

José Miguel Molina Martínez · Francisco Javier Cánovas Rodríguez

# Principios básicos de Electrotecnia

## Fundamentos de electrotecnia para ingenieros



 **Alfaomega**

 **marcombo**  
ediciones técnicas

# **Principios básicos de electrotecnia**

Fundamentos de electrotecnia para ingenieros

# **Principios básicos de electrotecnia**

Fundamentos de electrotecnia para ingenieros

José Miguel Molina Martínez

Francisco Javier Cánovas Rodríguez



Diseño de cubierta: NDENU DISSENY GRÀFIC

Datos catalográficos  
Molina, José Miguel; Cánovas, Francisco Javier  
Principios básicos de electrotecnia. Fundamentos  
de electrotecnia para ingenieros  
Primera Edición

Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V., México

ISBN: 978-607-707-580-6

Formato: 17 x 23 cm

Páginas: 200

### **Principios básicos de electrotecnia. Fundamentos de electrotecnia para ingenieros**

José Miguel Molina Martínez, Francisco Javier Cánovas Rodríguez

ISBN: 978-84-267-1772-6, edición en español publicada por MARCOMBO, S.A., Barcelona, España

Derechos reservados © 2012 MARCOMBO, S.A.

Primera edición: Alfaomega Grupo Editor, México, abril 2013

© 2013 Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V.

Pitágoras 1139, Col. Del Valle, 03100, México D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana

Registro No. 2317

Pág. Web: <http://www.alfaomega.com.mx>

E-mail: [atencionalcliente@alfaomega.com.mx](mailto:atencionalcliente@alfaomega.com.mx)

**ISBN: 978-607-707-580-6**

#### **Derechos reservados:**

Esta obra es propiedad intelectual de su autor y los derechos de publicación en lengua española han sido legalmente transferidos al editor. Prohibida su reproducción parcial o total por cualquier medio sin permiso por escrito del propietario de los derechos del copyright.

#### **Nota importante:**

La información contenida en esta obra tiene un fin exclusivamente didáctico y, por lo tanto, no está previsto su aprovechamiento a nivel profesional o industrial. Las indicaciones técnicas y programas incluidos, han sido elaborados con gran cuidado por el autor y reproducidos bajo estrictas normas de control. ALFAOMEGA GRUPO EDITOR, S.A. de C.V. no será jurídicamente responsable por: errores u omisiones; daños y perjuicios que se pudieran atribuir al uso de la información comprendida en este libro, ni por la utilización indebida que pudiera dársele.

Edición autorizada para venta en México y todo el continente americano.

#### **Impreso en México. Printed in Mexico.**

#### **Empresas del grupo:**

**México:** Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V. – Pitágoras 1139, Col. Del Valle, México, D.F. – C.P. 03100

Tel.: (52-55) 5575-5022 – Fax: (52-55) 5575-2420 / 2490. Sin costo: 01-800-020-4396

E-mail: [atencionalcliente@alfaomega.com.mx](mailto:atencionalcliente@alfaomega.com.mx)

**Colombia:** Alfaomega Colombiana, S.A. – Calle 62 No. 20-46, Barrio San Luis, Bogotá, Colombia

Tels.: (57-1) 746 0102 / 210 0415 – E-mail: [cliente@alfaomega.com.co](mailto:cliente@alfaomega.com.co)

**Chile:** Alfaomega Grupo Editor, S.A. – Av. Providencia 1443. Oficina 24, Santiago, Chile

Tel.: (56-2) 2235-4248 – Fax: (56-2) 2235-5786 – E-mail: [agechile@alfaomega.cl](mailto:agechile@alfaomega.cl)

**Argentina:** Alfaomega Grupo Editor Argentino, S.A. – Paraguay 1307 P.B. Of. 11, C.P. 1057, Buenos Aires, Argentina – Tel./Fax: (54-11) 4811-0887 y 4811 7183 – E-mail: [ventas@alfaomegaaeditor.com.ar](mailto:ventas@alfaomegaaeditor.com.ar)

# Índice de contenidos

TEMA 1. CONCEPTOS BÁSICOS DE ELECTRICIDAD .....	7
1.1 Introducción.....	9
1.2 Naturaleza de la electricidad.....	10
1.3 Materiales conductores y aislantes .....	13
1.4 Producción de electricidad.....	14
1.4.1 Producción de electricidad por frotamiento.....	15
1.4.2 Producción de electricidad por presión.....	16
1.4.3 Producción de electricidad por acción química. ....	17
1.4.4 Producción de electricidad por acción magnética.....	17
1.4.5 Producción de electricidad por acción de la luz. ....	17
1.4.6 Producción de electricidad por acción del calor. ....	18
1.5 Electrostática.....	18
1.5.1 Electricidad estática e inducción electrostática .....	18
1.5.2 Propiedades de las partículas elementales. Carga eléctrica .....	19
1.5.3 Ley de Coulomb .....	19
1.5.4 Campo eléctrico.....	21
1.5.5 Potencial eléctrico.....	23
1.5.5 Diferencia de potencial.....	24
1.6 Electrocinética .....	26
1.6.1 Elementos de un circuito eléctrico.....	26
1.6.2 Generador de tensión. Fuerza electromotriz. ....	29
1.6.3 Corriente eléctrica.....	30
1.6.3.1 Clasificación de la corriente .....	32
1.6.3.2 Intensidad de corriente .....	33

1.6.3.3 Densidad de corriente .....	34
1.6.4 Resistencia eléctrica.....	34
1.6.4.1 Resistencia de un conductor .....	35
1.6.4.2 Resistividad .....	35
1.6.4.3 Conductancia .....	36
1.6.4.4 Conductividad .....	36
1.6.4.5 Influencia de la temperatura .....	37
1.6.4.6 Resistor .....	39
1.6.5 Analogía hidráulica.....	40
1.6.6 Trabajo y potencia eléctrica. Ley de Joule .....	42
1.6.6.1 Energía eléctrica .....	42
1.6.6.2 Trabajo eléctrico.....	43
1.6.6.3 Potencia eléctrica.....	44
1.6.6.4 Ley de Joule.....	45
TEMA 2. CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA .....	49
2.1 Introducción y objetivos .....	51
2.2 Ley de Ohm. ....	51
2.3 Agrupación de resistencias .....	52
2.3.1 Agrupación serie.....	52
2.3.1.1 Divisor de tensión.....	57
2.3.2 Agrupación paralelo.....	58
2.3.3 Agrupación mixta .....	63
2.4 Generador de corriente continua.....	67
2.4.1 Definición .....	67
2.4.2 Simbología.....	67
2.4.3 Características.....	67
2.4.4 Tensión en bornes.....	68

2.4.5 Potencia de un generador.....	69
2.4.6 Rendimiento de un generador.....	70
2.4.7 Acoplamiento de generadores en serie.....	71
2.4.8 Acoplamiento de generadores en paralelo.....	72
2.4.9 Acoplamiento mixto de generadores.....	73
2.5 Receptor eléctrico.....	75
2.5.1 Definición.....	75
2.5.2 Simbología.....	75
2.5.3 Características.....	76
2.5.4 Tensión en bornes.....	76
2.5.5 Potencia de un receptor eléctrico.....	76
2.6 Circuito eléctrico.....	77
TEMA 3. ANÁLISIS DE CIRCUITOS.....	79
3.1 Introducción y objetivos.....	81
3.2 Ecuaciones de Kennelly.....	81
3.2.1 Transformación de una conexión en triángulo (o pi) en su estrella equivalente (o T).....	81
3.2.2 Transformación de una conexión en estrella (o T) en su triángulo equivalente (o pi).....	84
3.3 Leyes de Kirchhoff.....	90
3.3.1 Primera ley de Kirchhoff.....	90
3.3.2 Segunda ley de Kirchhoff.....	91
3.3.3 Resolución de circuitos con las leyes de Kirchhoff.....	93
3.4 Puente de Wheatstone.....	100
3.5 Métodos de análisis.....	103
3.5.1 Simplificaciones.....	103
3.5.1.1 Conversión de fuentes.....	103

3.5.1.2 Modificación de la geometría de un circuito.....	104
3.6 Método de las corrientes de malla .....	106
3.7 Método de los nudos.....	109
3.7.1 Ecuaciones matriciales de nudos –forma directa-.....	112
3.8 Teorema de Thevenin. ....	113
3.8.1 Ejemplo del Teorema de Thevenin.....	115
3.9 Teorema de Norton .....	117
3.10 Principio de superposición.....	119
TEMA 4. MAGNETISMO Y ELECTROMAGNETISMO .....	129
4.1 Introducción.....	131
4.2 Magnetismo .....	132
4.2.1 Características elementales de los imanes .....	133
4.2.2 Relación entre los fenómenos eléctricos y magnéticos.....	133
4.3 Campos magnéticos. ....	134
4.3.1 Definición. ....	134
4.3.2 Líneas de campo magnético.....	136
4.3.3 Unidades. ....	136
4.4 Flujo magnético. ....	137
4.5 Fuerza sobre una carga en movimiento. Ley de Lorentz.....	138
4.5.1 Movimiento de cargas en campos magnéticos constante. ....	140
4.5.2 Movimiento helicoidal.....	141
4.5.3 Fuerza sobre un elemento de corriente, segunda ley de Laplace. ....	142
4.5.3.1 Fuerza sobre un elemento de corriente.....	142
4.5.3.2 Fuerza sobre un conductor filiforme. ....	143
4.5.4 Fuerza y momento sobre una espira. ....	143
4.6 Campos magnéticos creados por cargas. ....	146



4.7 Fuerza entre corrientes. Definición de amperio.....	148
4.8 Ley de Ampère. ....	150
4.9 Principios básicos de aplicación. ....	150
4.10 Propiedades magnéticas de la materia. ....	152
4.11 Leyes de los circuitos magnéticos. Analogía con circuitos eléctricos..	154
4.11.1 Fuentes de excitación magnética. ....	156
4.11.2 Analogía con el circuito eléctrico. ....	157
4.11.3 Diferencias entre los circuitos eléctricos y magnéticos. ....	158
4.11.4 Análisis de circuitos magnéticos. ....	159
4.12 Comportamiento magnético de los materiales ferromagnéticos.....	165
4.12.1 Curva de histéresis. ....	167
4.12.1.1 Clasificación de los materiales. ....	170
4.13 Pérdidas de energía en un núcleo ferromagnético. ....	170
TEMA 5. CAPACIDAD E INDUCTANCIA.	
COMPORTAMIENTO EN C.C.....	175
5.1 Introducción.....	177
5.2 Condensadores.....	177
5.2.1 Fundamento de la acción de un condensador. ....	178
5.2.2 Capacidad de un condensador. ....	179
5.2.3 Valor de la capacidad.....	179
5.2.4 Magnitudes características de los condensadores. ....	180
5.2.4.1 Tensión de trabajo de un condensador ..... 181	
5.2.4.2 Tensión máxima de un condensador ..... 181	
5.2.4.3 Tolerancia de un condensador ..... 182	
5.2.5 Agrupación de condensadores ..... 182	
5.2.5.1 Agrupación de condensadores en serie..... 182	

5.2.5.2 Agrupación de condensadores en paralelo .....	183
5.2.6 Comportamiento de condensadores .....	185
5.2.6.1 Carga de un condensador a través de una resistencia .....	185
5.2.6.2 Descarga de un condensador a través de una resistencia.....	187
5.2.6.3 Constante de tiempo .....	188
5.2.6.4 Energía almacenada por un condensador.....	188
5.3 Inductancias .....	188
5.3.1 Agrupación de inductancias.....	189
5.3.1.1 Inductancias en serie.....	189
5.3.1.2 Inductancias en paralelo .....	190
5.3.2 Comportamiento de una bobina .....	190
5.3.2.1 Corriente por un circuito con autoinducción y resistencia .....	191
5.3.2.2 Constante de tiempo .....	193
5.3.2.3 Energía almacenada en una inductancia.....	193
6. Bibliografía .....	195

---

**TEMA 1**

**CONCEPTOS BÁSICOS DE  
ELECTRICIDAD**

---

## **TEMA 1. CONCEPTOS BÁSICOS DE ELECTRICIDAD**

### *1.1 Introducción*

La electricidad es la ciencia que estudia los fenómenos naturales que llamamos eléctricos. De este conocimiento han surgido muchas aplicaciones, como la luz eléctrica, motores y máquinas eléctricas, ordenadores, etc.

El estudio de las múltiples aplicaciones de la electricidad es lo que denominamos Electrotecnia. Es difícil hacer una clara distinción entre los contenidos de la electricidad y los de la electrotecnia, ya que para poder aplicar las leyes que rigen los fenómenos eléctricos es necesario estudiarlos previamente. El conocimiento de estos fenómenos para entender el mundo que nos rodea constituye el campo de la electricidad, mientras que la finalidad de la electrotecnia es el estudio de los fenómenos para su aplicación práctica.

El estudio de los fenómenos originados por la existencia de cargas eléctricas y la interacción entre ellas, constituye el campo de la electricidad. La rama de la electricidad que estudia las cargas en reposo se denomina electrostática, mientras que la electrocinética estudia las cargas en movimiento.

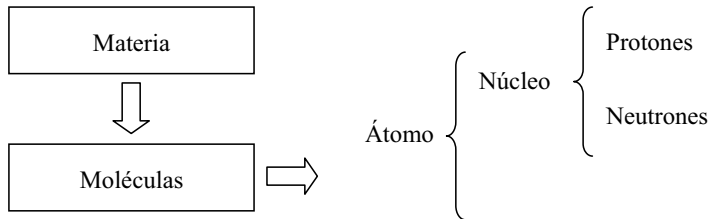
Cuando una carga se encuentra estacionaria, o estática, produce fuerzas eléctricas sobre otras cargas situadas en su región del espacio; cuando está en movimiento, produce además efectos magnéticos.

En este tema de introducción a la electrotecnia, se repasan los principales conceptos de electrostática y electrocinética. Se estudia desde la naturaleza de la electricidad y las formas de producirla, hasta los elementos que conforman un circuito eléctrico.

Se ha intentado proporcionar al alumno una visión global de los conocimientos previos necesarios antes de abordar los siguientes temas. Cuando estos temas iniciales se obvian, se incrementa el esfuerzo de los estudiantes por entender la materia y en multitud de ocasiones conlleva al fracaso del alumnado, con la consiguiente frustración que desencadena la impotencia de superar la asignatura a pesar del esfuerzo realizado y el rechazo que se genera hacia la misma.

## 1.2 Naturaleza de la electricidad

Para poder dar explicación a los fenómenos eléctricos es preciso conocer la estructura de la materia.



**Figura 1.1.** Estructura de la materia.

La materia se define como toda sustancia dotada de masa que ocupa un lugar en el espacio. Está constituida por moléculas, cada una de las cuales está constituida por partículas unidas entre si llamadas átomos. Los átomos de cualquier sustancia son las partículas más pequeñas en que se puede descomponer.

Cada uno de los átomos de cualquier elemento están constituidos por una parte central llamada núcleo formado por dos tipos de partículas: protones y neutrones. Y otra externa denominada corteza ocupada por una serie de partículas llamadas electrones que están en continuo movimiento alrededor del núcleo, siguiendo órbitas circulares y elípticas.

El protón y el neutrón poseen la misma masa y es aproximadamente 1800 veces superior a la del electrón. Podemos decir entonces que la masa de un átomo está prácticamente concentrada en el núcleo.

Los electrones poseen carga negativa de igual magnitud que la carga positiva de los protones, mientras que los neutrones no poseen carga.

La tabla 1.1 muestra los valores de masa y carga eléctrica de las partículas elementales.

	<b>Masa (g.)</b>	<b>Carga eléctrica (C)</b>
<i>Protón</i>	$1,67 \cdot 10^{-24}$ .	$+1,602 \cdot 10^{-19}$
<i>Neutrón</i>	$1,67 \cdot 10^{-24}$ .	0
<i>Electrón</i>	$9,11 \cdot 10^{-28}$	$-1,602 \cdot 10^{-19}$

**Tabla 1.1.** Masa y carga eléctrica de las partículas elementales.

De los valores de dicha tabla se puede deducir que un culombio (C) es, aproximadamente, la carga eléctrica de 6,25 trillones de electrones o protones.

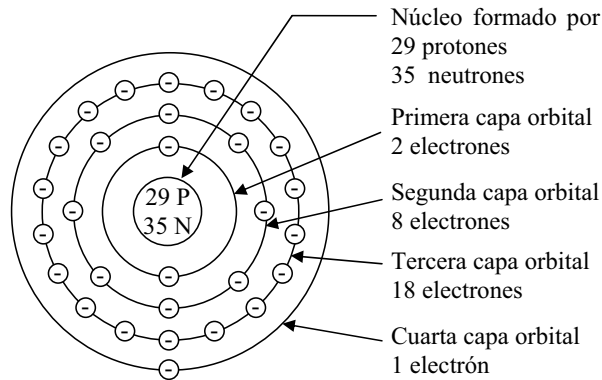
Cada átomo posee el mismo número de protones que de electrones por lo que es eléctricamente neutro. Como la materia está compuesta de átomos resulta lógicamente neutra.

Los electrones están emplazados en distintos niveles de energía formando capas. Los niveles más cercanos al núcleo están muy ligados a él, debido a que las fuerzas de atracción entre protones y electrones son grandes. Conforme nos alejamos del núcleo las fuerzas de atracción son cada vez menores.

El número de electrones y protones de un átomo definen a un elemento concreto. Si aumentamos o quitamos un electrón y protón, tendríamos un elemento distinto. El número de electrones y protones se conoce como número atómico y este, es el número de orden del elemento en el sistema periódico.

Uno de los materiales más empleados en electricidad es el cobre, por este motivo, vamos a estudiar su constitución.

En la figura 1.2, se ha representado un átomo de cobre, cuyo núcleo contiene 29 protones y 35 neutrones. Alrededor del núcleo hay 29 electrones en diferentes órbitas. Como cada protón tiene una carga positiva, cada electrón una negativa y éstas son iguales en magnitud, el átomo resulta neutro de cara al exterior. Como la materia está formada por átomos, resulta asimismo neutra.



**Figura 1.2.** Constitución de un átomo de cobre.

El primer nivel de energía está ocupado por dos electrones que siguen órbitas circulares. Estos electrones están muy ligados al núcleo, debido a que las fuerzas eléctricas de atracción entre protones y electrones son grandes, pues este nivel de energía es muy cercano al núcleo.

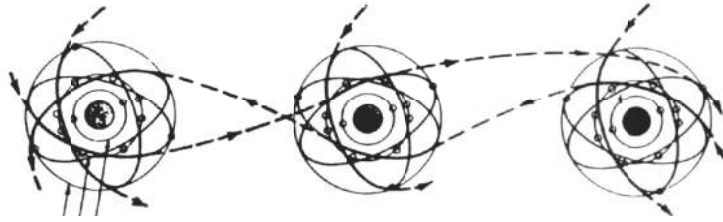
El segundo nivel de energía contiene 8 electrones más, que siguen órbitas circulares y elípticas (aunque no se haya representado así en la figura 1.2). Las fuerzas de atracción entre el núcleo y los electrones de este nivel son menores, debido a la mayor distancia entre ellos. La energía de los electrones de este nivel es, pues, mayor que la del anterior.

El tercer nivel de energía contiene 18 electrones siguiendo órbitas circulares y elípticas, y el último nivel está ocupado en este caso por un solo electrón ligado muy débilmente al núcleo, lo que confiere al átomo de cobre sus especiales características de conducción eléctrica.

Los electrones de un átomo se distribuyen de manera que su energía sea mínima, es decir, situándose en los niveles más bajos pero respetando siempre en una cantidad máxima de ellos en cada nivel. El número de electrones, que constituye cada nivel, se determina mediante como  $2 \cdot n^2$ , donde  $n$  es el número de la capa.

Cuando una capa o nivel está completa, los electrones están muy ligados al núcleo y es muy difícil desprenderlos de sus órbitas. Por el contrario, cuando la última

capa no está completa, como en el caso del cobre, sus electrones, llamados electrones de valencia, tienen una gran movilidad y pueden ser sacados de sus orbitas sin gran dificultad, por ello se les llama también electrones libres y en los cuerpos o elementos formados por estos átomos los electrones libres (de la última capa) están moviéndose continuamente, pasando de un átomo a otro contiguo.



*Figura 1.3. Movimiento de los electrones en la materia.*

La órbita que deja libre un electrón es inmediatamente ocupada por otro, pues el átomo queda desequilibrado al tener un electrón menos y tiende al equilibrio para volver a ser neutro, atrayendo otro electrón libre del átomo más cercano para conseguirlos.

Cuando un átomo pierde un electrón sin posibilidad de recuperarlo, queda cargado positivamente, y al tener más cargas positivas queda convertido en un ión positivo y su estado ya no es neutro al existir desequilibrio de cargas. El cuerpo que gana un electrón queda cargado negativo al tener más cargas negativas y se queda convertido en un ión negativo y su estado ya no es neutro al existir desequilibrio de cargas.

### **1.3 Materiales conductores y aislantes**

Atendiendo a la estructura de sus átomos, los cuerpos pueden ser conductores o aislantes. Todos los fenómenos que están relacionados con la conducción eléctrica, tienen lugar en la periferia exterior de la corteza y entre los átomos.

Los cuerpos formados por átomos cuya última capa está ocupada por uno o dos electrones (no está completa), son los llamados conductores. Resulta más conductor cuantos más electrones libres tenga y menos ligados estén al núcleo (orbitas alejadas). Los cuerpos más conductores son los metales, siendo los mejores la plata, el cobre, el oro y el aluminio, por este orden.



Los cuerpos conductores permiten el movimiento de electrones a través de ellos, y si les aplicamos una fuerza de origen eléctrico, podemos conseguir un flujo de electrones llamado corriente eléctrica.

Los cuerpos formados por átomos cuyas capa exterior está completa o faltan uno o dos electrones, se llaman aislantes. En ellos, los átomos retienen fuertemente a sus electrones, que de esta forma tienen poca movilidad, por cuya causa resulta difícil su desplazamiento a través del cuerpo. Son buenos aisladores el vidrio, la porcelana, la mica, la seda, el azufre, el aire seco, etc., que no poseen tales electrones libres.

Cuando se aplican fuerzas eléctricas muy grandes, puede conseguirse una corriente eléctrica a través del cuerpo, debido a que se rompe la estructura atómica. Por esta causa no hay aislantes perfectos.

Hay sustancias que tienen propiedades intermedias entre las dos clases. En ellas, la cantidad de electrones libres depende de determinados factores como el calor, la luz, composición química, etc. Estas sustancias son semiconductores y resultan conductores en determinados momentos y aislantes en otros. Ejemplo el silicio, germanio,...

#### ***1.4 Producción de electricidad***

De todo lo expuesto en los apartados anteriores, se puede deducir que, en cualquier clase de material, existe electricidad.

Ahora bien, la materia es eléctricamente neutra y, en consecuencia, es necesario que se aplique una energía externa para poder conseguir liberar algunos electrones (carga eléctrica), o sea, para obtener electricidad.

Según sea la clase de energía aplicada al cuerpo, así será la forma de obtención de la electricidad; normalmente, se podrá disponer de electricidad por los siguientes procedimientos –tabla 1.2-:

De todas ellas, las más usadas en la actualidad son por acción química y por acción magnética.

Energía	Acción
Mecánica	Frotamiento
Mecánica	Presión
Química	Química
Magnética	Magnetismo
Luminosa	Luz
Calorífica	Calor

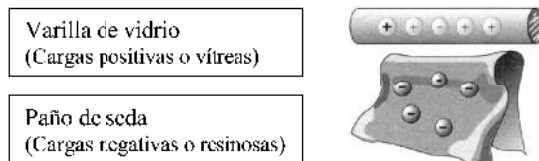
**Tabla 1.2.** Acción aplicada a un cuerpo para aportarle energía y producir electricidad.

La producción de electricidad por acción de la luz, la presión y el calor se suele utilizar para aplicaciones especiales; la producción por frotamiento no se usa en la práctica, y su estudio se debe al hecho histórico de que fue el primer sistema que se conoció y es la más sencilla de obtener sin medios costosos (basta un bolígrafo, unos trocitos de papel y un jersey).

#### 1.4.1 Producción de electricidad por frotamiento

Esta forma de producción de electricidad es la más antigua que se conoce; los griegos, 600 años a.c., ya conocían esta forma de producir electricidad.

Cuando se frota una varilla de vidrio con una tela de seda los electrones pasan del vidrio a la seda, quedando el vidrio con carga positiva y la seda con carga negativa (figura 1.4). En el caso de frotar una varilla de plástico o resina (ej.: bolígrafo), con un tejido de lana (ej.: jersey), el bolígrafo queda cargado con carga negativa y el jersey con carga positiva. Por este motivo, antiguamente, las cargas positivas también se denominaban vítreas y las cargas negativas se conocían como resinosas.



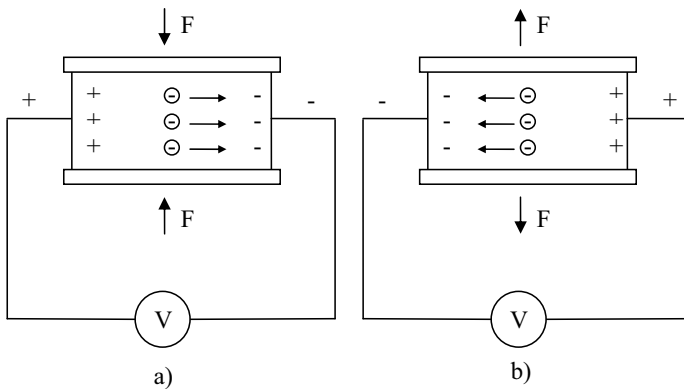
**Figura 1.4.** Producción de electricidad por frotamiento.

Comprobamos que, según el material, así será la electrización; o sea, cederá o ganará electrones.

La carga conseguida por este método permanece en el material y se denomina carga estática.

### 1.4.2 Producción de electricidad por presión

Algunos materiales tienen propiedades piezoeléctricas características; por ejemplo, al someter un cristal de cuarzo a una presión, aparecen en la superficie del cristal cargas eléctricas –figura 1.5-.



*Figura 1.5. Producción de electricidad por presión.*

Podemos encontrar un ejemplo de aplicación en los encendedores de chispa, la cual se produce al golpear el cristal de cuarzo.

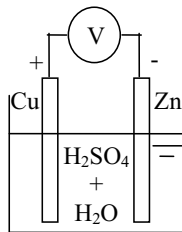
El proceso de producir electricidad por medio de propiedades piezoeléctricas es reversible, es decir, si se aplica electricidad a un cristal, éste vibra o ejerce presiones contra sus soportes.

Si está en contacto con un fluido le transmite sus vibraciones y produce ultrasonidos.

Se emplean en los sonar, ecógrafos, micrófonos, osciladores para relojes digitales, transductores de presión, etc.

### 1.4.3 Producción de electricidad por acción química

Las pilas y acumuladores son dos dispositivos que aprovechan la propiedad de algunas reacciones químicas, capaces de separar las sustancias con distintas cargas eléctricas – figura 1.6-.



*Figura 1.6. Producción de electricidad por acción química.*

### 1.4.4 Producción de electricidad por acción magnética

Este procedimiento de producción es el más empleado, y con él se consigue la mayor parte de la cantidad de energía eléctrica usada.

Su fundamente estriba en el hecho de que, al mover un conductor en presencia de un imán (campo magnético), en el conductor se induce una corriente.

En esta forma de producción de electricidad se basa el funcionamiento de los alternadores y dinamos.

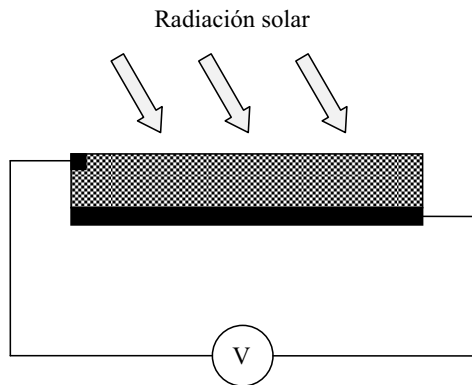
### 1.4.5 Producción de electricidad por acción de la luz

Este sistema de producción de electricidad se basa en la propiedad de algunas sustancias de crear carga eléctrica en sus caras cuando sobre ellas incide luz –figura 1.7-. Esta propiedad se conoce como fotoeléctrica.

Para producir electricidad se utilizan células fotoeléctricas, también conocidas como células fotovoltaicas o de silicio.

Existen diferentes materiales semiconductores con los cuales se pueden elaborar celdas solares, pero el que se utiliza comúnmente es el silicio en sus diferentes formas de fabricación: silicio monocristalino, policristalino y amorfo.

Los paneles solares realizados con celdas de silicio monocristalino son los más maduros del mercado, con una vida útil de hasta 25 años. Las celdas están hechas de un solo cristal de silicio de muy alta pureza. La eficiencia de conversión de estos módulos ha llegado hasta el 17%.



*Figura 1.7. Producción de electricidad con celdas solares.*

Se emplea, principalmente, para pequeños aparatos portátiles y para instalaciones apartadas de las redes eléctricas, como es el caso de algunas explotaciones agrarias. También podemos encontrar instalaciones fotovoltaicas en estaciones de bombeo.

#### **1.4.6 Producción de electricidad por acción del calor**

Al unir dos metales distintos y calentar la zona de unión, aparecen unos electrones, que pasan de un metal al otro.

Este sistema de producción de electricidad es muy poco usado; su única aplicación importante se da en los termopares (arrollamientos de dos materiales empleados para medir temperaturas).

### **1.5 Electrostática**

#### **1.5.1 Electricidad estática e inducción electrostática**

Ya hemos visto en el apartado anterior como producir electricidad estática.

Los efectos de la electrización, no solamente pueden obtenerse por frotamiento, sino también por simple contacto entre diferentes cuerpos, por compresión, por calentamiento, etc.

Al proceso en el cual aparecen cargas eléctricas en un cuerpo ante la aproximación de otro ya cargado, se conoce como *inducción electrostática*.

Un ejemplo de inducción electrostática se observa cuando acercamos un bolígrafo cargado con electricidad estática a unos trocitos de papel, las cargas positivas son atraídas por el bolígrafo mientras que las negativas se desplazan al interior del papel –figura 1.8-. Ahora las cargas negativas del bolígrafo atraen a las positivas de la superficie del papel, quedando pegados al bolígrafo.



*Figura 1.8. Electricidad estática e inducción electrostática*

### **1.5.2 Propiedades de las partículas elementales. Carga eléctrica**

La carga eléctrica es la propiedad que se le asigna a los protones (+) y a los electrones (-).

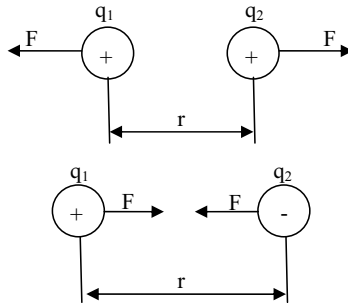
La unidad de carga eléctrica según el Sistema Internacional (S.I.) de unidades es el culombio (C). Un culombio es aproximadamente la carga eléctrica de  $6,25 \cdot 10^{18}$  electrones o protones.

Cargas de distinto signo se atraen y del mismo signo se repelen.

### **1.5.3 Ley de Coulomb**

El valor de la fuerza de atracción o repulsión entre cargas eléctricas de distinto o igual signo fue determinada por Charles Augustin de Coulomb (1736-1806), utilizando una balanza de torsión, que enunció la siguiente ley –figura 1.9-:

*“La fuerza de atracción o de repulsión entre dos cargas eléctricas de igual o distinto signo es directamente proporcional al producto de sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa”.*



**Figura 1.9.** Sentido de la fuerza entre dos cargas eléctricas del mismo signo o de signo contrario.

La expresión matemática de la ley es:

$$|\vec{F}| = K \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \quad (1.1)$$

donde:

$|\vec{F}|$  = módulo de la fuerza de atracción o de repulsión en newton (N).

$q_1$  y  $q_2$  = cargas eléctricas en culombios (C).

$r$  = distancia que separa las cargas en metros (m).

$K$  = Constante de proporcionalidad que depende del medio en el que se encuentran las cargas.

$$K = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \left( \frac{N \cdot m^2}{C^2} \right) \quad (1.2)$$

Siendo  $\epsilon_0$  la constante dieléctrica o permitividad del vacío, cuyo valor es  $8.85 \cdot 10^{-12} \frac{N \cdot C^2}{m^2}$ .

$\epsilon_r$  es la constante dieléctrica relativa o permitividad relativa del medio material.

Se determina como el cociente entre la permitividad del dieléctrico (material aislante) y la permitividad en el vacío:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (1.3)$$

y por ser un cociente entre dos magnitudes que tienen las mismas unidades no tiene dimensiones. La tabla 1.3 muestra las permitividades relativas de algunos materiales.

Material	$\epsilon_r$
Aceite	2,2400
Agua a 20 °C	80,0000
Aire	1,0006
Baquelita	4,9000
Mica	5,4000
Neopreno	6,9000
Papel	3,7000
Parafina	2,3000
Plexiglás	3,4000
Porcelana	7,0000
Vidrio y pyrex	5,6000

**Tabla 1.3.** Permitividades relativas.

Sustituyendo los valores de  $\epsilon_0$  y  $\epsilon_r$ , en la ecuación 1.2, la constante de proporcionalidad para vacío o para el aire es  $K = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$ .

### Ejercicio de aplicación 1.1

Calcula la fuerza con que se repelen dos cargas eléctricas de  $20 \cdot 10^{-6}$  y  $15 \cdot 10^{-6}$  culombios, respectivamente, separadas 50 cm, suponiendo que el medio interpuesto es el aire.

Solución:

$$|\vec{F}| = K \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{20 \cdot 10^{-6} \cdot 15 \cdot 10^{-6}}{0,5^2} = 10,8 \text{ N}$$

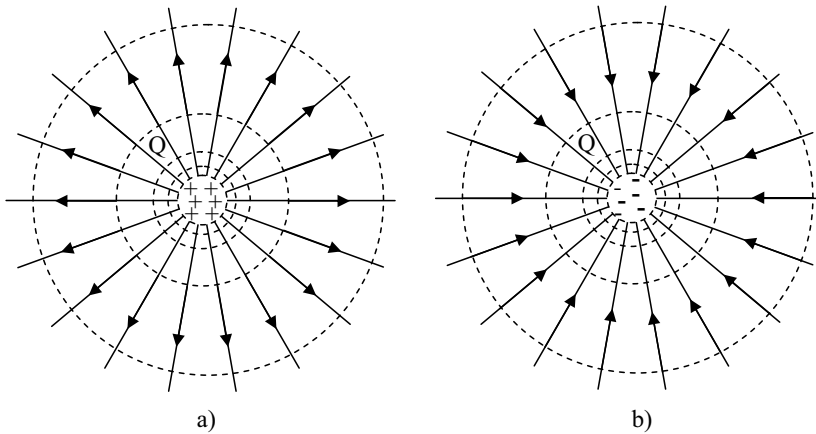
### 1.5.4 Campo eléctrico

Es la región del espacio donde se ponen de manifiesto fuerzas de carácter eléctrico causado por la presencia de una o varias cargas en reposo.

Puesto que la fuerza es una magnitud vectorial, el campo eléctrico es, a su vez, una magnitud vectorial, que tiene dirección y módulo al mismo tiempo.



Para representar un campo eléctrico se utilizan líneas de fuerza –véase fig. 1.10-.



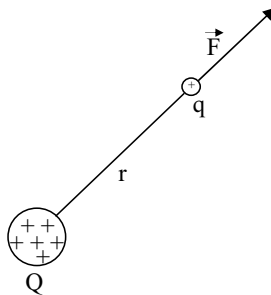
**Figura 1.10.** Representación del campo eléctrico a) creado por una carga positiva y b) creado por una carga negativa

El valor del campo eléctrico en cualquier punto del mismo se representa por el vector  $\vec{E}$ , llamado *intensidad del campo eléctrico*.

Se define como intensidad de campo  $\vec{E}$ , a la fuerza ejercida por unidad de carga.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad (1.4)$$

Para determinar la intensidad del campo eléctrico en un punto cualquiera del mismo, basta colocar en él una carga de prueba q (positiva), medir la fuerza que experimenta y dividir la fuerza entre la carga –figura 1.11-.



**Figura 1.11.** Dirección y sentido de la intensidad de campo eléctrico.

Sustituyendo el valor de  $F$  dado por la ecuación 1.1 en la ecuación 1.4, el módulo de la intensidad de campo en este punto, vendrá definido de la siguiente forma:

$$|\vec{E}| = \frac{|\vec{F}|}{q} = \frac{K \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}}{q} = K \cdot \frac{Q}{r^2} \quad (1.5)$$

Su unidad es el newton/culombio ( $\text{N} \cdot \text{C}^{-1}$ ), y en el S.I., es el voltio/metro ( $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ ). Un voltio por metro es la intensidad de campo eléctrico que ejerce una fuerza de un newton sobre un cuerpo cargado con una cantidad de electricidad de un culombio.

### Ejercicio de aplicación 1.2

*Calcula la intensidad de campo en un punto situado en el mismo plano y a 1 cm dirección norte de una carga positiva de  $3 \cdot 10^{-6}$ .*

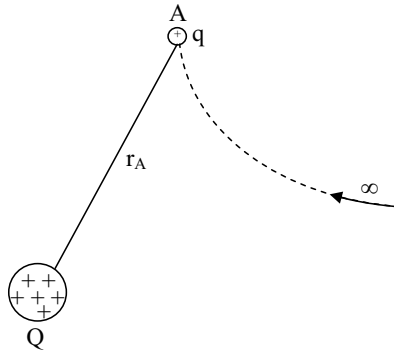
*Solución:*

$$|\vec{E}| = K \cdot \frac{Q}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{3 \cdot 10^{-6}}{0,01^2} = 2,7 \cdot 10^8 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

La dirección del vector vendría dada por la recta que une la carga con el punto y el sentido sería el mismo que el de la fuerza experimentada por una carga positiva situada en el punto en cuestión.

### 1.5.5 Potencial eléctrico

Se llama potencial,  $U_A$ , en el punto  $A$ , de un campo eléctrico, al trabajo realizado sobre la unidad de carga eléctrica positiva para desplazarla desde el infinito hasta dicho punto (figura 1.12).



**Figura 1.12.** Potencial eléctrico.

El potencial en un punto A, viene dado por la siguiente expresión matemática:

$$U_A = \frac{W_{\infty A}}{q} = \frac{\int_{\infty}^A F \cdot dr}{q} = \frac{K \cdot q \cdot Q \int_{\infty}^A \frac{1}{r^2} \cdot dr}{q} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q \cdot \left[ \frac{1}{r} \right]_{\infty}^A = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r_A} =$$

$$U_A = K \cdot \frac{Q}{r_A} \quad (1.6)$$

donde  $Q$  es la carga que crea el campo eléctrico y  $r_A$  es la distancia desde la carga  $Q$  hasta el punto  $A$ .

La unidad de potencial eléctrico según el SI es el voltio (V), y se define como el potencial existente en un punto de un campo eléctrico donde una carga de 1 culombio tiene una energía potencial eléctrica de 1 julio.

A diferencia de la intensidad de campo que es una magnitud vectorial, es decir, que tiene dirección y sentido, el potencial es una magnitud escalar, que sólo tiene módulo.

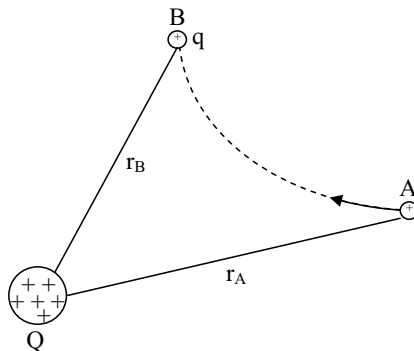
### 1.5.5 Diferencia de potencial

La diferencia de potencial entre dos puntos  $A$  y  $B$  de un campo eléctrico es el trabajo necesario para llevar a la unidad de carga eléctrica positiva desde el punto  $A$  hasta el punto  $B$ . Su expresión matemática es:

$$\begin{aligned}\bar{U}_{AB} &= \frac{W_{AB}}{q} = \frac{\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}}{q} = \frac{K \cdot Q \cdot q}{q} \int_A^B \frac{1}{r^2} \cdot dr = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot Q \left[ \frac{1}{r} \right]_A^B = \\ \bar{U}_{AB} &= \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]\end{aligned}\quad (1.7)$$

$$U_{AB} = K \cdot Q \cdot \left[ \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right] = U_B - U_A \quad (1.8)$$

La diferencia de potencial entre dos puntos es la diferencia de sus potenciales respectivos. El potencial en un punto puede considerarse como la diferencia de potencial entre dicho punto y otro a distancia infinita donde el potencial se supone de manera arbitraria que es cero –figura 1.13-.



**Figura 1.13.** Diferencia de potencial.

En la práctica se utiliza el término tensión eléctrica, o simplemente voltaje, para referirse a la diferencia de potencial.

