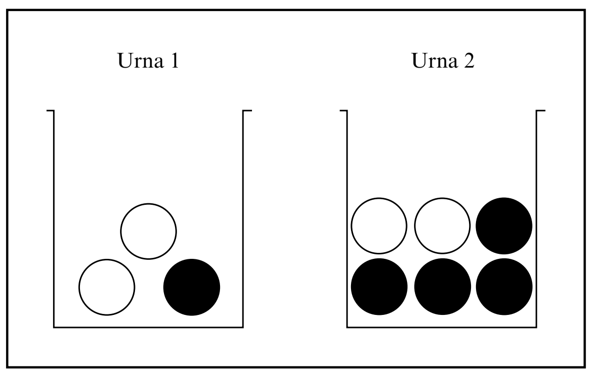
b) A continuación, combinando las combinaciones anteriores con los resultados posibles al extraer una bola de la urna 3:

	$\boldsymbol{B_3}$	$\boldsymbol{N_3}$
$\boldsymbol{B_1B_2}$	$B_1B_2B_3$	$B_1B_2N_3$
$\boldsymbol{B_1N_2}$	$B_1N_2B_3$	$B_1N_2N_3$
$\boldsymbol{N_1B_2}$	$N_1B_2B_3$	$N_1B_2N_3$
$\boldsymbol{N_1N_2}$	$N_1N_2B_3$	$N_1N_2N_3$

$$\Omega = \{B_1B_2B_3,\ B_1B_2N_3,\ B_1N_2B_3,\ B_1N_2N_3,\ N_1B_2B_3,\ N_1B_2N_3,\ N_1N_2B_3,\ N_1N_2N_3\}$$

Los ocho elementos de Ω son igualmente probables y la probabilidad de que ocurra cualquiera de ellos es 1/8. En particular, $P(\{B_1B_2B_3\}) = P(\{B_1N_2N_3\}) = 1/8$.

Ejemplo 5. Se lanza una moneda equilibrada. Si sale cara, se extrae una bola de la urna 1, y si sale cruz, se extrae una bola de la urna 2. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola blanca?:



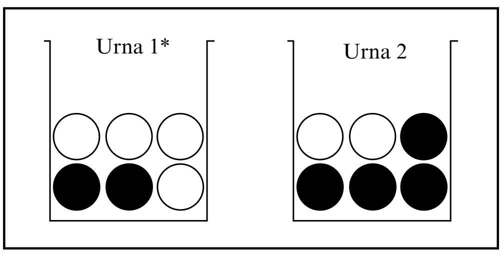
Cada resultado posible de este experimento compuesto será un par ordenado. La primera componente será un resultado posible del primer experimento, cara (*C*) o cruz (+). La segunda componente será un resultado del segundo experimento, ① (blanca de urna 1), ❶ (negra de urna 1), ② (blanca de la urna 2), ❷ (negra de la urna 2).

Los resultados posibles del experimento compuesto serán:

	①	①	❶	②	②	❷	❷	❷	❷
C	*C*①	*C*①	*C*❶	No ocurre					
+	No ocurre			+ ②	+ ②	+ ❷	+ ❷	+ ❷	+ ❷

A diferencia de los ejemplos anteriores, los resultados posibles no tienen la misma probabilidad. No se puede aplicar la regla de Laplace.

No obstante, es posible hacer una transformación en la composición de las urnas que nos permita asegurar la equiprobabilidad de los resultados posibles sin alterar la probabilidad de obtener blanca o negra en las dos urnas. Si en la primera urna se añaden las mismas bolas que ya hay, obtendremos:



La probabilidad de extraer una bola blanca en la urna 1* transformada es 2/3, como en la urna 1.

El espacio muestral ahora es Ω = {*C*①, *C*①, *C*①, *C*①, *C*❶, *C*❶ + ②, + ② + ❷ + ❷ + ❷ + + ❷}, y los resultados posibles, por simetría, son equiprobables. La probabilidad de cualquiera de ellos es 1/12.

El suceso «obtener blanca» está formado por {*C*①, *C*①, *C*①, *C*① + ② + ②}, y su probabilidad será 6/12, la suma de las probabilidades de sus seis elementos.

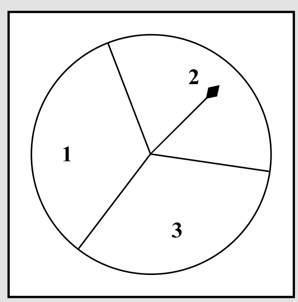
ACTIVIDAD 1: Construye el espacio muestral Ω correspondiente al experimento aleatorio de lanzar dos dados equilibrados. Calcula la probabilidad de cada uno de los elementos de Ω. Considera el suceso A = «al menos una de las caras es par». Enumera los sucesos simples que lo componen y calcula $P(A)$ haciendo uso de la regla de Laplace.

