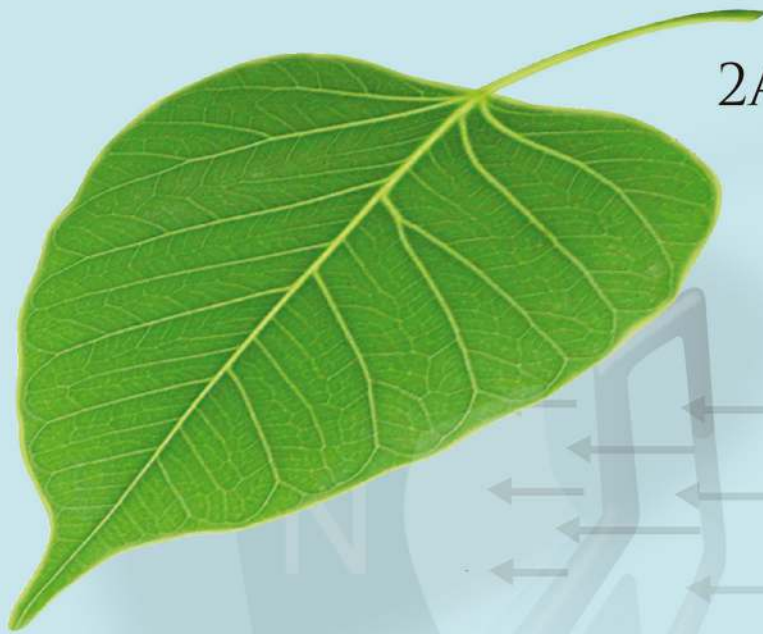


# MÁQUINAS ELÉCTRICAS

Técnicas Modernas de Control

**Pedro Ponce Cruz**

2A. EDICIÓN



 **Alfaomega**

**Director Editorial**  
Marcelo Grillo Giannetto  
*mgrillo@alfaomega.com.mx*

**Jefe de Ediciones**  
Francisco Javier Rodríguez Cruz  
*jrodriguez@alfaomega.com.mx*

Datos catalográficos

Ponce Cruz, Pedro  
Máquinas Eléctricas. Técnicas Modernas de Control  
2ª Edición

Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V., México

ISBN 978-607-622-688-9

Formato: 21 × 24 cm

Páginas: 776

**Máquinas Eléctricas. Técnicas Modernas de Control**

Pedro Ponce Cruz

Derechos reservados ©Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V., México.

Segunda edición: Alfaomega Grupo Editor, México, diciembre de 2016

©2017 Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V.

Dr. Isidoro Olvera (Eje 2 Sur) No. 74, Col. Doctores, C.P. 06720, Ciudad de México, México

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana

Registro No. 2317

Pág. Web: <http://www.alfaomega.com.mx>

E-mail: [atencionalcliente@alfaomega.com.mx](mailto:atencionalcliente@alfaomega.com.mx)

ISBN: 978-607-622-688-9

**Derechos reservados:**

Esta obra es propiedad intelectual de sus autores y los derechos de publicación en lengua española han sido legalmente transferidos al editor. Prohibida su reproducción parcial o total por cualquier medio sin permiso por escrito del propietario de los derechos del copyright. Esta obra fue compuesta en Latex usando MiKTeX 2.8.

**Nota importante:**

La información contenida en esta obra tiene un fin exclusivamente didáctico y, por lo tanto, no está previsto su aprovechamiento a nivel profesional o industrial. Las indicaciones técnicas y programas incluidos, han sido elaborados con gran cuidado por los autores y reproducidos bajo estrictas normas de control. ALFAOMEGA GRUPO EDITOR, S.A. de C.V. no será jurídicamente responsable por: errores u omisiones; daños y perjuicios que se pudieran atribuir al uso de la información comprendida en este libro, ni por la utilización indebida que pudiera dársele.

Edición autorizada para venta en todo el mundo.

**Impreso en México. Printed in Mexico.**

**Empresas del grupo:**

**México:** Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V. Dr. Isidoro Olvera (Eje 2 sur) No. 74, Col. Doctores, C.P. 06720, Del. Cuauhtémoc, Ciudad de México. Tel.: (52-55) 5575-5022 - Fax: (52-55) 5575-2420 / 2490. Sin costo: 01-800-020-4396  
E-mail: [atencionalcliente@alfaomega.com.mx](mailto:atencionalcliente@alfaomega.com.mx)

**Colombia:** Alfaomega Colombiana S.A. – Calle 62 No. 20-46, Barrio San Luis, Bogotá, Colombia.

Tels.: (57-1) 746 0102 / 210 0415 – E-mail: [cliente@alfaomega.com.co](mailto:cliente@alfaomega.com.co)

**Chile:** Av. Providencia 1443. Oficina 24, Santiago, Chile

Tel.: (56-2) 2235-4248 – Fax: (56-2) 2235-5786 – E-mail: [agechile@alfaomega.cl](mailto:agechile@alfaomega.cl)

**Argentina:** Alfaomega Grupo Editor Argentino, S.A. – Av. Córdoba 1215, piso 10, CP: 1055, Buenos Aires, Argentina.

Tel./Fax: (54-11) 4811-0887 y 4811 7183 – E-mail: [ventas@alfaomegaeditor.com.ar](mailto:ventas@alfaomegaeditor.com.ar)

## Acerca del autor



Pedro Ponce nació el 3 de junio de 1971, estudió la carrera de Ingeniería en Control y Automatización graduándose en 1995. Posteriormente, realizó sus estudios de posgrado en el mismo instituto, obteniendo los grados de Maestro en Ciencias en 1998 y de Doctor en Ciencias en el 2001, tiene la especialidad en ingeniería eléctrica opción control automático, con líneas de investigación en control, automatización, robótica, inteligencia artificial, máquinas eléctricas, fuentes alternas de energía, entre otras. Se desempeñó como ingeniero de campo y diseño en Speed Control, así como ingeniero de proyectos de desarrollo industrial Nivel II, además de ser asesor de diversas compañías transnacionales, con más de 10 años de experiencia en proyectos para la industria.

Se especializó en las áreas de automatización de sistemas industriales, máquinas eléctricas, accionamientos eléctricos, electrónica de potencia, control lineal convencional y digital, sistemas expertos, redes neuronales y sistemas evolutivos. Tiene escritos 10 libros y 6 capítulos, en diferentes editoriales nacionales e internacionales. Ha asesorado más de 35 tesis de licenciatura y posgrado en el área de control y automatización. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores y ha recibido numerosos reconocimientos, entre los que destacan:

- Reconocimiento por labor docente en la ESIME, Instituto Politécnico Nacional.
- Medalla al mérito académico como mejor profesor de posgrado de la Escuela de Graduados en Ingeniería y Arquitectura, del Tecnológico de Monterrey, Campus Ciudad de México en 2005.
- Mejor profesor en el área de la División de Ingeniería y Arquitectura del Tecnológico de Monterrey, Campus Ciudad de México en el 2006.
- Primer lugar en el Premio Internacional Graphical System Design en la categoría de Biotecnología y Ciencias de la Vida otorgado en Estados Unidos por la compañía National Instruments.
- Mente Discovery -Quo área tecnología.
- Investigador encargado de uno de los 10 proyectos que transforman México otorgado por el Tecnológico de Monterrey.

Tiene certificaciones por varias compañías e institutos internacionales entre los que destacan: National Instruments, Motorola, Texas Instruments, Siemens y el Massachusetts Institute of Technology (MIT). Tiene estancias de investigación en Europa y Estados Unidos y cuenta con más de 90 publicaciones en revistas de renombre académico y conferencias. Ha solicitado 16 patentes nacionales y una patente internacional, y actualmente es Investigador del Tecnológico de Monterrey, Campus Ciudad de México.

# Mensaje del Editor

Una de las convicciones fundamentales de Alfaomega es que los conocimientos son esenciales en el desempeño profesional, ya que sin ellos es imposible adquirir las habilidades para competir laboralmente. El avance de la ciencia y de la tecnología hace necesario actualizar continuamente esos conocimientos, y de acuerdo con esta circunstancia Alfaomega publica obras actualizadas, con alto rigor científico y técnico, y escritas por los especialistas del área respectiva más destacados.

Consciente del alto nivel competitivo que debe de adquirir el estudiante durante su formación profesional, Alfaomega aporta un fondo editorial que se destaca por sus lineamientos pedagógicos que coadyuvan a desarrollar las competencias requeridas en cada profesión específica.

De acuerdo con esta misión, con el fin de facilitar la comprensión y apropiación del contenido de esta obra, cada capítulo inicia con el planteamiento de los objetivos del mismo y con una introducción en la que se plantean los antecedentes y una descripción de la estructura lógica de los temas expuestos, asimismo a lo largo de la exposición se presentan ejemplos desarrollados con todo detalle y cada capítulo concluye con un resumen y una serie de ejercicios propuestos.

Además de la estructura pedagógica con que está diseñado el contenido de nuestros libros, Alfaomega hace uso de los medios impresos tradicionales en combinación con las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) para facilitar el aprendizaje. Correspondiente a este concepto de edición, todas nuestras obras tienen su complemento en una página Web en donde el alumno y el profesor encontrarán lecturas complementarias así como programas desarrollados en relación con temas específicos de la obra.

Los libros de Alfaomega están diseñados para ser utilizados en los procesos de enseñanza aprendizaje, y pueden ser usados como textos en diversos cursos o como apoyo para reforzar el desarrollo profesional, de esta forma Alfaomega espera contribuir así a la formación y al desarrollo de profesionales exitosos para beneficio de la sociedad, y espera ser su compañera profesional en este viaje de por vida por el mundo del conocimiento.

*Si una palabra dice muchas cosas, qué podrá decir un libro  
cuando sea comprendido en su totalidad*

*Para Norma, Pedro y Jamie con todo mi corazón*

## Agradecimientos

*Al Tecnológico de Monterrey y al Editor Javier Rodríguez, que me permiten transformar mis notas en libros que pueden llegar a manos de estudiantes que están fuera de mi salón de clase.*

# Contenido

<b>Introducción</b>	<b>XIX</b>
<b>PRIMERA PARTE</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo 1. Circuitos magnéticos</b>	<b>3</b>
1.1. Problema de diseño . . . . .	4
1.2. Introducción . . . . .	5
1.3. Flujo magnético y ley de Ampère . . . . .	7
1.4. Circuitos magnéticos . . . . .	9
1.4.1. Excitación de núcleos ferromagnéticos con corriente continua . . . . .	9
1.4.2. Ley de Ohm para circuitos magnéticos . . . . .	9
1.4.3. Curva de magnetización y saturación . . . . .	18
1.4.4. Energía magnética almacenada . . . . .	20
1.5. Materiales ferromagnéticos . . . . .	21
1.5.1. Curva de histéresis . . . . .	23
1.6. Ley de inducción de Faraday . . . . .	25
1.6.1. Regla de la mano izquierda . . . . .	28
1.7. Inductancia magnética . . . . .	29
1.7.1. Diseño de bobinas . . . . .	31
1.7.2. Formas de núcleos ferromagnéticos . . . . .	32
1.8. Excitación senoidal en circuitos magnéticos . . . . .	33
1.8.1. Pérdida de energía por corrientes de Foucault . . . . .	36
1.9. Aplicaciones de los circuitos magnéticos . . . . .	39
1.10. Solución del problema de diseño . . . . .	40
1.11. Problemas propuestos . . . . .	42
1.12. Resumen . . . . .	51
1.13. Problemas . . . . .	52

<b>Capítulo 2. Balance de energía electromecánica</b>	<b>55</b>
2.1. Problema de diseño . . . . .	56
2.2. Introducción . . . . .	59
2.3. Transformación de la energía electromecánica . . . . .	62
2.4. Mecánica de los motores y de los generadores de corriente continua . . . . .	63
2.5. Relación de fuerza de Biot y Savat . . . . .	67
2.6. Otras leyes relacionadas . . . . .	68
2.7. Máquinas de corriente alterna . . . . .	69
2.8. Máquinas de inducción . . . . .	72
2.9. Balance de energía . . . . .	77
2.9.1. Energía y fuerza en sistemas de campos magnéticos . . . . .	79
2.10. Determinación de la fuerza magnética (coenergía) . . . . .	82
2.11. Solución del problema de diseño . . . . .	86
2.12. Problemas resueltos . . . . .	100
2.13. Resumen . . . . .	106
2.14. Problemas . . . . .	106
<b>SEGUNDA PARTE</b>	<b>111</b>
<b>Capítulo 3. Teoría del transformador</b>	<b>113</b>
3.1. Problema de diseño . . . . .	114
3.2. Introducción . . . . .	115
3.3. El transformador eléctrico . . . . .	117
3.3.1. Estructura del transformador . . . . .	120
3.3.2. F.E.M inducida . . . . .	128
3.3.3. Relación de transformación . . . . .	130
3.3.4. Polaridad . . . . .	134
3.4. Deducción del circuito equivalente . . . . .	137
3.5. Análisis de comportamiento bajo distintas cargas. . . . .	144
3.5.1. Regulación. . . . .	144
3.5.2. Eficiencia . . . . .	147
3.6. Por ciento y por unidad de impedancia . . . . .	148
3.7. Autotransformadores. . . . .	151
3.7.1. Características de los autotransformadores . . . . .	152
3.8. Solución del problema de diseño . . . . .	154



3.9. Problemas resueltos . . . . .	155
3.10. Resumen . . . . .	164
3.11. Problemas . . . . .	166
<b>Capítulo 4. Operación del transformador en sistemas eléctricos</b>	<b>171</b>
4.1. Problema de diseño inicial . . . . .	172
4.1.1. Diseño de un transformador . . . . .	172
4.2. Introducción . . . . .	173
4.3. Conexión de transformadores . . . . .	174
4.3.1. Requisitos de polaridad, transformación, impedancia, secuencia y desplazamiento angular . . . . .	179
4.4. Transformador trifásico . . . . .	183
4.4.1. Características y ventajas . . . . .	186
4.4.2. Auxiliares: Tanque, boquilla, aceite, etcétera . . . . .	193
4.5. Clasificación y selección de transformadores . . . . .	197
4.6. Solución al problema de diseño . . . . .	200
4.7. Problemas resueltos. . . . .	200
4.8. Resumen . . . . .	212
4.9. Problemas . . . . .	213
<b>Capítulo 5. Transformadores de distribución</b>	<b>219</b>
5.1. Problema de diseño . . . . .	220
5.2. Introducción . . . . .	221
5.3. Conexiones y funcionamientos de los transformadores . . . . .	221
5.3.1. Polaridad . . . . .	255
5.3.2. Conexiones de los transformadores en circuitos monofásicos. . . . .	256
5.3.3. División de la carga entre transformadores en paralelo . . . . .	257
5.4. Transformadores monofásicos en circuitos bifásicos . . . . .	260
5.5. Tres transformadores en circuito trifásico . . . . .	261
5.6. Características del funcionamiento de la conexión Y-Y . . . . .	264
5.7. La conexión en $\Delta$ abierta o en V . . . . .	265
5.8. Funcionamiento en paralelo de transformadores conectados en $\Delta$ abierta y en $\Delta$ cerrada . . . . .	266
5.9. Características de funcionamiento de las conexiones $\Delta - Y$ e $Y - \Delta$ . . . . .	272
5.10. Funcionamiento en paralelo de conexiones en Y-Y, $\Delta - \Delta$ ; $\Delta - Y$ y $Y - \Delta$ . . . . .	272
5.11. Conexión en T en los sistemas trifásicos . . . . .	276

5.12. Protección de transformadores de distribución . . . . .	279
5.13. Autotransformadores . . . . .	281
5.14. Cálculo de pérdidas y su optimización . . . . .	282
5.15. Normas de diseño, pruebas y puesta en servicio . . . . .	292
5.16. Respuesta al problema de diseño . . . . .	295
5.17. Resumen . . . . .	296
5.18. Problemas resueltos . . . . .	297
5.19. Problemas . . . . .	305

## **Capítulo 6. Transformadores de potencia 307**

6.1. Introducción . . . . .	308
6.2. Introducción a los transformadores de potencia . . . . .	309
6.3. Tipo de transformadores de potencia . . . . .	311
6.4. Tipos de aislamiento . . . . .	316
6.5. Curvas teóricas de calentamiento y refrigeración . . . . .	319
6.6. Tipos de refrigeración en los transformadores de potencia . . . . .	321
6.7. Elevación de temperatura debido a cortocircuitos: esfuerzos mecánicos . . . . .	323
6.8. Conexiones de bancos de transformadores monofásicos y trifásicos . . . . .	326
6.9. Cálculo de pérdidas y su optimización . . . . .	329
6.10. Normas de diseño, pruebas, y puesta en servicio . . . . .	330
6.11. Problemas resueltos . . . . .	333
6.12. Resumen . . . . .	349
6.13. Problemas propuestos . . . . .	353

## **TERCERA PARTE 357**

### **Capítulo 7. Motor de inducción polifásico 359**

7.1. Introducción . . . . .	360
7.2. Principios básicos del motor de inducción trifásico . . . . .	361
7.3. Principio de funcionamiento del campo magnético rotatorio trifásico . . . . .	364
7.4. Circuito equivalente para el motor de inducción . . . . .	365
7.5. Circuito equivalente aproximado . . . . .	370
7.6. Diagrama de potencias . . . . .	370
7.7. Ecuación del par electromagnético empleando el circuito aproximado . . . . .	372
7.8. Ecuación del par electromagnético empleando el circuito equivalente . . . . .	373

7.9. Análisis del comportamiento dinámico de un motor de inducción . . . . .	375
7.10. NEMAS y tipos de arranque . . . . .	377
7.11. Arranque estrella - delta . . . . .	378
7.12. Motores de inducción con diferentes características en el rotor . . . . .	380
7.13. Problemas del motor de inducción trifásico . . . . .	381
<b>Capítulo 8. Máquinas síncronas</b>	<b>395</b>
8.1. Introducción . . . . .	396
8.2. Clasificación y construcción física . . . . .	397
8.3. Circuito equivalente de la máquina síncrona . . . . .	399
8.4. Problemas . . . . .	404
<b>Capítulo 9. El generador síncrono</b>	<b>411</b>
9.1. Introducción . . . . .	413
9.2. Tipos de rotores . . . . .	414
9.3. Sistemas de excitación . . . . .	415
9.4. Devanado de estator y de rotor . . . . .	415
9.5. Cálculo del factor de paso . . . . .	416
9.5.1. Bobinas del rotor . . . . .	416
9.6. Cálculo del factor de distribución . . . . .	418
9.7. Velocidad síncrona . . . . .	420
9.8. Flujo rotatorio de reacción de armadura . . . . .	420
9.9. Pruebas a generadores: Curva de saturación y prueba de corto circuito . . . . .	421
9.9.1. Curva de saturación . . . . .	425
9.10. Diagrama fasorial . . . . .	426
9.11. Relación de corto circuito y de reactancia síncrona . . . . .	427
9.12. Operación con carga resistiva y su diagrama fasorial . . . . .	429
9.13. Operación con carga inductiva y su diagrama fasorial . . . . .	430
9.14. Operación con carga capacitiva y su diagrama fasorial . . . . .	430
9.15. Prueba de excitación y de factor de potencia igual a cero ( $F.P. = 0$ ), para la obtención de la reactancia de dispersión por el método del Triángulo de Potier . . . . .	431
9.16. Diagrama fasorial con la reactancia síncrona . . . . .	434
9.17. Límite de estabilidad estática del generador . . . . .	438
9.18. Diagramas circulares y la construcción de la curva de capacidad de un generador . . . . .	440
9.19. Reactancias del generador en cortocircuito trifásico . . . . .	441

9.20. Sistemas de regulación de voltaje . . . . .	442
9.21. Diagrama fasorial . . . . .	442
9.22. Problemas resueltos . . . . .	444
9.23. Resumen . . . . .	452
9.24. Problemas . . . . .	453
<b>Capítulo 10. Operación de generadores síncronos en estado estable</b>	<b>457</b>
10.1. Introducción . . . . .	458
10.2. Operación de generadores . . . . .	459
10.2.1. Características de circuito abierto y de corto circuito . . . . .	462
10.2.2. Análisis del comportamiento bajo diferentes condiciones de carga . . . . .	466
10.2.3. Diagrama de Potier . . . . .	471
10.2.4. Teoría de las dos reactancias. Teoría de Blondel . . . . .	476
10.2.5. Ángulo de potencia . . . . .	479
10.2.6. Diagrama de capacidad . . . . .	480
10.2.7. Operación en paralelo . . . . .	484
10.3. Especificaciones y normas . . . . .	487
10.4. Problemas resueltos . . . . .	488
10.5. Resumen . . . . .	495
10.6. Problemas . . . . .	496
<b>Capítulo 11. Operación de motores y condensadores síncronos</b>	<b>501</b>
11.1. Introducción . . . . .	502
11.2. Motores síncronos . . . . .	502
11.2.1. Principio de operación y características constructivas . . . . .	504
11.2.2. Arranque . . . . .	509
11.2.3. Diagrama fasorial . . . . .	511
11.2.4. Curvas “V” . . . . .	516
11.2.5. Análisis de comportamiento bajo diferentes condiciones de carga . . . . .	517
11.3. Condensadores síncronos . . . . .	518
11.3.1. Control de tensión y de factor de potencia . . . . .	519
11.3.2. Arranque . . . . .	520
11.4. Problemas resueltos . . . . .	521
11.5. Resumen . . . . .	529
11.6. Problemas . . . . .	530

<b>CUARTA PARTE</b>	<b>533</b>
<b>Capítulo 12. Máquinas de corriente continua</b>	<b>535</b>
12.1. Introducción . . . . .	536
12.2. Partes principales de las máquinas de c.c. . . . .	536
12.3. Clasificación de las máquinas de c.c. . . . .	538
12.4. Motor serie . . . . .	538
12.5. Motor paralelo . . . . .	541
12.6. Motor compuesto . . . . .	544
12.7. Generador serie . . . . .	546
12.8. Generador paralelo . . . . .	547
12.9. Generador compuesto . . . . .	549
12.10. Problemas . . . . .	550
<b>Capítulo 13. Accionamientos eléctricos de velocidad variable</b>	<b>557</b>
13.1. Introducción . . . . .	559
13.2. Característica mecánica de los accionamientos eléctricos . . . . .	563
13.2.1. Característica mecánica de las máquinas eléctricas . . . . .	565
13.3. Accionamiento eléctrico de velocidad variable para motores de corriente continua . . . . .	566
13.3.1. Características mecánicas de motor de corriente continua de excitación independiente	566
13.3.2. Característica mecánica del motor serie . . . . .	567
13.3.3. Variables de estado y diagramas de bloques para la representación de la máquina de corriente continua . . . . .	568
13.3.4. Modelado del motor de c.c. en diagrama de bloques . . . . .	576
13.3.5. Modelado empleando diagrama de bloques para el motor de c.c. . . . .	578
13.4. Función de transferencia experimental . . . . .	579
13.5. Control en cascada en motores de corriente continua . . . . .	583
13.6. Elementos básicos de electrónica de potencia que conforman el convertidor . . . . .	584
13.6.1. Convertidor estático de c.c. a c.c. . . . .	587
13.7. Diagrama de bloques simplificado de control de posición de un motor . . . . .	590
13.8. Observador lineal en motores de corriente continua . . . . .	598
13.9. Retroalimentación de estados . . . . .	602
13.10. Pasos básicos para la retroalimentación de estado . . . . .	607
13.11. Accionamiento eléctrico de velocidad variable para motores de inducción . . . . .	611
13.12. Control por variación de la resistencia del rotor . . . . .	612

13.13. Control del voltaje de línea . . . . .	613
13.14. Operación a frecuencia de deslizamiento constante . . . . .	616
13.14.1. Control de velocidad en lazo cerrado . . . . .	616
13.14.2. Control de velocidad por límite de corriente . . . . .	617
13.14.3. Control escalar voltaje/frecuencia . . . . .	617
13.15. Esquema de control general . . . . .	621
13.16. Operación voltaje/frecuencia en diferentes zonas de operación . . . . .	624
13.17. Métodos de control del inversor . . . . .	625
13.17.1. Convertidor estático de frecuencia (c.c/c.a.) como fuente de voltaje . . . . .	625
13.17.2. Topología básica de la etapa de alimentación . . . . .	626
13.17.3. Inversor como fuente de voltaje o fuente de corriente . . . . .	626
13.17.4. Inversor trifásico (como fuente de voltaje) aplicando el método de los seis pasos . . . . .	627
13.18. Inversor PWM senoidal . . . . .	630
13.19. Medición de la distorsión armónica . . . . .	633
13.19.1. Factor de potencia . . . . .	633
13.19.2. Armónicos en un motor de inducción . . . . .	634
13.19.3. Pérdidas por armónicos en el motor de inducción . . . . .	635
13.19.4. Pulsaciones de par . . . . .	636
13.20. Formas de corriente, voltaje y velocidad para un esquema $v/f$ . . . . .	637
13.21. Control en lazo cerrado de velocidad para un motor de inducción utilizando el control de voltaje-frecuencia . . . . .	640
13.21.1. Esquema de lazo cerrado de velocidad . . . . .	641
13.21.2. Resultados experimentales de velocidad . . . . .	643
<b>Capítulo 14. Control vectorial de los motores de inducción</b>	<b>647</b>
14.1. Introducción . . . . .	649
14.2. Principios de control vectorial con orientación del flujo del rotor . . . . .	653
14.3. Localización del vector de flujo del rotor . . . . .	659
14.4. Implementación del control vectorial . . . . .	661
14.5. Método directo de campo orientado . . . . .	662
14.6. Método indirecto de campo orientado . . . . .	664
14.7. Cálculo de la corriente de magnetización modificada . . . . .	666
14.7.1. Bloque de cálculo de las componentes de corrientes de referencia $i^{*ds}$ e $i^{*qs}$ y de la velocidad de deslizamiento de referencia $\omega_2$ . . . . .	668
14.7.2. Cálculo del vector unitario . . . . .	669

14.7.3. Transformación inversa de coordenadas . . . . .	669
14.8. Principios básicos para el desarrollo del control vectorial . . . . .	670
14.8.1. Técnica de modulación de banda de histéresis . . . . .	670
14.8.2. Diagrama de conmutación de un controlador de histéresis . . . . .	673
14.9. Análisis del desempeño del PWM banda de histéresis . . . . .	676
14.10. Estimación del flujo rotórico . . . . .	680
14.11. Estimación de la resistencia del rotor . . . . .	680
14.12. Estimación de la constante de tiempo del rotor mediante un modelo de flujo adaptable del sistema . . . . .	684
14.12.1. Obtención de los modelos fijo y adaptable del flujo del rotor . . . . .	684
14.13. Control de flujo y velocidad . . . . .	688
14.13.1. Control del flujo . . . . .	688
14.13.2. Control de velocidad . . . . .	689
14.13.3. Estabilidad del sistema . . . . .	693
14.14. Respuesta global del control vectorial . . . . .	694
14.15. Eliminación de sensores de velocidad en accionamientos de motores de inducción . . . . .	696
14.15.1. Empleo de observadores y estimadores en el control vectorial . . . . .	696
14.15.2. El filtro de Kalman . . . . .	700
14.15.3. Covarianza del ruido . . . . .	701
14.15.4. Estructura del filtro . . . . .	702
14.15.5. Filtro de Kalman discreto . . . . .	702
14.15.6. Modelo dinámico del motor de inducción . . . . .	707
14.15.7. Modelo de Brunsbach . . . . .	707
14.15.8. Modelo de Vasson . . . . .	708
14.15.9. Modelo discretizado del motor . . . . .	709
14.16. Redes neuronales artificiales (RNA) para la estimación de la velocidad . . . . .	710
14.16.1. Introducción . . . . .	710
14.16.2. Principios básicos de redes neuronales . . . . .	713
<b>Capítulo 15. Control directo del par</b>	<b>717</b>
15.1. Introducción . . . . .	718
15.2. Principios básicos del control directo del par . . . . .	724
15.3. Esquema convencional del control directo del par . . . . .	727
15.4. Inversor fuente de voltaje (VSI) empleado en el DTC . . . . .	729
15.5. Resultados del desempeño dinámico del control directo del par . . . . .	731

15.6. Problema de la distorsión del flujo del estator cuando ocurre un cambio de sector durante la rotación del flujo magnético del estator en el DTC . . . . .	735
15.7. Sectores variables en el control directo del par . . . . .	735
15.8. Lazo cerrado de velocidad en el control directo del par . . . . .	742

## **EN LA PÁGINA WEB DEL LIBRO:**

### **Capítulo 16. Máquinas eléctricas especiales**

- 16.1 Introducción
- 16.2 Energía maremotriz
- 16.3 Energía geotérmica
- 16.4 Usos de la energía geotérmica
- 16.5 Energía nuclear
- 16.6 La energía eólica
- 16.7 Energías renovables
- 16.8 Aplicaciones de las máquinas eléctricas especiales
- 16.9 Nano máquinas
- 16.10 Vehículos híbridos y eléctricos
- 16.11 Bibliografía



# Introducción

Esta obra cubre los temas esenciales de los cursos de máquinas eléctricas en donde se revisan los conceptos de circuitos magnéticos, transformadores y máquinas eléctricas rotatorias. En este sentido el objetivo central del libro es dar al lector información clara de los modelos que gobiernan las máquinas eléctricas y los sistemas de control empleados, para poder usarlos de manera exitosa en aplicaciones industriales.

Además de conservarse los capítulos y ejemplos expuestos en la edición anterior, esta nueva edición está reforzada en temas que son muy importantes desde el punto de vista de las máquinas eléctricas y las técnicas de control modernas: se profundiza en el tema de transformadores eléctricos monofásicos y trifásicos; se muestran de manera clara las prácticas de laboratorio que se realizan con cada una de las máquinas eléctricas, además de experimentos de controladores de máquinas eléctricas rotatorias y estacionarias. En particular en el capítulo 16 se abordan temas como energías alternas, entre las que se encuentran la energía nuclear y la mareomotriz, que permitirán al estudiante poder lograr una comprensión clara de las nuevas tendencias tecnológicas en la energía eléctrica.

Esta nueva edición de *Máquinas Eléctricas* es una obra que ayudará no sólo a los profesionistas y estudiantes de ingeniería a actualizar sus conocimientos, sino también a adquirir conocimientos básicos de ingeniería eléctrica.

## Material Web de apoyo

Finalmente, además del contenido descrito este libro cuenta con material Web de apoyo que permitirá reforzar, complementar, y enriquecer los conocimientos del alumno y auxiliar al maestro en su tarea.

**Pedro Ponce Cruz**

# Registro en la Web de apoyo

Para tener acceso al material de la plataforma de contenidos interactivos de este libro, siga los siguientes pasos:

1. Ir a la página: <http://libroweb.alfaomega.com.mx>
2. Registrarse como usuario del sitio y propietario del libro.
3. Ingresar al apartado de inscripción de libros y registrar la siguiente clave de acceso:
  
4. Para navegar en la plataforma virtual de recursos del libro, usar los nombres de Usuario y Contraseña definidos en el punto número dos. El acceso a estos recursos es limitado. Si quiere un número extra de accesos envíe un correo electrónico a [webmaster@alfaomega.com.mx](mailto:webmaster@alfaomega.com.mx).

Estimado profesor: si desea acceder a los contenidos exclusivos para docentes, contacte al representante de la editorial que lo suele visitar o envíe un correo electrónico a [webmaster@alfaomega.com.mx](mailto:webmaster@alfaomega.com.mx).

# Primera parte

**Capítulo 1 Circuitos magnéticos**

**Capítulo 2 Balance de energía electromecánica**

## Capítulo 1

### Circuitos magnéticos

- 1.1 Problema de diseño
- 1.2 Introducción
- 1.3 Flujo magnético y ley de Ampère
- 1.4 Circuitos magnéticos
- 1.5 Materiales ferromagnéticos
- 1.6 Ley de inducción de Faraday
- 1.7 Inductancia magnética
- 1.8 Excitación senoidal en circuitos magnéticos
- 1.9 Aplicaciones de los circuitos magnéticos
- 1.10 Solución del problema de diseño
- 1.11 Problemas resueltos
- 1.12 Resumen
- 1.13 Problemas

*La mayoría de las ideas fundamentales de la ciencia son esencialmente sencillas y, por regla general pueden ser expresadas en un lenguaje comprensible para todos.*

Albert Einstein

### Competencias del capítulo

- Comprender los principios fundamentales de los circuitos magnéticos.
- Establecer analogías eléctricas y magnéticas.
- Relacionar las máquinas eléctricas con los circuitos magnéticos que los describen.
- Familiarizarse con problemas de circuitos magnéticos.

## 1.1 Problema de diseño

### Comunicaciones telefónicas

Un medio de comunicación se define como todo aquel instrumento que permite y facilita la comunicación entre las personas, eliminando la distancia a la que se encuentran los individuos. Existen distintos medios de comunicación, los hay naturales, visuales, convencionales, que a su vez se transmiten en diversos canales. Enfocándose específica y exclusivamente en los medios de comunicación como la radio, la TV y el teléfono, se puede establecer el impresionante avance que la técnica moderna ha permitido que estos medios de comunicación evolucionen, se perfeccionen y se multipliquen. En estas aplicaciones se utilizan circuitos magnéticos y ondas electromagnéticas para su funcionamiento.

Una onda electromagnética es la forma de propagación de la radiación electromagnética a través del espacio. A diferencia de las ondas mecánicas, las ondas electromagnéticas no necesitan de un medio material para propagarse. Por otro lado, las fuentes de radiación electromagnética son cargas eléctricas aceleradas, es decir, que cambian con el tiempo su velocidad de movimiento. Las ondas electromagnéticas son por su naturaleza transversales.

El teléfono es un dispositivo de telecomunicación diseñado para transmitir señales acústicas por medio de ondas electromagnéticas. Además del uso de ondas electromagnéticas para la transmisión de señales,

el teléfono emplea también un timbre electromecánico basado en un electroimán que acciona un badajo que golpea la campana a la frecuencia de la corriente de llamada ( $20[\text{Hz}]$ ); en particular éste se ha visto sustituido por generadores de llamada electrónicos, que igual que el timbre electromecánico, funciona con el voltaje de llamada ( $75[V_{C-A}]$ ).

En la actualidad, el teléfono celular o móvil es un dispositivo inalámbrico electrónico, que permite tener acceso a la red de telefonía celular o móvil. En general la telefonía celular o móvil está formada por dos grandes partes: una red de comunicaciones (o red de telefonía móvil) y las terminales (o teléfonos celulares o móviles) que permiten el acceso a dicha red.

La comunicación telefónica es posible gracias a la interconexión entre centrales celulares y públicas. Según las bandas o frecuencias en las que opera el teléfono celular o móvil, podrá funcionar en el continente americano, en Europa o Asia. La telefonía móvil consiste en la combinación de una red de estaciones transmisoras-receptoras de radio (repetidoras y estaciones base), y una serie de centrales telefónicas de conmutación de primer y de segundo nivel, que posibilita la comunicación entre terminales telefónicas portátiles o entre terminales portátiles y teléfonos de la red tradicional.

Con esta información general, establezca el funcionamiento del teléfono celular o móvil actual, haciendo énfasis en el uso de las transmisiones de ondas electromagnéticas en dicha teoría de operación. Incluya diagramas de bloques en su explicación.

## 1.2 Introducción

Las máquinas eléctricas tienen una relación directa con los circuitos magnéticos, de hecho desde que Tesla propuso las primeras máquinas para generación y transmisión de la energía eléctrica los circuitos magnéticos se encontraron implícitos en éstas. Por ejemplo, en el caso de los transformadores se tiene una relación magnética y eléctrica que define el comportamiento del transformador, y gracias a ésta el transformador puede describirse a través de sus circuitos magnéticos y eléctricos en un solo circuito que contiene tanto los efectos magnéticos como los eléctricos.

Analizando el diseño de las máquinas eléctricas, se observa que los materiales ferromagnéticos son los responsables de establecer y direccionar las líneas de campo que son parte fundamental en el funcionamiento de las máquinas, aún más, en la actualidad no existen máquinas eléctricas que puedan funcionar sin la presencia de campos magnéticos, de ahí la importancia de comprender los principios de los circuitos magnéticos. En la tabla 1.1 se presentan las analogías entre los circuitos eléctricos y los magnéticos.

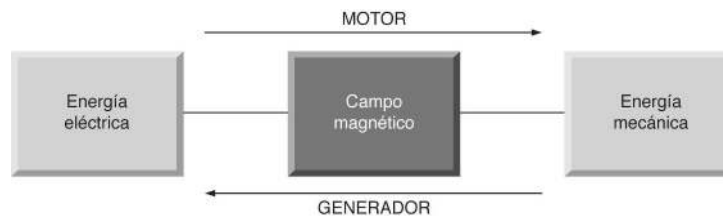
Usando los descubrimientos de Oersted relacionados con el hecho de que una corriente produce un campo magnético alrededor del conductor que la conduce, tanto Ampère como Arago lograron magnetizar agujas de hierro en forma similar a como un imán permanente magnetiza los materiales ferromagnéticos en su proximidad. También bajo este principio, el inglés William Sturgeon construyó el primer imán accionado por electricidad (electroimán), el cual pudo levantar 20 veces su propio peso, y el estadounidense Joseph Henry construyó una versión mejorada, aumentando el número de vueltas y alimentando la bobina

con una corriente controlada.

El descubrimiento de Ampère sentó las bases para la invención del primer motor eléctrico el cual convierte la energía eléctrica a mecánica, aprovechando las propiedades magnéticas mencionadas. En la figura 1.1 se muestra el esquema de este proceso de conversión de energía.

**Tabla 1.1** Comparación entre circuitos eléctricos y magnéticos.

Circuito eléctrico	Símbolo eléctrico	Símbolo magnético	Unidades magnéticas	Circuito magnético
Fuerza electromotriz	$\epsilon = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$	$f = \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$	[Ampère / Vuelta]	Fuerza magnetomotriz
Campo eléctrico	$\mathbf{E}$	$\mathbf{H}$	[Ampère / Metro]	Campo magnético
Corriente eléctrica	$I$	$\phi$	[Webber]	Flujo magnético
Ley de Ohm	$e = VI$	$f = \phi R$		Ley de Hopkinson
Resistencia	$r$	$R$	$\left[ \frac{1}{\text{Henry}} \right]$	Reluctancia



**Figura 1.1** Conversión de energía eléctrica a mecánica y viceversa.

Por su parte, al producir electricidad a partir del movimiento mecánico, Faraday inventó el generador eléctrico (convertir la energía mecánica a eléctrica); sin embargo tuvieron que transcurrir 50 años para que se construyeran generadores eficientes y para que se acelerara aún más la revolución industrial; también fue necesario que transcurrieran varios años para que se aceptaran las líneas de campo, luego de que James Clerk Maxwell entró a escena y publicó su trabajo sobre las líneas de fuerzas de Faraday.

Durante la década de 1880 se protagonizó una batalla entre los fundadores de la industria eléctrica con respecto al empleo de las fuentes de corriente alterna (c.a.) y corriente continua (c.c.). Dos factores importantes favorecieron la ventaja de la c.a. con respecto a la c.c.: la simplicidad de los generadores y

motores de c.a. y la disponibilidad de transformadores (conversión de la energía eléctrica a eléctrica) para ajustar las amplitudes de voltaje y corriente para mejorar la eficiencia en la transferencia de potencia.

### 1.3 Flujo magnético y ley de Ampère

El flujo magnético se puede calcular mediante la integral de la densidad de flujo  $\mathbf{B}$  por unidad de área  $\mathbf{A}$ , en donde la densidad de flujo es el número de líneas que atraviesa el material ferromagnético:

$$\phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (1.1)$$

Si la densidad de flujo es constante en magnitud, y perpendicular en cualquier punto del área, la ecuación 1.1 se reduce a:

$$\phi = BA \quad (1.2)$$

Si se conoce el flujo magnético, de la ecuación 1.2 se tiene que la densidad de flujo magnético es

$$B = \frac{\phi}{A} \quad (1.3)$$

en donde la densidad de flujo  $B$  en el SI está dada en  $\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$  o en Teslas T, siendo  $1 \text{ T} = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$ .

Por otro lado, la densidad de flujo se puede obtener de la permeabilidad y la intensidad de campo con la siguiente ecuación

$$B = \mu H \quad (1.4)$$

en donde  $\mu = \mu_R \mu_0$ .

La ley de Ampère afirma que la integral alrededor de una trayectoria cerrada de la intensidad de campo magnético  $\mathbf{H}$  es igual a la corriente  $I$  que circula en la trayectoria mencionada.

Cuando la trayectoria cerrada está formada por bobinas con  $N$  vueltas y es atravesada por las corrientes mostradas en la figura 1.2, la siguiente ecuación

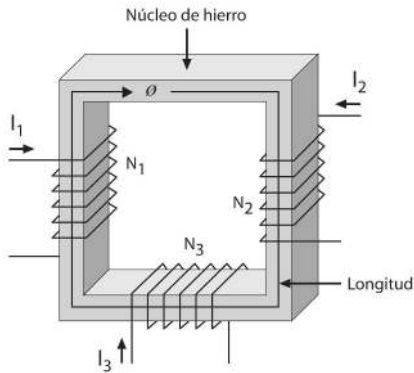
$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \sum I \quad (1.5)$$

se transforma en la ecuación

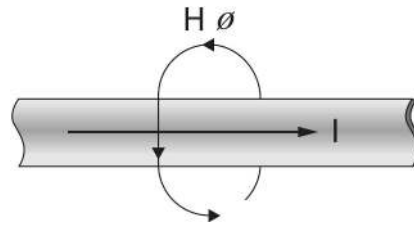
$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = N_1 I_1 - N_2 I_2 + N_3 I_3 \quad (1.6)$$



en donde  $\mathbf{H}$  está dado en ampere/metro (A/m). En esta ecuación se puede ver que en la bobina 2 se establece un flujo en sentido contrario al formado por las bobinas 1 y 3, y esta dirección se puede observar con la aplicación de la regla de la mano derecha; véase la figura 1.3.



**Figura 1.2** Direcciones de flujo en un material ferromagnético.

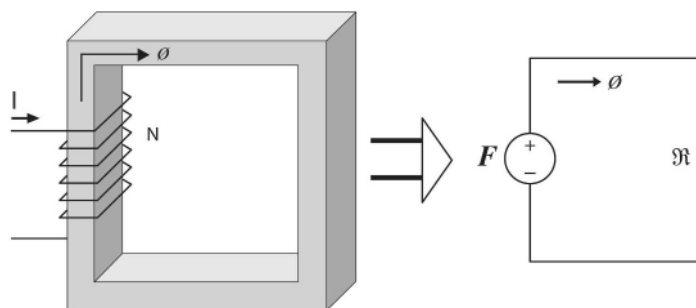


**Figura 1.3** Regla de la mano derecha.

En relación con la ley de Ampère se tiene la regla de la mano derecha: si el dedo pulgar señala el sentido de la corriente y los demás dedos rodean el conductor, éstos indicarán el sentido del flujo magnético.

En la figura 1.4 se puede observar que si en una bobina de  $N$  vueltas se hace circular una corriente de intensidad  $I$ , se crea una fmm  $F$  con lo que la ecuación 1.6 se puede reescribir como

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI = F = \phi \mathfrak{R} \quad (1.7)$$



**Figura 1.4** Representación eléctrica de un circuito magnético.

## 1.4 Circuitos magnéticos

Un circuito magnético se define como la representación de los efectos magnéticos a través de elementos básicos dentro de un circuito, el cual es una descripción completa de los lazos magnéticos con los que se pueden representar los efectos físicos de los campos magnéticos. En general estos circuitos se describen empleando analogías de circuitos eléctricos, por esto varias de las leyes de los circuitos eléctricos aplican dentro de un circuito magnético.

De forma general se puede decir que la mayoría de las leyes que describen los circuitos magnéticos, tienen su similar con los circuitos eléctricos.

Un ejemplo de esto es la ley de Ohm eléctrica que tiene su contraparte con la ley de Ohm magnética, la cual cumple las mismas propiedades empleando la reluctancia como variable a relacionar. Por lo tanto es de esperar que tomando como punto de partida las analogías entre circuitos eléctricos y magnéticos, sean las leyes de circuitos eléctricos aplicables a los circuitos magnéticos.

El análisis de los circuitos magnéticos es relativamente sencillo debido a la similitud que presenta con respecto a los circuitos eléctricos. Esto se puede comprobar con la aplicación de las leyes de Ohm y de Kirchhoff, aplicadas en ambos circuitos.

### 1.4.1 Excitación de núcleos ferromagnéticos con corriente continua

Cuando se excitan núcleos ferromagnéticos con corriente continua, se establece un flujo magnético constante, invariante en el tiempo. Este campo magnético uniforme es el mismo campo empleado para electroimanes, en los cuales se excita el circuito magnético empleando corriente continua; de la misma forma, todos los motores eléctricos de corriente continua emplean el mismo principio de funcionamiento, en donde las líneas y densidad de campo es uniforme a un punto de operación que lo define el tipo de material ferromagnético así como la características de la señal de excitación.

### 1.4.2 Ley de Ohm para circuitos magnéticos

La aplicación de esta ley a los circuitos magnéticos es similar a lo que se hace con los circuitos eléctricos, como se puede ver en la ecuación 1.8.

La ley de Ohm para circuitos magnéticos establece que:

$$\phi = \frac{F}{\mathfrak{R}} \quad (1.8)$$

en donde  $\phi$  es el flujo magnético, con unidades de weber (Wb) en el SI, análogo a la corriente de un circuito eléctrico,  $F$  es la fuerza magnetomotriz (fmm), con unidades de ampere-vuelta (A-v) en el SI, análoga al voltaje, y  $\mathfrak{R}$  es la reluctancia, con unidades de henry<sup>-1</sup> en el SI, análoga a la resistencia.

La diferencia principal entre la corriente eléctrica con respecto al flujo magnético es que la primera no circula si se abre el circuito, mientras que el flujo magnético puede circular en el aire (entrehierro), siendo la reluctancia del aire muy grande con respecto a un material ferromagnético; en la figura 1.5 se puede observar este efecto.

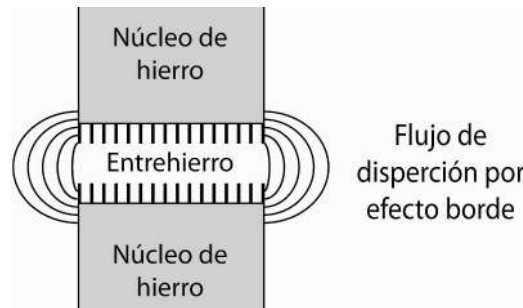
La resistencia de un circuito eléctrico depende de la longitud  $l$ , la conductividad  $\rho$  y el área  $A$ :

$$R = \frac{l}{A}$$

mientras que la reluctancia depende de la longitud  $l$ , la permeabilidad  $\mu$  y el área  $A$ :

$$\Re = \frac{l}{\mu A}$$

También se tiene que la resistencia tiene su inversa que es la conductancia  $G$  en Siemens, mientras que la inversa de la reluctancia es la permeancia  $p$  con unidades de henry en el SI. Por otro lado, para resolver o reducir las reluctancias se aplica la misma regla empleada en resistencias conectadas en serie o en paralelo.



**Figura 1.5** Flujo magnético en el entrehierro.

### Ejemplo 1.1

En la figura 1.6 se tiene un núcleo ferromagnético cuya permeabilidad relativa es 2000 y cuyas dimensiones se muestran en la misma figura. Debido a los efectos marginales, el área efectiva de los entrehierros se incrementa en un 6% respecto al área física. Si las bobinas tienen las vueltas mostradas en el diagrama y por ellas circulan las corrientes  $i_1 = 2$  A e  $i_2 = 1.5$  A, determinar el flujo en la columna central y la densidad de flujo en los entrehierros.

Como se sabe las reluctancias se pueden calcular mediante la siguiente expresión:

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu_r \mu_o A}$$

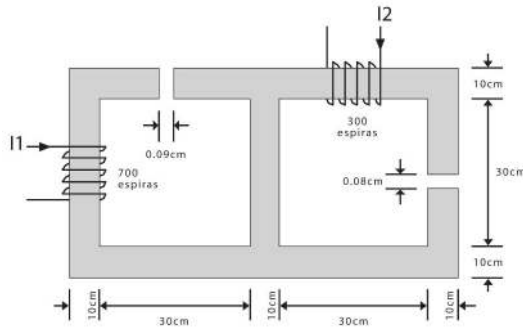


Figura 1.6 Circuito magnético.

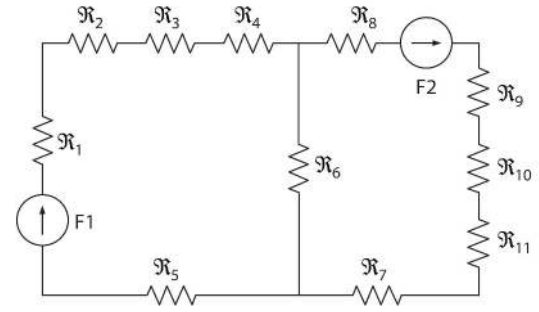


Figura 1.7 Circuito magnético.

En la figura 1.7 se muestra el circuito equivalente de la figura 1.6, además se tiene que:

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_6 = \mathcal{R}_5 = \mathcal{R}_7 = \mathcal{R}_8 \quad \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_4 \quad \mathcal{R}_9 = \mathcal{R}_{11}$$

$$l_1 = 40 \text{ cm} \quad l_2 = 19.955 \text{ cm} \quad l_3 = 0.09 \text{ cm}$$

$$l_9 = 19.96 \text{ cm} \quad l_{10} = 0.08 \text{ cm}$$

$$A_1 = (0.1)(0.1) = 0.01 \text{ m}^2 \quad A_3 = 0.01 + 6\% = 0.0106 \text{ m}^2$$

$$\mathcal{R}_1 = \frac{0.4}{(4\pi 10^{-7})(2000)(0.01)} = 15915.4943 \quad \frac{\text{At}}{\text{Wb}}$$

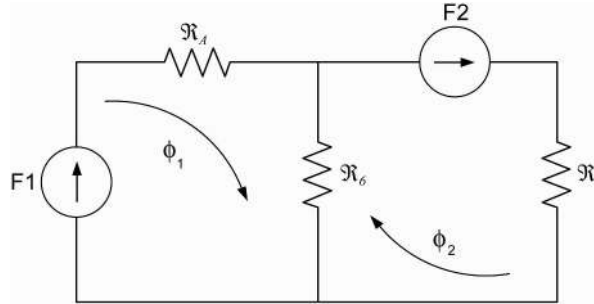
$$\mathcal{R}_2 = \frac{0.19955}{(4\pi 10^{-7})(2000)(0.01)} = 7939.8422 \quad \frac{\text{At}}{\text{Wb}}$$

$$\mathcal{R}_3 = \frac{0.0009}{(4\pi 10^{-7})(0.0106)} = 67565.7773 \quad \frac{\text{At}}{\text{Wb}}$$

$$\mathcal{R}_9 = \frac{0.1996}{(4\pi 10^{-7})(2000)(0.01)} = 7941.8316 \quad \frac{\text{At}}{\text{Wb}}$$

$$\mathfrak{R}_{10} = \frac{0.0008}{(4\pi 10^{-7})(0.0106)} = 60058.469 \quad \frac{\text{At}}{\text{Wb}}$$

$$F = NI \quad \phi = \frac{F}{\mathfrak{R}} \quad F = \phi \mathfrak{R} \quad \sum F = 0$$



**Figura 1.8** Circuito equivalente a reluctancias.

Del circuito de la figura 1.8 se tiene que:

$$\phi_1 \mathfrak{R}_A + (\phi_1 - \phi_2) \mathfrak{R}_6 = F_1$$

$$(\phi_2 - \phi_1) \mathfrak{R}_6 + \phi_2 \mathfrak{R}_B = F_2$$

$$\mathfrak{R}_A = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_4 + \mathfrak{R}_5 = 115276.4503 \quad \frac{\text{At}}{\text{Wb}}$$

$$\mathfrak{R}_B = \mathfrak{R}_7 + \mathfrak{R}_8 + \mathfrak{R}_9 + \mathfrak{R}_{10} + \mathfrak{R}_{11} = 107773.1208 \quad \frac{\text{At}}{\text{Wb}}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtienen los siguientes resultados:

$$\phi_1 = 0.01128 \quad \text{Wb}$$

$$\phi_2 = 0.00509 \quad \text{Wb}$$

El flujo total en la rama central del núcleo ferromagnético se calcula de la siguiente forma:

$$\phi_{\text{central}} = \phi_1 - \phi_2 = 0.00619 \quad \text{Wb}^2$$

La densidad de flujo  $B$  en los entrehierros es igual a:

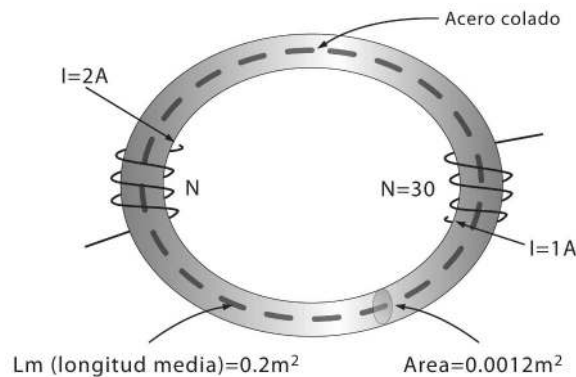
$$B_{e1} = \frac{\phi_1}{A_{e1}} = \frac{0.01128}{0.0106} \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = 1.0641 \quad \text{Wb/m}^2$$

$$B_{e2} = \frac{\phi_2}{A_{e2}} = \frac{0.00509}{0.0106} \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = 0.4801 \quad \text{Wb/m}^2$$

### Ejemplo 1.2

En la figura 1.9 se muestra un núcleo ferromagnético en forma de dona, con sus respectivas medidas. La intensidad del campo magnético en el material ferromagnético es  $H = 750 \text{ (A-v)/m}$ , determinar:

- El número de vueltas  $N$  que se requiere para establecer un flujo en el circuito magnético.
- La permeabilidad del material.



**Figura 1.9** Circuito magnético.

Datos:

$$\phi_2 = 0.00509 \quad \text{Wb} \quad A_1 = (0.1)(0.1) = 0.01 \quad \text{m}^2 \quad \phi = BA$$

Por lo tanto se puede despejar la densidad del flujo:

$$B = \frac{\phi}{A} = \frac{12 \times 10^{-4}}{0.0012} \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = 1 \quad \text{Wb/m}^2$$

Como  $H = 750 \text{ (A-v)/m}$ , la permeabilidad del material es igual a:

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{1}{750} = 1.333 \times 10^{-3} \quad \text{H/m}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{l_m}{\mu A} = \frac{0.2}{(1.333 \times 10^{-3})(0.0012)} = 125000 \quad \frac{\text{At}}{\text{Wb}}$$

Por la ley circuital de Ampère,  $\sum F = 0$

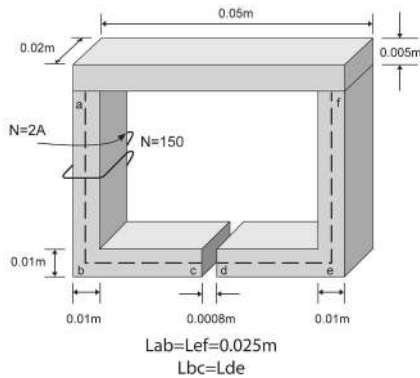
$$F_1 + F_2 = \phi \mathfrak{R} \quad F = NI$$

$$2N + (30)(1) = (12 \times 10^{-4})(125000)$$

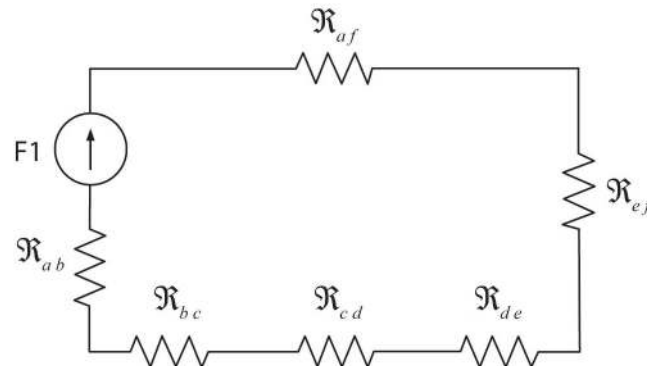
Calculando la  $N$  de la ecuación anterior se obtiene que:  $N=60$  vueltas.

### Ejemplo 1.3

Determinar el flujo total  $\phi$  en el circuito magnético que se muestra en la figura 1.10, cuando la permeabilidad relativa del núcleo es 2 500 constante.



**Figura 1.10** Circuito magnético.



**Figura 1.11** Circuito equivalente.

En la figura 1.11 se muestra el circuito equivalente de la figura 1.10. De acuerdo con las medidas mostradas en la figura 1.10 se pueden establecer las siguientes igualdades:

$$\mathfrak{R}_{ab} = \mathfrak{R}_{ef} \quad \mathfrak{R}_{bc} = \mathfrak{R}_{de}$$

$$l_{ab} = l_{ef} = 0.025 \text{ m} \quad l_{bc} = l_{de} = 0.0146 \text{ m}$$

Las áreas son las siguientes:

$$A_{ab} = A_{ef} = A_{bc} = A_{de} = A_{cd} = (0.02)0.01 = 0.0002 \text{ m}^2$$

$$A_{af} = (0.02)0.005 = 0.0001 \text{ m}^2$$

La fuerza magnetomotriz debido a la fuente es:

$$F = NI = (150)2 = 300 \text{ A-v}$$

Las reluctancias que se tienen en el circuito equivalente son:

$$\mathfrak{R}_{ab} = \frac{0.0275}{(4\pi 10^{-7})(2500)(0.0002)} = 43767 \frac{\text{At}}{\text{Wb}}$$

$$\mathfrak{R}_{bc} = \frac{0.0146}{(4\pi 10^{-7})(2500)(0.0002)} = 23236.621 \frac{\text{At}}{\text{Wb}}$$

$$\mathfrak{R}_{af} = \frac{0.04}{(4\pi 10^{-7})(2500)(0.0001)} = 127323.954 \frac{\text{At}}{\text{Wb}}$$

$$\mathfrak{R}_{cd} = \frac{0.0008}{(4\pi 10^{-7})(1)(0.0002)} = 3183098.862 \frac{\text{At}}{\text{Wb}}$$

La reluctancia equivalente del circuito serie se puede calcular de la forma:

$$\mathfrak{R}_{eq} = \mathfrak{R}_{ab} + \mathfrak{R}_{bc} + \mathfrak{R}_{cd} + \mathfrak{R}_{de} + \mathfrak{R}_{ef} + \mathfrak{R}_{af} = 3444431.276 \frac{\text{At}}{\text{Wb}}$$

Finalmente el flujo total del circuito serie es:

$$\phi_{eq} = \frac{Fl}{\mathfrak{R}_{eq}} = \frac{300}{3444431.276} = 8.709 \times 10^{-5} \text{ Wb}$$

### Ejemplo 1.4

En la figura 1.12 se muestra un núcleo ideal cuya permeabilidad es infinita ( $\mu_i \rightarrow \infty$ ). Calcular la densidad



de flujo en el entrehierro del circuito magnético.

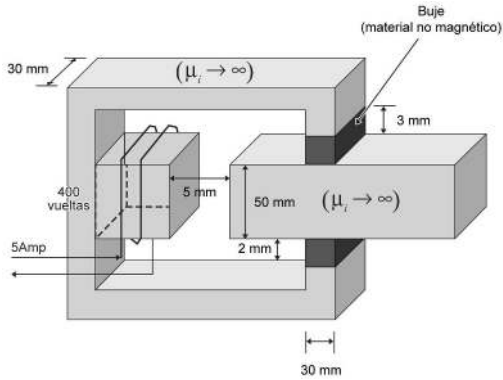


Figura 1.12 Circuito magnético.

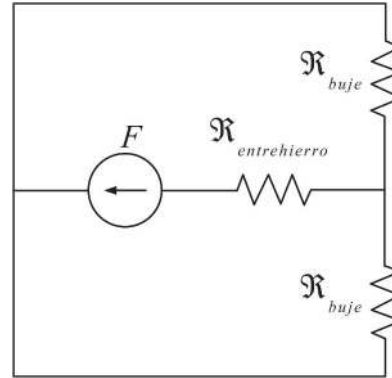


Figura 1.13 Circuito magnético.

$$A_{entrehierro} = (0.05)0.03 = 0.0015 \text{ m}^2$$

$$A_{bujes} = (0.03)0.003 = 0.0009 \text{ m}^2$$

$$\mathfrak{R}_{entrehierro} = \frac{0.005}{(4\pi 10^{-7})(1)(0.0015)} = 2652582.385 \frac{\text{At}}{\text{Wb}}$$

$$\mathfrak{R}_{bujes} = \frac{0.003}{(4\pi 10^{-7})(1)(0.0009)} = 2652582.385 \frac{\text{At}}{\text{Wb}}$$

$$\mathfrak{R}_{eq} = \mathfrak{R}_{entrehierro} + \frac{1}{2}\mathfrak{R}_{bujes} = 3978873.578 \frac{\text{At}}{\text{Wb}}$$

$$\phi_{eq} = \frac{F}{\mathfrak{R}_{eq}} = \frac{400(5)}{3978873.578} = 5.026 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$B_{entrehierro} = \frac{\phi_{eq}}{A_{entrehierro}} = \frac{5.026 \times 10^{-4}}{0.0015} = 0.335 \text{ Wb/m}^2$$

## Ejemplo 1.5

El circuito magnético que se muestra en la figura 1.14 está hecho con un material cuya permeabilidad magnética relativa es  $\mu_r = 3000$ . Calcular la corriente  $I$  de corriente continua que se requiere para que la densidad de flujo magnético  $B$  en la pierna izquierda del circuito tenga una magnitud de 0.4 Teslas. Utilizar  $d = h = y = 20$  cm,  $N = 300$  vueltas,  $x = 8$  cm y  $l_g = 1$  mm.

Primero se plantea que:

- $R_c$ : Reluctancia del núcleo.
- $R_g$ : Reluctancia del entrehierro.
- $R_{b+g}$ : Reluctancia de la barra y la correspondiente de los pequeños entrehierros.

$$l_c = 2(80 - 20) + 2(70 - 20) - 20 - 0.2 = 199.8 \text{ cm} \approx 2 \text{ m}$$

$$l_g = 1 \text{ mm} = 1 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$A_c = 0.04 \text{ m}^2$$

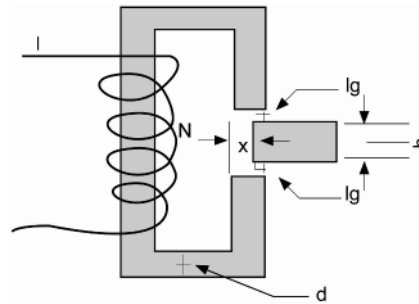


Figura 1.14 Circuito magnético.

Por lo tanto:

$$R_c = \frac{l_c}{\mu_r \mu_0 A_c} = \frac{1}{4\pi \times 10^{-7}} \left[ \frac{2}{(3000)(0.04)} \right] = 1.326 \times 10^4 \frac{\text{At}}{\text{Wb}}$$

$$R_g = \frac{h}{\mu_r \mu_0 x y} = 9.95 \times 10^6 \frac{\text{At}}{\text{Wb}}$$

$$R_{b+g} = \frac{2l_g}{\mu_r \mu_0 (d-x)y} = \frac{1}{4\pi \times 10^{-7}} \left[ \frac{1}{(0.12)(0.2)} \right] \left[ 0.002 + \frac{0.2}{3000} \right]$$

$$= 6.85 \times 10^4 \frac{\text{At}}{\text{Wb}}$$

Como  $R_g \gg R_b$  puede ignorarse sin problemas el entrehierro y queda la reluctancia neta:

$$R_{total} = R_a + R_{b+g} = 8.8 \times 10^4 \frac{\text{At}}{\text{Wb}}$$

Ahora bien,  $B=0.4$  Teslas en la pierna izquierda implica que  $\phi = BA_c$ , entonces  $\phi = 0.016$  Wb y usando  $F=R\phi$  se tiene que

$$F = (8.8 \times 10^4)(0.016) = 1309 \text{ At}$$

Pero  $F=NI$ , así que:

$$I = \frac{F}{N} = 4.4 \text{ A}$$

### 1.4.3 Curva de magnetización y saturación

Los materiales se clasifican en magnéticos y no magnéticos, dependiendo de su magnetización o su curva  $B - H$ . Los materiales no magnéticos tienen una curva  $B - H$  lineal, mientras que los materiales ferromagnéticos muestran una característica  $B - H$  no lineal.

En la curva de magnetización que se muestra en la figura 1.15 se puede observar otra diferencia importante entre los circuitos magnéticos y los eléctricos, debido a que en un circuito eléctrico la resistencia es normalmente independiente de la corriente mientras que en un circuito magnético la reluctancia depende de la densidad de flujo. La curva de la figura 1.15 se divide en dos regiones: la región lineal y la región de saturación, y la transición entre la región lineal y de saturación se conoce como “codo” o “rodilla”.

La densidad de flujo magnético en el vacío, es directamente proporcional a la intensidad de flujo magnético y se expresa por la ecuación:

$$B = \mu_0 H$$

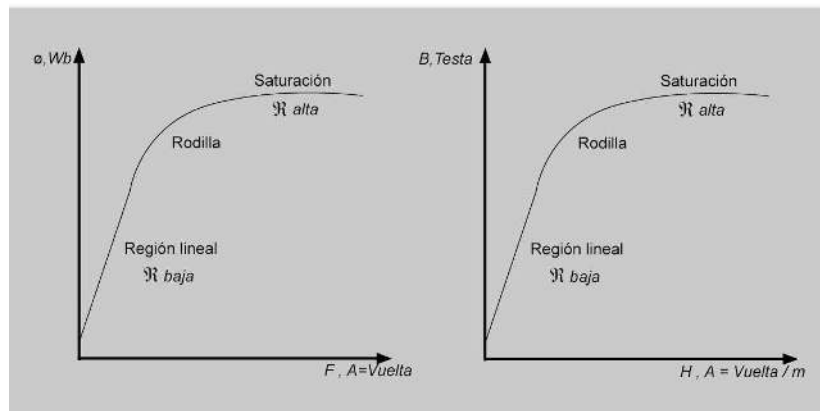
donde  $B$  es la densidad de flujo,  $H$  es la intensidad de campo magnético y  $\mu_0$  es la constante magnética.

La permeabilidad magnética de los materiales ferromagnéticos es mucho más alta que la permeabilidad del espacio libre, pero mientras la permeabilidad magnética en el vacío es constante en los materiales

ferromagnéticos varía con la cantidad de flujo en el material y está dada por:

$$B = \mu_0 \mu_r H$$

donde  $\mu_r$  es la permeabilidad relativa del material. Debido a que el valor de  $\mu_r$  no es constante, la relación entre  $B$  y  $H$  no es lineal y esto hace que la ecuación anterior sea poco práctica.



**Figura 1.15** Curva de magnetización de un material ferromagnético.

Para ilustrar el comportamiento de la permeabilidad magnética en un material ferromagnético se aplica una corriente continua al núcleo (mostrado en la figura 1.16) comenzando con cero amperes e incrementándola lentamente hasta llegar a la máxima corriente posible. Al graficar el flujo producido en el núcleo contra la fuerza magnetomotriz que lo produce, se obtiene una gráfica como la que se muestra en la figura 1.17 que se denomina curva de saturación o curva de magnetización.

Al comienzo, un pequeño incremento en la fuerza magnetomotriz produce un aumento significativo en el flujo resultante. Después de cierto punto, por más que se incremente la fuerza magnetomotriz, los incrementos en el flujo, serán cada vez más pequeños hasta que el incremento en la fuerza magnetomotriz prácticamente no produce cambios en el flujo.

La región de saturación, es en donde la curva se aplana, en este punto, se dice que el núcleo está saturado. La región en donde el flujo varía linealmente con respecto al incremento en la fuerza magnetomotriz, se le llama región no saturada, y la región de transición entre la región no saturada y la saturada, se le llama rodilla de la curva.

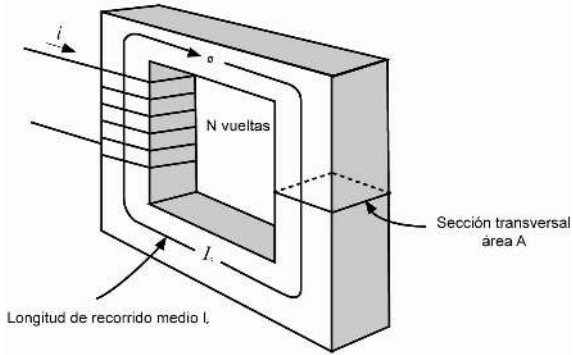


Figura 1.16 Núcleo magnético sencillo.

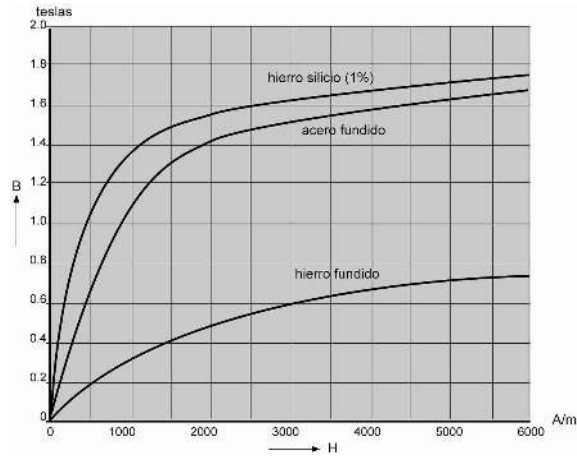


Figura 1.17 Curva de magnetización con c-c de tres materiales magnéticos.

#### 1.4.4 Energía magnética almacenada

Una forma sencilla de explicar la energía magnética almacenada es iniciando con una sola espira en trayectoria cerrada y con coeficiente de inductancia  $L$ , experimentando dicha espira un incremento de corriente desde un valor inicial de corriente igual a cero hasta un valor de corriente igual a  $I$ , apareciendo una fem que se puede definir por:

$$v = L \frac{di}{dt}$$

requiriendo un trabajo igual a:

$$w = \int v i dt = L \int i di = \frac{1}{2} L I^2$$

para poder superar este valor de fem. de la misma manera esta expresión se puede expandir a dos espiras que incrementan su valor de corriente de cero a  $I_1$  e  $I_2$  respectivamente, en estos casos existirá un trabajo que tiene que vencerse de acuerdo con los efectos de acoplamiento que existen entre las espiras.

### 1.5 Materiales ferromagnéticos

Esta propiedad se encuentra en ciertos materiales como el hierro, cobalto, wolframio, níquel, acero y aleaciones entre estos metales. A dichas formas y a las aleaciones se les da el nombre de materiales ferromagnéticos debido a su alta permeabilidad y a su fácil imanación. Al emplear dichas sustancias como núcleo de máquinas y dispositivos eléctricos se obtiene una inducción magnética muy alta en relación a la obtenida en una bobina con núcleo de aire o al empleo de materiales no magnéticos como el cobre, aluminio, madera, vidrio. En el caso del material ferromagnético de un transformador, la permeabilidad relativa puede estar entre los rangos de 2000 y 4000.

Los materiales no magnéticos se clasifican en paramagnéticos para los cuales la permeabilidad relativa ( $\mu_R$ ) es ligeramente superior a 1.0, o diamagnéticos en los cuales la  $\mu_R$  es ligeramente menor que 1.0. Sin embargo, para propósitos prácticos la  $\mu_R$  es igual a 1.0 para estos dos materiales.

En relación con la permeabilidad del material se tiene lo siguiente: Si el material en un circuito magnético permite establecer fácilmente las líneas de flujo se dice que éste tiene alta permeabilidad, en caso contrario tiene baja permeabilidad. El término permeabilidad es similar al de conductividad de un circuito eléctrico.

La permeabilidad de un material está dada en función de su permeabilidad relativa, como se expresa a continuación:

$$\mu = \mu_R \mu_0 \quad (1.9)$$

en donde  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$  es la permeabilidad del espacio (aire).

#### Ejemplo 1.6

Un núcleo magnético de área transversal cuadrada tiene una longitud media de 55 cm y 15 cm<sup>2</sup> de área transversal. Hay una bobina de 200 vueltas devanada alrededor de una de las columnas. El núcleo está hecho de un material cuya magnetización se muestra en la figura 1.18.

- (a) ¿Cuánta energía se necesita en la bobina para producir 0.012 Wb de flujo en el núcleo?
- (b) ¿Cuánta corriente se necesita en la bobina para producir 0.012 Wb de flujo en el núcleo?
- (c) ¿Cuál es la permeabilidad del núcleo con ese valor de corriente?
- (d) ¿Cuál es la reluctancia del núcleo bajo estas condiciones?
- (e) ¿A cuánto se reduciría la densidad de flujo magnético del núcleo si se introduce un entrehierro de aire de 0.5 mm de largo, contadas las demás medidas permaneciendo igual?

En el cálculo de los resultados hay que despreciar la dispersión y pérdidas de flujo en el entrehierro.

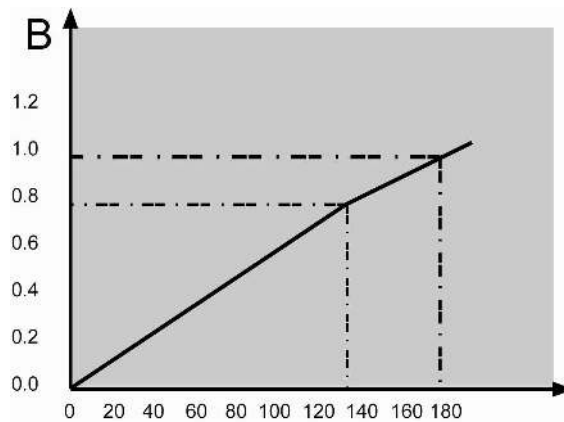


Figura 1.18 Circuito magnético.

Respuesta (a)

$$E = V_c \int_0^f H dB$$

Para  $\Phi_f = 0.012$  Wb se tiene que

$$B_f = \frac{\Phi_f}{A} = 0.8 \text{ T}$$

$$\int_0^{B_f} H dB = \frac{1}{2}(0.8)(120) = 48 \text{ J/m}^3$$

Entonces

$$V_c \approx A_c l_c$$

$$\approx 8.25 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$E = (8.25 \times 10^{-3} \text{ m}^3) \left( 48 \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right) = 0.396 \text{ J}$$

Respuesta (b) Considerando  $\Phi_f = 0.012$  Wb y  $B_c = 0.8$  T, de la gráfica se tiene que  $H_c = 120 \frac{\text{At}}{\text{Wb}}$  y por ley de Ampère resulta que:

$$NI = H_c l_c$$

$$I = \frac{H_c l_c}{N} = \frac{(120)(0.55)}{200} = 0.33 \text{ A}$$

**Respuesta (c)**

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{0.8}{120} = 6.67 \times 10^{-3} \frac{\text{H}}{\text{m}}$$

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 5300$$

**Respuesta (d)**

$$F = NI = (200)(0.33) = 66 \text{ At}$$

$$R_c = \frac{F}{\Phi} = 5500 \text{ H}^{-1}$$

**Respuesta (e)**

$$R_g = \frac{l_g}{\mu_0 A_g} = \frac{5 \times 10^{-4}}{(4\pi \times 10^{-7})(150 \times 10^{-4})} = 2.65 \times 10^4 \text{ H}^{-1}$$

$$\Phi = \frac{F}{R_c + R_g} = \frac{66 \text{ At}}{3.2 \times 10^4 \text{ H}^{-1}} = 0.00206 \text{ Wb} = 2.06 \text{ mWb}$$

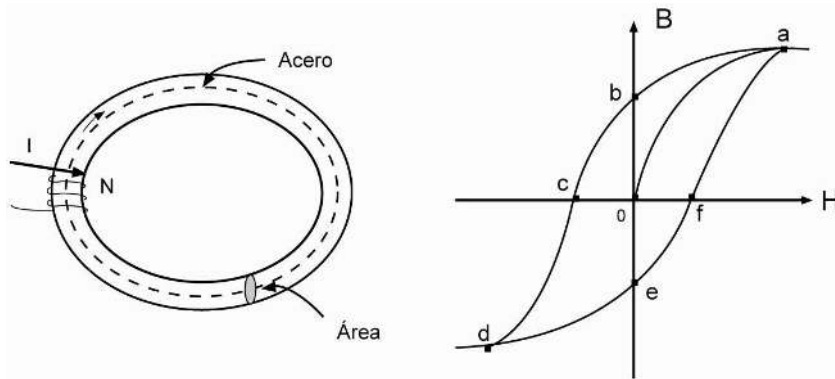
Hay que observar que en estos resultados se han ignorado la dispersión y las pérdidas de flujo en el entrehierro.

### 1.5.1 Curva de histéresis

La curva de histéresis de un material ferromagnético es muy importante, debido a que muestra el comportamiento del material a medida que se modifica la corriente que alimenta a una bobina con núcleo ferromagnético. Si el núcleo no presenta magnetismo residual, y la corriente que alimenta a la bobina es cero, entonces la posición correspondiente está en el origen de la curva de histéresis, como se muestra en la figura 1.19. A medida que la corriente aumenta, también aumenta la intensidad de campo magnético  $H$  así como la densidad de campo  $B$  hasta llegar a la saturación del material (punto a), y en este punto aunque la corriente siga aumentando la  $B$  prácticamente se mantiene constante y la  $H$  se incrementa



rápidamente.

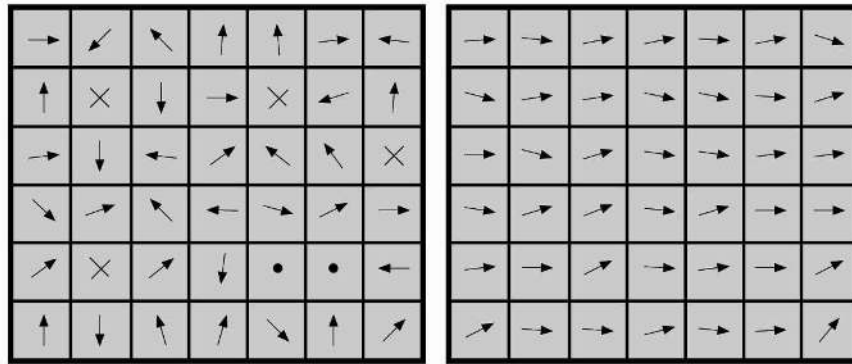


**Figura 1.19** Curva de histéresis.

Si la corriente disminuye,  $I = 0$ ,  $H = 0$ , el material retiene una densidad de flujo  $B$  en el punto  $b$  llamado “flujo residual”. Si la corriente se incrementa en sentido contrario hasta que  $B = 0$ , el núcleo retiene una intensidad  $H$  en el punto  $c$  llamado “fuerza coercitiva”, si la corriente sigue aumentando se llega nuevamente al “estado de saturación” en el punto  $d$ , si se disminuye la corriente hasta cero se llega al punto  $e$  que es el punto opuesto al punto  $b$  en donde la  $H = 0$ , este sería el punto inicial de la curva de histéresis nuevamente ( $I = 0$ ,  $H = 0$ ,  $B = 0$ ), pero como se observa en la curva el núcleo ya tiene un flujo residual que impide que la curva empiece nuevamente en el origen.

El área dentro de la curva de histéresis representa el trabajo realizado por el material cuando se le aplica un flujo magnético. El trabajo (energía) es disipado en el material en forma de calor. Las pérdidas por histéresis en el núcleo del material ferromagnético se incrementan cuando se incrementa la frecuencia de conmutación sobre el flujo magnético  $\phi$  y la densidad del flujo  $B$ .

Este comportamiento ocurre debido a que los átomos de hierro y los de los materiales similares tienden a tener sus campos magnéticos fuertemente alineados entre sí. Dentro de los materiales hay unas regiones llamadas “dominios” que son pequeñas áreas que tienen cierta dirección, de acuerdo con el último campo magnético aplicado al material. Cuando estas áreas quedan orientadas en una dirección de forma permanente, entonces se convierten en pequeños imanes permanentes. Una pieza de hierro no manifiesta polaridad magnética definida debido a que los dominios se encuentran dispuestos al azar en la estructura del material (figura 1.20a).



**Figura 1.20** En (a) se presentan dominios magnéticos orientados al azar. En (b) se observan dominios magnéticos orientados en la presencia de un campo magnético externo.

Cuando se aplica un campo magnético externo a este trozo de hierro, los dominios orientados en otra dirección que no sea la del campo exterior, se alinean con este debido a que los átomos adyacentes cambian físicamente su orientación con el campo magnético aplicado (figura 1.20b). Los átomos alineados con el campo, incrementan el flujo magnético en el hierro, lo cual favorece la alineación de más átomos que incrementan la intensidad del flujo magnético. Esta realimentación positiva es la causa de que el hierro adquiera una permeabilidad mayor al aire.

## 1.6 Ley de inducción de Faraday

Si se mueve un conductor a una cierta velocidad  $v$  a través de un campo magnético de densidad  $\mathbf{B}$ , se induce una fuerza electromotriz (f.e.m.) en el conductor cuyo valor está dado por la ley de Faraday con la ecuación:

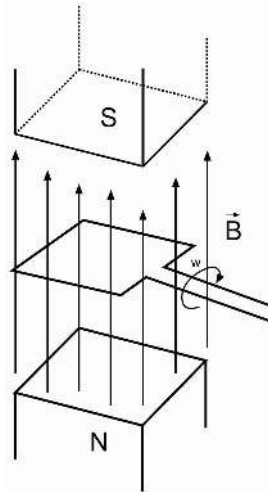
$$e_{ind} = Bvl$$

en donde  $l$  es la longitud generador eléctrico, mostrado en la figura 1.21 del conductor.

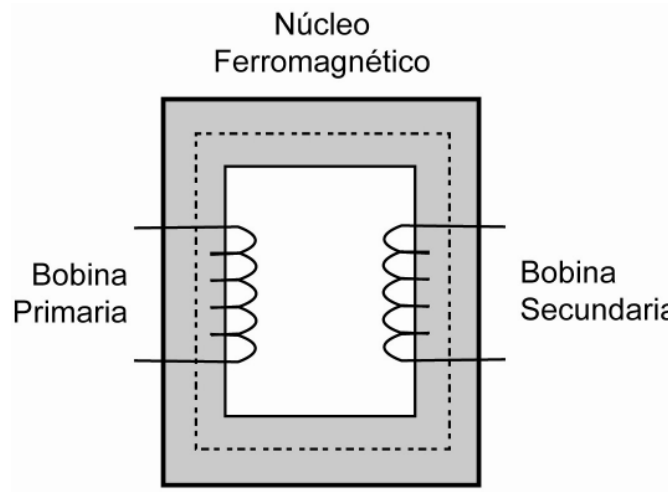
Si en un conductor fijo colocado en el interior de un campo magnético se hace circular una corriente, el conductor experimenta una fuerza inducida sobre él cuya ecuación es:

$$F = ilB$$

en donde  $i$  es la corriente que circula en el conductor; este es el principio del motor eléctrico. Este efecto se genera de forma contraria a lo mostrado en la figura 1.21.



**Figura 1.21** Principio del generador eléctrico.



**Figura 1.22** Principio del transformador.

Si en un conductor circula una corriente variante en el tiempo (c.a.) entonces se crea un campo magnético también variante en el tiempo alrededor del conductor, y si se coloca un conductor en el área de influencia del campo magnético entonces se inducirá una f.e.m. en el conductor (principio del transformador, mostrado en la figura 1.22) cuyo valor está dado por:

$$v = -\frac{d\phi}{dt} \quad (1.10)$$

en donde  $\phi$  es el flujo por espira. Si  $\varphi = N\phi$  es el flujo por bobina, siendo  $N$  el número de vueltas por bobina, entonces el voltaje inducido en una bobina está dado por:

$$v = -\frac{d\varphi}{dt} \quad (1.11)$$

El signo negativo de la ecuación es debido a la ley de Lenz, que afirma que todo voltaje inducido se opone a la causa que lo produce.

### Ley de Kirchoff un caso particular de la Ley de Faraday

En la página web del libro se encuentra la exposición completa de este tema.



## Ejemplo 1.7

Una bobina de 1200 vueltas encierra un flujo de 6 mWb producido por un imán permanente. El imán es extraído de repente y el flujo en el interior de la bobina cae uniformemente a 1 mWb en dos décimas de segundo. Véase la figura 1.23. ¿Cuál es el voltaje inducido?

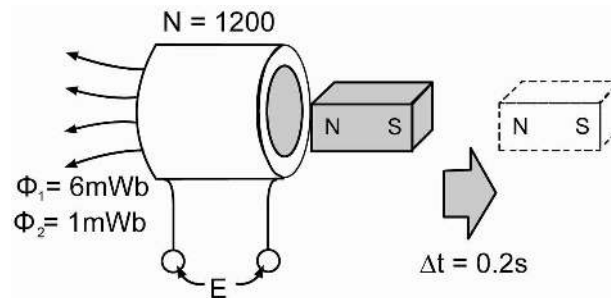


Figura 1.23

Para obtener la solución se tiene que considerar que el voltaje inducido está dado por la expresión:

$$E = N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

donde  $E$  es el voltaje inducido (V),  $N$  es el número de vueltas en las bobinas,  $\Delta\Phi$  es el cambio de flujo dentro de la bobina (Wb) y  $\Delta$  es el intervalo de tiempo durante el cual cambia el flujo (s).

El cambio de flujo es:

$$\Delta\Phi = 6 \text{ mWb} - 1 \text{ mWb} = 5 \text{ mWb}$$

Dado que el cambio ocurre de forma uniforme en dos décimas de segundo,  $\Delta t = 0.2 \text{ s}$  y el voltaje inducido es:

$$E = N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 1200 \frac{5 \times 10^{-3}}{0.2} = 30 \text{ V}$$

Nótese que el voltaje inducido se reduce a cero en cuanto el flujo deja de cambiar.

### 1.6.1 Regla de la mano izquierda

La regla de la mano derecha relaciona la dirección del flujo magnético, del movimiento y la polaridad del voltaje inducido. Un vínculo semejante de ortogonalidad se presenta en la dirección del flujo del campo magnético, el voltaje y la corriente impuestos y la fuerza mecánica resultante (acción del motor).

La relación de fuerzas antes mencionada está contenida en la regla de la mano izquierda, el dedo índice apunta en la dirección del flujo de norte a sur y el dedo medio apunta en la dirección del voltaje impuesto y la de su corriente convencional resultante. En estas condiciones, el pulgar apunta en dirección de la fuerza que se deriva de la ley Biot y Savat. En la figura 2.11 se muestran las direcciones antes descritas.

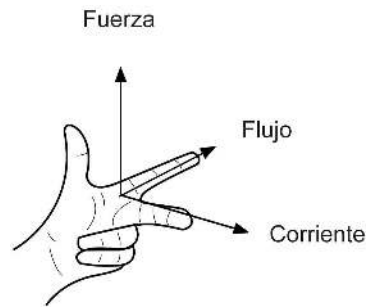


Figura 2.11 Regla de la mano izquierda.

En el generador, la corriente resultante del voltaje generado y que fluye a través del circuito de carga, produce una fuerza que se opone al movimiento que causa la generación del voltaje. Esta fuerza de oposición es directamente proporcional a la corriente de carga y es la causa por la que un generador requiere más fuerza de excitación al aumentar su carga eléctrica.

En el motor, el par es proporcional a la corriente que fluye de la fuente de energía eléctrica. Al mismo tiempo, el motor está generando un voltaje, por la regla de Flemming de la mano derecha, que se opone a la dirección del voltaje en línea. En consecuencia, un motor funcionará con la rapidez necesaria para desarrollar el voltaje de oposición preciso que limite su corriente para suministrar exactamente el par requerido.

## 1.7 Inductancia magnética

La inductancia o autoinductancia, es la capacidad de una bobina de oponerse a cualquier cambio en la corriente. El circuito de la figura 1.2 es frecuentemente utilizado en un circuito eléctrico en donde las bobinas son representadas por las inductancias, un parámetro muy importante para el cálculo de la corriente o el voltaje.

En el caso de una bobina aislada magnéticamente, el flujo magnético  $\phi$  y el flujo de enlace  $\varphi$  dependen solamente de la corriente  $i$  (ignorando el efecto residual) y mediante diferenciación se obtiene que:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{di} \frac{di}{dt} \quad (1.12)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{di} \frac{di}{dt} \quad (1.13)$$

Usando las ecuaciones 1.12 y 1.13, las ecuaciones 1.10 y 1.11 se pueden expresar como:

$$v = \frac{d\phi}{di} \frac{di}{dt} = N \frac{d\varphi}{di} \frac{di}{dt} \quad (1.14)$$

Si se plantea la definición:

$$L = \frac{d\phi}{di} = N \frac{d\varphi}{di} \quad (1.15)$$

y se sustituye la ecuación 1.15 en la ecuación 1.14 se tiene que:

$$V = L \frac{di}{dt} \quad (1.16)$$

Aquí el parámetro  $L$  es conocido como inductancia de la bobina. Si  $L \neq 0$ , la invertancia  $\Gamma$  de la bobina se define como la inversa de la inductancia:

$$\Gamma = \frac{1}{L}$$

Para un sistema de bobinas acopladas las ecuaciones 1.12 a la 1.15 se modifican como suma algebraica de las bobinas acopladas, de forma que la ecuación 1.16 queda como:

$$V_k = \sum_{l=1}^n L_{kl} \frac{di_l}{dt} \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1.17)$$

en donde  $L_{kl}$  es llamada inductancia mutua entre las bobinas  $k$  y  $l$ , y cuando  $k = l$  se le conoce como autoinductancia (o simplemente inductancia) de la bobina  $k$ ; en la práctica,  $L_{kk}$  es simplemente denotado por  $L_k$ . Cuando  $L_{kl} = 0$  para todas las  $k \neq l$  se dice que la bobina está aislada magnéticamente de otras

bobinas.

Si las bobinas se encuentran en un medio en donde la permeabilidad es constante, se puede asegurar que  $L_{kl}$  son todas constantes, esto es, que  $L_{kl} = L_{lk}$ . A partir de la ecuación 1.15 se puede calcular la inductancia propia de una bobina y la inductancia mutua entre dos bobinas con la ecuación de la inductancia propia de una bobina:

$$L_k k = \frac{N_k(K\phi_k)}{i_k} \quad (1.18)$$

y la ecuación de la inductancia mutua de una bobina es:

$$L_{kl} = \frac{N_k(K\phi_l)}{i_l} \quad (1.19)$$

en donde  $N_k$  es el número de vueltas de la bobina  $k$ ,  $\phi_k$  es el flujo magnético de la bobina  $k$  y  $K$  es el factor de acoplamiento que representa el porcentaje de flujo que se aprovecha entre la bobina  $k$  y la bobina  $l$ . El valor del factor de acoplamiento varía entre 0 y 1.

Otras formas de calcular la inductancia propia de una bobina es manipulando las ecuaciones planteadas de forma que:

$$L = \frac{N\phi}{i} = \frac{NBA}{i} = \frac{N\mu HA}{i} = \frac{N\mu HA}{Hl/N} = \frac{N^2}{l/\mu A} = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} \quad (1.20)$$

### Ejemplo 1.8

El núcleo toroidal con sección transversal redonda de la figura 1.24a está hecho de material magnético cuya curva de magnetización está formada por dos segmentos rectilíneos, como se muestra en la misma figura 1.24a.

- (a) Calcular la corriente requerida de la bobina para obtener una densidad de flujo de 0.9 Teslas en el toroide.
- (b) Calcular la auto inductancia de la bobina bajo estas condiciones.

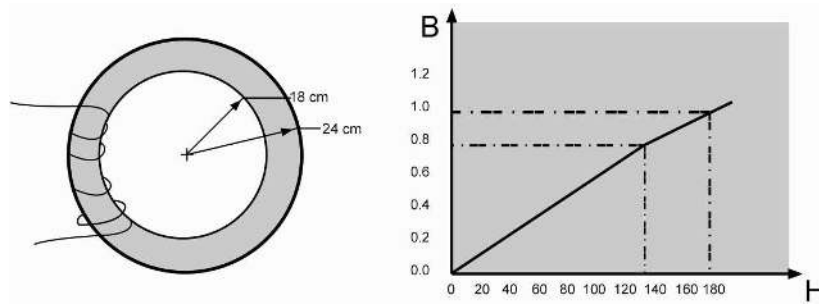


Figura 1.24 Circuito magnético.

El área transversal del toroide es:

$$A = \pi \times r^2 = 2.827 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

De la gráfica se ve que  $B = 0.9$  Teslas corresponden a  $H = 140$  A t/m. Por la ley de Ampère:

$$Hl = NI$$

donde  $l = 2\pi R = 2\pi(0.21) \text{ m} = 1.319 \text{ m}$ . Despejando  $I$  queda:

$$I = \frac{Hl}{N} = 0.9236 \text{ A}$$

$$L = \frac{NBA}{I} = \frac{(200)(0.9)(2.827 \times 10^{-3})}{0.9236A} = 0.551 \text{ H}$$

### 1.7.1 Diseño de bobinas

Un inductor o bobina es una determinada cantidad de vueltas de alambre magneto bobinadas sobre un núcleo de aire o un material ferromagnético. Aunque dichas bobinas son muy importantes en diversas aplicaciones domésticas e industriales, no están disponibles comercialmente en amplios rangos de propiedades, pero son diseñados y construidos para aplicaciones particulares.

Los núcleos de máquinas eléctricas con aleaciones de hierro son generalmente usados en bajas frecuencias (2 kHz o menos para transformadores) debido a que las corrientes de Eddy provocan pérdidas altas por calentamiento. Las aleaciones de hierro deben ser laminados para disminuir las pérdidas por las corrientes de Eddy, y los núcleos magnéticos son construidos también de hierro en polvo y aleaciones de



hierro en polvo. Los núcleos de hierro en polvo consisten de partículas de material eléctrico, están aislados unos de otros y presentan una resistividad eléctrica más alta que el material laminado, empleándose para frecuencias altas por la reducción de las corrientes de Eddy en el núcleo.

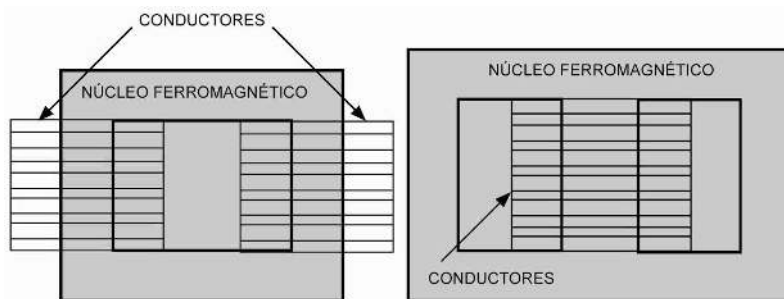
Otra clasificación de los núcleos de máquinas, son los núcleos de ferrita que es una mezcla de óxidos de hierro y otros materiales magnéticos, tienen una gran resistividad eléctrica, pero se saturan rápidamente. Las ferritas presentan prácticamente pérdidas por histéresis, las pérdidas por corrientes de Eddy ocurren por la resistividad eléctrica del material y no son de consideración, por lo que este tipo de material se puede emplear en circuitos de alta frecuencia.

Los conductores empleados para los devanados de bobinas para las máquinas eléctricas son de cobre por su alta conductividad y facilidad para devanarlos alrededor del núcleo, lo que permite reducir el volumen de conductores debido a la forma del núcleo así como se propicia la reducción de las pérdidas por calentamiento en el conductor. El incremento de la temperatura en los devanados y el núcleo ferromagnético reduce la eficiencia de las máquinas. La resistividad del conductor se incrementa con el aumento de la temperatura y el material del núcleo magnético incrementa sus pérdidas para una temperatura ligeramente superior a 100° centígrados.

### 1.7.2 Formas de núcleos ferromagnéticos

Se encuentran disponibles en gran variedad de formas y de tamaños según el tipo de aplicación. Particularmente para los núcleos de ferrita se tienen los tipos dona o toroidal, núcleos en formas de U, E e I con entrehierro. Los materiales laminados están disponibles en toroides bobinados y núcleos en forma de C, así como núcleo en forma de doble E e I.

Como las leyes de los circuitos eléctricos se pueden aplicar de forma similar a los circuitos magnéticos, para calcular los parámetros en los núcleos de las máquinas eléctricas se requiere únicamente conocer la forma del material ferromagnético, y entre las más comunes se tiene el tipo columna y el tipo acorazado; véase la figura 1.25. Estos tipos de núcleos se emplean según la aplicación particular de cada proyecto, ya que cada uno de ellos tiene sus ventajas y desventajas. En un núcleo tipo columna, los conductores rodean al material ferromagnético; mientras que en el tipo acorazado, el material ferromagnético rodea a los conductores.



**Figura 1.25** Tipos de núcleos ferromagnéticos: (a) tipo columna; (b) tipo acorazado.

### 1.8 Excitación senoidal en circuitos magnéticos

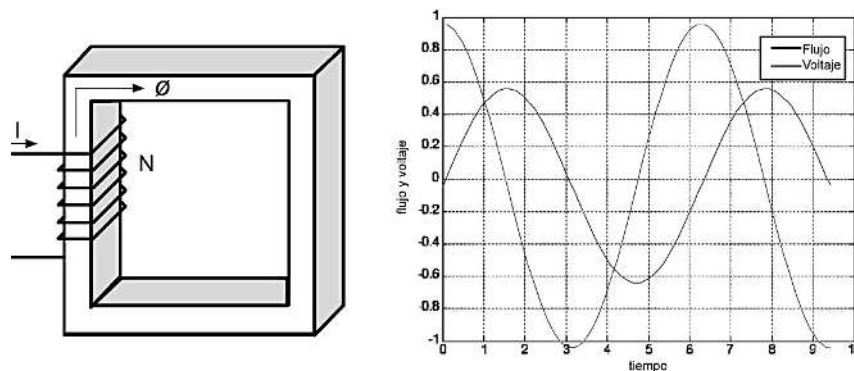
Los sistemas eléctricos de potencia son de forma senoidal, por lo tanto, las máquinas eléctricas y los transformadores funcionan con este tipo de señal en la mayoría de los casos. Esta fuente de excitación tiene asociadas algunas pérdidas en condiciones de estado estable en los circuitos magnéticos, una parte de esta energía se disipa en forma de calor, como resultado del calentamiento del núcleo, mientras que el resto es una potencia reactiva asociada con la energía almacenada en el campo magnético, la cual no es disipada, sino que es absorbida por la fuente de excitación.

Los dos tipos de pérdidas asociados con la excitación variante en el tiempo tipo senoidal en los materiales ferromagnéticos son: la pérdida por calentamiento debido a la variación en el tiempo del flujo en la trayectoria del material magnético, lo cual resulta de que se induce un voltaje en dicha trayectoria que a su vez provoca la circulación de una corriente llamada corriente de Eddy en la resistencia intrínseca del material magnético causando el calentamiento; la pérdida que se debe a la curva de histéresis que se genera con la orientación de los dominios del material. La suma de estas dos pérdidas, conforman las pérdidas totales del material magnético de una máquina.

En una fuente de excitación senoidal, el voltaje y el flujo magnético son variantes en el tiempo. Considerando que el flujo magnético del núcleo de la figura 1.26 es de forma senoidal:

$$\phi(t) = \phi_{m\acute{a}x} \text{sen}(\omega t) \quad (1.21)$$

en donde  $\phi_{m\acute{a}x}$  es la amplitud del flujo,  $\omega = 2\pi f$  es la frecuencia angular y  $f$  es la frecuencia en Hz.



**Figura 1.26** (a) Excitación senoidal en un núcleo ferromagnético y (b) formas del voltaje inducido con respecto al flujo magnético.

El voltaje inducido en las  $N$  vueltas de la bobina es:

$$e(t) = N \frac{d\phi(t)}{dt} = N\phi_{m\acute{a}x}\omega \cos \omega t = 2\pi f N\phi_{m\acute{a}x} \cos \omega t \quad (1.22)$$

y la raíz cuadrática media (rms) del voltaje inducido es:

$$e(t) = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} N f \phi_{m\acute{a}x} = 4.44 N f \phi_{m\acute{a}x} \quad (1.23)$$

### Ejemplo 1.9

Un transformador ideal con una razón del número de vueltas de 4:1 tiene un devanado secundario de 100 vueltas. Si la tensión de entrada es de  $339.41\text{sen}\omega t$  a 60 Hz, determinar el valor pico del flujo a través del bobinado primario.

La relación de vueltas de un transformador ideal es:

$$a = \frac{N_p}{N_s} = \frac{V_p}{V_s} = \frac{I_s}{I_p}$$

en donde respectivamente  $N_p$  y  $N_s$  son el número de vueltas del devanado primario y secundario,  $V_p$  y  $V_s$  son los voltajes primario y secundario,  $I_p$  e  $I_s$  son las corrientes en el primario y en el secundario.

$$N_p = aN_s = 4(100) = 400 \text{ vueltas}$$

$$\omega = 2\pi f \approx 377 \text{ rad/seg}$$

El voltaje en el devanado primario es  $V_1 = R_1 i_1(t) + e_{ind}$ , pero como es un transformador ideal, la primera parte de esta ecuación es cero y el voltaje inducido por la ley de Faraday es:

$$e_{ind} = N_p \frac{d\theta}{dt}$$

Despejando el flujo de esta ecuación se tiene que:

$$\theta = \frac{1}{N_p} \int e_{ind} dt$$

$$\theta = \frac{1}{400} \int 339.41 \text{sen}(\omega t) dt = \frac{339.41}{400\omega} (-\cos \omega t) = 0.00225(-\cos \omega t)$$

$$\theta_{pico} = 0.00225 \text{ Wb}$$

### Ejemplo 1.10

Indicar las marcas de polaridad en las terminales de los circuitos magnéticos mostrados en las figuras 1.27 y 1.28, de forma que el flujo total del material ferromagnético resulte de la suma de los flujos individuales creados por cada bobina.

Para obtener la solución de este problema, en el núcleo de la figura 1.27 se hacen circular las corrientes en las bobinas de tal forma que al aplicar la regla de la mano derecha los flujos individuales se suman y se obtiene el circuito de la figura 1.29.

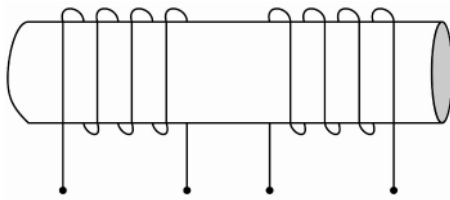


Figura 1.27 Circuito magnético.

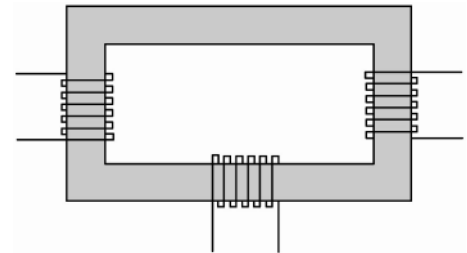


Figura 1.28 Circuito magnético.

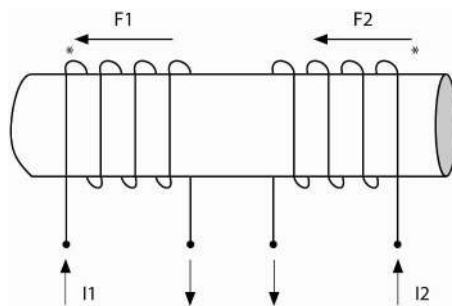


Figura 1.29

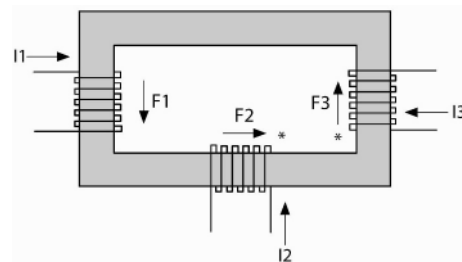


Figura 1.30

Para el caso de la figura 1.28 se repite el procedimiento anterior resultando el circuito de la figura 1.30.

### Ejemplo 1.11

Determinar la expresión de los voltajes  $V_a$  y  $V_b$  aplicados al circuito acoplado mostrado en la figura 1.31.

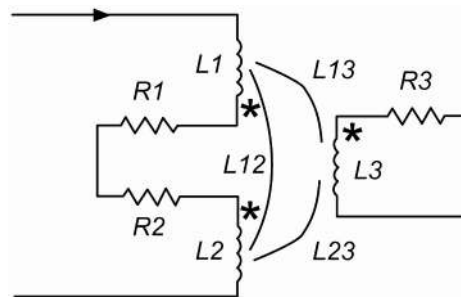


Figura 1.31 Circuito magnético.

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} R1 + R2 & 0 \\ 0 & R3 \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} L1 + L2 - 2L12 & L13 - L23 \\ L13 - L23 & L3 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix}$$

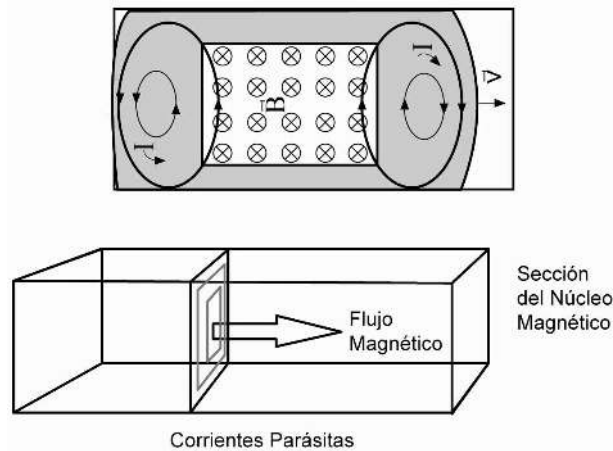
#### 1.8.1 Pérdida de energía por corrientes de Foucault

Las corrientes de Foucault o parásitas, fueron descubiertas por el físico francés Léon Foucault en 1851; éstas se generan por la circulación de corrientes en el interior de un material ferromagnético, cuando se somete a campos magnéticos variables, y pueden definir por:

$$B = B_{m\acute{a}x}\text{sen}(\omega t)$$

Estas pérdidas se pueden ver como una consecuencia de la inmersión de materiales ferromagnéticos dentro de un campo magnético variable, como es el caso de los transformadores.

En la figura 1.32 se representan las pérdidas por corrientes de Foucault, en ella se puede apreciar que la circulación de los electrones dentro del material ferromagnético producen campos magnéticos que se oponen al campo principal; si el campo principal se incrementa, también se incrementa la conductividad del material, lo que genera corrientes circulares que provocan la aparición de campos magnéticos que se oponen al campo principal.



**Figura 1.32** Pérdidas por corrientes de Foucault.

Se retoma la ley de Lenz, en donde se establece una oposición al flujo que produce las corrientes en trayectorias cerradas, permitiendo un decremento de la inducción, y la generación de calentamiento reflejado en un incremento de pérdidas, se puede decir que las pérdidas por corrientes de Foucault establecen una relación entre la frecuencia de la señal de alimentación, una constante de diseño que depende de las características de cada tipo de núcleo magnético, y por último, la inducción máxima  $B_{m\acute{a}x}$ , que puede ser representada por la siguiente ecuación simplificada que tiene por unidades de W/kg:

$$P_{Foc} = B_{m\acute{a}x}^2 K f^2$$

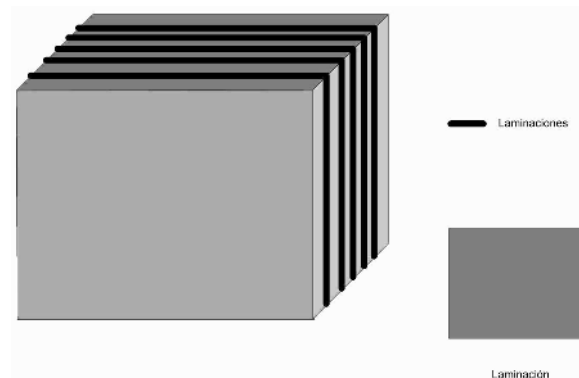
donde  $K$  es una constante que depende de las propiedades del material,  $f$  es la frecuencia de la señal de excitación y  $B_{m\acute{a}x}$  es la inducción máxima.

Por esto la forma más empleada de reducir estas pérdidas es con el empleo de laminaciones, que modifican el valor de la longitud y la sección transversal del núcleo para poder limitar las pérdidas, por lo que si consideramos la resistencia a temperatura constante se puede expresar su valor por siguiente expresión:

$$RE = \rho \frac{lo}{Se}$$

donde  $RE$  es la resistencia eléctrica,  $\rho$  es la resistividad del material,  $lo$  es la longitud y  $Se$  es la sección.

Logrando tener una resistencia mucho mayor en cada una de las chapas que en el núcleo sólido, por esta razón las pérdidas tienden a disminuir dentro del núcleo. En la figura 1.33 se muestra un núcleo magnético con laminación, en dicha figura se puede apreciar cómo la resistencia se altera al cambiar de núcleo sólido a laminado.



**Figura 1.33** Núcleo con laminaciones y una sola laminación.

A los tipos de laminaciones se les conoce con las letras del alfabeto que representan físicamente, entre las que se encuentran la E, F, T y U, entre laminación y laminación se coloca un aislante tratando de evitar siempre la acumulación de aire entre las placas. En la figura 1.34 se muestran diferentes tipos de placas, mientras que en la figura 1.35 se muestra un apilamiento de placas tipo E.

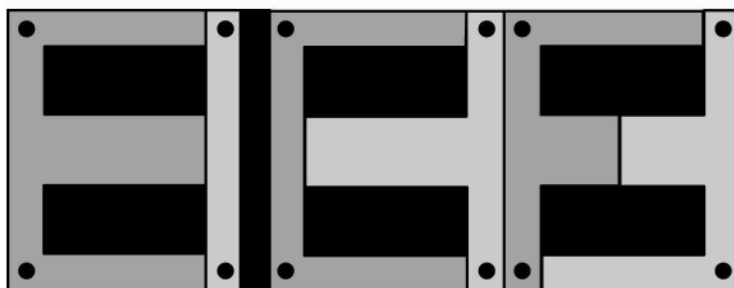


Figura 1.34 Placas tipo E, T, U y F.

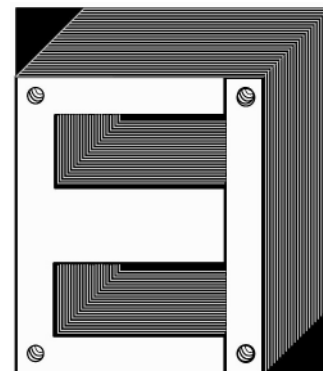


Figura 1.35 Apilamiento de laminaciones tipo E, para núcleo magnético.

## 1.9 Aplicaciones de los circuitos magnéticos

En la figura 1.22 se puede ver un caso clásico de la aplicación de un circuito magnético en un transformador, y en este ejemplo la bobina primaria del dispositivo es alimentado por una fuente de c.a., generando un flujo magnético que circula en el material, cortando los conductores de la bobina secundaria induciendo un voltaje en dicha bobina. El transformador cambia los niveles de tensión y corriente ayudando a reducir las pérdidas en los sistemas eléctricos.

