INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR JAPÓN

GUÍA METODOLÓGICA DE

MATEMÁTICA APLICADA

COMPILADO POR:

MAGÍSTER MOISÉS MORA M.

ADMINISTRACIÓN 2019

AMOR AL CONOCIMIENTO

www.itsjapon.edu.ec

1. IDENTIFICACIÓN DE LA ASIGNATURA

Nombre de la Asignatura: **MATEMÁTICA APLICADA**	**Componentes del Aprendizaje**	BÁSICO
Resultado del Aprendizaje: **COMPETENCIAS Y OBJETIVOS** 1. Comprender el uso de las expresiones aritméticas y algebraicas en relación a la administración de empresas. 2. Aplicar conocimientos específicos en maximización y minimización de utilidad a problemas empresariales de la vida real. 3. Interpretar de manera matemática problemas empresariales contemporáneos.		
Docente de Implementación: ING. MOISÉS FILIBERTO MORA MURILLO		
	Duración: 30 horas	

Unidades	Competencia	Resultados de Aprendizaje	Actividades	Tiempo de Ejecución
CAPÍTULO I **1. EXPRESIONES ARITMÉTICAS** **1.1 LOS NÚMEROS REALES** **1.2 OPERCIONES CON NÚMEROS REALES** **1.3 POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN** **1.4 RACIONALIZACIÓN** **1.5 SUCESIONES Y SERIES** **1.6 PREGRESIONES ARITMÉTICAS**	Comprender el uso de las expresiones aritméticas en administración de empresas.	El estudiante comprende la terminología y simbología empleada para resolver problemas en administración de empresas.	Exposiciones. Tareas y trabajo en clase. Informes de práctica.	**6 horas.**
CAPITULO II **2 EXPRESIONES ALGEBRAICAS, PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN** **2.1 RAZONES Y PROPORCIONES** **2.2 EXPRESIONES ALGEBRAICAS** **2.3 POLINOMIOS** **2.4 EXPONENTES FRACCIONARIOS** **2.5 PRODUCTOS NOTABLES** **2.6 CASOS DE FACTORIZACIÓN**	Conocer los casos de productos notables y factorización, aplicarlos a la administración de empresas.	El estudiante conoce y aplica la resolución de productos notables y factorización, aplicarlos a la administración de empresas.	Exposiciones. Tareas y trabajo en clase. Informes de práctica.	**8 horas.**

CAPITULO III **3. INECUACIONES Y SISTEMA DE ECUACIONES** **3.1 INECUACIONES LINEALES** **3.2 SISTEMA DE INECUACIONES** **3.3 MODELAMIENTO DE SISTEMA DE ECUACIONES** **3.4 ECUACIONES LINEALES**	Aprende a interpretar y resolver sistemas de inecuaciones y ecuaciones relacionando con problemas empresariales.	El estudiante interpreta los sistemas de ecuaciones e inecuaciones mediante ejercicios de la vida empresarial.	Exposiciones. Tareas y trabajo en clase. Informes de práctica.	**8 horas.**
CAPITULO IV **4. MAXIMIZACIÓN Y MINIMIZACIÓN DE UTILIDAD, FUNCIONES MATEMÁTICAS** **4.1 MAXIMIZACIÓN Y MINIMIZACIÓN DE UTILIDAD** **4.2 MODELAMIENTO DE MAXIMIZACIÓN Y MINIMIZACIÓN DE UTILIDAD A PROBLEMAS REALES** **4.3 INTRODUCCIÓN A FUNCIONES MATEMÁTICAS** **4.4 FUNCIONES LINEALES, CUADRÁTICAS, CÚBICAS, POR TRAMOS, VALOR ABSOLUTO Y RACIONALES.**	Identifica e interpreta problemas de la vida empresarial real con ejercicios prácticos resueltos en clase, aplicando maximización y minimización de utilidad y funciones matemáticas.	El estudiante identifica e interpreta problemas empresariales aplicando maximización y minimización de utilidad.	Exposiciones. Tareas y trabajo en clase. Informes de práctica.	**8 horas.**

2. CONOCIMIENTOS PREVIOS Y RELACIONADOS

Co-requisitos **S/N**

3. UNIDADES TEÓRICAS

3.1. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

3.1.1. INTRODUCCIÓN

Un conjunto es una colección de objetos. Por ejemplo, se puede hablar del conjunto de números pares entre 5 y 11, a saber, 6, 8 y 10. Cada objeto de un conjunto se denomina elemento de ese conjunto. No se preocupe si esto suena un poco circular. Las palabras conjunto y elemento son semejantes a línea y punto en geometría plana. No puede pedirse definirlos en términos más primitivos, es sólo con la práctica que es posible entender su significado. La situación es también parecida a la forma en la que un niño aprende su primer idioma. Sin conocer ninguna palabra, un niño infiere el significado de unas cuantas palabras muy simples y termina usándolas para construir un vocabulario funcional. Nadie necesita entender el mecanismo de este proceso para aprender a hablar. De la misma forma, es posible aprender matemáticas prácticas sin involucrarse con términos básicos no definidos.

Una manera de especificar un conjunto es haciendo una lista de sus elementos, en cualquier orden, dentro de llaves. Por ejemplo, el conjunto anterior es {6, 8, 10}, que puede denotarse mediante una letra, como A, lo que permite escribir$\mathrm{A} = \{6, 8, 10\}$. Observe que {8, 10, 6} también denota el mismo conjunto, así como {10, 10, 6, 8}. Un conjunto está determinado por sus elementos y ni las repeticiones ni los reordenamientos de una lista afectan al conjunto. Se dice que un conjunto A es un subconjunto de un conjunto B si y sólo si todo elemento de A también es un elemento de B. Por ejemplo, si $\mathrm{A} = \{6, 8, 10\}\mathrm{y}\mathrm{B} = \{6, 8, 10, 12\}$, entonces A es un subconjunto de B.

Ciertos conjuntos de números tienen nombres especiales. Los números 1, 2, 3, y así sucesivamente, forman el conjunto de los **enteros positivos** (o **números naturales**):

$$\textit{conjunto de los enteros positivos} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Los tres puntos significan que el listado de elementos continúa sin fin, aunque sí se sabe cuáles son los elementos. Los enteros positivos junto con el cero, y los **enteros negativos** $-1, -2, -3, \dots$, forman el conjunto de los **enteros**:

$$\textit{conjunto de los enteros} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

El conjunto de los **números racionales** consiste en números como $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{3}$, que pueden escribirse como una razón (cociente) de dos enteros. Esto es, un número racional es aquél que puede escribirse como $\frac{p}{q}$, donde p y q son enteros y q $\neq 0$. (El símbolo "≠" se lee "no es igual a".) Por ejemplo, los números $\frac{19}{20}$, $\frac{-2}{7}$ y $\frac{-6}{-2}$ son racionales. Se observa que $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{-4}{-8}$, 0.5 y 50% representan todos al mismo número racional. El entero 2 es racional puesto que $2 = \frac{2}{1}$. De hecho, todo entero es racional. Todos los números racionales pueden representarse por medio de números decimales que terminan, como $\frac{3}{4} = 0.75$ y $\frac{3}{2} = 1.5$ o bien por *decimales periódicos que no terminan* (compuesto por un grupo de dígitos que se repiten sin fin), como $\frac{2}{3} = 0.666\ldots$, $\frac{-4}{11} = -0.3636\ldots$, y $\frac{2}{15} = 0.1333\ldots$ Los números que se representan mediante decimales no periódicos que no terminan se conocen como **números irracionales**. Un número irracional no puede escribirse como un entero dividido entre un entero. Los números π (pi) y √2 son ejemplos de números irracionales. Juntos, los números racionales y los números irracionales forman el conjunto de los **números reales**.

Los números reales pueden representarse por puntos en una recta. Primero se selecciona un punto en la recta para representar el cero. Este punto se denomina origen (vea la figura 0.1). Después se elige una medida estándar de distancia, llamada *distancia unitaria*, y se marca sucesivamente en ambas direcciones a la derecha y a la izquierda del origen. Con cada punto sobre la recta se asocia una distancia dirigida, que depende de la posición del punto con respecto al origen. Las posiciones a la derecha del origen se consideran positivas (+) y las de la izquierda negativas (-). Por ejemplo, al punto ubicado a $\frac{1}{2}$ de unidad a la derecha del origen, le corresponde el número $\frac{1}{2}$, que se denomina la coordenada de ese punto. En forma similar, la coordenada del punto situado a 1.5 unidades a la izquierda del origen es -15. En la figura 0.1 están marcadas las coordenadas de algunos puntos. La punta de la flecha indica que la dirección hacia la derecha a lo largo de la recta se considera la dirección positiva.

A cada punto sobre la recta le corresponde un número real único, y a cada número real le corresponde un punto único de la recta. Por esta razón se dice que hay una correspondencia uno a uno entre los puntos de la recta y los números reales. A esta recta se le llama la **recta de los números reales**. Se tiene la libertad para tratar a los números reales como puntos sobre dicha recta y viceversa.

4. OPERACIONES ARITMÉTICAS.

4.1. Suma

La suma o adición es una operación que tiene por objeto reunir o agrupar varias cantidades en una sola.

Para esto, las diferentes cantidades se van añadiendo la una a la otra. Está representada por el signo + (más).

Veamos algunos ejemplos de sumas simples:

2 + 3 = 5 si tenemos dos unidades y le añadimos tres más, resultaran cinco.

1 + 1 = 2 si tenemos la unidad y le añadimos una más, resultaran dos.

4.2. Resta

La resta o sustracción es una operación que tiene por objeto quitarle una parte determinada a una cantidad. Está representada por el signo - (menos).

Veamos algunos ejemplos de restas simples:

8 - 4 = 4 si tenemos ocho unidades y le quitamos cuatro, nos quedaran cuatro.

9 - 2= 7 si tenemos nueve unidades y le quitamos dos unidades, quedaran siete.

4.3. Multiplicación

La multiplicación es una operación que tiene por objeto hallar el resultado o producto de sumar un número (multiplicando) tantas veces como lo indica otro (multiplicador).

Por ejemplo, queremos multiplicar 4 x 5.

4 x 5 En esta operación 4 es el multiplicando y 5 el multiplicador.

4 x 5 Entonces se nos pide sumar el numero 4 consigo mismo 5 veces.

4 x 5 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20

Existen las llamadas tablas de multiplicar que nos ayudan a conocer los resultados de las multiplicaciones. Es muy importante recordar estas tablas.

4.4. División

La división es la operación inversa a la multiplicación que tiene por objeto, dado el producto de dos factores (dividendo) y uno de los factores (divisor), hallar el otro factor (cociente).

Por ejemplo, queremos dividir 20 ÷ 5.

20 ÷ 5 En esta operación 20 es el dividendo y 5 el divisor.

20 ÷ 5 Necesitamos saber qué número multiplicado por 5 nos da 20.

20 ÷ 5 El número que cumple esa condición es 4. Entonces: 20 ÷ 5 = 4

4.5. Potenciación

Una potencia es una multiplicación sucesiva, donde un número (base) se multiplica por si mismo la cantidad de veces que lo indica otro número (exponente). Por lo general se representa bn, donde b es la base y n el exponente

Ahora voy a resolver la siguiente potencia: 54.

54 En esta operación 5 es la base y 4 el exponente.

54 Tenemos que multiplicar 5 por si mismo 4 veces.

54 5 x 5 x 5 x 5 = 625

Algunos ejemplos de potenciación:

22 = 2 x 2 = 4

43 = 4 x 4 x 4 = 64

75 = 7 x 7 x 7 x 7 x 7 = 16807

Tenemos también dos casos especiales:

a) Cuando el exponente es cero:

Si el exponente es cero, no importará cual sea la base, el resultado siempre será 1.