ACTIVIDAD 2: A partir de la actividad 1, determina el suceso complementario $\overline{A}$. Calcula $P(\overline{A})$. Calcula $P(A)$ a partir de $P(\overline{A})$.

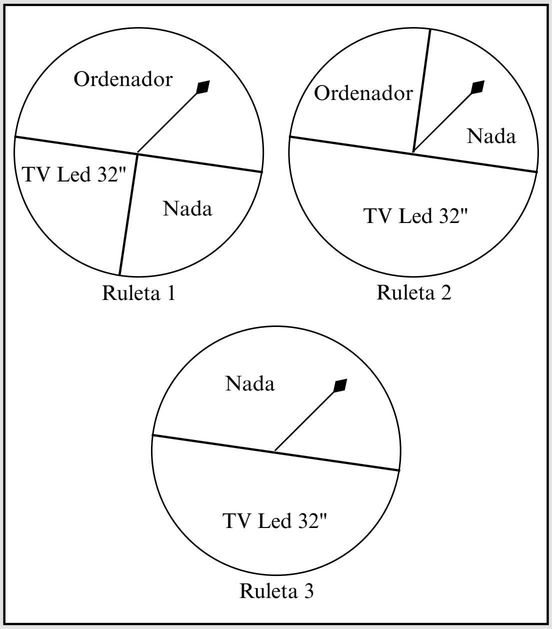
ACTIVIDAD 3: Dos jugadores, Abel y Blas, juegan al siguiente juego: cada uno lanza dos dados y resta los números mayor y menor. Si el resultado de esta resta es 0,1 o 2, gana Abel. Si el resultado es 3, 4 o 5, gana Blas. ¿Es un juego justo? Argumenta tu respuesta.

ACTIVIDAD 4: En un concurso de televisión se reparten premios del siguiente modo:

1.er paso: el concursante hace girar la ruleta *(spinner)* con los valores 1, 2 y 3:



2.º paso: el concursante hace girar la ruleta, cuyo número coincide con el obtenido en el primer paso:



3.er paso: finalmente, consigue el premio que señala la flecha.

Sean A = «obtener 1», O = «obtener un ordenador», T = «conseguir un televisor», y N = «no conseguir nada»:

a) Calcula $P(A)$ en la ruleta inicial y $P(O)$, $P(T)$ y $P(N)$ en cada una de las ruletas 1, 2 y 3. Explica el procedimiento que has seguido.

b) Construye el espacio muestral Ω del experimento compuesto.

c) Determina los elementos de Ω que forman el suceso «conseguir un ordenador».

d) Ordena, sin calcularlas, $P(O)$, $P(T)$ y $P(N)$ en el experimento compuesto.

e) Cambia el área de los sectores de la ruleta inicial para conseguir que O sea el suceso más probable. Justifica si existe más de una solución.

6. DIAGRAMAS DE ÁRBOL

Los diagramas de árbol proporcionan representación gráfica para los experimentos aleatorios, facilitando la comprensión de su desarrollo. Resultan especialmente útiles en los experimentos compuestos.

Caso. Experimento simple

Un árbol consta de nodos y ramas.

En el caso de un experimento simple, para construirlo, se dan los siguientes pasos:

1. Se dibuja un nodo inicial que representa el comienzo del experimento 1 (nodo de nivel 1).
2. De este nodo parten tantas ramas como resultados posibles tiene el experimento.
3. En cada rama se escribe la probabilidad correspondiente al resultado posible que representa.
4. Cada una de estas ramas finalizan en un nodo que se identifica con el nombre, icono o símbolo del resultado posible correspondiente. Son nodos de nivel 2.

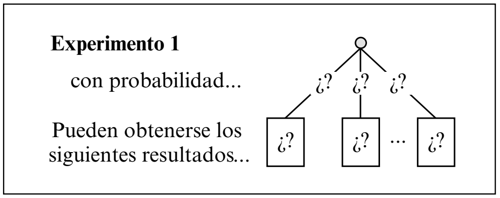


Diagrama de árbol correspondiente al ejemplo 1

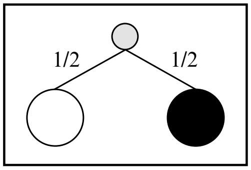
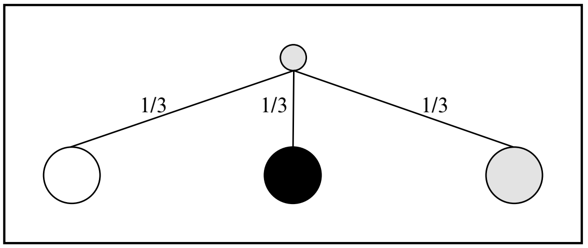
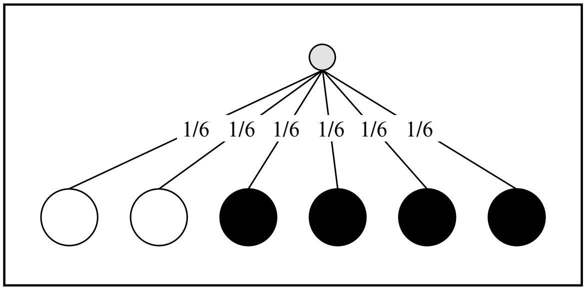