Un generador eléctrico aprovecha la inducción magnética para convertir la energía mecánica a eléctrica, tiene una parte fija llamada estator en la que se colocan los devanados fijos de la máquina (monofásico o trifásico), y una parte móvil en la que se coloca el devanado alimentado por una fuente de corriente continua, también el rotor del generador es movido por un primo motor o turbina a partir de la cual el generador recibe su nombre dependiendo del tipo de energía que lo mueve (hidroeléctrica, termoeléctrica, eololéctrica, núcleoléctrica, etc.). Un motor eléctrico convierte energía eléctrica a energía mecánica, y es el proceso contrario al generador.

Un interruptor magnético se puede emplear para el control automático de accesos o salidas. Este circuito magnético está formado de dos partes principales: la primera puede ser un imán permanente que se coloca en la parte móvil de la puerta y la segunda un interruptor en la parte fija, y este interruptor se conecta a otra parte del circuito que dependa de que la puerta esté cerrada o abierta. Para este mismo sistema, en lugar de emplear un imán permanente, se puede ocupar un electroimán para tener un control



a distancia de la apertura o cierre de dicha puerta.

El campo magnético actualmente se aprovecha en la Medicina, para captar imágenes del cuerpo para el diagnóstico y tratamiento de enfermedades, y estas imágenes son conocidas como imágenes por resonancia magnética.

El campo magnético también se puede ocupar para el diseño de sensores inductivos, como los sensores de reluctancia variable. A estos sensores se les da el nombre según la forma en que desarrollan su función, por ejemplo se puede desplazar una perilla alrededor de una bobina modificando la tensión de un circuito de control, se pueden hacer desplazamientos del núcleo ferromagnético, desplazamiento del entrehierro, modificación de la inductancia mutua entre un devanado primario y un secundario. Para este tipo de sensores no hay que olvidar que el tipo de núcleo es muy importante, ya que si se emplea un sensor con núcleo de aire, la variación de la inductancia es pequeña con la ventaja de que la alimentación puede ser con altas frecuencias, si el tipo de núcleo es ferromagnético, hay una variación mayor de la inductancia; pero con frecuencias bajas para no provocar pérdidas excesivas debido a alimentación con altas frecuencias. Los sensores de corrientes de Foucault aprovechan los efectos magnéticos para medir el espesor de un material no magnético, los transformadores síncronos trifásicos (síncros) y los *resolvers* son otros tipos de sensores inductivos que se emplean para medir la posición y velocidad angular. Los sensores de efecto Hall se pueden emplear para medir el flujo magnético.

### 1.10 Solución del problema de diseño

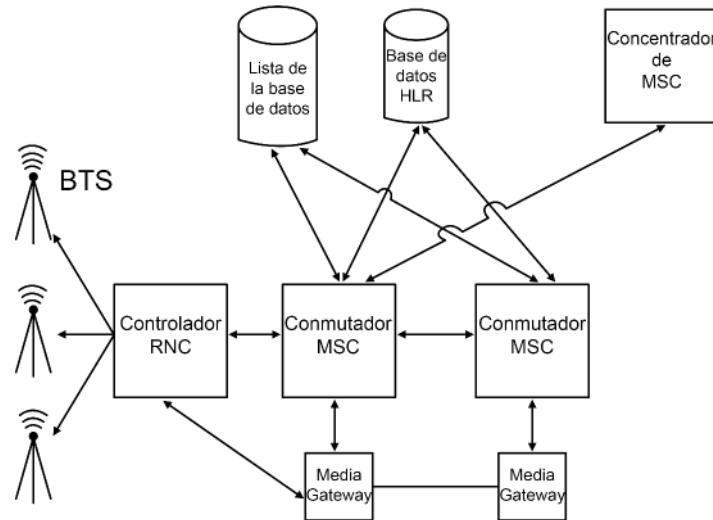
Un sistema móvil celular (SMC) está formado básicamente por tres elementos:

- Una Estación Base de Radiofrecuencia (EBRF).
- Una Central de Conmutación y Control (CCC).
- Una Estación Móvil (EM).

La EBRF es una interfaz entre la CCC y las EM, y sus funciones básicas son:

- **a)** Para datos: convierte la señalización propietaria que la une a una CCC en el protocolo AMPS (Advanced Mobil Phone System), entre la EBRF y una EM.
- **b)** Para voz: convierte las señales digitalizadas de voz que transitan en los enlaces entre la CCC y la EBRF, en señales analógicas para la transmisión de Frecuencia Modulada (FM) entre la EBRF y una EM.
- **c)** Para supervisión de canal de radio: monitorea los canales de voz en una conversación, para comparar la intensidad de la Radiofrecuencia (RF) de la señal y la Relación Señal-Radio (RSR) de la señal de voz, que indica a la CCC cuándo los valores medios están fuera de las especificaciones para que ésta aplique los procedimientos de Handoff. (Se denomina procedimiento de Handoff o de

transferencia al sistema utilizado en comunicaciones móviles celulares, con el objetivo de transferir el servicio de una estación base a otra, cuando la calidad del enlace es insuficiente en una de las estaciones. Este mecanismo garantiza la realización del servicio cuando un móvil se traslada a lo largo de su zona de cobertura.) En la figura 1.36 se muestra el diagrama de bloques de los principales componentes de una red de telefonía celular.



**Figura 1.36** Diagrama de bloques de los principales componentes de una red de telefonía celular.

Los elementos que conforman el diagrama de bloque que establece el funcionamiento de la telefonía celular son:

- **Mobil Switching Center (MSC).** Este dispositivo es el que realiza las funciones telefónicas en la red. Controla las llamadas de y hacia otros sistemas telefónicos y de datos tales como la red de telefonía fija (PSTN), la red de servicios integrados (ISDN). Este elemento es el que coordina la comunicación entre los Media Gateways. Cuando se intenta establecer una llamada hacia un teléfono celular, un MSC actúa como GATEWAY-MSC.
- **Ratio Network Controller (RNC).** Maneja todas las funciones relacionadas con las ondas de radio del sistema, es el que asigna los canales de radio y el que se encarga de que la llamada siga establecida, aunque el teléfono se cambie de celda.
- **Base Tranceiver Station (BTS).** Es la interfaz de radio, aquí residen las antenas de comunicación. El rango de cobertura de las antenas es comúnmente llamado “celda”. En un BTS generalmente se montan tres celdas.

- **Home Location Register (HLR).** Es una base de datos centralizada donde se almacenan y se manejan las suscripciones de los teléfonos a la red. Aquí se almacena la información referente al suscriptor, hasta que su suscripción es cancelada. Dentro de los datos almacenados aquí se encuentran:
  - La identidad del suscriptor.
  - La última localización del suscriptor.
  - Los servicios a los cuales tiene acceso.
- **Media Gateway (MG).** Es quien administra y conecta los recursos para los medios de comunicación. Existen Media Gateway para voz, datos y video. Las conexiones son requeridas y liberadas por el MSC.

### 1.11 Problemas propuestos

#### Problema 1.1

Un anillo de hierro tiene una longitud media de circunferencia de 40 cm y un área transversal de 1 cm<sup>2</sup>. Se le arrollan uniformemente 500 vueltas de alambre. Se realizan mediciones con una bobina exploradora alrededor del anillo que indican que el flujo en el anillo es de  $6 \times 10^{-6}$  Wb cuando la corriente en el devanado es de 0.06 A. Calcular:

- a) La intensidad de flujo  $B$ .
- b) La intensidad de campo  $H$ .
- c) La permeabilidad  $\mu$  y la permeabilidad relativa  $\mu_r$ .

#### Respuestas

a)

$$B = \frac{\phi}{A} = \frac{6 \times 10^{-6} \text{ Wb}}{1 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 6 \times 10^{-2} \text{ T}$$

b)

$$H = \frac{NI}{l} = \frac{(500)(0.06)}{0.4} = 75 \frac{\text{At}}{\text{m}}$$

c)

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{6 \times 10^{-2}}{75} = 8 \times 10^{-4} \frac{\text{Tm}}{\text{At}}$$

d)

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_o} = \frac{8 \times 10^{-4}}{1.26 \times 10^{-6}} = 635$$

### Problema 1.2

Este problema está formado por los siguientes enunciados:

- a) Considérese una bobina con núcleo de aire, como se muestra en la figura 1.37a. La bobina tiene 5 cm de longitud y 8 vueltas de alambre. Al cerrarse el interruptor circula una corriente de 5 A. Calcular la fuerza magnetomotriz  $fmm$  y la intensidad de campo magnético  $H$ .
- b) Si se deslizara al interior de la bobina un núcleo de hierro como lo muestra la figura 1.37b, ¿cuáles serían los nuevos valores para la  $fmm$  y  $H$ ?, ¿explique qué cambios cualitativos ocurrirán.
- c) La longitud de la bobina se mantiene igual, pero el núcleo de hierro se alarga a 10 cm. ¿cuáles son los nuevos valores de la  $fmm$  y de  $H$ ?

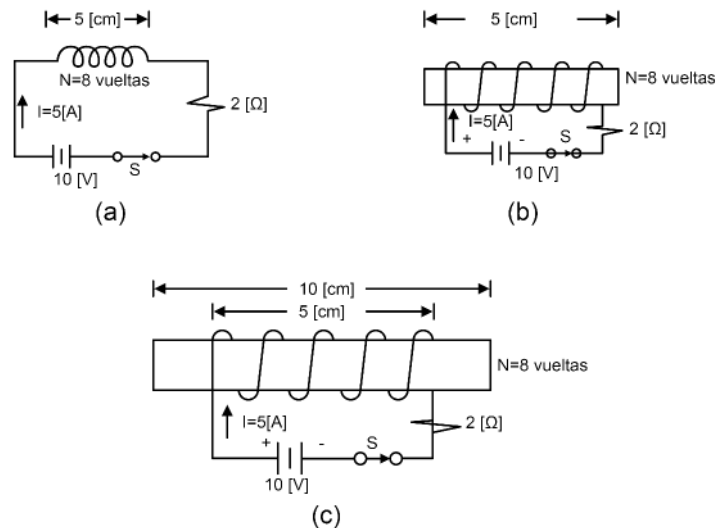


Figura 1.37

**Respuestas**

a)

$$F = fmm = NI = (8)(5) = 400 \text{ At}$$

$$H = \frac{NI}{l} = \frac{400 \text{ At}}{5 \times 10^{-2} \text{ m}} = 8000 \frac{\text{At}}{\text{m}}$$

b) Como las cantidades  $N$ ,  $I$  y  $l$  no han cambiado, los valores de la  $fmm$  y de  $H$  permanecen iguales, es decir:

$$fmm = 400 \text{ At} \quad \text{y} \quad H = 800 \frac{\text{At}}{\text{m}}$$

Lo que sí cambia es la densidad de flujo  $B$ , aumentando considerablemente.

c) El alargamiento del núcleo de hierro no cambia el número de ampère-vueltas de la bobina, así que:

$$fmm = 400 \text{ At}$$

No obstante; con un núcleo de hierro más alargado (el doble de la longitud inicial), la intensidad del campo magnético se reduce a la mitad:

$$H = \frac{NI}{l} = \frac{400 \text{ At}}{0.1 \text{ m}} = 4,000 \frac{\text{At}}{\text{m}}$$

**Problema 1.3**

Una bobina con núcleo de hierro tiene 500 espiras, siendo su resistencia despreciable. La sección de núcleo es uniforme y vale  $25 \text{ cm}^2$ , siendo la longitud magnética media igual a 80 cm. La curva de imanación del material es:

$$B = \frac{2H}{150 + H}$$

Si la tensión o voltaje aplicado es alternado y de 220 V eficaces y la frecuencia es de 50 Hz.

- a) Calcular el circuito equivalente de la bobina.
- b) Calcular la corriente de excitación.

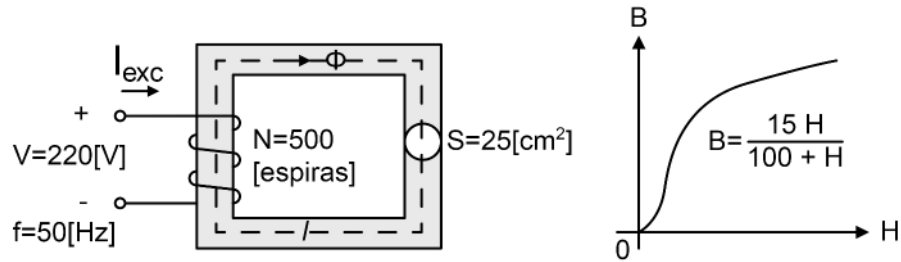


Figura 1.38

**Respuestas**

a) El peso del hierro es:

$$Pesodelhierro = (Volumendehierro)(Pesoespecífica) = (25 \times 10^{-2} \text{ dm}^2)(8 \text{ dm}) = 15.6 \text{ kg}$$

Por consiguiente las pérdidas en el hierro son:

$$P_{Fe} = \left(5 \frac{\text{W}}{\text{kg}}\right) (15.6 \text{ kg}) = 78 \text{ W}$$

y la componente  $I_{Fe}$  de la corriente es:

$$P_{Fe} = VI_{Fe} = (220)(I_{Fe}) \Rightarrow I_{fe} = \frac{78}{220} = 0.3545 \text{ A}$$

Por ello; la resistencia equivalente a las pérdidas en el hierro es:

$$R_{Fe} = \frac{V}{I_{Fe}} = \frac{220 \text{ V}}{0.3545 \text{ A}} = 620.51 \text{ } \Omega$$

en la bobina alimentada con un voltaje de corriente alterna se cumple que:

$$V = (4.44)(f)(N)(\Phi_m)$$

de donde se deduce que un valor de flujo máximo es:

$$\Phi_m = \frac{V}{(4.44)(f)(N)} = \frac{220}{(4.44)(50)(500)} = 1.98 \times 10^{-3} \text{ Wb}$$

que se corresponde a una inducción máxima en el núcleo de valor:

$$B_m = \frac{\Phi_m}{S} = 0.7928 \text{ T}$$

y en consecuencia a una intensidad de campo magnético en el núcleo de acuerdo con la curva de imanación:

$$B = \frac{15H}{100 + H} \Rightarrow 0.7928 = \frac{(2)(Hm)}{150 + Hm} \Rightarrow Hm = 98.51 \frac{AV}{m}$$

y suponiendo que la corriente de imanación es senoidal; el valor de la intensidad de campo magnético eficaz es:

$$H_{eficaz} = \frac{Hm}{\sqrt{2}} = \frac{98.51}{\sqrt{2}} = 69.66 \frac{AV}{m}$$

$$H_{ef} = 69.66 \frac{AV}{m} = \frac{NI_{\mu}}{l} = \frac{500I_{\mu}}{0.8} \Rightarrow 69.66 = \frac{500I_{\mu}}{0.8} \Rightarrow I_{\mu} = 0.111 \text{ A}$$

Finalmente:

$$X_{\mu} = \frac{V}{I_{\mu}} = \frac{220}{0.111} = 1974 \Omega$$

El circuito equivalente con sus valores es:

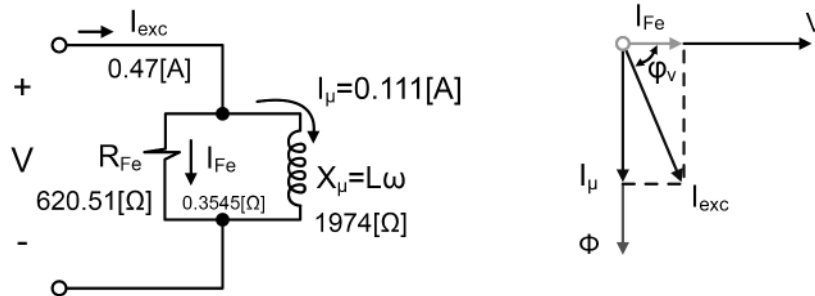


Figura 1.39

b) En función de los valores calculados en el inciso anterior, y de acuerdo con el diagrama fasorial anterior, la corriente de excitación de la bobina se calcula como:

$$I_{exc} = (0.3545 - j0.111) = 0.371 \angle -17.39^\circ \text{ A}$$

el valor anterior puede interpretarse como el correspondiente a una corriente de 0.371 A con un factor de potencia inductivo cuyo valor es:

$$\cos\varphi_V \Rightarrow \cos(17.39^\circ) = 0.954 \Rightarrow \text{F.P} = 0.954 \text{ inductivo}$$

### Problema 1.4

El circuito magnético de la siguiente figura, está realizado con un material de permeabilidad infinita. La sección del núcleo es uniforme en toda la sección y vale  $10 \text{ cm}^2$ . El entrehierro de la izquierda es de  $1 \text{ mm}$  y el de la derecha de  $2 \text{ mm}$ . La bobina tiene  $500$  vueltas y su resistencia eléctrica es de  $10 \Omega$ .

- Calcular la tensión o voltaje de corriente continua que debe aplicarse a la bobina para que la inducción en el entrehierro izquierdo de  $1 \text{ mm}$  sea de  $1 \text{ T}$ .
- Calcular el coeficiente de autoinducción de la bobina.
- Responder los incisos anteriores, si la bobina se coloca en la columna de la izquierda.

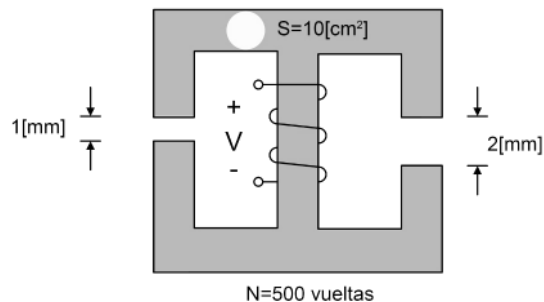


Figura 1.40

### Respuestas

a) En la figura 1.41 se muestra el circuito eléctrico equivalente al modelo magnético representado en la figura 1.40, en dicho circuito eléctrico equivalente, los valores de las reluctancias son:

Reluctancia en el entrehierro izquierdo

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{1 \times 10^{-3}}{(4)(\pi)(10 \times 10^{-4})} = 0.796 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$$



Reluctancia en el entrehierro derecho

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{2 \times 10^{-3}}{(4)(\pi)(10 \times 10^{-4})} = 1.592 \times 10^{-6} \text{ H}^{-1}$$

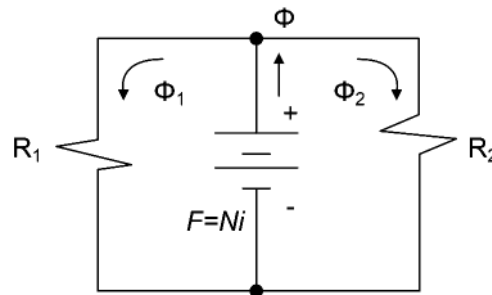


Figura 1.41

Dado que la inducción magnética en el entrehierro izquierdo es 1 T, el flujo magnético correspondiente es:

$$\Phi_1 = B_1 S = (1)(10 \times 10^{-4}) = 10^{-3} [\text{Wb}]$$

por lo tanto, la fuerza magnetomotriz (fmm) necesaria en la bobina es:

$$\mathcal{F} = \Phi_1 \mathfrak{R}_1 = (0.796 \times 10^{-6})(1 \times 10^{-3}) = 796 \text{ AV}$$

y de este modo, se requerirá una corriente en la bobina de valor:

$$i = \frac{\mathcal{F}}{N} = \frac{796}{500} = 1.592 \text{ A}$$

lo que corresponde a un voltaje de corriente continua de:

$$V = Ri = (10)(1.592) = 15.92 \text{ V}$$

b) El flujo magnético por el entrehierro derecho es

$$\Phi_2 = \frac{\mathcal{F}}{\mathfrak{R}_2} = \frac{796}{1.592 \times 10^6} = 0.5 \times 10^{-3} \text{ Wb}$$

Por consiguiente el flujo magnético por la rama central en el que se ha colocado la bobina tiene el siguiente valor:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = (1 * 10^{-3}) + (0.5 * 10^{-3}) = 1.5 * 10^{-3} \text{ Wb}$$

Por definición el coeficiente de autoinducción se tiene que:

$$L = (N) \frac{\Phi}{i} = (500) \frac{1.5 * 10^{-3}}{1.592} = 0.471 \text{ Hy}$$

c) Si la bobina se coloca en la columna de la izquierda, el circuito eléctrico equivalente se muestra en la figura 1.42, en este diagrama la reluctancia del entrehierro derecho queda en cortocircuito con la rama central, debido a esto el flujo que produce ahora la bobina, es el mismo que el de la figura 1.41 ya que la inductancia magnética en ese entrehierro sigue siendo de 1 T. En consecuencia la fmm necesaria en la bobina seguirá siendo de 796 AV, y la tensión de alimentación necesaria será de 15.92 V. En cuanto al valor de la inducción o inductancia de la bobina se tendrá ahora el siguiente valor:

$$L = (N) \frac{\Phi}{i} = (500) \frac{1 * 10^{-3}}{1.592} = 0.314 \text{ Hy}$$

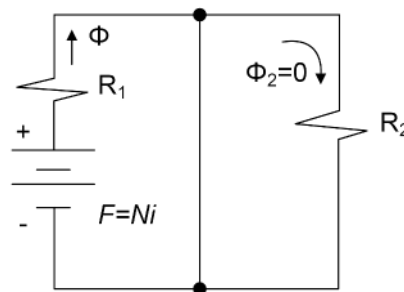


Figura 1.42

### Problema 1.5

Un núcleo magnético cuadrado tiene una longitud de 55 cm, una intensidad de campo magnético de 115

A espigas/m, un área de sección transversal de  $150 \text{ cm}^2$ . Una bobina de 200 vueltas está enrollada en una de las columnas del núcleo.

- ¿Cuánta corriente se requiere para producir un flujo de  $0.012 \text{ Wb}$  en el núcleo?
- ¿Cuál es la permeabilidad relativa del núcleo para la corriente del inciso anterior?
- ¿Cuál es la reluctancia para dicho valor de corriente solicitada en el inciso (a) ?

### Respuestas

- a) La densidad de flujo requerida en el núcleo es:

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{0.012[\text{Wb}]}{0.015[\text{m}^2]} = 0.8 \text{ T}$$

la fuerza magnetomotriz necesaria para producir esa intensidad de campo es:

$$\mathcal{F} = fmm = Ni = Hl_{media}$$

$$fmm = (115 \text{ A espigas/m})(0.55 \text{ m}) = 63.25 \text{ A espigas}$$

entonces; la corriente requerida es:

$$i = \frac{fmm}{N} = \frac{63.25 \text{ A espigas}}{200 \text{ espigas}} = 0.316 \text{ A}$$

- b) La permeabilidad del núcleo para dicha corriente es:

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{0.8 \text{ T}}{115 \text{ A espigas/m}} = 0.00696 \frac{\text{Hy}}{\text{m}}$$

por lo tanto; la permeabilidad relativa es:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{0.00696 \frac{\text{Hy}}{\text{m}}}{(4)(\pi) \times 10^{-7} \frac{\text{Hy}}{\text{m}}} = 5540$$

- c) La reluctancia del núcleo es:

$$\mathfrak{R}_{nucleo} = \frac{\mathcal{F}}{\Phi} = \frac{63.25 \text{ A espigas}}{0.012 \text{ Wb}} = 5270 \frac{\text{A espigas}}{\text{Wb}}$$

## 1.12 Resumen

Los principios y comportamientos físicos de los circuitos magnéticos se pueden describir a través de analogías de circuitos eléctricos los cuales permiten el tener una forma sencilla de resolverlos. Para lo cual se presenta qué es la densidad de flujo, la intensidad, la fuerza magnetomotriz entre otras. Se describe el principio de operación de los circuitos magnéticos excitados con corriente continua y corriente alterna, se describe el fenómeno de fuerza contra electromotriz o fem que se genera con la variación de los campos magnéticos, así como la relación que tiene la inductancia en los circuitos magnéticos.

La ley de Faraday establece que en una bobina de alambre conductor, se generará un voltaje proporcional a la tasa de cambio de flujo que la atraviesa con respecto al tiempo. La ley de Faraday es la base del funcionamiento del transformador. Un alambre conductor que porta una corriente eléctrica en presencia de un campo magnético, experimentará una fuerza sobre él, si se encuentra adecuadamente orientado. Este comportamiento es la base del funcionamiento del motor eléctrico en todas las máquinas eléctricas reales. Igualmente, un alambre que se mueve con la orientación apropiada a través de un campo magnético, experimentará un voltaje inducido en él. Este comportamiento es la base del funcionamiento del generador eléctrico en todas las máquinas reales.

Por otro lado; los dispositivos electromecánicos que utilizan y que emplean campos magnéticos, con frecuencia utilizan materiales ferromagnéticos para guiar y concentrar dichos campos magnéticos. Debido a que la permeabilidad magnética de los materiales ferromagnéticos puede ser relativamente alta (de hasta diez mil veces el espacio que la rodea); la mayor parte de dicho flujo magnético se limita o restringe a patrones muy bien definidos, y que son determinados mediante la geometría del material magnético. De igual manera, frecuentemente las frecuencias de interés son relativamente bajas, para permitir considerar cuasi-estáticos los campos magnéticos, como consecuencia de lo anterior, poder determinar esos campos magnéticos cuasi-estáticos, sólo requiere del conocimiento de la fuerza magnetomotriz (fmm) neta que actúa y está presente en la estructura magnética.

Por lo tanto; la solución para los campos magnéticos en estas estructuras, se obtiene en una forma regular por medio de las técnicas de análisis de circuitos magnéticos. Estas técnicas pueden emplearse para reducir una solución de campo magnético tridimensional a lo que es en esencia un problema unidimensional. Como en todas las soluciones técnicas, se requiere de cierta cantidad de experiencia y juicio; no obstante, la técnica proporciona valiosos resultados en numerosas circunstancias de interés práctico. Los materiales ferromagnéticos están disponibles con una gran variedad de características. En términos generales, su comportamiento no es lineal y su curva característica  $B - H$ , se representa como la forma que se ubican dentro de la familia de las curvas de histéresis ( $B - H$ ). Las pérdidas, tanto por histéresis, como por corrientes parásitas (Eddy), son funciones del nivel de flujo y de la frecuencia de operación, así como de la composición del material y del proceso de fabricación usado.

Una comprensión básica de la naturaleza de estos fenómenos es muy útil en la aplicación de estos materiales en los dispositivos de forma típica, las propiedades importantes están disponibles en la forma de curvas que son proporcionadas por los fabricantes del material.

Ciertos materiales magnéticos, conocidos normalmente como materiales de imán permanente, se ca

racterizan por amplios valores de magnetización remanente, y de coercitividad, estos materiales producen un importante flujo magnético, aun en los circuitos magnéticos con entrehierros. Con un diseño apropiado es posible lograr que operen de manera estable en situaciones donde se expongan a una amplia variedad de fuerzas de desestabilización y de fuerzas magnetomotrices. Los imanes permanentes se aplican en numerosos dispositivos pequeños que incluyen altavoces, motores de corriente alterna y corriente continua, así como micrófonos y medidores eléctricos analógicos.

### 1.13 Problemas

**1.1** Un núcleo de lámina de acero recocido, tiene un devanado de 1500 vueltas de alambre, por el cual pasa una corriente de 12 mA. Si la longitud de la bobina es de 20 cm, calcular la fuerza magnetomotriz ( $fmm$ ) y la intensidad de campo magnético ( $H$ ).

**1.2** Cuando una bobina tiene un núcleo de hierro recocido en su interior, la densidad de flujo es de 1.44 T con una intensidad de campo de  $500 \frac{At}{m}$ . Calcular  $\mu$  y  $\mu_r$ .

**1.3** Una bobina de 100 vueltas mide 8 cm de longitud. La corriente en la bobina es de 0.2 A. Si el núcleo es de hierro fundido con una  $B = 0.13$  T. Calcular:  $H$ ,  $\mu$  y  $\mu_r$ .

**1.4** Calcular el voltaje inducido en una bobina estacionaria de 500 voltios que se producen con los siguientes cambios de flujo:

- a) El incremento de 4 Wb a 6 Wb en 1 seg.
- b) La disminución de 6 Wb a 4 Wb en 1 seg.
- c) 4000 líneas de flujo que aumentan a 5000 líneas de flujo en  $5 \mu\text{seg}$ .
- d) 4 Wb permaneciendo constantes durante 1 seg.

**1.5** Una bobina con un núcleo de hierro absorbe una corriente de 0.5 A cuando se aplica una tensión senoidal de 220 V eficaces en sus terminaciones. Si la potencia absorbida es de 30 W, deducir el circuito equivalente de la bobina.

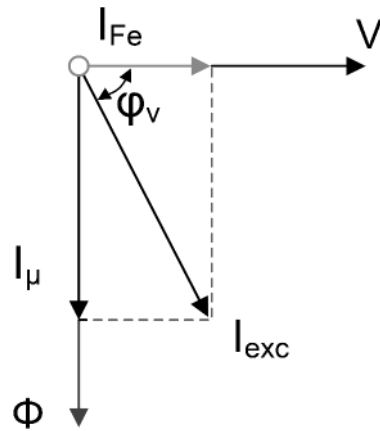


Figura 1.43

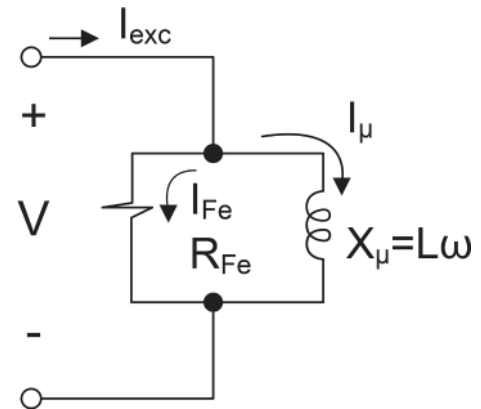


Figura 1.44

**1.6** El circuito magnético de la figura 1.43 tiene  $A_m = A_{fe} = 25 \text{ cm}$  y  $\delta = 20 \text{ mm}$ . La sección transversal del núcleo es cuadrada con  $l_{fe} = 10 \text{ cm}$ .

Si se emplea el mínimo volumen de imán permanente de cerámica con un área de sección transversal igual a la del núcleo de hierro utilizado, determinar la longitud del imán. El material del núcleo es lámina de acero eléctrico M-27, calibre 24, con  $FA = 0.96$ ,  $B_m = 0.2 \text{ T}$ ,  $H_m = 1.33 \times 10^{-5} \frac{\text{At}}{\text{m}}$ ,  $B_{fe} = 30 \frac{\text{At}}{\text{m}}$  y  $\mu_r = 4800$

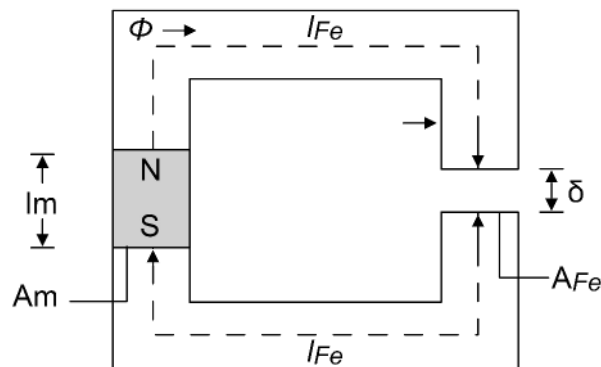


Figura 1.45

**1.7** El flujo de un electroimán es de 6 Wb. El flujo aumenta uniformemente hasta 12 Wb en un intervalo de 2 seg. Calcular el voltaje inducido en una bobina que tiene 10 vueltas y es estacionaria respecto al campo magnético.

**1.8** Un núcleo de acero recocido con  $B = 0.72$  T, tiene una permeabilidad  $\mu = 8 \times 10^{-3} \frac{\text{Tm}}{\text{At}}$ . Si la longitud de la bobina es de 20[cm] y el área del núcleo es de 3 cm. Calcular la reluctancia de la trayectoria.

**1.9** Una curva de magnetización para “hierro dulce” tiene los siguientes valores:

<b>B,T</b>	<b>H</b>
0.126	1000
0.252	2000
0.375	3000
0.428	4000
0.441	5000

- ¿Cuál es el valor de  $\mu$ ?
- Calcular  $\mu_r$ .
- ¿A qué valor de  $H$  comienza a saturarse la curva  $B - H$ ?

**1.10** una bobina tiene una fuerza magnetomotriz de 500 At y una reluctancia de  $2 \times 10^{-6} \frac{\text{At}}{\text{Wb}}$ . Calcular el flujo total  $\varphi$ .

**Capítulo 2**  
**Balance de energía**  
**electromecánica**

- 2.1 Problema de diseño**
- 2.2 Introducción**
- 2.3 Transformación de la energía electromecánica**
- 2.4 Mecánica de los motores y generadores de corriente continua**
- 2.5 Relación de fuerza de Biot y Savat**
- 2.6 Otras leyes relacionadas**
- 2.7 Máquinas de corriente alterna**
- 2.8 Máquinas de inducción**
- 2.9 Balance de energía**
- 2.10 Determinación de la fuerza magnética (coenergía)**
- 2.11 Solución del problema de diseño**
- 2.12 Problemas resueltos**
- 2.13 Resumen**
- 2.14 Problemas**



### Competencias del capítulo

- Entender las leyes que rigen los campos magnéticos constantes y variables.
- Comprender la conversión de la energía electromagnética.
- Describir de manera clara la interacción las fuerzas que experimentan los conductores por los cuales circula una corriente y se encuentran inmersos en campos magnéticos variables.
- Entender el principio de funcionamiento de las máquinas de corriente continua y corriente alterna.

## 2.1 Problema de diseño

### Motor paso a paso

Un motor paso a paso (step-step o stepper), es un dispositivo electromagnético que convierte una serie de impulsos eléctricos en desplazamientos angulares discretos, en la figura 2.1 se representa un motor de este tipo, cuyo estator está distribuido en tres secciones: a, b y c.

El rotor tiene ocho salientes magnéticos, cada devanado del estator está distribuido alrededor de la periferia formando ocho salientes magnéticos, de tal modo que los salientes o dientes correspondientes a cada fase, están desplazadas  $15^\circ$  entre sí. Las inductancias de cada devanado o fase, son máximas cuando están enfrentados los dientes del rotor con los correspondientes del estator de cada fase.

Si se denomina  $\theta$  al ángulo que forma el centro de un diente del rotor con el correspondiente, más cercano del estator de la fase “a” (medido, por ejemplo; en el sentido de las agujas del reloj), las inductancias propias de los devanados de cada fase, en función de la posición del rotor, vendrán expresadas por las ecuaciones

$$L_a = L_o + L_m \cos 8\theta; \quad L_b = L_o + L_m \cos 8(\theta - 15^\circ); \quad L_c = L_o + L_m \cos 8(\theta + 15^\circ)$$

Para el diseño de un motor de paso específico, se puede calcular la expresión del par resultante en el rotor en los siguientes casos:

- 1) Cuando se excita únicamente el devanado “a”.
- 2) Cuando se excita sólo el devanado “b”.
- 3) Cuando se excitan a la vez los devanados “a” y “b”.

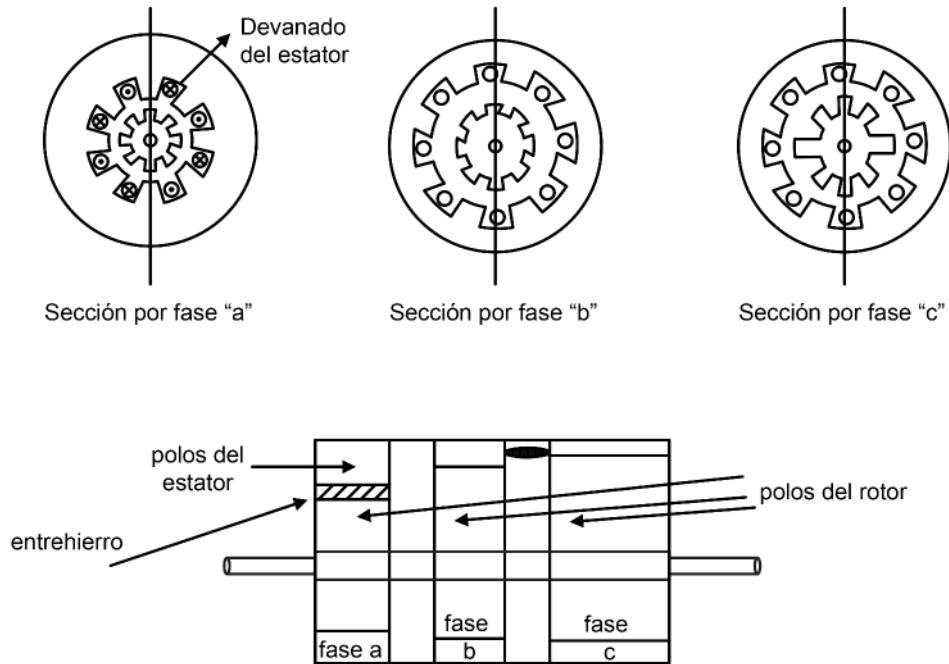


Figura 2.1 Motor paso a paso.

Explique mediante un diagrama de bloques la teoría de operación de un motor de paso a paso, utilizando el principio de conversión de energía electromecánica.

### Problema de contextualización

En la historia del desarrollo de la humanidad, se han buscado muchas fuentes de energía para movilizarse, construir viviendas, arar, segar, procesar los alimentos e iluminar; entre muchas otras acciones. Hombres y bestias fueron en su momento, las primeras fuentes de energía, incluso, la esclavitud fue “justificada” durante milenios en esa finalidad. La leña y el carbón desempeñaron un papel protagónico, durante la Revolución Industrial con la invención de la máquina de vapor, el desarrollo de la electricidad a finales del siglo XX permitió el desarrollo de la industria moderna y requirió la conversión de diversas fuentes de energía en energía eléctrica y viceversa. En la actualidad, el desarrollo de la electrónica y en especial de la electrónica de potencia, permite el control efectivo y eficiente de los procesos de conversión de energía electromecánica.

Actualmente, investigadores del Berkley Lab, han desarrollado una célula de combustible llamada SOFC (Solid Oxide Fuel Cell) que promete generar electricidad de forma tan barata como la más eficiente de las turbinas de gas. Se abren así las puertas hacia una fuente de energía que no sólo no contamina, sino que además, es comercialmente viable. Ello ha sido posible gracias a la adopción de una interesante solución. Los científicos han reemplazado los electrodos de cerámica por otros con acero inoxidable, lo que los hace más fuertes, más fáciles de fabricar y sobre todo, más Económicos.

Steve Visco, de Materials Sciences Division, y responsable del desarrollo de la tecnología SOFC, cree que están más cerca que nunca de romper la barrera del costo, y que una célula de combustible pueda ser comercializada en competencia con otros métodos de generación energética. Dicha barrera ha sido establecida en unos \$400 dólares estadounidenses por Kilovatio, una décima parte de lo que cuestan las células de combustible actuales, y una cifra equivalente a la de los generadores Diesel y de turbina de gas más eficientes. Es obvio que una fuente de energía verde es algo sumamente atractivo, pero en realidad, nadie quiere pagar el doble por un producto, aunque sea amistoso con el medio ambiente. De aquí, la necesidad de hacer más comerciales las alternativas de las que se dispone hoy en día.

Las células de combustible son aparatos muy ingeniosos que convierten la energía química en energía eléctrica. Se aprovecha de la fuerte tendencia que tienen el hidrógeno y el oxígeno de unirse y de formar moléculas de agua. A diferencia de las turbinas de gas, este proceso de unir hidrógeno y oxígeno, no produce contaminantes del aire, como el óxido nitroso o dióxido de azufre. Además, al ser más eficientes que las turbinas, las células emiten menos dióxido de carbono. Una célula SOFC está compuesta por una capa de electrolito situada entre dos capas porosas (el ánodo y el cátodo). El oxígeno del aire fluye a través del cátodo; mientras que un combustible que contiene hidrógeno (como el metano) atraviesa el ánodo. Los iones de oxígeno cargados negativamente, migran entonces a través de la membrana electrolito y reacciona con el hidrógeno, formando agua, que a su vez reacciona con el metano para formar  $\text{CO}_2$  e hidrógeno. Esta reacción electroquímica genera electrones, que fluyen del ánodo hacia el exterior y de regreso al cátodo, un paso final que cierra el circuito y proporciona energía eléctrica. Para aumentar el voltaje, se unen entre sí varias células de combustible, formando el corazón del “generador limpio”.

El investigador Visco y sus colegas, consiguieron reducir la temperatura de trabajo de la célula de combustible de  $1000^\circ$  a  $800^\circ$  C sin sacrificar eficiencia. Esto mejoró con su tiempo de vida y redujo el desgaste de los componentes. Las células de combustible serán muy útiles en el futuro. Para poder satisfacer la demanda de energía, muchas empresas y edificios (como hospitales, escuelas y zonas habitacionales) instalarán sus propias células independientes. Esto permitirá eliminar los cableados actuales que transportan electricidad desde largas distancias, un sistema que hace que un tercio de ésta se pierda antes de llegar al cliente. Se han visto generadores de células de combustible con capacidad de entre 3 y 10 [MW], suficientes para aplicaciones a pequeña escala.

Como actividad de esta contextualización, genere diversos escenarios respecto al uso racional de energía alternativa. Investigue respecto a formas ecológicas y amigables al medioambiente, para sustentar el consumo energético a corto, mediano y largo plazos.

## 2.2 Introducción

El entender el comportamiento de campos magnéticos, es fundamental para poder comprender el comportamiento de las máquinas eléctricas, sean de corriente continua o de corriente alterna.

En muchos casos, además de las máquinas eléctricas comunes como motores o generadores, el empleo de campos magnéticos en otras aplicaciones también es común, como es el caso de los hornos de inducción donde se genera calor a través de la inducción magnética de un medio conductivo en un crisol, el cual contiene bobinas magnéticas. De la misma forma, se tiene el empleo de las leyes de circuitos magnéticos en frenos electromagnéticos de corrientes parásitas.

Existen diferentes tipos de conversión de energía, en particular, se tiene la conversión de energía mecánica a eléctrica y de eléctrica a mecánica. La conversión de mecánica a eléctrica se realiza mediante los *generadores*, y la de eléctrica a mecánica mediante los *motores*.

En los motores y generadores, los medios de acoplamiento entre las energías mecánica y eléctrica, consisten en campos magnéticos ubicados y controlados en forma apropiada.

Todas las máquinas eléctricas rotatorias, así como los transductores especiales relacionados con ellas, operan bajo los mismos principios y obedecen las siguientes leyes fundamentales:

- **Ley de inducción de Faraday.** Esta ley fue cuantificada por Neumann y relacionada en forma especial por Flemming. Más adelante, Lenz clarificó su significado en las relaciones transitorias para la inducción magnética.
- **Leyes de los voltajes y de las corrientes de Kirchhoff relativas a los circuitos eléctricos.** Estas leyes permiten entender y predecir las relaciones en los arreglos en serie y en paralelo de las bobinas de las máquinas y circuitos de carga.
- **Ley de los circuitos magnéticos de Ampère.** Permite entender y diseñar la parte magnética de las máquinas.
- **La ley fundamental de Ohm.** Relaciona el voltaje, la corriente y la resistencia, y permite establecer las proporciones en las bobinas de motores y generadores.
- **Ley de Biot y Savat.** Proporciona la fuerza que un campo magnético ejerce sobre un conductor, mediante la que se calcula la fuerza producida por un motor, y la fuerza de entrada requerida para accionar un generador.
- **Cálculo de Watt de la relación entre fuerza, trabajo, tiempo y potencia.** Mediante este cálculo se cuantificó el término caballo de fuerza. Aun cuando James Watt no hizo trabajos sobre electricidad, los conceptos que desarrolló fueron reconocidos al darse el nombre de Watt a la unidad de potencia eléctrica.

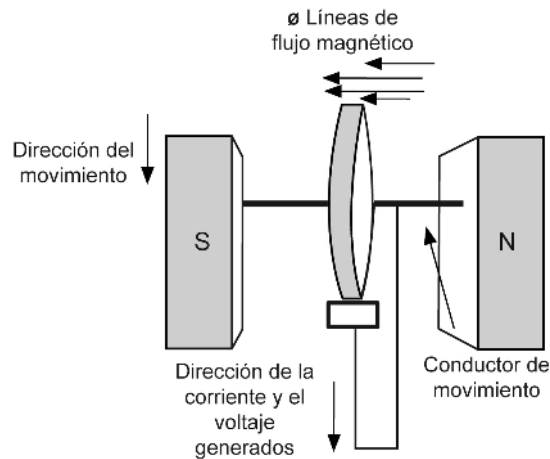
### Ley de inducción de Faraday

La única forma de producir una corriente eléctrica en forma continua, antes del descubrimiento de Faraday, consistía en la conversión de energía química a eléctrica que se llevaba a cabo en una pila. La contribución de Faraday fue mostrar que el desplazamiento mecánico de un conductor en el seno de un campo magnético también era capaz de producir corrientes eléctricas. Hasta donde Faraday podía ver, se trataba de la misma fuerza y afectaba los instrumentos exactamente de igual manera. Faraday le llamó voltaje inducido, ya que se generaba sin que hubiera contacto entre el imán y el conductor. A su invento se le dio el nombre de disco de Faraday (véase la figura 2.2); y desde entonces, se le ha llamado *generador homopolar*. Se trataba simplemente de un disco conductor al que se le hacía girar a mano, al mismo tiempo que parte de su periferia se hallaba inserta entre los polos de un imán o magneto.

Si un conductor se mueve a través de un campo magnético entonces se genera un voltaje. La ley de Faraday puede entonces enunciarse como sigue:

**El voltaje inducido en una espira o bobina de un conductor, es proporcional a la rapidez de cambio de las líneas de fuerza que atraviesan la bobina.**

Se dice que las líneas de fuerza magnética enlazan una bobina de alambre, cuando pasan a través de ésta como los eslabones de una cadena. Se dice que hay un voltaje cuando el número de líneas de fuerza magnética enlazadas cambia, ya sea que aumente o disminuya.



**Figura 2.2** Disco de Faraday.

### Formulación de Neumann

El disco de Faraday fue ampliamente estudiado y utilizado para demostraciones como curiosidad científica, catorce años después Neumann pudo cuantificar la proposición de Faraday mediante la fórmula siguiente:

$$E_{prom} = \frac{\Phi}{t} ab \quad \text{Volts} \quad E_{prom} = \frac{\Phi}{t} \times 10^{-8} \quad \text{volts/vuelta}$$

El voltaje producido es directamente proporcional a la rapidez del cambio de las líneas de fuerza enlazadas, o bien un cambio más rápido de los enlaces hará que aumente el voltaje generado.

La ecuación es válida para las unidades del sistema cgs o para unidades del sistema inglés, ya que está dado en líneas. Cuando se da en webers, como en el sistema internacional, hay  $10^{-8}$  líneas/weber, por tanto:

$$E_{prom} = \frac{\Phi}{t} \text{volts/vuelta}$$

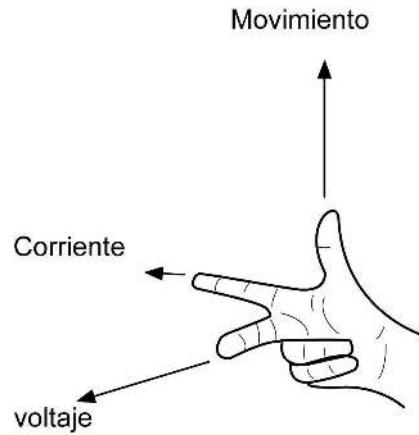
donde  $E_{prom}$  = voltaje promedio rectificado que se genera por cada espira individual de alambre,  $\Phi$  = líneas de fuerza (maxwells) que son atravesadas o enlazadas por una sola espira cuando se pasa de un flujo nulo a uno máximo,  $t$  = tiempo en segundos en el cual  $\Phi$  líneas son enlazadas por las vueltas de alambre conforme éste se mueve a través del campo magnético,  $10^{-8}$  = relación entre las antiguas unidades absolutas del sistema cgs (centímetro-gramo-segundo) y las unidades modernas prácticas. La ecuación anterior puede ser expresada como:

$$e_{inst} = \beta l \nu \quad \text{V}$$

donde  $e_{inst}$  = volts generados en cualquier instante,  $\beta$  = densidad de flujo en webers por metro cuadrado,  $l$  = longitud de un conductor dentro de un campo de densidad en metros,  $\nu$  = velocidad rotacional de conductor en metros sobre segundo.

### Relaciones de Fleming

En el trabajo de la electricidad existen muchas reglas de la mano derecha o de la mano izquierda, ya que son formas convenientes de recordar ciertas relaciones cuando las polaridades y las direcciones desempeñan un papel fundamental. Fleming relacionó la obra de Faraday de la siguiente forma: si el campo magnético se considera estacionario en el espacio, el conductor se considera entonces moviéndose en forma perpendicular a él. Los dedos pulgar, índice y medio de la mano derecha se extienden formando ángulos rectos entre sí, y con este arreglo el campo magnético viene representado por el dedo índice, yendo del polo norte al sur en la dirección en la que apunta el dedo. Si se considera que el pulgar apunta en la dirección de movimiento del conductor, entonces el dedo medio apuntará en la dirección de flujo de la corriente convencional. En la figura 2.3 se ilustra esta regla.

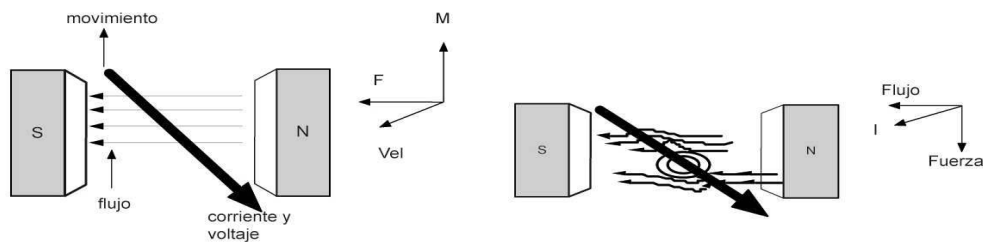


**Figura 2.3** Regla de Fleming de la mano derecha.

### 2.3 Transformación de la energía electromecánica

Después de dos años del descubrimiento de Faraday, en 1833 Heinrich Lenz enunció la transformación de la energía electromecánica.

En todos los casos de inducción electromagnética, el voltaje inducido hará que la corriente circule en un circuito cerrado en una dirección tal que el campo magnético originado por esta corriente se oponga a la causa que lo produce. Véase la figura 2.4.



**Figura 2.4** Conversión de energía eléctrica a mecánica y viceversa.

Es una forma de enunciar el principio de energía fundamental para el funcionamiento de la inductancia, el transformador, el motor y el generador. En la figura 2.5 se muestra la fuerza que se ejerce sobre un conductor.

Cuando el voltaje inducido y la corriente son como las que se muestran en la figura 2.4(a) se cumple con la ley de Faraday y de Fleming. Al haber un campo magnético proporcional a la corriente inducida, conforme a Ampère, rodeará al conductor.

Por lo tanto, la combinación de los dos campos magnéticos, se opondrá al movimiento del conductor, ya que los campos fluyen por arriba y abajo, pero al mismo tiempo los campos apuntan en direcciones opuestas debajo del conductor atrayendo uno al otro.

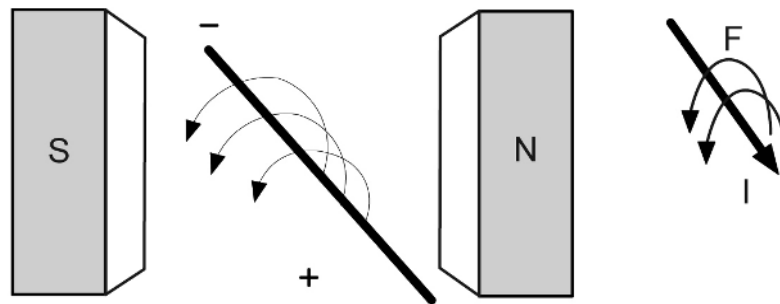


Figura 2.5 Fuerza magnética sobre un conductor.

El campo generado por el conductor, es directamente proporcional a la corriente. Las fuerzas ocasionadas por los campos opuestos se vinculan directamente con la corriente del conductor, dichas fuerzas en los motores y generadores se conocen como “acción del motor”. En toda máquina rotatoria están presentes estas fuerzas.

## 2.4 Mecánica de los motores y de los generadores de corriente continua

Los voltajes que se han presentado son generados en vueltas de alambre o en arreglos simples de bobina de alambre con muchas vueltas. En la realidad, existen arreglos mecánicos con el fin de soportar una gran cantidad de bobinas; deben estar configuradas de tal forma que puedan entrar y salir repetidamente en una región donde existe un campo magnético intenso. En toda máquina siempre se busca la mayor optimización de los recursos, y este caso no es la excepción, con el fin de alcanzar un voltaje de operación en un generador con bobinas y el menor número de vueltas, se necesita un campo magnético muy denso. La ventaja de no tener un número grande de vueltas, permite un diámetro amplio pero con un espacio limitado, esto significa una densidad de flujo  $\beta$  alta para saturar la estructura del campo magnético que implica una estructura grande y pesada de aleaciones magnéticas especiales. Dicho lo anterior, la

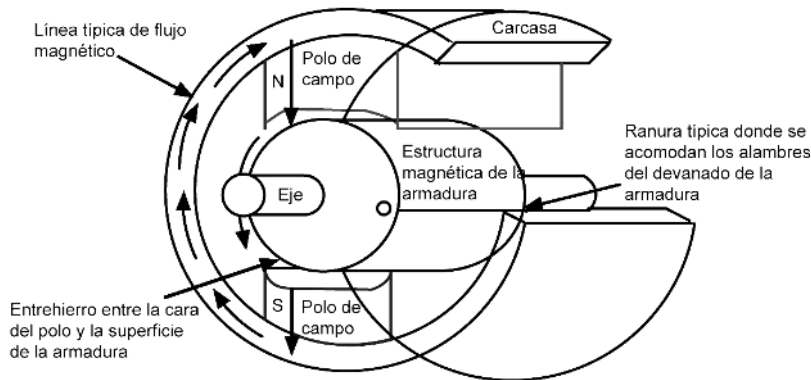


estructura de un motor o un generador, es magnética y está compuesto de devanados, en donde las bobinas pueden entrar y salir de forma controlada dentro de la región en la que exista el flujo magnético.

De hecho, sólo se utilizan unos cuantos movimientos continuos, los llamados de tiro, que son movimientos en línea recta para meter, sacar o pasar un conductor por un campo magnético. Otro movimiento que se puede considerar de tiro (mientras no haya presencia de movimiento de vaivén u oscilaciones cíclicas) es el movimiento angular, funcionando bajo la misma metodología que el de línea recta.

Al diseñar una estructura magnética efectiva que proporcione un movimiento rotatorio, es necesario contar con un motor que esté alrededor de un apilamiento cilíndrico compuesto de discos hechos de aleaciones magnéticas sujetos a presión o por medio de ejes seguros. A la estructura magnética rotatoria o armadura se le realizan unas perforaciones o ranuras con el propósito de ocupar ese espacio para montar las bobinas.

Los polos magnéticos por donde pasarán los conductores durante el movimiento rotatorio deben orientarse hacia adentro, en la superficie cilíndrica de la estructura rotatoria. Las caras de los polos son curvas, adaptándose al movimiento. Al saber que la trayectoria es una línea de fuerza magnética, se considera cerrada y por ello, existe un camino de regreso en los extremos exteriores y los polos magnéticos; esta función la desempeña la carcasa. En el exterior de un motor o generador hay más material que el requerido, esto con propósitos estructurales; en la figura 2.6 se muestra la configuración, pero ésta no está del todo completa debido a que falta suministrar los extremos de la estructura que sostiene los cojinetes (chumaceras), éstos permiten el movimiento giratorio, y a su vez, lo cubre para evitar el contacto mecánico entre la armadura y los polos del campo. Otra función de los cojinetes sirve para limitar el desplazamiento axial de la armadura, debiendo soportar las fuerzas creadas por bandas, engranes, acoplamientos y demás mecanismos montados en forma directa.



**Figura 2.6** Estructura magnética de un generador o motor.

El campo magnético lo provee un grupo de bobinas de campo de varias vueltas que rodean a los polos de campo en el espacio existente entre la armadura y la carcasa. Las bobinas pueden ser de distintos tipos, dependiendo de la corriente y su procedencia.

Los devanados que se hallan montados o tejidos en las ranuras de la estructura magnética obedecen a la ecuación:

$$E_{\text{gen}} \frac{\text{volts}}{\text{gen}} = \frac{\Phi ZSP}{60a} \times 10^{-8} \frac{\text{volts}}{\text{gen}}$$

donde  $\Phi$  = flujo total por polo,  $Z$  = conductores totales en la armadura,  $P$  = número de polos en el campo de la máquina,  $a$  = número de trayectorias paralelas en el devanado de la armadura,  $10^{-8} = \frac{\text{volts}}{\text{líneas}}$ .

Independientemente de cuántas bobinas y vueltas existan, debe haber el espacio necesario. Esto conlleva también, a que sea por una gran corriente que requiera una sección transversal o un voltaje muy elevado que requiera muchas vueltas, el tamaño de la armadura es determinada por las dimensiones de los devanados y el flujo de polos contenidos.

Los devanados se interconectan por mallas o lazos cerrados. Los voltajes generados en un conductor varían por su polaridad, ya que primero pasa por el polo sur y después por el norte, recordando la regla de la mano derecha de Flemming. Cada uno de los conductores de la bobina se mueve en un ángulo recto respecto al campo magnético, véase la figura 2.7. También se puede suponer que en la figura 2.7 el campo magnético entre los polos de norte a sur es uniforme, y el conductor de la derecha está generando una fuerza electromotriz, creando una corriente que circula desde la perspectiva del lector hacia la página. Mientras que en el conductor izquierdo sucede lo opuesto, siguiendo la regla de Flemming. Los dos voltaje que se encuentran en direcciones opuestas están conectados en serie debido a la parte trasera y cualquier circuito externo conectado a los extremo marcará + y -.

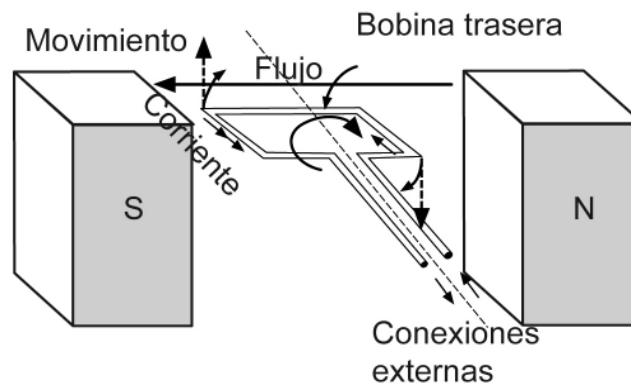
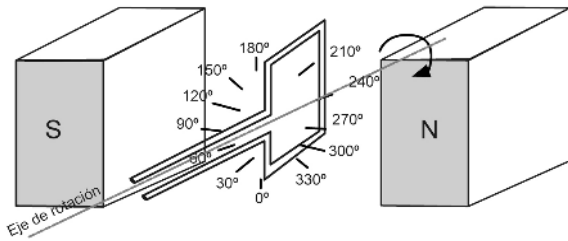
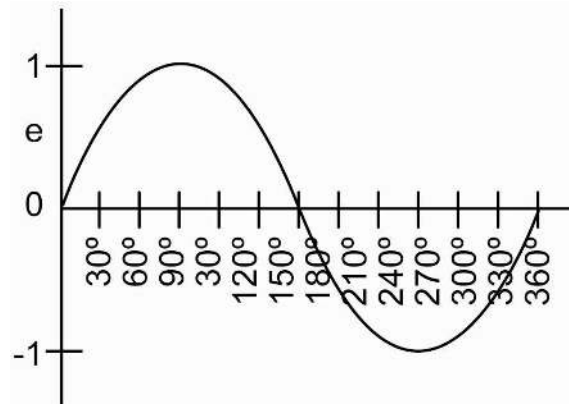


Figura 2.7 Generador básico.

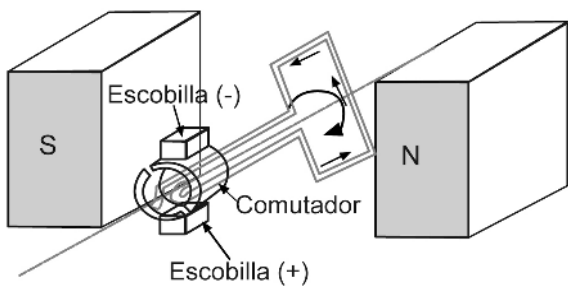
Las bobinas se hallan inmersas en la estructura magnética de la armadura, y en la figura 2.7a, se puede ver que al cabo de una rotación de  $90^\circ$ , la bobina de una sola vuelta se encuentra paralela al campo magnético uniforme. Al adoptar esa posición no corta ningún enlace magnético y en consecuencia no genera voltaje, en ese instante. En su siguiente giro, próximo cuarto de  $90^\circ$ , se tiene un voltaje inducido con polaridad opuesta a la original (figura 2.8).



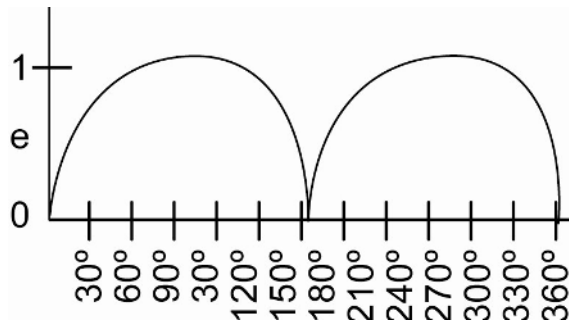
**Figura 2.8a** Posiciones angulares en cada instante.



**Figura 2.8b** Voltaje generado contra la posición angular.



**Figura 2.9a** Conmutador y escobillas.



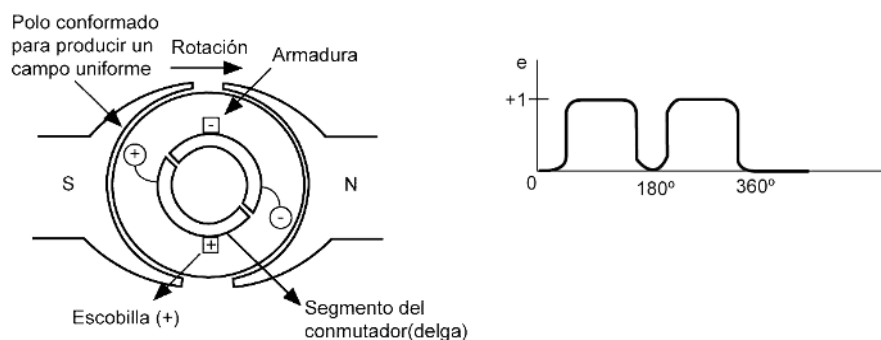
**Figura 2.9b** Voltaje generado contra la posición angular.

En el caso de la figura 2.8a, el voltaje en cualquier espira tiene una variación senoidal, véase la figura 2.8b, y esto genera una corriente alterna que se manifiesta en las máquinas, aun cuando la onda no sea una senoidal perfecta, ya que el campo magnético no fluye en líneas rectas en los polos.

El voltaje de corriente alterna se rectifica mediante un conmutador accionado por un interruptor, véanse las figuras 2.9a y 2.9b. Unas escobillas fijas están en contacto con los segmentos del conmutador o delgas, y la escobilla inferior tiene polaridad positiva conectándose siempre a la delga positiva generando

el movimiento rotatorio.

Un generador de una sola bobina y conmutador, genera una corriente alterna con onda completa rectificadas. En la realidad las líneas del campo magnético no son rectas de polo a polo, son líneas que entran y salen de forma radial debido a las propiedades magnéticas de la armadura, además el campo no es uniforme del todo, ya que al inicio hay un campo nulo hasta un campo máximo. Un resultado de voltaje generado por la bobina más real es el mostrado en la figura 2.10, donde la forma de la onda es más chata en la parte superior.



**Figura 2.10** (a) Bobina y conmutador. (b) Gráfica del voltaje generado contra posición angular para una sola bobina.

Al agregar mayor cantidad de bobinas a un generador y distribuirlas de modo uniforme en la armadura, aspecto que sucede con la máquinas en la práctica, habrá generación de voltaje por cada bobina y con ello su suma. Resultando una corriente directa uniforme con pequeñas variaciones conforme se conectan y desconectan las bobinas. El área máxima de los polos que puede ser ocupada en la práctica por una máquina de corriente continua sin fugas de flujo entre polo y polo, es de 70% (superficie exterior de la armadura) aproximadamente. En los circuitos reales de los motores, es necesario tener al menos dos polos, y se deben encontrar en pares, por ello en la industria se caracterizan las máquinas por tener dos, cuatro, seis polos y más.

## 2.5 Relación de fuerza de Biot y Savat

La fuerza ejercida por un campo magnético sobre un conductor, es llamada ley de Biot y Savat. Dicha ley relaciona el flujo magnético por unidad de área  $B$ , la longitud  $l$  del conductor afectado por el campo electromagnético y la corriente  $I$ ; que en conjunto crean la fuerza expresada en dinas. A continuación se muestra la deducción de éstas unidades:

$$F = \frac{BIl}{10} \text{ dinas}$$

donde  $B$  son líneas por centímetro cuadrado. También se pueden interpretar como  $\Phi$  líneas divididas entre al área  $A$  en  $\text{cm}^2$ ; una línea es una unidad de fuerza magnética deducida de la relación

$$1 \text{ línea de flujo magnético} = \frac{1 \text{ dina de fuerza a 1 cm de distancia}}{10 \text{ A en el conductor}}$$

Pasando las unidades a sistema inglés se obtiene:

$$F = \frac{\beta Il}{1.13} \times 10^{-7} \text{ lb}$$

Pasando la expresión a newtons se obtiene:

$$f = \beta IlNw$$

El empleo de la ley de Biot y Savat se da para cualquier conductor que se mueve a través de un campo magnético, y al mismo tiempo lleve una corriente que ejerce una fuerza sobre la estructura que lo sostiene. A esta se le conoce como acción de motor. Los conductores son utilizados en los motores o generadores para realizar su acción generadora. La acción generadora hace que algunos conductores se vean influenciados por un campo electromagnético. Además, los conductores producen fuerzas laterales sobre este campo, dichas fuerzas son proporcionales a la corriente en el conductor. Los conductores restantes que contiene la misma corriente, pero que no se hallan influenciados por el campo magnético, no producen ninguna acción de motor. Cabe mencionar que todo conductor que esté generando un voltaje, también se verá sujeto a una fuerza mecánica, esto quiere decir que ambos efectos estarán presentes.

## 2.6 Otras leyes relacionadas

La ley de Ohm es fundamental para cualquier cálculo en electricidad y electrónica, donde la relación de  $E = IR$  siempre está presente. La ecuación es aplicada en corriente continua y condiciones resistivas de corriente alterna.

La ley de Ampère es en el magnetismo en relación con los circuitos magnéticos, análoga a la ley de Ohm. El circuito de la armadura que se utiliza para producir el voltaje en un generador o el par en un motor siempre tiene cierta resistencia interna. A su vez, esta resistencia interna origina una caída de voltaje ya sea en los motores o generadores. Esto implica que un generador en realidad produce más voltaje que el que entrega en la carga. La relación se puede apreciar en la siguiente ecuación:

$$V_t = E_g - (I_a R_a)$$

donde  $E_g$  es el voltaje generado,  $V_t$  es el voltaje medido. Además se tiene que  $t$  denota terminal,  $g$  es un generador y  $a$  denota armadura.

En un motor, el voltaje generado internamente no puede exceder al voltaje de línea, ya que de lo contrario no fluiría una corriente de motor y la máquina estaría actuando como generador. Cuando un motor está absorbiendo corriente de línea y produciendo un par, actúa como tal, cumpliendo con la ecuación siguiente:

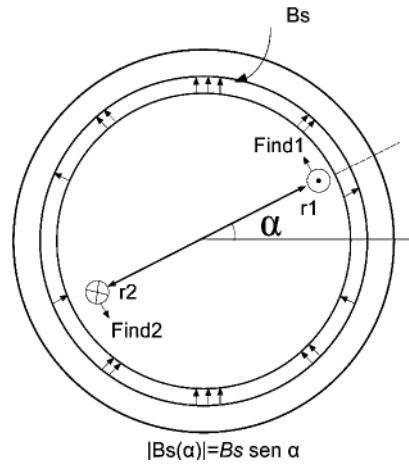
$$V_t = (I_a R_a) + E_g$$

Por lo tanto la máquina, sin cambios de conexiones, puede actuar como generador o motor, dependiendo de las condiciones en que se opere. En la siguiente sección se hablará del fin que tiene el crear este voltaje, sin olvidar que la corriente es un factor principal para la conexión existente entre la ingeniería electrónica y la ingeniería mecánica.

## 2.7 Máquinas de corriente alterna

Las máquinas de corriente alterna son generadores que convierten energía mecánica en energía eléctrica de corriente alterna, y los motores que convierten de energía eléctrica de corriente alterna a energía mecánica. Hay dos clases principales de máquinas de corriente alterna: las máquinas síncronas y las máquinas de inducción. Las máquinas síncronas son motores y generadores cuya corriente de campo magnético la suministra una fuente de potencia externa, mientras que las de inducción son motores y generadores cuya corriente de campo magnético se suministra a sus devanados de campo por medio de inducción magnética. Los circuitos de campo de la mayoría de las máquinas síncronas y de inducción se localizan en los rotores.

En las máquinas de corriente alterna, bajo condiciones normales de operación, existen dos campos magnéticos. Uno creado por el circuito del rotor y el otro creado por el campo magnético del estator. La interacción entre ambos campos magnéticos produce un par en la máquina, de igual forma que sucede cuando dos imanes permanentes se acercan generando un par que los alinea.



**Figura 2.11** Máquina de corriente alterna simplificada con una distribución de flujo del estator y una sola bobina de alambre montada en el rotor.

En la figura 2.11 se muestra una máquina de corriente alterna simplificada con distribución senoidal del flujo del estator que tiene un pico apuntando en dirección norte y una bobina de alambre montada sobre el rotor. La distribución de flujo presente en el estator se expresa como:

$$B_s(\alpha) = B_s \sin \alpha$$

donde  $B_s$  es la magnitud de la densidad de flujo pico; es positivo cuando el vector de la densidad de flujo apunta radialmente hacia fuera de la superficie del rotor hacia la superficie del estator. El valor del par producido en el rotor se analizará a continuación, verificando las fuerzas y el par de cada conductor. La fuerza inducida en el primer conductor es:

$$F = i(l \times B) = ilB_s \sin \alpha$$

en el sentido de la figura 2.11.

El par en el primer conductor es:

$$\tau_{ind} = (r \times F) = rilB_s \sin \alpha$$

en sentido antihorario. La fuerza inducida en el segundo conductor es:

$$F = i(l \times B) = ilB_s \sin \alpha$$

en sentido de la figura 2.11. El par en el segundo conductor es:

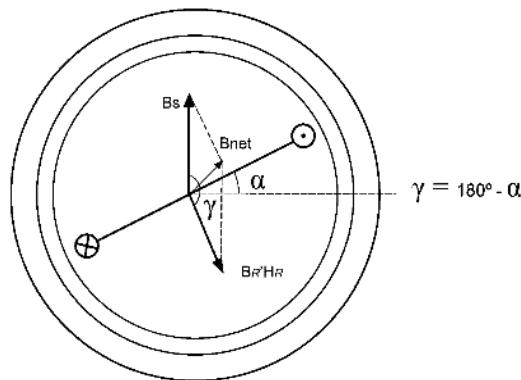
$$\tau_{ind} = (r \times F) = rilB_s \sin \alpha$$

en sentido antihorario. Por ello el par en la espiral del rotor da:

$$\tau_{ind} = 2rilB_s \text{sen}\alpha$$

en sentido antihorario. Esta ecuación puede expresarse de manera más conveniente si se examina la figura 2.11 y se resaltan los dos aspectos siguientes:

- **(a)** La corriente  $i$  que fluye en la bobina del rotor produce su propio campo magnético. La dirección del pico de este campo magnético se obtiene por medio de la regla de la mano derecha y la magnitud de su intensidad de magnetización  $H_R$  es directamente proporcional a la corriente que fluye en el rotor.
- **(b)** El ángulo entre el pico de la densidad de flujo de estator  $B_s$  y el pico de la intensidad de magnetización del rotor  $H_R$  es  $\gamma$ .



**Figura 2.12** Componentes de densidad de flujo magnético de la máquina de la figura 2.12.

Nótese que tanto la magnitud como la dirección del par se llegan a expresar como:

$$\tau_{ind} = KH_R \times B_s$$

$$B_R = \mu H_R$$

La ecuación también se expresa como:

$$\tau_{ind} = kB_R \times B_s$$



donde  $k = K/\mu$ . Otra observación que se debe tomar en cuenta es el valor de  $k$ , el cual no podrá ser constante ya que la permeabilidad magnética varía con la cantidad de saturación magnética de la máquina.

El campo magnético neto en esta máquina, es la suma vectorial de los campos del rotor y del estator:

$$B_{net} = B_R + B_s$$

Esta expresión arroja otra definición equivalente del par inducido en la máquina. De la ecuación:

$$\tau_{ind} = kB_R \times B_s$$

Pero en conjunto con la ecuación:

$$B_s = B_{net} - B_R$$

se puede obtener:

$$\tau_{ind} = kB_R(B_{net} - B_R) = k(B_R \times B_{net}) - k(B_R \times B_R)$$

Recuérdese que el producto cruz de cualquier vector consigo mismo es cero, por ello queda:

$$\tau_{ind} = k(B_R \times B_{net})$$

Entonces el par inducido también se puede expresar como el producto cruz de  $B_R$  y  $B_{net}$  con la constante  $k$ . La magnitud de la expresión será:

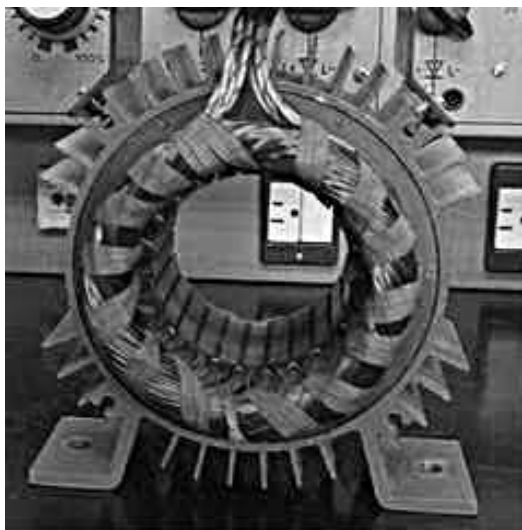
$$\tau_{ind} = kB_R B_{net} \text{sen} \delta$$

El ángulo entre  $B_R$  y  $B_{net}$  es  $\delta$ . Al transformar la energía electromagnética en mecánica, se efectúa el par; que es el que da vida al motor y generador, ya que en cualquiera de los dos casos surge una conversión de energía que se compone de diferentes fases para poder así cumplir su función. En el siguiente capítulo se hablará de la energía, las fuerza que interactúen para causar estas energías y otros fenómenos que se ven envueltos en este ciclo de transformación.

## 2.8 Máquinas de inducción

Un motor de inducción tiene físicamente el mismo estator que una máquina síncrona, pero con un rotor de construcción diferente. En la figura 2.13 se muestra el típico estator de dos polos. Hay dos tipos diferentes de rotores de motores de inducción que pueden utilizarse dentro del estator. Uno se llama

rotor de jaula de ardilla o rotor de jaula y el otro se llama rotor de devanado.



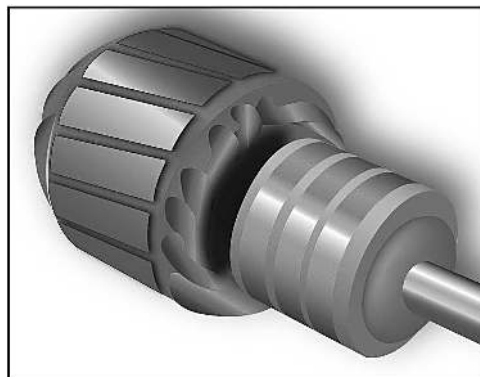
**Figura 2.13** Estator de un motor de inducción típico que muestra los devanados del estator.

En un motor de inducción, se inducen corrientes a la frecuencia de deslizamiento en los devanados del rotor, cuando éste se desliza con respecto a la onda de flujo del estator que gira sincrónicamente. Estas corrientes de rotor a su vez, producen una onda de flujo que gira en sincronismo con la onda de flujo del estator; el par se origina de la interacción de estas dos ondas de flujo. Cuando la carga del motor crece, disminuye la velocidad del rotor, ocasionando mayor deslizamiento y mayores corrientes inducidas en el rotor, y por ende, mayor par. Los primeros constan de una serie de barras conductoras dispuestas dentro de ranuras labradas en la cara del rotor y en cortocircuito en ángulo de sus extremos mediante grandes anillos de cortocircuito, véase la figura 2.14.



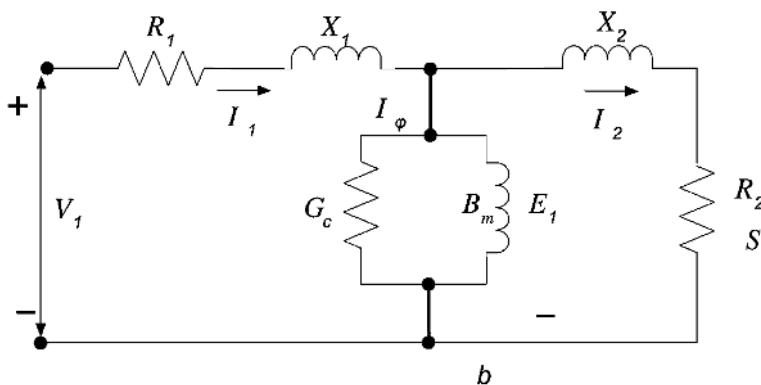
**Figura 2.14** Rotor de jaula de ardilla, llamado así porque los conductores parecen ruedas de ejercicio donde juegan las ardillas.

El rotor de devanado tiene un conjunto completo de devanados del rotor, normalmente conectados en Y, y los extremos de los tres alambres del rotor están unidos a los anillos rozantes en el eje del rotor. Los devanados del rotor están en cortocircuito por medio de escobillas montadas en los anillos rozantes, véase la figura 2.15.



**Figura 2.15** Rotor de devanados. Las escobillas hacen contacto en los discos del rotor.

Al examinar la interacción de flujo-fuerza magnetomotriz en un motor de inducción, se aprecia que eléctricamente la máquina es un transformador generalizado. En la figura 2.16 se puede ver el circuito equivalente de un motor de inducción, el cual tiene una gran semejanza con el de un transformador.



**Figura 2.16** Circuito equivalente para un motor de inducción.

La onda de flujo de entrehierro que gira a velocidad síncrona correspondiente a un motor de inducción, es la contraparte del flujo mutuo del núcleo en el transformador. El campo rotatorio induce fuerzas electromotrices a la frecuencia del estator en los devanados de éste, y de frecuencia de deslizamiento en

los devanados del rotor para todas las velocidades de éste diferentes a la velocidad sincrónica. Así, la máquina de inducción transforma los voltajes y al mismo tiempo cambia la frecuencia. Cuando se ven desde el estator, todos los fenómenos eléctricos y magnéticos del rotor se transforman a la frecuencia del estator. La fuerza magnetomotriz del rotor reacciona sobre los devanados del estator del mismo modo que la fuerza magnetomotriz de la corriente del secundario en un transformador reacciona sobre el devanado primario. Siguiendo esta descripción se llega al circuito equivalente de máquina de inducción (figura 2.16).

A continuación, se realiza un análisis físico del motor de inducción para mayor claridad. En la figura 2.13 se muestra un motor de inducción con un rotor de jaula de ardilla. Se aplicó un conjunto trifásico de voltajes al estator y fluye en él un conjunto trifásico de corrientes. Estas corrientes producen un campo magnético  $B_S$  que gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj. La velocidad de rotación del campo magnético, está dada por la ecuación:

$$n_{\text{sinc}} = \frac{120f_e}{P}$$

donde  $f_e$  es la frecuencia del sistema en hertz y  $P$  es el número de polos en la máquina. Este campo magnético giratorio  $B_S$  pasa sobre las barras del rotor e induce un voltaje en ellas. El voltaje inducido en cierta barra de rotor está dado por la ecuación:

$$e_{\text{ind}} = (\nu \times B)(\bullet l)$$

donde  $\nu$  es la velocidad de la barra en relación con el campo magnético,  $B$  es el vector de densidad de flujo magnético y  $l$  es la longitud del conductor en el campo magnético.

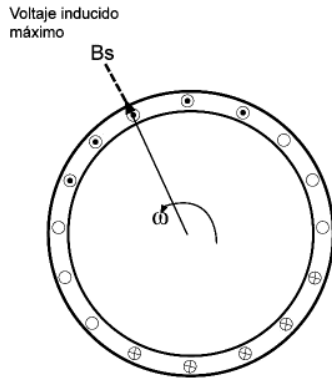
Lo que produce el voltaje inducido en la barra, es el movimiento relativo del rotor en comparación con el campo magnético del estator. La velocidad de las barras superiores del rotor en relación con el campo magnético es hacia la derecha, por lo que el voltaje inducido en las barras superiores va hacia fuera de la página del lector. Esto tiene como resultado la generación de un flujo de corriente hacia afuera de las barras superiores y hacia dentro de las barras inferiores. Pero el ensamblaje del rotor es inductivo, entonces la corriente pico está detrás del voltaje pico del rotor (figura 2.17b). El flujo de corriente del rotor produce un campo magnético en el rotor  $B_R$ , por lo que el par inducido en la máquina está dado por:

$$\tau_{\text{ind}} = k B_R \times B_S$$

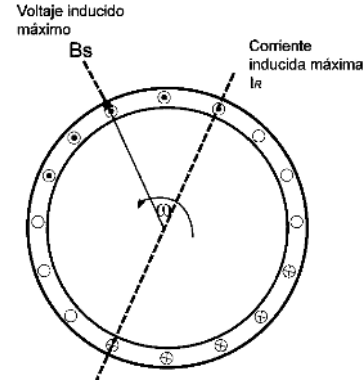
El par resultante va en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Debido a que el par inducido en el rotor va en sentido al de las manecillas del reloj, el rotor acelera en esa dirección.

Sin embargo, hay un límite superior finito para la velocidad del motor. Si el rotor del motor de inducción gira a *velocidad sincrónica*, entonces las barras del rotor estarán estacionarias en relación con el campo magnético, y no habrá ningún voltaje inducido. Si fuera igual a cero, entonces no habría corriente en el rotor y no habría campo magnético en él. Sin campo magnético en el rotor, el par inducido sería cero y el rotor reduciría su velocidad como resultado de las pérdidas por fricción. Por lo tanto, un motor

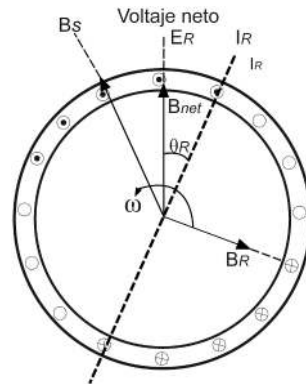
de inducción puede acelerar hasta llegar cerca de la velocidad síncrona, pero nunca alcanzarla.



**Figura 2.17a** Desarrollo de un par inducido en un motor de inducción. El campo magnético giratorio del estator  $B_S$  induce un voltaje en las barras del rotor.



**Figura 2.17b** El voltaje del rotor produce un flujo de corriente en el rotor, que está en retraso con el voltaje debido a la inductancia del rotor.



**Figura 2.17c** La corriente en el rotor produce un campo magnético en el rotor  $B_R$   $90^\circ$  en retraso con respecto a sí mismo y  $B_R$  interactúa con  $B_{net}$  para producir un par en sentido contrario al de las manecillas del reloj en la máquina.

Nótese que durante la operación normal, los campos magnéticos en el rotor y en el estator  $B_R$  y  $B_S$  giran juntos a velocidad síncrona, mientras que el rotor gira a una velocidad menor. Dicho lo anterior existen dos términos que se usan para definir el movimiento relativo del rotor y los campos magnéticos. Uno es

velocidad de deslizamiento, que se define como la diferencia entre la velocidad síncrona y la velocidad del rotor y se expresa como:

$$n_{des} = n_{sinc} - n_m$$

donde  $n_{des}$  es la velocidad de deslizamiento de la máquina,  $n_{sinc}$  es la velocidad de los campos magnéticos y  $n_m$  es la velocidad mecánica del eje del motor. El otro término sirve para describir el movimiento relativo y es el deslizamiento, que es igual a la velocidad relativa expresada como una fracción de la unidad o porcentaje, por lo que se define como:

$$s = \frac{n_{des}}{n_{sinc}} \times 100\%$$

o bien

$$s = \frac{n_{sinc} - n_m}{n_{sinc}} \times 100\%$$

La ecuación anterior se puede escribir en términos de la velocidad angular (radianes por segundo) de la siguiente manera:

$$s = \frac{\omega_{sinc} - \omega_m}{\omega_{sinc}} \times 100\%$$

Estas ecuaciones son útiles para deducir el par de un motor de inducción y las relaciones de potencia.

## 2.9 Balance de energía

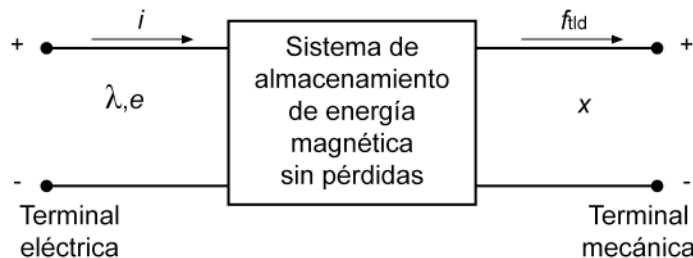
El principio de la conservación de la energía establece que ésta no se crea ni se destruye; sólo cambia de forma. Un ejemplo claro es la del golpe de un martillo sobre el clavo, la energía cinética de un martillo se disipa al final como calor cuando el clavo se introduce en una pieza de madera. Para sistemas aislados con fronteras claramente identificables, este hecho permite seguir la huella de una manera sencilla: el flujo neto de energía hacia el sistema, cruzando su frontera, es igual a la razón de cambio de la energía almacenada en el sistema.

El enunciado antes dicho se basa en la primera ley de la termodinámica, siendo muy general, puede aplicarse a sistemas electromecánicos, en donde su principal almacenamiento de energía es en forma de campos magnéticos. En estos sistemas se puede definir la transferencia de energía como se muestra en la figura 2.18. La ecuación del generador se plantea igual, pero los términos tienen valores negativos.

$$\left( \begin{array}{c} \text{Energía de} \\ \text{entrada} \\ \text{de fuentes} \\ \text{eléctricas} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Energía} \\ \text{mecánica de} \\ \text{salida} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Aumento en} \\ \text{la energía} \\ \text{almacenada} \\ \text{en campo} \\ \text{magnético} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Energía} \\ \text{convertida en} \\ \text{calor} \end{array} \right)$$

**Figura 2.18** Ecuación de energías eléctrica y mecánica de un motor.

En estos sistemas, la conversión de energía en calor se lleva a cabo mediante mecanismos tales como el calentamiento óhmico debido al paso de la corriente en los devanados de las terminales eléctricas, y a la fricción mecánica debida al movimiento de las componentes del sistema que forman las terminales mecánicas. En general, es posible separar matemáticamente esos mecanismos de pérdida del mecanismo de almacenamiento de energía. En este caso, el dispositivo se puede representar como un sistema de almacenamiento de energía magnética sin pérdidas con terminales eléctricas y mecánicas, esto se puede observar en la figura 2.19, lo cual conlleva a que se puede representar las pérdidas mediante elementos externos conectados a estas terminales, como resistencias a las terminales eléctricas, y amortiguadores mecánicos a las terminales mecánicas. La figura 2.19 está hecha sin limitaciones en su número de terminales siendo muy general. Para este tipo de sistema, el campo magnético sirve como el medio de acoplamiento entre las terminales eléctrica y mecánica.



**Figura 2.19** Sistema de almacenamiento de energía magnética sin pérdidas con terminales mecánica y eléctrica.

Una de las esencias del método de la energía, es la capacidad de identificar un sistema de energía sin pérdidas. Es relevante mencionar que esto no es posible sin herramientas matemáticas de apoyo para armar el modelo. Para sistemas de almacenamiento de energía magnética sin pérdidas, basados en la figura 2.19 y la ecuación de la figura 2.18 se puede reescribir como:

$$dW_{elec} = dW_{mec} + dW_{fld}$$

donde  $dW_{elec}$  es la diferencial de energía eléctrica de entrada,  $dW_{mec}$  es la diferencial de energía mecánica de salida y  $dW_{fld}$  es la diferencial de variación en la energía magnética almacenada.

La potencia en las terminales de un devanado en un circuito magnético, es una medida de la razón de energía al circuito a través de ese devanado en particular. La potencia  $p$  se calcula a partir del producto del voltaje y la corriente  $p = ie = i \frac{d\lambda}{dt}$  y sus unidades son watts o joules por segundo.

Por lo tanto, en un  $dt$  se tiene que  $dW_{elec} = e idt$  en donde  $e$  es el voltaje inducido en las terminales eléctricas por la variación de la energía magnética almacenada. Es a través de este voltaje de reacción, que el circuito eléctrico externo suministra potencia al campo magnético de acoplamiento, y por ello a las terminales mecánicas de salida. Así, el proceso básico de conversión de energía implica al campo de acoplamiento y su acción y reacción sobre los sistemas eléctrico y mecánico. Combinando las ecuaciones  $dW_{elec} = dW_{mec} + dW_{fld}$  y  $dW_{elec} = e idt$  se obtiene que

$$dW_{elec} = e idt = dW_{mec} + dW_{fld}$$

Esta ecuación junto con la ley de Faraday del voltaje inducido,  $e = N \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\lambda}{dt}$ , forman la base para el método de la energía.

### 2.9.1 Energía y fuerza en sistemas de campos magnéticos

Los circuitos magnéticos tienen entrehierros entre los miembros estacionarios y móviles, en los cuales se almacena bastante energía en el campo magnético. Este campo funciona como medio de conversión de energía, y su energía es el recipiente entre los sistemas eléctrico y mecánico.

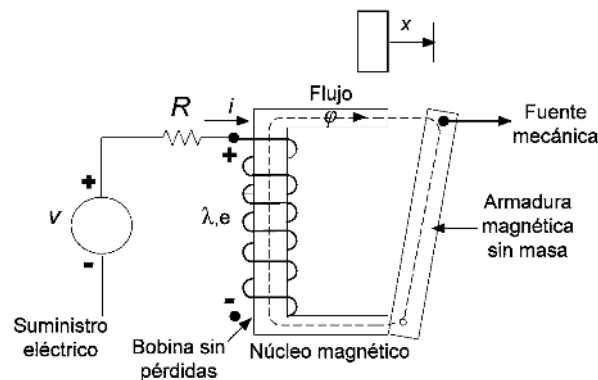


Figura 2.20 Esquema de un relevador electromagnético.

Obsérvese el relevador electromagnético que se muestra en la figura 2.20. La resistencia de la bobina de excitación se muestra como resistencia externa  $R$  y las variables de la terminal mecánica se indican como una fuerza  $f_{fld}$  producida por el campo electromagnético que se dirige del relevador al sistema mecánico externo y a un desplazamiento  $x$ ; se pueden incluir las pérdidas mecánicas en forma de elementos externos conectados a la terminal mecánica. Igualmente, la armadura móvil aparece como carente de masa; su masa representa el almacenamiento de energía mecánica y se puede incluir como una masa externa conectada a la terminal mecánica. El resultado es que el núcleo y la armadura magnética, constituyen un sistema magnético sin pérdidas, como en la figura 2.19.



Esta estructura de relevador es en esencia la misma que las estructuras magnéticas que ejemplifica la ley de Faraday  $e = N \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\lambda}{dt}$ , entonces el voltaje inducido puede ser expresado sólo como  $e = \frac{d\lambda}{dt}$  y con ello relacionarse con la ecuación  $dW_{elec} = eidt$ , quedando la ecuación  $dW_{elec} = idt$ .

El circuito de la figura 2.20 puede ser descrito mediante una inductancia  $L$ , dependiendo de la geometría de la estructura magnética y de la permeabilidad del material magnético. Los dispositivos electromagnéticos de conversión de energía contienen entrehierros en sus circuitos magnéticos para separar las partes móviles. En la mayor parte de los casos la reluctancia del entrehierro es mucho mayor que la del material magnético. Por ello, el almacenamiento principal de energía ocurre en el entrehierro, y las propiedades del circuito magnético se determinan por las dimensiones del entrehierro.

Debido a la simplicidad de las relaciones resultantes, las no linealidades magnéticas y las pérdidas de núcleo se omiten con frecuencia en el análisis de los dispositivos prácticos. También para el análisis, se considera el supuesto de que el flujo y la fuerza magnetomotriz son directamente proporcionales. Por lo tanto, los encadenamientos de flujo  $\lambda$  y la corriente  $i$ , se consideran en relación lineal mediante un factor que sólo depende de la geometría; y por lo tanto, de la posición  $x$  de la armadura:

$$\lambda = L(x)i$$

en la cual se indica la dependencia directa que tienen  $L$  y  $x$ .

Como la fuerza magnética  $f_{fld}$  se ha definido como desde el relevador sobre el sistema mecánico externo, y  $dW_{mec}$  se define como la salida de energía mecánica del relevador, se puede reescribir:

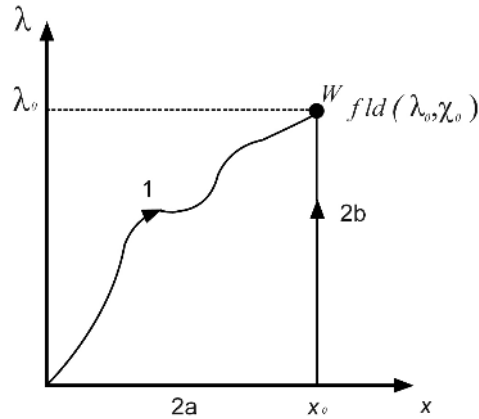
$$dW_{mec} = f_{fld}dx$$

Usando las ecuaciones  $dW_{elec} = id\lambda$  y  $dW_{mec} = f_{fld}dx$ , se puede escribir la ecuación  $dW_{elec} = dW_{mec} + dW_{fld}$  de la forma:

$$dW_{fld} = id\lambda - f_{fld}dx$$

El sistema de almacenamiento de energía magnética sin pérdidas se llama sistema conservativo, y el valor de  $W_{fld}$  está especificado únicamente por los valores de  $\lambda$  y  $x$ , por esto  $W_{fld}$  permanecerá constante, independientemente de los valores finales que alcancen  $\lambda$  y  $x$ . En la figura 2.21 se puede apreciar lo antes dicho, donde existen dos trayectorias, usando la ecuación  $dW_{fld} = id\lambda - f_{fld}dx$  se puede calcular  $W_{fld}$  (en el punto  $\lambda_0$  y  $x_0$ ). En la primera trayectoria es un caso general, siendo difícil de integrar sólo si se conocen de forma explícita  $i$  y  $f_{fld}$  como función de  $\lambda$  y de  $x$ , sería más sencillo. Para la segunda trayectoria dará el mismo resultado y es más fácil de integrar. De la ecuación  $dW_{fld} = id\lambda - f_{fld}dx$  se realiza lo siguiente:

$$W_{fld}(\lambda_o, x_o) = \int_{trayectoria2a} dW_{fld} + \int_{trayectoria2b} dW_{fld}$$



**Figura 2.21** Trayectoria de integración para  $W_{fld}$ .

En la trayectoria 2a se tiene que  $d\lambda = 0$  y  $f_{fld} = 0$  porque  $\lambda = 0$ , debido a que no puede haber fuerza magnética en ausencia de los campos magnéticos. De la ecuación  $dW_{fld} = i d\lambda - f_{fld} dx$  se tiene que  $dW_{fld} = 0$  en la trayectoria 2a. En la trayectoria 2b,  $dx = 0$ , entonces, de la ecuación  $dW_{fld} = i d\lambda - f_{fld} dx$ , la ecuación  $W_{fld}(\lambda_0, x_0) = \int_{trayectoria2a} dW_{fld} + \int_{trayectoria2b} dW_{fld}$  se reduce a:

$$W_{fld}(\lambda_0, x_0) = \int_0^{\lambda_0} i(\lambda, x_0) d\lambda$$

Ahora en un sistema donde el flujo  $\lambda$  y la corriente  $i$  se consideran proporcionales como la ecuación  $\lambda = L(x)i$ , por lo tanto la ecuación  $W_{fld}(\lambda_0, x_0) = \int_0^{\lambda_0} i(\lambda, x_0) d\lambda$  se describe como:

$$W_{fld}(\lambda_0, x_0) = \int_0^{\lambda_0} i(\lambda, x_0) d\lambda = \int_0^{\lambda_0} \frac{\lambda}{L(x_0)} d\lambda = \frac{1}{2} \frac{\lambda_0^2}{L(x_0)}$$

La energía se puede expresar en términos de la densidad de energía del campo magnético integrada sobre  $V$  del campo magnético. En este caso:

$$W_{fld} = \int_V \int_0^{B_0} i(H dB) dV$$

Para un medio magnético con permeabilidad constante ( $B = \mu H$ ); por lo que la ecuación se reduce a:

$$W_{fld} = \int_V \left( \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \right) dV$$

Si se hubiera escogido una terminal mecánica giratoria en un lugar de una de desplazamiento lineal, los resultados hubieran sido idénticos, con la excepción de que la fuerza se debería sustituir por el par, y el desplazamiento lineal por el desplazamiento angular.

### 2.10 Determinación de la fuerza magnética (coenergía)

La energía magnética almacenada de  $W_{fld}$  se determina de manera única mediante  $\lambda$  y  $x$ . El sistema de almacenamiento de energía magnética, sin pérdidas, es un sistema conservativo, y  $W_{fld}$  es una función de estado que se determina únicamente por los valores de las variables de estado independientes  $\lambda$  y  $x$ . Se puede mostrar dicha enunciación formulando la ecuación  $dW_{fld} = id\lambda - f_{fld}dx$  como sigue:

$$dW_{fld}(\lambda, x) = id\lambda - f_{fld}dx$$

Para cualquier función  $F(x_1, x_2)$  la diferencial total de  $F$  con respecto a las dos variables independientes de estado,  $x_1$  y  $x_2$ , se puede escribir como:

$$dF(x_1, x_2) = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2$$

Es de importancia recordar que las derivadas parciales de la ecuación anterior se toman cada una manteniendo constante la otra variable de estado. La ecuación es para cualquier función de estado  $F$ , por lo que es también válida para  $W_{fld}$ , entonces:

$$dW_{fld}(\lambda, x) = \frac{\partial W_{fld}}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial W_{fld}}{\partial x} dx$$

Como  $\lambda$  y  $x$  son variables independientes, las ecuaciones  $dW_{fld}(\lambda, x) = id\lambda - f_{fld}dx$  y  $dW_{fld}(\lambda, x) = \frac{\partial W_{fld}}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial W_{fld}}{\partial x} dx$  deben ser iguales para todos los valores de  $d\lambda$  y  $dx$ , por lo tanto:

$$i = \frac{dW_{fld}(\lambda, x)}{d\lambda}$$

Derivando parcialmente y manteniendo constante a  $x$ , y en este caso  $\lambda$  permaneciendo constante al tomar la derivada parcial:

$$f_{fld} = -\frac{\partial W_{fld}(\lambda, x)}{\partial x}$$

Una vez conociendo  $W_{fld}$  como función de  $\lambda$  y  $x$ , se puede usar la ecuación  $i = \frac{\partial W_{fld}(\lambda, x)}{\partial \lambda}$  para despejar a  $i(\lambda, x)$ . La ecuación  $f_{fld} = -\frac{\partial W_{fld}(\lambda, x)}{\partial x}$  se puede utilizar para despejar a la fuerza mecánica  $f_{fld}(\lambda, x)$ .

La fuerza  $f_{fld}$  se determina mediante la ecuación  $f_{fld} = -\frac{\partial W_{fld}(\lambda, x)}{\partial x}$  directamente en términos de la variable de estado eléctrico  $\lambda$ . Si se desea expresar la fuerza en función de  $i$ , se puede sustituir la expresión adecuada para  $\lambda$  como una función de  $i$  en la expresión de  $f_{fld}$  que se obtiene empleando la ecuación  $f_{fld} = -\frac{\partial W_{fld}(\lambda, x)}{\partial x}$ . También se puede usar una función de estado que no sea la energía, por ejemplo la coenergía para obtener la fuerza en forma directa como función de la corriente. Ambos métodos dan el mismo resultado y depende del tratamiento analítico que se quiera dar. La coenergía  $W'_{fld}$  se define como una función de  $i$  y de  $x$ , de tal forma que:

$$W'_{fld}(i, x) = i\lambda - W_{fld}(\lambda, x)$$

y se puede tomar el resultado a partir de la expresión de energía en la ecuación  $dW_{fld}(\lambda, x) = id\lambda - f_{fld}dx$ . La transformación se realiza mediante la diferencial de  $i\lambda$ :

$$d(i\lambda) = id\lambda + \lambda di$$

y el diferencial de  $dW_{fld}(\lambda, x)$  de la ecuación  $dW_{fld}(\lambda, x) = id\lambda - f_{fld}dx$ . De la ecuación  $dW_{fld}(\lambda, x) = id\lambda - f_{fld}dx$  se tiene:

$$dW'_{fld}(i, x) = d(i\lambda) - dW_{fld}(\lambda, x)$$

Al sustituirse la ecuación  $dW_{fld}(\lambda, x) = id\lambda - f_{fld}dx$  y  $d(i\lambda) = id\lambda + \lambda di$  en la ecuación  $dW'_{fld}(i, x) = d(i\lambda) - dW_{fld}(\lambda, x)$ , se obtiene:

$$dW'_{fld}(i, x) = \lambda di + f_{fld}dx$$

La coenergía  $dW'_{fld}(i, x)$  es una función de estado de las dos variables independientes  $i$  y  $x$ , por ello el diferencial se expresa como:

$$dW'_{fld}(i, x) = \frac{\partial W'_{fld}}{\partial i} di + \frac{\partial W'_{fld}}{\partial x} dx$$

Ahora las ecuaciones  $dW'_{fld}(i, x) = \lambda di + f_{fld}dx$  y  $dW'_{fld}(i, x) = \frac{\partial W'_{fld}}{\partial i} di + \frac{\partial W'_{fld}}{\partial x} dx$  deben ser iguales para todos los valores  $di$  y  $dx$ ; así:

$$\lambda = \frac{dW'_{fld}(i, x)}{di} di + f_{fld} = \frac{\partial W'_{fld}(i, x)}{\partial x}$$

La ecuación  $f_{fld} = \frac{\partial W'_{fld}(i, x)}{\partial x}$  da la fuerza mecánica relacionada directamente con los términos  $i$  y  $x$ . Las ecuaciones son equivalentes y pueden usarse para calcular un sistema dado. La elección depende del usuario. Para un sistema terminal mecánico rotatorio, se deducen expresiones semejantes para el par y sus derivadas parciales son respecto al desplazamiento angular.

La coenergía se puede definir para cualquier par de valores  $i$  y  $x$  dados, como:

$$W'_{fld}(i, x) = \int_0^{i_0} \lambda(i, x_0) di$$

Para un sistema en el que  $\lambda$  e  $i$  son proporcionales, y pueden ser descritos por una inductancia dependiente de la posición, como en la ecuación  $\lambda = L(x)i$  la coenergía es:

$$W'_{fld}(i, x) = \int_0^i L(x) i' di' = \frac{1}{2} L(x) i^2$$

Por analogía con la ecuación  $W_{fld} = \int_V \int_0^{B_0} i(HdB)dV$ , la coenergía se puede expresar en términos del campo como:

$$W'_{fld} = \int_V \int_0^{H_0} (BdH)dV$$

Para un medio de permeabilidad constante  $\mu$ , esto se reduce a:

$$W'_{fld} = \int_V \frac{1}{2} \mu H^2 dV$$

En algunos casos, es difícil imaginar la representación del circuito magnético, y en algunos casos el material magnético está cercano a la saturación, por lo cual se sugiere emplear técnicas numéricas para evaluar la coenergía con la ecuación:

$$W'_{fld} = \int_V \int_0^{H_0} (BdH)dV$$

también son muy recurridas técnicas más complejas como las del elemento finito, con la que se desea calcular la coenergía apoyándose en las expresiones:

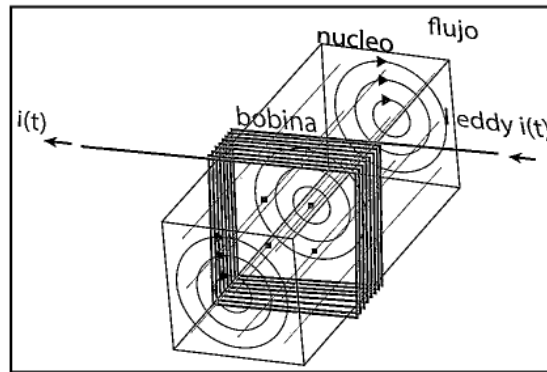
$$f_{fld} = \frac{\partial W'_{fld}(i, x)}{\partial x}$$

y

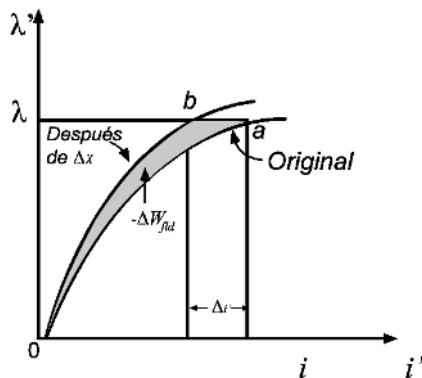
$$W'_{fld} = \int_V \int_0^{H_0} (BdH)dV$$

Para un sistema lineal, la energía y la coenergía son numéricamente iguales. Para un sistema no lineal en el que  $\lambda$  e  $i$  o  $B$  y  $H$  linealmente proporcionales, las dos funciones no son lineales ni numéricamente hablando. En la figura 2.23 hay una gráfica de la energía y coenergía en un sistema lineal. El área entre la curva  $\lambda - i$  y el eje vertical está dada por la integral de  $i d\lambda$ , y es la energía. El área del eje horizontal dada por la integral  $\lambda di$ , es la coenergía. La suma para el sistema con excitación única es, por definición:

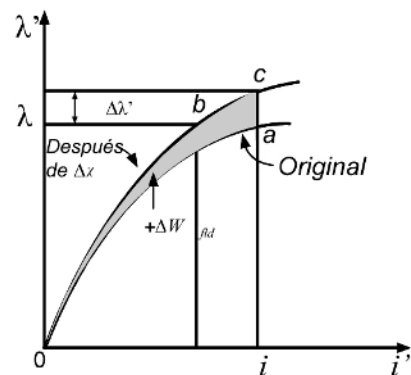
$$W_{fld} + W'_{fld} = \lambda i$$



**Figura 2.22** Interpretación de la energía y la coenergía en un sistema con excitación única.



**Figura 2.23a** Efecto de  $\Delta x$  sobre la energía y la coenergía de un dispositivo con excitación única. a) Variación de energía cuando  $\lambda$  se mantiene constante.



**Figura 2.23b** Variación de la coenergía cuando  $i$  se mantiene constante.

La fuerza del campo sobre el dispositivo de la figura 2.20 para determinar el valor en particular de  $x$  e  $i$  o  $\lambda$  debe ser independiente, sea que se calcule con la energía o con la coenergía. Para mayor claridad se propone un caso donde la armadura (de la figura 2.20) está en una posición  $x$  tal que el dispositivo está trabajando en el punto  $a$  en la figura 2.20. La derivada parcial de la ecuación  $f_{fld} = -\frac{\partial W'_{fld}(\lambda, x)}{\partial x}$  puede interpretarse como el límite de  $-\Delta W'_{fld}/\Delta x$  con  $\lambda$  constante cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ . Si se realiza un cambio en  $\Delta x$ , el cambio  $-\Delta W'_{fld}$  se muestra en el área sombreada de la figura 2.23a. Por lo tanto la fuerza es  $f_{fld} = (\text{zonasombreada})/\Delta x$  cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ . Mientras que la derivada parcial de la ecuación  $f_{fld} = \frac{\partial W'_{fld}(i, x)}{\partial x}$

se puede interpretar como el límite de  $\Delta W'_{fld}/\Delta x$  con  $i$  constante cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ . Esta perturbación que sufre el dispositivo se muestra en la figura 2.23b; la fuerza es  $f_{fld} = (\text{zonasombreada})/\Delta x$  cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ . Las áreas sombreadas sólo se diferencian por el triángulo  $abc$  cuyos lados son  $\Delta i$  y  $\Delta x$  de modo que en límite las zonas sombreadas resultantes de  $\Delta x$  a  $\lambda$  constante o a  $i$  constante, son iguales. Esto demuestra que la fuerza del campo es independiente de si se lleva a cabo la determinación con la energía o con la coenergía.

Las ecuaciones  $f_{fld} = -\frac{\partial W_{fld}(\lambda, x)}{\partial x}$  y  $f_{fld} = \frac{\partial W'_{fld}(i, x)}{\partial x}$  expresan la fuerza mecánica de origen eléctrico en términos de las derivadas parciales de las funciones de energía y coenergía  $W_{fld}(\lambda, x)$  y  $W'_{fld}(i, x)$ . Los signos de estas ecuaciones indican que la fuerza actúa en la dirección que disminuye la energía almacenada en el campo magnético a flujo constante, o bien aumenta la coenergía a corriente constante.

Los dispositivos de hierro móvil son usados en aplicaciones para producir fuerza o par mecánico. Un ejemplo son los imanes de levantamiento. Otros como los solenoides o relevadores tienen el objetivo de ejercer una fuerza a través de determinada distancia. Existen otros dispositivos que deben generar un par de giro contra un resorte de sujeción; también hay electroimanes que sirven para controlar el funcionamiento de motores hidráulicos en los servomecanismos. Dicho lo anterior, existe una gama de aplicaciones que ocupa la industria, y con las cuales se relacionan tanto motores como generadores.

## 2.11 Solución del problema de diseño

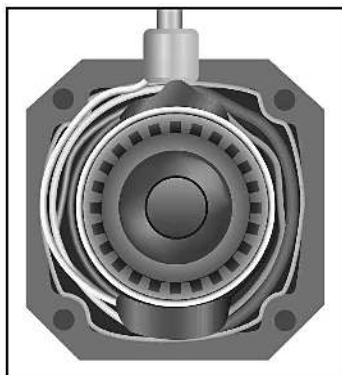
En numerosas ocasiones, es necesario convertir la energía eléctrica en energía mecánica, esto se puede lograr, por ejemplo, usando los motores de corriente continua. Pero cuando lo deseado es posicionamiento con un elevado grado de exactitud y/o una muy buena regulación de la velocidad, se puede contar con una gran solución: utilizar un motor paso a paso.