Consideremos dos puntos  $A$  y  $B$  de un campo eléctrico. Si, por ejemplo, el potencial en el punto es mayor que el potencial en el punto  $A$ , de la definición de potencial se deduce fácilmente que para trasladar la unidad de carga positiva desde  $A$  hasta  $B$ , hay que realizar un trabajo igual  $U_B - U_A$  y en general el trabajo necesario para transportar una carga  $q$  cualquiera, será:

$$W_{AB} = q \cdot (U_B - U_A) \quad (1.9)$$

Si la carga  $q$ , fuese negativa, tendería a irse espontáneamente desde A hasta B, en este caso, sería la carga la que nos podría devolver un trabajo o energía igual al valor de su carga por la diferencia de potencial

### Ejercicio de aplicación 1.3

Calcula la diferencia de potencial creada por una carga puntual de  $10 \cdot 10^{-9}$  C entre los puntos A y B situados a 100 mm y 60 mm, respectivamente, de dicha carga.

Solución:

$$U_{AB} = K \cdot Q \cdot \left[ \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right] = 9 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-9} \cdot \left[ \frac{1}{0,06} - \frac{1}{0,1} \right] = 600 V$$

## 1.6 Electrocínética

### 1.6.1 Elementos de un circuito eléctrico

Para que exista un movimiento de electrones (electrocínética) es necesario cerrar un circuito eléctrico. Un circuito eléctrico nos indica el camino que van a recorrer los electrones cuando éste no tenga ningún impedimento para su circulación, es decir, esté cerrado.

Se llama circuito eléctrico al conjunto de elementos necesarios para que se establezca una corriente eléctrica, así como otros capaces de transformar esa energía eléctrica en otro tipo de energía.

En un circuito encontramos *elementos activos* como las fuentes de tensión o de intensidad, capaces de proporcionar energía. Las resistencias (resistores), las bobinas (inductores) y los condensadores (capacitores) son *elementos pasivos* y toman energía de las fuentes para transformarla en otro tipo de energía o acumularla en forma de campo magnético o eléctrico.

En la figura 1.14 se han representado siete elementos básicos de circuitos. Los elementos (a) y (b), son fuentes de tensión y los elementos (c) y (d) son fuentes de intensidad. Cuando una fuente de tensión o de intensidad no se ve afectada por cambios en el circuito al cual está conectada se dice que es una fuente independiente, representándose por un círculo. Una fuente de tensión o de intensidad dependiente, es aquella en la que cambian sus características según sean las condiciones del circuito, y se

representa mediante un rombo. Los tres elementos pasivos, resistencias, bobinas y condensadores, se representan respectivamente en las figuras (e), (f) y (g).

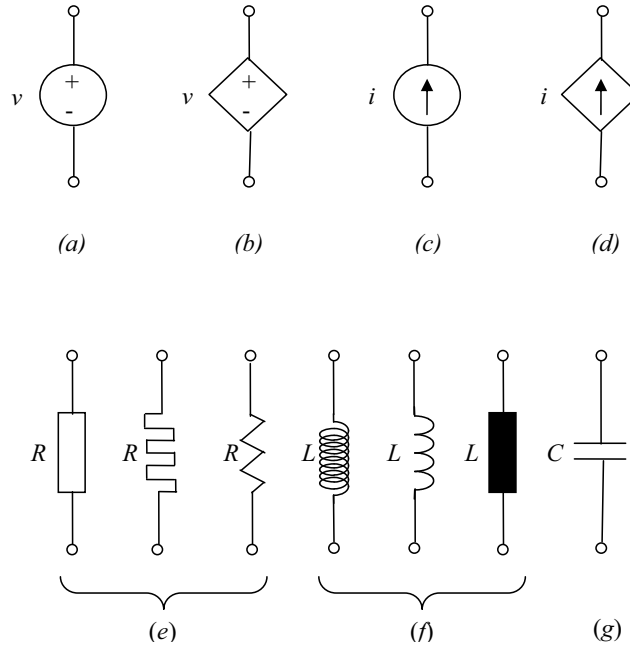


Figura 1.14. Elementos básicos de circuitos.

A lo largo de este libro profundizaremos en circuitos que emplean generadores de corriente continua como pilas, baterías de acumuladores y dinamos, y generadores de corriente alterna como alternadores. La simbología a emplear en los circuitos se muestra en la figura 1.15.

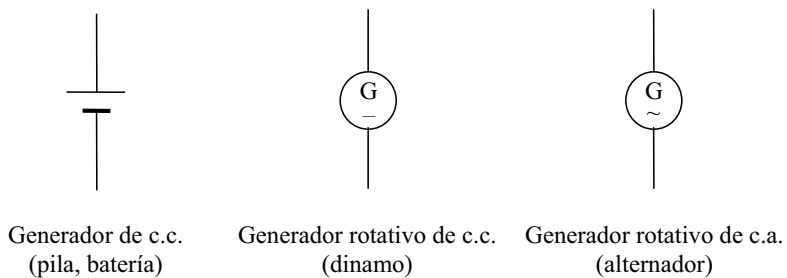


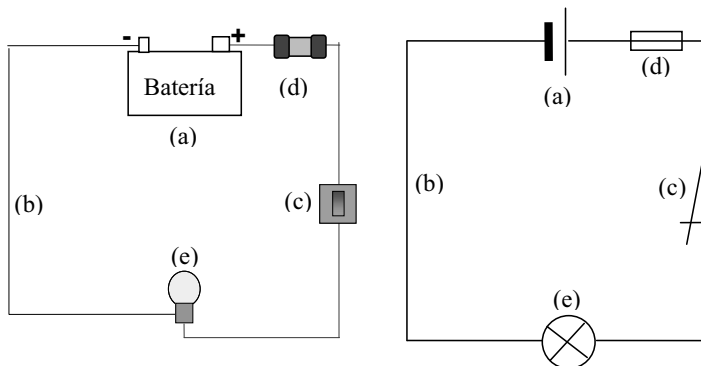
Figura 1.15. Símbolos de generadores.

Además, un circuito contiene los distintos aparatos de accionamiento, maniobra y protección correspondientes que nos permiten gobernar la corriente eléctrica con la mayor eficacia y seguridad posible para las personas, los animales y las instalaciones.

En todo circuito eléctrico observamos los siguientes elementos:

- a) *Generador*: Es el que genera o produce la electricidad.
- b) *Cables y Conectores*: son los materiales que permiten el paso de la electricidad. El más utilizado es el cable de cobre.
- c) *Elementos de Control*: nos permite controlar el paso de la electricidad en nuestros circuitos eléctricos. El elemento de control más conocido y empleado es el interruptor que controla el paso o no de la electricidad.
- d) *Elementos de Protección*: son aquellos que protegen al circuito de sobrecargas o cortocircuitos; pero también son aquellos que sirven de protección al usuario. Por ejemplo, un fusible es un elemento de protección al circuito, mientras que el revestimiento de los cables de cobre es un elemento de protección al usuario.
- e) *Receptor o carga*: en él se transforma la energía eléctrica en algún otro tipo de energía.

En la figura 1.16 se muestran estos elementos.



**Figura 1.16.** Elementos de un circuito eléctrico.

En los vehículos autopropulsados, el borne negativo de la batería se conecta al chasis y al bloque del motor, de forma que se cierra el circuito por la parte metálica del coche, llamada masa. De este modo se consigue eliminar el conductor de vuelta.

La existencia de corriente eléctrica en un circuito se conoce por los efectos que produce. La energía eléctrica es transportada por medio de los hilos conductores a través de todo el circuito para ser transformada en el receptor en otra clase de energía, como puede ser calorífica, luminosa, mecánica, química, etc.

### 1.6.2 Generador de tensión. Fuerza electromotriz

El generador es el elemento que proporciona la energía eléctrica, que a su vez se obtiene a partir de otro tipo de energía, bien sea química, mecánica, etc.

La energía que transforman los generadores en energía eléctrica se la comunican a los electrones para ponerlos en movimiento. El trabajo realizado para mover la carga eléctrica recibe el nombre de fuerza electromotriz, abreviadamente f.e.m. Se representa por la letra “ $E$ ” y su unidad de medida es el voltio (V).

La f.e.m. es el trabajo que tiene que realizar el generador para que se muevan las cargas del circuito. Sea  $q$  la cantidad de carga que pasa por cualquier sección del circuito en un intervalo de tiempo determinado, y  $W$  el trabajo realizado por el generador; la f.e.m. viene dada por:

$$E = \frac{dW}{dq} \quad (1.10)$$

Cuando el generador realiza un trabajo de 1 julio y se desplazan en su interior 1 culombio de electrones, se dice que su f.e.m es de 1voltio.

$$E = \frac{W}{q} = \frac{1 \text{ julio}}{1 \text{ culombio}} = 1 \text{ voltio} \quad (1.11)$$

Los generadores se representan en los circuitos eléctricos con la simbología mostrada en la figura 1.15.

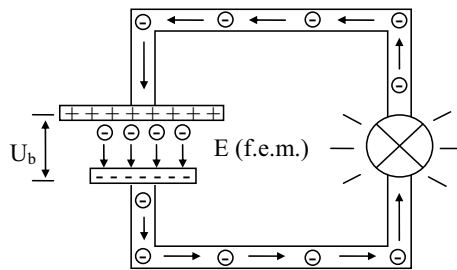
Los generadores pueden ser de distintos tipos según el tipo de energía que transforman como:

- *Pilas*: transforman la energía química en eléctrica.



- *Acumuladores*: aunque no son generadores propiamente dichos, transforman energía eléctrica en química, manteniéndola acumulada para más tarde deshacer la transformación y devolver energía eléctrica.
- *Dinamos o alternadores*: transforman la energía mecánica o de rotación en eléctrica. En otros casos se realizan transformaciones de energía de otro tipo para lograr energía mecánica que se aprovecha en los alternadores y dinamos como es el caso de las centrales térmicas, hidráulicas, nucleares, etc.

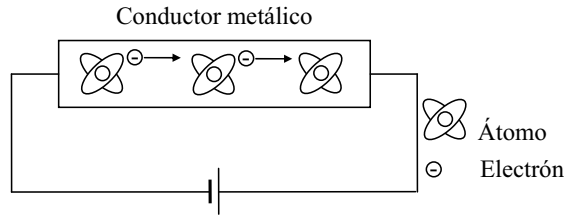
Como ya hemos indicado el generador es el encargado de crear la diferencia de cargas. Para crear esta diferencia de cargas, el generador tiene que arrancar electrones del polo positivo y depositarlos en el polo negativo, creando una diferencia de potencial en bornes del generador que se representa como “ $U_b$ ”. Su unidad de medida es el voltio (V), –véase figura 1.17-.



*Figura 1.17. Movimiento de los electrones en un circuito eléctrico.*

### 1.6.3 Corriente eléctrica

En un conductor metálico aislado como, por ejemplo, un trozo de cobre, los electrones más externos de cada átomo se mueven libremente por el metal, de modo semejante al movimiento de las moléculas de un gas, es decir, no tienen una dirección privilegiada.



**Figura 1.18.** *Movimiento de los electrones en el metal.*

Pero si los extremos de este trozo de cobre los conectamos a una pila eléctrica, entonces aparece un campo eléctrico en su interior y dichos electrones se mueven en la dirección del campo en el sentido de mayor a menor potencial, esto supone, que sus electrones libres sufren un empuje eléctrico, originándose una corriente eléctrica.

El flujo electrónico está dirigido hacia el polo positivo de la pila como si, los electrones del conductor sufrieran una repulsión desde el polo negativo. El primer electrón *A* se desplaza hasta *B*, sacando este electrón de su órbita para ocuparla él, mientras que el electrón *B* hace lo propio con el siguiente.

Vemos, por tanto, que para obtener el movimiento de un electrón, es necesario que otro ocupe su lugar, luego en el conductor siempre hay un mismo número de electrones y si sale alguno por un extremo entra por el opuesto.

Antiguamente se suponía que las partículas desplazables eran de signo positivo, denominados corriente eléctrica al movimiento de estas cargas. Actualmente se sabe que no es así, pero se sigue considerando que la corriente eléctrica se establece de positivo a negativo (*sentido convencional o técnico de la corriente*), mientras que la corriente electrónica se dirige de negativo a positivo (*sentido real de la corriente*).

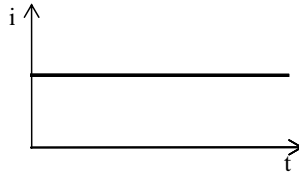
Podemos definir la corriente eléctrica como: “*el movimiento ordenado de electrones que han sido desplazados de sus orbitas mediante la aplicación de una fuerza eléctrica*”. Se puede asegurar que la corriente eléctrica es el movimiento ordenado de electrones a través de un conductor. Para que exista una corriente eléctrica es necesaria una fuerza que empuje los electrones para desplazarlos de sus órbitas, así como que el cuerpo al que se le aplica la fuerza eléctrica permita el paso de los electrones, es decir, sea conductor.

### 1.6.3.1 Clasificación de la corriente

Estas se clasifican en corriente continua, pulsatoria, alterna y mixta.

#### a) Corriente continua (C.C. o D.C.)

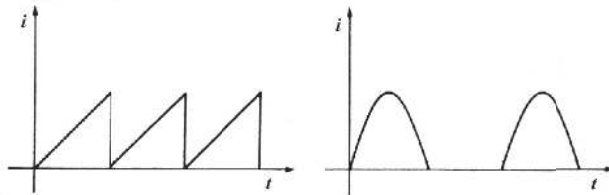
Cuando la fuerza eléctrica es constante y siempre en el mismo sentido, la corriente obtenida se denomina corriente continua pues los electrones circulan ininterrumpidamente y de manera continua por el conductor en el mismo sentido.



*Figura 1.19. Corriente continua.*

#### b) Corriente pulsatoria

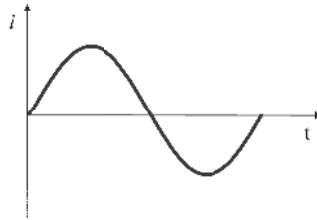
Si la fuerza eléctrica aplicada al conductor aumenta y disminuye periódicamente, sin cambiar de sentido, la corriente que provoca se llama pulsatoria.



*Figura 1.20. Corriente pulsatoria.*

#### c) Corriente alterna (C.A. o A.C.)

Cuando la fuerza eléctrica cambia constantemente de sentido de aplicación, el efecto obtenido es corriente alterna. Los electrones son empujados en un sentido unas veces y otras en sentido contrario.



**Figura 1.21.** Corriente alterna.

#### **d) Corriente mixta**

Se puede definir como la superposición de una corriente continua y una corriente alterna, ambas pasando por el mismo circuito e instante.

#### **1.6.3.2 Intensidad de corriente**

Se define la intensidad de una corriente eléctrica como la cantidad de carga eléctrica que atraviesa una sección transversal de conductor en la unidad de tiempo. Su valor instantáneo viene definido por la siguiente ecuación:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (1.12a)$$

donde  $i$  es la intensidad de la corriente expresada en amperios y  $(dq/dt)$  es la velocidad de desplazamiento de la carga eléctrica o cantidad de electricidad en culombios/segundo.

Su unidad de medida es el amperio y se representa por la letra “A”. Se dice que ha circulado una corriente de un amperio por un conductor cuando han pasado por su sección transversal un culombio de electrones ( $6,25 \cdot 10^{18} e^-$ ) en un segundo.

Si la intensidad es constante en todo momento, la expresión anterior se representa del siguiente modo:

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{1\text{Culombio}}{1\text{Segundo}} = 1\text{Amperio} \quad (1.12b)$$

Tomando como referencia un punto cualquiera de un conductor, la cantidad de carga eléctrica que pasa por ese punto será:

$$Q = I \cdot t \quad (1.13)$$

Al producto  $I \cdot t$  se le denomina *cantidad de electricidad* y se mide en culombios. El amperio-hora es un múltiplo del culombio y representa la cantidad de corriente que pasa por un conductor, recorrido por una corriente eléctrica de un amperio durante una hora. Un amperio-hora equivale a 3600 culombios.

Para medir la intensidad se intercala un amperímetro, abriendo el circuito por el punto donde se desea conocer la corriente. El amperímetro se conecta en serie con los demás elementos que constituyen el circuito.

Se define un amperio como “*la intensidad de una corriente constante que, manteniéndose en dos conductores paralelos, rectilíneos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y situados a una distancia de un metro uno de otro, en el vacío, produce entre estos conductores una fuerza igual a  $2 \cdot 10^{-7}$  Newton por metro de longitud*”

### 1.6.3.3 Densidad de corriente

Se define la densidad de corriente,  $J$ , como el cociente entre la intensidad de la corriente,  $I$ , y el área o sección transversal,  $S$ , del conductor por el que circula dicha corriente. Tiene por expresión:

$$J = \frac{I}{S} (\text{A} \cdot \text{mm}^{-2}) \quad (1.14)$$

Muchas tablas de intensidades máximas admisibles en los hilos y cables conductores vienen expresadas en  $\text{A} \cdot \text{mm}^{-2}$ , ya sean de catálogos comerciales, REBT, o de las normas electrotécnicas sobre cables.

### 1.6.4 Resistencia eléctrica

El paso de la corriente eléctrica no se realiza en todos los conductores con la misma facilidad, pues, la estructura atómica de los cuerpos tiene gran influencia en el desplazamiento de los electrones por su interior.

*Se llama resistencia a la oposición que presenta un cuerpo al paso de la corriente eléctrica, es decir, la dificultad que encuentran los electrones para desplazarse, ocupando orbitas distintas en átomos cercanos.* Su unidad de medida es el ohmio y se representa por la letra griega omega ( $\Omega$ ).

*Un ohmio es la resistencia que presenta un conductor, cuando entre sus extremos se le aplica una diferencia de potencial de un voltio y circula una corriente con una intensidad de un amperio.*

#### **1.6.4.1 Resistencia de un conductor**

La resistencia que presenta un conductor al paso de la corriente depende de su longitud, su sección y del tipo de material de que esté compuesto.

La resistencia de un conductor aumenta con la longitud y disminuye con su sección. Dicho de otra forma, la resistencia eléctrica de un conductor es directamente proporcional a su longitud e inversamente proporcional a su sección.

También depende de un factor llamado coeficiente de resistividad, que es distinto para cada tipo de material. La expresión matemática es la siguiente:

$$R = \rho \cdot \frac{L}{S} \quad (1.15)$$

donde :

$R$  = resistencia eléctrica en ohmios ( $\Omega$ ).

$\rho$  = coeficiente de resistividad ( $\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$ ).

$L$  = longitud del conductor en metros (m).

$S$  = sección del conductor en  $\text{mm}^2$ .

#### **1.6.4.2 Resistividad**

La resistividad es la oposición al paso de la corriente eléctrica que ofrece un conductor de longitud y sección unidad. Se representa por la letra griega rho,  $\rho$ .

Si utilizamos las unidades S.I., en la fórmula anterior, tenemos que la unidad derivada en el S.I. de resistividad de un conductor es el ohmio·metro.

$$\rho = \frac{R \cdot S}{L} = \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} = 10^{-6} \Omega \cdot \text{m} \quad (1.16)$$

La resistividad de un material homogéneo a una determinada temperatura puede obtenerse aplicando una tensión a los extremos de un conductor de 1 m de largo y de 1  $\text{mm}^2$  de sección, el cociente  $U/I$  es la resistividad en  $\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$ .

En el caso del cobre  $\rho = 0,0173 \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$ ., lo que nos dice que por cada metro de conductor de cobre de un milímetro cuadrado de sección, la resistencia del mismo será de 0,0173 ohmios.

$$\rho = \frac{R \cdot S}{L} = \frac{0,01724 \Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} \cdot \frac{1 \text{m}^2}{10^6 \text{mm}^2} = 1,724 \cdot 10^{-4} \Omega \cdot \text{m}$$

Normalmente para el cálculo de conductores de cobre, se emplea el valor de  $1,8 \cdot 10^{-4} \Omega \cdot \text{m}$ , ya que así “nos curamos en salud”.

### 1.6.4.3 Conductancia

La propiedad de los materiales, inversa a la resistencia, la llamamos conductancia.

Mientras que la resistencia es la oposición que ofrecen los conductores al paso de la corriente eléctrica, la conductancia representa la facilidad que ofrecen los conductores al paso de la corriente eléctrica.

Se representa por la letra “G” y su unidad en el S.I. es el siemens, S. También se ha expresado como mho (ohm deletreado al revés), simbolizado por una omega invertida. Como magnitud medible se expresa:

$$G = \frac{1}{R} \quad (1.17)$$

El siemens se define como la conductancia de un conductor que tiene una resistencia eléctrica de un ohmio.

### 1.6.4.4 Conductividad

La conductividad es la inversa de la resistividad, se representa por las letras griegas gamma “ $\gamma$ ” o sigma “ $\sigma$ ”, y la definimos como la facilidad que ofrecen los materiales al paso de la corriente eléctrica, por unidad de longitud y sección. Tiene por expresión:

$$\gamma = \frac{1}{\rho} = \frac{L}{R \cdot S} = \frac{\text{m}}{\Omega \cdot \text{m}^2} = \frac{1}{\Omega \cdot \text{m}} = 1\text{S} \cdot \text{m}^{-1} \quad (1.18)$$

En la tabla 1.4 se indica el coeficiente de resistividad y de conductividad de algunos materiales a 20 °C.

Material	Constitución	Resistividad $\rho$ $\left(\frac{\Omega \cdot mm^2}{m}\right)$	Conductividad $\gamma$ $\left(\frac{m}{\Omega \cdot mm^2}\right)$
Plata (Ag)	Plata	0,0164	61
Cobre (Cu)	Cobre	0,01724	58
Aluminio (Al)	Aluminio	0,0278	36
Constantán	60% cobre 40% aluminio	0,50	2,0
Oro (Au)	Oro	0,023	43,5
Grafito	Grafito	0,046	22
Platino (Pt)	Platino	0,107	9,35
Wolframio (W)	Wolframio	0,055	18,2

**Tabla 1.4.** Resistividad y conductividad de algunos materiales a 20 °C.

En agricultura, se utiliza la conductividad eléctrica para determinar la cantidad de sales del agua de riego y de las soluciones nutritivas. La unidad más empleada es el  $mmho \cdot cm^{-1} = dS \cdot m^{-1}$ .

#### 1.6.4.5 Influencia de la temperatura

La resistencia de un conductor varía con la temperatura. Un aumento de la temperatura provoca un aumento de la resistencia. Lo contrario sucede cuando un conductor se enfría, hasta tal punto, que en el cero absoluto (-273 °C), la resistividad del cobre y otros metales es nula.

Los valores indicados en la tabla 1.4, son válidos para trabajar a una temperatura próxima a la temperatura ambiente, que es a la que se transporta la energía eléctrica y a la que se consigue un equilibrio térmico del conductor.

La resistividad de un conductor, a una temperatura diferente a 20 °C, se determina mediante la siguiente fórmula:

$$\rho_f = \rho_{20} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T) \quad (1.19)$$

donde:

$\rho_{20}$  es la resistividad del conductor a 20 °C.

$\alpha$  es su coeficiente de temperatura.

$\Delta T$  es la diferencia ( $T_f - 20$ ).

$\rho_f$  es la resistividad final a la temperatura final  $T_f$ .



De forma análoga a la resistividad, la resistencia se comprueba experimentalmente que alcanza un valor  $R_f$  cuando la temperatura de trabajo o final pasa de 20 °C a  $T_f$ , y tiene por expresión:

$$R_f = R_{20} [1 + \alpha \cdot (T_f - 20)] \quad (1.20)$$

La expresión anterior solamente es válida mientras que la variación de resistencia sea proporcional a la temperatura, es decir, la resistencia se puede considerar que es una función lineal, entre los límites de 0 a 180 °C, aproximadamente, que por otro lado son los casos más frecuentes.

De la ecuación anterior también se puede obtener el incremento de temperatura experimentado por un conductor conocidas sus resistencias a 20 °C y a la temperatura final, " $t_f$ ". También se puede obtener el coeficiente de temperatura de un conductor, conocidas las variaciones de resistencia a unas temperaturas dadas.

Los valores del coeficiente de temperatura para algunos metales se presentan en la tabla 1.5.

Material	Coficiente de temperatura $\alpha$ (°C <sup>-1</sup> )
Cobre	0,00392
Aluminio	0,00403
Almelec	0,00360

**Tabla 1.5.** Coficiente de temperatura de los conductores más utilizados en instalaciones eléctricas.

Para la mayoría de los metales,  $\alpha > 0$ , con lo que la resistividad y, por tanto, la resistencia aumentan con la temperatura.

En otros materiales como el carbono, germanio, etc.,  $\alpha < 0$ , la resistencia disminuye con la temperatura.

Por último, cabe destacar que, en ciertos conductores enfriados hasta temperaturas próximas al cero absoluto, la resistencia desaparece por completo. Este fenómeno recibe el nombre de *superconductividad* y aparece a una temperatura determinada para cada sustancia. Esta temperatura se denomina temperatura crítica.

### Ejercicio de aplicación 1.4

Las bobinas de excitación de un motor de c.c., tienen 310 espiras de conductor de cobre de  $1,5 \text{ mm}^2$  de sección cada una. La longitud media de cada espira es de  $0,6 \text{ m}$  y el número de bobinas de excitación es de cuatro, conectadas en serie. Se pide:

a) Resistencia del conjunto a  $20^\circ \text{C}$ .

b) Después de estar en funcionamiento 45 minutos, se mide la resistencia del arrollamiento obteniéndose  $11\Omega$ . ¿Cuál es la temperatura de régimen de funcionamiento del motor?

Solución:

$$\text{a) } l = 310 \text{ espiras} \cdot 0,6 \text{ m} \cdot 4 \text{ bobinas} = 744 \text{ m}$$

$$R_{20} = \rho_{20} \cdot \frac{L}{S} = 0,0173 \frac{744}{1,5} = 8,58\Omega$$


$$\text{b) } \Delta T = \frac{\frac{R_f}{R_{20}} - 1}{\alpha} = \frac{\frac{11}{8,58} - 1}{0,00392} = 71,95^\circ \text{C}$$

$$T_f = \Delta T + 20 = 71,95 + 20 = 91,95^\circ \text{C}$$

#### 1.6.4.6 Resistor

Aunque todo receptor o conductor presenta una resistencia al paso de la corriente eléctrica, se da el nombre propiamente dicho de resistencia (resistor) a una pieza pequeña con forma de cilindro, fabricado de carbón con algún aglomerante, que por las características propias de dicho material presenta una dificultad al paso de la corriente eléctrica.

El valor óhmico de las resistencias suele darse grabado en ellas o bien con un código de colores. Sobre cada resistencia hay una serie de bandas de diferentes colores como lo indica en la figura 1.22, más próximos a uno de sus extremos, y cada una de estas bandas representa una cifra significativa.



COLOR	VALOR	MULTIPLICADOR	TOL %	CT
NEGRO	0	1		200
MARRON	1	10	± 1	100
ROJO	2	100	± 2	50
NARANJA	3	1.000		15
AMARILLO	4	10.000		25
VERDE	5	100.000	± 0,5	
AZUL	6	1.000.000	± 0,25	10
VIOLETA	7	10.000.000	± 0,1	5
GRIS	8			1
BLANCO	9			
ORO		0,1	± 5	
PLATA		0,01	± 10	
SIN COLOR			± 20	

*Figura 1.22. Código de colores de resistencias fijas.*

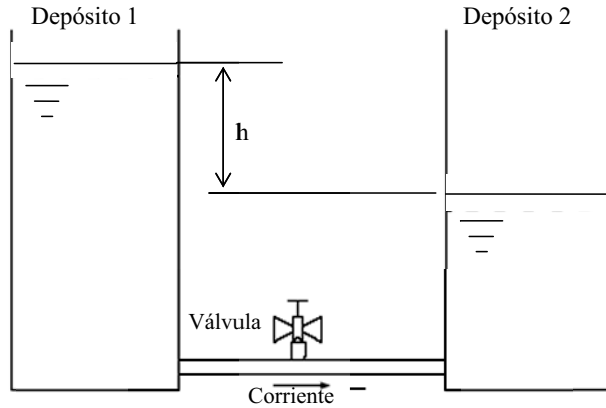
El primer color indica las decenas, el segundo las unidades, y estos dos colores tenemos un número que tendremos que multiplicar por el valor equivalente del tercer color y el resultado es el valor de la resistencia. El cuarto color es el valor de la tolerancia. Este sistema se utiliza para resistencias de cuatro colores.

Para resistencias de cinco o seis colores sólo cambia que en vez de dos colores se utilizan los tres colores primeros para formar el número que hay que multiplicar por el valor equivalente del cuarto color. El quinto es el color de la tolerancia y el sexto, para las de seis colores, es el coeficiente de temperatura.

Si por ejemplo tenemos una resistencia cuyos colores de banda son: rojo (2), azul (6), amarillo (4) y plata. Su valor óhmico es  $260.000 \pm 10\%$ .

### 1.6.5 Analogía hidráulica

Normalmente los conceptos eléctricos suelen ser bastante difíciles de asimilar por el estudiante que se enfrenta por primera vez a los mismos. Para comprenderlos mejor se puede asimilar un circuito eléctrico a un circuito hidráulico, mucho más intuitivo.



**Figura 1.23.** Circuito hidráulico.

En la figura 1.23 disponemos de dos depósitos de agua iguales unidos en su base por una tubería con una válvula. Debido a la diferencia de nivel o de cotas,  $h$ , que existe entre los depósitos, cuando se abra la válvula, circulará una corriente de agua que pasará del depósito 1 al depósito 2 hasta que se igualen las alturas.

Como hemos visto, para que se produzca un movimiento de agua es necesario que exista una diferencia de alturas, pues bien, si queremos que en un circuito eléctrico se produzca movimiento de electrones necesitamos que exista una diferencia de potencial.

Al abrir la válvula, pasa una corriente de agua por la tubería, es decir, pasa una cantidad de agua ( $m^3$ ) en un determinado tiempo (segundos), que es el caudal. Al cerrar el interruptor en un circuito eléctrico se establece una corriente eléctrica por los conductores, es decir, pasa una cantidad de electrones ( $C$ ) en un determinado tiempo (segundos). Si la cantidad de electrones que circulan en un segundo por una sección del conductor es de un culombio diremos que ha circulado un amperio.

Pero este movimiento solo va a permanecer mientras se conserve la diferencia de altura en el circuito hidráulico o la diferencia de potencial en el circuito eléctrico. Para conseguir que permanezca la diferencia de altura necesitaríamos colocar una bomba en el circuito que nos eleve el mismo caudal que se está trasvasando de un depósito a otro (figura 1.24). Esta misión la cumple en un circuito eléctrico el generador, que arranca electrones creando por un lado un déficit (carga positiva) y por otro lado un exceso de electrones (cargas negativas), consiguiendo una diferencia de potencial o diferencia de cargas.

La energía hidráulica podemos convertirla en otro tipo de energía, como por ejemplo mecánica, mediante una turbina. La energía eléctrica también la podemos transformar en otro tipo de energía, como por ejemplo luminosa, mediante una lámpara.

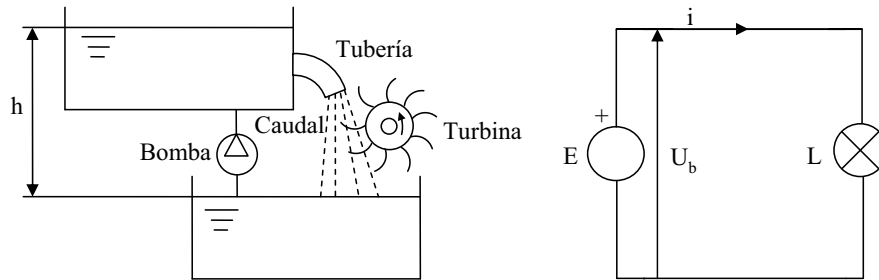


Figura 1.24. Analogía entre un circuito hidráulico y un circuito eléctrico.

Circuito Hidráulico	Circuito Eléctrico
Diferencia de altura $h$ .	Diferencia de potencial $U$
Corriente de agua. $Q = m^3/s$	Corriente eléctrica. $I = \frac{Q}{t} = \frac{1\text{Culombio}}{1\text{Segundo}} = 1\text{Amperio}$
Resistencia de la tubería	Resistencia de los conductores
Pérdida de carga	Caída de tensión
Bomba de agua	Generador eléctrico

Tabla 1.6. Tabla resumen de las analogías hidráulico-eléctrico.

## 1.6.6 Trabajo y potencia eléctrica. Ley de Joule

### 1.6.6.1 Energía eléctrica

Se entiende por energía todo aquello capaz de realizar trabajo. El principio de conservación de la energía dice que la energía ni se crea ni se destruye sino que solamente se transforma, es decir, que en el mundo siempre hay la misma cantidad de energía y cuando en alguna parte desaparece alguna porción, aparece en otra parte la

misma cantidad. Por ejemplo, un cuerpo que se enfría pierde energía calorífica que pasa al aire que lo rodea y a otros cuerpos cercanos calentándolos, siendo la energía total que estos ganan igual a la que el cuerpo perdió en su enfriamiento.

La energía se pone de manifiesto cuando se realiza un trabajo. Para que un cuerpo posea energía no es necesario que esté realizando trabajo, es suficiente que pueda realizarlo.

De todas las formas en que puede presentarse la energía, la mecánica es la más utilizable pues el trabajo mecánico es fácilmente aprovechable. La energía eléctrica es también muy utilizada pues es fácilmente transformada en energía mecánica mediante el empleo de motores eléctricos y, en otra clase de energía como es la calorífica, teniendo además la característica de su fácil transporte a lugares alejados mediante tendidos eléctricos.

Cuando los electrones de los átomos de un cuerpo son empujados y desviados de su trayectoria normal, el cuerpo adquiere energía eléctrica, porque los electrones tienden a volver a sus orbitas y, cuando lo hacen devuelven la misma energía que se empleó para modificar sus trayectorias.

La energía se expresa en las mismas unidades que el trabajo.

### 1.6.6.2 Trabajo eléctrico

El trabajo eléctrico para desplazar una cantidad de electrones entre dos puntos de un circuito se determina, como el producto de la carga por la diferencia de potencial aplicada entre dichos puntos. Su unidad de medida es el Julio.

$$dW = dq \cdot u \quad (1.21a)$$

Un julio es el trabajo realizado para desplazar un culombio de electrones entre dos puntos cuya d.d.p. sea de un voltio.

En corriente continua el trabajo eléctrico se expresa mediante la ecuación 1.21b:

$$W = q \cdot U \quad (1.21b)$$

Si entre los bornes de un generador, cuya f.e.m. es de 1V, se supone un electrón situado en *A* con la carga eléctrica de  $1,6 \cdot 10^{-19}$  C. Este sufre un empuje que tiende a hacerlo pasar a *B*, y si colocamos un hilo conductor entre *A* y *B*, el electrón puede pasar

llegando a  $B$  con una energía cinética igual al trabajo mecánico que habría que hacer para trasladarlo nuevamente de  $B$  a  $A$ . El trabajo realizado para trasladar el electrón de  $A$  a  $B$  lo ejerce la fuerza con que la d.d.p. empuja al electrón debido a la carga eléctrica que éste posee. La magnitud de este trabajo viene dada por el producto de la cantidad de electricidad por la d.d.p. y, en este caso es:

$$1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Como la intensidad se define como la carga que circula por un conductor en la unidad de tiempo:

$$I = \frac{q}{t} \text{ de donde } q = I \cdot t \quad (1.22)$$

Como la cantidad de carga que circula por un conductor en la unidad de tiempo se define determina mediante la ecuación 1.13:

$$Q = I \cdot t \quad (1.13)$$

deducimos que el trabajo es igual a:

$$W = U \cdot I \cdot t \quad (1.23)$$

### 1.6.6.3 Potencia eléctrica

Es el trabajo desarrollado por unidad de tiempo. Por tanto, la potencia representa la rapidez con que se realiza el trabajo. Su valor instantáneo se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$p = \frac{dW}{dt} \quad (1.24a)$$

La unidad de potencia en S.I. es el vatio, que se representa por la letra  $W$ , y equivale a un  $\text{J} \cdot \text{s}^{-1}$ . Otra unidad muy empleada en electrotecnia es el caballo de vapor, CV. Un CV equivale a 736 W.

En corriente continua la potencia eléctrica se expresa del siguiente modo:

$$P = \frac{W}{t} \quad (1.24b)$$

Cuando se habla de potencia de una máquina se da a entender que ésta es la máxima que puede desarrollar aunque en un momento determinado este dando menos.

Como la potencia es la velocidad con la que se realiza un trabajo, la energía total consumida se puede expresar en función de esta despejando de las ecuaciones 1.24a y b.

$$\text{Energía} = \text{Trabajo} = \text{Potencia} \cdot \text{tiempo}$$

Haciendo la potencia igual a un vatio y el tiempo a un segundo, resulta como unidad de medida el vatio por segundo. Comercialmente se usa el kilovatio-hora, que es la energía consumida en una hora a razón de un kilovatio cada segundo.

$$1\text{kWh} = 1000 \text{ W} \cdot 3600 \text{ seg} = 3.600.000 \text{ julios}$$

Un kilovatio-hora corresponde a la energía consumida por una máquina de un kilovatio potencia que estuviese funcionando durante una hora.

#### 1.6.6.4 Ley de Joule

Cuando un conductor es atravesado por la corriente eléctrica, una parte se transforma en calor al vencer la resistencia que este opone al paso de la corriente. No se puede evitar.

Unas veces se utiliza esta propiedad para producir calor en los aparatos adecuados que llevan conductores eléctricos de gran resistencia. Otras veces interesa reducir al mínimo esta producción de calor ya que puede dañar.

Es fácil suponer los electrones chocando unos con otros en su movimiento debido a la dificultad que presenta el conductor a su paso. Cada colisión supone un desprendimiento de calor.

El físico británico James Prescott Joule, en 1841, cuantificó el valor del calor que se produce en un conductor por el paso de una corriente y enunció la ley que lleva su nombre (ley de Joule): *la cantidad de calor desprendida en un conductor por el paso de una corriente constante es proporcional al cuadrado de la intensidad I de la corriente y a la resistencia R del conductor.*

Esta ecuación se deduce de la siguiente expresión:

$$W = q \cdot U = I \cdot t \cdot R \cdot I = R \cdot I^2 \cdot t \quad (1.25)$$

La energía eléctrica disipada es por tanto:

$$E_c = R \cdot I^2 \cdot t \text{ (Julios)} \quad (1.26)$$



donde :

$E_c$  = energía eléctrica disipada en julios.

$R$  = resistencia eléctrica en ohmios.

$I$  = intensidad de corriente en amperios.

$t$  = tiempo en segundos.

Es frecuente que se utilice otra unidad para determinar la cantidad de calor; esta unidad es la caloría. En este caso, si se designa por 1/J el equivalente mecánico de la caloría, la expresión anterior queda de la forma siguiente:

$$E_c = Q = \frac{1}{J} \cdot R \cdot I^2 \cdot t \quad (1.27a)$$

La caloría no es una unidad del SI, y expresamente no es aconsejada por las normas UNE dada su inexactitud, pues hay caloría subquince ( $cal_{15}$ ), caloría internacional ( $cal_{IT}$ ) y caloría termoquímica ( $cal_{Th}$ ). La definición de la caloría subquince o caloría gramo,  $cal_{15}$ , se define como la cantidad de calor necesaria para elevar de 14,5 °C a 15,5 °C la temperatura de un gramo de agua exenta de aire a una presión constante de 101,325 kPa.

Equivalencias:

$$1 \text{ cal} = 4,185 \text{ J}$$

$$1 \text{ J} = 0,239 \text{ cal}$$

$$1 \text{ Mcal} = 1,163 \text{ kW.h}$$

Teniendo en cuenta que un julio equivale a 0,24 calorías la ecuación quedaría:

$$Q = 0,24 \cdot I^2 \cdot R \cdot t \quad (1.27b)$$

donde  $Q$  es la cantidad de calor desprendido en calorías.

La necesidad que nos encontramos de tener en los conductores un calentamiento limitado impone no sobrepasar en ellos una determinada densidad de corriente.

### Aplicaciones del Efecto Joule

El calor desprendido por el efecto joule tiene múltiples aplicaciones como son:

1. *Calentadores eléctricos.* Están formados por resistencias de ferro-níquel o microm, arrollando un hilo en forma de hélice alrededor de un cilindro de material

aislante y refractario al calor. Como la resistencia del hilo es grande se consigue que el producto  $R \cdot I^2$  sea alto y, con ello, obtenemos una cantidad de calor importante.

2. *Soldadores eléctricos.* Están basados en el mismo principio anterior pero ahora la resistencia se enrolla (debidamente aislada) alrededor de una barra de cobre, a la que le trasmite el calor de la resistencia y, con lo cual, se produce la operación de soldar con estaño.

3. *Lámparas de incandescencia.* El paso de la corriente eléctrica por un hilo de tungsteno eleva la temperatura a unos 2800 °C que corresponde al rojo blanco y el filamento despidе luz.

4. *Fusibles.* Cuando la intensidad de corriente que circula por un hilo conductor es grande, la temperatura obtenida también lo es, y si el hilo es de plomo o aleación de plomo y estaño, puede sobrepasarse su temperatura de fusión, en cuyo caso se dice que el hilo se ha fundido. Esta propiedad se utiliza para interrumpir la corriente de manera automática en los circuitos, para lo cual, se colocan en ellos los llamados fusibles, que se fabrican con hilo de plomo o similares y cortan el circuito eléctrico cuando la corriente que pasa por ellos rebasa un determinado valor.