Diagrama de árbol correspondiente al ejemplo 2

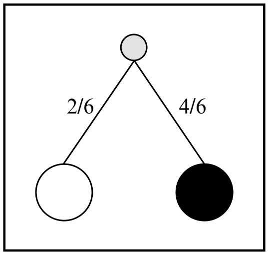


Según las instrucciones dadas hasta el momento, el diagrama sería:

Diagrama de árbol correspondiente al ejemplo 3



No obstante, al ser las bolas de un color indistinguibles entre sí, se emplea este otro:



Nota. Si el interés del problema se centra en extraer bolas de un color determinado, también se podría emplear el segundo diagrama en el caso de que las bolas de un color dado fuesen distinguibles (por ejemplo, si las bolas, además de ser blancas o negras, estuviesen numeradas).

Caso. Experimento compuesto

Nota. Con objeto de facilitar la comprensión, se considerará el experimento aleatorio consistente en la extracción sucesiva de una bola de cada una de las urnas numeradas de 1 a 3.

1. Los nodos del 2.º nivel son los resultados posibles de la extracción en la urna número 1:
   - El nivel 2 representa también la situación antes de la extracción en la urna número 2, es decir, lo que ha ocurrido en la primera extracción.
   - De cada uno de los nodos del nivel 2 parten tantas ramas como resultados posibles se pueden producir en la extracción en la urna número 2. También se le asigna una probabilidad, la de obtener el resultado desde el punto en que nos encontramos.
2. Los nodos del nivel 3 son los resultados posibles de la extracción en la urna número 2:
   - El nivel 3 representa también la situación antes de la extracción en la urna número 3, es decir, lo que ha ocurrido en las extracciones primera y segunda.
   - De cada uno de los nodos del nivel 3 parten tantas ramas como resultados posibles se pueden producir en la extracción en la urna número 3. También se le asigna una probabilidad, la de obtener el resultado desde el punto en que nos encontramos.
3. Los nodos del nivel 4 son los resultados posibles de la extracción en la urna número 3. Al haberse completado los experimentos, se denominan nodos finales.

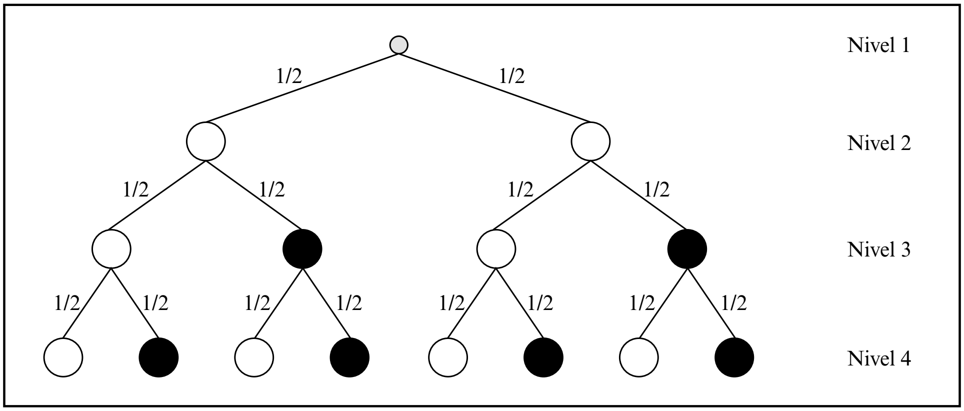
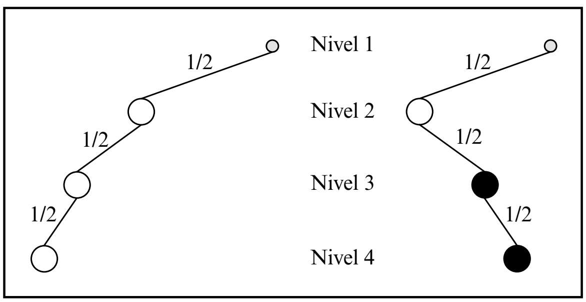


Diagrama de árbol correspondiente al ejemplo 4

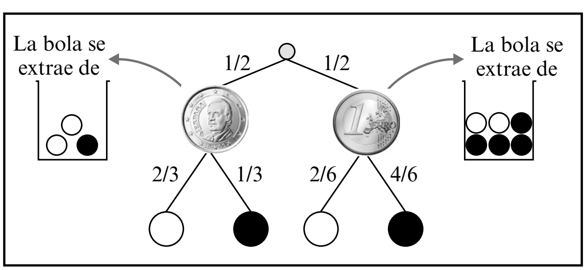
El diagrama ahora es más complejo porque se trata de un experimento compuesto.