Los motores paso a paso son ideales para la construcción de mecanismos en donde se requieren movimientos muy precisos. La característica principal de estos motores, es el hecho de poder moverlos un paso a la vez, por cada pulso que se le aplique. Este paso puede variar desde  $90^\circ$  hasta pequeños movimientos de tan solo  $1.8^\circ$ , es decir, que se necesitarán 4 pasos en el primer caso ( $90^\circ$ ) y 200 para el segundo caso ( $1.8^\circ$ ), para completar un giro completo de  $360^\circ$ .

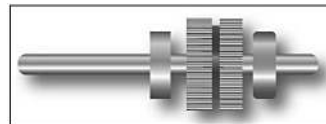
Estos motores poseen la habilidad de poder quedar enclavados en una posición, o bien totalmente libres. Si una o más de sus bobinas están energizadas, el motor estará enclavado en la posición correspondiente, y por el contrario, quedará completamente libre si no circula corriente por ninguna de sus bobinas. El motor paso a paso está constituido esencialmente por dos partes:

- Una fija, llamada estator, construida en base a cavidades, en las que van depositadas las bobinas, que excitadas convenientemente, formarán los polos norte-sur de forma que se cree un campo magnético giratorio. Véase la figura 2.24.
- Una móvil, llamada rotor, construida mediante un imán permanente, con el mismo número de pares de polos que el contenido en una sección de la bobina del estator; este conjunto va montado sobre

un eje soportado por dos cojinetes que le permiten girar libremente. Véase la figura 2.25.



**Figura 2.24** Imagen de un estator de cuatro bobinas.



**Figura 2.25** Imagen de un rotor.

Si por el medio que sea, se consigue excitar el estator creando los polos N-S, y se hace variar dicha excitación, de modo que el campo magnético formado efectúe un movimiento giratorio, la respuesta del rotor será seguir el movimiento de dicho campo, produciéndose de este modo, el giro del motor. Puede decirse por lo tanto, que un motor de paso a paso, es un elemento que transforma impulsos eléctricos en movimientos de giro controlados, ya que se podrá hacer girar al motor en el sentido que se desee, y con el número de vueltas y grados que se necesite.

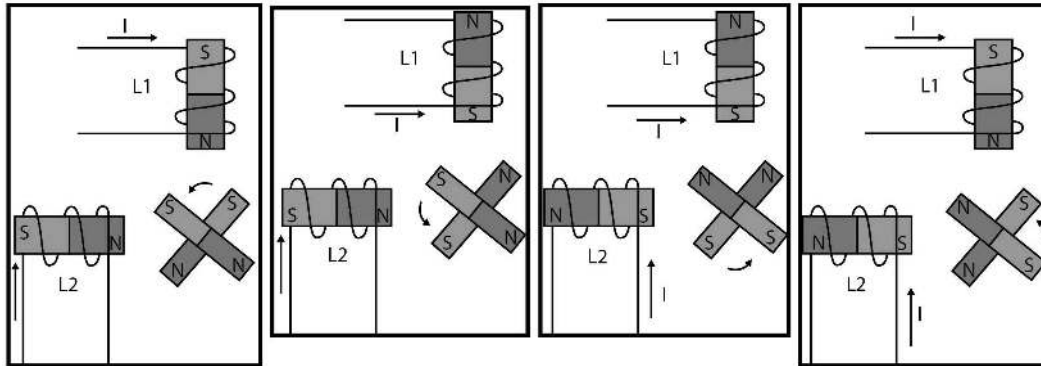
### Principio de funcionamiento del motor de paso a paso

Los motores eléctricos, en general; basan su funcionamiento en las fuerzas ejercidas por un campo electromagnético, y creadas al hacer circular una corriente eléctrica a través de una o de varias bobinas. Si dicha bobina (generalmente circular), denominada estator, se mantiene en una posición mecánica fija; y en su interior, bajo la influencia del campo electromagnético, se coloca otra bobina, llamada rotor, recorrida por una corriente y es capaz de girar sobre su eje, esta última tenderá a buscar la posición de equilibrio magnético; es decir, orientará sus polos N-S hacia los polos S-N del estator, respectivamente. Cuando el rotor alcanza esta posición de equilibrio, el estator cambia la orientación de sus polos, aquel tratará de buscar la nueva posición de equilibrio; manteniendo dicha situación de manera continuada, se conseguirá un movimiento giratorio y continuo del rotor, y a la vez, la transformación de una energía eléctrica en otra mecánica en forma de movimiento circular.

Aun basado en el mismo fenómeno, el principio de funcionamiento de los motores de corriente continua, los motores de paso a paso son más sencillos si cabe, que cualquier otro tipo de motor eléctrico.



En la figura 2.26 se muestra el modo de funcionamiento de un motor de paso a paso: supóngase que las bobinas L1 como L2, poseen un núcleo de “hierro dulce”, capaz de imantarse cuando dichas bobinas sean recorridas por una corriente eléctrica. Por otra parte el imán M puede girar libremente sobre el eje de sujeción central.



**Figura 2.26** Principio de funcionamiento de un motor paso a paso.

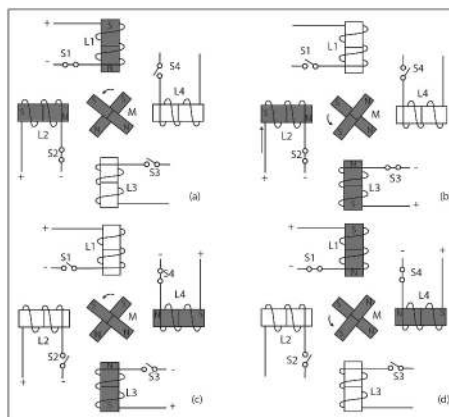
Inicialmente, sin aplicar ninguna corriente a las bobinas (que también reciben el nombre de fases), y con M en una posición cualquiera, el imán permanecerá en reposo si no se somete a una fuerza externa. Si se hace circular corriente por ambas fases como se muestra en la figura 2.26a, se crearán dos polos magnéticos Norte en la parte interna, bajo cuya influencia M se desplazará hasta la posición indicada en dicha figura.

Si se invierte la polaridad de la corriente que circula por L1, se obtendrá la situación magnética indicada en la figura 2.26b, y M se verá desplazado hasta la nueva posición de equilibrio; es decir, ha girado  $90^\circ$  en sentido contrario a las agujas del reloj. Invirtiendo ahora la polaridad de la corriente en L2, se llega a la situación de la figura 2.26c habiendo girado M otros  $90^\circ$ . Si, por fin, se invierte de nuevo el sentido de la corriente en L1, M girará otros  $90^\circ$ , y se habrá obtenido una revolución completa de dicho imán en cuatro pasos de  $90^\circ$ . Por lo tanto, si se mantiene la secuencia de excitación expuesta para L1 y L2, y dichas corrientes son aplicadas en forma de pulsos, el rotor avanzará pasos de  $90^\circ$  por cada pulso aplicado.

Por lo tanto, se puede decir que un motor de paso a paso, es un dispositivo electromecánico que convierte impulsos eléctricos en un movimiento rotacional constante y finito, dependiendo de las características propias del motor. El modelo de motor de paso a paso que se ha analizado, recibe el nombre de bipolar ya que, para obtener la secuencia completa, se requiere disponer de corrientes de dos polaridades, presentando tal circunstancia un inconveniente importante a la hora de diseñar el circuito que controle el motor. Una forma de paliar este inconveniente es la representada en la figura 2.27, obteniéndose un motor unipolar de cuatro fases, puesto que la corriente circula por las bobinas en un único sentido.

Si inicialmente, se aplica la corriente a L1 y L2 cerrando los interruptores S1 y S2, se generarán dos

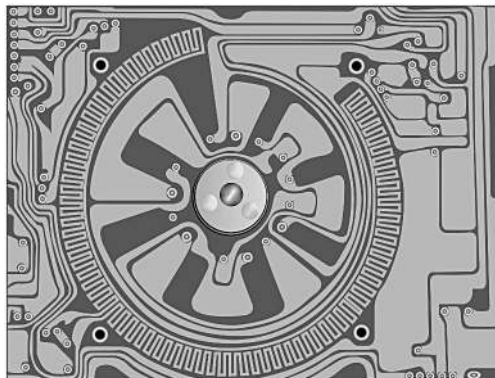
polos Norte que atraerán al polo Sur de M, hasta encontrar la posición de equilibrio entre ambos como puede verse en la figura 2.27a. Si se abre posteriormente S1 y se cierra S3, por la nueva distribución de polos magnéticos, M evoluciona hasta la situación representada en la figura 2.27b.



**Figura 2.27** Principio básico de un motor unipolar de cuatro fases.

Siguiendo la secuencia representada en las figuras 2.27c y 2.27d, de la misma forma se obtienen avances del rotor de  $90^\circ$ , habiendo conseguido como en el motor bipolar de dos fases, hacer que el rotor avance pasos de  $90^\circ$ , por la acción de impulsos eléctricos de excitación de cada una de las bobinas. En uno y otro caso, el movimiento obtenido, ha sido en sentido contrario al de las agujas del reloj; ahora bien, si las secuencias de excitación se generan en orden inverso, el rotor girará en sentido contrario, por lo que fácilmente se puede deducir que el sentido de giro en los motores de paso a paso, es reversible en función de la secuencia de excitación y, por lo tanto, se puede hacer avanzar o retroceder al motor un número determinado de pasos según las necesidades. El modelo de motor de paso a paso estudiado, salvo su valor didáctico, no ofrece mayor atractivo desde el punto de vista práctico, precisamente por la amplitud de sus avances angulares.

Una forma de conseguir motores de paso a paso de paso mas reducidos, es la de aumentar el número de bobinas del estator, pero ello llevaría a un aumento del costo y del volumen, y a pérdidas muy considerables en el rendimiento del motor, por lo que, esta situación no es viable. Hasta ahora, y para conseguir la solución más idónea, se recurre a la mecanización de los núcleos de las bobinas, y el rotor en forma de hendiduras o dientes, creándose así micro-polos magnéticos, tanto como dientes y estableciendo las situaciones de equilibrio magnético con avances angulares mucho menores, siendo posible conseguir motores de hasta de 500 pasos. Véase la figura 2.28.



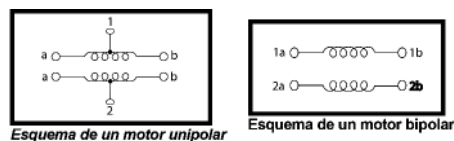
**Figura 2.28** Bobinado de un motor de paso a paso de una disquetera, en el que pueden apreciarse los embobinados. El imán permanente se ha desmontado para poder ver el interior del motor, que está montado sobre la propia placa de circuito impreso.

### Tipos de motores de paso a paso

Hay dos tipos básicos de motores de paso a paso:

- Los bipolares que se componen de dos bobinas.
- Los unipolares que tienen cuatro entradas.

Externamente, se diferencian entre sí por el número de cables. Los bipolares solo tienen cuatro conexiones, dos para cada bobina y los unipolares que normalmente presentan seis cables, dos para cada bobina y otro para alimentación de cada par de éstas, aunque en algunos casos, se pueden encontrar motores unipolares con cinco cables, básicamente es lo mismo, solamente que el cable de alimentación es común para los dos pares de bobinas. Véase la figura 2.29.



**Figura 2.29** Esquemas de motores de paso a paso: unifilar y bipolar.

- **Los motores unipolares.** En este tipo de motores, todas las bobinas del estator están conectadas en serie formando cuatro grupos. éstas a su vez, se conectan dos a dos, también en serie, y se montan sobre dos estatores diferentes, tal y como se aprecia en la figura 2.30. Según puede apreciarse en dicha figura, del motor paso a paso salen dos grupos de tres cables, uno de los cuales es común a dos

embobinados. Las seis terminales que parten del motor, deben ser conectadas al circuito de control, el cual, se comporta como cuatro conmutadores electrónicos que, al ser activados o desactivados, producen la alimentación de los cuatro grupos de bobinas con que está formado el estator. Si se genera una secuencia adecuada de funcionamiento de estos interruptores, se pueden producir saltos de un paso en el número, y sentido que se desee.

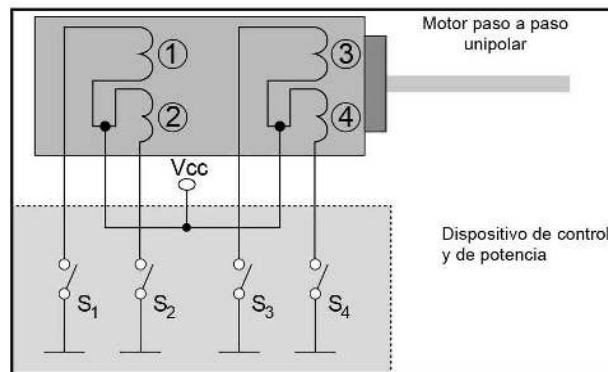


Figura 2.30 Control de un motor unipolar.

- Los motores bipolares.** En este tipo de motores, las bobinas del estator se conectan en serie formando solamente dos grupos, que se montan sobre dos estatores, tal y como se muestra en la figura 2.31. Según se observa en el esquema de este motor, salen cuatro hilos que se conectan al circuito de control, que realiza la función de cuatro interruptores electrónicos dobles, que permiten variar la polaridad de la alimentación de las bobinas. Con la activación y desactivación adecuada de dichos interruptores dobles, se pueden obtener las secuencias adecuadas para que el motor pueda girar en un sentido, o en el otro.

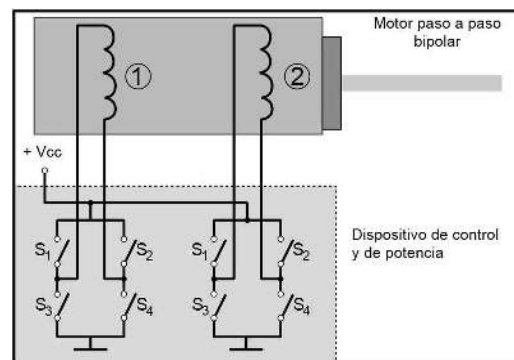
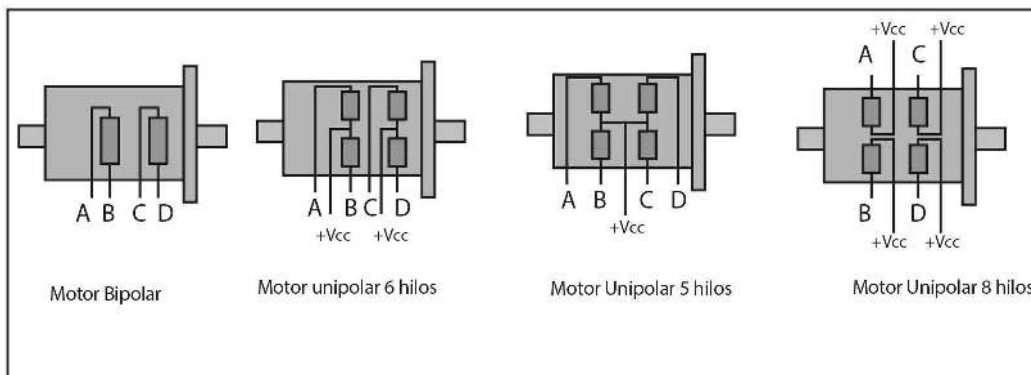


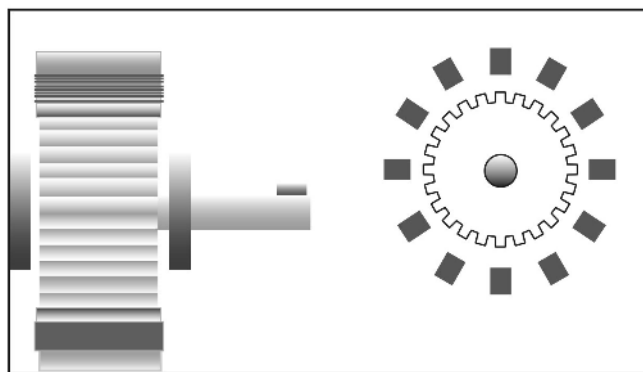
Figura 2.31 Control de un motor bipolar.

La existencia de varios embobinados en el estator de los motores de imán permanente, da lugar a varias formas de agrupar dichos embobinados, para que sean alimentados adecuadamente. Estas formas de conexión permiten clasificar los motores de paso a paso en dos grandes grupos, que desde el punto de vista de su construcción existen, y son los siguientes (véase la figura 2.32):



**Figura 2.32** Varios embobinados en el estator de los motores de imán permanente, en los siguientes tipos de motores de paso a paso.

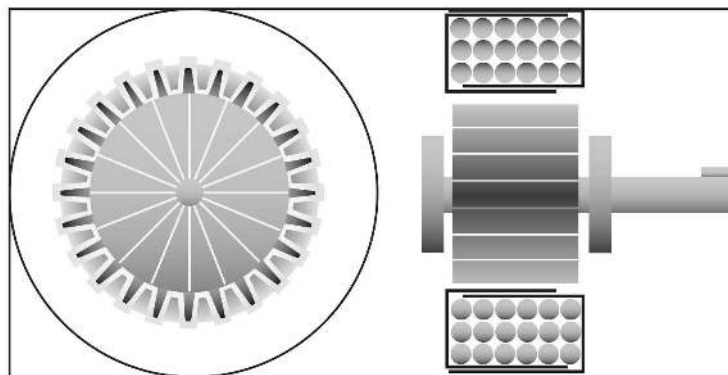
- De reluctancia variable (V.R.)** Los motores de este tipo, poseen un rotor de “hierro dulce” que en condiciones de excitación del estator y bajo la acción de su campo magnético, ofrecen menor resistencia a ser atravesado por su flujo en la posición de equilibrio. Su mecanización es similar a los motores de imán permanente, y su principal inconveniente, radica en que en condiciones de reposo (sin excitación), el rotor queda en libertad de girar y, por lo tanto, su posicionamiento de régimen de carga dependerá de su inercia, y no será posible predecir el punto exacto de reposo. El tipo de motor de reluctancia variable (VR) (véase la figura 2.33), consiste de un rotor y de un estator cada uno, con un número diferente de dientes. Ya que el rotor no dispone de un magneto permanente, el mismo gira libremente, o sea que no tiene torque de detención.



**Figura 2.33** Vista de sección de un motor por pasos de reluctancia variable.

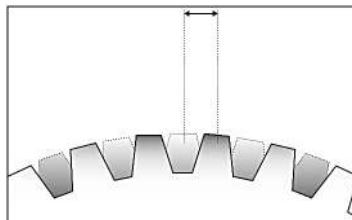
- **De magneto permanente.** Es el modelo en el que rotor es un imán permanente, en el que se mecanizan un número de dientes, limitado por su estructura física. Ofrece como principal ventaja que su posicionamiento no varía aún sin excitación, y en régimen de carga.

El motor de magneto permanente (PM) o tipo enlatado (ver la Fig. 2.34), es quizá el motor de paso a paso, más ampliamente usado para aplicaciones no industriales. En su forma más simple, el motor consiste en un rotor magneto permanentemente magnetizado de forma radial, y en un estator similar al motor VR. Debido a las técnicas de manufactura usadas en la construcción del estator, los mismos se conocen a veces como motores de “polo de uñas” (Claw Pole).



**Figura 2.34** Vista en sección, de un magneto permanente.

- **Híbridos.** Son una combinación de los dos tipos anteriores; el rotor suele estar constituido por anillos de “acero dulce” dentado, en un número ligeramente distinto al del estator, y dichos anillos montados sobre un imán permanente dispuesto axialmente. El tipo híbrido, es probablemente el más usado de todos los motores de paso a paso. Originalmente desarrollado como un motor PM sincrónico de baja velocidad, su construcción es una combinación de los diseños VR y PM. El motor híbrido, consiste en un estator dentado y un rotor de tres partes (apilado simple). El rotor de apilado simple, contiene dos piezas de polos separados por un magneto permanente magnetizado, con los dientes opuestos desplazados en una mitad de un salto de diente (véase la figura 2.35), para permitir una alta resolución de pasos.

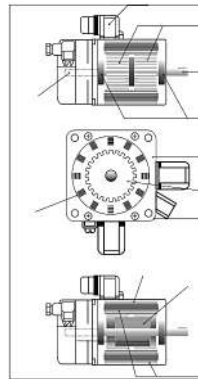


**Figura 2.35** El rotor de apilado simple, contiene dos piezas de polos separados por un magneto permanente magnetizado, con los dientes opuestos desplazados en una mitad de un salto de diente, para permitir una alta resolución de pasos.

El incremento de demanda de los sistemas de motor por pasos de reducido ruido acústico, con una mejora en el desempeño, al mismo tiempo con una reducción de costos, fue satisfecho en el pasado con los dos tipos principales de motores por pasos híbridos. El tipo dos, de cuatro fases, que ha sido generalmente implementado en la mayoría de las aplicaciones simples; mientras que el de cinco fases, ha probado ser ideal para las tareas más exigentes. Las ventajas ofrecidas por los motores de cinco fases incluían:

- Mayor resolución.
- Menor ruido acústico.
- Menor resonancia operacional.
- Menor torque de frenado.

A pesar de que las características de los motores de cinco fases ofrecían muchos beneficios, especialmente en micro pasos, el creciente número de conmutaciones de alimentación y el cableado adicional requerido, tenían un efecto adverso en el costo del sistema. Con el avance de la electrónica, permitiendo circuitos de cada vez mayor grado de integración y mayores características, la fábrica SIG Positec, vio un área de oportunidad, y tomó la iniciativa en el terreno, desarrollando tecnología de punta en motores por pasos. A pesar de ser similar en construcción a otros motores de paso a paso, la implementación de la tecnología de tres fases, hizo posible que el número de fases del motor sean reducidas, dejando al número de pares de polos del rotor y a la electrónica, determinar la resolución (pasos por revolución).



**Figura 2.36** Corte de una sección, de un motor por pasos híbrido de tres fases.

Dado que la tecnología de tres fases, ha sido usada por décadas como un método efectivo de generación de campos rotativos, las ventajas de este sistema son evidentes en sí. El motor de paso a paso de tres fases, fue por lo tanto, una progresión natural que incorporó todas las mejores características de un sistema de cinco fases, a una significativa reducción de costos. Véase la figura 2.36.

Un problema que se puede plantear, es cómo saber cuál es cada polo de la bobina, ya que los colores no están estandarizados. Así, que se toma el equipo de prueba (Tester), y se lee el valor (resistencia) de todos los polos (supóngase que las bobinas son de  $30 \Omega$ ), el común (alimentación) con cada polo de bobina leerá  $30 \Omega$  y entre polos de la misma bobina  $60 \Omega$ , por eliminación, será relativamente fácil, encontrar los polos de las bobinas. Si se presenta una equivocación, no pasa nada, solamente que el motor no girará. Cambiando el orden de dos de los polos de una bobina, se cambia el sentido de giro. El orden para el controlador del CNC según un esquema unipolar es:

+v1	A1	B1	A2	B2	+v2
-----	----	----	----	----	-----

Si el motor sólo tiene cinco cables, el común de alimentación se puede conectar a cualquiera de los lados. Hay que tener en cuenta que los motores unipolares de seis u ocho hilos, pueden hacerse funcionar como motores bipolares, si no se utilizan las tomas centrales; mientras que los de cinco hilos, no podrán usarse jamás como bipolares, porque en el interior, están conectados los dos cables centrales.

### Parámetros de los motores de paso a paso

Desde un punto de vista mecánico y eléctrico, es conveniente conocer el significado de algunas de las principales características y parámetros que se definen sobre un motor paso a paso:

- **Par dinámico de trabajo (Working Torque).** Depende de sus características dinámicas, y es el momento máximo que el motor es capaz de desarrollar sin perder paso; es decir, sin dejar de responder a algún impulso de excitación del estator, y dependiendo, evidentemente, de la carga. Generalmente se ofrecen, por parte del fabricante, curvas denominadas de arranque sin error (Pull-In), y que relaciona el par, en función del número de pasos. Hay que tener en cuenta que, cuando la velocidad de giro del motor aumenta, se produce un aumento de la fuerza contra electromotriz ( $f_{cem}$ ) en él generada, y por lo tanto, una real disminución de la corriente absorbida por los embobinados del estator, como consecuencia de todo ello, disminuye el par-motor.
- **Par de mantenimiento (Holding Torque).** Es el par requerido para desviar, en régimen de excitación, un paso, el rotor cuando la posición anterior es estable; es decir, es mayor que el par dinámico, y actúa como un freno, para mantener el rotor en una posición estable dada.
- **Par de detención (Detention Torque).** Es una par de freno que siendo propio de los motores de imán permanente, es debido a la acción del rotor cuando los devanados del estator están desactivados.
- **Ángulo de paso (Step Angle).** Se define como el avance angular que se produce en el motor por cada impulso de excitación. Se mide en grados, siendo los pasos estándar más importantes, los siguientes:



Grados por impulso de excitación	Número de pasos por vuelta
0.72°	500
1.80°	200
3.75°	96
7.50°	48
15.00°	24

- **Número de pasos por vuelta.** Es la cantidad de pasos que ha de efectuar el rotor para realizar una revolución completa; evidentemente es:

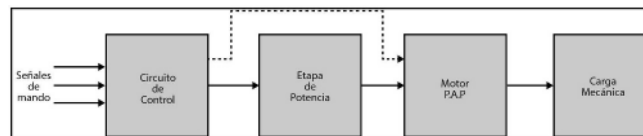
$$NP = \frac{360}{\alpha}$$

donde  $NP$  es el número de pasos, y  $\alpha$  es el ángulo de paso.

- **Frecuencia de paso máximo (Maximum Pull-In/Pull-Out).** Se define como el máximo número de pasos por segundo, que realmente, puede recibir el motor funcionando adecuadamente.
- **Momento de inercia del rotor.** Es su momento de inercia asociado, que se expresa en gramos por centímetro cuadrado.
- **Par de mantenimiento, de detención y dinámico.** Definidos anteriormente y expresados en mili-Newton por metro.

### Control de los motores de paso a paso

Para realizar el control de los motores de paso a paso, es necesario generar una secuencia determinada de impulsos. Además, es también necesario, que estos impulsos sean capaces de entregar la corriente necesaria para que las bobinas del motor se exciten, por lo general, el diagrama de bloques de un sistema con motores de paso a paso, es el que se muestra en la figura 2.37.



**Figura 2.37** Diagrama de bloques, de un sistema con motor de paso a paso.

### Secuencia del circuito de control

Existen dos formas básicas de hacer funcional los motores de paso a paso, atendiendo al avance del rotor bajo cada impulso de excitación:

- **Paso completo (Full-Step).** El rotor avanza un paso completo por cada pulso de excitación, y para ello, su secuencia ha de ser la correspondiente a la expuesta anteriormente, para un motor como el de la figura 2.36, y que es presentada de forma resumida en la tabla 2.1 para ambos sentidos de giro, las “X” indican los interruptores que deben estar cerrados (interruptores en ON); mientras que la ausencia de “X” indica interruptor abierto (interruptores en OFF).

Tabla 2.1 Secuencia de excitación de un motor de paso a paso completo.

Paso	S1	S2	S3	S4	Paso	S1	S2	S3	S4
1	X			X	1	X	X		
2			X	X	2		X	X	
3		X	X		3			X	X
4	X	X			4	X			X
1	X			X	1	X	X		
Sentido horario (a)					Sentido anti-horario (b)				

- **Medio paso (Half-Step).** Con este modo de funcionamiento, el rotor avanza medio paso por cada pulso de excitación, presentando como principal ventaja, una mayor resolución de paso, ya que disminuye el avance angular (la mitad que en el modo de paso completo). Para conseguir tal cometido, el modo de excitación consiste en hacerlo alternativamente sobre dos bobinas, y sobre una sola de ellas, según se muestra en la tabla 2.2, para ambos sentidos de giro.

Tabla 2.2 Secuencia de excitación de un motor de paso a paso, en medio paso.

Paso	Excitación de bobinas				Paso	Excitación de bobinas			
	S1	S2	S3	S4		S1	S2	S3	S4
1	X			X	1	X	X		
2				X	2		X		
3			X	X	3		X	X	
4			X		4			X	
5		X	X		5			X	X
6		X			6				X
7	X	X			7	X			X
8	X				8	X			
1	X			X	1	X	X		
Sentido horario (a)					Sentido anti-horario (b)				

Según la figura 2.26, al excitar dos bobinas consecutivas del estator simultáneamente, el rotor se alinea con la bisectriz de ambos campos magnéticos; cuando desaparece la excitación de una de ellas, extinguiéndose el campo magnético inducido por dicha bobina, el rotor queda bajo la acción del único campo existente, dando lugar a un desplazamiento de una mitad.

Por ejemplo, la secuencia presentada en la tabla 2.2: en el paso 1, y excitadas las bobinas L1 y L2 de la figura 2.26 mediante la acción de S1 y S2, el rotor se situaría en la posición indicada en la figura 2.26a; en el paso 2, S1 se abre, con lo que solamente permanece excitada L2, y el rotor girará hasta alinear su polo sur con el norte, generado por L2. Suponiendo que este motor tenía un paso de 90°, entonces en este caso, realmente sólo ha avanzado 45°. Posteriormente, y en el paso 3, se cierra S3, situación representada en la figura 2.26b, con lo que el rotor ha vuelto a avanzar otros 45°. En definitiva, los desplazamientos, siguiendo dicha secuencia, son de medio paso. La forma de conseguir estas secuencias puede ser a través de un circuito lógico secuencial, con circuitos especializados o con un micro-controlador.

En este momento, habrá que centrarse en el control de los motores de paso a paso, utilizando el micro-controlador PIC16F84. Además, como el micro-controlador no es capaz de generar la corriente suficiente para excitar las bobinas del motor de paso a paso, se puede utilizar el circuito integrado L293. El montaje que permite el absoluto y total control de un arreglo que utiliza un motor de paso a paso, es el de la figura 2.38, en el que se ha realizado la conexión del motor de paso a paso, a través de un driver L293. Las líneas RB0, RB1, RB2 y RB3, serán las encargadas de generar la secuencia de activación del motor de paso a paso; mientras que RB4 y RB5 se ponen siempre a “1”, para habilitar las entradas de inhibición de los drivers. Las salidas de los drivers se conectan a las bobinas del motor, para conseguir la corriente necesaria para que éste se ponga en funcionamiento. Por su parte, las entradas RA0-RA4 se configuran como “entradas”.

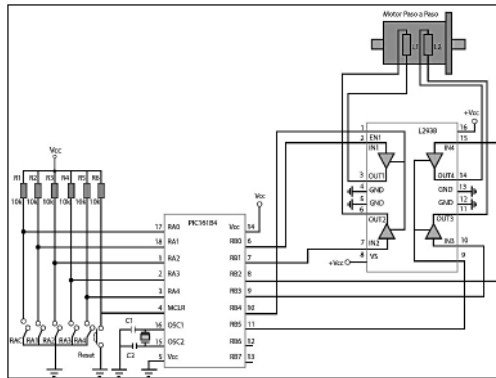


Figura 2.38 Conexión del motor de paso a paso al PIC16F84, y al circuito L293.

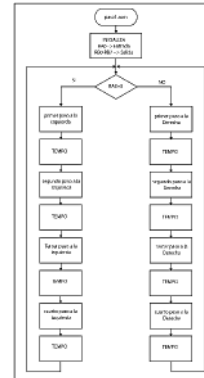


Figura 2.39 Organigrama del programa.

El organigrama del programa, es el que se muestra en la figura 2.39.

**Aplicaciones de los motores de paso a paso**

- Taxímetros.
- Disk-drive.
- Impresoras.

- Plotters.
- Brazo(s) y robots completos.
- Patrón mecánico de velocidad angular.
- Registradores X-Y.
- Relojes eléctricos.
- Casetes digitales.
- Control remoto.
- Máquinas de escribir electrónicas.
- Manipuladores.
- Posicionamiento de válvulas en controles industriales.
- Posicionamiento de piezas en general.
- Bombas impelentes en aplicaciones de electromedicina.

Características de los motores de paso a paso:

- Larga vida.
- Velocidad de respuesta elevada ( $<1\text{ms}$ ).
- Posicionamiento dinámico preciso.
- Re-inicialización a una posición preestablecida.
- Frecuencia de trabajo variable.
- Funcionamiento sincrónico bidireccional.
- Sincronismo unidireccional en régimen de sobre-velocidad.
- Carencia de escobillas.
- Insensibilidad al choque en régimen dinámico, y a la regulación de la fuente de alimentación.

## 2.12 Problemas resueltos

### Problema 2.1

¿Qué se entiende por Reluctancia en un circuito magnético?

#### Respuesta

Es posible hacer una analogía entre un circuito magnético como el descrito por la ecuación:

$$N_i = \sum_k H_k l_k$$

y en un circuito eléctrico. Para ello, la fuente magnética  $N_i$  puede asimilarse a una fuente de voltaje, y las caídas magnéticas  $H_k l_k$  serían caídas de voltaje en el circuito eléctrico. El flujo magnético  $\phi$  tendría su equivalente en la corriente del circuito eléctrico. Esta analogía es aún más clara, y presta entonces real utilidad cuando los circuitos magnéticos son lineales (es decir, formados con núcleos de  $\mu$  constantes). En este caso, la ecuación anterior puede escribirse como:

$$NI = \sum_k \frac{B_k l_k}{\mu_k} = \sum_k \frac{\phi l_k}{\mu_k A_k}$$

como  $\phi$  es constante en todos los trozos “en serie” del circuito magnético supuesto, puede sacarse fuera de la sumatoria quedando como:

$$NI = \phi \sum_k \frac{l_k}{\mu_k A_k}$$

la ecuación equivalente de un circuito eléctrico es:

$$V = I \sum_k r_k$$

siendo  $V$  el voltaje; la corriente  $I$  y  $r_k$  las resistencias en serie. Así es posible definir en el circuito magnético el equivalente de una resistencia eléctrica, y que en este caso se denomina Reluctancia.

$$\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu A}$$

y que será constante al trabajar dentro de la zona lineal de la característica  $B - H$ .

### Problema 2.2

¿Qué es la intensidad del campo magnético?

#### Respuesta

Es el estudio de campos magnéticos, aparte del campo magnético (o densidad de flujo)  $B$ , se define una segunda variable fundamental denominada intensidad de campo magnético, definida como:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

donde:  $\mu$  es la permeabilidad magnética del medio; es decir;  $H$  es proporcional a  $B$  (al ser  $\mu$  constante). Por otra parte, la intensidad de campo  $H$  está relacionada con la corriente eléctrica, o sea con “la fuente magnética” que origina el campo según la ley de Ampère:

$$\oint H \cdot dl = i$$

Un aumento en el valor de la fuente magnética  $i$ , aumenta la intensidad  $H$  en los diversos puntos del campo magnético, subiendo proporcionalmente la densidad de flujo  $B$ . Sin embargo, existen ciertos materiales llamados ferromagnéticos (hierro, cobalto, níquel y aleaciones de los mismos), en los cuales un determinado valor de  $H$  produce un aumento de  $B$  mucho mayor que  $(\mu)(H)$ . Esto se debe a que dichos materiales están constituidos por dipolos magnéticos moleculares orientados al azar cuando no hay campo magnético externo aplicado ( $H = 0$ ). Ante la presencia de un campo magnético externo ( $H \neq 0$ ), los dipolos se orientan en el sentido del campo, produciendo un campo interno adicional que aumenta notablemente la densidad de flujo total en el interior del material.

### Problema 2.3

Un alambre largo está doblado en la forma mostrada en la figura 2.40, y lleva una intensidad de corriente de 13 A. Utilizando la ley de Biot-Savart, encontrar la dirección y la magnitud del campo magnético en

el punto P, que es el centro de la semicircunferencia de radio  $r = 20\text{cm}$ .

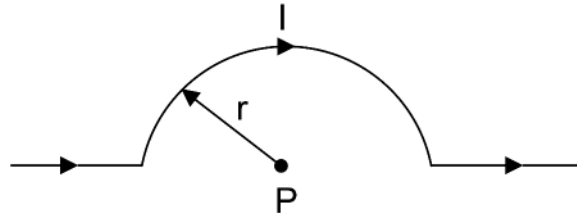


Figura 2.40

### Respuesta

Dado que se sabe que  $I=13[\text{A}]$  y que  $r=20 \times 10^{-2}[\text{m}]$ , entonces: las secciones rectas del alambre no generan campo magnético en el punto P; pues al considerar un elemento  $ds$ , éste es paralelo al vector  $\vec{r}$  y  $ds \times \vec{r} = 0$ ; por lo que la sección circular es la única que contribuye al campo magnético en el punto. Usando la “Regla de la Mano Derecha” en la sección circular, el campo magnético tiene una dirección que “entra” a la página de este libro de texto. Entonces; considerando un elemento  $ds$  en la sección circular como se ilustra en la siguiente figura 2.41, éste es perpendicular a “ $\vec{r}$ ”; finalmente,

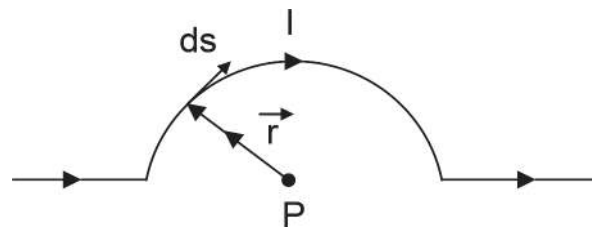


Figura 2.41

La magnitud del campo magnético debido a este elemento de alambre está dado por:

$$dB = \left( \frac{\mu_o}{4\pi} \right) \left( \frac{ds}{r^2} \right)$$

integrando se obtiene:

$$B = \frac{\mu_o I}{4\pi r^2} \int_0^{\pi r} ds = \left. \frac{\mu_o I s}{4\pi^2} \right|_0^{\pi r} = \frac{\mu_o I}{4\pi^2} (\pi r)$$

$$B = \frac{\mu_o I}{4\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} (13)}{(4)(20 \times 10^{-2})} = 20.42 \times 10^{-3} [T]$$

finalmente:

$$B = 20.42 \times 10^3 [T]$$

con una dirección “entrando” a la página del libro.

#### Problema 2.4

Recordando que la densidad de corriente  $J = nqv_d$ , demostrar que la ley de Biot-Savart, puede escribirse como:

$$dB = \left( \frac{\mu_o}{4\pi} \right) \left( \frac{qv_d X \vec{r}}{r^2} \right) (ndv)$$

en donde  $dv$  es el elemento de volumen de un conductor y  $v_d$  es la velocidad de arrastre.

#### Respuesta

La ley de Biot-Savart es:  $db = \left( \frac{\mu_o I}{4\pi} \right) \left( \frac{ds X \vec{r}}{r^2} \right)$

recordando que  $ds$  se define como el vector cuya dirección es igual a la dirección de la corriente. Ahora, considérese la corriente como un vector y  $ds$  como una medida escalar, es decir:

$$db = \left( \frac{\mu_o ds}{4\pi} \right) \left( \frac{IX \vec{r}}{r^2} \right)$$

NOTA:  $(IX \vec{r})$  representa “el producto cruz” de los vectores.

Por otra parte, la corriente está dada por:



$$I = JA = nqv_dA$$

donde: A es el área de una sección transversal del alambre, como se ilustra en la siguiente figura 2.42.

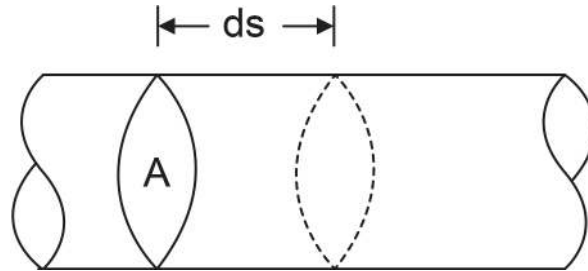


Figura 2.42

sustituyendo la intensidad de corriente en la expansión magnética se tiene:

$$dB = \left( \frac{\mu_o ds}{4\pi} \right) \left( \frac{nqv_dAX \vec{r}}{r^2} \right) = \left( \frac{\mu_o}{4\pi} \right) \left( \frac{qv_dX \vec{r}}{r^2} \right) (nAds)$$

de la figura se ve que el diferencial de volumen es  $dV=Ads$ . Sustituyendo la expresión del campo magnético se tiene:

$$dB = \left( \frac{\mu_o}{4\pi} \right) \left( \frac{nqv_dAX \vec{r}}{r^2} \right) = (ndv)$$

### Problema 2.5

Un cilindro de radio  $R=10[\text{cm}]$  se forma con un paquete completo de 150 alambres magneto rectos y largos. Si cada alambre lleva una intensidad de corriente de  $3[\text{A}]$ .

- ¿Cuál es la magnitud y dirección de la fuerza por unidad de longitud que actúa sobre un alambre localizado a  $5[\text{cm}]$  del centro del paquete?
- ¿Sería mayor o menor la fuerza que experimenta un alambre externo del paquete comparada con la de un alambre que estuviera a  $5[\text{cm}]$  del centro?

**Respuesta**

a) Considerando los  $N$  alambres como un sólo alambre de diámetro  $10[\text{cm}]$  que lleva una intensidad de corriente de  $I_o=NI$ . La magnitud del campo magnético a una distancia “ $r$ ” dentro del eje del alambre, está dada por:

$$B = \frac{\mu_o I_o}{2\pi R^2 r} = \frac{\mu_o NI}{2\pi R^2 r}$$

la fuerza que siente el alambre a una distancia “ $r$ ” del eje del paquete, está dada por:

$$F = IBl$$

sustituyendo el campo magnético en la fuerza se tiene que:

$$F = (I) \left( \frac{\mu_o NI}{2\pi R^2 r} \right) rl = \frac{\mu_o NI^2}{2\pi R^2 r} (rl)$$

la fuerza por unidad de longitud es:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_o NI^2 r}{2\pi R^2}$$

sustituyendo valores:

$$\frac{F}{l} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(149)(3)^2(5 \times 10^{-2})}{(2\pi)(10 \times 10^{-2})^2} = 1.35 \left[ \frac{mN}{m} \right]$$

$$\frac{F}{l} = 1.35 \left[ \frac{mN}{m} \right]$$

b) Considerando  $N=149$  forman el paquete, y que el alambre 150 es el que siente la fuerza. Entonces; la fuerza por unidad de longitud está dada por:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi r} = \frac{\mu_o (N-1)II}{2\pi r} = \frac{\mu_o (N-1)I^2}{2\pi R}$$

sustituyendo valores:

$$\frac{F}{l} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(149)(3)^2}{(2\pi)(10 \times 10^{-2})} = 2.68 \left[ \frac{mN}{m} \right]$$

$$\frac{F}{l} = 2.68 \left[ \frac{mN}{m} \right]$$

### 2.13 Resumen

La conversión electromecánica de la energía comprende todos aquellos fenómenos relativos a la transformación de energía eléctrica en energía mecánica y viceversa. La importancia de estos procesos es indudable, dado que la electricidad es una forma de energía que resuelve convenientemente los problemas básicos de transmisión, distribución y utilización en innumerables aplicaciones. En términos básicos, los dispositivos de conversión electromecánica se pueden clasificar en dos tipos dependiendo del tipo de conversión que realicen:

- a) Motor: Es un dispositivo que convierte energía eléctrica en energía mecánica.
- b) Generador: Es un dispositivo que convierte energía mecánica en energía eléctrica

Por otro lado: un punto que ha de recordarse, es que la conversión de energía de una forma en otra, satisface el Principio de Conservación de la Energía. Por lo tanto, la energía de entrada es siempre igual a la suma de la energía de salida, el incremento en la energía almacenada y la pérdida de energía. Si tal pérdida de energía resulta despreciable en un sistema de conversión de energía, se dice que es un sistema sin pérdidas. Sin embargo, en un sistema “de la vida real”, invariablemente siempre hay pérdidas de energía, por pequeñas que éstas sean.

Para la conversión de energía eléctrica, es posible usar como medio un campo magnético o un campo eléctrico. Empero, la cantidad de energía que un equipo puede convertir con el campo eléctrico como medio, es relativamente pequeña.

### 2.14 Problemas

**2.1** Un alambre de cobre desnudo del calibre 10, puede conducir una intensidad de corriente de 50 [A] sin sobrecalentarse. Si se hace circular una intensidad de corriente de esa magnitud (50[A]) por una sección larga y recta del alambre de calibre 10. ¿A qué distancia del eje del alambre, la magnitud del campo magnético resultante es igual a  $10^{-3}$  [T].

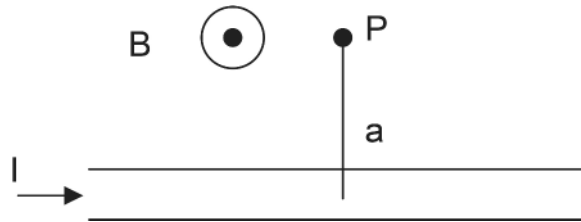


Figura 2.43

**2.2** En la teoría de Bohr, el átomo de hidrógeno puede pensarse que el electrón se mueve en una órbita circular de radio igual a  $5.3 \times 10^{11}$  [cm], con una velocidad tangencial de  $2.2 \times 10^6$  [m/s]. calcular la magnitud del campo magnético producido por el movimiento del electrón en la posición del protón.

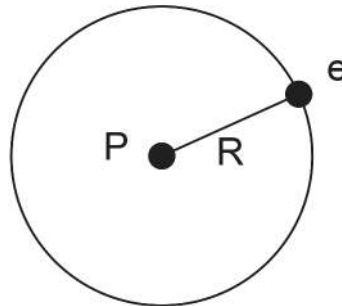


Figura 2.44

**2.3** Con un alambre de cobre, se forma una espira rectangular de 4[cm] por 10[cm]; por la espira se conduce una intensidad de corriente de 10[A]. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético en el centro de la espira?

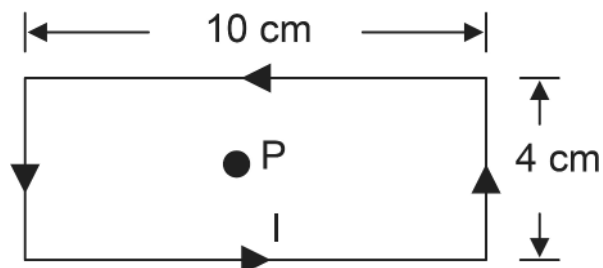


Figura 2.45

**2.4** Con un alambre se forma una espira que ilustra la figura, donde  $a = 4[\text{cm}]$  y  $b = 7[\text{cm}]$ . El alambre conduce una intensidad de corriente de  $2.4[\text{A}]$ . Determinar la magnitud y la dirección del campo magnético en el punto P localizado en el centro de los semicírculos.

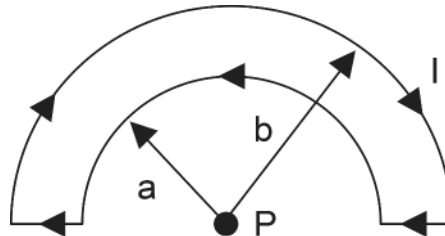


Figura 2.46

**2.5** Dos alambres paralelos infinitamente largos y delgados, llevan intensidades de corriente de  $20[\text{A}]$  en dirección opuesta. ¿Qué distancia de separación entre centro y centro deberán tener si se repelen con una fuerza por unidad de longitud de  $10^{-3} [\text{N/m}]$ ?

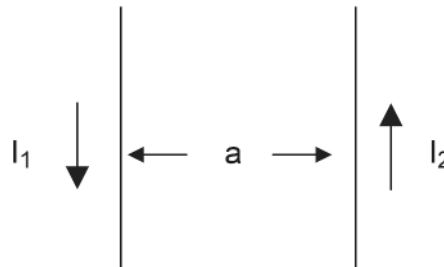


Figura 2.47

**2.6** Se fabrica un electroimán con una bobina delgada de  $4.8 [\text{cm}]$  por donde circula una intensidad de corriente de  $11.5 [\text{A}]$ . ¿Cuántas vueltas deberá tener la bobina para producir un campo magnético de más de  $6.3[\text{mT}]$  en el centro?

**2.7** Se usa un solenoide largo para generar un campo magnético de  $5[\text{mT}]$ . Si el devanado del solenoide tiene  $3200 [\text{vueltas/metro}]$ . ¿Qué intensidad de corriente se requiere?

**2.8** Un tubo de  $40 [\text{cm}]$  de longitud, tiene devanadas sobre él, dos bobinas uniformes, una encima de la otra. Una bobina está enrollada en un sentido y tiene  $800$  vueltas, y está enrollada en el otro sentido como lo muestra la figura. Calcular el campo magnético dentro del solenoide cuando la intensidad de corriente es de  $2[\text{A}]$  en cada una de las bobinas.

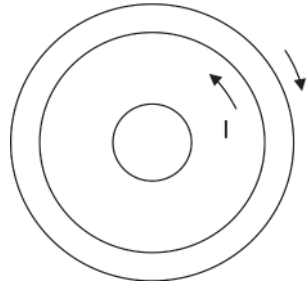


Figura 2.48

**2.9** Un solenoide largo tiene 100 [vueltas por centímetro]. Un protón se mueve dentro del solenoide en un círculo de radio de 2.3 [cm] perpendicularmente al eje del solenoide. La velocidad del protón es de  $5 \times 10^{-5}$  [m/s]. Calcular la intensidad de corriente en el solenoide.

**2.10** La siguiente figura muestra un alambre largo que conduce una intensidad de corriente  $I_1$ . La espira rectangular conduce una intensidad de corriente  $I_2$ . Calcular la magnitud y la dirección de la fuerza resultante. Suponer que  $c=1.1$  [cm];  $a=9.2$ [cm];  $L=32.3$ [cm];  $I_1=28.6$ [A] e  $I_2=10$ [A].

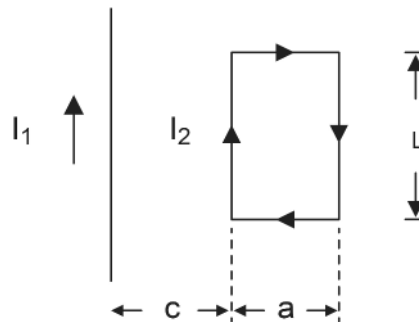


Figura 2.49

# **Segunda parte**

**Capítulo 3 Teoría del transformador**

**Capítulo 4 Operación del transformador  
en sistemas eléctricos**

**Capítulo 5 Transformadores de potencia**

**Capítulo 6 Transformadores de distribución**

## Capítulo 3

### Teoría del transformador

3.1 Problema de diseño

3.2 Introducción

3.3 El transformador eléctrico

3.4 Deducción del circuito equivalente

3.5 Análisis de comportamiento bajo distintas cargas

3.6 Por ciento y por unidad de impedancia

3.7 Autotransformadores

3.8 Solución del problema de diseño

3.9 Problemas resueltos

3.10 Resumen

3.11 Problemas



### Competencias

- Conocer la teoría de operación del transformador eléctrico.
- Establecer el circuito equivalente del transformador eléctrico.
- Determinar el comportamiento del transformador eléctrico bajo distintas cargas.

## 3.1 Problema de diseño

### Aplicación de los transformadores

Dado que un transformador, es un dispositivo que convierte la potencia alterna con un nivel de voltaje a potencia eléctrica con otro valor o nivel de voltaje mediante la acción de un campo magnético. Este dispositivo consta de dos o de más bobinas de alambre conductor enrollados alrededor de un núcleo ferromagnético común. Estas bobinas (normalmente) no se conectan directamente; es decir, la única “conexión” entre las bobinas, es el flujo magnético común que se encuentra al interior del núcleo. Su funcionamiento es relativamente sencillo: uno de los dos devanados del transformador, se conecta directamente a una fuente de energía eléctrica alterna y el segundo (tercero, cuarto, más) suministra(n) energía eléctrica alterna a las(s) carga(s) asociada.

Existen dos aplicaciones básicas para la utilización de los transformadores de distribución de energía eléctrica:

- Transporte de energía eléctrica. Gracias a su capacidad de transformar los parámetros de tensión de voltaje e intensidad de corriente con la consiguiente reducción de las pérdidas por efecto Joule. Existirán dos transformadores, uno al principio de la línea para la elevación del voltaje (definido transformador elevador); y otro al final de la línea para la reducción de dicho potencial eléctrico (transformador reductor).
- Interconexión de líneas eléctricas, a diferentes niveles de voltaje. Por su capacidad de transformar los niveles de voltaje, los transformadores son ideales para poder interconectar líneas a diferentes niveles de voltaje, dando para todas ellas una salida común.

Por otro lado; el transformador también se utiliza en circuitos de baja potencia y de voltaje para tener

máxima transferencia de potencia, el aislamiento de circuitos, o también el aislamiento frente a la corriente continua, sin perder la continuidad de la corriente alterna.

Otra aplicación es como dispositivo auxiliar de los aparatos de medición, reduciendo el voltaje o la corriente de un circuito para alcanzar adecuadamente los valores que requieren utilizar los aparatos de medición, estos son los llamados transformadores de medida.

También son muy usados los transformadores en soldadura eléctrica y en hornos eléctricos, empleándose unidades reductoras de voltaje con pocas espiras en el devanado primario, y un arreglo en el secundario, constituido por un solo conductor de cobre de gran sección.

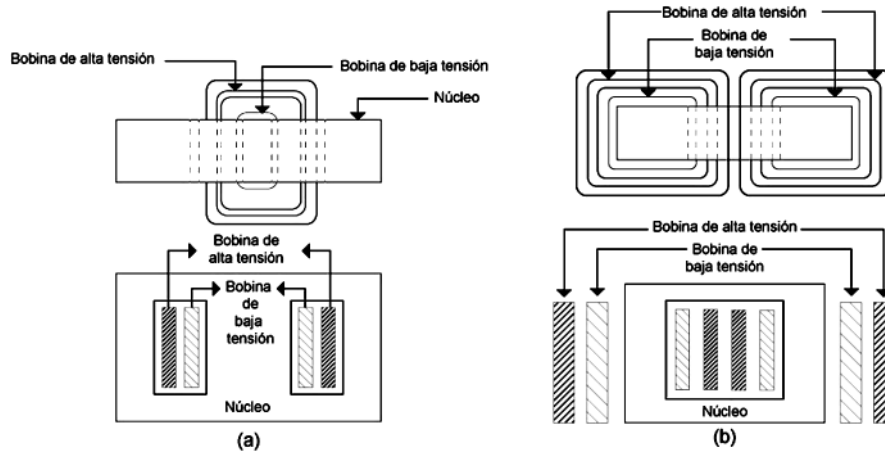
Finalmente; investigue y desarrolle un trabajo donde especifique el uso y aplicación de los transformadores eléctricos monofásicos en otras áreas a las de distribución e interconexión. Por ejemplo; lo relacionado a radiofrecuencia y comunicaciones; en audio y video, así como en sistemas electrónicos de potencia, y en otras áreas igualmente importantes.

### 3.2 Introducción

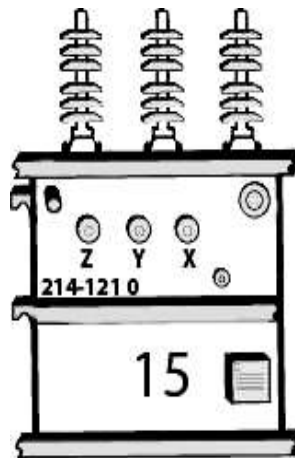
El término “transformador” como se utiliza generalmente, se aplica a ciertos dispositivos basados en los efectos físicos de dos o más bobinas estacionarias acopladas por un campo magnético mutuo. Los transformadores pueden tener núcleo de aire, ferrita o material ferroso. El material seleccionado por el núcleo está determinado esencialmente por la frecuencia de la aplicación en particular a que se designe su utilización. Por otro lado; los núcleos de acero de silicio laminado se emplean principalmente para frecuencias usadas en el manejo de grandes potencias y para audiofrecuencias.

Por ejemplo; el polvo de acero contenido en un medio aislante se usa como núcleo en radiofrecuencias bajas, como son los núcleos de ferrita.

Los transformadores de núcleos de aire se usan para las frecuencias más altas. La figura 3.1. muestra los dos tipos de construcción del núcleo, cada uno con las formas características de las bobinas. La figura 3.1 (a) muestra el transformador tipo acorazado en planta y en elevación; y la figura 3.1 (b) especifica la construcción del transformador del tipo núcleo. La figura 3.1 (c) muestra un transformador monofásico que tienen el núcleo y las bobinas dispersas según el tipo “acorazado” de construcción como se muestra esquemáticamente en la figura 3.1 (a); en esta figura, la vista es del lado de alta tensión y muestra igualmente, el mecanismo del interruptor que cambia el número de espiras en la bobina de alta tensión. En este caso, los incrementos de voltaje son del 2.5% del voltaje normal. Puesto que la bobina tiene “derivaciones” para variar la relación de espiras; mientras que al interruptor se le denomina o llama “cambiador de derivaciones”. La bobina de bajo voltaje esta dividida en partes iguales, y cada bobina tiene un voltaje nominal de 120 volts. De esta forma, conectando las dos bobinas en paralelo se obtiene un voltaje nominal de 120 volts y cuando se conecta en serie, el voltaje nominal es de 240 volts. Este tipo de construcción es típico de los transformadores monofásicos del tipo de distribución.



**Figura 3.1** Tipos de construcción de transformadores (a) tipo acorazado y (b) tipo núcleo



**Figura 3.1c** Transformador de distribución tipo acorazado monofásico de 15 (kva) nominales; 60 (Hz); 2,400/4, 160 Y; y 120/240 (V) con cuatro derivaciones de 2.5% por debajo del voltaje nominal.

El rango de potencias nominales de los transformadores varía desde esencialmente cero para un transformador amplificador de interpasos, hasta muchos miles de kilowatts para los transformadores de potencia de alta tensión. Los voltajes nominales varían desde valores muy bajos de aproximadamente un volt o menos, hasta 750 000 volts o aún más; en un futuro próximo se manejarán voltajes todavía más elevados, las eficiencias para los tipos de potencia son muy altas, con magnitudes de orden de 99 % para los transformadores más grandes. La confiabilidad de los transformadores es excelente (muchos transformadores de distribución tienen registros de 50 años de servicio constante y continuo, lo que es un testimonio excelente de la durabilidad o vida útil de los transformadores). Las continuas mejoras en los materiales aumentan la eficiencia y la confiabilidad del transformador.

Los transformadores en las aplicaciones de potencia se usan principalmente para cambiar el voltaje por razones económicas; como ilustración, el uso del transformador permite la generación de energía eléctrica a un nivel de voltaje económico, esto permite la distribución de energía a otro voltaje económico; y finalmente la utilización de la energía a un tercer voltaje.

En el rango de audiofrecuencia, los transformadores se usan para aislamiento o para igualar impedancias. En aplicaciones de control, los transformadores se utilizan para aislamiento, para igualar impedancias, y también para producir señales de retroalimentación (en este último caso, se les reconoce con el nombre de transformadores de amortiguamiento; dos aplicaciones más que ilustran la diversidad de los usos de los transformadores en la práctica, son su aplicación como transformadores para instrumentos y de impulso para estos casos su utilización es:

- a) Los transformadores para instrumentos se usan con los amperímetros, los voltímetros y los wáttmetros para aislamientos, y para operar con instrumentos de rango normal.
- b) Los transformadores de impulso se usan para cambiar el nivel del voltaje por corta duración en impulsos de voltaje.

### 3.3 El transformador eléctrico

El físico inglés Michael Faraday planteó el funcionamiento básico del transformador en 1831, durante sus investigaciones pioneras sobre electricidad. Unos 50 años más tarde, aparece un transformador práctico, que contenía todos los elementos esenciales para revolucionar la naciente industria del alumbrado eléctrico. Al llegar el nuevo siglo, el suministro eléctrico por corriente alterna se había adoptado universalmente y el transformador tenía un papel clave en la transmisión y distribución de la corriente eléctrica.

El primer sistema de distribución de potencia de los Estados Unidos de América fue un sistema de corriente continua de 120 volts creado por Thomas Alba Edison, para suministrar potencia a bombillas incandescentes. La primera central de potencia de Edison entró en operación en la ciudad de Nueva York en septiembre de 1882. Por desgracia, este sistema de potencia generó y transmitió potencia a tan bajo voltaje, que se requerían muy altas corrientes para suministrar cantidades significativas de potencia, ocasionando grandes caídas de tensión y pérdidas en las líneas de transmisión. Esto es lo que mucha gente conoce con el nombre de “guerra de las corrientes”, en donde la tendencia a emplear fuentes de generación y transmisión de energía eléctrica a través de corrientes directa desaparece como una opción práctica. Dominando por completo la corriente alterna, esta “guerra de corrientes” fue un claro punto decisivo entre las ideas de Edison y las de Tesla, quien creía firmemente en la posibilidad de transmitir y generar corriente alterna. Fue por el año 1886 cuando Westinghouse funda la compañía Westinghouse Electric, para confrontar a la compañía General Electric, la cual era representada por Edison, quien era reconocido por sus patentes e ideas grandiosas. La historia no podrá negar nunca que además de Edison, Tesla es uno de los genios más grandes de la historia, que no sólo pudo generar energía eléctrica en forma de corriente alterna, sino que cuenta con muchos más descubrimientos como es el control remoto, e incluso la radio.

La nueva compañía tenía como pilar las ideas de Tesla; quien tenía como meta la utilización de la corriente alterna. Para lo cual se requiere en el proceso de la transmisión, un transformador para poder distribuir la energía en grandes distancias. La clave del éxito es poder elevar el voltaje y bajar la magnitud de la corriente, esto se traduce en una disminución de pérdidas lo que puede hacer de forma transparente el transformador.

Como se señaló antes, la necesidad de transmitir potencia eléctrica en grandes distancias impulsó el desarrollo de las líneas de energía de c-a de alto voltaje de las plantas generadoras al usuario final.

George Westinghouse y su compañía, desarrollaron el transformador, el cual permitió la transformación eficiente de voltajes de c-a a grandes magnitudes. Westinghouse diseñó un transformador que podía producirse a serie mediante procesos de manufactura ordinarios. La primera instalación en gran escala se hizo en Buffalo, en 1886.

Puesto que las pérdidas de transmisión en las líneas de un sistema de potencia son proporcionales al cuadrado de la corriente, elevado con transformadores el voltaje de transmisión en un factor de 10, con lo cual se reduce la corriente con el mismo factor, las pérdidas de transmisión se reducen en un factor de 100; sin el transformador, no sería posible utilizar la potencia eléctrica en muchas de las formas en que se utiliza hoy.

El transformador es un dispositivo que hace posible emplear la energía eléctrica con los valores adecuados a nuestras necesidades, esto porque interviene desde la generación hasta la distribución al usuario, esto es, desde el proceso de generación hasta que la energía se entrega al usuario final, se emplean transformadores.

Esto es claro, al pensar que se tiene durante el proceso de generación-consumo de la energía eléctrica; diferentes tensiones, corrientes y como resultado, potencias. Es entonces necesario el empleo del transformador en la generación, transmisión, distribución urbana y tensión de consumo.

Cuando se genera la energía eléctrica en una central eléctrica, es necesario elevar la tensión a valores muy altos, con el objetivo de reducir las pérdidas de energía en el transporte. Después en el proceso de utilización o distribución, se reduce el valor de la tensión, proceso que se realiza en varias etapas, hasta llegar a las tensiones de 127 volts a 60 Hz en América; mientras que en Europa se tienen niveles de 220 volts y 50 Hz. Como se podrá ver esto mas adelante, son valores que afectan de forma directa el valor del flujo máximo que circula dentro del transformador.

Los elementos que desempeñan la función de hacer variar la tensión de los diferentes valores requeridos reciben el nombre de “transformadores”.

Técnicamente, cualquier arreglo de dos o mas devanados (bobina) que comparten un flujo mutuo variable con el tiempo, cambiando la potencia eléctrica alterna de un nivel de voltaje a potencia eléctrica alterna a otro nivel de voltaje, puede considerarse como transformador. Un transformador esta diseñado y construido con el objeto de que la potencia de entrada sea igual o aproximadamente igual a la potencia de salida, así como la frecuencia, lográndose una alta eficiencia en este dispositivo. Para lograr una alta eficiencia en el transformador, el núcleo de este dispositivo está constituido por chapas de aleaciones de hierro-níquel o hierro-silicio, generalmente aisladas unas de otras para limitar las pérdidas por corriente de Foucault o parásitas. El espesor de las chapas suele oscilar entre 0.33 y 0.5 mm.

Uno de los devanados del transformador se conecta a una fuente de energía eléctrica alterna y el

segundo suministra energía eléctrica a las cargas. Al devanado del transformador que se conecta a la fuente se le llama devanado primario o devanado de entrada, y el devanado que se conecta a la carga se llama devanado secundario o devanado de salida, esto si pensamos en transformadores de una fase. Si hay un tercer devanado en el transformador, este se llama devanado terciario. El transformador es un dispositivo reversible, es decir, que es un circuito primario que puede actuar como secundario y éste como primario. Ejemplo: un transformador con relación de transformación 120/40 volts, puede conectarse a la red a 120 volts y entregar 40 volts en su secundario, o bien conectarlo a la red de 40 volts y entregar 120 volts.

De forma general se puede definir al transformador como una máquina eléctrica estática, sin movimiento, que funciona a través del fenómeno de inducción, el cual sólo se presenta al existir variación del campo magnético el cual refleja una variación en el campo eléctrico. Se puede decir de forma clara que el transformador es un dispositivo que cuenta con al menos una bobina (auto transformador); dos bobinas (transformador monofásico) o tres bobinas (transformador trifásico), las cuales se tienen que excitar con corriente alterna para motivar el fenómeno de la inducción. Si se excita con corriente directa, se tendría simplemente un electroimán el cual no genera de manera elemental inducción. En el caso específico del transformador se tiene la inducción como fenómeno natural debido a la excitación con corriente alterna, pero cualquier corriente variante en el tiempo sería responsable de la generación de una variación del campo magnético generando una variación en el campo eléctrico. En otras palabras; una variación en la diferencia de potencial generada en el devanado secundario pensando en un transformador monofásico. También se puede decir que el transformador sólo tiene pérdidas eléctricas y dentro del núcleo (pérdidas magnéticas). Recordar que al ser una máquina estática carece de pérdidas mecánicas, lo que convierte al transformador en una de las máquinas eléctricas más eficientes que existen.

Una clasificación general de los transformadores es:

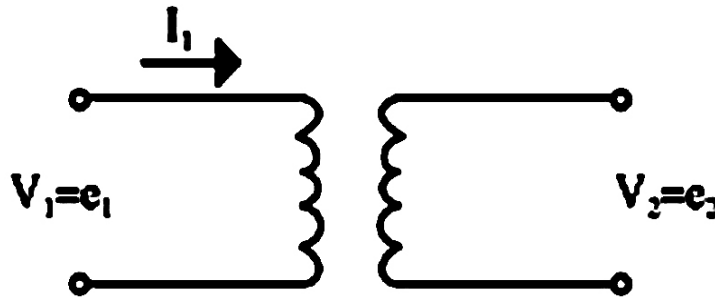
1. Transformadores de potencia
2. Transformadores eléctricos
3. Transformadores de instrumentación (sensor de corriente y de voltaje en circuitos de potencia y/o electrónicos.)

También se clasifican de acuerdo con la frecuencia de operación:

1. Transformadores de potencia, trabajan a potencias constantes (60Hz/50Hz).
2. Transformadores para aplicaciones de audio (usan frecuencias de audio en su operación).
3. Transformadores de pulsos, se emplean normalmente en aplicaciones de activación de semiconductores en etapas de electrónica de potencia.

### 3.3.1 Estructura del transformador

El transformador ideal es un modelo que no tiene pérdidas y representa una entrada y una salida, de manera que se pueda ejemplificar la relación de transformación de voltaje. En la figura 3.2 se muestra el diagrama del transformador ideal.



**Figura 3.2** Transformador ideal. Aquí se tiene que:  $V_1$  = voltaje en el primario,  $V_2$  = voltaje en el secundario,  $e_1$  = fem en el primario,  $e_2$  = fem en el secundario.

Se puede observar que la relación de transformación, es una relación entre la fem que se genera por el fenómeno de inducción en el devanado primario y secundario. Tenemos que poner especial cuidado en la relación de transformación, que es una representación ideal del transformador; por lo que no considera ningún tipo de pérdidas, lo cual hace válido que el voltaje ( $v$ ) sea igual a la fem ( $e$ ), como se observa en la figura del transformador ideal. Esto permite que se defina la relación de transformación ideal para voltajes, como una relación entre el número de espiras entre el devanado primario y secundario:

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{v_p(t)}{v_s(t)} = \frac{N_p}{N_s} = \frac{N_p \frac{d\phi(t)}{dt}}{N_s \frac{d\phi(t)}{dt}} = \frac{e_1(t)}{e_2(t)}$$

Es importante notar que el ángulo de fase de voltaje de entrada es igual al ángulo de fase del voltaje de salida, la relación de transformación sólo afecta las magnitudes de las corrientes y voltajes; pero no afecta sus ángulos. Así como la frecuencia de entrada se conserva a la salida. Siendo el mismo valor de la frecuencia de entrada y salida.

La relación de corriente en el primario y en el secundario de un transformador, se puede encontrar empleando la relación de ampère-vuelta recordando que:  $N_1 I_1 = N_2 I_2$ , si ordenamos para encontrar la relación de transformación ideal de corriente se tiene lo siguiente:  $\frac{I_s}{I_p} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}$  que representa también una relación entre el número de espiras del primario y secundario.

### Potencia en un transformador ideal

La potencia suministrada al transformador en el circuito primario está determinada por la siguiente ecuación:

$$P_{in} = V_p I_p \cos \theta_p$$

donde:  $\theta_p$  es el ángulo entre la corriente y el voltaje del circuito primario. La potencia suministrada a la carga del lado secundario de transformador está determinada por la siguiente ecuación:

$$P_{out} = V_s I_s \cos \theta_s$$

donde  $\theta_s$  es el ángulo que se presenta entre el voltaje de salida y la corriente de salida. Donde el factor de potencia del transformador a la salida y a la entrada es el mismo.

La potencia de salida en el transformador es la misma que la entrada, y se puede observar en la siguiente ecuación:

$$Q_{out} = Q_{in} = V_p I_p \sin \theta_p = V_s I_s \sin \theta_s$$

$$S_{out} = V_p I_p = V_s I_s = S_{in}$$

### Transformación de impedancia mediante un transformador

Tenemos que tomar en cuenta que para el análisis de un transformador, además de transformar los niveles de corriente y de voltaje, transforma la impedancia vista por el primario o por el devanado secundario del transformador.

La relación de transformación ideal, permite saber la salida del transformador al inyectar una señal. Matemáticamente se puede reflejar la impedancia del secundario hacia lo primario, para trabajar con un circuito magnéticamente desacoplado, y convertirlo en un circuito eléctrico para facilidad de análisis, esto se puede pensar de una forma muy sencilla, el poder tener un transformador como un circuito eléctrico en donde el efecto magnético es reflejado tomando en cuenta la relación de transformación. Esta relación de transformación se puede realizar del devanado primario al secundario, o del devanado secundario al primario. Esto se conoce con el nombre de referenciar el transformador al devanado primario o secundario. Para realizar la referencia del devanado secundario al primario, esto es referenciar al devanado primario se tiene lo siguiente: Si la impedancia de carga  $Z$  conectada al devanado secundario se refleja a través del voltaje del devanado secundario y la corriente del secundario, y después se emplea la relación de transformación, se puede obtener una relación de transformación de impedancia esto es, referenciar la impedancia al devanado primario. Se obtiene la siguiente ecuación final de  $Z$  (impedancia referenciada al devanado primario):

$$Z_L = \frac{V_s}{I_s}$$



$$V_p = aV_s$$

$$I_p = \frac{I_s}{a}$$

$$Z_L = \frac{V_p}{I_p} = \frac{aV_s}{I_s/a} = a^2 \frac{V_s}{I_s} = a^2 Z_L$$

quedando definida la referencia del devanado secundario al primario por la siguiente expresión:  $Z'_1 = 1/a^2 Z_L$

Teniendo como resultado un circuito puramente eléctrico, todos los cálculos se simplifican de forma considerable al dejar de existir el circuito magnético. La figura 3.3 muestra el circuito eléctrico resultante de la referencia de impedancias.

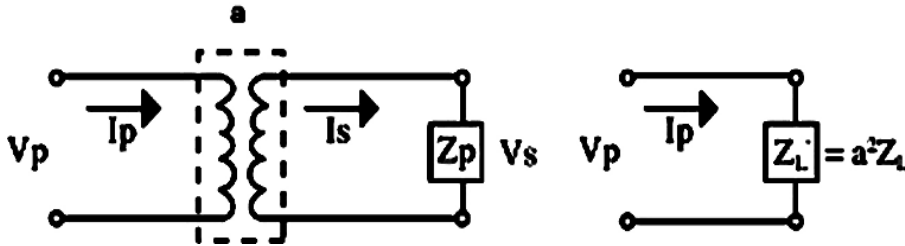


Figura 3.3 Referencia de impedancias. Transformador ideal referenciado al primario.

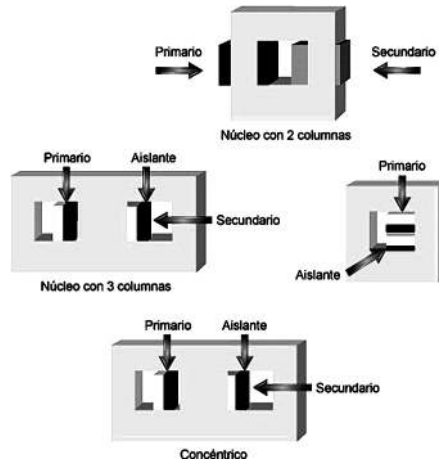


Figura 3.4 Transformador monofásico no ideal.

Es importante hacer notar que el análisis es para el transformador ideal, la relación de transformación es ideal, por lo tanto no se están tomando en cuenta las pérdidas eléctricas y magnéticas del transformador

al referenciar los circuitos.

En el caso de transformadores muy sensibles y de baja potencia, el empleo de la relación de transformación ideal no es aceptable; por lo que se define una relación de transformación no ideal.

### Transformador monofásico no ideal

El funcionamiento del transformador ideal como fue anteriormente descrito no existe de forma física en la parte de diseño, ya que se tienen que considerar las pérdidas y efectos magnéticos y eléctricos. Las siguientes imágenes muestran diferentes tipos de diseño de transformadores monofásicos y se muestran en la figura 3.4.

El transformador real es un sistema de cable conductor embobinado en un núcleo ferromagnético. La función básica de un transformador obedece a la ley de inducción de Faraday:

$$e_{ind} = \frac{d\phi(t)}{dt}$$

De esta manera se sabe que la fem inducida es la diferencial del flujo con respecto al tiempo. Dado que el transformador recurre a un material ferromagnético, se tiene un sistema no ideal que tiene pérdidas y aparece una curva de funcionamiento llamada “curva de histéresis”. Esto se presenta cuando se tiene una corriente alterna que genera un flujo magnético también alterno.

La curva de histéresis representa la relación entre la intensidad del campo (H) y la densidad de campo (B), que aparece con flujos de formas senoidales, en esta curva se pueden apreciar de forma clara algunos puntos que son importantes de resaltar. El punto de origen, al suponer que no se tiene intensidad magnética, aparece en la coordenada (0,0); después de iniciar el incremento de la intensidad de campo, aparece la densidad de campo dentro del circuito magnético. En el momento que se alcanza el punto máximo, se ha iniciado el decremento. Es importante resaltar que no se pasa de nuevo por el punto de origen, esto se debe a la aparición del flujo remanente, el cual no desaparece de forma instantánea. Requiriendo una intensidad con valor opuesto para que desaparezca dicho flujo remanente esta intensidad de campo necesaria para desaparecer el flujo remanente, se llama "fuerza coercitiva". Si dicha intensidad sigue incrementándose, se llega a un valor máximo en sentido opuesto. Generándose la trayectoria mostrada de ciclo de histéresis (ver la figura 3.5).

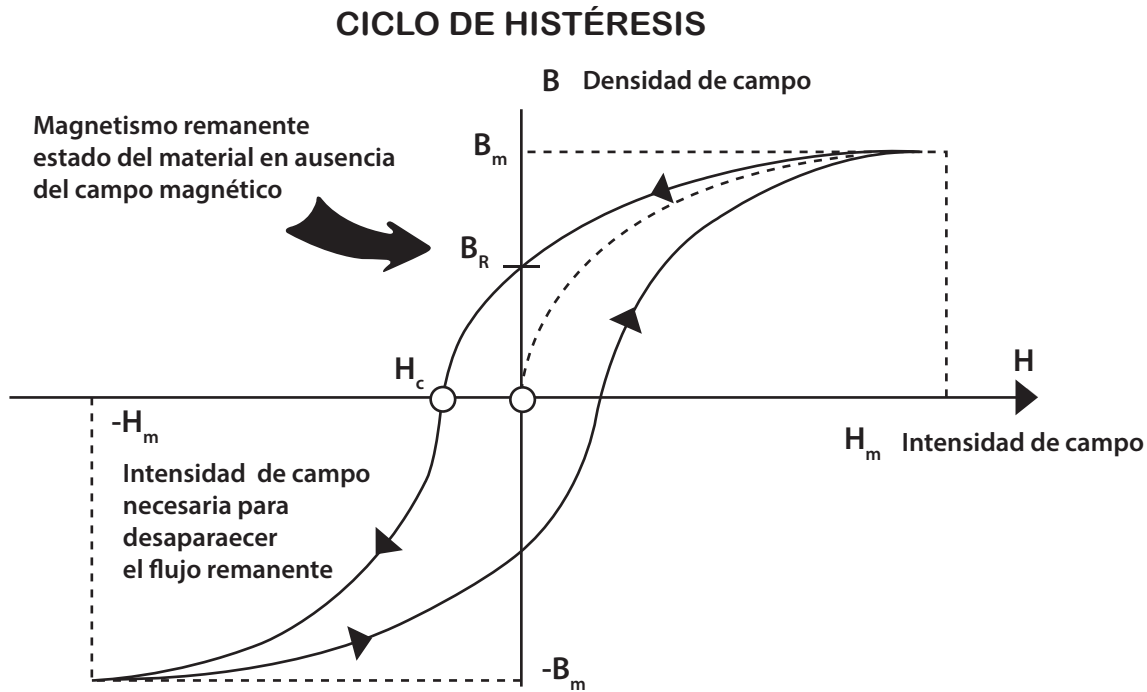


Figura 3.5 Curva de Histéresis.

Esta curva de histéresis, denota pérdidas. Estas tienen relación directa con el área de la curva de histéresis y el volumen del material ferromagnético. Influyendo la frecuencia en el número de ciclos en una unidad de tiempo.

Se puede decir entonces, que si el área de la curva de histéresis disminuye, se tendrá que tener en cuenta que se requiere una menor fuerza coercitiva para desaparecer el flujo residual. Si fuera posible pensarlo de una forma ideal, se podrían tener curvas de histéresis que pasaran en todo momento por el punto de origen.

Otra de las pérdidas que tenemos que considerar son las corrientes de Hedí o parásitas, son corrientes que aparecen dentro del material magnético, estas corrientes aparecen al existir campos magnéticos variantes en el tiempo. La forma más sencilla de mitigar su efecto es realizar una laminación en el material magnético, lo que disminuye el área de circulación de las corrientes parásitas. Esta es la razón de que no existen transformadores eléctricos de núcleo sólido (sin laminar), como lo muestra la figura 3.6.

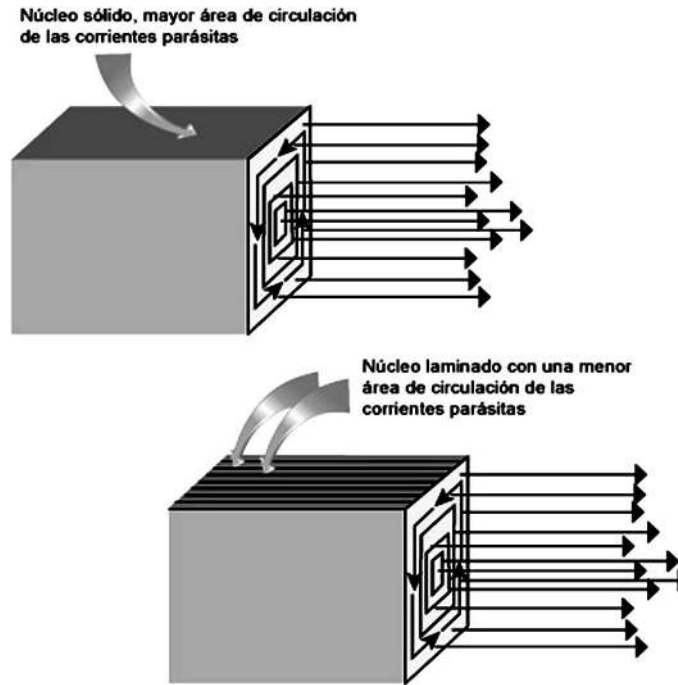


Figura 3.6 Corrientes parásitas dentro de núcleo sólido y laminado.

El circuito eléctrico equivalente del transformador se muestra a continuación, la figura 3.7 tiene la explicación de cada uno de sus elementos.

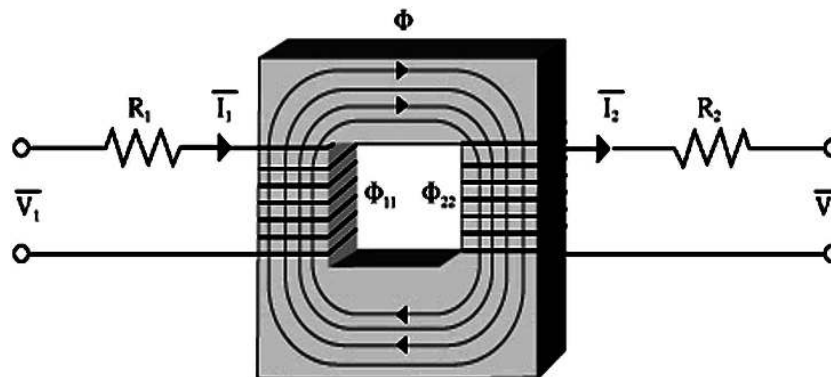


Figura 3.7 Circuito eléctrico equivalente del transformador.

El conductor que normalmente es de cobre, tiene una cierta resistencia; por lo cual, se ejemplifica en los devanados, tanto el primario como el secundario, lo cual indica la presencia de elementos resistivos ( $R_1$  y  $R_2$ ). Así mismo se están generando espiras para generar la inducción, mismas que están generando campos magnéticos que son representados a través de reactancias inductivas.

El material ferromagnético que sostiene al transformador, es el encargado de establecer el enlace magnético entre el circuito del devanado primario con el campo magnético del secundario, esto es, denotado por la reactancia de magnetización,  $j_{x_m}$  que está en relación directa con el flujo principal. Esto se muestra en la figura 3.8

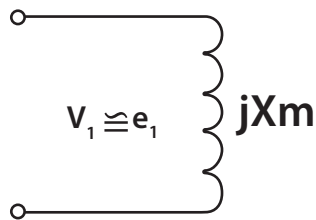


Figura 3.8

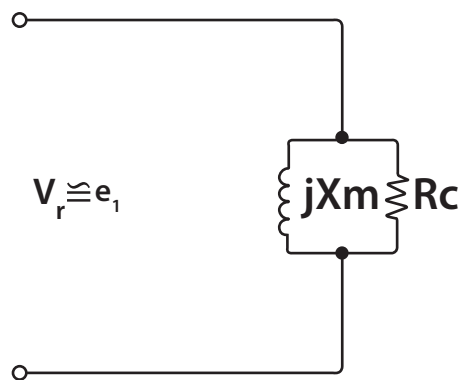


Figura 3.9

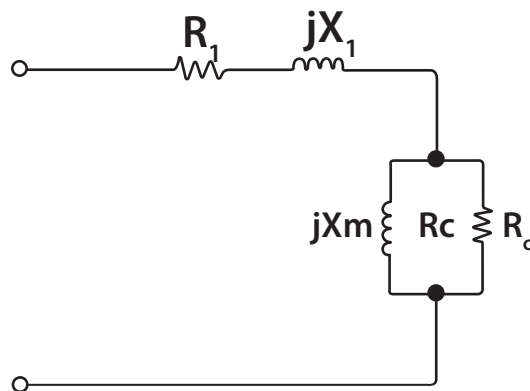


Figura 3.10

De manera que también se tienen que considerar las pérdidas dentro del circuito magnético que se denotan como una resistencia en paralelo ( $R_c$ ) con la reactancia de magnetización, se tiene que poner mucha atención en que la corriente que circula por estos dos elementos, se le conoce con el nombre de “corriente de vacío”. Este nombre se obtiene de la poca variación que tiene con cambios de carga, o incluso, trabajando en vacío, lo que permite tener valores constantes de esta corriente.

Esta resistencia principalmente ejemplifica las pérdidas causadas por corrientes parásitas y ciclos de histéresis. Esta resistencia de pérdidas está en paralelo entre el embobinado primario y el embobinado secundario. Quedando definido el circuito del devanado primario por las figuras 3.9 y 3.10.

Se tiene que recordar que el enlace entre el devanado primario y el devanado secundario, es un transformador ideal, el cual está marcado con un recuadro en la figura, por lo que el diagrama completo del transformador se define de la forma que lo presenta la figura 3.11

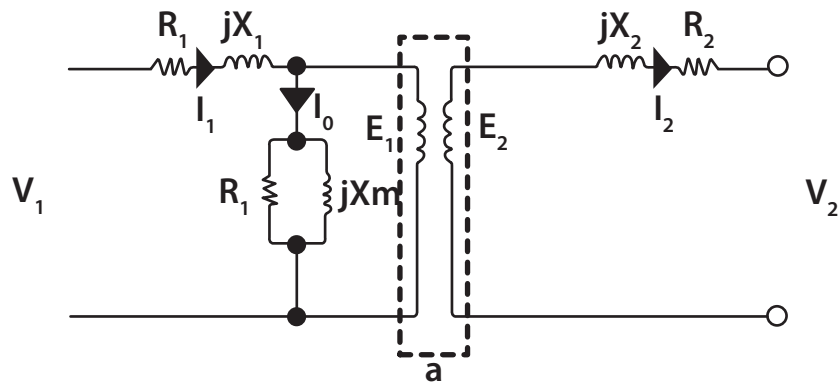


Figura 3.11

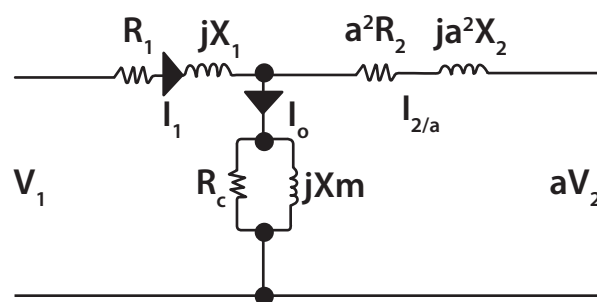


Figura 3.12

Es interesante observar que este diagrama del transformador tiene un circuito magnético que resolver: un transformador ideal, y como se presentó anteriormente, se puede emplear la relación de transformación ideal para poder referenciar los elementos del devanado primario al secundario y viceversa, con lo que se logra eliminar el circuito magnético, quedando puramente el circuito eléctrico. La figura muestra el circuito magnético del transformador referido al devanado primario (figura 3.12).

De la misma manera, empleando la relación de transformación, se puede tener un circuito equivalente referido al devanado secundario. La figura 3.13 presenta el diagrama referido al devanado primario.

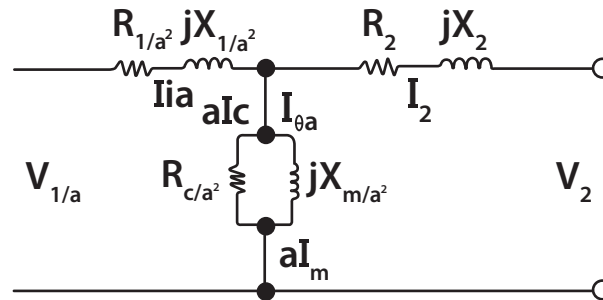


Figura 3.13

Es común que en muchas ocasiones, se represente el comportamiento de los transformadores a través de representaciones fasoriales, las cuales muestran el comportamiento fasorial del transformador para diferentes tipos de cargas, inductivas y capacitivas. Las cuales están basadas en el comportamiento de circuito equivalente en estado permanente presentado anteriormente.

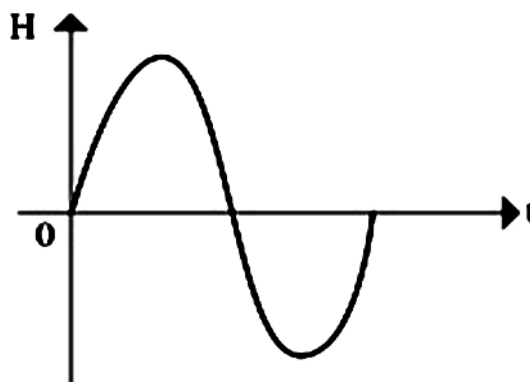
### 3.3.2 F.E.M inducida

En un transformador, sólo se induce FEM cuando existe un cambio en el flujo magnético que atraviesa una bobina. Este cambio se puede producir por medio de un movimiento o bien, conectando o desconectando el circuito; pero si el cambio se produce por medio o a través de una corriente alterna, este cambiará de valor y de dirección continuamente. Esto da como resultado la aparición de una FEM inducida que cambia constantemente. El transformador eléctrico es por lo tanto; un equipo de corriente alterna en el cual, por medio o a través de una corriente alterna en la entrada, se genera una FEM alterna en la salida.

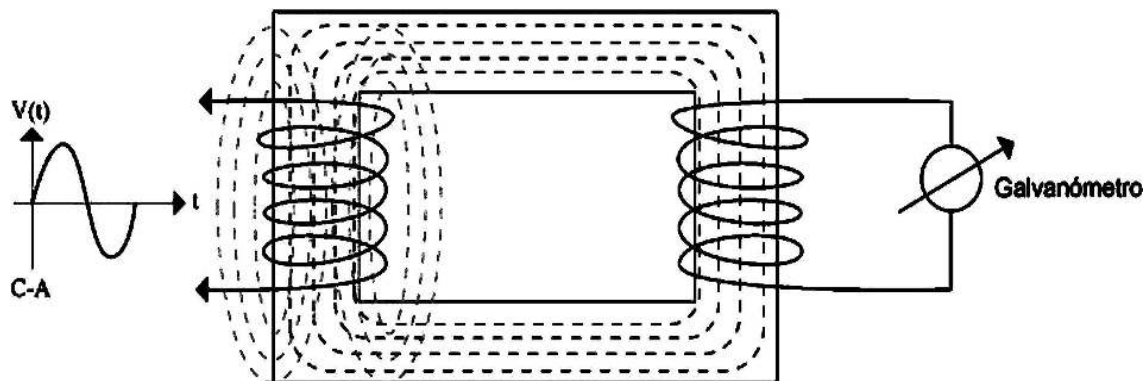
Cuando más cerca se pueden colocar las bobinas una de otra; mejor se alcanzará el campo del devanado primario al devanado secundario; es decir, que se dispersará menos flujo magnético. El mejor método para lograr esto es a través de la unión de las bobinas por medio de un núcleo de hierro, para obtener el máximo aprovechamiento del campo magnético. En conclusión, el factor de inductancia mutua se utiliza en la práctica para transferir energía eléctrica de un circuito a otro mediante un elemento electromagnético

llamado transformador.

Siendo la tensión aplicada sobre el devanado primario de formato alterno, naturalmente que el transformador tendrá variaciones periódicas en sus valores. Esto hará que el campo magnético originado se expanda y se contraiga, acorde con las variaciones de la corriente aplicada al primario. En efecto; la intensidad del campo  $H$  (en Gauss) variará según la representación grafica de la Fig. 3.14 siendo por lo tanto, este campo variable en una frecuencia igual a la de la FEM alterna aplicada al transformador.



**Figura 3.14** Variaciones en la intensidad del campo magnético (en Gauss) producidas en un transformador alimentado por una corriente alterna seoniodal.



**Figura 3.15** Transformador estático con núcleo magnético cerrado.

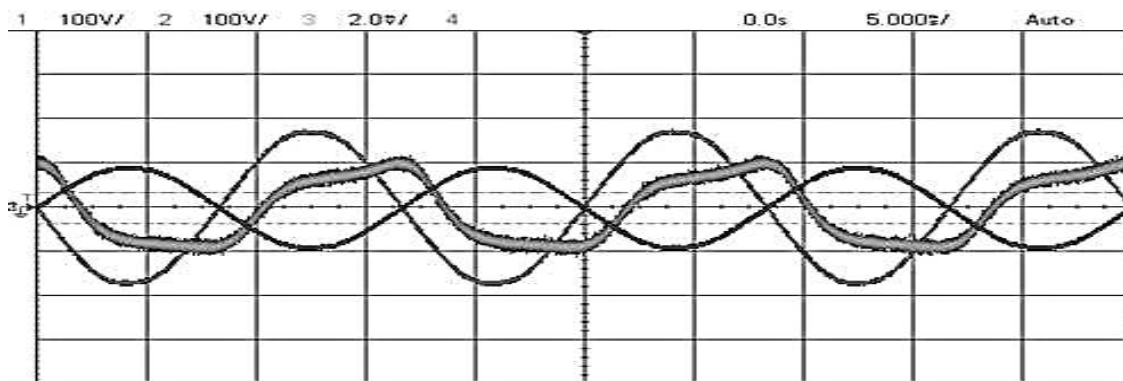
Consecuentemente sobre el devanado secundario del transformador se hará presente una tensión inducida de las mismas características que la del primario y que hará circular por este circuito una corriente



que será acusada por el instrumento intercalado en la figura 3.15, que es un galvanómetro. Ambos circuitos (primario y secundario) estarán acoplados magnéticamente entre sí, por la inductancia mutua del conjunto acrecentada por la presencia del núcleo laminado.

La forma laminada que presenta este núcleo y la disposición de los bobinados no es precisamente la ideal, para el objetivo de lograr una máxima transferencia de energía del devanado primario al devanado secundario.

La corriente de magnetización en los transformadores se distorsiona por la curva del ciclo de histéresis, en donde podemos observar que las señales senoidales puras son las señales de voltaje de entrada y salida en el transformador y la corriente que se obtiene en vacío contiene armónicos. Véase la siguiente figura:

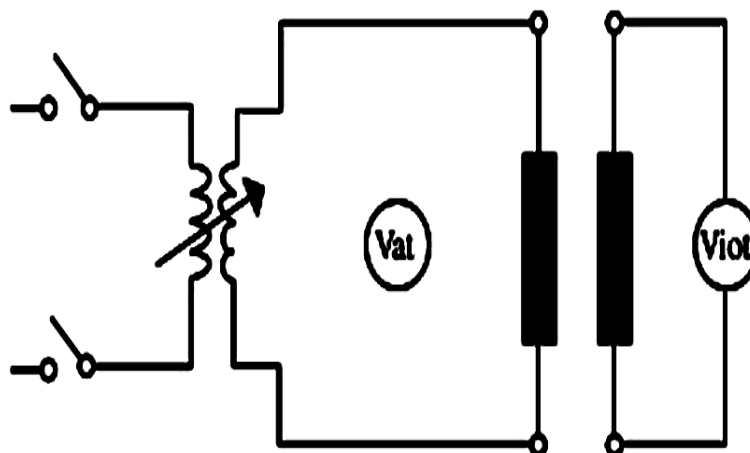


### 3.3.3 Relación de transformación

La relación de transformación de un transformador es la relación existente, en el funcionamiento en vacío, entre la tensión del devanado de alta tensión y la tensión del devanado de baja tensión (ver la figura 3.16). Los métodos seguidos para la relación de transformación son principalmente dos:

1. **Método del potenciómetro:** Este método recurre a la utilización de un potenciómetro que realiza la medición por oposición entre la tensión de baja y una fracción de alta tensión. Esto provee directamente el valor de la relación de transformación, y con algunos artificios, permite también sacar el grupo de defasamiento del transformador; así como la polaridad correspondiente de los devanados de baja y alta tensión.
2. **Método directo:** Este método se basa sobre la definición misma de la relación de transformación. Esto consiste de medir con voltímetros las dos tensiones (primaria y secundaria) del transformador funcionando en vacío. En este método no se tiene indicaciones ni de conectores ni de grupos de

defasamiento, pero el método es igualmente muy seguido por su extrema simplicidad y por la buena precisión de los resultados.



**Figura 3.16** Diagrama de la prueba de relación de transformación.

Para conocer los datos que permiten conocer las características de saturación del circuito magnético, y las pérdidas en el núcleo, es necesario efectuar en el transformador la prueba de circuito abierto o ensayo de vacío.

En el caso que el tipo de conexión no sea exigida previamente, es preferible, que el devanado elegido para la alimentación sea conectado en triángulo (*delta*), para que en este caso, las corrientes de tercera armónica contenidas en la corriente de vacío puedan libremente circular sin provocar deformaciones en la onda de flujo. En caso de que no sea posible, se debe conectar por lo menos en delta el devanado secundario, en el cual circulará la corriente de tercera armónica inducida de los flujos deformados: el efecto de tal corriente inducida será el de amortiguar la deformación de onda de los flujos. No se debe olvidar que el valor de las pérdidas en el hierro está ligado también a la forma de onda de flujo.

Según el lado en donde se conecten los instrumentos de medición, los parámetros obtenidos serán referidos a ese lado del transformador. Para efectuar esta prueba se siguen los siguientes pasos:

1. Excite el transformador por uno de los devanados y deje al otro u otros abiertos (conviene excitar el transformador por el lado de baja tensión, para mayor facilidad de la medición).
2. Tomar como mínimo 10 lecturas alrededor de la tensión nominal sin superar un 10 % ó 15 % del valor nominal del transformador, para no provocar en forma excesiva la saturación magnética, lo que provocaría un crecimiento vertiginoso de la corriente de magnetización.

3. Con los datos obtenidos en el punto anterior, se grafican las variables de corriente en vacío contra la potencia en vacío.

Las pérdidas medidas en esta prueba, incluyen las dieléctricas, las causadas por el Efecto Joule en el devanado excitado, y las pérdidas magnéticas en el núcleo. Sin embargo, debido a las tensiones que se emplean y a la magnitud de corriente de excitación, las pérdidas dieléctricas en los aislamientos y las pérdidas por Efecto Joule en el devanado excitado se desprecian con respecto a las terceras. Y se engloban llamándose comúnmente *pérdidas de vacío*. (Ver la figura 3.17).

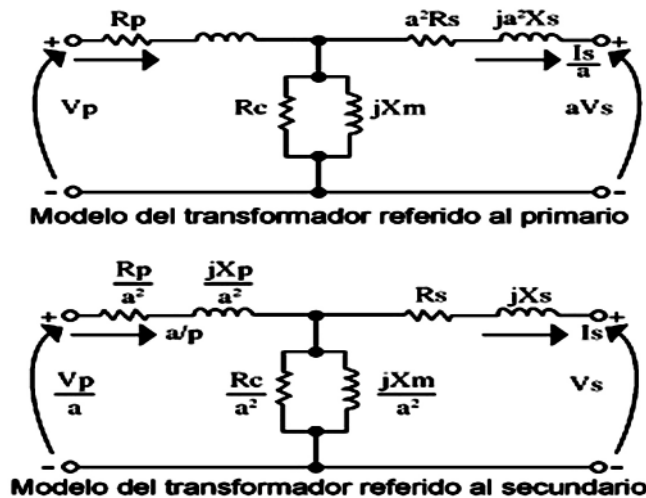


Figura 3.17 Determinación de los parámetros del circuito equivalente con la prueba de vacío.

La forma fácil para calcular los valores de  $R_c$  y  $X_m$  consisten en estimar primero la admitancia de la rama de excitación. La conductancia de la resistencia de pérdidas en el núcleo está dada por  $G_c = \frac{1}{R_c}$  y la susceptancia de la inductancia de magnetización es  $B_M = \frac{1}{X_M}$  puesto que estos dos elementos están en paralelo, sus admitancias se suman y la admitancia total de la excitación es:

$$Y_E = G_c - jB_M = \frac{1}{R_c} - j\frac{1}{X_M}$$

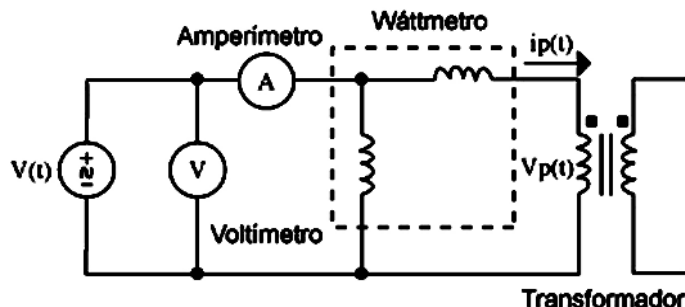


Figura 3.18 Circuito del transformador.

La magnitud de la admitancia de excitación (referida al primario), puede calcularse con base a los valores de voltaje y corriente de la prueba de circuito abierto, como se muestra en la figura 3.18.

$$|Y_E| = \frac{I_{oc}}{V_{oc}}$$

en donde:  $I_{oc}$  es la corriente en vacío y  $V_{oc}$  es el voltaje en vacío.

El factor de potencia está dado por  $FP = \cos\theta = \frac{P_{oc}}{V_{oc}I_{oc}}$  en donde:  $P_{oc}$  es la potencia en vacío, el ángulo del factor de potencia es  $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{P_{oc}}{V_{oc}I_{oc}}\right)$ , por lo tanto  $Y_E = \frac{I_{oc}}{V_{oc}} \angle -\theta$ , de esta ecuación se determina el valor de  $R_c$  y  $X_m$ .

La prueba de cortocircuito consiste en medir la cantidad de corriente absorbida por el transformador cuando el secundario está cortocircuitado, y el primario está alimentando con una tensión regulable, de modo que las corrientes en los devanados resulten iguales a las nominales (para evitar que se dañe el aislamiento de los devanados debido a una circulación de corriente superior a la nominal). Ver la figura 3.19.

Se denominan pérdidas de carga a las originadas por el Efecto Joule en el cobre de los devanados de alto y bajo voltaje, más las que se originan en el mismo cobre, en el núcleo, el tanque y los herrajes del mismo transformador como consecuencia del campo magnético producido por las corrientes que circulan por los devanados. Estas pérdidas son una función de la carga y debido a las magnitudes de voltaje empleado, se engloban en las pérdidas de  $I^2R$ .

Según el lado en donde se conecten los instrumentos de medición, los parámetros obtenidos serán referidos a ese lado del transformador. Para efectuar esta prueba se siguen los siguientes pasos:

1. Corto circuitar el lado de mayor demanda de corriente (bajo voltaje) y alimente por el lado de alto voltaje (demanda menos corriente).
2. Tomar como mínimo 10 lecturas, partiendo del 20% de la corriente nominal hasta llegar al 110%, de ser posible empiece con las corrientes más altas hasta llegar a las más bajas, con el fin de uniformar la temperatura de los devanados durante la prueba.

### Determinación de los parámetros del circuito equivalente con la prueba de cortocircuito

Puesto que el voltaje de entrada es tan pequeño durante la prueba, la corriente que fluye por la rama de excitación es despreciable. Si la corriente de excitación se ignora, toda la caída de voltaje en el transformador puede ser atribuida a los elementos del circuito serie. La magnitud de las impedancias en serie, referidas al lado primario del transformador es:

$$|Z_{SE}| = \frac{V_{sc}}{I_{sc}}$$

en donde:  $I_{sc}$  es la corriente de cortocircuito y  $V_{sc}$  es el voltaje de cortocircuito.

El factor de potencia está dado por  $FP = \cos\theta = \frac{P_{sc}}{V_{sc}I_{sc}}$  en donde  $P_{sc}$  es la potencia de cortocircuito, el ángulo del factor de potencia es  $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{P_{sc}}{V_{sc}I_{sc}}\right)$ ; por lo tanto,  $Z_E = \frac{V_{sc}\angle 0^\circ}{I_{sc}\angle -\theta^\circ} = \frac{V_{sc}}{I_{sc}}\angle \theta^\circ$ , de esta ecuación se determina el valor de la impedancia  $Z_{se}$  que es igual a:

$$Z_{se} = R_{eq} + jX_{eq} = (R_p + a^2R_s) + j(X_p + a^2X_s)$$

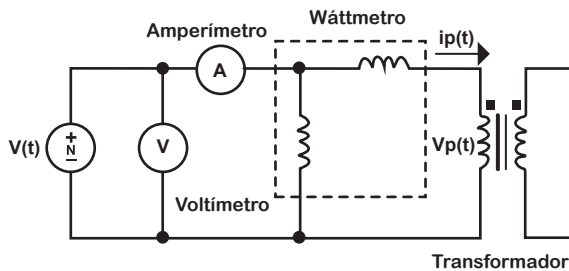


Figura 3.19 Prueba corto circuito.

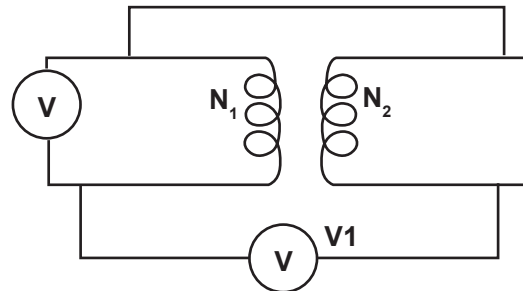


Figura 3.20 Polaridad en un transformador.

### 3.3.4 Polaridad

Para determinar de antemano el acoplamiento de un transformador a otros transformadores, es necesario conocer su diagrama vectorial, lo que justifica plenamente la prueba de polaridad.

Por lo que la polaridad en el transformador, identifica la dirección relativa de los voltajes inducidos en los devanados. La dirección relativa resulta de la forma del devanado en el núcleo.

Es necesario conocer la dirección relativa para operar transformadores en paralelo o para diferentes tipos de conexiones.

La polaridad se puede conocer a través de una medición de voltajes (sin existir carga), como se muestra en la figura 3.20

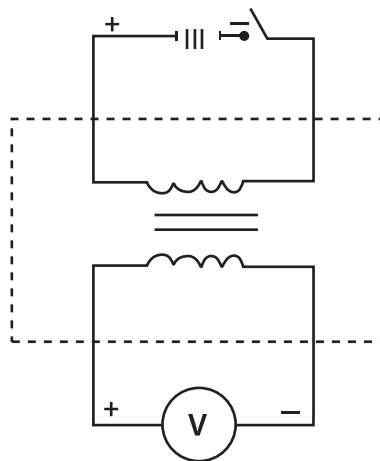
Si el voltaje  $V1'$  es mayor que el de entrada, la polaridad es aditiva;

Si el voltaje  $V1'$  es menor, es sustractiva.

En la determinación de las marcas de polaridad, se pueden emplear los métodos que a continuación de mencionan:

1. Método de golpe inductivo.
2. Con una fuente de voltaje alterno.
3. Por comparación con un transformador cuyas marcas se conocen.

### 1. Método de golpe inductivo



**Figura 3.21** Golpe inductivo.

- a) Si al cerrar el interruptor, el voltímetro marca un valor dentro de la escala; significa que le fue aplicado a su borne (+) una tensión cuya polaridad era positiva con relación a su otro borne, esto quiere decir que la terminal del transformador conectada al borne (+) del voltímetro es la correspondiente a la terminal del devanado excitado, conectado al borne (+) de la batería (polaridad sustractiva o colineal).
- b) Una deflexión en sentido contrario a la escala, indicará que el borne (-) del voltímetro le fue aplicado un voltaje (+), luego, la terminal conectada a este borne será la correspondiente a la terminal positiva (+) del devanado excitado (polaridad aditiva o diagonal).

### 2. Usando una fuente de voltaje alterno

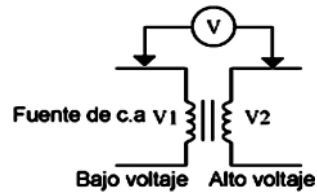


Figura 3.22 Con fuente de voltaje alterno.

- a) Si el voltaje medido en el voltímetro tiene un valor igual a  $V_1 + V_2$ , sus marcas de polaridad serán diagonales.
- b) Si el voltaje medido en el voltímetro es  $V_1 - V_2$  sus marcas de polaridad serán colineales.

### 3. Comparando con un transformador cuyas marcas de polaridad son conocidas.

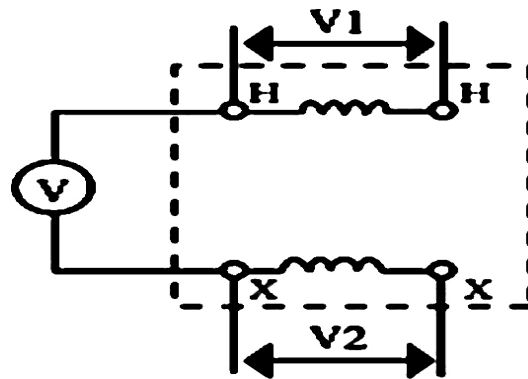


Figura 3.23 Marcas de polaridad.

- a) Si el voltímetro marca  $V_2 + V_1$ ; entonces las marcas de polaridad del transformador que se prueba, serán diagonales.
- b) Si el voltímetro marca  $V_2 - V_1$ ; las marcas de polaridad del transformador sometido a prueba, serán colineales e idénticas a las del transformador que sirvió como patrón.

### 3.4 Deducción del circuito equivalente

El objetivo de esta sección es presentar un enfoque básico para el diseño de un transformador monofásico de dos embobinados. Se examinará el procedimiento detallado de diseño para el dimensionamiento físico, el análisis del circuito magnético y la determinación de los parámetros del circuito equivalente.

Las dos construcciones físicas del núcleo del transformador que se considerarán, son la construcción tipo núcleo y la construcción tipo coraza. Las dimensiones  $l, w, h$  y  $d$  son suficientes para especificar completamente el diseño del núcleo. Ambos tipos de transformador se emplean comúnmente en la práctica comercial. La elección del tipo es de cierta manera a discreción del diseñador. Pero, aunque un diseño monofásico aceptable puede desarrollarse con cualquier tipo, el diseño del núcleo, frecuentemente da como resultado una inductancia de fuga menor, y una mejor capacidad para enfriamiento que el tipo coraza. Estas dos ventajas se atribuyen a que una mayor proporción de los embobinados en la construcción tipo núcleo están fuera del material ferromagnético del núcleo. El diseño tipo coraza tiende a servir como una restricción física a la distorsión de los embobinados debida a las fuerzas de separación en las espiras durante una falla. Igualmente, la estructura de un solo embobinado del diseño tipo coraza puede ofrecer una reducción en los costos de formación de los embobinados y de ensamble.

El dimensionamiento del volumen del núcleo que se desarrolla, no es un enfoque sin restricciones. Supone que la eficiencia a plena carga y que la tensión particular deben satisfacerse. Se requieren cuatro dimensiones ( $l, w, h, d$ ) para definir completamente el núcleo; sin embargo, se especifica una razón de altura contra ancho de la ventana ( $r_w = h/w$ ) para reducir la decisión a tres dimensiones. además, el núcleo de vueltas en el embobinado primario se considera como un dato *a priori*. Si el tamaño resultante del núcleo es insatisfactorio,  $r_w$  y el número de vueltas en el transformador pueden cambiarse para probar de nuevo. Para el transformador tipo coraza, las pérdidas en el núcleo ferromagnético ( $P_m$ ) se calculan así:

$$P_m = \gamma_m P_m \text{vol}_m = 2\varphi_m P_m l d S F [l + (r_w + 1)W]$$

donde:

$\gamma_m$  es la densidad del material del núcleo en lb/in<sup>3</sup>.