Ejemplos:

50 = 1

110 = 1

1230 = 1

b) Cuando el exponente es uno:

Si el exponente es 1, el resultado será la base.

Ejemplos:

01 = 0

31 = 3

431 = 43

4.6. Radicación

Es una de las operaciones inversas de la potenciación y se representa por n√, donde n es el grado del radical, √ es el signo radical y dentro de esta última ira un número denominado cantidad subradical.

Se buscará un número que elevado a un exponente igual al grado del radical me dé como resultado la cantidad subradical.

Veamos el caso de 2√25:

√25 El grado 2 se omite, es decir, cuando no encontremos grado este es 2.

√25 Buscamos un número que elevado a potencia 2 nos de 25.

√25 Se cumple: 52 = 25, entonces la respuesta será 5.

Algunos ejemplos se detallan a continuación:

3√27 = 3 Porque 33 = 27

3√64 = 4 Porque 43 = 64

4√81 = 3 Porque 34 = 81

Podemos profundizar más el tema, podemos ver el método para resolver una raíz cuadrada (grado 2).

4.7. Logaritmos

La logaritmación es otra operación inversa a la potenciación en la cual, a diferencia de la radicación, se busca el exponente al cual debo elevar un número (denominado base del logaritmo) para llegar a otro número incluido también en la operación.

Por ejemplo, queremos resolver log3 9.

log3 9 El subíndice 3 representa la base del sistema (base del logaritmo).

log3 9 Necesitamos saber a qué potencia debemos elevar 3 para tener 9.

log3 9 El número que cumple esa condición es 2: 32 = 9. La respuesta es 2.

Algunos ejemplos sobre logaritmación:

log7 49 = 2 Porque 72 = 49

log3 243 = 5 Porque 35 = 243

log2 256 = 8 Porque 28 = 256

5. NÚMEROS ENTEROS

Rápidamente nuestro sistema numérico quedo limitado, pues no nos permitía representar numéricamente muchas cosas, como, por ejemplo, una deuda, una temperatura bajo cero o un saldo en contra. Para solucionar este problema aparecen los números enteros, mismos que pueden ser positivos o negativos.

INDICE:

- **Números Enteros Positivos y Negativos**
- **Comparación**
- **Adición y Sustracción**
- **Multiplicación**
- **División**
- **Potenciación**
- **Radicación**

5.1. Números Enteros Positivos y Negativos

a) Números Enteros Positivos:

Se llaman así a todos los números que representen una cantidad. Los números naturales son los enteros positivos, con la única diferencia que a la hora de representar un entero positivo podemos anteponerle el signo +.

El número 8 es un entero positivo, puedo representarlo como 8 o como +8

El número 24 es un entero positivo, puedo representarlo como 24 o como +24

Los números 11, +32, +7, 35 son enteros positivos (no es necesario anteponer +).

b) Números Enteros Negativos:

Los enteros negativos representan una cantidad en contra o algo que no tenemos y necesariamente debemos anteponerle el signo -.

El número -8 es un entero negativo.

El número -24 es un entero negativo.

Los números -11, -32, -7, -35 son todos enteros negativos y por ello llevaran necesariamente el signo -.

c) Valor Absoluto:

El valor absoluto será la distancia que haya entre determinado número al origen de la recta numérica. En la práctica el valor absoluto es simplemente el número que tenemos, sin importar el signo positivo o negativo.

Para hallar el valor absoluto de -33: $|-33| = 33$

Para hallar el valor absoluto de +15: $|+15| = 15$

5.2. Comparación de Números Enteros

Para comparar números enteros debemos tener en cuenta que:

a) Cualquier número positivo es mayor que cualquier número negativo.

Ejemplo:

4 es mayor que -1, ya que 4 es un entero positivo y -1 es un entero negativo.

+3 es mayor que -18, ya que +3 es un entero positivo y -18 es un entero negativo.

b) Entre números positivos será mayor el que represente mayor cantidad.

Ejemplo:

+5 es mayor que +3, ya que 5 representa mayor cantidad que 3.

16 es mayor que 8, ya que 16 representa mayor cantidad que 8.

+13 es mayor que +12, ya que 13 representa mayor cantidad que 12.

c) Entre números negativos será mayor el que represente menor cantidad.

Ejemplo:

-2 es mayor que -5, ya que 2 representa menor cantidad que 5.

-11 es mayor que -13, ya que 11 representa menor cantidad que 13

5.3. Adición y Sustracción de Números Enteros

Tendremos dos posibilidades, las cuales son:

Si tenemos números de igual signo:

Cuando tengamos dos o más números de igual signo, lo que tendremos que hacer es sumar las cantidades y al resultado anteponerle el mismo signo.

Observemos el siguiente caso: 35 +46 +11

35 +46 +11 En esta operación tenemos tres números positivos: +35, +46 y +11

35 +46 +11 Lo que debemos hacer es sumar los tres números, nos dará: 92+92 = 92

El resultado también será positivo.

Otro ejemplo podría ser: -12 -28 -21

-12 -28 -21 En esta operación tenemos tres números negativos: -12, -28 y -21

-12 -28 -21 Entonces lo que debemos hacer es sumar los tres números, nos dará: 61

-61 El resultado también será negativo, necesariamente le antepondremos -.

b) Si tenemos números de signos diferentes:

Si tenemos números de diferentes signos, restamos el número mayor menos el número menor y el resultado llevara el signo del número mayor.

Si: 35 -46

35 -46 En esta operación tenemos un número positivo y otro negativo.

35 -46 El mayor es 46 y el menor 35, entonces: 46 - 35 = 11

-11 Como el número mayor es 46, y este es negativo, el resultado será también negativo.

Otro ejemplo: -12 +28

-12 +28 En esta operación tenemos un número negativo y otro positivo.

-12 +28 El mayor es 28 y el menor 12, entonces: 28 -12 = 16

+16 = 16 Como el número mayor es 28, y este es positivo, el resultado será también positivo

5.4. Multiplicación de Números Enteros

Cuando tengamos que multiplicar dos o más números enteros, lo primero que debemos hacer es proceder a multiplicar los números sin importarnos el signo que estos tengan. Una vez que hemos hallado el resultado, recién colocaremos el signo que corresponda de acuerdo a la siguiente Ley de Signos:

(+) x (+) = (+) El resultado de multiplicar dos números positivos es un número positivo

(+) x (-) = (-) El resultado de multiplicar un número positivo por otro negativo es un número negativo

(-) x (+) = (-) El resultado de multiplicar un número negativo por otro positivo es un número negativo

(-) x (-) = (+) El resultado de multiplicar dos números negativos es un número positivo

Ejemplo:

Queremos multiplicar -20 x 5

-20 x 5 Recordemos que cuando un número no lleva signo, es positivo.

-20 x + 5 En esta operación 20 es un número negativo y 5 es un número positivo.

20 x 5 = 100 Nos olvidamos momentáneamente de los signos y hacemos 20 x 5 = 100

-20 x 5 = -100 Como tenemos un número negativo y otro positivo, el resultado será número negativo

Debemos emplear el mismo procedimiento para cualquier caso de multiplicación de números enteros o con signo que se nos presente.

5.5. División de Números Enteros

Cuando tengamos que dividir números enteros, lo primero que debemos hacer es proceder a dividir los números sin importarnos el signo que estos tengan.

Una vez que hemos hallado el resultado, recién colocaremos el signo que corresponda de acuerdo a la siguiente Ley de Signos (que es prácticamente la misma que la que utilizamos en multiplicación):

(+) ÷ (+) = (+) El resultado de dividir dos números positivos es un número positivo

(+) ÷ (-) = (-) El resultado de dividir un número positivo entre otro negativo es un número negativo

(-) ÷ (+) = (-) El resultado de dividir un número negativo entre otro positivo es un número negativo

(-) ÷ (-) = (+) El resultado de dividir dos números negativos es un número positivo

Ejemplo:

Queremos dividir -80 ÷ -5

-80 ÷ -5 En esta operación tanto -80 como -5 son números negativos.

80 ÷ 5 = 16 Nos olvidamos momentáneamente de los signos y hacemos 80 ÷ 5 = 16

-80 ÷ -5 = +16 Como tenemos dos números negativos dividiéndose, el resultado será número positivo

-80 ÷ -5 = 16 Recordando siempre que cuando un número es positivo no es necesario ponerle signo

El mismo procedimiento se empleará para cualquier caso de división de números enteros o con signo que se nos presente.

5.6. Potenciación de Números Enteros

Ya hemos definido previamente lo que es la potenciación, por lo cual en esta sección nos orientaremos a definir que signo llevara la respuesta de una potencia.

Si el exponente es un número positivo (recordando que cuando no tiene signo es número positivo también), podemos afirmar que de acuerdo al signo de la base y si el exponente es número par o impar, tendremos:

(+) impar = (+) Cualquier número positivo elevado a exponente impar tiene resultado positivo

(+) par = (+) Cualquier número positivo elevado a exponente par tiene resultado positivo

(-) impar = (-) Cualquier número negativo elevado a exponente impar tiene resultado negativo

(-) par = (+) Cualquier número negativo elevado a exponente par tiene resultado positivo

Ejemplos:

163 = 16 x 16 x 16 = 4096

-142 = -14 x -14 = 196

-173 = -17 x -17 x -17 = -4913

5.7. Radicación de Números Enteros

Recordemos que la radicación es una de las operaciones inversas de la potenciación y se representa por n√, donde n es el grado del radical, √ es el signo radical y dentro de este último ira un número denominado cantidad subradical.

Nosotros buscamos un número que elevado a un exponente igual al grado del radical me de como resultado la cantidad subradical, misma que podrá ser un número positivo o negativo.

Al resolver nos podemos ver en cualquiera de los siguientes casos:

Impar √ (+) = (+) Raíz impar de un número positivo dará otro número positivo

Par √ (+) = (+) y (-) Raíz par de un número positivo dará un número positivo y otro negativo.

Par √ (-) = no se puede Raíz par de un número negativo no se puede determinar

Impar √ (-) = (-) Raíz impar de un número negativo dará otro número negativo

6. NÚMEROS FRACCIONARIOS

Los números fraccionarios surgen de la necesidad de representar cantidades inexactas. Podríamos dar muchas definiciones sobre lo que es un número fraccionario, fracción o quebrado, pero básicamente una fracción es una forma de representar una división inexacta

INDICE

- **Fracciones: Simplificación y Fracciones Equivalentes**
- **Multiplicación**
- **Potenciación**
- **Radicación**

6.1. Fracciones: Simplificación y Fracciones Equivalentes

a) ¿Qué son las fracciones?:

Se llaman así a todos los números que representen una cantidad inexacta, por lo general vienen de una división inexacta.

Ejemplo:

8 ÷ 5 El resultado de esta división será inexacto (cociente 1 y residuo 3)

8 ÷ 5 = 8/5 El resultado de esta división inexacta lo podemos representar como un número fraccionario

Ahora, este número fraccionario, o simplemente fracción tendrá sus partes definidas:

8 ~> es el numerador

5 ~> es el denominador

Además, cabe resaltar que la raya o división central representa el operador matemático de división.

6.2. Multiplicación de Números Fraccionarios

Cuando tengamos que multiplicar dos o más números fraccionarios, simplemente debemos multiplicar todos los numeradores y todos los denominadores.