Los caminos correspondientes a los sucesos $B_1B_2B_3$ y $B_1N_2N_3$ son:

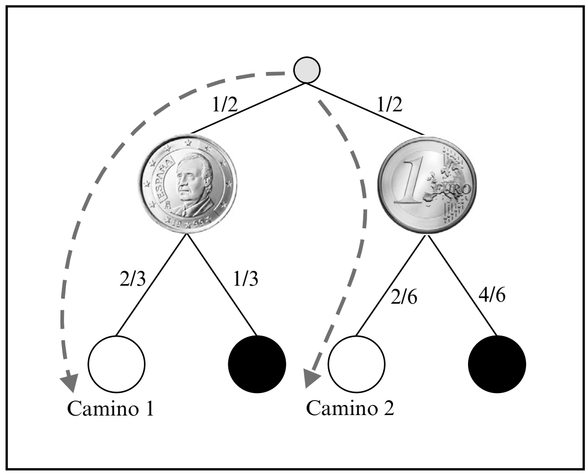


Como puede verse, las probabilidades asignadas a cada rama son las mismas en ambos caminos:

Diagrama de árbol correspondiente al ejemplo 5



Los caminos para llegar a obtener blanca son:



Empleando la interpretación frecuentista de la probabilidad, podremos decir que:

(Camino 1): si repitiera el experimento *n* veces, 1/2 de *n* obtendría cara, y 2/3 de 1/2 de *n* obtendría blanca. Es decir, 2/3 × 1/2 de las *n* veces obtendría blanca.

(Camino 2): del mismo modo, 2/6 × 1/2 de las *n* veces obtendría blanca.

En total, obtendría blanca (1/3 × 1/2) + + (2/6 × 1/2) de las veces.

Estas consideraciones nos llevan a las siguientes conclusiones:

> ***Regla de la multiplicación***
>
> *La probabilidad de un camino, o, lo que es lo mismo, del suceso asociado a ese camino, es igual al producto de las probabilidades de todas las ramas que forman ese camino.*

> *La probabilidad de un suceso A correspondiente al último experimento de un experimento compuesto se obtiene sumando las probabilidades de todos los caminos que conducen a los nodos finales que son favorables al suceso.*

ACTIVIDAD 1: Dibuja el diagrama de árbol correspondiente al siguiente experimento compuesto: se lanza un dado equilibrado y se anota su resultado. A continuación se lanza una moneda y se anota su resultado.

ACTIVIDAD 2: Se dispone de 2 urnas. En ambas hay 2 bolas blancas y 2 bolas negras. Se extrae una bola de la primera urna y se introduce en la segunda. Una vez hecho esto, se extrae una bola de la segunda urna. Dibuja el diagrama de árbol. Calcula la probabilidad de que se extraiga blanca en la primera extracción y también blanca en la segunda.

ACTIVIDAD 3: En una caja hay tres monedas. Una de ellas, trucada, tiene dos caras. Se escoge al azar una moneda y se lanza dos veces. Dibuja el diagrama en árbol. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos caras?

ACTIVIDAD 4: Resuelve el problema del reparto propuesto por el caballero de Méré. Indicación: Pascal consideró que el reparto debía hacerse en proporción a las probabilidades de ganar de cada jugador.

7. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE SUCESOS

7.1. Probabilidad condicionada

En el ejemplo 5 se ha calculado la probabilidad del suceso A = «obtener blanca».

El cálculo se realizó basándose exclusivamente en las características del experimento aleatorio correspondiente, pero sin realizarlo.

Una vez que se inicia la ejecución del experimento, se lanza la moneda y se ve el resultado, se dispone de una información que puede modificar la valoración de la probabilidad de que A ocurra.

La probabilidad calculada antes de la realización del experimento se denomina *probabilidad a priori*. La probabilidad calculada una vez observada una parte del experimento se denomina *probabilidad a posteriori*.

En el ejemplo 5 la probabilidad a priori de A es $P(A) = 1/2$. Si se lanza la moneda y sale cruz, la probabilidad de obtener cara condicionada por esta circunstancia se calcula teniendo en cuenta que la bola se extrae de la urna 2. Esta probabilidad condicionada de A es entonces 1/3.

