Matemáticas financieras II

USIAS OCHOA LOPEZ

Red Tercer Milenio

MATEMÁTICAS FINANCIERAS II

MATEMÁTICAS FINANCIERAS II

USIAS OCHOA LOPEZ

RED TERCER MILENIO

AVISO LEGAL

Viveros de Asís 96, Col. Viveros de la Loma, Tlalnepantla, C.P. 54080, Estado de México.

Datos para catalogación bibliográfica

Usías Ochoa López

Matemáticas financieras II

ISBN 978-607-733-145-2

Primera edición: 2012

DIRECTORIO

INDÍCE

INTRODUCCION

En este libro se abordan temas muy importantes de las matemáticas financieras y para la formación profesional de cualquier individuo que realiza actividades comerciales o financieras.

Se divide en 6 unidades donde se combina la teoría con la práctica para realizar su aplicación en ejercicios prácticos que se puedan presentar en la realidad económica de nuestro país; y tener las herramientas necesarias para comprender y manejar de una mejor manera el dinero personal y empresarial.

En la unidad No 1 se presenta el tema de anualidades ordinarias en relación con el monto, su fórmula tanto del monto como de la anualidad, los fonos de amortización, el cálculo del tiempo y de la tasa y el tiempo fraccionario, realizando algunos ejercicios para su comprensión y aplicación.

Unida No. 2, El valor presente de anualidades ordinarias, su concepto, la relación entre el monto y el valor actual de una serie de tiempo de anualidades, la fórmula de la anualidad, la depreciación con base en anualidades, la anualidad como la cantidad que amortiza un capital, el cálculo del capital insoluto, tasa de interés distintas de la amortización, el cálculo del tiempo cuando se conoce el valor actual y de la tasa.

Unidad No. 3 se muestra las anualidades ordinarias diferidas, su definición, el cálculo del monto, la fórmula del valor actual de las anualidades ordinarias diferidas, la relación entre el valor actual ordinario y el diferido y el cálculo de la anualidad, del tiempo de percepción, del tiempo diferido y de la tasa.

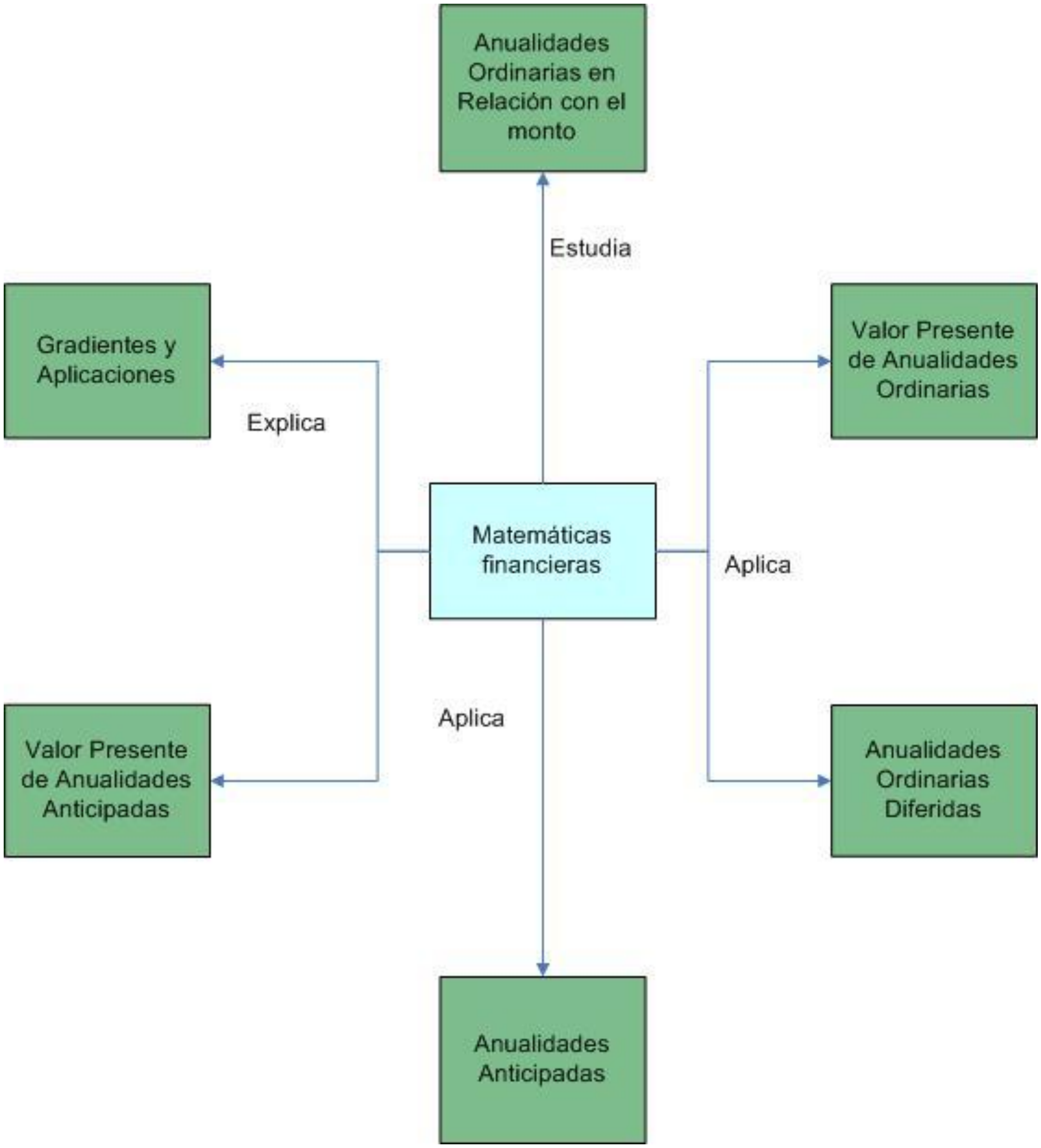
La unidad No. 4 presenta anualidades anticipadas, la fórmula del monto, la relación entre el monto de las anualidades ordinarias y las anticipadas y el cálculo de la anualidad, del tiempo y de la tasa.

Unidad No. 5 enseña el valor presente de anualidades anticipadas, su fórmula, la relación entre el valor actual de las anualidades anticipadas y de las ordinarias y el cálculo de la anualidad, del tiempo y de la tasa.

Y la unidad 6 muestra las gradientes y aplicaciones, que estas pueden ser aritméticas y geométricas, los fondos de amortización, depreciación y agotamiento y los bonos.

Todos los temas están elaborados de manera sencilla para su mejor comprensión y con ejercicios prácticos para su aplicación.

MAPA CONCEPTUAL



UNIDAD 1.

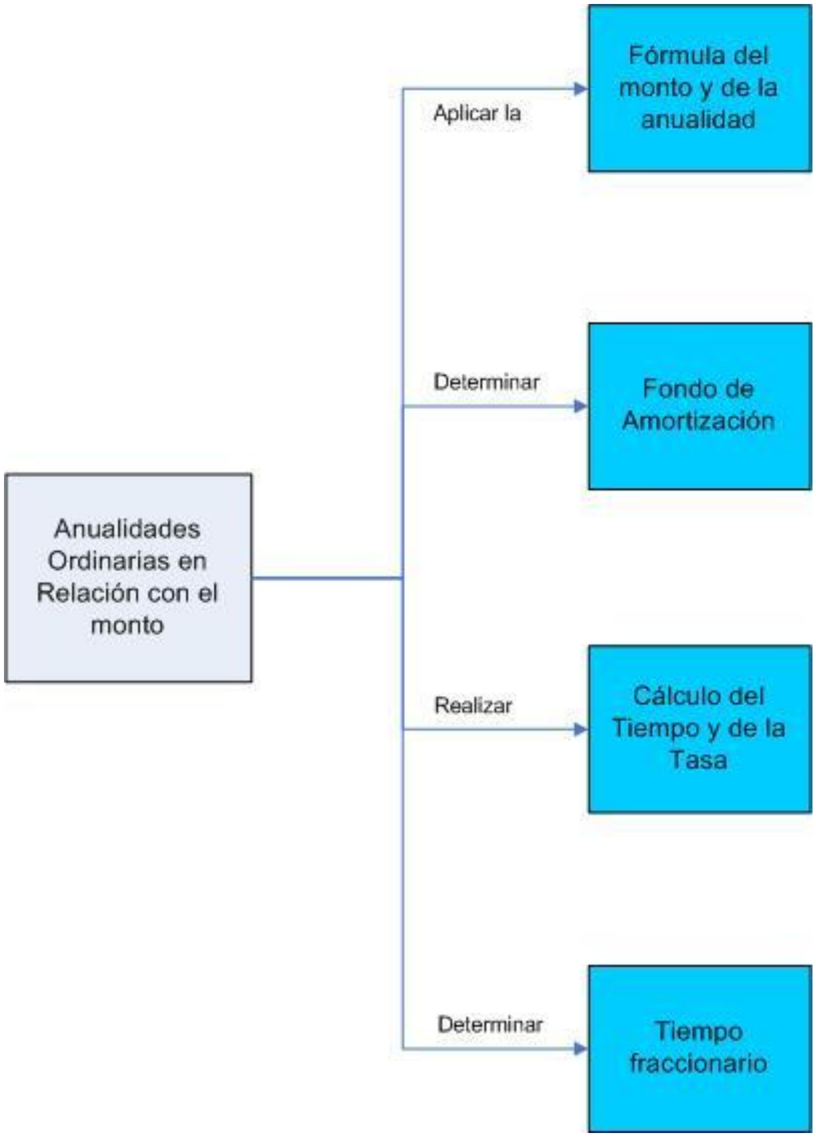
ANUALIDADES ORDINARIAS EN RELACIÓN CON EL MONTO

OBJETIVO.

Identificar la relación que existe entre las anualidades ordinarias con el monto, que permita la solución de problemas planteados donde intervenga este tipo de anualidades enfocados a la actividad financiera.

TEMARIO

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

Por medio del presente capitulo se abordará el tema de anualidades ordinarias conocidas también como anualidades vencidas, esto se debe a que la renta o el pago periódico se realiza al final de cada periodo. Durante el desarrollo se identificara las variables que integran la formula básica que permite dar solución a los diversos problemas que enfrentan las personas y empresas en el desarrollo de la actividad financiera cuando interviene este tipo de operaciones. Se resolverán problemas que tiene que ver con la determinación del monto, cuando se conocen todas las demás variables. Se conocerá la forma de llevar a cabo la constitución de los fondos de amortización que permitan solventar una obligación futura. Se resolverán problemas que tenga que ver con la determinación del l tiempo necesario para constituir un determinado monto, será posible la comprensión y la aplicación en la resolución de problemas prácticos cuando se necesita conocer la tasa de interés necesario para acumular cierta cantidad de dinero en un periodo de tiempo dado y con montos de pagos fijos establecidos, así mismo, se conocerá la forma de resolver problemas de anualidades ordinarias con periodos de tiempo fraccionario.

1.1 FORMULA DEL MONTO Y DE LA ANUALIDAD.

Las anualidades ordinarias, conocido también como anualidades vencidas consiste en una serie de pagos, en donde el primero se efectúa al finalizar el primer periodo, el segundo se realiza al término del segundo periodo, etc.[1]

En este tipo de anualidades los pagos se realizan al final del periodo, es decir, al final de la semana, al final de la quincena, al final del mes o al final de un año.

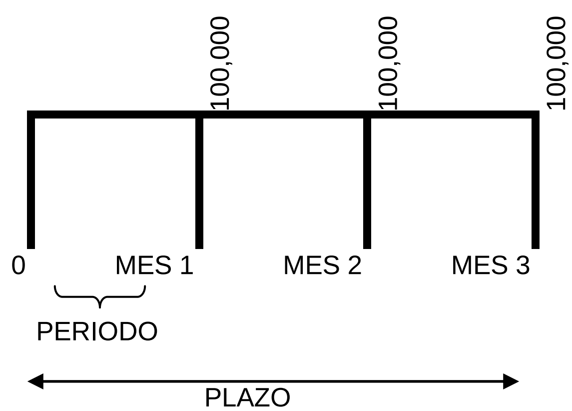
El monto de una anualidad lo integra la suma de un conjunto de pagos realizados en un periodo de tiempo determinado.

Los elementos o términos que encontramos en una anualidad ordinaria son: (R) Renta o pago por periodo, (C) Valor de los pagos en el momento presente y (M) El valor de todos los pagos al final de la operación.

La fórmula del monto compuesto es la siguiente: $M = C\ (1 + i)^{n}$

A continuación se cita el siguiente ejemplo:

¿Cuál es el monto de 100,000.00 que se deposita al final de cada mes durante un plazo de 3 meses, en un en un instrumento de inversión que liquida el 24% anual capitalizable mensualmente?



El planteamiento del problema indica, que cada vez que transcurre un mes al final se deposita la cantidad de 100,000.00 los cuales empiezan a

[1] Hernández Hernández Abraham. Matemáticas Financieras. Thomson. 2002. p 344

generar intereses, al finalizar el segundo mes se realiza un segundo depósito por 100,000.00, mismo que empieza a generar intereses y al finalizar el tercer mes, se efectúa un último depósito por 100,000.00, el cual, ya no genera interés alguno. Lo que se pide determinar la cantidad acumulada al final del último depósito realizado.

Solución por la formula del monto compuesto**:** $M = C\,(1 + i)^{n}$

$M = 100\,000\,(1 + .24/12)^{2} + 100\,000\,(1 + .24/12)^{1} + 100\,000\,(1 + .24/12)$

$M = 104{,}040.00 + 102{,}000.00 + 100{,}000.00$

$M = 306{,}040.00$

En la solución a través de la fórmula de monto compuesto, se observa claramente cómo se generan los intereses. El primer depósito genera interés de dos meses, el segundo depósito genera interés de un solo mes y el último depósito no genera interés, esto derivado de que los depósitos se realizaron al final de cada uno de los meses, como anualidades ordinarias o vencidas.

Por lo tanto, el monto representa la suma de todos los depósitos realizados más los intereses generado.

En este planteamiento con el orden invertido se puede ver que el monto es una progresión geométrica:

t_1	= 100,000.00	El primer término
r	= 1.02	La razón
n	= 3	El número de términos

Suma de los términos de una progresión geométrica:

$$S = t_1 \frac{(1 - r)^{n}}{(1 - r)} = \frac{t_1 - t_1 r^{n}}{(1 - r)}$$

Sustituyendo los términos de anualidades:

$$M = \frac{R - R(1 + i)^{n}}{1 - (1 + i)} = \frac{R\,[1 - (1 + i)^{n}]}{1 - 1 - i} = \frac{R\,[1 - (1 + i)^{n}]}{1 - 1 - i} = R\,\frac{1 - (1 + i)^{n}}{- i}$$

Multiplicando la fracción por – 1, queda:

$$M = R\,\frac{(1 + i)^{n} - 1}{i}$$

Que representa la fórmula de las anualidades ordinarias.[2]

Solución al planteamiento del problema aplicando la fórmula de anualidades ordinarias.

Datos

M =?

R = 100,000.00

i = 24% anual capitalizable mensualmente = 0.24/12 = 0.02 mensual

n = 3 meses

Fórmula

i

$$M = R\,\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}$$

Sustitución:

$$M = 100{,}000\,\frac{(1+.02)^{3} - 1}{.02}$$

$$M = 100{,}000\,\frac{(1.061208) - 1}{.02}$$

$$M = 100{,}000\,\frac{.061208}{.02}$$

$$M = 100{,}000 * 3.0604$$

$$M = 306{,}040.00$$

El monto al final de la operación, que para este caso el plazo fue de tres meses, haciendo depósitos al final de cada uno los meses, denominado también renta, se obtiene el mismo resultado. Así también, se puede observar que la tasa de interés del 24% = .24 anual se efectúo la división entre 12, esto debido a que el periodo de capitalización es mensual, por lo tanto, la frecuencia de conversión en el plazo de un año es 12 veces.

A continuación se plantea otro ejemplo:

---

[2] DIAZ Mata Alfredo y Aguilera Gómez Víctor M. Matemáticas Financieras. McGraw Hill. 1999. p 129

¿Cuál es el monto de 5,000 que se depositan al final de cada semestre durante el plazo de 2 años, en una cuenta de inversión que rinde el 18% anual con periodos de capitalización semestral?

Datos

M =?

R = 5,000.00

i = 18% anual capitalizable semestralmente = 0.18/2 = 0.09 semestral

n = 2 años x 2 semestres de cada año = 4 semestres

Fórmula

i

$$M = R\,\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}$$

Sustitución:

$$M = 5{,}000\,\frac{(1+.09)^{4} - 1}{.09}$$

$$M = 5{,}000\,\frac{(1.41158161) - 1}{.09}$$

$$M = 5{,}000\,\frac{.41158161}{.09}$$

$$M = 5{,}000 * 4.573129$$

$$M = 22{,}865.645$$

El monto al final de la operación, que para este caso el plazo fue de dos años, haciendo depósitos al final de cada uno los semestres, denominado también renta, se obtiene la cantidad de 22,865.64. Así también, se puede observar que la tasa de interés del 18% = .18 anual se efectúo la división entre 2, esto debido a que el periodo de capitalización es semestral, por lo tanto, la frecuencia de conversión en el plazo de un año es 2, multiplicado por el plazo de 2 años da como resultado 4 semestres.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Ensayo sobre anualidades ordinarias y el campo de aplicación en el ámbito profesional.

1.2 FONDO DE AMORTIZACIÓN

Se le denomina fondo de amortización a una determinada suma de dinero que se va acumulando con el fin de obtener un determinado monto. El fondo de amortización generalmente se integra invirtiendo cantidades iguales al final de periodos de tiempo iguales; esto significa que la cantidad acumulada del fondo, al final de un determinado plazo, corresponde al monto de una anualidad ordinaria.

Los fondos de amortización se constituyen con el fin de pagar una deuda que vence en fecha futura, para la compra de equipo nuevo que sustituya al equipo totalmente depreciado u obsoleto, para los fondos de jubilación, entre otras aplicaciones.

Aun cuando la integración de fondos de amortización y la amortización de deudas se utilizan con la finalidad de pagar una obligación contraída, existe una clara diferencia entre ellos: los pagos periódicos de una amortización se destinan a liquidar una deuda que ya se tiene; en lo que respecta al fondo de amortización, consiste de una serie de depósitos que se realizan en un instrumento financiero expuesto a una tasa de intereses con la finalidad de acumular una cantidad deseada y estar en condiciones de cumplir con el pago de la deuda contraída.

A continuación se cita el siguiente ejemplo, que tiene como objetivo identificar el importe de la renta para acumular una cantidad de dinero desead

Dentro de 4 meses existe el compromiso de liquidar la cantidad de $5,000.00 ¿Cuánto se debe depositar cada mes en un instrumento financiero que paga intereses a razón del 12% anual con periodos de capitalización mensual?

Datos

M = 5,000.00

R = ?

i = 12% anual

Pc. = mensual

n = 4 meses

Fórmula de anualidades ordinarias

i

$$M = R\,\frac{(1 + i)^{n} - 1}{i}$$

Para poder determinar el importe de los depósitos o la renta, es necesario despejar R.

$$Mi = R\,\left[(1 + i)^{n} - 1\right]$$

$$R = \frac{Mi}{(1 + i)^{n} - 1}$$

Sustitución:

$$R = \frac{(5,000)(.01)}{(1 + .01)^{4} - 1}$$

$$R = \frac{50}{(1.01)^{4} - 1}$$

$$R = \frac{50}{(1.04060401) - 1}$$

$$R = \frac{50}{.04060401}$$

$$R = 1,231.41$$

El planteamiento del problema consiste en encontrar el pago periódico de una anualidad ordinaria cuyo monto será $5,000.00 al final de los 4 meses a una tasa anual del 12%.

Se puede observar que para la solución la tasa de interés del 12% = .12 anual se efectúo la división entre 12, esto debido a que el periodo de capitalización es mensual, por lo tanto, la frecuencia de conversión en el plazo de un año es de 12 veces.

El fondo de amortización se forma invirtiendo $1,231.41 al final de cada mes durante un plazo de 4 meses.

Una tabla de capitalización, llamada también tabla de fondo de amortización, muestra la forma en que se acumula el dinero, periodo tras periodo.

Tabla de fondo de amortización

FECHA	DEPOSITO POR PERIODO	INTERES GANADO 1%	TOTAL QUE SE SUMA AL FONDO	MONTO AL FINAL DEL MES
Fin del mes 1	1,231.41	0.00	1,231.41	1,231.41
Fin del mes 2	1,231.41	12.31	1,243.72	2,475.13
Fin del mes 3	1,231.41	24.75	1,256.16	3,731.30
Fin del mes 4	1,231.39	37.31	1,268.70	5,000.00
Totales	4,925.62	74.38	5,000.00	

[3]

Al depósito final se le tuvo que realizar un ajuste de dos centavos, para constituir la cantidad exacta del fondo a $5,000.00

El interés generado se obtiene utilizando la fórmula del interés simple, usando como capital el monto al final del mes anterior multiplicado por la tasa mensual y por el periodo transcurrido.

1,231.41 * .01 * 1 = 12.31

El total que se suma al fondo se obtiene sumando el importe del depósito del periodo más los intereses generados.

1,231.41 + 12.31 = 1,243.72

El monto al final del mes se obtiene sumando el monto del mes anterior más el total que se suma al fondo.

1,231.41 + 1,243.72 = 2,475.13

[3] Díaz Mata Alfredo y Aguilera Gómez Víctor M. Matemáticas Financieras. McGraw Hill. 1999. p. 231

Se puede observar que el depósito generado al final del último mes no genera intereses. Así mismo la suma de la columna de depósitos por periodo más la columna de interés generado es igual al monto de la anualidad.

4,925.62 + 74.38 = 5,000.00

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Ensayo sobre fondo de amortización y su aplicación práctica en la actividad empresarial.

1.3 CÁLCULO DEL TIEMPO Y DE LA TASA

El tiempo que interviene en un problema de anualidades ordinarias tiene que ver con las fechas en que deberá de realizarse los pagos, cuando en una anualidad las fechas son fijas y se estipulan de antemano, son anualidades ordinarias ciertas, como el caso de compras a crédito que se indica la fecha del primer pago y la fecha del último pago.

Existen anualidades que se les denomina contingentes, y son aquellas en donde se desconocen el momento que se deberá de liquidar la anualidad, como el caso de rentas vitalicias.

"En una anualidad el periodo de tiempo que transcurre entre un pago y otro se conoce como intervalo o periodo de pago y el tiempo que transcurre ente el inicio del primer periodo de pago y el final del último, se conoce como plazo o tiempo de una anualidad y se calcula por medio del número de períodos de pago *n*".[4]

A continuación se cita el siguiente ejemplo.

Una persona desea acumular $5,000.00, para reunir esa cantidad desea efectuar depósitos mensuales vencidos en una cuenta que rinde el 12% anual capitalizable mensualmente. Si deposita la cantidad de $1,231.41 cada fin de mes, ¿dentro de cuánto tiempo habrá acumulado la cantidad deseada?

[4] Díaz Mata Alfredo y Aguilera Gómez Víctor M. Matemáticas Financieras. McGraw Hill. 1999. pp. 126-137

Para resolver el número de pagos de una anualidad ordinaria se utiliza la siguiente fórmula:

Datos

M = 5,000.00

R = 1,231.41

i = 12% anual capitalizable mensualmente = 0.12/12 = 0.01 mensual

n =?

Fórmula básica de la las anualidades ordinarias.

$$M = R \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Para determinar el número de pagos necesarios para acumular la cantidad deseada se debe despejar n.

$$\frac{M\,i}{R} = (1 + i)^n - 1$$

$$\frac{M\,i}{R} = (1 + i)^n$$

$$n = \frac{\log\ [\,(Mi / R) + 1\,]}{\log\ (1 + i)}$$

Sustitución

$$n = \frac{\log\ [\,((5{,}000 * .01) / 1{,}231.41) + 1\,]}{\log\ (1 + .01)}$$

$$n = \frac{\log\ [\,(50) / 1{,}231.41) + 1\,]}{\log\ (1 + .01)}$$

$$n = \frac{\log\ [\,0.04060386 + 1\,]}{\log\ (1 + .01)}$$

$$n = \frac{\log\ 1.04060386}{\log\ (1 + .01)}$$

$$n = \frac{\log\ 1.04060386}{\log\ 1.01}$$

$$n = \frac{\text{Log}\ 0.017285432}{\text{Log}}$$

0.004321373

n = 4

Para poder reunir la cantidad deseada es necesario efectuar 4 depósitos cada fin de mes, por lo que, el plazo de esta anualidad es de 4 meses.

La tasa de interés, representa el porcentaje a que esta expuesto cierta cantidad de dinero, tomando en consideración que si dicha tasa no se expresa en alguna unidad de tiempo, se considera como una tasa anual.

Se le llama anualidad simple, cuando el periodo en que se capitalizan los intereses coincide con el periodo de pago y cuando existe diferencia entre ambos se considera una anualidad general.

A continuación se presenta el siguiente ejemplo.

¿A qué tasa nominal convertible semestralmente se acumula $500,000 en el momento de realizar el último de 15 depósitos semestrales de $10,000?

Datos

M = 500,000

R = 10,000

n= 15

i = ?

Fórmula básica de anualidades ordinarias

$$M = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{500{,}000}{10{,}000} = \frac{(1+i)^{15} - 1}{i}$$

Para resolver la tasa de interés, es necesario despejar *i*, ensayando valores (altos ya que es semestral).

$$i = 0.15 \qquad \frac{(1.15i)^{15} - 1}{0.15} = 47.58041086$$

$$i = 0.16 \qquad \frac{(1.16)^{15} - 1}{0.16} = 51.65950541$$

Afinando la aproximación tenemos los siguientes valores.

$$i = 0.157 \qquad \frac{(1.157)^{15} - 1}{0.157} = 50.39819915$$

$$i = 0.1560 \qquad \frac{(1.156)^{15} - 1}{0.156} = 49.9850438$$

$$i = 01561 \qquad \frac{(1.1561)^{15} - 1}{0.1561} = 50.02619735$$

Con los valores anteriores se procede a realizar una interpolación tomando el valor inmediato superior y el valor inmediato inferior a la cantidad de 50, resultado de dividir el monto entre la renta del problema planteado.