El efecto Joule es perjudicial en otros casos. Cuando dos puntos se encuentran a potenciales distintos se unen por un conductor cuya resistencia es despreciable, como en el caso de un cortocircuito la corriente que se origina es muy intensa. El desprendimiento de calor que, como sabemos, es proporcional al cuadrado de la intensidad, pone incandescente el conductor, con peligro de inflamar los materiales que tenga a su lado. De esta manera es como se producen los incendios debidos a cortocircuito.

Cuando existe un mal contacto entre dos puntos que deban estar conectados a un circuito eléctrico, la resistencia de esos dos puntos llamada resistencia de contacto se hace grande, con lo que el calentamiento debido al efecto Joule, que es proporcional a la resistencia se hace excesivo y deteriora poco a poco el receptor. Tal es el caso de los interruptores que no hacen buen contacto eléctrico en sus bornes.

El cortocircuito en un generador provoca una descarga muy intensa y, por tanto, un enorme desprendimiento de calor por efecto Joule, que estropea rápidamente dicho generador. Para evitar estos inconvenientes todos los circuitos deben ir protegidos contra cortocircuitos mediante fusibles para que estos interrumpan el circuito y se quemen los

primeros en caso de cortocircuitos o resistencias de contacto. Por esto, los fusibles son de aleación de plomo y estaño, materiales que tienen un bajo punto de fusión.

### Ejercicio de aplicación 1.5

*Calcular la resistencia y la cantidad de calor generada por una lámpara halógena de 100 W de potencia, si sabemos que tiene un filamento de 20 cm de longitud y 0,75 mm de diámetro, con un coeficiente de resistividad de 0,87 y la tenemos conectada durante 40 minutos y que la intensidad que consume es de 16 A.*

*Solución:*

Para calcular la resistencia, primero deberíamos calcular la sección de nuestro filamento, y con dicho dato, ya estamos en disposición de calcular la resistencia.

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,75^2}{4} = 0,44 \text{ mm}^2$$

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} = 0,87 \cdot \frac{0,2}{0,44} = 0,39 \Omega$$

La expresión que define la cantidad generada es:

$$Q = 0,24 \cdot I^2 \cdot R \cdot t = 0,24 \cdot 16^2 \cdot 0,39 \cdot 2400 = 57507,84 \text{ calorías}$$

teniendo en cuenta que el tiempo debe estar en segundos.

---

**TEMA 2**

**CIRCUITOS DE CORRIENTE  
CONTINUA**

---

## TEMA 2. CIRCUITOS EN CORRIENTE CONTINUA

### 2.1 Introducción y objetivos

Hoy en día, el empleo de tractores y maquinaria agrícola es de uso común en la mayoría de explotaciones agrarias. El equipo eléctrico utilizado trabaja en corriente continua.

Las industrias agroalimentarias, los invernaderos, etc., utilizan sistemas de control automáticos. Estos sistemas están constituidos por multitud de circuitos electrónicos que también trabajan en corriente continua.

Para comprender el funcionamiento de los circuitos eléctricos y electrónicos que se están utilizando y llegar a diseñar circuitos que den soluciones a las necesidades que plantea la agricultura actual, es preciso estudiar previamente las leyes que rigen los circuitos en corriente continua.

A lo largo de la carrera, podrán verse aplicaciones electrotécnicas en diferentes asignaturas. Por otro lado, y debido a la analogía que presentan determinados sistemas físicos con los circuitos eléctricos, en algunas asignaturas, también se aplicarán estos conocimientos en la resolución de problemas de termotecnia, física ambiental, etc.

En el primer tema se estudiaron los elementos que constituyen los circuitos eléctricos y las magnitudes asociadas. Vimos como al aplicar una diferencia de potencial a una resistencia se establecía un paso de corriente, pero ¿como se relacionan estas magnitudes entre si?. En este tema se intentará dar respuesta a esta pregunta. También veremos que es posible agrupar distintos elementos dentro de un circuito. Estudiaremos las características y la forma de agrupar resistencias, generadores de corriente continua y receptores químicos y mecánicos.

### 2.2 Ley de Ohm

El físico alemán Georg Simon Ohm, en 1.826 comprobó experimentalmente que cuando se aplica a un circuito eléctrico determinado, una diferencia de potencial doble o triple, se obtiene una intensidad de corriente doble o triple también.

$$\frac{U}{I} = \frac{2U}{2I} = \frac{3U}{3I} = \dots = R \quad (2.1)$$

Podemos decir por lo tanto que: “en todo conductor por el que circula una corriente eléctrica, la intensidad de la corriente y la d.d.p. son proporcionales manteniendo constantes las demás condiciones”.

El cociente de dividir la tensión aplicada al circuito, por la intensidad de corriente obtenida, es una constante  $R$  y expresa una característica del circuito, que es precisamente su resistencia.

Estas experiencias se plasmaron en la Ley de Ohm que dice: la intensidad de corriente eléctrica obtenida en un circuito es directamente proporcional a la tensión aplicada, e inversamente proporcional a la resistencia eléctrica del mismo.

$$I = \frac{U}{R} \quad (2.2)$$

donde  $I$  es la intensidad medida en amperios (A),  $U$  es la tensión en voltios (V) y  $R$  es la resistencia del conductor en ohmios ( $\Omega$ ).

Además de lo indicado, el aporte científico de esta ley es su poder de generalización para cualquier tipo de circuito electrocinético (sin tener en cuenta sus efectos electromagnéticos ni la inducción de fuerza electromotriz en el conductor debida a campos magnéticos externos); tanto, en corriente continua; como, en corriente alterna.

De ahí que en la actualidad se defina en su forma generalizada: la corriente en un circuito electrocinético es directamente proporcional a la tensión aplicada e inversamente proporcional a la oposición que el circuito ofrece a la corriente eléctrica.

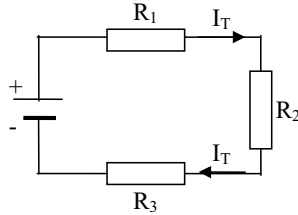
## ***2.3 Agrupación de resistencias***

Cuando hay más de una resistencia en un circuito, se deben conectar unas con otras agrupándolas en serie, en paralelo o de forma mixta.

### ***2.3.1 Agrupación serie***

Se dice que varias resistencias están en serie cuando la totalidad de la corriente pasa por cada una de ellas, una tras otra –figura 2.1-. Las resistencias se conectan seguidas una tras otra y la intensidad de la corriente es la misma en cualquier punto del circuito, ya que los electrones solo tienen un único camino.

La intensidad de la corriente  $I_T$  en el circuito –figura 2.1- vendrá definida por la ley de Ohm:



**Figura 2.1.** Circuito en serie.

$$I_T = \frac{U_T}{R_T} \quad (2.3)$$

de donde se deduce que:

$$U_T = I_T \cdot R_T \quad (2.4)$$

Al circular la corriente por cada una de las resistencias se produce una caída de tensión, existiendo una diferencia de potencial entre el punto de entrada a la resistencia y el de salida, en el punto de salida este potencial será menor y será el mismo que el potencial que hay a la entrada de la siguiente resistencia; en la cual, al pasar la corriente por ella se volverá a provocar otra caída de tensión y así sucesivamente.

$$U_1 = I_1 \cdot R_1 \quad (2.5)$$

$$U_2 = I_2 \cdot R_2 \quad (2.6)$$

$$U_3 = I_3 \cdot R_3 \quad (2.7)$$

La diferencia de potencial a la entrada de la primera resistencia y a la salida de la última será  $U_T$ , de forma que se cumplirá que:

$$U_T = U_1 + U_2 + U_3 \quad (2.8)$$

sustituyendo los valores de las tensiones:

$$I_T \cdot R_T = I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 \quad (2.9)$$

y dividiendo en ambos términos de la igualdad por la intensidad total, nos quedaría:

$$\frac{I_T \cdot R_T}{I_T} = \frac{I_T \cdot (R_1 + R_2 + R_3)}{I_T} \quad (2.10)$$

$$R_T = R_1 + R_2 + R_3 \quad (2.11)$$

Esto nos permite enunciar que “*la resistencia total o equivalente de la agrupación en serie es igual a la suma algebraica de todas las resistencias conectadas*”.

Igualmente la tensión total aplicada al circuito es igual a la suma de las tensiones medidas entre los bornes de cada uno de los aparatos receptores, dependiendo del valor de la resistencia de cada uno de ellos.

De lo expuesto anteriormente, se llegan a las siguientes conclusiones:

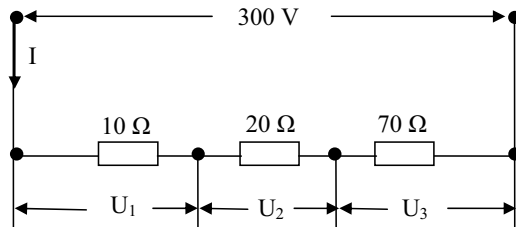
1.  $I_T = I_1 = I_2 = \dots = I_N$
2.  $U_T = U_1 + U_2 + \dots + U_N$
3.  $R_T = R_1 + R_2 + \dots + R_N$
4. Este tipo de agrupación presenta el inconveniente de que si alguno de los receptores deja de funcionar el resto también lo hace.

## Ejercicio de aplicación 2.1

Tres resistencias de 10, 20 y 30  $\Omega$  se conectan en serie a una tensión de 180 V.

Calcular:

- a) Resistencia total; b) intensidad que circula por las resistencias;
- c) tensión en extremos de cada resistencia; d) potencia consumida por cada resistencia y e) energía consumida por el acoplamiento de resistencias en 2 horas.





Solución:

a) Resistencia total:

$$R_T = R_1 + R_2 + R_3 = 10 + 20 + 30 = 60\Omega$$

b) Según la Ley de Ohm, la intensidad:

$$I = \frac{U}{R_T} = \frac{180}{60} = 3 A$$

Este valor es común para las tres resistencias.

c) La tensión en extremos de cada resistencia:

$$U_1 = R_1 \cdot I = 10 \cdot 3 = 30 V$$

$$U_2 = R_2 \cdot I = 20 \cdot 3 = 60 V$$

$$U_3 = R_3 \cdot I = 30 \cdot 3 = 90 V$$

d) La potencia consumida por cada resistencia:

$$P_1 = R_1 \cdot I^2 = 10 \cdot 3^2 = 90 W$$

$$P_2 = R_2 \cdot I^2 = 20 \cdot 3^2 = 180 W$$

$$P_3 = R_3 \cdot I^2 = 30 \cdot 3^2 = 270 W$$

e) La energía consumida por el conjunto de las resistencias:

$$E = P \cdot t$$

La potencia total:

$$P = U \cdot I = P_1 + P_2 + P_3 = 90 + 180 + 270 = 540 W = 0,54 kW$$

La energía consumida en 2 horas:

$$E = 0,54 \cdot 2 = 1,08 kWh$$

## Ejercicio de aplicación 2.2

*El circuito primario de una bobina de un tendido está formado por 150 espiras de hilo de cobre de 0,6 mm de diámetro con una resistividad de 0,0172. El diámetro medio del enrollamiento es de 40 mm, y está conectado a una batería de 12,6 V. El resto del circuito primario tiene una resistencia de 2Ω. Encontrar el calor generado en la bobina al cabo de una hora, si se deja conectado el contacto por descuido.*

*Solución:*

En primer lugar se va a calcular la resistencia total del circuito, sabemos que el valor de una de ellas es de 2 Ω. Pero la otra resistencia debe calcularse a partir de los datos que tenemos de nuestra bobina.

Lo primero que se hará necesario será calcular la longitud de nuestra bobina y la sección del hilo de dicha bobina.

$$L = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot N^{\circ} \text{ espiras} = 2 \cdot \pi \cdot 20 \cdot 150 = 18849,55 \text{ mm} = 18,85 \text{ m}$$

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,6^2}{4} = 0,28 \text{ mm}^2$$

El valor de la resistencia de la bobina será:

$$R_2 = \rho \cdot \frac{l}{S} = 0,0172 \cdot \frac{18,85}{0,28} = 1,15 \Omega$$

La resistencia total, al estar ambas en serie, será la suma:

$$R_T = R_1 + R_2 = 2 + 1,15 = 3,15 \Omega$$

La intensidad que demandará nuestras cargas serán:

$$I = \frac{U}{R_T} = \frac{12,6}{3,15} = 4 \text{ A}$$

El calor generado será:

$$Q = 0,24 \cdot I^2 \cdot R \cdot t = 0,24 \cdot 4^2 \cdot 3,15 \cdot 3600 = 43545,6 \text{ calorías}$$

Para calcular la resistencia, primero deberíamos calcular la sección de nuestro filamento, y con dicho dato, ya estamos en disposición de calcular la resistencia.

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,75^2}{4} = 0,44 \text{ mm}^2$$

### 2.3.1.1 Divisor de tensión

Uno de los circuitos de resistencias más utilizado es el divisor de tensión. Se fundamenta en la posibilidad de obtener una tensión más reducida a partir de otra, mediante la conexión de resistencias en serie.

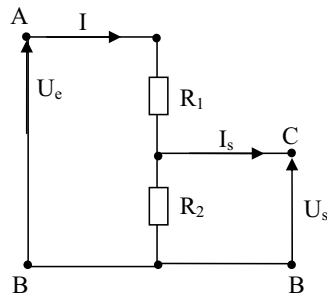


Figura 2.2. Divisor de tensión.

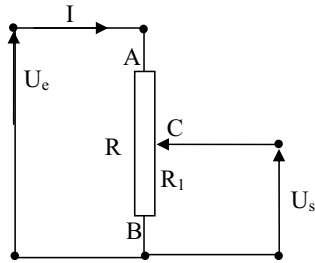
En este circuito, la tensión de salida,  $U_s$ , es menor siempre que la tensión de entrada,  $U_e$ , y la relación entre las dos es:

$$\frac{U_s}{U_e} = \frac{I \cdot R_2}{I \cdot (R_1 + R_2)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.12)$$

Esta relación se cumple siempre que la intensidad de salida  $I_s$ , sea mucho menor que la intensidad  $I$ .

$$\boxed{I_s \ll I} \quad (2.13)$$

Si se sustituye las dos resistencias  $R_1$  y  $R_2$  Por una resistencia de cursor, se conecta la tensión de entra  $U_e$  a los extremos de dicha resistencia y se toma la tensión de salida  $U_s$  entre uno de esos extremos y el cursor, se obtiene el circuito de la figura, llamado montaje potenciométrico o simplemente potenciómetro. Este circuito permite obtener una tensión variable de salida  $U_s$ .



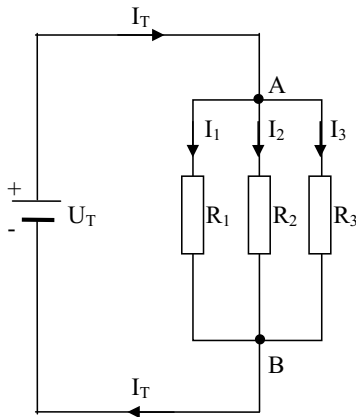
**Figura 2.3.** Potenciómetro.

La relación entre la tensión de salida,  $U_s$ , y la tensión de entrada,  $U_e$ , es:

$$\frac{U_s}{U_e} = \frac{I \cdot R_1}{I \cdot R} = \frac{R_1}{R} \quad (2.14)$$

### 2.3.2 Agrupación paralelo

Se dice que varias resistencias están conectadas en paralelo cuando la corriente se bifurca pasando una parte de la misma por cada componente. Se conectan juntos los extremos de un lado y del otro, como se observa en la figura 2.4.



**Figura 2.4.** Circuito en paralelo.

En estas agrupaciones la tensión aplicada a cada resistencia es la misma, pues los extremos de cada una de ellas están conectados a los mismos puntos  $A$  y  $B$ .

Si seguimos el camino de la corriente (en el sentido convencional), podemos observar que la totalidad de la corriente  $I_T$ , que parte del generador, se bifurca en tres caminos diferentes al llegar al punto  $A$ , pasando una parte de la misma por cada resistencia  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ . En el punto  $B$ , vuelve a unirse la totalidad de la corriente hasta regresar al generador. Visto esto, podemos decir que:

$$I_T = I_1 + I_2 + I_3 \quad (2.15)$$

Llamando la tensión aplicada  $U_T$ , y la resistencia de todo el circuito  $R_T$  tendremos según la ley de Ohm, que la intensidad total  $I_T$  será:

$$I_T = \frac{U_T}{R_T} \quad (2.3)$$

Las intensidades  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ , vendrán determinadas igualmente por la ley de Ohm, que para este caso la tensión aplicada a cada una de las resistencias es  $U_T$ .

$$I_1 = \frac{U_T}{R_1} \quad (2.16)$$

$$I_2 = \frac{U_T}{R_2} \quad (2.17)$$

$$I_3 = \frac{U_T}{R_3} \quad (2.18)$$

Sustituyendo los valores de las intensidades, en la ecuación 2.12:

$$\frac{U_T}{R_T} = \frac{U_T}{R_1} + \frac{U_T}{R_2} + \frac{U_T}{R_3} \quad (2.19)$$

y dividiendo ambos términos por la tensión total  $U_T$ , nos quedaría:

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad (2.20)$$

Lo que nos permite enunciar: *“la inversa de la resistencia total o equivalente de la agrupación en paralelo es igual a la suma de las inversas de las resistencias que forman la agrupación”*.

En los circuitos en paralelo se cumple por tanto:

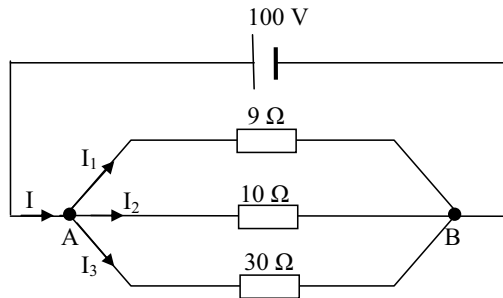
1.  $U_T = U_1 = U_2 = \dots = U_n$
2.  $I_T = I_1 + I_2 + \dots + I_n$
3.  $\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$
4. En este tipo de agrupación cuando uno de los elementos deja de funcionar el resto de ellos sigue con normalidad.

### Ejercicio de aplicación 2.3

Tres resistencias de 9, 18 y 30  $\Omega$  se conectan en paralelo a una tensión de 100 V.

Calcula:

a) Resistencia total; b) intensidad total e intensidad que circula por cada resistencia y c) potencia consumida por cada resistencia.



Solución:

a) Resistencia total:

$$R_t = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{1}{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}}$$

$$R_t = \frac{1}{\frac{10+9+3}{90}} = \frac{90}{22} = 4,09 \Omega$$

También se puede resolver hallando la resistencia equivalente de dos de las resistencias y a continuación la de ésta con la tercera:

$$\frac{9 \cdot 10}{9 + 10} = \frac{90}{19} = 4,74 \Omega$$

$$\frac{4,74 \cdot 30}{4,74 + 30} = \frac{142,20}{34,74} = 4,09 \Omega$$

b) La intensidad total se puede calcular a partir de las intensidades parciales:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{100}{9} = 11,11 A$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{100}{10} = 10 A$$

$$I_3 = \frac{U}{R_3} = \frac{100}{30} = 3,33 A$$

$$I = \frac{U}{R_t} = I_1 + I_2 + I_3 = 11,11 + 10 + 3,33 = 24,44 A$$

c) Potencia consumida por cada resistencia:

$$P_1 = U \cdot I_1 = R_1 \cdot I_1^2 = 9 \cdot 11,11^2 = 1110,89 W$$

$$P_2 = U \cdot I_2 = R_2 \cdot I_2^2 = 10 \cdot 10^2 = 1000 W$$

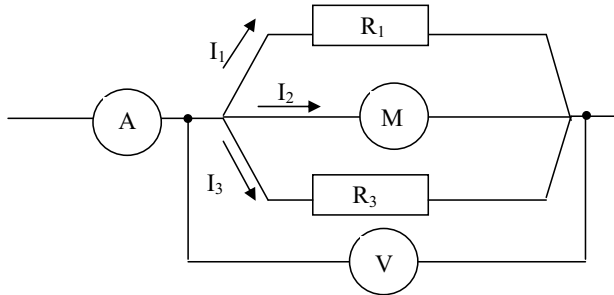
$$P_3 = U \cdot I_3 = R_3 \cdot I_3^2 = 30 \cdot 3,33^2 = 332,67 W$$

## Ejercicio de aplicación 2.4

En el circuito de la figura el voltímetro indica 12,7 V. En la rama tenemos una resistencia cuyo material posee un coeficiente de resistividad  $\rho=0,85$  con 1000 mm de longitud y 2 mm de ancho y 0,1 mm de espesor. En la rama 2, un motor de un limpiaparabrisas de 120 W de potencia y en la rama 3, una bobina de 200 espiras de cobre, de 15 mm de radio ( $\rho=0,0172 \Omega \cdot m$ ) de 0,4 mm de diámetro.

Calcula:

- a) La resistencia total del circuito equivalente ; b) La intensidad de cada una de las ramas y c) la intensidad que marca el amperímetro.



*Solución:*

a) Resistencia total del circuito equivalente, a partir de los datos de partida vamos a calcular el valor de resistencia de cada una de las ramas, de la rama 1, tenemos que el material posee un coeficiente de resistividad  $\rho=0,85$  con 1000 mm de longitud y 2 mm de ancho y 0,1 mm de espesor.

$$R_1 = \rho \cdot \frac{l}{S} = 0,85 \cdot \frac{1}{2 \cdot 0,1} = 4,25 \Omega$$

En la rama 2, sabemos que el motor es de 120 W de potencia, y la tensión es de 12,7 V.

$$P = U \cdot I \rightarrow I = \frac{P}{U} = \frac{120}{12,7} = 9,45 A$$

Con el valor de la tensión e intensidad puedo deducir el valor de nuestra resistencia:

$$R_2 = \frac{U}{I} = \frac{12,7}{9,45} = 1,34 \Omega$$

En la rama 3, con los datos de nuestra bobina, debemos primero calcular el valor de la longitud del conductor que se utiliza en dicha bobina y la sección del conductor, y con estos datos y la resistividad del material calcular la resistencia asociada a esta rama:

$$l = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot N^{\circ} \text{ espiras} = 2 \cdot \pi \cdot 0,015 \cdot 200 = 18,85 m$$

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,4^2}{4} = 0,12 mm^2$$



$$R_3 = \rho \cdot \frac{l}{S} = 0,0172 \cdot \frac{18,85}{0,12} = 2,70 \Omega$$

El equivalente de las tres resistencias que están en paralelo serían:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{4,25} + \frac{1}{1,34} + \frac{1}{2,70} = 1,35 \Omega \rightarrow R_{eq} = 0,74 \Omega$$

b) La intensidad en cada una de las ramas:

$$I_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{12,7}{4,25} = 2,99 A$$

$$I_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{12,7}{1,34} = 9,47 A$$

$$I_3 = \frac{V}{R_3} = \frac{12,7}{2,70} = 4,7 A$$

c) La intensidad total, se puede calcular de dos formas, usando la primera ley de Kirchhoff, o bien, trabajando con la resistencia equivalente.

$$I_T = I_1 + I_2 + I_3 = 2,99 + 9,47 + 4,7 = 17,16 A$$

$$I_T = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{12,7}{0,74} = 17,16 A$$

### 2.3.3 Agrupación mixta

Esta agrupación está constituida por resistencias conectadas en serie y otras en paralelo (figura 2.5).

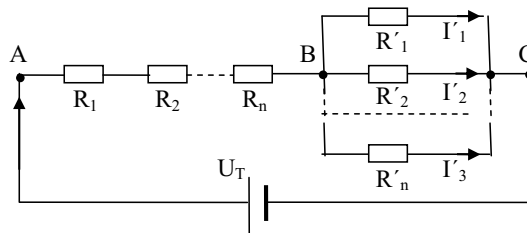


Figura 2.5. Circuito mixto.

Para resolverlo se sustituyen las resistencias en paralelo por su equivalente,  $R_{BC}$ , y las resistencias conectadas en serie por su equivalente,  $R_{AB}$ , y a continuación se determina la resistencia equivalente del circuito,  $R_{eq}$  o  $R_T$ .

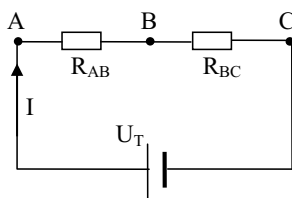
Resistencia equivalente de la agrupación de resistencias conectadas en serie:

$$R_{AB} = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (2.21)$$

Resistencia equivalente de la agrupación de resistencias conectadas en paralelo:

$$\frac{1}{R_{BC}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (2.22)$$

Una vez calculadas  $R_{AB}$  y  $R_{BC}$  podemos dibujar el circuito equivalente –figura 2.6-.

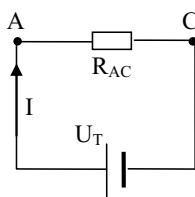


**Figura 2.6.** Circuito equivalente al mostrado en la figura 2.5.

Puesto que las dos resistencias están en serie, la resistencia total de la agrupación mixta es:

$$R_{AC} = R_{AB} + R_{BC} \quad (2.23)$$

El circuito equivalente al mostrado en la figura 2.6. es el siguiente:



**Figura 2.7.** Circuito equivalente al mostrado en la figura 2.6 y 2.5.

A partir de este circuito equivalente podemos determinar la intensidad total que recorre el circuito, aplicando la ley de Ohm:

$$I_T = \frac{U_T}{R_T} \quad (2.3)$$

Una vez conocida  $I_T$ , regresamos a la figura 2.6 y puesto que se trata de un circuito serie donde conocemos el valor de las resistencias  $R_{AB}$  y  $R_{BC}$  y el de la intensidad que las recorre, podemos calcular la caída de tensión entre el punto  $A$  y  $B$  y entre  $B$  y  $C$ .

$$U_{AB} = I_T \cdot R_{AB} \quad (2.24)$$

$$U_{BC} = I_T \cdot R_{BC} \quad (2.25)$$

Si nos fijamos en la figura 2.5 también podemos determinar la caída de tensión en cada resistencia siguiendo el mismo procedimiento.

$$U_1 = I_1 \cdot R_1 \quad (2.5)$$

$$U_2 = I_2 \cdot R_2 \quad (2.6)$$

$$U_n = I_T \cdot R_n \quad (2.26)$$

Queda por averiguar la intensidad que recorre las resistencias conectadas en paralelo, que por estar en paralelo la tensión aplicada a cada una de ellas será  $U_{BC}$ . Las intensidades se calculan aplicando la ley de Ohm a cada rama.

$$I'_1 = \frac{U_T}{R'_1} \quad (2.27)$$

$$I'_2 = \frac{U_T}{R'_2} \quad (2.28)$$

$$I'_n = \frac{U_T}{R'_n} \quad (2.29)$$

Una vez resuelto el circuito mixto, procedemos a comprobar los resultados verificando las siguientes igualdades:

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n = U_{AB} \quad (2.30)$$

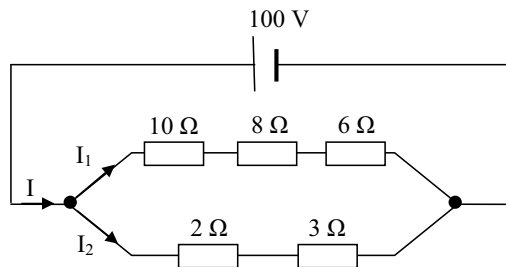
$$U_{AB} + U_{BC} = U_{AC} \quad (2.31)$$

$$I'_1 + I'_2 + \dots + I'_n = I_T \quad (2.32)$$

### Ejercicio de aplicación 2.5

En el acoplamiento de resistencias de la siguiente figura  
Calcula:

- a) Resistencia de cada rama; b) resistencia total; c) intensidad total y  
d) intensidad que circula por cada rama



Solución:

- a) Resistencia de cada rama:

$$R_1 = 10 + 8 + 6 = 24 \Omega$$

$$R_2 = 2 + 3 = 5 \Omega$$

- b) Resistencia total:

$$R_t = \frac{1}{\frac{1}{24} + \frac{1}{5}} = \frac{1}{\frac{5 + 24}{120}} = \frac{120}{29} = 4,14 \Omega$$

- c) Intensidad total:

$$I = \frac{U}{R_t} = \frac{100}{4,14} = 24,15 A$$

- d) Intensidad que circula por cada rama:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{100}{24} = 4,16 A$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{100}{5} = 20 A$$

Se puede comprobar que la intensidad total, es igual a la suma de las intensidades de rama.

## 2.4 Generador de corriente continua

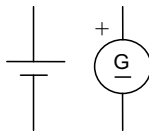
### 2.4.1 Definición

Un generador eléctrico es un elemento que transforma en energía eléctrica cualquier otra forma de energía.

Un generador de corriente continua mantiene entre sus bornes (puntos de conexión) una tensión de polaridad fija.

### 2.4.2 Simbología

Se representa en los esquemas mediante los siguientes símbolos –figura 2.8-:



**Figura 2.8.** Generador eléctrico.

### 2.4.3 Características

Las tres características de un generador son su fuerza electromotriz (f.e.m), su intensidad nominal y su resistencia interna.

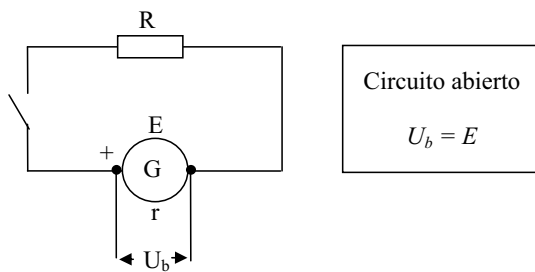
La *fuerza electromotriz (f.e.m)*, que se representa por la letra “E”, se mide en voltios, es la causa que mantiene una tensión eléctrica en bornes del generador impulsando los electrones libres del borne negativo al positivo en el circuito exterior y del positivo al negativo en el interior del generador.

La *intensidad nominal*, se representa por “ $I_n$ ”, y se mide en amperios, es la máxima intensidad de corriente que puede circular por el generador sin provocar efectos perjudiciales que pudieran deteriorarlo.

La *resistencia interna* es la resistencia de los conductores internos del generador. En las baterías se corresponde con la resistencia del electrolito. Se representa por “ $r$ ”, y se mide en ohmios.

#### 2.4.4 Tensión en bornes

La tensión que marcaría un voltímetro colocado en bornes de un generador,  $U_b$ , al que no se le conecta ninguna carga, coincidiría con su f.e.m.,  $E$ . En circuito abierto  $U_b = E$ - figura 2.9-.



**Figura 2.9.** Tensión en bornes de un generador en un circuito abierto.

Cuando se conectan cargas al generador se establece un paso de corriente por todo el circuito, que al circular por el interior del generador provoca una caída de tensión, reduciendo el valor de la *tensión en los bornes* ( $U_b < E$ ). En circuito cerrado la tensión en bornes se determina del siguiente modo:

$$U_b = E - r \cdot I \quad (2.33)$$

donde  $U_b$  es la tensión en bornes;  $E$  es la f.e.m.;  $I$  es la intensidad y  $r$  es la resistencia interna –figura 2.10-.

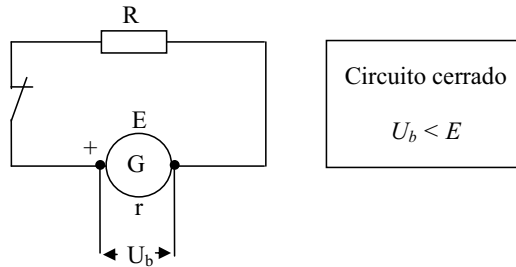


Figura 2.10. Tensión en bornes de un generador en un circuito cerrado.

### 2.4.5 Potencia de un generador

Toda la potencia producida por un generador no es aprovechada por los receptores conectados, ya que debido a su resistencia interna se pierde una parte en forma de calor.

La *potencia total* producida por el generador,  $P_t$ , es igual al producto de la f.e.m. del generador, por la intensidad suministrada.

$$P_t = E \cdot I \quad (2.34)$$

La *potencia perdida* en el generador,  $P_p$ , se determina mediante la siguiente expresión:

$$P_p = r \cdot I^2 \quad (2.35)$$

Y la *potencia útil*, que es el valor de la potencia eléctrica que se entrega al circuito exterior, igual al producto de la tensión en bornes por la intensidad que suministra:

$$P_u = U_b \cdot I \quad (2.36)$$

Y si recordamos que  $U_b = E - r \cdot I$ ;  $P_u = (E - r \cdot I) \cdot I = E \cdot I - r \cdot I^2$

$$P_u = P_t - P_p \quad (2.37)$$

Potencia útil es igual a potencia total menos potencia perdida.

### 2.4.6 Rendimiento de un generador

En un generador caben dos puntos de vista; uno es aquel en que se valora el *rendimiento industrial*, tenemos en cuenta lo que obtenemos del generador en relación con lo que consume; es el cociente entre su potencia útil y la potencia que absorbe para producir ese efecto. La absorbida puede ser mecánica, electroquímica, etc. Naturalmente siempre el rendimiento es menor que la unidad. Y se expresa:

$$\eta_{ind} = \frac{P_u}{P_{ab}} \quad (2.38)$$

El otro rendimiento se denomina *rendimiento eléctrico*, porque sólo tiene en consideración las potencias eléctricas. Es el cociente entre la potencia útil y la potencia eléctrica producida –consumida–.

$$\eta_{el} = \frac{P_u}{P_t} \quad (2.39)$$

### Ejercicio de aplicación 2.6

Un generador de f.e.m. de 100 V y resistencia interna 0,15  $\Omega$  suministra una corriente eléctrica de 10 A de intensidad.

Calcular:

a) Tensión en bornes del generador; b) Potencia total producida por el generador; c) Potencia útil del generador y d) Potencia perdida en la resistencia interna del generador.

Solución:

- a) La tensión en bornes del generador:

$$U_b = E - r \cdot I = 100 - 0,15 \cdot 10 = 98,5V$$

- b) Potencial eléctrico total:

$$P_t = E \cdot I = 100 \cdot 10 = 1000W$$

- c) Potencia útil del generador:

$$P_u = U_b \cdot I = 98,5 \cdot 10 = 985W$$

- d) Potencia perdida en la resistencia interna del generador:

$$P_p = r \cdot I^2 = 0,15 \cdot 10^2 = 15W$$



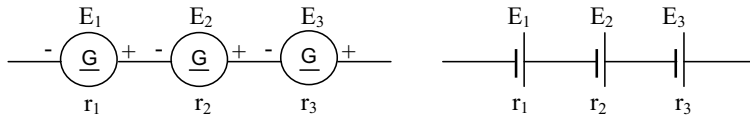
También se puede calcular de la forma siguiente:

$$P_p = P_l - P_u = 1000 - 985 = 15W$$

### 2.4.7 Acoplamiento de generadores en serie

Diversos generadores pueden combinarse unos con otros para obtener diferentes prestaciones de f.e.m. o intensidad. Según se busque un fin u otro, el acoplamiento tendrá lugar en serie, en paralelo o mixto.

La *conexión de dos o más generadores en serie* consiste en conectarlos uno a continuación de otro, uniendo el borne negativo de uno con el borne positivo del siguiente –figura 2.11-. Los dos bornes extremos que quedan libres son los bornes positivo y negativo del acoplamiento.



**Figura 2.11.** Generadores en serie.

La *condición de acoplamiento* es que todos los generadores deben tener la misma intensidad nominal para evitar que algunos funcionen sobrecargados, a una intensidad superior a la nominal.

Si esta condición se respeta las *características del acoplamiento* son evidentes:

- La intensidad  $I$  es común para todos los generadores acoplados porque el camino es único.
- La f.e.m. total del acoplamiento es igual a la suma de las f.e.m. de los generadores acoplados porque se va incrementando la tensión con cada etapa.

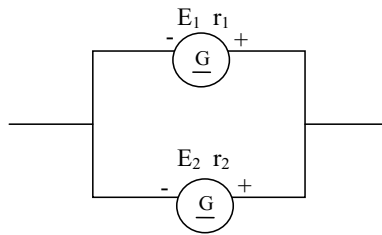
$$E_t = E_1 + E_2 + E_3 \quad (2.40)$$

- La resistencia interna total del acoplamiento es la suma de todas las resistencias internas de los generadores acoplados. Ya que es un conjunto de resistencias internas agrupadas en serie.

$$r = r_1 + r_2 + r_3 \quad (2.41)$$

Se usa el acoplamiento en serie cuando queremos obtener una mayor tensión de salida.

#### 2.4.8 Acoplamiento de generadores en paralelo



**Figura 2.12.** Generadores en paralelo.

La conexión *en paralelo de varios generadores* conecta todos los bornes positivos en un único borne que constituye el borne positivo del acoplamiento, haciendo lo mismo con todos los bornes negativos.

La *condición de acoplamiento* es que todos ellos deben tener la misma f.e.m., para que todos ellos aporten energía, y si queremos que aporten la misma corriente y potencia, su resistencia interna también debe ser la misma.

Las características del acoplamiento en paralelo son:

La f.e.m. total del acoplamiento es igual a la f.e.m. de todos los generadores.

$$E_t = E_1 = E_2 = \dots = E_n \quad (2.42)$$

La intensidad total que aporta el acoplamiento es igual a la suma de las intensidades que genera cada generador; siendo la misma la intensidad en cada generador.

$$I_t = I_1 + I_2 + \dots + I_n \quad (2.43)$$

La resistencia interna total del acoplamiento es la inversa de la suma de las inversas de las resistencias internas de cada generador (resistencias internas en paralelo)...

$$r_t = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n}} \quad (2.44)$$

Simplifica el cálculo el hecho de que la resistencia interna sea la misma en todos ellos.

El acoplamiento de generadores en paralelo se usa cuando queremos aumentar la corriente de salida manteniendo la tensión igual a la de un único generador.

#### 2.4.9 Acoplamiento mixto de generadores

Se produce conectando varios grupos de generadores en serie, para conectar después dos o más de estos grupos en paralelo –figura 2.13-. Su finalidad es conseguir una corriente a una tensión e intensidad precisas.

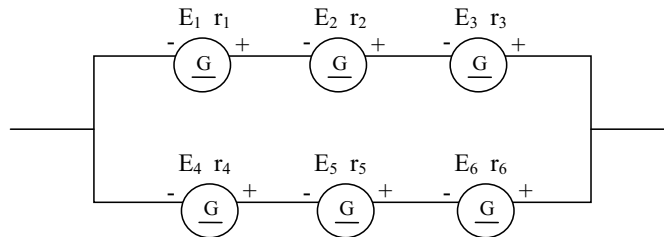


Figura 2.13. Circuito con acoplamiento mixto de generadores.

Debe cumplir las características de los dos tipos de acoplamientos vistos y, de igual modo, cumplir las condiciones de ambos en los segmentos correspondientes.

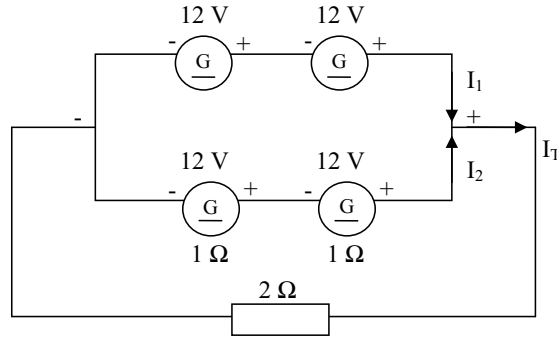
Consideremos las dos ramas en paralelo. Por tratarse de un acoplamiento en paralelo, la f.e.m. de las dos ramas ha de ser idéntica, y de igual modo la resistencia interna. Lo que combinado con la aditividad de resistencias y f.e.m. en cada segmento en serie, da lugar a:

$$E_1 + E_2 + E_3 = E_4 + E_5 + E_6 \quad (2.45)$$

$$r_1 + r_2 + r_3 = r_4 + r_5 + r_6 \quad (2.46)$$

### Ejercicio de aplicación 2.7

En el acoplamiento de la figura calcular: a)  $E_t$ , B)  $r_b$ , c)  $I_t$ , d)  $U_b$  y e)  $P_u$



a)  $E_t$ , por tratarse de un acoplamiento de dos ramas en paralelo, ha de ser el mismo en las dos. Y en cada rama, como es un acoplamiento en serie, la  $E$  equivalente es la suma de las de los generadores en serie.