También es posible abordar el problema a partir de consideraciones sobre el espacio muestral. Para el cálculo de la probabilidad a priori el espacio muestral que se «usa» es Ω = {C ①, C ①, C ①, C ①, C ❶, C ❶, + ②, + ②, + ❷, + ❷, + ❷, + ❷}. Sin embargo, la ocurrencia del suceso «sale cruz» restringe el espacio muestral a Ω^* = {+ ②, + ②, + ❷, + ❷, + ❷, + ❷}, y la probabilidad condicionada de A se calcula en este espacio Ω^*, por lo que resulta $1/6 + 1/6 = 1/3$.

En general, si A y B son dos sucesos, se denotará mediante $P(A/B)$ la probabilidad de que ocurra A cuando B ha ocurrido.

Cuando los resultados posibles sean equiprobables, el cálculo de $P(A/B)$ se realiza del siguiente modo:

$$P(A/B) = \frac{\text{N.º de casos favorables a } A \text{ en } \Omega^*}{\text{N.º de elementos de } \Omega^*}$$

donde Ω^* es el espacio muestral restringido a B.

La expresión anterior es igual que esta otra:

$$P(A/B) = \frac{\text{N.º de casos favorables a } A \text{ y } B \text{ en } \Omega}{\text{N.º de casos favorables a } A \text{ en } \Omega}$$

Finalmente, dividiendo el numerador y el denominador de esta última expresión entre el número de elementos de Ω, se obtiene la siguiente definición, válida según sea el espacio muestral equiprobable o no.

> *Si B es un suceso cualquiera con $P(B) \neq 0$. La probabilidad de que un suceso A ocurra cuando B ha ocurrido se denomina «probabilidad condicionada de A dado B»; se representa $P(A/B)$ y se define así:*
>
> $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

7.2. Sucesos dependientes e independientes

Se consideran dos experimentos compuestos:

Experimento 1. En una baraja española (40 cartas) se extrae una carta, a continuación la carta extraída se devuelve a la baraja, y, por último, se vuelve a extraer una carta.

Experimento 2. En una baraja española se extrae una carta, y, sin devolverla a la baraja, se vuelve a extraer una carta.

Ambos experimentos tienen una importante diferencia. En el primer caso, el resultado de la primera extracción no influye en el resultado de la segunda. Sin embargo, en el segundo caso, el resultado de la primera extracción, sea cual sea, cambia las condiciones en las que se realiza la segunda extracción. Si la primera extracción ha sido un as, lo cual ocurre con probabilidad 4/40, la probabilidad de obtener otro as en la segunda extracción es 3/39, puesto que han quedado 39 cartas en la baraja y sólo 3 ases.

Si llamamos:

B al suceso «extraer un AS en la primera extracción».

$\overline{B}$ al suceso «extraer una carta que NO es un AS en la primera extracción».

A al suceso «extraer un AS en la segunda extracción».

resulta que, en el experimento 1:

$$P(A/B) = P(A \text{ cuando ha ocurrido } B) = 4/40$$
$$P(A/\overline{B}) = P(A \text{ cuando ha ocurrido } \overline{B}) = 4/40$$

mientras que, en el experimento 2:

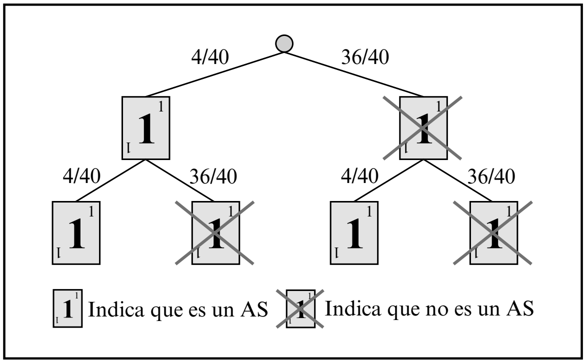
$$P(A/B) = P(A \text{ cuando ha ocurrido } B) = 3/39$$
$$P(A/\overline{B}) = P(A \text{ cuando ha ocurrido } \overline{B}) = 4/39$$

En el experimento 1, los sucesos A y B son independientes.

En el experimento 2, los sucesos A y B son dependientes.