49.98504380 | 50 | 50.02619735

0.1560 | | 0.1561

Al resultado de dividir el monto entre la renta se le resta la cantidad el valor inmediato inferior y lo que resulte se divide entre la diferencia del valor inmediato superior menos el valor inmediato inferior. Que debe ser igual a i menos el valor de la tasa que proporciona el valor inmediato inferior entre la diferencia de tasas determinadas que más se aproximan. Se despeja i, teniendo como resultado el valor de la tasa deseada.

$$\frac{50 - 49.9850438}{50.02619735 - 49.9850438} = \frac{i - 0.1560}{0.1561 - 0.1560}$$

$$\frac{0.0149562}{0.04115355} = \frac{i - 0.1560}{0.0001}$$

$$0.36342430\,(0.0001) = i - 0.1560$$

$$i = 0.1560 + 0.00003634$$

$$i = 0.15603634$$

$$\frac{(1.15603634)^{15} - 1}{0.15603634} = 49.99999485 \text{ o, aproximadamente } 50$$

Por lo tanto se requiere una tasa de 0.15603634 * 2 semestres = 0.312072, lo que equivale a 31.21 % aproximadamente (nominal anual para hacer que el monto de 15 pagos nominal de $10,000 sea $500,000.[5]

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Ensayo sobre tiempo y tasa, aplicable en la solución de problemas de anualidades ordinarias.

1.4 TIEMPO FRACCIONARIO.

El tiempo fraccionario se presenta cuando en el planteamiento de un problema involucra periodos de tiempos completas y adicionalmente periodos de tiempo fraccionarios, como por ejemplo una renta periódica mensual mas la fracción de un mes siguiente, o la renta periódica semestral mas una adicional donde el semestre no es completo.

A continuación se cita el siguiente ejemplo.

¿Cuál es el monto de 100,000.00 que se deposita al final de cada semestre durante un plazo de 2 años y 3 meses, en un instrumento de inversión que liquida el 24% anual capitalizable semestralmente?

Como se puede observar en el planteamiento del problema los periodos de capitalización coinciden con los periodos de pago. Sin embargo, no todos los periodos son completos ya que dos años tiene 4 periodos semestrales completos y un periodo adicional fraccionario.

Debido a que 2 años equivalen a 27 meses, y un semestre a 6 meses, se puede formar la siguiente proporción.

6 meses = 1 semestre
27 meses = n semestre

Por lo tanto

$$n = \frac{27 * 1}{6}$$

[5] Díaz Mata Alfredo y Aguilera Gómez Víctor M. Matemáticas Financieras. McGraw Hill. 1999. pp. 146-147

Se multiplican los medios y se divide entre el extremo

$$n = \frac{27}{6}$$

$$n = 4.5$$

Por lo que la frecuencia de conversión es igual a 4.5 semestres, ahora ya se le puede dar solución al planteamiento del problema.

Formula

$$M = R\,\frac{(1 + i)^{n} - 1}{i}$$

Sustitución

$$M = 100{,}000\,\frac{(1 + .24/12)^{4.5} - 1}{.24/12}$$

$$M = 100{,}000\,\frac{(1.02)^{4.5} - 1}{.02}$$

$$M = 100{,}000\,\frac{(1.093202895) - 1}{.02}$$

$$M = 100{,}000\,\frac{.093202895}{.02}$$

$$M = 100{,}000 * 4.66014475$$

$$M = 466{,}014.47$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Ensayo sobre la importancia del tiempo fraccionario en la solución de problemas de anualidades ordinarias.

.

AUTOEVALUACIÓN.

Resolver los siguientes problemas:

¿Cuál es el monto de 10,000 que se depositan al final de cada bimestre durante el plazo de 1 año, en una cuenta de inversión que rinde el 36% anual con periodos de capitalización bimestral?

¿Cuál es el monto de 10,000 que se depositan al final de cada trimestre durante el plazo de 1 año, en una cuenta de inversión que rinde el 36% anual con periodos de capitalización trimestral?

¿Cuál es el monto de 10,000 que se depositan al final de cada cuatrimestre durante el plazo de 1 año, en una cuenta de inversión que rinde el 36% anual con periodos de capitalización cuatrimestral?

¿Cuál es el monto de 10,000 que se depositan al final de cada año durante el plazo de 2 años, en una cuenta de inversión que rinde el 36% anual con periodos de capitalización anual?

Una persona debe liquidar dentro de un año la cantidad de $10,000.00, con la finalidad de asegurar el pago, decide acumular un fondo mediante depósitos bimestrales en una cuenta bancaria que rinde el 12% mensual capitalizable bimestralmente ¿de cuánto deben ser los depósitos?

Una persona debe liquidar dentro de un año la cantidad de $10,000.00, con la finalidad de asegurar el pago, decide acumular un fondo mediante depósitos trimestrales en una cuenta bancaria que rinde el 12% mensual capitalizable trimestralmente ¿de cuánto deben ser los depósitos?

Una persona debe liquidar dentro de un año la cantidad de $10,000.00, con la finalidad de asegurar el pago, decide acumular un fondo mediante depósitos cuatrimestrales en una cuenta bancaria que rinde el 12% mensual capitalizable cuatrimestralmente ¿de cuánto deben ser los depósitos?

Una persona desea acumular $10,000.00, para reunir esa cantidad desea efectuar depósitos bimestrales vencidos en una cuenta que rinde el 12% anual capitalizable bimestralmente. Si deposita la cantidad de $1,585.26 cada fin de bimestre ¿dentro de cuánto tiempo habrá acumulado la cantidad deseada?

Una persona desea acumular $10,000.00, para reunir esa cantidad desea efectuar depósitos trimestrales vencidos en una cuenta que rinde el 12% anual capitalizable trimestralmente. Si deposita la cantidad de $2,390.27 cada fin de trimestre, ¿dentro de cuánto tiempo habrá acumulado la cantidad deseada?

Una persona desea acumular $10,000.00, para reunir esa cantidad desea efectuar depósitos cuatrimestrales vencidos en una cuenta que rinde el 12% anual capitalizable cuatrimestralmente. Si deposita la cantidad de $3,203.49 cada fin de cuatrimestre, ¿dentro de cuánto tiempo habrá acumulado la cantidad deseada?

¿Cuál es el monto de 10,000 que se depositan al final de cada bimestre durante el plazo de 13 meses, en una cuenta de inversión que rinde el 36% anual con periodos de capitalización bimestral?

¿Cuál es el monto de 10,000 que se depositan al final de cada cuatrimestre durante el plazo de 13 meses, en una cuenta de inversión que rinde el 36% anual con periodos de capitalización cuatrimestral?

¿Cuál es el monto de 10,000 que se depositan al final de cada semestre durante el plazo de 27 meses, en una cuenta de inversión que rinde el 36% anual con periodos de capitalización cuatrimestral?

RESPUESTAS.

1. 69,753.19
2. 45,731.29
3. 33,744.00
4. 23,600.00
5. 1,585.26
6. 2,390.27
7. 3,203.49
8. 6
9. 4
10. 3
11. 76,742.47
12. 35,914.71
13. 87,675.14

UNIDAD 2.

VALOR PRESENTE DE ANUALIDADES ORDINARIAS

OBJETIVO.

Conocer y aplicar la fórmula de valor presente de las anualidades ordinarias para la solución de problemas relacionados con la depreciación de activos fijos y la liquidación de deudas contraídas a tasas fijas y a tasas distinta de la amortización

TEMARIO

2.1. CONCEPTO.

2.2. RELACIÓN ENTRE EL MONTO Y EL VALOR ACTUAL DE UNA SERIE DE ANUALIDADES.

2.3. FÓRMULA DE LA ANUALIDAD.

2.4. DEPRECIACIÓN CON BASE EN ANUALIDADES.

2.5. LA ANUALIDAD COMO LA CANTIDAD QUE AMORTIZA UN CAPITAL.

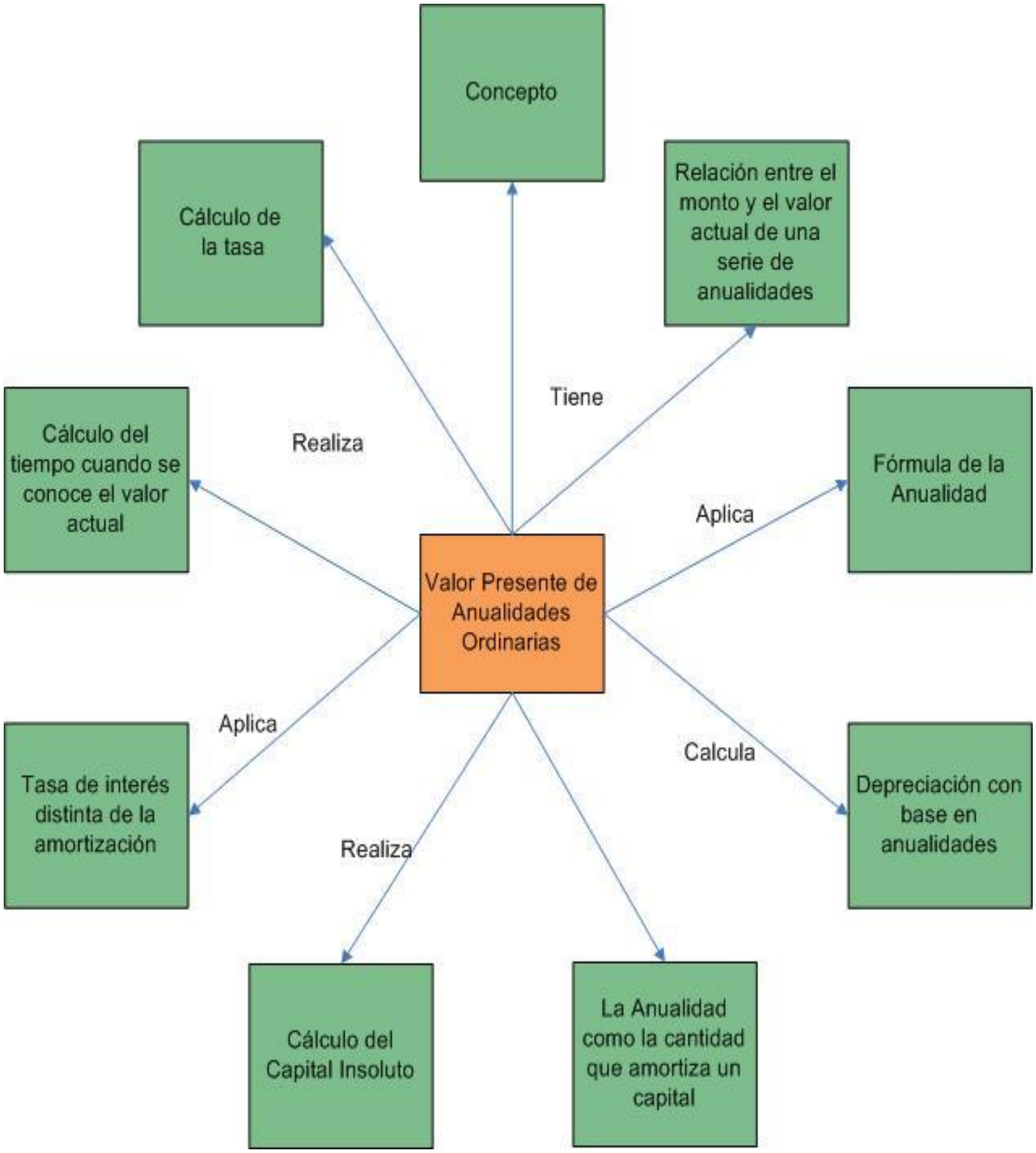
2.6. CÁLCULO DEL CAPITAL INSOLUTO.

2.7. TASA DE INTERES DISTINTA DE LA AMORTIZACIÓN.

2.8. CÁLCULO DEL TIEMPO CUANDO SE CONOCE EL VALOR ACTUAL

2.9. CALCULO DE LA TASA.

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

La presente unidad se trata los principales aspectos relacionados al conocimiento y aplicación del procedimiento para la solución de problemas financieros que tienen que ver con el valor presente de las anualidades ordinarias.

En primera instancia se definirá brevemente el concepto del valor presente, durante el desarrollo se abordaran casos prácticos que contribuya aun mejor entendimiento sobre las diversas situaciones que ocurre en la actividad financiera de las empresas. Se conocerá la relación que existe entre el monto y el valor presente de una serie de anualidades, la aplicación del valor actual de las anualidades ordinaria en el proceso de depreciación de los activos fijos, se podrá identificar su aplicación en el cumplimiento del pago de las deudas contraídas, así como, el comportamiento que se le da a cada pago realizado.

Se abordarán temas relacionados con la determinación del capital insoluto en el proceso de la amortización de una deuda, se podrá determinar partiendo de la formula básica la tasa de interés cuando se contratan créditos a tasas variables, el número de pagos que permita finiquitar una deuda.

2.1 CONCEPTO.

El valor presente o actual de una anualidad ordinaria o vencida, consiste en determinar cuánto vale hoy el conjunto de pagos fijos iguales en periodos de tiempos iguales, que se realizaran en el futuro.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Ensayo sobre valor presente o valor actual de anualidades ordinarias.

2.2 RELACIÓN ENTRE EL MONTO Y EL VALOR ACTUAL DE UNA SERIE DE ANUALIDADES.

El valor presente de una determinada cantidad con vencimiento en el futuro, representa un capital, que expuesto a cierta tasa de interés y a un periodo de tiempo establecido se convertirá en el monto señalado.

Por lo tanto, encontrar el capital en el planteamiento de un problema de anualidad ordinaria consiste en encontrar el valor presente del monto. Como se ha comentado las anualidades ordinarias se caracterizan por que los pagos se realizan al final de cada periodo, por lo que, el valor presente entonces consiste en asociar las rentas con su valor equivalente al comenzar el plazo.

En términos del valor del dinero a través del tiempo el monto y el valor presente de una serie de anualidades existe una igualdad en cuanto al poder adquisitivo.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Ensayo relacionado con la relación que existe entre el valor futuro y el valor actual de una renta de una anualidad ordinaria.

2.3. FÓRMULA DE LA ANUALIDAD

Como se ha dejado de manifiesto en el concepto de la presente unidad, que se entiende por valor presente o actual de una serie de anualidades, el valor calculado en la época o fecha inicial de pagos de toda la serie donde el capital expuesto a cierta tasa y tiempo conocido, produce un monto determinado.

A continuación se cita el siguiente ejemplo.

Tomando en consideración que una renta bimestral se tiene que liquidar al final del periodo durante un plazo de siete bimestres, expuesto a una tasa del intereses del 9% convertibles bimestralmente, ¿Cuál será el valor actual?

Deducción de la fórmula del valor presente de una serie de anualidades. Esta fórmula se puede deducir de dos maneras diferentes:

a) Tomando como base una serie de anualidades cuyo valor de los pagos asciende a la cantidad de 4,500

Datos

C = ?

R = 4,500

i = 9% bimestral

n = 7 bimestres

De la formula

$$M = C\,(1 + i)^{n}$$

Despejamos "C "

$$C = \frac{M}{(1 + i)^{n}}$$

O bien

$$C = M\,(1 + i)^{-n}$$

Éste es el caso inverso del monto. El valor actual de la anualidad seria la suma de los valores actuales de las 7 rentas.

$$C = 4{,}500\,(1.09)^{-1} + 4{,}500\,(1.09)^{-2} + 4{,}500\,(1.09)^{-3} + 4{,}500\,(1.09)^{-4}$$

$$+ 4{,}500\,(1.09)^{-5} + 4{,}500(1.09)^{-6} + 4{,}500\,(1.09)^{-7}$$

C = 4,500 (0.91743119) + 4,500 (0.84167999) + 4,500 (0.77218348) + 4,500 (0.70842521)

+ 4,500 (0.64993139) + 4,500 (0.59626733) + 4,500 (0.54703424)

C = 4,128.44 + 3,787.56 + 3,474.83 + 3,187.91 + 2,924.69 + 2,683.20 + 2,461.65

C = 22,648.28

Y, al igual que antes, puede verse que esa suma de términos es una progresión geométrica con:

$t_1 = 4{,}500\,(1.09)^{-1} = R\,(1+i)^{-1}$

$n = 7$

$r = (1.09)^{-1} = (1+i)^{-1}$

$$S = \frac{t_1 - t_1 r^n}{1 - r} = \frac{4{,}500\,(1.09)^{-1} - 4{,}500\,(1.09)^{-1}(1.09)^{-7}}{1 - (1.09)^{-1}}$$

$$S = 22{,}648.28$$

Y la correspondiente fórmula

$$C = \frac{R(1+i)^{-1} - R(1+i)^{-1}\left[(1+i)^{-1}\right]^n}{1 - (1+i)^{-1}}$$

$$C = \frac{R(1+i)^{-1} - R(1+i)^{-1}(1+i)^{-n}}{1 - \frac{1}{(1+i)}}$$

$$C = \frac{(1+i)\,R(1+i)^{-1}\left[1 - (1+i)^{-n}\right]}{i}$$

$$C = R\,\frac{\left[1 - (1+i)^{-n}\right]}{i} = A$$

Que es la fórmula más común del valor actual de las anualidades, simples, ciertas, vencidas e inmediatas.

Utilizando la fórmula para resolver el problema planteado.[6]

$$C = 4{,}500\,\frac{\left[1 - (1+0.09)^{-7}\right]}{0.09} = 4{,}500\,(5.03295284)$$

$$C = 22{,}648.28$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Ensayo sobre el campo de aplicación de la fórmula de valor presente o actual de la renta de las anualidades ordinarias.

[6] [6] Díaz Mata Alfredo y Aguilera Gómez Víctor M. Matemáticas Financieras. McGraw Hill. 1999. pp. 146-147

2.4 DEPRECIACIÓN CON BASE EN ANUALIDADES

Los activos de una empresa con el transcurso del tiempo va registrando una pérdida de valor debido como consecuencia del efecto de la inflación o por volverse obsoleto, con excepción de los terrenos. Esta pérdida de valor se le conoce como depreciación, y se descuenta de las utilidades con la finalidad de crear un fondo que permita el reemplazo del activo cuando llegue al final de la vida útil estimada. Sin embargo; el activo al finalizar su periodo de vida útil, se puede estimar un valor de venta y que se le denominad valor de desecho o valor de salvamento. Por lo tanto, la base de depreciación de un activo será igual al monto original de la inversión menos el valor de desecho o salvamente y a partir de este dato se debe determinar el cargo por depreciación anual.

C = Costo original del activo

S = Valor de salvamento

n = Vida útil calculada en años

$B = C - S$ Base de depreciación del activo

$D\ k$ = Cargo por depreciación por el año $k\ (1 < K < n)$

Ak = Depreciación acumulada en el año k

$(0 \leq k \leq n),\ D\ 0 = 0\ y\ Dn = B$

Vk = Valor en libros al final del año $k\ (0 \leq k \leq n)$

$V0 = C\ y\ Vn = S$

dk = Tasa de depreciación por el año k ($1 \leq k \leq n$)[7]

En este método se presentan dos valores para la depreciación, la depreciación anual *R* (que es constante y se deposita, se supone, en un fondo que se constituye para reemplazar el activo, al termina su vida útil) y la depreciación neta (que es variable, por que incluye los intereses de *R,* se acumula y está directamente relacionada con el valor contable al final de cualquier periodo). [8]

[7] Díaz Mata Alfredo y Aguilera Gómez Víctor M. Matemáticas Financieras. McGraw Hill. 1999. p. 296

[8] Villalobos José Luis. Matemáticas Financieras. Prentice Hall. 2007. p. 572

El método de anualidades para determinar las depreciación de activos fijos y crear un fondo de reserva que permita la reposición del activo, es que a partir de los cargos anuales por depreciación permite la generación de intereses que contribuye a la integración de dicho fondo, lo que permite optimizar el uso de los recursos.

La aportación anual al fondo de amortización de la formula siguiente que se utiliza para determinar el monto de una anualidad:

$$M = R\,\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}$$

Para determinar el pago periódico se despeja *R:*

$$R = \frac{Mi}{(1+i)^{n} - 1}$$

Donde:

M = Monto es igual B = Base

R = Renta es igual D = Depreciación

Por tanto se tiene la fórmula:

$$D_k = B\,\frac{i}{(1+i)^{n} - 1} = \frac{Bi}{(1+i)^{n} - 1} = \frac{Bi}{(1+i)^{k} - 1}$$

Para determinar la depreciación acumulada en un periodo de tiempo determinado se utiliza la siguiente fórmula.

$$A_k = D\,\frac{(1+i)^{k} - 1}{i}$$

Donde:

$$A_k = D\,\frac{(1+i)^{k} - 1}{i}\,; \qquad M = R\,\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}$$

El monto acumulado al cabo de *n* años debe ser igual a la base de depreciación del activo.

A continuación se cita el siguiente ejemplo:

Un mobiliario que tiene un valor de adquisición de $40,000.00, y se espera sirva a la empresa un periodo de 5 años antes de que deba ser reemplazado por un equipo mas moderno, al final de la vida útil se espera que no tenga ningún valor.

Se pide:

Determinar el cargo anual por depreciación utilizando el método del fondo de amortización tomando en consideración una tasa vigente del 20% y elaborar la tabla de depreciación correspondiente.

Solución

$$B = C - S$$

$$B = 40{,}000 - 0$$

$$B = 40{,}000$$

$$D = B\,\frac{i}{(1+i)^{n} - 1}$$

$$D = 40\,000\,\frac{0.20}{(1+0.20)^{5} - 1}$$

$$D = 40\,000\,\frac{0.20}{2.48832 - 1}$$

$$D = 40\,000\,\frac{0.20}{1.48832}$$

$$D = 40\,000\ (0.134379703)$$

$$D = 5{,}375.19$$

La aportación que se debe hacer anualmente al fondo de amortización es de $ 5,375.19

La tabla de depreciación que se elabora es parecida a una tabla de amortización, con una columna adicional donde se anota el valor en libros.

Años	Deposito anual	Intereses ganados	Depreciación anual	Depreciación Acumulada	Valor en libros
0	0.00	0.00	0.00	0.00	40,000.00
1	5,375.19	0.00	5,375.19	5,375.19	34,624.81
2	5,375.19	1,075.04	6,450.23	11,825.42	28,174.58
3	5,375.19	2,365.08	7,740.27	19,565.69	20,434.31
4	5,375.19	3,913.14	9,288.33	28,854.02	11,145.98
5	5,375.19	5,770.80	11,145.99	40,000.01	-0.01
Total	26,875.95	13,124.06	40,000.01		

La diferencia de centavos se debe al redondeo, se puede ajustar en el último depósito.

El valor en libros se obtiene restando del monto de la inversión en el año 0 menos la depreciación acumulada.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Ensayo sobre la importancia de la fórmula de valor presente o actual en la aplicación de las depreciaciones de activos fijos.

2.5 LA ANUALIDAD COMO LA CANTIDAD QUE AMORTIZA UN CAPITAL.

Amortizar un capital significa pagar o liquidar una deuda contraída de acuerdo como se haya pactado dicho financiamiento Uno de los métodos para liquidar una deuda es precisamente a través de la amortización. Mediante éste método, la deuda pactada se va liquidando al llevar a cabo cada pago parcial, donde el monto de cada pago sirve para liquidar en primer lugar los intereses generados hasta el momento del pago, y la parte restante se abona al capital que se adeuda hasta ese momento.-

El cálculo de esa cantidad fija que permita amortizar la deuda en un número prefijado de pagos, se denomina anualidad.

A continuación se cita el siguiente ejemplo.

Una persona adquiere el día de hoy un préstamo de $ 50,000.00 a una tasa del 24% anual convertible trimestralmente que amortizará mediante 4 pagos cuatrimestrales iguales, el primero de los cuales vence dentro de 3 meses ¿de cuánto será cada pago?

Datos

C = 50,000.00

R = ?

i = 24% = .24 anual entre 4 trimestres es igual a 0.06

n = 4

La fórmula básica es la siguiente

$$C = R \; \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Para encontrar el importe de las anualidades que amortizara el capital se tiene que despejar *R*.

$$R = \frac{Ci}{1 - (1+i)^{-n}}$$

Sustitución

$$R = \frac{(50{,}000)\ (0.06)}{1 - (1+0.06)^{-4}}$$

$$R = \frac{3{,}000}{1 - (1+0.06)^{-4}}$$

$$R = \frac{3{,}000}{1 - 0.792093663}$$

$$R = \frac{3{,}000}{0.207906336}$$

$$R = 14{,}429.57$$

Cuando se realizan los pagos que se realizan para amortizar una deuda contraída en primer lugar se aplica a cubrir los accesorios generados a la fecha de pago y en segundo término a reducir el capital o el principal. Con la finalidad de ver mejor la aplicación de los pagos en conveniente elaborar una tabla de amortización que indique la distribución de cada pago realizado, como impacta en los intereses, la deuda, la amortización y el saldo

TABLA DE AMORTIZACIÓN

FECHA	IMPORTE DEL PAGO	INTERES SOBRE SALDO	AMORTIZACION	SALDO
0	0.00	0.00	0.00	50,000.00
1	14,429.57	3,000.00	11,429.57	38,570.43
2	14,429.57	2,314.23	12,115.34	26,455.09
3	14,429.57	1,587.31	12,842.26	13,612.82
4	14,429.59	816.77	13,612.82	0.00
Totales	57,718.30	7,718.30	50,000.00	

Como se puede observar, el importe del pago representa la anualidad para liquidar la deuda. El interés generado se obtiene de multiplicar el saldo anterior por la tasa de interés del periodo. La amortización se origina restando al importe del pago los intereses generados. Y el saldo actual se obtiene restando al saldo anterior el importe de la amortización del periodo.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Ensayo sobre la aplicación de la fórmula de valor presente o actual de las anualidades ordinaria en el pago de una deuda.

2.6 CÁLCULO DEL CAPITAL INSOLUTO.

Amortizar una deuda es pagarla a través de una serie de pagos periódicos, por lo tanto la cantidad pagada de esa deuda representa derechos para el deudor, mientras que el acreedor únicamente tiene derechos sobre la diferencia que existe entre el valor original de la deuda menos los pagos realizados por el deudor.