$P_m$  es la densidad de potencia de las pérdidas en el núcleo a la densidad nominal de flujo en [WW/lb].

$SF$  es el factor de apilamiento a las laminaciones

Por otro lado; las pérdidas por resistencia en el embobinado ( $P_c$ ) son:

$$P_c = k_l P_m = 2I^2 R_1 = 2\rho_c J_c^2 K_c r_w W^2 (l + d + w)$$

donde:  $K_l$  es la razón de las pérdidas por resistencia con relación a las pérdidas en el núcleo.

$\rho_c$  es la resistencia del conductor a la temperatura de operación en [ $\Omega \cdot \text{in}$ ]

$J_c$  es la densidad de corriente en el conductor a la corriente nominal [ $\text{A}/\text{in}^2$ ]

$K_c$  es el factor de llenado del conductor para la ventana del embobinado.



Utilizando la expresión:  $\Phi_m = BmASF$ , puede obtenerse  $V_1$  como:

$$V_1 = \frac{(4.44)(N_1)(f)(B_m)(l)(d)(SF)}{(39.37)^2}$$

donde  $l$  y  $d$  están en [pulgadas] y  $Bm$  esta en [Teslas].

Por otro lado; en el transformador tipo núcleo, las ecuaciones análogas para el transformador tipo núcleo que difieren sólo en la expresión de  $Pm$ :

$$Pm = 2\gamma_m p m l d S F [(2)(l) + (r_w + 1)w]$$

$$Pc = k_l P_M = (2)(\rho_c)(J_c)^2 (kc)(r_w)(w)^2 (d + l + w)$$

$$V_1 = \frac{(4.44)(N_1)(f)(B_m)(l)(d)(SF)^2}{(39.37)}$$

El conjunto de ecuaciones no lineales para dimensionamiento, mostradas arriba, puede resolverse numéricamente para un conjunto de valores de  $d, w$  y  $l$ .

El camino de flujo para el núcleo ferromagnético de un transformador, no incluye el uso de entrehierro en su propuesta de diseño, pero las piezas troqueladas del núcleo, forman un ensamble de dos piezas que deja insertar las bobinas enrolladas. Para el transformador del tipo núcleo, las piezas troqueladas forman un conjunto con forma de  $U - I$ ; mientras que el conjunto o pareja con forma de  $E - I$  se utiliza al desarrollar el transformador de tipo coraza. Por lo tanto; existen dos uniones que son atravesadas por el flujo magnético mutuo que enlaza el embobinado del lado primario y del secundario.

Debido a que las uniones se encuentran intercaladas de forma escalonada el circuito magnético en las regiones de una unión de una laminación se encontrará en paralelo con una ruta de materiales de tipo ferromagnético. En la figura 3.24 se muestra el flujo magnético a lo largo de dos laminaciones adyacentes en la región de una junta. Por lo tanto; si el nivel o cantidad de densidad de flujo es relativamente bajo, el flujo magnético pasará el entrehierro de la junta, y fluirá a lo largo de la ruta ferromagnética en paralelo.

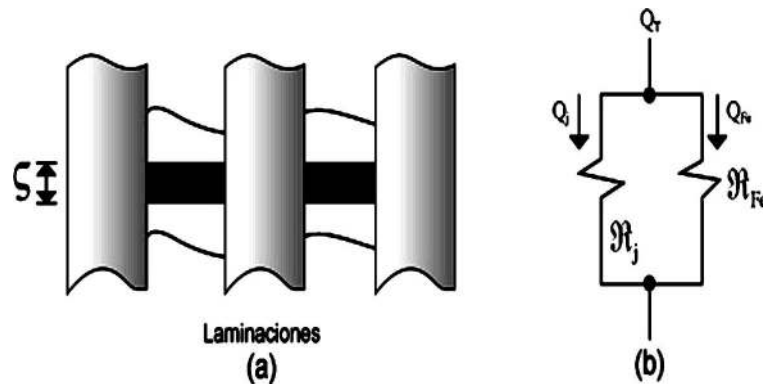
Sin embargo, si el nivel de densidad de flujo magnético se incrementa, entonces la ruta paralela comienza a saturarse, y el flujo magnético viajará a lo largo de la ruta que contiene el entrehierro en la junta de materiales.

Supóngase la existencia de un campo magnético con valor uniforme de intensidad  $H_{Fe}$  a lo largo de la ruta de alimentación en paralelo; entonces, la caída conjunta de  $fmm$  está dada por:

$$F_T = (H_{Fe})(\delta)$$

Considérese que esta  $fmm$  idéntica, también se encuentra a través del camino de aire de la junta, la densidad efectiva de flujo a través del par junta laminación en paralelo se determina como:

$$B_T = \left(\frac{1}{2}\right) (B_{Fe} + \mu_0 H_{Fe})$$



**Figura 3.24** Uniones del núcleo: (a) arreglo físico (b) modelo del circuito magnético.

A continuación, se desarrolla la forma en que se calculan los parámetros del circuito equivalente, dichos parámetros son:

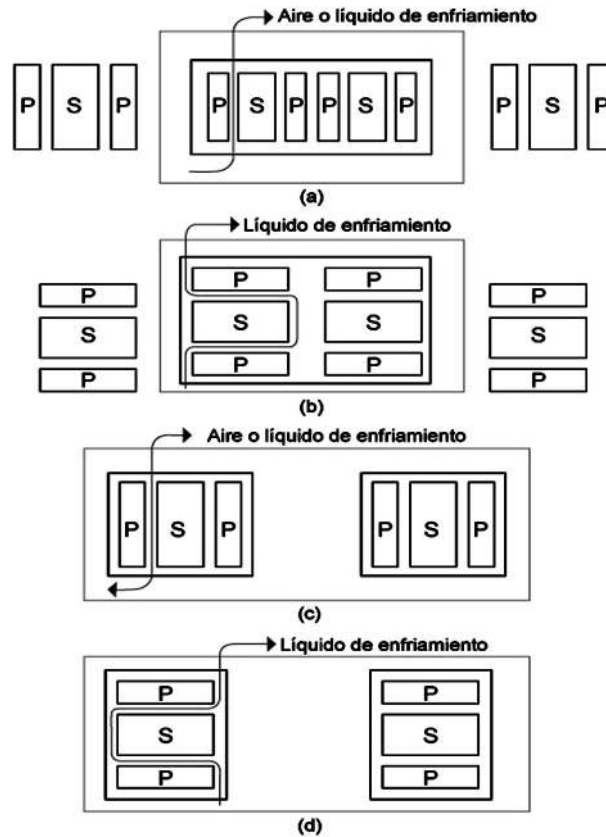
1. **La reactancia de magnetización.** Este parámetro se determina a partir del valor nominal de voltaje de la rama de excitación, y éste se divide a su vez, al valor que tiene la corriente de magnetización. De forma que:

$$X_m = \frac{E_1}{I_m} \cong \frac{(0.99)(V_1)}{I_m}$$

2. **La resistencia de pérdidas en el núcleo.** La densidad de potencia de pérdidas en el núcleo ( $p_c$ ) puede determinarse de las curvas de pérdidas de Epstein publicadas por el fabricante de la lámina de acero eléctrico; al valor nominal de la densidad de flujo en el núcleo. Por lo tanto; las pérdidas totales en el núcleo ( $P_c$ ) se calculan como el producto de la densidad de potencia de pérdidas y el volumen del núcleo ( $vol_c$ ). Debido a la fuerza de sujeción a las rebabas del maquinado, el valor de pérdidas de Epstein deberá incrementarse por un factor de 2 o superior. Finalmente; la resistencia de pérdidas en el núcleo es:

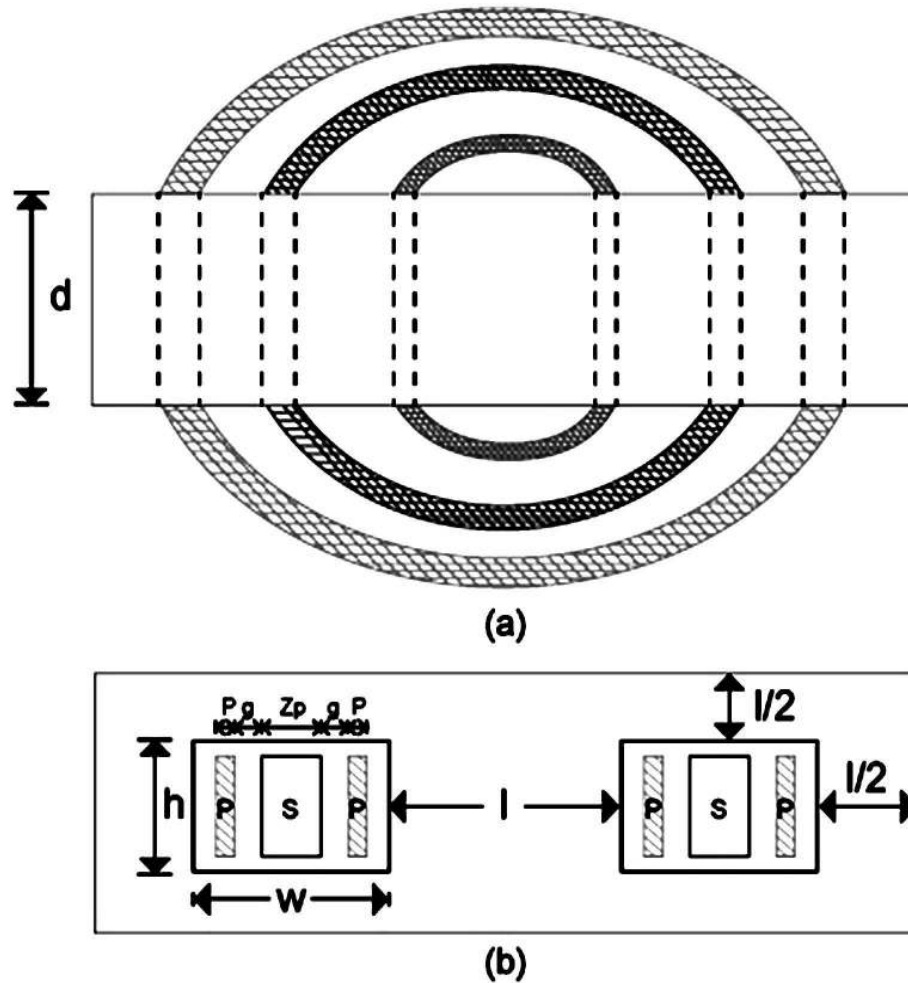
$$R_c = \frac{(E_1)^2}{P_c} \cong \frac{(0.9V_1)^2}{(2)(p_c)(vol_c)}$$

3. **Reactancia de fuga.** El cálculo de los valores de las reactancias de fuga requiere de saber el tipo de la configuración de embobinados, de acuerdo a como lo establece la Fig. 3.25



**Figura 3.25** Arreglos de bobinas de transformadores: (a) tipo núcleo con embobinados en capas concéntricas (b) tipo núcleo con embobinados en capas verticales (c) tipo coraza con embobinado en capas concéntricas (d) tipo coraza con embobinados en capas verticales.

Un transformador de tipo coraza con un embobinado en capas concéntricas se presenta en la figura 3.26 (supóngase simetría en cada estructura en las capas del embobinado). En dicha figura, las capas exterior e interior se refieren a los conductores del embobinado primario, adicional al aislamiento de un espesor unitario ( $p$ ). Igualmente, el número de capas entre las capas interna y externa, deberá ser un valor numérico impar, y cada una tendrá un espesor combinado de conductor y de aislamiento de dos capas unitarias ( $2p$ ). Estas capas interiores alternan entre los conductores del devanado primario y del devanado secundario. Por otro lado, un espaciamiento con espesor ( $g$ ) entre cada embobinado, se suministra para el flujo del aire o del líquido de enfriamiento.



**Figura 3.26** Transformador tipo coraza con embobinado en capas concéntricas: (a) vista superior (b) vista frontal.

El patrón de capas descrito en la figura 3.26 existe tanto para embobinados con capas concéntricas, como con capas verticales, así como para transformadores de tipo núcleo y de tipo coraza. Por lo que el número de capas por estructura de embobinado siempre será un número impar. Sin embargo, dado que un transformador tipo coraza tiene sólo una estructura de bobina, el número total de capas o de secciones de embobinado  $n$ , siempre será un valor numérico entero impar mayor o igual a 3; es decir,  $n \geq 3$ , impar. Ahora bien, el transformador tipo núcleo, tiene dos estructuras de bobina; por lo que, el número total de capas o de secciones de embobinado deberá ser un número par entero que viene dado por la expresión  $n = 2(K + 2)$  para un valor impar de  $K$ . Finalmente, el número de vueltas por capa unitaria para el devanado primario y el devanado secundario, viene dado respectivamente por:

$$n_1 = \frac{N_1}{(n-1)}$$

$$n_2 = \frac{N_2}{(n-1)}$$

en donde:  $N_1$  y  $N_2$  son los totales de vueltas del devanado primario y del devanado secundario.

Empero; el espesor unitario de la capa ( $p$ ), la inductancia de fuga del embobinado del devanado primario ( $L_{l1}$ ); así como la inductancia de fuga del embobinado del devanado secundario ( $L_{l2}$ ) se calcula como sigue:

a) Tipo coraza; capa concéntrica:

$$p = \frac{w - (n-1)g}{(2)(n-1)}$$

$$L_{l1} = (6.384 * 10^{-8})(n-1)(n_1)^2(p/3 + g/2) \left[ \frac{(d + \pi(l+w))}{w} \right] (H)$$

$$L_{l2} = (6.384 * 10^{-8})(n-1)(n_2)^2(p/3 + g/2) \left[ \frac{(d + \pi(l+w))}{w} \right] (H)$$

b) Tipo coraza; capa vertical (tipo columna):

$$p = \frac{h - (n-1)g}{(2)(n-1)}$$

Los valores de  $L_{l1}$  y  $L_{l2}$  se calculan utilizando las expresiones 3.25 y 3.26

c) Tipo núcleo; con capa concéntrica:

$$p = \frac{w - (n-1)g}{(2)(n-2)}$$

Igualmente; para determinar los valores de  $L_{l1}$  y  $L_{l2}$ , se aplican las expresiones 3.25 y 3.26.

d) Finalmente; tipo núcleo con capa vertical (tipo columna):

$$p = \frac{h - (n/2 - 1)g}{n-2}$$

de igual forma; para expresar los valores de  $L_{l1}$  y  $L_{l2}$ , se aplican las ecuaciones 3.25 y 3.26.

4. **Resistencias de los devanados.** Considérese  $puc$ , la porción por unidad de cada capa que es conductora; mientras que el resto del área es aislamiento. Entonces; el área transversal del conductor

( $A_c$ ) y la longitud media de la espira de conductor ( $MLT_c$ ) se determinan a partir de las siguientes expresiones:

a) Tipo coraza, capa concéntrica:

$$A_c = \frac{(puc)(p)(h-g)}{n_1} [in^2]$$

$$MLT_c = (2)(l+d+w)$$

b) Tipo coraza, capa vertical ( tipo columna):

$$A_c = \frac{(puc)(p)(w-g)}{n_1} [in^2]$$

$$MLT_c = (2)(l+d+w)$$

c) Tipo núcleo, capa concéntrica:

$$A_c = \frac{(puc)(p)(h-g)}{n_1} [in^2]$$

$$MLT_c = (2)(l+d+w)$$

d) Tipo núcleo, capa vertical (tipo columna):

$$A_c = \frac{(puc)(p)(w-g)}{n_1} [in^2]$$

$$MLT_c = (2)(l+d+w)$$

Ahora bien; supóngase que el valor de la resistencia en corriente alterna es 5% mayor que el valor en corriente continua; y utilizando el valor de la resistividad del conductor ( $\rho_s$ ) para la temperatura de operación [ $\Omega \cdot in$ ]; entonces, los valores de la resistencia de los embobinados se calculan a través de las expresiones:

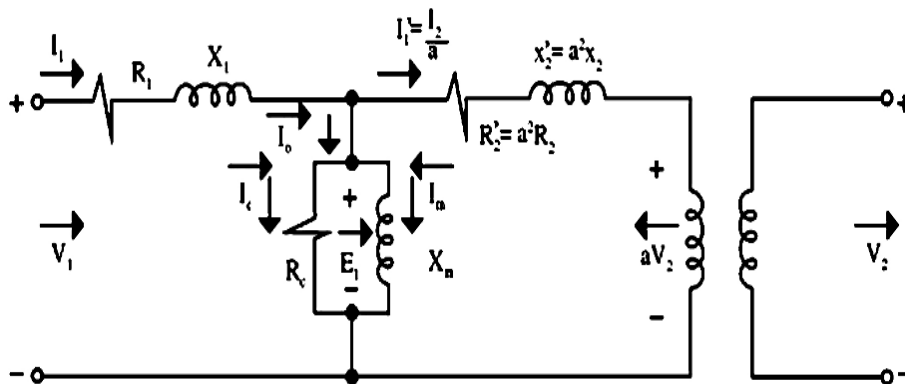
$$R_1 = (1.05)(\rho_c)(MLT_c/A)[\Omega]$$

$$R_2 = \left[ \frac{N_2}{N_1} \right]^2 (R_1)[\Omega]$$

### 3.5 Análisis de comportamiento bajo distintas cargas.

El transformador de potencia opera como una máquina eléctrica de dos puertos que realiza la interfase favorable de dos secciones de una red eléctrica más grande. El análisis de ingeniería de esta red requiere que los voltajes y las corrientes del circuito equivalente a la figura 3.27, se calcula a partir de una de las dos condiciones de restricciones siguientes:

1. **Condición 1.** La tensión de carga  $V_2$ ; la corriente de carga  $I_2$  y el *F.P.* de la carga son especificados, y deben calcularse los valores resultantes del voltaje de entrada  $V_1$  y de la corriente de entrada  $I_1$ .
2. **Condición 2.** Se especifica la tensión de entrada  $V_1$  y la carga se considera una impedancia constante, se requiere calcular la corriente de entrada  $I_1$ , la corriente de carga  $I_2$  y la tensión de carga  $V_2$ .



Figuras 3.27 Circuito equivalente exacto referido al primario para un transformador.

El desempeño referido, es que el transformador real se aproxime a las características del transformador ideal. Las evaluaciones cuantitativas de la desviación de este desempeño ideal, se hacen por medio del cálculo de la eficiencia y de la regulación del voltaje.

#### 3.5.1 Regulación.

La regulación de tensión de un transformador, es la medida del incremento en porcentaje de la magnitud del voltaje de carga al cambiar la carga desde la condición de plena carga hasta la condición de trabajo en vacío; mientras que el voltaje de entrada permanece constante (invariante). Se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$Reg = \frac{100(V_{NL} - V_{FL})}{V_{FL}}$$

Por lo que, el valor de la regulación depende de los valores de la resistencia de los embobinados y de la reactancia de fuga. Usualmente, un aumento en el valor de cualquier cantidad, lleva automáticamente implícito, un incremento en la regulación para una carga en particular. La regulación también depende del factor de potencia de la carga.

Por otra parte, la regulación del voltaje o de tensión de un transformador, se define como el cambio en el voltaje o tensión de la terminal secundaria de una condición de no carga, a una condición de carga completa. Frecuentemente se expresa en forma de porcentaje del valor de carga completa. Dentro de las aplicaciones de los sistemas de potencia, la regulación es un factor importante para el transformador; un valor bajo indica que las variaciones de carga en el lado secundario de dicho transformador no afectan de manera considerable la magnitud del voltaje que se suministra a la carga. Este valor se calcula bajo la suposición de que el voltaje primario permanece constante; mientras que se elimina la carga del transformador secundario.

En conclusión, para obtener la regulación del voltaje o de tensión en un transformador se requiere entender las caídas de tensión o de voltaje que se producen en su interior. Considerarse el circuito equivalente del transformador simplificado; los efectos de la rama de excitación en la regulación de tensión del transformador puede ignorarse, por lo tanto; solamente las impedancias en serie deben considerarse. La regulación de tensión de un transformador depende entonces, tanto de la magnitud de dichas impedancias, como del ángulo-fase de la corriente que circula por el transformador. La forma mas simple de determinar el efecto de la impedancia y de los ángulos de fase de la intensidad circulante en la regulación de voltaje del transformador, es analizar el diagrama fasorial; este diagrama es un esquema de las tensiones e intensidades fasoriales del transformador la tensión fasorial  $V_s$  se supone con un ángulo de  $0^\circ$ , y todas las demás tensiones e intensidades se comparan con dicha suposición. Si se aplica la ley de voltajes de Kirchoff al circuito equivalente, la tensión primaria se determina:

$$V_p/a = V_s + (Req)(Is) + (jXeq)(Is)$$

Un diagrama fasorial de un transformador es una representación visual de esta ecuación anterior.

Si se dibuja un diagrama fasorial de un transformador que trabaja con un factor de potencia retrasado, es fácil observar que  $V_p/a = V_s$  para cargas en retraso, así que la regulación de tensión de un transformador con tales cargas debe ser mayor que cero, tal como lo muestra la Fig. 3.28.



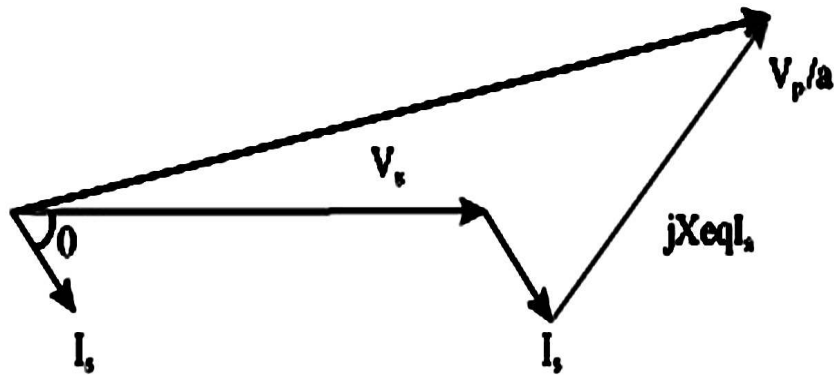


Figura 3.28 Regulación de tensión de un transformador con factor de potencia y cargas retrasado.

Ahora se verá un diagrama donde se observa que la tensión secundaria es menor que la primaria, de donde  $V_R = 0$ ; sin embargo, en este caso, la regulación de voltaje es un número más pequeño que el que tenía con una corriente en retraso.

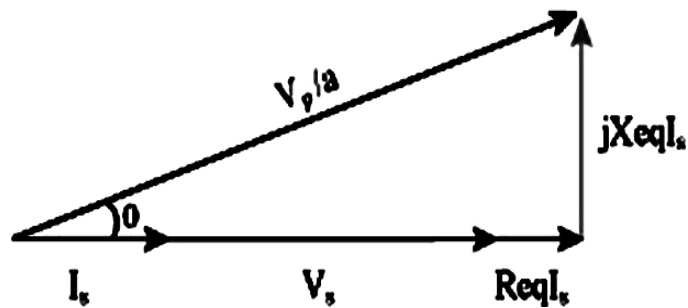


Figura 3.29 Regulación de tensión de un transformador con una corriente en retraso.

Pero si la corriente secundaria está adelantada, el voltaje en el devanado secundario puede ser realmente mayor que la tensión primaria referida. Si esto sucede, el transformador tiene realmente una regulación negativa, como se le ilustra en la Fig. 3.30.

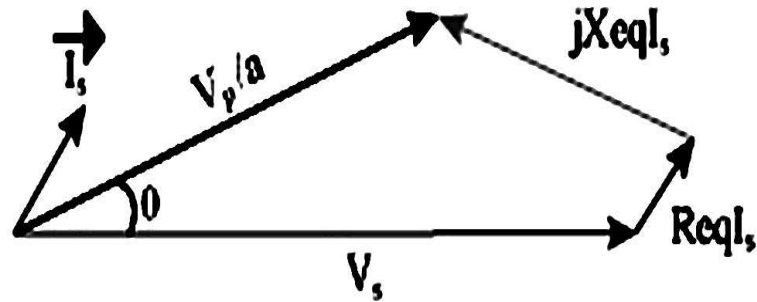


Figura 3.30 Regulación negativa de un transformador.

### 3.5.2 Eficiencia

Existen muchas normas por las que se puede evaluar diferentes piezas de equipo o sistemas. Es probable que el criterio más ampliamente usado, o la cifra de mérito en uso cuando se considera cantidades relativamente grandes de potencia o energía se expresa con claridad en la siguiente pregunta: ¿Cuánta potencia o energía de entrada se obtiene como salida útil?

El nombre de este criterio es la eficiencia, y por definición se calcula como:

$$\eta \triangleq \frac{\text{salida}}{\text{entrada}}$$

Como porcentaje, la ecuación anterior se multiplica por 100. igualmente la eficiencia también puede calcularse como:

$$\eta = \frac{\text{salida}}{\text{entrada} + \text{pérdidas}}$$

$$\eta = \frac{\text{entrada} - \text{pérdidas}}{\text{entrada}} = 1 - \frac{\text{pérdidas}}{\text{entrada}}$$

Las eficiencias de los transformadores en condiciones de carga nominal varían desde aproximadamente 92 % para los de tamaño relativamente pequeño, hasta aproximadamente 99 % para transformadores relativamente grandes. Las tres ecuaciones anteriores; generalmente se toman como eficiencias de potencia; esto es, la relación de la potencia de salida como la potencia de entrada.

En algunas aplicaciones, el devanado primario se deja conectado a la fuente de alimentación (potencia), por largos periodos de tiempo; mientras que la carga fluctúa dentro de rangos relativamente muy amplios. En estos casos, la eficiencia de energía se utiliza como “cifra de merito”.

Ésta se expresa, como la relación de la energía de salida a la energía de entrada durante un periodo fijo de tiempo, y se calcula como:

$$\eta = \frac{\int_o^T P_o dt}{\int_o^T P_i dt}$$

En donde, las integrales dadas en la ecuación anterior, pueden ser calculadas con instrumentos de integración (llamados wathhorímetros) para aplicaciones específicas. Si  $P_o$  y  $P_i$  son consideradas constantes durante un intervalo fijo dentro del periodo de evaluación; por lo que, la ecuación anterior que contiene las integrales, puede escribirse como:

$$\eta = \frac{\sum_o^T (P_o)(\Delta t)}{\sum_o^T (P_i)(\Delta t)}$$

Cuando esta eficiencia se determina para un periodo de 24 horas, se denomina "la eficiencia diaria".

Finalmente; los circuitos equivalentes del transformador facilitan los cálculos de la eficiencia. Se tienen tres tipos de pérdidas en los transformadores, y éstas son:

- a) **Pérdidas en el cobre ( $I^2R$ ).** Estas pérdidas las causan las resistencias en serie y el circuito equivalente.
- b) **Pérdidas por histéresis.** Estas son debidas a  $R_N$
- c) **Pérdidas por corrientes parásitas.**

Por lo que, la eficiencia de un transformador con una carga dada, sólo hay que sumar las pérdidas de cada resistor; por lo que, la expresión general para determinar la eficiencia de esta máquina eléctrica (transformador) es:

$$\eta = \frac{V_s I_s \cos\theta}{\text{pérdidas en el cobre} + \text{pérdidas en núcleo} + V_s I_s \cos\theta} * 100\%$$

### 3.6 Por ciento y por unidad de impedancia

La resolución de circuitos que contienen transformadores puede ser sumamente tediosa debido a la necesidad de referir a un nivel común todos los distintos niveles de voltaje en los diferentes extremos de un transformador en el sistema.

Únicamente después de ejecutar este paso, es posible resolver el sistema en cuanto a sus corrientes y voltajes. Existe sin embargo, otra forma de resolver circuitos y sistemas que contienen transformadores. La necesidad de las conversiones explícitas de los niveles de voltaje de cada transformador incluido en el sistema eléctrico. En cambio, las conversiones necesarias se realizan automáticamente por el método en sí, sin que el usuario se ocupe por las transformaciones de la impedancia. Dado que si es posible evitar estas transformaciones de la impedancia, es factible poder resolver relativamente fácil los circuitos

y sistemas eléctricos que contienen varios transformadores con un menor margen de error. Este método de solución se conoce como sistema de medidas por unidad (*pu*).

El sistema por unidad tiene otra ventaja importante en el estudio de las máquinas eléctricas y de los transformadores. Conforme varía el tamaño de la máquina eléctrica o del transformador, los valores de las impedancias internas también varían significativamente. Esto da como resultado que el sistema por unidad relacionado con los valores nominales del equipo, las impedancias de las máquinas y de los transformadores caen regularmente dentro de pequeños intervalos para cada tipo y construcción del equipo, dispositivo o aparato.

Por lo que, en el sistema por unidad no se mide el voltaje, la corriente, la potencia, la impedancia y otras cantidades eléctricas en las unidades convencionales del sistema internacional de unidades (volts, ampères, watts, óhms, etc.), en cambio, se mide cada cantidad eléctrica como una fracción decimal de un nivel base. Cualquier cantidad se puede expresar en una base por unidad a través de la siguiente expresión:

$$\text{cantidad por unidad} = \frac{\text{valor real}}{\text{valor base de la cantidad}}$$

en donde el término “valor real”, es el valor en volts, ampères, óhms, etcétera.

Es práctica frecuente, seleccionar dos cantidades base para definir un sistema por unidad, las que se utilizan comúnmente son el voltaje y la potencia (o la potencia aparente). Una vez que se han seleccionado las cantidades base, los demás valores se correlacionan con ellas a través de las leyes eléctricas convencionales. Para un sistema eléctrico monofásico, las relaciones establecidas son las siguientes;

$$P_{\text{base}}, Q_{\text{base}}, S_{\text{base}} = V_{\text{base}} I_{\text{base}}$$

$$Z_{\text{base}} = \frac{V_{\text{base}}}{I_{\text{base}}}$$

$$Y_{\text{base}} = \frac{I_{\text{base}}}{V_{\text{base}}}$$

$$Z_{\text{base}} = \frac{(I_{\text{base}})^2}{S_{\text{base}}}$$

En un sistema de potencia se seleccionan las potencias base aparente; así como el voltaje base en un punto específico del sistema. Un transformador no tienen ningún efecto en la potencia aparente base del sistema; ya que la potencia aparente que entra en un transformador es igual a la potencia base que sale de él. Por otro lado, el voltaje cambia al pasar a través de un transformador, por lo que el valor de  $V_{\text{base}}$  se cambia en cada transformador del sistema adecuado con su relación de vueltas. Debido a que las cantidades base cambian al pasar a través de un transformador, el proceso de referir las cantidades a un voltaje común se tiene en cuenta automáticamente durante la conversión por unidad.

Cuando se analiza un solo equipo (ya sea este un motor o un transformador), se utilizan sus valores

nominales, como la base del sistema por unidad. Si se utiliza un sistema por unidad basado en los valores nominales del transformador, las características del transformador de potencia o de distribución no cambiarán mucho dentro de una amplia gama de valores de voltaje y de potencia. Si se incluye más de una máquina o de un transformador en un solo sistema de potencia, el voltaje y la potencia base del sistema pueden ser seleccionados arbitrariamente; pero todo el sistema debe tener la misma base.

Un proceso común, es escoger las cantidades base del sistema de tal manera que sean idénticos a la base del componente más grande en el sistema, los valores por unidad dados en otra base se pueden convertir a la base nueva por medio de su conversión a sus valores reales inicialmente establecidos (volts, ampères, óhms, watts, etc.), como un procedimiento intermedio. Alternativamente, pueden convertirse directamente por medio de las siguientes expresiones algebraicas:

$$(P, Q, S)_{pusobrebase2} = (P, Q, S)_{pusobrebase1} \left( \frac{S_{base1}}{S_{base2}} \right)$$

$$V_{pusobrebase2} = V_{pusobrebase1} \left( \frac{V_{base1}}{V_{base2}} \right)$$

$$(R, X, Z)_{pusobrebase2} = (R, X, Z)_{pusobrebase1} \left[ \frac{(V_{base1})^2(S_{base2})}{(V_{base2})^2(S_{base1})} \right]$$

En conclusión, los cálculos relacionados con máquinas eléctricas, transformadores y sistemas de maquinas, con frecuencia se llevan a cabo con el sistema de valores en por unidad; por ejemplo, todas las cantidades pertinentes expresadas en fracciones decimales de valores base apropiadamente seleccionados. Todos los cálculos usuales se realizan con base en estos valores en por unidad, en lugar de utilizar los tradicionales valores en volts, ampères y óhms.

Este sistema presenta varias ventajas: Una es que los parámetros de las máquinas eléctricas y de los transformadores por lo general, caen dentro de un rango numérico que es razonablemente estrecho cuando los cálculos se expresan en un sistema en unidad en base en su propia capacidad. La exactitud de sus valores es por este motivo, objeto de un rápido registro. Una segunda ventaja es que cuando los parámetros del circuito equivalente del transformador se convierten en los valores por unidad, el índice de vueltas del transformador se “transforma” en 1:1 (uno a uno), y como consecuencia, el transformador ideal puede eliminarse. Este hecho simplifica en gran medida los análisis, ya que elimina la necesidad de referir las impedancias de un lado o de otro lado en los transformadores. Para el caso de sistemas complicados y complejos que involucran numerosos transformadores con diferente relación de vueltas, esta ventaja es significativa, ya que elimina la posible causa de serios errores.

Por lo que; el procedimiento para realizar los análisis de sistemas por unidad se resume de la siguiente forma:

1. Elegir una base de VA, y un voltaje base en un punto determinado del sistema.
2. Convertir todas las cantidades al sistema en unidad sobre la base de VA que se eligió, y con un voltaje base a manera de todos los transformadores; así como la relación de vueltas de cualquier transformador que se afronte como se pueda ir deslizando a través del sistema eléctrico.

3. Realizar un análisis eléctrico normalizado con todas las cantidades convertidas al sistema por unidad.
4. Cuando se completen los análisis, todas las cantidades podrán convertirse de nuevo a las unidades reales al multiplicar sus valores en unidad por sus correspondientes valores base.

### 3.7 Autotransformadores.

Frecuentemente en algunas aplicaciones, es deseable modificar los valores de los niveles de voltaje en una porción relativamente muy pequeña. Por ejemplo; puede ser necesario aumentar el voltaje de 115 a 120  $[V_{c-A}]$  o de 13.2 a 13.8  $[KV]$ . Estos pequeños incrementos suelen ser necesarios debido a una caída de voltaje en un sistema de potencia localizado a una considerable distancia de la fase de generación. En esas circunstancias, es un desperdicio de equipo y de costos, fabricar un transformador con dos devanados completos dimensionados para el mismo voltaje. En lugar de eso, se utiliza un transformador de propósito especial llamado “autotransformador”.

Un autotransformador en una configuración de transformador que comparte su devanado, tanto en el punto de entrada como en el punto de salida.

Por lo que, un camino se introduce por donde parte de, o toda la corriente de entrada (dependiendo de si existe una configuración elevadora o reductora de voltaje), fluye directamente a la salida, después de pasar a través de un segmento de embobinado. De esta forma, el autotransformador no está aislado eléctricamente y la restricción:

$$\frac{\vec{I}_1}{\vec{I}_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{a}$$

Ya no es aplicable para las corrientes de entrada y salida.

Sin embargo, la ecuación anterior, todavía es una relación válida para las corrientes de entrada y de salida de los segmentos individuales de los embobinados. El autotransformador se encuentra principalmente en dos aplicaciones muy específicas y concretas de las cuales son:

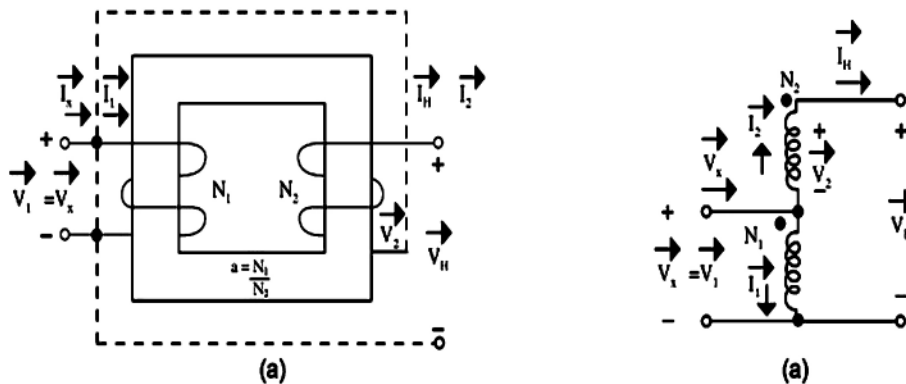
1. El autotransformador se utiliza para implementar un pequeño aumento de voltaje al final de una línea de transmisión  $p$  de un alimentador de distribución, para compensar la caída de voltaje consecuencia de la reactancia de la línea.
2. El autotransformador puede suministrar una fuente variable de voltaje muy económica (con una muy alta densidad de potencia), para este caso especial, un embobinado continuo se conecta de manera común con la entrada. Mientras que la segunda terminal de salida, cuenta con un contacto deslizante para el correcto ajuste de voltaje.

### 3.7.1 Características de los autotransformadores

La figura 3.31 (a) ilustra con líneas punteadas la reconexión de un transformador de dos embobinados para formar un autotransformador con el esquema de la figura 3.31 (b); el autotransformador se estudia frecuentemente considerándolo como un dispositivo ideal. La inclusión de la conexión entre el embobinado primario  $N_1$  y el secundario  $N_2$  en la figura 3.31 (a) no altera en forma alguna las relaciones de flujo magnético en el circuito contra la fem. del transformador de dos embobinados. Por lo tanto, las relaciones entre los conjuntos  $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$  e  $(\vec{I}_1, \vec{I}_2)$  dadas por las siguientes expresiones, siguen siendo válidas:

$$\frac{\vec{V}_1}{\vec{V}_2} = \frac{\vec{E}_1}{\vec{E}_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

$$\frac{\vec{I}_1}{\vec{I}_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{a}$$



**Figuras 3.31** Conexión de un autotransformador elevado. (a) Reconexión de un transformador de dos embobinados (b) Esquema de dicho arreglo.

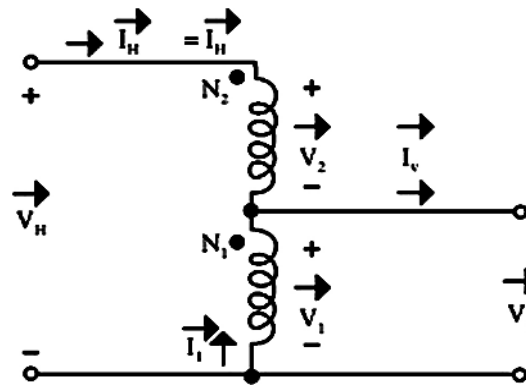
Sin embargo; las dos ecuaciones anteriores ya no son ni de entrada ni de salida. La razón de los voltajes de entrada y de salida del autotransformador mostrado en la figura 3.31 (b) debe ser:

$$\frac{\vec{V}_H}{\vec{V}_x} = \frac{\vec{V}_1 + \vec{V}_2}{\vec{V}_1} = \frac{\left(\frac{N_1}{N_2}\right)(\vec{V}_2) + \vec{V}_2}{\left(\frac{N_1}{N_2}\right)(\vec{V}_2)} = \frac{N_1 + N_2}{N_1} = \frac{a + 1}{a}$$

Considerando la misma figura 3.31 (b), la razón correspondiente para las corrientes es:

$$\frac{\vec{I}_H}{\vec{I}_x} = \frac{\vec{I}_2}{\vec{I}_1 + \vec{I}_2} = \frac{\vec{I}_2}{\left(\frac{N_2}{N_1}\right)(\vec{I}_2) + \vec{I}_2} = \frac{N_1}{N_1 + N_2} = \frac{a}{a + 1}$$

El esquema de la figura 3.32 es un autotransformador reductor ( $V_x < V_H$ ). Comparando este esquema con el de la Fig. 3.31 (b), se puede observar que el autotransformador reductor, es la imagen espejo del autotransformador elevador, excepto que las direcciones de todas las flechas de corriente se han invertido.



Figuras 3.32 Autotransformador reductor de voltaje.

En la práctica, no es posible conectar simplemente un transformador ordinario como autotransformador y utilizarlo así; debido a que el aislamiento en el lado de bajo voltaje del transformador ordinario no es lo suficientemente fuerte como para soportar todo el voltaje de salida de la conexión como autotransformador. En los transformadores que se construyen de manera específica como autotransformadores, el aislamiento, en la bobina más pequeña (el devanado en serie) es tan fuerte como el aislamiento en la bobina más grande.

En los sistemas de potencia, es común utilizar autotransformadores; ya que mientras más cercanos sean los voltajes, mayor será la ventaja de potencia del autotransformador, también se utilizan como transformadores variables, donde la toma de bajo voltaje se mueve hacia arriba y hacia abajo en el devanado. Esta es una manera muy conveniente de obtener un voltaje de corriente alterna variable. Sin embargo, la principal desventaja de los autotransformadores, es que a diferencia de los transformadores ordinarios, hay una conexión física directa entre el circuito primario y el circuito secundario; por lo que se pierde el aislamiento eléctrico en ambos lados. Si una aplicación particular no requiere de aislamiento eléctrico, entonces el autotransformador es una forma muy conveniente y cómoda; así como económica de unir dos voltajes muy parecidos.

Finalmente; los autotransformadores tienen una desventaja más en comparación con los transformadores convencionales. Esta desventaja se entiende y se explica a partir de que la impedancia efectiva



por unidad de un transformador es menor por factor igual al inverso de la ventaja de potencia de la conexión como autotransformador, por lo que, la impedancia interna reducida de un autotransformador en comparación con un transformador convencional con dos devanados, puede convertirse en un problema bastante serio, en aplicaciones en las que se requiere de la impedancia en serie para limitar los flujos de corriente durante las fallas del sistema de potencia (cortocircuito).

El hecho de que la impedancia interna sea más pequeña en un autotransformador se debe tomar en cuenta en las aplicaciones prácticas antes de seleccionar un autotransformador, cualquiera que éste sea.

### 3.8 Solución del problema de diseño

Además de los transformadores de fuerza o de potencia ya mencionados a lo largo de este capítulo, y que se usan en corriente alterna de baja frecuencia (50 ó 60 [Hz]); existen igualmente otros transformadores de tamaño pequeño, que trabajan con corrientes de frecuencias muy altas, del orden de miles o de millones de Hertz, [KHz o MHz]. A esas corrientes se les conoce también como Radiofrecuencia, y en la que la mayoría de los casos funcionan con milésimas de volts [mv]. Es frecuente encontrar este tipo de transformadores, acoplados a la antena de un radioreceptor para captar las señales que transmitan las emisoras comerciales de radio, o de cualquier otro tipo, para que a continuación se puedan amplificar y convertir en señales audibles a través de altavoces.

Los transformadores de alta frecuencia, cuando se acoplan a la antena de un radioreceptor, sirven para captar las ondas de radio que emiten diferentes estaciones difusoras comerciales y gubernamentales, destinadas a prestar servicios variados. Los arrollamientos de los transformadores para radiofrecuencia, se colocan en un núcleo de ferrita; material que se obtienen por metalurgia de polvos (polimetalurgia), sometiéndolo a un proceso de sintetización. La ferrita tiene la propiedad de ofrecer una excelente respuesta a la inducción electromagnética, generada por las corrientes de alta y muy alta frecuencia.

Por otra parte; los transformadores para circuitos de audio, son transformadores pequeños que deben diseñarse de modo de responder adecuadamente en un rango amplio de frecuencias que van de algunos Hertz a decenas de KiloHertz [Hz-KHz]. En estos circuitos electrónicos, los transformadores se utilizan para elevar voltajes, para aumentar la ganancia de amplificadores, y principalmente como transformador de salida para adaptar la impedancia de la carga a manera de conseguir una relación óptima entre la impedancia aparente de una carga y su alimentador, se usan además transformadores en circuitos electrónicos para bloquear la corriente continua. El requisito que se debe cumplir en estos transformadores, es que su relación  $V_{salida}/V_{entrada}$  se mantenga constante en magnitud y con un defase cercano a cero en determinado rango de frecuencias.

### 3.9 Problemas resueltos

#### Problema 3.1

Un transformador reductor con relación de transformación de 10:1 y 5 (KVA), tienen una corriente nominal a plena carga en el embobinado secundario de 50 [A]. Una prueba para determinar las pérdidas en el cobre secundario en cortocircuito da un valor en el wattmetro de 100 [W] a plena carga. Si la resistencia del primario es de 0.6 [ $\Omega$ ]. Calcular la resistencia del devanado secundario y la pérdida de potencia en la terminal del secundario.

#### Respuestas:

Pérdidas en el cobre  $I_p^2 R_p + I_s^2 R_s = 100[W]$

Considerando  $N_s = 1$  y  $N_p = 10$ ; entonces utilizando la siguiente expresión:

$$\frac{N_p}{N_s} = \frac{I_s}{I_p}$$

de esta expresión se despeja  $I_p$ :

$$I_p = \frac{N_s}{N_p}(I_s) = \frac{1}{10}(50) = 5 \Rightarrow I_p = 5[A]$$

Sustituyendo este valor en la expresión de pérdidas en el cobre; se tiene;

$$I_s^2 R_s = 100 - I_p^2 R_p$$

Despejando  $R_s$  de esta expresión se tiene:

$$R_s = \frac{100 - I_p^2 R_p}{I_s^2} = \frac{100 - (5)^2(0.6)}{(50)^2} = 0.034 \Rightarrow R_s = 0.034[\Omega]$$

Finalmente; las pérdidas en el secundario se determina como: Pérdidas en el secundario =  $I_s^2 R_s \Rightarrow$  pérdidas en el secundario =  $(50)^2(0.034)$

$$\text{Pérdidas en el secundario} = 85[W]$$

### Problema 3.2

Cuando un transformador de 120/240 [v] tiene abierto el devanado secundario, la corriente en el devanado primario es de 0.3 [A] con un factor de potencia de 20 %, la capacidad nominal del transformador es de 4 [KVA]. Calcular:

- La corriente en plena carga,  $I_{p_c}$ .
- La corriente de excitación sin carga,  $I_E$ .
- La corriente por pérdidas en el núcleo,  $I_H$ .
- La corriente de magnetización,  $I_M$ .
- El porcentaje de cada corriente con respecto a la corriente a plena carga.
- Dibujar el diagrama de fasores.

#### Respuestas:

- a) La corriente a plena carga se calcula como:

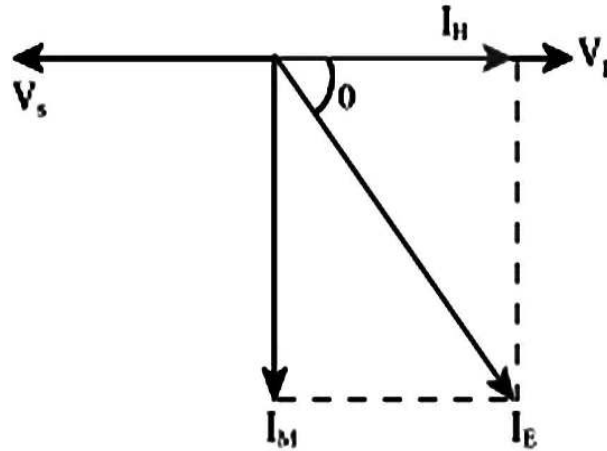
$$\text{corriente a plena carga} = \frac{\text{capacidad nominal del transformador en KVA}}{\text{voltaje del devanado primario}}$$

$$I_{p_c} = \frac{4000}{120} = 33.3\bar{3} \Rightarrow I_{p_c} = 33.3\bar{3}[A]$$

- b) La corriente en el primario medida sin carga (con la terminal del secundario abierta), es la corriente de excitación  $I_E$ . Por lo que:

$$I_E = 0.3[A]$$

- c) Según el diagrama fasorial de la siguiente figura:



d) La corriente de magnetización es:

$$I_M = I_E \text{sen}(\theta)$$

$$\theta = \cos^{-1}(0.2) = 78.5^\circ$$

$$I_M = (0.3)(\text{sen}(78.5)) = (0.3)(0.980)$$

$$I_M = 0.294[A]$$

e) La corriente en el devanado primario sin carga (corriente de excitación) como porcentaje de la corriente en el primario a plena carga:

$$\frac{0.3}{33.3} = 0.0090 = 0.90\% \Rightarrow I_{\text{dev}_{\text{prim}}} = 0.90\%$$

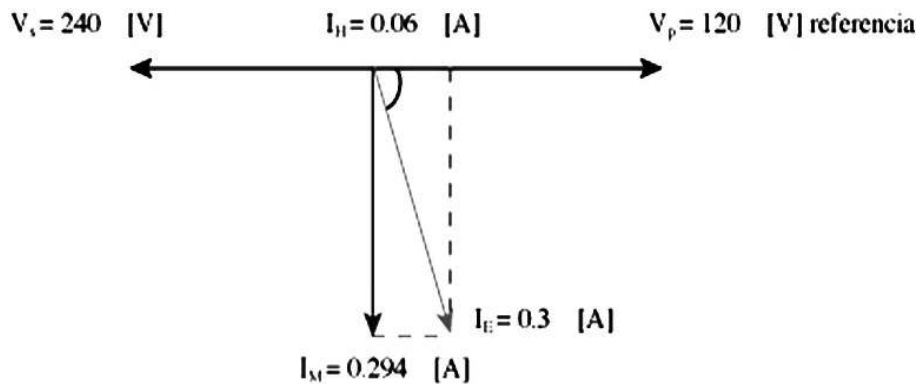
La corriente de la pérdida en el núcleo como porcentaje de la corriente a plena carga:

$$\frac{0.6}{33.3} = 0.0018 = 0.18\% \Rightarrow I_{\text{pérd}_{\text{núcleo}}} = 0.18\%$$

La corriente de magnetización como porcentaje de la corriente a plena carga:

$$\frac{0.294}{33.3} = 0.0088 = 0.88\%$$

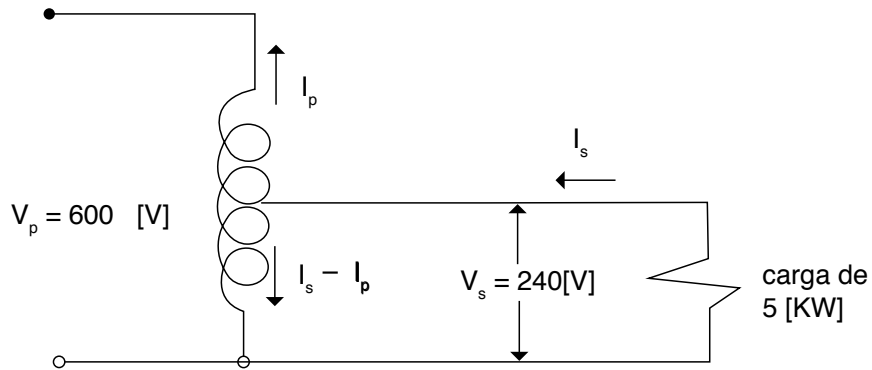
f) El diagrama de fasores se muestra en la siguiente figura:



### Problema 3.3

Un autotransformador reductor está diseñado para proporcionar un factor de potencia de uno, 240 [V] a una carga de 5 [KW] como se muestra en la figura. El devanado primario del autotransformador se conecta a una fuente de 600 [V], encontrar las corrientes:

- En la carga
- En el devanado del primario
- En el devanado del secundario



### Respuestas:

- a)  $P_s = V_s I_s$  en esta expresión  $I_s$  es la corriente en la carga:

$$I_s = \frac{P_s}{V_s} = \frac{5000}{240} = 20.8 \Rightarrow I_s = 20.8 \text{ [A]}$$

- b) Con un factor de potencia de uno y una eficiencia del 100%

$$V_p I_p = S_s I_s$$

$$\text{entonces: } I_p = \frac{V_s I_s}{V_p} = \frac{5000}{600} = 8.3\bar{3}$$

$$I_p = 8.3\bar{3} \text{ [A]}$$

- c) La corriente en el devanado del secundario es  $I_s - I_p$  de acuerdo a la segunda Ley de Kirchhoff:

$$I_s - I_p = 20.8 - 8.3\bar{3} = 12.5 \Rightarrow I_s - I_p = 12.5 \text{ [A]}$$

### Problema 3.4

Un transformador de 40 [KVA], 1000/100 [V], ha dado los siguientes resultados en un ensayo de corto-

circuito: 51 [V]; 40 [A]; 400 [W] (medidas en el lado primario o de alta tensión). Se desea conectarlo en paralelo con otro transformador de 20 [KVA], 1000/100 [V], que en un ensayo de cortocircuito ha dado: 42 [V]; 20 [A]; 245[W] (medidas en el lado de alta tensión). Indicar cómo se repartirá una potencia de 60 [KVA] con factor de potencia de 0.8 inductivo.

**Respuesta:**

De los resultados de la prueba de cortocircuito del primer transformador resulta:

$$400 = (51)(40)(\cos \theta) \Rightarrow \cos \theta = 0.196; \text{sen } \theta = 0.98$$

Por lo tanto, considerando los parámetros de cortocircuito de obtiene:

$$Z_{cc1} = \frac{51}{40} = 1.275 \text{ } [\Omega] \Rightarrow Z_{cc1} = 1.275 \text{ } [\Omega]$$

$$R_{cc1} = (1.275)(0.196) = 0.25 \text{ } [\Omega] \Rightarrow R_{cc1} = 0.25 \text{ } [\Omega]$$

$$X_{cc1} = (1.275)(0.98) = 1.25 \text{ } [\Omega] \Rightarrow X_{cc1} = 1.25 \text{ } [\Omega]$$

Para el segundo transformador se tienen los siguientes parámetros:

$$245 = (42)(20)\cos \theta \Rightarrow \cos \theta = 0.29166, \text{ sen } \theta = 0.957$$

$$Z_{cc2} \frac{42}{20} = 2.1 \text{ } [\Omega] \Rightarrow Z_{cc2} = 2.1 \text{ } [\Omega]$$

$$R_{cc2} = (2.1)(0.29166) = 0.612 \text{ } [\Omega] \Rightarrow R_{cc2} = 0.612 \text{ } [\Omega]$$

$$X_{cc2}(2.1)(0.967) = 2 \text{ } [\Omega] \Rightarrow X_{cc2} = 2 \text{ } [\Omega]$$

Al conectar los dos transformadores en paralelo y alimentar a la carga de 60 [KVA] con un factor de potencia de 0.8 inductivo; la corriente total reducida al primero tiene un valor de:

$$S = 60,000 = mV_2 I_2' = 1000 I_2' \Rightarrow I_2' = 60 \text{ } [A]$$

Que tomando la tensión secundaria reducida al primario como referencia de fases correspondientes a una corriente compleja:

$$I_2 = 60 / \underline{-36.87^\circ} \text{ } [A]$$

Si se denominan  $I_{T_1}$  e  $I_{T_2}$  a las corrientes secundarias reducidas al primario de cada uno de los transformadores, se cumplirán las siguientes ecuaciones en paralelo:

$$I_{T_1} + I_{T_2} = 60 \angle -36.87^\circ \text{ [A]}; (0.25 + j 1.25)I_{T_1} = (0.612 + j 2)I_{T_2}$$

De la expresión anterior se obtiene que:

$$I_{T_1} = 7.33 \angle -39.87^\circ \text{ [A]}; I_{T_2} = 22.74 \angle -33.34^\circ \text{ [A]}$$

Y por consiguiente, las potencias complejas suministradas por ambos transformadores serán:

$$S_1 = V_2 I_{T_1}^* = 29 + j 23.5 = 37.33 \angle 39.03^\circ \text{ [KVA]} \Rightarrow S_1 = 37.33 \angle 39.03^\circ \text{ [KVA]}$$

$$S_2 = V_2 I_{T_2}^* = 19 + j 12.5 = 22.74 \angle 33.34^\circ \text{ [KVA]} \Rightarrow S_2 = 22.74 \angle 33.34^\circ \text{ [KVA]}$$

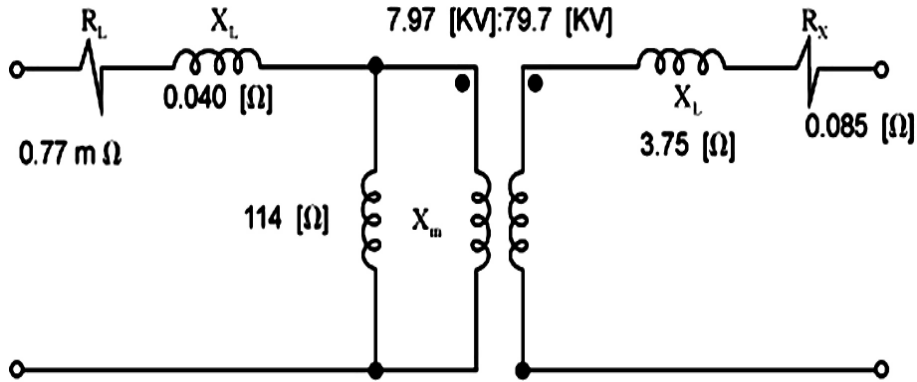
La suma coincide con la potencia compleja absorbida por la carga:

$$S_{CARGA} = 60 \angle 36.87^\circ = 48 + j 36 \text{ [KVA]}$$

### Problema 3.5

Se tiene el siguiente circuito equivalente para un transformador de 100 (MVA); 7.97 (KV):79.9 (KV) los parámetros del circuito equivalente son:





### Respuestas:

Las cantidades base para este transformador son:

- Lado de bajo voltaje:

$$VA_{base} = 100 \text{ [MVA]}; V_{base} = 7.97 \text{ [KV]}$$

$$R_{base} = X_{base} = \frac{V_{base}^2}{VA_{base}} = 0.635 \Rightarrow R_{base} = X_{base} = 0.635 \text{ }\Omega$$

- Lado de alto voltaje:

$$VA_{base} = 100 \text{ [MVA]}; V_{base} = 79.7 \text{ [KV]}$$

$$R_{base} = X_{base} = \frac{V_{base}^2}{VA_{base}} = 63.5 \Rightarrow R_{base} = X_{base} = 63.5 \text{ }\Omega$$

Finalmente; los valores en parámetros en unidad del transformador; pueden calcularse por medio de dividirlos entre sus correspondientes valores base; es decir:

$$X_L = \frac{0.040}{0.635} = 0.0630 \text{ [por unidad]}$$

$$X_H = \frac{3.75}{63.5} = 0.0591 \text{ [por unidad]}$$

$$X_m = \frac{114}{0.635} = 180 \text{ [por unidad]}$$

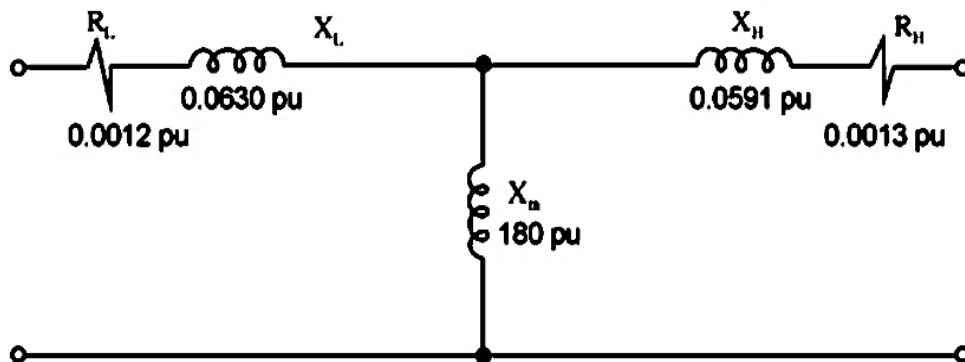
$$R_L = \frac{7.6 \times 10^{-4}}{0.635} = 0.0012 \text{ [por unidad]}$$

$$R_H = \frac{0.085}{63.5} = 0.0013 \text{ [por unidad]}$$

Por último; los voltajes que representan la relación de vueltas del transformador ideal deberán dividirse de manera individual entre el voltaje base del lado correspondiente del transformador. Por lo tanto, el índice de vueltas de 7.97 [KV]: 79.7 [KV] se convierte al sistema por unidad:

$$\text{Índice de vueltas en el sistema de valores por unidad} = \left( \frac{7.97(KV)}{7.97(KV)} \right) : \left( \frac{7.97(KV)}{7.97(KV)} \right) = 1 : 1$$

Y, el circuito equivalente por unidad resultante se ilustra en la siguiente figura; y dado que el transformador, tiene una relación de transformación y de vueltas unitaria, no es necesario dibujarlo, por lo que el arreglo final queda como:



### Transformadores

En la página web del libro se encuentra la lectura complementaria **Transformadores** en la que se presentan diferentes ejemplos de circuitos que incluyen un transformador ideal y para los cuales se calculan diferentes parámetros.



### Prácticas de laboratorio

En la página web del libro se encuentran las prácticas **Transformador monofásico** y **Transformador trifásico** en las que respectivamente el objetivo de la primera es calcular los parámetros del circuito equivalente, mientras que el objetivo de la segunda es aprender a calcular el rendimiento a partir de un conjunto de pruebas básicas.



## 3.10 Resumen

Aunque un transformador no es un dispositivo electromecánico, es un elemento indispensable en la mayoría de los sistemas que operan y trabajan con corriente alterna, en donde se emplea para convertir voltajes, corrientes e impedancias a niveles propios para su óptima y eficiente uso. Los transformadores sirven como valiosos ejemplos de las técnicas de análisis que deberán llevarse a la práctica.

Una característica importante de los transformadores es que ofrecen oportunidades para investigar las propiedades de los circuitos y sistemas magnéticos, incluso los conceptos de fuerza magnetomotriz ( $fmm$ ), la corriente de magnetización y la magnetización; así como los conceptos de flujos de dispersión y mutuos, igualmente las inductancias asociadas con los mismos.

También se puede decir que los transformadores son dispositivos de muy alta eficiencia para procesar potencia con una relación inversa de *voltaje – corriente* sin alterar la frecuencia.

Los transformadores aprovechan la alta densidad de energía magnética del material ferromagnético para permitir el diseño económico del dispositivo.

Sin embargo, la naturaleza no lineal del material ferromagnético conduce a la inducción de armónicas en la corriente y/o el voltaje. La magnitud relativa de estas armónicas en un diseño correcto y eficiente del transformador, es relativamente muy pequeña.

Tanto en el caso de los transformadores, como en el caso de las máquinas de rotación (motores), se crea un campo magnético por medio de la acción combinada de las corrientes en los devanados. En el transformador con núcleo de hierro, la mayor parte de este flujo se limita al núcleo y se vincula con todos

los devanados.

Este flujo mutuo resultante, induce voltajes en los devanados, los cuales son proporcionales al número de vueltas, y también son los responsables de la propiedad de variación del voltaje que presentan los transformadores. En las máquinas de rotación (motores eléctricos), la situación es parecida aunque en este caso, existe un entrehierro que separa los componentes de rotación de los componentes estáticos de la máquina. De forma análoga, a la manera en que el flujo del transformador se circula con los diferentes devanados en el núcleo del transformador; el flujo mutuo presente en las máquinas de rotación, atraviesa el entrehierro y une los devanados en el rotor y en el estator. Como sucede en un transformador, el flujo mutuo induce voltajes en estos devanados que son proporcionales al número de vueltas y al índice de tiempo del cambio del flujo.

El material ferromagnético del núcleo del transformador tiene dos mecanismos distintos de pérdidas: *las pérdidas por histéresis y las pérdidas por corrientes parásitas*. El primer mecanismo (histéresis) produce pérdidas que varían directamente con la frecuencia; mientras que en el segundo mecanismo (corrientes parásitas), las pérdidas son dependientes de la frecuencia al cuadrado. Ambos tipos de pérdidas son casi directamente proporcionales a la densidad del flujo al cuadrado.

El circuito equivalente más común para el transformador, es el circuito equivalente Epstein o en  $T$ ; un circuito equivalente aproximado con la rama de excitación movida a las terminales de entrada, puede utilizarse para tener mayor facilidad en los cálculos con mínima pérdida en la excitación de los resultados.

La naturaleza no lineal de la inductancia de magnetización del transformador puede conducir, al energizar el transformador, a una corriente transitoria de arranque significativamente distinta, que el valor nominal de la corriente.

Adicionalmente; una diferencia importante entre los transformadores y las máquinas de rotación (motores eléctricos), es que en el caso de las máquinas de rotación, existe un movimiento relativo entre los devanados en el rotor y en el estator. Este movimiento relativo produce un componente adicional del índice de tiempo del cambio de las diferentes dispersiones de flujo de los devanados.

Sin embargo, en un transformador estático, la variación de tiempo de los acoplamientos inductivos es causada simplemente por la variación del tiempo en las corrientes de los devanados; sin involucrar ningún movimiento mecánico, y sin llevarse a cabo ninguna conversión de energía electromecánica.

El flujo del núcleo que resulta en un transformador induce una fuerza contraelectromotriz en el lado primario, que junto a la resistencia primaria y la caída de voltaje de la reactancia de dispersión, deberán balancear el voltaje que se aplique, ya que la resistencia y la caída de voltaje de reactancia de dispersión generalmente son menores, la fuerza contraelectromotriz deberá igualar de manera apropiada el voltaje que se aplique, y el flujo del núcleo deberá ajustarse a sí mismo, de acuerdo con este hecho. Fenómenos muy parecidos se llevan a cabo en los devanados del inducido de un motor de corriente alterna; la onda de flujo resultante del entrehierro deberá ajustarse sí misma, con el objetivo de generar una fuerza contraelectromotriz que sea aproximadamente igual al voltaje que se aplica. Tanto en el caso de los transformadores, como en el de las máquinas de rotación, la fuerza magnetomotriz ( $fmm$ ) neta de todas las corrientes, deberá ajustarse a sí misma, con la idea de crear el flujo resultante que se requiere por este balance de voltaje. En cualquier dispositivo electromecánico de corriente alterna, en donde la caída de voltaje de la resistencia y de la reactancia de dispersión sean menores, el flujo será determinado por

el voltaje aplicado y por la frecuencia, y las corrientes deberán ajustarse a sí mismas, para producir la fuerza magnetomotriz ( $fmm$ ) que se requiere para crear dicho flujo.

En un transformador, la corriente secundaria se determina por medio del voltaje inducido en el lado secundario, por la impedancia de dispersión secundaria, y por la carga eléctrica.

Por lo que, un transformador es una máquina eléctrica que se utiliza para convertir energía eléctrica con un nivel de voltaje en energía eléctrica con otro nivel de voltaje, a través de la acción de un campo magnético. Cuando se aplica un voltaje al primario de un transformador, el flujo que se produce en el núcleo está dado por la ley de Faraday.

El flujo variable en el núcleo, induce un voltaje en el devanado secundario del transformador. Debido a que los núcleos de los transformadores tienen una permeabilidad muy alta, la fuerza magnetomotriz ( $fmm$ ) neta requerida en el núcleo para producir el flujo, es relativamente muy pequeña, puesto que esta fuerza es muy pequeña, la fuerza magnetomotriz del circuito primario debe ser aproximadamente igual y opuesta a la fuerza magnetomotriz del circuito secundario. Un transformador real tiene flujos dispersos que únicamente atraviesan el devanado primario o el secundario, pero no ambos; además, hay pérdidas por histéresis (como se mencionó anteriormente en este mismo resumen), por corrientes parásitas y en el cobre. Ahora, estos efectos se toman en cuenta en el circuito equivalente del transformador. Las imperfecciones de los transformadores se miden en un transformador real, por medio de la regulación de voltaje y de la eficiencia.

El sistema de medición en unidad ( $pu$ ), es una forma muy conveniente de estudiar los sistemas que contienen transformadores, debido a que en este sistema, los diferentes niveles de voltaje en el esquema desaparecen.

Además, las impedancias en unidad de un transformador expresadas sobre sus propios valores nominales como base, caen dentro de un intervalo relativamente estrecho, lo que permite hacer una comprobación conveniente de lo razonable que pueda ser la solución de un problema.

Finalmente, los autotransformadores tienen una ventaja significativa en potencia sobre el transformador de dos embobinados. Sin embargo, el aislamiento eléctrico está ausente, y el asunto de la seguridad limita su uso a aplicaciones muy particulares y específicas, debido a que los devanados del autotransformador están conectados entre sí. El voltaje en un lado del transformador es el voltaje que pasa a través de un solo devanado; mientras que el voltaje en el otro lado del transformador, es la suma de los voltajes que pasan a través de ambos devanados. Debido a que sólo una porción de la potencia de un autotransformador pasa realmente a través de sus devanados, un autotransformador tiene una ventaja de potencial nominal comparado con un transformador convencional del mismo tamaño. Sin embargo la conexión destruye el aislamiento eléctrico entre los lados primarios y secundarios de un transformador.

### 3.11 Problemas

**3.1** Un transformador ideal con 2400 [vueltas] en el lado primario y 600 [vueltas] en el terminal secundario, consume 9.5 [A] con un factor de potencia del 100 % de una línea de alimentación de 220 [V].

Calcular:  $I_s$ ;  $V_s$  y  $P_s$ .

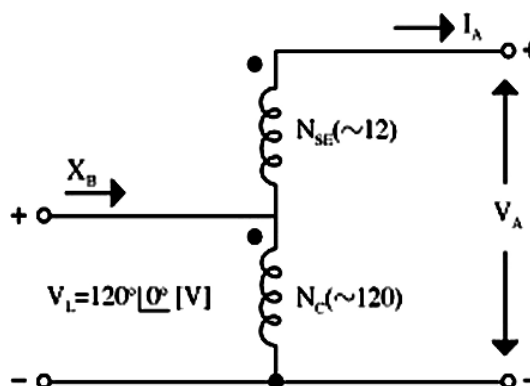
**3.2** Un transformador monofásico de 10 [KVA]; 220/100 [V]; alimentado por una tensión asignada de 200 [V], absorbe en vacío una corriente de 2.5 [A] siendo las pérdidas en esta situación de 300 [W]; se conecta una carga en el secundario que absorbe una potencia de 9 [KVA] con un factor de potencia de 0.8 inductivo, siendo la tensión secundaria de 90 [V]. En estas condiciones, el primario señala una potencia absorbida de 7.8 [KW] y una potencia reactiva de 6.2 [KVA]. Calcular: a) Las caídas relativas de tensión del transformador ERcc y EXcc. (b) La tensión primaria del transformador.

**3.3** Se dispone de un transformador monofásico de 20 [KVA]; 440/200 [V] y Ecc=10% al alimentar el primario con una tensión de 371.2 [V], y conectando en el secundario una carga que absorbe 100 [A] con un factor de potencia de la unidad, se registra en el secundario un voltaje de 180 [V]. Calcula el voltaje necesario en el primario, para que el voltaje en el secundario sea de 150 [V] cuando el transformador alimenta una carga de 12 [KW], con un factor de potencia inductivo.

**3.4** Una prueba de circuito abierto para determinar las pérdidas en el núcleo de un transformador de 10 [KVA]; 240/720 [V] da una lectura de 60 [W]; la medición de la resistencia en el devanado del lado de alto voltaje es de 1.3 [Ω]. Calcular: [a] las pérdidas totales en el cobre; (b) la eficiencia del transformador cuando el factor de potencia de la carga es de 0.85.

**3.5** Se debe alimentar una carga de 12 [KW] a 480 [V] con un factor de potencia de 100% (la unidad) por medio de un autotransformador reductor cuyo devanado de alto voltaje se conecta a una fuente de 1200 [V]. Calcular ; (a) La corriente de la carga; (b) la corriente en el devanado primario, y (c) la corriente en el devanado secundario.

**3.6** Un transformador de 10 [KVA] y con 7200/120 [V] tiene una resistencia en el devanado primario de 12 [Ω] y en el devanado secundario de 0.0033 [Ω]. Calcular: (a) Las pérdidas en el cobre a plena carga; (b) Las pérdidas en el cobre a media carga, y (c) las pérdidas en el cobre con una carga de 2 [KVA].



**3.7** Se conecta un transformador de 100 [VA] y 120/12 [V] para conformar un autotransformador elevador como el mostrado en la anterior figura, si se aplica un voltaje en el devanado primario de 120 [V] al transformador.

- ¿Cuál es el voltaje secundario del transformador?
- ¿Cuál es su capacidad máxima en (Volt-ampères) en este modo de operación?
- Calcular la ventaja nominal de esta conexión como autotransformador, sobre la ventaja nominal en una operación convencional de 120/12 [V].

**3.8** Un transformador está dimensionado para 1000 [KVA]; 12/1.2 [KV] y 60[HZ] cuando opera como transformador convencional con dos devanados. En estas condiciones, su resistencia y su reactancia en serie son de 1% y 8% respectivamente. El transformador se utiliza como un transformador reductor de 13.2/12 [KV] en un sistema de distribución de potencia, en la conexión como autotransformador: (a) ¿Cuál es la capacidad nominal cuando se utiliza de esta manera?, y (b) ¿cual es la impedancia en serie del transformador en el sistema de medidas en por unidad?

**3.9** Un transformador monofásico con valores asignados de 10 [KVA] 400/100 [V], tiene una impedancia de cortocircuito referida al primario de  $0.6 + j 0.8[\Omega]$ . Las pérdidas en el hierro son de 250 [w] y puede prescindirse de la corriente de magnetización. Se conectan las bobinas del transformador en serie para construir un autotransformador elevador de voltaje con una relación de 400/500 [V]:

- Calcular la potencia de plena carga que pueda asignarse a este autotransformador.
- Si el autotransformador funciona a plena carga con un factor de potencia de 0.8 inductivo, y la tensión secundaria es de 500 [V], ¿cual será el voltaje necesario en el devanado del primario?
- Calcular el rendimiento para en inciso (b).
- Repetir la solución del problema, si las bobinas se unen del modo adecuado para construir un autotransformador reductor de voltaje con una relación de 500/100 [V] funcionando a plena carga correspondiente con  $V_2 = 100 [V]$  y un factor de potencia de 0.8 inductivo.

**3.10** Un transformador monofásico de 50 [KVA] tiene una impedancia de cortocircuito reducida al secundario de  $0.05 + j 0.2[\Omega]$ ; y se conecta en paralelo con un transformador de 25 [KVA] cuya impedancia reducida al secundario es de  $0.15 + j 0.6[\Omega]$ . La tensión terminal en vacío del transformador de 50 [KVA] es de 510 [V] y la del transformador de 25 [KVA] es de 500 [V].

- Calcular la corriente que circula por los devanados secundarios con los transformadores conectados en vacío.

- 
1. Calcular las corrientes secundarias que suministran cada transformador a una carga que absorbe  $70 [KW]$ , con un factor de potencia de la unidad.
  2. Calcular la tensión terminal en la carga para el inciso (b).



## Capítulo 4

### Operación del transformador en sistemas eléctricos

4.1 Problema de diseño

4.2 Introducción

4.3 Conexión de transformadores

4.4 Transformadores trifásicos

4.5 Clasificación y selección de transformadores

4.6 Solución del problema de diseño

4.7 Problemas resueltos

4.8 Resumen

4.9 Problemas

### Competencias

- Conocer la teoría del transformador en sistemas eléctricos.
- Establecer el diseño de distribución eléctrica a través del uso de transformadores monofásicos y trifásicos
- Aplicar el uso de transformadores monofásicos y trifásicos en proyecto de sistemas eléctricos de potencia.

## 4.1 Problema de diseño inicial

### 4.1.1 Diseño de un transformador

En la actualidad, con la liberación del mercado de energía eléctrica reducir los costos es esencial para ofertar energía eléctrica a un precio competitivo. En este sentido, los elementos en los cuales se puede conseguir un mayor ahorro son en los de mayor costo. Los transformadores son los equipos más costosos de una subestación eléctrica, y en ellos se ha producido un abaratamiento de precios muy importante en los últimos años, en relación con el aumento del costo de vida.

Hace algunos años, optimizar los costos no era una prioridad a la hora de diseñar un transformador, el diseño estaba completamente enfocado a que el transformador fuera capaz de soportar las condiciones de servicio, por lo menos en sus componentes (en el tanque, las boquillas, el aceite entre otros ) estaban sobredimensionados para evitar problemas. Hoy en día, optimizar los costos es algo prioritario para una organización eléctrica. Este hecho unido a la gran competencia existente entre las empresas que se dedican a la fabricación de transformadores, hace que dichas empresas tengan que optimizar su diseño para que sea lo mas económico posible, asegurando el mayor funcionamiento para poder hacer un sitio en el mercado.

El diseño de un transformador es una tarea realmente complicada, hay que resolver problemas extremadamente complejos en diferentes campos de la ingeniería (electromagnéticos, electrostáticos, mecánicos, termodinámicos, etcétera.). El problema del diseño de un transformador no es sencillo, ya que, un transformador está sometido a requerimientos dieléctricos, térmicos y mecánicos y las soluciones que se podrían adoptar para resolver un problema pueden influir negativamente en otro. Así, por ejemplo, para que un transformador soporte los requisitos dieléctricos, podría ser interesante reforzar

el aislamiento sólido frente al aislamiento líquido; pero sin embargo, esa solución empeora el problema de la refrigeración del transformador. A lo largo de los años, los diseños de los transformadores han ido evolucionando debido fundamentalmente a dos causas:

- a) La operación de nuevos materiales y su tratamiento; como por ejemplo, la chapa magnética laminada en frío, los tratamientos láser de la chapa, conductores EBCTC (Epoxy Bounded Continuously Transposed Conductor), de muy alta densidad, aceros magnéticos, plásticos, pegamentos, etcétera.
- b) Nuevos métodos de cálculo, tanto dieléctricos, como térmicos, e incluso magnéticos.

Como actividad para este rubro del problema de diseño de un transformador, el lector debe establecer cuáles son las especificaciones más importantes para un proyecto eléctrico que requiera el uso de transformadores.

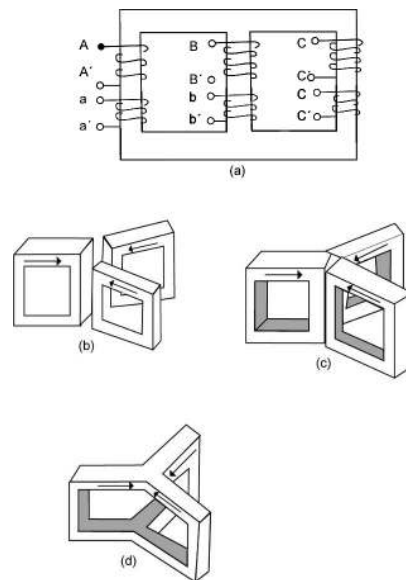
## 4.2 Introducción

La transformación de voltajes y de corrientes en los sistemas trifásicos puede realizarse de dos formas diferentes. La primera de ellas, consiste en emplear un transformador monofásico en cada una de las tres fases, de tal forma, que se formen circuitos magnéticos independientes. Este sistema es poco práctico por ser necesario incorporar tres unidades idénticas para realizar la transformación total. La segunda manera consiste en emplear un solo núcleo magnético en el que se incorporan todos los devanados necesarios.

En este caso, el sistema está formado por tres columnas iguales sobre las que se arrollan las espiras que constituyen los bobinados primarios y secundarios de cada fase como lo muestra la figura 4.1a. Se puede considerar que este núcleo trifásico, es el resultado de la unión de tres sistemas monofásicos de acuerdo con el proceso de simplificación que se observa en las figuras 4.1b, c y d, donde para dar sencillez a la figura, se ha prescindido de los devanados correspondientes. Si el sistema de alimentación es trifásico equilibrado, los tres flujos  $a$ ,  $b$  y  $c$  son iguales en magnitud, estando defasados  $120^\circ$  en el tiempo, resultando un flujo total  $T$  en la columna de retorno, como lo muestra la Fig. 4.1d. El sistema resultante: (a) se obtiene como proyección sobre un mismo plano del núcleo (d); tal disposición es la que se utiliza en la práctica, pese a que se presenta una asimetría en la columna central, merced al menor recorrido del flujo. Debido a ello, la columna central B (figura 4.1a) tiene menos reluctancia magnética que las columnas laterales A y C, lo que provoca una asimetría en las corrientes de vacío, que se hace más acusada en los transformadores trifásicos de pequeña potencia, donde las culetas desempeñan un papel relativamente importante; en estos casos, las corrientes de vacío de las fases correspondientes a las columnas laterales A y C pueden tener una corriente entre 1.2 y 1.5 veces la corriente que lleva la fase de la columna central B. Es por ello que cuando se ensayan transformadores trifásicos en vacío, deben medirse las tres corrientes primarias y tomar como valor medio de  $I$ , la media aritmética de las corrientes en las tres fases. Como quiera sin embargo, la corriente de vacío es de valor pequeño (del orden de 3% al 8% de la nominal primaria), el efecto de la asimetría de las corrientes de vacío cuando el transformador

trabaja en carga, es prácticamente despreciable, por lo que no se aprecian asimétricas de las corrientes en esta situación.

En el estudio del transformador trifásico, hay que considerar cada columna como un transformador monofásico, de tal forma que los ensayos, esquemas equivalentes, etcétera, deberán expresarse en valores simples, pudiéndose aplicar entonces las mismas técnicas de análisis empleadas en el estudio de los transformadores monofásicos. Por ejemplo; la relación de transformadores será el cociente entre el número de espiras por fase del secundario, que coincidiera con la relación entre las fuerzas electromecánicas ( $f_{em}$ ) por fase entre el primario y el secundario.



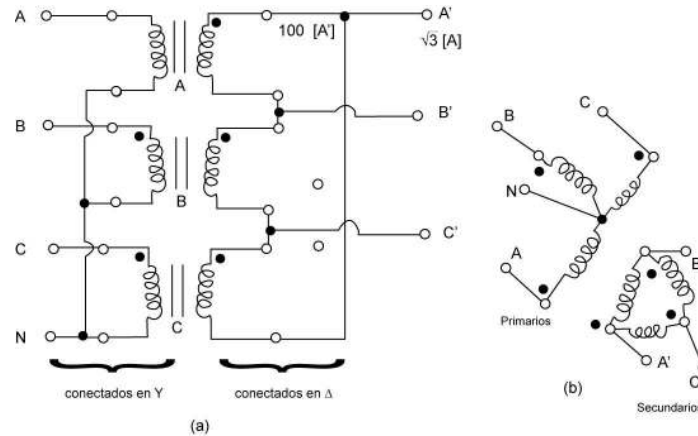
**Figura 4.1** Circuito magnético de un transformador trifásico y su génesis a partir de tres transformadores monofásicos.

### 4.3 Conexión de transformadores

La energía eléctrica trifásica puede ser transformada mediante tres transformadores monofásicos o un solo transformador trifásico. La economía es favorable en el último caso, cuando se trata de grandes líneas de transmisión, y en el primer caso, cuando se trata de transformadores de distribución más pequeños. Los principios son los mismos en ambos casos.

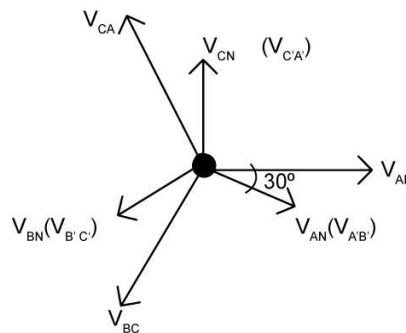
En la transformación trifásica, los primarios y los secundarios se pueden conectar en triángulo ( $\Delta$ ) o en estrella ( $Y$ ); esto ofrece cuatro combinaciones posibles:  $Y - \Delta$ ,  $\Delta - Y$ ,  $\Delta - \Delta$  y  $Y - Y$ . En este momento se analizará solamente la conexión  $Y - \Delta$ , y se resumirán las otras tres conexiones en una

tabla posterior. La conexión  $Y - \Delta$  se muestra en la figura 4.2 en dos representaciones de circuitos. Supóngase tres transformadores monofásicos con voltajes de  $V_p, V_s$  y corrientes de  $I_p, I_s$  con potencia aparente  $S = V_p I_p = V_s I_s$  operando al voltaje y corrientes normales, el voltaje y la corriente de línea del primario son  $V = \sqrt{3}V_p$  e  $I = I_p$ ; para una potencia aparente de  $\sqrt{3}VI = 3V_p I_p = 3S$ . Así pues, la potencia nominal aparente de los tres transformadores monofásicos.



**Figura 4.2.** Tres transformadores monofásicos en una conexión  $Y - \Delta$ : (a) diagrama del circuito; (b) diagrama esquemático.

En la figura 4.3 se muestra el diagrama fasorial de la conexión  $Y - \Delta$ . Los voltajes del secundario son un décimo del voltaje entre el conductor y el neutro del primario, y tiene un ángulo fuera de fase de  $30^\circ$ ; esto sugiere que se debe tener cuidado al proyectar e instalar este tipo de sistemas porque, si existen varios caminos (y suele haberlos) en casi todas las redes de energía eléctrica, los ángulos de fase deben ser siempre los correctos



**Figura 4.3** Diagrama fasorial de una conexión de transformadores  $Y - \Delta$ . Las magnitudes del voltaje no están a escala.

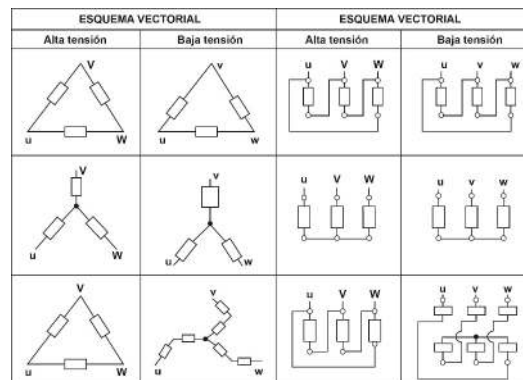
**Tabla 4.1. Voltaje y corrientes resultantes de las conexiones de los transformadores trifásicos.**

Conexiones	[V] en el primario	[I] en el primario	[V] en el secundario	[I] en el secundario
$Y - Y$	$\sqrt{3}V_p$	$I_p$	$\sqrt{3}V_s$	$I_s$
$Y - \Delta$	$\sqrt{3}V_p$	$I_p$	$V_s$	$\sqrt{3}I_s$
$\Delta - Y$	$V_p$	$\sqrt{3}I_p$	$\sqrt{3}V_s$	$I_s$
$\Delta - \Delta$	$V_p$	$\sqrt{3}I_p$	$V_s$	$\sqrt{3}I_s$

Las conexiones que pueden adoptar los transformadores trifásicos son múltiples, aunque no todas ellas se utilizan a nivel práctico. Existen realmente diez posibilidades de conexiones, tanto para el primario como para el secundario, y teniendo en cuenta las fases de los devanados, existen unas cien combinaciones de conexión, pero en realidad en la práctica sólo se emplean doce conexiones. Las conexiones de los transformadores se concentran en cuatro grupos designados por las letras mayúsculas A,B,C,D; a su vez, cada grupo se subdivide en tres tipos de conexiones como lo muestran las figuras 4.4, 4.5, 4.6 y 4.7. A continuación, se presenta cada grupo:

**1. El grupo A.** El defase entre las tensiones primarias y secundarias es cero:

- Subgrupo  $A_1$ : Está compuesto por el devanado primario conectado en  $\Delta$  y el devanado secundario conectado en  $\Delta$ .
- Subgrupo  $A_2$ : El devanado primario está conectado en  $Y$  y el devanado secundario está conectado también en  $Y$ .
- Subgrupo  $A_3$ : Está formado por el devanado primario conectado en  $\Delta$  y el devanado secundario está conectado en zig-zag, (ver figura 4.4).



**Figura 4.4** Conexiones normalizadas de transformadores trifásicos. Grupo A.

**2. El grupo B:** El defase que existe entre las tensiones de los dos devanados es de  $180^\circ$ .

- a) Subgrupo  $B_1$ : Está compuesto por el devanado primario conectado en  $\Delta$  y el devanado secundario conectado en  $\Delta$  invertido.
- b) Subgrupo  $B_2$ : El devanado primario está conectado en Y y el devanado secundario lo está en Y invertida.
- c) Subgrupo  $B_3$ : Está formado por el devanado primario conectado en  $\Delta$  y el devanado secundario está conectado en zig-zag invertido, como lo muestra en la figura 4.5

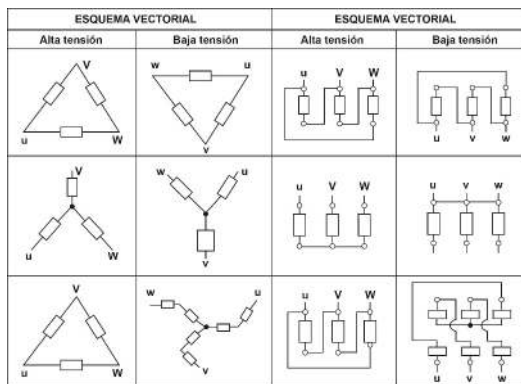
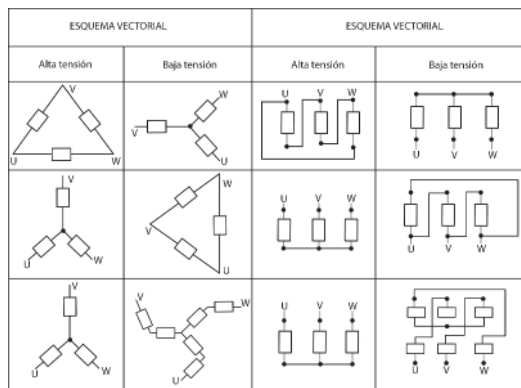


Figura 4.5 Conexiones normalizadas de transformadores trifásicos. Grupo B.

**3. Grupo C:** Entre las tensiones del devanado primario y secundario existe un defase de  $150^\circ$  en retraso, (ver la Fig. 4.6).

- a) Subgrupo  $C_1$ : Está compuesto por el devanado primario conectado en  $\Delta$  y el devanado secundario está conectado en Y.
- b) Subgrupo  $C_2$ : El devanado primario está conectado en Y y el devanado secundario está conectado en  $\Delta$ .
- c) Subgrupo  $C_3$ : Está formado por el devanado primario conectado en Y, y el segundo devanado conectado está en zig-zag.



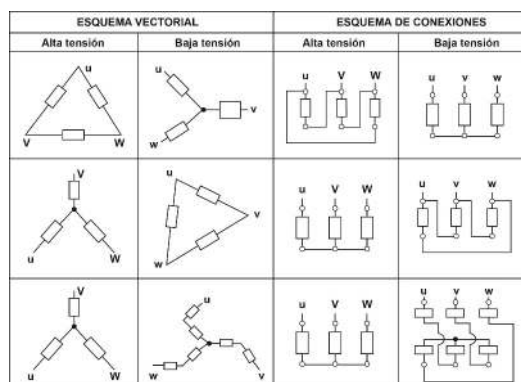
**Figura 4.6** Conexiones normalizadas de transformadores trifásicos. Grupo C.

**4. Grupo D:** Entre las tensiones del devanado primario y secundario existe un defase de  $330^\circ$  en retraso, (ver la Fig. 4.7).

d) Subgrupo  $D_1$ : Está compuesto por el devanado primario conectado en  $\Delta$  y el devanado secundario está conectado en Y.

b) Subgrupo  $D_2$ : El devanado primario está conectado en Y, y el devanado secundario está conectado en  $\Delta$ .

c) Subgrupo  $D_3$ : Está formado por el devanado primario conectado en Y, y el devanado secundario conectado está en zig-zag.

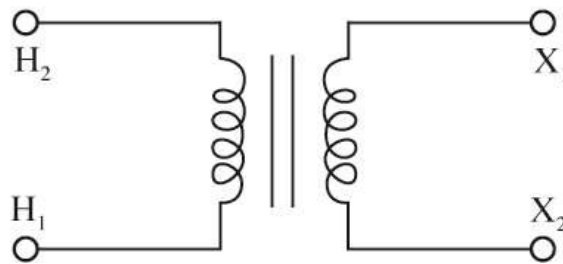


**Figura 4.7** Conexiones normalizadas de transformadores trifásicos. Grupo D.



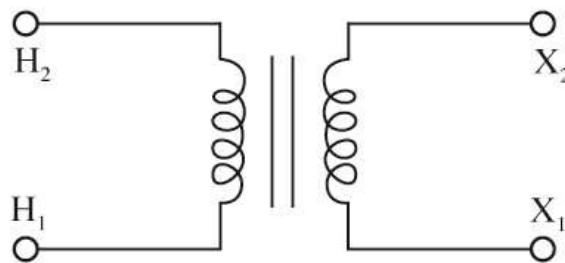
### 4.3.1 Requisitos de polaridad, transformación, impedancia, secuencia y desplazamiento angular

Las bobinas secundarias de los transformadores, se arrollan en el mismo sentido de las bobinas primarias, o en el sentido opuesto, según el criterio del fabricante. Debido a esto, podría ser que la intensidad de la corriente en la bobina primaria y la corriente de la bobina secundaria circulen en un mismo sentido, o en sentido contrario. En la práctica se tienen dos tipos de polaridad para las bobinas de los transformadores: a) Polaridad aditiva o sumativa. Ésta se da cuando en un transformador, el bobinado secundario está arrollado en el mismo sentido que el embobinado primario, esto hace que los flujos de los dos embobinados giren en el mismo sentido y se sumen. Las terminales  $H_1$  y  $X_1$  están cruzadas como lo muestra la Fig. 4.8



**Figura 4.8** Polaridad aditiva en un transformador.

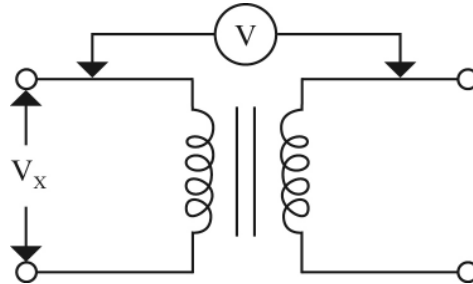
b) Polaridad sustractiva, ésta se presenta cuando en un transformador, el embobinado secundario está arrollado en sentido opuesto al bobinado primario. Esto ocasiona que los flujos de los dos embobinados giren en sentidos opuestos y se resten. Las terminales  $H_1$  y  $X_1$ , están en línea, tal como lo muestra la Fig. 4.9



**Figura 4.9** Polaridad sustractiva en un transformador.

Para determinar la polaridad de un transformador, se coloca un puente entre las terminales de lado izquierdo (primario) del transformador, y se coloca un voltímetro entre las terminales del lado derecho (secundario); luego se alimenta el embobinado primario con un valor de voltaje ( $V_x$ ) como se muestra

en la Fig. 4.10, si la lectura del voltímetro es mayor que  $V_x$ , el transformador es aditivo; o si es menor, el transformador es sustractivo.



**Figura 4.10** Determinación de la polaridad de un transformador.

A la relación entre el número de vueltas en el primario y el secundario, se le llama “relación de transformación”, y se le representa con la letra “ $m$ ”; si el transformador fuera ideal y no tuviera pérdidas, la potencia eléctrica consumida en el lado primario sería igual a la potencia generada en el lado secundario; y puesto que el flujo magnético y las corrientes están en fase:  $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$  (o sea que se mantiene el defase), se tiene:

$$P_1 = P_2 \Rightarrow V_1 I_1 \cos \varphi = V_2 I_2 \cos \varphi$$

Por lo tanto:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = m = \frac{I_2}{I_1}$$

La impedancia del transformador ( $Z$ ), también conocida como impedancia de dispersión o tensión de impedancia, se obtiene matemáticamente como:

$$\%Z = \sqrt{(\%R)^2 + (\%X)^2}$$

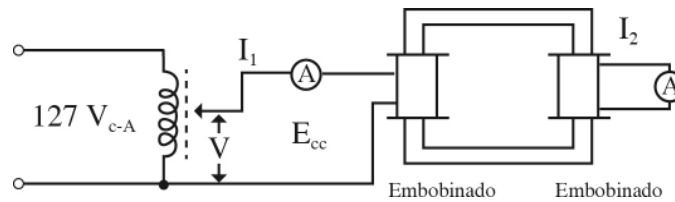
Por ejemplo; en los transformadores de distribución la componente resistiva de la impedancia puede ocupar una porción importante; por tal razón, deberá especificarse la temperatura a la cual se ha calculado el por ciento de impedancia ( $\%Z$ ).

Normalmente, la impedancia del transformador se calcula para  $75^\circ\text{C}$  ó  $85^\circ\text{C}$  para transformadores con elevación de temperatura de  $55^\circ\text{C}$  o  $65^\circ\text{C}$ , respectivamente.

En un transformador, el propósito que tiene el ensayo o prueba de cortocircuito es el de determinar:

- a) Las pérdidas en los embobinados.
- b) Las pérdidas de voltaje en el embobinado secundario, cuando el transformador está funcionando con sus valores normales.
- c) La impedancia del transformador, principalmente.

Para realizar la prueba, se pone el embobinado secundario del transformador en cortocircuito, y se alimenta el embobinado primario con un voltaje alterno regulable. Este voltaje alterno regulable parte de cero, y se va incrementando hasta alcanzar los valores nominales de corriente en ambos embobinados del transformador, como se muestra en la Fig.4.11.



**Figura 4.11** Circuito de prueba para calcular la impedancia de un transformador

Con los valores nominales de corriente en ambos embobinados, se mide el valor del voltaje en el devanado primario ( $E_{cc}$ ), y se determina la impedancia del transformador utilizando la siguiente ecuación.

$$Z = (E_{cc})(100)/E_1 [\%]$$

donde:  $Z$  es la impedancia del transformador en [%].

$E_{cc}$  es el voltaje o la tensión de cortocircuito, [V].

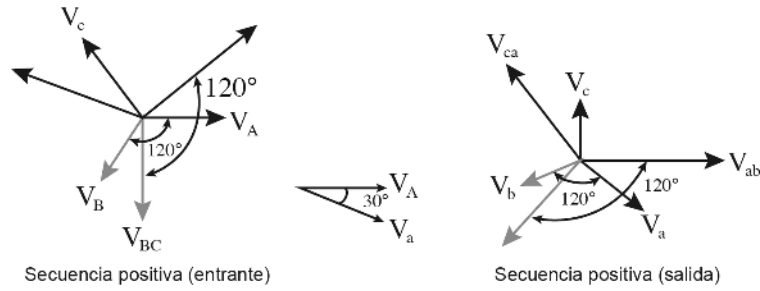
$E_1$  es el voltaje nominal en el embobinado primario, [V].

Finalmente, el valor de la impedancia del transformador debe tomarse en cuenta, al momento de realizar acoplamiento(s), para que no existan desbalances cuando se aplique una carga al banco de transformadores, también expresa la eficiencia y la calidad del transformador, ya que mientras más alto es el valor de la impedancia, mayores serán sus pérdidas.

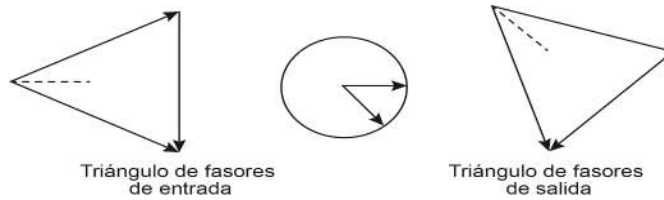
En el caso de la secuencia, las normas ANSI/IEEE han establecido una manera vectorial de reconocimiento de los defasamientos angulares, para ello se utilizan dos conceptos básicos:

- Las tensiones de secuencia positiva: Son las extensiones ideales de fase a neutro para los componentes  $a$ ,  $b$  y  $c$ , no importando si la conexión es Y o  $\Delta$ .
- El ángulo de secuencia de fases: Es el ángulo de desplazamiento de los valores de voltaje o de corriente, medido positivamente en sentido anti-horario, y negativamente en sentido horario.

Los estándares de construcción dicen que la tensión de secuencia positiva del lado de entrada del transformador debe estar siempre adelantada en  $30^\circ$  a la tensión de secuencia positiva del lado de salida del transformador. La secuencia es positiva con permutaciones de fases ABC en sentido de las agujas del reloj, el triángulo de representación fasorial: es el triángulo que se forma de unir los fasores de tensión de línea a línea (cabeza y cola), si la secuencia es positiva es ABC, y si es negativa ACB, como lo muestra la Fig. 4.12.



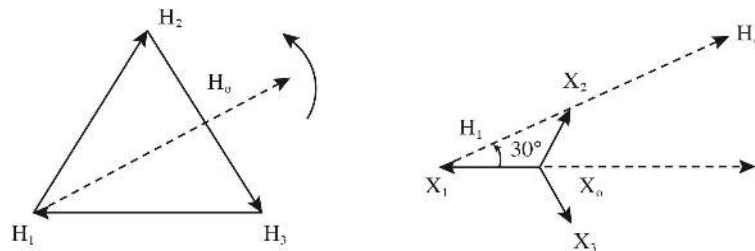
**Figura 4.12** Diagramas fasoriales de secuencia positiva entrante y salida.



**Figura 4.13** Triángulos de valores de entrada y de salida.

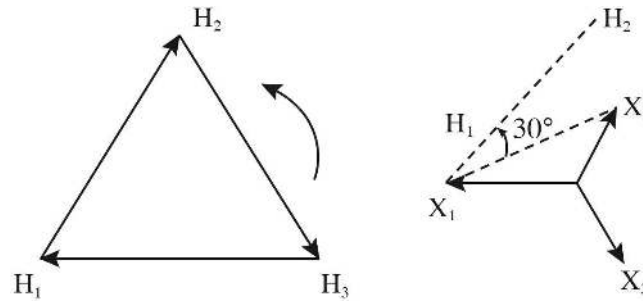
El desplazamiento angular es el ángulo de tiempo entre voltajes primarios y secundarios de referencia de un sistema trifásico. El ANSI establece que en un sistema Delta-Estrella (alta y baja tensión) el sistema de alta tensión está adelantado  $30^\circ$  con respecto al sistema de baja tensión. La medición de este ángulo, que es el desplazamiento angular, puede hacerse de dos maneras:

a) Se traza, la recta que une la polaridad H1 de alta tensión con su neutro correspondiente, y la recta que une la polaridad X1 con su neutro correspondiente (llamadas líneas de angularidad primaria y secundaria). Respectivamente, se unen las terminales H1 y X1, y se mide el ángulo formado por las líneas de angularidad en dicho vértice en el sentido contrario a las manecillas del reloj, partiendo de las líneas de angularidad de baja tensión hasta la línea de angularidad de alta tensión. En la figura 4.14 se indica lo anterior para el caso de una conexión  $\Delta - Y$



**Figura 4.14** Conexión  $\Delta - Y$  para ejemplificar el desplazamiento angular.

b) Tomando como base los voltajes de línea en alta y baja tensión y midiendo el ángulo en el vértice como en el caso anterior. En la figura 4.15 aparece este caso para la misma conexión anterior. En ambos casos midiendo el ángulo en la dirección contraria a las manecillas del reloj, se tiene el devanado de alta tensión adelante  $30^\circ$  con respecto al devanado de baja tensión.



**Figura 4.15** Representación del ángulo de desplazamiento angular con una tensión adelantada  $30^\circ$  con respecto al devanado de baja tensión (embobinado primario).

#### 4.4 Transformador trifásico

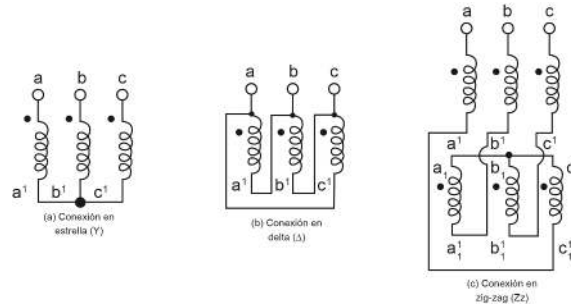
Las formas más frecuentes se emplean para realizar conexiones de los arrollamientos en: Estrella (con o sin hilo neutro), en triángulo y en zig-zag. En la conexión en estrella se unen en un mismo punto los tres extremos de los arrollamientos que pasen la misma polaridad, existiendo dos formas básicas según se unan las terminales A, B, C o A1, B1, C1 (a, b, c o a1, b1, c1 para el secundario). Para la conexión en  $\Delta$ , se unen sucesivamente los extremos de polaridad opuesta de cada dos devanados hasta cerrar el circuito; según sea el orden de sucesión en que se realiza esta operación, pueden existir dos formas diferentes:

- La conexión en zig-zag (que en la práctica sólo se emplea en el lado de menor tensión) consiste en subdividir en dos partes iguales los devanados secundarios, una parte se conecta en Y, y luego cada rama se une en serie con las bobinas invertidas de las fases adyacentes, siguiendo un determinado orden cíclico. Estas tres formas básicas se muestran en la Fig. 4.16 (y sólo se aplica en el devanado de baja tensión), consiste en subdividir en dos partes iguales los devanados secundarios, una parte se encuentra en Y, y luego cada rama se une en serie con las bobinas invertidas de las fases adyacentes, siguiendo un determinado orden cíclico. Estas tres formas básicas se muestran en la Fig. 4.16 (y sólo se aplica en el devanado de baja tensión).

- Las diferentes conexiones se designan con tres letras de acuerdo a la siguiente nomenclatura:

-Estrella: Y (en el lado de alta tensión); y (en el lado de baja tensión)

- Triángulo:  $\Delta$  (en el lado de alta tensión);  $\Delta$  (en el lado de baja tensión)
- Zig-Zag:  $Z_z$  (en el lado de alta tensión);  $Z_z$  (en el lado de baja tensión)



**Figura 4.16** Tipos de conexiones de los transformadores trifásicos.

Dependiendo de los tipos de conexión de los devanados de un transformador, pueden aparecer unas diferencias de fase entre las tensiones compuestas de primario y de secundario. Para que estas diferencias de fase queden únicamente determinadas, se supondrá que el transformador se alimenta por medio de un sistema equilibrado de tensiones de sentido directo; es decir, ABC, de tal forma que se consideran ángulos positivos los de retraso del lado de menor tensión respecto al devanado de tensión más elevada.

Estos ángulos no se miden en grados, sino que se expresan en múltiplos de  $30^\circ = 2\pi/12$  radianes, lo que permite identificarlos con los que forman entre sí las agujas de un reloj cuando marca una hora exacta, y esto da lugar al llamado “índice horario” del transformador; por ejemplo, un índice igual a 5 significa un retraso de  $(5)(30^\circ) = 150^\circ$  de la tensión menor respecto a la superior. El proceso a seguir para determinar el índice horario es el siguiente:

- 1.- Se representan las fem simples del devanado primario, de tal forma que la terminal A se sitúa en la parte superior del diagrama (coincidiendo con el número 12 de un reloj imaginario), que se colocará superpuesto al esquema vectorial.
- 2.- Se representan las fem simples secundarias, y para ello, debe tomarse en cuenta que los devanados primario y secundario situados en la misma columna producen fem en fase (para terminales homólogos).
- 3.- Se superponen ambos diagramas. El ángulo horario es el que forman dos vectores, uno que pasa por el punto A, y el centro del diagrama, y el otro el que pasa por “a” y ese mismo centro. De aquí se deduce el índice horario.

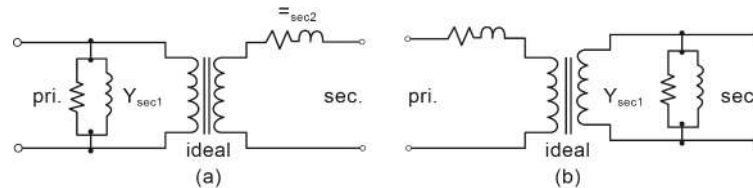
Casi todos los sistemas importantes de generación y distribución de potencia del mundo son, hoy en día, sistemas de c-a trifásicos. Puesto que los sistemas trifásicos desempeñan un papel tan importante en la vida moderna, es necesario entender la forma como estos transformadores se utilizan en el sistema.

Los transformadores para circuitos trifásicos pueden construirse de dos maneras, los cuales son;

- 1 Conectando tres transformadores monofásicos formando un banco trifásico.

2 Haciendo un transformador trifásico que consiste en tres juegos de devanados enrollados sobre un núcleo común.

Para el análisis de su círculo equivalente, conviene representar cada uno de los transformadores monofásicos que componen un banco trifásico por un circuito equivalente. Como los efectos de las capacidades de los devanados y de los armónicos de las corrientes de excitación suelen ser despreciables, podrá utilizarse cualquiera de los circuitos equivalentes deductivos para el caso de los monofásicos, los más útiles para el presente estudio son los de la figura 4.17.

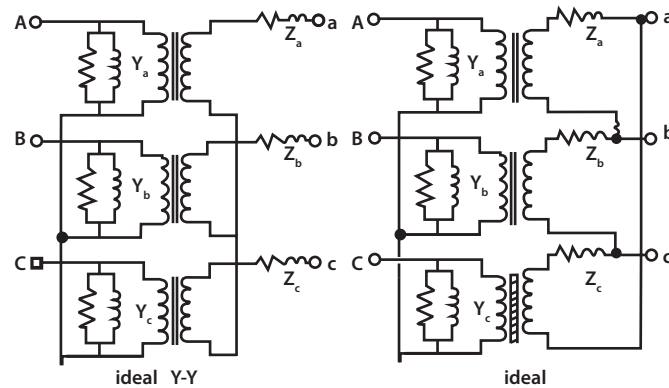


**Figura 4.17** Circuitos equivalentes para un transformador monofásico.

En ellos, el transformador está representado, como en el Teorema de Thevenin, por su impedancia en cortocircuito en serie con su tensión en circuito abierto; la razón de las tensiones en circuito abierto esta representada por un transformador ideal; y las características de excitación serán representadas por la admitancia en circuito abierto.

Los valores de los parámetros pueden obtenerse a partir de los datos del diseño o ensayos en circuito abierto o en cortocircuito tomados a uno u otro lado del transformador, y estos valores se pueden emplear, sin modificación, o en el circuito equivalente de la figura 4.18(a) (en la cual se coloca la admitancia de excitación en el lado primario), o en el cortocircuito equivalente de la figura 4.18(b) (en el cual se coloca la admitancia de excitación en el lado del secundario). En muchos problemas, los efectos de la corriente de excitación son tan pequeños, que puede despreciarse por completo la corriente de excitación y representarse el transformador por su impedancia equivalente en serie con un transformador ideal. Si se quiere, las impedancias equivalentes y admitancias de excitación de la figura 4.18, se pueden referir al otro lado del transformador multiplicando o dividiendo, según sea el caso, por el cuadrado de la razón de transformación.

El circuito equivalente de un banco trifásico de transformadores puede trazarse conectando los circuitos equivalentes de las unidades de acuerdo con las conexiones del banco. Por ejemplo, en la figura 4.18(a) puede verse el circuito equivalente de un banco estrella-estrella y en la figura 4.18(b), un circuito equivalente de un banco triángulo. En la figura 4.18 las  $Y$ , representan las admitancias en circuito o de excitación, y las  $Z$  las impedancias en cortocircuito o equivalentes.



**Figura 4.18** Circuitos equivalentes trifásicos: a) Conexión estrella-estrella, y b) conexión triángulo-triángulo.

#### 4.4.1 Características y ventajas

Hay pocas diferencias entre los transformadores trifásicos y los monofásicos, en lo que respecta a los ensayos a realizar. Por lo tanto, las especificaciones sobre temperatura y aislamiento, no pueden ser diferentes, pues las normas no hacen distinciones sobre el número de fases.