División de Números Fraccionarios

Cuando tengamos que dividir números fraccionarios en realidad lo que se nos pide es hacer una multiplicación cruzada.

Ejemplo:

¬2 ÷ 3 = 8 (hemos multiplicado 2 x 4 para hallar el numerador 8)

5 4 15 (hemos multiplicado 5 x 3 para hallar el denominador 15)

También podemos convertir la división a multiplicación, para esto cada vez que veamos un operador (÷) lo podremos reemplazar por un operador x siempre y cuando invirtamos la fracción que viene después del operador. Veamos el ejemplo anterior:

2 ÷ 3 = 2 x 4 = 8 (hemos cambiado el operador ÷ por el operador x, y además

5 4 5 3 15 hemos invertido la fracción que venía después del ÷)

Lo más recomendable es llevarlo a multiplicación ya que así la operación la podemos hacer directamente sin importar la cantidad de fracciones que tengamos y además podemos simplificar antes de multiplicar. Por ejemplo:

4 ÷ 3 ÷ 2 ÷ 1 (si la queremos resolver por multiplicación cruzada lo tendremos

5 2 5 3 que hacer de dos en dos y además no puedo simplificar antes)

4 x 2 x 5 x 3 (ahora lo he convertido a multiplicación, puedo resolver todo

5 3 2 1 directamente y además podemos simplificar antes)

Solamente podemos simplificar antes de operar en la multiplicación

6.3. Potenciación de Números Fraccionarios

En la potenciación de números fraccionarios, o simplemente fracciones, tendremos que observar una condición y esta es que la fracción debe estar entre paréntesis para que la potencia la afecte a toda ella.

Si por ejemplo tenemos:

(4)3 = 43 = 4 x 4 x 4 = 64

3 33 3 x 3 x 3 27

Pero si lo tenemos sin paréntesis:

43 = 43 = 4 x 4 x 4 = 64

3 3 3 3

En los dos ejemplos anteriores observamos claramente el efecto del paréntesis y la necesidad de su empleo en la potenciación de fracciones.

6.4. Radicación de Números Fraccionarios

En este caso el radical afectara tanto al numerador como al denominador.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$$

(porque 2 x 2 x 2 = 8)

(porque 3 x 3 x 3 = 27)

7. FRACCIONES DECIMALES

Los números fraccionarios se pueden representar también como números decimales. En esta sección estudiaremos a fondo cuales son y cómo se trabaja con ellos.

INDICE:

- **Fracciones Decimales**
- **Adición y Sustracción**
- **Multiplicación**
- **División**
- **Potenciación**
- **Conversión de Fracción a Decimal**
- **Conversión de Decimal a Fracción**

7.1. Fracciones Decimales

a) ¿Qué son las fracciones decimales?:

Se llaman así a todos los números que representen una cantidad inexacta, y que presentan una parte entera y una parte decimal, mismas que se encuentran separadas por la coma decimal (,). Ejemplo:

0,65 Este número es una fracción decimal o simplemente un decimal pues encontramos la coma decimal

0,65 La parte entera se encontrará a la izquierda de la coma decimal, en este caso será 0.

0,65 La parte decimal se encuentra a la derecha de la coma decimal, en este caso será 65.

Existen dos clases de decimales:

Finitos

Infinitos.

Decimales Finitos:

Cuando la parte decimal tiene un final determinado y no va más allá, decimos que se trata de un decimal finito.

El ejemplo anterior nos decía que teníamos 0,65.

Aquí vemos que la parte decimal termina con el número 65 y no sigue por lo tanto se trata de un decimal finito.

c) Decimales Infinitos:

Son aquellos en los que la parte decimal no tiene un final determinado. Dentro de ellos tenemos dos que son muy importantes y son:

c.1) Decimales Periódicos Puros:

En ellos se repite siempre el mismo número o periodo.

Ejemplo:

0,161616...... En la parte decimal se repite infinitas veces el 16

0,16 Entonces 16 es el periodo, el decimal se puede escribir así.

c.2) Decimales Periódicos Mixtos:

Encontramos una parte que no se repite y otra que se repite infinitas veces.

0,143333..... En la parte decimal el 14 no se repite y el 3 se repite.

0,143 Podemos escribirlo también así.

7.2. Adición y Sustracción de Decimales

Podemos sumar y restar decimales de una manera simple y directa siempre y cuando los ordenemos de acuerdo a la coma decimal. Por ejemplo, digamos que queremos sumar 18,36 con 1,172:

18,36 +

1,172 Vemos como ordenamos la coma decimal de manera tal que quede a la misma altura en ambos términos.

18,360+

1,172 Inclusive si queremos podemos añadir un cero de manera que ambos términos tengan tres decimales.

18,360+

1,172

19,532 Finalmente sumamos como siempre lo hemos hecho y colocamos la coma decimal en el mismo orden en que se encontraba previamente. La respuesta será: 19,532

7.3. Multiplicación de Decimales

En la multiplicación de decimales no importara la cantidad de decimales que se tengan, no será necesario ni recomendable completar con ceros, simplemente tenemos que empezar a realizar la multiplicación sin importarnos la cantidad de decimales que se tengan.

7.4. División de Decimales

Para dividir números decimales debemos tener exactamente la misma cantidad de decimales en el dividendo como en el divisor.

7.5. Potenciación de Decimales

Simplemente debemos observar la definición fundamental de potencia, misma que dice que: Una potencia es una multiplicación sucesiva, donde un número (base) se multiplica por si mismo la cantidad de veces que lo indica otro número (exponente). Por lo general se representa bn, donde b es la base y n el exponente.

Entonces si tenemos un número cualesquiera elevado a una potencia, significara que debemos multiplicarlo por si mismo la cantidad de veces que la potencia lo indique.

Ejemplo:

(3,11)3 = 3,11 x 3,11 x 3,11

(3,11)3 = 3,11 x 3,11 x 3,11

(3,11)3 = 9,6721 x 3,11

(3,11)3 = 30,080231

7.6. Conversión de Fracción a Decimal

Podemos convertir una fracción a decimal si dividimos el numerador entre el denominador. Esto lo podemos realizar para cualquier fraccionario que tengamos.

7.7. Conversión de Decimal a Fracción

En este caso tendremos tres posibilidades, una para cada tipo de decimal estudiado en el apartado 1.

a) Decimales Finitos:

Veamos un ejemplo:

1,17 En este ejemplo queremos llevar 1,17 a fracción

1,17 Vemos que este número tiene dos decimales

117

100 Entonces colocaremos todo el número sin coma decimal como númerador y en el denominador colocaremos un 1 seguido de dos ceros (uno por cada decimal)

Se coloca el número sin coma decimal como numerador y en el denominador se coloca 1 seguido de tantos ceros como decimales tenga el número en su forma decimal.

b) Decimales Periódicos Puros:

Veamos un ejemplo:

2,283 Tenemos este decimal en el cual se repite el periodo 283.

2,283 El periodo (o lo que se repite) son tres números.

2 283

999 En este caso separamos la parte entera de la parte decimal. A la parte decimal la colocamos como numerador sobre un denominador formado por tres 9 (uno por cada decimal). Nótese que es un número mixto.

2281

999 Podríamos llevar ese número mixto a fracción para así obtener la fracción equivalente a 2,283

Se formará primero un Número Mixto, se separa la parte entera y la parte decimal ira como numerador y en el denominador se colocaran tantos nueves como decimales tenga el periodo del decimal.

c) Decimales Periódicos Mixtos:

Veamos un ejemplo:

5,246 Tenemos un decimal periódico mixto, en el 2 es la parte que no se repite y 46 es la parte que se repite infinitas veces.

5,246 Son dos los decimales que se repiten.

5,246 Es un solo decimal el que no se repite.

5 246 -2

990 Separamos la parte entera de la decimal. En el numerador restare toda la parte decimal menos la parte que no se repite. En el denominador colocare un 9 por cada número que se repite y un 0 por cada número que no se repite.

5 244

990 Efectuamos la resta y llegamos a este número mixto que se presenta. Podemos aún simplificar la parte fraccionaria.

5 122

495 Una vez simplificado podríamos llevarlo a su forma fraccionaria aún, para lo cual seguiremos el procedimiento de llevar un número mixto a fracción

2597

495

8. NÚMEROS IRRACIONALES

Los números irracionales son aquellos que representan un decimal infinito y este no tiene ninguna relación ni periodo en particular. Principalmente provienen de radicales inexactos.

INDICE:

- **Números Irracionales**
- **Adición y Sustracción**
- **Multiplicación**
- **División**
- **Potenciación**
- **Operaciones Combinadas con Radicales**

8.1. Números Irracionales

Al resolver una raíz cuadrada inexacta, como por ejemplo $\sqrt{2}$, encontraremos una respuesta decimal 1,4142135623730950488016...... Que como vemos será infinita y en la cual no encontramos ninguna relación ni periodo definido. Este tipo de números son conocidos como Números Irracionales.

Es mucho más sencillo decir simplemente √2, que decir todo el número decimal, es más, es más exacto y preciso decir √2 que decir todo el número decimal (finalmente este decimal no será más que una aproximación).

8.2. Adición y Sustracción de Irracionales

Podemos sumar y restar números irracionales solamente cuando el radical que tengamos sea el mismo en los términos que me dispongo a sumar y restar. Lo explicaremos mejor mediante ejemplos:

Ejemplo 1:

$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2}$ En este caso se me pide realizar una operación combinada de suma y resta

$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2}$ Podremos sumar y restar ya que todos los términos tienen $\sqrt{2}$

Ejemplo 2:

$3\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - \sqrt{5}$ Aquí también se me pide realizar una operación combinada de suma y resta

$3\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - \sqrt{5}$ Sin embargo no será posible porque los tres radicales son diferentes.

Pero, ¿cómo se pueden realizar estas operaciones?

Volvamos al Ejemplo 1:

$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2}$ Ya sabemos que podremos sumarlo y restarlo sin ningún problema.

$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 1\sqrt{2}$ Debemos saber que cuando tengamos el radical solo siempre habrá un "1"

$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 1\sqrt{2}$ Para resolver este ejercicio bastara con sumar los números fuera de los radicales.

$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 1\sqrt{2}$ Tendré que resolver $3 + 5 - 1 = 7$ y la parte radical no cambiara.

$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 1\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

Veamos ahora otro ejemplo:

$4\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + \sqrt{7}$ Como todos los términos tienen $\sqrt{7}$ podré sumar y/o restar sin problema

$4\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + 1\sqrt{7}$ Hemos añadido un "1" donde no había número con el radical.

$4\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + 1\sqrt{7} = 3\sqrt{7}$

8.3. Multiplicación de Irracionales

Existe una propiedad de los números irracionales, y en general de los radicales, que nos dice: n√a.b = n√a n√b (y viceversa)

Esto significa que si tengo dos números multiplicándose dentro de una raíz, puedo extraer la raíz de cada uno de ellos y luego multiplicarlos; o también que si tengo dos raíces de igual grado multiplicándose puedo multiplicar los números y obtener la raíz después.

Ejemplo 1:

√9.4 = √9. √4 = 3. 2 = 6

=> Primero tenia dentro de la raíz cuadrada 9x4, entonces saque raíz cuadrada a cada uno de los números para finalmente multiplicarlos.

Ejemplo 1:

√12.3 = √12. √3 = √36 = 6

=> En este caso no me convenía hacer lo del ejemplo anterior, por eso multiplique 12x3 primero y luego saque la raíz cuadrada a este resultado.