Por lo tanto, el importe que resulta del valor original de una deuda pactada menos los pagos efectuados, da como resultado el importe no liquidado o la cantidad que todavía le falta por liquidar al deudor. A esa cantidad se le conoce como saldo insoluto.[9]

En una operación de compraventa a crédito de un bien, después de que el deudor ha realizado algunos pagos, el deudor ha es propietario parcialmente del bien, mientras que el acreedor, después de haber recibido los pagos ya no es propietario de los derechos de todo el bien.

"En cualquier momento y en cualquier operación de una transacción a crédito se tiene lo siguiente:

Derechos del deudor + Derechos de acreedor = Valor de la operación."[10]

A continuación se ilustra el siguiente ejemplo:

Una persona adquiere el día de hoy un préstamo de $ 50,000.00 a una tasa del 24% anual convertible trimestralmente que amortizará mediante 4 pagos cuatrimestrales iguales, el primero de los cuales vence dentro de 3 meses ¿de cuánto será cada pago

Datos

---

[9] Villalobos José Luis. Matemáticas Financieras. Prentice Hall. 2007. p. 304

[10] Díaz Mata Alfredo y Aguilera Gómez Víctor M. Matemáticas Financieras. McGraw Hill. 1999. p. 218

C = 50,000.00

R = ?

i = 24% = .24 anual entre 4 trimestres es igual a 0.06

n = 4

En la presente tabla se observa el comportamiento que tiene los pagos en la liquidación de la deuda.

TABLA DE AMORTIZACIÓN

FECHA	IMPORTE DEL PAGO	INTERES SOBRE SALDO	AMORTIZACION	SALDO
0	0.00	0.00	0.00	50,000.00
1	14,429.57	3,000.00	11,429.57	38,570.43
2	14,429.57	2,314.23	12,115.34	26,455.09
3	14,429.57	1,587.31	12,842.26	13,612.82
4	14,429.59	816.77	13,612.82	0.00
Totales	57,718.30	7,718.30	50,000.00	

En la realización del segundo pago se puede observar que los derechos del acreedor representan $ 26,455.09, por diferencia se pude calcular los derechos del deudor:

Valor original de la operación $50,000.00 – Derechos del Acreedor $ 26,455.09 = Derechos del deudor $23,544.91

Que es igual a la suma de las amortizaciones realizadas por el deudor durante los pagos realizados.

Importe de primera amortización $11,429.57 + Importe de la segunda amortización $12,115.34 = 23,544.91

Sin necesidad de elaborar la tabla se pueden realizar el cálculo de las cantidades mediante la aplicación de la siguiente formula.

Los derechos del acreedor (saldo insoluto):

$$50,000\ (1.06)^{2} - 14,\ 429.57\ \frac{(1.06)^{2} - 1}{0.06}$$

$$56,180.00 \quad - \quad 29,724.91 \quad = \quad 26,455.09$$

La cantidad de $56,180.00, representa el valor de la deuda al final del segundo trimestre, mientras que la cantidad de $29,724.91, corresponde al valor de los pagos realizados hasta el cumplimiento de los dos trimestres.

Los derechos del deudor se pueden calcular de la siguiente manera:

$$14,429.57 \frac{(1.06)^2 - 1}{0.06} - [(50,000)(1.06)^2 - (50,000.00)]$$

$$29,724.91 - 6,180.00 = 23,544.91$$

En donde la cantidad de $29,724.91, representa el valor de los pagos realizados al final del segundo trimestre y el valor de $6,180.00, corresponde a los intereses generados por el uso del importe del préstamo que fue de $50,000.00.[11]

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Ensayo sobre la determinación del capital insoluto en las operaciones de financiamiento.

2.7 TASA DE INTERÉS DISTINTA DE LA AMORTIZACIÓN.

Cuando se contrata una deuda y se conviene saldarla de manera gradual por medio de una serie de pagos denominadas amortizaciones. Estas amortizaciones constituyen el valor actual o presente de una serie de anualidades ordinarias vencidas, donde se pacata adicionalmente la tasa de intereses los periodos de pago y el plazo.

En la contratación de créditos donde los plazos son muy largos, existe la posibilidad que la tasa de interés sea variable y que se tenga que ajustar a la tasa de mercado. Por lo que, el importe de las amortizaciones se tendría que modificar, aplicando la misma formula para el saldo del capital insoluto al momento de la variación de la tasa.

A continuación se cita el siguiente ejemplo.

Una persona contrae el día de hoy un financiamiento de $ 500,000.00 a que se amortizara mediant 10 pagos anuales iguales una tasa del 24% anual, el primero de los cuales vence dentro de 1 año. ¿De cuánto será cada pago?

Datos

C = 500,000.00

R =?

[11] Díaz Mata Alfredo y Aguilera Gómez Víctor M. Matemáticas Financieras. McGraw Hill. 1999. p. 219.

i = 24%

n = 10

La formula básica es la siguiente

$$C = R \; \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Para encontrar el importe de las anualidades que amortizara el capital se tiene que despejar *R*.

$$R = \frac{Ci}{1 - (1+i)^{-n}}$$

Sustitución

$$R = \frac{(500,000)\,(0.24)}{1 - (1+0.24)^{-10}}$$

$$R = \frac{120,000}{1 - (1+0.24)^{-10}}$$

$$R = \frac{120,000}{1 - 0.11635449}$$

$$R = \frac{120,000}{0.883645509}$$

$$R = 135,801.06$$

Como ya se menciono anteriormente los pagos que se realizan para amortizar una deuda contraída en primer lugar se aplica a cubrir los intereses generados a la fecha de pago y en segundo término a reducir el capital.

TABLA DE AMORTIZACIÓN

FECHA	IMPORTE DEL PAGO	INTERES 24% SOBRE SALDO	AMORTIZACION	SALDO
0	0.00	0.00	0.00	500,000.00
1	135,801.06	120,000.00	15,801.06	484,198.94
2	135,801.06	116,207.74	19,593.32	464,605.62
3	135,801.06	111,505.35	24,295.72	440,309.90
4	135,801.06	105,674.38	30,126.69	410,183.21
5	135,801.06	98,443.97	37,357.09	372,826.12
6	135,801.06	89,478.27	46,322.79	326,503.33
7	135,801.06	78,360.80	57,440.26	269,063.06
8	135,801.06	64,575.14	71,225.93	197,837.14
9	135,801.06	47,480.91	88,320.15	109,516.98
10	135,801.06	26,284.08	109,516.99	0.00
Totales	1,358,010.64	858,010.63	500,000.00	

En caso de que la tasa de interés cambiara, se procede a recalcular las nuevas amortizaciones para los siguientes pagos pendientes de realizar tomando como base el saldo de capital insoluto y se determina el nuevo importe a pagar con la nueva tasa de interés aplicando el mismo procedimiento.

Para una mejor compresión, se considera que la tasa de interés cambia para el tercer pago y de 24% pasa a 30% anual, se procede de la siguiente manera:

La fórmula básica es la siguiente

$$C = R \; \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Para encontrar el importe de las anualidades que amortizara el capital se tiene que despejar *R*.

$$R = \frac{Ci}{1 - (1+i)^{-n}}$$

Sustitución

$$R = \frac{(464{,}605.62)\ (0..30)}{1 - (1+0.30)^{-8}}$$

$$R = \frac{139{,}381.69}{1 - (1+0.30)^{-8}}$$

$$R = \frac{139{,}381.69}{1 - 0.122589474}$$

$$R = \frac{139{,}381.69}{0.877410526}$$

$$R = 158{,}855.73$$

Adicionalmente se procede a la reconstrucción de la tabla de amortización, con la finalidad de ver el comportamiento de los pagos realizados a intereses y a la amortización del capital.

TABLA DE AMORTIZACIÓN

FECHA	IMPORTE DEL PAGO	INTERES 24% SOBRE SALDO	AMORTIZACION	SALDO
0	0.00	0.00	0.00	500,000.00
1	135,801.06	120,000.00	15,801.06	484,198.94
2	135,801.06	116,207.74	19,593.32	464,605.62
3	158,855.73	139,381.69	19,474.04	445,131.58
4	158,855.73	133,539.47	25,316.25	419,815.32
5	158,855.73	125,944.60	32,911.13	386,904.20
6	158,855.73	116,071.26	42,784.47	344,119.73
7	158,855.73	103,235.92	55,619.81	288,499.92
8	158,855.73	86,549.98	72,305.75	216,194.17
9	158,855.73	64,858.25	93,997.47	122,196.70
10	158,855.71	36,659.01	122,196.70	0.00
Totales	1,542,447.92	1,042,447.91	500,000.00	

Como se puede observar en la tabla, las dos primeras amortizaciones se realizaron a la tasa del 24%. Y cuando cambia la tasa al 30% a partir del año 3, por el saldo insoluto de capital que, asciende a la cantidad de 464,605.62, se procede a calcular el nuevo importe de los pagos. Si volviera a existir una variación en la tasa, se tendría que recalcular los pagos y la tabla de amortización a partir de la fecha de cambio por la parte del capital insoluto y por el plazo restante.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Ensayo sobre la determinación del capital insoluto en las operaciones de financiamiento.

2.8 CÁLCULO DEL TIEMPO CUANDO SE CONOCE EL VALOR ACTUAL.

El plazo o tiempo de una anualidad se calcula por medio del número de pagos *n.* por lo que, cuando se conoce el valor actual en un problema de anualidades ordinarias y adicionalmente se cuenta con la tasa de interés y el periodo de capitalización y la renta, partiendo de la fórmula de valor actual o presente de las anualidades ordinarias se despeja *n* para determinar el número de periodos.

A continuación se cita el siguiente ejemplo.

¿Cuantos pagos más por la cantidad de $607.96 al mes tendría que hacer un comprador de un aparato electrónico que tiene un valor de de $8,500, si otorga un enganche de $ 2,550 y acuerda liquidar el 24% anual de interés capitalizable mensualmente sobre el saldo?

Datos

C = 8,500 – 2,550 = 5,950

R = 607.96

i = 24% anual entre = 0.24/12 porque el periodo de capitalización es mensual

n = ?

Formula

La formula básica es la siguiente

$$C = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Para encontrar el número de pagos que amortizara el valor de la deuda se tiene que despejar *n*.

Sustitución

$$5{,}950 = 607.96 \frac{1 - (1+0.02)^{-n}}{0.02}$$

$$\frac{(5{,}950)(0.02)}{607.96} = 1 - (1.02)^{-n}$$

$$0.195736561 - 1 = -(0.02)^{-n}$$

$$-0.804263439 = -(0.02)^{-n}$$

$$(0.02)^{n} = 0.804263439$$

$$\frac{1}{(0.02)^{n}} = 0.804263439$$

$$(0.02)^{n} = \frac{1}{0.804263439} = 1.24337369$$

$$n \log(1.02) = \log 1.24337369$$

$$n \log(1.02) = \log 1.24337369$$

$$n = \frac{\log 1.24337369}{\log (1.02)} = \frac{0.09460167}{0.00860017}$$

$$n = 11$$

Muchas veces, a diferencia del ejemplo anterior, el número de periodos no es entero.[12]

[12] Díaz Mata Alfredo y Aguilera Gómez Víctor M. Matemáticas Financieras. McGraw Hill. 1999. pp. 137-138

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Ensayo sobre la determinación del tiempo cuando se conoce el valor actual de una anualidad ordinaria.

2.9 CÁLCULO DE LA TASA

La tasa de interés representa el porcentaje a que esta expuesto los importes de la renta, para liquidar una deuda contraída. En la contratación de financiamientos, cuando se conviene con un acreedor partiendo del valor actual de una anualidad ordinaria, el pago de una determinada cantidad en un plazo determinado, es posible hallar el valor de la tasa que se aplicará.

A continuación se citan lo siguientes ejemplos de acuerdo a los autores Alfredo Díaz mata y Víctor M. Aguilera Gómez del libro Matemáticas Financieras.

"Una persona debe pagar hoy la cantidad de \$350,000. Como no tiene esa cantidad disponible, acuerda con su acreedor pagarle mediante 6 abonos mensuales de \$62,000, el primero de ellos dentro de un ¿Qué tasa de interés va a pagar?

Datos

R = 62,000

C = 350,000

n = 6

i = ?

$$350{,}000 = 62{,}000 \; \frac{1 - (1+i)^{-6}}{i}$$

$$\frac{1 - (1+i)^{-6}}{i} = \frac{350{,}000}{62{,}000} = 5.645161$$

Como no es posible despejar la *i*, se tiene que seguir un procedimiento de aproximación para encontrar su valor. Este procedimiento consta de dos pasos:

Ensayar valores en la expresión donde se encuentra la

$$i = \left[\frac{1 - (1+i)^{-6}}{i} \right]$$

Para encontrar dos valores de ella que estén cercanos a 5.645161, uno mayor y otro menor.

2. Interpolar entre los dos valores encontrados en 1 para determinar el valor de *i*, entonces, en primer lugar se ensayan valores para

$$\frac{1 - (1+i)^{-6}}{i}$$

$$si\ i = 0.02 \ \frac{1 - (1+i)^{-6}}{i} = \frac{1 - (1.02)^{-6}}{0.02} = 5.601431$$

Que es bastante cercano al valor de 5.645161 que se busca. Se continua ensayando valores para aproximar mas. Cabe destacar que, al disminuir la tasa de interés se incrementa el valor presente, y viceversa, al incrementar la tasa de interés, disminuye el valor presente.

$$si\ i = 0.017 \ \frac{1 - (1+i)^{-6}}{i} = \frac{1 - (1.017)^{-6}}{0.017} = 5.658585$$

Éste es mayor que el valor que se busca; ahora uno un poco menor, para lo cual se incrementa la tasa de interés.

$$si\ i = 0.018 \ \frac{1 - (1+i)^{-6}}{i} = \frac{1 - (1.018)^{-6}}{0.018} = 5.639435$$

$$si\ i = 0.0175 \ \frac{1 - (1+i)^{-6}}{i} = \frac{1 - (1.0175)^{-6}}{0.0175} = 5.648998$$

Ahora ya se tienen dos valores muy cercanos al valor deseado, uno mayor y otro menor. El segundo paso es interpolar entre estos 2 valores para determinar en forma más exacta la tasa de interés que se necesita.

El razonamiento es el siguiente:

Se necesita encontrar el valor de i que haga que

$$\frac{1-(1+i)^{-6}}{i}$$

Sea igual a 5.645161, porque esta i es la que hace que se cumpla las condiciones planteadas en el ejemplo y es, por lo tanto, la i que se busca.

Ya se determinó en el paso anterior que:

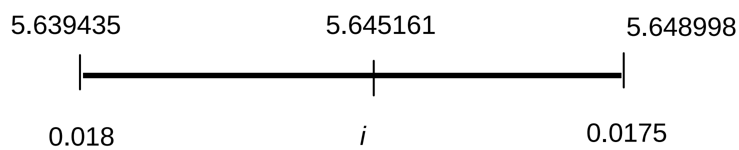
$$si\ i = 0.0175\ \frac{1-(1+i)^{-6}}{i} = \frac{1-(1.0175)^{-6}}{0.0175} = 5.648998$$

Y que

$$si\ i = 0.018\ \frac{1-(1+i)^{-6}}{i} = \frac{1-(1.018)^{-6}}{0.018} = 5.639435$$

De donde s e concluye que la tasa *i* que se busca esta entre 0.018 y 0.0175.

Para ilustrar el procedimiento se muestran las condiciones descritas en los párrafos anteriores mediante un diagrama.



Lo que se va a ser a partir de este diagrama es encontrar un valor más preciso de i es plantear una proporción y, para comprender mejor lo que se hace, se repasarán las relaciones existentes entre las cantidades que aparecen en el esquema anterior.

Puede calcularse:

5.648998 – 5.639435 = 0.009563 es la “distancia total” entre estas dos cantidades; 5.645161 – 5.639435 = 0.005726 es también la “distancia” que hay entre estas dos cantidades.

$$\frac{5.645161 - 5.639435}{5.648998 - 5.639435} = \frac{0.005726}{0.009563} = 0.59876608$$

Lo que significa que 0.005726 (el numerador) representa aproximadamente 59.9% de la distancia total, y como esta proporción debe ser cierta también para la “distancia total “entre las tasas, entonces la tasa que se busca, debe ser igual a 0.018 menos 59.7% de la “distancia total “entre las tasas:

$$0.018 - 0.598766\ (0.018 - 0.0175) = 0.017700$$

Se puede verificar que esta tasa da una mejor aproximación del factor.

$$\frac{1 - (1+0.0177)^{-6}}{0.0177} = 5.645169$$

Que es prácticamente igual al valor que se busca.

Por ello, entonces, la respuesta del ejemplo es que la persona pagará 1.77% mensual. El. Procedimiento de interpolación se puede resumir de la siguiente manera:

$$\frac{5.645161 - 5.639435}{5.648998 - 5.639435} = \frac{i - 0.018}{0.0175 - 0.018}$$

$$\frac{0.005726}{0.009563} = \frac{i - 0.018}{-0.0005}$$

En esta expresión 0.0005 es la “distancia total” entre las tasas, y lo que se hizo entonces fue igualar la proporción de distancias”.[13]

$$0.59876608 = \frac{i - 0.018}{-0.0005}$$

$$i - 0.018 = - 0.0005\ (0.59876608)$$

$$i = 0.018 - (0.000299)$$

$$i = 0.017701$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Ensayo sobre la importancia de la tasa de interés en la contratación de una deuda.

[13] Díaz Mata Alfredo y Aguilera Gómez Víctor M. Matemáticas Financieras. McGraw Hill. 1999. pp 142 -144

AUTOEVALUACIÓN.

1. ¿Cuál es el valor actual de una renta bimestral de $5,000 depositados al final de cada uno de 12 bimestres, si la tasa de interés es del 12% anual convertible bimestralmente?

2. ¿Cuál es el valor en efectivo de una anualidad de $10,000 depositados al final de cada tres meses durante 5 años, suponiendo un interés anual de 16% convertible trimestralmente?

3. ¿Cuál es el valor en efectivo de una anualidad de $20,000 depositados al final de cada cuatro meses durante 2 años, suponiendo un interés anual de 24% convertible cuatrimestralmente?

4. ¿Cuál es el valor presente o de una anualidad de $30,000 depositados al final de cada seis meses durante 4 años, suponiendo un interés anual de 10% convertible semestralmente?

5. Una empresa adquiere una maquinaria con valor de $ 500,000, con una vida útil estimada de 10 años, al cabo de los cuales su valor de desecho será del 10% de su costo. Deciden depreciarlo utilizando el método de fondo de amortización considerando una tasa promedio de interés del 30% anual.

6. Una compañía adquiere un vehículo para el reparto de su mercancía en $250,000. Calcula su vida útil en 4 años y al final de ella su valor de desecho será de $10,000. decide depreciarlo utilizando el método de fondo de amortización considerando una tasa promedio de interés del 25% anual.

7. Una entidad adquiere una maquinaria con calor de $628,750. Considerando una vida útil de 6 años y al final un valor de salvamento de 0. Decide

depreciarlo a utilizando el método de fondo de amortización considerando una tasa de mercado de 18.5% anual.

8. Determinar el valor de los pagos y elaborar la tabla de amortización para saldar una deuda de $40,000 contratado a una tasa de interés del 36% anual convertible bimestralmente, si la deuda tiene que quedar saldada al cabo de un año, haciendo pagos bimestrales iniciando dentro de 2 meses.

9. Determinar el valor de los pagos y elaborar la tabla de amortización para saldar una deuda de $105,000 contratado a una tasa de interés del 18.5% anual convertible mensualmente, si la deuda tiene que quedar saldada al cabo de un año, haciendo pagos mensuales iniciando dentro de 1 mes.

10. Determinar el valor de los pagos y elaborar la tabla de amortización para saldar una deuda de $25,500. contratado a una tasa de interés del 9.% anual convertible semestralmente, si la deuda tiene que quedar saldada al cabo de un año, haciendo pagos semestrales iniciando dentro de 6 meses.

RESPUESTAS

1. 52,876.71
2. 135,903.26
3. 92,457.59
4. 106,378.52
5. 10,558.25
6. 41,626.02
7. 65,757.00
8. 8,134.51
9. 9.651.40
10. 13,616.94

UNIDAD 3.

ANUALIDADES ORDINARIA DIFERIDAS

OBJETIVO.

Conocer y explicar el concepto de anualidades diferidas, identificar la solución problemas donde interviene este tipo de anualidades, y resolver situaciones relacionados con el cálculo del monto, valor actual, anualidad, tiempo y tasa.

TEMARIO

3.1. DEFINICIÓN.

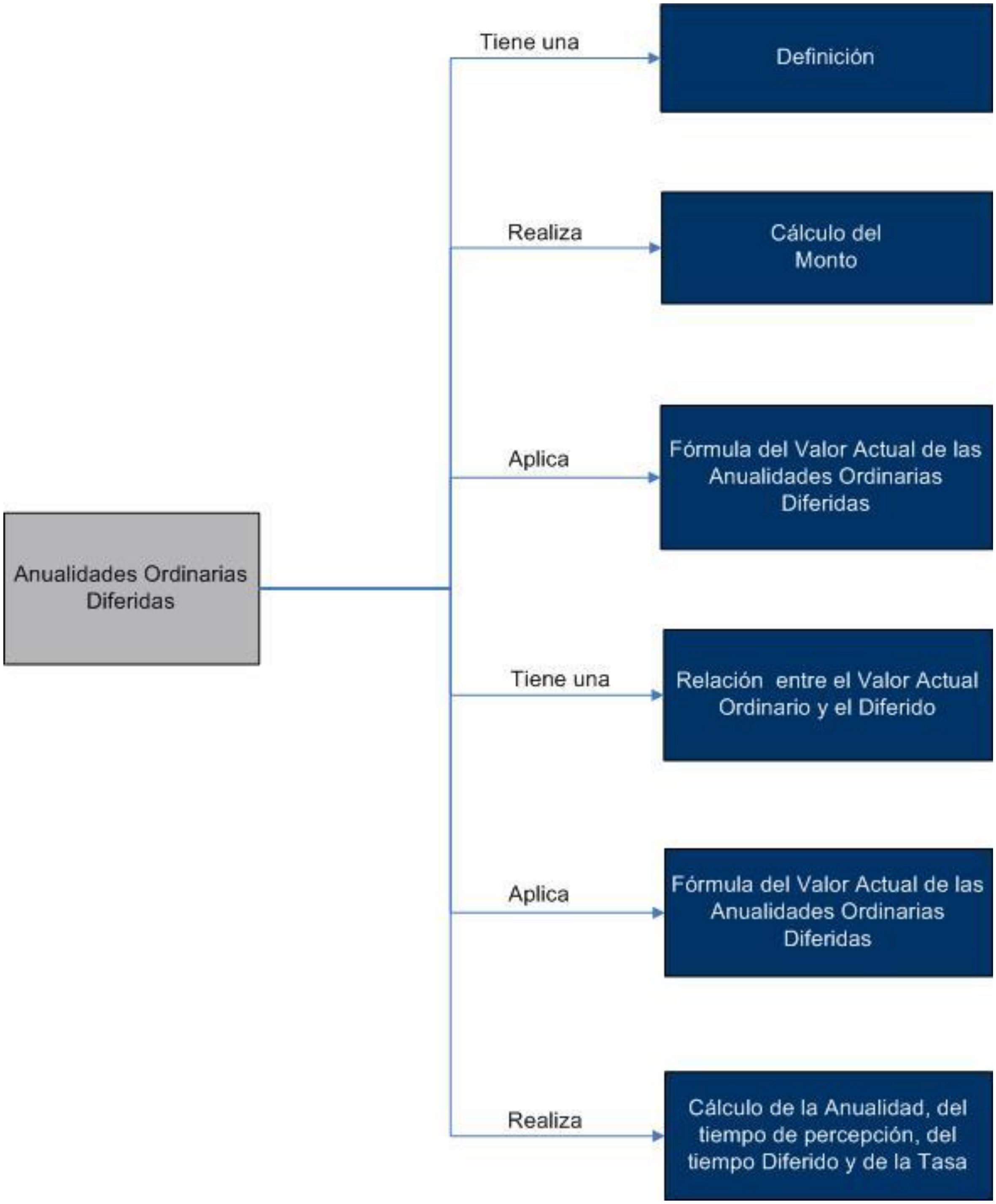
3.2. CÁLCULO DEL MONTO.

3.3. FORMULA DEL VALOR ACTUAL DE LAS ANUALIDADES ORDINARIAS DIFERIDAS.

3.4. RELACIÓN ENTRE EL VALOR ACTUAL Y EL DIFERIDO.

3.5. CÁLCULO DE LA ANUALIDAD, DEL TIEMPO DE PERCEPCIÓN, DEL TIEMPO DIFERIDO Y DE LA TASA...

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

Durante el desarrollo del presente tema relacionado con las anualidades ordinarias diferidas, se dará a conocer una breve definición sobre el significado de este tipo de operaciones, se identificará la fórmula básica necesaria para calcular el monto, se llevará a cabo una explicación y se dará a conocer la fórmula para la determinación del valor actual de una anualidad ordinaria diferida, se identificará la relación que existe entre el valor actual o presente y el valor diferido en la solución de problemas financieros con pagos diferidos y finalmente abordaremos el calculo de la anualidad, el cálculo del tiempo de percepción, el cálculo del tiempo diferido y la tasa de interés.

3.1 DEFINICIÓN.

Es una anualidad vencida o anticipada que inicia después de un determinado tiempo de haber formalizado la operación financiera, es decir, cuando se ha aplazado el pago del primer vencimiento de una serie de anualidades.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Ensayo sobre anualidades diferidas y su aplicación en el campo financiero de la actividad empresarial.

3.2 CÁLCULO DEL MONTO.

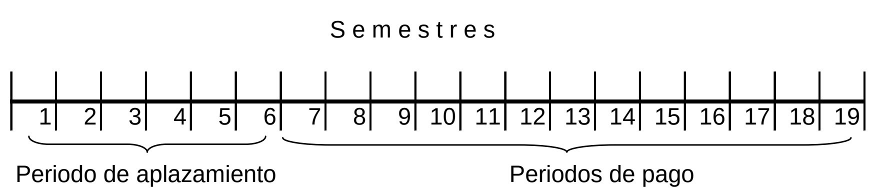
El monto de una anualidad diferida representa la cantidad acumulada de un conjunto de pagos, pero, que la primera amortización se pospone para un periodo posterior a partir de que la operación queda convenida. El periodo que transcurre antes de que se liquide la primera amortización se conoce como periodo de gracia.