De modo que:

$$E_t = \sum ram_a = \sum ram_b = 12 + 12 = 12 + 12 = 24V$$

b) La resistencia interna total,  $r_b$ , es la equivalente a dos ramas en paralelo, formada cada rama por dos en serie. De modo que:

$$r_t = \frac{1}{\frac{1}{r_{rama_1}} + \frac{1}{r_{rama_2}}};$$

en donde  $r_{rama_1} = r_1 + r_2$  y  $r_{rama_2} = r_3 + r_4$

$$r_t = \frac{1}{\frac{1}{r_1 + r_2} + \frac{1}{r_3 + r_4}} = \frac{1}{\frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+1}} = 1\Omega$$

c) La intensidad total  $I_t$ , es la razón entre la f.e.m. operante y las resistencias totales:

$$I_t = \frac{E}{R_t} = \frac{E}{R + r_t} = \frac{24}{2 + 1} = 8A$$

La tensión entre bornes es la f.e.m. menos la caída de tensión originada por la resistencia interna al paso de la  $I_t$ :

$$U_b = E - r_t \cdot I_t = 24 + 1 \cdot 8 = 16V$$

d) Para verificarlo, debe coincidir con la caída de tensión originada por la  $R$  al paso de la  $I_t$ :

$$U_b = I_t \cdot R = 8 \cdot 2 = 16V$$

e) La potencia útil,  $P_u$  es igual a la tensión entre bornes por la  $I_t$ :

$$P_u = U_b \cdot I_t = 16 \cdot 8 = 128W$$

Y para comprobar, verificamos que:

$$P_u = I_t^2 \cdot R = 8^2 \cdot 2 = 128W$$

## 2.5 Receptor eléctrico

### 2.5.1 Definición

Hemos hablado de elementos pasivos en un circuito, resistencias, bobinas, condensadores; pero en la práctica, los genuinos receptores de la energía eléctrica producida por los generadores son entes más complejos. Un motor, por ejemplo, es un conjunto de resistencias, bobinas, condensadores, etc.

Esto nos lleva al concepto de receptor eléctrico, como un aparato que transforma la energía eléctrica en otra clase de energía.

### 2.5.2 Simbología

La simbología es la de la figura 2.14:

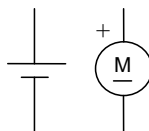


Figura 2.14. Receptor eléctrico.

### 2.5.3 Características

Las tres características de un generador son su fuerza contra electromotriz (f.c.e.m), su intensidad nominal y su resistencia interna.

*Fuerza contra electromotriz, f.c.e.m.*, que se mide en voltios, y se denomina “*E*”. Es una fuerza electromotriz generada al funcionar el receptor y que se opone a la tensión aplicada a sus bornes. Se presenta en los receptores químicos y mecánicos (baterías y motores), que son reversibles; esto es, que pueden funcionar como generadores y como receptores. En las resistencias no aparece f.c.e.m.

La *intensidad nominal* es la máxima intensidad de corriente que puede circular por un receptor sin averiarlo. Se denomina “*I<sub>n</sub>*”, y se mide en A.

La *resistencia interna*, “*r*”, representa la oposición al paso de la corriente.

### 2.5.4 Tensión en bornes

La *tensión en bornes*. Cuando un receptor forma parte de un circuito eléctrico absorbiendo una corriente eléctrica y generando una f.c.e.m., la tensión eléctrica en sus bornes, denominada  $U_b$ , es igual a la suma de la *f.c.e.m.* y la caída de tensión originada en el interior del receptor por la resistencia interna.

$$U_b = E + r \cdot I \quad (2.47)$$

### 2.5.5 Potencia de un receptor eléctrico

La *potencia absorbida*, es la potencia que consume el receptor, igual al producto de la tensión en bornes por la intensidad:

$$P_{ab} = U_b \cdot I \quad (2.48)$$

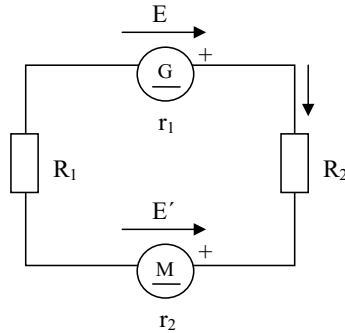
*Rendimiento industrial*, es la relación entre la potencia útil que suministra el receptor y la potencia que absorbe:

$$\eta = \frac{P_u}{P_{ab}} = \frac{P_u}{U_b \cdot I} \quad (2.49)$$

Bien entendido, al ser “industrial”, podremos considerar la potencia útil como la potencia producida en otra forma de energía (mecánica, etc.).

## 2.6 Circuito eléctrico

Es un conjunto de generadores y receptores unidos entre sí por conductores formando un circuito cerrado –figura 2.15-.



**Figura 2.15.** Circuito eléctrico.

En un circuito con generador y receptor (químico o mecánico) la f.c.e.m. del receptor se opone a la del generador. De modo que:

$$E - E' = I(r_1 + r_2 + R_1 + R_2) \quad (2.50)$$

Que es la ley de Ohm generalizada:

$$I = \frac{E - E'}{r_1 + r_2 + R_1 + R_2} \quad (2.51)$$

## Ejercicio de aplicación 2.8

Calcular el fusible que habrá que colocar para proteger un circuito formado por dos de cruce de 45 W cada uno y a 12 V de tensión.

Solución:

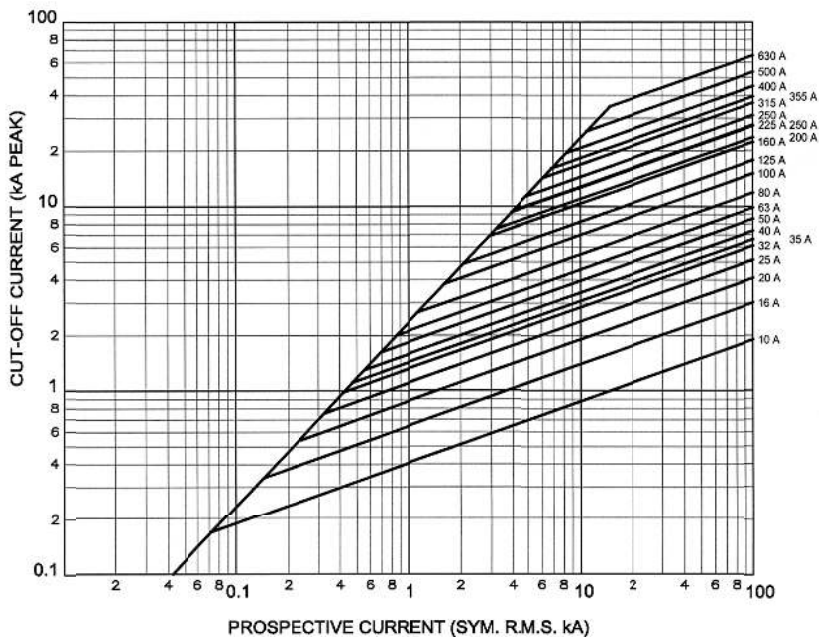
Como son dos faros, la potencia total es de 90 vatios.

La intensidad que pasará por nuestro circuito en condiciones normales será:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{90}{12} = 7,5 A$$

Teniendo en cuenta la imagen superior, podemos observar que debería elegir un fusible de calibre 10 A.

Time Current Characteristics





---

**TEMA 3**

**ANÁLISIS DE CIRCUITOS**

---

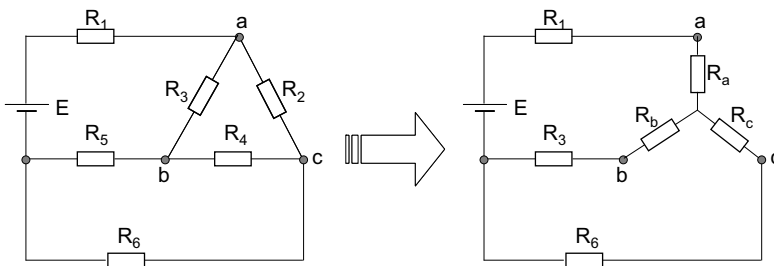
## TEMA 3. ANÁLISIS DE CIRCUITOS

### 3.1 Introducción y objetivos

En este tema se recogen los diferentes métodos empleados en la resolución de circuitos cuando éstos no están constituidos exclusivamente por una red de resistencias, sino por mallas, donde los generadores y los elementos pasivos se entremezclan. También describiremos el modo de calcular la resistencia equivalente de un circuito cuando no es posible hacerlo por el método simple de resistencias en serie o en paralelo.

### 3.2 Ecuaciones de Kennelly

Existen circuitos donde las resistencias están conectadas en triángulo y otros donde están conectadas en estrella (figura 3.1). Este tipo de circuitos no se pueden resolver del mismo modo que un circuito serie o paralelo. Para su resolución se transforma la conexión en triángulo en estrella con el fin de convertirlo en un circuito mixto.

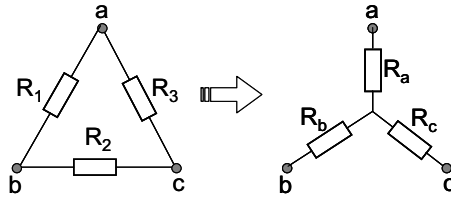


**Figura 3.1.** Transformación de un circuito eléctrico con resistencias conectadas en triángulo en un circuito equivalente con resistencias conectadas en estrella.

Las ecuaciones de Kennelly, nos permiten encontrar el valor de las resistencias que hacen equivalentes los dos circuitos. Su nombre se debe a que fue Arthur Edwin Kennelly (1861-1939) quien dedujo las ecuaciones que permiten las transformaciones.

#### 3.2.1 Transformación de una conexión en triángulo (o pi) en su estrella equivalente (o T)

Vamos a calcular el valor de las resistencias  $R_a$ ,  $R_b$  y  $R_c$ , conectadas en estrella, para que sean equivalentes a las tres resistencias  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ , conectadas en triángulo -figura 3.2-.



**Figura 3.2.** Transformación de circuito eléctrico de triángulo a estrella.

Para que puedan considerarse equivalentes, el valor de la resistencia entre cada dos de los puntos denominados  $a$ ,  $b$  y  $c$ , debe ser el mismo en ambas conexiones.

Consideremos, en primer lugar, el valor de resistencia que marcaría un ohmímetro colocado entre los puntos  $a$  y  $b$  en ambos circuitos, y vamos a igualar sus expresiones para que sean equivalentes.

En el triángulo, la resistencia entre  $a$  y  $b$ , se determina como la resistencia equivalente de las dos ramas conectadas en paralelo: una, formada por la resistencia  $R_1$ , y la otra, formada por la asociación en serie de  $R_2$  y  $R_3$ .

$$R_{a-b} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3}} = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{(R_1 + R_2 + R_3)} \quad (3.1)$$

En la estrella, la resistencia entre  $a$  y  $b$ , es la suma de las resistencias  $R_a$  y  $R_b$ , que están en serie.

$$R_{a-b} = R_a + R_b \quad (3.2)$$

Igualando ambas expresiones:

$$R_a + R_b = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{(R_1 + R_2 + R_3)} \quad (3.3)$$

Si aplicamos el mismo razonamiento a la resistencia entre  $b$  y  $c$ , y entre  $c$  y  $a$ , obtendremos las siguientes tres ecuaciones:

$$R_b + R_c = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{(R_1 + R_2 + R_3)} \quad (3.4)$$

$$R_c + R_a = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2 + R_3)} \quad (3.5)$$

Con lo que tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas.

Para calcular  $R_a$  sumamos (3.3) y (3.5) y restamos (3.4):

$$(R_a + R_b) + (R_c + R_a) - (R_b + R_c) = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_1R_3 + R_2R_3 - R_1R_2 - R_2R_3}{(R_1 + R_2 + R_3)}$$
$$2R_a = \frac{2R_1R_3}{(R_1 + R_2 + R_3)}$$
$$R_a = \frac{R_1R_3}{(R_1 + R_2 + R_3)} \quad (3.6)$$

Para calcula  $R_b$  sumamos (3.3) y (3.4) y restamos (3.5):

$$R_b = \frac{R_1R_2}{(R_1 + R_2 + R_3)} \quad (3.7)$$

Para calcula  $R_c$  sumamos (3.4) y (3.5) y restamos (3.3):

$$R_c = \frac{R_2R_3}{(R_1 + R_2 + R_3)} \quad (3.8)$$

Obsérvese que para obtener el valor de la resistencia a conectar a un determinado punto o nodo de la estrella, hay que multiplicar las dos que en el triángulo coinciden en ese punto o nodo, y dividir por la suma de las tres resistencias que forman el triángulo.

En el caso particular de que las tres resistencias del triángulo sean iguales,

$$R_1 = R_2 = R_3 = R$$

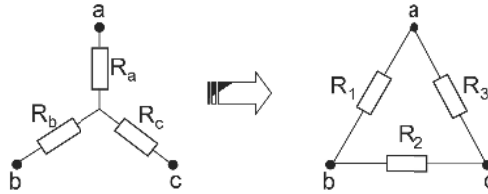
su conversión a estrella vale:

$$R_a = R_b = R_c = \frac{R \cdot R}{R + R + R} = \frac{R^2}{3 \cdot R} = \frac{R}{3} \quad (3.9)$$

Es decir, las resistencias de la estrella equivalente deben ser la tercera parte de las que integran el triángulo.

### 3.2.2 Transformación de una conexión en estrella (o T) en su triángulo equivalente (o pi)

En este caso las incógnitas son  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ , en tanto que los datos conocidos son  $R_a$ ,  $R_b$  y  $R_c$ .



**Figura 3.3.** Transformación de circuito eléctrico de estrella a triángulo.

Multiplicando las ecuaciones (3.6) por (3.7), (3.7) por (3.8), (3.8) por (3.6) y sumando sus productos miembro a miembro, obtenemos:

$$R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a = \frac{R_1^2 R_2 R_3 + R_1 R_2^2 R_3 + R_1 R_2 R_3^2}{(R_1 + R_2 + R_3)^2} = \frac{R_1 R_2 R_3 (R_1 + R_2 + R_3)}{(R_1 + R_2 + R_3)^2}$$

$$R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (3.10)$$

$R_1$  se obtiene dividiendo (3.10) entre (3.8):

$$\frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_c} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_2 R_3}$$

$$R_1 = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_c} \quad (3.11)$$

Para obtener  $R_2$  se divide (3.10) entre (3.6):

$$R_2 = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_a} \quad (3.12)$$

Dividiendo (3.10) entre (3.7) se obtiene  $R_3$ :

$$R_3 = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_b} \quad (3.13)$$

Si en la transformación de estrella a triángulo, las tres resistencias de la estrella son del mismo valor,

$$R_a = R_b = R_c = r$$

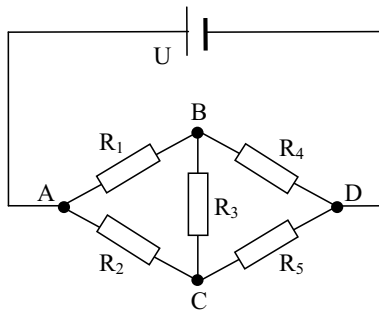
las correspondientes al triángulo equivalente tendrán que valer:

$$R_1 = R_2 = R_3 = \frac{r \cdot r + r \cdot r + r \cdot r}{r} = \frac{3r^2}{r} = 3r \quad (3.14)$$

Es decir, las resistencias del triángulo equivalente deben ser la triple de las conectadas en estrella.

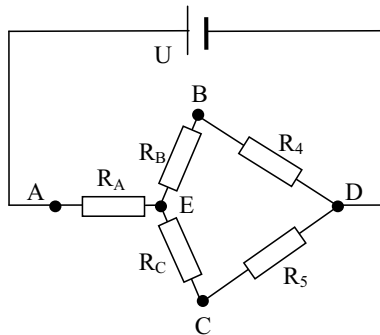
### Ejercicio de aplicación 3.1

En el circuito de la siguiente figura, calcula la intensidad suministrada por el generador sabiendo que tiene una tensión de 24 V y que las resistencias son de los siguientes valores:  $R_1 = 1 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \Omega$ ,  $R_3 = 5 \Omega$ ,  $R_4 = 2 \Omega$  y  $R_5 = 4 \Omega$



*Solución:*

El triángulo de resistencias formado por  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  se puede sustituir por una estrella de resistencias formadas por  $R_A$ ,  $R_B$  y  $R_C$  que tienen las siguientes expresiones y valores:

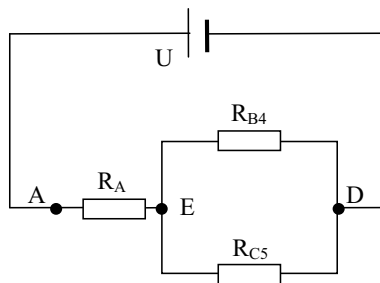


$$R_A = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{1 \cdot 2}{1 + 2 + 5} = \frac{2}{8} = 0,25 \Omega$$

$$R_B = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{1 \cdot 5}{1 + 2 + 5} = \frac{5}{8} = 0,62 \Omega$$

$$R_C = \frac{R_3 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{5 \cdot 2}{1 + 2 + 5} = \frac{10}{8} = 1,25 \Omega$$

Una vez realizada la sustitución en el circuito, vemos que las resistencias  $R_B$  y  $R_4$  están en serie, y también lo están  $R_C$  y  $R_5$  siendo sus resistencias equivalentes:



$$R_{B4} = R_B + R_4 = 0,62 + 2 = 2,62 \Omega$$

$$R_{C5} = R_C + R_5 = 1,25 + 4 = 5,25 \Omega$$

Estas dos resistencias quedan en paralelo, siendo su resistencia equivalente:

$$R_{ED} = \frac{R_{B4} \cdot R_{C5}}{R_{B4} + R_{C5}} = \frac{2,62 \cdot 5,25}{2,62 + 5,25} = \frac{13,91}{7,87} = 1,76 \Omega$$

Por último, la resistencia anterior queda en serie con  $R_A$ , siendo la resistencia equivalente de todo el circuito:

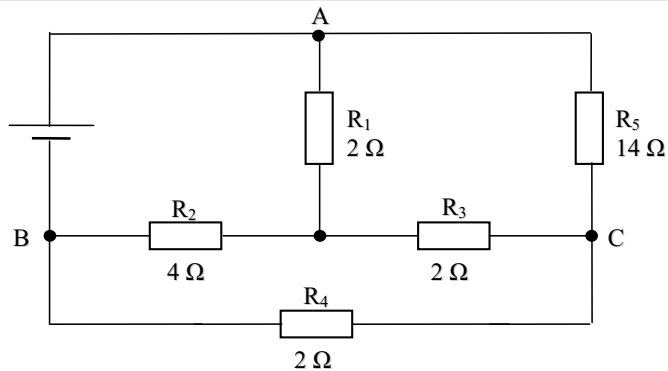
$$R_T = R_A + R_{ED} = 0,25 + 1,76 = 2,01 \Omega$$

De esta manera podemos calcular la intensidad suministrada por el generador, que es:

$$I_T = \frac{U}{R_T} = \frac{24}{2,01} = 11,94 \text{ A}$$

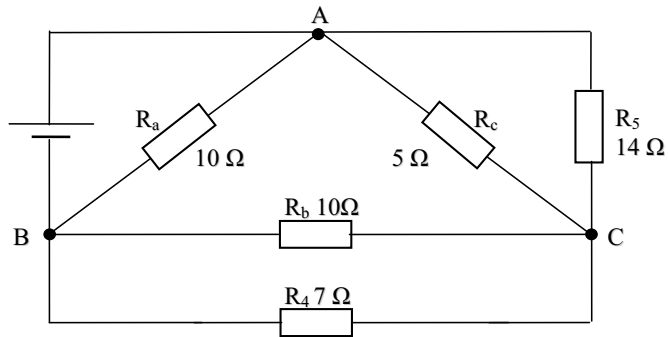
### Ejercicio de aplicación 3.2

Determinar la resistencia equivalente del circuito de la siguiente figura.



Se observa claramente que existe una estrella formada por las resistencias  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ , que si transformamos a triángulo obtenemos un circuito equivalente más sencillo, como el que se muestra en la siguiente figura:





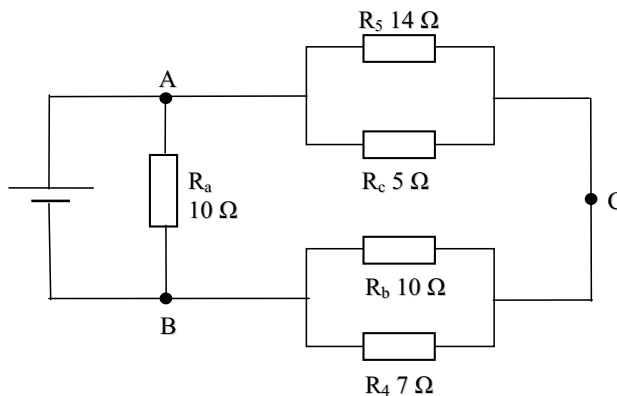
Las resistencias equivalentes del triángulo se obtienen aplicando las relaciones indicadas:

$$R_a = \frac{2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2}{2} = 10 \Omega$$

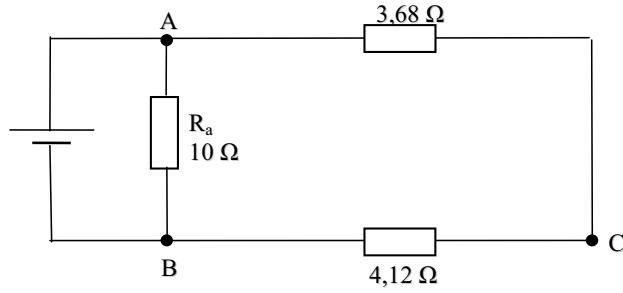
$$R_c = \frac{2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2}{4} = 5 \Omega$$

$$R_b = \frac{2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2}{2} = 10 \Omega$$

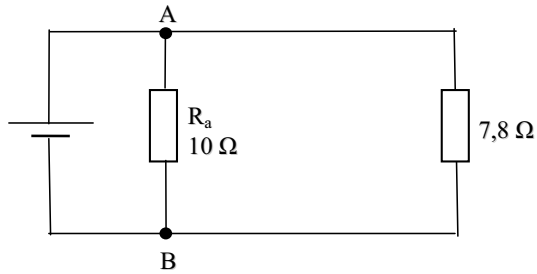
Si ordenamos un poco el círculo equivalente de la anterior figura se obtiene el circuito de la siguiente figura, que ya se puede resolver como si se tratase de un sencillo circuito mixto.



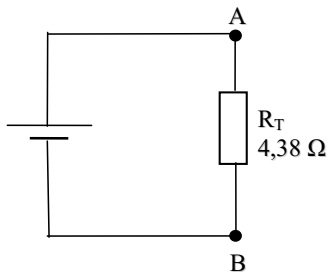
En las siguientes figuras se dibujan los circuitos equivalentes hasta encontrar la resistencia total. Teniendo cuenta las disposiciones en paralelo de 14 y 5  $\Omega$ , y de 10 y 7  $\Omega$ .



Las resistencias de 3,68 y 4,12  $\Omega$ , se sumarán por estar en serie.



Y por último, 10 y 7,8  $\Omega$ , se encuentran en paralelo.



### 3.3 Leyes de Kirchhoff

Estas leyes se utilizan para resolver circuitos eléctricos complejos en los que se interconectan varios generadores y receptores. A estos circuitos también se les conoce como redes eléctricas.

*Resolver un circuito* consiste en determinar la intensidad de la corriente por cada rama y la tensión entre cada dos nudos, así como las magnitudes propias de los elementos que lo conforman. Un método común de resolución es la aplicación de las leyes de Kirchhoff.

Para poder aplicar estas leyes se deben conocer los siguientes conceptos:

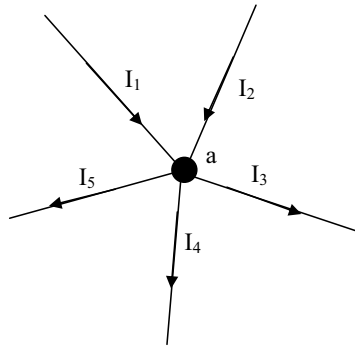
- *Red eléctrica*: es un conjunto de generadores y receptores unidos entre sí por conductores.
- *Nudo*: punto de un circuito en el que concurren más de dos conductores.
- *Rama*: conjunto de elementos comprendidos entre dos nudos.
- *Malla*: es todo camino cerrado de un circuito que puede recorrerse sin pasar dos veces por el mismo punto y no puede subdividirse en otras.
- *Contorno*: camino cerrado dentro de un circuito que puede recorrerse sin pasar dos veces por el mismo punto, y sí puede subdividirse en otros. Engloba varias mallas.

#### 3.3.1 Primera ley de Kirchhoff

La primera ley de Kirchhoff también es conocida como *ley de los nudos* o *ley de las corrientes*.

En cierto modo, esta ley ya la hemos estado aplicando para la resolución de los circuitos en paralelo. Dice así: “*En todo circuito eléctrico, la suma algebraica de las intensidades que se dirigen hacia un nudo es igual a la suma algebraica de las intensidades que se alejan de él*”.

$$\sum I(\text{entran al nudo}) = \sum I(\text{salen del nudo})$$



**Figura 3.4.** Nudo de un circuito.

En el nudo *a* se cumplirá que:

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5 \quad (3.15a)$$

La suma de las corrientes que llegan al punto *a* es igual a la suma de las corrientes que se alejan de él, ya que en *a* no se queda estacionada la corriente.

Si se adopta el convenio de considerar positivas las intensidades que se dirigen al nudo y negativas las que parten de él, la primera ley también se puede enunciar del siguiente modo: “*La suma algebraica de todas las intensidades que concurren en un nudo es igual a cero*”.

A este enunciado le corresponde la expresión:

$$\sum I = 0 \quad (3.16)$$

Aplicándolo al nudo *a* de la figura 3.4, se cumple que:

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 - I_5 = 0 \quad (3.15b)$$

### 3.3.2 Segunda ley de Kirchhoff

Esta otra ley también es conocida, ya que la hemos aplicado en la resolución de circuitos en serie.

Recibe el nombre de *ley de las mallas* o *ley de las tensiones*, y se enuncia del siguiente modo: “A lo largo de todo camino cerrado o malla, correspondiente a un circuito eléctrico, la f.e.m. total (suma algebraica de las fuerzas electromotrices) es igual a la caída de tensión total (suma algebraica de las caídas de tensión) en las resistencias.

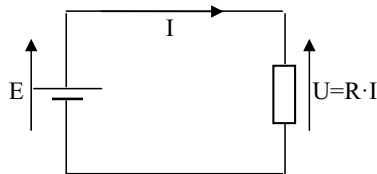
$$\sum E = \sum RI \quad (3.17a)$$

Si el  $\sum RI$  de la expresión anterior lo pasamos al primer miembro, nos queda:

$$\sum E - \sum RI = 0 \quad (3.17b)$$

Expresión que nos permite enunciar la ley de las mallas como: “A lo largo de todo camino cerrado o malla, correspondiente a un circuito eléctrico, la suma algebraica de todas las diferencias de potencial es igual a cero”.

Antes de aplicar esta segunda ley, conviene establecer una regla o convenio de signos que nos indique las polaridades correctas de cada una de las d.d.p. que aparecen en cada malla (figura 3.5).



**Figura 3.5.** Convenio de signos.

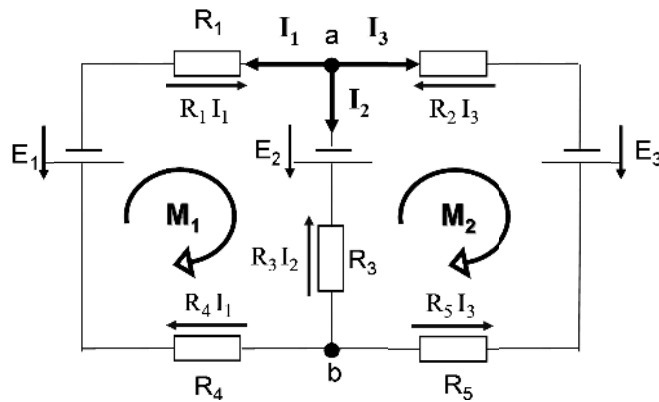
Para ello, marcamos con una flecha la f.e.m. del generador (la punta de la flecha siempre nos indica el potencial positivo). Y la intensidad que parte del generador la indicamos con una flecha (sentido convencional de la corriente) del mismo sentido que la f.e.m.

Marcamos con otra flecha la caída de tensión en la resistencia ( $U = R \cdot I$ ); su sentido será siempre contrario al de la intensidad que recorre el mismo.

### 3.3.3 Resolución de circuitos con las leyes de Kirchhoff

La resolución de un circuito eléctrico consiste en determinar las intensidades que circulan por las ramas que lo conforman. Para ello se debe plantear un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas ( $n^{\circ}$  incógnitas =  $n^{\circ}$  de intensidades =  $n^{\circ}$  de ramas).

En el circuito de la figura 3.6 existen tres ramas y, por tanto, tres intensidades diferentes. Para su resolución será necesario plantear tres ecuaciones con tres incógnitas ( $I_1, I_2$  e  $I_3$ ).



**Figura 3.6.** Resolución de un circuito eléctrico aplicando las leyes de Kirchhoff.

La forma de operar, para plantear el sistema de ecuaciones que permite resolver el circuito, es la siguiente:

1°. Se fija provisionalmente el sentido de las intensidades de corriente por cada rama del circuito. Aunque el sentido puede elegirse al azar, vamos a seguir el convenio de signos establecido y lo fijaremos en el mismo sentido que las f.e.m. Durante el proceso de cálculo no se puede cambiar el sentido de las intensidades. Una vez resuelto el sistema de ecuaciones planteado, conoceremos el verdadero sentido de las mismas (si el resultado es negativo tendrán sentido contrario).

2°. Se fija previamente y de forma arbitraria, un sentido para recorrer cada una de las mallas. Todas las mallas deben recorrerse en el mismo sentido (conviene acostumbrarse al de las agujas del reloj).

3°. Se aplica la 1ª ley a todos los nudos del circuito,  $n$ , excepto a uno (esto se hace para no escribir ecuaciones repetidas). Número de ecuaciones:  $(n-1)$

4°. Se aplica la 2ª ley a tantas mallas o circuitos cerrados como sea necesario para disponer de un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas. Las incógnitas son las intensidades que circulan por cada rama,  $r$ . Número de ecuaciones:  $r-(n-1)$ .

Para aplicar esta ley se recorren las mallas en el sentido fijado por nosotros y si coincide con el sentido marcado en las f.e.m.s. ó en las caídas de tensión, estas se consideran positivas, y negativas en caso contrario.

En la figura 3.6 se ha procedido del siguiente modo:

1°. Se ha supuesto que las intensidades  $I_1, I_2$  e  $I_3$  parten de los generadores, y se han colocado las flechas en los generadores y en las resistencias siguiendo el convenio de signos.

2°. Hemos tomado como sentido para recorrer las mallas el sentido de las agujas del reloj ( $M_1$  y  $M_2$ ).

3°. Como hay dos nudos,  $n=2$ , aplicamos la primera ley a un solo nudo ( $n-1$ ). Se ha elegido el nudo  $a$ .

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (3.18)$$

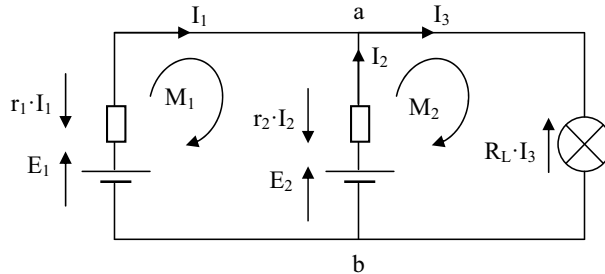
4°. Las dos ecuaciones que faltan las se obtienen aplicando la ley de las mallas a  $M_1$  y  $M_2$ .

$$-E_1 + E_2 + R_1 \cdot I_1 - R_3 \cdot I_2 + R_4 \cdot I_1 = 0 \quad (3.19)$$

$$-E_2 + E_3 - R_2 \cdot I_3 - R_5 \cdot I_3 + R_3 \cdot I_2 = 0 \quad (3.20)$$

### Ejercicio de aplicación 3.3

*Resolver el circuito de la figura, aplicando las leyes de Kirchhoff.  
Datos:  $E_1=12$ ;  $r_1=0,2\Omega$ ;  $E_2=10$ ;  $r_2=0,1\Omega$ ;  $R_L=8\Omega$*



En el circuito de la figura existen dos nudos que hemos marcado como  $a$  y  $b$ , y 2 mallas  $M_1$  y  $M_2$  que recorreremos en el sentido de la agujas del reloj. Para dibujar las intensidades hemos considerado que las intensidades  $I_1$  e  $I_2$  parten de los generadores, se juntan en el nudo  $a$ , y se dirigen hacia la lámpara formando  $I_3$ .

Las fuerzas electromotrices  $E_1$  y  $E_2$  se dibujan mediante una flecha que sale del polo positivo de los generadores y las caídas de tensión mediante flechas con sentido contrario a la intensidad que circula por la resistencia.

Para resolver el circuito, es decir, para conocer  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ , necesitamos plantear tres ecuaciones. La primera ecuación se obtiene aplicando la ley de los nudos en el nudo  $a$ , y las dos restantes aplicando la ley de las mallas a  $M_1$  y  $M_2$ , quedando el siguiente sistema de ecuaciones:

- *Nudo a* (1):  $I_1 + I_2 = I_3$
- *Malla  $M_1$*  (2):  $12 - 0,2 \cdot I_1 + 0,1 \cdot I_2 - 10 = 0$
- *Malla  $M_2$*  (3):  $10 - 0,1 \cdot I_2 - 8 \cdot I_3 = 0$

En la malla  $M_1$ , la caída de tensión  $r_1 \cdot I_1$  y  $E_2$  se consideran negativas por llevar sentido contrario, mientras que  $r_2 \cdot I_2$  y  $E_1$  se consideran positivas por quedar en el mismo sentido que es recorrida la malla. Para  $M_2$  aplicamos el mismo criterio.

Ahora hay que resolver el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas ( $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ ). Para ello, podemos emplear cualquiera de los métodos conocidos: reducción, sustitución e igualación. Incluso se puede utilizar la regla de Cramer con el uso de determinantes para la resolución de este tipo de sistemas de ecuaciones.



En este caso, vamos a proceder del siguiente modo para su resolución:

a) Sustituimos los términos de la ecuación (1) en la ecuación (3). De esta forma eliminamos una ecuación y una incógnita:

$$(3) \quad 10 - 0,1 \cdot I_2 - 8 \cdot (I_1 + I_2) = 0$$

simplificando:

$$(3) \quad 10 - 8 \cdot I_1 - 8,1 \cdot I_2 = 0$$

y con la ecuación nº 2 se forma un sistema de dos ecuaciones:

$$(2) \quad 2 - 0,2 \cdot I_1 + 0,1 \cdot I_2 = 0$$

b) Multiplicamos la ecuación (2) por 81 y sumamos el resultado a la ecuación (3), eliminado  $I_2$ :

$$(3) \quad 11 - 8 \cdot I_1 - 8,1 \cdot I_2 = 0$$

$$(2) \quad 162 - 16,2 \cdot I_1 + 8,1 \cdot I_2 = 0$$

---

$$173 - 24,2 \cdot I_1 = 0$$

de donde:

$$I_1 = \frac{173}{24,2} = 7,15 \text{ A}$$

Se sustituye este resultado en la ecuación (2) y se obtiene:

$$2 - 0,2 \cdot (7,15) + 0,1 \cdot I_2 = 0$$

de donde:

$$I_2 = \frac{0,2 \cdot (7,15) - 2}{0,1} = -5,7 \text{ A}$$

y en la ecuación (1) obtenemos:

$$I_3 = 7,15 - 5,7 = 1,45 \text{ A}$$

La batería nº 1 aporta 1,45 A a la lámpara y 5,7 A a la batería nº 2, que se comporta como si fuese un receptor, ya que se está cargando.

La tensión en bornes de la lámpara y su potencia es:

$$U_{ab} = R_L \cdot I_3 = 8 \cdot 1,45 = 11,6V$$

$$P_L = U_{ab} \cdot I_3 = 11,6 \cdot 1,45 = 16,82W$$

La potencia útil cedida por cada generador es:

$$P_{u1} = U_{ab} \cdot I_1 = 11,6 \cdot 7,15 = 82,94W$$

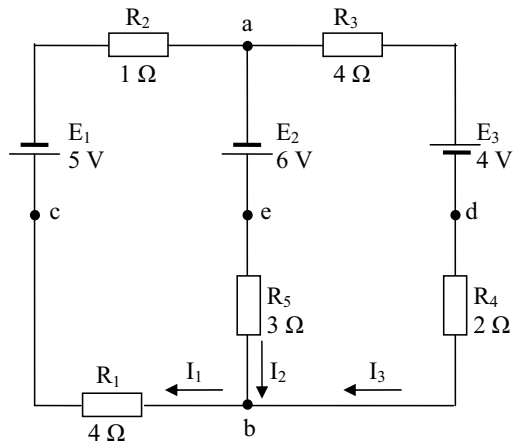
$$P_{u2} = U_{ab} \cdot I_2 = 11,6 \cdot (-5,7) = -66,12W$$

Otra forma de determinar la potencia de lámpara es sumando la potencia útil cedida por cada generador:

$$P_L = P_{u1} + P_{u2} = 82,94 - 66,12 = 16,82W$$

### Ejercicio de aplicación 3.4

En el circuito de la siguiente figura, calcula todas las intensidades de rama, indica cómo se comportan los generadores y efectúa el balance de potencias.



Solución:

a) Cálculo de las intensidades:

*Ley de los nudos*

Nudos:  $a$  y  $b$ ; luego  $n = 2$

$$m = (n - 1) = 2 - 1 = 1 \text{ ecuación}$$

*Ley de las mallas*

Ramas:  $(bca)$ ,  $(bea)$  y  $(adb)$ ; luego  $r = 3$

$$q = r - (n - 1) = 3 - (2 - 1) = 2 \text{ ecuaciones}$$

En total hay que plantear:

$$N = m + q = 1 + 2 = 3 \text{ ecuaciones}$$

*Sistema de ecuaciones*

1) nudo  $a$ :

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

2) malla  $bcaeb$ :

$$-E_1 + E_2 - R_1 \cdot I_1 - R_2 \cdot I_1 - R_5 \cdot I_2 = 0$$

3) malla  $beadb$ :

$$-E_2 - E_3 + R_5 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 - R_4 \cdot I_3 = 0$$

Sistema de tres ecuaciones (1), (2) y (3), con tres incógnitas  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ , que se resuelve como sigue:

$$1) \quad +I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$2) \quad -5 \cdot I_1 - 3 \cdot I_2 + 0 = 4$$

$$3) \quad +0 + 3 \cdot I_2 - 6 \cdot I_3 = 10$$

Determinante del sistema:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -5 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 18 + 15 + 0 - 0 - 0 + 30 = 63$$

Sustituyendo la primera columna del determinante del sistema por los términos independientes, tenemos:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 10 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 0 - 12 + 0 - 30 - 0 - 24 = -66$$

Sustituyendo la segunda columna del determinante del sistema por los términos independientes, tenemos:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & 10 & -6 \end{vmatrix} = -24 + 50 + 0 - 0 - 0 - 0 = 26$$

Sustituyendo la tercera columna del determinante del sistema por los términos independientes, tenemos:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -5 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = -30 + 0 + 0 - 0 - 12 - 50 = -92$$

Una vez que tenemos el valor de los determinantes, calculamos las intensidades aplicando la regla de Cramer:

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-66}{63} = -1,04 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{26}{63} = 0,41 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-92}{63} = -1,46 \text{ A}$$

Las intensidades  $I_1$  e  $I_3$ , por dar resultados negativos, son de sentido contrario al supuesto para resolver el problema.

b) Comportamiento de los generadores:

$E_1$  se comporta como un generador, pues la corriente que lo atraviesa va de menos a más.

$E_2$  se comporta como un generador, por la misma razón.

$E_3$  se comporta como un generador, por la misma razón.

c) Balance de potencias: los tres generadores aportan una potencia  $P_g$ , tal que:

$$P_g = P_1 + P_2 + P_3 = 5 \cdot 1,04 + 6 \cdot 0,41 + 4 \cdot 1,46 = 13,5 \text{ W}$$

Las resistencias consumen una potencia  $P_r$ , tal que:

$$P_r = (R_1 + R_2) \cdot I_1^2 + R_5 \cdot I_2^2 + (R_3 + R_4) \cdot I_3^2 = 5 \cdot 1,04^2 + 3 \cdot 0,41^2 + 6 \cdot 1,46^2 = 18,70 \text{ W}$$

### 3.4 Puente de Wheatsthone

Una de las aplicaciones típicas de la resolución de circuitos mediante las leyes de Kirchhoff es el puente de Wheatsthone –figura 3.8-. Este dispositivo sirve para medir el valor óhmico de una resistencia desconocida  $R_x$ .

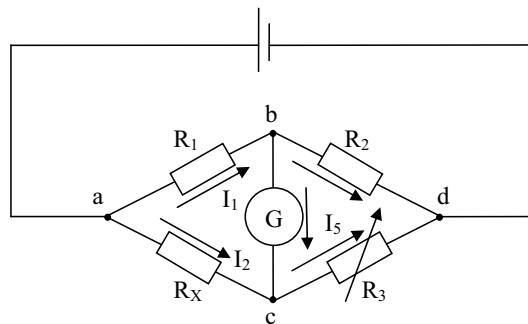


Figura 3.8. Aplicación del puente de Wheatsthone.

Las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  son fijas y de un valor conocido. La resistencia  $R_3$  es variable y se mueve en una escala graduada, de tal forma que podemos saber su valor en todo momento. Se trata de modificar  $R_3$ , hasta conseguir equilibrar el puente. Este equilibrio se consigue cuando el galvanómetro indica que la corriente es cero, es decir que  $I_5$  es nula.