8.4. División de Irracionales

La propiedad nos dice que: n√a ÷ n√b = n√a÷b (y viceversa)

Entonces, si tenemos raíces de grado n que se estén dividiendo, dará lo mismo si las resolvemos por separado y después las dividimos, que si primero las dividimos y luego extraemos la raíz.

Ejemplo1:

3√27 ÷ 3√8 = 3 ÷ 2 = 1,5

=> Primero hemos extraído las dos raíces cúbicas para luego dividir los resultados.

Ejemplo 2:

3√64 ÷ 3√8 = 3√64÷8 = 3√8 = 2

=> Ahora hemos resuelto primero la división de las cantidades subradicales y dejamos al ultimo la raíz cúbica.

8.5. Potenciación de Irracionales

Lo único que debemos hacer es pasar el grado del radical a dividir al exponente. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1:

3√66 = 66/3 = 62 = 36

=> Como vemos el grado del radical (en este caso 3) paso a dividir al exponente (en este caso 6). El resultado de esta división (para nosotros $6 \div 3 = 2$) será el nuevo exponente para la cantidad subradical (en este caso 6). Finalmente hemos realizado la potenciación

Ejemplo 2:

$(\sqrt{4})6 = 46/2 = 43 = 64$

=> En este caso hemos hecho lo mismo que en el caso anterior, haciendo la aclaración de que cuando un radical no tiene grado, este es 2.

8.6. Operaciones Combinadas con Radicales

En algunos casos parece que no se puede resolver una operación de suma y/o resta entre números irracionales, en estos casos dependerá de nosotros darle la forma correcta ala ejercicio.

Por ejemplo, tenemos: $3\sqrt{2} + \sqrt{50} - \sqrt{98}$

Aparentemente no lo podemos resolver, todos los radicales son diferentes, pero nosotros podremos utilizar las propiedades de la multiplicación para darle la forma que nos ayude a resolverlo.

$\sqrt{50}$ la podemos escribir como $\sqrt{25.2}$ porque $25. 2 = 50$.

Resolveremos la parte que tiene raíz cuadrada exacta, es decir, $\sqrt{25} = 5$

La parte que no tiene raíz cuadrada exacta la dejamos igual: $\sqrt{2}$

Finalmente nos quedara que: $\sqrt{50} = \sqrt{25.2} = \sqrt{25}\ \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

Lo mismo hacemos para $\sqrt{98}$:

$\sqrt{98} = \sqrt{49.2} = \sqrt{49}\ \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

Reemplazamos los valores obtenidos:

$3\sqrt{2} + \sqrt{50} - \sqrt{98}$

$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2}$

$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = 1\sqrt{2}$

El número "1" que nos queda podemos colocarlo o no según nuestra conveniencia.

9. RAZONES Y PROPORCIONES

Las razones y las proporciones son el resultado de comparar dos cantidades. Veremos cada una de ellas y además veremos su aplicación más conocida: la regla de tres.

INDICE

- **Razones y Proporciones**
- **Magnitudes Proporcionales**
- **Regla de Tres Simple**
- **Regla de Tres Compuesta**

9.1. Razones y Proporciones

Razón o Relación:

Se llaman así al resultado de comparar dos cantidades, la primera de ellas llamada antecedente y la segunda llamada consecuente. Estas cantidades las presentaremos en forma fraccionaria (aunque no es exactamente una fracción), de la siguiente manera:

antecedente
consecuente

Por ejemplo, si tenemos la razón de 7 a 4, el antecedente será 7 y el consecuente será 4.

Nuestra razón quedara: 7
4

Proporciones:

Las llamamos así cuando tenemos una pareja de razones que son iguales.

Por ejemplo, tenemos: las razones 2 es a 3 y 6 es a 9.

Se escribirán: 2 y 6
3   9

Entonces las comparo (como si se tratara de fracciones comunes):

2   6   Recordemos que en comparación de fracciones multiplico cruzado
3   9   Tenemos entonces que 2 x 9 =18 y 6 x 3 = 18

Como los resultados son iguales (en ambos casos es 18) podemos afirmar que son fracciones equivalentes, pero además están formando una proporción. La proporción se lee 2 es a 3 como 6 es a 9.

En las proporciones encontramos los extremos y los medios. Extremos para nuestro caso son 2 y 9 (en rojo), mientras que los medios son 6 y 3 (en azul).

9.2. Magnitudes Proporcionales

Las magnitudes proporcionales pueden ser de dos clases:

Magnitudes Directamente Proporcionales:

Son dos magnitudes tales que, multiplicando una de ellas por un número, la otra también debe ser multiplicada por el mismo número; o dividiendo a una de ellas por un número, la otra también debe ser dividida por el mismo número.

Por ejemplo si tenemos: $\frac{7}{4}$

Se quiere formar una proporción, entonces tendremos que multiplicar o dividir por el mismo número tanto a 7 como a 4:

7 ~> x4 ~> 28

4 ~> x4 ~> 16

Hemos formado: $\frac{7}{4} = \frac{28}{16}$ Nótese que en este caso ambas cantidades aumentan

Son magnitudes directamente proporcionales:

- El tiempo y las unidades de trabajo realizadas (a mayor tiempo, mayor trabajo realizado)
- La cantidad y el precio (a mayor cantidad, mayor precio)
- El peso y el precio (a mayor peso, mayor precio)
- El tiempo de trabajo y el sueldo de un trabajador (a mayor tiempo, mayor sueldo)
- El espacio con la velocidad (recorremos mayor distancia si vamos a mayor velocidad)
- El espacio con el tiempo (recorremos mayor distancia en mayor tiempo)

b) Magnitudes Inversamente Proporcionales:

Son dos magnitudes tales que, multiplicando una de ellas por un número, la otra queda dividida por el mismo número; o dividiendo a una de ellas por un número, la otra debe ser multiplicada por el mismo número.

Por ejemplo, si tenemos: $\frac{4}{7}$

Queremos formar una proporción (empleando el criterio de magnitudes inversamente proporcionales:

4 ~> ÷4 ~> 1 Nótese que mientras una cantidad aumenta la otra disminuye

7 ~> x4 ~> 28

Son magnitudes inversamente proporcionales:

- El número de obreros y el tiempo para realizar una obra (mas obreros, menos tiempo)
- Las horas de trabajo y los días que se trabaja (mas horas, menos días)
- La velocidad y el tiempo (a mayor velocidad, menor tiempo en recorrer una distancia)

9.3. Regla de Tres Simple

La regla de tres simple se apoya en los criterios de las magnitudes proporcionales, entonces tendremos dos clases:

Regla de Tres Simple Directa:

Esta se utiliza para magnitudes directamente proporcionales.

Por ejemplo, si tenemos que 5 libros me cuestan 26 soles, queremos saber cuánto costaran 15 libros

Supuesto 5 libros ~> S/. 26

Pregunta 15 libros ~> x

Para hallar el valor de x, empezamos a multiplicar cruzado los datos que si tenemos:

Supuesto 5 libros ~> S/. 26

Pregunta 15 libros ~> x 15 x 26 = 390

Y ahora dividimos la cantidad obtenida entre el número que aún no habíamos empleado:

Supuesto 5 libros ~> S/. 26

Pregunta 15 libros ~> x 390 ÷ 5 = 78

Finalmente decimos que 15 libros nos costaran 78 soles.

Regla de Tres Simple Inversa:

Esta se utiliza para magnitudes inversamente proporcionales.

Por ejemplo, si 4 obreros hacen una pequeña construcción en 12 días, ¿cuántos días demoraran 6 obreros?

Supuesto 4 obreros ~> 12 días

Pregunta 6 obreros ~> x

Para hallar el valor de x, empezamos a multiplicar directamente los datos que si tenemos:

Supuesto 4 obreros ~> 12 días

Pregunta 6 obreros ~> x 4 x 12 = 48

Y ahora dividimos la cantidad obtenida entre el número que aún no habíamos empleado:

Supuesto 4 obreros ~> 12 días

Pregunta 6 obreros ~> x $48 \div 6 = 8$

Finalmente decimos que 6 obreros completaran su trabajo en 8 días.

9.4. Regla de Tres Compuesta

Es una aplicación sucesiva de la regla de tres simple. Debemos tener mucho cuidado al ver si estamos trabajando con regla de tres simple o regla de tres compuesta, por ello es recomendable hacerlo por partes.

Ejemplo:

Si 3 hombres avanzan 80 metros de una obra en 15 días, ¿cuantos días necesitaran 5 hombres para avanzar 60 metros de la misma obra?

Distinguimos en nuestro ejemplo:

Supuesto 3 hombres ~> 80 metros ~> 15 días

Pregunta 5 hombres ~> 60 metros ~> x

Podemos decir que la relación entre cantidad de hombres y días trabajados esta formando una regla de tres simple inversa (a mayor cantidad de hombres menos días), entonces podríamos decir:

$$\frac{3 \times 15}{5}$$

Además sabemos que la cantidad de hombres y la cantidad de trabajo avanzada forman una regla de tres simple directa (a mayor cantidad de hombres, más trabajo se puede realizar, entonces:

$$\frac{3 \times 15 \times 60}{5 \times 80} = \frac{2700}{400} = 6{,}75$$

Entonces decimos que el trabajo se realizara en 7 días (hemos redondeado)

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA

Veremos en primera instancia que, y cuales son expresiones algebraicas, evaluaremos sus propiedades y veremos unos ejercicios.

- **Expresiones Algebraicas**

Expresiones Algebraicas

Expresiones algebraicas son todas aquellas que tienen una parte numérica y una parte literal. Por ejemplo, la expresión 8a3b2c es una expresión algebraica, en este caso un monomio, el cual tiene como parte numérica al número 8 y como parte literal a3b2c. Nótese que los exponentes se consideran parte literal.

Profundizando un poco más en lo mencionado líneas arriba, existen básicamente dos tipos de expresiones algebraicas, y son:

Monomios y Polinomios

Monomios:

Es una sola expresión algebraica. Ejemplos de monomios son:

4x4y2 Como se puede ver es una sola expresión con parte numérica y parte literal

8a3b2c En este caso la letra c no tiene exponente, cuando esto suceda se asume que dicho exponente es 1.

m2n3 En este caso aparentemente no hay una parte literal, cuando esto suceda nosotros sabremos que hay un 1, así: 1m2n3

b) Polinomios:

Son dos o más expresiones algebraicas (con diferente parte literal) que se están sumando o restando.

Ejemplos de polinomios son:

3x2y + 5x3y2 Este es un polinomio de dos términos o binomio. Aunque las partes literales aparentemente son iguales, estas son diferentes, pues los exponentes no son iguales.

3x4 +xyz -2y2z Ahora tenemos un polinomio de tres términos o trinomio.

a3 -a2b +2ab2 -5b3 Otro ejemplo de polinomio.

OPERACIONES CON MONOMIOS

Ahora que ya sabemos qué y cuáles son las expresiones algebraicas empezaremos a trabajar con ellas. Veamos lo referente a los monomios.

INDICE:

- **Términos Semejantes**
- **Suma y Resta de Monomios**
- **Multiplicación de Monomios**
- **División de Monomios**
- **Potenciación de Monomios**
- **Radicación de Monomios**

Términos Semejantes

Antes de pasar a evaluar las diferentes operaciones con monomios, conviene ver este concepto, el de los términos semejantes.

Observemos la siguiente pareja de expresiones algebraicas: a) 4x2y3 b) 2x2y3

Vemos que en ambas expresiones se repite la parte literal, en ambos monomios hay x2, así mismo, en ambos monomios hay y3.

Cuando la parte literal en dos monomios sea igual, entonces estaremos hablando de términos semejantes.