La duración de este tipo de anualidades comprende desde el momento que se pacta la operación y la última anualidad diferida.

La formula que se aplica para la determinación del monto de una anualidad vencida.

A continuación se desarrolla el siguiente ejemplo:

¿Cuánto será el valor acumulado al finalizar el plazo de siete años una renta semestral expuesto a una tasa de interés del 17% semestral, tomando en consideración que la primera anualidad se realiza al fina de los tres primeros años?



Conviene enfatizar la utilidad de los diagramas de tiempo y valor para representar las características de las situaciones que se analizan, ya que en este ejemplo hubiera sido fácil caer en la conclusión de que el último pago sería en la fecha 20 y no en la 19. Esto debido a que el primer pago se realiza al final del sexto periodo dentro de los 3 años.

Formula

$$M = R\,\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}$$

Sustitución

$$M = 6{,}000\,\frac{(1 + 0.17)^{14} - 1}{0.17}$$

$$M = 6{,}000\,\frac{9.007454239 - 1}{0.17}$$

$$M = 6{,}000\,\frac{8.00745439}{0.17}$$

$$M = 6{,}000\,(47.102672)$$

$$M = 282{,}616.03$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

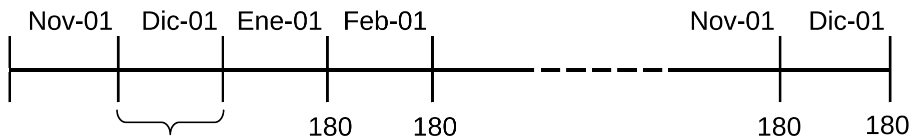
Ensayo sobre el monto de una anualidad diferida.

3.3. FORMULA DEL VALOR ACTUAL DE LAS ANUALIDADES ORDINARIAS DIFERIDAS

El valor actual de una anualidad diferida se calcula a partir de la formula de valor presente para anualidades ordinarias y traídas al momento actual descontado el periodo de aplazamiento.

A continuación se hace el planteamiento del siguiente ejemplo.

Una persona adquiere un mueble, que recibe el 1º. De noviembre, y que debe pagar mediante 12 mensualidades de $180.00 a partir del 1º. De enero del año siguiente. Si se considera el interés a 36% anual convertible mensualmente. ¿Cuál es el valor de contado del mueble?



El pago se pospone durante un periodo. Si consideramos solo los 12 pagos (de enero a diciembre del año siguiente) se llegaría al resultado que se señala a continuación

Datos

C = ¿

R = 180.00

I = 36 anual = .36 entre 12 meses = .03

Formula

$$C = R \, \frac{[\,1 - (\,1+i\,)^{-n}\,]}{i}$$

Sustitución

$$C = 180 \, \frac{[\,1 - (1+0.03)^{-12}\,]}{0.03}$$

$$C = 180 \, \frac{1 - 0.70137988}{0.03}$$

$$C = 180 \, \frac{0.298620119}{0.03}$$

$$C = 180 \;\; (9.954003993)$$

$$C = \;\; 1{,}791.72$$

La cantidad de $1,791.72 sería el valor actual al 1º. De diciembre, ya que se calculo el valor actual de una anualidad vencida, durante 12 periodos, y el inicio el primero de ellos es, precisamente, el 1º. De diciembre.

Lo único que resta hacer es calcular el valor actual de $1,791.72, en un mes atrás, que es cuando el comprador recibió el mueble.

Este se lleva a cabo a través de la formula de valor presente o actual del interés compuesto.

Formula:

$$M = C\,(1+i)^{n}$$

Se despeja C:

$$C = \frac{M}{(1+i)^{n}} = M\,(1+i)^{-n}$$

Sustitución:

$$C = 1791.72\,(1+.03)^{-1}$$

$$C = 1791.72\,(0.970873786)$$

$$C = 1,739.54$$

Por lo tanto, para la solución del problema planteado, se puede estructurar de la siguiente manera:

Formula

$$C = R\,\frac{[1-(1+i)^{-n}]}{i}\,(1+i)^{-n}$$

Sustitución

$$C = 180\,\frac{[1-(1+0.03)^{-12}]}{0.03}\,(1+0.03)^{-1}$$

$$C = 180\,(9.954003993)\,(0.970873786)$$

$$C = 1,739.54$$

Como se puede ver en este ejemplo, en el caso de las anualidades diferidas lo que se hace es encontrar el valor actual (o monto) de la anualidad vencida e inmediata correspondiente de $ 1,791.72 en este caso, y luego trasladarla tantos periodos atrás como sea necesario.[14]

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE.

Ensayo sobre la aplicación que tienen las anualidades ordinarias diferidas en la actividad financiera de las empresas.

[14] Díaz Mata Alfredo y Aguilera Gómez Víctor M. Matemáticas Financieras. McGraw Hill. 1999. pp. 172-173

3.4. RELACIÓN ENTRE EL VALOR ACTUAL ORDINARIO Y EL DIFERIDO

El valor actual de una anualidad diferidas se puede decir, que en términos generales son anualidades ordinarias o anticipadas con la única condición que las diferidas tienen un periodo de aplazamiento antes de iniciar el primer pago.

El valor presente de una determinada cantidad con vencimiento en el futuro, representa un capital, que expuesto a cierta tasa de interés y a un periodo de tiempo establecido se convertirá en el monto señalado.

Por lo tanto, encontrar el capital en el planteamiento de un problema de anualidad ordinaria diferida consiste en encontrar el valor presente o actual del monto.

Por tal motivo, el importe de un determinado monto se relaciona con el importe del valor presente en términos de poder adquisitivo, toda vez que resultaría lo mismo tener cierto monto en el futuro, que descontado a una determinada tasa de interés, resulte equivalente en el presente. Por ejemplo:

Como en el caso de ejercicio anterior, el monto de una renta semestral de \$ 6,000.00 durante 7 años, con un aplazamiento en sus de tres años, a una tasa de interés del 17% semestral, da el siguiente resultado.

Formula

$$M = R\,\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}$$

Sustitución

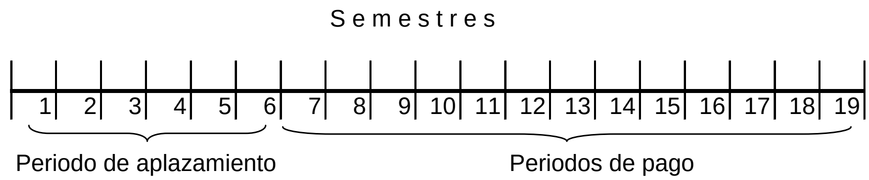
$$M = 6{,}000\,\frac{(1+0.17)^{14} - 1}{0.17}$$

$$M = 6{,}000\,\frac{9.007454239 - 1}{0.17}$$

$$M = 6{,}000\,\frac{8.00745439}{0.17}$$

$$M = 6{,}000\ (47.102672)$$

$$M = 282{,}616.03$$



La cantidad de $282,616.03, representa la suma de las rentas semestrales de $6,000.00 al final de cada semestre, dando inicio al final del año 3.

Para encontrar el valor presente o actual del problema anteriormente señalado daría como resultado lo siguiente:

Fórmula:

$$C = R\ \frac{[\,1 - (\,1+i\,)^{-n}\,]}{i}\ (\,1+i\,)^{-n}$$

Sustitución:

$$C = 6{,}000\ \frac{[\,1 - (\,1+0.17\,)^{-14}\,]}{0.17}\ (\,1+0.17\,)^{-5}$$

$$C = 6{,}000\ (0.5.229299061)\ (\,0.456111152)$$

$$C = 14{,}310.85$$

La cantidad de $14,310.85, que representa el valor actual de una renta semestral expuesta a una tasa de interés el 17% semestral durante el plazo de 19 semestres.

Cuando se conoce el valor actual de la operación se puede calcular el monto:

$$M = 14{,}310.85\ \ (1.17)^{-19} = (14{,}310.85)\ (19.748375)$$

$$M = 282{,}616.03$$

En términos del valor de dinero a través del tiempo resulta equivalente a la cantidad de $282,616.03, que representa el monto del valor de $14,310.85[15]

[15] Díaz Mata Alfredo y Aguilera Gómez Víctor M. Matemáticas Financieras. McGraw Hill. 1999. p 174

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Ensayo sobre la importancia del valor actual con relación al monto en la solución de problemas donde intervienen las anualidades ordinarias diferidas.

3.5. CÁLCULO DE LA ANUALIDAD, DEL TIEMPO DE PERCEPCIÓN, DEL TIEMPO DIFERIDO Y DE LA TASA.

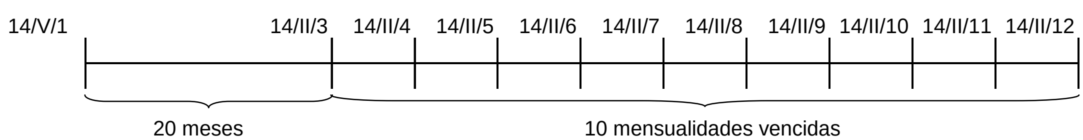
CALCULO DE LA ANUALIDAD

Para calcular las anualidades o el importe de las rentas diferidas que se pueden obtener, cuando se constituye un fondo de amortización se procede de la siguiente manera:

A continuación se cita el siguiente ejemplo:

Una persona deposita en un instrumento de inversión que paga el 17.52% de interés anual convertibles mensualmente, la cantidad de $10,000.00, con la finalidad de realizar diez retiros mensuales a partir del 14 de febrero ¿Cuál será el importe de cada retiro, si el deposito lo realiza el 14 de mayo del año uno?

Por lo tanto el diagrama de flujo queda:



A partir de que se realiza el depósito de $100,000.00 transcurre un periodo de 20 meses, para que se empiecen hacer retiros mensuales, durante 10 meses.

Se requiere el planteamiento de una ecuación de equivalencia, que sería la siguiente fórmula:

$$C = R \; \frac{[\,1 - (1+i)^{-n}\,]}{i} \; (1+i)^{-n}$$

Sustitución:

$$\underbrace{100{,}000 = R\,\frac{[\,1 - (\,1+0.01460\,)^{-10}}{0.01460}}_{1}\;\underbrace{(\,1+0.01460\,)^{-20}}_{2}$$

En donde (1) daría como resultado el valor actual de una renta vencida al 14 de enero del año 3, y esta cantidad multiplicada por (2) daría el valor actual al 14 de mayo del año 1, que es cuando se hizo el deposito. Por lo tanto esta expresión es equivalente a:

$$100{,}000\ (1+0.01460)^{-20} = R\,\frac{[\,1 - (\,1+0.01460\,)^{-10}\,]}{0.0146}$$

En donde el primer termino nos da el valor de la inversión al 14 de enero del año 3, y algebraicamente esta última expresión se obtiene multiplicando ambos términos de la primera expresión $(1.01460)^{20}$ [Para el segundo término, $(1.01460)^{-20} = (1.01460)^{0} = 1$] y,

$$100{,}000\ (1+0.01460)^{-20} = R\,\frac{[\,1 - (\,1+0.01460\,)^{-10}\,]}{0.0146}$$

$$100{,}000\ (1.336279) = R\ (9.241758) \text{ y}$$

$$R = \frac{100{,}000\ (\,1.336279\,)}{9.241758}$$

$$R = 14{,}459.14$$

Como resultado arroja, que los pagos deber ser de \$14,459.14 si se deposita \$100,000.00 el 14 de mayo del año 1 y se cobran 10 pagos a partir del 14 de febrero del año 3.

A continuación se desarrolla un segundo ejemplo:

El valor de contado de un mueble es de \$22,000.00. Sin embargo, se puede comprar a crédito realizando seis pagos bimestrales vencidos, con una tasa de interés del 4% bimestral, ¿Cuál será el importe de los pagos si el primero lo realiza seis meses después de su adquisición?

$$22{,}000 = C\ (1.04)^{-2} = R\,\frac{1 - (\,1.04)^{-6}}{0.04}$$

La cantidad de 22,000 multiplicado por 1.04 elevado a la segunda potencia positiva, representa el monto del término del segundo bimestre. Esta cantidad equivale al valor actual de los pagos bimestrales, planteado éstos como una anualidad vencida.

22,000 (1.0816) = R (5.242137)

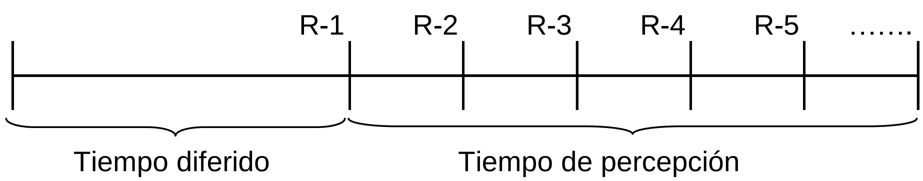
$$R \frac{22{,}000(1.0816)}{5.242137} = 4{,}539.22$$

Por lo tanto, el importe de $4,539.22 representa cada pago bimestral de las anualidades diferidas.

CALCULO DEL TIEMPO DE PERCEPCIÓN

Se llama tiempo de percepción al plazo durante el cual se reciben las anualidades que acumulan un determinado monto y se representa por el número de pagos que lo integran.

Por medio del siguiente diagrama de tiempo se puede comprender el tiempo de percepción.



A continuación se cita el siguiente ejemplo:

Un inversionista ha decidido realizar el dia de hoy un deposito en un instrumento financiero por la cantidad de $8,000.00, con la finalidad de efectuar retiros mensuales por $500.00 después de un semestre de realizado el deposito, ¿Cuántos retiros puede hacer si se toma en cuenta que el instrumento liquida intereses a razón del 26% anual convertibles mensualmente?

Datos:

C = 8,000.00

R = 500.00

i = 26% anual = 0.26 entre 12 por que se capitaliza mensualmente = 0.0217

k = Representa los periodos diferidos

n =?

La formula para resolver el problema planteado es la siguiente:

$$n = \frac{\log\left[\dfrac{1}{1-\dfrac{(C)(i)(1+i)^{k}}{R}}\right]}{\log(1+i)}$$

Sustitución:

$$n = \frac{\log\left[\dfrac{1}{1-\dfrac{(8{,}000)(0.0217)(1+0.0217)^{5}}{500}}\right]}{\log(1+0.0217)}$$

$$n = \frac{\log\left[\dfrac{1}{1-\dfrac{(8{,}000)(0.0217)(1.113312197)}{500}}\right]}{\log(1.0217)}$$

$$n = \frac{\log\left[\dfrac{1}{1-\dfrac{(8{,}000)(0.0217)(1.113312197)}{500}}\right]}{\log(1.0217)}$$

$$n = \frac{\log\left[\dfrac{1}{0.613458005}\right]}{\log(1.0217)}$$

$$n = \frac{\log(1.630103433)}{\log(1.0217)}$$

$$n = \frac{0.212215162}{0.009323393}$$

$$n = 22.76$$

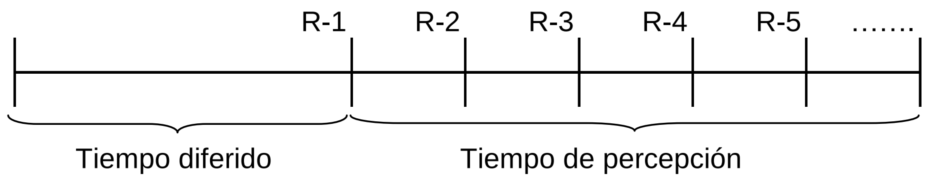
La respuesta matemática seria entonces 22.76 retiros que es equivalente a 22.76 meses que representa el tiempo de percepción.[16]

CÁLCULO DEL TIEMPO DIFERIDO

El tiempo diferido representa los periodos que se han aplazado antes de empezar a realizar el pago de las anualidades diferidas.

Por medio del siguiente diagrama de tiempo se puede comprender el tiempo diferido.

[16] Hernández Hernández Abraham. Matemáticas Financieras teoría y práctica, Quinta edición, Thomson.-2002 p. 397



Tomando como ejemplo el caso anterior se procederá al cálculo del tiempo diferido:

Datos.

C = 8,000.00

R = 500.00

i = 26% anual = 0.26 entre 12 por que se capitaliza mensualmente = 0.0217

k =?

n = 22.76

La formula para resolver el problema planteado es la siguiente:

$$k = \frac{Log \left(R \left(\frac{\frac{1-\left[\frac{1}{(1+i)^{n}}\right]}{i}}{C} \right) \right)}{Log \quad (1+i)}$$

Sustitución:

$$k = \frac{Log \left(500 \left(\frac{\frac{\left[1-\frac{1}{(1+0.0217)^{22.76}}\right]}{0.0217}}{8,000} \right) \right)}{Log \quad (1+0.0217)}$$

$$k = \frac{Log \left(500 \left(\frac{\frac{1-0.61347881}{0.0217}}{8,000} \right) \right)}{Log \quad (1.0217)}$$

$$k = \frac{Log \left(500 \left(\frac{\frac{0.386521189}{0.0217}}{8,000} \right) \right)}{Log \quad (1.0217)}$$

$$k = \frac{Log \left(500 \left(\frac{17.81203639}{8,000} \right) \right)}{Log \quad (1.0217)}$$

$$k = \frac{Log \left[500 \left[0.002226504 \right] \right]}{Log \quad (1.0217)}$$

$$k = \frac{Log \ 1.113252275}{Log \ (1.0217)}$$

$$k = \frac{0.046593591}{0.009323393}$$

$$k = 5$$

Por lo tanto el tanto, el resultado de *k* que equivale a 5, es el número de periodos diferidos.[17]

CÁLCULO DE LA TASA

Para encontrar el valor de la tasa en el planteamiento de un problema de anualidades ordinarias diferidas, se debe proceder a ensayar valores de *i,* hasta encontrar dos números entre los que se encuentre el resultado de dividir el monto entre la renta, y después aproximar *i*, mediante una interpolación lineal.[18]

A continuación se cita el siguiente ejemplo:

Una empresa contrae una deuda que asciende a la cantidad de \$25,000.00 y para liquidarla requiere hacer realizar cinco pagos mensuales de \$7,000.00 cada uno, difiriendo el primer pago 8 meses haber formalizado la operación ¿a que tasa de interés se pactó la deuda?

$$25{,}000(1+i)^{7} = 7{,}000 \; \frac{1-(1+i)^{-5}}{i}$$

$$\frac{1-(1+i)^{-5}}{i(1+i)^{7}} = \frac{25{,}000}{7{,}000} = 3.571429$$

Si la siguiente ecuación

$$\frac{1-(1+i)^{-5}}{i(1+i)^{7}}$$

Es igual a

[17] Hernández Hernández Abraham. Matemáticas Financieras teoría y práctica, Quinta edición, Thomson.-2002 p. 398

Si i = 0.05 = 3.076878
i = 0.04 = 3.383019
i = 0.03 = 3.723721
i = 0.035 = 3.548790
i = 0.034 = 3.583026

Se identifican los dos valores más cercanos y se procede ala interpolación.

0.034	i	0.035
3.583026	3.571429	3.548790

$$\frac{i - 0.034}{0.035 - 0.034} = \frac{3.571429 - 3{,}583026}{3.548790 - 3.583026} = 3.571429$$

$$\frac{i - 0.034}{0.001} = 0.338737$$

$$i = 0.034 + 0.338737(0.001)$$

$$i = 0.034339$$

$$25{,}000(1.034339)^{7} = 7000\,\frac{1 - (1.034339)^{-5}}{0.034339}$$

$$31{,}665.00 = 31{,}664.64$$

Por tal motivo la tasa de interés a la que se pacto la operación fue de 0.034339 multiplicado por 100 es igual a 3.43 % mensual aproximado.[19]

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Ensayo sobre la importancia que tiene el cálculo de la renta, el tiempo de percepción, el tiempo diferido y la tasa en la solución de problemas relacionados con las transacciones diferidas que realizan las diversas entidades.

[19] Díaz Mata Alfredo y Aguilera Gómez Víctor M. Matemáticas Financieras. McGraw Hill. 1999. pp 180-181

AUTOEVALUACIÓN.

1. ¿Cuánto se tendrá acumulado al final de tres años si se ha decido realizar depósitos mensuales de $4,500.00, a una tasa de interés del 24% anual convertibles mensualmente tomando en cuenta que el primer deposito se realiza tres meses después?
2. ¿Cuál será el valor acumulado en un plazo de 1.5 años si se ha decido realizar depósitos bimestrales de $10,000.00, a una tasa de interés del 36% anual convertibles bimestralmente tomando en cuenta que el primer deposito se realiza cuatro meses después?
3. ¿Cuál será el valor acumulado en un plazo de 2 años si se ha decido realizar depósitos cuatrimestrales de $8,000.00, a una tasa de interés del 18% anual convertibles cuatrimestralmente tomando en cuenta que el primer deposito se realiza un año después?
4. ¿Cuál será el valor actual de una renta semestral de $10,000.00, expuesto a una tasa de interés del 34% anual convertible semestralmente a un plazo de siete años, tomando en consideración que el primer deposito se realiza tres años después de pactada la operación?
5. Una persona desea saber el valor actual de una renta de $3,500.00 que se deposita cada tres meses durante el plazo de dos años a una tasa de interés del 48% anual convertibles trimestralmente, si el primer deposito lo realiza un año depuse.
6. Un instrumento bancario liquida el 9% de interés anual con periodos de capitalización mensual, si se decide hacer depósitos en ese instrumento la cantidad de $1,500.00 durante el plazo de 1.5 años, ¿Cuál será el valor actual si el primer deposito mensual se realiza tres meses después?
7. Si se deposita el día de hoy la cantidad de $8,000.00 en un instrumento financiero que rinde el 5% bimestral, con el objeto de retirar 6 importes bimestrales dentro de 14 meses, determinar el importe de cada retiro bimestral.

8. Si se deposita el día de hoy la cantidad de $40,000.00 en un instrumento financiero que rinde el 9% trimestral, con el objeto de retirar 3 importes trimestrales dentro de 5 trimestres, determinar el importe de cada retiro trimestral.
9. Si se deposita el día de hoy la cantidad de $60,000.00 en un instrumento financiero que rinde el 12% cuatrimestral, con el objeto de retirar 10 importes cuatrimestrales dentro de 28 meses, determinar el importe de cada retiro cuatrimestral.
10. El valor de contado de un mueble es de $12,500.00. Se tiene la opción de adquirirlo a crédito mediante 12 pagos mensuales, el primero de los cuales debe realizarse a 5 meses después de la adquisición. Tomando en cuanta un cargo por interés del 12% mensual ¿Cuál será el importe de cada pago?
11. El valor de contado de un artículo es de $4,000.00. Se tiene la opción de adquirirlo a crédito mediante 13 pagos mensuales, el primero de los cuales debe realizarse a 3 meses después de la adquisición. ¿Cuál será el importe de cada pago si el cargo por intereses es del 24% mensual?
12. El valor de contado de un artículo es de $3,900.00. Se tiene la opción de adquirirlo a crédito mediante 8 pagos mensuales, el primero de los cuales debe realizarse a 7 meses después de la adquisición. Tomando en cuanta un cargo por interés del 36% mensual ¿Cuál será el importe de cada pago?
13. Un inversionista decide depositar el dia de hoy el importe de $12,000.00 en una cuenta que rinde 12% anual convertible mensualmente, ¿si decide realizar retiros mensuales dentro de 5 meses de $1,000.00 cada uno, cuantos haría? Comprobar mediante formula el cálculo del tiempo diferido cuando se conoce el tiempo de percepción?
14. Una persona desea depositar el dia de hoy cantidades importe de $200,000.00 en una cuenta liquida el 18% anual convertibles bimestralmente, ¿Cuántos retiros bimestrales podría hacer, comenzando dentro de seis meses por un importe de $10,000.00 Comprobar mediante

formula el cálculo del tiempo diferido cuando se conoce el tiempo de percepción.

15. Si se depositan hoy la cantidad de $150,000.00 en una cuenta de inversiones que paga el 18% anual capitalizable semestralmente, ¿Cuántos retiros semestrales de $20,000.00 se podría hacer comenzando dentro de 2 años? ¿Comprobar mediante formula el cálculo del tiempo diferido cuando se conoce el tiempo de percepción?

RESPUESTAS.

1. 233,974.65
2. 114,913.16
3. 55,802.55
4. 23,851.42
5. 12,375.54
6. 25,206.41
7. 2,112.18
8. 14,516.28
9. 20,960.12
10. 1,155.70

UNIDAD 4.

ANUALIDADES ANTICIPADAS

OBJETIVO.

Conocer y explicar el concepto de anualidades anticipadas, identificar la solución problemas donde interviene este tipo de anualidades, y resolver situaciones relacionados con el cálculo de la anualidad, tiempo y tasa.