En ese momento, la d.d.p. entre  $b$  y  $c$  es nula.

Cuando el puente está equilibrado, aplicando la 2ª ley de Kirchhoff a las dos mallas triangulares formadas, teniendo en cuenta que,  $I_5 = 0$ , se verifica que:

$$R_1 \cdot I_2 - R_x \cdot I_1 = 0 \quad (3.19)$$

$$R_3 \cdot I_1 - R_2 \cdot I_2 = 0 \quad (3.20)$$

al dividir la ecuación (3.13) con la (3.14) conseguimos que las intensidades  $I_1$  e  $I_2$  se cancelen:

$$\frac{R_x \cdot I_1}{R_3 \cdot I_1} = \frac{R_1 \cdot I_2}{R_2 \cdot I_2}$$

$$\frac{R_x}{R_3} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} \cdot R_3 \quad (3.21)$$

Con esta última ecuación se puede averiguar el valor de la resistencia a medir  $R_x$  después de equilibrar el puente.

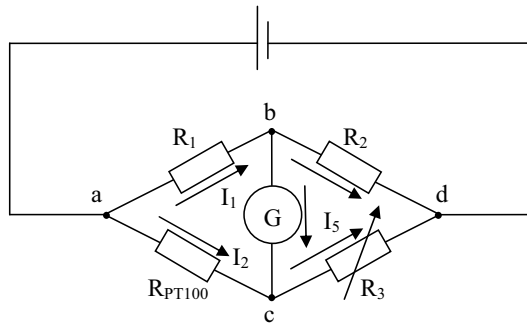
La ventaja que supone el empleo del puente de Wheatstone para la medida de resistencias eléctricas reside en el hecho de que el resultado de la medida no depende en ningún caso del valor de la tensión que proporciona la batería de C.C. al circuito.

### Ejercicio de aplicación 3.5

*Este ejercicio pretende servir de ejemplo para estudiar el puente de Wheatstone en agroindustria*

Sabemos que la temperatura influye en la resistencia, de modo que ésta aumenta (o disminuye según el caso) con la temperatura.

Si tenemos una resistencia conocida, y también es conocido el coeficiente de temperatura de la misma, ya que por medio del puente de Wheasthone podemos conocer en cada instante el valor exacto de su resistencia, podemos determinar la  $T$  a que se encuentra en ese momento. Si la resistencia es buena conductora del calor como es el platino, puede servirnos como un termómetro sensible en extremo. Es un tipo de sonda termométrica muy usada en la industria.



Sabemos que la resistencia es de platino, cuyo coeficiente de temperatura es:

$$\alpha = 0,00385 \text{ (}^\circ\text{C)}^{-1}$$

y, al calibrar el termómetro, que la resistencia es:

$$R_{PT100} = 100 \Omega \text{ a } 0^\circ \text{C}$$

Utilizando el puente, sumergimos la  $R_{PT100}$ , al líquido problema, y averiguamos por el puente que en ese momento su resistencia es de  $105 \Omega$ . ¿Determinar la temperatura?

Teniendo en cuenta que:

1.  $R_{PT100} = \frac{R_1}{R_2} \cdot R_3$
2.  $R_{\circ C} = 100 \cdot (1 + 0,00385 \cdot \Delta T)$

En donde  $\Delta T$ , corresponde a los  $^\circ\text{C}$  por encima de  $0^\circ \text{C}$ .

Luego:  $105 = 100 \cdot (1 + 0,00385(T^\circ\text{C}))$

De donde  $T = 12,98^\circ\text{C}$

### 3.5 Métodos de análisis

Con respecto a los métodos para determinar las diferentes ecuaciones independientes, diremos que tenemos dos tipos de ecuaciones básicamente, las ecuaciones nodales, basadas en la 1ª ley de Kirchhoff, y las ecuaciones circulares, basados en la 2ª ley de Kirchhoff.

Para determinar nuestras ecuaciones nodales y circulares, tenemos cuatro métodos, como se muestra a continuación:

- Ecuaciones circulares: Método de árbol, también denominado de lazos básicos, y el método de las mallas.
- Ecuaciones nodales: Métodos de los grupos de corte y método de los nudos.

En nuestro caso haremos especial mención, al método de las mallas y de los nudos.

#### 3.5.1 Simplificaciones

Para analizar un circuito eléctrico, en determinadas ocasiones conviene simplificarlo tanto como se pueda.

##### 3.5.1.1 Conversión de fuentes

Vamos a ver que es posible sustituir ramas activas del tipo de la figura 3.9 a), con los de la figura 3.9.b) Sin que se modifiquen las tensiones e intensidades en los demás elementos del circuito.

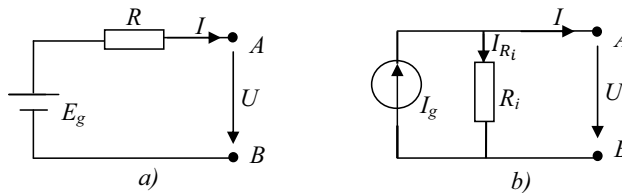


Figura 3.9. Conversión de fuentes.



En definitiva ambas ramas deben ser equivalentes respecto a sus terminales A y B.

Del circuito a) tenemos que:

$$U_{AB} = E_g - R \cdot I \quad (3.22)$$

Del circuito b) tenemos que:

$$U_{AB} = R_i \cdot I_{R_i} \quad (3.23)$$

Como  $I_{R_i} = I_g - I$ , al sustituir en (3.23), tenemos que:

$$U_{AB} = R_i \cdot I_g - R_i \cdot I \quad (3.24)$$

Si igualamos (3.23) y (3.24), y partiendo que la  $U_{AB}$  e  $I$ , deben ser iguales, podemos llegar a:

$$E_g - R \cdot I = R_i \cdot I_g - R_i \cdot I \quad (3.25)$$

igualando ambos términos, tenemos la siguiente equivalencia:

$$\begin{aligned} E_g &= R_i \cdot I_g \\ R &= R_i \end{aligned} \quad (3.26)$$

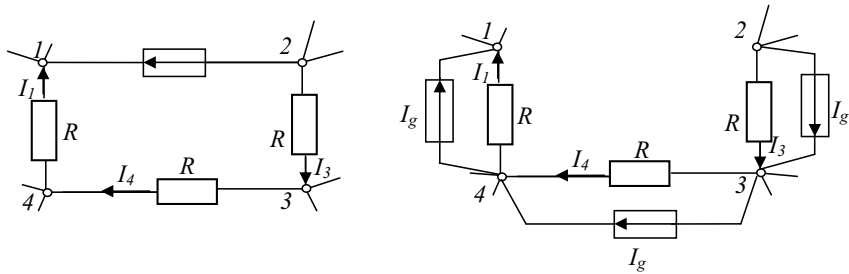
La equivalencia es válida para los receptores del circuito, no lo será con respecto a la  $U$ ,  $I$  y  $P$  en el elemento pasivo o fuente ideal.

### 3.5.1.2 Modificación de la geometría de un circuito

El caso anteriormente definido requiere de la existencia de un elemento pasivo, ya sea en serie o en paralelo, para poder definir la transformación. Pero cuando estemos en el caso de unas fuentes de tensión e intensidad ideal vamos a tener que proceder de otra forma, para poder llevar a cabo la conversión de fuentes que antes hemos estudiado. Tenemos dos casos claramente diferenciados:

#### a) Fuentes de intensidad

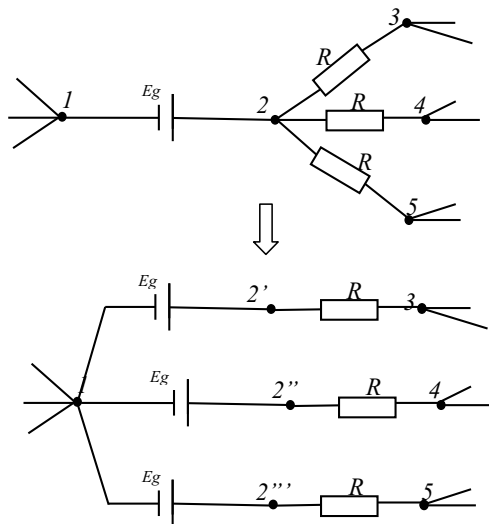
En la figura 3.10, nos encontramos con la dificultad de que nuestra fuente de intensidad  $I_g$ , no tiene en paralelo ninguna resistencia, y me encuentro con la necesidad de hacer una conversión a fuentes de tensión.



**Figura 3.10.** Cambio de geometría con fuentes de intensidad.

Al hacer este cambio de geometría, las fuentes no aportan nada a los nudos, de forma que en ambos casos las tensiones entre los nudos serán iguales. Si se aplica la primera ley de Kirchhoff, para cualquier punto del circuito de la izquierda, tendremos una igual respuesta en el caso del circuito de la derecha. Pero este cambio de geometría ha motivado que podamos realizar la conversión de nuestras fuentes de intensidad en fuentes de tensión, ya que hemos logrado que nuestra fuente de intensidad se encuentre en paralelo con una rama.

b) Fuentes de tensión



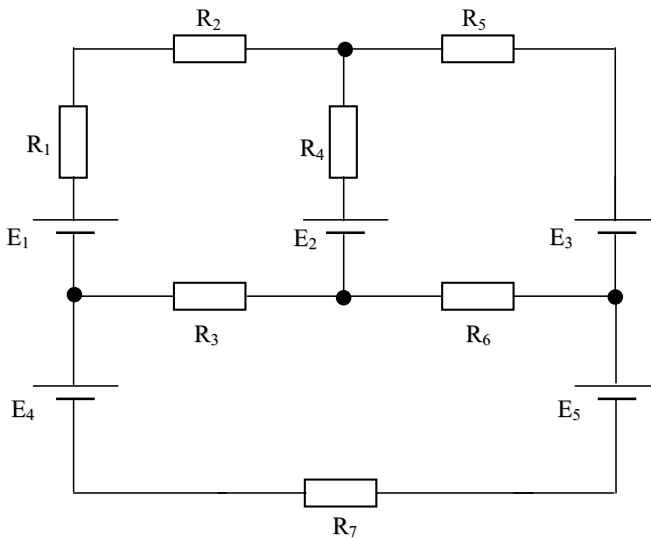
**Figura 3.11.** Cambio de geometría con fuentes de tensión.

En la figura 3.11, nos encontramos con la dificultad de que nuestra fuente de tensión  $E_g$ , no tiene en serie ninguna resistencia, y me encuentro con la necesidad de hacer una conversión a fuentes de intensidad.

Al hacer este cambio de geometría, las diferencias de tensión entre los nudos 2-3 de la figura superior y el 2'-3 de la figura inferior, permanecen inalterables, y por tanto, las intensidades que recorren cada una de las ramas. De igual manera, pasa para las otras dos ramas. Pero este cambio de geometría ha motivado que podamos realizar la conversión de nuestras fuentes de tensión en fuentes de intensidad, ya que hemos logrado que nuestra fuente de tensión tenga una resistencia en serie.

### 3.6 Método de las corrientes de malla

Hemos visto la resolución de circuitos por medio de las Leyes de Kirchhoff. Vamos a ver ahora el método de las corrientes de malla, basado en el hecho de usar unas corrientes de naturaleza ficticia. Como hemos visto con anterioridad este método utiliza las ecuaciones circulares, que se basan en la segunda ley de Kirchhoff.



**Figura 3.12.** Circuito eléctrico

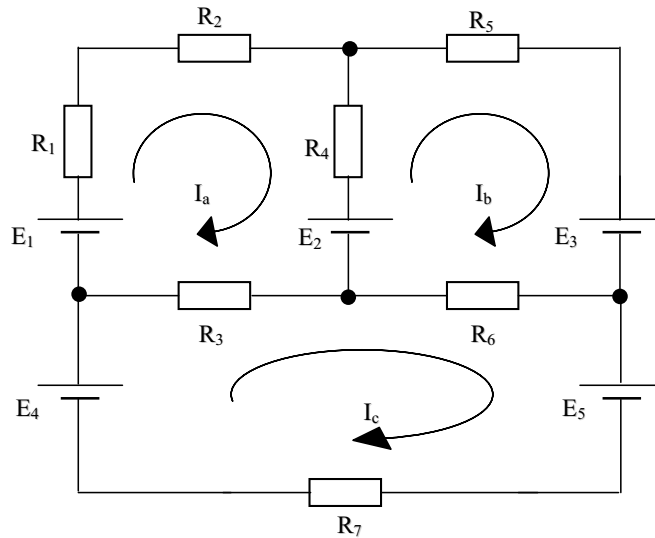
Tengamos el circuito de la figura 3.12. El método de las mallas se basa en proceder con arreglo a las siguientes etapas:

1ª. Se fija un sentido en que se van a recorrer todas las mallas del circuito, de modo que en todas sea en el mismo sentido, tal y como se aprecia en la figura 3.13. Estas son  $I_a$ ,  $I_b$ ,  $I_c$ . Serán las corrientes de malla.

2ª. Establecemos lo que llamamos las “contracorrientes”, que son estas mismas corrientes consideradas como contracorriente cuando se consideran en las ramas de las otras mallas adyacentes por la principal en que se define su circulación.

Y aplicamos la siguiente expresión para cada malla:

$$\sum E = \sum R \cdot I(\text{malla}) - \sum R \cdot I(\text{contracorriente}) \quad (3.27)$$



**Figura 3.13.** Corrientes de malla.

Con el criterio para el primer miembro de que un generador es positivo cuando su sentido de circulación coincide con el de la corriente de malla de esa malla. Por ejemplo, en la malla “a”,  $E_1$  es positivo por seguir el sentido de  $I_a$ , en tanto que  $E_2$  se considera negativo por tener sentido contrario. Pero, en la malla “b”, ese mismo  $E_2$  tiene su polaridad coincidente con el sentido de la corriente de malla  $I_b$ , y es positivo.

$$\sum E = E_+ - E_- \quad (3.28)$$

Según el circuito de la figura 3.11 obtenemos las siguientes ecuaciones de malla:

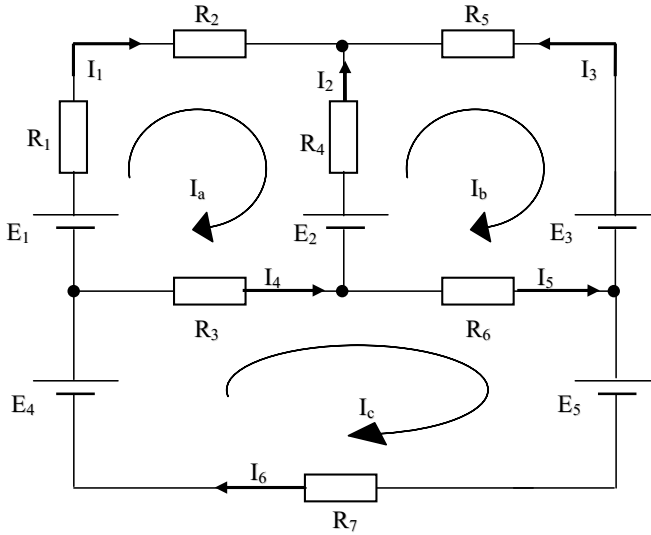
$$E_1 - E_2 = (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) \cdot I_a - R_4 \cdot I_b - R_3 \cdot I_c \quad (3.29)$$

$$E_2 - E_3 = (R_4 + R_5 + R_6) \cdot I_b - R_4 \cdot I_a - R_6 \cdot I_c \quad (3.30)$$

$$E_4 - E_5 = (R_3 + R_6 + R_3 + R_7) \cdot I_c - R_3 \cdot I_a - R_6 \cdot I_b \quad (3.31)$$

Con lo que tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas,  $I_a$ ,  $I_b$ ,  $I_c$ . Que es fácilmente resoluble, por ejemplo, con el método de Cramer.

3°. Hemos de fijar los sentidos de las corrientes en cada rama teniendo en cuenta los generadores.



**Figura 3.14.** Ejemplo de aplicación de corriente de malla en circuitos.

En la figura 3.14, las corrientes son  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_5$ ,  $I_6$ .

4°. Ahora, que ya conocemos  $I_a$ ,  $I_b$ ,  $I_c$ , y que tenemos establecidas las corrientes verdaderas, podemos hallar su magnitud y sentido real, refiriéndolas a las corrientes de malla en su papel de corriente y contracorriente en cada rama.

El requisito es considerar los siguientes signos: Positivo en el caso de que la corriente verdadera tenga el mismo sentido que la corriente de malla, y negativo en caso contrario. En este caso, tendremos:

$$I_1 = I_a \quad (3.32)$$

$$I_2 = I_b - I_a \quad (3.33)$$

$$I_3 = I_b \quad (3.34)$$

$$I_4 = I_c - I_a \quad (3.35)$$

$$I_5 = I_c - I_b \quad (3.36)$$

$$I_6 = I_c \quad (3.37)$$

### 3.7 Método de los nudos

A continuación explicaremos como se aplica el método de los nudos, este método utiliza las ecuaciones nodales, que se basan en la primera ley de Kirchhoff.

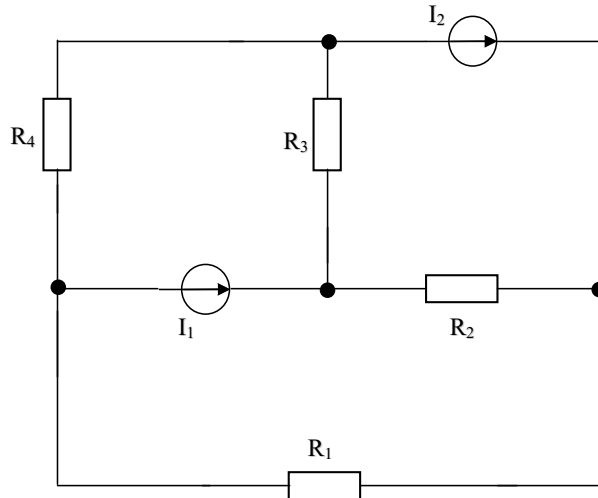


Figura 3.15. Circuito eléctrico.

Partiendo del circuito de la figura 3.15. El método de los nudos se basa en proceder con arreglo a las siguientes etapas:

1ª. En la figura 3.15 se muestra una configuración de un circuito típico con cuatro nudos. Se nominalizan todos los nudos, excepto uno que se *referenciará a tierra* –en nuestro caso será el que se encuentra en el centro de la figura 3.16-. La ubicación del nudo de referencia es arbitraria. Tendremos por tanto, tres nudos 1, 2 y 3. El fin de este método es calcular las tensiones  $U_1$ ,  $U_2$ , y  $U_3$ , que son las tensiones que habrá entre cada uno de los nudos y el nudo de referencia ( $U_0$ ) –es decir, sería realmente  $U_{10}$ ,  $U_{20}$  y  $U_{30}$ -, que reciben el nombre de *tensiones de nudo* (o *nodo*). A partir del conocimiento de estas tensiones *estamos en disposición de poder calcular todas las magnitudes del circuito*.

2ª. Se definen unos sentidos a las corrientes de rama, de forma que aquellas corrientes rama que comprendan un nudo y el nudo de referencia, el sentido de la  $U$  y la  $I$  vendrá marcado desde el nudo a la referencia –ejemplo  $I_2$ ,  $I_3, \dots$ , excepto si hay una fuente de excitación que condicione el sentido-. Y en el caso de que nuestra intensidad de rama esté entre dos nudos cualesquiera, se definirá un sentido aleatorio de la intensidad –ejemplo en  $I_1$ ,  $I_4, \dots$ -.

Las intensidades de rama vendrán dadas por los valores de las tensiones de nudo, como se puede apreciar en las expresiones posteriores.

$$I_2 = \frac{U_3}{R_2} \quad I_3 = \frac{U_2}{R_3} \quad (3.38)$$

$$I_4 = \frac{U_1 - U_2}{R_4} \quad (3.39)$$

$$I_1 = \frac{U_1 - U_3}{R_1} \quad (3.40)$$

Los valores y sentidos de la  $I_4$  e  $I_1$ , viene determinado por las tensiones y resistencia, así como por el sentido arbitrario que se haya definido previamente. En el caso que nos encontramos la  $I_5$  y la  $I_6$ , se corresponden respectivamente con los valores de las fuentes de intensidad  $I_{g1}$  y  $I_{g2}$

Una vez que se tiene claro, como obtener las intensidades en función de las tensiones de nudo, se aplicará la primera ley de Kirchhoff en todos los nudos –excepto el de referencia-, o simplemente, igualar intensidades entrantes al nudo con las salientes.

$$\sum I_{salientes} = \sum I_{entrantes} \quad (3.41)$$

En nuestro para el nudo 1, 2 y 3 tendríamos respectivamente las siguientes ecuaciones:

$$I_4 + I_5 + I_1 = 0 \quad (\text{Nudo 1}) \quad (3.42)$$

$$I_3 + I_6 = I_4 \quad (\text{Nudo 2}) \quad (3.43)$$

$$I_2 = I_6 + I_1 \quad (\text{Nudo 3}) \quad (3.44)$$

Teniendo en cuenta que las  $I_5$  y  $I_6$  se corresponde con las fuentes de intensidad  $I_{g1}$  y  $I_{g2}$ , y a partir de los valores del resto de las intensidades en función de las tensiones de nudo.

$$\frac{U_1 - U_2}{R_4} + I_{g1} + \frac{U_1 - U_3}{R_1} = 0 \quad (3.45)$$

$$\frac{U_2}{R_3} + I_{g2} = \frac{U_1 - U_2}{R_4} \quad (3.46)$$

$$\frac{U_3}{R_2} = I_{g2} + \frac{U_1 - U_3}{R_1} \quad (3.47)$$

Una vez llegado a este punto, ponemos nuestro sistema de ecuaciones de forma que las incógnitas la dejemos a la izquierda y las constantes a la derecha

$$\left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_1}\right) \cdot U_1 - \frac{1}{R_4} \cdot U_2 - \frac{1}{R_1} \cdot U_3 = -I_{g1} \quad (3.48)$$

$$-\frac{1}{R_4} \cdot U_1 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) = -I_{g2} \quad (3.49)$$

$$-\frac{1}{R_1} \cdot U_1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \cdot U_3 = I_{g2} \quad (3.50)$$

Dicha expresión podría venir dado en función de las conductancias, quedándose

$$(G_1 + G_4) \cdot U_1 - G_4 \cdot U_2 - G_1 \cdot U_3 = -I_{g1} \quad (3.51)$$

$$-G_4 \cdot U_1 + (G_3 + G_4) = -I_{g2} \quad (3.52)$$

$$-G_1 \cdot U_1 + (G_1 + G_2) \cdot U_3 = I_{g2} \quad (3.53)$$

Con lo que tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas,  $U_1$ ,  $U_2$  y  $U_3$ . Que es fácilmente resoluble, por ejemplo, con el método de Cramer.

Una vez calculadas las tensiones de nudo, y utilizando las ecuaciones (3.38) a (3.40), estamos en disposición de calcular las intensidades de rama, y a partir de ahí todo los valores que no sean necesarios.



Como acaban de ver, para facilitar uso de cualquiera de los métodos de análisis estudiados –mallas o nudos-, se recomienda que para mallas las fuentes de excitación sean fuentes de tensión y para el caso, de aplicación del método de los nudos, se recomienda que estas fuentes sean de intensidad. Por ello es interesante que tengan en cuenta las simplificaciones que hemos visto en el apartado 3.4.1, para facilitar dicha labor de análisis y cálculo.

### 3.7.1 Ecuaciones matriciales de nudos –forma directa-

Hemos definido anteriormente las ecuaciones para la resolución por nudos (ecuaciones 3.48 a 3.50). Realmente es posible la definición directa de la matriz de cálculo, dicha matriz se correspondería que la ecuación 3.54.

Los elementos que conforman la diagonal, serían por ejemplo en el caso del término  $G_{11}$ , la suma de todas las conductancias que van a parar al nudo 1, con signo positivo. Para el cálculo de  $G_{22}$  y  $G_{33}$ , se sigue el mismo proceso.

El resto de los elemento de nuestra matriz tendrán valor negativo, y serán simétricas respecto a la diagonal. Por ejemplo el  $G_{12}$ , sería la conductancia que hay entre el nudo 1 y 2, con signo negativo.

Si no hubiera ninguna conductancia entre los nudos se pondrá como magnitud 0, como por ejemplo en nuestro caso el  $G_{23}$ .

Después tendríamos una matriz columna con las tensiones incógnitas –tensiones de nudo- y por último, la matriz columna con las intensidades, si la intensidad es saliente será negativa.

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_1}\right) & -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_4} & \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & 0 & \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{g1} \\ -I_{g2} \\ I_{g2} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

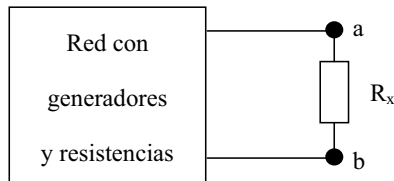
Aunque no lo hemos definido este método es de aplicación también para el método de las mallas, siguiendo la misma filosofía, tendríamos una matriz de resistencias, un matriz de las intensidades incógnitas y por último una matriz con los valores de las fuentes de tensión.

### 3.8 Teorema de Thevenin

En no pocas ocasiones la aplicación de las leyes de Kirchhoff o de las corrientes de malla, dan lugar a cálculos muy laboriosos. Ello hace de especial interés el utilizar circuitos equivalentes de mayor simplicidad. Llamaremos *circuito equivalente* de un dado, a otro ficticio que, visto desde sus terminales, se comporta igual que el dado. Dicho de otra manera, es un artificio matemático por medio del cual se consigue estudiar el comportamiento de un circuito mediante otro más sencillo.

El circuito equivalente NO es igual que el original: tan sólo su comportamiento hacia el exterior es igual que el del original.

De entre los artificios usados en este sentido, destaca el Teorema de Thevenin: “La corriente que circula por una resistencia cualquiera de una red, conectada entre dos terminales  $a$  y  $b$ , es la misma que si dicha resistencia estuviera conectada a un solo generador cuya f.e.m fuera la d.d.p. medida entre  $a$  y  $b$  en circuito abierto (sin la resistencia en cuestión) y cuya resistencia interna fuera la medida entre  $a$  y  $b$  (sin la resistencia) cortocircuitando los generadores.”



**Figura 3.16.** Aplicación del Teorema de Thevenin.

Esta herramienta permite considerar al resto del circuito, por complejo que sea, como un circuito al que pueda ser equivalente uno tan sencillo, figura 3.17 que sólo conste de un generador y una resistencia, si este generador y esta resistencia reúnen determinadas características.

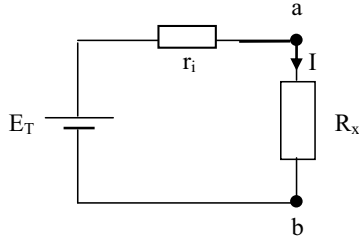


Figura 3.17.

Su utilidad es la de ir efectuando sustituciones por equivalencia de partes de un circuito, de modo que de cada conjunto al que se aplica el método obtenemos sólo dos elementos en serie: un generador y una resistencia.

El procedimiento práctico consiste, en primer lugar, en calcular el comportamiento del resto del circuito considerándolo exclusivamente como un generador (figura 3.18), del que queremos saber la tensión entre los dos bornes de la resistencia, que queda excluida. A este valor de tensión se le llama *tensión equivalente Thevenin*,  $E_T (E_{Th})$ .

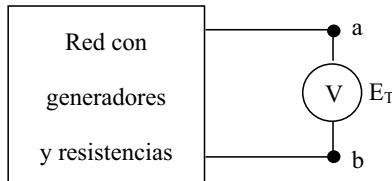


Figura 3.18. Tensión Thevenin.

Para encontrar la *resistencia equivalente de Thevenin*,  $r_i (R_{Th})$ , el proceso consiste en considerar que los generadores de la porción del circuito en cuestión, están cortocircuitados, permitiendo el paso de corriente libremente, figura 3.19. En estas condiciones, evaluamos la resistencia equivalente del conjunto.

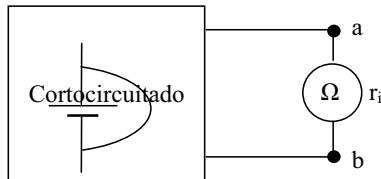


Figura 3.19

### 3.8.1 Ejemplo del Teorema de Thevenin

Consideremos el circuito de la izquierda de la figura 3.20. Vamos a sustituirlo por el circuito equivalente de Thevenin, que vemos a la derecha. Para ello hemos de encontrar los valores de  $E_T$  y  $r_i$ .

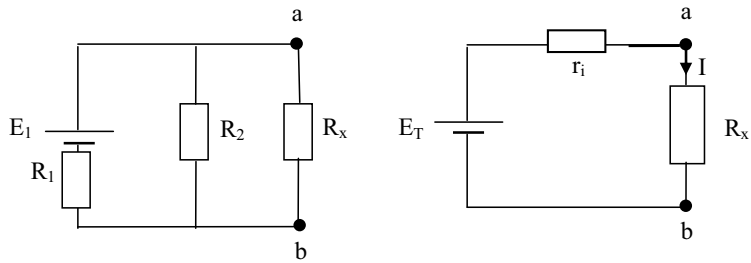


Figura 3.20

¿Qué características debe tener  $E_T$ ?

Por definición, si consideramos todo el circuito excepto la propia resistencia  $R_x$ , y calculamos el generador que proporcionaría la misma f.e.m. que ese conjunto, su dimensión será la de  $E_T$ .

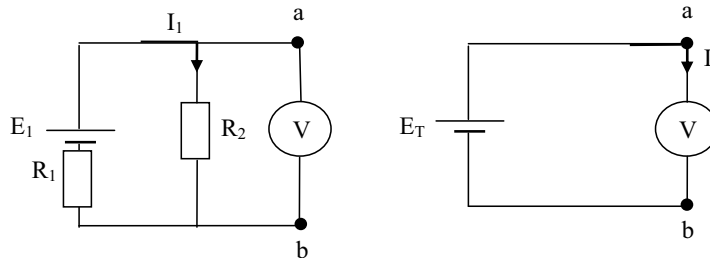


Figura 3.21

Miremos la figura 3.21, se trata de establecer ese generador,  $E_T$ , que hace equivalentes los dos circuitos.

Si observamos el circuito de la izquierda, apreciamos que por la 2ª ley de Kirchoff, en la malla formada por  $R_1$ ,  $R_2$  y  $E_1$ :

$$E_1 = I_1(R_1 + R_2) \quad (1)$$

$$E_1 - I_1 R_1 = I_1 R_2 \quad (2)$$

de modo que:

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_2}$$

Y, estableciendo la tensión entre a y b:

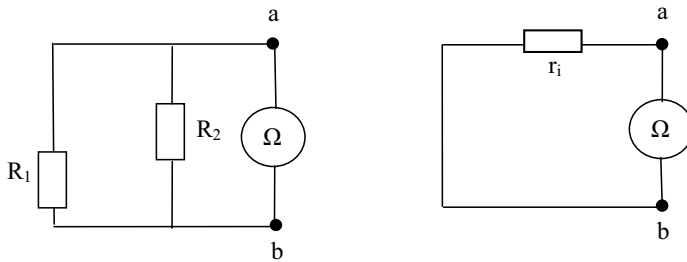
$$U_{ab} = E_1 - R_1 I_1;$$

de modo que, aplicando (2):

$$E_T = R_2 I_1$$

De igual manera por definición, si cortocircuitamos el generador  $E_1$  y consideramos todo el circuito a excepción de  $R_x$  como agrupación de resistencias, el circuito inicial y el equivalente serían los representados en la figura 3.22.

Y vamos a ver cómo se encuentra el equivalente del de la izquierda.



**Figura 3.22.**

Se trata de dimensionar  $r_i$ , ( $R_{Th}$ ) de tal modo que los dos circuitos sean equivalentes.

Como se trata, en este caso, de dos resistencias en paralelo:

$$r_i = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

De modo que ya conocemos los elementos del circuito equivalente de Thevenin.

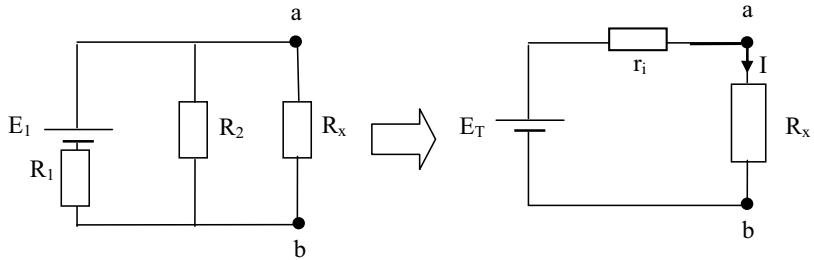


Figura 3.23

Y como:

$$r_i = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}; \quad \text{y} \quad E_T = R_2 \cdot I_1;$$

tenemos que:

$$I = \frac{E_T}{R_x + r_i} = \frac{R_2 \cdot I_1}{R_x + r_i}$$

### 3.9 Teorema de Norton

“El generador de tensión y la resistencia interna del generador de Thevenin se pueden transformar en un generador de corriente y una resistencia en paralelo, resultando este circuito equivalente al anterior”.

La resistencia en paralelo con el generador de corriente de Norton es la misma que la resistencia en serie con el generador de Thevenin –figura 3.24-.

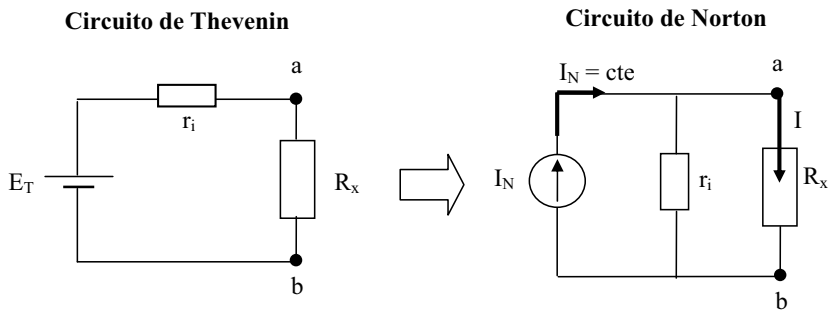


Figura 3.24

Se trata de otro artificio con aplicaciones similares a las de Thevenin.

Es un circuito equivalente que debe facilitar los cálculos.

¿Cómo llevarlo a cabo?

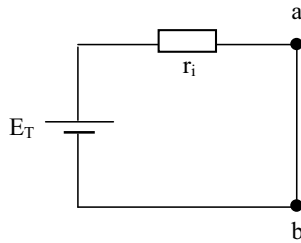


Figura 3.25

$I_N$  se obtiene cortocircuitando los terminales a y b del generador de Thevenin y calculamos en estas condiciones la corriente por el circuito (figura 3.25).

$$I_N = \frac{E_T}{r_i} \quad (3.55)$$

Ésta es la corriente que permanece constante.

Y veamos cómo resulta la tensión entre a y b en el circuito de Norton con el circuito abierto, esto es, sin la resistencia  $R_x$ , al circular esta corriente  $I_N$  constante:

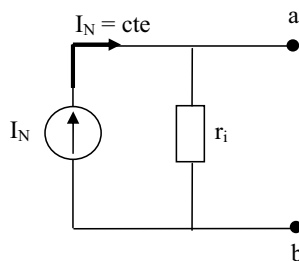


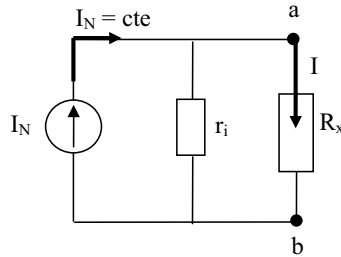
Figura 3.26.

Vemos que:

$$U_{ab} = I_N \cdot r_i \quad (3.56)$$

Y con el circuito de Norton cerrado, con  $R_x$  presente, y considerando  $I$  la corriente que circula por  $R_x$ :

**Circuito de Norton**



**Figura 3.27**

$$U_{ab} = I \cdot R_x \tag{3.57}$$

Pero si miramos hacia “la izquierda”, en la figura 3.27 tenemos dos resistencias en paralelo,  $r_i$  y  $R_x$ , con una fuente de corriente constante  $I_N$ .

De modo que:

$$U_{ab} = I_N \frac{r_i \cdot R_x}{r_i + R_x} \tag{3.58}$$

Sea cual sea el equivalente obtenido es muy fácil pasar al otro equivalente sin más que aplicar el teorema correspondiente.

$$I_N(\text{Norton}) = \frac{E_T(\text{Thevenin})}{r_i}$$

$$r_i \text{ de Norton} = r_i \text{ de Thevenin}$$

### 3.10 Principio de superposición

Si en una red actúan varias f.e.m., dando lugar a una serie de corrientes, éstas serán iguales a la suma algebraica de las que produciría cada f.e.m. actuando por separado.

Se verifica con un ejemplo –figura 3.28–.



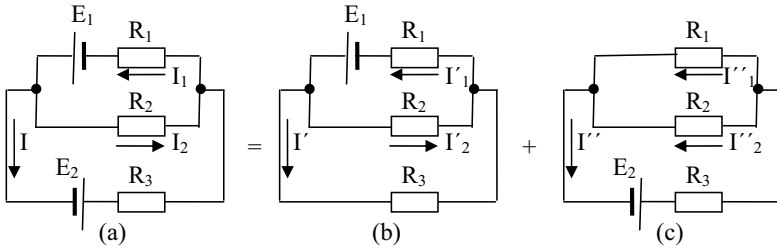


Figura 3.28

Vamos a verificar el ejemplo, comprobando si se cumple que:

$$I_1 = I'_1 + I''_1$$

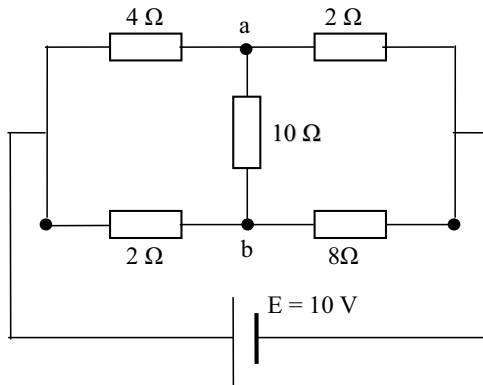
$$I_2 = I'_2 - I''_2$$

$$I = I' + I''$$

Y para ello vamos a calcular las corrientes, resolviendo cada circuito.

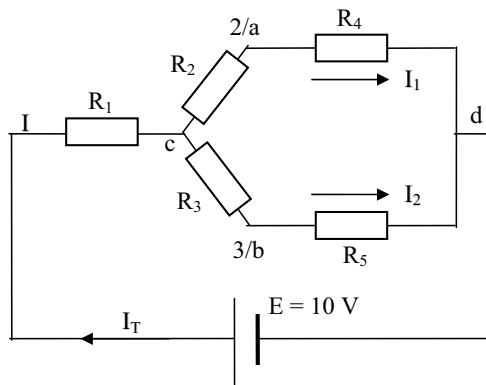
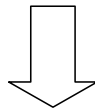
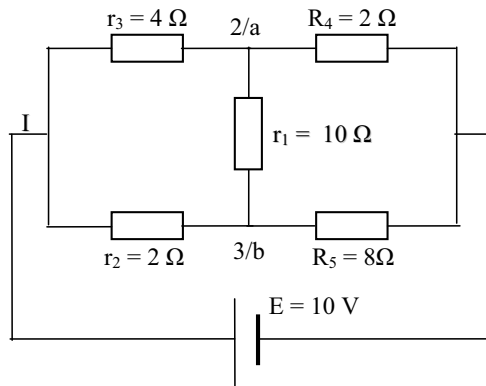
### Ejercicio de aplicación 3.6

Calcular la d.d.p. entre los puntos a y b y la corriente por la resistencia de  $10\ \Omega$  del circuito de la siguiente figura, por aplicación de Kennelly, Thevenin y Norton, sucesivamente.