Para las caídas de tensión y regulación, también pueden estudiarse como si se tratara de uno monofásico, con sólo considerar separadamente cada fase. Ya se sabe como se combinan los resultados para hacer un diagrama trifásico único. De modo que la característica de carga externa, en el cual se le aplica la tensión de salida en los bornes del secundario, con una variación que tenga la carga, esta será prácticamente igual en cada una de las fases, por lo tanto, para el análisis del trifásico, se tomará para una fase individual. Para determinar el rendimiento, aparecerá la primera diferencia de consolidación. En efecto, las pérdidas del hierro son distintas para las tres fases, cuando el núcleo del asimétrico, lo que es común. Y para calcular el rendimiento, hay que medir las pérdidas en el hierro y en el cobre, por lo tanto, existe diferencia con respecto a los monofásicos. Por lo cual, se realizarán los ensayos en vacío y en cortocircuito.

#### Pruebas al transformador

Las pruebas que se efectuarán al transformador trifásico con:

- a).- Medición de la resistencia de los devanados.
- b).- Medición de la relación de transformación.
- c).- Prueba de vacío.
- d).- Prueba de cortocircuito.
- e).- Determinación del grupo de conexiones.



### a) Medición de la resistencia de los devanados

El objetivo de esta medición, es calcular las pérdidas por Efecto Joule (RI) en los devanados, realizando la medición con corriente continua.

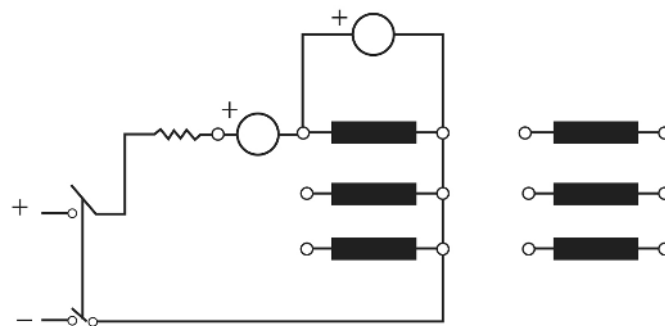
Las mediciones de las resistencias deben hacerse con la mayor exactitud posible, al igual que la temperatura a la cual se hace la medición, ya que como se sabe, la resistencia de cobre varía con la temperatura. Para conocer la temperatura que tiene el cobre en el momento de la medición, se mide la temperatura del medio ambiente o la temperatura del aceite en el que se encuentren sumergidas las bobinas, debe tenerse cuidado que por esas bobinas no haya pasado corriente en un periodo de seis horas, cuando menos.

La medición de la resistencia de los devanados es generalmente por medio del método volt-amperimétrico (caída de tensión). Sólo para transformadores muy pequeños o de alta tensión, donde los valores de resistencia pueden resultar del orden de decenas de óhms, es más conveniente recurrir al Puente de Wheatstone; mientras que para devanados de bajísima resistencia, se puede utilizar el Puente de Thomson.

La medición de la temperatura no deberá alterar apreciablemente el régimen térmico; y para este objetivo, es correcto utilizar una corriente de prueba no superior a 10 ó 15 % del valor nominal de cada uno de los devanados, limitando el tiempo de circulación al mínimo indispensable.

Ya que los devanados del transformador presentan una elevada inductancia la corriente de prueba emplea un tiempo no despreciable para estabilizarse, por lo cual, es necesario esperar que finalice el término del transitorio primero antes de iniciar la lectura. Todo esto contradice el punto anterior que tenía por objetivo una rápida medición, entonces; se deberá tomar en cuenta las siguientes precauciones que hacen más breve el transitorio (ver la fig. 4.19):

- Instalar una resistencia de valor bajo en serie con el devanado en prueba, para reducir la constante de tiempo.
- Evitar que los devanados que no estén bajo prueba, estén cortocircuitados, en este caso se inducirá una corriente transitoria, cuyo efecto retardaría la corriente prueba.



**Figura 4.19** Digrama de la prueba de medición de la resistencia de los devanados.

### b) Medición de la relación de transformación

La relación de transformación de un transformador, es la relación existente, en el funcionamiento en vacío, entre la tensión del devanado de alta tensión y la tensión del devanado de baja tensión.

Los métodos sugeridos para la medición de la relación de transformación son principalmente dos:

- **Método del potenciómetro:** Este método recurre a la utilización de un potenciómetro para corriente alterna, que realiza la medición por oposición entre la tensión baja y una fracción de alta tensión. Esto provee directamente el valor de la relación de transformación; y con algunos artificios, permite también sacar el grupo de defasamiento del transformador, así como la polaridad correspondiente de los devanados de baja y de alta tensión.
- **Método directo:** Este método se basa sobre la definición misma de la relación de transformación. Esto consiste en medir con voltímetros, las dos tensiones (primaria y secundaria) del transformador funcionando en vacío. En este método, no se tienen indicaciones, ni de conectores ni de grupos de defasamiento; pero el método es igualmente muy seguido por su extrema simplicidad, y por la buena precisión de los resultados.

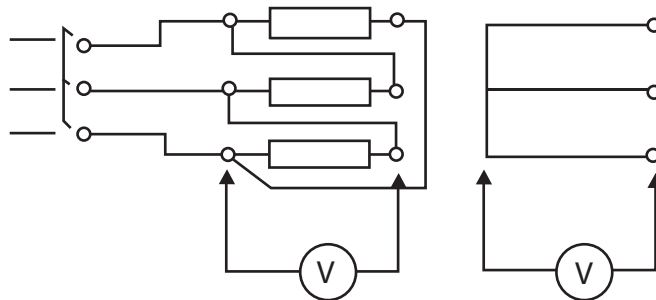


Figura 4.20 Diagrama de la prueba de relación de transformación.

### c) Prueba de vacío (circuito abierto)

Para conocer los datos que permiten conocer las características de saturación del circuito magnético y las pérdidas en el núcleo, es necesario efectuar en el transformador la prueba de circuito abierto o ensayo de vacío.

Para efectuar esta prueba se siguen los siguientes pasos:

- 1.- Excitar el transformador por uno de los devanados y dejar el otro u otros abiertos (conviene excitar el transformador, por el lado de baja tensión, para mayor facilidad de la medición).

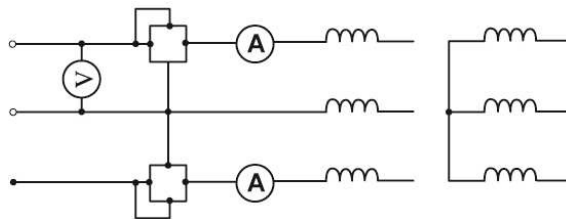
2.- Tomar como mínimo 10 lecturas alrededor de la tensión nominal sin superar un 10% ó 15% del valor nominal del transformador, para no provocar en forma excesiva la saturación magnética, lo que provocaría un crecimiento vertiginoso de la corriente  $I_o$ .

3.- Con los datos obtenidos en el punto anterior, se grafican las variables de corriente en vacío  $I_o$  contra la potencia en vacío  $P_o$ .

Las pérdidas medidas en esta prueba, incluyen las dieléctricas en los aislamientos, las causadas por el Efecto Joule en el devanado excitado y las pérdidas magnéticas en el núcleo. Sin embargo, debido a las tensiones que se emplean y a la magnitud de corriente de excitación, las pérdidas dieléctricas en los aislamientos y las pérdidas por Efecto Joule en el devanado excitado; se desprecian con respecto a las terceras. Y se engloban llamándose comúnmente pérdidas en vacío.

Se colocan 2 wáttmetros monofásicos o uno trifásico, según sea el método de medición de potencia total trifásica, un voltímetro para verificar la tensión nominal y opcionalmente amperímetros para poder determinar la corriente de vacío, y con ella, el ángulo de fase en vacío. Si el wáttmetro es trifásico dará directamente en su escala, la potencia total absorbida por el transformador, pero si se trata de dos monofásicos, hay que tener cuidado con un detalle que se recordará posteriormente.

En el método de medida de los dos wáttmetros, se suman las indicaciones de ambos wáttmetros cuando el desfase entre la corriente y la tensión es menor de  $60^\circ$ , pero si el ángulo es mayor a  $60^\circ$ , ambas lecturas se tienen que restar. En un transformador de vacío, es seguro que el ángulo de desfase es mayor de  $60^\circ$ ; por lo cual, hay que tener presente esta circunstancia, restando las lecturas de ambos instrumentos. (Ver la Fig. 4.21)



**Figura 4.21** Método de medida de los dos wáttmetros para la prueba de vacío de un transformador trifásico.

Finalmente, la potencia total de vacío, representa las pérdidas en el hierro de todo el transformador, y el ángulo de desfase de la corriente de vacío será:

$$\cos\varphi = W_0/(\sqrt{3}V_0^* I_0)$$

Debiendo tenerse presente que el ángulo cuyo coseno de la última fórmula no es el que corresponde a una fase particular, sino que a un intermedio entre las tres fases y ya se sabe que son distintos. Para tener el valor exacto de cada uno, habría que conectar tres juegos de instrumentos, uno en cada fase, y calcular el ángulo por el método de medida que se comentó en la sección correspondiente a los transformadores monofásicos.

#### d) Prueba de cortocircuito

La prueba de cortocircuito, consiste en medir la cantidad de corriente absorbida por el transformador, cuando el secundario está cortocircuitado y el primario esta alimentado con una tensión oportunamente reducida, de modo que las corrientes en los devanados resulten iguales a las nominales.

Se denomina pérdida de la carga a las originadas por el Efecto Joule en el cobre de los devanados de alto y bajo voltaje, más las que se originan en el mismo cobre, en el núcleo, el tanque y los herrajes del mismo transformador, como consecuencia del campo magnético producido por las corrientes que circulan por los devanados. Estas pérdidas son una función de la carga, y debido a las magnitudes de voltajes empleados se engloban en las pérdidas de  $I^2R$ , ver la Fig. 4.22.

Para efectuar esta prueba se siguen los siguientes pasos:

- 1.- Cortocircuitar el lado de mayor demanda de corriente (bajo voltaje) y alimente por el lado de alto voltaje (demanda menos corriente).
- 2.- Tomar como mínimo 10 lecturas, partiendo del 20 % de la corriente nominal hasta llegar al 110 %, de ser posible empezar con las corrientes más altas hasta llegar a la más baja, con el fin de uniformar la temperatura de los devanados durante la prueba.

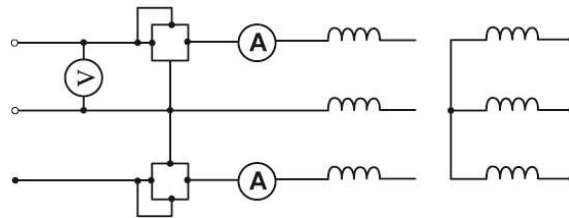


Figura 4.22 Prueba de cortocircuito.

La tensión de cortocircuito está representada por la siguiente fórmula:

$$V_{cc} = \sqrt{3}Z_e I_{cc}$$

donde  $Z_e$  es la impedancia equivalente del transformador, vista desde la alimentación. Dicha impedancia está compuesta de la resistencia equivalente  $R_{eq}$  y de la reactancia de dispersión  $X_{eq}$  de los devanados.

La potencia  $P_{c-c}$  registrada en la medición, representa las pérdidas en el cobre. Esto comprende las pérdidas por Efecto Joule debido a las resistencias de los devanados medida en c-c, y las pérdidas adicionales debidas a las corrientes parásitas inducidas, el flujo de dispersión y el paso de los devanados.

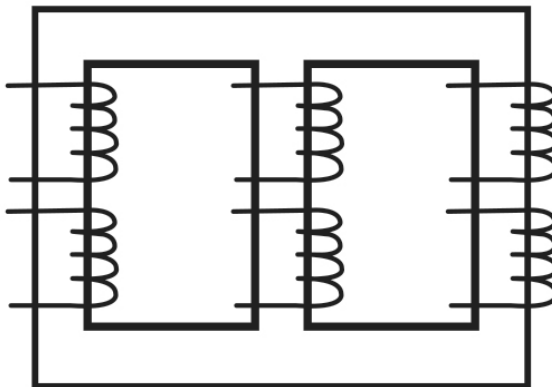
Entonces se tiene;

$$P_{cc} = 3R_t I_{cc}^2 + P_{add}$$

donde  $R_t$  es la resistencia equivalente medida en c-c y vista desde la alimentación, y  $P_{add}$  es un pequeño porcentual de  $3R_t I_{cc}^2$ .

#### e) Determinación del grupo de conexiones (defase)

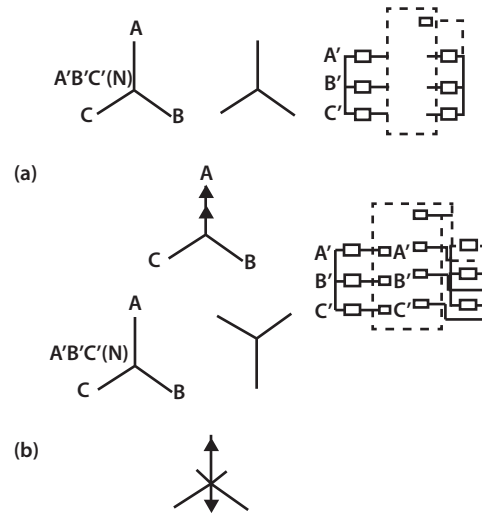
Los bancos de transformadores trifásicos según su construcción; tiene una u otras propiedades. Estas dependen de las conexiones primaria y secundaria, y también de la naturaleza de sus circuitos magnéticos. El desfase o diferencia de fase entre las tensiones primaria y secundaria en un trifásico, tiene mucha importancia en el caso que se tenga que conectar dos transformadores en paralelo, esto puede ser fácilmente determinado, si se trazan lo relativos diagramas vectoriales. Esto es posible si se conocen las conexiones primaria y secundaria; así como las conexiones de las terminales a los conectores exteriores. Mediante la prueba de polaridad, se designan las marcas en cada una de las terminales de los devanados del transformador trifásico, dos extremos con la misma polaridad se indican con las letras A y a, y los opuestos (también de igual polaridad entre sí) por A' y a'. análogamente, se procederá con los restantes devanados a base de las letras B y C como se muestra en la fig.4.23



**Figura 4.23** Prueba de polaridad en un transformador trifásico.

A los bornes (alta y baja) con la misma letra, se le denominará homólogos. Ahora bien, pueden conectarse a bornes homólogos extremos de arrollamientos de igual polaridad (a); o bien, de polaridad opuesta (b).

Ver la fig. 4.24.



**Figura 4.24** Conexión de transformadores trifásicos Y – Y (a) Polaridad idéntica. (b) Polaridad distinta.

Observando estas dos posibilidades se puede:

- (a) Formar los neutros A, B, C, (N) y a, b, c, (n), esta conexión tienen los vectores homólogos AN y an en fase (defase nulo).
- (b) Formar los neutros A, B, C, (N) y a, b, c, (n), esta conexión tienen los vectores homólogos AN y an defasados  $180^\circ (\pi)$ .

Los defases, y los efectos de nomenclatura, no se darán en grados (en este caso  $0^\circ$  ó  $180^\circ$ ), ni tampoco en radianes ( $0$  ó  $\pi$ ), sino en múltiplos de  $30^\circ$ . Es decir, se adopta como unidad de ángulo el de  $30^\circ$ . Así en el caso (a) el desfase es  $0^\circ$ , en el (b) es  $180^\circ / 30^\circ = 6$ , éstas designaciones son fáciles de retener, ya que los grados a los que corresponde la conexión se asigna al número con el cual corresponde la posición de las manecillas de un reloj, en este caso es  $0^\circ$  y es igual a 0 horas, y  $180^\circ$  corresponde a la posición 6 en el reloj. El valor de defase, así inclinado, recibe el nombre de índice de defase u horario.

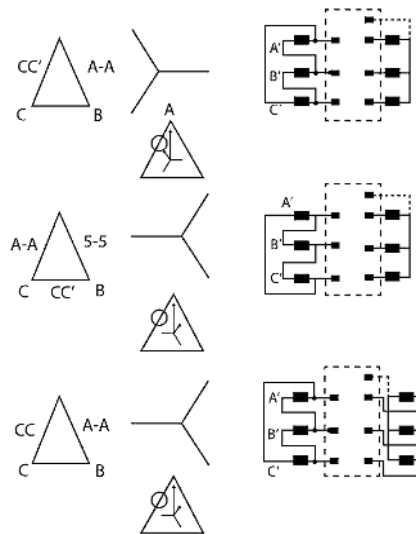
Si en el caso (a), se realiza un corrimiento cíclico, en determinado sentido, entre las conexiones o bornes del transformador, se obtendrá un desfase de  $120^\circ (\frac{2\pi}{3})$ . Si se realiza el corrimiento en sentido contrario será de  $-120^\circ (-\frac{2\pi}{3})$ , o lo que es lo mismo  $240^\circ (\frac{4\pi}{3})$ . Para verlo, basta que en el diagrama vectorial, se corran cíclicamente, las letras abc. Si se realizara en (b), se obtendrían los desfases  $60^\circ (\frac{\pi}{3})$  y  $-60^\circ (-\frac{\pi}{3})$  en lugar de  $180^\circ (\pi)$ .

### Conexión triángulo-estrella, conexión ( $\Delta$ -Y)

Existen dos formas posibles de cerrar el triángulo: Según (a) y según (b), también caben dos formas de crear los neutros: (a) y (c) de la fig. 4.25. Esto da cuatro posibilidades. Esto en definitiva da cuatro desfases posibles:

$$\pm 30 \left( \pm \frac{\pi}{6} \right) \text{ y } \pm 150 \left( \frac{5\pi}{6} \right)$$

En términos horarios 1,5,7,11. Es de interés observar que, si en lugar de aplicar al transformador un sistema de tensión ABC, se alimenta con un sistema inverso ACB, el defase cambia de signo ( $\pm 30^\circ$  pasa a  $\pm 30^\circ$ . Horariamente 11 pasa a 1 y viceversa).



**Figura 4.25** Conexiones  $\Delta$ -Y para establecer los neutros y los posibles cuatro desfases.

#### 4.4.2 Auxiliares: Tanque, boquilla, aceite, etcétera

Los transformadores de distribución trifásica son utilizados para reducir el voltaje de la red de media tensión a los niveles de las redes de distribución de baja tensión, aplicables en zonas urbanas, industria, minería, explotaciones petroleras, grandes centros comerciales y toda actividad que requiera la utilización intensiva de energía eléctrica. Su rango de fabricación va desde 5 [KVA] a 5000 [KVA], con un nivel de tensión hasta 36 [KV].

La operación satisfactoria de los transformadores sumergidos en líquido aislante, depende del diseño

adecuado, su correcta fabricación, la calidad de los materiales, una instalación apropiada y el mantenimiento preventivo de que sea objeto; el descuido de cualquiera de estos requisitos, puede provocar serios problemas en el equipo. Antes de poner en operación el transformador trifásico, se debe verificar la placa de datos o características, y los datos más importantes son:

- Número de serie.
- Capacidad.
- Tensión del primario.
- Tensión del secundario.
- Número de fases.
- Conexión.
- Frecuencia.

Igualmente debe verificarse que no existan fugas o manchas de líquido aislante por el empaque, radiadores, o en las uniones del tanque y en los cordones de la soldadura. Los radiadores no deben presentar golpes profundos o abolladuras, ya que esto puede provocar fugas del líquido aislante o la obstrucción de la circulación del líquido aislante; función indispensable para un enfriamiento óptimo. Se deberá revisar que las boquillas de baja tensión (BT) no tengan daño, como por ejemplo: Las porcelanas no deben presentar fracturas o despostilladuras, e igualmente; las terminales tipo espada, no deben estar golpeadas o deterioradas las terminales de alta tensión (AT), y no deben tener daños por golpes; además, se debe verificar que dichas terminales tengan sus protectores para intemperie instalados y protegiendo las terminales, tanto las boquillas tipo perno como las tipo pozo, la estructura del transformador y del gabinete, está diseñada para ser montado sobre un pedestal de concreto. La fig. 4.26 , muestra la lista de partes y de accesorios para transformador trifásico del pedestal con operación radial.

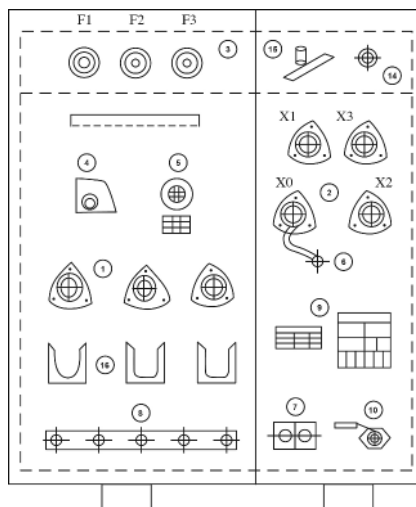
#### **Lista de pares y accesorios:**

- 1 Boquillas de alta tensión (AT).
- 2 Boquillas de baja tensión (BT).
- 3 Portafusibles “Bag-o-Net”.
- 4 Seccionador (Es).
- 5 Cambiador de derivaciones.
- 6 Tierra tipo “A”.
- 7 Tierra tipo “B”.
- 8 Barra de tierras en alta tensión, (AT).
- 9 Placas de datos.
- 10 Válvula de drenaje y muestreo.
- 14 Provisión para filtro-prensa.



15 Válvula de sobre-presión.

16 Soportes para codos.



**Figura 4.26** Lista de partes y accesorios de un transformador de pedestal en operación radial.

Dentro de las características constructivas y de los accesorios auxiliares estándar, se pueden enlistar:

- **El núcleo.** Es fabricado con láminas de acero silicoso de gramo orientado de alta permeabilidad magnética, con recubrimiento aislante, laminado en frío, pueden utilizarse dos tipos de núcleos:

1.- Núcleo tipo columna, conformado por láminas cortadas en ángulo de  $45^\circ$  y aplicadas formando escalones para obtener la sección circular más optimizada. Este tipo de núcleo, se utiliza para transformadores trifásicos de todas las potencias.

2.- Núcleo tipo enrollado, está conformado por láminas preformadas, con dobleces a  $45^\circ$ , formando una sección sólida cuadrangular, esta particular solución favorece el flujo magnético, obteniéndose características constructivas más compactas en el transformador. se usa para potencias de hasta 350 [KVA].

- **Las bobinas.** Los embobinados son fabricados con cobre electrolítico de alta conductividad, y están provistos de canales de refrigeración. Los aislamientos usados en las bobinas son de clase térmica a  $120^\circ\text{C}$  consistentes en “papel kraft”, cartón y “papel prespan”, y papel crepé, estos se destacan por sus excelentes propiedades mecánicas y dieléctricas a los esfuerzos electrodinámicos y sobre tensiones transitorias que se presentan en la línea.

- **Tanque.** Los tanques son fabricados de acero laminado en frío de primera calidad y con espesores adecuados para evitar cualquier tipo de deformación o fisura, las costuras de soldadura son verificadas presurizando el tanque y con un detector ultrasónico se descartan probables filtraciones. La refrigeración del transformador se realiza por medio de radiadores por cuyo interior circula el fluido aislante. El proceso de pintado comprende: Tratamiento de limpieza de las superficies con granalla (el granalla es una técnica de tratamiento de limpieza superficial por impacto con el cual se puede lograr un acabado superficial y simultáneamente una correcta terminación superficial. Consiste la técnica en la proyección de partículas abrasivas (granilla) a gran velocidad (65-110 [m/s]) que, al impactar con la pieza tratada, produce la eliminación de los contaminantes de la superficie); la aplicación de una capa de pintura base (recubrimiento anticorrosivo) y otra con pintura de acabado (recubrimiento epoxico). Este procedimiento permite obtener un transformador protegido contra la corrosión, abrasión, humedad, rayos solares y atmósferas industriales severas.
- **Fluido aislante.** El interior del transformador se encuentra sumergido en fluidos aislantes, el que cumple con proporcionar rigidez dieléctrica y refrigerar el transformador. El sistema de refrigeración puede ser ONAN (refrigeración extrema con aire natural) y ONAF (refrigeración externa con aire reforzado) con instalación de ventiladores. En función a las características de seguridad ambiental requeridas, se pueden proporcionar transformadores inmersos en:
  - \* Aceites dieléctricos minerales con punto de inflamación aproximada de 150°C.
  - \* Fluidos dieléctricos ecológicos (silicona o *euvirotemp* FR3) con punto de inflamación superior a los 350° [C].
- **Aisladores pasa-tapas.** Los aisladores pasa-tapas de porcelan para baja tensión son de 1 [KV] hasta 3,150 [A] y en mediana tensión son de 12, 24 y 36 [KV] de 250 ó 630 [A].

Con accesorios completos: Espárragos, arandaes, juntas, etcétera; opcionalmente, los transformadores se pueden fabricar con aisladores de resina epóxica; en baja tensión con terminal tipo bandera y en mediana tensión del tipo enchufe, para ser conectados con conectores enchufables de material elastómero tipo codo o recto según lo requerido, con la finalidad de ofrecer hermeticidad y protección.

Finalmente, un transformador trifásico, tiene los siguientes accesorios estándar, así como, equipos y accesorios opcionales:

- a) Placa de características.
- b) Tanque conservador para potencias de 75 [ KVA ] ó superiores.
- c) Indicador de nivel de aceite sin contactos.
- d) Conmutador con mando exterior, maniobra sin tensión.
- e) Nivel de llenado de aceite con tapón incorporado.
- f) Orejas de izaje.
- g) Válvula de sobrepresión.
- h) Válvula de vaciado y toma de muestra (s) de aceite.
- i) Pozo termométrico.
- j) Bornes de puesta a tierra.

- k) Bases con canal.
- l) Bases con canal de “U” para su fijación.
- m) Ruedas orientables en ambos sentidos para potencias de 500 [KVA] o superiores.
- n) Indicador de nivel de aceite con contactos.
- o) Termómetro de aceite con o sin contactos.
- p) Relé de imagen térmica con contactos.
- q) Válvula de filtrado de aceite.
- r) Deshumecedor de aire.
- s) Cajuela de protección para aislar los bornes de mediana y de baja tensión.
- t) Ruedas orientables en ambos sentidos para 500 (KVA) o inferiores.

#### 4.5 Clasificación y selección de transformadores

Los transformadores pueden clasificarse según sus aplicaciones en:

1.- Transformador elevador/reductor de voltaje. Estos son empleados en empresas transformadoras, en las sub-estaciones de la red de transporte de energía eléctrica con el objeto de disminuir las pérdidas por Efecto Joule. Debido a la resistencia de los conductores, conviene transportar la energía eléctrica a voltajes elevados, lo que origina la necesidad de reducir nuevamente dichos voltajes para adaptarlos a los que se utilizan en la práctica.

2.- Transformador de aislamiento. Proporciona aislamiento galvánico entre el devanado primario y el secundario, de manera que consigue una alimentación o señal “flotante” suele tener una relación de transformación de 1:1 y se utiliza principalmente como medida de protección en equipos que trabajan directamente con el voltaje de la red eléctrica; también se usan para acoplar señales procedentes de sensores lejanos, en equipos de electromedicina y en todas aquellas aplicaciones que requieran voltajes flotantes entre sí.

3.- Transformadores de alimentación. Este puede tener una o varias bobinas secundarias y proporciona las tensiones necesarias para el funcionamiento del equipo. Ocasionalmente, incorporan fusibles que cortan su circuito primario, cuando el transformador alcanza una temperatura excesiva, evitando que el transformador se queme con la emisión de humos y gases que conlleva el riesgo de incendio. Estos fusibles no suelen ser reemplazados, de modo que hay que sustituir todo el transformador en caso de falla.

4.- Transformador trifásico. Tiene tres embobinados en el primario y tres embobinados en el secundario. Puede adoptar forma de conexión de estrella ( $Y$ ) con hilo al neutro; o tener una conexión en delta o en triángulo ( $\Delta$ ), así como las posibles combinaciones entre esas dos conexiones ( $Y-\Delta$ ,  $Y-Y$ ,  $\Delta-Y$ ,  $\Delta-\Delta$ ). Debe tener en cuenta que aun con relaciones de transformación de 1:1, al pasar de  $\Delta-Y$  o viceversa,

los voltajes puedes variar.

5.- Transformador de pulso. Es un tipo especial de transformador con una respuesta muy rápida (baja autoinducción), destinado a funcionar en régimen de pulsos; además es muy versátil en cuanto al control de voltaje en 220 [V]

6.- Transformador de línea (**Flyback**). Es un caso particular de transformador de pulsos. Se emplea en televisores con tubos de rayos catódicos (TRC) , para generar el alto voltaje y la corriente para las bobinas de deflexión horizontal. Además, suele proporcionar otras tensiones o voltajes para el tubo (el foco y el filamento, entre otros). Además de poseer una repuesta en frecuencia más alta que muchos transformadores, tiene la característica de mantener diferentes niveles de potencia de salida, debido a sus diferentes arreglos entre sus embobinados secundarios.

7.- Transformador con diodo dividido. Es un tipo de transformador de línea que incorpora el diodo rectificador para proporcionar la tensión continua directamente al tubo. Se llama diodo dividido porque está formado por varios diodos más pequeños, repartidos por el embobinado y conectados en serie, de modo que cada diodo, sólo tiene que soportar un voltaje inverso relativamente muy bajo. La salida del transformador va directamente al ánodo del tubo, sin diodo, ni triplicador.

8.- Transformador diferencial de variación lineal (LVDT). Es un tipo de transformador eléctrico, utilizado para medir desplazamientos lineales. El transformador posee tres bobinas dispuestas extremo con extremo alrededor de un tubo. La bobina central es el devanado primario y las bobinas extremas son los devanados secundarios. Un centro magnético de forma cilíndrica sujeto al objeto cuya posición se desea medir, se desliza con respecto al eje del tubo. Los LVDT son utilizados para la realimentación de posición en servomecanismos, y para la medición automática en herramientas y muchos otros usos industriales y científicos.

9.- Transformador de impedancia. Este tipo de transformador se emplea para adaptar antenas y líneas de transmisión (tarjetas de red y teléfonos: entre otros), y era imprescindible en los amplificadores de válvulas para adaptar la alta impedancia de los tubos de vacío a la baja impedancia de los altavoces.

10.- Estabilizador de tensión. Es un tipo especial de transformador en el que el núcleo se satura cuando el voltaje en el devanado primario excede su valor nominal. Entonces, las variaciones del voltaje en el secundario quedan limitadas. Tenía una labor de protección de los equipos frente a fluctuaciones de la red eléctrica. Este tipo de transformador ha caído en desuso con el desarrollo de los reguladores de tensión eléctricos, debido a su volumen, peso, precio y baja eficiencia energética.

11.- Balun. Es muy utilizado para transformar líneas equilibradas en líneas no equilibradas; y viceversa. La línea se equilibra conectando a tierra la toma intermedia del secundario del transformador.

12.- Transformador eléctrico. Está compuesto por un circuito eléctrico que eleva la frecuencia de la corriente eléctrica que alimenta al transformador, de esta manera, es posible reducir drásticamente su

tamaño. También pueden formar parte de circuitos más pequeños y complejos que mantienen el voltaje de salida en un valor prefijado, sin importar la variación en la entrada, se les llama fuente conmutada.

13.- Transformador de frecuencia variable. Son pequeños transformadores de núcleo de hierro que funcionan en la banda de las audiofrecuencias. Se utilizan a menudo como dispositivos de acoplamiento en circuitos eléctricos para comunicaciones, medidas y control.

14.- Transformador de medida. Entre los transformadores con fines especiales, los más importantes, son los transformadores de medida para instalar instrumentos, contadores y relés protectores en circuitos de alta tensión o de elevada corriente. Los transformadores de medida aíslan los circuitos de medida o de relés, permitiendo una mayor normalización en la construcción de conectores, instrumentos y relés.

Igualmente; los transformadores se clasifican según su construcción en los siguientes tipos:

1.- Autotransformador. El embobinado primario y el secundario están conectados en serie, constituyendo un embobinado único, pesa menos y es más económico que un transformador; por ello, se emplea habitualmente para convertir 220 [V] a 125 [V] y viceversa, en otras aplicaciones similares. Tiene el inconveniente de no proporcionar aislamiento galvanico entre el primario y el secundario.

2.- Transformador toroidal. El embobinado consiste en un anillo, normalmente de compuestos artificiales de ferrita sobre el que se embobinan el primario y el secundario. Son más voluminosos, pero el flujo magnético queda confinado en el núcleo, teniendo en cuenta que hay flujos de dispersión muy reducidos, y bajas pérdidas por corrientes de Foucault.

3.- Transformador de grano orientado. El núcleo está formado por una chapa de hierro de grano orientado, enrollada sobre sí misma, siempre en el mismo sentido, en lugar de las laminas de hierro dulce separadas. Presenta pérdidas muy reducidas, pero es muy caro en su construcción. La chapa de hierro de grano orientado, puede ser también utilizado en transformadores orientados (chapa en E), reduciendo sus pérdidas.

4.- Transformador de núcleo de aire. En aplicaciones de alta frecuencia, se emplean embobinados sobre un carrete sin núcleo o con un pequeño cilindro de ferrita que se introduce en el carrete, para ajustar su inductancia.

5.- Transformador de núcleo envolvente. Está provisto de un núcleo de ferrita dividido en dos mitades que como una concha, envuelve los dos embobinados. Este tipo de transformador evita el flujo de dispersión.

6.- Transformador piezo-eléctrico. Para ciertas aplicaciones, han aparecido en el mercado, transformadores que no estén basados en el flujo magnético para transportar la energía entre el primario y el secundario; sino que emplean vibraciones magnéticas en un cristal piezo-eléctrico. También tienen la

ventaja de ser muy planos y de funcionar excelentemente a frecuencias elevadas. Se utilizan en algunos convertidores de voltaje, para alimentar los fluorescentes del “*Backlight*” de computadoras portátiles.

#### 4.6 Solución al problema de diseño

Dentro de las especificaciones más importantes para un proyecto eléctrico que requiere el uso de transformadores, se establecen los siguiente:

- Para un proyecto eléctrico de media tensión se debe considerar la posibilidad de que se ocupe una línea aérea y/o una línea subterránea. Para la construcción del sistema subterráneo, se tomarán los valores del proyecto aéreo ya existente. Los elementos a considerar son: los postes, los conductores, los accesorios, los registros, las tuberías, los transformadores, los apartarayos y el sistema de tierras necesarios para el proyecto de mediana tensión. Igualmente, se debe considerar la (s) subestación (es).
- Para un proyecto eléctrico de baja tensión es importante conocer la (s) carga (s) que se conecta (n) al transformador, derivado de la subestación de mediana tensión. Entre los parámetros importantes de dicho transformador de baja tensión, habrá que especificar la potencia de dicho transformador, los conductores de baja tensión, las acometidas, los registros y los duetos (dimensiones), sistemas de tierra y protecciones.

#### 4.7 Problemas resueltos.

**Problema 4.1** Se conecta un transformador trifásico reductor a una línea de 20 [KV] y absorbe 20 [A]. Si la relación de espiras por fase es de 100. Calcular el voltaje compuesto y la corriente de línea en el secundario del transformador para las siguientes conexiones:

- a)  $Y - Y$
- b)  $\Delta - \Delta$
- c)  $Y - \Delta$
- d)  $\Delta - Y$

Nota : Se desprecian las pérdidas en el transformador trifásico reductor.

Solución:

La potencia del transformador es en todos los casos igual a:

$$S = \sqrt{3}(V)(I) = \sqrt{3}(20000)(20) = (1.732)(20000)(20) = 692,800[\text{KVA}]$$

En las diferentes conexiones se tiene:

a) Estrella-Estrella ( $Y - Y$ ). El voltaje simple en el primario del transformador es:

$$V_1 \frac{20000}{\sqrt{3}} = \frac{20000}{1.7320} = 11547.344[\text{V}] \Rightarrow V_1 = 11547.344[\text{V}]$$

Y la corriente de cada fase coincide con la de la línea; es decir;  $I_1 = 20[\text{A}]$

Los valores simples secundarios, vendrán ligados por la relación de transformación de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$m = 100 = \frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1}$$

De donde se deduce:

$$V_2 \frac{200}{\sqrt{3}} = \frac{200}{1.7320} = 115.473[\text{V}] \Rightarrow V_2 = 115.473[\text{V}]$$

Que en valores compuestos, corresponde a 200 [V] y 2000 [A]

$$I_2 = 2000[\text{A}]$$

b) Triángulo-Triángulo ( $\Delta, \Delta$ )

De forma análoga al caso anterior ( $Y - Y$ ), se deducen unos valores de línea iguales a:

$$V_2 = 200[\text{V}] \text{ e } I_2 = 2000[\text{A}] \text{ en el secundario.}$$

c) Estrella-Triángulo ( $Y - \Delta$ )

Los valores simples del primario, teniendo en cuenta que está conectado en estrella ( $Y$ ) son:

$$V_1 = \frac{20.000}{\sqrt{3}} = \frac{20.000}{1.7320} = 11/547.344[\text{V}] ; I_1 = 20[\text{A}]$$

Los valores simples de tensión y de corriente al secundario conectado en triángulo de acuerdo con la relación de transformación dan:

$$V_1 \frac{20.000}{\sqrt{3}} = \frac{20.000}{1.7320} = 11547.344[\text{V}]$$

$$I_1 = 20[A]$$

Que teniendo en cuenta que el devanado secundario está conectado en triángulo, corresponde a unos valores de línea de  $200/\sqrt{3}[V]$  y de  $2000/\sqrt{3}[A]$ .

d) Triángulo-Estrella ( $\Delta - Y$ )

La tensión y la corriente de cada fase del primario al estar conectado este devanado en triángulo ( $\Delta$ ) son:

$$V_1 = 20.000[V]$$

$$I_1 = \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20}{1.732} = 11.543[A]$$

$$I_1 = 11.543[A]$$

Y los valores correspondientes en el devanado secundario son:

$$V_2 = 200[V]$$

$$I_2 = \frac{2.000}{\sqrt{3}} = \frac{2.000}{1.732} = 1154.3.734[A]$$

$$I_2 = 1154.734[A]$$

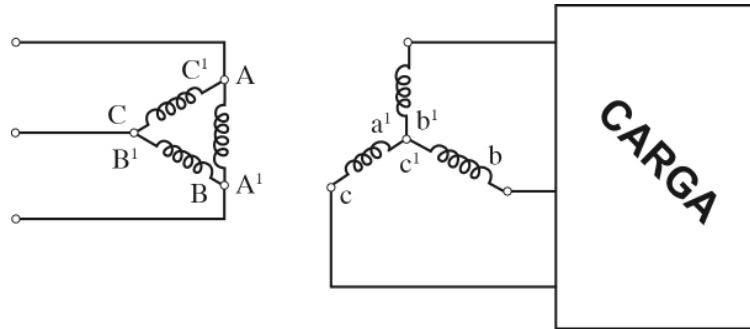
Que teniendo en cuenta que este devanado está en estrella ( $Y$ ), resultan unos valores de línea de  $(200)(\sqrt{3})[V]$  y  $20.00/\sqrt{3}[A]$ .

**Problema 4.2** Un transformador trifásico de  $20.00[KVA]$ ,  $6.600/33.000[V]$  tiene un primario conectado en triángulo ( $\Delta$ ) y un secundario conectado en Estrella ( $Y$ ). La impedancia de cada fase del primario es  $0.5 + j 2.6 [\Omega]$  y la impedancia correspondiente de cada fase en el secundario es  $4.3 + j21.7 [\Omega]$ .

Calcular el voltaje en las terminales del secundario a plena carga con un factor de potencia de 0.8 inductivo, cuando el primario se conecta al voltaje asignado de  $6.600 [V]$ .

Solución:





La relación de transformación es el cociente de las fuerzas electromotrices (f.e.m.) por fase del primario y del secundario, lo que en este caso da lugar a:

$$m = \frac{E_1(\text{fase})}{E_2(\text{fase})} = \frac{V_1[\text{vacío}]}{[\text{vacío}]} = \frac{6,600}{33,000/\sqrt{3}} = \frac{6,600}{19,05311} = 0.3464$$

$$m = 0.3464$$

De este modo, la impedancia de cortocircuito (cc) por fase del transformador es:

$$Z_{cc} = Z_1 + m^2 Z_2 = (0.5 + j2.6) + [(0.3464)^2(4.3 + j21.7)] = 1.016 + j5.204[\Omega]$$

Igualmente, el voltaje por fase se obtiene como:

$$V_{1(\text{fase})} = 6,600 = V_2' + R_{cc}I_2' \cos\varphi + X_{cc}I_2' \sin\varphi$$

La corriente de plena carga por fase del secundario del transformador es:

$$I_{2(\text{fase})} = I_{2(\text{linea})} = \frac{S_N}{(\sqrt{3})(V_{2(\text{linea})})} = \frac{2,000,000}{\sqrt{3}(33,000)} = \frac{2,000,000}{57,156} = 35[A]$$

Que corresponde a una corriente reducida al primario:

$$I_2' = I_{2(\text{fase})}' = \frac{I_{2(\text{fase})}}{m} = \frac{35}{0.3464} = 101[A]$$

Al sustituir los valores encontrados, se tiene que:

$$V_{1(\text{fase})} = 6,600 = [(0.4464)(V_{2(\text{fase})})] + [(1.016)(101)(0.8)] + [(5.204)(101)(0.6)]$$

Reacomodando los términos se tiene:

$$6,600 = [(0.4464)(V_{2(fase)})] + [(1.016)(101)(0.8)] + [(5.204)(101)(0.6)]$$

Despejando  $V_{2(fase)}$  se tiene:

$$V_{2(fase)} = 17,905.73[V]$$

Que al estar conectado el secundario en estrella, corresponde a una tensión de línea de:

$$V_{2(linea)} = (V_{2(fase)})(\sqrt{3}) = (17,905.73)(1.732) = 31,012.72[V]$$

$$V_{2(linea)} = 31,012.72[V]$$

**Problema 4.3** Se han realizado unos ensayos en un transformador trifásico de 100[KVA]; 400/6600[V]; 50 [Hz]; conexión  $Y - \Delta$ , dando los siguientes resultados: Vacío 400[v], 1.250 [W] datos medidos en el lado de baja tensión [B.T.]; cortocircuito: 314 [V], corriente de plena carga, 1.600 [W] datos medidos en el lado de alta tensión [A.T.].

- Calcular el rendimiento a plena carga con un factor de potencia de 0.8 inductivo.
- Calcular el rendimiento a media carga con un factor de potencia unitario
- Calcular la potencia aparente de máximo rendimiento y rendimiento máximo con un factor de potencia unitario.
- Calcular el voltaje necesario en el embobinado primario para el caso (a) si el voltaje en el secundario se mantiene en 6.600 [V].

Solución.

- De los ensayos del transformador se concluye que las pérdidas son:

$$P_0 = 1250[W]$$

$$P_{cc} = 1600[W]$$

Es por ello que el rendimiento a plena carga con un factor de potencia de 0.8 inductivo vale:

$$\eta = \frac{CS_N \cos \varphi}{CS_N \cos \varphi + P_0 + C^2 P_{cc}} = \frac{(1)(100)(0.8)}{(1)(100)(0.8) + 1.25 + 1.6} = 96.56 \%$$

$$\eta = 96.56 \%$$

- El rendimiento a media carga con un factor de potencia unitario vale:

$$\eta = \frac{(\frac{1}{2})(100)(1)}{(\frac{1}{2})(100)(1) + 1.25(\frac{1}{2})^2(1.6)} = \frac{50}{50 + 1.25 + 0.4} = \frac{50}{51.65} = 96.81\%$$

$$\eta = 96.81\%$$

c) El índice de carga óptimo es igual a:

$$C_{opt} = \sqrt{\frac{P_o}{P_{cc}}} = \sqrt{\frac{1250}{1600}} = 0.884$$

Por lo que la potencia de máximo rendimiento es:

$$S_{\eta(máx)} = (0.884)(100) = 88.4[KVA]$$

Y el rendimiento máximo con un factor de potencia unitario vale:

$$\eta_{máx} = \frac{(0.884)(100)(1)}{(0.884)(100)(1) + (2)(1.25)} = \frac{88.4}{90.9} = 97.25$$

$$\eta_{máx} = 97.25\%$$

d) Para realizar este apartado, es preciso calcular la impedancia de cortocircuito del transformador reducida al primario. Por sencillez, se trabajará con un transformador estrella-estrella equivalente ( $Y-Y$ ); entonces la relación de transformación es la relación de voltajes compuestos:

$$m = \frac{400}{6.600} = 0.0606$$

El ensayo de vacío está realizado en el lado de baja tensión [B.T.], y con la tensión de voltaje nominal, lo que permite identificar la potencia de 1250 [W], como pérdidas en el hierro. El ensayo de cortocircuito se ha realizado en el lado de alta tensión [A.T.] que es el secundario, por lo que se requiere pasar los datos al primario y así resulta:

$$V_{2(línea)} = 314[V] ; I_{2(línea)} = I_{2(nom)} = \frac{100000}{(\sqrt{3})(6.600)} = 8.748[A] ; P_{cc} = 1.600[W][V]$$

$$V_{1(fase)} = V_{1(cc)} = (0.0606) \left( \frac{314}{\sqrt{3}} \right) = 10.99[V] ; I_{cc} = \frac{8.748}{0.0606} = 144.36[A]$$

Y se obtiene:

$$1.600 = (3)(10.99)(144.36)\cos\varphi_{cc} \Rightarrow \cos\varphi_{cc} = 0.336 ; \text{sen}\varphi_{cc} = 0.9424$$

Que da lugar a los siguientes datos:

$$Z_{cc} = \frac{10.99}{144.3} = 0.0762[\Omega] \quad ; \quad R_{cc} = 0.0256; R_{cc} = 0.0256[\Omega] \quad ; \quad X_{cc} = 0.0717[\Omega]$$

Para determinar el voltaje primario, de forma que el voltaje de línea en el embobinado secundario sea de 6,600 [V] a plena carga y con un factor de potencia de 0.8 inductivo, se tiene:

$$V_{2(fase)}[\text{transformador en estrella equivalente}] = \frac{6,600}{\sqrt{3}}$$

$$V_{2(fase)} = mV_2 = (0.0606)\left(\frac{6,600}{\sqrt{3}}\right) = 231[V]$$

$$I_{2(fase)}[\text{plena carga}] = \frac{100,000}{(\sqrt{3})(6,600)} = 8.75[A]$$

$$I'_2 = \frac{8.75}{0.0606} = 144.38[A]$$

Por lo que:

$$V_{1(fase)} = V'_2 + R_{cc}I'_2 \cos\varphi + X_{cc}I'_2 \sin\varphi$$

Sustituyendo valores en la ec.1 se tiene que:

$$V_{1(fase)} = 231 + (0.0256)(144.38) + (0.0717)(144.38)(0.6) = 240.17[V]$$

Que corresponde a un voltaje de línea:

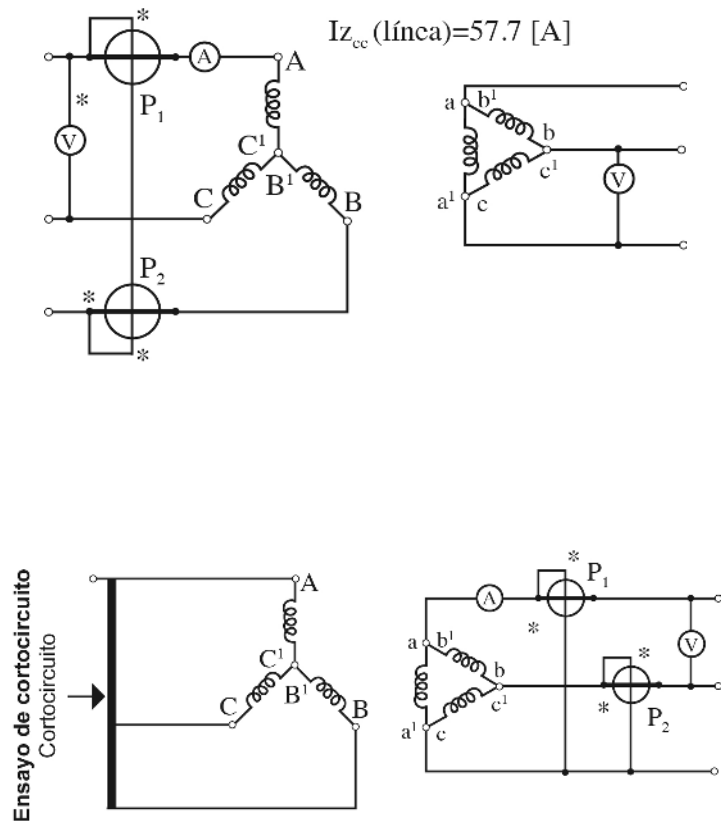
$$V_{1(línea)} = (\sqrt{3})(240.17)[V] \Rightarrow V_{1(línea)} = 415.97[V]$$

**Problema 4.4** A continuación, se muestra el esquema de conexión y de las lecturas de los aparatos de medida para la realización de los ensayos de vacío y de cortocircuito de un transformador trifásico ( $Y - \Delta$ ) de 10 [KVA]; una relación de voltajes compuestos 1.000/100 [V]. Determinar los parámetros del circuito equivalente por fase del transformador reducido al primario.

\* Lecturas en vacío:  $P_1 = 265.2[W]$  ;  $P_2 = -65.2[W]$  ;  $V_{1(línea)} = 1000[V]$

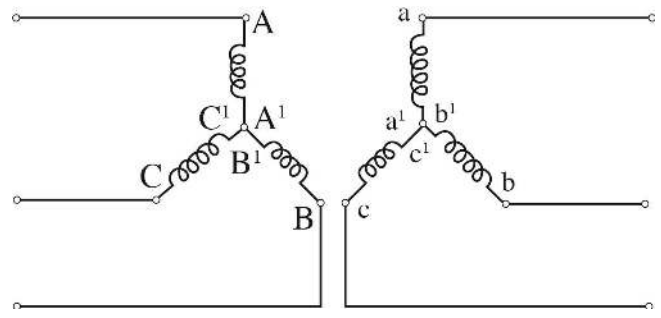
$$V_{2(línea)} = 100[V] \quad ; \quad I_{0(línea)} = 0.35[A]$$

\*Lecturas en cortocircuito:  $P_1 = 360.2[W]$  ;  $P_2 = -210.2[W]$  ;  $V_{1(cc(línea))} = 10[V]$  ;  $I_{2cc(línea)} = 57.7[A]$



Soluci\u00f3n:

Se trabaja con un transformador Estrella-Estrella (Y - Y) equivalente, como se muestra en la siguiente figura.



Del ensayo de la prueba de vacío se obtiene la potencia total trifásica:

$$P_0 = 265.2 - 65.2 = 200$$

$$P_0 = P_1 + P_2$$

Y de las medidas de los voltajes, se calcula la relación de transformación del transformador Estrella-Estrella equivalente:

$$m = \frac{V_{1(fase)}}{V_{2(fase)}} = \frac{V_{1(línea)}}{V_{2(línea)}} = \frac{1000}{100} = 10$$

Teniendo en cuenta que la corriente de vacío del primario es de 0.35 (A) resulta:

$$P_0 = (3)(V_{1(fase)})(I_{0f})\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi_0 = \frac{200}{3\left(\frac{1000}{\sqrt{3}}\right)(0.35)} = 0.33 ; \sin\varphi_0 = 0.944$$

De donde se deducen las corrientes de la rama paralela:

$$I_{fe} = (0.35)(0.33) = 0.1155[A] ; I_{\mu} = (0.35)(0.944) = 0.3304[A]$$

Y las impedancias de la rama paralela:

$$R_{fe} = \frac{\left[\frac{1000}{\sqrt{3}}\right]}{0.1155} = 5000[\Omega] ; X_{\mu} = \frac{\left[\frac{1000}{\sqrt{3}}\right]}{0.3304} = 1747[\Omega]$$

Por otra parte; el ensayo de cortocircuito está realizado en el lado del secundario; por lo que habrá de transformarse las medidas al lado primario; y de este modo, para el transformador equivalente ( $Y - Y$ ) resulta:

$$P_{corto\ circuito} = P_1 + P_2 = 360.2 - 210.2 = 150[W]$$

$$I_{2(corto\ de\ línea)} = I_{2(corto\ de\ fase)} = 57.7[A] ; I_{2(corto\ de\ fase)} = \frac{I_{2(corto\ de\ fase)}}{m}$$

$$I_{2(corto\ de\ fase)} = \frac{57.7}{10} = 5.77[A]$$

$$V_{2(corto\ de\ línea)} = 10[V] ; V_{2(corto\ de\ fase)} = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$V_{1(corto\ de\ fase)} = (m)(V_{2(corto\ de\ fase)}) = (10)\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right) = 57.74[V]$$

Y de este modo se obtiene:

$$150 = (3)(57.74)(5.77)\cos\varphi_{cc} \Rightarrow \cos\varphi_{cc} = 0.15 ; \sin\varphi_{cc} = 0.989$$

Que dan lugar a los siguientes paralelos reducidos al primario.

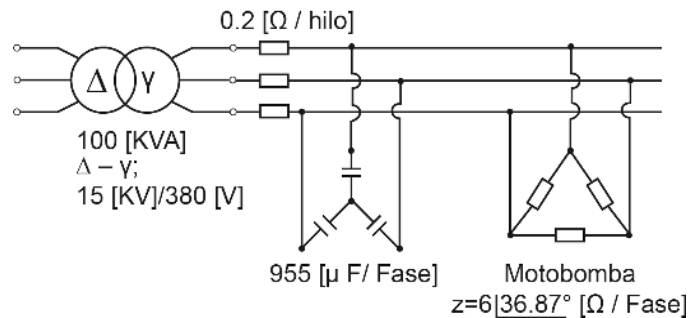
$$Z_{cc} = \frac{57.74}{5.77} = 10[\Omega] \Rightarrow Z_{cc} = 10[\Omega]$$

$$R_{cc} = (10)(0.15) = 1.5[\Omega] \Rightarrow R_{cc} = 1.5[\Omega]$$

$$X_{cc} = (10)(0.989) = 9.89[\Omega] \Rightarrow X_{cc} = 9.89[\Omega]$$

**Problema 4.5** La siguiente figura, muestra el esquema simplificado de la instalación eléctrica de un grupo de bombeo utilizado para un sistema de riego por aspersión. Se dispone de una red de distribución de 15 [KV]/380 [V] que suministra energía eléctrica al grupo motobomba a través de una línea resistiva de 0.2 ( $\Omega$ ) por hilo. El grupo motobomba está representado por una impedancia en  $\Delta$  de  $6/\underline{36.87^\circ}$ . Las características del transformador que se ven en su placa de características son las siguientes:

$$100[\text{KVA}]; \Delta - Y ; 15[\text{KV}]/380[\text{V}] ; \epsilon_{cc} = 10\% ; \epsilon_{X_{cc}} = 8\%$$



a) Calcular los parámetros  $R_{cc}$ ;  $X_{cc}$ ;  $Z_{cc}$  del circuito equivalente del transformador reducido al primario (se desprecia la rama paralelo del circuito equivalente).

b) Calcular la tensión secundaria de línea en las terminales del secundario del transformador y el voltaje en las terminales del grupo de la motobomba, si la red en alta tensión tiene un voltaje constante de línea de 15 [KV]

c) El rendimiento del transformador en estas condiciones.

d) Calcular si para corregir el factor de potencia del grupo de la motobomba se conecta un banco de capacitores en estrella de  $955[\mu\text{f}/\text{fase}]$ ; ¿cual será la nueva tensión de línea en las terminales del grupo de la motobomba?

Solución:

$$a) S_N = (\sqrt{3})(V_{1N})(I_{1N}) \Rightarrow 1,000,000 = (\sqrt{3})(15,000)(I_{1N}) \Rightarrow I_{1N} = 3.85[A]$$

$$\epsilon_{cc} = 10\% = \frac{Z_{cc}I_{1N}}{V_{1(\text{fase})}} \Rightarrow 0.1 = \left( \frac{Z_{cc}(3.85)}{(1,500)(\sqrt{3})} \right) \Rightarrow Z_{cc} = 225[\Omega]$$

$$\epsilon_{X_{cc}} = 8\% = \frac{(X_{cc})(I_{1N})}{V_{1(\text{fase})}} \Rightarrow 0.08 = \frac{(X_{cc})(3.85)}{(1,500/\sqrt{3})} = 180 ; X_{cc} = 1800[\Omega]$$

Y de este modo; el valor de la resistencia de cortocircuito reducida al primario es:

$$R_{cc} = \sqrt{(Z_{cc})^2 - (X_{cc})^2} = \sqrt{(225)^2 - (180)^2} = 135[\Omega] ; R_{cc} = 135[\Omega]$$

Finalmente; al tratarse de una conexión  $\Delta$  en el primario del transformador, los valores son tres veces mayores, por lo que:

$$R_{cc(\Delta)} = (135)(3) = 405[\Omega] \Rightarrow R_{cc(\Delta)} = 405[\Omega]$$

$$X_{cc(\Delta)} = (180)(3) = 540[\Omega] \Rightarrow X_{cc(\Delta)} = 540[\Omega]$$

$$Z_{cc(\Delta)} = (225)(3) = 675[\Omega] \Rightarrow Z_{cc(\Delta)} = 675[\Omega]$$

b) Se utilizará el siguiente arreglo reducido al primario del transformador, utilizando una configuración momentánea en estrella ( $Y$ ), para facilitar los cálculos; aunque de origen se sabe que el primario del transformador está conectado en triángulo ( $\Delta$ ).

$$m = \frac{1.500}{380} = 39.47 ; Z_{\lambda} = \frac{Z(\Delta)}{3} = (6/36.87^\circ)(3) = 2[\Omega] = 1.6 + j1.2[\Omega]$$

Y al pasar la impedancia de carga, y la impedancia de línea al primario (los capacitores no están conectados), resulta:

$$(m^2)(2) = 39.47^2(2)(3116.3) = 2493. + j1869.8[\Omega]$$



$$(m^2)(0.2) = (39.47)^2(0.2)[\Omega]$$

Eligiendo el voltaje de fase del primario como referencia, se obtiene una corriente primaria expresada por:

$$I_1 = \frac{(1,500/\sqrt{30^\circ})}{(135 + j180) + (311.6) + (2.493 + 1.869.8)} = \frac{(15,000/\sqrt{30^\circ})}{2.939.6 + 2.049.8} = \frac{(15,000\sqrt{30^\circ})}{3.583.734.89^\circ} = I_1 I_2 = 2.417 \angle -34.89[A]$$

Y de este modo el voltaje  $V'_2$  es igual a:

$$V'_2(311.6 + 2493 + j)(1869.8)(2.417) = (3370.7)(2.417)$$

$$V_2 = 8,147.1[V]$$

El voltaje de fase<sub>2</sub>( $V_2$ ) valdrá de este modo:  $V'_2 = mV_2$  ; entonces:

$$V_2 = \frac{8147.1}{39.47} = 206.4[A] ; V_{2(línea)} = (\sqrt{3})(206.4) = 357.5[V]$$

Y la tensión reducida en las terminales del grupo de la motobomba será:

$$V'_L = mV_L ; V_L = \frac{7532.1}{39.47} = 190.8[V] ; V_{L(línea)}(\sqrt{3})(190.8) = 330.5[V]$$

$$V_{L(línea)} = 330.5[V]$$

d) El rendimiento por fase del banco de capacitores es:

$$Z_c = -j \frac{1}{c\lambda\omega} = \frac{10^6}{j(955)(2\pi)(50)} = -j3.33[\Omega]$$

Que al estar en paralelo con la impedancia del grupo de la motobomba, da un valor equivalente de:

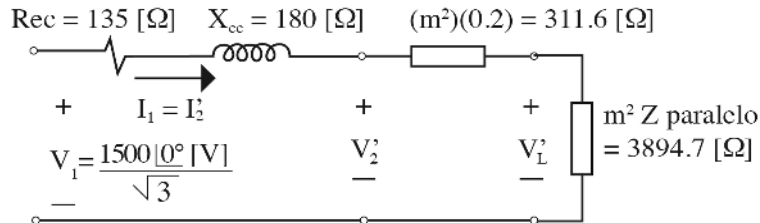
$$Z_{paralelo} = \frac{(2)(-j3.33)}{(1.6 + j1.2 - j3.33)} = \frac{6.666}{2.66} = 2.5[\Omega]$$

Pasando esta impedancia al lado del primario del transformador da:

$$Z'_{paralelo} = (m^2)(Z_{paralelo}) = (39.47)^2(2.5) = 3894.7[\Omega]$$

En la siguiente figura se muestra el cortocircuito equivalente correspondiente por fase, del nuevo cortocircuito reducido al primario. En esta figura, la nueva corriente por fase del primario el transformador es:

$$I_1 \frac{(15.000/\sqrt{3})0^\circ}{135 + j180 + (311.6) + (3.894.7)} = \frac{(15.000)/\sqrt{3}}{4.325} = 1.993[A] = I_2'$$



Y el voltaje  $V_L'$  vale ahora:

$$V_L' = (3894.7\angle 0^\circ)(1.993\angle -2.37^\circ) = 7762.1\angle -2.37^\circ [V]$$

Y de este modo, resulta un voltaje de línea:

$$V_L = 7.762.1 \text{ ; } V_L = mV_L \text{ ; } V_L = \frac{7.762.1}{39.47} = 196.6[A]$$

$$V_{(línea)} = (\sqrt{3})(196.6) = 340.6[V] \text{ ; } V_{(línea)} = 340.6[V]$$

## 4.8 Resumen

La energía de un sistema magnético se almacena en el espacio que ocupa el sistema; principalmente en los espacios de aire. Los campos magnéticos se visualizan como algo que ejerce un esfuerzo sobre el material y el espacio, por lo cual, es vehículo para el almacenamiento de la fuerza magnética.

La función de una estructura mecánica es aumentar la cantidad de flujo magnético y dirigir su trayectoria a través del espacio. El análisis de una estructura magnética se basa en la Ley de Ampère, y da origen a la definición de la reluctancia, como el cociente entre la fuerza electromotriz y el flujo del sistema.

La inductancia está determinada por la reluctancia, y por el número de vueltas de la bobina que impulsa al sistema.

Un transformador se compone de dos o más bobinas estrechamente acopladas por una estructura magnética. El cociente del voltaje de un transformador ideal, se deduce de la Ley de Faraday, y la razón de corrientes, de la Ley de Ampère. Los transformadores reales tienen un flujo disperso y magnetizante, pérdidas en el hierro y resistencia de los devanados.

El modelo del círculo equivalente de un transformador incluye (además de un transformador ideal) resistencias que representan la pérdida en el hierro y en el cobre; e inductores que representan el flujo disperso y magnetizante.

Los elementos de circuito, de un circuito equivalente se determinan por medio de mediciones de voltaje, corriente y potencia en el transformador con la salida abierta y, con voltaje reducido, con la salida del cortocircuito.

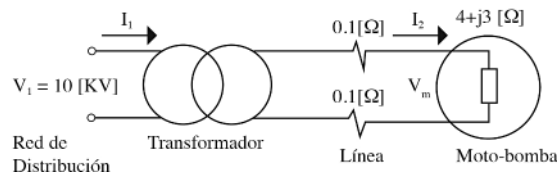
## 4.9 Problemas

**4.1** Se dispone de tres transformadores de 440 (KVA); 24 (KV)/400 (V); conexión (y) con los siguientes parámetros:

Transformador 1:  $P_{cc1} = 5.8[KW]$  ;  $\epsilon_{cc1} = 4\%$   
 Transformador 2:  $P_{cc2} = 6[KW]$  ;  $\epsilon_{cc2} = 4.5\%$   
 Transformador 3:  $P_{cc3} = 5[KW]$  ;  $\epsilon_{cc3} = 3.8\%$

Se acoplan en paralelo los 3 transformadores; ¿cuáles serán las potencias complejas que suministrarán cada uno, cuando alimentan una carga trifásica de 1,000 (KVA) con un factor de potencia de 0.8 inductivo?

**4.2** El diagrama de la siguiente figura, muestra el esquema simplificado de la instalación eléctrica de un grupo de bombeo para el suministro de agua a una pequeña finca.



Se dispone de una red de alimentación y distribución de voltaje de 10 000[V], 50 [Hz]; por medio de un transformador monofásico de 20 (KVA); relación de transformación de 10.000[V]/250[V]. Suministra energía eléctrica a un grupo de motobombas a través de una línea resistiva de 0.1 [ $\Omega/hilo$ ]. El motor eléctrico del grupo motobomba se ha representado por una impedancia de  $4+j3$  ( $\Omega$ ). Las características

del transformador las ha suministrado el fabricante por medio de los siguientes ensayos:

- Vacío: 250 [V]; 10 [A]; 1.000 [W] (medidos en el lado de baja tensión ).
- Cortocircuito: 800 [V]; 2[A]; 800[W] (medidos en el lado de alta tensión).

- a) Calcular los parámetros del circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario
- b) Calcular el voltaje secundario del transformador y el voltaje en las terminales del grupo de la motobomba, si la red de distribución (alimentación) tiene un voltaje constante de 10 [KV].
- c) Calcular la corriente primaria absorbida por el transformador y el rendimiento del mismo en las condiciones del inciso (b).
- d) Si para corregir el factor de potencia del motor eléctrico de grupo de la motobomba se conecta en paralelo con el mismo, un banco de capacitores de 382 [ $\mu$ F]. ¿cuáles serán los nuevos voltajes en el secundario del transformador y en las terminales del motor?

**4.3** Un transformador trifásico con devanado terciario y conexiones Y-Y-tiene una relación de voltajes compuestos en vacío de 6,600/660/220 [V], y absorbe en vacío, una potencia de 10[KW] con un factor de potencia de 0.2 inductivo. Calcular la potencia aparente del embobinado primario y su factor de potencia cuando el secundario alimenta una carga trifásica equilibrada de 800 [A] con un factor de potencia de 0.8 inductivo; y el terciario absorbe una corriente trifásica equilibrada de 300 [A] con un factor de potencia unitario.

**4.4** Un transformador trifásico con devanado terciario y conexiones ( $Y - Y - \Delta$ ) tiene una relación de voltajes compuestos en vacío de 10,000/1,000/500 [V] y absorbe en vacío, una corriente magnetizante de 5 [A]. El devanado secundario tiene una carga equilibrada de 500 [KVA] con un factor de potencia de 0.8 inductivo; y el devanado terciario tiene una carga equilibrada de 180 [KW], prescindiendo de las pérdidas normales. Calcular las corrientes en las fases de los devanados primario y terciario, si el factor de potencia del primario es de 0.775 inductivo.

**4.5** Se dispone de un transformador monofásico de 100 [KVA]; relación de transformación 1,000/100 [V] que ha dado los siguientes resultados en unos ensayos:

\* Vacío: 100 [V]; 50[A];3.000 [W] (medidas en el lado de baja tensión).

\* Cortocircuito: 100[V]; 100[A]; 6,000[W] (medidas en el lado de alta tensión).

a) Calcular los parámetros del circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario (lado de alta tensión).

b) ¿Cuál será el voltaje que deberá aplicarse al primario cuando el transformador alimenta una

carga con factor de potencia de 0.8 inductivo, sabiendo que en estas condiciones la máquina trabaja con un índice de carga para el cual, el rendimiento es máximo (la tensión secundaria se considera que es igual a 100[V]?; ¿cual será el rendimiento del transformador en estas condiciones?

c) El transformador se acopla en paralelo con otro de 220 [KVA], 1,000/100[V] y con parámetros  $\epsilon_{R_{cc2}}$  y  $\epsilon_{X_{cc2}}$  ilegibles en su placa de características. Se observa que cuando ambos transformadores alimentan una carga conjunta de 200 [KW] con un factor de potencia de 0.8 inductivo, siendo el voltaje secundario el nominal de 100 [V], el nuevo transformador suministra a la carga una potencia activa de 155 [KW] y una potencia reactiva inductiva de 85 [KVA reactivos). Calcular  $\epsilon_{R_{cc2}}$  y  $\epsilon_{X_{cc2}}$  del segundo transformador.

- (b)  $V_{1=1068[V]}$  ;  $\eta = 90\%$   
 (c)  $\epsilon_{R_{cc2}} = 8\%$  ;  $\epsilon_{X_{cc2}} = 4\%$

**4.6** Un transformador monofásico de 50 [KVA];1,000/200 [V]; 50[HZ], ha dado los siguientes resultados en unos ensayos:

\* Vacío: 2000 [W]; 200[V]; 25[A] (medidas en el lado de baja tensión).

\* Cortocircuito: 2,500[W]; 100[V]; 50[A] (medidas en el lado de alta tensión).

a) Calcular los parámetros del cortocircuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario.

b) Se conecta una carga en el lado secundario que absorbe 20 [KW] con un factor de potencia de 0.8 inductivo. Si la tensión secundaria es la normal de 200[V]. Calcular la tensión primaria necesaria en el transformador, y el rendimiento del transformador en esas condiciones.

c) Se dispone de tres transformadores iguales al ya citado, que se conectan en Estrella en la parte de alta tensión (primario) y en Estrella en la sección de baja tensión (secundario). Si se alimenta el lado primario de esta combinación a una red trifásica de (1,000) ( $\sqrt{3}[V]$ ) de línea, y se coloca en el lado secundario una carga trifásica equilibrada conectada en Triángulo de impedancia  $1.8 + j2.4[\Omega/fase]$ , calcular el voltaje secundario de línea, y el rendimiento del transformador en esas condiciones.

**4.7**Un transformador tiene un rendimiento máximo del 98% cuando trabaja dando 15 [KVA] con un factor de potencia unitario. Durante el día está cargado del siguiente modo:

- 1) 12 horas suministrando una potencia activa de 2[KW] con un factor de potencia de 0.5 inductivo.
- 2) 6 horas suministrando una potencia aparente de 15 [KVA] con un factor de potencia de 0.8 inductivo.
- 3) 6 horas suministrando una potencia activa de 18 [KW] con un factor de potencia de 0.9 inductivo.

Calcular el rendimiento del transformador en un día completo de acuerdo a los datos anteriores.

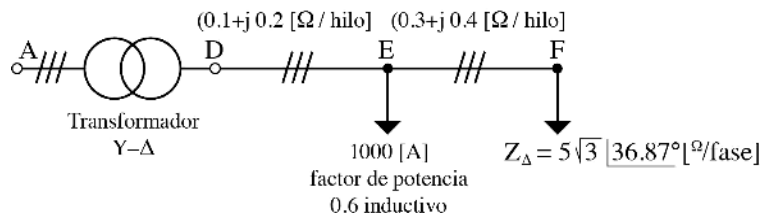
**4.8** Un transformador monofásico con valores asignados de 10[KVA]; 400/100 [V] tiene una impedancia de cortocircuito referida al primario de  $0.6 + j0.8[\Omega]$ . Las pérdidas en el hierro son de 250 [W] y puede prescindirse de la corriente de magnetización. Se conectan las bobinas del transformador en serie para construir un autotransformador elevador de voltaje de relación 400/500 [V].

- Calcular la potencia a plena carga que pueda asignarse a este autotransformador.
- Si el autotransformador funciona a plena carga con un factor de potencia de 0.8 inductivo, y el voltaje del secundario es de 500[V], ¿cual será el voltaje necesario en el primario?
- Calcular el rendimiento de acuerdo al inciso (b).
- Repetir el problema si las bobinas se unen del modo correcto, para construir un autotransformador reductor de voltaje de relación 500/100 [V], funcionando a plena carga correspondiente con  $V_2=100$  [V] y un factor de potencia de 0.8 inductivo.

**4.9** En el circuito de la siguiente figura, se muestra un esquema unifilar de una red de distribución trifásica alimentada por un transformador ( $Y - \Delta$ ) de relación 10[KV]/400 [V], en el que se consideran despreciables la corriente de magnetización y las pérdidas en el hierro. Al realizar un ensayo de cortocircuito del transformador (cortocircuitando el secundario), se aplicó al devanado primario un voltaje de línea de  $(800)(\sqrt{3})[V]$ , resultando una corriente primaria de 200[A] con un factor de potencia de 0.60. La impedancia por hilo de la línea trifásica desde D hasta E es de  $0.1 + j0.2[\Omega]$  y la de E hasta F es de  $0.3 + j0.4[\Omega]$ . En el nodo E hay una carga conectada en estrella que absorbe 1,000 [A] con un factor de potencia de 0.6 inductivo, y en el nodo F existe una carga trifásica equilibrada conectada en  $\Delta$  de impedancia  $(5)(\sqrt{3}) \underline{36.87^\circ}$ .

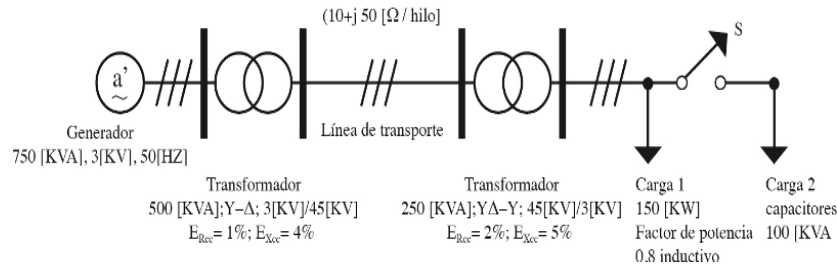
F es de  $0.3 + j0.4[\Omega]$ . En el nodo F hay una carga conectada en estrella que absorbe 1,000[A] con un factor de potencia de 0.6 inductivo, y en el nodo F existe una carga trifásica equilibrada conectada en  $\Delta$  de impedancia  $(5)(\sqrt{3})\underline{36.87}[\Omega]$ .

- Calcular el voltaje que debe tener el primario del transformador para que en el nodo F, la tensión compuesta sea de 2,500[V]
- Si manteniendo el voltaje primario constante en el valor calculado en el punto anterior se desconecta la carga conectada en el nodo E, ¿cuál será el valor que alcanzará el voltaje en el nodo F?



**4.10** En la siguiente figura muestra el esquema unifilar de un sistema eléctrico de potencia, que está formado por un generador trifásico de 750[KV] ; 3[KV] y 50[Hz] que alimenta cargas a través de una red de transporte y que tiene dos transformadores ( $\Delta - Y$ ) en cada extremo con los parámetros señalados en la figura (se desprecia la corriente de vacío de los transformadores) la carga 1 es trifásica y equilibrada y consume 150[KV] con un factor de potencia de 0.8 inductivo, y la carga 2 es una batería de capacitores colocados en  $\Delta$  de 100[KV]. Inicialmente el interruptor S está abierto.

- Calcular el voltaje que debe producir el generador al principio de la línea para que en la carga 1, la tensión compuesta sea de 3 [KV].
- Calcular la potencia activa y reactiva que debe suministrar el generador.
- Calcular el rendimiento de la instalación, definido como el cociente entre la potencia activa al final de la línea (en la carga), y la potencia activa al principio de la línea (generador).
- Repetir los tres cálculos anteriores, cuando se cierra el interruptor S, y se incluye el banco de capacitores en la instalación.



## Capítulo 5

### Transformadores de distribución

5.1 Problema de diseño

5.2 Introducción

5.3 Conexiones y funcionamiento de los transformadores

5.4 Transformadores monofásicos en circuitos bifásicos

5.5 Tres transformadores en circuito trifásico

5.6 Características del funcionamiento de la conexión Y-Y

5.7 La conexión en  $\Delta$  abierta o en V

5.8 Funcionamiento en paralelo de transformadores  
conectados en  $\Delta$  abierta y en  $\Delta$  cerrada

5.9 Características de funcionamiento de las conexiones  
 $\Delta$ -Y e Y- $\Delta$

5.10 Funcionamiento en paralelo de conexiones en  
Y-Y,  $\Delta$ - $\Delta$ ,  $\Delta$ -Y y Y- $\Delta$

5.11 Conexión en T en los sistemas trifásicos

5.12 Protección de transformadores de distribución

5.13 Autotransformadores

5.14 Cálculo de pérdidas y su optimización

5.15 Normas de diseño, pruebas y puesta en servicio



**5.16 Respuesta al problema de diseño****5.17 Resumen****5.18 Problemas resueltos****5.17 Problemas****Competencias**

Conocer las características operativas y aplicaciones de los transformadores de distribución.

**5.1 Problema de diseño**

En un proyecto de distribución de líneas y de redes de energía eléctrica que utiliza transformadores, la distribución urbana y rural en mediana tensión será trifásica; mientras que la distribución rural será monofásica.

Para redes de distribución en baja tensión, la red principal que corresponde a la ruta del tramo de mayor momento eléctrico acumulado, desde la subestación hasta el último apoyo o caja de inspección, será trifásica tetrafilar, permitiéndose como máximo, un cambio de calibre de conductor.

En todos los casos, urbano y rural, el calibre del conductor neutro será igual al calibre del conductor de fase. Las redes de distribución rural en baja tensión serán radiales trifásicas o monofásicas. Las líneas y redes en mediana tensión y en baja tensión, serán por lo general aéreas; excepto en los siguientes casos en los que será subterránea:

- Donde las normas de construcción de los municipios, expresamente lo prohíben; como en el caso de las zonas arqueológicas.
- Dentro de conjuntos residenciales.
- Cruzando parques, vías de alto tránsito de vehículos pesados de mercancías y/o de pasajeros; y en estacionamiento de zonas comerciales.

- En sitios donde su ubicación no permita lograr las distancias mínimas de seguridad.
- En los sectores clasificados como de distribución urbana y centro de ciudades (zona comercial y zona bancaria).
- Edificios de departamentos. Se incluye la alimentación en mediana tensión.

Establezca cuáles son los parámetros principales, para la creación de un proyecto de distribución, utilizando transformadores de distribución.

## 5.2 Introducción

Un transformador de distribución es un equipo eléctrico que sirve para tomar el voltaje de mediana tensión (13.8 [KV]) que tienen las redes de distribución (líneas aéreas) en las zonas pobladas y transformarlo en voltajes adecuados a niveles de los usuarios residenciales, comerciales, industriales o institucionales ( $127 V_{c-A}$ ;  $220 V_{c-A}$  ó  $440 V_{c-A}$ ).

Un transformador de distribución, normalmente se ubica en estructuras metálicas denominadas “postes”, y se agrupan hasta tres de ellos, para formar un “banco o grupo de transformación”. Su importancia radica en que es el encargado de mantener la alimentación eléctrica en las diferentes zonas de los usuarios: una falla en un transformador de distribución perjudica una gran cantidad de personas que hacen uso de la electricidad, y que son alimentadas por el mismo grupo de transformación.

Los transformadores de distribución trifásicos son utilizados para pasar de alta tensión a baja tensión en redes de distribución, principalmente en áreas metropolitanas y para aplicaciones industriales. Los transformadores en versiones estándar son trifásicos, y pueden ser instalados tanto a la intemperie, como en interiores.

Los transformadores de distribución están herméticamente sellados o están equipados con un tanque de expansión ondulado que permite la refrigeración suficiente del transformador, y compensa los cambios de volumen del aceite durante la operación. Una ventaja de los transformadores herméticamente sellados es que el aceite durante la operación, no está nunca en contacto con la atmósfera, evitando así la necesidad de hacer análisis periódicos del aceite.

## 5.3 Conexiones y funcionamientos de los transformadores

Los transformadores de distribución son aquellos transformadores que proporcionan una transformación desde 36 [KV] a voltajes menores y hasta un nivel de la red de distribución final. Por ejemplo, en la República Mexicana los voltajes nominales primarios son: 34.5; 33; 13.8 y 4.16 [KV]; mientras que los voltajes nominales secundarios son: 440 y 220 [V].

Los transformadores de distribución son muy numerosos y de tipos variados en la red de suministro eléctrico. Existen miles de transformadores de distribución instalados en el sistema de suministro eléctrico, varían en capacidad desde 5 (KVA) hasta 500 [KVA].

La tensión mas elevada para el material es  $\leq 36$  [KV]. Debido a la diversidad de voltajes existentes, no se indican los valores específicos de este parámetro. Bajo demanda, pueden suministrarse transformadores aptos para funcionar con dos valores diferentes de la tensión primaria mediante un conmutador de voltajes en el primario accionable, sin carga ni voltaje, o mediante un cambio de terminales bajo tapa. Por otro lado, el valor asignado del voltaje secundario en vacío es de 440[V]. Cuando por necesidades de utilización se precisen dos voltajes, se pueden suministrar transformadores con bi-tensión simultánea. Los valores asignados en este caso de la tensión en vacío son: 440 y 220 [V].

1. El circuito magnético de un transformador de distribución se realiza con chapa magnética de grano orientado de muy bajas pérdidas según la norma UNE36128.

El tipo o clase de chapa es elegido en función de los siguientes parámetros: pérdidas y nivel de ruido garantizados en valores mínimos. La sección neta se mantiene constante tanto en las columnas como en las culatas, a lo largo de todo el circuito magnético, ya que por su especial configuración, no se necesitan bulones de apriete (un bulón es un eje de acero con el centro hueco que sirve para articular el embolo a una biela, y es el eje respecto al cual oscila esta última. Es la pieza que más esfuerzo tiene que soportar), que reduzcan la sección. El tipo de juntas de unión entre columnas y culatas es el denominado a 45° sin talón, con culata completa de una pieza, y el apilado se realiza desalando cada formato del anterior al objeto, con la idea de minimizar el efecto del entrehierro. La forma del perfil es escalonada, utilizándose el necesario número de escalones para obtener el mayor coeficiente de superficie útil.

2. Por otra parte, en relación al embobinado de bajo voltaje, este arrollamiento es el que está situado junto al circuito magnético y concéntrico con él. Los conductores empleados para su realización son de dos tipos bien diferenciados dependiendo del valor de la corriente asignada:
  - Conductor de sección rectangular con cantos redondeados.
  - Bandas con bordes acondicionados.

En el primer caso, cada conductor está aislado con papel de celulosa de clase térmica A, o con un esmalte de clase H, en el caso de la banda, ésta está desnuda.

La configuración del arrollamiento con un conductor rectangular es del tipo de capa completa, con uno o más canales concéntricos para refrigeración. El aislamiento entre las capas es siempre del tipo impregnado con resina en estado B.

En los arrollamientos del tipo banda con bordes acondicionados, ésta ocupa con su anchura, el axial total de la bobina, siendo por lo tanto, cada espiral una capa de bobinado. Durante la realización del arrollamiento se acompaña a cada banda, una capa de papel impregnando con resina estado B, el cual polimeriza durante el ciclo de secado, proporcionando al arrollamiento una fortaleza capaz de resistir sin daño, los esfuerzos mecánicos correspondientes a un cortocircuito.

3. Para la construcción del bobinado de alta tensión, se le sitúa envolviendo al arrollamiento de baja tensión, concéntrico con él, y separados por una estructura aislante adecuada al nivel de aislamiento deseado. Los conductores empleados para su realización son de dos tipos:

- De sección circular denominada hilos.
- De sección rectangular o platinas.

El aislamiento empleado en los hilos es un esmalte de clase térmica H.

En los conductores de sección rectangular o platinas, se utiliza un aislamiento de papel clase térmica A, o esmalte clase térmica H. La configuración del embobinado con ambos conductores es del tipo antiresonante en una sección, lo que confiere una gran resistencia a las ondas de impulso tipo rayo. El aislamiento entre capas es del tipo impregnado en resina, que al polimerizar durante la operación de secado, dota al conjunto, de una resistencia mecánica capaz de soportar los esfuerzos de cortocircuito.

4. Para la construcción de la parte activa del transformador se considera los siguientes aspectos:

- La estructura de fijación y guiado.
- El conmutador de voltaje.
- La tapa.
- Las pasa tapas.

La estructura de fijación tiene por objetivo mantener las bobinas en su posición axial respecto al circuito magnético; así como ejercer la presión necesaria sobre éste, para minimizar el nivel de ruido. Está formada por cuatro vigas, dos en la culata superior y otras dos en la parte inferior, de estratificado de madera con resina fenólica las superiores, y de acero las inferiores. Para el apriete, se emplean varillas roscadas de acero que facilitan el ajuste en altura de la tapa.

Para mantener las distancias entre embobinados y la cuba, se colocan 60 (cm) de guiado en la parte inferior sujetos a las vigas inferiores.

El conmutador de voltaje con mando sobre la tapa, está colocado entre la tapa y la parte superior del circuito magnético. Es del tipo cremallera con acción directa del eje de mando, mediante un piñón dentado.

La tapa se realiza con chapa de acero lisa reforzada con perfiles, que sirven además, para fijar las varillas verticales que elevan el resto de los componentes.

Las dimensiones en la tapa desbordan ampliamente el marco de la caja, para evitar que el agua de la lluvia penetre en la zona de asiento de la junta.

Los pasatapas de alta y de baja tensión son para servicios en la intemperie. Cuando es necesario, de acuerdo con la intensidad asignada, los pasatapas de baja tensión se montan sobre una placa magnética.

5. La cuba o carcasa de los transformadores de distribución es del tipo elástica para absorber (sin deformación permanente), el aumento de volumen del líquido aislante debido a las variaciones de temperatura provocadas por la carga del transformador. Está formada por los siguientes componentes:

- Bastidores de apoyo.
- Fondo.
- Aletas.
- Marco.

Los bastidores de apoyo están fijados al fondo mediante soldadura continua y estanca, para evitar oxidaciones. Están provistos de agujeros para fijar los cabezales de las ruedas, así como para arrastrar el transformador.

En fondo tiene forma de “bañera”, y en sus laterales se alojan las conexiones de puesta A tierra (P.A.T.), así como el dispositivo de vaciado.

Las aletas son la parte fundamental de la cuba, forman las paredes laterales y le dan la elasticidad necesaria. Están formadas por una chapa de acero laminado en frío con espesor que oscila entre 1 y 1.5 [mm] plegada sin estiramiento. La elasticidad se logra mediante la adecuada combinación de la altura, la profundidad, el espesor de la chapa y la presión interna resultante.

El marco de la caja está realizado con perfil de acero en forma de “L”, y soldado en la parte superior de las aletas. En la cara superior del marco, se alojan los limitadores de presión para la junta, y se realizan los agujeros para los tornillos de fijación tapa-cuba.

6. El equipo base incluido en el suministro de cada transformador de distribución es el siguiente:

- Tres pasatapas de alta tensión.
- Entre cuatro y siete pasatapas de baja tensión.
- Conmutador de cinco posiciones para la regularización, situado en la tapa y accionable con el transformador sin tensión.
- Dos cárcamos de elevación y desencubado.
- Un orificio de llenado con rosca exterior M-40 \* 1.5 provisto de taparoscada.
- Un dispositivo de vaciado y toma de muestras en la parte inferior de la cuba.
- Cuatro ruedas bi-direccionales orientables a 90°.
- Dos tomas de puesta a tierra (P.A.T.) situadas en la parte inferior con tornillo M-10.

7. Entre los accesorios opcionales se encuentran:

- Un termómetro de esferas de dos contactos.
  - Caja de terminales o de bornes.
  - Pasatapas enchufables de alta tensión.
  - Termostato.
  - Cajas de cables de baja tensión y de alta tensión.
  - Bloque de protección y de control. Realiza las siguientes funciones: detección de la emisión de gases del líquido dieléctrico (disparo), detección de un aumento excesivo de la presión que se ejerce sobre la cuba (disparo), lectura de la temperatura del líquido dieléctrico y la visualización del nivel del líquido (contactos de alerta y disparo regulables).
  - Pasabarras de baja tensión.
8. En todos los transformadores, se realizan las siguientes pruebas; denominadas, pruebas individuales o de rutina:
- Medida de la resistencia de los arrollamientos.
  - Comprobación del grupo de conexión y de la polaridad.
  - Medida de la relación de transformación y verificación del acoplamiento.
  - Medida de las pérdidas y de la corriente en vacío.
  - Medida de las pérdidas debidas a la carga.
  - Medida de la tensión de cortocircuito (toma principal).
  - Ensayos dieléctricos.
  - Ensayos de tensión inducida en los devanados.
  - Ensayo de tensión aplicada a los devanados.

La conexión de transformadores de distribución viene definida por la disponibilidad de alimentadores de media tensión, por la magnitud de la carga, por la baja tensión requerida por los usuarios del servicio, y por el tipo de construcción disponible en la zona en donde se requiere instalar el banco de transformadores de distribución. Existen algunas consideraciones a tomar en cuenta para la elaboración de la norma de conexiones de transformadores de distribución y éstas son:

- Alimentadores de media tensión con los siguientes valores comerciales:
  - 4,800 [V], 3hilos y conexión en  $\Delta$ .
  - 8,314/4,800 [V], 4 hilos, conexión en Y con el neutro a tierra.
  - 12,470/7,200 [V], 4 hilos, conexión en Y con el neutro puesto en tierra.

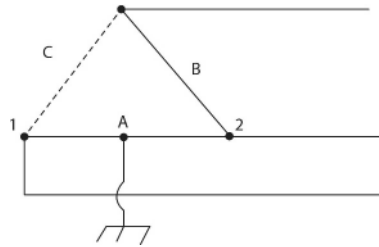
- Magnitud de la carga a alimentar, considerando su posible crecimiento, establece la capacidad nominal del banco de transformación.
- Nivel de baja tensión. El voltaje requerido por la carga, establece la conexión secundaria del banco de transformación. Por ejemplo; si se requiere un voltaje de 220[V] entre fases para alimentar motores trifásicos, y 120 [V] de fase a neutro para el alumbrado y otros artefactos electrodomesticos, el banco de transformadores deberá ser conectado en  $\Delta$  con puesta a tierra en el lado secundario; pero si el voltaje requerido entre fases es de 208 [V], el banco de transformadores deberá de conectarse en Y.
- Tipo de construcción. Se dispone de diferentes tipos de construcción que dependen de la zona donde se dé la necesidad de instalar un nuevo banco de transformación. En zonas donde la construcción es a la vista, generalmente, se instalan bancos de transformadores monofásicos; mientras que en las zonas de construcción subterráneas, lo más usual es instalar transformadores trifásicos.
- Tipo de transformador utilizados. Los transformadores monofásicos utilizados, vienen con cuatro salidas externas secundarias de las bobinas, para la realización de las diferentes conexiones electricas; esto evita tener contacto interno en el transformador.

Otros aspectos a considerar en la conexión del banco de transformación son:

- La necesidad de alimentar simultáneamente cargas monofásicas y trifásicas.
- Los aspectos de las desigualdades en las impudencias, relaciones de transformación y las corrientes de excitación de los transformadores.
- Efectos de los componentes armónicos introducidos en el sistema, e interferencia con las líneas de comunicación
- Las consecuencias del método de puesta a tierra del banco de transformación, en el caso de desequilibrio de cargas o de fallas en el sistema.

Finalmente, como parte de las definiciones técnicas para la conexión de transformadores de distribución, se tienen las siguientes consideraciones:

- I. Carga de bancos de transformadores conectados en  $\Delta$  abierta o estrella abierta. Los bancos de los transformadores monofásicos conectados en  $\Delta$  abierta, 4 hilos en el lado secundario pueden alimentar simultáneamente cargas monofásicas y trifásicas, pero cada uno de los transformadores del banco se cargarán en funcion de la combinación de cargas.



**Figura 5.1** Secundario de un transformador de distribución en una conexión  $\Delta$  abierta.

La carga en cada transformador será:

1. Conexión adelantada:

$$L/A = \left[ M^2 + \frac{T^2}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}(M)(T)[\cos(\theta/T - \theta/M) + 30^\circ] \right] 1/2 ; L/B = \frac{L/B}{3}(T)$$

2. Conexión atrasada:

$$L/A = \left[ M^2 + \frac{T^2}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}(M)(T)[\cos(\theta/T - \theta/M) - 30^\circ] \right] 1/2 ; L/B = \frac{L/B}{3}(T)$$

Donde:

$L/A$  es la carga en el transformador "A"

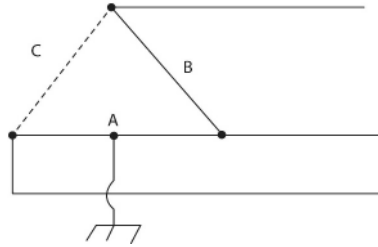
$L/B$  es la carga del transformador "B"

$M$  es la carga monofásica de un factor de potencia  $\theta_m$

$T$  es la carga trifásica con un factor de potencia  $\theta_t$

**II.** Carga de bancos de transformadores conectados en  $\Delta$  cerrada. Los bancos de transformadores monofásicos conectados en  $\Delta$  cerrada, 4 hilos en el lado secundario, pueden alimentar simultáneamente cargas monofásicas y trifásicas; pero cada uno de los transformadores del banco se cargarán en función de la combinación de cargas.





**Figura 5.2** Secundario de una conexión  $\Delta$  cerrada por un transformador de distribución

La carga de cada transformador será:

$$L/A = \left[ D^2 M^2 + \frac{T^2}{9} + \frac{2}{3} D M T \cos(\theta/M - \theta/T) \right]^{1/2}$$

$$L/B = \left[ (1 - D)^2 M^2 + \frac{T^2}{9} + \frac{2}{3} (1 - D) M T \cos(\theta/M - \theta/T + 120^\circ) \right]^{1/2}$$

$$L/C = \left[ (1 - D)^2 M^2 + \frac{T^2}{9} + \frac{2}{3} (1 - D) M T \cos(\theta/M - \theta/T - 120^\circ) \right]^{1/2}$$

$$D = \frac{(\%Z/B/S/B) + (\%Z/c/S/c)}{(\%Z/A/S/A) + (\%Z/B/S/B) + (\%Z/C/S/C)}$$

Donde:

$L/A$  es la carga en el transformador "A".

$L/B$  es la carga del transformador "B".

$L/C$  es la carga en el transformador "C".

$M$  es la carga monofásica de un factor de potencia  $\theta/M$ .

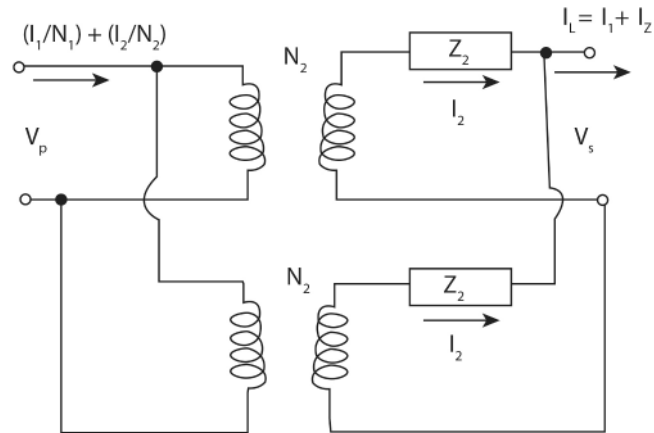
$T$  es la carga trifásica con un factor de potencia  $\theta/T$ .

$D$  es la relación de impedancias de transformadores en [%];  $\%Z_A$ ;  $\%Z_B$ ,  $\%Z_C$ , son las impedancias de los transformadores A, B y C, expresados en la misma base.

$S/A$ ,  $S/B$  y  $S/C$ , es la potencia nominal de cada transformador en [KVA].

### III. Operación en paralelo de transformadores de distribución.

Dos transformadores de distribución pueden ser operados siempre que tengan aproximadamente la misma relación de transformación, y que el radio de sus impedancias sea aproximadamente igual al inverso del radio de sus capacidades nominales. La fig. 5.3 muestra la conexión en paralelo de dos transformadores monofásicos de distribución; las formas que se derivan posteriormente se aplican también, a transformadores trifásicos, siempre y cuando las impedancias, los voltajes y las intensidades de corriente se expresen en una misma base y de fase a neutro.



**Figura 5.3** Conexión en paralelo de dos transformadores monofásicos de distribución.

$$I_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}(I_L) + \frac{V\rho\left[\frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_2}\right]}{Z_2 + Z_1}[A]$$

$$I_2 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}(I_L) + \frac{V\rho\left[\frac{1}{N_2} - \frac{1}{N_1}\right]}{Z_2 + Z_1}[A]$$

Las ecuaciones anteriores, muestran que la corriente de cada transformador tiene dos componentes: una componente de carga y una componente circulatoria.

Los segundos términos son iguales en magnitud, pero en sentido contrario; representan la corriente circulatoria que sale del arrollamiento de un transformador y entra al arrollamiento del otro. El numerador indica que el voltaje que origina la corriente circulatoria, es la diferencia del voltaje inducido en los dos arrollamientos secundarios; el denominador indica que la impedancia que limita la corriente circulatoria; es la suma de las impedancias de los dos transformadores.

La magnitud de la corriente circulatoria es independiente de la corriente de carga, si  $V_p$  es constante.

El primer término de las expresiones anteriores, muestra que la corriente de cada transformador es una fracción de la carga total. La corriente total  $I_L$  se divide entre dos transformadores en relación inversa a sus impedancias, y es independiente, de la relación de transformación. Las fórmulas indican la razón por la cual las relaciones de transformación debe ser aproximadamente iguales, y la relación de las impedancias, calculadas en una misma base debe ser aproximadamente igual a la relación inversa de las capacidades nominales de cada transformador, si las relaciones de transformación fueran apreciablemente diferentes, las corrientes circulatorias serían muy altas, lo que obligaría a subutilizar los transformadores; en casos extremos, las corrientes circulatorias serían tan altas, que no habría corriente de carga. Por ejemplo, si las relaciones de transformación difieren en un 5 %, y los transformadores, tienen la misma impedancia, la corriente circulatoria sería pequeña, y permitiría cargar los transformadores, a su capacidad nominal.

Si la relación de impedancias no es inversamente proporcional a la relación de las capacidades, un transformador tomará más carga que el otro; si la carga total es igual a la suma de capacidades nominales

de los dos transformadores, un transformador quedará sobrecargado y el otro subutilizado. Por ser las impedancias, cantidades vectoriales, pudiera tener la misma magnitud, pero diferente ángulo de fase, lo cual origina corrientes circulatorias entre ambos transformadores; por esta razón, las relaciones  $X/R$  de cada transformador, deben ser aproximadamente iguales. Al conectar en paralelo dos transformadores, se deben atender las siguientes recomendaciones:

- La diferencia de las impedancias no deberá ser mayor de 7.5 %.
- La diferencia de las relaciones de transformación, no deberá ser mayor que 0.75 %
- El fusible primario, debe ser calculado en base a la suma de las capacidades nominales de los transformadores.

**IV.** Conexiones normales de los transformadores de distribución:

#### **A. Transformadores monofásicos:**

- **Conexión A1**  
: Sistema primario: 4,800 [V] en  $\Delta$ .  
Sistema secundario: 120 [V]/240[V]; 3 hilos.
- **Conexión A2**  
: Sistema primario: 8,314 Y/4,800[V] Y 12,470 Y/7,200 [V] (Estrella).  
Sistema secundario: 120 [V]/240[V]; 3 hilos.
- **Conexión A3**  
: Sistema primario: 4,800 [V] (Delta o Triángulo).  
Sistema secundario: 240 [V]/480(V); 3 hilos.
- **Conexión A4**  
: Sistema primario: 8,314 Y/4800[V] Y 12,470 Y/7,200 [V] (Estrella).  
Sistema secundario: 240 [V]/480[V]; 3 hilos.

#### **B. Bancos trifásicos de transformadores monofásicos:**

- **Conexión B1:** Sistema primario: 4, 800[V]( $\Delta$ ). Sistema secundario: (3)(240)[V]/(2)(120); 4 hilos( $\Delta$ ).
- **Conexión B2:** Sistema primario: 4, 800[V]( $\Delta$ ). Sistema secundario: (3)(480)[V]/(2)(240)/(1)(416)[V]; 4 hilos. ( $\Delta$ ).
- **Conexión B3:** Sistema primario: 4, 800[V]( $\Delta$ ). Sistema secundario: (3)(208)Y/120[V]; 4 hilos, (Estrella)

- Conexión B4: Sistema primario: 4,800[V] ( $\Delta$ ). Sistema secundario: (3)(416)Y/240[V]; 4 hilos, (Estrella)
- Conexión B5: Sistema primario: 4,800 [V] ( $\Delta$ ) abierta. Sistema secundario: (3)(240)(v)/(2)(120)[V]; 4 hilos ( $\Delta$ ) abierta.
- Conexión B6: Sistema primario: 4M800[V] ( $\Delta$ ) abierta. Sistema secundario: (3)(480)[V]/(2)(240)[v]; 4 hilos ( $\Delta$ ) abierta.
- Conexión B7: Sistema primario: 8,314 Y/4,800[V] ó 12,470 Y/7,200 [V] (Estrella). Sistema secundario: (3)(240)[V]/(2)(120)[V]/(1)(280)[v]; 4 hilos ( $\Delta$ ).
- Conexión B8: Sistema primario: 8,314 Y/4,800[V] ó 12,470 Y/7,200 [V] (Estrella). Sistema secundario: (3)(480)(V)/(2)(120)[V]/(1)(416)[v]; 4 hilos (Delta  $\Delta$ ).
- Conexión B9: Sistema primario: 8,314 Y/4,800[V] ó 12,470 Y/7,200 [V] (Estrella). Sistema secundario: (3) (208)Y/120[V]; 4 hilos (Estrella Y)
- Conexión B10 Sistema primario: 8,314 Y/4,800(V) ó 12,470 Y/7,200 (V) (Estrella). Sistema secundario: (3) (416) Y/240 (V); 4 hilos (Estrella).
- Conexión B11 Sistema primario: 8,314 Y/4,800[V] ó 12,470 Y/7,200 [V] (Y abierta). Sistema secundario: (3) (240)[V]/(2)(120)[V]/(1)(208)[v]; 4 hilos ( $\Delta$  abierta).
- Conexión B12 Sistema primario: 8,314 Y/4,800[V] ó 12,470 Y/7,200 [V] (Y abierta). Sistema secundario: (3) (480)[V]/(2)(240)[V]/(1)(416)[v]; 4 hilos ( $\Delta$  abierta).

#### C. Transformadores trifásicos:

- Conexión C1: Sistema primario: 4,800 [V] (*Delta o Delta*). Sistema secundario: (3) (208)Y/120[V]; 4 hilos(Estrella o Y).
- Conexión C2: Sistema primario: 4,800 [V](*Delta o Delta*). Sistema secundario: (3) (480)Y/277[V]; 4 hilos(Estrella o Y).
- Conexión C3: Sistema primario: 12,470 Y/7,200 [V] (Estrella o Y). Sistema secundario: (3) (208)Y/120[V]; 4 hilos(Estrella o Y).
- Conexión C4: Sistema primario: 12,470 Y/7,200 [V] (Estrella o Y). Sistema secundario: (3) (480)Y/277[V]; 4 hilos(Estrella o Y).

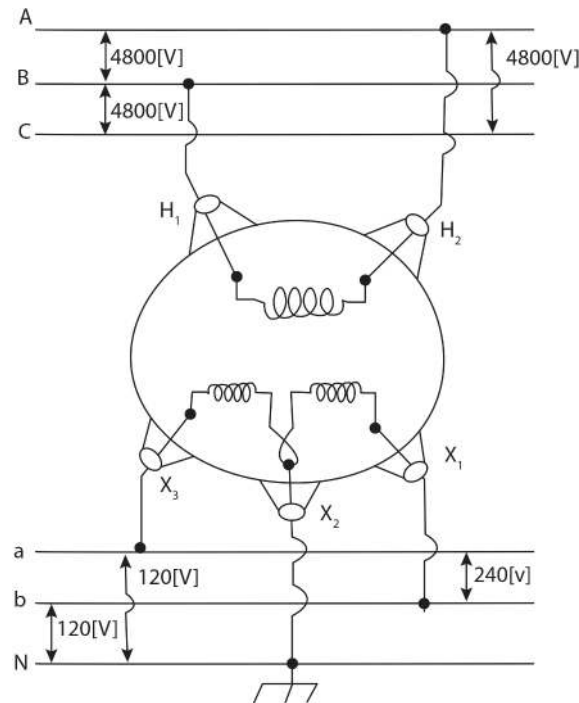
#### D. Conexión de transformadores en paralelo:

- Conexión D1: Transformadores monofásicos en paralelo.

- Conexión D2: Transformadores trifásicos en paralelo.

A continuación, se desarrollan los diagramas unifilares de las diversas conexiones que tienen los transformadores de distribución:

1. **Conexión A1:** Sistema primario: 4,800[V], ( $\Delta$  o  $\Delta$ ) conexión primaria: fase a fase.

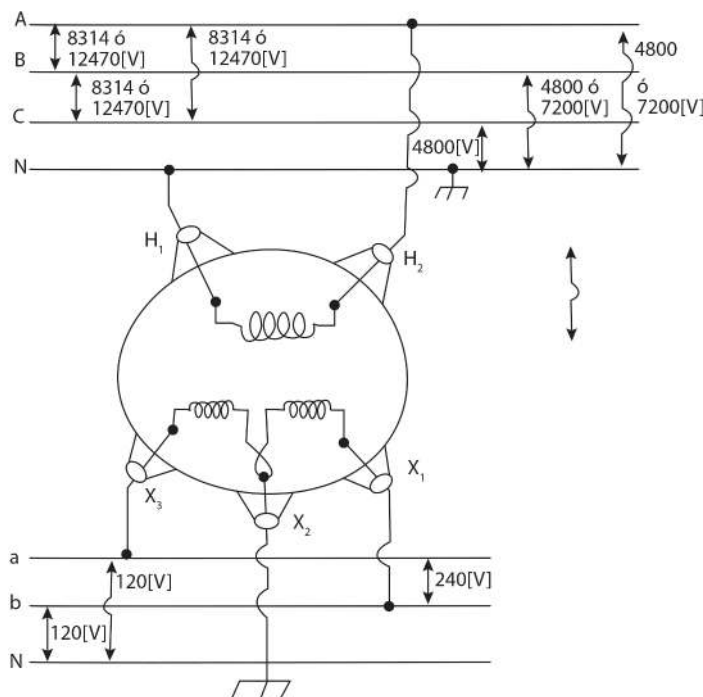


**Figura 5.4** Conexión A1 para transformadores monofásicos

- **Aplicaciones de la conexión A1:** Cargas monofásicas alimentadas en 120 [V], incluyendo motores de hasta 1 (H.P.) con voltaje de placa de 115 [V], en áreas residenciales, urbanas o rurales. Servicios de alumbrado público, alimentados a 120 [V] Cargas monofásicas alimentadas a 240 (V), incluyendo motores de 1 a 10 [H.P], con voltaje de placa de 230 [V].
- **Limitaciones de la conexión A1.** Se debe tener cuidado de balancear las cargas monofásicas de 120[V] conectadas a las fases “a” y “b” de tal manera que la corriente que fluya por el neutro, sea nula.

- 2 **Conexión A2:** Sistema primario: 8,314Y/4,800[V], [Y]

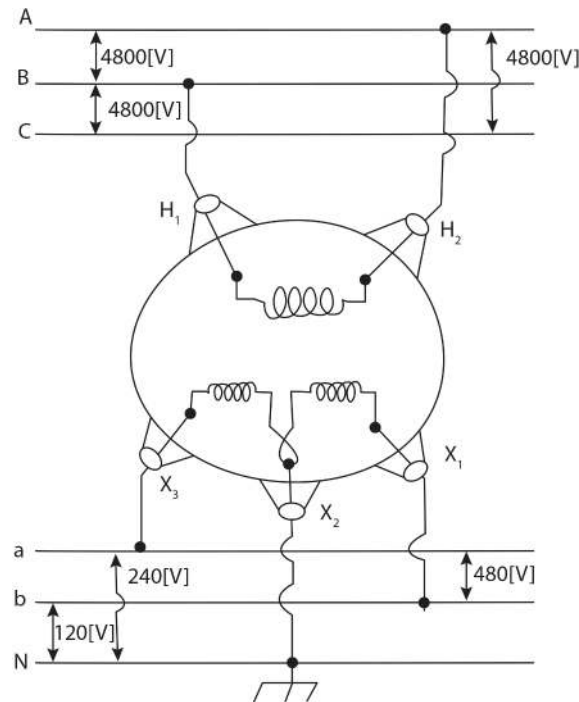
Conexión primaria: Fase a Neutro (ver la fig.5.5). Sistema secundario: 120 [V], 240 [V], 3 hilos.  
Conexión secundaria: 120 [V] de Fase a Neutro. 240 [V] de Fase a Fase.



**Figura 5.5** Conexión A2 para transformadores monofásicos.

- Aplicaciones de la conexión A2:
  - Cargas monofásicas alimentadas en 120(V), incluyendo motores de hasta 1 (H.P) con un voltaje de placa de 115 (V), en áreas residenciales, urbanas o rurales.
  - Servicio de alumbrado público alimentados en 120 (V).
  - Cargas monofásicas alimentadas en 240 (V), incluyendo motores de 1 a 10 (H.P) con un voltaje de placa de 230 (V).
- Limitaciones de la conexión A2:
  - Se debe tener cuidado de balancear las cargas monofásicas de 120 (V), conectadas a las fases “a” y “b”, de tal manera que la corriente que fluya por el neutro, sea nula.

**3. Conexión A3:** Sistema primario: 4,800(V), (Delta o  $\Delta$ ) conexión primaria: Fase a Fase. (Ver la figura 5.6).



**Figura 5.6** Conexión A3 para transformadores monofásicos.

- Aplicación de la conexión A3:
  - Cargas monofásicas alimentadas en 240(V), en servicios industriales y comerciales, incluyendo motores de hasta 1 hasta 10 (H.P) con un voltaje nominal de placa de 230 (V).
  - Servicio de alumbrado público alimentado en 240 (V).
  - Cargas monofásicas alimentadas en 480 (V), en servicios industriales incluyendo motores de más de 10 (H.P) con un voltaje de placa de 4,600 (V).
  - Limitaciones de la conexión A3: Se debe tener cuidado de balancear las cargas monofásicas de 240 (V), conectadas a las fases “a” y “b”, de tal manera que la corriente que fluya por el neutro, sea nula.

#### 4. Conexión A4:

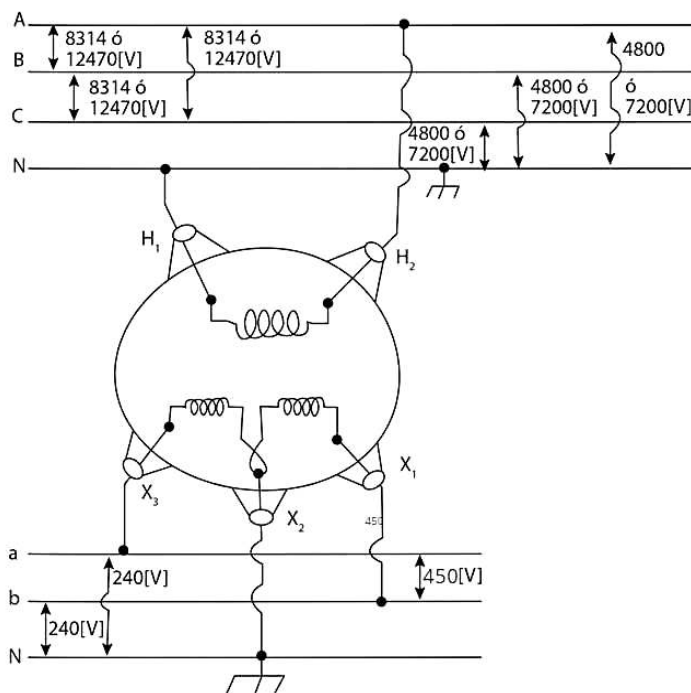
Sistema Primario: 8,314 Y/4,800[V] ó 12,471 Y/7,200[V], (estrella o Y).