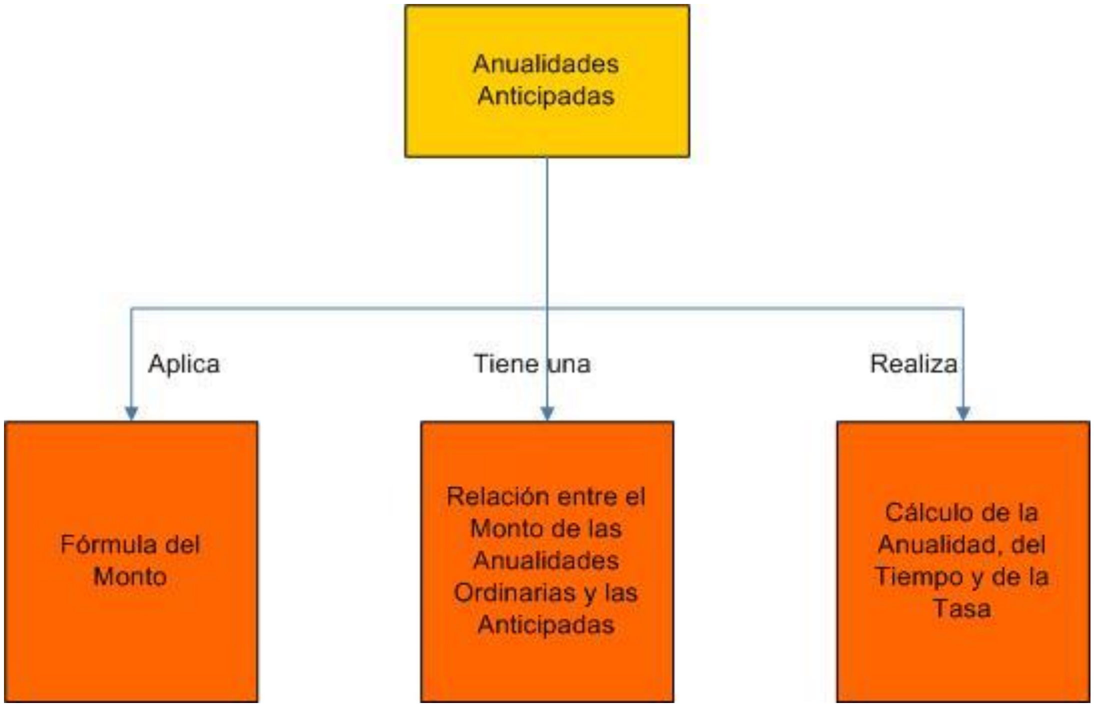
TEMARIO

4.1 FÓRMULA DEL MONTO.

4.2 RELACIÓN ENTRE EL MONTO DE LAS ANUALIDADES ORDINARIAS Y LAS ANTICIPADAS.

4.3 CÁLCULO DE LA ANUALIDAD, TIEMPO Y DE LA TASA.

MAPA CONCEPTUAL



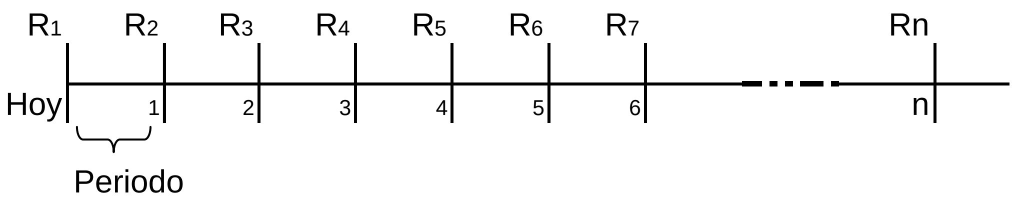
INTRODUCCIÓN

En el desarrollo de esta unidad se identificará y se aplicara la fórmula del monto de las anualidades anticipadas; se establecerá la relación que existe entre el monto de las anualidades ordinarias y el monto relacionado con las anualidades anticipadas; así como también se identificarán las formulas que se requieren para el cálculo de las anualidades, para calcular el tiempo y para poder conocer la tasa de interés, en el planteamiento de problemas que enfrentan las empresas por las operaciones que realizan donde interviene este tipo de anualidades.

4.1 FÓRMULA DEL MONTO

Una anualidad anticipada es aquella cuando los pagos se llevan a cabo al inicio de cada periodo. Para poder calcular el monto de una anualidad anticipada, a cada renta se le agregan los intereses que se generen entre la fecha del pago y el plazo. Este tipo de anualidades es común en transacciones como pagos de primas de seguros, los pagos por alquiler de un departamento, entre otros.

En una gráfica de tiempo se puede observar la forma de pago de cada renta.



La fórmula básica que se utiliza para determinar el valor del monto o la suma de un conjunto de pagos en una anualidad anticipada es la siguiente:

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right]$$

Al llevarse a cabo los pagos al inicio del periodo el ultimo que se realiza ya no genera intereses por eso se eleva n + 1, pero este último pago no esta incluido en una anualidad anticipada y además, esta reflejado a su valor real en esa fecha, por lo tanto, se debe de restar al factor de acumulación para encontrar el valor que se busca.[20]

A continuación se cita el siguiente ejemplo:

Un inversionista realiza un depósito de un instrumento de inversión la la cantidad de $250.00 al inicio de cada mes. Si la inversión paga el1.3% de interés mensual ¿Cuánto habrá acumulado durante el primer año?

Fórmula:

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right]$$

Sustitución:

[20] Villalobos José Luis. Matemáticas Financieras. Prentice Hall. 2007. p. 233

$$M = 250\left[\frac{(1.013)^{12+1} - 1}{0.013} - 1\right]$$

$$M = 250\left[\frac{(1.013)^{13} - 1}{0.013} - 1\right]$$

$$M = 250\left[\frac{1.182831249 - 1}{0.013} - 1\right]$$

$$M = 250\left[\frac{0.182831249}{0.013} - 1\right]$$

$$M = 250\left[14.06394226 - 1\right]$$

$$M = 250\left[13.06394226\right]$$

$$M = 3{,}265.99$$

La cantidad de $3,265.99 representa el monto de una serie de pagos realizados a inicio de cada periodo durante el plazo de 12 meses.

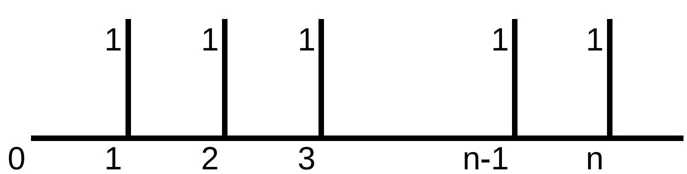
ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Ensayo sobre la aplicación de las anualidades anticipadas en el campo de las finanzas.

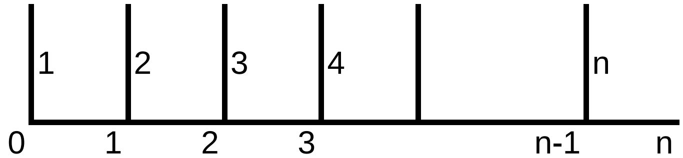
4.2 RELACIÓN ENTRE LAS ANUALIDADES ORDINARIAS Y LAS ANTICIPADAS.

La relación entre una anualidad ordinaria y una anualidad anticipada, se puede comprender a través de las siguientes ilustraciones.

Con la finalidad de facilitar el entendimiento se parte del pago que se halla en “n” periodo y luego se continua don el pago n-1 y de manera secuencial se continua hasta llegar al pago del periodo 1.



En el caso de una anualidad anticipada en valor final, el esquema que señala el flujo de efectivo se observa a continuación.



El esquema anterior refleja en la parte de arriba de la línea de tiempo el número de pagos y en la parte de abajo señala el periodo, de tal manera que el pago uno se realiza al final del periodo 1, y que a la vez representa el inicio del periodo 2, hasta finalizar con el pago n en el periodo n-1, que representa el inicio del periodo n.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Ensayo sobre la relación que existe entre las anualidades ordinarias y las anualidades anticipadas.

4.3 CÁLCULO DE LA ANUALIDAD, DEL TIEMPO Y DE LA TASA

CÁLCULO DE LA ANUALIDAD

El cálculo de la anualidad representa determinar el importe de los pagos o la renta que es necesario realizar en periodos de tiempo definidos a una tasa de interés determinada y a un plazo estipulado para acumular una cantidad de dinero, donde el inicio de los pagos comienzan al inicio de cada periodo.

Para realizar el cálculo de las anualidades, en el planteamiento de un problema que involucra a las anualidades anticipadas utiliza la fórmula de las anualidades ordinarias, como en el caso de compras en abonos.

A continuación se cita el siguiente ejemplo.

Un deudor debe liquidar la cantidad de $90,000.00 dentro del plazo de 2 años, y para acumular esa cantidad de dinero debe llevar a cabo 12 depósitos bimestrales en un instrumento financiero que paga el 4.2% de interés bimestral ¿Cuál será el importe de cada uno de los depósitos si hoy lleva a cabo el primero?.

Fórmula:

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right]$$

Solución:

Despejar R:

$$R = \frac{M}{\left[\dfrac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right]}$$

$$R = \frac{90{,}000}{\left[\dfrac{(1+0.042)^{12+1} - 1}{0.042} - 1\right]}$$

$$R = \frac{90{,}000}{\left[\dfrac{(1.042)^{13} - 1}{0.042} - 1\right]}$$

$$R = \frac{90{,}000}{\left[\dfrac{1.707184058 - 1}{0.042} - 1\right]}$$

$$R = \frac{90{,}000}{\left[\dfrac{0.707184058}{0.042} - 1\right]}$$

$$R = \frac{90{,}000}{16.83771566 - 1}$$

$$R = \frac{90{,}000}{15.83771566}$$

$$R = 5{,}682.64$$

La cantidad de $5,682.64 representa el valor de cada anualidad para acumular la cantidad deseada para liquidar la deuda.

CÁLCULO DEL TIEMPO

Una persona desea acumular la cantidad de $3,265.99, por lo que, ha decidido depositar en una cuenta de ahorros la cantidad de $250.00 al inicio de cada mes. Si la cuenta rinde el 1.3% mensual ¿En cuánto tiempo reunirá la cantidad deseada?

Datos.

M = 3,265.99

R = 250

i = .013 mensual

n =?

Solución:

A partir de la fórmula básica se despeja *n*.

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right]$$

$$n = \left(\frac{\log\left[\left[\left(\frac{M}{R} + 1\right) i\right] + 1\right]}{\log(1+i)}\right) - 1$$

$$n = \left(\frac{\log\left[\left[\left(\frac{3,265.99}{250} + 1\right) 0.013\right] + 1\right]}{\log(1+0.013)}\right) - 1$$

$$n = \left(\frac{\log\left[(13.06396 + 1)(0.013)\right] + 1}{\log(1.013)}\right) - 1$$

$$n = \left(\frac{\log\left[(14.06396)(0.013)\right] + 1}{\log(1.013)}\right) - 1$$

$$n = \left(\frac{\log(0.18283148 + 1)}{\log(1.013)}\right) - 1$$

$$n = \left(\frac{\log(0.18283148 + 1)}{\log(1.013)}\right) - 1$$

$$n = \left(\frac{\log(1.18283148)}{\log(1.013)}\right) - 1$$

$$n = \left(\frac{0.072922874}{0.005609445}\right) - 1$$

$$n = 12$$

Para reunir la cantidad deseada el tiempo será de 12 meses, en razón de que los depósitos serán mensuales.

CÁLCULO DE LA TASA

Para encontrar el valor de la tasa en el planteamiento de un problema de anualidades anticipadas , se debe proceder a ensayar valores de *i,* hasta encontrar dos números entre los que se encuentre el resultado de dividir el monto entre la renta, y después aproximar *i*, mediante una interpolación.[21]

A continuación se cita el siguiente ejemplo:

Una persona necesita acumular la cantidad de $200,00.00 y tiene estimado realizar 15 depósitos cada fin de año por un importe de $800.00 cada uno, ¿a que tasa deberá de realizarse cada uno de los depósitos para acumular la cantidad deseada?

Datos:

M = 200,000

R = 800

n = 15

i = ?

Fórmula:

$$M = R\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right]$$

Solución:

$$200{,}000 = 800\left(\frac{(1+i)^{16} - 1}{i} - 1\right)$$

$$\frac{200000}{800} + 1 = \frac{(1+i)^{16} - 1}{i}$$

$$251 = \frac{(1+i)^{16} - 1}{i}$$

Ensayando valores:

Si $i = 0.30$

$$\frac{(1+i)^{16} - 1}{i} = 218.4722031$$

Se determina el valor de *i* mediante un proceso de interpolación cuyo primer paso consiste en aproximarla mediante ensayos:

[21] Díaz Mata Alfredo y Aguilera Gómez Víctor M. Matemáticas Financieras. McGraw Hill. 1999. p. 165.

si i = 0.30 = 218.4722031

si i = 0.35 = 344.8969512
si i = 0.32 = 262.3556798
si i = 0.31 = 239.4234901
si i = 0.315 = 250.631167
si i = 0.3155 = 251.7799928
si i = 0.3152 = 251.090076
si i = 0.31515 = 250.9752711
si i = 0.31516 = 250.998228
si i = 0.315161 = 251.0005238
si i = 0.3151605 = 250.9993759
si i = 0.3151608 = 251.0000646
si i = 0.31516075 = 250.9999498

Interpolando

0.31516075 i 0.31516080

250.9999498 *251* 251.0000646

$$\frac{i - 0.31516075}{0.31516080 - 0.31516075} = \frac{251 - 250.9999498}{251.0000646 - 250.9999498}$$

$$\frac{i - 0.31516075}{0.00000005} = \frac{0.0000502}{0.0001148} = 0.43728223$$

i = 0.31516075 = 0.43728223 (0.00000005) =0.00000002
i = 0.31516075 = 0.00000002
i = 0.31516077

Aproximadamente al 31.52% anual, haciendo la verificación tenemos lo siguiente:

$$800\left(\frac{(1.31516077)^{16}-1}{0.31516077} \quad -1\right) = 200{,}000$$

Aplicando el valor determinado llegamos al resultado esperado.[22]

[22] Díaz Mata Alfredo y Aguilera Gómez Víctor M. Matemáticas Financieras. McGraw Hill. 1999. pp. 165-167

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE.

Ensayo sobre la importancia del cálculo de la anualidad, tiempo y tasa en la solución de problemas relacionado con anualidades anticipadas.

AUTOEVALUACIÓN.

1. Una persona deposita al inicio de cada semestre la cantidad de \$20,000.00, en un instrumento de inversión que rinde el 18% de interés anual convertible semestralmente ¿Cuánto habrá ahorrado al final de los tres años?

2. Un inversionista ahorra la cantidad de \$10,000.00 al inicio de cada bimestre en una cuenta que paga el 24% de interés anual convertible bimestralmente ¿Cuánto habrá ahorrado al final de los 2.5 años?

3. calcular el monto de 40 pagos trimestrales anticipados de \$350.00 si el interés es del 36% anual convertible trimestralmente.

4. Un deudor debe de cubrir la cantidad de \$50,000.00 en el plazo de un año, por lo que para acumular dicha cantidad debe realizar 12 depósitos mensuales en un instrumento bancario que liquida el 36% de interés anual convertibles cada mes, calcular el importe de cada depósito tomando en consideración que hoy lleva a cabo el primero.

5. Una persona contrajo una deuda y debe liquidar la cantidad de \$300,000.00 dentro de un plazo de cinco años, y con la finalidad de contar con esa cantidad decide realizar 10 depósitos cuatrimestrales en instrumento bancario que liquida el 12% de interés anual convertible cuatrimestralmente. ¿Cuál será el importe de cada uno de los depósitos si hoy decide realizar el primero.

6. Una persona dentro de ocho meses tiene el compromiso de liquidar una cuenta por el monto de \$25,000.00 y con la finalidad de cumplir con el compromiso contraído, ha decidido llevar a cabo ocho depósitos mensuales en una cuenta bancaria que permite la generación de intereses

del 48% anual convertibles mensualmente. ¿Cuánto deberá de depositar cada uno de los siguientes meses si hoy realiza el primer depósito?.

7. Un grupo de estudiantes requieren reunir para realizar un viaje la cantidad de $90,000.00 y han decidido depositar cada dos meses un importe de $5,682.64, si existe una institución que paga el 4.2% de interés bimestral Si hoy llevan a cabo el primer depósito ¿En que plazo podrán reunir la cantidad deseada?

8. ¿Cuánto tiempo se necesita para acumular la cantidad de $50,000.00, haciendo depósitos mensuales de $2,500.00 en un instrumento bancario que rinde el 2% de interés mensual, si hoy se realiza el primer depósito?

9. Una persona desea acumular la cantidad de $35,000.00 y para reunir esa cantidad decide realizar depósitos mensuales de $1,500.00 en una cuenta de inversión que rinde 4.5% mensual de interés. ¿En cuánto tiempo reunirá la cantidad deseada si hoy realiza el primero?

RESPUESTAS.

1. \$164,008.69
2. \$208,245.31
3. \$128,902.15
4. \$3,420.49
5. \$24,026.23
6. \$2,608.84
7. 12 bimestres o 2 años
8. 16.71 meses
9. 15.80 meses

UNIDAD 5.

VALOR PRESENTE DE ANUALIDADES ANTICIPADAS

OBJETIVO.

Determinar la aplicación de erogaciones y establecer las reglas particulares aplicables a los pagos anticipados.

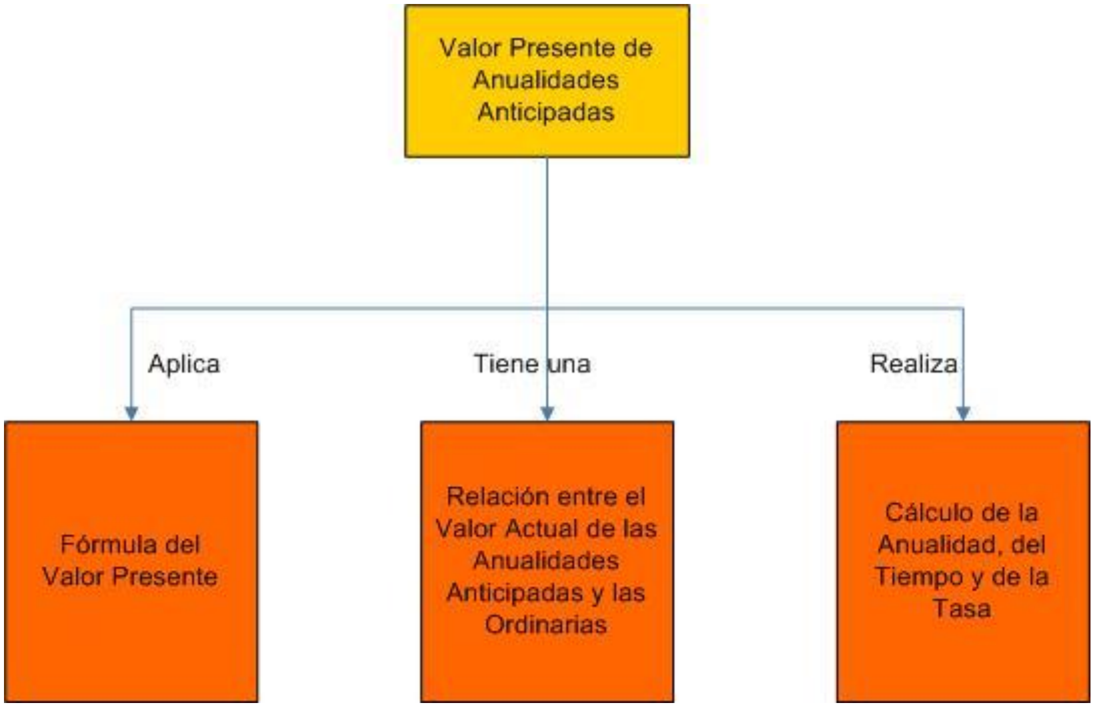
TEMARIO

5.1 Fórmula del valor presente.

5.2 Relación entre el valor actual de las anualidades anticipadas y de las ordinarias.

5.3 Cálculo de la anualidad, del tiempo y de la tasa.

MAPA CONCEPTUAL



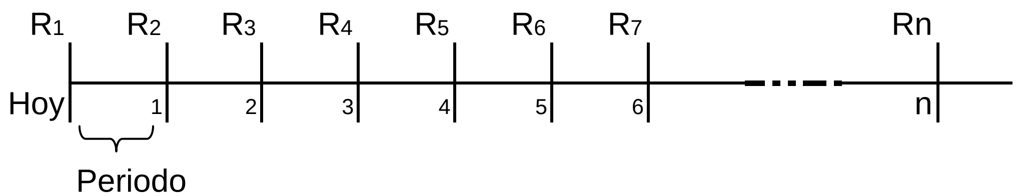
INTRODUCCIÓN

En esta unidad estudiaremos el valor presente de las anualidades anticipadas, se identificará la formula básica que permita dar solución a los problemas financieros relacionados con este tipo de anualidades; se establecerá la relación que existe entre el valor actual de las anualidades anticipadas y de las ordinarias; así también se analizaran las diversas situaciones que tienen que ver con el cálculo de la anualidad, del tiempo y de la tasa para poder resolver situaciones que enfrentan las diversas entidades como personas físicas y personas morales.

5.1 FÓRMULA DEL VALOR PRESENTE

El valor presente, representa el valor al momento de realizada la operación del conjunto de pagos a realizar en el futuro al inicio de cada periodo de tiempo estipulado, a una determinada tasa de interés compuesto.

En una gráfica de tiempo se puede observar la forma de pago de cada renta y el valor presente lo podemos calcular en el momento de realizada la operación.



La fórmula básica que se utiliza para determinar el valor del monto o la suma de un conjunto de pagos en una anualidad anticipada es la siguiente:

$$C = R\left(1 + \frac{1 - (1+i)^{-n+1}}{i}\right)$$

Considerando una tasa de interés anual del 15.60% capitalizable mensualmente de ¿cuanto será una renta anual anticipada, equivalente a una renta mensual anticipado de $2,500.00?

Datos:

C = ?

R = 2,750

i = 0.1560 anual entre 12 es igual a .013 mensual.

n = 12

Fórmula:

$$C = R\left(1 + \frac{1 - (1+i)^{-n+1}}{i}\right)$$

Sustitución:

$$C = 2,750\left(1 + \frac{1 - (1 + 0.013)^{-12+1}}{0.013}\right)$$

$$C = 2,750\left(1 + \frac{1 - (1.013)^{-11}}{0.013}\right)$$

$$C = 2{,}750\left(1 + \frac{1 - (0.86755317)}{0.013}\right)$$

$$C = 2{,}750\left(1 + \frac{0.13244683}{0.013}\right)$$

C = 2,750 (1 + 10.18821769)

C = 2,750 (11.18821769)

C = 30,767.60

Por lo tanto el valor actual de un año de renta con anualidades anticipadas de $2,750, es equivalente a la cantidad de $30,767.60 al día de la operación.[23]

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Ensayo sobre la importancia del valor presente de las anualidades anticipadas en el campo de las finanzas.

5.2 RELACIÓN ENTRE EL VALOR ACTUAL DE LAS ANUALIDADES ANTICIPADAS Y LAS ORDINARIAS.

La relación que existe entre el valor actual de una anualidad anticipada y una ordinaria, es que el monto de la ultima anualidad ordinaria es R, mientras que la ultima anualidad anticipada se convierte en un monto de: R (1 + i). Es decir. El monto de las anualidades ordinarias es igual al valor actual en un periodo, del monto de las anualidades anticipadas.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Ensayo sobre la relación que existe entre el valor actual de las anualidades anticipadas y las anualidades ordinarias.

[23] Díaz Mata Alfredo y Aguilera Gómez Víctor M. Matemáticas Financieras. McGraw Hill. 1999. pp. 159-160

5.3 CÁLCULO DE LA ANUALIDAD, DEL TIEMPO Y DE LA TASA

CÁLCULO DE LA ANUALIDAD

El cálculo de la anualidad representa determinar el importe de los pagos o la renta que es necesario realizar en periodos de tiempo definidos a una tasa de interés determinada y a un plazo estipulado para acumular una cantidad de dinero, donde el inicio de los pagos comienzan al inicio de cada periodo.

Para realizar el cálculo de las anualidades, en el planteamiento de un problema que involucra a las anualidades anticipadas utiliza la fórmula de las anualidades ordinarias, como en el caso de compras en abonos.

A continuación se cita el siguiente ejemplo.

Una empresa comercial vende un artículo electrónico con un valor de \$1,800.00 de contado o en abonos mediante la realización de 5 pagos abonos mensuales anticipados. Tomando en consideración una tasa de 32.4% de interés anualizada capitalizable cada mes , ¿A cuanto ascenderá cada pago?

Formula:

$$C = R\left[1 + \frac{[\,1 - (1+i)^{-n+1}\,]}{i}\right]$$

Solución:

Se despeja R

$$R = \frac{1{,}800}{\left[1 + \frac{[\,1 - (1+0.027)^{-5+1}\,]}{0.027}\right]}$$

$$R = \frac{1{,}800}{\left[1 + \frac{[\,1 - (1.027)^{-4}\,]}{0.027}\right]}$$

$$R = \frac{1{,}800}{\left[1 + \frac{[\,1 - 0.898914168\,]}{0.027}\right]}$$

$$R = \frac{1{,}800}{\left[1 + \frac{[\,0.101085831\,]}{0.027}\right]}$$

$$R = \frac{1{,}800}{1 + 3.743919695}$$

$$R = \frac{1{,}800}{4.743919695}$$

$$R = 379.43$$

Si el producto se desea adquirir en abonos las anualidades al inicio de cada mes serían de $379.43

CÁLCULO DEL TIEMPO

Un articulo electrodoméstico tiene un valor de $4,600.00 de contado y existe la opción de pagarlo en parcialidades mensuales anticipados de $511.69, a una tasa del 29.40% de interés anual capitalizable mensualmente. Si decidimos liquidarlo en parcialidades ¿Cuánto pagos se necesitan para liquidar en su totalidad el producto antes señalado?

El planteamiento de este problema se resuelve con la formula de valor actual de anualidades anticipadas.

Solución:

$$C = R\left[1 + \frac{[\,1 - (1+i)^{-n+1}\,]}{i}\right]$$

$$C / R = \left[1 + \frac{[\,1 - (1+i)^{-n+1}\,]}{i}\right]$$

$$C / R - 1 = \frac{[\,1 - (1+i)^{-n+1}\,]}{i}$$

$$(C / R - 1)\, i = 1 - (1+i)^{-n+1} = (Ci / R) - i$$

$$-(1 + i)^{-n+1} = (Ci / r) - i - 1$$

$$(1 + i)^{-n+1} = 1 + i - (Ci / R)$$

$$(-n + 1) \log (1 + i) = \log (1 + i - Ci / R)$$

$$-n + 1 = \frac{\log [1 + i - (Ci / R)\,]}{\log (1 + i)}$$

$$n - 1 = -\frac{\log [1 + i - (Ci / R)\,]}{\log (1 + i)}$$

Fórmula par determinar el número de pagos:

$$n = 1 - \frac{\log [1 + i - (Ci / R)\,]}{\log (1 + i)}$$

$$n = 1 - \frac{\log [1 + (0.294/12) - ((4{,}600)(0.294/12)) / 511.69]}{\log (1 + (0.294/12))}$$

$$n = 1 - \frac{\log [1 + (0.0245) - ((4{,}600)(0.0245)) / 511.69]}{\log (1 + (0.0245))}$$

$$n = 1 - \frac{\log [1.0245 - ((4{,}600)(0.0245)) / 511.69]}{\log (1 + (0.0245))}$$

$$n = 1 - \frac{\log [1.0245 - (112.70 / 511.69)]}{\log (1.0245)}$$

$$n = 1 - \frac{\log [1.0245 - 0.2202150542]}{\log (1.0245)}$$

$$n = 1 - \frac{\log (0.804249457)}{\log (1.0245)}$$

$$n = 1 - \frac{-0.094609223}{0.010511962}$$

$$n = 1+9.000148878$$

$$n = 10$$

Por tanto, se tiene que realizar 10 pagos mensuales para liquidar el valor del artículo.