> *Dos sucesos son independientes si la ocurrencia o no de uno de ellos no cambia la probabilidad de que ocurra el otro. En caso contrario, los dos sucesos son dependientes.*

El diagrama de árbol correspondiente al experimento 1 es:



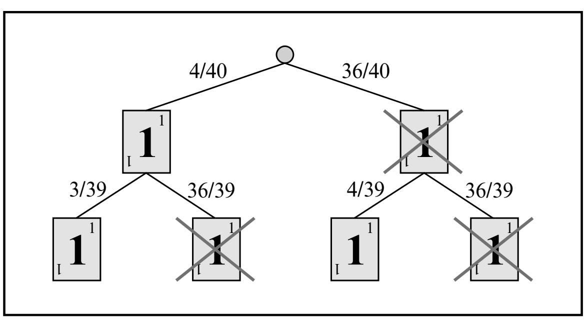
La probabilidad de obtener AS en la segunda extracción es la suma de las probabilidades de los caminos que conducen a los nodos AS finales:

$$\frac{4}{40} \times \frac{4}{40} + \frac{4}{40} \times \frac{36}{40} = \frac{4}{40}$$

Como puede verse, $P(A) = P(A/B) = P(A/B) =$ $= 4/40$, y la independencia de los dos sucesos puede expresarse así:

> *Dos sucesos A y B son independientes si* $P(A) = P(A/B) = P(A/\overline{B})$.

El diagrama de árbol correspondiente al experimento 2 es:



La probabilidad de obtener AS en la segunda extracción es la suma de las probabilidades de los caminos que conducen a los nodos AS finales:

$$\frac{3}{39} \times \frac{4}{40} + \frac{4}{39} \times \frac{36}{40} = \frac{156}{1.560} = \frac{1}{10}$$

En este caso, $P(A) \neq P(A/B)$ y también $P(A) \neq P(A/\overline{B})$. Por consiguiente, A y B son dependientes.

En ambos diagramas, la probabilidad de obtener AS en la primera extracción y también AS en la segunda extracción, es decir, la probabilidad de que ocurra A y a continuación B, es igual al producto de las probabilidades de las ramas del camino AS-AS del diagrama, esto es, $P(B) \times$ $\times\ P(A/B)$. Esto permite una reformulación de la regla de la multiplicación:

> *La probabilidad de que ocurra un suceso B y, a continuación, un suceso A, es igual a la probabilidad de que ocurra B multiplicada por la probabilidad de que ocurra A cuando ha ocurrido B. Simbólicamente:*
>
> $$P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B)$$

Por otra parte, en ambos experimentos, la expresión simbólica que permite obtener $P(A)$ es la misma: $P(A) = P(A/B) \times P(B) + P(A/\overline{B}) \times$ $\times\ P(\overline{B})$, que es una versión de la *fórmula de la probabilidad total* para dos sucesos complementarios, B y $\overline{B}$.

En general:

> ***Fórmula de la probabilidad total***
>
> Sean $S_1, S_2, ..., S_n$ sucesos excluyentes dos a dos cuya unión es igual a Ω, con $P(S_i) > 0$ para cualquier i, y sea A el suceso observado, entonces:
>
> $$P(A) = P(A/S_1) \times P(S_1) + ... + P(A/S_n) \times P(S_n)$$

ACTIVIDAD 1: Se lanzan dos dados. La suma de los números obtenidos es par. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos números hayan sido impares?

ACTIVIDAD 2: En un colegio, el 60 % de los escolares son niños, el 40 % de los escolares usan el comedor escolar y el 35 % de los escolares son niños que usan el comedor escolar. Se escoge un escolar al azar:

a) Si es niño, ¿cuál es la probabilidad de que use el comedor escolar?
b) Si usa el comedor escolar, ¿cuál es la probabilidad de que sea niña?

ACTIVIDAD 3: Una fábrica de tornillos dispone de tres máquinas, *A*, *B* y *C*, que producen, respectivamente el 40 %, el 35 % y el 25 % de los tornillos. La máquina *A* estropea un 2 % de los tornillos que fabrica, la máquina *B* estropea el 3 % y la máquina *C* el 4 %. Calcula la probabilidad de que un tornillo salido de la fábrica sea defectuoso.

ACTIVIDAD 4: Se lanza una moneda dos veces. Sean los sucesos *A* = «obtener cara en el primer lanzamiento» y *B* = «obtener una cara y una cruz (no necesariamente en este orden)». Determina si *A* y *B* son independientes.

7.3. La probabilidad de las causas. Regla de Bayes

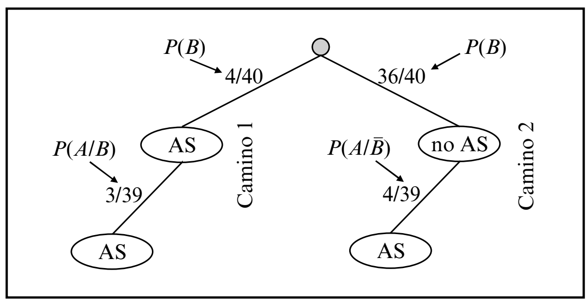
Hasta ahora se ha calculado la probabilidad de distintos sucesos cuando se conocen las condiciones en que se realizan los experimentos: una urna con unas proporciones conocidas de bolas de diferentes colores, un dado equilibrado de 6 caras, o una moneda insesgada. De alguna manera se podría decir que se conocen las causas de un suceso y es el suceso lo que resulta incierto.