Conexión primaria: Fase a Neutro (Ver la fig. 5.7).

Sistema secundario: 240[V]/480[V]; 3 hilos.

Conexión secundario: 240[V] de Fase a Neutro.

480[V] de Fase a Fase.



**Figura 5.7** Conexión A4 para transformadores monofásicos.

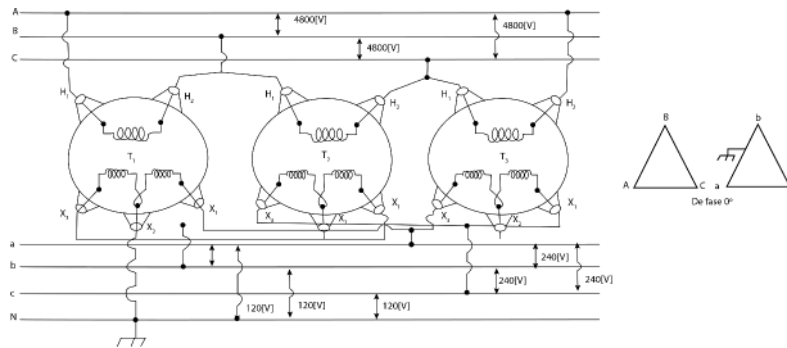
- Aplicaciones de la conexión A4:
  - Cargas monofásicas alimentadas en 240 [V], en servicios industriales y comerciales; incluyendo motores de 1 hasta 10 [H:P] con tensión de placas de 230 [V].
  - Servicios de alumbrado público alimentados en 240[V].
  - Cargas monofásicas alimentadas en 480 [V], en servicios industriales, incluyendo motores de más de 10 (H.P.) con voltaje de placa de 460 [V].
  
- Limitaciones de la conexión A4:
  - Se debe tener cuidado de balancear las cargas monofásicas de 240 [V] conectadas a las fases “a” y “b”; de tal manera que la corriente que fluya por el neutro, sea nula.

#### Conexión B1:

Sistema Primario: 4800 [V]- $\Delta$  .

Conexión primaria: Fase a Fase.





**Figura 5.8** Conexión B1 para transformadores monofásicos.

Sistema secundario:  $3 * 240 \text{ [V]} / 2 * 120 \text{ [V]}$ ; 4 hilos, trifásico.

Conexión secundaria:  $120 \text{ [V]}$  3 fases (solo “a” y “b”) a neutro  $240 \text{ [V]}$  Fase a Fase

#### Aplicaciones:

- Esta conexión tiene excelente regulación y no permite la circulación de corrientes armónicas. No causa interferencia en líneas de comunicación.
- Se usa para alimentar cargas residenciales, comerciales e individuales; monofásicas en  $120 \text{ [V]}$ ; trifásicas en  $240 \text{ [V]}$  y combinaciones de cargas. trifásicas en  $240 \text{ [V]}$  con carga monofásicas en  $120 \text{ [V]}$
- En casos de emergencia, se puede retirar un transformador del banco, para operarlo con dos unidades en  $\Delta$  abierta, pero el banco podrá alimentar el  $58 \%$  de la carga.

#### Capacidad del banco:

- Esta conexión permite alimentar simultáneamente cargas monofásicas y trifásicas.

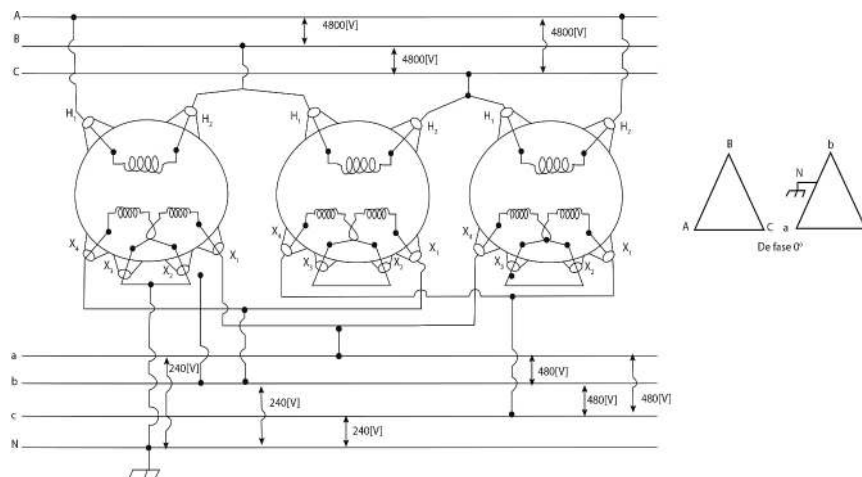
#### Limitaciones:

- Ninguna, sólo se recomienda balancear las cargas monofásicas

#### Conexión B2:

Sistema Primario:  $4800 \text{ [V]}$  en  $\Delta$  .

Conexión primaria: Fase a Fase.



**Figura 5.9** Conexión B2 para transformadores monofásicos.

Sistema secundario:  $3 \times 480 \text{ [V]} / 2 \times 240 \text{ [V]}$ ; 4 hilos, trifásico.

Conexión secundaria: 240[V] fases (solo "a" y "b") a neutro 480 [V] Fase a Fase.

#### Aplicaciones:

- Esta conexión tiene excelente regulación, y no permite la circulación de corrientes armónicas. No causa interferencia en líneas de comunicación.
- Se usa para alimentar cargas comerciales e industriales, monofásicas en 240 [V]; trifásicas en 480 [V] o combinadas de cargas trifásicas en 480 [V] con cargas monofásicas en 240 [V].
- En casos de emergencia, se puede retirar un transformador del banco, para operarlo con dos unidades en  $\Delta$  abierta; pero el banco podrá alimentar el 58 % de la carga.

#### Capacidad del banco:

- Esta conexión permite alimentar simultáneamente cargas monofásicas y trifásicas.

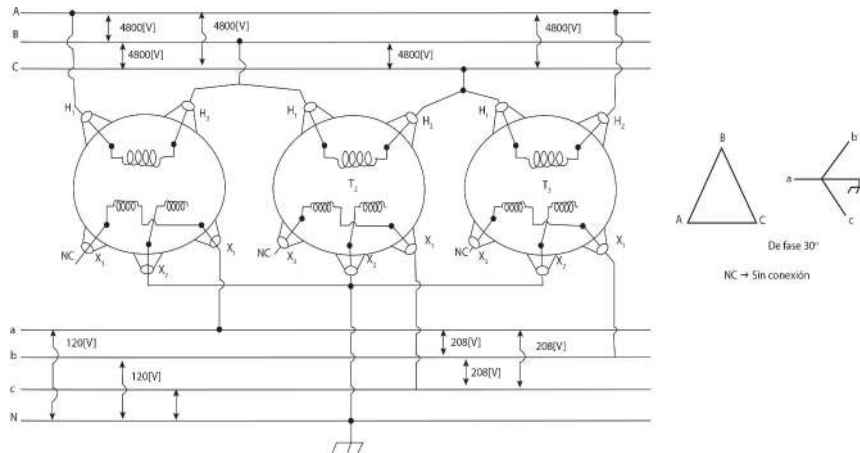
#### Limitaciones:

- Ninguna, sólo se recomienda balancear las cargas monofásicas

#### Conexión B3:

Sistema Primario: 4800 [V] en.

Conexión primaria: Fase a Fase



**Figura 5.10** Conexión B3 para transformadores monofásicos.

Sistema secundario:  $3 \cdot 208$  y  $120$ [V]; 4 hilos, trifásico.

Conexión secundaria:  $208$ [V] entre fase y fase,  $120$ [V] fase a neutro.

#### Aplicaciones:

- Esta conexión presenta excelente regulación.
- Se usa para aumentar cargas monofásicas residenciales, pequeños comercios e industrias alimentadas en  $120$  [V]; incluyendo motores de hasta  $1$  [HP] con voltaje de placa de  $115$  [V]; para cargas trifásicas comerciales e industriales alimentadas en  $208$  [V], incluyendo motores de hasta  $10$  [HP] con voltaje de placa de  $200$  [V], y para combinaciones de carga monofásicas en  $120$  [V] y cargas trifásicas en  $208$  [V].

#### Capacidad del banco:

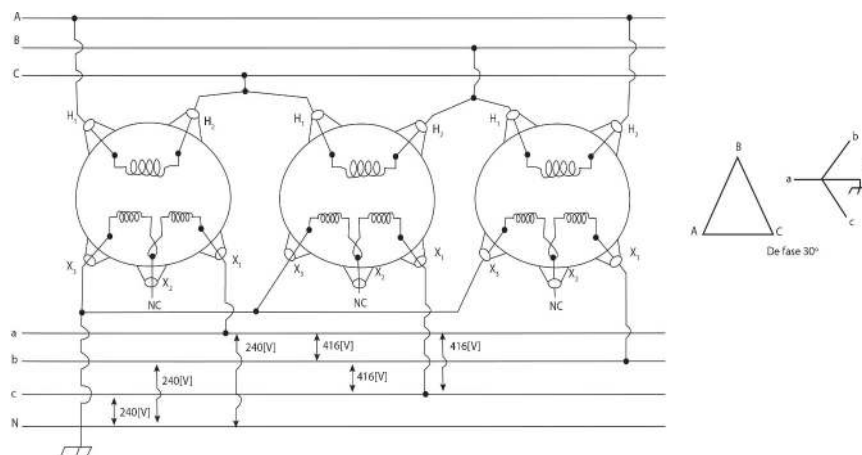
- Cuando las cargas monofásicas están razonablemente equilibradas, el factor de utilización del banco es del  $100\%$ .

#### Limitaciones:

- Ante fallas en el sistema primario, se puede generar sobre corrientes en el lado de baja tensión, por lo cual recomienda que los motores trifásicos estén provistos de protección contra sobre corriente en las tres fases.

#### Conexión B4:

Sistema Primario:  $4800$ [V] en  $\Delta$  . Conexión primaria: Fase a Fase.



**Figura 5.11** Conexión B4 para transformadores monofásicos.

Sistema secundario:  $3 \times 416$  y  $240$ [V]; 4 hilos, trifásico. Conexión secundaria:  $416$ [V] entre fase y fase y  $240$ [V] fase a neutro.

#### Aplicaciones:

- Esta conexión presenta excelente regulación.
- Se usa para alimentar cargas monofásicas de comercios e industrias, donde el voltaje nominal de los equipos servidos varía entre  $230$  y  $240$  [V] incluyendo motores de  $1$  y hasta  $10$  [HP] con voltaje de placa de  $380$  [V], y para combinaciones de cargas monofásicas en  $240$ [V] y cargas trifásicas en  $413$  [V].

#### Capacidad del banco:

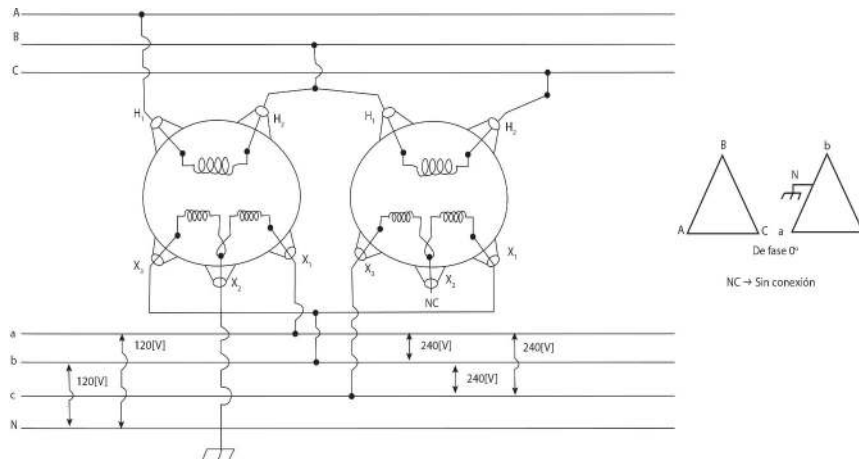
- Cuando las cargas monofásicas están razonablemente equilibradas, el factor de utilización del banco es de  $100\%$

#### Limitaciones:

- Ante fallas en el sistema primario, se pueden generar sobre corrientes en el lado de baja tensión, por lo que se recomienda que los motores trifásicos estén provistos de protección contra sobrecorrientes.

#### Conexión B5:

Sistema Primario:  $4,800$  [V] en  $\Delta$  . Conexión primaria: fase a fase.



**Figura 5.12** Conexión B5 para transformadores monofásicos.

Sistema secundario:  $3 * 240/2 * 120[V]$ ; 4 hilos, trifásico  
 Conexión secundaria: 120[V] Fase (sólo “a” y “b”) a Neutro, 240 [V] Fase a Fase.

### Aplicación:

- Cargas urbanas y rurales, residenciales, pequeños comercios e industrias; trifásicas en 240 [V], incluyendo motores de hasta 10 [HP] con voltaje de placa de 230 [V], monofásicas en 120 [V] incluyendo motores de hasta 1[HP] o combinaciones de cargas monofásicas grandes con cargas trifásicas pequeñas ( el % cargas monofásicas superior al % de cargas trifásicas). En la medida en que la carga crezca, se podrá agregar la tercera mitad al banco para disponer de una  $\Delta$  cerrada.

### Capacidad del banco:

- Se pueden utilizar transformadores de diferentes capacidades.

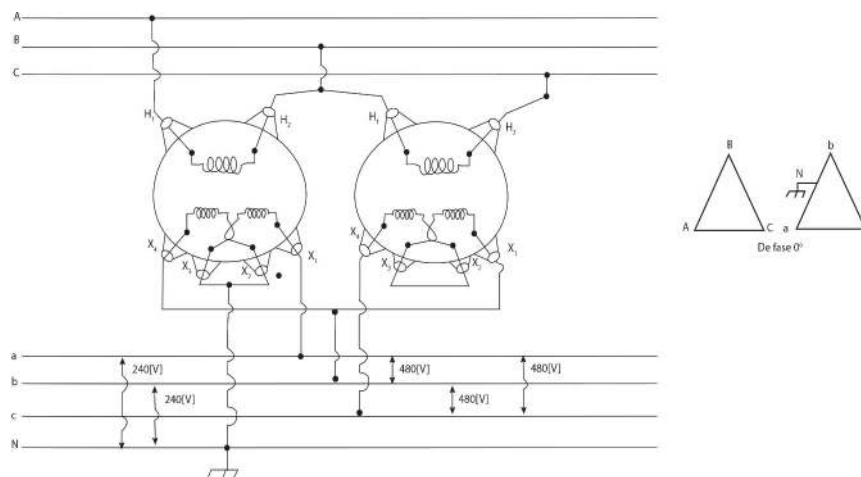
### Limitaciones:

- Se recomienda balancear las cargas monofásicas.
- Los transformadores no pueden ser cargados a más de 86.6 % de su capacidad nominal.
- La regulación de las tres fases es diferente, incluso para cargas balanceadas. Se debe procurar que la diferencia de voltaje sea inferior al 15 % para evitar daños a los motores trifásicos.

### Conexión B6:

Sistema primario: 4 800 [V] en  $\Delta$  -abierto.

Conexión primaria: Fase a Fase.



**Figura 5.13** Conexión B6 para transformadores monofásicos.

Sistema secundario:  $3 \times 480$  y  $2 \times 240$  [V]; 4 hilos trifásico; conexión secundaria: 240 [V] por Fase sólo “a” y “b”) a Neutro, 480 [V] fase a fase.

#### Aplicaciones:

- Cargas comerciales y pequeñas industrias trifásicas en 480 [V], monofásicas en 240 [V]; o combinaciones de carga monofásicas grandes con cargas trifásicas pequeñas (el % de cargas trifásicas debe ser mayor al % de cargas monofásicas). En la medida en que la carga crezca, se podrá agregar la tercera unidad al banco, para disponer de una  $\Delta$  cerrada.

#### Capacidad del banco:

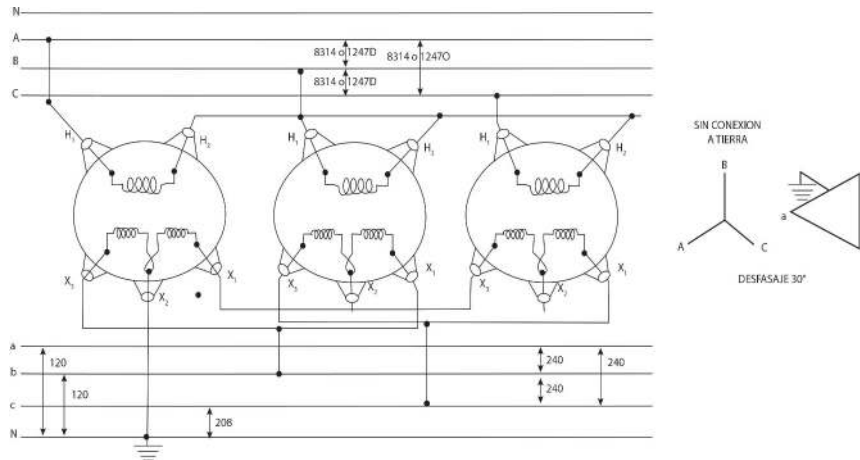
- Se pueden utilizar transformadores de diferentes capacidades.

#### Limitaciones:

- Se recomienda balancear las cargas monofásicas.
- Los transformadores no pueden ser cargados a más del 86.6 % de su capacidad nominal.
- La regulación de las tres fases es diferente, incluso para cargas balanceadas. Se puede procurar que la diferencia de voltaje sea inferior a 15 % para evitar daños a los motores trifásicos.

#### Conexión B7:

Sistema primario: 8 314 y 4 800 ó 12 470 y 7 200 V. en estrella y el neutro flotante.  
 Conexión primaria: Terminales H1 a las fases del sistema. El neutro se forma uniendo entre sí, las terminales H2 de cada transformador.



**Figura 5.14** Conexión B7 para transformadores monofásicos.

Sistema secundario:  $3 \times 240 / 2 \times 120$  V. en delta, 4 hilos trifásico.

Conexión secundaria: 120V fase (sólo “a” y “b”) A neutro, y 240 [V] Fase a Fase.

### Aplicaciones:

- Esta conexión tiene muy buena regulación, y no permite la regulación de corrientes armónicas. No causa interferencia con las líneas de comunicación.
- Se usa para alimentar cargas comerciales e industriales; monofásicas en 120 V, trifásicas en 240 V, o combinaciones de cargas trifásicas en 240 V con cargas monofásicas en 120V
- En caso de emergencia, se puede retirar el transformador del banco, para operarlo con dos unidades en Delta Abierta, pero el banco podrá alimentar sólo el 58 % de la carga.

### Capacidad del banco:

Esta conexión permite alimentar simultáneamente cargas monofásica y trifásicas.

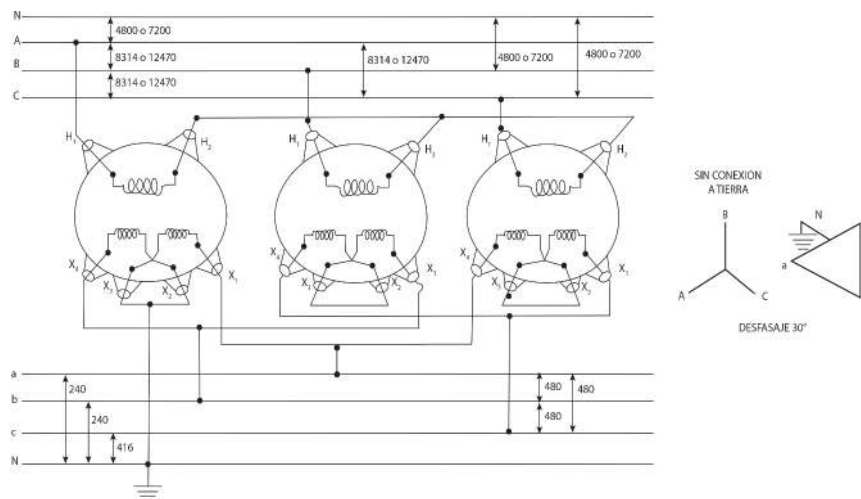
### Limitaciones:

En caso de fallas en el lado primario, se pueden dañar los motores, a menos que dispongan de protección contra sobre corriente en las tres fases.

### Conexión B8:

Sistema primario: 8 314 y 4 800 ó 12 470 y 7 200 V, en estrella y el neutro flotante.

Conexión primaria: Terminales H1 a las fases del sistema. El neutro se forma uniendo entre sí, las terminales H2 de cada transformador.



**Figura 5.15** Conexión B8 para transformadores monofásicos.

Conexión secundaria: 240V fase (sólo “a” y “b”) a Neutro; 480 V Fase a Fase.

#### Aplicaciones:

- Esta conexión tiene muy buena regulación y no permite la regulación de corrientes armónicas. No causa interferencia con las líneas de comunicación.
- Se usa para alimentar cargas comerciales e industriales; monofásicas en 240 V, trifásicas en 480 V, o combinaciones de cargas trifásicas en 480 V con cargas monofásicas en 240V.
- En caso de emergencia, se puede retirar el transformador del banco, para operarlo con dos unidades en Delta Abierta, pero el banco podrá alimentar sólo el 58 % de la carga.

#### Capacidad del banco:

Esta conexión permite alimentar simultáneamente cargas monofásica y trifásicas.

#### Limitaciones:

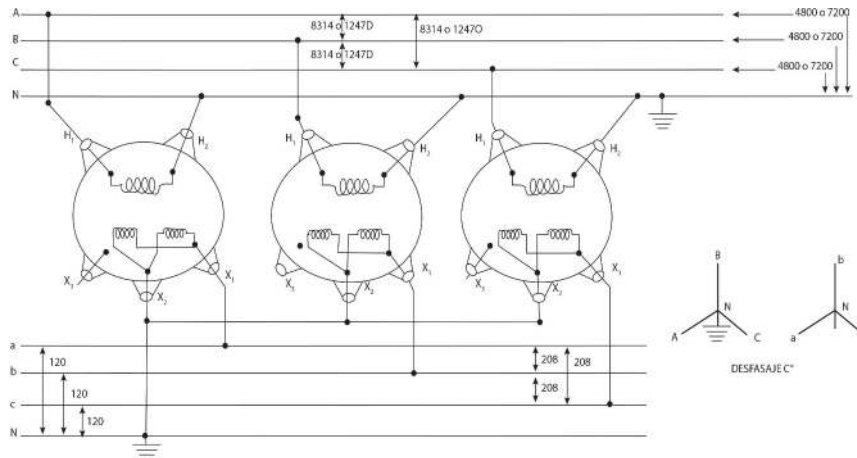
En caso de fallas en el lado primario, se pueden dañar los motores, a menos que dispongan de protección contra sobre corriente en las tres fases.



**Conexión B9:**

Sistema primario: 8 314 y 4 800 ó 12 470 y 7 200 V. en estrella y el neutro sólidamente puesto a tierra.

Conexión primaria: entre fase y neutro.



**Figura 5.16** Conexión B9 para transformadores monofásicos.

Sistema Secundario: 3\* x 208 y 120 V, 4 hilos, en estrella y el neutro sólidamente puesto a tierra. Conexión secundaria: 280 V entre fases; 120 V de fase a tierra.

**Aplicación:**

Esta conexión presenta muy buena regulación. Se usa para alimentar: cargas monofásicas residenciales, pequeños comercios e industrias alimentados en 120 V, incluyendo motores de hasta 1HP con tensión nominal de placa de 115 V; cargas trifásicas comerciales e industriales alimentadas en 208 V, incluyendo motores de 1 hasta 10 HP con tensión de placa de 200V; o para combinaciones de cargas monofásicas en 120 V, y cargas trifásicas en 208 V.

**Capacidad del banco:**

Cuando las cargas monofásicas están razonablemente equilibradas, el factor de utilización del banco es de 10 %

**Limitaciones:**

Ante fallas en el sistema primario, se pueden generar sobre corrientes en el lado de baja tensión, por lo

cual se recomienda que los motores trifásicos estén provistos de protección contra sobre corrientes en las tres fases.

### Conexión B10:

Sistema primario: 8 314 y 4 800 ó 12 470 y 7 200 V en estrella, y el neutro sólidamente puesto a tierra.

Conexión primaria: entre fase y neutro.

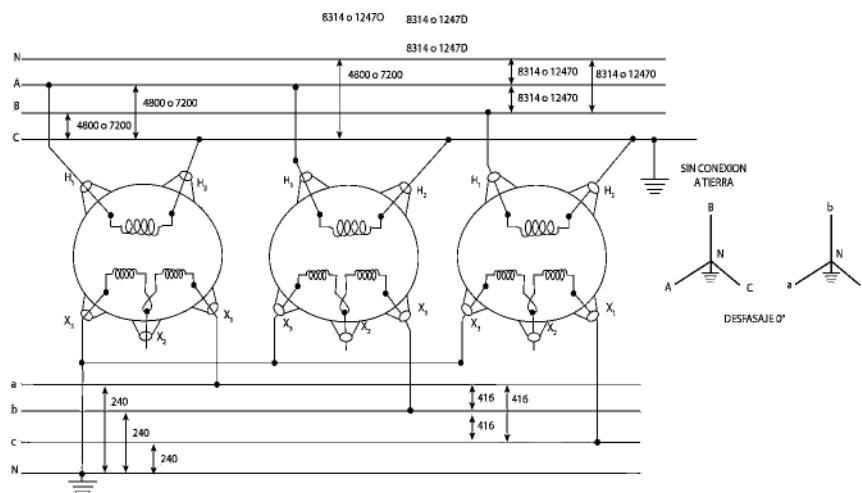


Figura 5.17 Conexión B10 para transformadores monofásicos.

Sistema Secundario:  $3 \times 416 \text{ Y } / 240 \text{ V}$ , 4 hilos, en estrella y el neutro sólidamente puesto a tierra.

Conexión secundaria: 416 V entre fases; 240 V de fase a tierra.

### Aplicación:

Esta conexión presenta muy buena regulación. Se usa para alimentar: cargas trifásicas comerciales e industriales, especialmente motores trifásicos con tensión de placa de 380 y 416 V.

### Capacidad del banco:

El factor de utilización de este banco es de 100 %

### Limitaciones:

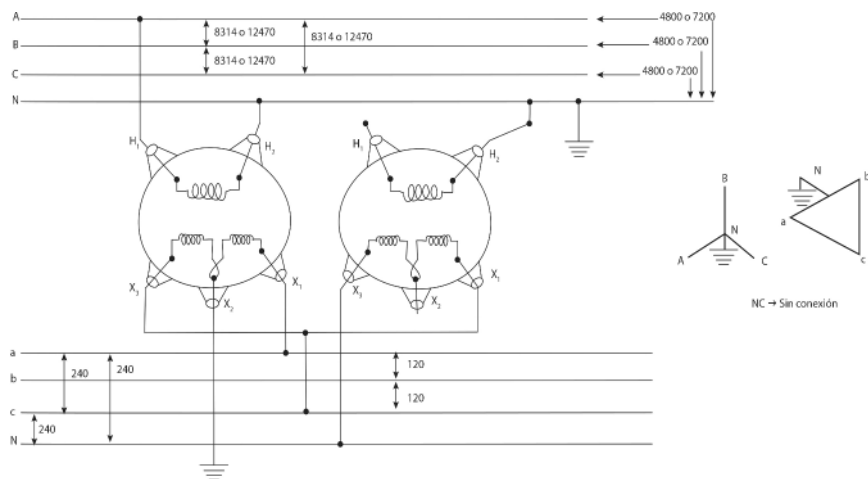
No se recomienda esta conexión para alimentar cargas combinadas monofásicas en 240V y trifásicas

en 416 V.

### Conexión B11:

Sistema primario: 8 314 y 4 800 ó 12 470 y 7 200 V. en estrella abierta y el neutro sólidamente puesto a tierra.

Conexión primaria: Fase a neutro.



**Figura 5.18** Conexión B11 para transformadores monofásicos.

Sistema secundario: 3\* x 240/2\*x120V, en Delta Abierta, 4 hilos, trifásico.

Conexión Secundaria: 120V fase (sólo “a” y “b”) a neutro; 240 V fase a fase.

### Aplicación:

Cargas urbanas y rurales, residenciales comerciales y pequeñas industrias; trifásicas en 240 V, incluyendo motores de hasta 10HP, con tensión de placa de 230 V monofásicas en 120 V, incluyendo motores de hasta 1HP, o combinaciones de cargas monofásicas grandes con cargas trifásicas pequeñas (carga monofásica superior a carga trifásica). En la medida en que la carga crezca, se podrá agregar la tercera unidad al banco para disponer de una conexión Delta Cerrada.

### Capacidad del banco:

Se pueden utilizar transformadores de diferentes capacidades.

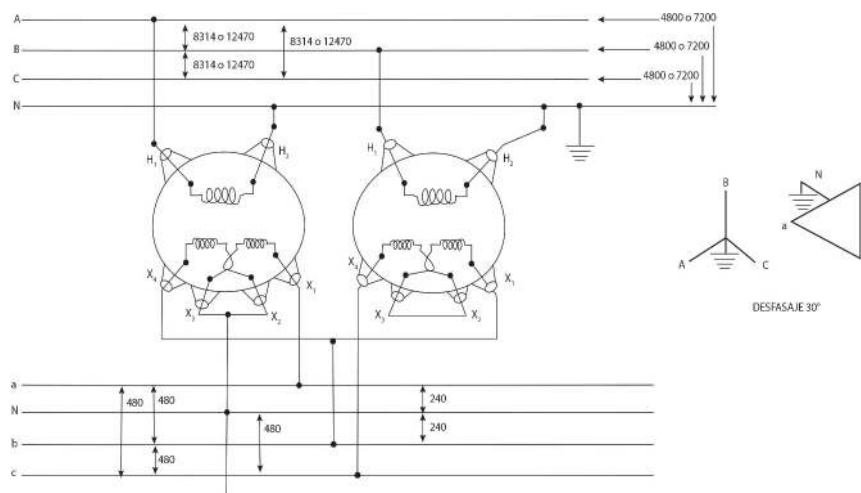
### Limitaciones:

- Se recomienda balancear las cargas monofásicas.
- Los transformadores no pueden ser cargados a más de 86.6 % de su capacidad nominal.
- La regulación de las tres fases es diferente incluso para cargas balanceadas. Se debe procurar que la diferencia de voltaje sea inferior a 15 % para evitar daños a los motores trifásicos.

### Conexión B12:

Sistema primario: 8 314 y 4 800 ó 12 470 y 7 200 V, 4 hilos en estrella abierta y el neutro sólidamente puesto a tierra.

Conexión primaria: Fase a Neutro.



**Figura 5.19** Conexión B12 para transformadores monofásicos.

Sistema secundario:  $3 \times 480/2 \times 240$  V, 4 hilos, Delta Abierta, trifásico.

Conexión Secundaria: 240V fase (sólo “a” y “b”) a neutro.

480 V fase a fase.

### Aplicación:

Se usa para alimentar cargas comerciales e industriales, trifásicas en 480 V; monofásicas en 240 V; o combinaciones de cargas trifásicas en 480 V como monofásicas en 240 V en la medida en que la carga crezca, se podrá agregar la tercera unidad al banco para disponer de una Delta Cerrada.

### Capacidad del banco:

Se puede utilizar transformadores de diferentes capacidades.

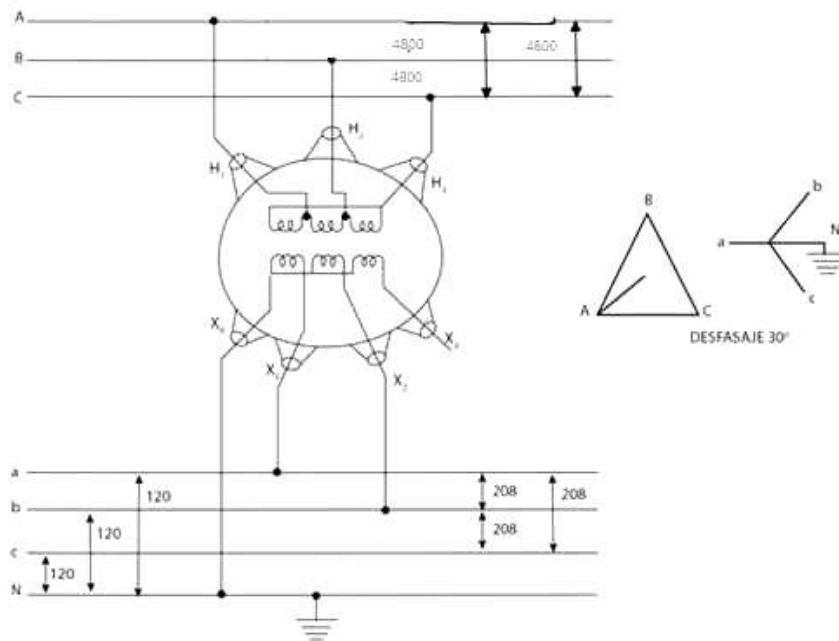
**Limitaciones:**

- Se recomienda balancear las cargas monofásicas.
- Los transformadores no pueden ser cargados a más del 86 % de su capacidad nominal.
- La regulación en las tres fases es diferente, incluso para cargas balanceadas, se debe procurar que la diferencia del voltaje sea inferior al 15 % para evitar daños a los motores trifásicos.

**Conexión C1**

Sistema primario: 4 800 V en Delta

Conexión Primaria: fase a fase



**Figura 5.20** Conexión C1 para transformador trifásico.

Sistema secundario: 3\* x 280 y 120V, 4 hilos, trifásico, con el neutro sólidamente puesto en tierra.

Conexión Secundaria: 208 V fase (sólo “a” y “b”) a neutro, 120 V fase a neutro.

**Aplicación:**

Esta conexión presenta muy buena regulación. Se usa para alimentar cargas monofásicas residenciales,

pequeños comercios e industrias, donde la tensión nominal de los equipos servidos varía entre 115 y 125 V, incluyendo motores de hasta 1 HP con tensión de placa de 115V, para cargas trifásicas comerciales e industriales alimentadas con 208 Voltios y para combinación de cargas monofásicas en 120 Voltios, y cargas trifásicas en 208 Voltios.

### Capacidad del banco:

Cuando las cargas monofásicas están razonablemente equilibradas, el factor de utilización del banco es de 100%.

### Limitaciones:

Ante fallas en el sistema primario, se pueden generar sobre corrientes en los lados de baja tensión, por lo cual se recomienda que los motores trifásicos estén provistos de protección contra cobre corriente en las tres fases.

### Conexión C2

Sistema primario: 4 800V en Delta.

Conexión Primaria: Fase a Fase.

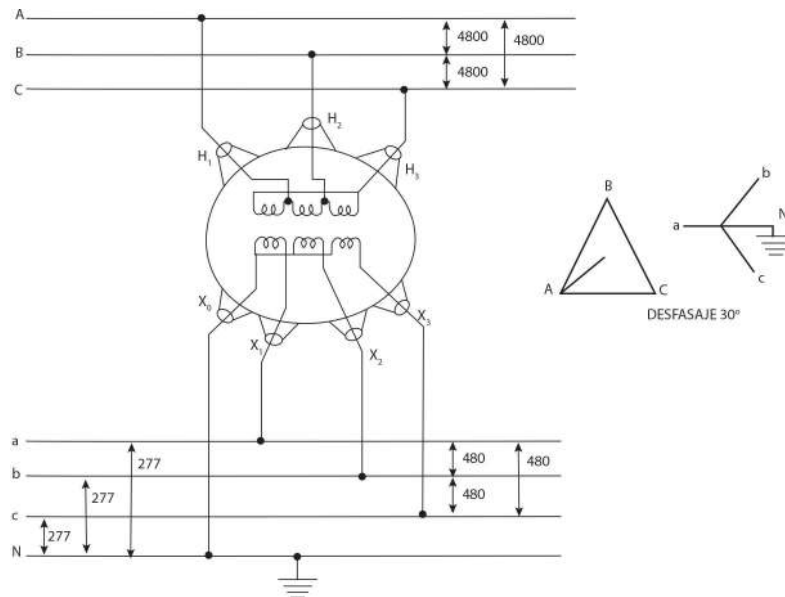


Figura 5.21 Conexión C2 para transformador trifásico.

Sistema secundario: 480 y 277 V. 4 hilos, trifásico, conexión en estrella.

Conexión Secundaria: 480 V entre fases,  
277 V Fase a Neutro.

### **Aplicación:**

Esta conexión presenta muy buena regulación. Se usa para alimentar cargas trifásicas comerciales e industriales, incluyendo motores con tensión de placa de 460 V, y para cargas monofásicas comerciales e industriales alimentadas en 277 V, y para combinaciones de cargas monofásicas en 277 V, y cargas trifásicas en 480 V.

### **Capacidad del banco:**

Cuando la cargas monofásicas están razonablemente equilibradas, el factor de utilización del banco es de 100 %

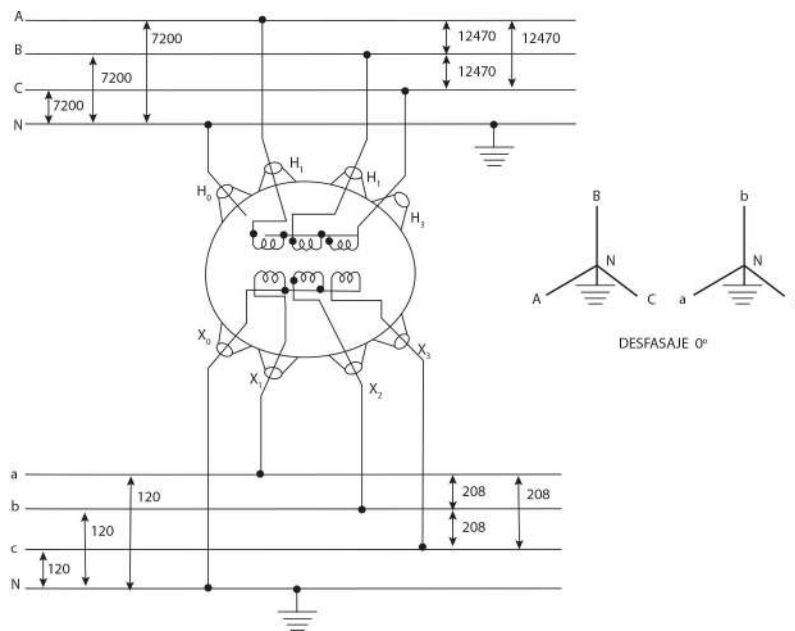
### **Limitaciones:**

Ante fallas en el sistema primario, se pueden generar sobre corrientes en los lados de baja tensión, por lo cual se recomienda que los motores trifásicos estén provistos de protección contra corriente en las tres fases.

### **Conexión C3**

Sistema primario: 12 470 y 7 200 V en estrella y el neutro sólidamente puesto a tierra.

Conexión Primaria: Entre Fase y Neutro.



**Figura 5.22** Conexión C3 para transformador trifásico.

Sistema secundario:  $3 \times 208$  y  $120$  V 4 hilos, en estrella, trifásico, el neutro sólidamente puesto a tierra.  
 Conexión secundaria: 208 V entre fases, 120V de fase a tierra.

### Aplicación:

Esta conexión presenta muy buena regulación. Se usa para alimentar: cargas monofásicas pequeños comercios e industrias, donde la tensión nominal de los equipos servidos varía entre 115 y 125 V incluyendo motores de hasta 1HP; cargas trifásicas comerciales e industriales alimentadas en 208 V incluyendo motores de 1 hasta 10; o para combinaciones de cargas monofásicas en 120V y cargas trifásicas en 208 V.

### Capacidad del banco:

Cuando la cargas monofásicas están razonablemente equilibradas, el factor de utilización del banco es de 100 %.

### Limitaciones:

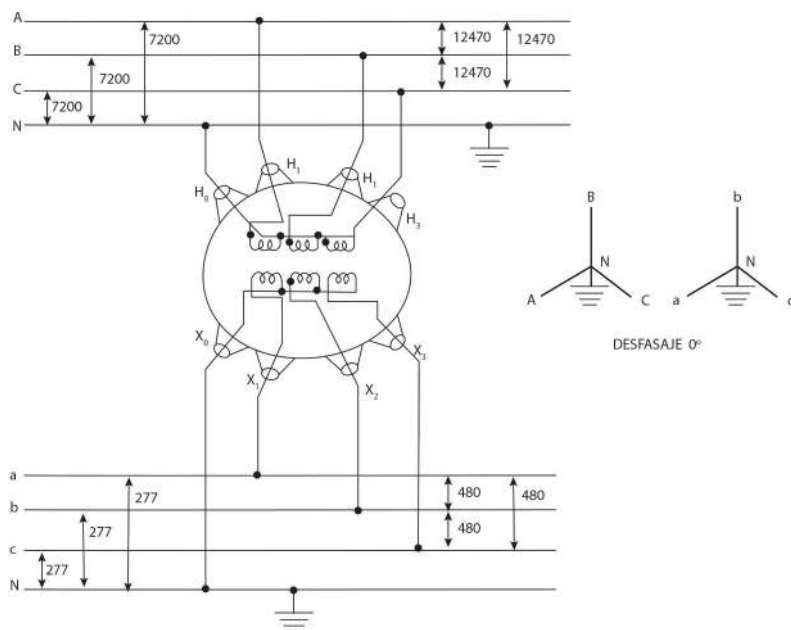
Ante fallas en el sistema primario, se pueden generar sobre corrientes en los lados de baja tensión, por lo cual se recomienda que los motores trifásicos estén provistos de protección contra corriente en las tres fases.



### Conexión C4

Sistema primario: 12 470 y 7 200 V en estrella y el neutro sólidamente puesto a tierra.

Conexión Primaria: Entre Fase y Neutro.



**Figura 5.23** Conexión C4 para transformador trifásico.

Sistema secundario: 480 y 277 V, 4 hilos, conexión en estrella, trifásico, el neutro sólidamente puesto a tierra.

Conexión secundaria: 480 V entre fases, 277 V de fase a tierra.

### Aplicación:

Esta conexión presenta muy buena regulación. Se usa para alimentar: cargas monofásicas comerciales e industriales en 277 V; cargas trifásicas comerciales e industriales alimentadas en 480 V, y para combinaciones de cargas monofásicas en 277 V y cargas trifásicas en 480 V.

### Capacidad del banco:

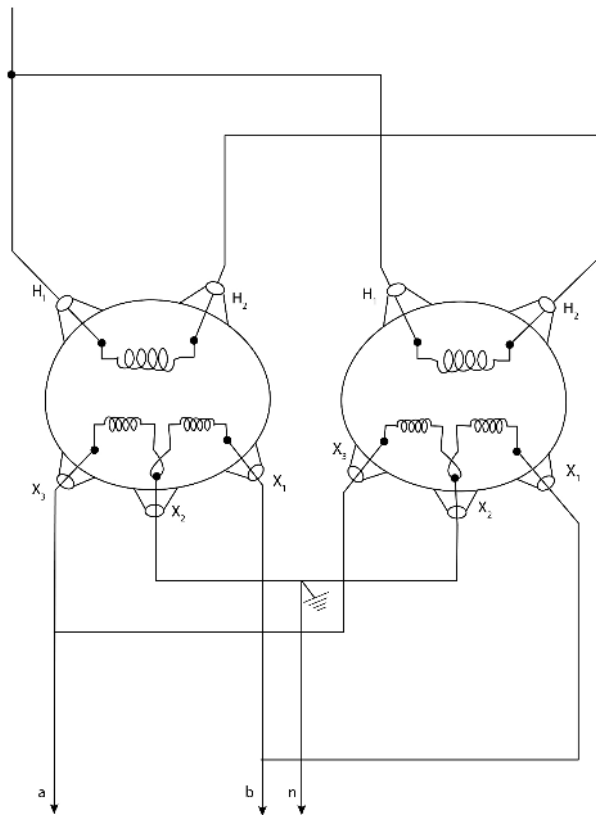
Cuando la cargas monofásicas están razonablemente equilibradas, el factor de utilización del banco es de 100 %

**Limitaciones:**

Ante fallas en el sistema primario, se pueden generar sobre corrientes en los lados de baja tensión, por lo cual se recomienda que los motores trifásicos estén provistos de protección contra corriente en las tres fases.

**Conexión D1**

Transformadores monofásicos en paralelo.



**Figura 5.24** Conexión D1 para transformadores monofásicos en paralelo.

**Aplicación:**

Para aumentar la capacidad de puntos de transformación existente, en una o más fases de un banco de transformadores monofásicos.

### Condiciones para la puesta en paralelo:

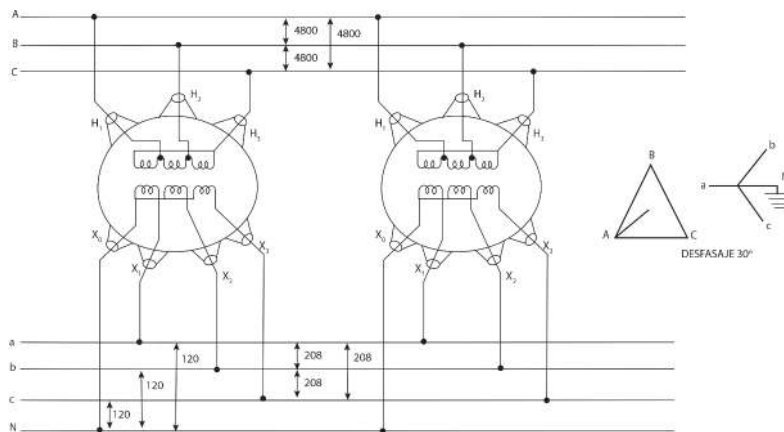
- La tensión nominal y la posición de las tomas deben ser iguales en las dos unidades.
- La diferencia en la relación de transformación de las unidades no será mayor de 7.5 %.
- Deberá existir concordancia de fases en los bancos conectados en paralelo.

### Limitaciones:

No se permitirá la operación en paralelo de un banco de transformación conectado en estrella en el lado secundario, con otro banco en Delta, en un lado secundario.

### Conexión D2

Transformadores trifásicos en paralelo.



**Figura 5.25** Conexión D2 para transformadores trifásicos en paralelo.

### Aplicación:

Para aumentar la capacidad de puntos de transformación existente.

### Condiciones para la puesta en paralelo:

- La tensión nominal y la posición de las tomas deben ser iguales en las dos unidades.
- La diferencia en la relación de transformación de las unidades no será mayor de 7.5 %.
- La diferencia entre las impedancias de ambas unidades no será mayor a 7.5 %.
- Deberá existir concordancia de fases en los bancos conectados en paralelo.

**Limitaciones:**

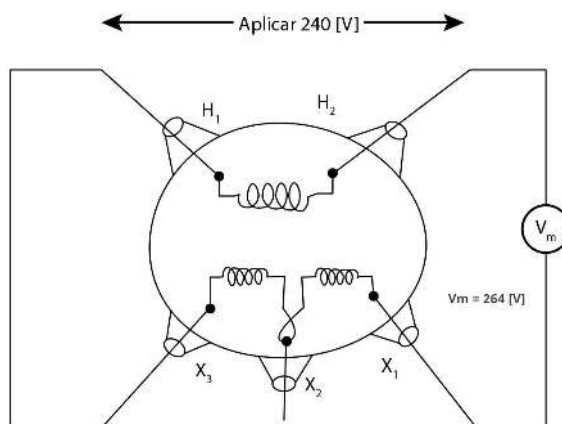
No se permitirá la operación en paralelo de un banco de transformación conectado en secundario, con otro banco en Delta, en un lado secundario.

**5.3.1 Polaridad**

La polaridad de los transformadores indica el sentido relativo instantáneo del flujo de corriente en las terminales de alta tensión con respecto a la dirección del flujo de corriente en las terminales de baja tensión.

La polaridad de un transformador de distribución monofásica, puede ser aditiva o sustractiva. Una simple prueba para determinar la polaridad de un transformador de distribución, es conectar dos terminales de alta y de baja tensión, y aplicar un voltaje reducido a cualquiera de los devanados.

La polaridad es aditiva si el voltaje medido entre las dos terminales de los devanados es mayor que el voltaje en el devanado de alta tensión tal como se muestra en la fig. 5.26



**Figura 5.26** Prueba de polaridad aditiva.

La polaridad es sustractiva si el voltaje medido entre las terminales de los devanados es menor que el voltaje del devanado de alta tensión, tal como lo muestra la figura 5.27.

De acuerdo con las normas industriales, todos los transformadores de distribución monofásicos de hasta 200 [KVA] con voltajes en el lado de alta tensión de hasta 8 600 (V) (voltaje del devanado), tienen polaridad adictiva. Todos los demás transformadores de distribución monofásicos, tienen polaridad sustractiva.

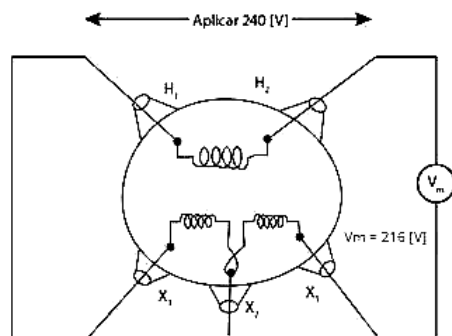


Figura 5.27 Prueba de polaridad sustractiva.

### 5.3.2 Conexiones de los transformadores en circuitos monofásicos.

El diagrama de la figura 5.28, muestra las conexiones necesarias para poder disponer de dos salidas a 120 (V), o disponer de una sola salida a 240 [V].

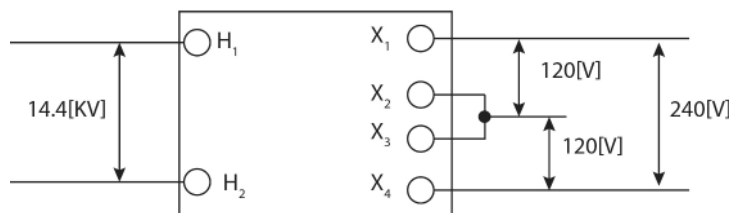


Figura 5.28 Conexiones para disponer de dos salidas de 120 [V], o una sola salida de 240 [V].

Ahora bien, usando el mismo transformador, es posible tener una única salida de 120 [V], si se conecta como lo muestra la fig. 5.29

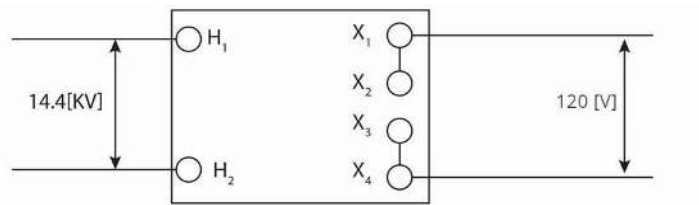


Figura 5.29 Conexiones para disponer de una sola salida de 120 [V]

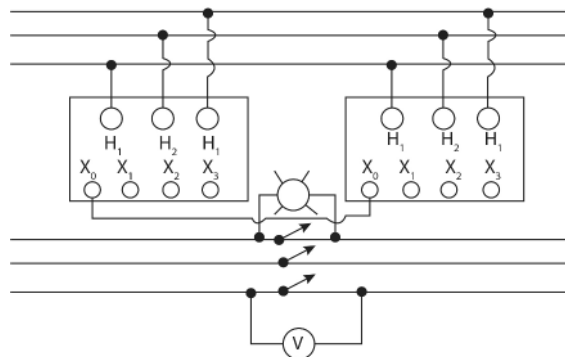
Los bancos de transformadores monofásicos, son utilizados en sistemas eléctricos trifásicos como sustitución de un transformador trifásico. Por ejemplo, en el transporte a largas distancias de la energía eléctrica.

Así mismo, el banco de los transformadores monofásicos también sirve para cambiar el número de fases del sistema; es decir, el sistema trifásico se puede convertir en un sistema bifásico, en un sistema de seis fases, o en un sistema de doce fases, etc. Por lo que respecta a las bobinas primarias y secundarias, se les puede conectar de varias formas, teniendo cuatro casos posibles: estrella/estrella (Y-Y); estrella/delta ( $Y - \Delta$ ); delta/estrella ( $\Delta - Y$ ) y delta/delta, ( $\Delta/\Delta$ ).

Es decir, se pueden conectar las bobinas del primario en estrella o en delta, al igual que ocurrirá en las bobinas del secundario. Dependiendo de cómo se conecten dichas bobinas, se tendrán unas características técnicas u otras. De esta forma, la relación de los voltajes de entrada y de salida, no únicamente dependerá de la relación de vueltas (espiras) de las bobinas primarias y secundarias; sino que también dependerá de como estén conectadas las bobinas primarias y secundarias. Las conexiones entonces, dependerán de su utilización.

### 5.3.3 División de la carga entre transformadores en paralelo

La operación para la conexión de los transformadores en paralelo se muestra en la figura 5.30



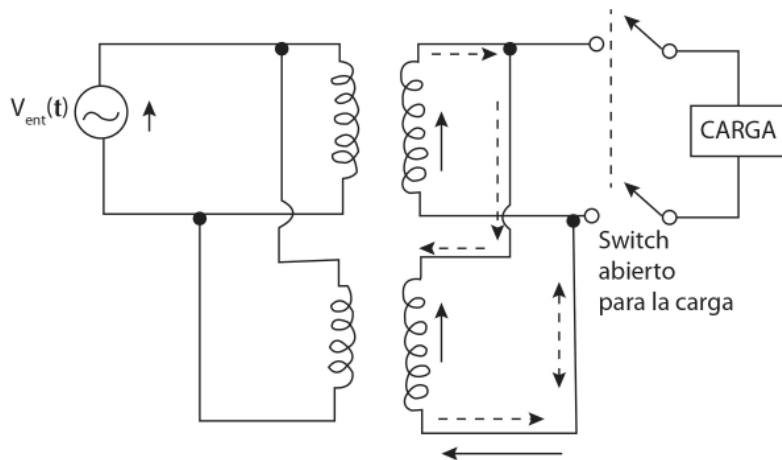
**Figura 5.30** Operación de la conexión de transformadores en paralelo.

Del diagrama anterior se concluye que:

- Los neutros deben estar conectados entre si.
- Verificar por medio de un voltímetro o de una lámpara incandescente, que no existe potencial entre las cuchillas.
- Si no existe potencial entre las cuchillas; éstas se cierran y los transformadores quedan en paralelo.

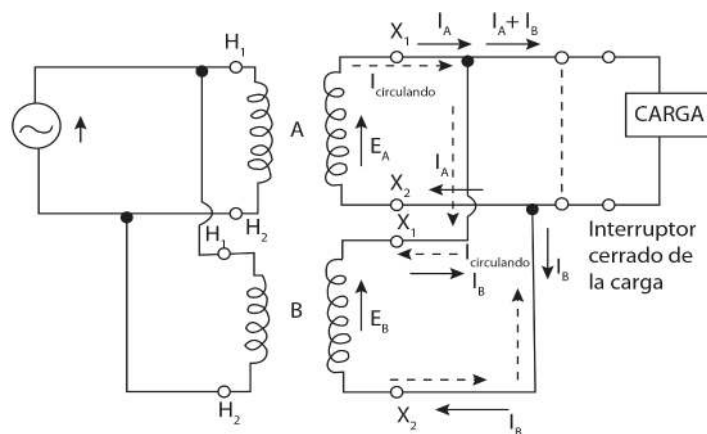
d) Se debe tener cuidado de la correspondencia de las fases.

Para la división de la carga entre transformadores en paralelo, un transformador se puede representar por una impedancia equivalente en serie con la fuente de voltaje de suministro y la impedancia de la carga, con las impedancias equivalentes del transformador y la carga referida al primario. Por lo tanto; si las relaciones de espiras de los transformadores a conectar en paralelo son iguales, se pueden presentar por impedancias en paralelo, para cualquier número de transformadores en paralelo. La corriente en cualquiera de las impedancias en paralelo se puede determinar convirtiendo las impedancias en admittancias. La figura 5.31 muestra la corriente circulante en transformadores en paralelo sin carga.



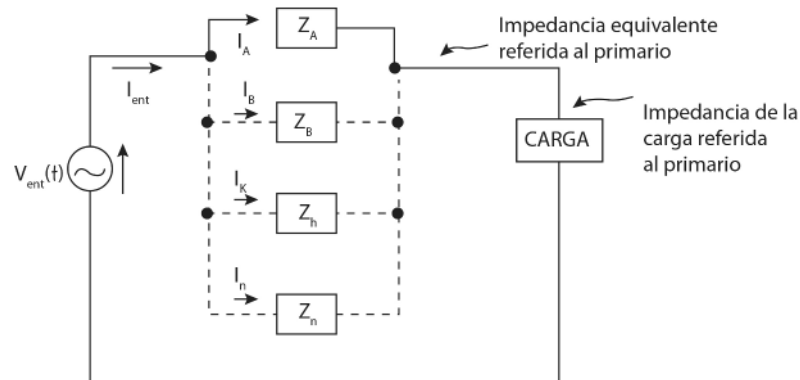
**Figura 5.31** Corriente circulante en transformadores en paralelo sin carga.

La figura 5.32 muestra la corriente circulante en transformadores en paralelo con carga.



**Figura 5.32** Corriente circulante en transformadores en paralelo con carga.

La fig. 5.33 muestra la aplicación en paralelo de transformadores.



**Figura 5.33** Circuito equivalente para la conexión en paralelo de transformadores.

Para los transformadores de la fig. 5.33 (anterior):

$$Y_A = \frac{1}{Z_A} ; Y_B = \frac{1}{Z_B}, \dots, Y_k = \frac{1}{Z_K}, \dots, Y_n = \frac{1}{Z_n}$$

Al estar en paralelo, la admitancia equivalente de los transformadores en paralelo es:

$$Y_p = Y_A + Y_B + \dots + Y_k + \dots + Y_n$$

Donde:

$Y_k$  es la admitancia equivalente del transformador  $K$ .

$Y_p$  es la admitancia de los transformadores en paralelo, los voltajes deben ser iguales, por lo que:

$$Z_k I_k = Z_p I_p$$

y como:

$$\frac{1}{Z_k} = y_k ; \frac{1}{Z_p} = Y_p \Rightarrow \frac{I_k}{k} = \frac{I_p}{p}$$

La corriente en el transformador  $K$  es:

$$I_k = I_p \left( \frac{Y_k}{Y_p} \right)$$

La ecuación anterior es válida para transformadores en paralelo que tienen la misma relación de transformación. Si la relación de transformación no es igual; entonces las corrientes circulantes hacen que los valores calculados sean diferentes del valor real. Cuando los parámetros de los transformadores están dados como impedancia base, se pueden usar estos valores en lugar de los valores ohmicos de impedancia.



### 5.4 Transformadores monofásicos en circuitos bifásicos

Generalmente las líneas bifásicas son de cuatro hilos, por lo que los transformadores se conectan a cada una de las líneas laterales, de manera que cada circuito lateral funciona como un circuito monofásico que parecería que no tiene nada que ver con el otro circuito. Se debe dividir la carga entre las fases para que esté lo mejor balanceada posible. Los transformadores utilizados se deben de calcular para que sean de la mitad de la carga que se va a suministrar en total. Existen sin embargo, algunos sistemas bifásicos de 3 hilos, de tal manera que el conductor central es igual a 1.41 veces el voltaje de línea y soporta la mitad de las carga total.

Debido a la inducción mutua entre fases, se observan desequilibrios considerables de diferencia de potencial, lo que empeora y se complica cuando el factor de potencia disminuye.

En la forma más sencilla del sistema bifásico, cada una de las dos fases constituye un sistema monofásico independiente como puede observarse en la figura 5.34 (a).

Mediante la distribución trifilar mostrada en dicha figura se consigue economía en el uso de cobre en el secundario, pero no hay que olvidar que el hilo central en tal caso, no es un neutro como se muestra en la fig. 5.34 (b). Ya que para cargas iguales sobre las dos fases, debe conducir una corriente igual a  $\sqrt{2}$  veces la corriente en cualquiera de las fases, y además, la tensión entre los hilos extremos es  $\sqrt{2}$  veces el voltaje por fase. La fig. 5.34 (c) muestra una disposición pentafilear con un neutro en cada fase, si bien, solamente uno de tales neutros puede ser puesto a tierra. Estas tres figuras (a), (b) y (c) se denominan conexiones para un sistema trifásico.

Existe otro grupo de tres conexiones (a), (b) y (c) llamada conexión bifásica de dos transformadores, y que se representa en la figura 5.35. Dentro de este segundo grupo de las figuras, en la fig. 5.35 (a) Se muestran dos transformadores idénticos alimentados sobre las partes de los primarios por una fuente bifásica, por lo que las dos tensiones o voltajes de los secundarios  $X'_1 X'_2$  y  $X''_1 X''_2$  son iguales y están en cuadratura de tiempo; el segundo voltaje aparece adelantado al primario, pero podría hacerse que se retrase con respecto a él, invirtiendo las terminales del primario de la fase 2. Los puntos centrales de dos secundarios están conectados como se indica en las figuras 5.35 (a) y (b); en el segundo esquema aparecen unas flechas para indicar los sentidos positivos, supuestos arbitrariamente a través de los devanados de acuerdo con las indicaciones correspondientes a las polaridades de las terminales.

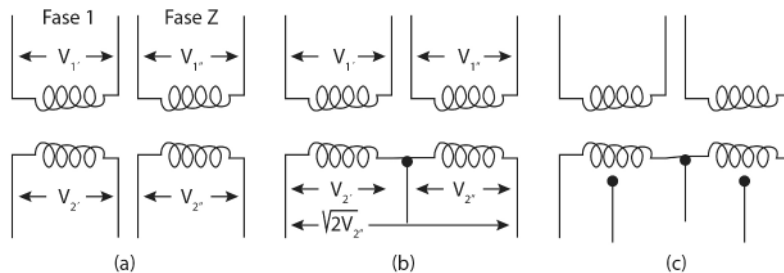


Figura 5.34 Conexiones para un sistema bifásico.

Las relaciones fase-tiempo entre voltajes (y corriente) en un sistema polifásico, pueden determinarse siempre con facilidad y exactitud, aplicando las tres reglas que se dan a continuación, cada una de las cuales es una consecuencia natural del significado físico inherente al empleo de los diagramas vectoriales.

1. Supóngase un sentido positivo en cada parte del circuito interconectado, sin olvidar el hecho de que en un circuito polifásico equilibrado, el orden de las conexiones debe ser tal, que haga simétrico el sistema en conjunto.
2. Designarse las terminales de acuerdo con un sistema cíclico de rotación.
3. Siguiendo el circuito desde una terminal hasta la siguiente en orden cíclico, los vectores correspondientes a las partes atravesadas en sentido positivo deben utilizarse en el sentido con que aparecen en el diagrama vectorial dado; pero si alguna parte es atravesada en sentido negativo, el vector a ella correspondiente, debe invertirse antes de cambiarlo con los demás.

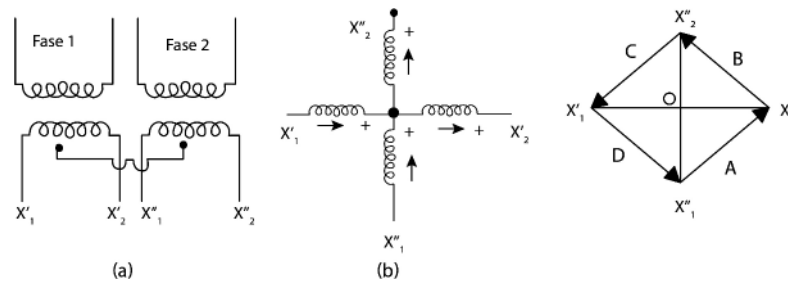


Figura 5.35 Conexión bifásica de dos transformadores.

## 5.5 Tres transformadores en circuito trifásico

En la práctica, existen cuatro formas posibles para interactuar los devanados de las terminales primarias y secundarias de un arreglo de tres transformadores, para transferir energía eléctrica desde un circuito trifásico a otro, y dichas conexiones son las siguientes:

- a) Terminales primarias en  $Y$ ; terminales secundarias en  $Y$ .
- b) Terminales primarias en  $\Delta$ ; terminales secundarias en  $\Delta$ .
- c) Terminales primarias en  $Y$ ; terminales secundarias en  $\Delta$ .
- d) Terminales primarias en  $\Delta$ ; terminales secundarias en  $Y$ .

Dado que todas estas conexiones son simétricas, se deduce que si los tres transformadores tienen características idénticas y potencias indicadas, y así los voltajes aplicados a los primeros están equilibrados, los voltajes de las terminales secundarias estarán también equilibrados, siempre que la carga sea la misma en cada una de las fases. Presidiendo por el momento de las consideraciones relativas a las características de funcionamiento en condiciones de carga no equilibrada, es conveniente analizar las relaciones de fase entre los voltajes de las terminales primarias y de las terminales secundarias, para cada una de estas cuatro combinaciones, con la hipótesis de tener cargas equilibradas. A continuación, se presentan las generalidades de cada una de las cuatro interconexiones utilizadas:

1. **Conexión Estrella-Estrella (Y/Y).** En esta figura 5.36 (a), se muestra el esquema de conexiones de los tres transformadores, indicando los signos de las terminales en polaridad sustractiva. Los conductores de las tres terminales primarias se han designado como  $A, B, C$ ; mientras que las correspondientes conexiones en las terminales secundarias se han designado como  $a, b, c$ , respectivamente. Si los voltajes de fase de las tres terminales primarias se representan por los vectores  $OA, OB, OC$ , las correspondientes tensiones de fase en las terminales secundarias son  $o', o'b, o'c$ , como se indica en la fig. 5.36 (b) y (c). Con el objetivo de determinar las posiciones fase-tiempo de los voltajes de línea, es preciso señalar que el orden cíclico de las terminales de línea de las conexiones en los primarios es  $ABC$ ; por lo que de acuerdo con el procedimiento indicado en la Norma Oficial Mexicana (NOM), para hallar la fase de tiempo del voltaje en estas terminales  $A$  y  $B$ , es necesario seguir el circuito  $AOB$  en dicho orden, y el hacerlo así; la parte  $AO$  es atravesada en sentido positivo y  $OB$  es atravesado en sentido negativo. Por lo tanto, al invertir el vector  $OB$ , y combinarlo geoméricamente con  $OA$ , el resultado es  $BA$ . Los demás vectores de línea de las terminales primarias se determinan de modo análogo e, igualmente, para los voltajes de línea de las terminales del lado secundario.

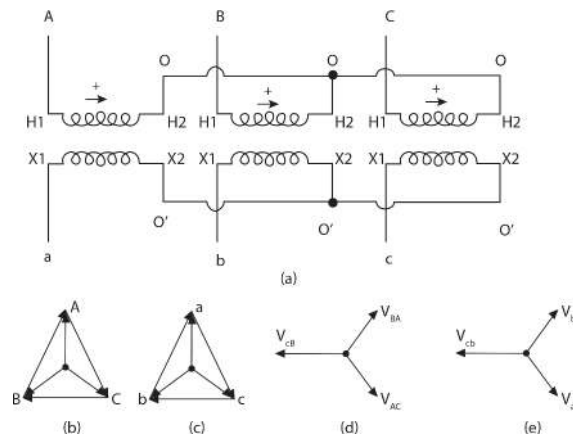


Figura 5.36 Conexión Y-Y con polaridades sustractivas.

Es preciso recordar con toda exactitud, que los diagramas vectoriales como los de la fig. 5.36 (b) y (c); muestran relaciones fase-tiempo entre las magnitudes representadas. Por lo que no deberán

confundirse nunca con los diagramas especiales, como el de la fig. 5.36 (a)

2. **Conexión Delta-Delta, ( $\Delta - \Delta$ )** La fig.5.37 muestra tres transformadores, los cuales tienen una polaridad sustractiva y están conectados en Delta ( $\Delta$ ); tanto en la sección de los devanados primarios, como en la parte de los devanados secundarios, todos los devanados de los primarios, deben estar diseñados para soportar todo el voltaje de línea [V]; mientras que todos los devanados de los secundarios, deberán estarlo para soportar el voltaje total de línea del secundario; y del mismo modo que en la conexión  $Y - Y$ ; no existe desplazamiento angular entre los voltajes de línea de los devanados primarios y secundarios, salvo el pequeño desplazamiento debido a la reactancia de dispersión, y a la corriente de magnetización.

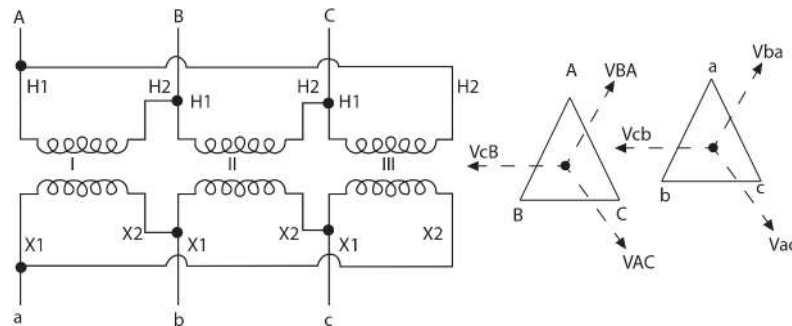


Figura 5.37 Conexión  $\Delta - \Delta$ , polaridades sustractivas.

3. **Conexión  $Y - \Delta$**  En la figura 5.38, se muestra el esquema de conexión para el caso en que todas las polaridades en los transformadores sean sustractivas, apareciendo también las fases relativas de línea y las tensiones de fase. Nótese que existe un desplazamiento de fase de  $30^\circ$  entre los voltajes de línea del devanado primario y del devanado secundario. Si los voltajes de línea son  $V'$  y  $V''$ , entonces el diagrama es:

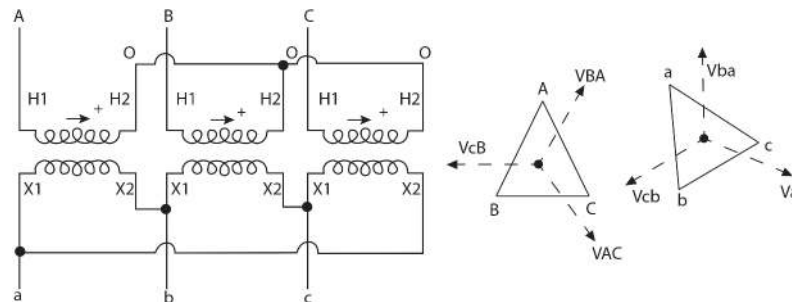
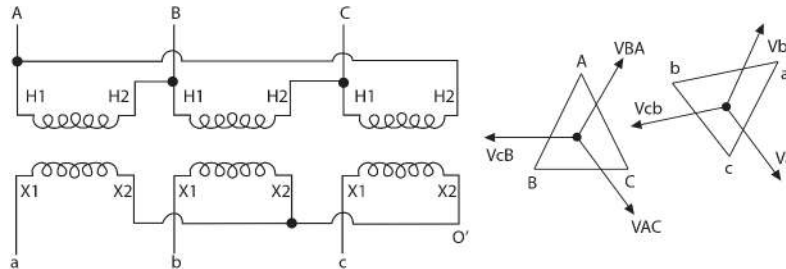


Figura 5.38 Conexión  $Y - \Delta$ , polaridades sustractivas.

4. **Conexión  $\Delta - Y$**  En la figura 5.39, se establece, el esquema de conexiones (suponiendo nuevamente) con polaridades sustractivas; así como las relaciones fase-tiempo entre los voltajes del devanado primario y del devanado secundario. Existe un desplazamiento de fase de  $30^\circ$ , entre los voltajes de línea del devanado primario y del devanado secundario, por un sentido opuesto al del circuito. Los transformadores deberán estar diseñados para un voltaje del primario  $V$  y un voltaje del secundario  $V_s$ .



**Figura 5.39** Conexión  $\Delta$ -Y, polaridades sustractivas.

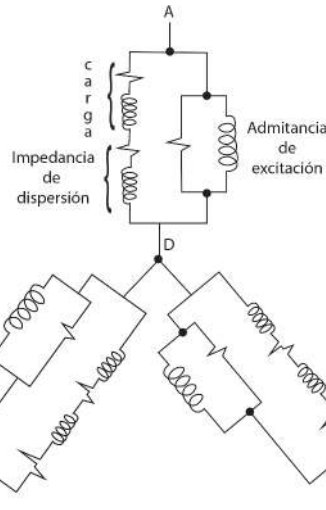
## 5.6 Características del funcionamiento de la conexión Y-Y

Para la tensión dada entre fases; el voltaje en las terminales de un transformador conectado en Y es  $V\sqrt{3}$ ; mientras que cuando se trata de transformadores conectados en  $\Delta$ , el voltaje en la bobina es solamente  $V$ ; o sea, un 73% mayor; la corriente existente en la bobina de un transformador conectado en Y es igual a la corriente de línea, mientras que la corriente de un transformador conectado en  $\Delta$  es  $I\sqrt{3}$ , o sea, el 58% de la corriente de línea. Así pues, siempre que las restantes condiciones sean las mismas, el devanado de un transformador conectado en Y, tendrá menos espiras y necesitará tener un conductor de mayor sección transversal, que el conductor que tendría un transformador equivalente conectado en  $\Delta$ ; y su construcción sería algo menos costosa.

Las construcciones macizas, proporcionan devanados mecánicamente muy fuertes y de esta forma, dispuestos para resistir los esfuerzos debidos a grandes corrientes en cortocircuito.

Mientras que los voltajes más bajos reducen el esfuerzo dieléctrico sobre el aislamiento. Por tales razones, la conexión Y-Y se considera ventajosa cuando han de enlazarse dos sistemas de voltaje relativamente altos; y aun existe otra razón que pueda resultar sumamente favorable en algunos casos: la de que no existe desplazamiento de fase entre los voltajes del devanado primario y del devanado secundario. Sin embargo, también existen algunos inconvenientes entre los que se destacan: las cargas sobre los devanados secundarios alimentados por transformadores Y-Y pueden conectarse en  $\Delta$  o en Y, pudiendo estar equilibradas o desequilibradas; pero si las cargas están entreconectadas en  $\Delta$ , pueden

ser siempre reemplazadas por un conjunto de cargas equivalentes conectadas en Y, y de modo tal que el circuito equivalente para toda la combinación de transformadores y sus cargas asociadas, tenga la forma de circuito que aparece en la siguiente figura. 5.40.



**Figura 5.40** Circuito equivalente, conexión en Y-Y.

### 5.7 La conexión en $\Delta$ abierta o en V

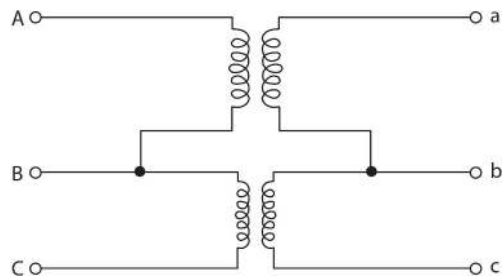
En esta interconexión, es evidente que cada transformador esté excitado directamente desde el generador u otra fuente de alimentación. Es una disposición que se utiliza en muchos casos, porque tiene la ventaja, de que pueda separarse totalmente un transformador, sin que resulte afectado el funcionamiento del sistema salvo en cuanto a que la capacidad final es menor con los dos transformadores que quedan, que con los tres originalmente interconectados; en tal caso, existe también cierto equilibrio en los voltajes de los devanados secundarios. Entonces, al quitar uno de los transformadores, se dice que los transformadores están conectados en V o en  $\Delta$  abierta ( ver la fig. 5.41).

Si se pretende que tres transformadores funcionen satisfactoriamente conectados en  $\Delta$ , cada uno de ellos deba tener la misma impedancia, ya que si esta condición no queda satisfecha. Las corrientes no estarán completamente equilibradas, aun con cargas equilibradas. De esta forma las tres corrientes de línea son  $I_I, I_{II}$  e  $I_{III}$ , y las corrientes de los transformadores en  $\Delta$  expresadas en función del devanado primario son  $I_A, I_B$  e  $I_C$ , según la ley de Kirchoff, se dice que.

$$I_I = I_C - I_A$$

$$I_I = I_A - I_B$$

$$I_I = I_B - I_C$$

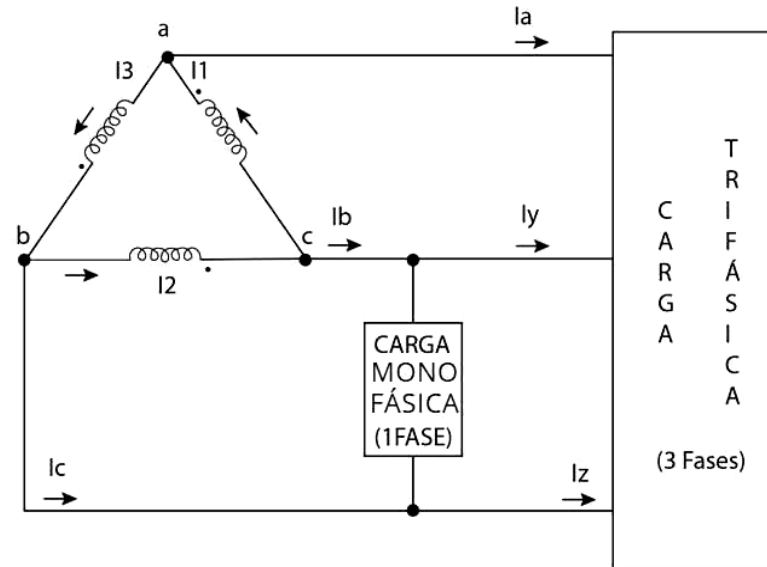


**Figura 5.41** Conexión en V-V (o  $\Delta$  Abierta).

### 5.8 Funcionamiento en paralelo de transformadores conectados en $\Delta$ abierta y en $\Delta$ cerrada

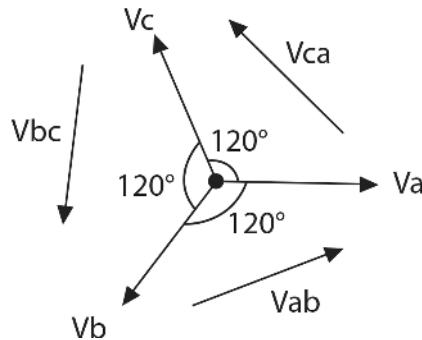
Si dos grupos de transformadores idénticos cada uno de los cuales consiste en tres transformadores idénticos conectados en  $\Delta$ , están funcionando en paralelo y se separa un transformador de uno de los grupos, el circuito equivalente tomará la forma de un arreglo especial. Si cada transformador tiene una impedancia de dispersión  $Z$ , una parte de la conexión en  $\Delta$ , tendrá una impedancia  $Z/2$ .

Se supone que los voltajes  $V_a$ ,  $V_b$ , y  $V_C$  aplicados al devanado primario están equilibrados, que la carga también lo está, y que cada rama tiene una impedancia  $Z$ . Se desea hallar la corriente conducida por cada transformador y la capacidad del sistema, comparada con la del conjunto original de seis transformadores. A continuación, se establece un arreglo de transformadores en conexión Delta cerrada alimentando una carga trifásica y una monofásica (ver fig. 5.42).



**Figura 5.42** Transformadores en conexión  $\Delta$  cerrada alimentando una carga trifásica y una carga monofásica simultáneamente.

Se define  $V_a$  con  $0^\circ$  para construir el diagrama unifilar:



Entonces se tiene que:

$$V_a = V_L/\sqrt{3}[V]; V_1 = V_{ab} = V_L[V]$$

$$V_b = V_L/\sqrt{3}[V]; V_2 = V_{bc} = V_L[V]$$

$$V_c = V_L/\sqrt{3}[V]; V_3 = V_{ca} = V_L[V]$$

Con los datos del circuito de la fig.5.42 se establecen los valores de las corrientes:



$$|I_a| = |I_y| = |I_z| = [S_3 \text{ fases}/(\sqrt{3})(V_L)]$$

Por lo que:

$$I_a = S_3 \text{ fases}/(\sqrt{3})(V_L)[A]$$

$$I_y = S_3 \text{ fases}/(\sqrt{3})(V_L)[A]$$

$$I_z = S_3 \text{ fases}/(\sqrt{3})(V_L)[A]$$

$$I_z = S_3 \text{ fases}/(\sqrt{3})(V_L)[A]$$

$$I_x = S_{/fase}/V_L[A]$$

$$I_b = I_y + I_x = S_3 \text{ fases}/(\sqrt{3})(V_L) + S_1 \text{ fase}/V_L$$

$$I_c = I_z - I_x = S_3 \text{ fases}/(\sqrt{3})(V_L) - S_1 \text{ fase}/V_L$$

En función al análisis por componentes simétricos se tiene:

$$I_1 = (I_a - I_b)/3[A]$$

$$I_1 = (I_b - I_c)/3[A]$$

$$I_1 = (I_c - I_a)/3[A]$$

Entonces: las ecuaciones quedan como sigue:

$$I_1 = \left(\frac{1}{3}\right)[(S_3 \text{ fases}/(\sqrt{3})(V_L)) - (S_3 \text{ fases}/(\sqrt{3})(V_L)) + (S_1 \text{ fase}/V_L)]$$

$$I_2 = \left(\frac{1}{3}\right)[(S_3 \text{ fases}/(\sqrt{3})(V_L)) + (S_1 \text{ fase}/(V_L)) + (S_1 \text{ fase}/V_L - (S_3 \text{ fases}/(\sqrt{3})(V_L)) - (S_{fase}/V_L)]$$

$$I_3 = \left(\frac{1}{3}\right)[(S_3 \text{ fases}/(\sqrt{3})(V_L)) - (S_1 \text{ fase}/(V_L)) - (S_3/\text{fases}/(\sqrt{3})(V_L))]$$

Simplificando se tiene:

$$I_1 = \left(\frac{1}{3}\right)[(S_3 \text{ fases}/(\sqrt{3})(V_L)) - (S_3/\text{fases}/(\sqrt{3})(V_L)) + (S_1 \text{ fase}/V_L)]$$

$$I_2 = \left(\frac{1}{3}\right)[(S_3 \text{ fases}/(\sqrt{3})(V_L)) + (2S_1/\text{fase}/(V_L)) - (S_3 \text{ fases}/(\sqrt{3})V_L)]$$

$$I_3 = \left(\frac{1}{3}\right)[(S_3 \text{ fases}/(\sqrt{3})(V_L)) - (S_1/\text{fase}/(V_L)) - (S_3 \text{ fases}/(\sqrt{3})V_L)]$$

De I1:

$$\begin{aligned} (S_3 \text{ fases}/(\sqrt{3})(V_L) - (S \text{ fases}/(\sqrt{3})(V_L)) &= (S_3 \text{ fases}/(\sqrt{3})(V_L)(1 - 1)) \\ &= (S_3 \text{ fases}/(\sqrt{3})(V_L))(\sqrt{3}) \Rightarrow S_3 \text{ fases}/V_L \end{aligned}$$

De I2:

$$\begin{aligned} (S_3 \text{ fases}/(\sqrt{3})(V_L) - (S \text{ fases}/(\sqrt{3})(V_L)) &= (S_3 \text{ fases}/(\sqrt{3})(V_L)(1-)) \\ &= (S_3 \text{ fases}/(\sqrt{3})(V_L))(\sqrt{3})(\sqrt{3}) \Rightarrow S_3 \text{ fases}/V_L \end{aligned}$$

De I3:

$$\begin{aligned} (S_3 \text{ fases}/(\sqrt{3})(V_L) - (S \text{ fases}/(\sqrt{3})(V_L)) &= (S_3 \text{ fases}/(\sqrt{3})(V_L)(1-)) \\ &= (S_3 \text{ fases}/(\sqrt{3})(V_L))(1) \Rightarrow S_3 \text{ fases}/V_L(\sqrt{3})(\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Luego entonces:

$$I_1 = \left(\frac{1}{3}\right)[(S_3 \text{ fases})/V_L - (S_{\text{fase}}/V_L)][A]$$

Y el conjugado de  $I_1$  es:

$$I_{*1} = \left(\frac{1}{3}\right)[(S_3 \text{ fases})/V_L + (S_1 \text{ fase}/V_L)][A]$$

$$I_2 = \left(\frac{1}{3}\right)[(S_3 \text{ fases})/V_L + (2S_1 \text{ fase}/V_L)][A]$$

Y el conjunto de  $I_2$  es:

$$I_{*2} = \left(\frac{1}{3}\right)[(S_3 \text{ fases})/V_L + (2S_1 \text{ fase}/V_L)][A]$$

$$I_3 = \left(\frac{1}{3}\right)[(S_3 \text{ fases})/V_L + (S_1 \text{ fase}/V_L)][A]$$

Y el conjunto de  $I_3$  es:

$$I_{*3} = \left(\frac{1}{3}\right)[(S_3 \text{ fases})/V_L + (S_1 \text{ fase}/V_L)][A]$$

En términos de distribución de potencia en los transformadores se tiene:

$$S_1 = (V_1)(I_{1*}) ; S_2 = (V_2)(I_{*2}) ; S_3 = (V_3)(I_{3*})$$

Por lo que se tiene entonces:

$$S_1 = (V_L) \left\{ \left(\frac{1}{3}\right) [(S_3 \text{ fases}/V_L) + (S_1 \text{ fase}/V_L)] \right\} = \left(\frac{1}{3}\right) [(S_3 \text{ fases}) + (S_1 \text{ fase})]$$

$$S_2 = (V_L) \left\{ \left(\frac{1}{3}\right) [(S_3 \text{ fases}/V_L) + (S_1 \text{ fase}/V_L)] \right\} = \left(\frac{1}{3}\right) [(S_3 \text{ fases}) + (2S_1 \text{ fase})]$$

$$S_3 = (V_L) \left\{ \left(\frac{1}{3}\right) [(S_3 \text{ fases}/V_L) + (S_1 \text{ fase}/V_L)] \right\} = \left(\frac{1}{3}\right) [(S_3 \text{ fases}) + (S_1 \text{ fase})]$$

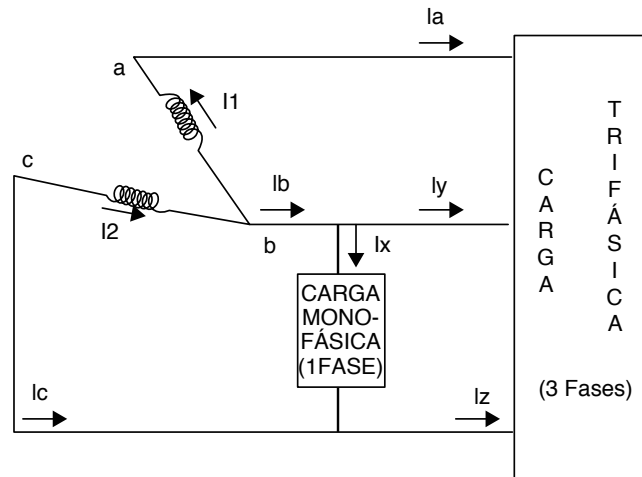
Finalmente y en conclusión, la potencia suministrada por un banco de transformadores en conexión  $\Delta$  alimentando una carga trifásica desbalanceada (lo que puede significar una cara trifásica balanceada, y al mismo tiempo una monofásica), se distribuye de acuerdo a las siguientes ecuaciones:

$$S_1 = \left(\frac{1}{3}\right) [(S_3 \text{ fases}) + (S_1 \text{ fase})]$$

$$S_2 = \left(\frac{1}{3}\right) [(S_3 \text{ fases}) + (2S_1 \text{ fase})]$$

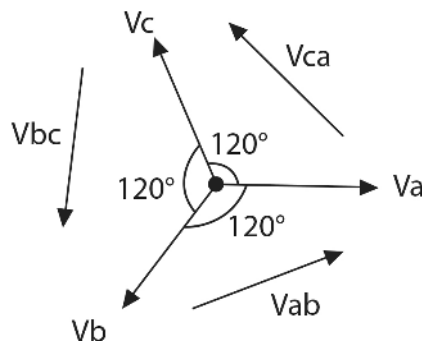
$$S_3 = \left(\frac{1}{3}\right) [(S_3 \text{ fases}) + (S_1 \text{ fase})]$$

Para el análisis de una Delta abierta alimentando una carga, se utilizará el arreglo de la fig. 5.43; dicho circuito se alimenta una carga trifásica y una monofásica simultáneamente.



**Figura 5.43** Transformadores en conexión  $\Delta$  abierta alimentando una carga trifásica y una monofásica simultáneamente.

Se define  $V_a$  con  $0^\circ$  para construir el diagrama unifamiliar correspondiente:



Entonces se tiene:

$$I_a = \left[ (S_{3 \text{ fases}} / (\sqrt{3})(V_L)) \right] [A]$$

$$I_c = \left[ (S_{3 \text{ fases}} / (\sqrt{3})(V_L)) - (S_{1 \text{ fase}} / V_L) \right] [A]$$

En cuanto a las potencias  $S_1$  y  $S_2$  se tiene lo siguiente:

$$S_1 = V_1 I_1^* = (V_L) (S_{3 \text{ fases}} / (\sqrt{3})(V_L)) = S_{3 \text{ fases}} / (\sqrt{3})$$

$$S_2 = V_2 I_2^* = (V_L) \left[ (S_{fases}/(\sqrt{3}))(V_L) + (S_{1\ fase}/V_L = (S_{3\ fases}/(\sqrt{3})) + (S_{1\ fase}) \right]$$

Finalmente:

$$S_1 = S_{3\ fases}/(\sqrt{3})$$

$$S_2 = S_{3\ fases}/(\sqrt{3}) + S_{1\ fase}$$

### 5.9 Características de funcionamiento de las conexiones $\Delta - Y$ e $Y - \Delta$

Estas conexiones se adaptan particular y excelentemente a transformadores en sistemas de alta tensión. Se utiliza normalmente la conexión  $\Delta - Y$  para elevar el voltaje, y se configura la conexión  $Y - \Delta$  para reducir dicho voltaje. Ahora el empleo de la conexión en  $Y$  en la configuración de alto voltaje, permite poner a tierra física el punto neutro, con lo que queda relativamente limitado el potencial sobre cualesquiera de las líneas al voltaje  $Y$  del sistema, reduciéndose al mismo tiempo, el costo de los devanados de alto voltaje.

La conexión a tierra física del punto neutro de los transformadores elevadores  $\Delta - Y$ , no introduce dificultad alguna a causa de los armónicos de tercer orden, ya que la componente armónica de tercer orden de la corriente de excitación puede fluir en el devanado primario, cuando se trata de transformadores reductores conectados en  $Y - \Delta$ , la componente armónica de tercer orden de la corriente de excitación no puede fluir en los devanados del primario, sino que aparecen en el circuito  $\Delta$  del secundario, donde las tres corrientes de armónicas están en fase a lo largo del circuito en  $\Delta$ . En otras palabras, el devanado principal  $\Delta$  ocupa el lugar del devanado terciario en relación a la conexión  $Y - Y$ .

Si la forma de onda del voltaje aplicado al devanado primario de un arreglo  $Y - \Delta$  contiene armónicas, la forma de onda de la parte del secundario, no será la misma que en la parte del primario.

### 5.10 Funcionamiento en paralelo de conexiones en $Y - Y$ , $\Delta - \Delta$ ; $\Delta - Y$ y $Y - \Delta$

El acoplamiento de dos transformadores en paralelo consiste en conectar eléctricamente sus terminales homólogas entre sí, tanto el devanado de alta tensión como el devanado de baja tensión. En caso de que los transformadores pertenezcan a diferentes subestaciones o a diferentes secciones dentro de una misma subestación, dicha conexión tendrá que realizarse mediante un circuito eléctrico, ya sea que este sea subterráneo o aéreo.

La conexión de transformadores en paralelo, se hace necesaria debido a los incrementos de la de-

manda que superan la capacidad existente, o cuando los requerimientos de la demanda que superan la capacidad existente, o cuando los requerimientos de confiabilidad lo exigen. Este es el caso de que si un transformador falla, el otro continuará alimentando la carga sin interrupción.

Un aumento de la demanda, supone elevar la potencia de los transformadores y en algunos casos, eso supone sobrecargar el transformador, lo que contribuye a un acortamiento de la vida útil de éste. Antes de retirar la unidad que se reemplazará por una nueva y de mayor potencia, se produce el acoplamiento de varios transformadores en paralelo, que en conjunto sean capaces de soportar las cargas máximas que demande el sistema. Cuando la demanda de energía es menor; es decir se reduce temporalmente, resulta más económico operar con un transformador mayor a capacidad reducida. Por lo que, cuando la demanda es muy fluctuante, resulta más provechoso la instalación de dos o más transformadores en paralelo que utilizar un transformador de gran capacidad. En estas condiciones, el sistema es más flexible porque tiene la posibilidad de agregar una parte de los transformadores en paralelo cuando sea necesario. Esto lleva a establecer otros dos de los objetivos del acoplamiento, y es que en caso de una falla, o en caso de que sea necesario realizar maniobras en el sistema, uno de los transformadores sea capaz de mantener la estabilidad del sistema alimentando las cargas más esenciales que sean demandadas. Esto conlleva finalmente, a mejorar la confiabilidad de la red, y así, poder utilizar un uso más eficiente, aprovechando mejor los recursos que ofrece la red. también favorece el poder realizar un mejor mantenimiento de los equipos y poder dar un óptimo servicio a los clientes conectados a la red.

Para poder hacer la conexión de transformadores en paralelo, se ha de cumplir algunas condiciones, unas de carácter obligatorio y otras opcionales. En caso de no cumplirse las condiciones obligatorias, puede suponerse que podrían presentar cortocircuitos, y por lo tanto la imposibilidad de funcionamiento; mientras que si no se cumplen las condiciones opcionales convenientes, el funcionamiento es paralelo no será el óptimo, ya que se produzcan una serie de efectos que limitaran el uso eficiente de la red. Entre las condiciones obligatorias a cumplir, se establecen las siguientes:

- Igual índice horario.
- Igual secuencia de fase.

Los transformadores con igual índice horario, se pueden acoplar sin ninguna acción adicional a conectar las terminales homólogas. En ocasiones, se pueden conectar transformadores pertenecientes a distintos grupos de conexión permutando en el primario o en el secundario las conexiones entre dos terminales.

Dentro de las condiciones opcionales convenientes se destacan las siguientes:

- Igual relación de transformación(en todos los escalones de regulación)
- Igual voltaje de cortocircuito, expresada en porcentaje o por unidad.

Entonces para la óptima y eficiente conexión de transformadores en paralelo, es fundamental que ambos transformadores tengan el mismo índice horario, una conexión de terminales homólogas, así como, la misma secuencia de fases. A continuación se define cada uno de los tres términos enumerados:

- índice horario. Es la diferencia de ángulo entre el voltaje primario y su correspondiente voltaje secundario. Se expresa según la posición de las agujas del reloj, en el cual, la diferencia entre horas son  $30^\circ$ , y en donde por convención la tensión o voltaje en el devanado primario se pone en la hora 12, y el voltaje en el devanado secundario, en el múltiplo de 30 que corresponde. La hora que resulta indica el índice horario; es decir, el defase entre los voltajes primarios y secundarios. De esta forma, un transformador con índice horario 5, supondrá un defase entre el voltaje primario y el secundario de  $150^\circ$ .
- Conexión homóloga de terminales. La nomenclatura que se utiliza para designar los tipos de transformadores. Está compuesta por dos letras y un número. La primera letra representa la conexión del arrollamiento de alto voltaje, y se escribe con mayúsculas. La segunda letra representa la conexión del arrollamiento de baja tensión y se escribe con minúsculas. Finalmente; el número representa el índice horario.
- Secuencia de fases. Es el orden de rotación de los vectores. Es la sucesión en el tiempo de los máximos de los parámetros eléctricos: voltaje o intensidad, en las 3 fases de un sistema. A ella corresponde un sentido de rotación del diagrama vectorial. Los transformadores cuya secuencia sea opuesta; es decir, tengan sentido de giro de los diagramas vectoriales opuestos, no pueden conectarse en paralelo, porque en un determinado instante coincidirán los vectores de voltaje del secundario, aun siendo del mismo grupo de conexión, en el instante siguiente, los vectores comienzan a desplazarse y aparecen diferencias de potencial entre las fases homólogas. Por ello, es necesario que los transformadores tengan diagramas vectoriales que giren en igual sentido.

En la práctica, no siempre se tienen las condiciones de acoplamiento deseadas y puesto que se pueden dar casos en los que los transformadores que se quieren acoplar no tengan exactamente iguales las características que influyen para tener un acoplamiento óptimo. Las diferencias existentes entre los mismos, dan lugar a que se puede tener distintos casos de acoplamiento, en los cuales pueden aparecer distintos efectos que perjudiquen el óptimo funcionamiento en paralelo. Estos posibles casos se deben estudiar, con el objetivo de que se conozcan los efectos que aparecen en cada uno de ellos, y determinar igualmente de que forma perjudican al acoplamiento.

Cuando no se cumplen algunas de las condiciones opcionales convenientes que se analizaron más arriba, se presentan en los transformadores, corrientes de recirculación y desigualdades en el reparto de la carga. Cualquiera de estas dos situaciones, hace que disminuya la eficiencia y se reduzca la cantidad máxima de potencia que puedan dar en conjunto. Los transformadores no deberían operar en paralelo cuando:

- El reparto de carga es tal que uno de ellos está sobrecargado.
- La corriente de recirculación en uno de los transformadores es mayor al 10 % de la corriente nominal de éste.
- La suma de la corriente de recirculación y de la corriente destinada a la alimentar la carga supera el valor de la corriente nominal del transformador.

Finalmente; las características que afectan la calidad del acoplamiento de dos transformadores en paralelo son:

- Voltaje de cortocircuito.
- Relación de transformación.
- Potencia nominal.

Las combinaciones básicas que han de ser tenidas en cuenta, por lo que se refiere a sus particularidades para los acoplamientos en paralelo, forman esencialmente cuatro grupos. Cada grupo se caracteriza en particular por el defase que el método de conexión introduce en los voltajes primarios y sus homólogos secundarios. (Ver la tabla 5.1)

No.	Grupo	Símbolo		Conexionado	
		Primario	Secundario	Primario	Secundario
0	Dd0				
	Y,0				
	D,0				
5	D,5				
	Y,5				
	Y,5				
6	Dd6				
	Y,6				
	D,6				
11	D,11				
	Y,11				
	Y,11				

**Tabla 5.1** Combinaciones básicas de acoplamiento en paralelo para transformadores donde "Z" significa una conexión en zig-zag.

A manera de conclusiones, se establece que el funcionamiento en paralelo de dos o más transformadores se produce cuando ambos se hallan unidos por sus devanados primarios y por los secundarios. Prácticamente es necesario distinguir el caso de que esta unión sea inmediatamente directa sobre unas mismas condiciones o bien que se efectúe a través de largas líneas en la red de distribución; la condición sobre la igualdad de los voltajes de cortocircuito tiene importancia solamente en el primer caso, ya que los conductores intermedios existentes en el caso de una red, tiende a regularizar la distribución de la carga de los transformadores.



Los transformadores pueden acoplarse en paralelo por sus secundarios, por los primarios, o bien por los primarios o secundarios a la vez. Cuando la instalación lo permita, en la centrales (por ejemplo), es preferible adoptar la primera solución, que añade la impedancia interna de los transformadores, la de los generadores, siempre considerable, y la repetición de la carga en proporción debida entre los distintos grupos es más fácil de obtener. La teoría de la marcha en paralelo forma parte en este caso del estudio de conjunto de las centrales eléctricas; por lo que se debe de considerar el acoplamiento de los transformadores realizados simultáneamente por ambos lados de la conexión primaria y secundaria.

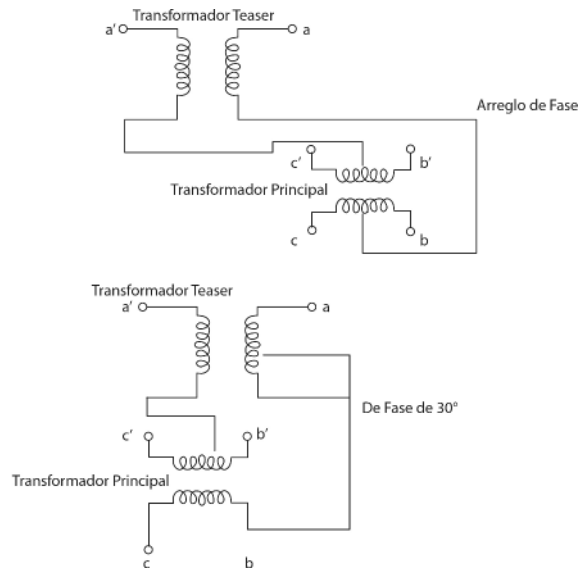
Es claro que la frecuencia, una de las características esenciales de la instalación, será con ello sin más, rigurosamente la misma para todos los transformadores acoplados. Las restantes condiciones que han de cumplirse para que el funcionamiento sea posible y se realice de modo práctico son las siguientes:

- Los defases secundarios respecto al primario, han de ser iguales para los transformadores que hayan de acoplarse en paralelo.
- El sentido de rotación de las fases secundarias han de ser el mismo en todos ellos.
- Las relaciones entre los voltajes de línea han de ser idénticas.
- Las caídas de impedancia para los voltajes de cortocircuito, deben tener los mismos valores relativos para todos los transformadores, siendo preferible además que esta igualdad se cumpla por separado para las caídas óhmicas, y las fuerzas electromotrices de reactancia.

Las dos primeras condiciones son eliminatorias, de no satisfacerse, el acoplamiento es imposible. Las dos últimas, son necesarias para una buena marcha de la instalación.

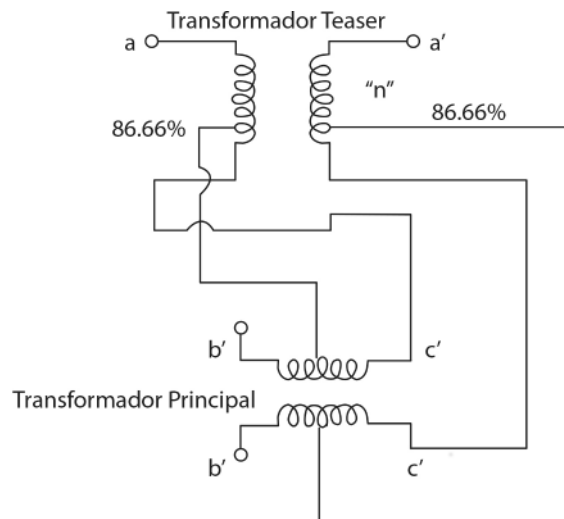
### 5.11 Conexión en T en los sistemas trifásicos

Existen diferentes formas de convertir energía trifásica utilizando sólo transformadores. Aunque este tipo de configuraciones no ocupen completamente las capacidades de estos transformadores, en algunas ocasiones se pueden justificar debido a consideraciones económicas o prácticas. La conexión en T es una de esas conexiones. En la conexión tipo T, tanto el transformador principal, como el transformador de conexión en T (*Teaser transformer*), deben de tener las mismas características, en este tipo de conexión, el transformador principal tiene el devanado primario conectado mediante dos líneas. Dependiendo del tipo de conexión, estos transformadores pueden estar en fase, actuando como una conexión Y-Y o  $\Delta - \Delta$ , o a  $30^\circ$ , que sería una conexión Y -  $\Delta$  como se muestra en la figura 5.44



**Figura 5.44** Conexión en T de transformadores en fase y a  $30^\circ$ .

Normalmente se utilizan para convertir potencia trifásica a bifásica con niveles diferentes de voltaje, y también se pueden utilizar para convertir voltajes trifásicos, como lo muestra la fig 5.45, el voltaje de entrada trifásico produce dos voltajes defasados  $90^\circ$  en los devanados primarios que a su vez, producen voltajes en los secundarios, también defasados  $90^\circ$ , que al final se combinan para generar una salida trifásica.



**Figura 5.45** Conexión T trifásica. Cuando la conexión en "n" se cambia por la conexión a la toma de 86.6 %, el proceso de conversión es de 57.7 %

Si se utiliza un transformador T especial, el grado total de los dos transformadores es de  $1.866V_{I2B} I_{I2B}$ ; mientras que el rango de salida es de  $1.732V_{I2B}$ , lo cual indica que la conexión en T es algo ineficiente. Sin embargo, esto se compensa debido a que son mucho más fáciles de construir los transformadores de una fase que un transformador trifásico. Aunque se compensa la capacidad de desarrollo con la relativamente baja ineficiencia, la mayor desventaja, es el desbalance que se genera cuando la carga no está balanceada. Una de las mayores ventajas de esta configuración, es que se puedan conectar neutros en ambos lados de un banco de transformadores. Este tipo de conexiones se utilizan en transformadores de distribución trifásicos autónomos.

También existe la conexión Scott, que permite la transformación trifásica a bifásica y viceversa. Esta es una conexión específica de dos transformadores monofásicos para convertir un sistema de voltajes trifásicos en bifásicos y viceversa. Este arreglo lo desarrolló en 1894 Charles F Scott, mientras trabajaba en la compañía Westinghouse, y se basa en el hecho de que en un sistema trifásico en estrella, el voltaje compuesto entre dos fases en cuadratura con el voltaje simple de la tercera fase (por ejemplo;  $V_{st}$  forma  $90^\circ$  con  $V_{rn}$ ). En la figura 5.45, se muestra el esquema de conexiones y el diagrama fasorial de tensiones.

Se dispone de dos transformadores monofásicos con el mismo número de espiras en el devanado secundario ( $N_2$ ); mientras que el número de espiras en el devanado primario están en la misma relación que la altura y la base de un triángulo equilátero; es decir, de acuerdo con esa misma figura el transformador "A" tiene  $\frac{\sqrt{3}(N_1)}{2}$  espiras; mientras que el transformador "B" tiene  $N_1$  espiras en su devanado primario. De este modo las respectivas relaciones de transformación son:

$$m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{N_2}{N_1}$$

$$m_b = \frac{N_2}{N_1}$$

Si se denomina  $V_l$  a la tensión compuesta del sistema trifásico, y se toma como referencia de fases el voltaje compuesto  $V_{st}$  el valor complejo del voltaje primario aplicado al transformador A es:

$$V_{1a} = V_{RM} = \frac{\sqrt{3}}{2} V_L [V]$$

Y de este modo, el valor complejo del voltaje secundario del transformador "A" es:

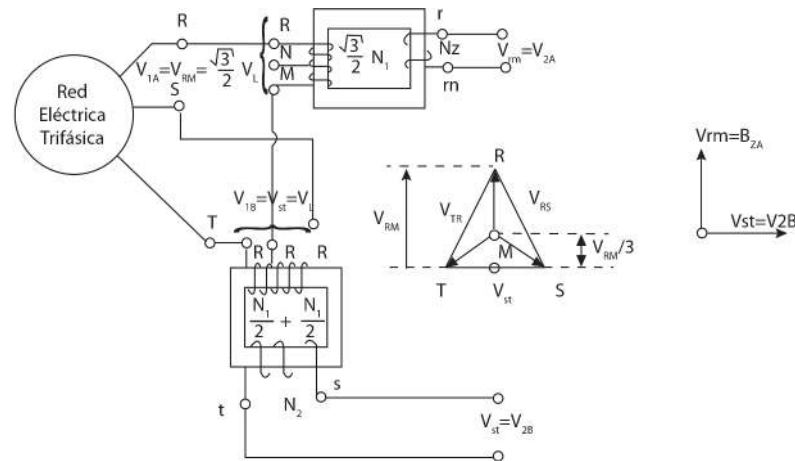
$$V_{za} = \frac{V_{1a}}{m_a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} V_L}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{N_1}{N_2}\right)} = \frac{N_2}{N_1} V_L$$

De un modo similar, el valor complejo del voltaje primario aplicado al transformador "B" es el voltaje compuesto trifásico  $V_{st}$ , cuya expresión fasorial es:

$$V_{1b} = V_{ST} = V_L [V]$$

Y de este modo, el valor complejo secundario del transformador "B" es:

$$V_{2b} = \frac{V_{1b}}{m_b} = \frac{V_L}{\frac{N_1}{N_2}} = \frac{N_2}{N_1} V_L [V]$$



**Figura 5.46** Transformación trifásica a bifásica. Conexión Scott.

De acuerdo a los resultados que se obtengan a través de  $V_{2a}$  y  $V_{2b}$ , dos voltajes secundarios de igual módulo y defasados entre sí  $90^\circ$ ; es decir, se ha transformado el sistema trifásico simétrico primario en un sistema bifásico secundario simétrico. En el caso de que se requiera la inclusión de un hilo neutro en el primario, se puede realizar mediante una “toma” en el punto N del devanado primario del transformador “A”, y que de acuerdo con la construcción fasorial deberá situarse a  $1/3$  de la altura (con el baricentro del triángulo de voltaje), lo que significa que el tramo MN tiene  $1/3$  de las espiras totales del tramo RM.

Finalmente, la conexión Scott se empleó inicialmente para transformar las corrientes bifásicas de los alternadores de la central del Niágara (esta instalación fue la primera en los Estados Unidos de América en la que se utilizó la corriente alterna y fue construida por la compañía Westinghouse) en un sistema trifásico. Se ha utilizado también la conexión Scott en tracción eléctrica, para alimentar dos tramos monofásicos de una red ferroviaria, de tal modo que si los consumos monofásicos de los trenes son iguales, sus corrientes se distribuyen por igual en las tres fases del sistema trifásico de entrada.

## 5.12 Protección de transformadores de distribución

Los transformadores de distribución se deben proteger contra sobrecargas, sobretensión, circuitos balanceados incorrectamente entre otras cosas, ya que pueden llegar a explotar violentamente. Cuando se le da servicio a un transformador de distribución, éste debe ser revisado correctamente para verificar que

no tenga un error interno antes de reenergizarlo.

La forma más fácil y económica de proteger un transformador es utilizando fusibles. Un fusible es una parte debilitada de un circuito eléctrico que se abre para prevenir o disminuir el daño que pueda sufrir el circuito eléctrico. Se trata de cualquier material eléctrico que se derretira si cierta corriente pasa por cierto tiempo. Esto se puede clasificar en bajo y alto voltaje. Los de bajo voltaje son de tipo “enchufe” ó “cartucho”.

Los de alto voltaje son de explosión, limitadores de corriente, líquidos, y de ácido bórico entre otros. Se utilizan fusibles internos que tienen un rango de interrupción limitado para detener la operación del transformador cuando no está operando correctamente; sin embargo, no se puede depender de éstos para evitar catástrofes. Un fusible que limite la corriente puede ser instalado dentro o fuera del tanque de aceite que se encuentra en serie con el devanado primario para evitar una explosión de este tipo; usualmente son instalados externamente en las terminales del devanado primario o internamente bajo el aceite.

También son protegidos con cable aislante que es un cable a tierra puesto sobre los otros conductores para proteger contra una descarga directa, normalmente por un rayo, hacia los cables conductores del transformador. De la misma manera, se utilizan pararrayos que proveen un camino de baja impedancia hacia el suelo para una corriente muy alta o voltajes transitorios.

Existen varios niveles de aislamiento que proveen protección a los transformadores. El nivel de aislamiento básico es el valor pico del voltaje de una onda estándar que sobrecargaría al sistema sin este aislamiento, y que no sufre ningún daño. El aislamiento conectado a tierra es un sistema sensible al calor que desconecta la toma a tierra de un pararrayos en mal funcionamiento, lo que en algunos casos, permite que los transformadores regresen a una operación normal.

Se pueden clasificar los pararrayos dependiendo del devanado en que se colocan y el voltaje que manejan. Los que van con el secundario en un rango de 175 a 650 [V].