CÁLCULO DE LA TASA

Para encontrar el valor de la tasa en el planteamiento de un problema de anualidades anticipadas , se debe proceder a ensayar valores de *i,* hasta encontrar dos números entre los que se encuentre el resultado de dividir el monto entre la renta, y después aproximar *i*, mediante una interpolación.[24]

A continuación se cita el siguiente ejemplo:

[24] Díaz Mata Alfredo y Aguilera Gómez Víctor M. Matemáticas Financieras. McGraw Hill. 1999. p. 165.

¿Cuál será la tasa de interés anual que para seis depósitos anuales realizados a la inicio de cada periodo por la cantidad de $25,000.00 que sea equivalente al valor presente o actual de un monto de $75,000.00

Datos:

C = 75,000

R = 25,000

n = 6

i =?

Fórmula:

$$C = R\left[1 + \frac{[\,1 - (1+i)^{-n+1}\,]}{i}\right]$$

Sustitución:

$$75{,}000 = 25{,}000\left[1 + \frac{[\,1 - (1+i)^{-6+1}\,]}{i}\right]$$

$$\frac{75{,}000}{25{,}000} - 1 = \frac{1 - (1+i)^{-6+1}}{i}$$

$$2 = \frac{1 - (1+i)^{-5}}{i}$$

Se determina el valor de *i* mediante un proceso de interpolación cuyo primer paso consiste en aproximarla mediante ensayos:

Si *i* = 0.50 $\quad \dfrac{1 - (1+i)^{-5}}{i} = 1.73662551$

i = 0.40 = 2.03516392
i = 0.410 = 2.00138079
i = 0.411 = 1.99805612
i = 0.4105 = 1.99971725

Interpolando

2.00138079	2	1.99971725
0.4100	*i*	0.4105

$$\frac{i - 0.4100}{0.4105 - 0.4100} = \frac{2 - 2.00138079}{1.99971725 - 2.00138079}$$

$$\frac{i - 0.4100}{0.0005} = \frac{-0.00138079}{-0.00166354} = 0.83003114$$

$$-0.4100 = 0.83003114\,(0.0005) = 0.83003114$$

$$i = 0.41041502$$

Aproximadamente al 41.04% anual.[25]

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE.

Ensayo sobre la importancia del cálculo de la anualidad, tiempo y tasa en la solución de problemas relacionado con el valor presente de anualidades anticipadas.

[25] Díaz Mata Alfredo y Aguilera Gómez Víctor M. Matemáticas Financieras. McGraw Hill. 1999. p. 165.

AUTOEVALUACIÓN.

1. Una empresa comercial vende un artículo electrónico con un valor de \$5,000.00 de contado o en abonos mediante la realización de 12 abonos mensuales anticipados. Tomando la segunda opción ¿Cuál será el importe de cada pago, tomando en cuenta una tasa del 24% de interés anual con periodos de capitalización mensual?

2. Una empresa comercial vende un artículo electrónico con un valor de \$12,000.00 de contado o en abonos mediante la realización de 6 pagos bimestrales anticipados. Si el interés es del 18% anual convertible bimestralmente, ¿Cuál será el valor de cada uno de los pagos?

3. Una empresa vende un aparato electrodoméstico con un valor de \$8,500.00 de Contado o en abonos mediante la realización de 8 pagos mensuales anticipados. Si se decide liquidarlo mediante abonos anticipados mensuales a una tasa del 9% interés anual capitalizable mensualmente, determinar el importe de cada pago a realizar.

4. Una empresa comercial se vende un artículo electrónico con un valor de \$1,800.00 de contado o mediante la realización de pagos mensuales anticipados de \$379.43 Si el interés es del 32.4% anual convertible mensualmente, ¿Cuántos pagos es necesario realizar?

5. Una empresa comercial se vende un artículo electrónico con un valor de \$10,500.00 de contado o mediante la realización de pagos mensuales anticipados de \$947.99 Si el interés es del 18% anual convertible mensualmente, ¿Cuántos pagos es necesario realizar?

6. Una empresa comercial se vende un artículo electrónico con un valor de \$8,700.00 de contado o mediante la realización de pagos mensuales

anticipados de $436.75 Si el interés es del 24% anual convertible mensualmente, ¿Cuántos pagos es necesario realizar?

RESPUESTAS.

1. $463.53
2. $1,170.43
3. $1,090.49
4. 5 pagos mensuales
5. 12 pagos mensuales
6. 25 pagos mensuales

UNIDAD 6.

GRADIENTES Y APLICACIONES

OBJETIVO.

Identificar y aplicar los diversos instrumentos que cuentan las empresas en la solución de problemas financieros.

TEMARIO

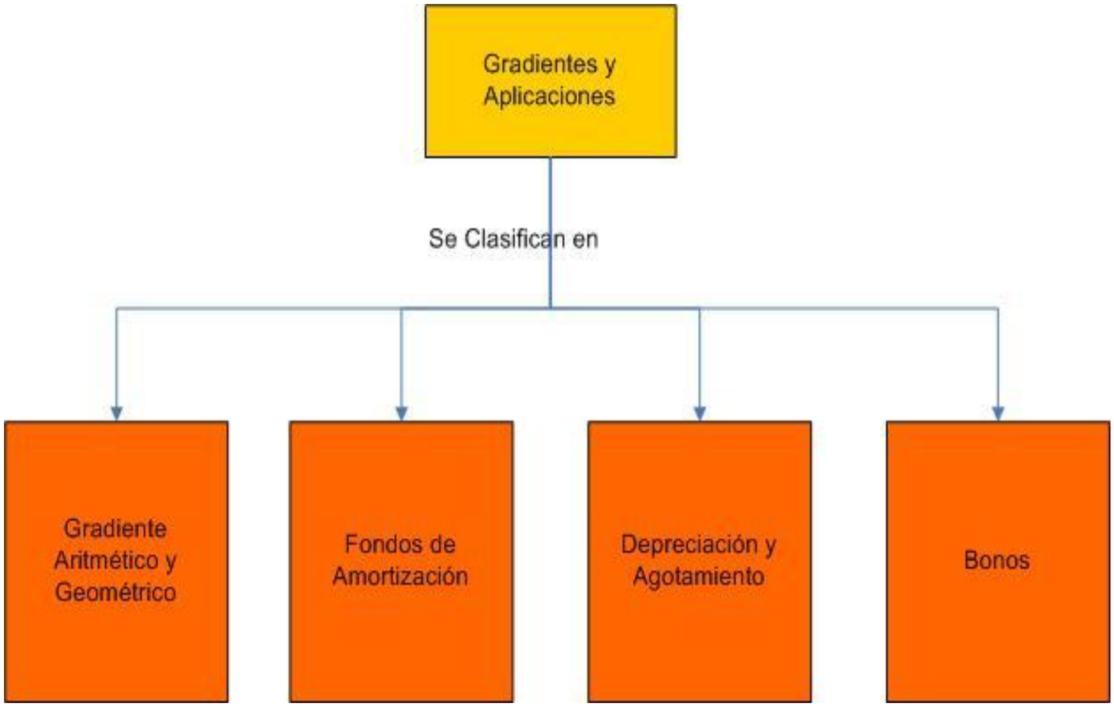
6.1 Gradiente aritmético y geométrico.

6.2 Fondos de amortización.

6.3 Depreciación y agotamiento.

6.4 Bonos.

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

Por medio del presente capitulo abordaremos los temas como gradientes aritmético y geométrico; se trataran la constitución de fondos de amortización para la extinción de obligaciones derivados en la obtención financiamiento, se desarrollara los métodos mas usuales para establecer fondos que tengan como prioridad la reposición de activos mediante la depreciación de los activos fijos, así como el proceso de agotamiento en aquellos recursos no renovables y se abordaran el tema de bonos como instrumentos de financiamiento para las empresas.

6.1 GRADIENTE ARITMÉTICO Y GEOMÉTRICO.

Se denomina gradiente a una serie de flujos de caja (ingresos o desembolsos) periódicos que poseen una ley de formación, que hace referencia a que los flujos de caja pueden incrementar o disminuir, con relación al flujo de caja anterior, en una cantidad constante en pesos o en un porcentaje.

Para que una serie de flujos de caja se consideren un gradiente, deben cumplir las siguientes condiciones:

Los flujos de caja deben tener una ley de formación.

Los flujos de caja deben ser periódicos

Los flujos de caja deben tener un valor un valor presente y futuro equivalente.

La cantidad de periodos deben ser iguales a la cantidad de flujos de caja.

Cuando los flujos de caja crecen en una cantidad fija periódicamente, se presenta un gradiente lineal creciente vencido, sí los flujos de caja se pagan al final de cada periodo. Si los flujos de caja ocurren al comienzo de cada período se está frente a un gradiente lineal creciente anticipado. Si el primer flujo se posterga en el tiempo, se presenta un gradiente lineal creciente diferido. Las combinaciones anteriores también se presentan para el gradiente lineal decreciente.

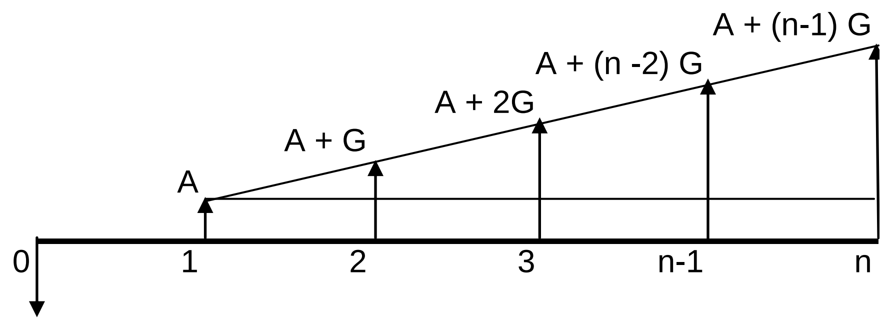
En el caso en que los flujos de caja aumenten en cada período en un porcentaje y se realizan al final de cada período se tiene un gradiente geométrico creciente vencido, y si los flujos ocurren al inicio de cada período, se tiene un gradiente geométrico creciente anticipado. Se tendrá un gradiente geométrico creciente diferido, si los flujos se presentan en períodos posteriores a la fecha de realizada la operación financiera. Lo anterior ocurre con el gradiente geométrico decreciente.

GRADIENTE ARITMETICO O LINEAL

Es la serie de flujos de caja periódicos, en la cual cada flujo es igual al anterior incrementado o disminuido en una cantidad constante en pesos y se simboliza con la letra G y se le denomina variación constante. Cuando la variación constante es positiva, se genera el gradiente aritmético creciente.

Cuando la variación constante es negativa, se genera el gradiente aritmético decreciente.

El valor presente de un gradiente aritmético o lineal creciente. Consiste en conocer del valor actual en un momento indicado en una línea de tiempo, de un conjunto de pagos que se dan en periodos futuros y que en cada pago se incrementa de manera constante, ese incremento se representa con la letra (G).de gradiente.



$P_{TG} = P_A + P_G$

El importe de cada pago representa la base en una serie gradientes y se ubica después del periodo cero, toda vez, que en este punto del cero es donde se ubica el valor presente de las anualidades futuras que se van incrementando, el cual se representa con la letra (A) de las anualidades, y se determina a través de la siguiente manera:

PTG = PA + PG

Donde:

PTG = Valor presente de la serie gradiente .

PA = Valor presente de la base o la anualidad.

PG = Valor presente del gradiente

En la línea de tiempo se puede apreciar el crecimiento o gradiente (G), el cual se da después un periodo después de haber realizado la primera anualidad y se puede calcular a través de la siguiente fórmula.

$$P_{TG} = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^{n}}\right]$$

Para determinar el valor de una anualidad en una serie gradiente aritmética creciente se utiliza la siguiente fórmula:

CUOTA n = $A + (n - 1)G$

Donde:

Cuota = Valor de la cuota n de la serie gradiente.

A = Valor de la base.

n = Número de anualidades .

G = Gradiente.

A continuación se cita el siguiente ejemplo:

¿Cuál será el valor presente de un equipo industrial, que se cancela mediante la cantidad de 18 pagos cada mes, tomando en cuanto que dicho valor del equipo se incrementa mensualmente en \$ 30,000.00 y el importe del primer pago es de \$220,000.00, a una tasa del 3.5% de interés mensual?

Datos

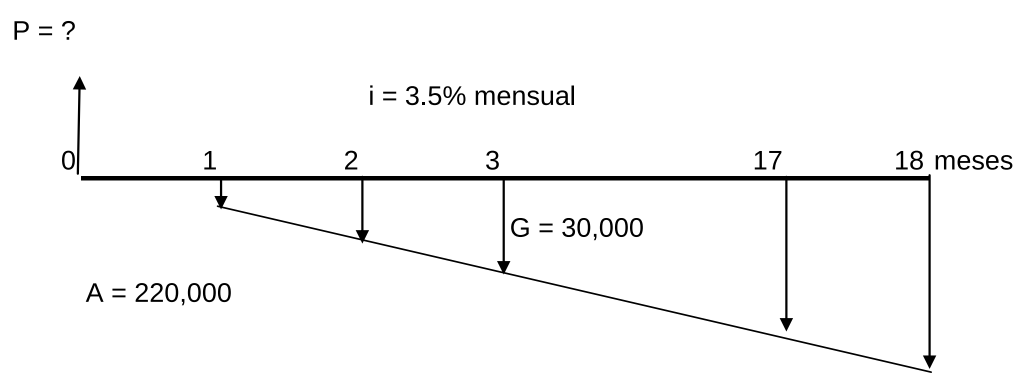
PTG=?

i = 3.5% mensual

n = 18 meses

G = 30,000

A = 220,000



$$P_{TG} = 220{,}000 \left(\frac{1-(1+0.035)^{-18}}{0.035} \right) + \frac{30{,}000}{0.035} \left(\frac{1-(1+0.035)^{-18}}{0.035} - \frac{18}{(1+0.035)^{18}} \right)$$

$$P_{TG} = 220{,}000 \left(\frac{0.46163886}{0.035} \right) + \frac{30{,}000}{0.035} \left(\frac{0.46163886}{0.035} - \frac{18}{1.857489195} \right)$$

$$P_{TG} = 220000 \left[13.18968171 \right] + 857142.8571 \left[3.499181195 \right]$$

$$P_{TG} = 2{,}901{,}729.97 + 2{,}999{,}298.17$$

$$P_{TG} = 5{,}901{,}028.15$$

La cantidad de $5, 901,028.15, representa al valor del torno al finalizar el plazo de 18 meses. Y representa una serie gradiente vencida.

Del ejercicio planteado, se pide calcular la cuota del mes número 12, misma que se puede obtener utilizando la fórmula:

$$Cuota_n = A + (n-1)G$$

Datos:

Cuota = ?

A = 220,000

n = 12

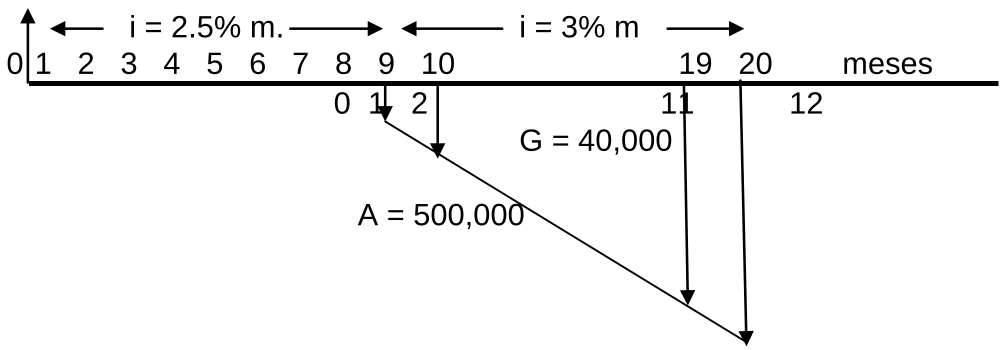
G = 30,000

$$Cuota_{12} = 220{,}000 + (12-1)\,30{,}000$$

$$Cuota_{12} = 550{,}000$$

La cantidad de $550,000, representa el importe del mes numero 12.

Un préstamo que se obtuvo, se empieza a liquidar 9 meses después de la haberlo recibido, realizando el primer pago por $500,000.00 y que cada uno de los meses siguientes aumentará la cantidad de $40,000.00, se pide determinar el valor presente del préstamo, tomando en consideración que los primeros nueves meses la tasa era del 2.5% mensual y después del noveno mes la tasa es del 3% de interés mensual.



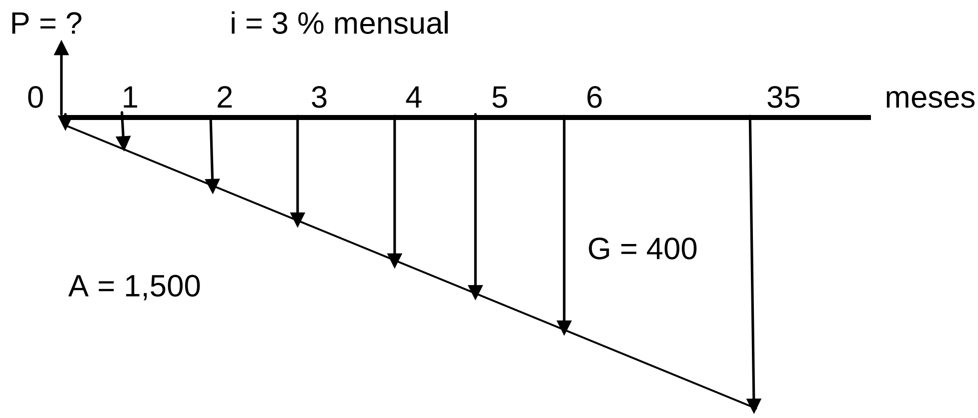
$$P = \left[500{,}000 \left(\frac{1 - (1 + 0.03)^{-12}}{0.03} \right) + \frac{40{,}000}{0.03} \left(\frac{1 - (1 + 0.03)^{-12}}{0.03} - \frac{12}{(1 + 0.03)^{12}} \right) \right] (1 + 0.03)(1 + 0.025)^{-9}$$

P = (4,977,002.00 + 2.049.927,24) (1,03) (0.8000728361) = 5,795,461.38

Como se puede observar en el caso anterior se tiene como resultado una gradiente aritmética diferida, al registrar el inicio de las anualidades nueve meses después de realizada la operación.

El ejemplo que se realizara a continuación, se refiere a una serie a una serie gradiente aritmética anticipada, en la cual los flujos de caja cada período crecen en una cantidad constante de pesos con respecto al flujo anterior, pero el primer pago se realiza en el mismo momento en que se da la operación financiera.

¿Cuál será el valor de un artículo que se financia en 36 cuotas mensuales anticipadas, que crecen cada mes en $ 400.00, si la primera cuota tiene un valor de de $ 1,500.00 y se paga el mismo día de la negociación? Considerando una tasa con valor del 3% de interés mensual.



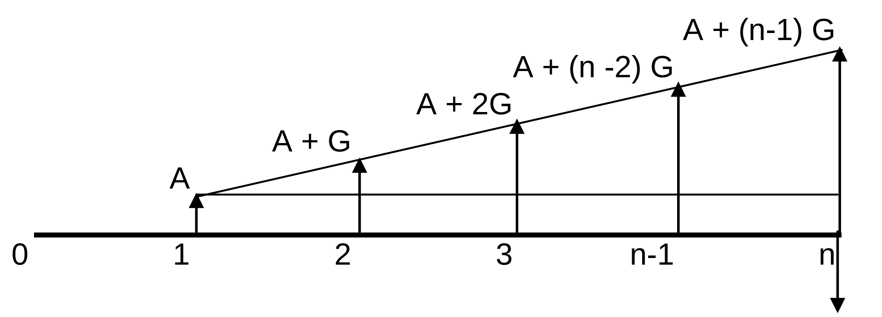
$$P = 1{,}500 + 1{,}900 \left[\frac{1 - (1 + 0.03)^{-35}}{0.03} \right] + \frac{400}{0.03} \left[\frac{1 - (1 + 0.03)^{-35}}{0.03} - \frac{35}{(1 + 0.03)^{35}} \right]$$

P = 1,500 + 4,082,571.81 + (40,000 / 0.03) (21.4872 - 12.4384)

P = 1,500 + 40,825.72 + (400 / 0.03) (9.0488)

P = 162,976.38

Valor Futuro de un gradiente lineal creciente se busca determinar el valor futuro de una serie de flujos de caja periódicos que aumentan en un valor constante cada periodo. El valor futuro estará ubicado en el período de tiempo donde se encuentre el último flujo de caja de la serie gradiente aritmética o lineal creciente, y se calcula a través de la fórmula FTG =FA +FG., donde FA, es el valor futuro de la base o de la anualidad, y FG es el valor futuro del gradiente.



$$F_{TG} = F_A + F_G$$

El valor futuro total de la serie gradiente aritmética creciente, se determina con la siguiente expresión:

$$F_{TG} = A\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i} - n\right]$$

Donde.

FTG = Valor futuro de la serie gradiente.

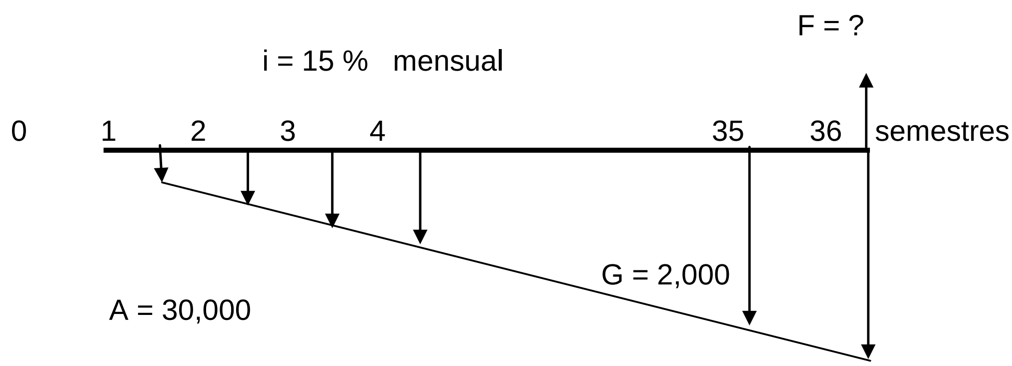
A = Valor de la base o anualidad.

i = Tasa de interés.

n = No. de anualidades

G = Variación constante o gradiente.

En una institución financiera que reconoce una tasa de interés del 15% semestral, se hacen depósitos semestrales, que aumentan cada semestre en $ 2.000, durante 12 años. Si el valor del primer depósito es de $ 30.000, calcular el valor acumulado al final del año doce.



$$F_{TG} = 30{,}000\left[\frac{(1+0.15)^{24}-1}{0.15}\right] + \frac{2{,}000}{0.15}\left[\frac{(1+0.15)^{24}-1}{0.15} - 24\right]$$

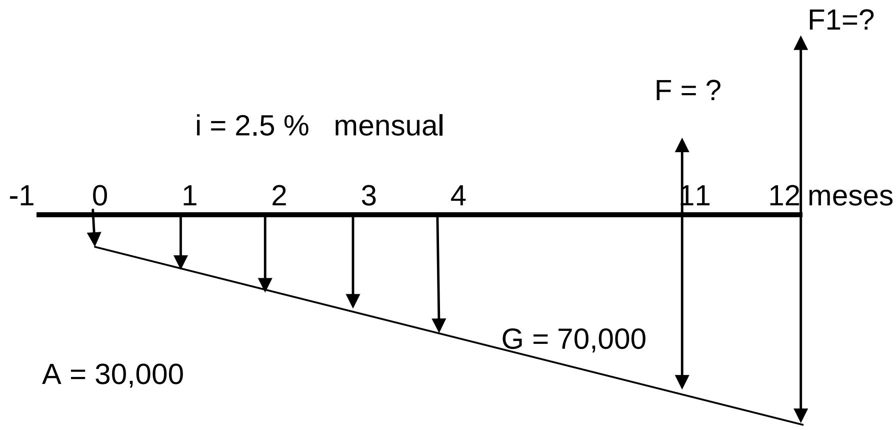
F_{TG} = (30,000) (184,1678413) + (13,333.3333) (160.1678413)

F_{TG} = 5,525,035.30 + 2,135,571.16

F_{TG} = 7,660,606.46

Un inversionista necesita saber cuanto tendrá acumulado en el plazo de un año, si decide aperturar un instrumento bancario donde depositara al inicio de cada mes la cantidad de $800,000.00 y que cada mes aumentarán en $70,000.00, expuesto a una tasa de interés del 2.5% mensual.

El resultado de esta operación es una serie gradiente anticipada, para saber el monto acumulado al finalizar el plazo del instrumento bancario, se debe de calcular el valor futuro tomando en consideración el cero de la serie gradiente como el periodo -1 y luego proceder a calcular el valor futuro al mes numero 12.