Sin embargo, un problema más interesante para la investigación es el inverso. Se conoce que determinados sucesos $\{S_i\}$ pueden influir en la ocurrencia de otro suceso A. Entonces se puede considerar que los sucesos S_i son las «causas» de B. La pregunta es: si ha ocurrido el suceso A, ¿cuál es la probabilidad de que la causa sea un S_i en particular?

En términos propios de un diagrama de árbol de un experimento compuesto, el problema se puede enunciar así: hay cierto número de caminos cuyos nodos finales forman un suceso; sabemos que, después de una ejecución del experimento, se ha producido dicho suceso (es decir, se ha recorrido uno de los caminos), y nos preguntamos cuál es la probabilidad de que el camino recorrido sea uno en particular.

Ejemplo. En el experimento 2, si sabemos que ha salido un AS en la segunda extracción, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido un AS en la primera extracción? Se está preguntando por $P(B/A)$.

Si ha salido un AS en la segunda extracción, se ha recorrido uno de estos dos caminos:



Sólo en el camino 1 ha salido un AS en la primera extracción. La probabilidad buscada es:

$$\frac{P(\text{camino 1})}{P(\text{camino 1}) + P(\text{camino 2})}$$

Simbólicamente:

$$P(B/A) = \frac{P(A/B) \times P(B)}{P(A/B) \times P(B) + P(A/\bar{B}) \times P(\bar{B})}$$

Esta expresión es conocida como *fórmula o regla de Bayes*. Se trata una versión para dos sucesos complementarios, B y $\overline{B}$.

En general:

Regla de Bayes

Sean $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sucesos excluyentes dos a dos cuya unión es igual a Ω, con con $P(Si) > 0$ para cualquier i, y sea A el suceso observado, $P(A) > 0$, entonces:

$$P(S_i/A) = \frac{P(A/S_i) \times P(S_i)}{P(A/S_1) \times P(S_1) + \ldots + P(A/S_n) \times P(S_n)}$$

ACTIVIDAD 5: Se elige una de las monedas de la actividad 3 del epígrafe *Diagramas de árbol*. Se lanza dos veces y salen dos caras. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda elegida sea la trucada?

ACTIVIDAD 6: Tres universidades, *A*, *B* y *C,* acogen, respectivamente, al 50%, 30% y 20% de los estudiantes de una ciudad. Las probabilidades de graduarse en *A*, *B* y *C* son, respectivamente, 0,60, 0,75 y 0,80. ¿Cuál es la probabilidad de que un graduado de esa ciudad haya estudiado en la universidad *A*?

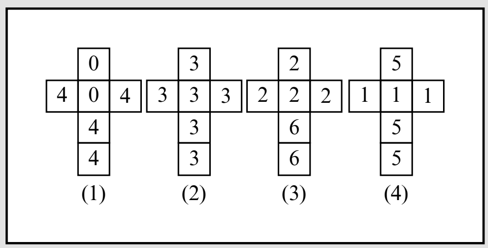
ACTIVIDADES PARA PRACTICAR

1. Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas. Sean los sucesos A = «obtener un as», B = «obtener un oro» y C = «obtener una figura». Calcula las siguientes probabilidades: $P(A \cup B)$ y $P(A \cup C)$. (*Nota:* una figura es una sota, un caballo o un rey).

2. ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas cumplan años el mismo mes? (*Nota:* se supone que la probabilidad de nacer en cada mes es la misma).

3. ¿Cuántas personas deben reunirse como mínimo para que la probabilidad de que haya al menos dos de ellas que cumplan años en el mismo mes sea mayor o igual que 0,5?

4. Dos jugadores, Ana y Blas, juegan con los dados ideados por Bradley Efron (véase su composición):



Estos dados tienen la siguiente particularidad: si Ana elige primero uno de los dados para lanzar, Blas puede escoger otro dado de manera que su probabilidad de ganar sea mayor. Por eso, se les llama dados no transitivos.

Si Ana elige el primer dado, ¿cuál debe escoger Blas para tener más probabilidades de ganar? ¿Y si Ana elige el segundo dado? ¿Y si Ana elige el tercero? ¿Y si elige el cuarto?

5. Se lanza dos veces una moneda. Si sabemos que ha salido, al menos, una cara, ¿cuál es la probabilidad de que hayan salido dos caras?

6. Tres bolas se introducen al azar e independientemente en una de tres urnas: *a*) ¿cuál es la probabilidad de que una de las urnas quede vacía? y *b*) ¿cuál es la probabilidad de que las tres bolas estén en la misma urna?