Solución:

a) Aplicación de las ecuaciones de Kennelly.



$$R_1 = \frac{r_2 \cdot r_3}{r_1 + r_2 + r_3} = \frac{2 \cdot 4}{10 + 2 + 4} = 0,5\Omega$$

$$R_2 = \frac{r_1 \cdot r_3}{r_1 + r_2 + r_3} = \frac{10 \cdot 4}{10 + 2 + 4} = 2,5\Omega$$

$$R_3 = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2 + r_3} = \frac{10 \cdot 2}{10 + 2 + 4} = 1,25\Omega$$

El valor de la resistencia equivalente de toda la red será:

$$R_{eq} = R_1 + \frac{(R_2 + R_4) \cdot (R_3 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5} = 0,5 + \frac{4,5 \cdot 9,25}{4,5 + 9,25} = 3,52 \Omega$$

$$I_T = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{10}{3,52} = 2,84 A$$

$$U_{cd} = \frac{(R_2 + R_4) \cdot (R_3 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5} \cdot I_T = 3,02 \cdot 2,84 = 8,57V$$

$$I_1 = \frac{U_{cd}}{R_2 + R_4} = \frac{8,57}{4,5} = 1,90 A$$

$$I_2 = \frac{U_{cd}}{R_3 + R_5} = \frac{8,57}{9,25} = 0,92 A$$

A partir del conocimiento de las respectivas intensidades de rama  $I_1$  e  $I_2$ , podemos calcular las caídas entre los terminales  $ad$  y  $bd$ .

$$U_{ad} = I_1 \cdot R_4 = 3,8V$$

$$U_{bd} = I_2 \cdot R_5 = 7,36V$$

con esto:

$$U_d = 0V, U_a = 3,8V, U_b = 7,36V \text{ y } U_{ab} = -3,56V$$

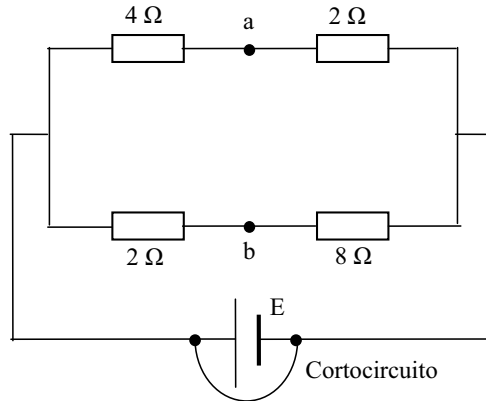
$$I_{r_1} = \frac{|U_{ab}|}{r_1} = \frac{3,56}{10} = 0,35 A$$

El punto  $b$  se encuentra a un potencial más alto que el punto  $a$ ; la corriente por la resistencia  $r_1$  circula desde el punto  $b$  hasta el punto  $a$ .

b) Aplicación del teorema de Thevenin, entre los terminales  $a$ - $b$ .

Cálculo de la  $R_i$ :

$$R_i = \frac{4 \cdot 2}{4 + 2} + \frac{2 \cdot 8}{2 + 8} = 2,93 \Omega$$



Cálculo de la diferencial de potencial entre los puntos  $a$  y  $b$  sin la resistencia de  $10 \Omega$  ( $U_{abo}$ ):

$$I_1 = \frac{E}{4 + 2} = \frac{10}{6} = 1,67 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{E}{2 + 8} = \frac{10}{10} = 1 \text{ A}$$

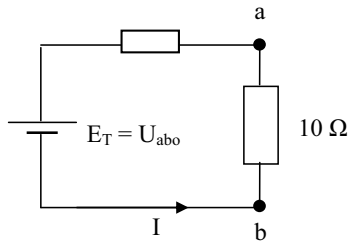
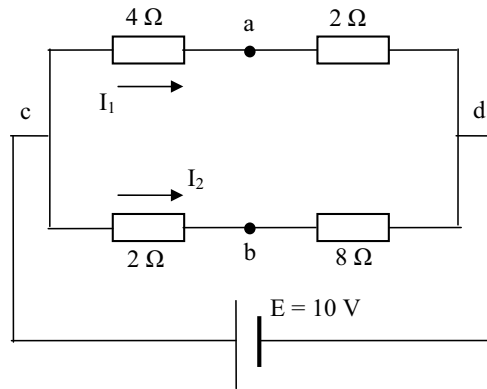
$$U_{ad} = 2 \cdot 1,67 = 3,34 \text{ V}$$

$$U_{bd} = 8 \cdot 1 = 8 \text{ V}$$

con esto:

$$U_d = 0 \text{ V}, U_{abo} = -4,66 \text{ V}$$

$$I = \frac{|U_{abo}|}{R_i + 10} = \frac{4,66}{12,93} = 0,36 \text{ A}$$



La corriente circula de  $b$  a  $a$ , luego  $b$  se encuentra a mayor potencial que  $a$ :

$$U_{ba} = I \cdot 10 = 0,36 \cdot 10 = 3,60 \text{ V}$$

$$U_{ab} = -3,60 \text{ V}$$

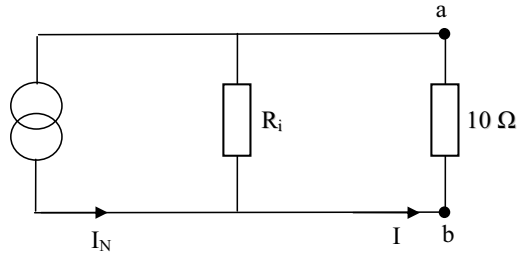
c) Aplicación del teorema de Norton.

Partiendo del generador de Thevenin:

$$I_N = \frac{|E_T|}{R_i} = \frac{4,66}{2,93} = 1,59 \text{ A}$$

$$U_{ba} = I_N \cdot \frac{R_i \cdot 10}{R_i + 10} = 1,59 \cdot \frac{29,33}{12,93} = 3,60 \text{ V}$$

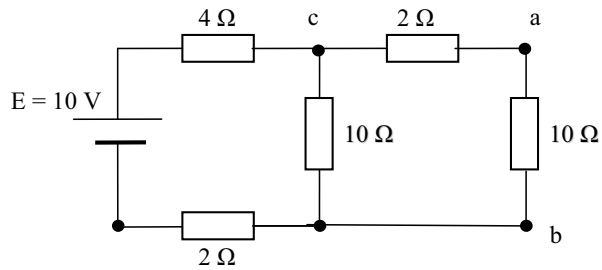
$$U_{ab} = -3,60 \text{ V}$$



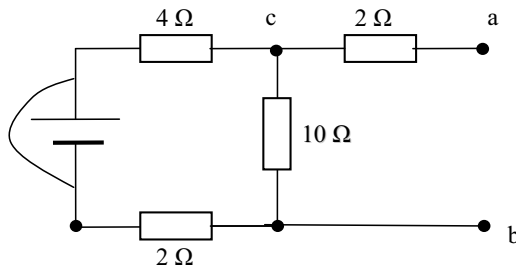
### Ejercicio de aplicación 3.7

La corriente por la resistencia de  $10\ \Omega$  del circuito de la siguiente figura, por aplicación de Thevenin

Solución:

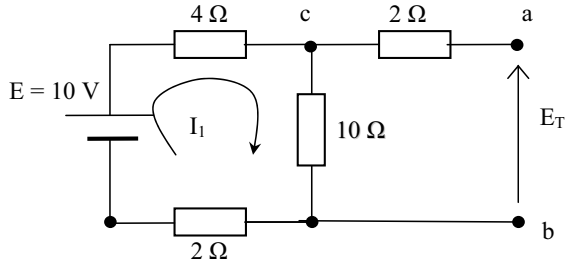


1º. Cálculo de la  $R_i$  entre los terminales a y b.



$$R_i = \frac{10 \cdot (4 + 2)}{10 + (4 + 2)} + 2 = 3,75 + 2 = 5,75\ \Omega$$

2°. Cálculo de la diferencial de potencial entre los puntos *a* y *b* sin la resistencia de  $10\ \Omega$  ( $U_{abo}$ ), partiendo del circuito siguiente:



La  $E_T$ , coincide con la tensión entre c-b. Podemos calcular la intensidad que circula por el circuito  $I_1$ , y posteriormente, a partir de esta intensidad y multiplicándola por la resistencia de  $10\ \Omega$  tendré la solución:

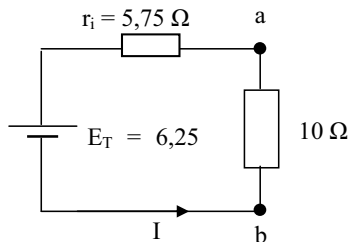
$$I_1 = \frac{10}{4 + 10 + 2} = 0,62\ A$$

$$E_T = I_1 \cdot 10 = 6,25\ V$$

También podría haberse hecho uso directamente de la expresión del divisor de tensiones de para calcular nuestra tensión Thévenin.

$$E_T = E \cdot \frac{10}{4 + 10 + 2} = 10 \cdot \frac{10}{4 + 10 + 2} = 6,25\ V$$

Vamos a calcular la intensidad que pasa por la resistencia de  $10\ \Omega$  que se encuentra entre los terminales a-b, para ello partimos del siguiente circuito.



$$I_{10\Omega} = \frac{E}{r_i + R} = \frac{6,25}{5,75 + 10} = \frac{6,25}{15,75} = 0,39 \text{ A}$$

*Aplicación*

En el ámbito de la electrónica se utiliza para el cálculo rápido de redes de circuitos con componentes electrónicos. Y en el caso de Norton, se utiliza para cálculos eficientes de nodos de un circuito, así como la prueba efectiva de componente por componente de redes y circuitos interconectados.



---

**TEMA 4**

**MAGNETISMO Y**

**ELECTROMAGNETISMO**

---

## **TEMA 4 MAGNETISMO Y ELECTROMAGNETISMO**

### *4.1 Introducción*

En los circuitos eléctricos, la conexión existente entre los elementos pasivos, se realiza por medio de materiales conductores que obligan a que la corriente eléctrica siga determinados recorridos, obedeciendo a las leyes de Kirchhoff

Cuando se trata de estudiar máquinas eléctricas, electroimanes y otros dispositivos electromagnéticos, se plantea un problema similar: canalizar y concentrar – incluso reforzar- las densidades de flujo magnético, en las regiones donde se necesita, lo cual se logrará usando materiales ferromagnéticos –que estudiaremos más en detalle posteriormente-.

Un circuito magnético, está formado generalmente por una estructura de hierro, sobre la que se arrolla una o más bobinas por las que circulan corrientes que dan lugar a los flujos que aparecen en el sistema.

Con respecto al cálculo riguroso de los flujos magnéticos producidos en los circuitos magnéticos es complicado. Habría que emplear las ecuaciones de Maxwell o técnicas numéricas (métodos de elementos finitos – M.E.F.) y ayudarnos incluso de un ordenador.

Pero sin embargo, como veremos en el apartado séptimo, vamos a definir las leyes de los circuitos magnéticos que permiten resolver el problema de una forma aproximada, la cual en la mayor parte de las ocasiones es suficiente para las aplicaciones que se dan en Electrotecnia.

Posteriormente, en el octavo punto, se estudiará el comportamiento de un circuito magnético, particularizando ese comportamiento en los materiales ferromagnéticos.

Y por último, se estudiarán las pérdidas de energía en el núcleo ferromagnético, calculándose las expresiones de las pérdidas en el hierro por histéresis y por corriente de Foucault, dando algunas ideas constructivas sobre las chapas magnéticas.

En primer lugar haremos un amplio repaso de las principales magnitudes y principios de magnetismo y electromagnetismo.

## **4.2 Magnetismo**

La palabra magnetismo deriva del nombre “Magnesia”, una región de Asia Menor con ricos yacimientos de magnetita ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ). Fue descubierto hace más de 2000 años por los griegos, al observar que los trozos de este mineral, las piedras *imán*, atraían al hierro.

La magnetita es un imán natural y su propiedad de atraer los objetos de hierro se denomina magnetismo. Aunque podemos encontrar en la naturaleza, otros materiales como el cobalto y el níquel, que tienen un comportamiento similar al hierro. A estos materiales se les denomina ferromagnéticos.

Cuando estos trozos de mineral eran suspendidos de un hilo se orientaban según la línea norte-sur, dando lugar a la brújula magnética. Se conoce que en China, durante el siglo X, era empleada como ayuda a la navegación, aunque existen indicios de que los mismos chinos y los vikingos empezaron a usarla en el siglo VI.

En el siglo XVII William Gilbert (1540-1603), llevó a cabo estudios sobre las características de los imanes y observó que la máxima atracción ejercida por los imanes sobre trozos de hierro se producía en los llamados "polos de imán" y que si se partían se volvían a obtener dos polos. Tras realizar estudios con esferas de magnetita, llegó a la conclusión de que la tierra se comportaba como un imán gigantesco con sus polos situados cerca de los polos norte y sur geográficos. Al polo de la aguja magnética que queda orientado hacia el norte geográfico se denomina polo norte magnético del imán, y al otro, polo sur magnético.

Posteriormente, se descubrió que no sólo los imanes tienen efectos magnéticos.

En el siglo XIX Oersted (1820), demostró la existencia de un campo magnético alrededor de todo conductor por el que circulaba una corriente eléctrica, al observar la desviación de una aguja imantada al ser colocada en dirección perpendicular a un conductor eléctrico, por el que circula una corriente eléctrica. Posteriormente se desarrolló la teoría magnética, con las leyes de Faraday, Ampère y Lenz.

En el 1865, Maxwell, estableció la teoría del electromagnetismo, relacionando la electricidad y el magnetismo.

#### **4.2.1 Características elementales de los imanes**

Las características elementales de los imanes son:

- Cada imán posee dos polos magnéticos próximos a los extremos (Norte y Sur) independientemente de la forma que tenga, y una zona neutra que los une.
- No es posible obtener polos aislados (monopolos). Es decir, si se rompe un imán, los trozos siguen teniendo dos polos.
- Atraen a los materiales ferromagnéticos (hierro, cobalto y níquel).
- Los imanes ejercer fuerzas de atracción entre sí cuando los polos son opuestos, y de repulsión cuando son iguales.

Los imanes pueden ser naturales (magnetita) o artificiales, los cuales son creados por el hombre. Los artificiales se clasifican en: a) imanes temporales que mantienen sus propiedades magnéticas sólo cuando está sometido a la acción de un campo magnético (hierro dulce) y b) imanes permanentes que mantienen sus propiedades durante largo tiempo (acero y aleaciones).

#### **4.2.2 Relación entre los fenómenos eléctricos y magnéticos**

Oersted observa que un imán que puede girar alrededor de un eje (una aguja magnética) se desvía al encontrarse en la proximidad de un hilo conductor que transporta una corriente.

Por otro lado Faraday observa que en un circuito se produce una corriente instantánea cuando en otro circuito próximo se establece o se interrumpe una corriente. Más tarde se vio que el movimiento de un imán acercándose o alejándose del circuito produce corrientes instantáneas.

Como consecuencia de ambas observaciones, definieron respectivamente que “el movimiento de cargas eléctricas puede producir efectos magnéticos” (Oersted) y “que pueden obtenerse corrientes eléctricas por el movimiento de imanes” (Faraday)

### 4.3 Campos magnéticos

Como hemos comentados anteriormente, una carga móvil crea en el espacio que le rodea un campo magnético (Oersted). Para la determinación del campo magnético, consideramos la consideración opuesta, es decir, que un campo magnético ejerce una fuerza sobre una carga que se mueve a través de él.

Por tanto, decimos que en un punto del espacio existe un campo magnético si, además de la fuerza electrostática, se ejerce una fuerza sobre una carga móvil que pasa por dicho punto.

#### 4.3.1 Definición

El campo magnético, inducción magnética o densidad de flujo, es una magnitud vectorial, que se designa por la letra  $\vec{B}$ . Al ser una magnitud vectorial, para que quede definida, además de su módulo, hay que indicar su dirección y sentido.

La determinación de  $\vec{B}$  experimentalmente se realiza a partir de un tubo de rayos catódicos que consta de: cañón electrónico, que lanza electrones con una velocidad controlable, y, una pantalla fluorescente, que señala la incidencia del haz de electrones. De dicho experimento se observa que:

- La existencia de un campo magnético  $\vec{B}$  motiva que el haz de electrones se desvíe.
- Se define como dirección de  $\vec{B}$ , la dirección en que ha de moverse una carga para que el campo magnético no ejerza fuerza sobre ella. Supongamos que esto ocurre cuando, en la figura 4.1, la  $\vec{v}$  tiene la dirección del eje Oy, coincidente con la dirección de  $\vec{B}$ .

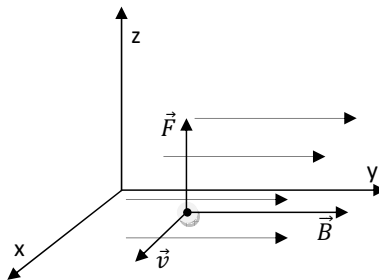
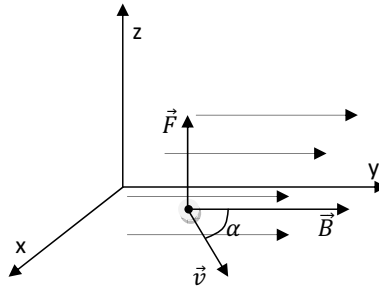


Figura 4.1. Relación entre la fuerza, velocidad y campo magnético.

- Cuando la velocidad de la carga móvil es perpendicular al campo magnético, la fuerza que actúa sobre la carga es perpendicular a  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$ , tal como en la figura 4.1.
- Consideremos que emitimos iones positivos a una velocidad  $\vec{v}$  no perpendicular a  $\vec{B}$  -figura 4.2-. Se observa que la fuerza  $\vec{F}$  que actúa sobre la carga positiva,  $+q$  móvil, es perpendicular a  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$ , siendo su módulo proporcional a valor de la carga y a  $v \cdot \text{sen}\alpha$ .



**Figura 4.2.** Relación entre la fuerza, velocidad y campo magnético, con velocidad y campo no perpendiculares.

Se define el módulo de  $\vec{B}$ , como la constante de proporcionalidad entre  $F$  y  $v \cdot \text{sen}\alpha$ , es decir:

$$B = \frac{F}{q \cdot v \cdot \text{sen}\alpha} \rightarrow F = q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\alpha \quad (4.1)$$

La fuerza ejercida sobre una carga positiva es opuesta a la ejercida sobre una negativa para valores fijos de  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$ .

Dado que el sentido de  $\vec{B}$ , no es medible, definiremos el sentido del  $\vec{B}$ , como aquél sentido que cumpla la relación:

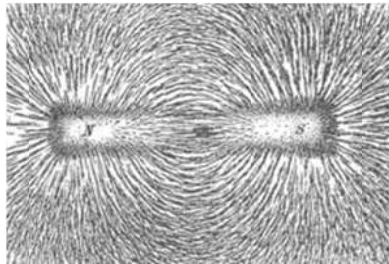
$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (4.2)$$

Su dirección es tangente en cada punto de dichas líneas y, su módulo, es igual al número de líneas del campo por unidad de superficie normal a su dirección.

### 4.3.2 Líneas de campo magnético

Del mismo modo que el campo eléctrico  $E$  puede representarse mediante líneas de campo eléctrico, también el campo magnético  $B$  puede ser representado mediante *líneas de campo magnético*. En ambos casos, la dirección del campo viene indicada por la dirección de las líneas de campo, y la magnitud del campo por su densidad. Existen, sin embargo, dos importantes diferencias entre líneas del campo eléctrico y líneas de campo magnético:

- Las líneas de campo eléctrico poseen la dirección de la fuerza eléctrica sobre la carga positiva, mientras que las líneas de campo magnético son perpendiculares a la fuerza magnética sobre una carga móvil.
- Las líneas de campo eléctrico comienzan en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas, las líneas de campo magnético forman circuitos cerrados. Como los polos magnéticos aislados aparentemente no existen, no hay puntos en el espacio donde las líneas de campo magnético comiencen o terminen. En la figura 4.3 se muestra las líneas de campo, tanto dentro como fuera de una barra imanada, en nuestro caso se visualiza dichas líneas gracias al uso de limaduras de hierro.



**Figura 4.3.** Línea de campo magnético en una barra imanada.

### 4.3.3 Unidades

Su unidad en el sistema internacional es el Tesla (T), en honor a Nikola Tesla.

$$1T = 1 \frac{N \cdot s}{C \cdot m} = 1 \frac{N}{A \cdot m} \quad (4.3)$$

En el sistema cegesimal o c.g.s., la unidad de inducción magnética es el gauss (G),  $1 G \equiv 10^{-4} T$ .

El campo más intenso que probablemente encontremos en nuestra vida cotidiana será aproximadamente de 1 T. El valor del campo magnético terrestre, es de unas décimas de gauss, y el valor del campo magnético en los dientes de una máquina eléctrica es de 1,5 a 2 T.

#### 4.4 Flujo magnético

Por tanto, las líneas de campo magnético son curvas que en cada punto son tangentes al campo magnético que tengamos en cada punto. Igualmente podemos indicar que en los campos magnéticos no se pueden definir un punto origen o destino, siendo las líneas de campo curvas cerradas.

Partiendo de este concepto el flujo magnético está representado por líneas de fuerza magnética. El número total de líneas de fuerza creadas por un campo magnético se llama *flujo magnético* ( $\phi$ ).

La unidad de flujo magnético es una sola línea de fuerza, designada es el *maxwell*. En el sistema internacional se usa una unidad mayor, el *weber*, la equivalencia entre ambas es,  $1 \text{ Wb} = 10^8 \text{ maxwell (Mx)}$ , es decir,

$$1\text{Wb} = 1\text{T}\cdot\text{m}^2 = 1 \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{A}} = 1\text{V}\cdot\text{s} = 1 \frac{\text{m}^2\cdot\text{kg}}{\text{s}^2\cdot\text{A}} \quad (4.4)$$

también se define el weber diciendo que éste es equivalente al flujo magnético que al atravesar un circuito de una sola espira produce en la misma una fuerza electromotriz de 1 voltio si se anula dicho flujo en 1 segundo por decrecimiento uniforme.

El número de líneas de fuerza que pasan perpendicularmente por un área de  $1 \text{ cm}^2$  se denomina densidad de flujo (B) y se mide en gauss ( $1 \text{ gauss} = 1 \text{ maxwells/cm}^2$ ). La unidad de densidad de flujo en el S.I. es el weber/ $\text{m}^2$ , el cual es equivalente a  $10^4 \text{ gauss}$ .

La expresión elemental del flujo viene determinada por la siguiente expresión:

$$d\phi = \vec{B} \cdot \vec{ds} \quad (4.5)$$

La expresión a través de una superficie S:

$$\phi = \int \vec{B} \cdot \vec{ds} \quad (4.6)$$



Esta integral, denominada de superficie, tiene una resolución compleja. En este capítulo y normalmente en aquellos referentes a máquinas se limitan al caso más simple: la superficie de referencia será plana, y el campo magnético será uniforme en toda la superficie. En este caso la expresión del flujo será:

$$\phi = \int \vec{B} \cdot \vec{ds} = \vec{B} \cdot \vec{S} \cdot \cos\alpha \quad (4.7)$$

La ley de Gauss del magnetismo nos dice que como en el campo magnético las líneas de campo son cerradas, el flujo del campo magnético a través de una superficie cerrada es nulo, por lo tanto:

$$\phi = \oint_S \vec{B} \cdot \vec{ds} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.8)$$

$$\left( \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.9)$$

En definitiva el flujo entrante a través de cualquier superficie cerrada es igual al flujo saliente.

### Ejercicio de aplicación 4.1

Calcula la densidad de flujo en la bobina de un altavoz, cuya área es  $6,45 \text{ cm}^2$ , si el flujo total en la región es de  $15.000 \text{ maxwells (líneas)}$

*Solución:*

Con unidades del c.g.s.

$$B = \frac{\phi}{S} = \frac{15000}{6,45} = 2330 \text{ gauss}$$

En unidades del S.I.

$$B = \frac{\phi}{S} = \frac{2300}{10000} = 0,23 \text{ weber/m}^2$$

### 4.5 Fuerza sobre una carga en movimiento. Ley de Lorentz

Del mismo modo que  $\vec{B}$  es originado por cargas en movimiento, también el campo magnético produce efectos *sólo* sobre aquellas cargas que estén movimiento. Podemos

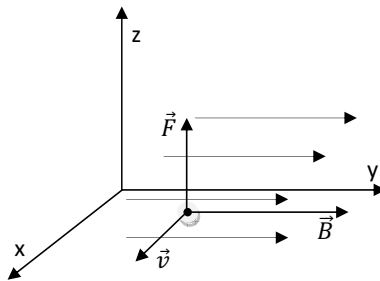
decir, por tanto, que la interacción magnética se produce únicamente entre cargas en movimiento.

Supongamos una partícula de carga  $q$  que se mueve con velocidad  $\vec{v}$  en una zona en la que existe un campo magnético  $\vec{B}$ . La fuerza magnética que sufre dicha partícula viene dada por la *ley de Lorentz*, que nos dice que “la fuerza magnética sobre una carga puntual en movimiento es igual a su carga multiplicada por el producto vectorial de su velocidad por el campo magnético”. En alguna bibliografía aparece referenciada la fuerza magnética como  $\vec{F}_{mag}$ , nosotros utilizaremos  $\vec{F}$ .

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (4.10)$$

el valor en módulo de la fuerza (F), puede obtenerse a partir de la siguiente ecuación.

$$F = |q| \cdot v \cdot B \cdot \text{sena} \quad (4.11)$$



**Figura 4.4.** Fuerza que sufre una carga en movimiento dentro de un campo magnético.

A partir de la ecuación (4.11) podemos definir la magnitud del campo magnético de la siguiente forma,  $N=C \cdot m \cdot s^{-1} \cdot [B]$ , y despejando el campo magnético tendremos que:

$$[B] = \frac{N \cdot s}{C \cdot m} = \frac{kg}{C \cdot s} = T \text{ (Tesla)} \quad (4.10)$$

como ya definimos antes.

En general sobre una partícula cargada actuarán campos eléctricos ( $\vec{E}$ ) y magnéticos ( $\vec{B}$ ). La acción conjunta de ambos originará una fuerza que vendrá dada por la ley general de Lorentz, según la expresión:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q \cdot \vec{E} + q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (4.11)$$

Hablamos entonces de fuerza electromagnética. La separación entre los términos eléctrico y magnético es algo relativo, ya que esta interacción depende del sistema de referencia usado para medir. Normalmente usaremos sistemas de referencia en reposo.

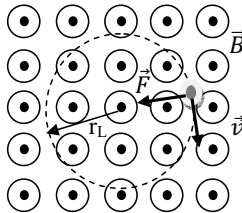
#### 4.5.1 Movimiento de cargas en campos magnéticos constante

Supongamos una partícula cargada  $q$  que entra en una zona en la que hay un campo magnético constante  $B$  –figura 4.5-. La fuerza que sufrirá será perpendicular tanto al campo magnético ( $\vec{B}$ ) como a la velocidad ( $\vec{v}$ ), y su sentido dependerá tanto del productor como del signo de la carga ( $q$ ), según la expresión:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (4.12)$$

$$F = |q| \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\alpha = |q| \cdot v \cdot B \quad (4.13)$$

Como la fuerza es perpendicular a  $\vec{v}$ , la aceleración que sufre a la partícula también lo será. Es decir, la aceleración será una aceleración normal. El movimiento resultante será un movimiento circular uniforme.



**Figura 4.5.** El caso de la figura se caracteriza por ser una carga positiva, esta se desplace en la dirección del campo magnético.

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (4.14)$$

La distancia ( $R$ ), en la que se genera la situación de equilibrio entre las fuerzas existentes, se obtendrá de sustituir la ecuación (4.12) en la (4.14). Teniendo en cuenta que la aceleración normal es  $a_n = \frac{v^2}{R}$ , siendo  $R$  es el radio de la órbita,  $m$ , la masa de la carga:

$$|q| \cdot v \cdot B = m \cdot a_n = m \cdot \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{m \cdot v}{|q| \cdot B} \quad (4.15)$$

Otras magnitudes que son susceptibles de calcularse son la velocidad angular ( $\omega$ ) y el periodo ( $T$ ), que se calcularía siguiendo las expresiones que a continuación consideramos:

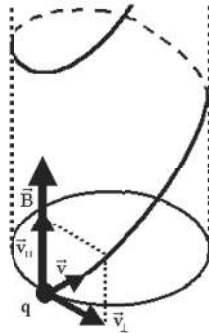
$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{|q| \cdot B}{m} = \text{constante} \quad (4.16)$$

$$T = \frac{2\pi \cdot m}{|q| \cdot B} = \text{constante} \quad (4.17)$$

Este principio se utiliza en el Ciclotrón o acelerador de partículas.

#### 4.5.2 Movimiento helicoidal

Consideramos el movimiento de una partícula cargada en un campo magnético uniforme  $\vec{B}$ , pero ahora la  $\vec{v}$  no es perpendicular a  $\vec{B}$ . Se descompondrá la  $\vec{v}$  en dos velocidades: una paralela a  $\vec{B}$  y otra perpendicular  $\vec{B}$  -figura 4.6-.



**Figura 4.6.** Movimiento helicoidal de una carga en un campo magnético.

Por tanto  $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$ , y como  $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$ , por superposición, resulta que

$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp} \quad (4.18)$$

$$\vec{F}_{\parallel} = q \cdot \vec{v}_{\parallel} \wedge \vec{B} = 0 \quad (4.19)$$

$$\vec{F}_{\perp} = q \cdot \vec{v}_{\perp} \wedge \vec{B} = q \cdot v_{\perp} \cdot B \quad (4.20)$$

La componente paralela de la velocidad ( $\vec{v}_{\parallel}$ ) es constante, lo que nos proporciona un movimiento rectilíneo y uniforme y, debido a la componente perpendicular ( $\vec{v}_{\perp}$ ), resulta un movimiento circular. La superposición de estos dos

movimientos es una hélice de paso constante, según la figura 4.6, la hélice correspondería a una carga negativa ( $-q$ ).

Si el  $B$  no fuese constante, resultaría que el  $R$  variaría y, por lo tanto, la anterior hélice no sería circular, sino que el radio de la hélice decrecería (si  $B$  aumenta) o aumentaría (si  $B$  disminuye).

#### 4.5.3 Fuerza sobre un elemento de corriente, segunda ley de Laplace

Cuando un conductor que transporta corriente se encuentra en un campo magnético, se están ejerciendo fuerzas sobre las cargas móviles situadas dentro del conductor. Estas fuerzas se transmiten a la materia que constituye el conductor y éste experimenta una fuerza distribuida a lo largo de él.

##### 4.5.3.1 Fuerza sobre un elemento de corriente

La fuerza ( $\vec{F}_q$ ) que actúa sobre un portador de carga sería

$$\vec{F}_q = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (4.21)$$

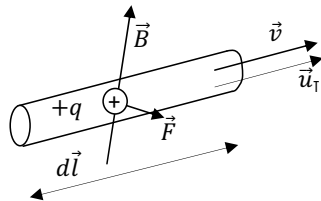


Figura 4.7. Fuerza sobre un elemento de corriente positivo.

La fuerza por unidad de volumen ( $\vec{f}$ ), donde  $n$  es el número de portadores de carga por unidad de volumen, y  $\vec{j}$ , es la densidad de corriente.

$$\vec{f} = n \cdot \vec{F}_q = n \cdot q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (4.22)$$

La fuerza que actúa sobre el elemento de corriente.

$$\vec{dF} = \vec{f} \cdot vol = \vec{j} \wedge \vec{B} \cdot S \cdot dl = S \cdot \vec{j} \wedge \vec{B} \cdot dl \quad (4.23)$$

sabiendo que  $I = S \cdot j$ , y haciendo  $\vec{j} = j \cdot \vec{u}_\tau$ , donde  $\vec{u}_\tau$  es el vector tangente al hilo conductor (caso de considerar un conductor filiforme).

### 4.5.3.2 Fuerza sobre un conductor filiforme

Supongamos un hilo conductor rectilíneo por el que circula una intensidad de corriente  $I$ , colocado en el interior de un campo magnético uniforme  $\vec{B}$ . La fuerza que sufrirá el cable dependerá de la intensidad del campo, del movimiento de las cargas (de la corriente) por el conductor, y del tamaño del cable –figura 4.8-. Por tanto:

$$\vec{F} = I \cdot \vec{L} \wedge \vec{B} \quad (4.24)$$

el valor en módulo de la fuerza ( $F$ ), puede obtenerse a partir de la siguiente ecuación:

$$F = I \cdot L \cdot B \cdot \text{sen} \alpha \quad (4.25)$$

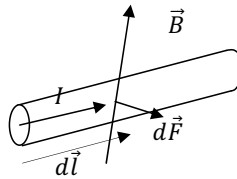


Figura 4.8. Fuerza sobre hilos conductores de corriente.

El vector  $\vec{L}$  se caracteriza por: un módulo, que se corresponde por la longitud de nuestro conductor; una dirección, la definida por el conductor y un sentido, que lo da el paso de la corriente.

### 4.5.4 Fuerza y momento sobre una espira

Para valorar los efectos de un campo magnético sobre un circuito cerrado, se tomará como referencia o elemento a estudio un *circuito rectangular* ( $a \cdot h$ ), por el que está circulando una  $I$ , y este se encuentra dentro de un campo magnético uniforme  $\vec{B}$ , siendo dos lados perpendiculares al campo, como se indica en la figura 4.9. Utilizando la expresión de la *ley de Laplace* –ecuación 4.24-.

$$\vec{F}_1 = I \cdot \vec{L}_1 \wedge \vec{B} \rightarrow F_1 = I \cdot h \cdot B \cdot \text{sen } 90^\circ = I \cdot h \cdot B \quad (4.26)$$

$$\vec{F}_2 = I \cdot \vec{L}_2 \wedge \vec{B} \rightarrow F_2 = I \cdot a \cdot B \cdot \text{sen } 0^\circ = 0 \quad (4.27)$$

$$\vec{F}_3 = I \cdot \vec{L}_3 \wedge \vec{B} \rightarrow F_3 = I \cdot h \cdot B \cdot \text{sen } 180^\circ = I \cdot h \cdot B \quad (4.28)$$

$$\vec{F}_4 = I \cdot \vec{L}_4 \wedge \vec{B} \rightarrow F_4 = I \cdot a \cdot B \cdot \text{sen } 0^\circ = 0 \quad (4.29)$$

Observado la figura 4.9, podemos observar que  $\sum \vec{F} = 0$ , ya que las dos fuerzas son de igual módulo y sentido opuesto, con lo que el circuito no se desplazará y tienden a deformar el circuito. Ahora bien si aplicáramos momentos de fuerza respecto al centro de la espira, el valor sería distinto de 0, como vemos a continuación:

$$\vec{M}_{01} = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 \rightarrow M_{01} = r_1 \cdot F_1 \cdot \text{sen } 90^\circ \quad (4.30)$$

$$\vec{M}_{03} = \vec{r}_3 \wedge \vec{F}_{13} \rightarrow M_{03} = r_3 \cdot F_3 \cdot \text{sen } 90^\circ \quad (4.31)$$

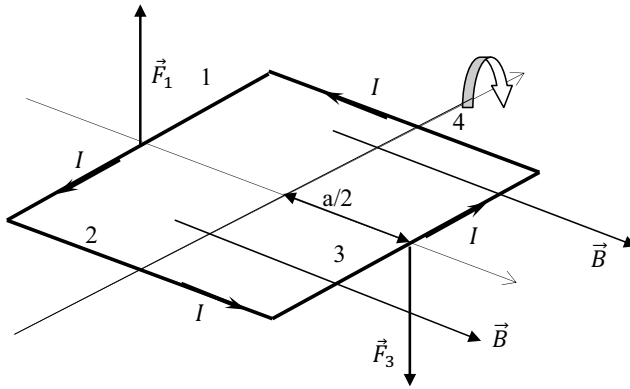


Figura 4.9. Fuerzas y momentos de torsión sobre una espira con corriente.

Si sustituimos las ecuaciones (4.26) y (4.28), en (4.30) y (4.31) respectivamente, teniendo en cuenta que  $r$ , es la distancia desde el centro a la fuerza –cuyo valor es la mitad de la anchura ( $a/2$ )–:

$$M_{01} = \frac{a}{2} \cdot I \cdot h \cdot B = \frac{I \cdot a \cdot h \cdot B}{2} \quad (4.32)$$

$$M_{03} = \frac{a}{2} \cdot I \cdot h \cdot B = \frac{I \cdot a \cdot h \cdot B}{2} \quad (4.33)$$

los valores de los momentos de forma vectorial, serían en nuestro caso:

$$\vec{M}_{01} = \frac{I \cdot a \cdot h \cdot B}{2} \vec{j} \text{ (N} \cdot \text{m)} \quad (4.34)$$

$$\vec{M}_{03} = \frac{I \cdot a \cdot h \cdot B}{2} \vec{j} \text{ (N} \cdot \text{m)} \quad (4.35)$$

El momento total, se obtendrá como resultado de la suma de los momentos:

$$\sum \vec{M}_0 = \vec{M}_{01} + \vec{M}_{03} = 2 \cdot \frac{I \cdot a \cdot h \cdot B}{2} \vec{j} = I \cdot a \cdot h \cdot B \vec{j} = I \cdot S \cdot B \vec{j} \text{ (N} \cdot \text{m)} \quad (4.36)$$

Teniendo en cuenta que un momento de fuerzas origina un giro, la espira girará hasta colocarse perpendicular al campo existente. Por tanto, podemos deducir que la expresión general del momento que el campo ejerce sobre una espira, donde  $\vec{S}$  es el vector que define la superficie delimitada por la espira (superficie), es la que se muestra a continuación:

$$\sum \vec{M}_0 = I \cdot \vec{S} \wedge \vec{B} \quad (4.37)$$

Es muy interesante indicar que este momento de giro, proporcional a la intensidad de corriente que recorre el circuito puede aprovecharse en varias aplicaciones, como:

- *Galvanómetro*, este es un aparato que mide la intensidad de corriente de un circuito. Consiste en una pequeña bobina (conjuntos de espiras) que puede girar alrededor de un eje. La bobina está inmersa en el campo magnético creado por un pequeño imán. Al pasar corriente por la bobina, la fuerza magnética hará que ésta gire. Un resorte helicoidal se opone a este giro y se llega a una situación de equilibrio. El ángulo que haya girado la bobina dependerá de la intensidad de corriente. Una aguja unida a la bobina marca sobre una escala el valor de dicha intensidad. Estos equipos semejantes en su funcionamiento, suele ser todos los aparatos de medida analógicos, voltímetros, amperímetros (galvanómetro, es un amperímetro de precisión), vatímetros, contadores de energía,...
- *Motor eléctrico*, como acabamos de indicar en este apartado, vemos que podemos producir un movimiento de giro en la espira simplemente haciendo pasar corriente a través de ella. Eso sí, conseguimos dar sólo un solo un cuarto de vuelta, hasta que se coloca perpendicular al campo.

La forma de conseguir un giro completo está en colocar otra espira perpendicular a la primera, y hacer que la corriente pase por una u otra en el momento adecuado. Lograremos así un movimiento rotatorio completo. Esta es la base de un motor eléctrico de corriente continua. El motor está compuesta por una parte fija, denominada estator, formada normalmente por un imán que crea el campo magnético, y otra parte móvil, denominada rotor, que lo conforma el conjunto de espiras.

En el caso de motores de corriente alterna, se puede conseguir el giro con una sola espira.



En el caso de que estemos en un solenoide el momento total sobre un solenoide es igual a la suma de los momentos de las espiras:

$$\vec{M} = N \cdot I \cdot S \cdot B \cdot \text{sen} \alpha \quad (4.38)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo formado por el eje del solenoide y la dirección del campo  $\vec{B}$ , nótese que el  $\vec{M}$  es máximo cuando  $\vec{B}$  es perpendicular al eje del solenoide.

#### 4.6 Campos magnéticos creados por cargas

Hasta ahora hemos determinado las fuerzas que actúan sobre las cargas en movimiento conocido el campo magnético. Ahora vamos a estudiar el problema inverso: determinar el campo magnético creado por una o varias cargas móviles.

Las expresiones de la ley de Biot-Savart (Baptiste Biot y Felix Savart), se utilizan para calcular el campo magnético producido por cualquier corriente eléctrica, y demostraron que la intensidad de campo magnético disminuye en proporción inversa a la distancia del conductor.

a)  $\vec{B}$  creado por una carga en movimiento

$$B = k_m \cdot \frac{q \cdot \vec{v} \wedge \vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{q \cdot \vec{v} \wedge \vec{u}_r}{r^2} \quad (4.39)$$

donde  $k_m$  es una constante magnética que vale, exactamente

$$k_m = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A} = 10^{-7} \frac{Wb}{A \cdot m} \quad (4.40)$$

en la ecuación (4.36) la  $\mu$ , es la permitividad magnética del material. En el vacío se utilizará  $\mu_0$ , que es de  $4\pi \cdot 10^{-7} T \cdot m \cdot A^{-1}$  y el valor de la constante magnética en el vacío ( $K_{m0}$ ), será  $10^{-7} T \cdot m \cdot A^{-1}$ , como hacemos referencia en (4.40).

Respecto al sentido del campo ( $\vec{B}$ ), indicar que es dependiente de la carga, de forma que el sentido del campo con una carga positiva es inverso al que tendría con una carga negativa.

El campo es nulo en todos los puntos de la dirección de la velocidad ( $\vec{v}$ ), y por último:

Las líneas de campo son circunferencias situadas en planos perpendiculares  $\vec{v}$  con centro en la dirección de  $\vec{v}$ .

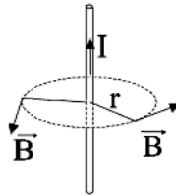
b)  $\vec{B}$  creado por una corriente  $I$ , en un medio distinto del vacío

$$B = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \int \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}_r}{r^2} \quad (4.41)$$

c) Campo magnético  $\vec{B}$  producido por una corriente rectilínea a una distancia  $r$

Las líneas de campo magnético producidas por un conductor recto y largo forman círculos concéntricos sobre el conductor. La intensidad de campo magnético a una distancia  $r$  de un hilo conductor rectilíneo por el que circula una corriente  $I$ , viene dada por la siguiente expresión:

$$B = \frac{\mu \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r} \quad (4.42)$$



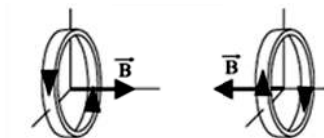
**Figura 4.10.** Campo generado por una corriente rectilínea.