No importara el orden de las letras en la parte literal, así, los monomios: 6a3b2c , cb2a3 , también representan términos semejantes pues en ambos encontramos a3, b2 y c1.

Suma y Resta de Monomios

Para poder sumar o restar monomios estos deberán ser términos semejantes. Veamos el caso siguiente:

Digamos que queremos sumar los monomios: a) 3m2n b) 6m2n

Primero que nada deberemos evaluar si son términos semejantes: vemos primero que m2 está en ambos monomios, y vemos luego que n1 también está en ambos monomios, llegando a la conclusión que son términos semejantes y por ende se podrán sumar:

3m2n + 6m2n pero solamente sumaremos la parte numérica

3m2n + 6m2n en este caso sumo 3 + 6 = 9

9m2n será el monomio respuesta (nótese que la parte literal sigue igual)

Muy similar será el trabajo en la resta, por ejemplo digamos que queremos restar: 5x4y3 -x4y3

Evaluaremos primero si son términos semejantes. Observamos que en ambos casos habrá el termino x4 y también el termino y3, por lo tanto serán términos semejantes. Procedemos a la resta:

5x4y3 -1x4y3 ahora restare solamente la parte numérica (colocamos el 1 para verlo más claramente)

5x4y3 -1x4y3 en este caso resto 5 - 1 = 4

4x4y3 será el monomio respuesta

En el caso de que encontremos que los términos no son semejantes, no se podrán sumar ni restar los términos, por ejemplo, 3a2b +2a3b, no son términos semejantes, mientras que en uno de ellos encontramos a2 en el otro encontramos a3; la respuesta de esta suma quedaría solamente como: 3a2b +2a3b

Multiplicación de Monomios

Para multiplicar monomios no será necesario que sean términos semejantes. Podremos multiplicar entre ellos a cualquier monomio. Por ejemplo, se desea multiplicar: a) 5x2y5   b) 2x3y2z

Debemos tratar por separado a la parte numérica y a la parte literal. Primero evaluemos la parte numérica:

(5x2y5)(2x3y2z)   la parte numérica es algo que ya conocemos y que no cambiara, 5x2 = 10

En la parte literal debemos tomar especial cuidado con las letras que se repiten en los términos pues los exponentes se sumaran. Primero vemos que se repite la letra x, y luego la letra y:

(5x2y5)(2x3y2z)   primero para la letra x, sumamos los exponentes 2+3 = 5

(5x2y5)(2x3y2z)   ahora sumamos los exponentes de la letra y, 5+2 = 7

(5x2y3)(2x3y2z)   finalmente la letra z no se repite por lo cual solo la colocare tal como esta

Atención con la respuesta: 10x5y7z

Recordemos siempre que la parte numérica se multiplica y en la parte literal se suman los exponentes de las letras que se repiten.

División de Monomios

Para dividir polinomios tampoco es necesario que sean términos semejantes. Por ejemplo yo podré dividir los monomios, 81a2b3c4d5 entre 3b2c2 (nótese que en el divisor deberán estar las mismas letras que en el dividendo, de ninguna manera podría dividirse, por ejemplo, 81a2b3c4d5 entre 3x2y2)

Entonces tenemos: 81a2b3c4d5 ÷ 3b2c2

Primero dividiremos la parte numérica como tradicionalmente lo hacemos, es decir: 81÷3 = 27

Ahora en la parte literal, restaremos los exponentes de las letras que se repiten, en este caso, la letra b y la letra c:

81a2b3c4d5 ÷ 3b2c2 en este caso restamos 3 - 2 = 1

81a2b3c4d5 ÷ 3b2c2 en este caso restamos 4 - 2 = 2

Entonces la respuesta será: 27a2bc2d5 (el exponente 1 de la letra b no lo he puesto por no ser necesario)

Cabe resaltar que en algunos casos la letra "desaparecerá", esto ocurrirá cuando su exponente resulte 0 (cero). Por ejemplo, en: 5a2b2 ÷ ab2 (al restar los exponentes para la letra b dará como resultado 0: 2 - 2 = 0)

El resultado para este caso sería: 5a

Potenciación de Monomios

Recordemos siempre que un monomio tiene una parte numérica y otra parte literal. Primero trabajaremos la parte numérica como siempre lo hemos hecho, es decir, aplicando la definición de potencia. Luego trabajaremos con la parte literal, en la cual multiplicaremos el exponente de cada letra por el exponente de la potencia dada.

En el ejemplo: (3x2y)4, se nos pide elevar el monomio 3x2y a potencia 4

Tal como hemos dicho primero haremos la parte numérica: 34 = 3 x 3 x 3 x 3 = 81

Y ahora pasaremos a la parte literal: (x2y1)4 = x2x4y1x4 = x8y4

Finalmente, la respuesta será: 81x8y4

Otro ejemplo, podría ser: (ab2c3d4)5

Recordemos que cuando no vemos la parte literal, en realidad hay un 1 (uno), 15 = 1

En la parte literal tendremos: (a1b2c3d4)5 = a1x5b2x5c3x5d4x5 = a5b10c15d20

Finalmente, la respuesta será: a5b10c15d20

Radicación de Monomios

Al igual que en la potenciación, en el caso de la radicación debemos trabajar por separado la parte numérica y la parte literal. A la parte numérica le sacaremos la raíz correspondiente; y en la parte numérica dividiremos el exponente de cada letra entre el grado del radical (en una raíz cuadrada el grado del radical es dos, en una raíz cúbica el grado del radical es tres, y así sucesivamente).

En el ejemplo, √(16x4y6), se nos pide sacar la raíz cuadrada del monomio 16x4y6

Empezaremos por la parte numérica: √16 = 4

Ahora, en la parte literal: √x4y6 = x4÷2y6÷2 = x2y3 (el grado del radical es 2)

Finalmente, la respuesta será: 4x2y3

El ejemplo, $\sqrt[3]{(27a9b3)}$, nos pide sacar la raíz cúbica del monomio 27a9b3

Empezaremos por la parte numérica: $\sqrt[3]{27} = 3$

Ahora, en la parte literal: $\sqrt[3]{a9b3}$ = a9÷3y3÷3 = x3y1 (el grado del radical es 3)

Finalmente, la respuesta será: 3a3b

OPERACIONES CON POLINOMIOS

Una vez que ya hemos trabajado con los monomios, debemos saber también cómo trabajar con los polinomios. En esta sección encontrarás lo referente a este tema.

INDICE:

- **Términos Semejantes**
- **Suma y Resta de Polinomios**
- **Multiplicación de Polinomios**
- **Potenciación de Polinomios**
- **Productos Notables**
- **Cocientes Notables**

Términos Semejantes

Antes de pasar a evaluar las diferentes operaciones con polinomios, conviene revisar nuevamente los términos semejantes.

Observemos la siguiente pareja de expresiones algebraicas: a) 4x2y3 b) 2x2y3

Vemos que en ambas expresiones se repite la parte literal, en ambos monomios hay x2, así mismo, en ambos monomios hay y3.

Cuando la parte literal en dos términos sea igual, entonces estaremos hablando de términos semejantes.

No importara el orden de las letras en la parte literal, así, los monomios: 6a3b2c , cb2a3 , también representan términos semejantes pues en ambos encontramos a3, b2 y c1.

Suma y Resta de Polinomios

En un polinomio podremos sumar o restar solamente los términos semejantes, todo lo demás quedara exactamente igual.

Digamos que queremos sumar los polinomios siguientes:

P1: 5x2y +3xy2

P2: 3x3 -2x2y +xy2 -4y3

Entonces la suma será:

P1 + P2: 5x2y +3xy2 +3x3 -2x2y +1xy2 -4y3

(Como se puede ver he añadido el número 1 en el término que no lo tenía para facilitar la operación)

Ahora debemos ver si hay términos semejantes:

P1 + P2: 5x2y +3xy2 +3x3 -2x2y +1xy2 -4y3

(Hemos marcado con rojo los términos que tienen x2y, hemos marcado con azul los términos con xy2)

Operamos los términos con x2y: 5x2y -2x2y = 3x2y

Operamos los términos con xy2: 3xy2 +1xy2 = 4xy2

Introducimos los resultados parciales en nuestro polinomio respuesta:

P1 + P2: 3x2y +4xy2 +3x3 -4y3 (esta es la respuesta)

Para realizar una resta, el procedimiento es similar, pero debemos tener mucho cuidado con los signos. Digamos que ahora quiero restar P1 -P2:

P1 - P2: 5x2y +3xy2 -(3x3 -2x2y +1xy2 -4y3) Nótese que P2 lo he puesto entre paréntesis

P1 - P2: 5x2y +3xy2 -3x3 +2x2y -1xy2 +4y3 Ahora vemos como hemos cambiado el signo a todo P2

Ahora recién buscamos los términos semejantes y realizamos las operaciones:

P1 - P2: 5x2y +3xy2 -3x3 +2x2y -1xy2 +4y3

P1 - P2: 7x2y +2xy2 +3x3 -4y3 (esta es la respuesta)

Multiplicación de Polinomios

En la multiplicación de polinomios tendremos que multiplicar todos los términos entre ellos. Evaluemos el siguiente ejemplo en el cual queremos multiplicar P1xP2:

P1: 5x2y +3xy2

P2: 3x3 -2x2y +xy2 -4y3

Entonces:

P1xP2: (5x2y +3xy2)(3x3 -2x2y +xy2 -4y3)

P1xP2: (5x2y1 +3x1y2)(3x3 -2x2y1 +1x1y2 -4y3) He colocado con rojo el numero 1 donde puede necesitarse.

Ahora tendré que multiplicar el primer término del primer polinomio por cada uno de los términos del segundo polinomio:

P1xP2: (5x2y1 +3x1y2)(3x3 -2x2y1 +1x1y2 -4y3)

(5x2y1)(3x3) = 15x5y1 (el exponente 1 esta con rojo ya que sabemos que no es necesario ponerlo)

(5x2y1)(-2x2y1) = -10x4y2

(5x2y1)(+1x1y2) = 5x3y3

(5x2y1)(-4y3) = -20x2y4

Hacemos lo mismo con el segundo término del primer polinomio:

P1xP2: (5x2y1 +3x1y2)(3x3 -2x2y1 +1x1y2 -4y3)

(+3x1y2)(3x3) = +9x4y2

(+3x1y2)(-2x2y1) = -6x3y3

(+3x1y2)(+1x1y2) = +3x2y4

(+3x1y2)(-4y3) = -12x1y5 (el exponente 1 esta con rojo ya que sabemos que no es necesario ponerlo)

Ahora acomodamos la respuesta:

P1xP2: 15x5y1 -10x4y2 +5x3y3 -20x2y4 +9x4y2 -6x3y3 +3x2y4 -12x1y5

P1xP2: 15x5y -10x4y2 +5x3y3 -20x2y4 +9x4y2 -6x3y3 +3x2y4 -12xy5 (eliminamos los 1 innecesarios)

Ahora vemos si hay términos semejantes que podamos sumar o restar:

P1xP2: 15x5y -10x4y2 +5x3y3 -20x2y4 +9x4y2 -6x3y3 +3x2y4 -12xy5

Tenemos que simplificar los términos semejantes:

Operamos los términos con x4y2: -10x4y2 +9x4y2 = -1x4y2

Operamos los términos con x3y3: +5x3y3 -6x3y3 = -1x3y3

Operamos los términos con x2y4: -20x2y4 +3x2y4 = -17x2y4

Ahora si, presentamos la respuesta:

P1xP2: 15x5y -1x4y2 -1x3y3 -17x2y4 -12xy5

Recordemos siempre que la parte numérica se multiplica y en la parte literal se suman los exponentes de las letras que se repiten.