Los de distribución con rango de voltaje de 3, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 21, 25, 27 y 30 [KV]. Los de tipo intermediarios que van de los 3 a los 12 (KV), y los de estacion que van de los 3 [KV] en adelante. Los pararrayos de carburo de silio están hechos de bloques de este mismo material, con brechas dentro de un contenedor de porcelana sellado con resistencias capacitancias que controlan las chispas que se generan en las brechas. Estos dispositivos funcionan como una resistencia no lineal limitando la corriente del transformador. Los de tipo de óxido metálico están construidos con bloques que necesitan brechas y normalmente son de óxido de zinc. Estos pararrayos aíslan los conductores eléctricos que van hacia tierra cuando el transformador opera correctamente, limitando las corrientes de fuga a niveles muy pequeños. también funcionan como una resistencia no lineal. Además de los pararrayos ya mencionados existen otros especificados en normas de la ANSI.

### 5.13 Autotransformadores

Aunque existen autotransformadores monofásicos y autotransformadores trifásicos, lo que sigue se comprenderá mejor si se refiere a un autotransformador monofásico.

Si en un transformador (como el de la figura 5.47 (a)) se une el final de la bobina de uno de los arrollamientos con el principio del otro, se aplica una fuente de voltaje entre las terminales no unidas y si se pone una carga en el secundario del transformador original, se tendrá un autotransformador (fig. 5.47 (b)).

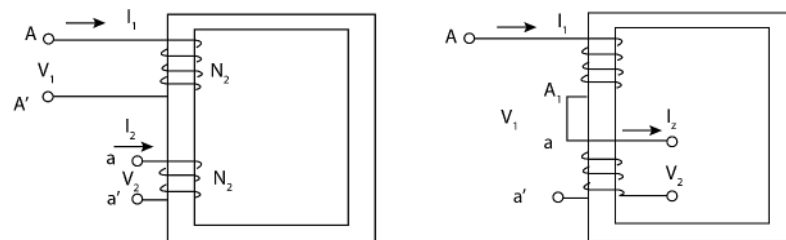


Figura 5.47 a) Transformador, b) Autotransformador.

La máquina eléctrica así formada es reversible, esto es, se puede alimentar por el lado de baja tensión para obtener un voltaje más elevado en el otro arrollamiento, o se puede alimentar por el lado de alta tensión, para obtener un voltaje reducido en el otro arrollamiento. Hasta aquí se ha hablado de autotransformadores monofásicos, también existen autotransformadores trifásicos. En estos autotransformadores, la conexión de los arrollamientos siempre es  $Y_y$ .

Por otro lado, las ventajas del uso de los autotransformadores son las siguientes:

- Necesitan una menor cantidad de cobre que los transformadores, ya que sólo tienen  $N_1$  vueltas de hilo, mientras que en los transformadores, el núcleo de vueltas es de  $N_1 + N_2$ . Además, al circular una corriente menor ( $I_2 - I_1$ ) por el arrollamiento común, los arrollamientos de cobre, serán más finos para una densidad de corriente similar.
- Las pérdidas en el cobre disminuirán al haber menos cantidades de éste. Las pérdidas en el cobre valen cero.
- Ahorro de hierro debido que al tener una menor cantidad de cobre, será necesario menos espacio para alojar el embobinado (dimensiones de la ventana).
- Menos pérdida en el hierro, ya que éstas son directamente proporcionales al volumen de hierro, y al reducir éste las pérdidas, también se reducirán. Las pérdidas en el hierro se calculan como:
  - Aumento del rendimiento al reducir las pérdidas en el hierro y en el de cobre.
  - Mejora de la

refrigeración al reducir las pérdidas. - Más fácil transporte al tener menor volumen. - Disminución de la corriente de vacío, aunque no es una ventaja tan significativa.

El flujo disperso es menor; en este caso, el flujo de la dispersión del secundario concatena (aunque sea parcialmente) al primario. Al ser menor el flujo de dispersión, se reducen las caídas de tensión en la carga.

Sin embargo, los autotransformadores presentan también inconvenientes:

- Un primer problema es dónde situar las torres, ya que hay varias soluciones y todas son malas:
  - 1 Situar las torres en el lado de baja tensión, requiere que dichas tomas estén dimensionadas para más corriente.
  - 2 Situar las tomas en el extremo de línea del arrollamiento de alta tensión (en realidad debería decirse del arrollamiento serie), se requiere aislar el conmutador del cambiador de tomas.
  - 3 Situar las tomas en el extremo del neutro, supone que si se varían las tomas, se está variando simultáneamente el número de espiras del arrollamiento primario y del secundario.

De hecho, en algunas ocasiones se opta por no poner un cambiador de tomas en los autotransformadores.

Otra desventaja es que al tener una impedancia del circuito reducida en caso de un accidente del circuito, las corrientes serán más altas.

Un tercer problema, es que no sirve para intercambiar redes con diferente tratamiento del neutro (por ejemplo, para enlazar una red de 132 [KV] con el neutro puesto a tierra con una red de 15) [KV] con el neutro aislado), ya que las protecciones en ambas redes son diferentes.

Teniendo en cuenta las ventajas y los inconvenientes mencionados, los autotransformadores se pueden encontrar en cuatro tipos de aplicaciones:

1. Para enlazar redes de muy alta tensión con neutro puesto a tierra (típicamente una red de 220 [KV]).
2. Para enlazar redes de mediana tensión con el neutro aislado (ambas), por ejemplo, una red de 20 [KV] de una compañía eléctrica, con una red de 15 [KV] de la misma compañía.
3. Como pequeños transformadores domésticos, 220/127 [V].
4. Para arranque de motores asíncronos.

#### 5.14 Cálculo de pérdidas y su optimización

Un transformador propiedad de una empresa tiene costos. La consideración de los costos detallados de un transformador de distribución permite clasificarlos en:

- Costos fijos. Están asociados y vinculados al tamaño del equipamiento resolvente del requerimiento del suministro.

- Costos directos. Son derivados del costo de instalación y dispositivos asociados al mando y protección (intereses, impuestos, seguros, depreciación, administración, etc.).
- Costos indirectos. Se asocian al aumento de costos en otra parte de la empresa, asociado a la pérdida de excitación; o bien, parte de las cargas fijas sobre reguladores del voltaje del alimentador o condensadores necesarios para compensar la caída del voltaje en la impedancia del transformador.
- De funcionamiento. Son variables y dependientes de las condiciones de utilización.
- Directos producidos por las pérdidas internas de los transformadores:
  - \*costo de pérdidas en el núcleo (prácticamente constantes).
  - \*costo de la pérdida en la carga (proporcional al cuadrado de la intensidad de la corriente).
- Indirectos. Asociados al aumento de costos de las pérdidas en los circuitos exteriores, originado por el transformador (pérdida adicional en el cobre del circuito y en el generador que alimenta al transformador, además del equipamiento de interconexión a la transmisión del primario y/o secundario, que lo vincula al transformador, parte de la pérdida en el regulador de tensión del alimentador necesario para mantener constante el voltaje de salida del transformador), y gastos del mantenimiento (comprobación, filtrado y cambio de aceite; reparaciones; etc.).
- Costos directos de funcionamiento. Los costos directos de un transformador son funciones directas de la manera en cómo se utilizan. Exceptuando algunos costos de mantenimiento, estos costos cesan cuando se sacan de servicio los transformadores.

Las pérdidas se clasifican en los siguientes tipos:

1.- Pérdida anual de energía en el núcleo. A un voltaje prácticamente normal se halla en servicio y la pérdida de energía debida a las pérdidas en el núcleo de un transformador es:

$$\text{Pérdida anual de energía} = (\text{pérdida en el núcleo en [KW]} ) ( 8760 \text{ [KW/HR]})$$

2.- Pérdidas en las cargas. Las pérdidas en la carga son proporcionales al cuadrado de la intensidad de la corriente (siendo depreciable la corriente de excitación), y son más difíciles de calcular:

- Pérdidas en la carga: incluyen la pérdida calorífica en los devanados del transformador y las pérdidas por corrientes parásitas en la carga, que se producen en las partes de hierro, las cuales resultan de las condiciones de carga, y son proporcionales a una exponencial de la corriente de carga.
- Pérdidas en el cobre: son aquellas pérdidas de carga que incluyen las pérdidas por Efecto Joule en los devanados, como las pérdidas por corrientes parásitas.
- Demanda: se define como el valor de la carga de un sistema eléctrico promediada para un intervalo de tiempo determinado.



- Demanda eficaz: se define para el periodo total transcurrido correspondiente, y es el valor eficaz de las demandas de los intervalos básicos para dicho periodo. El valor eficaz de la carga durante un intervalo de tiempo, es una medida más precisa del calor generado por las pérdidas que la carga media. Pero en la práctica se usa frecuentemente el valor medio, porque el sistema de medición durante varios minutos es más sencillo que los requerimientos para medir el valor eficaz en el mismo intervalo.

En la práctica se ha desarrollado el estudio del cálculo de pérdidas en la carga bajo dos categorías:

1.- Factor de carga. La demanda eficaz para 24 horas es:

$$\text{demanda eficaz} = \sqrt{\left(\frac{1}{24}\right)(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots + I_{23}^2 + I_{24}^2)} [KVA]$$

donde:  $I_1, I_2, I_3, \dots, I_{23}$  e  $I_{24}$  se corresponden a las lecturas de corriente en la hora 1, 2, 3, ...23 y 24 de un día

- La demanda máxima de un sistema eléctrico. Es la mayor de todas las demandas que se han producido durante un tiempo determinado.
- El factor de carga de un sistema eléctrico, es el cociente entre la carga media y la carga máxima durante un tiempo determinado.

2.- Factor eficaz. Se expresa a continuación un método para determinar la expresión de la pérdida anual de energía resultante de las pérdidas en el cobre de un transformador:

$W_a$  → Pérdida anual de energía en [KW/hr] debida a las pérdidas en el cobre del transformador.

$P_{cu}$  → Pérdida en el cobre conocido en [KW] a la corriente nominal de plena carga.

$P$  → Pérdida momentánea en el cobre en [KW].

$t$  → Tiempo en (horas).

$i$  → Intensidad instantánea de la corriente.

$I_n$  → Intensidad nominal a plena carga expresada en (Ampère eficaz).

$I_a$  → Intensidad eficaz de la corriente de carga en (Ampères), tomada para un tiempo de un año.

$\lambda$  →  $\left(\frac{I_a}{I_n}\right)$

Los valores de  $I_n$  e  $I_a$  están referidos al mismo lado del transformador, o expresados en por unidad (p.u.)

$$P = (P_{cu}) \left(\frac{i}{I_n}\right)^2 [W]$$

La pérdida total anual en el cobre es:

$$W_a \int_0^{8760} p dt = (P_{cu}/I_n) \int_0^{8760} i^2 dt$$

En donde: 8760 es el número de horas en un año.

Por definición, de valor eficaz, se sabe que la intensidad eficaz anual de la corriente de carga  $I_a$  es:

$$W_a = (8760) \sqrt{\frac{1}{8760} \int_0^{8760} i^2 dt}$$

En donde al integrar desde o hasta 8760 se tiene:  $i^2 dt = 8760 I_a^2$

Sustituyendo:

$$W_a = (8760)(P_{cu}) \left( \frac{I_a}{I_n} \right)^2 = 8760 \lambda^2 P_{cu}$$

Entonces, la ecuación anterior, determina la pérdida anual de energía resultante de las pérdidas en el cobre del transformador.

Finalmente; la demanda máxima de pérdidas en el cobre en [KW] se calcula:

Demanda máxima de pérdidas en el cobre [KW]=

$$(P_{cu})(\text{demanda de máxima [KVV]}/\text{potencia nominal del transformador})$$

La suma de las energías en la pérdida en el núcleo y en el cobre, determina las pérdidas en el transformador, y análogamente la suma de la demanda máxima debida a las pérdidas en el núcleo, más la debida a la pérdida en el cobre, determinan la demanda resultante de las pérdidas en el transformador. En el caso de transformadores usados (sean en general un banco de transformadores o un transformador trifásico antiguo), tiene más pérdidas que uno nuevo, por las características constructivas. En el cobre se observaran aumentos de hasta 10 %, y en el hierro se observa el mismo aumento (10 %), fundamentalmente por el cambio de tecnología referido al grano orientado en las chapas de hierro-silicio para la fabricación de los transformadores de distribución es a partir de:

- Cálculo de las pérdidas en el hierro (Po) y en el cobre (Pcu). Las pérdidas en el hierro o núcleo, representan la pérdida en el vacío del transformador, y las pérdidas en el cobre representan las pérdidas con el transformador con carga [KW] para cada transformador. Se puede entonces, vincular las pérdidas en el núcleo y en el cobre [KW] para cada combinación de la potencia, relación de transformación, cantidad de fases, de baja tensión y marca de cada transformador.
- Cálculo del efecto de la antigüedad, se tiene en cuenta las pérdidas históricas y se llevan en una proyección equivalente a la actualidad, incrementando los valores de acuerdo con el año de origen del transformador indicado en el inventario. Un transformador tiene una vida útil bastante larga (40 años en promedio), aun cuando la máquina pueda fallar ocasionalmente al cabo de un periodo más corto del tiempo de servicio a causa de una sobrecarga excesiva, un rayo, u otras causas.
- Pérdida anual en el núcleo por transformador. Las pérdidas en el núcleo se manifiestan prácticamente con el mismo valor independientemente de la carga. Se ha supuesto el valor del voltaje

constante e igual al valor del voltaje nominal del transformador. Se calcula como la pérdida anual de energía en el núcleo, multiplicando la pérdida en el núcleo (en KW) por 8760 (horas).

- Pérdida en el cobre por transformador (con factor de carga). Las pérdidas en el cobre por transformador [KW/hr] con factor de carga, se calculan multiplicando 8760 (horas) en el año por la pérdida del núcleo  $P_o$  [KW], por el factor de carga.
- Pérdida anual por antigüedad por transformador (con factor de carga). Se ha calculado como pérdidas adicionales por antigüedad  $P_o$  (%) por pérdida anual en el núcleo por transformador [KW/hr], más pérdidas adicionales por antigüedad  $P_{cu}$  (%) por pérdidas en el cobre por transformador con factor de antigüedad [KW/hr].
- Pérdida anual total por transformador (con factor de carga). Es la suma de la pérdida anual en el núcleo por transformador [KW/hr], más las pérdidas en el cobre por transformador con factor de carga [KW/hr], más la pérdida anual por antigüedad por transformador con factor de carga [KW/hr].
- Pérdidas totales anuales por cantidad de transformadores (con factor de carga). Se trata de la multiplicación de pérdida anual total por transformador con factor de carga [KW/hr] por la cantidad de transformadores.
- Pérdidas en el cobre por transformador (con valor eficaz). Se calculan las pérdidas en el cobre por transformador [KW/hr] con factor eficaz, como 8760 horas al año, por pérdida en el  $P_o$  [KW] por el factor eficaz.
- Pérdida anual por antigüedad por transformador (con factor eficaz) se le ha calculado como las pérdidas adicionales por antigüedad  $P_o$  (%) por pérdida anual en el núcleo por transformador [KW/hr], más las pérdidas adicionales por antigüedad  $P_{cu}$  (%) por las pérdidas en el cobre por transformador con factor eficaz [KW/hr].
- Pérdida total anual por transformador (con valor eficaz). Es la suma de la pérdida anual en el núcleo por transformador [KW/hr], más las pérdidas en el cobre por transformador con factor eficaz [KW/hr], más la pérdida anual por antigüedad por transformador con factor eficaz [KW/hr].
- Pérdidas anuales totales por cantidad de transformadores (con valor eficaz). Se trata de la multiplicación de pérdida anual total por transformador con factor eficaz (KW/hr) por cantidad de transformadores.

En conclusión , las pérdidas en un transformador de distribución se clasifican en terminos generales en:

**1. Pérdidas en vacío.** Las pérdidas en vacío ocurren cuando el transformador se encuentra energizado con el voltaje nominal del mismo en alguno de sus arrollamientos; mientras el resto de los arrollamientos se encuentra en circuito abierto, por lo tanto, ninguna corriente circula por ellos. En este caso, el flujo magnético nominal de la máquina, está presente en el núcleo, y sólo la corriente de excitación necesaria fluye por el arrollamiento. Estas pérdidas son mayormente pérdidas en el núcleo, debido a la histéresis

magnética y a corrientes parásitas producidas por el flujo variable en el tiempo presente en la chapa magnética del núcleo transformador.

**1.1. Pérdidas por histéresis magnéticas.** Estas pérdidas se presentan en la chapa magnética que forma el núcleo magnético del transformador. Resulta de los atascamientos que encuentran las paredes de los dominios magnéticos en su movimiento. Los atascamientos se pueden deber a imperfecciones en los cristales, oclusiones, impurezas y hasta concentración de tensiones mecánicas que provocan un bloqueo temporal del dominio. Sin embargo, debido a la fuerza magnetizante, el dominio se destraba del sitio donde estaba atascado. Este proceso es muy rápido y la consiguiente alta velocidad de movimiento de la pared del dominio genera corrientes parásitas localizadas.

De hecho, todas las pérdidas en la chapa magnética son debidas a corrientes parásitas. Las pérdidas por histéresis ocurren aun por ciclos de magnetización muy lentos, esto se debe a que si bien la pared del dominio se mueve lentamente antes que la misma encuentre una obstrucción, el movimiento en el proceso de desatascamiento es muy rápido. Es por eso que en estudios de pérdidas; las pérdidas por histéresis pueden ser medidas independientemente para ciclos lentos, mientras el total de las pérdidas (incluidas las de histéresis) son medidas en ciclos rápidos. En chapas magnéticas de excelente calidad, las pérdidas por histéresis y corrientes parásitas contribuyen por igual al total de las pérdidas. Normalmente, el fabricante de la chapa magnética provee dos curvas:

- La potencia de pérdidas por unidad de peso en función del valor de inducción para la frecuencia de intereses.
- La potencia de excitación por unidad de peso en función del valor de inducción.

En general, la curva mencionada en el primer punto, es obtenida en condiciones iguales tales como bajo un alto estrés mecánico en la chapa, flujo uniforme unidireccional y servicial, etc., que por lo tanto representa el mismo absoluto de pérdidas por unidad de peso que es posible esperar. La curva mencionada en el segundo punto, también es una curva media en condiciones ideales, pero es útil para estimar la potencia y la corriente necesaria para energizar el transformador de distribución.

**1.2 Factor de fabricación.** Las curvas de pérdidas en función del valor de inducción como se ha mencionado en el punto anterior, son generalmente medidas en condiciones ideales. En la práctica, multiplicando la pérdida por unidad de peso expresada en la curva por el peso total del núcleo se determinan valores inferiores al debido. La discrepancia entre el valor teórico y el real, se debe a que en los núcleos de los transformadores se requieren juntas donde no sólo la inducción cambia de dirección, sino también se encuadra con pequeños “gaps” entre distintos segmentos de la chapa que forman el núcleo. Existen otras causas de discrepancia, tales como rebabas generadas en el corte de la chapa. El factor de fabricación es simplemente el número por el cual, al multiplicar el valor de pérdidas ideales se obtienen las pérdidas medidas. Este factor está normalmente en el orden de 1.2-1.4, y es aproximadamente constante para una técnica constructiva del núcleo dado.

## 2 Pérdidas en la carga

**2.1 Pérdidas por efecto Joule** . Las pérdidas en el conductor de las bobinas son la fuente determinante de la pérdida de potencia. Se calcula normalmente usando el valor de la corriente continua de la resistencia. Sin embargo, en el caso de los conductores con secciones grandes conduciendo corriente alterna, se presentan fenómenos que provocan que la resistencia efectiva en corriente alterna difiera notablemente de la resistencia en corriente directa. Estos fenómenos son el efecto Skin y el efecto de Proximidad.

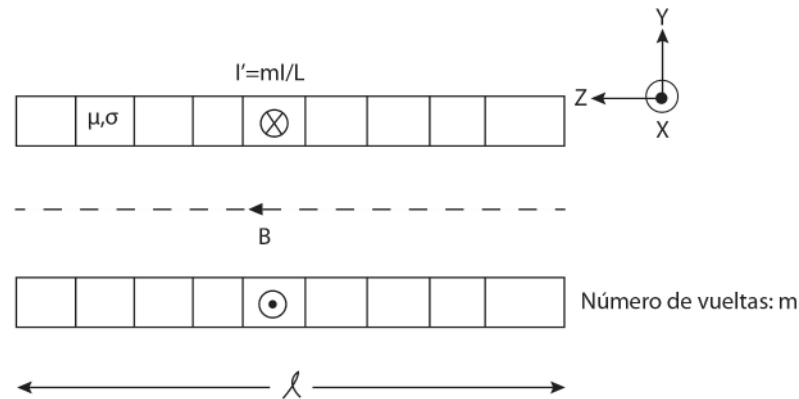
El efecto Skin se manifiesta siempre que por un conductor circule corriente alterna. Si el conductor se encuentra aislado de campos magnéticos externos, la corriente tiende a localizarse cerca de la superficie “exterior” del conductor (exterior en este caso significa “donde el campo magnético es más intenso”). Debido al incremento de corriente en un área restringida cerca de la superficie del conductor, la resistencia en corriente alterna se incrementa gradualmente a razón aproximadamente igual a la raíz cuadrada de la frecuencia. Las pérdidas adicionales debidas a la inducción en corriente alterna se puede interpretar como corrientes parásitas superpuestas al valor de corriente directa. Debido a lo anterior, el efecto Skin está normalmente asociado con conductores aislados. Cuando dos o más conductores están relativamente cerca en el espacio, la corriente alterna que circula en un conductor puede establecer un campo magnético, el cual incide sobre el otro conductor. Esto a su vez crea componentes de corrientes circulantes que incrementan aún más las pérdidas y la resistencia en C-A en un conductor. A este fenómeno se le conoce como el efecto de Proximidad. Las pérdidas por “proximidad” dependen de la corriente neta que circula por el circuito, así como el campo magnético externo, y por eso en general, no puede emplearse superposición en los cálculos de la resistencia de los conductores en corriente alterna, los cuales no están electromagnéticamente aislados unos de otros.

Un modelo clásico y general de ilustración del efecto Skin, es un inductor bobinado, con una capa simple de alambre rectangular en un arrollamiento de forma cilíndrica. Debido a que la bobina es cilíndrica, el campo magnético es más intenso en la región central y cercano a cero en el interior de la misma. El campo magnético alterno induce corrientes de remolino a lo largo del mismo eje coordenado como corriente “primaria”. El efecto neto es una alta densidad de corriente cerca de la superficie interior de la lámina de corriente (donde el campo magnético es más intenso) y mayor resistencia que si la frecuencia de excitación fuera cero.

Cuando la curvatura de la bobina se desprecia, la solución exacta para la distribución de corriente en una capa simple de espesor infinitamente grande es particularmente fácil de calcular. Partiendo de las leyes de Maxwell para el caso de ausencia de movimiento y unidimensional, en coordenadas rectangulares como en la fig. 5.48 se obtiene la ecuación de difusión en la forma:

$$\frac{\delta^2 B_z}{\delta y^2} = \mu\sigma \frac{\delta B_z}{\delta t^2}$$

Donde  $B_z$  es la magnitud escalar de la densidad de flujo magnético dentro del material conductor,  $\sigma$  es la conductividad de material,  $\mu$  es la permitividad del conductor.



**Figura 5.48** Sección de una bobina de una capa.

El vector de densidad de flujo magnético se expresa como:

$$\vec{B} = B_Z(y, t) \hat{Z}$$

Donde:  $\hat{Z}$  es el vector en la dirección axial (paralelo al eje de la bobina). La dependencia temporal y espacial de  $B_z$  puede ser separada usando una amplitud compleja como:

$$B_z(y, t) = \text{Re}[B_Z(y) \exp(j\omega t)]$$

Utilizando las dos ecuaciones anteriores se tiene:

$$\frac{\delta^2 \vec{B}_Z}{\delta y^2} - j\omega \mu \sigma B_Z = 0$$

La cual es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden para la amplitud de la densidad de flujo magnético. La solución general tiene la forma:

$$\vec{B}_Z(y) = c \sinh^k(y - d)$$

Donde  $K$  es el número complejo de onda asociado a la ecuación de difusión y está dado por:

$$K = (-1 + j)/\delta$$

Donde:  $\delta$  es real y se le llama “profundidad Skin” y viene dado por:

$$\delta^2 = \frac{2}{\omega \mu \sigma}$$

Donde:  $\omega$  es la frecuencia de excitación en (radianes).

$\sigma$  Es la conductividad del material.

$\mu$  Es la permitividad del material.

$d$ : Es el espesor de conductor.

$c$ : Es una constante, la cual puede ser evaluada aplicando condiciones de contorno apropiadas.

Dichas condiciones para este análisis se resumen como:

- La densidad de flujo magnético  $B_z$ , es considerada cero en la superficie exterior del conductor.
- La densidad de flujo magnético en la superficie interior de la bobina  $Y=0$  es según la ley de Ampère igual a  $\mu_0 I'$ , en donde  $I'$  es la corriente por unidad de longitud en la bobina debido a las múltiples vueltas del conductor sobre la bobina. Es decir, si la bobina tuviera “ $m$ ” vueltas, entonces:  $I' = mI/L$ ; en donde “ $L$ ” es la longitud axial de la bobina, e  $I$  es la corriente en cada vuelta medida en [Ampères].

Así la forma completa para la densidad del flujo magnético es:

$$\vec{B}_z(y) = \mu_0 I' \left( \frac{\text{senh}k(y-d)}{\text{senh}(kd)} \right) \quad 0 \leq y \leq d$$

Donde:  $\mu$  es la permeabilidad del espacio libre.

La última meta, es calcular la resistencia de una bobina de simple capa, lo cual es ahora sencillo debido a que la densidad de corriente se puede determinar directamente a partir de la densidad de flujo magnético.

Para este caso:

$$\vec{J}(x) = \left( \frac{1}{\mu_0} \right) \left( \frac{d\vec{B}_z}{dy} \right)$$

La resistencia de la bobina puede calcularse recurriendo a la ley de Óhm en forma diferencial e integrando la densidad de potencia resultante sobre el espesor del conductor, para obtener la potencia total de disipación en el bobinado. La forma de esta integración es:

$$Q_1 = \frac{1}{2\sigma} \int_0^d \vec{N}(x) J^*(x) dy$$

Donde  $Q_1$  es la potencia calórica generada en el embobinado por unidad de superficie de conductor (el asterísco denota el complejo conjugado). De la ecuación anterior, la resistencia de la bobina puede obtenerse dividiendo  $Q_1$  en el cuadrado de la corriente por unidad de longitud.

Combinando las ecuaciones anteriores se obtiene la densidad de disipación de potencia promedio en el tiempo como:

$$Q_1 = \frac{1}{2\sigma\delta} \left( \frac{\operatorname{senh}(2d') + \operatorname{sen}(2d')}{\operatorname{cosh}(2d') - \operatorname{cos}(2d')} \right) \left[ \frac{W}{m^2} \right]$$

## 2.2 Ejecución del arrollamiento

Para combatir el problema del incremento de la resistencia en corriente alterna en los conductores, se han desarrollado varias técnicas. Una de las más importantes es la de utilizar conductores traspuestos aislados, uno en particular es llamado “Roebel conductor”, este conductor está construido usando conductores de sección pequeña y rectangular y aislada unas respecto de los otros, los cuales son traspuestos a intervalos discretos. Este tipo de conductores extremadamente usado en aplicaciones como grandes transformadores y generadores. El principio de los conductores traspuestos, es que cada conductor individual intercambie la posición relativa con todos los otros conductores que forman el conductor traspuesto. Una trasposición completa se alcanza cuando cada hebra ocupa todas las posiciones relativas en el conductor traspuesto a lo largo de una longitud específica.

Cuando un número suficiente de trasposición ocurre en una longitud dada de conducto, la inducción y la resistencia de todas las hebras son teóricamente iguales y, por lo tanto, la corriente total del conductor se divide en forma uniforme entre las hebras. Cuando la corriente se distingue uniformemente y cada hebra desde dimensiones pequeñas comparadas con la “profundidad Skin”, se obtiene una distribución de “corriente continua”, resultando en una reducción notable de la resistencia en corriente alterna para una sección total de conductor dada. Para un arrollamiento ejecutado de esta forma, las pérdidas en el mismo, pueden ser calculadas usando la resistencia de corriente continua del arrollamiento.

## 2.3 Pérdidas adicionales

Estas pérdidas se producen debido a que el flujo disperso encuentra en su camino objetos metálicos como son las paredes de la cuba (tanque), yugos y en los mismos arrollamientos. El patrón del flujo disperso depende de la geometría de los arrollamientos y sus espaciamientos del tamaño del tanque, de la posición de los jugos, etc. Una forma de disminuir estas pérdidas, es incluir derivaciones y apantallamientos magnéticos. Estos son ubicados de modo tal que conducen o desvían el flujo de dispersión de modo que no penetre en masas metálicas de manera que las pérdidas sean mucho menores. Además, del flujo disperso existe flujo producido por las barras conductoras, este flujo puede producir pérdidas especialmente si las barras se encuentran cerca de las paredes del tanque o de los jugos.

### 2.3.1 Corrientes parásitas en los arrollamientos debido a campos magnéticos externos

En el apartado 2.1 se analizó el incremento de resistencia en corriente alterna de un arrollamiento respecto del valor de resistencia del mismo si la frecuencia de excitación es cero. En este análisis, el campo magnético presente, se debe sólo a la corriente que circula por el arrollamiento. Sin embargo, en un transformador existe flujo disperso que incide también sobre los arrollamientos, provocando corrientes parásitas adicionales y consecuentemente un aumento en las pérdidas y en la resistencia en corriente al-



terna del arrollamiento. Un método comúnmente usado para calcular las pérdidas totales en conductores que transporten corrientes y que a la vez se encuentren inmersos en un campo magnético externo de igual frecuencia y fase relativa es:

- Calcular las pérdidas en el conductor como si el conductor estuviera aislado de todo campo magnético externo.
- Calcular las pérdidas adicionales debido a un campo magnético excitado externamente y en ausencia de la corriente “primaria” en el conductor.
- Sumar las componentes de pérdidas y dividir las en la corriente al cuadrado para obtener la resistencia total en corriente alterna.

Esta técnica, es en el mejor de los casos una aproximación, y en el peor de los casos, un enfoque que lleva a un error sustancial en la estimación de las pérdidas totales y a un diseño no adecuado. Estas pérdidas dependen del tamaño del conductor y en su orientación relativa al vector de inducción y de la magnitud de dicho vector. Debido a esto, las pérdidas son diferentes en los distintos puntos de las bobinas. Por lo tanto, es preciso un método para calcular el campo magnético o inducción magnética en varios puntos de la bobina.

### 2.3.2 Pérdidas en las platinas

Esta platina se localiza adyacente al núcleo, en el espacio entre el núcleo, en el espacio entre el núcleo y la capa de arrollamiento más próxima al núcleo. Es una platina estructural que conecta los yugos superior e inferior. La tensión mecánica en esta platina, provee la fuerza de sujeción que mantiene el núcleo del transformador armado y evita movimientos del mismo en el caso de un cortocircuito. Normalmente, está construida de acero magnético o de acero inoxidable y puede estar subdividida en varias platinas separadas verticales para ayudar a disminuir las corrientes parásitas. Cuando la platina está presente, existe cierto flujo axial que es conducido por la misma. Esto depende de la permeabilidad relativa de la platina con respecto a la del núcleo. Es posible estimar las pérdidas en la platina debidas al flujo axial, recurriendo a una geometría idealizada.

## 5.15 Normas de diseño, pruebas y puesta en servicio

Existen diferentes organismos que regulan la construcción y funcionamiento de los transformadores de distribución como por ejemplo la ANSI en los Estados Unidos de América, que tienen varios estándares como el C57.12.20; C57.12.25 y el C57.12.26, estas normas cubren las características eléctricas y mecánicas de transformadores de diversos tamaños y rangos de potencia, incluyendo el tipo de construcción que deben llevar, así como las protecciones mínimas que deben incluirse.

Existen dos tipos de construcción para los transformadores de núcleo y de carcasa. En el primero, el núcleo tiene forma rectangular colocado de forma vertical y las bobinas puestas en cada uno de los lados más largos, éstas son largas y cilíndricas y divididas de tal forma que parte del primario y del secundario están repartidos en ambas bobinas. En el segundo tipo, el de (carcasa), el núcleo rodea las bobinas, éstas son planas y van alternadas. El núcleo y las bobinas deben ir sumergidas o inmersas en un aceite aislante, o cualquier otro tipo de líquido aislante que mantenga la temperatura baja, y provee de un mayor aislamiento al transformador. Los transformadores son clasificados en: [KVA], ya que la capacidad se limita por la corriente de carga, sin importar el factor de potencia. Esto es la cantidad de corriente que puede distribuir continuamente a un determinado voltaje sin exceder la temperatura a la que fue diseñado.

Un transformador es sometido a diversas pruebas para comprobar que fue diseñado correctamente y que puede soportar las cargas para lo que fue diseñado. También se prueba, para comprobar que funciona correctamente después de un periodo de trabajo. En general, se realiza una serie de pruebas que son pruebas a los elementos en los que se contruirá hasta pruebas de mantenimiento.

Las pruebas a los materiales incluyen, pruebas a todos los elementos que componen al transformador, eléctricos, líquidos y aislamientos. Las pruebas de fábrica son bastantes y se pueden clasificar en tres tipos: por calidad de fabricación, por calidad de servicio y por calidad en la operación. Las pruebas de fabricación verifican la calidad en que fue fabricado el transformador, y también sirven para determinar qué tanto soportarán las condiciones de operación, así como simular algunas fallas y también, poder revisar el comportamiento, éstas son:

- Resistencia de aislamiento.
- Factor de disipación del aislamiento.
- Rigidez dieléctrica del líquido en el que se sumerge el transformador.
- Relación de transformación.
- Relación de polaridad.
- Resistencia de los devanados.
- Potencia aplicada e inducida.
- Picos generados por descargas atmosféricas.
- Pruebas de temperatura.
- Cortocircuito a voltaje nominal.

Las pruebas que determinan la calidad del servicio, muestran qué tan eficiente es el transformador, qué también regula el voltaje, y determinan si se encuentran dentro de los parámetros de fabricación, y los establecidos en la garantía. Estas pruebas son:

- Pruebas en los devanados.
- Porcentaje de impedancia.
- Pérdidas en el núcleo.
- Porcentaje de corriente de excitación.

Por último, las pruebas que determinan la calidad del transformador, sirven para determinar la vida útil que tendrá, y que es proporcional a la duración del aislamiento. Estas pruebas son: de temperatura, de hermeticidad y de descargas parciales.

Si el transformador es de potencia, también se le aplican pruebas de embarque y de campo. Las pruebas de campo son similares a las pruebas de fábrica, sólo que se realizan durante la vida útil del transformador; mientras que las pruebas de embarque son:

- Fugas líquidas.
- Punto de rocío.
- Detección de golpes.
- Comente de excitación a 2.5 [KV].

Una vez que se diseñó y se le hicieron pruebas al transformador, éste se encuentra para entrar en funcionamiento. Este transformador puede ser monofásico para líneas resistenciales; o trifásico para líneas comerciales o industriales. Se deben de considerar diversos aspectos durante la instalación y puesta en marcha de un transformador de distribución.

El tamaño del transformador será relativo a la capacidad que tenga que entregar. A medida que las zonas donde se instale el transformador van creciendo, se debe medir la carga que alimenta, si el transformador tiene una carga menor o mayor al 50 % de su eficiencia nominal, es considerable cambiarlo, para hacer un uso eficiente y asegurar un excelente servicio.

La ubicación del transformador debe ser tan cerca de la carga como sea posible, para minimizar pérdidas en los conductores y caídas en el voltaje. Posteriormente, se debe asegurar que el transformador esté bien aterrizado, para este efecto, se utilizan barras de metal que se entierran tres metros. Dependiendo del tipo de transformador, se conectará el lado secundario o alguno de los tres transformadores en un banco trifásico.

Los transformadores pequeños, normalmente son montados en postes, colgados de algún mástil, montados en percheros o plataformas. Una vez que el transformador está correctamente colocado, se deben conectar las protecciones como fusibles o disyuntores, para prevenir cualquier problema, y hacer las correctas y debidas conexiones a tierra y al neutro.

Una vez que el lado primario ha sido correctamente conectado, se pueden hacer las conexiones secundarias que son las últimas que se hacen, con el objetivo de prevenir accidentes.

### 5.16 Respuesta al problema de diseño

En primera instancia se debe considerar el aislamiento de acuerdo con el nivel de tensión de servicio de la siguiente manera:

Nivel	Aislamiento, [KV]	Nivel Básico de Aislamiento (BIL) en [KV]
Baja tensión	0.6	25
Mediana tensión; [13.8 KV]	15.0	95
Mediana tensión; [34.5 KV]	36.0	200
Alta tensión; [115 KV]	145.0	600

Posteriormente, se lleva a cabo la selección del conductor que comprende los siguientes análisis:

- Análisis económico que considera los costos de inversión y los costos de pérdida de potencia.
- El análisis de regulación de voltaje.
- La comprobación que la corriente de carga o de diseño, no supera la capacidad de corriente del conductor.

La selección del conductor, se realizará teniendo en cuenta los costos de inversión, de operación y de pérdidas durante el periodo de planeación a 15 años.

Otro parámetro a considerar, es la capacidad térmica, y dependiendo de la carga que va a manejar un determinado circuito, se obtiene la corriente que circulará por el conductor; se debe elegir un conductor de manera tal que no supere el 75 % de la capacidad de corriente de este elemento.

Las redes de distribución en baja tensión instaladas en ductos no metálicos, y que pasan por cajas metálicas llevarán un conductor de continuidad de puesta a tierra.

El siguiente parámetro a considerar, es el referente a las pérdidas de potencia. En cuanto al diseño mecánico para líneas de mediana tensión; incluye ramales y alimentadores principales. Por ejemplo; para niveles de tensión de 13.2 [KV] ó 13.8 [KV], se exigirá un diseño mecánico para longitudes iguales o superiores a 5 000 metros, y para niveles de tensión de 34.5 [KV] o superiores, a partir de 1 500 metros.

### 5.17 Resumen

Existen dos aplicaciones básicas para la utilización de los transformadores de distribución de energía eléctrica:

- El transporte de energía eléctrica. Gracias a su capacidad de transformar los parámetros de voltaje y de corriente, con la consiguiente reducción de las pérdidas por Efecto Joule. Existirán dos transformadores, uno al principio de línea para la elevación del potencial (transformador elevador) y uno al final de línea para la reducción del mismo (transformador reductor).
- Interconexión de líneas eléctricas a diferentes niveles de voltaje: Por sus capacidad de transformar los niveles de voltaje, los transformadores son ideales para interconectar líneas a diferentes niveles de voltajes, dando todas ellas una salida común.

De acuerdo a lo anterior, son los transformadores de distribución, un elemento básico en las redes de distribución de la energía eléctrica. Estos son probablemente los equipos electromagnéticos más ampliamente utilizados, y se diseñan reuniendo condiciones de funcionamiento mediante el manejo eficaz de los materiales disponibles, y el mejoramiento del conjunto de los mismos. A lo largo de la historia, estos aspectos han ido evolucionando, es por esta razón, que la idea fundamental de los ingenieros del área eléctrica, es la de buscar la forma de obtener un abasto seguro de energía al menor costo posible con el diseño más óptimo. La optimización aplicada a un transformador de distribución es de suma importancia, ya que los fabricantes siempre están buscando producir transformadores económicos y eficientes.

Los transformadores de los sistemas de potencia se clasifican en: Transformadores de potencia y en transformadores de distribución según se utilicen ordinariamente en las centrales y subcentrales generadoras de potencia, o en las redes de distribución. Los transformadores montados en lo alto de postes o subterráneos, constituyen la última transformación de voltaje, entre el sistema de la central y el consumidor de energía eléctrica, reciben el nombre de transformadores de distribución, constituyen un elemento importante entre todos los tipos de transformadores fabricados. Los transformadores de distribución se fabrican con un voltaje y una frecuencia normalizadas y con valores de potencias aparentes que llegan hasta los 500 [KVA]. Se fabrican siempre en serie, y los menores suelen encontrarse siempre en el comercio formal. Los transformadores grandes cuyas potencias aparentes son mayores a los 500 [KVA] reciben el nombre de transformadores de potencia.

En conclusión, los transformadores de distribución son la última fase para la utilización de la energía eléctrica en alta o baja tensión. Se le define a un transformador de distribución como un aparato estático que tiene una capacidad nominal desde 5 y hasta 500 [KVA] y un voltaje nominal hasta 34 500 [V] en el lado del devanado primario y hasta 15 000 [V] nominales en el devanado secundario. Dentro de los transformadores de distribución existen cuatro tipos:

- Transformador tipo pedestal.
- Transformador tipo sub-estación.

- Transformador tipo sumergible.
- Transformador tipo poste.

Los transformadores de distribución tipo poste monofásico y trifásico, son el elemento básico en las redes de distribución eléctrica, en los sistemas urbanos y rurales.

Son los que hacen posible al usuario final la utilización de la energía eléctrica de bajo consumo en los desarrollos habitacionales, residenciales y microindustrias. Los transformadores de este tipo son de pequeña capacidad y tamaño reducido. Los transformadores tipo poste son construidos de acuerdo a la Norma Oficial Mexicana NMX-J-116-ANCE o a la especificación de la Comisión Federal de Electricidad CFE-K0000.01, sumergidos en aceite mineral con enfriamiento natural (clase OA), con elevación de temperatura de  $65^{\circ}\text{C}$  a  $2\ 300$  [msnm] sobre un ambiente promedio de  $30^{\circ}\text{C}$ , y hasta un máximo de  $40^{\circ}$  y una frecuencia de  $60$  [Hz], en capacidades de  $5$  y hasta  $167$  [KVA] para equipos monofásicos y de  $15$  hasta  $150$  [KVA] para equipos trifásicos. Dos clases de voltaje cubiertas son desde  $1.2$  y hasta  $34.5$  [KV].

Cuando un transformador es utilizado para servicio de distribución, es conectado al secundario (terminales H) directamente a la carga habitual, de ahí el nombre de distribución.

Los transformadores para tales servicios, son distinguidos de los transformadores de potencia, los cuales son empleados en sistemas de transmisión de alta tensión por las compañías suministradoras, para la transmisión y distribución de relativamente grandes bloques de potencia. Relativamente en los circuitos o redes de distribución grandes, la tensión baja por las caídas de tensión en los cables y se incrementa con las menores distancias de las fuentes de tensión primarias; esto significa que un transformador de distribución conectado al principio de una línea recibirá un voltaje más alto que muchos kilómetros de distancia adelante. Asumiendo que dos transformadores de distribución similares son conectados a la misma línea, pero a distancias diferentes el uno del otro, las tensiones en los secundarios en ambos casos no serán los mismos, la tensión de carga puede ser muy alto al principio de la línea y muy bajo al final de ésta. De ahí, que sea necesario el uso de conexiones de derivación para el ajuste de la tensión que se entrega a los usuarios.

## 5.18 Problemas resueltos

**Problema 5.1** Una planta industrial absorbe  $100$  [A] con un factor de potencia de  $0.7$  inductivo, del secundario de un banco de transformadores de distribución de  $2\ 3/230$  [V];  $60$ [KVA]; conexión  $Y - \Delta$  calcular:

- a) La potencia activa consumida por la planta en [KW] y la potencia aparente en [KVA].
- b) Las corrientes nominales secundarias de fase y de línea del banco de transformadores.
- c) El porcentaje de la carga en cada transformador.
- e) La potencia nominal en [KVA] de cada transformador.

**Respuestas:**

$$a) \text{ potencia total} = \frac{\sqrt{3}V_L I_L \cos(0)}{1000} = \frac{(1.73)(230)(100)(0.7)}{1000} = 28[KW] \Rightarrow P_T = 28[KW]$$

$$\text{potencia aparente} = \frac{PT}{\cos(\theta)} = 28[KW] \Rightarrow P_A = 40[KVA]$$

$$b) I_{fase_{sec}} = \frac{KVA(1000)}{3V_{fase}} = \frac{60[KVA](1000)}{(3)(230[V])} = 87[A] \Rightarrow I_{línea_{sec}} = 87[A]$$

$$I_{línea_{sec}} = (\sqrt{3}(I_{fase_{sec}})) = (1.732)(87[A]) = 150[A] \Rightarrow I_{línea_{sec}} = 150[A]$$

$$c) \frac{\text{intensidad de carga por línea}}{\text{intensidad nominal por línea}} = \frac{100[A]}{150[A]} = (0.67[A])(100\%) = 67\%$$

$$\text{Porcentaje de carga/transf} = 67\%$$

d) Intensidades de fase y de línea en el primario

$$I_{fase_{prim}} = I_{línea_{prim}} = \frac{KVA(1000)}{\sqrt{3}(V_L)} = \frac{40[KVA](1000)}{(1.732)(2300)} [V] = 10[A]$$

$$I_{fase_{prim}} = I_{línea_{prim}} = 10[A]$$

$$e) \text{KVA por transf} = \frac{KVA_{TOT}}{3} = \frac{60[KVA]}{3} = 20[KVA]$$

$$\Rightarrow \text{KVA por transf} = 20[KVA]$$

**Problema 5.2** Un motor de inducción trifásico del tipo (jaula de ardilla de 440 [V]; 100[HP] tiene un factor de potenci de 0.8 y debe hacerse funcionar a partir de una alimentación de 155/110 [V] bifásica. Suponiendo que los trnsformadores seleccionados tengan un rendimiento del 98 % a plena carga. Calcular:

- La intensidad de línea en el motor (la corriente nominal del motor es 123[A]).
- La relación de transformación.
- La corriente en el primario en los transformadores Scott.
- La potencia nominal en [KVA] de los transformadores largo y corto.

**Respuestas.**

$$a) I_{línea_{motor}} = (123[A])(1.25) = 154[A] \Rightarrow I_{línea_{motor}} = 154[A]$$

$$b) \frac{N_1}{N_2} = a = \frac{V_a}{V_L} = \frac{110[V]}{440[V]} = 0.25 \quad a = 0.25$$

$$c) I_a = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{I_L}{a\eta}\right) = \left(\frac{1.72}{2}\right) \left(\frac{154[A]}{(0.25)(0.98)}\right) = (0.866)(628.571) = 544[A]$$

$$d) \text{Potencia nominal} = \frac{(V_a)(I_a)}{(0.866)(1000)} = \frac{(110)(544)}{866} = \frac{59840VA}{866} = \frac{59840VA}{866} = 69[KVA]$$

**Problema 5.3** Se dispone de un transformador trifásico. En su placa de características figuran los siguientes datos.

- Potencia nominal: 4500 [KVA].
- Voltaje nominal primario de línea: 45[KV].
- Voltaje nominal secundario de línea 6.3 [KV].
- Conexión:  $\Delta - Y$ .

Se han medido las impedancias de los devanados primario y secundario resultando los siguientes valores:

$$\begin{aligned} *R_1 &= 17[\Omega/\text{fase}] \\ *X_1 &= 21[\Omega/\text{fase}] \\ *R_2 &= 0.111[\Omega/\text{fase}] \\ *R_2 &= 0.1372[\Omega/\text{fase}] \end{aligned}$$

Se ha realizado el ensayo de vacío del transformador por el lado de alto voltaje, obteniéndose los siguientes resultados.

$$\begin{aligned} P_0 &= 53[KW] \\ *I_0 &= 3[A] \end{aligned}$$

Determinar:

- 1.-  $R_o$  y  $X_o$  por fase
- 2.- Los valores del triángulo de Kapp [%]
- 3.- Rendimiento del transformador cuando alimenta una carga de 3600 [KW], con  $\cos\theta = 0.8$  inductivo (supóngase que el secundario está a voltaje nominal).
- 4.- Si se supone que en el primario existe un voltaje de 45 [KW]. Hallar la tensión aproximada que habría en el secundario en los siguientes casos:

- a) A plena carga,  $\cos\theta = 0.8$  inductivo.
- b) Un cuarto de carga,  $\cos\theta = 0.9$  capacitivo.

**Problema 5.4** Con tres transformadores monofásicos iguales conectados en  $Y-\Delta$ , se desea montar un banco trifásico de iguales características que el transformador del apartado anterior para trabajar en paralelo con el. Hallar las características de cada transformador monofásico.



**Respuestas:**

1.- Puesto que se pide  $R_0$  y  $X_0$  por fase, supongase el transformador reducido a la conexión Y-Y equivalente:

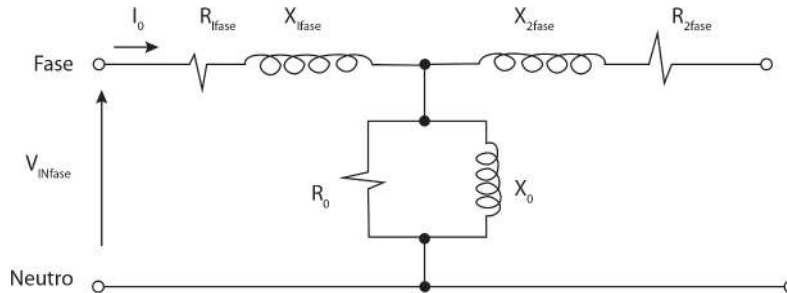
$$\frac{P_0}{3} = \left( \frac{V_{1N}}{\sqrt{3}} \right) (I_{A\text{ fase}}) \Rightarrow I_{a\text{ fase}} = \left( \frac{\sqrt{3}(P_0)}{3(V_{1N})} \right) = \left( \frac{(1.732)(53000)}{(3)(45000)} \right) = 0.68[A]$$

$$I_{m\text{ fase}} = \sqrt{(I_0)^2 - (I_{af})^2} = \sqrt{(3)^2 - (0.68)^2} = 2.92[A]$$

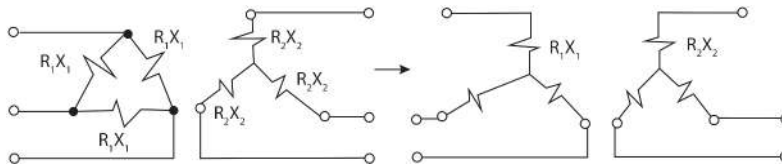
entonces:

$$R_{0\text{ fase}} = \frac{V_{1\text{ fase}}}{I_{a\text{ fase}}} = \frac{(45000)/\sqrt{3}}{0.68} = 38,207[\Omega] R_{0\text{ fase}} = 38,207[\Omega]$$

$$X_{0\text{ fase}} = \frac{V_{1\text{ fase}}}{I_{m\text{ fase}}} = \frac{(45000)/\sqrt{3}}{2.92} = 8,897[\Omega] X_{0\text{ fase}} = 8897[\Omega]$$



2.- De la misma forma que el inciso anterior, se reduce el triángulo del primario estrella:



$$mc = \frac{45}{6.3} = 7.14 = m_s(\text{en estrella})$$

$$Z_{1Y} = \frac{Z_{1\Delta}}{3} = \frac{17 + j21}{3} = 5.66 + j7 \Rightarrow R_{1Y} = 7[\Omega]$$

Calculando la resistencia y la impedancia del corto circuito:

$$R_{cc\,fase} = R_{1Y} + R'_2 = 11.32[\Omega] ; X_{cc\,fase} = X_{1Y} + X'_2 = 14[\Omega]$$

Por lo tanto; la impedancia en corto circuito en estrella es por fase :

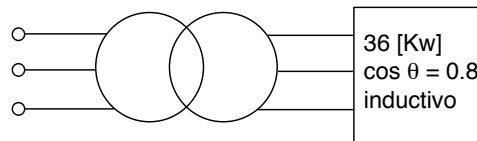
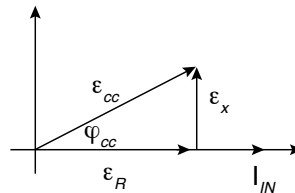
$$Z_{cc\,fase} = 11.32 + j14 = 18[\Omega]$$

$$I_{1n} = I_{1n\,fase} = \frac{4500000}{(\sqrt{3})(45000)} = 57735[A]$$

$$E_R \% = \frac{P_{cc}}{S_N}(100\%) = \frac{(3)(I_{1\,fase})^2(R_{cc\,fase})}{S_N} = 2.516\%$$

$$E_{cc} \% = \frac{(Z_{cc\,fase})(I_{1n\,fase})}{V_{1n\,fase}}(100\%) ; E_x = 3.11\%$$

Finalmente, el triángulo de Kapp en [% por fase] es:



$$P = (s_c)(\cos\varphi_2) \Rightarrow S_c = \frac{P}{\cos\varphi_2} = \frac{3600}{0.8} = 4500[KVA]; c = \frac{S_c}{S_N}$$

$$P_{cc} = (3)(R_{cc\,fase})(I_{1n})^2 = (3)(11.32)(57.7)^2[KW]$$

El rendimiento del transformador es:

$$\eta = \frac{(\sqrt{3})(V_2)(c)(I_{2N})(\cos\varphi_2)}{(\sqrt{3})(V_2)(c)(I_{2N})(\cos\varphi_2) + (P_0) + (C^2)(P_{cc})} = \frac{(4500)(0.8)}{(3600) + 53 + 113.2} = 0.955(100\%) = 95.5$$

$$\eta = 95.5\%$$

4.- Para calcular este inciso, se utilizará la fórmula aproximada:

$$V_1 \approx V_2(m)(1 + \epsilon_c)$$

$$\epsilon_c = c(\epsilon_R \cos\varphi_2 + \epsilon_x \sin\varphi_2)$$

a)  $c = 1$ ;  $\cos\varphi_2 = 0.8$  inductivo

$$\epsilon_c(1) [(0.025)(0.8) + (0.0311)(0.6)] = 0.0386 \text{ y } m = 7144$$

$$V_1 = 45[KV] ; V_2 = \frac{V_1}{(m)(1+\epsilon_c)} = \frac{45000}{(7144)(1+0.0386)} = 6,065[V] \Rightarrow V_2 = 6.065[V]$$

b)  $c = 1/4$ ;  $\cos\varphi_2 = 0.9$  capacitivo

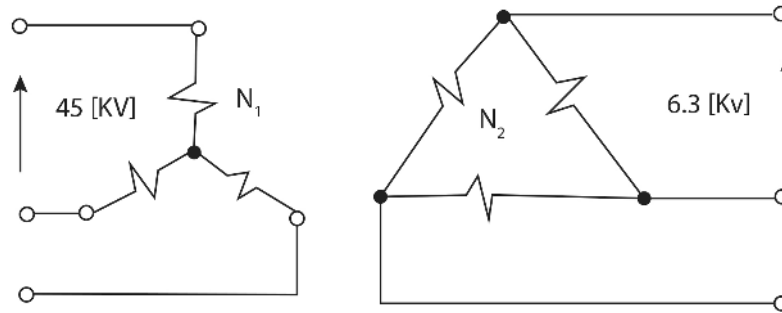
$$\epsilon_c = (0.25) [(0.0295)(0.9) - (0.031)(0.043)] = 0.0092 ; V_2 = \frac{45000}{(7144)(1.00912)} = 6.242[A]$$

$$V_2 = 6.242[V]$$

5.- Cada transformador de banco tendrá las siguientes características:

$$S_N = \frac{4500}{3} = 1500[KVA] ; V_{1N} = \frac{45}{\sqrt{3}}[KV] ; V_{2N} = 6.3[KV]$$

$$P_0 = \frac{53}{3}[KW] ; P_{cc} = \frac{113.2}{3}[KW] ; \epsilon_{cc} = 4\%$$



**Problema 5.5** Un transformador monofásico de 30 [KVA] con 300 espiras en el devanado primario y 60 espiras en el devanado secundario. El devanado primario se conecta a 1200 [UV] y 60[HZ]. Se desea calcular:

- El voltaje en el secundario en vacío.
- La corriente a plena carga en cada devanado.
- El valor máximo del flujo.

**Respuestas:**

- Calcular el voltaje inducido en el devanado secundario utilizando la relación de transformación:

$$\frac{V_p}{V_s} = \frac{N_p}{N_s}; \text{ entonces despejando } V_s \text{ se tiene:}$$

$$V_s = \frac{N_s V_p}{N_p} = \frac{(60)(1200)}{300} = 240[V] \Rightarrow V_s = 240[V]$$

- La corriente se puede calcular con la relación :  $I_x = \frac{1000[KVA]}{V_x}$  por lo que, la corriente en el primario es:

$$I_p = \frac{1000(30)}{1200} = 25[A] \Rightarrow I_p = 25[A]$$

La corriente en el secundario se calcula como:

$$I_s = \frac{1000(30)}{240} = 125[A] \Rightarrow I_s = 125[A]$$

entonces, despejando el flujo máximo se tiene:

$$\phi_{m\acute{a}x} = \frac{(V_x)(\sqrt{2})}{(2\pi)(f)(N_x)} = \frac{(1200)(\sqrt{2})}{(2)(3.1416)(60)(300)} = \frac{1967.0562}{1130976} = 0.0015[Wb]$$

$$\phi_{m\acute{a}x} = 0.0015[Wb]$$

c) Se calcula partiendo de la expresión :  $V_x = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\right)(f)(N_x)(\phi_{m\acute{a}x})$

**Problema 5.6** Con un transformador monofásico de 480/120 [V] funcionando a 60 [HZ] y con 200 espiras en el devanado secundario, con una densidad de flujo máximo de 0.8 [WV/m<sup>2</sup>]; se desea calcular:

- a) El número de espiras en el devanado primario en el transformador.
- b) el area afectiva en el núcleo.

**Respuestas:**

a) De la relación de vueltas se puede obtener el número de espiras en el devanado primario mediante la expresión  $\frac{V_p}{V_s} = \frac{N_p}{N_s}$ , entonces despejando NP:

$$N_p = \frac{V_p N_s}{V_s} = \frac{(480)(200)}{120} = 800$$

$$N_p = 800[vueltas]$$

b) Primero se debe calcular el flujo máximo:

$$\phi_{m\acute{a}x} = \frac{(V_p)(\sqrt{2})}{(2\pi)(f)(N_p)} = \frac{(480)(1.4142)}{(2)(3.1416)(60)(800)} = \frac{678.816}{301593.6} = 0.00225[Wb]$$

Finalmente; se puede calcular el área del núcleo como:

$$A = \frac{\phi_{m\acute{a}x}}{B_{m\acute{a}x}} = \frac{0.0023}{0.8} = 0.0028125[m^2]$$

$$A = 0.0028125[m^2]$$

o

$$A = 28.125[m^2]$$

**5.19 Problemas**

**5.1** Un transformador monofásico de 100 (KVA); 30 000/220 [V];50[HZ]; tiene 100 espiras en el devanado secundario. Suponiendo que el transformador es ideal.

Calcular.

- a) Las corrientes primarias y secundarias a plena carga.
- b) Flujo máximo.
- c) El número de espiras del arrollamiento a plena carga.

**5.2** Un transformador que trabaja a 50 [HZ], con una chapa magnética que tiene un espesor de 0.35 [mm] y una inducción magnética de 1 (Tesla). Se conecta a una red de 60 [HZ].

¿cuáles son las pérdidas en el hierro a 50 [HZ]?

¿cuáles son las pérdidas en el hierro a 60 [HZ]?

**5.3** Un transformador que trabaja a una frecuencia de 50 [HZ]; con una chapa magnética de una inducción de 1.2 [Tesla] conectado a una red de 50 [HZ] de frecuencia.

El peso del núcleo del transformador es de 3 [kg] ¿Cuáles serán las pérdidas por histéresis del núcleo magnético?

**5.4** Un transformador conectado a una red de 50 [HZ] de frecuencia con una chapa magnética de 0.9 [Tesla] de inducción. El peso del núcleo del transformador es de 12 [Kg]. El espesor de la chapa del núcleo es de 0.35 [mm], y el coeficiente de histéresis es de 0.002 calcular la potencia pérdida en el hierro.

**5.5** Un transformador de 60 [HZ] tiene unas pérdidas por histéresis de 200 [W], y unas pérdidas por corrientes parásitas de 100 [W] para un valor máximo de la densidad de flujo de 200 [wb/m<sup>2</sup>], cuando se aplica un voltaje de 120 [V] en los bornes del primario.

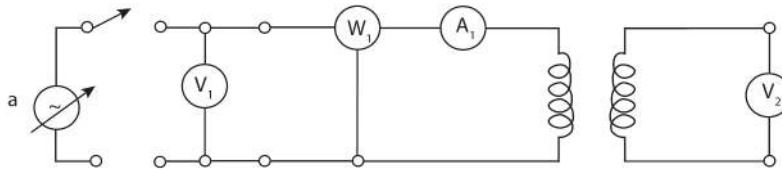
Calcular:

- a) Las pérdidas por histéresis y por corrientes parásitas cuando la tensión disminuye a 110 [V] para la misma frecuencia. Suponiendo que las pérdidas por corrientes parásitas, son función de  $(f * B_m)^2$ , pero las pérdidas por histéresis son función de  $(f * B_m)^{1.75}$
- b) Las pérdidas por histéresis y corrientes parásitas (Foucault) para una densidad de flujo máximo, si se aplica la tensión nominal a una frecuencia de 50 [HZ].
- c) Las densidad de flujo máxima, las pérdidas por histéresis y corrientes parásitas cuando se aplican 60 [V] a 30 [HZ].

Voltaje en el devanado primario	$V_{1N}$	380[V]
Intensidad en el devanado primario	$I_1$	0.081 [A]
Voltaje en el devanado secundario	$V_{2N}$	125 [V]
Potencia medida con el wattmetro	$P_1$	2.2 [W]
Resistencia del cobre	$R_{cu}$	2.4[Ω]

**5.6** Un transformador de 50 [KVA]; 600/240, 25 [HZ] tiene unas pérdidas en el hierro de 200 [W] (de los cuales el 30 % son pérdidas por corrientes parásitas) y unas pérdidas en el cobre a plena carga de 650 [W]. Si el transformador se hace funcionar a 600 [V]; 60 [HZ], ¿cuál es la nueva potencia nominal del transformador; si las pérdidas totales tuvieran que ser las mismas?.

**5.7** Calcular la potencia aparente, y el factor de potencia en vacío de un transformador, partiendo de los siguientes datos:



El generador G, es una fuente de alimentación de corriente alterna regulable (autotransformador regulable)

**5.8** Se tiene un transformador de 50 [KVA]; 4600/220 [V]; 50 [HZ]

Ensayo en vacío: 223 [V] y 287 [W]

Ensayo en cortocircuito: 156 [V]; 620 [W] y 11.87 [A]

Calcular:

a) El rendimiento  $\eta$  a 60 [KVA];  $\cos\varphi = 0.86$

b) La potencia [KVA]; el rendimiento máximo ( $\eta_{\text{máx}}$ ); la potencia aparente máxima ( $S_{\eta_{\text{máx}}}$ ) con el rendimiento máximo.

## **Capítulo 6**

### **Transformadores de potencia**

#### **6.1 Introducción**

#### **6.2 Introducción a los transformadores de potencia**

#### **6.3 Tipo de transformadores de potencia**

#### **6.4 Tipos de aislamiento**

#### **6.5 Curvas teóricas de calentamiento y refrigeración**

#### **6.6 Tipos de refrigeración en los transformadores de potencia**

#### **6.7 Elevación de temperatura debido a cortocircuitos.**

##### **Esfuerzos mecánicos**

#### **6.8 Conexiones de bancos de transformadores monofásicos y trifásicos**

#### **6.9 Cálculo de pérdidas y su optimización**

#### **6.10 Normas de diseño, pruebas y puesta en servicio**

#### **6.11 Problemas resueltos**

#### **6.12 Resumen**

#### **6.13 Problemas**



### Competencias

Conocer las características operativas y aplicaciones de los transformadores de potencia.

## 6.1 Introducción

Un transformador de potencia es aquella máquina eléctrica que maneja grandes magnitudes de voltaje y de corriente [VA]; dichas magnitudes se expresan en la potencia en [KVA] o [MVA]. Usualmente se considera un transformador de potencia cuando su capacidad es de un valor que pueda estar entre los siguientes rangos: 500 [KVA], 750 [KVA], 1000 [KVA], 1250 [KVA] ó 1.25 [MVA]; hasta potencias del orden de 500[MVA] monofásicos y de 650 [MVA] a 900 [MVA] trifásicos. Estos últimos operan a un nivel de voltaje de 500 [KV]; 525 [KV] o superiores.

Generalmente, estos transformadores están instalados en subestaciones para la distribución de la energía eléctrica. Efectuando la función intermediadora entre las grandes centrales de generación y los usuarios domiciliarios o industriales, consiste en reducir los altos niveles de voltaje (en la cual es transmitida la energía) a magnitudes de voltaje inferiores que permitan derivar circuitos a los usuarios en mediana y baja tensión.

También se da una aplicación similar en las grandes centrales de generación, donde los transformadores de potencia elevan los niveles de voltaje de la energía generada a magnitudes de voltaje superiores, con el objetivo de transportar la energía eléctrica en las líneas de transmisión. Otros transformadores de potencia realizan una función dedicada o cautiva cuando alimentan un solo equipo exclusivamente. Por ejemplo, en una misma industria pesada, un transformador toma energía a nivel de 35 000 [V] y la transforma a 4 000 [V] para alimentar un motor especial de 5000 [HP] de potencia.

Los transformadores de potencia son elementos críticos para la provisión de energía eléctrica y su adecuado mantenimiento es clave para la prolongación de su vida útil. Las nuevas tecnologías de monitoreo continuo en tiempo real, aportan valiosa información acerca del comportamiento de los transformadores de potencia, y el desarrollo de fallas en los mismos. Mediante la detección de variaciones en el contenido de gases disueltos y humedad en el aceite, se puede alertar acerca del deterioro del aislamiento y el desarrollo de fallas incipientes, para permitir llevar a cabo tareas de mantenimiento predictivo.

Finalmente; los transformadores de potencia son de gran importancia para la operación de un sistema de transmisión. El transformador permite que la energía generada en una central, sea elevada a un nivel de voltaje para ser transmitida a grandes distancias con pocas pérdidas, y finalmente; se puede disminuir su voltaje para su utilización final en los centros urbanos y zonas industriales. De lo anterior surge que en los últimos diez años, el mantenimiento que se efectúa a estos equipos sea cada vez mas

estricto y cuidadoso. Por lo que, es recomendable un excelente plan de mantenimiento que se apoye en pruebas eléctricas y físico-químicas. Un buen análisis de ingeniería es imprescindible para garantizar su funcionamiento, durabilidad, disponibilidad y confiabilidad. Hoy en día, se realizan diversas pruebas preventivas en transformadores energizados; factor de potencia, cromatografía de gases disueltos en el aceite, resistencia de aislamiento y devanados; que actualmente, son reconocidas como métodos confiables para el diagnóstico e identificación de fallas eléctricas.

## 6.2 Introducción a los transformadores de potencia

Un transformador, es un dispositivo que cambia la potencia eléctrica alterna con un nivel de voltaje en un campo magnético. Se forma con dos o más bobinas de alambre conductor enrolladas alrededor de un núcleo (generalmente de un material ferromagnético) común. Esto se logra conectando uno de los devanados (el primario) a una fuente de voltaje alterno produciendo así un flujo magnético cuya amplitud dependerá del voltaje suministrado por la fuente y el número de espiras del devanado. El flujo del campo magnético encadenará al otro devanado (el secundario) induciendo un voltaje en el cuyo voltaje dependerá de su número de vueltas alrededor del núcleo. La proporción del número de vueltas del primario y del secundario se llama relación de transformación.

En los transformadores se presentan pérdidas de potencia debidas a la resistencia que hay en el devanado de cobre y a las pérdidas en el hierro del circuito magnético.

La potencia perdida en el hierro puede medirse mediante el ensayo en vacío, que se realiza dejando abierto el circuito secundario y se conecta el devanado primario a su voltaje nominal, la potencia absorbida corresponde casi únicamente a las pérdidas en el circuito magnético.

Para obtener las pérdidas en el devanado, se realiza el ensayo de cortocircuito que se hace poniendo el devanado secundario en cortocircuito mediante un amperímetro y alimentando al primario del transformador con una fuente de tensión alterna regulable, aumentando desde "0" y hasta llegar a la corriente nominal en el devanado secundario, a este voltaje se le llama "voltaje de cortocircuito". Como el voltaje en el devanado primario debe ser muy pequeño, la inducción en el núcleo magnético también debe ser muy baja, por lo que las pérdidas en el hierro pueden ser despreciables. El voltaje en el devanado secundario es CERO debido a que se encuentra en cortocircuito; por lo que la potencia es CERO; por lo tanto, la potencia absorbida por el devanado primario será prácticamente la correspondiente a las pérdidas en el cobre. El circuito primario genera una fuerza contraelectromotriz ( $e_1$ ) en el núcleo del transformador, esta fuerza se calcula mediante la expresión:

$$e_1 = -N_1 \frac{d\Phi}{dt} [V]$$

donde:

$e_1$  es la fuerza contraelectromotriz.

$N_1$  Número de vueltas en el devanado primario.

$\Phi$  Flujo magnético en el núcleo.

Si se considera que la resistencia del devanado es igual a cero; se puede decir que:

$$u_1 + e_1 = 0$$

Por lo que:

$$u_1 + e_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt}$$

Siendo  $U_1$  el voltaje aplicado al devanado primario.

Para el devanado secundario en el que se genera una fuerza electromotriz se tiene que:

$$u_2 = e_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

Entonces; la relación de transformación nominal de un transformador se da por el cociente de la tensión suministrada en el devanado primario sobre el voltaje inducido en el devanado secundario; es decir:

$$r_{tn} = \frac{u_1}{u_2}$$

Por lo tanto;

$$r_{tn} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1 \frac{d\Phi}{dt}}{N_2 \frac{d\Phi}{dt}} = \frac{N_1}{N_2}$$

De lo anterior se establece que:

$$r_{tn} = \frac{u_{1(nominal)}}{u_{2(vacío)}} \approx \frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Cuando se conecta una carga en el devanado secundario, esto motiva una corriente  $i_2$  de tipo senoidal; mientras que en el devanado primario circula una corriente  $i_1$ , que es diferente a  $i_o$ , que circulaba cuando el devanado secundario se encontraba en vacío. Entonces; si  $u_1 = u_{1(nominal)}$ , se puede establecer que  $u_2 \approx u_{2(vacío)}$ ; por lo que  $\frac{u_1}{u_2} \approx \frac{u_{1(nominal)}}{u_{2(vacío)}} = r_{tn}$

Si se supone que el transformador tiene pocas pérdidas, entonces por el principio de conservación de la energía, resulta que:

$$u_1 I_1 \cos \varphi_1 \approx u_2 I_2 \cos \varphi_2$$

O lo que es lo mismo:

$$\frac{I_1}{I_2} \approx \frac{u_2 \cos \varphi_2}{u_1 \cos \varphi_1} \approx \left( \frac{1}{r_{tn}} \right) \left( \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} \right)$$

A plena carga, puede aceptarse que  $y_1 \approx y_2$ , por lo que:

$$\frac{I_1}{I_2} \approx \frac{1}{r_{tn}}$$

La expresión anterior establece la relación de transformación, la cual es válida para transformadores monofásicos y para los transformadores trifásicos en los que su conexión del primario y del secundario es igual ( $Y - Y; \Delta - \Delta$ ). Para conexiones trifásicas distintas, se utilizan las siguientes expresiones:

$$r_{tn(\Delta-Y)} = \frac{u_1 \sqrt{3}}{u_2} = r_{tn}(\sqrt{3})$$

$$r_{tn(Y-\Delta)} = \frac{u_1}{u_2 \sqrt{3}} = \frac{r_{tn}}{\sqrt{3}}$$

### 6.3 Tipo de transformadores de potencia

Los transformadores de potencia, se utilizan para transmisión de energía eléctrica en alta y mediana tensión. Se utilizan en sub-estaciones centrales de generación y para usuarios que tienen una gran demanda de carga. Generalmente, se construyen en potencias normalizadas desde 1.25 y hasta 20 [MVA], y en voltajes de 13.2; 66 y 132 [KV] y frecuencias de 50 y 60 [HZ]. Desde un enfoque general, los transformadores se utilizan para subtransmisión y transmisión de energía eléctrica en alta y mediana tensión, son de aplicación en subestaciones transformadoras; centrales de generación y en grandes usuarios. La clasificación de estos transformadores es en general, la siguiente:

- **Transformadores de distribución.** Estos son transformadores de potencia iguales o inferiores a 500 [KVA] y de tensiones iguales a 67 000 [V]; tanto monofásicos como trifásicos. Aunque la mayoría de tales unidades están proyectadas para montaje sobre postes, algunos de los tamaños de potencia superiores por encima de las clases de 18 [KV], se construyen para montaje en estaciones o en plataformas. Las aplicaciones típicas son para alimentar granjas, residencias, edificios o almacenes públicos, talleres y centros comerciales. Se utilizan en la intemperie o en interiores para la distribución de energía eléctrica en mediana tensión, se aplican en zonas urbanas, industrias, en la minería, en explotación (exploración) petrolera, grandes centros comerciales y en toda actividad que requiera la utilización intensiva de energía eléctrica.
- **Transformadores secos encapsulados en resina epoxy.** Se utilizan en interiores para la distribución de energía eléctrica en mediana tensión, en lugares donde los espacios reducidos y los requerimientos de seguridad en caso de incendio, imposibilitan la utilización de transformadores refrigerados en aceite.

Se aplican en grandes edificios, hospitales, industrias, en la minería, en grandes centros comerciales y en toda actividad que requiere la utilización intensiva de energía eléctrica. Su principal

característica es que son refrigerados en aire con aislamiento clase F, utilizándose resina epóxica como medio de protección en los arrollamientos, siendo innecesarios cualquier mantenimiento posterior a la instalación. Se fabrican en potencias normalizadas desde 100 y hasta 2 500 [KVA], tensiones primarias 13.2; 15; 25; 33 y 35 [KV] y frecuencias de 50 y de 60 [Hz].

- **Transformador para montaje sobre postes.** Se utilizan en conexiones a la intemperie o en interiores para distribución de la energía eléctrica en mediana tensión. Se utilizan en zonas urbanas, industriales, en la minería, exploraciones petroleras, grandes centros comerciales y otras actividades que tienen una constante demanda de energía eléctrica. En general, se fabrican en potencias normalizadas desde 25 hasta 1,000[KV] y voltajes primarios de 13.5; 15; 25; 33 y 35 [KV] con frecuencias de 50-60 (Hz).

Los transformadores herméticos de llenado integral, se utilizan en la intemperie o en interiores para la distribución de la energía eléctrica en mediana tensión, siendo útiles en lugares donde los espacios son sumamente reducidos. Son de aplicación en zonas urbanas, industriales, en la industria minera, en exploraciones petroleras, grandes centros comerciales y en toda actividad que requiera la utilización intensiva de energía eléctrica. Su principal característica es que al no llevar un tanque de expansión de aceite, no necesita mantenimiento, siendo esta construcción más compacta que la tradicional. Se fabrican en potencias normalizadas desde 100 y hasta 1000 [KVA] voltajes primarios de 13.2; 15; 25; 33 y 35 [KV] y frecuencias de 50 y de 60 [Hz].

- **Transformadores rurales.** Están diseñados para una instalación monoposte en redes de electrificación suburbanas monofilares y trifilares de 7.6; 13.2 y 15 [KV]. En redes trifilares se pueden utilizar transformadores trifásicos o como alternativa, tres transformadores monofasicos.
- **Transformadores subterráneos:** Este transformador está diseñado para ser instalado en cámaras en cualquier nivel, pudiendo ser utilizado donde haya posibilidad de inmersión. Se fabrican en potencias desde 150 hasta 2000 [KVA], alta tensión de 15 ó 24.2 [KV] y en baja tensión de 216.5/125 [V]; 220/127 [V]; 380/220 [V]; 400/231 [V].
- **Transformadores autoprotegidos.** Este transformador incorpora componentes para la protección del sistema de distribución contra sobrecargas, cortocircuitos en la red secundaria y fallas internas en el transformador, para esto, posee fusibles de alta tensión y disyuntores de baja tensión, montados internamente en el tanque, hay fusibles de alta tensión y disyuntores de baja tensión para protección contra sobrevoltajes el transformador está provisto de un dispositivo para fijación de pararrayos externo en el tanque. Están diseñados para una potencia de 45 a 150 [KVA]; alto voltaje 15 ó 24.2 [KV] y baja tensión 380/220 ó 220/127 [V].
- **Autotransformadores.** Se usan normalmente para conectar dos sistemas de transmisión de voltajes diferentes, frecuentemente con un devanado terciario en  $\Delta$ . De manera parecida, los autotransformadores son adecuados como transformadores elevadores de centrales cuando se desea alimentar dos sistemas de transporte diferentes. En este caso, el devanado terciario es un devanado de plena capacidad conectado al generador y los dos sistemas de transporte se conectan al devanado del autotransformador. El autotransformador no sólo presenta menos pérdidas que el transformador normal, sino que menor tamaño y peso, permite el transporte de potencia superior.

- **Transformador de corriente TT/cc.** Estos transformadores se utilizan para tomar muestras de corriente de la línea, y reducirla a un nivel seguro y medible para las gamas normalizadas de instrumentos, aparatos de medida, y otros dispositivos de medida y de control, ciertos tipos de transformadores de corriente, protegen los instrumentos al ocultar cortocircuitos. Los valores nominales de los transformadores de corriente son: 2.5 a 200 [VA] (dependiendo su función). La corriente nominal es de 1 [A] en el lado del devanado secundario. Mientras que para el lado primario establece valores a partir de relaciones primario/secundario; dichas relaciones pueden ser 600/5; 800/5 ó 1000/5, estos dispositivos vienen con un amperímetro adecuado con la relación o razón de transformación de los transformadores de corriente. Por ejemplo, un transformador de 600/5 está disponible con un amperímetro graduado de 0 a 600 [A].
- **Transformadores de corriente constante.** Un transformador de corriente constante, es un transformador que mediante una corriente aproximadamente constante en su circuito secundario bajo condiciones variables de impedancia de carga cuando el primario se alimenta de una fuente de voltaje aproximadamente constante. La disposición de bobina móvil, tiene separadas las bobinas del devanado primario y del secundario que tienen libertad para moverse entre sí, variando por lo tanto, la reactancia de dispersión magnética del transformador. Existen también tipos para subestaciones que proporcionan unos modelos compactos integrales que llevan incluidos los accesorios necesarios para el control y la protección del transformador. Los accesorios normales comprenden un interruptor al solenoide primario, una protección contra una apertura del cortocircuito, fusibles o cortocircuitos con fusibles en el devanado primario y descargadores de sobrevoltajes en el devanado primario y en el devanado secundario. Los transformadores de corriente constante de tipo estático, no tienen partes móviles y funcionan según el principio de una red resonante. Esta red normalmente consta de dos reactancias inductivas y dos capacitivas, cada una de igual reactancia para la frecuencia de alimentación. Con tal red, la corriente secundaria es independiente de la impedancia de la carga encontrada, pero es directamente proporcional a la tensión del primario.
- **Los transformadores para hornos.** Suministran potencia a hornos eléctricos de los tipos de inducción, resistencia, arco abierto y arco sumergido. Los voltajes secundarios son bajos, ocasionalmente menores de 100 [V]; pero generalmente de varios centenares de volts en el devanado primario. La gama de tamaños varía desde algunos [KVA] a más de 50 [MVA] con corrientes en el devanado secundario superiores a 60 000 [A], las corrientes elevadas se obtienen conectando en paralelo muchas secciones del devanado. La corriente es recogida por barras internas y llevadas a través de la tapa del transformador mediante barras o mediante terminales de gran corriente.
- **Transformadores de puesta a tierra.** Un transformador de este tipo, es ideado con la finalidad de proporcionar un punto neutro a efecto de puesta a tierra. Puede ser una unidad de dos devanados, con el devanado secundario conectado en  $\Delta$  y el devanado primario conectado en Y, que proporciona el neutro a efecto de puesta a tierra o puede ser un auto-transformador trifásico de un solo devanado con devanados en estrella interconectada, o sea en zigzag.
- **Transformadores móviles.** éstos, están montados sobre remolques y llevan incorporados pararrayos y seccionadores separadores. Esta unidad se desplaza por carretera. Estas unidades se usan

para restablecer el servicio eléctrico en emergencias; para permitir el mantenimiento sin interrupción del servicio eléctrico; para proporcionar servicios durante las construcciones importantes y para reducir las inversiones en el sistema. La unidad móvil está proyectada de manera que constituye una unidad de aplicación múltiple que proporciona la máxima potencia en [KVA] para el peso admisible.

- **Transformadores para radio.** éstos a su vez se dividen en:
  - **Transformadores de energía.** La finalidad de este transformador en las aplicaciones de los radiorreceptores consiste en variar la tensión de la red doméstica a un nivel tal, que cuando se aplique a una válvula de vacío o a un rectificador de semiconductores (ya sea de media o de onda completa ) y esté adecuadamente filtrada, pueda usarse para alimentar los voltajes y las corrientes de polarización para los dispositivos activos de la radio. Este transformador también puede usarse para cambiar el voltaje de la red a un valor adecuado para los filamentos de las válvulas o lámparas que puedan haber en una radio.
  - **Transformadores de frecuencia de audio.** Pueden emplearse tres tipos de transformadores de frecuencia de audio en los receptores de radio. De entrada, de etapas intermedias y de salida. En el receptor normal sólo se usa el transformador de salida. El acoplamiento entre etapas de amplificación se consigue mediante impedancias comunes a los circuitos de entrada, de salida y de las etapas de amplificación.
  - **Transformadores de etapas intermedias.** Todo lo dicho antes para el transformador de entrada, se aplica a los transformadores de etapas intermedias, con la excepción de que estos transformadores se usan entre etapas de amplificación de los amplificadores de audio.
  - **Transformadores de salida.** Funcionan entre la última etapa de válvulas de vacío o transistores del amplificador de audio y del circuito de carga, que en los radios, es la bobina del altavoz o bocina, normalmente el transformador de salida para una etapa de salida de potencia, tienen una relación reductora, debido a que la impedancia del altavoz es relativamente baja en comparación con la impedancia de la salida de un amplificador, ya sea de válvulas o de transistores.
  - **Transformadores de radiofrecuencia.** Este término se usa para describir una clase de transformadores que funcionan a una frecuencia muy superior a la de la gama de audio. Esto es la frecuencia de la portadora de la señal de radio recibida o, en los radios superheterodinos, es la diferencia entre la frecuencia de la potencia de la portadora entrante y la frecuencia del oscilador de la radio. Esta frecuencia diferencial se denomina frecuencia intermedia, y los transformadores a través de los cuales pasa, se denominan transformadores de frecuencia intermedia. Los transformadores de radiofrecuencia realizan esencialmente las mismas funciones que los transformadores de frecuencia de audio (relación de espiras determinada por los voltajes deseados), pero presentan tres diferencias importantes. Como se ha mencionado anteriormente, trabajan con frecuencias muy superiores. Además, operan con potencias considerablemente menores que los transformadores de audio.

Finalmente, uno o ambos devanados de un transformador de radiofrecuencia a menudo

están conectados mediante un condensador, de manera que se forma un circuito sintonizado que atenúa todas las frecuencias, menos la destacada.

- **Transformadores para rectificadores.** Estos suministran energía a los rectificadores al voltaje de corriente alterna requerida para el voltaje de corriente continua deseada. están contruidos en tamaño que lleguen hasta los 1,5000 [KVA], y a veces superiores. El voltaje del secundario generalmente es bajo; variando desde menos de 50 [V] para algunos procesos electrolíticos hasta 1,000 [V] para otras aplicaciones. La corriente secundaria, generalmente es elevada y puede alcanzar muchos miles de (ampères). Pueden usarse conexiones de transformador que producen desfases para conseguir 12, 25 o incluso más fases, a fin de reducir los armónicos de la corriente en la entrada de la corriente alterna. Pueden usarse transformadores auxiliares o conexiones entre los devanados de fase de los propios transformadores del rectificador. Cuando se usan dos devanados secundarios (como en el circuito de doble estrella) debe haber la misma impedancia entre el primario y cada devanado del secundario para obtener ángulos de comunicación y de tensiones de corriente continua iguales en los dos circuitos del secundario.
- **Transformadores especiales.** Los transformadores especiales de aplicación general, son transformadores de distribución de tipo seco que comúnmente se usan con los devanados primarios conectados a los circuitos de distribución de bajo voltaje, para alimentar cargas de alumbrado y pequeñas cargas a voltajes todavía más bajos. Existen transformadores para voltajes del primario de 120, 240, 480 y 600 [V] con potencias nominales comprendidas entre 25 [VA] y 500 [KVA] a 60 [Hz].
- **Transformadores de control, son transformadores de aislamiento de voltaje constante y de tipo seco.** Generalmente se utilizan con los devanados primarios conectados a circuitos de distribución de bajo voltaje de 600 [V] o menos. La elección adecuada de un transformador de control, facilita la alimentación con la potencia correcta a tensión reducida para cargas de alumbrado y de control hasta 250 [VA].
- **Los transformadores para máquinas-herramientas.** éstos, son similares a los transformadores de control con capacidades de hasta 1,500 [VA] para alumbrado localizado y para dispositivos de control de máquinas tales como solenoides, contactores, relés; tanto sobre herramientas prácticas como fijas. Principalmente, se usan para proporcionar salidas de 120 [V] a partir de relés de 240 a 480 [V] a 60 [Hz], también existen para funcionamiento a distintos voltajes con 25 y 50 [Hz].
- **Transformadores de clase 2.** Son transformadores de aislamiento de tipo seco adecuados para usar en los circuitos de clase 2 de “*The National Electric Code*”. Estos transformadores se usan generalmente en control remoto, en alimentación de pequeñas potencias, y en los circuitos de señal para el accionamiento de timbres, campanas, controles de hornos, válvulas, relevadores, solenoides y similares. Son unidades con el primario a 120 [V], tanto del tipo limitador de energía, como el tipo no limitador.
- **Los transformadores para señalización.** Son transformadores de aislamiento, reductores de voltaje constante y de tipo seco; que generalmente, se usan con sus devanados primarios conectados



a circuitos de distribución de baja tensión para alimentar sistemas de señalización no sujetos a las limitaciones de los circuitos de clase 2, existen para circuitos de 120 ó 240 [V], llevan una selección de tensiones de salida de 4, 8, 12, 16, 20 ó 24 [V] conectando adecuadamente las cuatro terminales de salida. Existen unidades de hasta 1000 [VA].

- **Los transformadores para tubos luminiscentes.** Para suministrar energía a anuncios de neón o de otros gases, se fabrican en tamaños que comprenden desde los 50 y hasta los 1,650 [VA]. Las gamas de voltajes en el secundario están comprendidas entre 2,000 y 15,000 [V]; el voltaje depende de la longitud del tubo que forma el circuito; es decir, cuanto mayor sea la longitud del tubo, mayor voltaje se necesita. La corriente suministrada para los transformadores está comprendida entre 18 y 120 [MA].
- **Los transformadores para ignición.** Son transformadores elevadores de tipo seco, de alta reactancia, utilizados para el encendido de los quemadores de gas o de “*fuel-oil*” domésticos. Tales transformadores están limitados a voltajes primarios de 120 ó 240 [V]; los voltajes secundarios están limitados a 15,400 [V] y normalmente, la gama va desde los 6,000 y hasta los 14,000 [V], el rango de corrientes nominales en el devanado secundario va de 20 a 28 [MA], y la de potencia de 140 a 430 [VA].
- **Los transformadores para juguetes.** Son transformadores reductores del tipo secundario de bajo voltaje, cuya finalidad es suministrar corriente a juguetes accionados eléctricamente. Normalmente, son portátiles y, debido a sus usos previstos, se pone una especial atención en su construcción en lo relativo a seguridad y a la eliminación del peligro de incendio; la entrada al devanado primario debe estar limitada por construcción a 660 [W]; incluso cuando el devanado del secundario esté cortocircuitado, condición que debe ser soportada sin crear peligro de incendio. Tales transformadores no están autorizados para voltajes del primario, superiores a 150 [V] y los voltajes del secundario no pueden ser superiores a 30 [V] entre dos terminales de salida cualquiera.
- **Transformadores para ensayos.** Se usan para realizar pruebas de voltaje elevados a bajas frecuencias, han sido desarrollados para voltajes superiores para hacer posible el estudio de aplicaciones de voltajes de transporte cada vez mayores. A menudo se necesitan voltajes de 1,500 000 o más volts. Se han construido unidades para 1,000 [KV] respecto a una tierra física; pero normalmente resulta más económico obtener tales voltajes conectando dos o más unidades en cascada o en cadena. Los transformadores para ensayo (normalmente) están proyectados para aplicaciones de corta duración. Sin embargo, para aplicaciones especiales, puede requerirse una potencia de varios miles de [KVA], y el tiempo de aplicación puede ser continuo.

#### 6.4 Tipos de aislamiento

Los transformadores en general, muestran los datos sobre elevación permisible de temperatura en sus placas de identificación. Los valores normales son de 50°C. Pueden ser mayores dependiendo del tipo

de aislamiento. La temperatura que importa es la del interior del devanado ya que son los puntos más calientes, y es lo que limita la duración del aislamiento, y el criterio se basa en la elevación de la temperatura en el transformador y la temperatura ambiente.

Los diferentes tipos de aislamiento; así como sus limitaciones en temperatura, se pueden encontrar en la tabla 6.1

La temperatura de régimen, es una magnitud de gran importancia ya que mediante dicha temperatura se puede determinar si los materiales aislantes con los que está construido el transformador, va a funcionar correctamente; y es que por este efecto que los aislantes constituidos en gran parte por materiales orgánicos, se carbonizan a una determinada temperatura, perdiendo su cualidad de aislante(s). Igualmente a temperaturas inferiores, sufren deterioro los materiales aislantes, siendo éste tanto más rápido, cuando más elevada sea la temperatura a la que está sometido. Es evidente que al degenerar la función aislante de estos materiales, el transformador (como máquina eléctrica) no trabaje en buenas condiciones y termine averiándose al producirse cortocircuitos.

Entre espiras, se presentan defectos a tierra. Existe una regla aproximada, pero muy ilustrativa, llamada “Regla de Montsingner (devida a V.M. Montsingner, un ingeniero de la General Electric) quien en 1930, tras un estudio exhaustivo de nueve años sobre aislantes de transformadores, proporcionó una fórmula empírica conocida como “la ley de los 10°C”. Lo que significa que: para cada incremento de 10°C de temperatura sobre el máximo recomendado, la vida del aislante se reduce a la mitad e inversamente; una disminución de 10°C dobla su vida útil.

Debido a lo anteriormente expuesto, se han establecido normas que especifiquen aquellas temperaturas máximas que no se deban sobrepasar en los devanados, y en las diferentes partes de una misma máquina eléctrica o transformador. A continuación, se describen las características de los aislantes establecidos en la tabla 6.1.

- **Aislamiento clase A:** Son aislamientos constituidos por materiales fibrosos a base de celulosa o seda; impregnados con líquidos aislantes; la temperatura máxima, que en ningún caso debe sobrepasarse en este tipo de aislantes, es de 105°C.
- **Aislamiento clase B:** Son aislamientos formados por materiales a base de poliéster y polímeros aglutinados con materiales orgánicos o impregnados en éstos; la temperatura máxima, que en ningún caso debe sobrepasarse en este tipo de aislantes, es de 120°C.
- **Aislamiento clase E:** Son aislamientos a base de fibras orgánicas sintéticas; la temperatura máxima que en ningún caso debe sobrepasarse en este tipo de aislantes es de 120°C.
- **Aislamiento clase F:** Son aislamientos formados por materiales a base de fibra de mica, amianto y fibra de vidrio aglutinados con materiales sintéticos como siliconas, poliésteres o epoxidos; la temperatura máxima que en ningún caso debe sobrepasarse en este tipo de aislantes, es de 155°C.
- **Aislamiento clase H:** Son aislamientos formados por materiales a base de mica, amianto o fibra de vidrio aglutinados con siliconas de alta estabilidad térmica; la temperatura máxima que en ningún caso debe sobrepasarse en este tipo de aislamiento, es de 180°C.

- **Aislamiento clase 200:** Son aislamientos formados por materiales a base de mica, vidrio, cerámica, etcétera. La temperatura máxima que en ningún caso debe sobrepasarse en este tipo de aislantes, es de 200°C.
- **Aislamiento clase 220:** Son aislamientos formados por materiales a base de mica, vidrio, cerámica, etcétera. Polímidas tipo kapton; la temperatura máxima que en ningún caso debe sobrepasarse en este tipo de aislantes, es de 220°C.
- **Aislamiento clase 250:** Son aislamientos formados por materiales a base de mica, vidrio, cerámica, etcétera. Polímidas tipo kapton; la temperatura máxima que en ningún caso debe sobrepasarse en este tipo de aislantes es de 250°C.

La temperatura ambiente del fluido refrigerante se toma como 40°C para menos de 1000 [m] de altitud (a grandes alturas, la ecuación del calor del transformador disminuye por ser menor la densidad del aire). En consecuencia, los calentamientos (elevación de temperatura respecto de la ambiente) admisibles para los aislantes anteriores serán:

- Clase A: 65°C
- Clase B: 90°C
- Clase E: 80°C
- Clase F: 115°C
- Clase H: 140°C
- Clase 200: 160°C
- Clase 220: 180°C
- Clase 250: 210°C

Finalmente; los transformadores de potencia deben ser diseñados, construidos y probados para soportar los esfuerzos mecánicos y térmicos producidos durante cortocircuitos externos para cualquier tipo de falla, de acuerdo a la norma NMX-J.284.1998.ANCE:

- a) Duración de la corriente de cortocircuito. El transformador de potencia debe ser diseñado para soportar corrientes de cortocircuito durante un tiempo máximo de dos segundos, sin exceder en los conductores de cobre, una temperatura de 250°C. Se debe considerar que la aplicación del cortocircuito se presenta cuando el transformador está a plena carga; esto es, a una elevación de temperatura máxima nominal parecido al cortocircuito.
- b) Los devanados de un transformador de potencia, deben soportar las pruebas dieléctricas establecidas en la norma NMX-J.284.1998.ANCE., para el nivel de aislamiento asignado a cada devanado; así como los requerimientos de cortocircuito y elevación de temperatura indicados en esta norma.

- c) El diseño y construcción de los conductores, aislamiento y blindajes debe ser tal que no exceda el nivel de descargas parciales, no sólo en los voltajes de operación, sino también durante las pruebas dieléctricas indicadas en esta norma.

### 6.5 Curvas teóricas de calentamiento y refrigeración

El calentamiento es la energía perdida en un transformador eléctrico durante el proceso de transformación se convierte en la energía absorbida que no puede ser transformada.

Se puede realizar en estudio generalizado del calentamiento de un transformador suponiendo que es un cuerpo homogéneo e isótropo ideal, en el que se produce una cantidad de calor  $Q$  (medida en Joules), que depende de la potencia perdida en el transformador, y se representa como  $Pp$  (potencia perdida), de tal modo que en una diferencial del tiempo  $dt$  se tiene gran energía calorífica:

$$\text{calor} = dQ = Ppdt$$

Esta energía calorífica provoca una elevación de temperatura de la máquina eléctrica (transformador) respecto a la temperatura ambiente. Si se denomina  $\theta_t$  a la temperatura que adquiere la máquina y  $\theta_a$  la de temperatura ambiente, se denomina sobreelevación de temperatura  $\theta$ :

$$\theta = \theta_t - \theta_a$$

Por otro lado, si  $M$  es la masa total de la máquina eléctrica (transformador),  $C$  su calor específico y  $d\theta$  el incremento de temperatura producido en la máquina eléctrica en una  $dt$ , el valor almacenado por el transformador y que eleva su temperatura tiene *vn* valor :

$$dQ_1 = MC_e d\theta$$

Por otra parte, existe un calor emitido por la superficie exterior del transformador  $S$ , si depende del coeficiente de emisividad  $K$  del material de la sobre elevación de temperatura  $d\theta$  y de la diferencial del tiempo  $dt$  de acuerdo con la siguiente expresión:

$$dQ_2 = KS\theta dt$$

De este modo, la ecuación diferencial de calentamiento del transformador viene dada por:

$$Ppdt = MC_e d\theta + KS\theta dt$$

Cuando se alcanza un estado de equilibrio o de régimen, la sobreelevación de temperatura alcanza su valor final  $\theta_{máx}$  y no existe variación de la temperatura del cuerpo y todo el calor producido debido a

las pérdidas en la máquina eléctrica o transformador, se emite por la superficie externa, lo que equivale a decir que la ecuación anterior se convierte en:

$$Ppdt = KS\theta_{m\acute{a}x}dt$$

de donde se deduce la sobreelevación máxima de la temperatura que alcanza la máquina eléctrica o transformador, se calcula como:

$$\theta_{m\acute{a}x} = \frac{Pp}{KS}$$

Si ahora, en la ecuación anterior se divide cada término por  $KS$ , se obtiene lo siguiente:

$$\frac{Pp}{KS}dt = \frac{MC_e}{KS}d\theta + \theta dt$$

Denominado constante de tiempo térmico  $T$  al cociente:

$$T = \frac{MC_e}{KS}$$

Entonces, sustituyendo se tiene:

$$\theta_{m\acute{a}x}dt = Td\theta + \theta dt$$

Es decir:

$$T = \frac{d\theta}{\theta_{m\acute{a}x} - \theta}$$

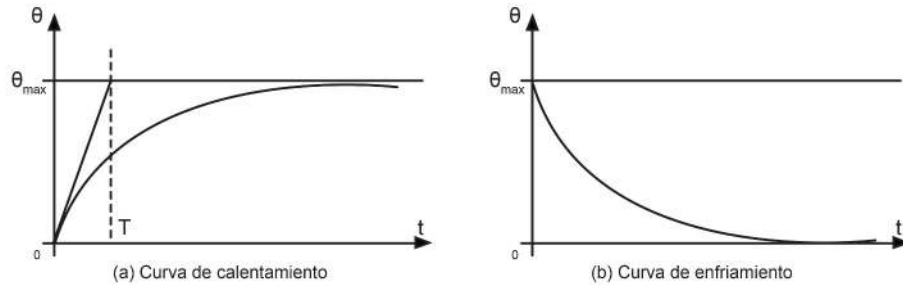
Ecuación diferencial que al integrar da como resultado:

$$\theta = \theta_{m\acute{a}x}(1 - e^{-t/T})$$

En la figura 6.1(a) se representa la ecuación anterior. Dicha gráfica muestra la evolución de la sobreelevación de temperatura con el tiempo. Obsérvese en esta figura, que la constante del tiempo  $T$ , es el tiempo necesario para llevar al transformador hasta la temperatura máxima sino se enfría; es decir, si todo el calor provocado por las pérdidas se invirtiera en incrementar la temperatura. Para comprobarlo, se puede escribir:

$$T = \frac{MC_e}{KS} = \frac{MC_e\theta_{m\acute{a}x}}{Pp}$$

El valor de la constante del tiempo térmica  $T$ ; varía entre treinta minutos para los transformadores más pequeños, hasta dos o tres horas para los transformadores de gran potencia.



**Figura 6.1** Curvas de calentamiento y de enfriamiento en un transformador.

Finalmente, cuando un transformador está trabajando a una cierta temperatura  $T$  mayor que la temperatura ambiente, y se desconecta (o se deja en vacío), su temperatura comenzará a descender el equilibrio térmico con el ambiente. La evolución que sigue la temperatura a lo largo del tiempo se llama “curva de enfriamiento”.

Por lo que la ecuación anterior se convierte en:

$$0 = MC_e d\theta + KS\theta dt$$

Que también puede reescribirse como:

$$0 = Td\theta + \theta dt \text{ entonces } \frac{d\theta}{\theta}$$

De donde se deduce:

$$\theta = \theta_{máx} e^{-t/T}$$

Donde se ha tenido en cuenta que para  $t = 0$ , se cumple  $\theta = \theta_{máx}$ . La ecuación anterior define la curva del transformador, y se ha representado en la gráfica de la fig. 6.1 (b) cuando el transformador trabaja en régimen intermitente y se producen alternativamente periodos de calentamiento y enfriamiento sucesivos.

## 6.6 Tipos de refrigeración en los transformadores de potencia

Debido a que los transformadores son máquinas, la forma de refrigeración tiene que hacerse por la intervención de elementos ajenos al propio transformador. Es habitual dotar al transformador de sistemas de refrigeración basados en bombas de aceite y ventiladores de aire, pero manteniendo una determinada capacidad de transformación cuando falla alguno de ellos.

A continuación, se especifican los diferentes tipos de refrigeración en los transformadores de potencia

(ver la tabla 6.2). Finalmente, los equipos de refrigeración recogen el aceite caliente de la parte alta del contenedor (mayor temperatura), y lo retornan a la parte baja del tanque (menor temperatura). La gestión de la refrigeración puede ser vista como dos circuitos térmicos independientes del aceite:

- Un circuito interno que transfiere las pérdidas de energía que se producen en la superficie menor de los arrollamientos hacia el aceite.
- Un circuito que evacúa esa energía desde el aceite hacia el exterior a través del tanque, y éste a su vez, hacia el exterior a través del aire.

Como en cualquier sistema de evacuación de calor, se puede utilizar la convección natural de los medios refrigerantes, o la convección forzada. En este sentido es muy útil poder forzar tanto la circulación del aceite refrigerante en el circuito interno a través de bombas, y la circulación del aire en el circuito externo a través de ventiladores, de esta manera, se puede evacuar más energía en menos tiempo, y por lo tanto, llevar el transformador a puntos de trabajo de menor sobrecarga.

El sistema de refrigeración tiene una influencia directa de la capacidad de sobrecarga del transformador, ya que dependiendo del tipo de refrigeración, se puede tener una temperatura menor en el punto más caliente del arrollamiento, por lo tanto, disponer de más maniobra en la capacidad de sobrecarga.

A pesar de que en un transformador de potencia, se producen tres modos de transferencia de calor: Conducción, convección y radiación (es la convección el modo de transferencia de calor, el que tiene más importancia en la evacuación de calor al exterior). El aceite siendo un líquido, posee una importante propiedad mecánica; y es que su volumen varía con la presión y la temperatura. Los cambios de volumen con la temperatura, suministran las principales convecciones internas de refrigeración en el transformador. Los cambios de volumen por presión, efectúan la calidad de vibraciones transferidas, desde el núcleo, al tanque. La disipación de calor desde el núcleo hasta los arrollamientos es debida principalmente a la convección. (cuando una superficie calentada es sumergida en un fluido, el calor fluye de la superficie al medio refrigerante. Debido al incremento de temperatura del fluido, su densidad específica se reduce.

El fluido (aceite) en transformadores refrigerados por aceite, se eleva y se transfiere su calor, hacia el ambiente exterior a través del tanque y los radiadores.

El aceite que se eleva dentro del contenedor, es reemplazado por el aceite frío interior; y de esta manera, se produce la circulación del aceite de forma natural en el interior del tanque del transformador. La ecuación que expresa la cantidad de calor transferido es la siguiente:

$$Q = h_x A_x (T_{superficie} - T_{fluido}) [W]$$

en donde: Q, es el calor transferido en [W]; H, es el coeficiente de transferencia de calor en  $[\frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}]$ ; A, es el área de la superficie en contacto con el fluido,  $[m^2]$ .

El calor del tanque del transformador al ambiente, ocurre de manera similar sólo en el aire que se renueva cercano a las superficie caliente exterior del tanque es renovado por nuevo aire fresco.

### 6.7 Elevación de temperatura debido a cortocircuitos: esfuerzos mecánicos

Dentro del dimensionamiento de protecciones, conductores o juegos de barras de una red eléctrica interior, uno de los parámetros de importancia a determinar, es el nivel de la corriente de cortocircuito que se estaría presentando en distintos puntos de sistema.

La corriente de cortocircuito calculada dentro del diseño de un sistema eléctrico que contiene un transformador de potencia, define el mínimo valor de capacidad de ruptura que deben tener los elementos involucrados en la falla de cortocircuito para que sean capaces de soportar el cortocircuito, y en el caso de las protecciones termomagnéticas y fusibles, también despejarlos. Recuérdese que un cortocircuito es la desaparición intempestiva del aislamiento de dos conductores de voltaje diferente alimentados de la misma fuente, sin la interposición de una impedancia conveniente.

La temperatura de un transformador se lee por medio de termómetros de mercurio, y en algunos casos, por medio de termopares colocados en los devanados que alimentan a milivóltmetros calibrados en  $[C^{\circ}]$ . Existen varios métodos para controlar la temperatura, sin embargo, los dos más actualizados son:

- El método de imágenes térmicas. Se basa en que cualquier sobrecarga o cortocircuito dentro del transformador se manifiesta como una variación de corriente. El dispositivo está constituido por una resistencia de calefacción o caldeo; alrededor se encuentra una bobina cuya función es recibir la corriente de falla en los devanados, que se detecta por medio de un transformador de corriente. La corriente que circula por la bobina, al variar, crea una cierta temperatura en la resistencia, y esto se indica en un milivóltmetro graduado en  $[^{\circ}C]$ . el milivóltmetro se conecta por medio de un puntero que consiste de 3 micro-switch: El primero opera a una temperatura límite y acciona una alarma; el segundo lo hace a una temperatura límite y acciona la bobina de disparo del interruptor, quedando el transformador fuera de servicio.
- El relevador Buchholz. éste sirve para controlar la temperatura del transformador. Se utiliza en los transformadores de potencia que usan tanques conservadores, su principio de operación se basa en que toda falla interna del transformador va acompañada de una producción de gases.

El relevador Buchholz se conecta en el tubo que va del transformador al tanque conservador, de manera que los gases producidos en aquél, hagan que el aceite del tubo suba de nivel. Al variar el nivel, los gases se mueven, y los flotadores que tiene en su interior el revelador al moverse, accionan un circuito de alarma, y si este falla, o el desperfecto es mayor, accionan el disparo y el transformador de potencia sale de operación.

La presión en el transformador de potencia se controla normalmente por medio de manómetros que tienen accionamiento automático. El nivel de aceite se controla mediante indicadores de nivel, que así mismo, pueden tener accionamiento automático. La rigidez dieléctrica del aceite se controla tomando muestras periódicamente del aceite del transformador por medio de la válvula de muestra, que se encuentra colocada por lo general en la parte inferior del transformador. Los transformadores de potencia deberán ser diseñados y construidos para soportar los esfuerzos dinámicos y térmicos producidos por



cortocircuitos externos a la tierra o entre fases, en uno o más bornes del terminal de baja tensión estando éstos en su voltaje normal y al 100% de la carga, bajo las siguientes condiciones:

- La duración del cortocircuito para propósitos de cálculo térmico estará determinada por la siguiente ecuación:

$$t = \frac{1250}{(I_{sym})^2}$$

donde  $t \rightarrow$  duración de cortocircuito en segundos

$I_{sym} \rightarrow$  corriente simétrica de cortocircuito en valor por unidad, (p.u)

- Los transformadores deben soportar los esfuerzos dinámicos producidos por los valores de las corrientes de cortocircuito especificados en la tabla anterior, durante un tiempo de 0.25 [seg].

La temperatura máxima admisible de los arrollamientos bajo condiciones de cortocircuito, no debe exceder de  $150[^\circ C]$  para devanados de cobre, y  $200[^\circ C]$  para devanados de aluminio. La corriente simétrica de cortocircuito deberá ser la corriente permitida por la impedancia del transformador, cuando la magnitud máxima de la corriente simétrica exceda los valores limitados como máximos; éstos serán adoptados como límites máximos para efecto del cálculo térmico.

En cuanto a los esfuerzos mecánicos, un transformador de potencia durante su vida útil, se encuentra sujeto a un estado de carga destructivo ocasionando por los cortocircuitos. Entre las principales anomalías mecánicas registradas durante las pruebas de cortocircuito, están los desplazamientos axial y radial de los devanados, y el movimiento del núcleo. A nivel eléctrico, las anomalías más comunes son las variaciones en la impedancia y en la corriente de magnetización.

En términos generales, el fenómeno mecánico del movimiento de los devanados bajo un determinado estado de carga, es producto de la interacción entre el papel aislante (que ha sido considerado compresible), con el cobre, cuyo módulo de elasticidad lo hace prácticamente incompresible bajo estos estados de carga. Para describir tal comportamiento, es necesario indicar inicialmente la característica que se ha adoptado para el papel aislante, y que es la siguiente: El papel aislante inicialmente se enrolla alrededor del fleje de cobre; posteriormente, cuando la bobina ha sido conformada, ésta se somete a un tratamiento térmico con el objetivo de que el papel aislante se adhiera al cobre ya que éste se encuentra conformado por una matriz epóxica con incrustaciones de material termofundante, pueden observarse las siguientes características al utilizarse el papel aislante:

- La fuerza de fricción generada por la resistencia del desgarre del papel aislante cuando se adhiere al cobre es despreciable, en comparación con las fuerzas a las que es sometido el cobre por efecto de campo magnético.
- El papel aislante no ofrece resistencia a la tensión. El papel aislante actúa como un sistema resorte-amortiguador, donde presenta una resistencia importante a la compresión en la dirección de las

fuerzas radiales. Para la correcta simulación del efecto, se debe obtener la curva compresión-presión procedente del ensayo mecánico.

- El transformador en el interior del tanque está sumergido en aceite con propiedades dieléctricas y para fines de refrigeración. El papel aislante absorbe parte de ese aceite, lo cual varía de comportamiento de la curva compresión-presión.
- Que asume que durante el proceso de fabricación del devanado y posterior ensamble con el núcleo, no varía el espesor del papel aislante; sino que su valor es idéntico al entregado en los datos técnicos del transformador. En el modelo físico real, el papel aislante considerado compresible; mientras que el cobre es considerado incompresible por comparación de resistencia de la compresión.

De acuerdo a los puntos anteriores, surge una pregunta importante: ¿Cuál es el papel aislante ( en la practica) se ha registrado un modulo de contacto en un rango que podría denominarse de compresibilidad y otro de incompresibilidad similar al de cobre.