Nótese que las líneas de campo son circunferencias situadas en un plano perpendicular al hilo conductor y con centro en él. El sentido de  $\vec{B}$  es el de avance de un sacacorchos que va con la corriente  $I$ .

d) Campo magnético  $\vec{B}$  producido en una espira

Una espira es un conductor arrollado en forma circular. Si tenemos una espira de radio  $R$  por la que circula una corriente  $I$ , el campo en el centro de la espira viene dado por:

$$B = \frac{\mu \cdot I}{2 \cdot R} \quad (4.43)$$

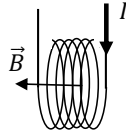


**Figura 4.11.** Campo generado al circular una corriente por una espira.

e) Campo magnético  $\vec{B}$  creado en el interior de un solenoide

Un solenoide es una bobina de  $N$  espiras. La intensidad de campo en cualquier punto interior de un solenoide, cuya longitud sea mucho mayor que el radio de la espira, viene dada por:

$$B = \mu \cdot \frac{N}{L} \cdot I \quad (4.44)$$



**Figura 4.12.** Campo magnético en el interior de un solenoide.

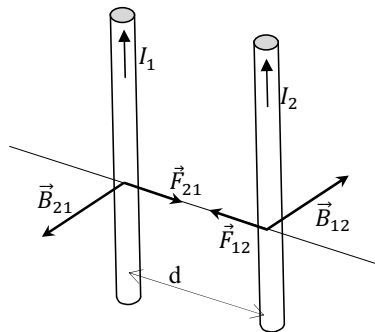
El campo magnético en el exterior de la bobina se considera nulo, ya que el campo generado por cada espira repele al de la espira siguiente. Para calcular el campo  $\vec{B}$  producido por varias corrientes sobre un punto, se aplicará el principio de superposición:

$$\vec{B}_{Tot} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots \quad (4.45)$$

#### 4.7 Fuerza entre corrientes. Definición de amperio

Supongamos dos hilos conductores paralelos, separados una distancia  $d$ , por lo que están circulando respectivamente una  $I_1$  e  $I_2$ . Cada conductor creará un campo magnético a su alrededor, dado por la expresión definida ya anteriormente como:

$$B = \frac{\mu \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r} \quad (4.46)$$



**Figura 4.13.** Fuerzas entre corrientes rectilíneas. Corrientes iguales ejercen fuerzas mutuas de atracción.

Partiendo de esta expresión se cumplirá que la corriente  $I_1$ , creará un campo magnético  $B_{12}$  en el conductor 2, y consecuentemente la corriente  $I_2$ , creará un campo magnético  $B_{21}$  en el conductor 1, que serán de valores respectivos de –véase figura 4.13–:

$$B_{12} = \frac{\mu \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot d} \quad B_{21} = \frac{\mu \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot d} \quad (4.47)$$

La fuerza que ejerce el conductor 1 sobre el 2, y la que ejerce el conductor 2 sobre el 1, serán:

$$\vec{F}_{12} = I_2 \cdot \vec{L}_2 \wedge \vec{B}_{12} \quad (4.48)$$

$$\vec{F}_{21} = I_1 \cdot \vec{L}_1 \wedge \vec{B}_{21} \quad (4.49)$$

Teniendo en cuenta los sentidos de la fuerzas, véase figura 4.13, se debe cumplir que:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21} \quad (4.50)$$

sustituyendo los valores de la ecuaciones (4.48) y (4.49), considerando que las longitudes de ambos conductores son la misma ( $L$ ), el medio en el que se está generando nuestro campo magnético, es el vacío y la distancia entre los conductores rectilíneos  $d$ .

$$F_{12} = I_2 \cdot L_2 \cdot B_{12} = I_2 \cdot L \cdot \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot d} = L \cdot \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi \cdot d} = F_{21} \quad (4.51)$$

Si calculamos la fuerza por unidad de longitud,  $f_{12}$ :

$$f_{12} = \frac{F_{12}}{L} = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi \cdot d} = f_{21} \quad (4.52)$$

Esto permite dar la definición de amperio, “*cantidad de corriente que circula por dos hilos paralelos separados 1 m., cuando entre ellos se ejerce, en el vacío, una fuerza por unidad de longitud de  $2 \cdot 10^{-7}$  N/m*”.

El hecho de que sea más fácil de medir la intensidad de corriente que la carga eléctrica, hace que actualmente se considere la intensidad como magnitud fundamental de la Física, junto con la masa, longitud, tiempo y ángulo. El resto son magnitudes derivadas de las anteriores, que pueden obtenerse de las leyes y expresiones fundamentales.

### 4.8 Ley de Ampère

El enunciado de la ley de Ampère nos dice que “la circulación de un campo magnético a lo largo de una línea de cerrada es igual al producto de  $\mu_0$  por la intensidad neta que atraviesa el área limitada por la trayectoria”.

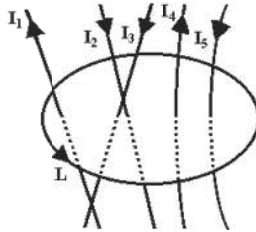


Figura 4.14. Líneas de campo que atraviesan una línea cerrada.

La ley de Ampère es general, y para su aplicación hay que considerar el sentido de la circulación; así, en el caso de la figura 4.14, resultaría:

$$\frac{1}{\mu_0} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = I_1 - I_2 - I_3 + I_4 - I_5 \quad (4.53)$$

### 4.9 Principios básicos de aplicación

Existen cuatro principios básicos que describen como se utilizan los campos magnéticos en los motores, generadores y transformadores.

1°. Un conductor que porta corriente produce un campo magnético a su alrededor.

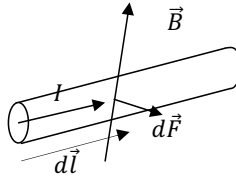
2°. Un campo magnético variable con el tiempo induce un voltaje en una bobina, si este campo atraviesa ésta (base del funcionamiento de un transformador), y viene definido dicho valor por las leyes de Faraday y Lenz.

$$e_1 = -N_1 \frac{d\phi}{dt} \quad (4.54)$$

3°. Un conductor que porta corriente en presencia de un campo magnético experimenta una fuerza inducida sobre él (este es el principio de funcionamiento de un motor eléctrico). Esta fuerza viene definida por la siguiente expresión:

$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \wedge \vec{B} \quad (4.55)$$

La dirección de la fuerza es perpendicular a la dirección del conductor o espira y al campo magnético, en el caso de la figura 4.15, el sentido de la inducción magnética, va hacia dentro.



**Figura 4.15.** Fuerza magnética sobre un conductor rectilíneo.

4°. Un conductor que se mueve en presencia de un campo magnético tendrá un voltaje inducido en él (principio de funcionamiento de un generador).

Otras leyes que son interesantes recordar son:

- a) Ley de Biot y Savart. Dado un hilo conductor por el que circula una intensidad  $I$ , nos permite calcular el campo magnético creado por un elemento diferencial de ese conductor en un punto cualquiera del espacio.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (4.56)$$

Para determinar el sentido del campo magnético en un punto, se utiliza la regla de la mano derecha. Si el medio es distinto del vacío, se puede obtener el valor de permeabilidad a utilizar a partir de la permeabilidad relativa de dicho medio ( $\mu_r$ ) a partir de la siguiente expresión:

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r \quad (4.57)$$

- b) El flujo magnético a través de una superficie viene dado por la siguiente expresión:

$$\phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (4.58)$$

- c) La ley de Ampère, dice que la circulación de un campo magnético a lo largo de una curva cerrada  $C$ , es igual a  $\mu_0$  veces la intensidad de la corriente que corta al área de dicha curva:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \mu_o \cdot \vec{I} \quad (4.59)$$

#### 4.10 Propiedades magnéticas de la materia

Las propiedades magnéticas de un material lineal, homogéneo e isótropo se definen en función del valor de la susceptibilidad magnética  $\chi_m$ , que es un coeficiente adimensional que expresa la proporcionalidad entre la magnetización o imanación ( $\vec{M}$ ) y la intensidad del campo magnético ( $\vec{H}$ ), de acuerdo con la siguiente ecuación.

$$\vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H} \quad (4.60)$$

Esta expresión permite indicar que la imanación, magnetización o también llamada imantación ( $\vec{M}$ ) en un material determinado es directamente proporcional a la intensidad de campo magnético aplicado exteriormente ( $\vec{H}$ ), siendo esa constante de proporcionalidad  $\chi_m$  (susceptibilidad magnética, que es adimensional, y depende del material).

Como además la inducción magnética  $\vec{B}$ , está relacionada con los campos  $\vec{H}$  y  $\vec{M}$  por, ya que la inducción magnética o campo magnético que adquiere un material es igual a la suma de las inducciones debido al campo exterior ( $\vec{H}$ ), y del que se produce en su interior ( $\vec{M}$ ).

$$\vec{B} = \mu_o \cdot (\vec{H} + \vec{M}) \quad (4.61)$$

Tendremos que:

$$\vec{B} = \mu_o \cdot (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_o \cdot \vec{H} \cdot (1 + \chi_m) = \mu_o \cdot \mu_r \cdot \vec{H} = \mu \cdot \vec{H} \quad (4.62)$$

donde  $\mu$  representa la permeabilidad magnética del medio ( $\mu = \mu_o \cdot \mu_r$ ), y  $\mu_r$  la permeabilidad relativa que es igual a  $(1 + \chi_m)$ ,  $\mu_o$  es la permeabilidad del vacío y que en unidades del S.I. vale  $4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m.

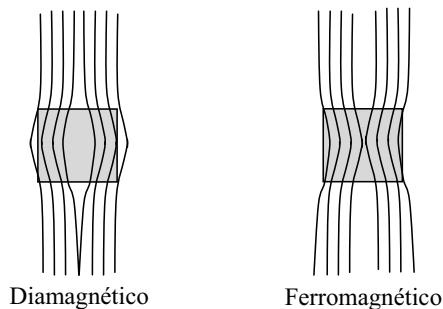
De acuerdo con el valor de  $\mu_r$  podemos hablar de tres tipos de materiales: diamagnéticos, paramagnéticos y ferromagnéticos –tabla 4.2-.

Tipos de materiales	$\mu_r (X_m)$	Materiales representativos
Diamagnéticos	$\mu_r \leq 1 (X_m \approx -10^{-5})$	Bismuto, agua cobre, oro, ...
Paramagnéticos	$\mu_r \geq 1 (X_m \approx 10^{-3})$	Aluminio, magnesio, titanio, ...
Ferromagnéticos	$\mu_r \gg 1 (X_m \approx \uparrow \uparrow^5)$	Hierro, cobalto y níquel

**Tabla 4.2.** Resumen de los diferentes tipos de materiales por sus propiedades magnéticas.

Por tanto, a partir de los valores de la  $\mu_r$  podemos definir el ferromagnetismo como una propiedad que tiene ciertos materiales –llamados al final, materiales ferromagnéticos- por el que estos materiales ante la presencia incluso de campos magnéticos débiles, tienen grandes imanaciones. Hay que partir del hecho de que todos los materiales en condiciones normales de presión y temperatura son magnéticamente neutros. Y es en definitiva, cuando se manifiestan sus características magnéticas cuando se le aplica un campo exterior.

En la figura 4.16 se visualiza el comportamiento de las líneas de fuerza al atravesar un material diamagnético, que genera un fenómeno de repulsión, por tanto es un material no apto para la conducción de campos magnéticos, y, que ocurre al atravesar un material ferromagnético, se puede observar que el fenómeno es el contrario, de ahí su uso en los circuitos magnéticos. Un material paramagnético, tiene un comportamiento intermedio, más cercano al ferromagnético.



**Figura 4.16.** Comportamiento de las líneas de fuerza de un campo magnético al atravesar un material diamagnético y ferromagnético.



### 4.11 Leyes de los circuitos magnéticos. Analogía con circuitos eléctricos

Recordar que podemos llamar circuito magnético, a una estructura de material ferromagnético en la que circulan flujos ferromagnéticos debido a la presencia de bobinas o imanes permanentes.

Partiendo del circuito de la figura 4.17, donde tenemos una bobina de  $N$  espiras, con la sección del núcleo  $S$  y una longitud media  $l$ .

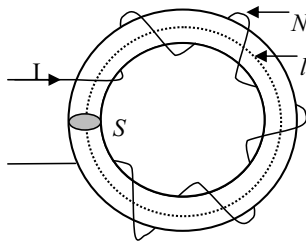


Figura 4.17. Circuito magnético.

$\vec{H}$  y  $\vec{B}$ , son funciones del tiempo y con carácter tridimensional, y además los materiales magnéticos son materiales no lineales, todas estas condicionantes motivan que los problemas así planteados sean difíciles de resolver. Ahora bien, en un gran número de casos la solución del problema puede obtenerse con una buena aproximación utilizando las dos siguientes hipótesis simplificadoras.

1°. La distribución de la inducción ( $\vec{B}$ ), y por tanto, del flujo ( $\vec{\phi}$ ), es uniforme en cada sección del circuito magnético –es decir, el módulo, dirección y sentido de la inducción magnética son los mismos en todos los puntos de cada sección del circuito-. De esta forma transformamos un problema tridimensional a uno unidimensional.

2°. Las corrientes eléctricas y los flujos magnéticos serán considerados como constantes o lentamente variables. En este estado llamado *cuasiestacionario*, el tiempo no tiene una importancia primordial –se incluyen los flujos e intensidades de frecuencias hasta 50 Hz-. Esto implica que  $H$  se considerará constante, y por lo tanto, también la inducción magnética ( $B$ ) y el flujo magnético ( $\phi$ ).

En base a estas simplificaciones podemos decir:

- a) Aplicando la ley de Ampere, que nos indica que la circulación del campo magnético  $\vec{H}$  a lo largo de un camino cerrado  $C$ , es igual a la suma de corrientes que atraviesan cualquier superficie  $S$  apoyada en el camino. Si existe  $N$  espiras conduciendo una intensidad  $i$ , la suma de corrientes será  $N \cdot i$  y este producto recibe el nombre de *fuerza magnetomotriz* ( $\mathcal{F}$ ) (amperivuelta,  $A \cdot v$ ). La fuerza magnetomotriz es la causa de que establezca un campo magnético igual que la f.e.m. en el circuito eléctrico es a la corriente eléctrica.

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \sum i \Rightarrow H \cdot l = \mathcal{F} = N \cdot i \quad (4.63)$$

- b) Y recordando que el flujo magnético es:

$$\phi = B \cdot S \quad (4.64)$$

el  $\phi$  es prácticamente constante en los materiales ferromagnéticos y con la misma dirección que la superficie  $S$ .

- c) Y la expresión de la inducción magnética será:

$$B = \mu \cdot H \quad (4.65)$$

A partir de la ecuación (4.10) y (4.12)

$$\mathcal{F} = H \cdot l = \frac{B}{\mu} \cdot l \quad (4.66)$$

Si sustituimos en la anterior expresión, la ecuación (4.11):

$$\mathcal{F} = \phi \cdot \frac{l}{\mu \cdot S} \quad (4.67)$$

De donde definimos:

$$\mathcal{F} = \phi \cdot \mathcal{R} \quad (4.68)$$

Esta expresión es la expresión fundamental para el estudio de los circuitos magnéticos, que se denomina ley de *Hopkinson* o ley de Ohm de los circuitos magnéticos. Como podemos apreciar en la ecuación (4.54)  $\mathcal{R}$ , se denomina “*reluctancia magnética*”, y su unidad es el (Av/Wb, o también 1/H):

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu \cdot S} \quad (4.69)$$

Por cierto, dicha expresión recuerda a la expresión de la resistencia en los circuitos eléctricos  $R = \rho \cdot \frac{l}{S}$

La inversa de la reluctancia, se le denomina “permeancia magnética” ( $\mathcal{P}$ ).  
 $\mathcal{P} = 1/\mathcal{R}$ .

#### 4.11.1 Fuentes de excitación magnética

La procedencia de la energía de la fuente de excitación, se clasifican en:

- a) Electroimanes, compuesto por un solenoide arrollado sobre un material ferromagnético blando. El campo magnético en ellos es producido por la corriente que lo atraviesa. La fuente de excitación que tenemos puede ser constante o variable, dependiendo de la corriente.

Para representar una fuente de excitación, seguiremos los criterios que marcamos a continuación en la siguiente figura (4.18).

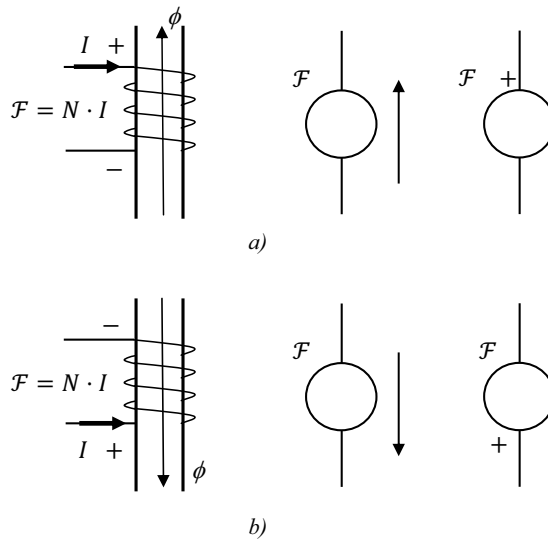


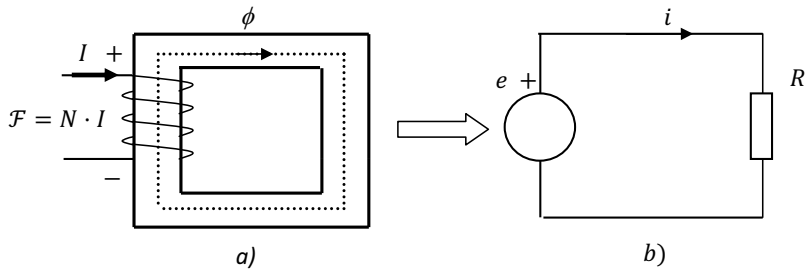
Figura 4.18 . Fuentes de excitación magnética.

Dense cuenta que el “+” de la fuente viene marcado por donde sale el flujo magnético de nuestro solenoide –regla de la mano derecha-. La diferencia entre las dos figuras radica en la entrada de la intensidad al solenoide, que implica un cambio del sentido del flujo de salida.

b) Imanes permanentes, son materiales ferromagnéticos duros.

#### 4.11.2 Analogía con el circuito eléctrico

Partimos de dos circuitos –figura 4.19-, el a) se corresponde con el circuito magnético y b) representa el circuito eléctrico equivalente.



**Figura 4.19.** Circuito magnético y eléctrico equivalente.

La analogía eléctrica proporciona un método para estudiar los circuitos magnéticos (con ciertas restricciones, como vemos en el apartado siguiente), ya que una vez planteadas las ecuaciones del circuito eléctrico se extrapolan fácilmente las conclusiones al circuito magnético a estudiar, lo cual constituye una aproximación bastante buena y generalmente se está más acostumbrados al estudio de circuitos eléctricos que magnéticos.

A continuación se definen las correspondencias que tenemos en cuenta para llevar a cabo la analogía eléctrica de un circuito magnético, en primer lugar recordaría como hemos mencionado con anterioridad que la ley de Hopkinson, es considerada la *ley de Ohm magnética*.

<i>Circuito magnético</i>	<i>Circuito eléctrico</i>
Ley de Hopkinson: $\mathcal{F} = \mathcal{R} \cdot \phi$	Ley de Ohm: $E = R \cdot I$
$\phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}}$	$i = \frac{e}{R}$

<i>Circuito magnético</i>	<i>Circuito eléctrico</i>
$\mathcal{F}$	$E$
$\phi$	$i$
$\mu$	$1/\rho$
$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu \cdot S}$	$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$
$\mathcal{F} = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l}$	$e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$
1ª ley de Kirchhoff: $\sum \phi = 0$	$\sum i = 0$
2ª ley de Kirchhoff: $\sum \mathcal{F} = \sum \mathcal{R} \cdot \phi$	$\sum e = \sum R \cdot i$

#### 4.11.3 Diferencias entre los circuitos eléctricos y magnéticos

Realmente podemos definir la existencia de tres diferencias entre los circuitos eléctricos y magnéticos.

- La resistencia  $R$  de un circuito eléctrico es independiente de la intensidad que lo atraviesa. Sin embargo, la reluctancia de un circuito magnético depende del flujo que lo recorre. Realmente depende de la permeabilidad magnética del material del núcleo  $\mu$ , que no es lineal –véase figura 4.20- y de la forma del núcleo, de forma que la  $\mathcal{R}$  varía especialmente en los ángulos, considerando las  $S$  y  $l$  constantes.

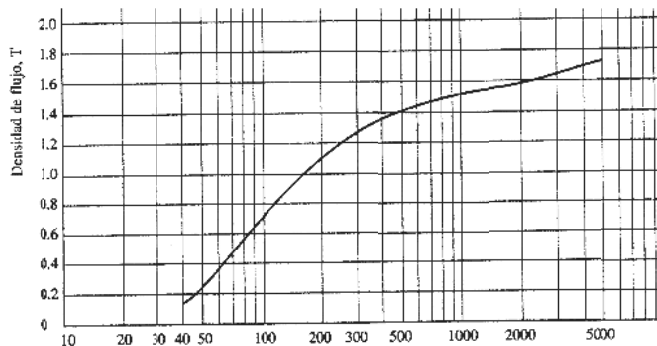


Figura 4.20. Curva de la permeabilidad de un material ferromagnético.

- b) En un circuito eléctrico, la intensidad se canaliza prácticamente toda a través de los conductores. El aire circundante y los aislantes tienen una resistencia muy elevada, de manera que las corrientes de dispersión son casi despreciables. Por el contrario, no se conoce ningún aislante del flujo magnético, derivándose una parte considerable del flujo al medio exterior (flujo de dispersión).
- c) Si existen entrehierros, la superficie transversal efectiva en el aire es mayor que la del núcleo, debido al *efecto de borde* también denominado *efecto marginal* (*fringing effect*).

En aquellos casos que se tengan en cuenta el efecto borde, debemos considerar que la sección que se consideraría en el entrehierro no será la misma que la del material en donde esté incrustado nuestro entrehierro, sino que será un porcentaje mayor en el entrehierro que en el material.

Todos estos factores pueden inducir un valor máximo de error de un 5%, que son asumibles. Porque por lo visto estamos trabajando con aproximaciones.

#### **4.11.4 Análisis de circuitos magnéticos**

Con respecto al análisis de circuitos magnéticos, se suelen estudiar dos situaciones:

- a) Conocida la excitación ( $I$  y el circuito), determinar el flujo que se establece en el núcleo  $-B$  y  $H$ , en cualquier parte del circuito-. Formalmente se define un problema de análisis.
- b) Calcular la excitación necesaria ( $I$  e incluso la geometría del circuito), para conseguir un flujo determinado en el núcleo. Tenemos un problema de síntesis.

En los circuitos magnéticos, las reluctancias obedecen las mismas reglas que las resistencias en un circuito eléctrico.

En un circuito serie, la reluctancia equivalente a varias reluctancias en serie es igual a la suma de las reluctancias.

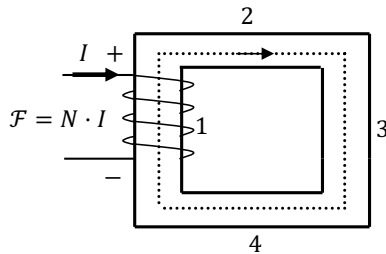
$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + \dots + \mathcal{R}_n \quad (4.70)$$

### Ejercicio de aplicación 4.2

*Este ejercicio pretende servir de ejemplo para estudiar los circuitos con reluctancias en serie*

*Solución:*

Sea el acoplamiento de la figura.



A partir del conocimiento de la geometría de nuestro circuito magnético y el material de nuestro núcleo. Podemos definir el valor de la reluctancia de cada uno de los lados de nuestro circuito, a partir de las siguientes expresiones:

$$\mathcal{R}_1 = \frac{l_1}{\mu_1 \cdot S_1} \quad \mathcal{R}_2 = \frac{l_2}{\mu_2 \cdot S_2}$$

$$\mathcal{R}_3 = \frac{l_3}{\mu_3 \cdot S_3} \quad \mathcal{R}_4 = \frac{l_4}{\mu_4 \cdot S_4}$$

La reluctancia equivalente será:

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + \dots + \mathcal{R}_n$$

Conociendo la reluctancia equivalente y la fuente de excitación:

$$\phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{N \cdot I}{\mathcal{R}_{eq}}$$

A partir del conocimiento del flujo que recorre todos los lados de nuestro circuito magnético, podemos deducir la inducción magnética que aparece en cada uno de los laterales:

$$B_1 = \frac{\phi}{S_1} \quad ; \quad B_2 = \frac{\phi}{S_2} \quad ; \dots ; \quad B_4 = \frac{\phi}{S_4}$$

En un circuito en paralelo, la reluctancia equivalente a varias reluctancias en paralelo se calcula según la expresión:

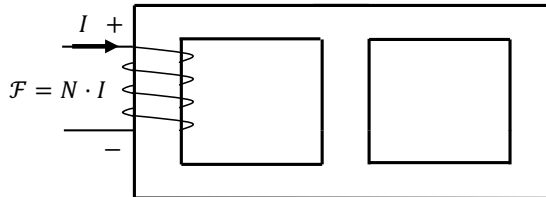
$$\frac{1}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} + \frac{1}{\mathcal{R}_3} + \dots + \frac{1}{\mathcal{R}_n} \quad (4.71)$$

### Ejercicio de aplicación 4.3

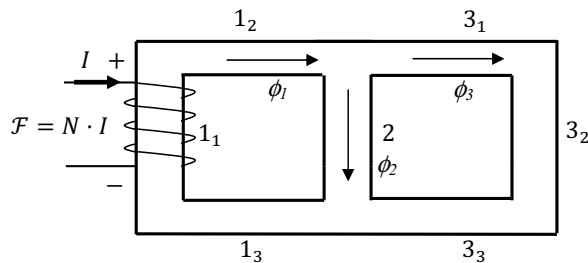
*Este ejercicio pretende servir de ejemplo para estudiar los circuitos con una combinación de reluctancias en serie y paralelo.*

*Solución:*

Sea el acoplamiento de la figura.



Lo primero que habría que hacer es calcular la reluctancia equivalente, donde como se puede observar en la figura adjunta, podemos definir tres reluctancias, donde la reluctancia 1, será la suma de los laterales 1<sub>1</sub>, 1<sub>2</sub> y 1<sub>3</sub>, ya que están en serie; la reluctancia 2, será la central, y por último la reluctancia 3, será la suma de 3<sub>1</sub>, 3<sub>2</sub> y 3<sub>3</sub>, por estar en serie también.



La reluctancia equivalente:

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_1 + \frac{\mathcal{R}_2 \cdot \mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3}$$



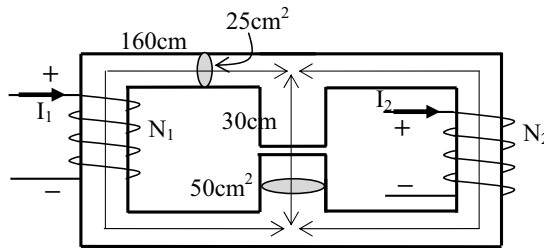
El flujo que genera la fuente será, aplicando las leyes de Kirchoff:

$$\phi_1 = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}_1 + \frac{\mathcal{R}_2 \cdot \mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3}}$$

#### Ejercicio de aplicación 4.4

Partiendo del circuito magnético de la figura, con un material cuya curva de magnetización viene dado de forma analítica por la expresión

$$B = \frac{1,5 \cdot H}{50 + H}, \text{ donde } B \text{ (T) y } H \text{ (A/m)}.$$



El entrehierro de la columna central es 5 mm.  $N_1=N_2=360$  espiras.

Calcula a) los valores de las intensidades  $I_1$  e  $I_2$  que den lugar un flujo en el entrehierro de la columna central de valor  $5 \cdot 10^{-3}$  Wb ; b) inducción magnética en la columna de la derecha y c) calcular la inducción magnética en el entrehierro, considerando que el efecto borde, genera un aumento de la sección efectiva un 5%

*Solución:*

Partiendo del conocimiento del flujo del entrehierro ( $\phi_e$ ) es de  $5 \cdot 10^{-3}$  Wb, y sabiendo que el flujo es constante en toda la columna central –no sólo en el entrehierro– estamos en disposición de calcular la inducción magnética ( $B$ ) de la columna central, que tiene una sección de  $50 \text{ cm}^2$ .

$$B = \frac{\phi}{S} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{50 \cdot 10^{-4}} = 1 \text{ T } \left( \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \right)$$

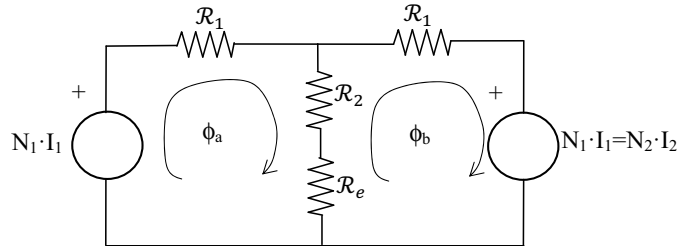
Conociendo la  $B$  del material central, y conociendo la curva de imanación a través de la expresión  $B = \frac{1,5 \cdot H}{50 + H}$ , se puede calcular la intensidad de campo ( $H$ ).

$$1 = \frac{1,5 \cdot H}{50 + H} \rightarrow 50 + H = 1,5H \rightarrow H = 100 \text{ A/m}$$

Partiendo de  $B$  y  $H$ , obtendremos la permeabilidad del material:

$$B = \mu \cdot H \rightarrow \mu = \frac{B}{H} = \frac{1}{100} \text{ H/m}$$

Una vez que se ha calculado la permeabilidad del material ferromagnético, estamos en disposición de poder modelizar nuestro circuito, de forma que nuestro circuito equivalente sería:



Los valores de las reluctancias serían:

$$\mathcal{R}_1 = \frac{l_1}{\mu \cdot S_1} = \frac{160 \cdot 10^{-2}}{\frac{1}{100} \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = 64000 \text{ Av/Wb}$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{l_2}{\mu \cdot S_2} = \frac{29,5 \cdot 10^{-2}}{\frac{1}{100} \cdot 50 \cdot 10^{-4}} = 5900 \text{ Av/Wb}$$

$$\mathcal{R}_e = \frac{l_e}{\mu_o \cdot S_2} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 10^{-4}} = 795774,71 \text{ Av/Wb}$$

Siguiendo la analogía definida anteriormente, podemos aplicar cualquier método de los vistos con circuitos magnéticos, en nuestro caso vamos a utilizar el método de las mallas –método directo-, donde el flujo es equivalente a la intensidad, la reluctancia a la resistencia y la fuerza magnetomotriz a las fuentes de tensión.

Partiremos antes del conocimiento del flujo de la malla central, que implica que:

$$\phi_a - \phi_b = 5 \cdot 10^{-3} \rightarrow \phi_b = \phi_a - 5 \cdot 10^{-3} \quad (1)$$

La ecuación de la malla “a”, sería la siguiente:

$$(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_e) \cdot \phi_a - (\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_e) \cdot \phi_b = N_1 \cdot I_1$$

Si sustituimos en esta expresión el valor de la ecuación (1):

$$(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_e) \cdot \phi_a - (\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_e) \cdot (\phi_a - 5 \cdot 10^{-3}) = N_1 \cdot I_1$$

$$\mathcal{R}_1 \cdot \phi_a - 5 \cdot 10^{-3} \cdot \mathcal{R}_2 + 5 \cdot 10^{-3} \cdot \mathcal{R}_e = N_1 \cdot I_1$$

La ecuación de la malla “b”, sería la siguiente:

$$-(\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_e) \cdot \phi_a - (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_e) \cdot \phi_b = -N_1 \cdot I_1$$

Si sustituimos en esta expresión el valor de la ecuación (1):

$$-(\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_e) \cdot \phi_a + (\phi_a - 5 \cdot 10^{-3}) = -N_1 \cdot I_1$$

$$\mathcal{R}_1 \cdot \phi_a - 5 \cdot 10^{-3} \cdot (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_e) = -N_1 \cdot I_1$$

Tendremos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 64000 \cdot \phi_a + 4008,37 = 360 \cdot I_1 \\ 64000 \cdot \phi_a - 4328,37357 = -360 \cdot I_1 \end{cases}$$

Como lo que se nos pide es la  $I$ , aplicando Cramer, o el sistema que el lector prefiera, obtendría que  $I_1=11,5788$  A.

b) Para la calcular la inducción magnética en la columna derecha, debemos además de calcular la intensidad, calcular el  $\phi_a$ , en el sistema de ecuaciones anterior.

$$64000 \cdot \phi_a + 4008,37 \rightarrow \phi_a = \frac{360 \cdot 11,5788 - 4008,37}{64000} = 0,02495 \text{ Wb}$$

Para calcular el flujo de la derecha  $\phi_b$ , utilizamos la expresión:

$$\phi_b = \phi_a - 5 \cdot 10^{-3} \quad (1)$$

$$\phi_b = 0,02495 - 5 \cdot 10^{-3} = 0,019995 \text{ Wb}$$

Sabiendo el flujo y la superficie, estamos en disposición de calcular la inducción magnética:

$$B = \frac{\phi_b}{S} = \frac{0,019995}{25 \cdot 10^{-4}} = 7,998 \text{ T} \left( \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \right)$$

c) Para calcular la inducción magnética en el entrehierro, considerando que el efecto borde, debemos aumentar en nuestro caso la superficie un 5%, como se aprecia en la ecuación posterior.

$$B_e = \frac{\phi}{S_e} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{50 \cdot 10^{-4} \cdot 1,05} = 0,9523 \text{ T} \left( \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \right)$$

#### 4.12 Comportamiento magnético de los materiales ferromagnéticos

Ya dijimos con anterioridad que la permeabilidad magnética se definía mediante la siguiente ecuación:

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (4.72)$$

Pues bien en los materiales ferromagnéticos se cumple que:

- a) La permeabilidad relativa es muy alta (hasta 6000 veces  $\mu_0$ )
- b) La permeabilidad no es constante –al igual que en el hierro, sólo es constante la permeabilidad en el aire.

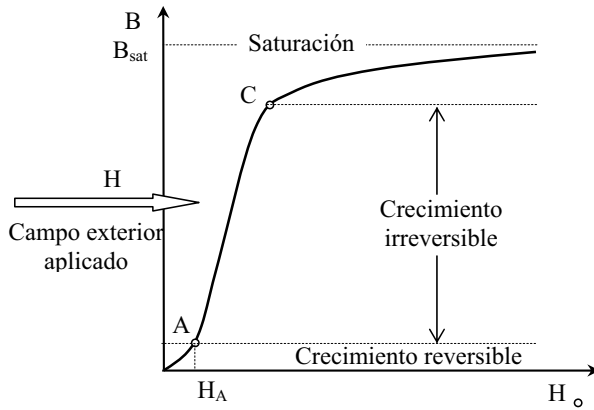
Hablamos que el magnetismo de un material vería definido por el momento resultante de los momentos magnéticos, molecular, orbital y spin. Inicialmente este sumatorio es nulo, no hay magnetismo. Esto se explica con la teoría de los dominios de Weiss –dominios colocados al azar-.

De tal forma que, los materiales ferromagnéticos en presencia de un campo magnético externos, los dominios tienden a alinearse, de tal forma que sus campos magnéticos se suman al campo externo resultando un campo total más fuerte –figura 4.21-.

Este efecto puede observarse por medio de la curva siguiente que relaciona la inducción  $\vec{B}$  resultante en función de la intensidad de campo magnético  $\vec{H}$ , esta curva recibe el nombre de *curva de imanación e imantación*.

Al principio la muestra está en un estado magnéticamente neutro, debido a que los dominios tienen alineaciones al azar, resultando un momento magnético nulo.

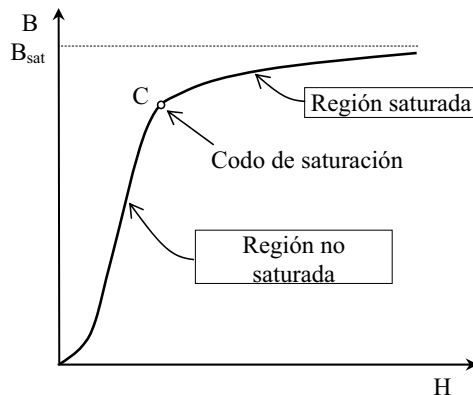
Al aplicar una intensidad de campo magnético definida por un  $H$  empiezan a desplazarse las paredes de los dominios. Cuando nuestro valor está entre  $A$  y  $C$ , si desaparece el campo magnético exterior, también desaparece la densidad de flujo, tiene por tanto, un comportamiento lineal, proporcional y reversible. Cuando el  $H > H_A$ , el par ( $T$ ) que actúa sobre los dominios orientados desfavorablemente, que viene dado por la expresión  $T = H \cdot M \cdot \text{sen} \alpha$ , empieza a tener un valor que nos permite vencer a las fuerzas que se oponen a su movimiento.



**Figura 4.21.** Curva de imanación, los dominios en función de  $H$

A partir de  $C$ , ya es irreversible el proceso, hasta llegar a un punto donde los dominios están totalmente alineados, diciéndose que el material se ha saturado resultando una permeabilidad relativa unidad. Realmente a partir de  $C$ , para girar los dominios se hace necesario altos valores de  $H$ , que generen el suficiente par ( $T$ ) para poder rotar los dominios. Porque el  $\alpha$ , del par ( $T = H \cdot M \cdot sen\alpha$ ), tiene un valor cada vez más bajo, tendiendo a 0, y por tanto, el par correspondiente será cada vez menor.

Con respecto a la curva de imanación –figura 4.22-, curva que nos relaciona  $B$ - $H$  podemos definir 3 zonas diferenciadas denominadas por su comportamiento como:



**Figura 4.22.** Curva de imanación, sus regiones

- Región no saturada, donde un pequeño incremento de  $H$  produce un gran incremento de  $B$ . Se puede apreciar también cierta linealidad –hasta el punto  $C$ -.
- Región saturada, un gran incremento de  $H$ , produce un pequeño incremento de  $B$  –a partir de  $C$ -.
- Codo de saturación, es la zona de transición entre la región saturada y la no saturada –a veces se habla de *rodilla* de la curva-.

Para resolver situaciones prácticas o estudiar con ayuda de un ordenador un circuito magnético es más conveniente utilizar una expresión analítica que relaciona el  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$ . Normalmente de la forma:

$$B = \frac{k_1 \cdot H}{1 + k_2 \cdot H} \quad (4.73)$$

En la práctica se trabaja en los generadores y motores eléctricos con valores de  $\vec{H}$  cercanos al codo de saturación, para aprovechar al máximo la capacidad magnética del material, es decir se trata de obtener el máximo flujo, para poder obtener el máximo voltaje y par posible. En la medida que nos acercamos a este codo, o nos encontramos en dicho codo, podrán surgir problemas de no linealidad.

#### 4.12.1 Curva de histéresis

Para la realización de la curva de *imanación* o *imantación* se parte de un material magnéticamente descargado. La curva que se obtiene, no es una función uniforme, sino que depende además de la historia del material. Definiéndose la llamada *curva de histéresis*. Partiremos para ello de un material ferromagnético, en el cual tendremos arrollado un solenoide –figura 4.23-. Dicho solenoide se alimentará con una señal senoidal, de forma que el semiciclo positivo de la alimentación generará una intensidad de campo  $H$  en este caso positivo –hacia la derecha-, y la parte negativa del semiciclo de la alimentación generará una intensidad de campo  $H$  negativo –hacia la izquierda-

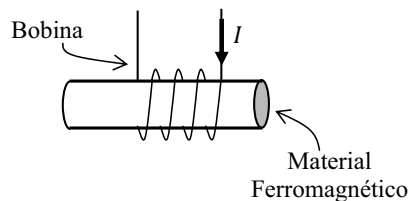


Figura 4.23. Material ferromagnético determinado con un solenoide.

El proceso anteriormente definido, es un proceso repetitivo, que da lugar a una curva con la definida en la figura 4.24. El área de dicha curva define lo que se denomina como las *pérdidas por histéresis* de un determinado material. Esta curva es de gran importancia en el caso de una alimentación en alterna –como ya hemos podido ver teniendo en cuenta el proceso de realización de dicha curva-.

En la curva de histéresis se definen dos magnitudes importantes como:

- $B_r$ , que recibe el nombre de magnetismo o inducción remanente, que es el magnetismo que tiene nuestro material ferromagnético, cuando externamente no se genera ningún campo magnético.

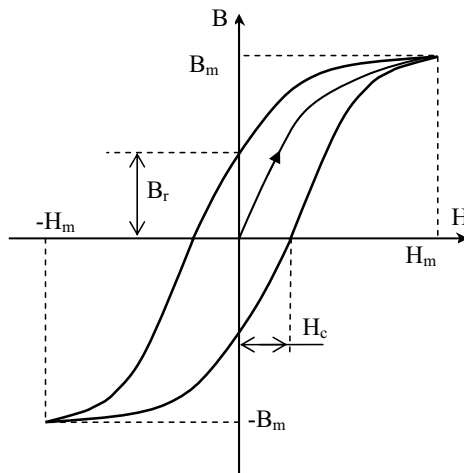


Figura 4.24. Curva de histéresis resultante.