Potenciación de Polinomios

La potenciación de polinomios se apoya en el concepto fundamental de potencia, mismo que se define:

bn = b x b x b x b x................... x b

Lo cual quiere decir que multiplicare una base (b) por sí misma una cantidad n de veces (n es el exponente).

Entonces para resolver el siguiente ejemplo: (3a3b + 5b3)2

Tendré que efectuar la siguiente multiplicación: (3a3b1 + 5b3) (3a3b1 + 5b3)

Ya que el exponente 2 me indica que lo debo multiplicar por sí mismo dos veces.

Finalmente tendremos:

(3a3b1 + 5b3) (3a3b1 + 5b3) = 9a6b2 +15a3b4 +15a3b4 +25b6

(3a3b1 + 5b3)(3a3b1 + 5b3) = 9a6b2 +15a3b4 +15a3b4 +25b6

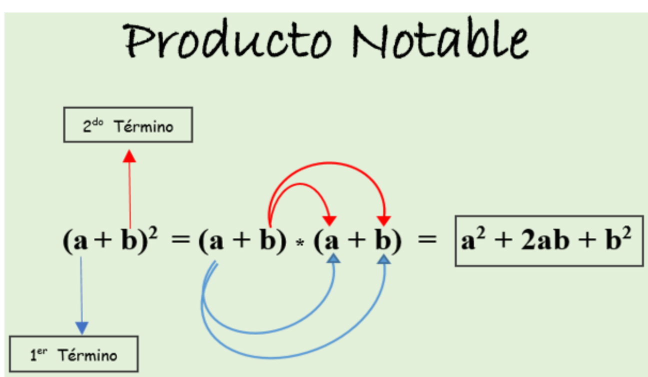
(3a3b1 + 5b3)(3a3b1 + 5b3) = 9a6b2 +30a3b4 +25b6

PRODUCTOS NOTABLES

Los productos notables son operaciones algebraicas, donde se expresan multiplicaciones de polinomios, que no necesitan ser resueltas tradicionalmente, sino que con la ayuda de ciertas reglas se pueden encontrar los resultados de las mismas.

Cada producto notable es una fórmula que resulta de una factorización, compuesta por polinomios de varios términos como por ejemplo binomios o trinomios, llamados factores.

Los factores son la base de una potencia y tienen un exponente. Cuando se multiplican los factores, los exponentes deben ser sumados.



SUMA POR DIFERENCIA

Es igual a diferencia de cuadrados.

Formula:

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Ejercicios resueltos:

1. **$(3x - 2) \cdot (3x + 2) =$** (elevamos al cuadrado 3x y -2 y nos da como resultado $9x^2 - 4$)

$(3x)^2 - 2^2$

$9x^2 - 4$

2. **$(x + 5) \cdot (x - 5) =$** (elevamos al cuadrado x y -5 y nos da como resultado $x^2 - 25$)

$x^2 - 25$

3. $(3x^2 - 2) \cdot (3x^2 + 2) =$ (elevamos al cuadrado 3x y -2 y nos da como resultado 〖9x〗^4-4)

$(3x)^2 - 2^2$

$9x^4 - 4$

Resolver:

$(3x^2 + 5)(3x^2 - 5) =$

$(x + 2)(x + 3) =$

$(4x - 2)(4x + 2) =$

$(x + 5)(x + 5) =$

$(2x - 4)(2x + 4)$

BINOMIO AL CUADRADO

Es la multiplicación de un binomio por sí mismo, expresada en forma de potencia, donde los términos son sumados o restados.

Binomio de suma al cuadrado: Es igual al cuadrado del primer término, más el doble del producto de los términos, más el cuadrado del segundo término.

Ejercicios resueltos:

1. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = (a + b) * (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(\boldsymbol{x} + \mathbf{5})^2 = x^2 + 10x + 25$
3. $(\mathbf{4}\boldsymbol{a} + \mathbf{2}\boldsymbol{b}) = 8a^2 + 16ab + 4b^2$

Resolver:

1. $(\mathbf{2x+5})^{\mathbf{2}} =$
2. $(\mathbf{3x+2})^{\mathbf{2}} =$
3. $(\mathbf{3x+5y})^{\mathbf{2}} =$
4. $(\mathbf{5a+6})^{\mathbf{2}}$=
5. $(\mathbf{8a+2b}) =$

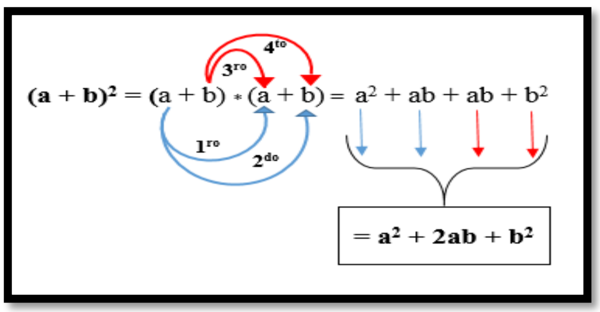
Binomio de una resta al cuadrado

En este caso el segundo término es negativo.

Ejercicios resueltos:

Formula:

$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^{\mathbf{2}} = a^2 - 2ab + b^2$



Ejercicios resueltos

1. $(2x - 3)2 = (2x)2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3\ 2 = 4x^2 - 12\,x + 9$
2. $(\mathbf{2x-6})^{\mathbf{2}} = 4x^2 - 24x + 36$
3. $(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})^{\mathbf{2}} = x^2 - 4x + 4$

Resolver:

1. $(\boldsymbol{y}-\mathbf{6})^{\mathbf{2}}$=
2. $(\mathbf{2x-9y})^{\mathbf{2}} =$
3. $(\boldsymbol{a}-\mathbf{5b})^{\mathbf{2}} =$
4. $(\boldsymbol{x}-\mathbf{2y})^{\mathbf{2}} =$
5. $(\mathbf{7a}-\boldsymbol{b})^{\mathbf{2}} =$

PRODUCTO DE DOS BINOMIOS CON UN TÉRMINO COMÚN

Es uno de los productos notables más complejos y poco utilizados porque se trata de una multiplicación de dos binomios que tienen un término en común.

Regla:

- El cuadrado del término común.
- Más la suma los términos que no son comunes y luego multiplicarlos por el término común.
- Más la suma de la multiplicación de los términos que no son comunes.

Ejercicios resueltos:

1. $(\boldsymbol{x}+\mathbf{6}) * (\boldsymbol{x}+\mathbf{9}) = x^2 + (6+9) * x + (6 * 9)$

   $(x+6) * (x+9) = x^2 + 15x + 54$

2. $(\mathbf{7}\boldsymbol{x}+\mathbf{4}) * (\mathbf{7}\boldsymbol{x}-\mathbf{2}) = 49x^2 + 14x - 8$

3. $(\mathbf{3}\boldsymbol{b}-\mathbf{6}) * (\mathbf{3}\boldsymbol{b}-\mathbf{5}) = 9b^2 - 33b + 30$

Resolver:

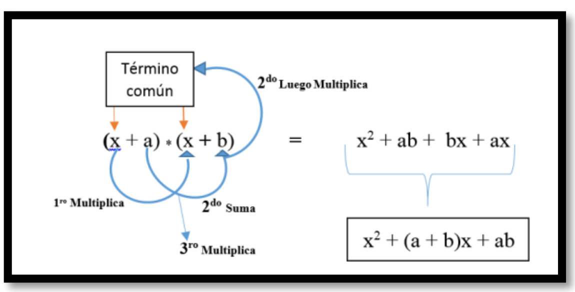
1. $(\boldsymbol{x}+\mathbf{4})(\boldsymbol{x}+\mathbf{10}) =$

2. $(\boldsymbol{y}+\mathbf{3})(\boldsymbol{y}+\mathbf{8})$=

3. $(\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{7})(\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{2}) =$

4. $(-\mathbf{2}-\boldsymbol{y})(-\mathbf{9}-\boldsymbol{y})$=

5. $(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})(\boldsymbol{x}-\mathbf{9})$



BINOMIO AL CUBO

Se multiplica el binomio por su cuadrado

Para el binomio al cubo de una suma

El cubo del primer término, más el triple del cuadrado del primer término por el segundo.

Más el triple del primer término, por el segundo al cuadrado.

Más el cubo del segundo término.

Ejercicios resueltos:

1. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^{\mathbf{3}} = (a + b) * (a + b)2$

   $(a + b)^3 = (a + b) * (a^2 + 2ab + b^2)$

   $(a + b)^3 = a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3$

   $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

2. $(\boldsymbol{a} + \mathbf{3})^{\mathbf{3}} = a^3 + 3(a)^2 * (3) + 3(a) * (3)^2 + (3)^3$

   $(a + 3)^3 = a^3 + 3\,(a)^2 * (3) + 3(a) * (9) + 27$

   $(a + 3)^3 = a^3 + 9\,a^2 + 27a + 27.$

3. $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^{\mathbf{3}} = (a - b) * (a - b)^2$

   $(a - b)^3 = (a - b) * (a^2 - 2ab + b^2)$

   $(a - b)^3 = a^3 - 2a^2b + ab^2 - ba^2 + 2ab^2 - b^3$

   $(a - b)^3 = \mathrm{a}^3 - 3\mathrm{a}^2\mathrm{b} + 3\mathrm{ab}^2 - \mathrm{b}^3.$

Resolver:

1. $(\mathbf{4}\boldsymbol{x} - \mathbf{6})^{\mathbf{3}} =$

2. $(\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{3})^{\mathbf{3}} =$

3. $(\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{2})^{\mathbf{3}} =$

4. $(\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{5})^{\mathbf{3}} =$

5. $(\boldsymbol{x} + \mathbf{2})^{\mathbf{3}} =$

División de Polinomios

La división de polinomios es, tal vez, la operación más complicada dentro de las expresiones algebraicas. Debemos tener mucho cuidado al resolverlas.

Básicamente tenemos dos casos:

a) División de un polinomio entre un monomio:

En este caso tendremos que dividir cada uno de los términos del polinomio entre el monomio.

Vamos a resolver un ejemplo: (4x2y -2xy2 + 8x3) ÷ 2x

Haremos: 4x2y ÷ 2x1 = 2x1y

Luego: -2x1y2 ÷ 2x1 = -1y2

Luego: 8x3 ÷ 2x1 = 4x2

Finalmente, la respuesta será: 2xy -1y2 + 4x2

Cocientes Notables

Existirán algunos casos en los cuales podemos dividir dos polinomios fácilmente pues sus respuestas son conocidas:

Primer caso: (an +bn) ÷ (a + b)

En este caso tendremos respuesta exacta solo cuando el exponente n sea un número impar.

Veamos entonces el siguiente ejemplo: (x5 + y5) ÷ (x + y)

Debemos empezar la respuesta tomando el primer término, pero bajándole un grado, es decir, por x5-1 = x4

A partir de ahí bebemos ir intercalando los signos (mas, menos, mas, menos, etcétera).

En el segundo término debe seguir bajando el grado del primer término (ahora será x3), pero además deberá aparecer el segundo término (aparece y): x3y

Para los demás términos de la respuesta se seguirá bajando el grado del primer término (hasta que este desaparezca) y se irá incrementando el grado del exponente del segundo término.

(x5 + y5) ÷ (x + y) = x4 -x3b + x2y2 -xy3 +y4

Segundo caso: (an -bn) ÷ (a - b)

En este caso tendremos respuesta exacta siempre, no importara si el exponente es un número par o impar.