7. Se dispone de dos urnas. Una contiene 3 bolas blancas y 5 negras, y la otra 2 bolas blancas y 4 bolas negras. Se extrae una bola de cada urna. ¿Cual es la probabilidad de que ambas sean del mismo color? (*Nota*: las extracciones en cada urna son independientes. Utiliza este dato).

8. Una prueba permite diagnosticar dos enfermedades, A y B. Da resultado positivo en el 90% de los enfermos con A, en el 92% de los enfermos con B, y en el 1% de los que no estén enfermos ni de A ni de B. La proporción de enfermos con A en la población es 2%, la proporción de enfermos con B es 3%, y la proporción no enferma con ninguna de las dos es 95%. Si se escoge una persona al azar y se le aplica la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que resulte positiva? (*Nota:* se sabe que las enfermedades A y B no se presentan juntas en la misma persona).

9. Una persona de la población anterior es elegida al azar y da positivo en la prueba. ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga ninguna de las dos enfermedades?

INVESTIGA Y REFLEXIONA

1. Busca páginas o sitios WEB en español que contengan recursos TIC sobre probabilidad para un nivel no universitario. Selecciona aquellas cuatro que te parezcan más interesantes. Haz un listado que contenga, para cada página o sitio, la dirección URL inicial, los contenidos que trata, los recursos interactivos que se encuentran en la página, las virtudes y los defectos que tienen, en tu opinión.

Nota: los recursos interactivos suelen estar programados usando Flash o Java. Por ello, deberás instalar y/o actualizar esos complementos en tu navegador, si no puedes visualizarlos.

2. En muchos de los recursos interactivos que encuentres aparecerán, casi con seguridad, simulaciones de experimentos aleatorios: lanzamientos de dados o monedas, extracciones de bolas de una urna, giros de ruletas, etc. Para poder realizar esto, los programadores de las aplicaciones informáticas han usado la función RANDOM o análoga, que genera un número «aleatorio» en el intervalo (0,1). La mayoría de las calculadoras científicas también disponen de esa función.

Usando los números obtenidos con esta función, ¿qué podrías hacer para simular los resultados de un dado?

Antes de disponer de estas herramientas electrónicas, para la simulación se empleaban tablas de números aleatorios como la siguiente, que contiene 200 cifras de 0 a 9, y la probabilidad de que aparezca cada una de ellas es la misma, 1/10:

31 70 92 49 09	86 51 06 74 72	75 50 54 23 34	65 02 40 02 99
37 65 58 93 05	44 70 89 79 36	83 70 64 50 38	74 01 74 40 75
62 56 40 10 89	68 79 87 65 77	56 67 41 93 62	70 98 45 32 93
76 58 13 30 72	94 37 20 89 35	48 10 58 58 88	03 49 30 72 81
00 56 30 46 54	27 47 36 74 00	69 00 01 80 80	86 15 83 62 58

Su construcción es muy sencilla. Por ejemplo, en un bombo se introducen 10 bolas numeradas de 0 a 9, se extrae una bola, se apunta la cifra y se devuelve al bombo. A continuación se extrae otra bola, se apunta la cifra, se devuelve, y así sucesivamente.

Cuenta las frecuencias con que aparecen cada una de las cifras y rellena la tabla siguiente:

Cifra	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frecuencia										

Comenta los resultados. ¿Podemos estar seguros de que los números aleatorios son aleatorios? Consulta en la biblioteca y en Internet, y busca alguna técnica que permita responder la pregunta anterior.

Ejemplo de utilización de la tabla de números aleatorios: En una clase con 65 alumnos, el profesor quiere formar al azar un equipo de 5 alumnos. Procedería del siguiente modo: 1.º asignaría un número único entre 00 y 64 a cada alumno; 2.º escogería un punto de inicio, y 3.º seleccionaría, de izquierda a derecha y fila por fila, los 5 primeros grupos de 2 cifras que se encontraran entre 00 y 64, sin contar las posibles repeticiones. Así, si empezara desde la esquina superior izquierda, los componentes del equipo serían los alumnos 31, 49, 09, 51 y 06.

Utiliza la tabla de números aleatorios para simular 20 lanzamientos de dos dados. Explica qué procedimiento has seguido.

BIBLIOGRAFÍA

AA.VV. (Jones, G. A., Ed.) (2005). *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning*. New York: Springer.

Díaz Godino, J., Batanero, M.ª C. y Cañizares, M.ª J. (1987). *Azar y probabilidad*. Madrid: Síntesis.

Díaz Godino, J. (Dir.) (2004). *Matemáticas para maestros*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática (http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/).

Engel, A. (1988). *Probabilidad y Estadística, Volumen 1*. Valencia: Mestral.

Hernández, V. y Vélez, R. (1992). *Dados, monedas y urnas. Introducción al cálculo de probabilidades*. Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.