Para saber el valor futuro de una serie gradiente aritmética, se utiliza la siguiente formula

$$F_{TG} = A\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right) + \frac{G}{i}\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right)(1+i)$$

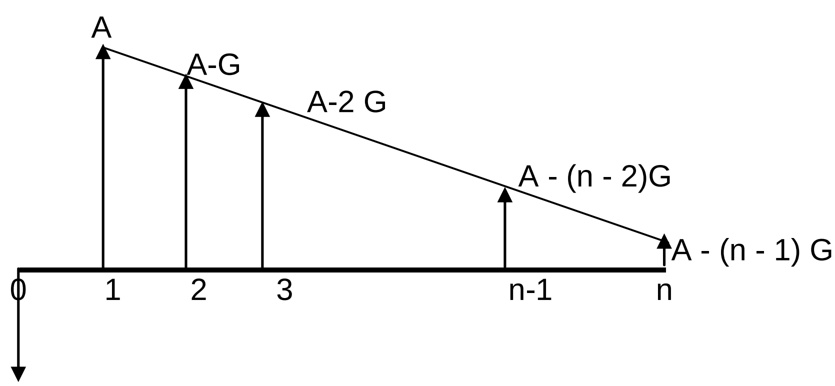
$$F_{TG} = 800{,}000\left(\frac{(1+0.025)^{12} - 1}{0.025}\right) + \frac{70{,}000}{0.025}\left(\frac{(1+0.025)^{12} - 1}{0.025} - 12\right)(1+0.025)$$

F_{GT} = (800,000) (13.79555297) + (5,027.548.32) (1.025)

F_{GT} = (11,036,442.38) + (5,153,237.03)

F_{GT} = 16,189,679.41

El valor presente de un gradiente lineal decreciente. Es el valor actual de una serie de anualidades futuras que diminuyen de manera continua cada una con relación a la anterior y que se representa con la letra (G)



La letra A representa la base de la anualidad y el gradiente la letra G, para poder determinar el valor presente de un gradiente lineal decreciente se utiliza la siguiente formula:

PTG = PA - PG

Donde:

PTG = Valor presente de un gradiente lineal decreciente

PA = Valor presente de la anualidad.

PG = Valor presente del gradiente

A través del desarrollo de la siguiente fórmula donde determinar los valores presente de la anualidad A y de la gradiente G, permite determinar el valor decreciente de un gradiente aritmético decreciente.

$$P_{TG} = A\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) - \frac{G}{i}\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^{n}}\right)$$

Donde:

PTG = Valor presente de la serie gradiente lineal decreciente

A = Valor de la anualidad.

i = Tasa de interés.

n = No. de anualidades.

G = Gradiente.

Para determinar el valor de cualquier anualidad en una serie gradiente aritmética decreciente, se lleva a cabo a través del desarrollo de la siguiente fórmula.

CUOTA n = A - (n – 1) G

Donde:

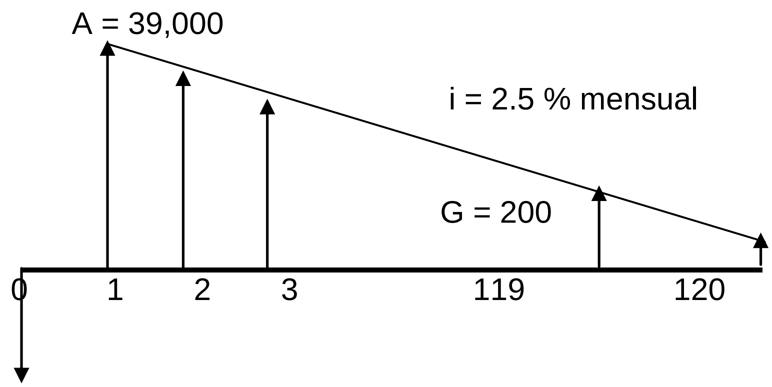
Cuota n = Valor de la cuota n de La serie gradiente lineal decreciente.

A = Valor de la anualidad

n = No. De anualidades

G = Gradiente

Una persona quiere saber cual es el valor presente de una vivienda que se liquidará mediante 120 pagos mensuales vencidas, siendo la primera mensualidad por un valor de $39,000.00 y que de manera continua tendrá un decrecimiento de \$200.00, tomando en consideración que la tasa de interés de financiamiento es del 2.5% mensual.



$$P_{TG} = 390{,}000 \left(\frac{1 - (1 + 0.025)^{-120}}{0.025} \right) - \frac{200}{0.025} \left(\frac{1 - (1 + 0.025)^{-120}}{0.025} - \frac{120}{(1 + 0.025)^{120}} \right)$$

P_{TG} = (390,000) (37.93368683) - (8,000) (31.73474731)

P_{TG} = 1,479,413.79 - 253,877.98

P_{TG} = 1,225,535.81

El valor futuro de un gradiente lineal decreciente, consiste en determinar el valor futuro que sea equivalente a una serie de anualidades A que de manera continua se ven afectadas con un valor decreciente G.. Para determinarlo se utiliza la siguiente fórmula:

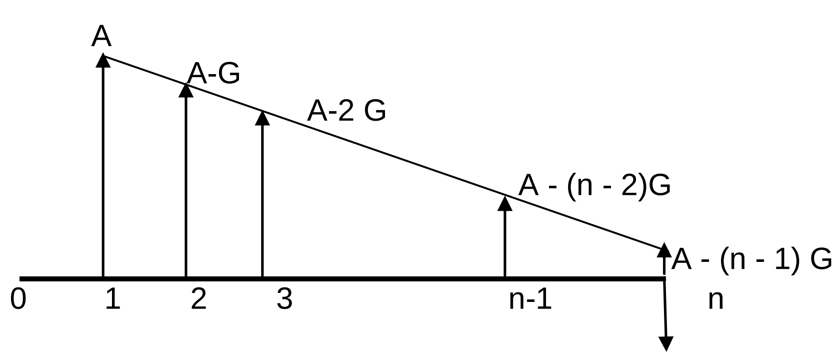
FTG = FA - FG

Donde:

FTG = Valor futuro de un gradiente lineal decreciente

FA = Valor futuro de la anualidad

FG = Valor futuro del gradiente



Para determinar el valor futuro de una serie gradiente lineal decreciente, se desarrolla la siguiente fórmula sobre el valor futuro de las anualidades A y del gradiente G.

$$F_{TG} = A \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right) - \frac{G}{i} \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right)$$

Donde:

FTG = Valor futuro de la serie gradiente lineal decreciente..

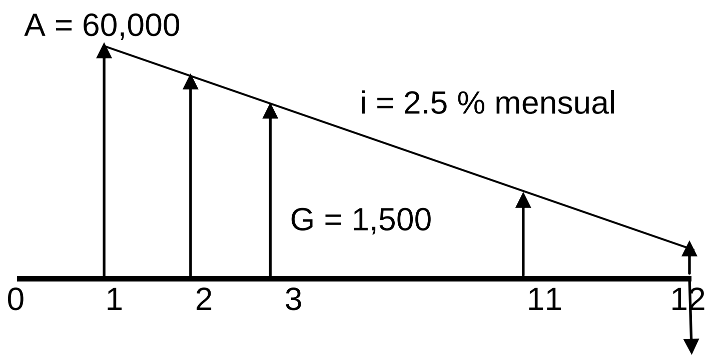
A = Valor de la anualidad.

i = Tasa de interés..

N = No. de anualidades

G = Gradiente.

Un inversionista desea saber cuanto tendrá acumulado en el plazo de un año, en una inversión que apertura en una institución bancaria para hacer depósitos mensuales vencidos, donde que cada mes de manera continua sufre una disminución de $1,500.00, que rinde una tasa de interés del 2.5 % mensual, tomando en consideración que el primer depósito que realiza es por un importe de $60,000.00



Para darle solución al planteamiento anterior se desarrolla la siguiente formula:

$$P_{TG} = 60{,}000 \left(\frac{(1+0.025)^{12} - 1}{0.025} \right) - \frac{1{,}500}{0.025} \left(\frac{(1+0.025)^{12} - 1}{0.025} - 12 \right)$$

P_{TG} = (60,000) (13.79555297) - (60,000) (1.795552969)

P_{TG} = 827,733.18 - 107,733.18

P_{TG} = 720,000.00

GRADIENTE GEOMETRICO EXPONENCIAL

Un gradiente geométrico representas un conjunto de anualidades que de manera continúa tienden a variar disminuyendo o incrementando en un porcentaje fijo.

Bajo esta consideración el valor presente de un gradiente geométrico exponencial creciente, representa el valor actual de un conjunto de anualidades futuras en donde cada anualidad registra un aumento con relacion a la anualidad anterior de manera continua en un porcentaje fijo.

Para determinar el valor presente de una gradiente geométrica cuando el porcentaje de interés mensual es diferente al porcentaje fijo de aumento de cada anualidad se utiliza la siguiente fórmula:

$$P_{gg} = k \left(\frac{1 - \left(\frac{1+j}{1+i} \right)^{n}}{1 - j} \right),$$

Para determinar el valor de la primera anualidad, se aplica la siguiente fórmula:

$$k = \frac{P_{gg}\ (1+j)}{1 - \left(\frac{1+j}{1+i} \right)^{n}}$$

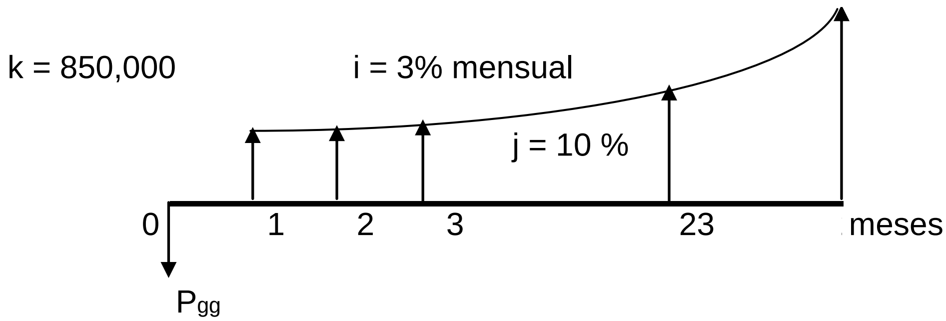
Para determinar el valor presente de una gradiente geométrica cuando el porcentaje de interés mensual es igual al porcentaje fijo de aumento de cada anualidad se utiliza la siguiente fórmula:

$$Pgg = \frac{n\,k}{(1+i)}$$

Para conocer el valor de una anualidad de una serie gradiente geométrica creciente, se determina desarrollando la siguiente fórmula:

$$Cuota_n = k\,(1+j)^{n-1}$$

Para saldar una deuda se tiene que realizar 24 pagos mensuales, donde dichos pagos sufren un incremento de manera constante cada uno con relación al anterior del 10% mensual, a una tasa de interés mensual del 3%, si se considera que la primera anualidad es de $85,000.00, ¿Cuál será el valor de la cantidad a pagar en su totalidad y cuanto vale el pago número décimo octavo?



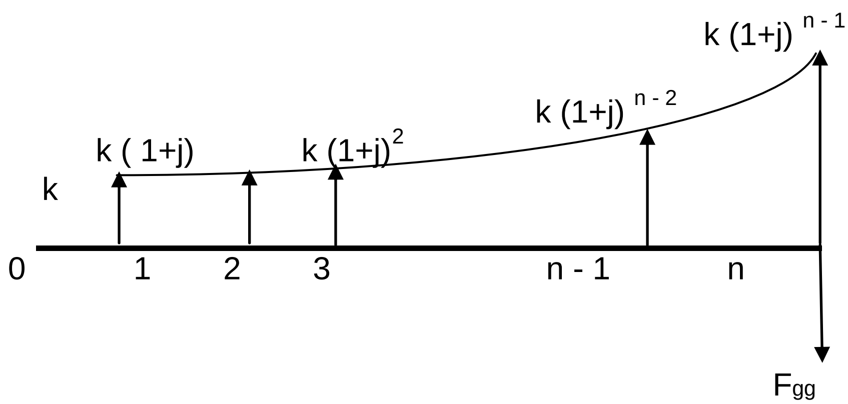
Para la solución del problema planteado se desarrolla la siguiente fórmula:

$$P_{gg} = 85,000 \left(\frac{1 - \left(\frac{1+.010}{1+0.03}\right)^{24}}{(0.03 - 0.10)} \right)$$

$P_{gg} = 4,669,433.47$

Cuota $_{18}$ $= 85,000\ (1+ 0.10)^{17} = 429,629.97$

El valor futuro de un gradiente geométrico creciente. Tomando en cuenta cada uno de los pagos crece de manera constante el valor futuro será en el momento en que se realice en último pago.



Cuando en una serie gradiente exponencial, el porcentaje de la tasa de interés

no es igual al porcentaje de incremento, el valor futuro se determina aplicando la siguiente fórmula.

$$F_{gg} = k \left(\frac{(1+i)^n - (1+j)^n}{(i+j)} \right)$$

Para aquellos casos en donde en una serie gradiente exponencial, el porcentaje de interés es igual al porcentaje de crecimiento el valor futuro de un gradiente geométrico exponencial, se aplica la siguiente fórmula:

$$F_{gg} = n\,k\,(1+i)^{n-1}$$

Una persona desea determinar el valor futuro correspondiente a 18 pagos expuestos a una tasa de interés mensual del 3%, y con un incremento continuo del 2% en cada pago, si el primer pago que se realiza tiene un valor de $25,000.00

Como $i \neq j$, entonces se puede plantear:

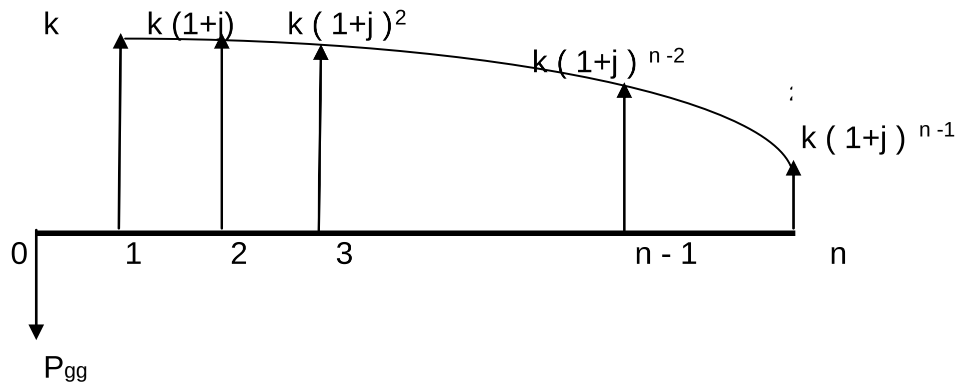
$$F_{gg} = k \left(\frac{(1+i)^n - (1+j)^n}{(i+j)} \right)$$

$$F_{gg} = 25{,}000 \quad \frac{(1+0.03)^{18} - (1+0.02)^{18}}{0.03+0.02}$$

$$F_{gg} = 25{,}000 \quad \frac{1.702433061 - 1.428246248}{0.01}$$

$$F_{gg} = 685{,}467.03$$

Por otra parte un gradiente geométrico decreciente, está integrado por un conjunto de pagos que de manera constante disminuyen a un porcentaje fijo determinado. Asi mismo el valor presente de un gradiente geometrico dececiente, es el valor actual antes de que ocurra el pago del primer periodo del conjuto de pagos que lo integra el gradiente y que se ve afectado disminuyendo de manera continua a un porcentaje fijo establecido.



Si ocurre que la tasa de interés mensual no es igual al porcentaje fijo a que descrecen los pagos, el valor presente de un gradiente geométrico decreciente se determina aplicando la siguiente fórmula:

$$P_{gg} = k \left(\frac{1- \left(\frac{1-j}{1+i}\right)^{n}}{1-j} \right)$$

Por lo tanto, el pago numero uno del conjunto de pagos del gradiente se determina aplicando siguiente fórmula.

$$k = \frac{P_{gg}\ (1+j)}{1- \left(\frac{1-j}{1+i}\right)^{n}}$$

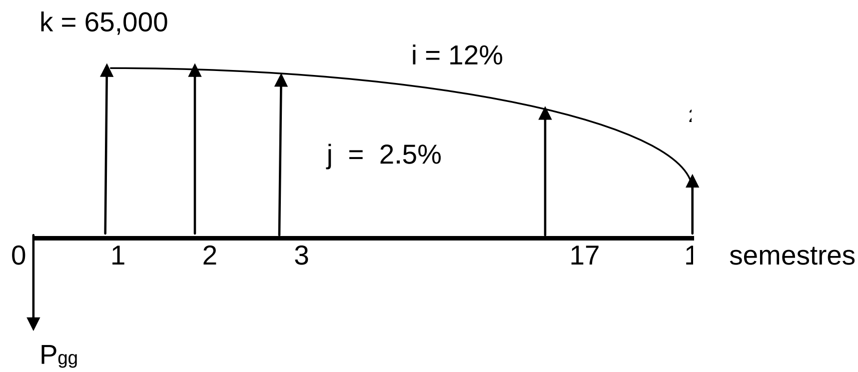
En caso de que la tasa de interés mensual sea igual al porcentaje fijo a que descrecen los pagos, el valor presente de un gradiente geométrico decreciente se determina aplicando la siguiente fórmula:

$$Pgg = \frac{n\,k}{(1+i)}$$

El valor de del pago de un gradiente geométrico decreciente se puede hallar aplicando la siguiente fórmula:

$$Cuota_{n} = k\,(1-j)^{n-1}$$

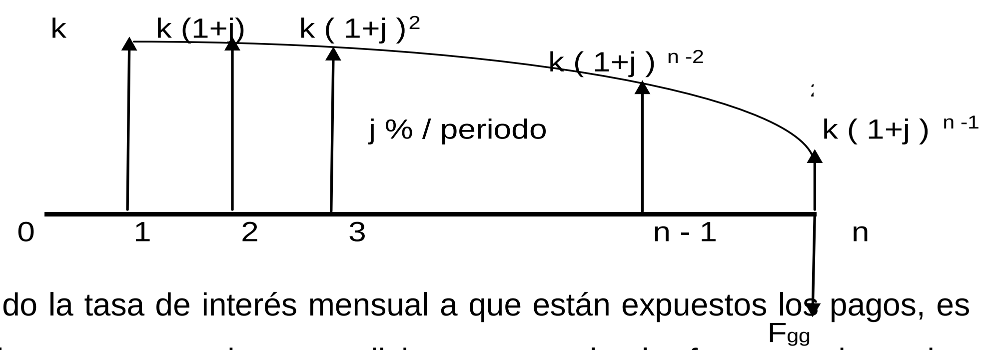
Calcular el valor presente de 18 pagos semestrales que disminuyen cada semestre en el 2,5%, siendo el primer pago de $ 65,000.00 La tasa de Interés es del 12% semestral.



$$P_{gg} = 65{,}000 \left(\frac{1 - \left(\frac{1 - 0.025}{1 + 0.12} \right)^{18}}{0.012 + 0.025} \right)$$

$$P_{gg} = 411{,}318.24$$

Se conoce como valor futuro de un gradiente geométrico decreciente, al importe equivalente de un conjunto de pagos que de manera continua decrecen a una tasa fija y queda comprendiendo en el último pago realizado.



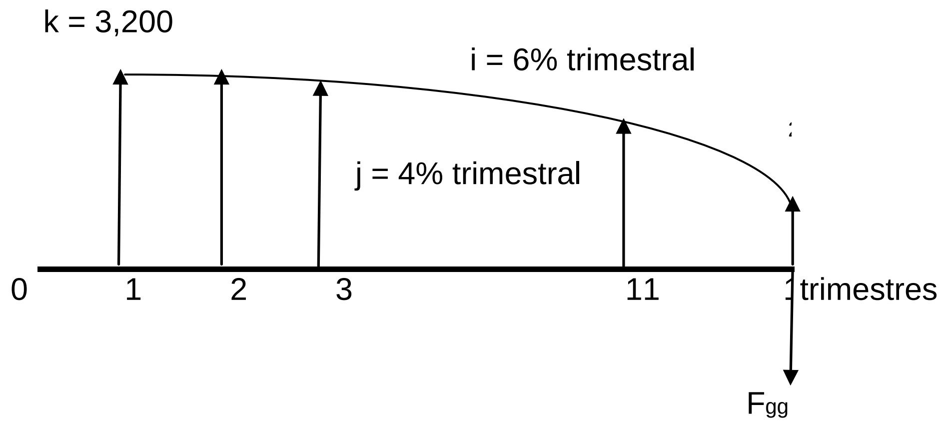
Cuando la tasa de interés mensual a que están expuestos los pagos, es diferente a la tasa en que decrecen dichos pagos, el valor futuro se determina aplicando la siguiente fórmula:

$$F_{gg} = k \left(\frac{(1 + i)^{n} - (1 - j)^{n}}{(i + j)} \right)$$

Para los casos en que la tasa de interés a que están expuesto lo pagos es igual a la tasa en que decrecen de manera continua, el valor futuro se determina con la aplicación de la siguiente fórmula:

$$F_{gg} = n\,k\,(1 + i)^{n-1}$$

Una persona desea conocer el monto que tendrá acumulado en un plazo de tres años, si realiza pagos trimestrales que de manera continúa se ven disminuidos a una tasa del 4%, y que a la vez generan un rendimientos del 6% trimestral, tomando en consideración que el primer pago tiene un valor de $3,200.00



Para resolver el planteamiento del problema anterior se aplica la siguiente fórmula:

$$F_{gg} = k \left(\frac{(1+i)^n - (1-j)^n}{(i+j)} \right)$$

$$F_{gg} = 3,200 \quad \frac{(1+0.06)^{12} - (1-0.04)^{12}}{0.06 + 0.04}$$

$$F_{gg} = 3,200 \quad \frac{2.012196472 - 0.612709757}{0.01}$$

$$F_{gg} = 44,783.57$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Ensayo sobre la importancia de la aplicación de gradientes aritméticos y geométricos en la solución de problemas financieros de las empresas.

6.2 Fondos de amortización.

El fondo de amortización consiste en realizar una serie de depósitos donde los importes normalmente son iguales en intervalos de tiempos iguales, en instrumentos financieros que ofrecen las instituciones bancarias y que dichos depósitos expuestos a una tasa de interés establecida, permite acumular un determinado monto, para liquidar el importe de una deuda a su vencimiento.

A continuación se cita el siguiente ejemplo:

Una empresa mercantil tiene una deuda por liquidar a un plazo de seis meses, la cantidad de $400,000.00, y para estar en condiciones de cumplir oportunamente con el compromiso contraído, decide constituir un fondo mediante una serie de depósitos mensuales, por lo que, se pide determinar el numero de depósitos a realizar y elaborar una tabla que refleje el comportamiento de dichos depósitos.

Datos

M = $400,000.00

R = ?

i = 9% = 0.09 /12 meses = 0.0075 mensual.

n = seis meses

formula:

$$M = R \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Sustitución:

$$R = \frac{M\,i}{(1 + i)^n - 1}$$

$$R = \frac{(400{,}000)(0.0075)}{(1.0075)^n - 1}$$

$$R = \frac{3{,}000}{0.045852235}$$

$$R = 65{,}427.56$$

tabla:

Fecha	Depósitos por periodo	Intereses	Total que se suma al fondo	Saldo
Fin de mes 1	65,427.56	0.00	65,427.56	65,427.56
Fin de mes 2	65,427.56	490.71	65,918.27	131,345.83
Fin de mes 3	65,427.56	985.09	66,412.65	197,758.48
Fin de mes 4	65,427.56	1,483.19	66,910.75	264,669.23
Fin de mes 5	65,427.56	1,985.02	67,412.58	332,081.81
Fin de mes 6	65,427.58	2,490.61	67,918.19	400,000.00
Totales	392,565.38	7,434.62	400,000.00	

Se ajusta el último depósito mensual en dos centavos para ajustar el fondo exactamente a $400,000.00.[26]

Los depósitos por periodo representa la cantidad, que se debe depositar al final de cada periodo, en la columna de intereses se coloca la cantidad resultante de multiplicar el saldo del mes anterior por la tasa de interés del periodo; en la columna de total que se suma al fondo es adición del depósito del periodo mas los intereses generados; mientras que el saldo se construye sumando el saldo del mes anterior mas el total que se suma al fondo.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Ensayo sobre la importancia de constituir fondos de amortización en las empresas.

6.3 DEPRECIACIÓN Y AGOTAMIENTO

DEPRECIACIÓN

Los activos fijos que utiliza una empresa para producir riquezas, desde el momento que son adquiridos y con el transcurso del tiempo tienden a perder valor, a causa del uso a que esta expuesto o por que se van volviendo obsoletos. Esta pérdida de valor del bien se le conoce con el nombre de depreciación.

[26] Díaz Mata Alfredo, Aguilera Gómez Víctor Manuel, Matemáticas Financieras, Tercera Edición, Mc-Graw Hill.-1999

La empresa debe de buscar el método mas adecuado para calcular el valor de la depreciación, con la finalidad de estimar su valor al momento de volver a reponer el bien.

La notación que se utiliza es la siguiente:

C = Costo original del activo

S = Valor de salvamento

n = Vida útil calculada en años

$B = C - S$ Base de depreciación del activo

$D\,k$ = Cargo por depreciación por el año $k\ (1 < K < n)$

Ak = Depreciación acumulada en el año k

$(0 \leq k \leq n),\ D\,0 = 0\ y\ Dn = B$

Vk = Valor en libros al final del año $k\ (0 \leq k \leq n)$

$V0 = C\ y\ Vn = S$

dk = Tasa de depreciación por el año k ($1 \leq k \leq n$) [27]

DEPRECIACION EN LINEA RECTA

Consiste en que la depreciación es igual para todos los años de vida útil del bien, por lo tanto la base de la cantidad a depreciar de divide entre el total de años calculado que durará el bien y por lo tanto dicha cantidad representa el cargo por concepto de depreciación que cada año se deberá acumular. Por lo tanto la depreciación acumulada mas el valor de salvamento deberá ser igual al valor de reposición al final de la vida útil del bien.

A continuación se cita el siguiente ejemplo.

Se adquiere una maquinaria agrícola con valor de $100,000.00 y se calcula que su vida útil será de 4 años. Antes que deba ser reemplazado por equipo más moderno. Su valor de desecho se calcula en $2,500.00

Determinar la depreciación anual por el método de línea recta

Elaborar tabla de depreciación.

Datos

C = 100,000

[27] Díaz Mata Alfredo y Aguilera Gómez Víctor M. Matemáticas Financieras. McGraw Hill. 1999. p. 296

B = C – S

S = 2,500

n = 4

D =?

Formula:

$$D = \frac{B}{n} = \frac{C - S}{n}$$

Sustitución:

$$D = \frac{B}{n} = \frac{100{,}000 - 2500}{4}$$

D = 24,375.00

Los cargos por depreciación anual seria de $ 24,375.00, a continuación desarrolla la tabla para ver el comportamiento de los cargos anuales.