Veamos entonces el siguiente ejemplo: $(x6 - y6) \div (x - y)$

La mecánica es prácticamente la misma que en el caso (a), con la única diferencia que en la respuesta todos los términos se estarán sumando (es decir todos los signos serán más).

$(x6 + y6) \div (x + y) = x5 + x4b + x3y2 + x2y3 + xy4 + y5$

Tercer caso: $(an - bn) \div (a + b)$

En este caso tendremos respuesta exacta solo cuando el exponente n sea un número par.

Veamos entonces el siguiente ejemplo: $(x4 - y4) \div (x + y)$

Debemos empezar la respuesta tomando el primer término, pero bajándole un grado, es decir, por $x4\text{-}1 = x3$

A partir de ahí bebemos ir intercalando los signos (mas, menos, mas, menos, etcétera).

En el segundo término debe seguir bajando el grado del primer término (ahora será x2), pero además deberá aparecer el segundo término (aparece y): x2y

Para los demás términos de la respuesta se seguirá bajando el grado del primer término (hasta que este desaparezca) y se ira incrementando el grado del exponente del segundo término.

$(x4 - y4) \div (x + y) = x3 - x2b + xy2 - y3$

FACTORIZACIÓN

La factorización de expresiones algebraicas consiste en buscar el origen de las mismas, en descomponerlas. Veremos las principales técnicas.

INDICE:

Factor Común Monomio

Este método busca un factor común a todos y cada uno de los términos de un polinomio. Este factor resultara ser un monomio, mismo que debemos encontrar.

Dado un polinomio cualquiera, lo primero que tendremos que hacer para hallar el Factor Común Monomio será encontrar el Máximo Común Divisor (M.C.D.) de la parte numérica de todos los términos.

Dado el siguiente polinomio: 8x4 -4x2y + 16x5y2

Hallaremos el M.C.D. de la parte numérica: 8x4 -4x2y + 16x5y2

Entonces el M.C.D. de 8, 4 y 16 es: 4 (este número será la parte numérica del monomio que busco)

Ahora observo mi polinomio: 8x4 -4x2y + 16x5y2

Me doy cuenta que la letra x se repite en los tres términos, entonces buscare la que tenga menor exponente, misma que resulta ser x2 (la tomo como parte literal del monomio que busco)

Como no hay otra letra que se repita en todos los términos, empiezo a construir mi monomio.

Recuerdo que la parte numérica era 4 y la parte literal era x2, entonces será: 4x2

El monomio que he encontrado dividirá a todos y cada uno de los términos del polinomio, así:

8x4 ÷ 4x2 = 2x2

-4x2y ÷ 4x2 = -y

16x5y2 ÷ 4x2 = 4x3y2

Construimos el polinomio: (2x2 -y +4x3y2)

Ahora presentamos el monomio por el polinomio: 4x2(2x2 -y +4x3y2)

Factor Común Polinomio

En este caso también se busca un factor común a todos y cada uno de los términos de un polinomio, pero ahora este factor será otro polinomio.

Veamos el siguiente ejemplo:

5x2(x -y) + 3x (x -y) +7(x -y)

Se aprecia claramente que se está repitiendo el polinomio (x -y), entonces ese será el factor común.

El otro factor será simplemente lo que queda del polinomio original, es decir: (5x2 + 3x +7)

Finalmente, la respuesta será: (x -y) (5x2 + 3x +7)

En algunos casos debemos "jugar" con el número 1, por ejemplo, en: 5a2(3 +b) +3 +b

Que yo puedo escribirlo como: 5a2(3 +b) +1(3 +b)

Entonces la respuesta seria: (3 +b) (5a2 +1)

Factorización por Agrupación de Términos

En la factorización por agrupación de términos hacemos una mezcla de las anteriores técnicas de factorización.

Dado un polinomio cualesquiera debemos primero formar grupos de términos con características comunes (de preferencia de dos términos cada grupo) y a cada uno de estos grupos le sacaremos el Factor Común Monomio.

Veamos el ejemplo: $5x4y + 3x2y -9xy -15xy2$

De acuerdo a las características lo podría agrupar: $5x4y + 3x3y -9y -15xy2$

El primer grupo es: $5x4y -15xy2$ Y su Factor Común Monomio: $5xy\ (x3 -3y)$

El segundo grupo es: $3x3y -9y$ Y su Factor Común Monomio: $3y\ (x3 -3y)$

Entonces: $5x4y + 3x2y -9xy -15xy2 = 5xy\ (x3 -3y) +3y\ (x3 -3y)$

Y ahora aplicamos Factor común Polinomio, ya que nos damos cuenta que el polinomio $(x3 -3y)$ se repite.

La respuesta finalmente será: $(x3 -3y)\ (5xy +3y)$

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Una ecuación es una igualdad donde por lo menos hay un número desconocido, llamado incógnita o variable, y que se verifica (se cumple), para determinado valor numérico de ella.

INDICE:

Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

Resolución de ecuaciones con signos de colección

Resolución de Problemas

Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

Para resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita, aplicamos el criterio del operador inverso, mismo que observamos en el siguiente ejemplo:

Resolver la ecuación $2x - 3 = 53$

Debemos tener las letras a un lado y los números al otro lado de la igualdad (=), entonces para llevar el -3 al otro lado de la igualdad, le aplicamos el operador inverso (el inverso de -3 es +3, porque la operación inversa de la resta es la suma).

Tendremos: $2x = 53 + 3$

$2x = 56$

Ahora tenemos el número 2 que está multiplicando a la variable o incógnita x, entonces lo pasaremos al otro lado de la igualdad dividiendo (la operación inversa de la multiplicación es la división).

Tendremos ahora: $x = 56 \div 2$

$x = 28$

Entonces el valor de la incógnita o variable "x" es 28.

Resolución de ecuaciones con signos de colección

Para resolver este tipo de ecuaciones primero debemos suprimir los signos de colección o agrupación considerando la ley de signos, y en caso de existir varias agrupaciones, desarrollamos de adentro hacia afuera las operaciones.

Veamos el siguiente ejemplo:

$2x - [x - (x - 50)] = x - (800 - 3x)$

$2x - [x - x + 50] = x - 800 + 3x$	Primero quitamos los paréntesis.
$2x - [50] = 4x - 800$	Reducimos términos semejantes.
$2x - 50 = 4x - 800$	Ahora quitamos los corchetes.
$2x - 4x = -800 + 50$	Transponemos los términos, empleando el criterio de operaciones inversas.
$-2x = -750$	Nuevamente reducimos términos semejantes
$x = \frac{-750}{-2} = 375$	Despejamos x pasando a dividir a -2, luego simplificamos.

INECUACIONES DE PRIMER GRADO

Una inecuación es una desigualdad que tiene por lo menos un valor desconocido o incógnita y que se cumple para ciertos valores de ella.

INDICE:

Resolución de inecuaciones de primer grado con una incógnita

Casos Especiales

Resolución de Problemas

Resolución de inecuaciones de primer grado con una incógnita

Las reglas para la resolución de una inecuación son prácticamente las mismas que hemos empleado en la lección anterior para la resolución de ecuaciones. Veremos algunos ejemplos para tener las cosas más claras.

Resolver la inecuación $4x - 3 > 53$

Debemos tener las letras a un lado y los números al otro lado de la desigualdad (en este caso >), entonces para llevar el -3 al otro lado de la desigualdad, le aplicamos el operador inverso (el inverso de -3 es +3, porque la operación inversa de la resta es la suma).

Tendremos: $4x > 53 + 3$

$4x > 56$

Ahora tenemos el número 4 que está multiplicando a la variable o incógnita x, entonces lo pasaremos al otro lado de la desigualdad dividiendo (la operación inversa de la multiplicación es la división).

Tendremos ahora: $x > 56 \div 4$

$x > 14$

Entonces el valor de la incógnita o variable "x" serán todos los números mayores que 14.

Resolvamos otro ejemplo:

$-11x - 5x + 1 < -65x + 36$

$-11x - 5x + 65x < 36 - 1$ Llevamos los términos semejantes a un lado de la desigualdad y los términos independientes al otro lado de la desigualdad (hemos aplicado operaciones inversas donde era necesario).

$49x < 35$ Resolvemos las operaciones indicadas anteriormente.

$x < \frac{35}{47} = \frac{5}{7}$ Aplicamos operaciones inversas, y simplificamos.

Casos Especiales

En los casos en los que me quede signo negativo en el lado de la incógnita, tendremos que realizar un pequeño arreglo en el problema o ejercicio, mismo que veremos en una manera práctica.

$2x - [x - (x - 50)] < x - (800 - 3x)$

$2x - [x - x + 50] < x - 800 + 3x$ Primero quitamos los paréntesis.

$2x - [50] < 4x - 800$ Reducimos términos semejantes.

$2x - 50 < 4x - 800$ Ahora quitamos los corchetes.

$2x - 4x < -800 + 50$ Transponemos los términos, empleando el criterio de operaciones inversas.

$-2x < -750$ Nuevamente reducimos términos semejantes

$2x > 750$ No puede quedar signo negativo en la parte de la incógnita, entonces cambiamos de signo a todo, y además cambiamos el sentido de la desigualdad.

$x = \frac{750}{2} = 375$ Despejamos x pasando a dividir al 2, luego simplificamos.

Resolución de Problemas

No es muy común encontrar problemas con inecuaciones, pero, de todas formas, si nos encontramos frente a este caso, debemos plantearlo en forma matemática y luego realizar las operaciones correspondientes para hallar el valor de la incógnita (el dato que deseamos conocer).

Veamos un problema sencillo como ejemplo:

Dentro de cinco años, Ximena tendrá no menos de 18 años. ¿Qué edad tiene actualmente Ximena?

Tenemos entonces:

x edad de Ximena

$x + 5$ edad de Ximena en 5 años

Sabemos que la edad de Ximena en cinco años será mayor que 18 años (Dentro de cinco años, Ximena tendrá no menos de 18 años).

$x + 5 > 18$

Resolvemos la inecuación:

$x + 5 > 18$

$x > 18 - 5$

$x > 13$

Entonces podemos afirmar que Ximena actualmente tiene más de 13 años, pero no podemos determinar exactamente su edad.

SISTEMAS DE ECUACIONES

Un sistema de ecuaciones es el conjunto de dos o más ecuaciones cuya resolución significa hallar los valores que satisfacen al mismo tiempo dichas ecuaciones.

INDICE:

Ecuaciones de Primer Grado con Dos Variables

Veamos las siguientes ecuaciones:

a) $7x + 5y - 24 = 0$

b) $a + 5b = -85$

c) $13x = 7 - 11y$

En todos los ejemplos anteriores (ecuaciones a, b y c) observamos que se tienen dos variables o incógnitas, mismas que están representadas por letras diferentes.

Entonces todas ellas son Ecuaciones de Primer Grado con Dos Variables.

Una ecuación con dos variables tiene infinitas soluciones dentro de los números reales, es decir, una combinación infinita de respuestas cumplirá con las condiciones de la ecuación.

Si tenemos solamente una ecuación de este tipo no podemos determinar el valor exacto de cada una de las variables.

Tendremos, eso si, la opción de tener el valor de una de las variables o incógnitas en función de la otra. Veamos a continuación como podríamos resolver el primero de los ejemplos:

Hallamos el valor de x   Hallamos el valor de y

$7x + 5y - 24 = 0$ $7x + 5y - 24 = 0$

$7x = 24 - 5y$ $5y = 24 - 7x$

$x = \frac{24 - 5y}{7}$ $y = \frac{24 - 7x}{5}$

Como podemos apreciar las respuestas quedaran en función de la otra variable o incógnita y no se podrá hallar un valor numérico exacto.