- $H_c$ , es el campo o fuerza coercitiva, que es el campo opuesto que es necesario aplicar para desmagnetizar la muestra, es decir, el campo a aplicar para eliminar el magnetismo remanente.

La histéresis es la que permite la existencia de imanes permanentes muy potentes.

### Ejercicio de aplicación 4.5

Partiendo de un núcleo magnético cuadrado que tiene una longitud media de 60 cm. Y una sección de  $120 \text{ cm}^2$ . Una bobina de 200 vueltas está enrollada en una de las columnas del núcleo. Sabiendo que la curva de imanación del material del núcleo es el mostrado en la figura. Calcula:

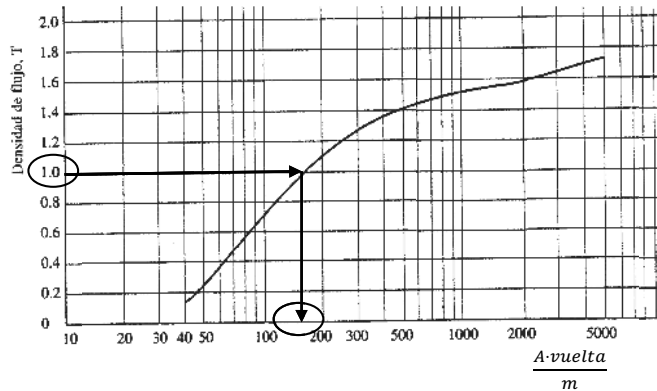
- La corriente que se requiere para que tengamos un flujo de  $0,012 \text{ Wb}$ ;
- La permeabilidad relativa del material y,
- la reluctancia del núcleo te.

Solución:

- a) A partir de los valores del flujo y de la superficie, podemos obtener la inducción magnética (densidad de flujo):

$$B = \frac{\phi}{S} = \frac{0,012 \text{ Wb}}{0,015 \text{ m}^2} = 1 \text{ T}$$

A partir de la curva de imanación, obtenemos que la  $H \cong 165 \text{ Av/m}$



A partir de la ley de Ampere:

$$\mathcal{F} = N \cdot i = H \cdot l = 165 \cdot 0,60 = 99 \text{ Av}$$

$$i = \frac{\mathcal{F}}{N} = \frac{99}{200} = 0,495 \text{ A}$$

- b) Para calcular la permeabilidad relativa del material, tendré que llegar tras calcular la permeabilidad del material:

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{1}{165} = 6,06 \cdot 10^{-3} \text{ H/m}$$

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{6,06 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} = 4822,4$$

- c) Para calcular la reluctancia, podemos utilizar la ley de Hopkinson.

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{F}}{\phi} = \frac{99}{0,012} = 8250 \text{ Av/Wb}$$

también podemos utilizar otras expresiones como:

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu \cdot S} = \frac{0,6}{6,06 \cdot 10^{-3} \cdot 0,012} = 8250 \text{ Av/Wb}$$



#### 4.12.1.1 Clasificación de los materiales

En función del ciclo de histéresis, es decir, forma y dimensiones del ciclo, que está íntimamente relacionado con la movilidad de los dominios podemos hablar de materiales ferromagnéticos blandos o duros

- a) *Material ferromagnético blando*. Se caracterizan por una gran movilidad de los dominios y una fuerza coercitiva ( $H_c$ ) pequeña, es decir la curva de histéresis se caracteriza por ser muy estrecha. Un ejemplo es el hierro dulce.
- b) *Material ferromagnético duro*. Poca movilidad de los dominios, es decir, la movilidad está muy restringida y el valor de  $H_c$  es muy elevado, esto da lugar a una curva muy ancha. Característica de materiales como aceros, ferritas, ...

#### 4.13 Pérdidas de energía en un núcleo ferromagnético

Partiendo de un circuito magnético, si aplicamos la segunda ley de Kirchhoff, tendríamos que la tensión  $u$ , valdría:

$$u = R \cdot i + N \cdot \frac{d\phi}{dt} \quad (4.74)$$

si multiplicamos todo por  $i \cdot dt$ , tendríamos:

$$u \cdot i \cdot dt = R \cdot i^2 \cdot dt + N \cdot \frac{d\phi}{dt} \cdot i \cdot dt \quad (4.75)$$

$$u \cdot i \cdot dt = R \cdot i^2 \cdot dt + N \cdot i \cdot d\phi \quad (4.76)$$

Que se puede expresar de la forma:

$$dW_e = dW_R + dW_{mg} \quad (4.77)$$

donde  $dW_e$  es el diferencial de energía eléctrica que entra al circuito;  $dW_R$ , es el diferencial de energía disipada en la resistencia R de la bobina por efecto Joule y  $dW_{mg}$ , es el diferencial de energía suministrada al campo magnético.

La ecuación (4.77) representa el balance energético del circuito o simplemente la ley de conservación de la energía. El término  $dW_{mg}$  se puede escribir:

$$W_{mg} = N \cdot i \cdot d\phi = \mathcal{F} \cdot d\phi \quad (4.78)$$

Si para  $t=0$  se considera que el flujo en el núcleo y la corriente es cero, hasta unas magnitudes finales de  $\phi$  e  $i$ , se tendrá una energía magnética total suministrada al núcleo magnético por la fuente.

$$W_{mg} = \int_0^\phi \mathcal{F} \cdot d\phi \quad (4.79)$$

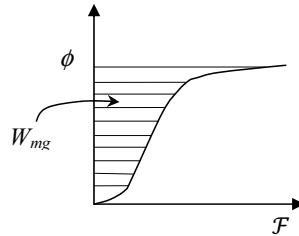


Figura 4.25. Curva de imanación.

Donde la fuerza magnetomotriz ( $\mathcal{F}$ ) es proporcional a la intensidad de campo magnético ( $H$ ) y el flujo magnético ( $\phi$ ) es proporcional a la inducción magnética ( $B$ ), figura 4.25. Cuando un núcleo ferromagnético se excita mediante corrientes alternas se producen pérdidas de energía en forma de calor, y por supuesto limitan la potencia útil que se pueden obtener en los aparatos o máquinas eléctricas.

Las pérdidas de energía son de tres tipos:

a) *Pérdidas por histéresis.* Partiendo de la curva de histéresis, las pérdidas por histéresis ( $W_H$ ) son proporcionales al área del ciclo de histéresis –figura 4.26-.

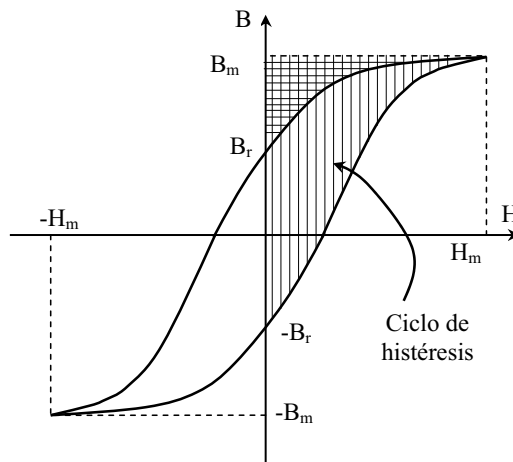


Figura 4.26. Pérdidas por histéresis.

Según la expresión:

$$W_H = \oint H \cdot dB \quad (4.80)$$

y como es conveniente hablar de pérdida de energía por segundo en núcleo, nuestra expresión de las *pérdidas de histéresis* será:

$$P_H = f \cdot W_H = f \cdot \oint H \cdot dB \quad (4.81)$$

Esta ecuación (4.81) es independiente de la forma de onda de la fuente de alimentación, depende únicamente de la amplitud de la inducción, la frecuencia de la fuente y el tipo de material magnético (el cual determina el área de nuestra curva de histéresis).

Steinmetz propuso la siguiente expresión para calcular las pérdidas de histéresis.

$$P_H = k_H \cdot f \cdot B_m^\alpha \quad (4.82)$$

donde  $k_H$  es el coeficiente de Steinmetz y  $\alpha$ , es el exponente de Steinmetz dependiente del tipo de material. Donde  $\alpha$  varía entre 1,5 y 2,5 y  $k_H$  varía entre 100 y 200 para acero al silicio.

Para minimizar las pérdidas de histéresis ( $P_H$ ), se utilizan materiales ferromagnéticos blandos, que le caracteriza un ciclo estrecho. Estos materiales conforman nuestros motores, transformadores, ...

b) *Pérdidas por corrientes parásitas* (corrientes de Foucault o en torbellino). Debido a la variación el flujo se producen f.e.m., que dan lugar a corrientes inducidas circulares en el núcleo que, por efecto Joule calienta el material:

$$e = \frac{d\phi}{dt} \quad (4.83)$$

$$i = \frac{e}{S} = \frac{e}{\rho \cdot \frac{l}{S}} \quad (4.84)$$

Si aumentamos la longitud del material y reducimos su sección, conseguimos que la intensidad inducida sea menor, y por tanto, también menores las pérdidas por efecto Joule asociadas.

La expresión analítica de las pérdidas por corrientes de Foucault ( $P_F$ ), sería:

$$P_F = k_F \cdot f^2 \cdot B_m^\alpha \cdot a^2 \cdot \sigma \quad (4.85)$$

donde  $a$  es la anchura de la chapa de material y  $\sigma$ , es la conductividad del material.

Para reducir estas pérdidas se lamina el material en la dirección del flujo, por ejemplo, el núcleo de un transformador está formado por chapas laminadas apiladas.

Las pérdidas por corrientes de Foucault y por histéresis se dan en W/kg para un valor determinado de frecuencia e inducción magnética (figura 4.27).

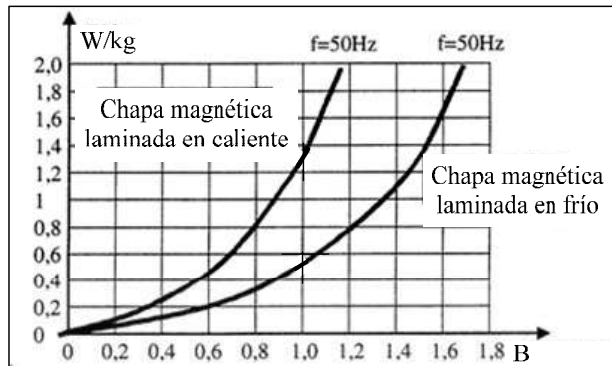


Figura 4.27. Pérdidas en dos materiales ferromagnéticos.

c) Pérdidas en los entrehierros debido a los flujos de dispersión.

---

**TEMA 5**

**CAPACIDAD E  
INDUCTANCIA.**

**COMPORTAMIENTO EN  
C.C.**

---

## TEMA 5. CAPACIDAD E INDUCTANCIA. COMPORTAMIENTO EN C.C.

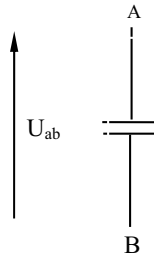
### 5.1 Introducción

Las redes analizadas en el tema 3 están constituidas exclusivamente por resistencias; sin embargo, existen otros elementos pasivos, como son los condensadores y las bobinas, que también son utilizados en la construcción de circuitos electrónicos. Estos componentes se comportan de manera distinta a las resistencias cuando se les aplica una corriente continua.

En el presente capítulo nos ocuparemos principalmente de la constitución de los condensadores y de las bobinas, así como de las magnitudes que les caracterizan y de su funcionamiento cuando las redes en las que se encuentran conectados junto a resistencias son alimentadas con generadores de cc.

### 5.2.- Condensadores

Son elementos capaces de *almacenar carga eléctrica, electrones*. Se representa con el símbolo adjunto –figura 5.1-.

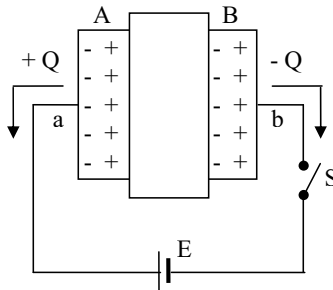


**Figura 5.1.** Condensador eléctrico.

En la práctica, recibe el nombre de condensador el conjunto formado por dos superficies metálicas conductoras llamadas *armaduras*, que se encuentran separadas por medio de un aislante denominado *dieléctrico*.

### 5.2.1 Fundamento de la acción de un condensador

Un condensador está formado por dos conductores aislados, con cargas iguales y de signo opuesto, con influencia mutua total. El condensador guarda una cantidad de carga y mantiene una tensión, pero no permite el paso de corriente.



*Figura 5.2. Ejemplo de la acción de un condensador eléctrico.*

En la figura 5.2 se muestra un condensador cuya armadura *A* se encuentra conectada al polo positivo del generador de cc *E*, y cuya armadura *B* se encuentra desconectada de la pila, mientras el interruptor *S* permanece abierto. En tales condiciones, la armadura *A* se carga positivamente (pierde electrones). Dado que la armadura *B* se encuentra dentro del campo eléctrico creado por las cargas positivas de la armadura *A*, por influencia electrostática, aquella sufre una ordenación de sus cargas, de tal forma que en la zona que hace contacto con el dieléctrico (cara activa) se acumulan cargas negativas y en la otra cara cargas positivas.

Cuando se cierra el contacto *S*, se produce un paso de cargas negativas del polo negativo de la pila a la armadura *B*, de manera que parte de esta carga sirve para absorber o contrarrestar las cargas positivas, y el resto para reforzar las negativas ya existentes, provocando por influencia electrostática un aumento de carga positiva en la cara activa (cara interna) de la armadura *A*.

El resultado final es que en ambas armaduras aparece una carga aparece una carga cuyo valor absoluto es el mismo, pero su polaridad opuesta. Esta carga se acumula por influencia electrostática recíproca de las dos armaduras. La carga *Q* de un condensador a efectos de cálculo es exclusivamente la de una de sus armaduras.

En el circuito de la figura 5.2 se produce corriente eléctrica de muy corta duración. Una vez cargadas las armaduras, la corriente por dicho circuito es nula. De esta observación es fácil sacar la conclusión de que un condensador no permite el paso de la corriente continua. Sin embargo, la ddp de un condensador cargado no se pierde aunque se desconecte de la fuente que originó la carga.

En los circuitos electrónicos se suele utilizar básicamente, bien para eliminar la componente continua de una señal eléctrica o bien para almacenar tensión en un determinado momento y cederla posteriormente.

### **5.2.2 Capacidad de un condensador**

Un condensador posee la propiedad de almacenar cargas eléctricas. La *medida de esta aptitud para acumular cargas eléctricas* es la medida de su *capacidad*.

La capacidad de un condensador es la relación entre la carga  $Q$  acumulada en una de sus armaduras y la  $U$  aplicada entre ellas. Se representa por la letra  $C$ .

$$C = \frac{Q}{U} \quad (5.1)$$

La unidad de la capacidad es el faradio (F), que se corresponde con la capacidad de un condensador que adquiere la carga de 1 Culombio si la diferencia de potencial o tensión eléctrica entre sus armaduras es de 1 Voltio.

El faradio es una unidad muy grande, de modo que en la práctica se suele usar el milifaradio, microfaradio, nanofaradio y picofaradio, que son respectivamente:

$$mF = 10^{-3} F$$

$$\mu F = 10^{-6} F$$

$$nF = 10^{-9} F$$

$$pF = 10^{-12} F$$

### **5.2.3 Valor de la capacidad**

La capacidad de un condensador depende de la superficie geométrica de las armaduras, de la naturaleza del aislante que se encuentra entre ellas, y del espesor del dieléctrico. No depende de la carga acumulada ni de la ddp entre las armaduras del condensador.



En el caso de armaduras planas iguales y paralelas, se expresa:

$$C = 8,84 \cdot 10^{-12} \cdot \epsilon_r \frac{S}{d} \quad (5.2)$$

En donde  $S$  es la superficie de las armaduras, expresada en  $m^2$  (cuanto mayor sea la superficie de las armaduras, mayor será la cantidad de electricidad que pueden acumular);  $d$  es el espesor del dieléctrico en m (cuanto menor sea la distancia entre las armaduras, mayor influencia eléctrica habrá entre ellas, por lo que se podrá acumular más carga), el valor  $8,84 \cdot 10^{-12}$  F/m es el valor de la constante dieléctrica en el vacío ( $\epsilon_0$ ), y  $\epsilon_r$  es la constante dieléctrica relativa de cada sustancia.

Cada sustancia tiene un valor de  $\epsilon$ , que se calcula multiplicando  $\epsilon_0$  por  $\epsilon_r$ .

En la tabla 5.1 se recoge el valor de  $\epsilon_r$  para algunas sustancias dieléctricas.

Material	$\epsilon_r$
Aire	1
Mica	4,5 - 5,5
Papel	2 - 4,8
Madera	2,5 - 4,8
Porcelana	4,5 - 6,5
Vidrio	5 - 12
Baquelita	5,6 - 8,5
Parafina	2 - 2,3

**Tabla 5.1.** Valores de  $\epsilon_r$  de ciertas sustancias dieléctricas.

### 5.2.4 Magnitudes características de los condensadores

Además de la capacidad, que es la magnitud más característica de un condensador, es necesario tener en cuenta a la hora de elegir un componente para un circuito otras como son, por ejemplo, la *tensión de trabajo*, la *tensión máxima soportable* entre sus armaduras y la *tolerancia*.

#### 5.2.4.1 Tensión de trabajo de un condensador

Es la tensión a la que puede funcionar un determinado condensador de una forma permanente sin sufrir daños. Viene indicada en la superficie de los condensadores.

La tensión de trabajo tiene gran incidencia en el tamaño de un condensador.

Si recordamos:

$$C = \varepsilon \frac{S}{d} \quad (5.3)$$

y:

$$C = \frac{Q}{U} \quad (5.1)$$

Cuanto mayor es la tensión de trabajo de un condensador, mayor tiene que ser el espesor del dieléctrico (aumento del denominador  $d$ ), lo que hace que en estos casos, para aumentar la capacidad, deba aumentar considerablemente  $S$  (numerador en la expresión). De modo que podemos encontrar condensadores de baja tensión y elevada capacidad que presenten tamaño similar al de otros de elevada tensión y pequeña capacidad (en el primer caso a expensas de la superficie de armaduras y en el segundo del espesor del dieléctrico).

La tensión de trabajo está íntimamente relacionada con la  $T$  ambiente; de modo que a un aumento de la temperatura se corresponde una disminución de la tensión de trabajo.

#### 5.2.4.2 Tensión máxima de un condensador

Si un condensador es sometido a una tensión muy elevada, el dieléctrico no podrá tolerarlo y será perforado por la corriente; no olvidemos la relativa proximidad de las armaduras y que el incremento de la tensión entre ellas aumenta la atracción de las cargas entre ambas armaduras.

Llamamos tensión máxima de un condensador a la que es capaz de soportar sin que se perfora el dieléctrico.

### 5.2.4.3 Tolerancia de un condensador

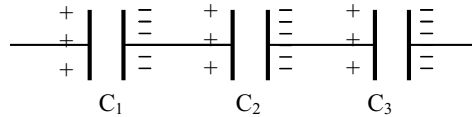
Igual que en las resistencias, se refiere al error máximo que puede existir entre la capacidad real del condensador y la capacidad indicada sobre su carcasa.

### 5.2.5 Agrupación de condensadores

Tiene como finalidad obtener una capacidad o una tensión de trabajo precisas para nuestras necesidades acoplando diversos condensadores disponibles.

#### 5.2.5.1 Agrupación de condensadores en serie

Cuando los condensadores se conectan uno a continuación del otro, se dice que están en serie –figura 5.3-:



**Figura 5.3.** Asociación de condensadores es serie.

La tensión total del acoplamiento entre los extremos, es igual a la suma de las tensiones entre los extremos de cada uno de los condensadores. Cada elemento produce consecutivamente una caída de tensión.

$$U = U_1 + U_2 + U_3 \quad (5.4)$$

Todos los condensadores adquieren igual carga porque las cargas positivas en el  $C_1$  generan unas cargas negativas equivalentes en la otra armadura que, a su vez se equilibran con las negativas en la armadura del segundo, etc...

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 \quad (5.5)$$

Como se cumple por definición que  $C = \frac{Q}{U}$ :

o, lo que lo mismo:

$$U_i = \frac{Q_i}{C_i} \quad (5.6)$$

Tenemos que:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{Q}{C} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} \quad (5.7)$$

Y como:  $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$ , dividiendo por  $Q$ , nos queda:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad (5.8)$$

De modo que en la asociación de condensadores en serie se cumple que:

1°.  $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$

2°.  $U = U_1 + U_2 + U_3$

3°.  $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$

### 5.2.5.2 Agrupación de condensadores en paralelo

Cuando los condensadores se agrupan en paralelo la tensión en los extremos del acoplamiento es igual a la tensión entre los extremos de cada condensador.

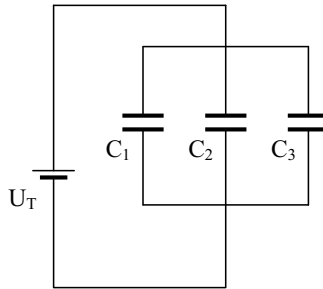


Figura 5.4. Asociación de condensadores en paralelo.

$$U_T = U_1 = U_2 = U_3 \quad (5.9)$$

Cada condensador adquiere una carga según su capacidad, siendo la carga total del acoplamiento igual a la suma de las cargas de cada condensador.

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad (5.10)$$

Como  $C = \frac{Q}{U}$ , tenemos que:

$$Q = C \cdot U_T \quad (5.11)$$

$$Q_1 = C_1 \cdot U_1 \quad (5.12)$$

$$Q_2 = C_2 \cdot U_2 \quad (5.13)$$

$$Q_3 = C_3 \cdot U_3 \quad (5.14)$$

De modo que:

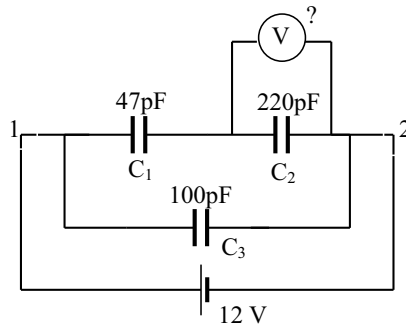
$$C \cdot U_T = C_1 \cdot U_1 + C_2 \cdot U_2 + C_3 \cdot U_3 \quad (5.15)$$

Y como  $U_T = U_1 = U_2 = U_3$ , simplificando  $U$ , nos queda:

$$C = C_1 + C_2 + C_3 \quad (5.16)$$

### Ejercicio de aplicación 5.1

Calcular la capacidad equivalente y la tensión que aparece en el voltímetro.



*Solución:*

El primer paso será encontrar la capacidad equivalente de  $C_1$  y  $C_2$ . Con este resultado podemos encontrar la equivalente entre esta resultante y  $C_3$ .

La capacidad equivalente a  $C_1$  y  $C_2$ , que están en serie, es:

$$C_{eq_{12}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{1}{\frac{C_1 + C_2}{C_1 \cdot C_2}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = 38'73 \text{ pF}$$

La capacidad equivalente de  $C_{eq_{12}}$  y  $C_3$ , es su agrupación en paralelo:

$$C_{eq_t} = C_{eq_{12}} + C_3 = 38'73 \text{ pF} + 100 \text{ pF} = 138'73 \text{ pF}$$

La d.d.p. entre los puntos 1 y 2 es la del generador o pila.

Por tratarse de una agrupación en paralelo:

$$U = U_{12}$$

y por tratarse  $C_{eq_{12}}$  de una agrupación en serie:

$$Q_{12} = Q_1 = Q_2$$

En donde:

$$Q_{12} = C_{eq_{12}} \cdot U \quad \text{y} \quad Q_2 = C_2 \cdot U_2$$

De modo que:

$$C_{eq_{12}} \cdot U = C_2 \cdot U_2$$

Y despejando:

$$U_2 = U \frac{C_{eq_{12}}}{C_2} = 12 \frac{38,73}{220} = 2,11 \text{ V}$$

$$U_1 = U - U_2 = 12 - 2,11 = 9,89 \text{ V}$$

## 5.2.6 Comportamiento de condensadores

### 5.2.6.1 Carga de un condensador a través de una resistencia

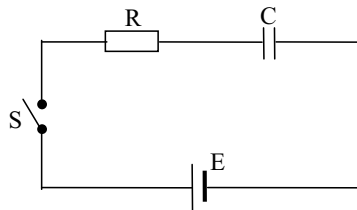


Figura 5.5. Circuito con resistencia y capacidad en serie.

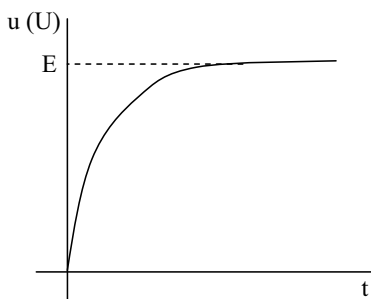
En la figura 5.5 se muestra un circuito denominado  $RC$  por estar formado por una resistencia y un condensador.

En el instante en que se cierra el interruptor  $S$ , la ddp entre los extremos del condensador es cero y, por tanto, toda la tensión del generador queda aplicada a la resistencia. A partir de ese momento, el condensador comienza a cargarse, y durante un tiempo la tensión  $E$  se reparte entre los dos elementos. Cuando el condensador está totalmente cargado, la corriente por el circuito se anula, la ddp en el condensador se hace igual a la fem del generador y la caída de tensión en la resistencia se hace cero. La duración del tiempo de carga depende de los valores de la resistencia y de la capacidad del condensador.

La tensión de carga del condensador se expresa en la siguiente ecuación:

$$u = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (5.17)$$

$E$  es la fem del generador,  $R$  y  $C$  representan el valor de la resistencia y la capacidad respectivamente y  $e$  la base de los logaritmos neperianos cuyo valor es 2,71828. En la figura 5.6 se muestra la representación gráfica de dicha ecuación.



**Figura 5.6.** Carga de un condensador a través de una resistencia.

A diferencia de otras magnitudes que han aparecido anteriormente cuyo valor permanece constante y que se representan con una letra mayúscula ( $E$ ,  $I$ ,  $R$ , etc.) en esta expresión la ddp del condensador  $u$  se escribe con letra minúscula por tratarse de una magnitud variable.

Como fácilmente se puede comprobar en la anterior ecuación, si  $t = 0$  el valor de  $u = 0$ . Si  $t$  vale infinito,  $u = E$ .

Si el condensador estuviera cargado con una tensión  $E_0$  antes de que se cierre el interruptor, tal como se ve en la figura 5.7, la ecuación 5.17 se transformaría en la siguiente:

$$u = E - (E - E_0) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (5.18)$$

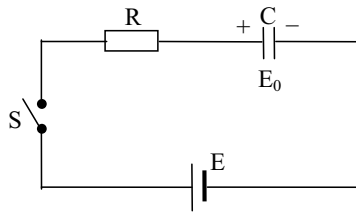


Figura 5.7. Circuito RC con carga inicial.

### 5.2.6.2 Descarga de un condensador a través de una resistencia

Si un condensador cargado con una tensión  $E$  se conecta a través de un interruptor a una resistencia, se producirá un proceso de descarga de características análogas a las de la carga. El tiempo de descarga depende de las mismas variables que el tiempo de carga, es decir, de los valores de  $R$  y  $C$ . el valor de la tensión del condensador en el proceso de descarga se obtiene por aplicación de la siguiente expresión:

$$u = E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (5.19)$$

En la figura 5.8 se muestra la representación gráfica de dicha ecuación.

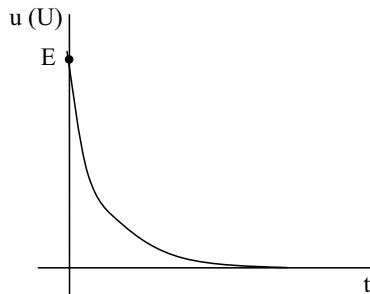


Figura 5.8. Descarga de un condensador a través de una resistencia.



### 5.2.6.3 Constante de tiempo

El producto  $RC$  de las ecuaciones 5.17, 5.18 y 5.19 se denomina constante de tiempo; representa el tiempo durante el cual el condensador adquiere aproximadamente el 63 por 100 de la carga total durante este proceso, o pierde el 63 por 100 de la carga inicial en la descarga. Según las ecuaciones anteriores, la carga y descarga total no se obtiene nunca ( $t = \infty$ ); sin embargo, transcurrido un tiempo igual a cinco constantes de tiempo, el valor de la tensión entre los extremos del condensador se aproxima tanto al valor final ( $E$  o  $0$ ), que se considera cargado o descargado según el proceso en el que se encuentre.

### 5.2.6.4 Energía almacenada por un condensador

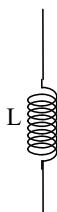
Como hemos señalado anteriormente, el condensador tiene la facultad de almacenar energía en forma de tensión. Acumula energía en el proceso de carga y es capaz de cederla en el de descarga, de manera que la energía neta consumida es nula. El valor de la energía vale:

$$W = \frac{1}{2} C \cdot U^2 \quad (5.20)$$

## 5.3 Inductancias

Además de los resistores y los condensadores, hay un tercer tipo de elementos pasivos: las bobinas o inductancias.

Se representan por este símbolo en los esquemas.



*Figura 5.9. Bobina o inductancia.*

Los inductores son elementos pasivos formados por el arrollamiento de hilo conductor bobinado normalmente sobre un núcleo de una sustancia ferromagnética. La ferrita y la chapa magnética son los materiales más empleados.

Una inductancia es un dispositivo eléctrico que genera un flujo magnético cuando se hace circular por ella una corriente eléctrica. Las inductancias acumulan energía en forma de corriente.

Esta propiedad se mide en Henrios (H).

En una inductancia hay que distinguir dos momentos; cuando la corriente que circula por ella es constante, o cuando no lo es. En un circuito de corriente continua la corriente es constante cuando el régimen de corriente alcanza el estado permanente; pero el entrar o salir en ese estado no es instantáneo. Cuando conectamos un circuito se tarda un tiempo breve, pero diferenciado, en alcanzar el estado permanente. Durante ese periodo de tiempo la intensidad varía desde cero hasta la intensidad del estado permanente. A lo largo de ese intervalo, régimen transitorio por oposición al permanente, la bobina va generando una f.e.m. de sentido contrario al de la tensión que le alimenta, y de magnitud:

$$e = -L \cdot \frac{di}{dt} \quad (5.21)$$

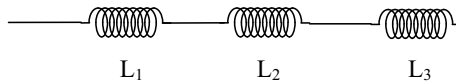
En donde  $L$  es el valor del *coeficiente de autoinducción* en Henrios de esa bobina. El Henrio es la unidad de autoinducción y se corresponde con el valor que ha de tener una bobina para generar una f.e.m. de 1 voltio al variar la intensidad 1 amperio en un segundo.

### 5.3.1 Agrupación de inductancias

Las bobinas pueden agruparse en serie o en paralelo.

#### 5.3.1.1 Inductancias en serie

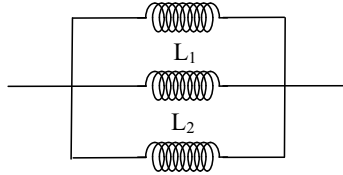
La agrupación de inductancias en serie es equivalente a una única inductancia con arreglo a la expresión:



**Figura 5.10.** Bobinas o inductancias en serie.

$$L_{eq} = \sum_{i=1}^{i=n} L_i \quad (5.22)$$

### 5.3.1.2 Inductancias en paralelo



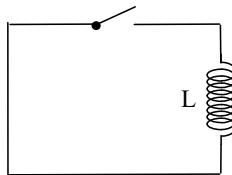
**Figura 5.11.** Bobinas o inductancias en paralelo.

La agrupación de inductancias en paralelo es equivalente a una única inductancia con el valor:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{L_i} \quad (5.23)$$

### 5.3.2 Comportamiento de una bobina

En corriente continua, salvo en los momentos de estado transitorio, una bobina se comporta como una resistencia de valor igual a su propia resistencia interna. Pero vamos a ver qué ocurre en los estados transitorios de un circuito de corriente continua, lo que nos adelanta el comportamiento en un circuito de corriente alterna.



**Figura 5.12.** Circuito con bobina.

Sabemos que:

$$e = \frac{d\Phi}{dt} \quad (5.24)$$

En donde  $\Phi$  es el flujo magnético, y  $e$  es la fuerza electromotriz generada (es minúscula porque es una variable).

Y como:

$$\Phi = L \cdot i \quad (5.25)$$

Tenemos que:

$$d\Phi = L \cdot di \quad (5.26)$$

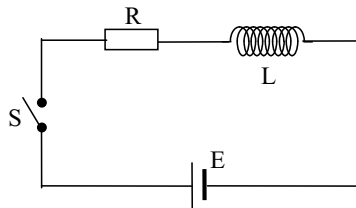
ya que  $L$  es constante.

Y, entonces:

$$e = L \cdot \frac{di}{dt} \quad (5.27)$$

Al cerrar se genera una corriente autoinducida que se opone al paso de corriente.

### 5.3.2.1 Corriente por un circuito con autoinducción y resistencia



**Figura 5.13.** Circuito con autoinducción y resistencia en serie.

En la figura 5.13 se muestra una red formada por una bobina cuya autoinducción vale  $L$  y una resistencia de valor  $R$ , alimentada por un generador de cc.

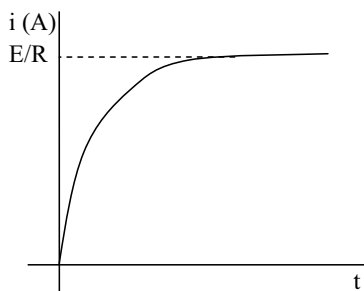
Cuando se cierra el interruptor  $S$ , la autoinducción se comporta como un generador cuya fem se opone a la corriente que circula por el circuito. Como consecuencia de esta fuerza *contraelectromotriz* (denominada de este modo por oponerse a la del generador del circuito), la intensidad de corriente por una red como la de la figura 5.13, que contiene autoinducción, será cero en el momento de cerrarse el interruptor  $S$ , y transcurrirá un tiempo hasta que alcance un valor permanente. Este tiempo depende de los valores de la autoinducción  $L$  y de la resistencia  $R$ .

La expresión que relaciona el valor de la corriente con las magnitudes señaladas anteriormente es la siguiente:

$$i = \frac{E}{R} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{L/R}} \right) \quad (5.28)$$

Cuando  $t = 0$ , la corriente  $i = 0$ ; cuando  $t = \infty$ ,  $i = E/R$ .

En la figura 5.14 se muestra la corriente por un circuito  $RL$  en función del tiempo.

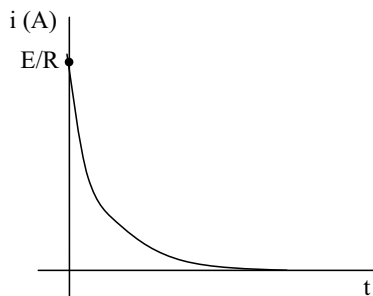


**Figura 5.14.** Establecimiento de la corriente en un circuito inductivo.

Si fuera posible cortocircuitar el generador de una red inductiva por la cual circula una corriente de valor  $E/R$ , ésta no desaparecería instantáneamente, sino que permanecería circulando un tiempo, que depende también en este caso de  $R$  y  $L$ . El valor de la corriente es ahora:

$$i = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{L/R}} \quad (5.29)$$

Esta ecuación se representa en la siguiente figura:



**Figura 5.15.** Desaparición de la corriente en un circuito inductivo.

### 5.3.2.2 Constante de tiempo

La constante de tiempo en un circuito inductivo está determinada por la relación  $L/R$ . Durante la primera constante de tiempo, la corriente crece o disminuye en un 63 por 100 aproximadamente. Al cabo de un tiempo equivalente a cinco constantes de tiempo ( $t = 5L/R$ ), la corriente habrá alcanzado su valor final.

### 5.3.2.3 Energía almacenada en una inductancia

La autoinducción almacena la energía en el proceso de establecimiento de la corriente desde el momento en que se cierra el interruptor (figura 5.13) hasta que su valor se hace permanente. Esta energía es cedida al circuito cuando se elimina el generador, es decir, cuando la corriente tiende a disminuir. La energía neta consumida es cero.

La energía que es capaz de almacenar una inductancia en forma de campo magnético es, expresada en Joule:

$$W = \frac{1}{2} L \cdot I^2 \quad (5.30)$$

## Ejercicio de aplicación 5.2

*Una bobina de 100 mH de coeficiente de autoinducción se encuentra en un circuito en el que la corriente pasa de 0 a 10 Amperios en 4 milisegundos. Determinar la f.e.m. autoinducida.*

*Solución:*

Como sabemos:

$$e = -L \cdot \frac{dI}{dt}$$

De modo que:

$$e = -0,1 \cdot \frac{10}{4 \cdot 10^{-3}} = -250V$$

Ahora bien, ¿Cómo debería ser  $L$  para generar -500V?

$$L = \frac{e \cdot \Delta t}{\Delta I} = \frac{500 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{10} = 0,2H = 200mH$$

## **6. Bibliografía**

- ALCALDE SAN MIGUEL, P. **Curso de electricidad general**. Paraninfo, Madrid, 2003.
- ALCALDE SAN MIGUEL, P. **Electrotecnia**. Thomson Paraninfo, Madrid, 2010.
- BRUCE CARLSON, A. **Teoría de Circuitos**. Thomson Paraninfo, Madrid, 2002.
- CASTEJÓN OLIVA, A Y SANTAMARÍA HERRANZ, G. **Tecnología Eléctrica**. McGraw-Hill. Madrid, 1993.
- DE FRANCISCO GARCÍA, A., FERNÁNDEZ-GOLFÍN SECO, J.J. Y ILLANES MUÑOZ, R. **Fundamentos de Electricidad y Magnetismo. Teoría de Circuitos**. UPM. ETSIM. Fundación Conde del Valle de Salazar, Madrid, 1993.
- DE FRANCISCO GARCÍA, A., HIDALGO M., FERNÁNDEZ-GOLFÍN SECO J.J., ILLANES MUÑOZ R. **Problemas de Electrotecnia**. UPM. ETSIM. Fundación Conde del Valle de Salazar, Madrid, 1995.
- DE LA PLAZA PÉREZ, S. **Electrotecnia y Electrificación Rural**, UPM. ETSIA, Madrid, 2001.
- DURAN, J.L., GAMIZ, J., DOMINGO, J., MARTÍNEZ H. **Electrotecnia**, MARCOMBO-ALTAMAR.
- EDMINISTER, J.A. Y NAHVI,M. **Circuitos Eléctricos**. McGraw-Hill. Madrid, 1997.
- FRAILE MORA, JESÚS **Máquinas Eléctricas**. McGraw Hill, 2008.
- FOUILLE, ANDRÚ **Compendio de Electrotecnia**, MARCOMBO, S.A.
- GARCÍA MARÍ, E., ADRADOS BLAISE-OMBRECHT, C. Y GUTIÉRREZ MONTES, J.L. **Electrotecnia**. UPV. ETSIA. Valencia, 1999.
- GARCIA TRASANCOS, J. **Electrotecnia: 350 conceptos teóricos y 800 problemas**. Thomson Paraninfo. Madrid, 2009.
- GIL PADILLA, A.J. **Electrónica General**. McGraw-Hill. Madrid, 2005.
- HUMET CORDERCH, L., ALABERN MORERA, X. **Test de Electrotecnia, Fundamentos de Circuitos**, MARCOMBO, S.A., 1997.

LEA, S.M., BURKE, J.R. **Física**, Paraninfo-Thomson Learning, 2001.

MARTÍNEZ DOMINGUEZ, F. **Tecnología Eléctrica**. Thomson Paraninfo, Madrid, 2003.

MORENO, N., BACHILLER, A. Y BRAVO, J.C. **Problemas Resueltos de Tecnología Eléctrica**. Thomson Paraninfo, Madrid, 2003.

PFESTORF G.K.M. y EDELMANN, H. **Campos Eléctrico y Magnético (III tomo de Manuel práctico de Electrotecnia)**, Ediciones Urmo, 1966.

Ras Oliva, E. **Teoría de Circuitos**, MARCOMBO, S.A., 1988.

Richard C. Dorf y James A. Svoboda **Circuitos eléctricos introducción al análisis y diseño**, MARCOMBO, S.A.

SANJURJO NAVARRO, R. **Máquinas Eléctricas** McGraw Hill, 1989.

SANTAMARÍA HERRANZ, G Y CASTEJÓN OLIVA, A. **Electrotecnia**. Editex. Madrid, 2009.

SUÁREZ CREO, JUAN M., MIRANDA BLANCO, BLANCA N. **Máquinas Eléctricas, funcionamiento en régimen permanente**, Tórculo ediciones, 2006.

TOVAR PESCADOR, J. HERNANDEZ ALVARO, J. **Electricidad y Magnetismo**. Univ. Jaén. 2001.

VAN VALKENBURG NOOGER & NEVILLE **Electricidad básica**, MARCOMBO, S.A., 1990.