Anos	Depreciacion anual	depreciacion acumulada	Valor en libros
0	0.00	0.00	100,000.00
1	24,375.00	24,375.00	75,625.00
2	24,375.00	48,750.00	51,250.00
3	24,375.00	73,125.00	26,875.00
4	24,375.00	97,500.00	2,500.00

METODO DE PORCENTAJE FIJO

La depreciación de un bien por medio del método de porcentaje fijo, consiste en que el primer año el importe resulta mayor que en el segundo año y el importe del segundo año es mayor que el del tercer año, de tal manera que el importe de la depreciación anual será un determinado porcentaje fijo tomando como base el valor contable del bien al inicio de cada año.

A continuación se cita el siguiente ejemplo.

Una empresa mercantil a decidido adquirir un vehiculo para transportar la mercancía, con un valor de $100,000.00, y tiene considerado que el bien tendrá una vida útil de cinco años y que al final tendrá un valor de desecho en el mercado por $2,500.00, por lo que, se pide calcular que se deberá aplicar en el proceso de la depreciación y elaborar una tabla que muestre el comportamiento de los cargos por depreciación.

Datos

C = 100,000

B = C – S

S = 2,500

n = 5

d =?

D =?

Fórmula:

$$S = C\ (1 - d)^{n}$$

Sustitución:

$$2{,}500 = 100{,}000\ (1 - d)^{5}$$

$$\frac{2{,}500}{100{,}000} = (1 - d)^{5}$$

$$0.025 = (1 - d)^{5}$$

$$(0.025)^{5} = (1 - d)$$

$$0.47817624990 = (1 - d)$$

$$d = (1 - 0.47817624990)$$

$$d = 0.52182375010$$

$$d = 52.182375010\ \%$$

Tabla de depreciación

Anos	Depreciacion anual	depreciacion acumulada	Valor en libros	Porcentaje de depreciacion
0	0.00	0.00	100,000.00	52.182375010%
1	52,182.38	52,182.38	47,817.62	52.182375010%
2	24,952.37	77,134.75	22,865.25	52.182375010%
3	11,931.63	89,066.38	10,933.62	52.182375010%
4	5,705.42	94,771.80	5,228.20	52.182375010%
5	2,728.20	97,500.00	2,500.00	52.182375010%

METODO SUMA DE DIGITOS.

Depreciar un bien por medio de este método consiste en que en los primeros ejercicios de uso del bien los cargos por concepto de depreciación son mayores el cual tiende a disminuir durante va transcurriendo los años de vida útil, este cargo anual de depreciación se obtiene multiplicando la base de depreciación del bien por la fracción del año correspondiente.

Para obtener la fracción anual que multiplicará la base y obtener el cargo correspondiente por depreciación se procede de la siguiente manera: tomando en consideración un bien que se estima una vida útil de 4 años, se suman los dígitos enteros correspondiente a los años de servicio esperado: 1 + 2 + 3 + 4 = 10. Dato que también se puede obtener de la siguiente manera:

$$s = \frac{n\,(n + 1)}{2}$$

Ejemplo: en el caso anterior se tiene:

$$s = \frac{4\,(4 + 1)}{2}$$

$$s = \frac{(4)\,(5)}{2}$$

$$s = 10$$

La cifra obtenida será el denominador de la fracción a depreciar.

Los dígitos correspondientes a los años de vida útil del activo se ordenan inversamente al tiempo y así, inversamente, se asignan a cada uno de los años de vida útil estos serán los numeradores de la fracción.

Ejemplo: en el caso del activo con vida de 4 años se tiene:

Año:	1	2	3	4
Años en orden invertido:	4	3	2	1
Suma de digitos s:	10	10	10	10
Fracción que se depreciará:	4 /10	3 /10	2 /10	1 /10

Los resultados obtenidos en el esquema anterior se multiplican por la base de depreciación del activo, y se determina el cargo correspondiente a depreciar en el año., como se señala a continuación:

$$D_1 = \frac{n}{s}\,(C - S)$$

$$D_2 = \frac{n - 1}{s}\,(C - S) \ldots\ldots D_n = \frac{1}{s}\,(C - S)$$

Y generalizando:

$$D_k = \frac{n - k + 1}{s} (C - S)$$

A continuación se cita el siguiente ejemplo:

Una empresa adquiere para su servicio una maquinaria agrícola que tiene un valor de \$100,000.00, con una vida útil estimada del bien, de cuatro años y un valor de desecho al final de su vida útil de \$250,00.00, calcular el valor de la depreciación anual y señalar mediante una tabla de depreciación el comportamiento de los cargos anuales por este concepto.

Datos

C = 100,000

B = C – S

S = 2,500

n = 4

D =?

Año:	1	2	3	4
Años en orden invertido:	4	3	2	1
Suma de digitos s:	10	10	10	10
Fracción que se depreciará:	4 /10	3 /10	2 /10	1 /10

Formula:

$$D_k = \frac{n - k + 1}{s} (C - S)$$

Sustitución

$$D_1 = \frac{4 - 1 + 1}{10} (100,000 -2,500) = 39,000.00$$

$$D_2 = \frac{4 - 2 + 1}{10} (100,000 -2,500) = 29,250.00$$

$$D_3 = \frac{4 - 3 + 1}{10} (100,000 -2,500) = 19,500.00$$

$$D_3 = \frac{4 - 4 + 1}{10} (100,000 -2,500) = 9,750.00$$

Tabla de depreciación

Anos	Fracción	Base de depreciación	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0		0.00	0.00	0.00	100,000.00
1	4 /10	97,500.00	39,000.00	39,000.00	61,000.00
2	3 /10	97,500.00	29,250.00	68,250.00	31,750.00
3	2 /10	97,500.00	19,500.00	87,750.00	12,250.00
4	1 /10	97,500.00	9,750.00	97,500.00	2,500.00

METODO POR UNIDAD DE PRODUCCIÓN O SERVICIO

Este método tiene como finalidad depreciar anualmente un activo, cuando se tiene identificado la vida útil del bien y se espera que produzca bajo ciertos parámetros como son unidades terminadas, servicio rendido, y se pueda expresar en toneladas, kilos, kilómetros, metros, litros.

A continuación se cita el siguiente ejemplo:

Una compañía de servicio publico adquiere un automóvil para su flotilla, con un costo de $100,000.00, la Compañía calcula una vida útil de 100,000 km y que al cabo de ellos su valor de desecho de la unidad será de $ 2,500.00, el kilometraje recorrido por la unidad será el siguiente: año 1 40,000, año 2 25,000; año 3 20,000 y año 4 15,000.

Determinar los cargos por depreciación.

Estructurar la tabla de depreciación.

Primero se determina la base de depreciación

B = C – S

B = 100,000 – 2,500

B = 97,500

D/km = 97,500 / 100,00

D/km = 0.975

La depreciación por kilómetro es de $ 0.975. Conociendo este dato se procede a elaborar la tabla de depreciación.

Anos	kilometros recorridos	depreciacion por kilometro	Depreciación anual	Depreciación acumulada	Valor en libros
0		0.00	0.00	0.00	100,000.00
1	40,000	0.975	39,000.00	39,000.00	61,000.00
2	25,000	0.975	24,375.00	63,375.00	36,625.00
3	20,000	0.975	19,500.00	82,875.00	17,125.00
4	15,000	0.975	14,625.00	97,500.00	2,500.00

AGOTAMIENTO

Existen activos que por su misma naturaleza no pueden ser reemplazados, por lo que, para estos tipos de bienes la perdida de valor que sufre con el paso del tiempo por la disminución de la cantidad aprovechable, recibe el nombre de agotamiento. Como ocurre con las minas, que durante el proceso de explotación a través del tiempo tiende a disminuir de manera gradual su capacidad y por lo tanto su valor, hasta que se agota definitivamente.

El termino agotar, se aplica para aquellos recurso que existen en nuestro planeta y que no es posible reponerlos o volverlos a comprar, se le conocen como recursos no renovables y la explotación de tales recurso, sin considerar un equilibrio con relación a la naturaleza ha ocasionado problemas ecológicos, que ha dado origen grandes cambios climáticos. Estoy recursos naturales son explotados normalmente por grandes corporaciones que invierten grandes cantidades de capitales mediante la autorización otorgada por el Estado, buscando una rentabilidad atractiva sobre la inversión.

Para calcular al valor del agotamiento que sufre un bien expuesto al proceso de explotación, se realiza a través de dos procedimiento. Que puede ser agotamiento por costo y el agotamiento por porcentajes. El agotamiento por costo, calcula tomando en consideración cada unidad o volumen explotado, y se toma en cuenta los siguiente:

1. Monto original del bien .
2. Calculo estimado de las unidades que se pretenden obtener (pies cúbicos, toneladas, yardas, litros, kilogramo, etc).
3. Valor de la producción.

Para Llevar a cabo el cálculo del agotamiento del producto natural, tomando en consideración el facto de agotamiento, que tiene como base el tiempo que lleva en recuperarse, se expresa de la siguiente manera;

Dt = Inversión inicial / Capacidad de recursos

Donde:

Dt = Facto de agotamiento para el año (t)

Inversión inicial = Es el costo del producto natural.

Capacidad de recurso = Capacidad total del recurso natural.

Surge la necesidad de calcular el valor del agotamiento anual, el cual estará sujeto al uso o nivel de actividad expuesto.

El costo por agotamiento, conocido también por factor de agotamiento y representa el volumen de explotación anual y no debe exceder del valor total de la inversión, ya que, en caso de darse esta situación, se consideraría totalmente agotado la inversión realizada.

A continuación se cita el siguiente ejemplo.

Una empresa maderera adquirió un extensión de terrenos con árboles para talar con monto original del $400,000,00, con un monto estimado de 180 millones de de pies cúbicos de madera aprovechable para tala, y necesita conocer el valor del agotamiento para los dos primeros años si tiene considerado aprovechar en el año uno 20 millones y en el año dos 25 millones de pies cúbicos de madera. Si después del año dos el monto total aprovechable es reestimado en 230 millones de pies cúbicos de madera ¿Cuál sera el valor del agotamiento del año 3 en adelante?

Solución.

Valor del agotamiento

d1 = $400,000 / 180 millones = $2,222.22

d1 = $2,222.22 Valor del agotamiento por unidad

Valor del agotamiento por unidad = $2,222.22 x 20 millones de pies cúbicos de madera aprovechable.

Valor del agotamiento del año 1 = $44,444.44

Valor del agotamiento del año 2.

d1 = $400,000 / 180 millones = $2,222.22

d1 = $2,222.22 Valor del agotamiento por unidad

Valor del agotamiento por unidad = $2,222.22 x 25 millones de pies cúbicos de madera aprovechable.

Valor del agotamiento del año 2 = $55,555.56

Valor del agotamiento a partir del año 3 tomando en cuanta la reestimación de 230 millones de pies cúbicos de madera aprovechable.

Para calcular los nuevos agotamientos a partir de la reestimación de la cantidad de madera aprovechable, primero es necesario conocer el valor acumulado del agotamiento de los primeros dos años, así mismo la cantidad acumulada de unidades aprovechadas, que seria de la siguiente manera:

Valor del agotamiento del año 1 = $44,444.44

Valor del agotamiento del año 2 = $55,555.56

Valor del agotamiento acumulado =$ 100,000.00

Monto original de la inversión = $400,000.00

Valor del agotamiento acumulado = $100,000.00

Monto de la inversión no agotada =$300,000.00

Cantidad de unidades aprovechadas año 1 = 20 millones de pies cúbicos

Cantidad de unidades aprovechadas año 2 = 25 millones de píes cúbicos

Cantidad de unidades aprovechadas acumulado = 45 millones de pies cúbicos

Valo reestimado de unidades aprovechables = 230 millones de pies cúbicos

Cantidad de unidades aprovechadas acumulado = 45 millones de pies cúbicos

Cantidad de unidades pendientes de aprovechar = 185 millones de pies cúbicos

Partiendo de estos nuevos valores se puede calcular el agotamiento del año 3 y subsecuentes.

Valor del agotamiento

d3 = $300,000 / 185 millones = $1,621.62

d3 = $1,621.62 Nuevo valor del agotamiento por unidad

Método de Agotamiento por Porcentaje. Calcular el agotamiento anual de un bien por este método se realiza aplicando un porcentaje al valor de los ingresos que se obtengan y no sobre el monto original de la inversión. Sin embargo, el porcentaje que se deba aplicar se limita a que no debe exceder el 50% del ingreso gravable que se produzca, calculado sin la deducción del agotamiento.. Por lo tanto es probable que el valor del agotamiento total acumulado pueda superar el valor del costo de la inversión original sin ninguna limitación.

Se le conoce como agotamiento por porcentaje, en razón de que los gobiernos a través de su legislación correspondiente determinan el valor del porcentaje a que serán explotados los recursos naturales con que cuentan, con la finalidad de sostener el crecimiento y desarrollo, pero guardando un equilibrio con la naturaleza y evitar la sobre explotación que conlleve a desastres naturales. Dichos porcentajes sufren algunas modificaciones ya que se van considerando los valores estimados de la reserva de cada recurso.

Lamentablemente en algunos recursos naturales se ha dado la sobre explotación, así mismo, no se utilizan las técnicas ni procedimientos adecuados y el personal no goza las condiciones mínimas de seguridad ni desarrollo social ni económico y se ha contaminado suelos, ríos, lagunas ocasionando problemas de salud pública y registrando cambios climáticos significativos.

A continuación se detalla el siguiente procedimiento para ilustrar de manera practica la forma de realizar los cálculos que permitan cumplir con lo requerimientos básicos sobre este método.

Ejemplo.

Una empresa minera dedicada a la extracción del carbón, desea se le calcule el porcentaje de agotamiento permitido si durante el ejercicio anual obtuvo un ingreso bruto equivalente a la cantidad de $1,300,000.00, con gastos de explotación que ascendieron a $1,250,000.00

Solución:

Tomando en cuenta la tabla de porcentajes establecido para este tipo de actividad se considera el 10%, de porcentaje permitido.

El valor del agotamiento anual se calcula tomando como base el ingreso gravable bruto de explotación.,

Ingresos bruto obtenidos	$1, 300,000.00

Porcentaje de agotamiento permitido	X 10%
Valor del agotamiento anualdo	$130,000.00
Ingreso bruto anual obtenido	$1,300,000.00
Gastos anual de explotación	$1,250,000.00
Ingreso anual gravable	$ 50,000.00

Limitación del 50% en la deducción del ingreso gravable

Ingreso gravable de la mina	$ 50,000.00
Limitación del ingreso gravable	x 50%
Limitación del ingreso gravable	$25,000.00

Como el resultado obtenido de $25,000.00 es menor que el determinado al porcentaje del 10% que fue de $130,000.00, el valor máximo permitido por concepto de agotamiento es de $25,000.00

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Ensayo sobre la depreciación y agotamiento de activos fijos y recursos no renovables.

6.4 BONOS

Toda empresa privada o el gobierno de un país que necesita grandes cantidades de recursos financieros para el cumplimiento de los objetivos, no es posible obtenerlo de una sola persona o una misma fuente de financiamiento, si no que se hace necesario que participen varios inversionistas o compañías que aporten los recurso, por ello se hace necesario, la emisión de instrumentos financieros denominados Bonos u Obligaciones que generan intereses anuales o semestrales, por tal razón, quien adquiere estos instrumentos esta otorgando un financiamiento a la empresa emisora.

Tipos de bonos:

Los bonos son títulos de crédito negociables y pueden ser trasferidos mediante el endoso derivado de la venta, existen bonos denominados no registrados, que son aquellos que se transmite por la simple venta o al portador y serán bonos registrados aquellos que consigna el nombre del propietario y que carece de valor para cualquier otra persona. Todos los bonos pagaran el valor nominal mas los intereses que haya generado, tratándose de bonos al portador deberá de tener adherido un cupón desprendible para el reembolso de dichos pagos y para el caso del bono registrado no es necesario el cupón antes mencionado, toda vez que, se realizara el pago correspondiente a nombre de la persona que se encuentre registrado.

Dentro de este tipo de documentos encontramos que valor nominal es el valor que tiene escrito el documento y valor de redención la cantidad que se recupera por la venta del bono, de ahí que si el bono se vende a su valor nominal se dice que se vende a la par, si se vende por arriba del valor nominal se dice que es por arriba de la par y si el bono se negocia por debajo de su valor nominal, entonces el bono se vende por debajo de la par. Lo bonos se emiten generalmente con un valores múltiples de 10, lo más común es encontrar en el mercado bonos con valor nominal de $100.00; $500.00; $1,000.00; $10,000.00 y en algunos casos de $50,000.00

Tasas de interés. Los inversionistas que adquieren este tipo de instrumentos esperan obtener ganancias sobre el monto invertido, por lo que para determinar el rendimiento se toma en cuenta la tasa de interés que liquida la empresa emisora tomando como base el valor nominal del instrumento y la otra tasa es el rendimiento hasta el vencimiento.

El valor actual de un bono. Consiste traer a valor presente el importe de la inversión al vencimiento del instrumento y se obtiene aplicando la siguiente fórmula: $C(1+i)^{-n}$

Para determinar el valor actual de los rendimientos generado por el bono se utiliza la siguiente terminología.

V = Precio de adquisición del bono

F = Valor nominal

r = Tasa de interés por periodo

Fr = R = Valor de los intereses sobre el valor nominal de la tasa “r”

A = Valor presente de la anualidad

C = Precio de redención

N = Número de periodos o cupones

Un persona o empresa que invierte en este tipo de instrumentos se hace acreedor a los beneficios del precio que pueda obtener por la venta del instrumento y al pago que de manera periódica pueda recibir por concepto de intereses.

A continuación se dita el siguiente ejemplo:

Un bono de 10,000 redimible a 10,250, se anota como un bono de 10,000 redimible a 102.5. De hecho; como el bono no es a la par, entonces tiene un porcentaje del valor nominal, esto es:

Un bono con valor nominal de $10,000.00 que se puede negociar en el mercado en la cantidad de $10,250.00, por lo que, al dividir el valor de mercado entre el valor nominal resulta el 1.025% que multiplicado por cien nos da un valor de 102.50, razón por la cual se expresa que un bono con valor de $10,000.00 tiene un redención de 102.50., que se obtuvo de la siguiente manera:

10,250.00 / 10,000.00 = 1.025 x 100 = 102.50

Compra de bonos con premio o, descuento. Un bono se compra con premio cuando su valor de mercado supera su valor nominal y se origina cuando la tasa de intereses es superior a la tasa de rendimiento. Así mismo, un bono se compra con descuento cuando el valor de mercado es inferior a su valor nominal, originado porque el valor de la tasa de interés es inferior a la tasa de rendimiento.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Ensayo sobre la importancia del bono como un esquema de financiamiento para las empresas.

AUTOEVALUACIÓN.

1. ¿Cuál será el valor de un inmueble que se tiene que liquidar mediante 36 pagos mensuales, que aumentan cada mes la cantidad de $800.00, y el valor de la primera mensualidad es de $5,000.00. si la tasa de interés mensual es de 2.4%?
2. ¿Cuál será el valor de un equipo satelital que se debe de liquidar mediante 60 pagos mensuales, que aumentan cada mes la cantidad de $1,500.00 y el valor de la primera mensualidad es de $13,500.00. si la tasa de interés es de 1.5%?
3. ¿Cuál será el valor de un equipo industrial que se debe de liquidar mediante 84 pagos mensuales, que aumentan cada mes la cantidad de $2,000.00 y el valor de la primera mensualidad es de $10,000.00. Si la tasa de interés es de 4.5%?
4. Una deuda de $ 60.000.00 se va a financiar en 36 cuotas mensuales, que aumentan en $ 30.00 cada mes. Si la tasas de interés es del 2,8% mensual, determinar el valor de la primera cuota y el valor de la cuota 24.
5. Una deuda de $ 100.000.00 se va a financiar en 24 cuotas mensuales, que aumentan en $ 400.00 cada mes. Si la tasas de interés es del 10% mensual, determinar el valor de la primera cuota y el valor de la cuota 10.
6. Una deuda de $ 35,000.00 se va a financiar en 12 cuotas mensuales, que aumentan en $ 200.00 cada mes. Si la tasas de interés es del 6% mensual, determinar el valor de la primera cuota y el valor de la cuota 4.
7. Calcular el valor de un préstamo que se está cancelando en 20 pagos mensuales que aumentan cada mes en $ 50.00, pero el primer pago por valor de $ 5,500.00, se realizó 7 meses después de la fecha de la negociación, y la tasa de interés es del 1.5% mensual. Durante los primeros 7 meses se cobró una tasa de interés del 2. % mensual.

8. Calcular el valor de un préstamo que se está cancelando en 14 pagos mensuales que aumentan cada mes en $ 120.00, pero el primer pago por

valor de $ 2,500.00, se realizó 4 meses después de la fecha de la negociación, y la tasa de interés es del 2.5% mensual. Durante los primeros 4 meses se cobró una tasa de interés del 3. % mensual.

9. Calcular el valor de un préstamo que se está cancelando en 15 pagos mensuales que aumentan cada mes en $ 20.00, pero el primer pago por valor de $ 1,060.00, se realizó 12 meses después de la fecha de la negociación, y la tasa de interés es del 3.5% mensual. Durante los primeros 2 meses se cobró una tasa de interés del 5. % mensual.

10. ¿Cuál será el valor de un artículo que se financia en 12 cuotas mensuales anticipadas, que crecen cada mes en $ 50.00, si la primera cuota tiene un valor de de $ 500.00 y se paga el mismo día de la negociación? La tasa de interés es del 2.5% mensual.

RESPUESTAS.

1. $388,592.52
2. $1, 693,830.66
3. $992,233.06
4. $2,229.80 y 2,919.80
5. $7,475.62 y 11,075.62
6. $1,426.97 y 3,226.97
7. $90,268.96
8. $34,410.22
9. $12,836.47
10. $34,586.74

BIBLIOGRAFÍA

Díaz Mata Alfredo, Aguilera Gómez Víctor Manuel, Matemáticas Financieras, Tercera Edición, Mc-Graw Hill.-1999

Villalobos José Luis, Matemáticas Financieras, Tercera Edición, Prentice Hall.-2007

Hernández Hernández Abraham, Matemáticas Financieras teoría y práctica, Quinta edición, Thomson.-2002

García Barbosa Milton / Pantoja Algarín Cristo / Zambrano Meza Ariel / Ramírez Molinares Carlos, Fundamentos de Matemáticas Financieras. Editorial Universidad Libre Sede Cartagena.

GLOSARIO

A

A la par: Operación de compra-venta de bonos u obligaciones donde el precio de mercado coincide con el valor nominal del titulo.

Acumulación: Proceso mediante el cual se busca expandir el capital. **Acreedor:** Persona facultada legalmente par exigir a otra el pago de una obligación contraída.

Agotamiento: Disminución de la capacidad productiva de manera gradual en el proceso de explotación de recursos no renovables hasta su finalización.

Al portador: Documentos que no tienen consignado el nombre del beneficiario. Sin embargo; quien los presenta le da el derecho de exigir las prestación pacata. Se puede ceder mediante endoso.

Amortización: amortizar – liquidar una deuda a través de una serie de pagos que generalmente son iguales en periodos de tiempos iguales.

Anualidad: importe del pago en una serie de pagos que incluye capital e intereses.

B

Bono: Titulo de crédito emitido por empresas particulares y públicas que liquida intereses y que generalmente el vencimientos es a largo plazo.

C

Capital insoluto: es el *capital* que no se ha cubierto o pagado.

Capitalización: Interés que se gana sobre el interés.

Cuota: Importe a pagar, en el cual se engloba capital más intereses.

Cupón: Documento adherido a un titulo de crédito que garantiza el pago de capital e intereses o solamente intereses en un periodo de tiempo establecido.

D

Descuento: Operación mercantil que consiste en la compra de títulos de crédito como pagarés o letras de cambio, reduciendo de su valor nominal un importe equivalente a los intereses que generaria el documento entre la fecha de descuento y la fecha de vencimiento.

Depreciación: Perdida de valor que sufre un activo y fijo por el transcurso del tiempo.

Deudor: Persona física o moral que tiene el deber de dar cumplimiento a una obligación previamente pactada.

E

Endoso: Transmisión de los derechos de un titulo de crédito mediante una leyenda escrita al reverso firmado por el tenedor del documento.

Equivalente: Que tiene el mismo valor. Elemento o producto que sustituye a otro y que tiene el mismo resultado. Decimos éste es equivalente a aquél.

F

Financiamiento: Recursos tomados en prestamos y que genera un costo financieros adicional, para llevar a cabo una actividad donde de los recursos propios no son suficientes.

Flujos de caja: Cantidades de dinero que ingresan o egresan a la empresa, de resultado positivo o negativo.

I

Interés: Costo que tiene el uso del dinero ajeno.

Interpolación: localización de un dato dentro de un rango donde se conocen los extremos opuestos**.**

Lineal: Acción que se desarrolla y mide por líneas. Se contrapone a puntual (por puntos) o áreas (por área o superficie).

O

Obligaciones: Instrumentos financieros que generan intereses a favor del tenedor en un periodo de tiempo establecido.

P

Percepción: fenómeno de captación**.**

Periodo de gracia: Periodo de tiempo que dispone el deudor de un financiamiento para empezar a liquidar la primera anualidad ya sea de capital o intereses o ambos**.**

Periodos de pago: Tiempo que transcurre en tre una anualidad y otra.

Plazo: es el periodo de tiempo que el banco concede al usuario para devolver el principal.

Prima: Cantidad adicional que se obtiene en la negociación de un instrumentos financiero con relación a su valor nominal.

Progresión geométrica: valor que crece de manera exponencial mediante la aplicación de un factor constante.

R

Reserva: Cantidad que se separa de las utilidades de una empresa con la finalidad de destinarlos a cubrir necesidades de la misma empresa.

T

Tasa de interés: Representa el precio del dinero en los mercados financieros.

V

Valor constante: Valor de una cantidad o de un bien considerando los efectos de la inflación.

Valor de desecho: Cantidad estimada en que se puede llegar a vender un activo después de haber llegado al final de la vida útil**.**

Valor nominal: Cantidad expresada en un título de valor**.**

Valor presente: Valor de una cantidad futura expresada a fecha actual determinado a través de un proceso denominado descuento.

Vida útil: En activos fijos es estimar el periodo de tiempo que estara dando el servicio esperado por la empresa.