Sistemas de ecuaciones con dos variables

Para resolver ecuaciones con dos variables, necesariamente debemos tener dos ecuaciones. Estas dos ecuaciones en conjunto forman el sistema de ecuaciones con dos variables o incógnitas.

Por ejemplo, las siguientes ecuaciones individualmente no podrían ser resueltas, sin embargo, en conjunto si podrían ser resueltas, y de esta manera podríamos hallar el valor tanto de la variable "x" como de la variable "y":

$2x + 3y = 5$

$5x + 6y = 4$

A continuación veremos los diferentes métodos de resolución de este tipo de ecuaciones.

Método de Reducción

En este método buscamos que en ambas ecuaciones una de las variables tenga coeficientes opuestos (mismo valor, pero con diferente signo) para que sea eliminada al sumarlas.

Nos remitimos a nuestro ejemplo original:

$2x + 3y = 5$

$5x + 6y = 4$ Este es el sistema de dos ecuaciones con dos variables que queremos resolver.

$2x + 3y = 5$

$5x + 6y = 4$ Nos damos cuenta, que para la variable "y", tanto en la primera como en la segunda ecuación, el coeficiente es múltiplo de 3.

$-4x - 6y = -10$

$5x + 6y = 4$ Para hacer que la variable "y" tenga coeficientes opuestos, multiplicamos a todos los términos de la primera ecuación por -2

$-4x - 6y = -10$

$5x + 6y = 4$

$1x = -6$ Sumamos (o restamos según sea el caso) la primera ecuación con la segunda ecuación.

$1x = -6$ ó $x = -6$ Hemos encontrado el valor de la variable "x"

$2x + 3y = 5$

$2(-6) + 3y = 5$ Seleccionamos una de las ecuaciones y en ella reemplazamos el valor de la variable "x"

$-12 + 3y = 5$

$3y = 5 + 12$

$3y = 17$ Nótese que el valor de "x" (que en este caso era -6) lo hemos multiplicado por el coeficiente de esta misma letra. El trabajo que viene a continuación es similar al de cualquier ecuación de primer grado.

$y = \frac{17}{3}$ Finalmente hallamos el valor de la variable "y"

Método de Sustitución

Para resolver un sistema de ecuaciones con este método debemos despejar una de las variables en una de las ecuaciones, y reemplazar la expresión obtenida en la otra ecuación.

Veamos el mismo ejemplo anterior:

$2x + 3y = 5$

$5x + 6y = 4$ De mi sistema de dos ecuaciones con dos variables escojo una de ellas, como por ejemplo, la primera de ellas.

$2x + 3y = 5$ En mi ecuación escojo una variable para despejar.

$2x + 3y = 5$

$3y = 5 - 2x$ Como he escogido la variable "y", entonces dejo los términos con "y" a un lado y llevo los demás al otro lado.

y = 5 -2x

3 Hallamos el valor de la variable "y"

5x + 6(5 -2x) = 4

3 Reemplazamos el valor obtenido para "y" en la segunda ecuación (recordemos que estará multiplicando al coeficiente)

5x + 10 - 4x = 4

5x - 4x = 4 - 10

1x = -6

x = -6 Resolvemos el producto, llevamos los términos que tienen variable "x" a un lado de la igualdad y los términos independientes al otro lado de la igualdad.

Reducimos términos semejantes. Al realizar todo este trabajo obtendremos el valor de la variable "x"

5(-6) + 6y = 4 Reemplazamos el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones.

y= 17

3 Finalmente hallamos el valor de la variable "y"

Método de Igualación

Este método consiste en despejar la misma variable en las dos ecuaciones y luego igualarlas.

Apreciemos el trabajo en el mismo ejemplo:

2x + 3y = 5

5x + 6y = 4 Voy a trabajar por separado la primera ecuación y la segunda ecuación. En ambas buscare el valor de "y"

2x + 3y = 5

3y = 5 -2x

y = 5 -2x

3 Hemos resuelto para "y" la primera ecuación. El resultado o valor obtenido, lo emplearemos más adelante.

5x + 6y = 4

6y = 4 -5x

y = 4 -5x

6 Ahora hemos resuelto para "y" la segunda ecuación. El resultado o valor obtenido, lo emplearemos más adelante.

5 -2x = 4 -5x

3 6 Procedemos a igualar ambas ecuaciones. Ahora atención: los términos que están dividiendo pasaran a multiplicar

6(5 -2x) = 3(4 -5x)

30 -12x = 12 -15x

15x -12x = 12 - 30

3x = -18

x = -18 = -6

3 Resolvemos la ecuación como si se tratase simplemente de una ecuación de primer grado. Hallaremos el valor numérico de la variable "x"

5(-6) + 6y = 4 Reemplazamos el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones.

y= 17

3 Finalmente hallamos el valor de la variable "y"

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Tenemos una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática, cuando la variable o incógnita está elevada al cuadrado (elevada a exponente 2).

INDICE:

Ecuaciones Cuadráticas

Veamos las siguientes ecuaciones:

a) 7x2 +5x -24 = 0

b) x2 + 5x = -85

c) 13x2 = 7

d) 4x2 - 4x = 0

En todos los ejemplos anteriores (ecuaciones a, b, c y d) observamos que se tiene a la variable o incógnita elevada al cuadrado (exponente 2) en alguno de sus términos. Entonces todas ellas son Ecuaciones de Segundo Grado o Ecuaciones Cuadráticas.

Una ecuación cuadrática tiene, por lo general, dos respuestas o raíces, que cumplirán las condiciones mismas de la ecuación.

En general, una ecuación cuadrática tiene la forma: ax2 + bx + c = 0 ; donde a, b y c son números reales; y x es la incógnita o variable.

Resolución de Ecuaciones Cuadráticas por Factorización

Para resolver una ecuación cuadrática por factorización, primero debemos llevar todos los términos a un lado de la igualdad y en el otro lado dejar simplemente un 0 (cero).

Una vez realizado esto debemos elegir un método de factorización adecuado.

Ejemplo:

8x2 -16x = 2x +5 Ecuación Cuadrática a resolver.

8x2 -16x -2x -5 = 0 Llevamos todos los términos a un lado de la igualdad.

8x2 -18x -5 = 0 Reducimos términos semejantes.

8x2 -18x -5 = 0 Buscaremos un método de factorización adecuado para la primera parte.

8x2 -18x -5 = 0

4x 1

2x -5

8x2 -5 Emplearemos el método de factorización por aspa simple. Buscamos primero dos números que multiplicados me den 8, y luego dos números que multiplicados me den -5. Para el primer caso escogemos (4x) (2x) = 8x2, y luego (1) (-5) = -5

8x2 -18x -5 = 0

4x 1 2x

2x -5 -20x

aaaaaaaaa-18x Verificamos que la suma o diferencia de los productos cruzados cumpla con la condición de ser igual al segundo término, es decir, igual a -18x.

(4x +1) (2x -5) = 0 Procedemos a colocar los factores.

(4x +1) = 0 (2x -5) = 0

4x + 1 = 0 2x - 5 = 0

4x = -1 2x = 5

x = -1 x = 5

4 2 Finalmente igualamos cada uno de los factores a 0 (cero) y resolvemos las ecuaciones para hallar las raíces o resultados.

Resolución de Ecuaciones Cuadráticas Completando Cuadrados

Para resolver una ecuación cuadrática con este método debemos completar un binomio al cuadrado y luego despejar utilizando nuestros principios matemáticos.

Veamos un ejemplo:

x2 + 6x + 5 = 0

x2 + 6x + 5 +4= 0 +4 Hemos sumado 4 en ambos lados de la igualdad.

x2 + 6x + 9 = 4 Observamos que a la izquierda: (x +3)2 = x2 + 6x + 9

(x +3)2 = 4 Además en el término de la derecha 22 = 4

(x +3)2 -22 = 0 Llevaremos todos los términos a un solo lado de la igualdad, mientras que al otro lado dejaremos simplemente 0 (cero).

[(x +3) -2] [(x +3) +2] = 0

(x +3 -2) (x +3 +2) = 0

(x +1) (x +5) = 0 Factorizamos. Observe que en el primer factor se respetan todos los signos, mientras que en segundo factor se cambia el signo solo al término independiente (número).

(x +1) = 0 (x +5) = 0

x +1 = 0 x +5 = 0

x = -1 x = -5 Finalmente igualamos cada uno de los factores a 0 (cero) y resolvemos las ecuaciones para hallar las raíces o resultados.

Fórmula General para la Resolución de Ecuaciones Cuadráticas

Habíamos dicho que una ecuación cuadrática tiene la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ donde a, b y c son números reales; y x es la incógnita o variable.

Entonces para hallar directamente las raíces podemos aplicar la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$$

- EVALUACIÓN Y RESULTADOS

El alumno entregara un reporte de práctica con los siguientes criterios

- Portada
- Introducción
- Justificación
- Metodología y desarrollo
- Obtención de resultados
- Resultados y discusiones
- Anexos
- Referencias bibliográficas.

-REFERENCIAS

- Boylestad, R. y Nashelsky L. (2009). Electrónica, Teoría de circuitos (8ª Ed.). México. Pearson Educación.
- Malvino, A. (2007). Principios de electrónica (7ª Ed.). México. Mc Graw HillBoylestad
- Robert L., Nashelsky Louis (2009) Electrónica Teoría de Circuitos y Dispositivos Electrónicos, México, Décima edición, Editorial Prentice Hall.

Nota: Se presenta el listado de bibliografías utilizadas en el fundamento teórico y en el desarrollo de la práctica en sistema de referencia APA.

-ANEXOS

Se recomienda poner en anexos las partes del trabajo que, intercaladas en medio del texto romperían la continuidad de lectura del mismo, por ejemplo deducciones detalladas de alguna expresión, cálculos largos y detallados, códigos y enumeración detallada de algunos componentes. El docente según considere podría proporcionar tablas de valores, indicadores, manuales de equipos u otros.

4. ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE

ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE 1: Análisis y Planeación
Descripción: Discusión sobre las lecturas, artículos y guías de práctica.
Ambiente(s) requerido: Aula amplia con buena iluminación.
Material (es) requerido: Proyector. Pizarra. Borrador. Marcadores.
Docente: Material para la clase y dominio de la misma.

5. ACTIVIDADES

- Controles de lectura
- Exposiciones
- Presentación de informes de práticas.

6. EVIDENCIAS Y EVALUACIÓN

Tipo de Evidencia	**Descripción (de la evidencia)**
De conocimiento:	Ensayo expositivo grupal de lecturas Manejo e identificación de equipos e instrumentos electrónicos
Desempeño:	Trabajo grupal presentación de informes de prácticas.
De Producto:	Trabajo de realizado
Criterios de Evaluación	Actuación en clase Presentación de informes de prácticas Defensa de informes de prácticas Lecciones escritas Tareas en casa y trabajo en aula.

Elaborado por: **Ing. Moisés Filiberto Mora Murillo** **Docente ITS JAPÓN**	**Revisado Por:** **Ing. José Nevárez, MSc.** **Coordinador Administración de Empresas**	**Reportado Por:** **(Vicerrector)**

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR JAPÓN

AMOR AL CONOCIMIENTO

POMASQUI-
c/Marieta Veintimilla E5-471 y Sta. Teresa 4ta transversal

Tlfs: 022356-368 - 0986915506

www.itsjapon.edu.ec