Con esto, básicamente lo que se ha hecho es permitirle al papel aislante comprimirse hasta cierto punto después de lo cual el material deja de comprimirse fácilmente y para hacerlo, las fuerzas que están en juego, deben ser mucho mayores. El fenómeno mecánico puede ser descrito de manera global como una compresión progresiva entre cada una de las capas. Por ahora, cabe resaltar un fenómeno apreciado en el devanado de alta y de baja tensión correspondiente al caso de TAP nominal (el cual se refiere a la separación de las capas exteriores por efecto del impacto con el núcleo). Sin embargo, su estado de compresión, regresa dichas capas exteriores a su posición en el conjunto cobre aislante. Finalmente, se puede llegar a las siguientes conclusiones:

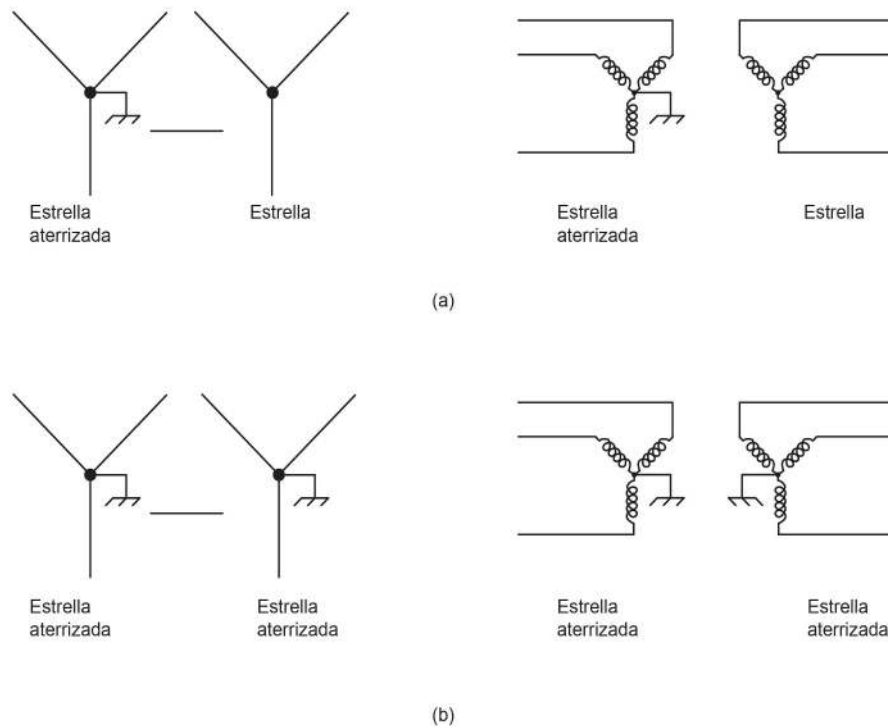
- El problema real del estado de esfuerzos en el transformador por efecto del cortocircuito, es un problema de carácter lineal dinámico. Varios de sus componentes mecánicos presentan un comportamiento no lineal, y no es correcto, si se desea aproximarse a la situación real de ejecutar modelos en el tango del análisis lineal estático.
- El proceso de fabricación ejerce influencia en la aptitud del transformador para soportar los esfuerzos de cortocircuito. Por ser un proceso de ensamble manual, se puede presentar alguna diferencia en las alturas eléctricas (excentricidades) aumentando de esta manera, las fuerzas auxiliares en los devanados. Los grandes desplazamientos que se presentan, y tanto la configuración geométrica como la mecánica, imposibilitan el uso de transductores con el fin de ejecutar mediciones en la parte activa del transformador, experimentalmente lo más importante, es evaluar cualitativamente el movimiento del transformador; para poder comparar este movimiento con el de los modelos, y es en éstos donde se evalúan cuantitativamente los desplazamientos y esfuerzos del transformador; por esta razón, un adecuado procedimiento de medición, es la ubicación de marcas.
- Es necesario ejecutar modelos con más detalles, tomando en cuenta las chapas del núcleo y las fuerzas de fricción entre los elementos actuales a nivel tridimensional.

- El papel aislante y el papel corrugado, son dos de los elementos de la configuración mecánica más relevantes en la construcción del sistema dinámico durante la prueba de cortocircuito, ya que son estos elementos los que se comparten como piezas amortiguantes, pero presentan un comportamiento no lineal en una curva análoga a la curva de esfuerzo-deformación.
- Las fallas más comunes, ocurren por desplazamiento axiales y radiales del devanado y por movimiento del núcleo ocasionando una variación del cortocircuito magnético y su respectiva falla a nivel eléctrico.
- Bajo carga normal, los esfuerzos mecánicos a que se halla sometido un transformador de potencia, son poco mayores que los debidos a los pesos de sus distintas partes. En cambio, en condiciones de cortocircuito, los esfuerzos electromagnéticos pueden hacerse enormes, ya que son proporcionales a los cuadrados de las intensidades de las corrientes que circulan por los devanados. Si se mantiene aplicada al primario de un transformador ordinario de un sistema de potencia, la tensión de funcionamiento normal estando en cortocircuito el devanado secundario, las intensidades de las corrientes, suelen ser entre 10 y 25 veces mayores que las corrientes a plena carga. Las corrientes transitorias pueden ser todavía mayores. En transformadores de potencia muy grandes, las fuerzas de cortocircuito que tienden a separarse el devanado primario y el devanado secundario, pueden ser de hasta 700 000 [Kg].

## 6.8 Conexiones de bancos de transformadores monofásicos y trifásicos

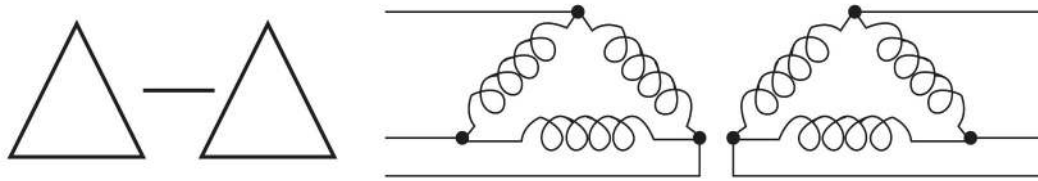
Para formar un banco trifásico de transformadores, es factible hacerlo, conectando tres transformadores monofásicos en cuatro configuraciones principales:

- Conexión estrella- estrella (Y-Y). Esta conexión da un servicio satisfactorio, si la carga trifásica está balanceada, si la carga esta desbalanceada, el neutro eléctrico tiende a ser desplazado del punto central haciendo diferentes los voltajes de línea a neutro; esta desventaja puede ser eliminada conectando a tierra el neutro. La ventaja de este sistema de conexiones, es que el aislamiento soporta únicamente el voltaje de línea a tierra, que es 58 % del voltaje entre líneas. La fig. 6.2 (a y b) muestra las dos posibles formas de conectar el arreglo Y-Y.



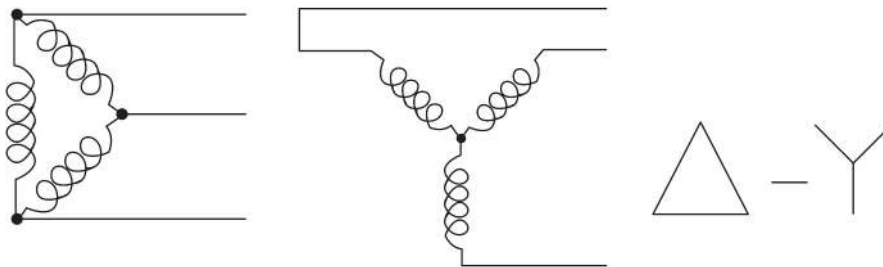
**Figura 6.2** (a) y (b). Conexión estrella /aterrizada / estrella y una conexión estrella aterrizada / estrella aterrizada.

- Conexión delta-delta, ( $\Delta - \Delta$ ). Este arreglo es usado generalmente en sistemas donde los voltajes no son altos y cuando la continuidad del servicio debe ser mantenida, aun así, si uno de los transformadores falla y si dicha falla ocurre, los transformadores pueden continuar operando en la conexión delta abierta, también llamada “conexión V”. Con esta conexión, no se presentan problemas con cargas desbalanceadas, pues prácticamente, los voltajes permanecen iguales independientemente del grado de desbalance de la carga. Finalmente, esta conexión tiene la ventaja de que cuando es necesario dar mantenimiento o reparar uno de los transformadores, se puede desconectar, mientras que los dos restantes pueden continuar trabajando como banco trifásico con una capacidad reducida al 58 % de la capacidad del banco original conectado en forma de delta abierta. La fig. 6.3 muestra la conexión.



**Figura 6.3** Conexión  $\Delta - \Delta$  en transformadores de potencia.

- Conexión ( $\Delta - Y$ ) delta-estrella. Esta conexión se emplea usualmente, para elevar el voltaje, como por ejemplo al principio de un sistema de transmisión de alta tensión, en el lado de alta tensión, el aislamiento trabaja a solamente el 58 % del voltaje de línea a línea; otra de sus ventajas es que el punto neutro es estable y no flota cuando la carga es desbalanceada. Esta conexión también es muy usada cuando los transformadores deben suministrar carga trifásica, en estos casos, la conexión proporciona un cuarto hilo conectado al neutro. La fig. 6.4 Muestra esta conexión ( $\Delta - Y$ ).



**Figura 6.4** Conexión  $\Delta - Y$  en transformadores de potencia.

Preferentemente, las conexiones en transformadores trifásicos de dos devanados son delta ( $\Delta$ ) en el primario y estrella ( $Y$ ) en el secundario; el secundario en estrella, con neutro a través de la boquilla, proporciona un punto conveniente para establecer una tierra física en el sistema; el primario conectado en delta ( $\Delta$ ) aísla los dos sistemas en cuanto al flujo de corriente de secuencia cero, que resulta de fallas a tierra en el secundario.

Finalmente, también se puede construir un banco trifásico de transformadores que tengan los seis devanados en un núcleo común con varias columnas y en un mismo contenedor. Las ventajas de los transformadores trifásicos son su menor costo, peso, espacio y mayor eficiencia. Para hacer cálculos en estos circuitos bajo condiciones balanceadas, se puede hacer un análisis en una sola de sus fases, y tomando los resultados para las otras dos, a excepción de los defasamientos asociados con un sistema trifásico.

## 6.9 Cálculo de pérdidas y su optimización

Una máquina eléctrica como el transformador, presenta pérdidas fijas y pérdidas variables. Las pérdidas fijas se componen de las pérdidas mecánicas que no existen en el transformador, y de las pérdidas en el hierro. Las pérdidas variables (que cambian según sea el régimen de carga) son debidas a las pérdidas en el cobre. Debe dejarse claro que los ensayos de un transformador representan las diversas pruebas que deben prepararse para verificar el comportamiento de la máquina. En la pérdida, resulta difícil la realización de ensayos reales directos por dos motivos principales:

- La gran cantidad de energía que ha de disponerse en tales pruebas.
- Es prácticamente imposible disponer de cargas lo suficientemente elevadas (sobre todo cuando la potencia del transformador es relativamente grande), para hacer un ensayo en situaciones reales.

Ahora bien, el comportamiento de un transformador bajo cualquier condición de trabajo, puede producirse con suficiente exactitud si se conocen los parámetros del circuito equivalente. Tanto el fabricante como el usuario del transformador necesitan de los datos del diseño o del proyecto. Felizmente los elementos que intervienen en el circuito equivalente aproximado se pueden obtener con unos ensayos muy simples relativamente, que tienen además la ventaja de requerir muy poco consumo de energía (la suficiente para suministrar únicamente las pérdidas de la máquina), de ahí que sean pruebas sin carga real. Los dos ensayos fundamentales que se utilizan en la práctica, para la determinación de los parámetros del circuito equivalente de un transformador son:

- Ensayo de vacío. Consiste en una prueba que aplica al primario del transformador el voltaje asignado, estando el secundario en circuito abierto. Al mismo tiempo debe medirse la potencia adsorbida  $P_o$ , la corriente de vacío  $I_o$  y el voltaje secundario.
- Ensayo de cortocircuito. Se cortocircuita el devanado secundario, y se aplica al primario un voltaje que se va elevando gradualmente desde cero, hasta que circule la corriente asignada de plena carga por los devanados. En la práctica, este ensayo se realiza alimentando el transformador por el lado de alta tensión, de esta forma, la corriente a medir en el primario será de un valor razonable. Al mismo tiempo, la tensión de alimentación sólo será una pequeña parte de la nominal, estando comprendida dentro de las escalas de los instrumentos de medidas usuales.

Por lo que la potencia perdida en el cobre en cualquier régimen de carga se expresa como:

$$P_{cu} = R_{cc} I_2^2 = C^2 P_{cc}$$

Y, como en cualquier máquina eléctrica, el rendimiento ( $\eta$ ) es el cociente entre la potencia útil o potencia secundaria; y la potencia total o potencia de entrada en el devanado primario, es decir:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}$$

En donde  $P_p$  representa la potencia perdida. Si el devanado secundario suministra una corriente  $I_2$  a la tensión  $V_2$  con un factor de potencia  $\cos(\varphi_2)$  se tendrá:

$$P_2 = V_2 I_2 \cos(\varphi_2) = CV_2 I_{2n} \cos(\varphi_2); P_p = P_{Fe} + P_{eu} = P_o + c^2 P_{cc}$$

Finalmente; el rendimiento del transformador resulta ser:

$$\eta = \frac{CV_2 I_{2n} \cos(\varphi_2)}{CV_2 I_{2n} \cos(\varphi_2) + P_o + c^2 P_{cc}}$$

Donde el producto  $V_2 I_{2n}$  representa la potencia asignada del transformador en [KVA].

Se observa que el rendimiento empeora cuanto menor es el factor de potencia de la carga, y cuanto menor es el índice de carga. El rendimiento es máximo para una determinada carga para la cual coinciden las pérdidas fijas y las variables; es decir, cuando se cumple:

$$P_o = C_{opt}^2 P_{cc}$$

Resulta un índice de carga óptimo, al cual se obtiene el rendimiento máximo dado por:

$$C_{opt} = \sqrt{\frac{P_o}{P_{cc}}}$$

Ahora, si el transformador trabajara siempre a plena carga, convendría que el índice anterior fuera igual a la unidad, de este modo la máquina trabajaría con un máximo rendimiento; sin embargo, lo normal es que un transformador trabaje con cargas variables, y esto hace que en la práctica se diseñen estas máquinas con un índice de carga comprendido entre 0.5 y 0.7 para los grandes transformadores de las centrales eléctricas generadoras, y entre 0.3 y 0.5 para los transformadores de distribución de pequeña potencia. En la práctica, los transformadores normalmente no trabajan a una carga fija, por lo que la carga que se debe elegir para calcular la eficiencia máxima, es la media cuadrática de las cargas normales a las que se trabajará.

### 6.10 Normas de diseño, pruebas, y puesta en servicio

Las normas hacen parte del grupo de materiales utilizados en la fabricación de los transformadores de potencia, y tiene como propósito fundamental, determinar todas las características que deberán tener los materiales, herrajes, accesorios, etcétera; que se usen e instalen en el sistema de generación y de distribución de energía eléctrica, en algún lugar específico.

Existen normas específicas para transformadores monofásicos y trifásicos, como se establece a contin-

uación:

- Transformadores monofasicos: De tipo seco con potencias comprendidas entre 10 [VA] y 31.5 [KVA] fabricadas bajo las normas IEC/EN61558 (para transformadores de seguridad, de separación, de mando y de aislamiento), IEC/EN60076 (transformadores de potencia), UNE20615 (transformadores de uso médico) dimensionados para trabajar al 100 % de la potencia asignada en ambientes de hasta 40°C.
- Transformadores trifásicos de tipo seco con potencias comprendidas entre 100 [VA] y 100 [KVA] fabricados según las normas IEC/EN61558 (transformadores de seguridad, de separación, de mando, de aislamiento o de uso medico), IEC/EN60076 (transformadores de potencia), VNE20615 (transformadores de uso médico); dimensionados para trabajar al 100 % de potencia asignada en ambientes de hasta 40°C.

En general, dentro del paquete de normas de la IEC (Internacional Electrotechnical Comission), que es la norma IEC/ICS29 sobre ingeniería eléctrica, y que abarca: máquinas rotatorias, transformadores, reactores, etc.), se establecen las siguientes normas específicas:

- IEC60028, ed. 2.0, b; 1925, se refiere al estándar internacional sobre la resistencia (pérdidas) en el cobre.
- IEC60034-1,ed. 12.0,b 2010, se refiere a máquinas rotatorias eléctricas en su parte 1: Velocidad y rendimiento.
- IEC60034-11, ed. 2.0, b: 2004, se refiere a máquinas rotatorias eléctricas. Parte 11: Protección térmica.
- IEC 60034-12, emd.1 ed. 20, b: 2007, es un adendum que se refiere a máquinas rotatorias eléctricas. Parte 12: Arranque y control de velocidad en motores de inducción trifásicos.
- IEC 60076-1, ed. 3.0, b:2011, se refiere a los transformadores de potencia en su parte 1: Generalidades.
- IEC 60076-10, ed. 1.0, b:2001, se refiere a los transformadores de potencia es su parte 10: Determinación del nivel de sonido (ruido)
- IEC 60076-11. ed. 1.0, b: 2004, se refiere a los transformadores de potencia en su parte 11: Transformadores de tipo seco.
- IEC 60076-13, ed. 1.0, b: 2006, se refiere a transformadores sumergidos en líquido (aceite).
- IEC 60076-15, ed. 1.0, b: 2008, se refiere a transformadores sumergidos en gas.
- IEC 60076-16, ed. 1.0, b: 2011, se refiere a transformadores con aplicaciones de turbinas de aire.
- IEC 60076-18, ed. 1.0, b: 2012, se refiere a transformadores de potencia en su parte 18: Medición de la frecuencia de respuesta.



- IEC 60076-2, ed. 3.0, b: 2011, se refiere a transformadores de potencia en su parte 2: Elevación de temperatura para transformadores sumergidos en líquidos.
- IEC 60076-21, ed. 1.0, b: 2011, se refiere a los transformadores de potencia en su parte 21: Requerimientos, terminología y pruebas para reguladores de voltaje.
- IEC 60076-3, ed. 2.0, b: 2000, se refiere a los transformadores de potencia en su parte 3: Niveles de aislamiento, pruebas dieléctricas y limpieza del aire de enfriamiento.
- IEC 60076-4, ed. 1.0, b: 2002, se refiere a los transformadores de potencia en su parte 4: Guía para el uso de apartarrayos en los transformadores de potencia y en reactores de prueba.
- IEC 60076-5, ed. 3.0, b: 2006, se refiere a los transformadores de potencia en su parte 5: Capacidad de resistencia al cortocircuito.
- IEC 60076-7, ed. 1.0, b: 2005, se refiere a los transformadores de potencia en su parte 7: Guía de carga para transformadores de potencia, sumergidos en aceite.
- IEC 60076-8, ed. 1.0, b: 1997, se refiere a los transformadores de potencia en su parte 8: Guía de aplicaciones.
- IEC 60076-SER, ed. 1.0, b: 2012, se refiere a los transformadores de potencia en todas sus partes.

Ahora, desde el punto de vista práctico en un transformador de potencia, se puede establecer como ejemplo el siguiente caso: La carcasa utilizada en estos transformadores debe ser resistente a los rayos solares y no debe presentar agrietamientos ni fisuras durante la instalación y la operación. Dicha carcasa debe ser aislante y protectora térmica, mecánica y hermética (no debe permitir bajo ninguna circunstancia, el ingreso de humedad). El núcleo debe construirse de chapa magnética de gran permeabilidad y de saturación rápida para tener la clase de precisión elevada, y un factor de seguridad de acuerdo con lo establecido en la Norma IEC60044, o su equivalente, la norma ANSI/IEEE C57.13. La lámina utilizada para el núcleo debe ser recocida; el alambre esmaltado de 2 capas utilizado para los devanados debe cumplir con lo establecido en la Norma NEMA MW 1,000; y debe estar uniformemente repartido dicho alambre en el núcleo, para reducir al mínimo el flujo de dispersión. El transformador debe ser resistente al aceite, al alcohol y a los ácidos. Los bornes (terminales) y el bloqueo terminal de conexión secundario debe ser seguro a las vibraciones, resistentes a la corrosión, deben evitar cualquier contacto accidental o no deseado, y deben permitir colocar en cortocircuito la parte secundaria estando en servicio el transformador de potencia de tal manera que permita cambiar o realizar trabajos en el medidor; por lo anterior, las terminales secundarias deben ser dobles, adicionalmente deberán estar marcados dichos bornes, en forma clara, y de acuerdo con el diagrama de conexión. La placa de datos característicos del transformador de potencia debe incluir los siguientes datos:

- Nombre del fabricante o su referencia.
- Número de serie.
- Arrollamientos primarios y secundarios.

- Precisión.
- Frecuencia nominal.
- Relación de transferencia nominal (en alto o bajo relieve).
- Marcación del terminal y polaridad.
- Corriente térmica.
- Carga nominal.

En cuanto a las pruebas, éstas se realizarán de acuerdo a lo expresado en las normas IEC-60044 y ANSI/IEEE C57.13. A los transformadores de potencia, se les debe realizar las siguientes pruebas individualmente, en relación a las normas citadas con antelación:

- Verificación de las marcas de los bloques de conexión.
- Ensayos a frecuencia industrial de los devanados primario y secundario.
- Sobre tensión entre espiras.
- Ensayos sobre precisión.
- Prueba (s) de polaridad.
- Ensayo de voltaje inducido.

## 6.11 Problemas resueltos

**Problema 6.1** Se conecta un transformador trifásico reductor a una línea de 20 [KV] y absorbe 20 (A). Si la relación de espiras por fase es igual a 100.

Calcular el voltaje compuesto a la corriente de línea en el devanado secundario del transformador para las siguientes conexiones:

- a) Estrella-Estrella (Y-Y)
- b) Triángulo-Triángulo ( $\Delta - \Delta$ )
- c) Estrella-Triángulo (Y- $\Delta$ )
- d) Triángulo-Estrella ( $\Delta - Y$ )

Nota: Se desprecian las pérdidas del transformador.

### SOLUCIÓN:

La potencia del transformador es en todos los casos igual a:

$$S = (\sqrt{3})(V)(I) = (1.732)(20,000)(20) = 692,800 \text{ [VA]}$$

En las diferentes conexiones se tiene:

a) Estrella-Estrella, (Y-Y) el voltaje simple del primario es:

$$V_1 = \frac{20,000}{\sqrt{3}} = \frac{20,000}{1.732} = 11547.34 \text{ [V]}$$

Y la corriente de cada fase coincide con la de línea; es decir,  $I_1 = 20 \text{ [A]}$ . Los voltajes simples secundarios vendrán ligados por la relación de transformación de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$m = 100 = \frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1}$$

de donde se deduce que:

$$V_2 = \frac{200}{\sqrt{3}}; \quad I_2 = 2,000 \text{ [A]}$$

que en valores compuestos corresponden a 200 [V] y 2,000 [A]

b) Delta-Delta o Triángulo-Triángulo, ( $\Delta - \Delta$ ). De forma análoga al caso anterior, se deducen unos valores de línea igual a 200 [V] y 2,000 [A] en el secundario.

c) Estrella-Delta, (Y- $\Delta$ ). Los valores simples del primario, teniendo en cuenta que está conectado en estrella (Y), son:

$$V_1 = \frac{20,000}{\sqrt{3}} = \frac{20,000}{1.732} = 11,547.34 \text{ [V]}; \quad I_1 = 20 \text{ [A]}$$

Por otro lado, los valores simples de voltaje y corriente en el secundario de acuerdo con la relación de transformación son:

$$V_2 = \frac{200}{\sqrt{3}} = \frac{200}{1.732} = 115.47 \text{ [V]} \Rightarrow V_2 = 115.47 \text{ [V]} \quad I_2 = 2,000 \text{ [A]}$$

que teniendo en cuenta que este devanado está conectado en triángulo, corresponde a unos valores de línea de:

$$V_L = \frac{200}{\sqrt{3}} \text{ y la corriente } I_L = \frac{2000}{\sqrt{3}} = 1154.73 \text{ [A]}$$

- d) Delta (Triángulo)-Estrella, ( $\Delta$ -Y). La tensión y la corriente de cada fuerza del devanado primario al estar conectado este devanado en Delta ( $\Delta$ ) son:

$$V_1 = 20,000 \text{ [V]}; I_1 = \frac{20}{\sqrt{3}} = 11.54 \text{ [A]}$$

y los valores correspondientes al secundario son:

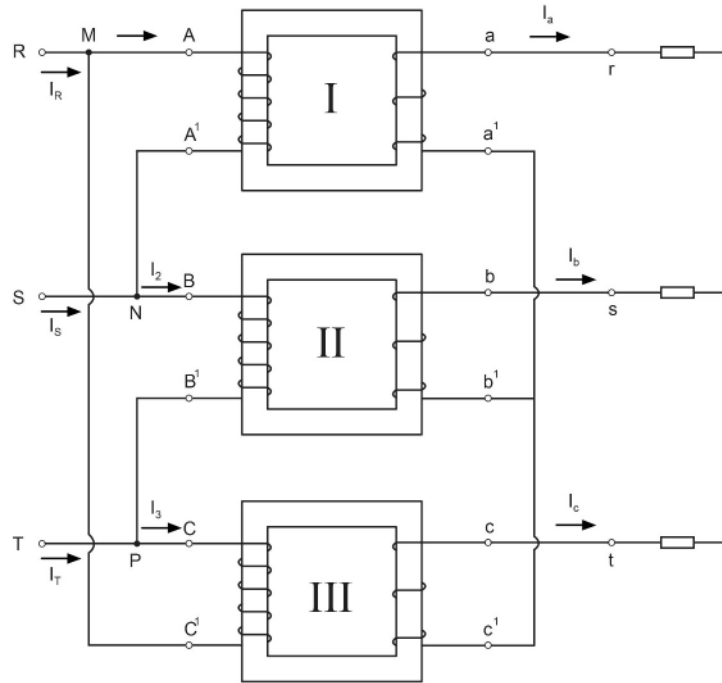
$$V_2 = 20,000 \text{ [V]}; I_2 = \frac{20}{\sqrt{3}} = 11.54 \text{ [A]}$$

que teniendo en cuenta que este devanado secundario está en estrella (Y), resultan unos valores de línea de:

$$V_L = \frac{200[V]}{\sqrt{3}}; I_L = \frac{2,000}{\sqrt{3}}[A]$$

**Problema 6.2** La siguiente figura muestra tres transformadores monofásicos de relación 1,000(V)/200(V) cada uno y con unas impedancias de primario y de secundario respectivamente, de valores  $Z_1 = 0.75 + j1.04 \text{ } [\Omega]$ ; se consideran despreciables las ramas paralelo de cada uno de los transformadores. Los tres transformadores se unen entre sí formando sus primarios, una conexión en ( $\Delta$ ) y sus secundarios, una conexión en (Y). El conjunto alimenta una carga equilibrada conectada en estrella de  $2/45^\circ$ /fase. Si la tensión simple secundaria es igual a 200 [V], la sucesión de fases es RST, y se toma como referencia de fase secundaria la tensión  $V_{an}$ , entonces; determinar:

- Las expresiones fasoriales de las corrientes  $I_a, I_b$  e  $I_c$ .
- Las expresiones fasoriales de las corrientes  $I_1, I_2$  e  $I_3$ .
- Las expresiones fasoriales de las corrientes  $I_R, I_S$  e  $I_T$ .
- Los voltajes  $V_{es}, V_{ST}$  y  $V_{TR}$ .



## SOLUCIÓN

1. Se resuelve el problema para el transformador superior, dándose las respuestas de los otros dos transformadores en función de hacer un corrimiento cíclico de sus fases respecto del primer transformador. De esta forma se tiene que:

$$V_{an} = V_{aa'} = 200 \angle 0^\circ \text{ [V]}$$

lo que da lugar a una corriente en la primera fase secundaria:

$$I_a = \frac{200 \angle 0^\circ}{2 \angle 45^\circ} \text{ [A]} \Rightarrow I_a = 100 \angle -45^\circ \text{ [A]}$$

y para las otras dos fases se tiene:

$$I_b = 100 \angle -45^\circ - 120^\circ = 100 \angle -165^\circ \text{ [A]} \Rightarrow I_b = 100 \angle -165^\circ \text{ [A]}$$

$$I_c = 100 \angle -45^\circ - 120^\circ = 100 \angle 75^\circ \text{ [A]} \Rightarrow I_c = 100 \angle 75^\circ \text{ [A]}$$

2. La FEM secundaria del primer transformador es:

$$E_{aa^1} = V_{aa^1} + Z_2 I_z$$

es decir:

$$E_{aa^1} = 200 \angle 0^\circ + (0.03 + j0.04)(100 \angle -45^\circ) = 204.95 \angle 0.2^\circ [V]$$

que corresponde a una FEM primaria de:

$$E_{AA^1} = (m)(E_{aa^1}) = (5)(204.95 \angle 0.2^\circ) = 1024.76 \angle 0.2^\circ [V]$$

ya que  $m = \frac{1.000}{200} = 5 \Rightarrow m = 5$

Además, si se tiene en cuenta que se desprecian las corrientes de vacío (rama paralela); entonces la corriente primaria por fase del primer transformador:

$$I_1 = \frac{I_a}{m} = \frac{100 \angle 45^\circ}{5} = 20 \angle -45^\circ [A] \Rightarrow I_1 = 20 \angle -45^\circ [A]$$

y para los otros dos transformadores (teniendo en cuenta el sentido de sucesión de las fases:

$$I_2 = 20 \angle -165^\circ [A] \quad I_3 = 20 \angle 75^\circ [A]$$

3. Las corrientes primarias de línea se obtendrán aplicando la primera Ley de Kirchoff a los nodos "M"; "N" y "P". Para la fase "R" se tiene que:

$$I_R = I_1 - I_3 = (20 \angle -45^\circ - 20 \angle 75^\circ) = 20\sqrt{3} \angle -75^\circ = 34.64 \angle -75^\circ [A]$$

Nota: Recuérdese que para restar números complejos en forma polar; primero se deben convertir a su formato en coordenadas cartesianas y proceder a realizar la resta algebraica. Una vez hecho esto, se vuelve a convertir el resultado al formato polar.

Finalmente; las corrientes para las fases "R", "S" y "T" son:

$$I_R = 34.64 \angle -75^\circ [A]; \quad I_S = 34.64 \angle -195^\circ [A]; \quad I_T = 34.64 \angle 45^\circ [A]$$

4. El voltaje primario del primer transformador se obtiene aplicando la siguiente ecuación:

$$V_{AA^1} = E_{AA^1} + Z_1 I_1 = 1024.76 \angle 0.2^\circ + (0.75j1)(20 \angle -45^\circ) = 1049.5 \angle 0^\circ [V]$$

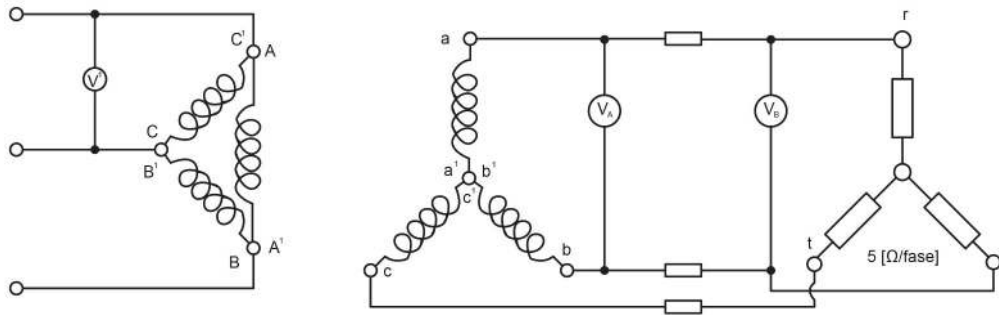
que corresponde directamente con la figura del modelo inicial al voltaje primario  $V_{RS}$ ; y para las otras fases resultará:

$$V_{RS} = 1049.5 \angle 0^\circ; V_{ST} = 1049.5 \angle -120^\circ; V_{RT} = 1049.5 \angle 120^\circ \text{ [V]}$$

**Problema 6.3** La siguiente figura muestra el esquema de una instalación trifásica equilibrada. Se dispone de un transformador de 50 [KVA] en conexión  $\Delta$ , y una relación compuesta de 15000/380 [V], con los siguientes voltajes relativos de cortocircuito:  $E_{cc}=10\%$   $E_{scc}=8\%$ , que alimenta por su devanado secundario, una carga equilibrada en estrella de  $5 \angle 0^\circ [\Omega/\text{fase}]$  a través de una línea de impedancia  $0.1 + jD.2 [\Omega/\text{hilo}]$ .

**Calcular:**

- Los parámetros  $R_{cc}$ ;  $X_{cc}$  y  $Z_{cc}$  del circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario.
- Si se aplica al devanado primario un voltaje trifásico equilibrado de 15 [KV] de línea (lectura del voltímetro  $V_1$ ), determinar las lecturas de los voltímetros  $V_A$  y  $V_B$ .



### SOLUCIÓN:

Los problemas de transformadores trifásicos, se pueden resolver por dos procedimientos distintos:

- Desde el punto de vista de una máquina eléctrica, teniéndose en cuenta la configuración interna real física con la que se unen los devanados. Este procedimiento suele ser más útil cuando solamente se analiza un transformador.
- Desde el punto de vista de un sistema eléctrico de potencia completo. Este procedimiento tiene interés cuando el transformador forma parte de una red eléctrica más completa, que puede incluir líneas de alimentación del transformador, y de éste a las cargas. En el primer caso, el problema se

resuelve calculando los distintos voltajes y corrientes que tienen lugar en uno de los transformadores monofásicos que constituyen el conjunto trifásico.

A partir de los resultados obtenidos para ese transformador monofásico, se calculan los voltajes y las corrientes de línea teniendo en cuenta las conexiones eléctricas que existen entre los tres transformadores monofásicos.

Un procedimiento similar se utiliza en el caso de tratarse de transformadores trifásicos de tres columnas, calculando los voltajes y las corrientes que tienen lugar en una sola columna del transformador y determinando a posteriori, los voltajes y las corrientes de línea en función de las conexiones internas entre los arrollamientos. Este método es muy útil para el ingeniero constructor del transformador, ya que tiene en cuenta la realidad física de cómo están unidos entre sí los devanados.

Cuando el transformador es un componente de un sistema eléctrico de potencia; el ingeniero no está tan interesado en lo que sucede dentro de cada columna del transformador, sino en las modificaciones que este procese en los niveles de corriente y de voltajes de la red. En esta situación, es más práctico desarrollar un circuito equivalente monofásico de todo el conjunto: Red de alimentación, transformador, líneas e impedancia de carga; lo que se resuelve más fácilmente si todas las fuentes (red), devanados del transformador y las cargas se suponen conectadas en estrella. En el caso de que algún componente de la red este realmente conectado en delta, deberá obtenerse su equivalente en estrella, de acuerdo con las reglas de transformación ( $\Delta$ -Y) que se utiliza en la teoría de los circuitos trifásicos. Como aplicación de estas dos ideas, se resolverá el ejemplo utilizando las dos perspectivas (el transformador como máquina eléctrica y el transformador como sistema eléctrico).

1. Primer procedimiento: Desde el punto de vista de la máquina eléctrica.

a) Los voltajes simples del primario y del secundario del transformador (valores asignados) son:

$$V_{1n} = 15,000 [V]; \quad V_{2n} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 219.39 [V]$$

ya que el primario está en delta ( $\Delta$ ) y el secundario en estrella (Y). De este modo, la relación de transformación entre voltajes simples es:

$$m = \frac{V_{1n}}{V_{2n}} = \frac{15,000}{219.39} = 68.37$$

la corriente asignada por fase primaria es:

$$S_N = (3)(V_{1n})(I_{1n}) \Rightarrow I_{1r} = \frac{50,000}{(3)(15,000)} = 1.11 [A]$$

considerando las siguientes expresiones:



$$E_{cc} = \frac{Z_{cc}I_{1n}}{V_{1n}}; E_{Rcc} = \frac{R_{cc}I_{rn}}{V_{1n}}(100) \approx \frac{R_{cc}I_2^1}{V_{1n}}(100)$$

$$E_{Xcc} = \frac{X_{cc}I_{1n}}{V_{1n}}(100) \approx \frac{X_{cc}I_2^1}{V_{1n}}(100)$$

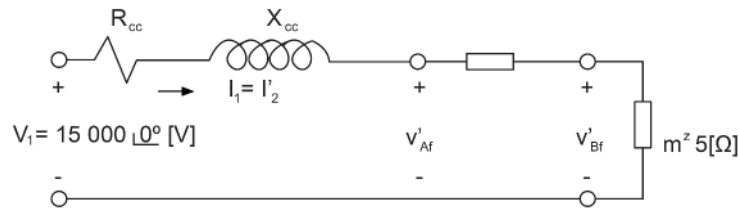
se calculará cada uno de los parámetros solicitados:

$$0.1 = \frac{(Z_{cc})(1.11)}{15000} \Rightarrow Z_{cc} = 1350 \text{ } [\Omega]$$

$$0.08 = \frac{(X_{cc})(1.11)}{15000} \Rightarrow X_{cc} = 1080 \text{ } [\Omega]$$

de donde se deduce:

$$R_{cc} = \sqrt{(Z_{cc})^2 - (X_{cc})^2} = 810 \text{ } [\Omega] \Rightarrow R_{cc} = 810 \text{ } [\Omega]$$



b) El circuito equivalente por fase reducido al primario de la instalación es el mostrado en la figura anterior, en el que se ha tomado como referencia de fases la tensión primaria( realmente se quiere decir que es la tensión primaria de la primera fase del transformador) en este circuito se tiene:

- Impedancia reducida de la línea:  $(m^2)(0.1 + j0.2) = 467.45 + j934.9 \text{ } [\Omega]$
- Impedancia reducida de la línea de la carga:  $(m^2)(5 \angle 0^\circ) = 23.372.6 + j0 \text{ } [\Omega]$

Por lo que la corriente  $I_2'$  valdrá:

$$I_2' = \frac{15,000 \angle 0^\circ}{(810 + j1080) + (467.45 + j934.9) + 23372.6j0} \text{ } [\Omega]$$

Y en consecuencia, los voltajes reducidos  $V'_{Af}$  y  $V'_{Bf}$  son:

$$V'_{Af} = [(467.45 + j934.9) + 23372.6][0.606 \angle -4.67^\circ] = 14,458.2 \angle -2.42^\circ [V]$$

$$V'_{Bf} = (23,372.6)(0.606 \angle -4.67^\circ) = 14,163.8 \angle -4.67^\circ [V]$$

Que corresponden a los módulos:

$$V'_{Af} = 14,458.2 \angle -2.42^\circ [V]; V'_{Bf} = 14,163.8 \angle -4.67^\circ [V]$$

Y en consecuencia, los voltajes secundarios por fase son:

$$V_{Af} = \frac{V'_{Af}}{m} = \frac{14,458.2}{68.37} \approx 211.5 [V]; V_{Bf} = \frac{V'_{Bf}}{m} = \frac{14,163.8}{68.37} \approx 207.2 [V]$$

que al estar conectado el devanado secundario en estrella, corresponde a unos valores de línea:

$$V_A = (\sqrt{3})(211.5) \approx 366.28 [V] \quad V_B = (\sqrt{3})(207.2) \approx 358.9 [V]$$

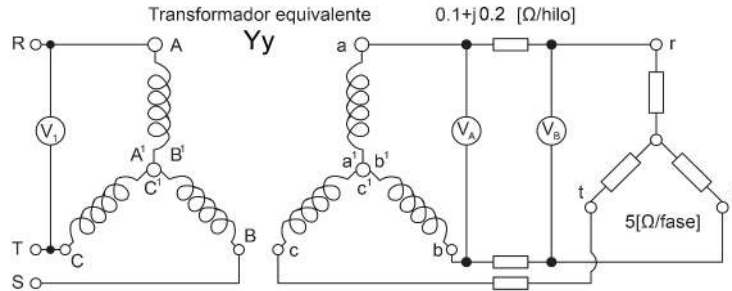
Finalmente;  $V_A = 366.28 [V]$  y  $V_B = 358.9 [V]$

Por otro lado, la resolución de un problema de transformadores trifásicos por este procedimiento, es análoga a la solución de problemas con transformadores monofásicos. La clave consiste en visualizar una sola de las fases o columna del transformador real (parte del devanado primario y del devanado secundario correspondiente). Este transformador individual se comporta exactamente igual que el transformador monofásico. Para transformadores trifásicos, los cálculos de impedancia, caída de tensión, rendimiento, etcétera. Se efectúan por fase, empleando exactamente las mismas técnicas ya desarrolladas para transformadores monofásicos. Para evitar errores en el planteamiento de las ecuaciones, conviene seguir el siguiente procedimiento:

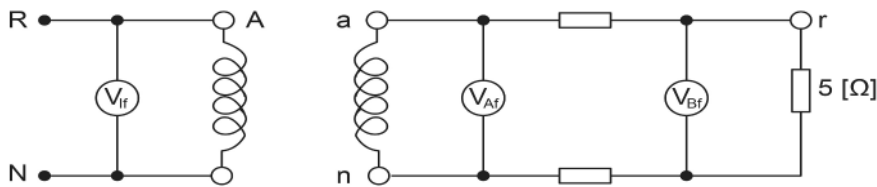
- Obtener la relación de transformación como cociente de las tensiones asignadas simples de primario y secundario.
- Determinar los parámetros por fase del transformador.
- Dibujar el circuito equivalente de la instalación reducida al devanado primario, en la que se indiquen los valores de las potencias, tensiones y corrientes por fase.
- Resolver el circuito equivalente, expresando los valores de las soluciones por fase.
- Expresar las soluciones en valores de línea, teniendo en cuenta para ello, las conexiones específicas del primario y del secundario del transformador.

Desde el punto de vista de un sistema eléctrico: En esta situación, y tal como ya se ha indicado en la introducción al problema, conviene analizar la red en todo su conjunto, para lo cual hay que

conseguir un equivalente monofásico de todo el sistema lo que requiere transformar todos los elementos que están conectados en delta ( $\Delta$ ) en una estrella (Y) equivalente; en este problema, solamente es el primario del transformador el que está conectado en delta ( $\Delta$ ); por lo que es posible preparar en circuito equivalente, pero ahora con el devanado primario en estrella. En la primera figura se muestra el esquema correspondiente, y en la segunda figura se representa el circuito equivalente por fase de todo el sistema: la red de alimentación, el transformador y la carga.



En la figura anterior, debe destacarse que la relación de transformación del transformador equivalente es diferente a la real calculada con el primer método, y que por ello se denominara  $m'$ ; y que es igual al cociente del voltaje asignado simple del devanado primario en estrella (Y) y que se define por  $V_{1n\lambda}$  dividido por el voltaje asignado simple del devanado secundario en estrella (Y) definido por  $V_{2n\lambda}$ ; es decir:



$$m' = \frac{V_{1n\lambda}}{V_{2n\lambda}} = \frac{15.000/\sqrt{3}}{380/\sqrt{3}} = \frac{21,633.74}{548.05} = 39.47$$

Con este procedimiento, coinciden las relaciones de voltaje tanto como cociente de tensiones simples como de tensiones compuestas. Por otro lado, la impedancia equivalente del transformador reducida al

primario, calculada en el caso anterior, cuando se consideraba el devanado primario conectado en delta ( $\Delta$ ), es igual a:

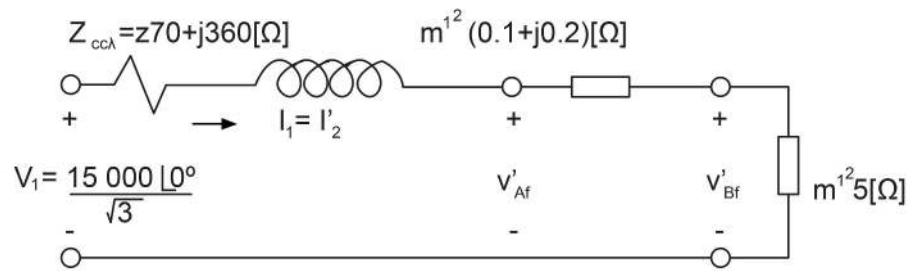
$$Z_{cc\Delta} = 810 + j1080 \text{ } [\Omega]$$

Sin embargo; la impedancia por fase reducida al primario del transformador equivalente estrella-estrella, (Y-Y), de acuerdo con las reglas de conversión triángulo-estrella ( $\Delta$ -Y), es:

$$Z_{cc\Delta} = \frac{Z_{cc\Delta}}{3} = \frac{810 + j1080}{3} = 270 + j360 \text{ } [\Omega]$$

El circuito equivalente monofásico de la siguiente figura, al reducir el secundario al primario, da lugar a lo establecido en dicho arreglo, teniendo en cuenta que:

$$m' = 39.47$$



y en consecuencia, los voltajes reducidos  $V'_{Af}$  y  $V'_{Bf}$  son:

$$V'_{Af} = [(39.47)^2(0.1 + j0.2) + (39.47)^2(5 \angle 0^\circ)](1.05 \angle -4.67^\circ) = 8350.4 \angle -2.42^\circ \text{ } [V]$$

$$V'_{Bf} = [(39.47)^2(5 \angle 0^\circ)](1.05 \angle -4.67^\circ) = 8180.3 \angle -4.64^\circ \text{ } [V]$$

por lo que los voltajes secundarios por fase son:

$$V_{Af} = \frac{V'_{Af}}{m'} = \frac{8,350.4}{39.47} = 211.5 \text{ } [V]; \quad V_{Bf} = \frac{V'_{Bf}}{m'} = \frac{8,180.3}{39.47} = 207.2 \text{ } [V]$$

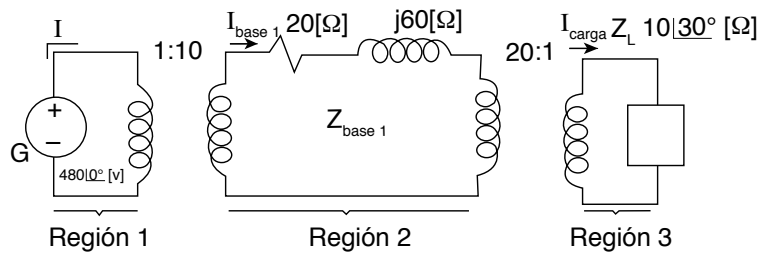
que se corresponde a los valores en línea:

$$V_A = (\sqrt{3})(211.5) = 366.6 [V] \Rightarrow V_A = 366.3 [V]$$

$$V_B = (\sqrt{3})(207.2) = 358.9[V] \Rightarrow V_B = 358.9 [V]$$

que coinciden exactamente con los valores obtenidos con el primer procedimiento. En conclusión, este procedimiento tiene grandes ventajas analíticas en la resolución de problemas complejos, en los que pueden existir líneas de alimentación al transformador, cargas en estrella o en delta, varios transformadores implicados en los cálculos lineales de alimentación a las cargas, etcétera.

**Problema 6.4** En el diagrama de la siguiente figura, se muestra un sistema de potencia simple que contiene un generador de 480 [V] que está conectada un transformador elevador ideal de 1:10 a una línea de transmisión, a un transformador reductor ideal de 20:1, y una carga. La impedancia de la línea de transmisión es de  $20 + j60(\Omega)$ , y la impedancia de la carga es de  $10 \angle 30^\circ$ . Los valores base de este sistema son: 480 [V] y 10 [KVA] en el generador.



- Calcular el voltaje, la corriente, la impedancia y la potencia aparente bases, en cada punto del sistema de potencia.
- Convertir este sistema en su circuito equivalente por unidad.
- Determinar la potencia suministrada a la carga en el sistema.
- Especifique la potencia en la línea de transmisión.

### SOLUCIÓN:

- En la región del generador:  $V_{base} = 480 [V]$  y  $S_{base} = 10[KVA]$ , entonces:

$$I_{base1} = \frac{S_{base}}{V_{base1}} = \frac{10000[VA]}{480[V]} = 20.83 [A]$$

$$Z_{base1} = \frac{V_{base1}}{I_{base1}} = \frac{480 [V]}{20.83[A]} = 23.04 [\Omega]$$

La relación de vueltas del transformador  $T_1$  es:  $a = \frac{1}{10} = 0.1$ ; por lo que el voltaje en la región de la línea de transmisión es:

$$V_{base2} = \frac{V_{base1}}{a} = \frac{480[V]}{0.1} = 4,800 [V]$$

Las demás cantidades base son:

$$S_{base2} = 10 [KVA]$$

$$I_{base2} = \frac{10,000 [VA]}{4,800 [V]} = 2.083[A]$$

$$Z_{base2} = \frac{4,800 [V]}{2.083 [A]} = 2,304 [\Omega]$$

La relación de vueltas del transformador  $T_2$  es:  $a = \frac{20}{1}$  por lo que, el voltaje base en la región de la carga es:

$$V_{base3} = \frac{V_{base2}}{a} = \frac{4,800 [V]}{20} = 240 [V]$$

Las demás cantidades base son:

$$S_{base3} = 10 [KVA]$$

$$I_{base3} = \frac{10,000 [VA]}{240 [V]} = 41.67 [A]$$

$$Z_{base3} = \frac{240 [V]}{41.67 [A]} = 5.76 [\Omega]$$

- b) Para convertir un sistema de potencia en un sistema por unidad, se debe dividir cada componente entre su valor base, según la región del sistema. El voltaje por unidad del generador en su valor real dividido entre su valor base:

$$V_{a.p.u} = \frac{480 \angle 0^\circ [V]}{480 [V]} = 0.1 \angle 0^\circ [p.u.]$$

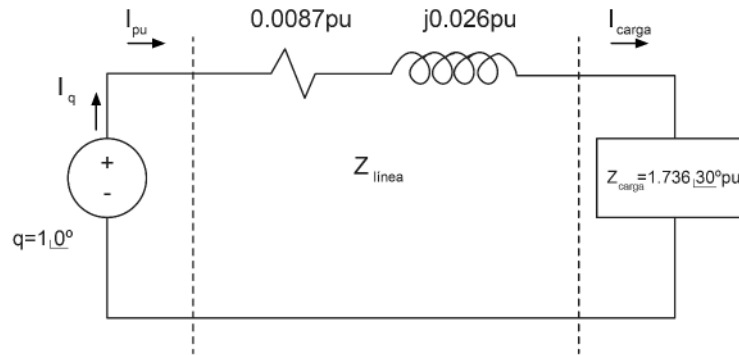
La impedancia por unidad de la línea de transmisión, es su valor real dividido entre su valor base:

$$Z_{línea_{pu}} = \frac{20 + j60[\Omega]}{2.304 [\Omega]} = 0.0087 + j0.026[p.u.]$$

La impedancia por unidad de carga, también es el valor real dividido entre su valor base:

$$Z_{carga_{pu}} = \frac{10 \angle 30^\circ [\Omega]}{5.76 [\Omega]} = 1.736 \angle 30^\circ [p.u.]$$

El circuito equivalente en valores “por unidad ”del sistema de potencia, se muestra a continuación;



c) La corriente que fluye en este sistema de potencia por unidad es:

$$I_{pu} = \frac{V_{pu}}{Z_{TOT_{pu}}} [A]$$

$$I_{pu} = \frac{1 \angle 0^\circ}{(0.0087 + j0.260) + (1.736 \angle 30^\circ)} = \frac{1 \angle 0^\circ}{(0.0087 + j0.260) + (1.503 + j0.868)}$$

Por lo tanto; la potencia por unidad de carga es:

$$P_{carga_{p.u}} = (I_{pu}^2)(R_{pu}) = (0.569)^2(1.503) = 0.487[W_{pu}]$$

y la potencia real suministrada a la carga es:

$$P_{carga} = (P_{carga_{pu}})(S_{base}) = (0.487)(10.000) = 4.870 [W]$$

d) La potencia por unidad perdida en la línea de transmisión es:

$$P_{línea_{pu}=(I_{pu})^2}(R_{línea_{pu}}) = (0.569)^2(0.0087) = (0.00282)[W_{pu}]$$

y la potencia real de pérdida en la línea de transmisión es:

$$P_{línea} = (P_{línea_{pu}})(S_{base}) = (0.00282)(10.000) = 28.2 [W]$$

**Problema 6.5** Un transformador de potencia de 50 [KVA]; 13800 [V]/208[V], en  $\Delta$  - Y, tiene una resistencia de 1% y una reactancia de 7% por unidad.

- Calcular la impedancia de fase del transformador referida al lado de alto voltaje.
- Calcular la regulación de voltaje de este transformador a plena carga, y a 0.8 de un factor de potencia en retraso, utilizando la impedancia del lado de alto voltaje.
- Calcular la regulación de voltaje de este transformador en las mismas condiciones, utilizando el sistema por unidad.

### SOLUCIÓN:

- El lado de alto voltaje de este transformador tiene un voltaje de línea base de 13,800 [V]; y una potencia aparente base de 50 [KVA]. Ya que el primario está conectado en delta ( $\Delta$ ), su voltaje de fase es igual a su voltaje de línea. Por lo tanto, su impedancia base es:

$$Z_{base} = \frac{(3)(V_{Q_{base}})^2}{S_{base}} = \frac{(3)(13,800)^2}{50,000} = 11,426 [\Omega]$$

La impedancia por unidad del transformador es:

$$Z_{eq} = 0.01 + j0.07p.u.$$

- Para calcular la regulación de voltaje del banco de un transformador trifásico, se determina primero el valor, la regulación de voltaje de cualquier transformador monofásico en el banco. Los voltajes en un transformador monofásico son voltajes de fase, por lo que:

$$RV = \frac{V_{Qp} - (a)(V_{Qs})}{(a)(V_{Qs})}(100\%)$$

El valor nominal del voltaje de fase en el transformador en el primario es de 13,800 [V], por lo que la corriente de fase nominal en el primario esta dada por:

$$I_Q = \frac{S}{3V_Q}[A]$$



La potencia aparente nominal es  $S = 60$  [KVA], por lo que:

$$I_Q = \frac{50,000}{(3)(13,800)} = 1.208 \text{ [A]}$$

El voltaje de fase nominal en el secundario del transformador es  $208[V]/\sqrt{3} = 121[V]$ . Cuando se refiere al lado de alto voltaje del transformador, este voltaje llega a ser  $V'_{QS} = 13,800$  [V], supóngase que el secundario del transformador opera a voltaje y corriente nominales y encuéntrase el voltaje de fase primario resultante:

$$V_{QP} = (a)(V_{QS}) + (ReqI_Q) + jX_{eq}I_Q$$

$$V_{QP} = 13,800 \angle 0^\circ \text{ [V]} + (114.2[\Omega])(1.208 \angle -36.87^\circ \text{ [A]}) + (j800[\Omega])(1.208 \angle -36.87^\circ \text{ [A]})$$

$$V_{QP} = 13,800 + 138 \angle -36.87^\circ + 966.4 \angle 53.13^\circ$$

$$V_{QP} = 13,800 + 110.4 - j82.8 + 579.8 + j773.1$$

$$V_{QP} = 14,490 + j690.3 = 14,506 \angle 2.73^\circ \text{ [V]}$$

Por lo tanto;

$$RV = \frac{V_{QP} - (a)(V_{QS})}{(a)(V_{QS})} (100\%)$$

$$RV = \frac{14,506 - 13,800}{13,800} (100\%) = 5.1\% \Rightarrow RV = 5.1\%$$

- c) En el sistema por unidad, el voltaje de salida es  $1 \angle 0^\circ$ , y la corriente es  $1 \angle -36.87^\circ$ . Por lo tanto, el voltaje de entrada es:

$$1 \angle 0^\circ + (0.01)(1 \angle -36.87^\circ) + (j0.07)(1 \angle -36.87^\circ)$$

$$1.05 + j0.05 = 1.051 \angle 2.73^\circ \text{ [V]}$$

La regulación del voltaje es:

$$RV = \frac{1.051 - 1.0}{1.0} (100\%) = 5.1\%$$

$$RV = 5.1 \%$$

## 6.12 Resumen

De manera general, un transformador es un aparato para convertir energía eléctrica con un nivel de voltaje, en energía eléctrica con otro nivel de voltaje a través de la acción de un campo magnético. Tiene una función muy importante en la vida moderna, ya que hace posible la transmisión económica de energía eléctrica a largas distancias. Cuando se aplica un voltaje al primario de un transformador, el flujo que se produce en el núcleo está dado por la Ley de Faraday. El flujo variable en el núcleo induce un voltaje en el devanado secundario del transformador. Debido a que los núcleos de los transformadores tienen una permeabilidad muy alta, la fuerza magnetomotriz neta que se requiere en el núcleo del transformador para producir el flujo magnético es muy pequeña. Puesto que esta fuerza es muy pequeña, la fuerza magnetomotriz del circuito primario debe ser aproximadamente igual y opuesta a la fuerza magnetomotriz del circuito secundario. Este hecho produce la razón de corriente del transformador. Un transformador real, tiene flujos dispersos que únicamente atraviesan en el devanado primario o en el secundario; pero no ambos. Además, hay pérdidas por histéresis, por corrientes parásitas y en el cobre; entre otras.

Estos efectos se toman en cuenta en el circuito equivalente del transformador. Las imperfecciones de los transformadores se miden en un transformador real por medio de la regulación de voltaje y de la eficiencia.

La transformación de voltajes y de corrientes en los sistemas trifásicos puede realizarse de dos maneras distintas:

- La primera consiste en emplear un transformador monofásico en cada una de las tres fases; de tal manera que se formen circuitos magnéticos independientes. Este sistema es poco económico, ya que se emplea mucho volumen de hierro a la par que es poco práctico, por ser necesario incorporar tres unidades idénticas para realizar la transformación total.
- La segunda manera consiste en emplear un solo núcleo magnético en el que se incorporan todos los devanados necesarios. En este caso, el sistema está formado por tres columnas iguales sobre las que se arrollan las espiras que constituyen los bobinados primarios y secundarios de cada fase

En el estudio del transformador trifásico de potencia, hay que considerar cada columna como un transformador monofásico, de tal forma que los ensayos, esquemas equivalentes; deben expresarse en valores simples, pudiéndose aplicar entonces, las mismas técnicas de análisis empleadas en el estudio de los transformadores monofásicos.

Dentro de los equipos de potencia más importantes en el proceso de transmisión de energía eléctrica,

se encuentran los transformadores de potencia (dichos equipos requieren de una relativa alta inversión en su adquisición y puesta en servicio). Durante su vida útil, los transformadores de potencia se ven expuestos a diferentes fenómenos naturales, tales como: descargas eléctricas, corrosión ambiental y fallas propias de la operación de un sistema de transmisión que afectan sus componentes, y como consecuencia, la confiabilidad y la vida útil del mismo. De lo anterior, se deriva la importancia de implantar un programa de mantenimiento que garantice la disponibilidad del transformador que permita obtener una alta confiabilidad y continuidad de la transmisión de energía, y por ende, el suministro de energía eléctrica a los usuarios finales.

En conclusión, los transformadores de potencia son de gran importancia para la operación de un sistema de transmisión. éste, permite que la energía generada en una central, sea elevada a un nivel de voltaje para ser transmitida a grandes distancias con pocas pérdidas; y finalmente, se pueda disminuir su voltaje para su utilización final en los centros urbanos y zonas industriales. De ahí surge, que en los últimos años, el mantenimiento que se efectúa a dichos equipos sea cada vez más estricto y cuidadoso. Un excelente plan de mantenimiento apoyado en pruebas eléctricas y físico-químicas, así como un buen análisis de ingeniería, son imprescindibles para garantizar su funcionamiento, su durabilidad, disponibilidad y confiabilidad. En la actualidad, se realizan diversas pruebas preventivas en transformadores energizados, el factor de potencia, la cromatografía de gases disueltos en el aceite, resistencia de aislamiento y devanados; que actualmente son reconocidas como métodos confiables para el diagnóstico e identificación de fallas eléctricas.

El aceite tiene como principal función, proveer aislamiento dieléctrico, proteger el papel, y evacuar el calor generado en el núcleo del embobinado. Además, el aceite provee información acerca del funcionamiento del transformador, y es una herramienta útil para determinar el estado del aislamiento sólido. El aceite debe cumplir estas funciones de la mejor forma posible, durante el transcurso de los años, y para eso, se debe tener en cuenta que los principales enemigos del aceite son el calor, el agua y el oxígeno. Entonces, es indispensable evitar que estos elementos tengan influencia directa o indirecta sobre el aceite.

Por otro lado, el papel utilizado dentro del transformador debe cumplir con tres funciones principales:

- Proveer rigidez mecánica.
- Proveer rigidez dieléctrica.
- Proveer espaciado.

La premisa que se debe tener siempre en mente, es que la vida del papel, es la vida del transformador, y por esa razón, la preocupación central que se tiene cuando se establece una política de mantenimiento es la de mantener el papel en las mejores condiciones. La pregunta constante que uno debe hacerse es: ¿Cuál es el estado del aislamiento? Con base al estado del aislamiento sólido, se puede pronosticar la vida útil que le resta al transformador.

El envejecimiento prematuro del sistema de aislamiento, es un proceso de degradación química y formación de compuestos agresivos (alcoholes, ácidos, peróxidos, acetonas, aldehídos, etcétera) que forman sedimentos llamados “lodos”. Los lodos tienen un carácter ácido, son insolubles, y su formación va acompañada de otros compuestos ácidos orgánicos disueltos en el aceite, cuya presencia es un sistema inequívoco de envejecimiento prematuro. Si se tiene una degradación del sistema de aislamiento, y el transformador trabaja a bajas temperaturas, la humedad del aceite migra hacia la celulosa en el núcleo, y sus moléculas polares se orientan por el intenso campo eléctrico, de tal forma que a partir del 4.5 % de humedad en el papel, y para una temperatura de trabajo de 90° C, la falla del aislamiento por causa del campo eléctrico es inminente. La experiencia establece que aproximadamente 20 % de los transformadores presenta síntomas por averías latentes, que producirán una salida intempestiva de dichos transformadores del sistema eléctrico.

Respecto al plan de mantenimiento, se debe establecer que para garantizar una relativa continuidad en el servicio, es importante establecer la frecuencia para realizar las diferentes pruebas. En el mantenimiento moderno se considera lo siguiente:

- Pruebas eléctricas de campo.
- Pruebas físico-químicas y de furanos.
- Análisis de gases disueltos.

En relación a las pruebas eléctricas de campo, se recomiendan las siguientes:

- Factor de potencia y de capacitancia de los devanados. Esta prueba es regida por la Norma ANSI/IEEE estándar 62-1995.
- Relación de transformación. El estándar ANSI/IEEE C57. 12.91, hace una descripción de la prueba y de los métodos de evacuación de la misma
- Impedancia. Se rige por la norma ANSI/IEEE estándar 62-1995.
- Resistencia de aislamiento. Se mide la resistencia de aislamiento en cada devanado, de acuerdo al estándar ANSI/IEEE C57.12.91.
- Resistencia de devanados. Los valores obtenidos deben compararse con los valores de fábrica corregidos a la misma temperatura. Los valores medidos por fase en un transformador trifásico, no deben sufrir una variación mayor de 5 % entre fases. Se rige por la ANSI/IEEE 62-1995.

En cuanto al análisis físico-químico del aceite, el objetivo de esta prueba es obtener información sobre las propiedades funcionales (físicas, químicas y eléctricas) del aceite mineral aislante, utilizado en equipos eléctricos, y así poder determinar el estado del sistema de aislamiento del transformador. Las pruebas que se realizan para recabar la información son las siguientes:

- **Tensión interfacial.** Una disminución en el valor de la tensión interfacial indica la acumulación de contaminantes, productos de oxidación o ambos. Se basa en la norma ASTM D971.

- **Rigidez dieléctrica.** Un valor bajo indica generalmente la presencia de contaminantes tales como agua, suciedad u otras partículas conductivas en el aceite. La norma ASTM D877 expresa los valores aceptables.
- **Contenido de humedad.** Un contenido bajo de agua es necesario para obtener y mantener una rigidez dieléctrica aceptable, así como unas pérdidas dieléctricas bajas en el sistema de aislamiento. La norma ASTM D1533 es la que se toma como base de análisis.
- **El calor del aceite** está regido por la norma ASTM D1524.
- **Factor de potencia.** Un alto valor de factor de potencia indica la presencia de contaminación o de productos nocivos debido al deterioro, tales como la humedad, el carbón u otras materias conductivas. Está regida por la norma IEEE 62-1995.
- **Contenido de inhibidor.** El aceite dieléctrico nuevo, contiene normalmente pequeñas cantidades de inhibidores naturales, estos retardan la oxidación del aceite, hasta que son consumidos en su totalidad. En el momento que los inhibidores se agotan, la tasa de oxidación y el proceso de deterioro del aceite aumentan. La prueba es regida por la norma ASTM D2668.
- **Número de neutralización.** La oxidación de un aceite dieléctrico, se lleva a cabo por medio de complejas reacciones en las que se involucra agua y oxígeno, el número de neutralización es utilizado como una medida de la cantidad de ácidos orgánicos formados en el aceite debido a dicho proceso de oxidación. La norma ASTM D974 indica los valores aceptables. Altas concentraciones de 2- furfural son una clara indicación de la degradación de la celulosa del papel aislante.

Finalmente, en cuanto a las pruebas complementarias, se utilizan las siguientes:

- **Compuestos furanos.** Pruebas complementarias de confirmación que deben realizarse para detectar cadenas de celulosa disueltas en el aceite y que son producto de la pérdida del dieléctrico; estas cadenas son llamadas compuestos furánicos. La medición de estos compuestos en el aceite es utilizada como una herramienta de diagnóstico del estado del papel de un transformador de potencia; además proporciona información suplementaria al análisis de gases disueltos (cromatografía de gases). El método que se utiliza para analizar los compuestos furánicos a través de la cromatografía líquida de alta viscosidad (HPLC), es el descrito en las normas ASTM D5837 o IEC 61198. Con este análisis, se pueden reconocer los siguientes compuestos furánicos: 5-hidroximetil-2-furfural (HMF); alcohol furfurílico (FOL); 2-furunal (FAL); 2- acetilfurano (AF) y 5-metil-2-furfural (MF).
- **Grado de polimerización (GP).** La prueba que determina el grado de polimerización, es utilizada para conocer la edad del aislamiento del papel de los devanados. Esta prueba proporciona la indicación más confiable de la edad del papel aislante. Por ejemplo; se tiene que un transformador de potencia nuevo tiene un GP de 1000; mientras que un transformador que presenta un GP de 150 a 200, es más susceptible a daños mecánicos durante movimientos físicos que pueden causar roturas en el papel.

- **Análisis de gases disueltos.** Cuando el transformador presenta problemas o fallas incipientes (conexiones flojas, descargas parciales, arcos, etcétera) que no pueden ser detectadas por las pruebas eléctricas de campo, el análisis de gases disueltos en el aceite (cromatografía de gases) es una herramienta que proporciona información valiosa acerca del tipo de falla presente. Los gases comúnmente detectados durante una condición de falla son: Hidrógeno ( $H_2$ ); Metano ( $CH_4$ ); Acetileno ( $C_2H_4$ ) y Etano ( $C_2H_6$ ). Cuando la celulosa se ve involucrada, se produce monóxido de carbono ( $CO$ ) y dióxido de carbono ( $CO_2$ ).

A manera de conclusión, puede decirse que en el mantenimiento de transformadores de potencia, es sumamente importante, utilizar los datos del análisis de aceites; así como las pruebas eléctricas en conjunto, ya que al contar con estos datos y verificar sus tendencias en el tiempo, permitan a los responsables del mantenimiento conocer el estado funcional del mismo, y poder tomar las decisiones necesarias para prevenir la ocurrencia de fallas inesperadas, que pueden llevar incluso, a la pérdida total de los equipos, con las afectaciones económicas de la organización, amén, de la calidad y confiabilidad en el servicio de suministro eléctrico.

### 6.13 Problemas propuestos

**6.1** Un transformador trifásico de 2,000 [KVA], 6,600 [V] /33,000 [V] tiene un devanado primario conectado en delta ( $\Delta$ ) y un devanado secundario conectado en estrella [Y]. La impedancia de cada fase del primario es  $0.5+j2.6$  ( $\Omega$ ) y la correspondiente del secundario es de  $4.3+j21.7$  ( $\Omega$ ). Calcular el voltaje en las terminales del secundario a plena carga con un factor de potencia de 0.8 inductivo, cuando el primario se conecta al voltaje asignado.

**6.2** Se han realizado unos ensayos en un transformador trifásico de 100 [KVA], 400 [V]/6,600 [V], 50 [Hz] conexión estrella-delta (Y- $\Delta$ ) dando los siguientes resultados:

- Vacío: 400 [V], 1250 [W] (datos medidos en el lado de baja tensión).
  - Cortocircuito; 314 [V], corriente de plena carga 1,600 (W) (datos medidos en el lado de alta tensión)
- a) Calcular el rendimiento a media carga con un factor de potencia de 0.8 en retraso
  - b) Calcular el rendimiento a media carga con un factor de potencia unitario
  - c) Calcular la potencia aparente de máximo rendimiento y rendimiento máximo con un factor de potencia unitario.
  - d) Calcular el voltaje necesario en el primario para el caso (a), si la tensión secundaria se mantiene en 6,600 (V)

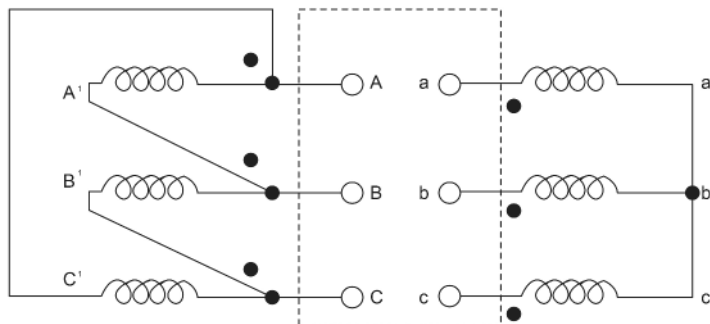
**6.3** Se tiene un transformador trifásico de 250 [KVA], conexión  $Y_\gamma$  con una relación de voltajes compuestos de 15,000[V]/380 [V]. De los datos del fabricante se conocen los siguientes parámetros:  $E_{cc} = 10\%$ ;  $E_{x_{cc}} = 8\%$ , se considera despreciable el efecto de la rama paralela del circuito equivalente del transformador:

- Calcular los parámetros  $R_{cc}$  y  $X_{cc}$  del circuito equivalente por fase del transformador reducido al primario y la corriente que circulará por el secundario, si por una falla se produce un cortocircuito franco en las terminales del secundario (se sugiere que para resolver esta última cuestión de la falla, se considere la alimentación del devanado primario por 15,000 [V]).
- Si el voltaje compuesto de línea en el secundario es de 380 [V], y se conecta al transformador una carga en estrella [Y] de  $15 \angle 60^\circ$  [( $\Omega$ )/fase], ¿cuál será el voltaje compuesto que deba aplicarse al devanado primario, para que el voltaje secundario siga permaneciendo constante en 380 [V] de línea?, ¿cuál será el rendimiento del transformador en estas condiciones?
- Si se conecta este transformador en paralelo con otro de 350 [KVA], conexión  $Y_y0$ , con la misma relación de voltajes y de valores  $E_{cc}=10\%$  y  $E_{X_{cc}}=9\%$ , ¿cómo se repartirán una potencia de 400 [KW] con un factor de potencia de 0.8 inductivo? (es decir, calcular las potencias activas y aparentes suministradas por cada transformador).

**6.4** En la siguiente figura, se muestra el esquema interno de las bobinas de un transformador trifásico de 50 [KVA], relación de voltajes compuestos 1000[V]/100[V]; 50[Hz]; conexión  $\Delta$ -Y, que ha dado los siguientes valores en unos ensayos:

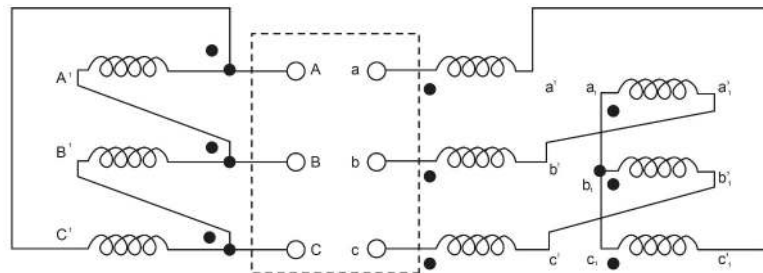
- Vació: 1,000[V] (línea); 3 [A] (línea); 1 [KW] (total de las tres fases)
- Cortocircuito: 100 [V] (línea);  $I_{corto} = I_{asignado}$ ; 1.5 [KW] (totales)

Ambos ensayos se han medido en el lado de alta tensión.



- a) Determinar los parámetros del circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario.
- b) Determinar el ángulo horario del transformador, cuando se alimenta mediante un sistema directo de voltajes.
- c) El voltaje primario de línea y el rendimiento del transformador cuando alimenta una carga en el secundario que absorbe una potencia de 25 [KW] con un factor de potencia inductivo de 0.8 ( el voltaje secundario de línea se mantiene siempre constante en 100 [V]).
- d) ¿Cual es la potencia aparente de máximo rendimiento del transformador, y el rendimiento máximo con un factor de potencia unitario?
- e) Se desea ampliar la instalación para alimentar una carga trifásica de 80 [KW] con un factor de potencia 0.8 inductivo, por lo que se hace necesario acoplar en paralelo este transformador con otro  $\Delta$ -Y de igual índice horario y cuyas características asignadas son: 75 [KVA]; 1000 [V]/100 [V];  $ER_{cc}=6.5\%$ ;  $EX_{cc}=5\%$ . Calcular los valores de las potencias aparentes. Activas y reactivas suministradas por cada transformador. ¿Es adecuado el reparto de las potencias aparentes? ¿, porque?. Nota: El voltaje secundario es constante en todos los casos e igual a 100 [V] de línea.

6.5 Determinar el ángulo horario del transformador indicado en la siguiente figura.





# **Tercera parte**

**Capítulo 7 Motor de inducción  
polifásico**

**Capítulo 8 Máquinas síncronas**

**Capítulo 9 Generador síncrono**

**Capítulo 10 Operación de generadores  
síncronos en estado estable**

**Capítulo 11 Operación de motores y  
condensadores síncronos**

## Capítulo 7

### Motor de inducción polifásico

- 7.1 Introducción
- 7.2 Principios básicos del motor de inducción trifásico
- 7.3 Principio de funcionamiento del campo magnético rotatorio trifásico
- 7.4 Circuito equivalente para el motor de inducción
- 7.5 Circuito equivalente aproximado
- 7.6 Diagrama de potencias
- 7.7 Ecuación del par electromagnético empleando el circuito aproximado
- 7.8 Ecuación del par electromagnético empleando el circuito equivalente
- 7.9 Análisis del comportamiento dinámico de un motor de inducción
- 7.10 Nemas y tipos de arranque
- 7.11 Arranque estrella - delta
- 7.12 Motores de inducción con diferentes características en el rotor
- 7.13 Problemas resueltos

### Competencias

Conocer las características operativas y aplicaciones del motor de inducción polifásico.

## 7.1 Introducción

El estudio del motor de inducción trifásico tiene gran importancia en nuestros días debido a sus características de construcción y robustez y a que gracias a su diseño se logra tener un campo magnético rotatorio, el cual gira a una velocidad fija (velocidad de sincronía) que se define básicamente por el número de polos magnéticos que tiene el motor y por la frecuencia de las señales de alimentación que se inyectan al estator. La teoría elemental para el diseño de este motor fue desarrollada por Nikola Tesla en el año de 1887, y desde entonces la parte básica de ésta, no presenta grandes modificaciones.

En este motor, se tiene que considerar que la generación de par electromagnético se logra por la interacción de los conductores en los que circula corriente eléctrica y que se encuentran inmersos en un campo magnético rotatorio, dando lugar en la parte rotatoria a este fenómeno que se genera entre otras propiedades por la inducción magnética.

Se puede hacer una primera clasificación elemental de este tipo de máquinas trifásicas a partir del tipo de rotor (parte rotatoria del motor), del cual se tienen las siguientes clases:

- **Rotor Jaula de Ardilla:** No presenta la posibilidad de tener acceso a ningún parámetro del rotor, ya que se encuentra completamente aislado del estator o de posibles terminales hacia la parte exterior del motor
- **Rotor de anillos deslizantes:** Permite el acceso a las terminales del rotor empleando escobillas, por lo que se pueden modificar los parámetros de éste, y en especial la resistencia que modifica el valor de su velocidad en el cual se encuentra el par máximo, como se explicará más adelante.

Los primeros usos industriales que se tienen registrados con este tipo de máquinas, se encuentran en las aplicaciones de velocidad constante. Puesto que la velocidad de sincronía depende del número de polos y de la frecuencia de alimentación en el estator, para implementar aplicaciones de velocidad variable se requirió del desarrollo de sistemas de electrónica de potencia para lograr cambiar la velocidad del campo magnético rotatorio, mediante la modificación de la frecuencia fundamental de las señales de alimentación del estator.

En la actualidad, los motores de inducción se pueden encontrar en más del 70 % de las aplicaciones de accionamientos eléctricos, incluyendo velocidad constante y variable, lo que se logra sólo cuando se

puede modificar la velocidad de sincronismo o el número de polos del motor; debido a esto, los motores de inducción reciben el nombre bien ganado de caballos de batalla de la industria.

Otra clasificación que se puede hacer de este tipo de motores es a partir del número de fases que emplean en su alimentación, y de acuerdo con esto se pueden encontrar como:

- Trifásicos.
- Bifásicos.
- Monofásicos.

Siendo los más importantes los trifásicos y los monofásicos, es esencial tener en cuenta que en el estudio convencional en estado permanente de los motores de inducción siempre considera que éstos, están balanceados, que no presentan saturación magnética, y que sus parámetros son invariantes en el tiempo, además de que se tiene que remarcar que el estudio de los motores de inducción trifásicos se puede realizar a través del empleo de circuitos equivalentes en estado permanente monofásicos, que después sirven de soporte para el análisis de motores trifásicos.

## 7.2 Principios básicos del motor de inducción trifásico

El estudio de los motores de inducción trifásicos se inicia a partir de la definición de la velocidad de sincronía, que es básica en la definición del circuito equivalente y del deslizamiento. La velocidad de sincronía se define como:

$$N_s = \frac{120f}{p} = \frac{120 \text{ frecuencia}}{\text{número de polos}} = [rpm]$$

El deslizamiento, es esencialmente la diferencia entre la velocidad de sincronía y la velocidad del rotor ( $N_r$ ), por lo que se tiene que:

$$S = \frac{N_s - N_r}{N_s}$$

A partir de aquí, el deslizamiento porcentual se expresa como:

$$S = \left( \frac{N_s - N_r}{N_s} \right) \times 100$$

Si el rotor se encuentra en reposo (sin movimiento) se tiene que  $s = 1$  y cuando el motor se encuentra en vacío (sin carga) el valor de “s” tiende a 0, por lo que se puede determinar que la velocidad del rotor se obtiene mediante la expresión:

$$S = (1 - s)N_s$$

Tomando en cuenta que la mayoría de motores de inducción trabajan con valores de deslizamiento que cumplen con la condición  $s < 5\%$ , se observa que el margen de valores del deslizamiento se restringe.

En forma análoga a lo planteado, la frecuencia del rotor se puede determinar a partir de:

$$f_{rotor} = \left( \frac{N_s - N_r}{N_s} \right) f_{estator}$$

Sustituyendo aquí la ecuación anterior:

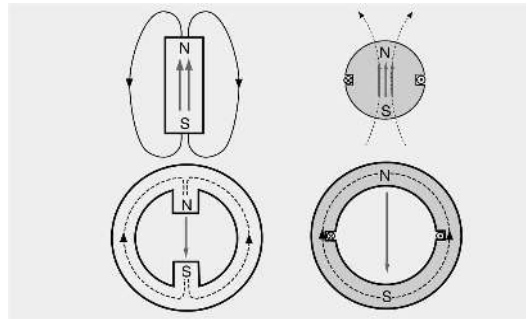
$$f_{rotor} = S f_{estator}$$

Utilizando la ecuación anterior se puede obtener los datos de la Tabla 1.

**Tabla 7.1** Frecuencia fija de 60 Hz, con diferente número de polos magnéticos.

$P$	$N_s$
2	3600
4	1800
6	1200
8	900
10	720
12	600

Los polos magnéticos se generan por el flujo de la corriente sobre un conductor, como lo muestra la figura 7.1, en la que se puede observar cómo se genera un sistema de dos polos magnéticos tanto en el rotor como en el estator. El número de polos magnéticos es fundamental en el funcionamiento del motor de inducción, por lo que para incrementar el número de polos se cambia el diseño físico del motor y de esta manera, se puede cambiar la velocidad de sincronía.



**Figura 7.1** Máquina de dos polos magnéticos, para el estator y para el rotor.

Como se puede ver en la figuras 7.1, para alterar el número de polos magnéticos, sólo es necesario el cambio en la estructura física del motor. Una vez que se genera el número de polos magnéticos deseados,

teniendo en cuenta que la corriente cambia con el tiempo, éstos tenderán a desplazarse como se muestra en la figura 7.2, lo que permite tener un campo magnético rotatorio que se mueve a la velocidad de sincronía.

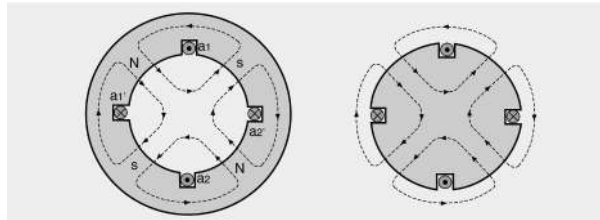


Figura 7.2 Máquina de cuatro polos.

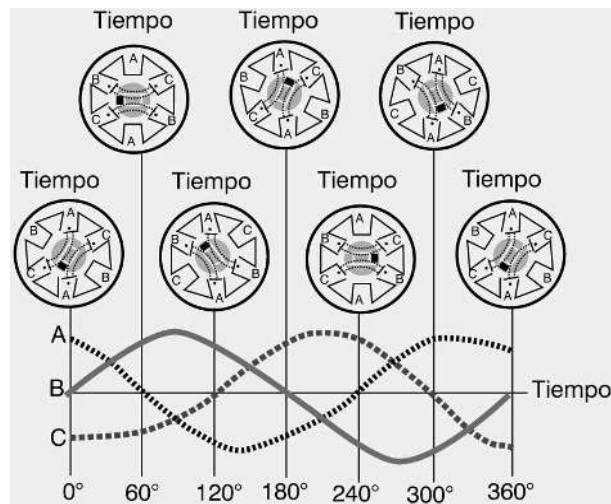


Figura 7.3 Campo magnético rotatorio.

Cuando el motor se encuentra bloqueado, la frecuencia del rotor se aproxima a la del estator,  $f_{rotor} \approx f_{estator}$ , lo que permite tener lo que se considera como un transformador en corto circuito, en donde la frecuencia de alimentación es igual a la frecuencia de salida. Para entender el funcionamiento del motor de inducción trifásico con mayor claridad, es necesario analizar la forma en que se produce el campo magnético rotatorio en el motor de inducción trifásico y la velocidad a la que gira. (Ver la figura 7.3).

### 7.3 Principio de funcionamiento del campo magnético rotatorio trifásico

El campo magnético rotatorio trifásico se puede analizar a través del estudio de un sistema balanceado, con corrientes desfasadas eléctricamente 120 grados. Tomando en cuenta que la fuerza magnetomotriz generada por cada una de las fases es:

$$B_a = K i_a(t) \cos(\theta)$$

$$B_b = K i_b(t) \cos(\theta - 120^\circ)$$

$$B_c = K i_c(t) \cos(\theta - 240^\circ)$$

se tiene que la fuerza magnetomotriz en el entre hierro es igual a:

$$B_{gap} = K i_a(t) \cos(\theta) + K i_b(t) \cos(\theta - 120^\circ) + K i_c(t) \cos(\theta - 240^\circ)$$

Las corrientes que generan esta fuerza se definen como:

$$i_a(t) = I_m \cos(\omega t)$$

$$i_b(t) = I_m \cos(\omega t - 120^\circ)$$

$$i_c(t) = I_m \cos(\omega t - 240^\circ)$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en  $B_{gap}$ :

$$B_{gap} = K I_m \cos(\omega t) \cos(\theta) + K I_m \cos(\omega t - 120^\circ) \cos(\theta - 120^\circ) + K I_m \cos(\omega t - 240^\circ) \cos(\theta - 240^\circ)$$

Aplicando en la ec. anterior, la siguiente identidad trigonométrica:

$$\cos(x) \cos(y) = (1/2) [\cos(x - y) + \cos(x + y)]$$

se obtiene que:

$$B_{gap} = \frac{3}{2} K I_m \cos(\omega t - \theta) + \frac{1}{2} K I_m [\cos(\omega t + \theta) + \cos(\omega t + \theta - 240^\circ) + \cos(\omega t + \theta - 480^\circ)]$$

Tomando en cuenta que:

$$\cos(\omega t + \theta) + \cos(\omega t + \theta - 240^\circ) + \cos(\omega t + \theta - 480^\circ) = 0$$

se tiene que la fuerza magnetomotriz total, rota a una velocidad  $\omega = 2\pi f$  con una magnitud constante igual a  $\frac{3}{2}KI_m$ , quedando definida como:

$$B_{gap} = B_m \cos(\omega t - \theta)$$

#### 7.4 Circuito equivalente para el motor de inducción

Una vez definida la velocidad de sincronía y el principio del campo magnético rotatorio, se puede iniciar con el desarrollo de un circuito equivalente monofásico en estado permanente que permita estudiar el comportamiento del motor de inducción trifásico.

El estudio se inicia al segmentar en dos partes el circuito equivalente, una para el estator y otra para el rotor. La parte que estudia el comportamiento del estator corresponde al siguiente circuito:

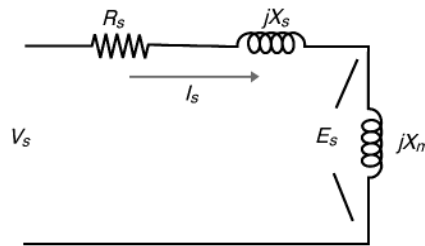


Figura 7.4 Comportamiento del estator en el motor de inducción

en donde:

$X_s$ : Reactancia de dispersión.

$R_s$ : Resistencia del estator.

$X_m$ : Reactancia magnetizante.

$E_s$ : fem en el estator.

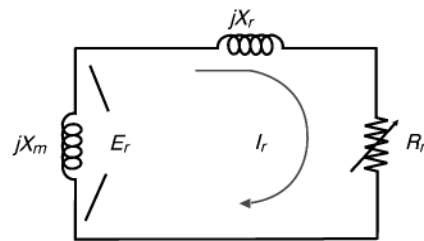
Este circuito, es para cualquier velocidad de operación y el valor del voltaje se define empleando la siguiente expresión de manera fasorial:

$$v_S = (R_s + jX_s)I_s + E_s$$

en donde las señales de alimentación de voltaje y corriente tienen la frecuencia del estator  $f_{estator}$  o  $f_s$

Por otro lado, para el rotor se tiene un circuito con parámetros similares al anterior, sin embargo hay que observar que el rotor siempre se encuentra cortocircuitado. (Ver la figura 7.5).



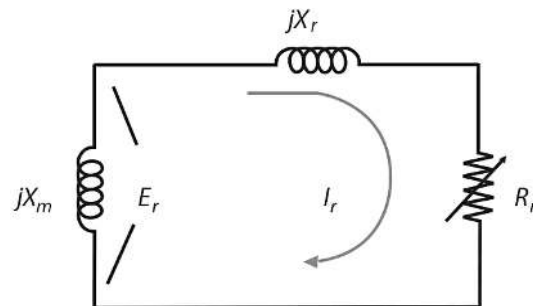


**Figura 7.5** Cortocircuito en el rotor de un motor de inducción.

Si el rotor está bloqueado, se tiene que:

$$E_r = (R_r + jX_r)I_r$$

Como la fem en el rotor es proporcional a la velocidad del campo respecto al rotor ( $s$ ) y la resistencia del rotor no cambia con la frecuencia y no se afecta con el valor de  $s$ , y dado que la reactancia  $X_r$  varía conforme cambia el valor de  $s$ , entonces se tiene el siguiente circuito (Ver la figura 7.6).



**Figura 7.6** Variación de  $X_r$  conforme cambia el deslizamiento.

en donde:

$$X_r = 2\pi f_r L_r$$

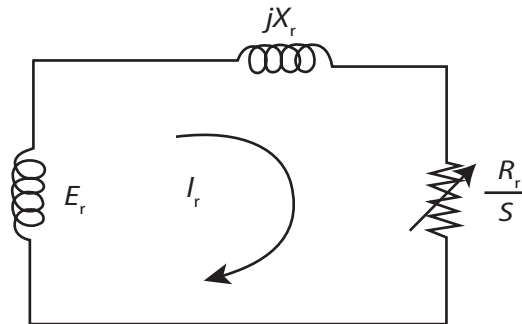
Por lo tanto:

$$s * E_r = (R_r + js * X)I_r$$

y de aquí se tiene que:

$$I_r \frac{s * E_r}{R_r + jX_r * s} = \frac{E_r}{\frac{R_r}{s} + jX_r}$$

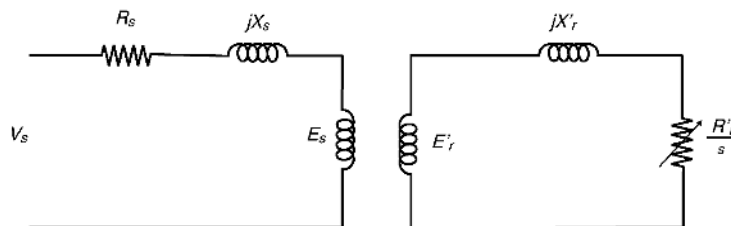
Esto se hace debido a la necesidad de calcular la corriente encontrando un valor similar, empleando  $f_s$ , si se cambia la resistencia  $R_r$  por  $R_r/s$  (Ver la figura 7.7).



**Figura 7.7** Cálculo de la corriente  $I_r$ , si se cambia  $R_r$  por  $R_r/s$ .

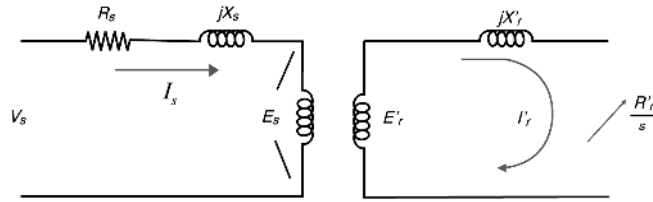
Así, se tiene un circuito similar al transformador, y si referenciamos el circuito del rotor hacia el estator entonces se puede representar de la siguiente manera:

$$E'_r = E_r \cdot a_t = E_s$$



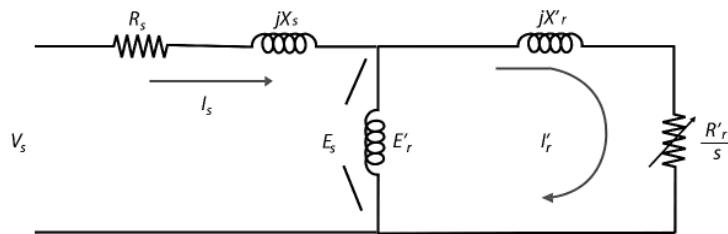
**Figura 7.8** Similitud entre un transformador y un motor de inducción.

en donde  $a_t$  es la relación de transformación.



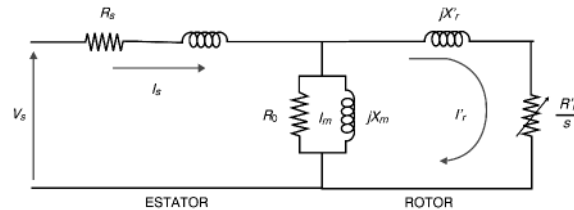
**Figura 7.9** Equivalencia eléctrica entre un transformador y un motor de inducción.

Empleando la relación anterior,  $E'_r = E_r \cdot a_t = E_s$ , se puede referir el circuito y eliminar el de acoplamiento magnético, encontrando así un arreglo equivalente, que solamente tiene un sistema eléctrico. Siempre se tiene que tener presente que este circuito es sólo una representación eléctrica del motor; físicamente el motor se encuentra, aislado eléctricamente el estator y el rotor. (Ver la figura 7.10).



**Figura 7.10** Representación eléctrica del motor de inducción.

Si a este circuito se le adicionan las pérdidas en el núcleo principalmente por histéresis y por efecto de corrientes parásitas, entonces se puede describir de la siguiente manera: (Ver la figura 7.11).



**Figura 7.11** Circuito equivalente monofásico.

En términos fasoriales, la rama de la corriente de vacío se puede definir de la siguiente forma:

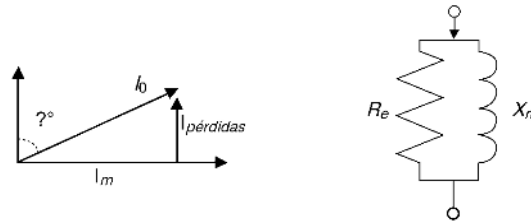


Figura 7.12 Diagrama fasorial de la corriente de vacío.

Si se divide la resistencia del rotor en dos componentes, se tiene que:

$$\frac{R'_r}{s} = R'_r + R_r \left[ \frac{1-s}{s} \right]$$

Para incluir la potencia mecánica entregada, se presenta el siguiente circuito equivalente:

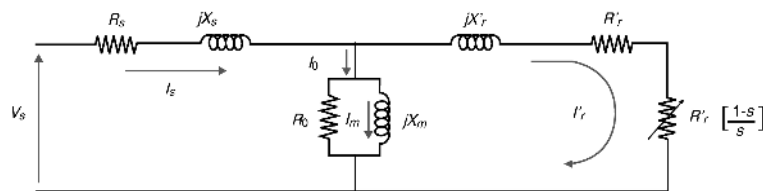


Figura 7.13 Circuito equivalente de potencia.

en el que cada parámetro se puede definir empleando el siguiente diagrama:

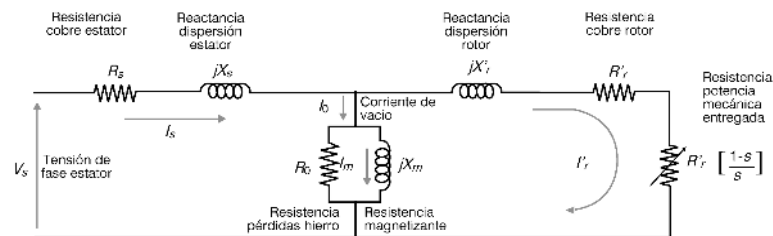


Figura 7.14 Circuito equivalente monofásico completo.

Con esto, se logra tener un circuito monofásico en estado permanente que satisface las siguientes consideraciones, que cumplen los motores industriales:

- Cuando se tiene un deslizamiento de operación en vacío (sin carga), el factor de potencia es inductivo porque la rama del rotor queda en circuito abierto (f.p.  $\approx 0.23$ ).
- Con la carga nominal,  $s$  tiene un valor bajo, y el factor de potencia es alto, f.p.  $\approx 0.85$ .
- El voltaje de alimentación en el estator, es muy próximo a la fem en el rotor.
- La corriente del estator es mayor que la corriente de vacío.

### 7.5 Circuito equivalente aproximado

Se puede encontrar un circuito equivalente aproximado, si se toman en cuenta las siguientes condiciones que se cumplen en cualquier motor de inducción industrial. La primera, es que el voltaje en el estator es aproximadamente igual a la fem generada en el estator; esto es,  $V_s \approx E_s$ . La segunda condición, es que la corriente de vacío es de una magnitud mucho menor que la corriente del estator; es decir,  $I_o \ll I_s$ . Además de considerar que las pérdidas en el devanado del estator son pequeñas, la reactancia de dispersión del estator se minimiza reduciendo la longitud media de las vueltas en cada bobina, así como las laminaciones se hacen delgadas para disminuir las pérdidas en el núcleo, con lo que es posible obtener un circuito equivalente aproximado, (Ver la figura 7.15).

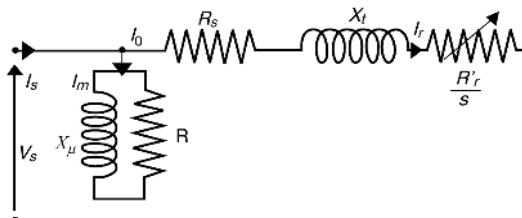


Figura 7.15 Circuito equivalente aproximado.

### 7.6 Diagrama de potencias

Una parte muy importante en el estudio del comportamiento del motor de inducción, es el diagrama de potencias del sistema trifásico, ya que a partir de éste, se puede entender el flujo de potencias en esta máquina eléctrica.

Empleando el circuito equivalente monofásico, en la figura 7.16, se presenta el diagrama del flujo de potencias, iniciando con la potencia de entrada, las pérdidas en el cobre del estator, la potencia del

entre-hierro, las pérdidas en el cobre del rotor, las pérdidas de conversión, las pérdidas mecánicas, y la potencia de salida.

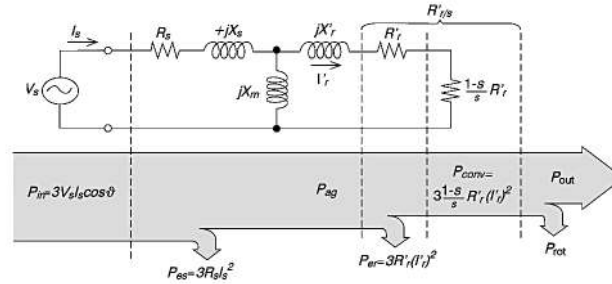


Figura 7.16 Diagrama de potencias.

En esta figura se tiene que:

- $I_s$ : corriente de fase RMS.
- $V_s$ : voltaje de fase RMS.

Las potencias presentadas, se pueden definir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 P_{in} &= 3I_s V_s \cos(\theta) \\
 P_{cs} &= 3R_s I_s^2 \\
 P_{ag} &= 3 \times \frac{1}{2} R'_r (I'_r)^2 \\
 P_{cr} &= 3R_r (I_r)^2 \\
 P_{conv} &= 3 \times \frac{1-s}{s} R'_r (I'_r)^2 \\
 P_{ag} &= P_{conv} + P_{cr} \\
 P_{conv} &= (1-s)P_{ag} \\
 P_{out} &= P_{conv} - P_{mec}
 \end{aligned}$$

Empleando la potencia de entrada y de salida, la eficiencia en el motor se puede definir como:

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} \times 100\%$$

por lo que el par inducido se expresa por:

$$T_{conv} = \frac{(1-s)P_{ag}}{\omega_r}$$

$$T_{conv} = \frac{P_{ag}}{\omega_s}$$

donde:

- $\omega_r$  : velocidad angular del rotor [rad/seg].
- $\omega_s$  : velocidad angular de sincronía [rad/seg].

Usando el circuito equivalente aproximado, se puede deducir la característica mecánica par-velocidad del motor de inducción, y esta curva se emplea para determinar de una manera clara, las características elementales del comportamiento del motor.

### 7.7 Ecuación del par electromagnético empleando el circuito aproximado

Si se emplea el circuito equivalente aproximado, figura 7.19, se pueden deducir las ecuaciones para el par electromagnético. También conviene utilizar este circuito por la facilidad de encontrar la corriente en el rotor, y sustituir su valor en la potencia del entre-hierro:

$$I_r = \frac{V_s}{R_s + \frac{R_r}{s} + jX_T}$$

$$T = \frac{3|V_s|^2}{\omega_s} = \frac{\frac{R_r}{s}}{(R_s + \frac{R_r}{s})^2 + X_T^2}$$

donde:

$$jX_T = j(X_s + X_r)$$

Para determinar el par máximo, se puede partir de la definición de máximo de una función, esto es, se puede emplear la derivada de la función del par con respecto al elemento  $(\frac{R_r}{s})$  :

$$\frac{\partial T}{\partial \frac{R_r}{s}} = 0$$

Si  $R_s^2 + X_T^2 = (\frac{R_r}{s})^2$  entonces:

$$s_{mx} = \frac{R_r}{\sqrt{R_s^2 + X_T^2}}$$

$$T_{mx} = \frac{3|V_s|^2}{2\omega_s \left( R_s + \sqrt{R_s^2 + X_T^2} \right)}$$

Si  $R_s$  se desprecia se tiene que:

$$s_{mx} = \frac{R_r}{X_T}$$

$$T_{mx} = \frac{3|V_s|^2}{2\omega_s X_T}$$

### 7.8 Ecuación del par electromagnético empleando el circuito equivalente

Una forma alternativa de obtener esta expresión es usando el circuito equivalente, y para esto se requiere simplificar el circuito con Thévenin para poder determinar la corriente en el rotor. Entonces si se desprecia la resistencia  $R_0$  de pérdidas del hierro, el circuito equivalente por fase queda de la siguiente forma:

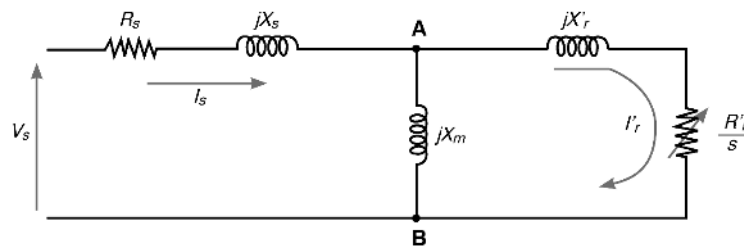


Figura 7.17 Circuito equivalente aproximado.

Calculando el equivalente de Thévenin entre A y B se tiene que:

$$V_{TH} = \frac{(V_s)(jX_m)}{R_s + j(X_s + X_m)}$$

$$Z_{TH} = \frac{R_s + j(X_s)(jX_m)}{R_s + j(X_s + X_m)}$$



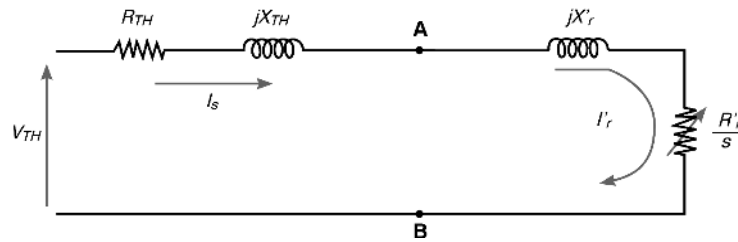


Figura 7.18 Equivalente de Thévenin.

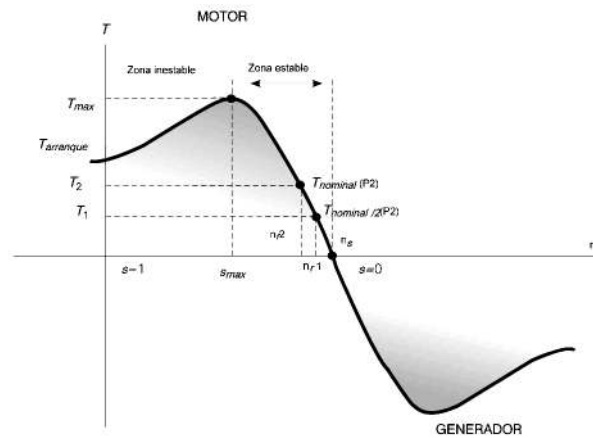


Figura 7.19 Curva Par-Velocidad para el motor de inducción trifásico.

$$I'_r = \frac{V_{TH}}{R_{TH} + \frac{R'_r}{s}} + j(X_{TH} + X'_r)$$

$$|I'_r| = \frac{V_{TH}}{\sqrt{\left(R_{TH} + \frac{R'_r}{s}\right)^2 + (X_{TH} + X'_r)^2}}$$

$$P_{ag} = 3 \frac{R'_r}{s} I_r^2 = \frac{3V_{TH}^2 \frac{R'_r}{s}}{\left(R_{TH} + \frac{R'_r}{s}\right)^2 + (X_{TH} + X'_r)^2}$$

$$T = \frac{P_{ag}}{\omega_s} = \frac{3V_{TH}^2 \frac{R'_r}{s}}{\omega_s \left[ \left(R_{TH} + \frac{R'_r}{s}\right)^2 + (X_{TH} + X'_r)^2 \right]}$$

Empleando cualquiera de las ecuaciones de par, se obtiene una función en términos del deslizamiento,  $T = f(s)$ , y si se hace un barrido de éste se puede determinar la curva mecánica de cada motor que depende de los parámetros característicos.

Se puede observar que este tipo de motores tiene un par de arranque que les permite operar sin ningún tipo de arrancador auxiliar, a diferencia de los motores monofásicos que requieren de algún tipo de mecanismo para su arranque.

A partir de la figura 7.19 se puede ver que en la zona de operación estable, con un incremento de carga del punto de operación  $P_1$  al punto  $P_2$ , se tiene un decremento de la velocidad de  $n_{r1}$  a  $n_{r2}$  y existe un incremento del par electromagnético por lo que tiende a conservarse el punto de operación. Si se hace el mismo análisis en la zona inestable, se puede ver que esto no se cumple, ya que incrementos de carga causan incrementos de velocidad alejándose del punto de operación por lo que la zona estable mecánica se puede interpretar como el lugar donde se encuentra al menos un punto de operación.

No se debe de olvidar que al emplear un motor de inducción se tiene que pensar que un motor es un sistema bi-direccional de energía que transforma la energía eléctrica en mecánica y viceversa, como se puede ver en la figura 7.20, por lo que existe la zona de generador que aparece cuando la velocidad del rotor es mayor que la velocidad de sincronía.

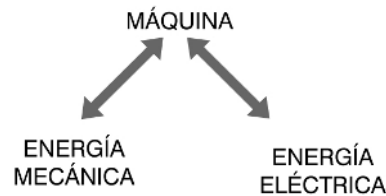


Figura 7.20 Motor como sistema bi-direccional de energía.

## 7.9 Análisis del comportamiento dinámico de un motor de inducción

Una de las pruebas más importantes para el estudio dinámico es un arranque con carga y uno en vacío, como se muestra en la figura 7.21, en la que se puede ver que la corriente en estado permanente, cuando el motor tiene carga, tiene una amplitud mayor. Esto se puede deducir empleando el circuito equivalente en donde se asume que un motor con carga tiene un deslizamiento diferente de cero ( $S \neq 0$ ), el cual puede ser muy cercano a cero, cuando el motor trabaja en vacío ( $S \approx 0$ ). En el momento en que se aplica carga nominal en un motor convencional el valor del deslizamiento se aproxima al 5%, y en la mayoría de los casos depende del tipo de NEMA (clase del motor), lo que genera un incremento en la corriente del rotor, mientras que en vacío se puede despreciar esta componente y se puede asumir que sólo se tiene la componente de corriente de vacío. Por otra parte, se observa un incremento en el

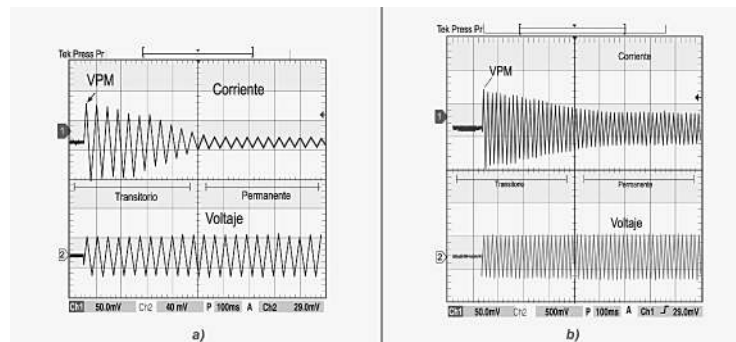
tiempo de establecimiento del valor en estado permanente (este tiempo inicia cuando se extingue el estado transitorio, el cual aparece en el momento de energizar el motor), y esto se debe al incremento en la constante de tiempo mecánica del motor ya que al adicionarle carga se incrementa la componente de inercia ( $J$ ) debida a la carga mecánica, como lo demuestra la ecuación diferencial mecánica de equilibrio de primer orden:

$$T - T_L = J \frac{d\omega(t)}{dt} + \beta\omega(t)$$

en donde de manera general se tiene que:

- $T$ : Par electromagnético.
- $\beta$ : Coeficiente de fricción.
- $T_L$ : Par de carga.

Se tiene que notar que el valor pico máximo de la corriente en el arranque, **VPM**, no depende del valor de la carga. En el circuito equivalente se puede sustituir el valor unitario del deslizamiento ( $S = 1$ ), que se tiene cuando el motor arranca, y se puede demostrar que el **VPM** sólo depende de los parámetros de la máquina eléctrica así como de los voltajes del estator y no de la carga.



**Figura 7.21** Corriente (figura superior) y voltaje del estator (figura inferior) de un arranque en vacío (a), y un arranque con carga (b).

En algunos casos (en especial para máquinas que no son fraccionarias), este pico de corriente impide que se puedan arrancar los motores a plena línea, lo cual es el porqué de la corriente de demanda inicial. Esta es una de las razones por la que son necesarios los arrancadores, sean de estado sólido o convencionales como lo son los que cuentan con auto-transformador o un arranque estrella-delta, como se mencionará más adelante. En la actualidad, los arrancadores convencionales se han sustituido por arrancadores electrónicos, que no sólo tienen la función de realizar un arranque suave sino que además ejecutan funciones de protección y de control, así como de automatización.

### 7.10 NEMAS y tipos de arranque

El tipo de NEMAS, permite clasificar los motores de inducción de acuerdo con sus características elementales, principalmente el valor que pueden tener en el par de arranque, la corriente nominal, la corriente de arranque y el par nominal. Como se muestra a continuación, existen cuatro tipos básicos de motores:

**Motor clase A:** Tiene un par de arranque bajo con un deslizamiento  $s < 5\%$  durante su valor nominal. La corriente de arranque puede ser de 5 a 8 veces su valor nominal, y también presenta un rendimiento alto. El mayor uso de este tipo de motor se encuentra en las bombas, ventiladores y máquinas herramienta, con valores de hasta 6 kW, y en potencias mayores a 6 kW se usan sistemas de arranque para limitar la corriente, (Ver la fig. 7.22).

**Motor clase B:** Tiene un par de arranque similar al clase A, con una corriente de arranque que se puede considerar menor en un 25%, el par nominal se encuentra con un deslizamiento  $s < 5\%$ , el rendimiento es alto, y estos motores son de los más utilizados en aplicaciones industriales.

**Motor clase C (Doble Jaula):** Tiene un par de arranque elevado (dos veces el par nominal, aproximadamente), con una corriente de arranque baja, el par nominal se encuentra con valores de deslizamiento  $s < 5\%$ , tiene un rendimiento alto con aplicaciones en donde se requiere un alto par de arranque, pero su par máximo es menor a los motores de clase A.

**Motor clase D:** Presenta un par de arranque muy elevado (mayor a tres veces el par nominal), con una corriente de arranque baja y un par nominal con deslizamiento entre el 7.5% y el 16.5%, su rendimiento es bajo y sus principales requerimientos son en aplicación de accionamientos intermitentes que requieren acelerar muy rápido.

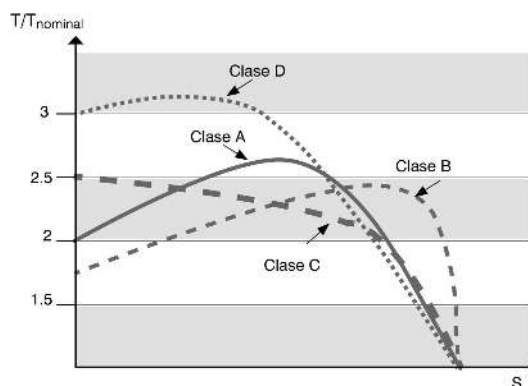


Figura 7.22 Tipos de NEMAS.

### 7.11 Arranque estrella - delta

El arranque estrella-delta se puede definir empleando los esquemas generales de los sistemas en delta y en estrella, esto es, especificando un sistema en estrella y en delta a partir de los principios básicos de las relaciones de línea y de fase para corrientes y voltajes en sistemas balanceados, (Ver la figura 7.23).

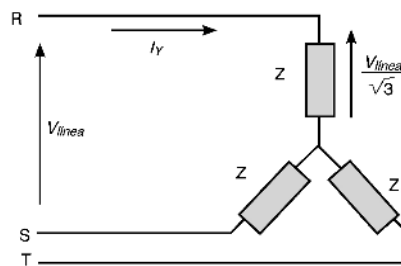


Figura 7.23 Arranque estrella-delta

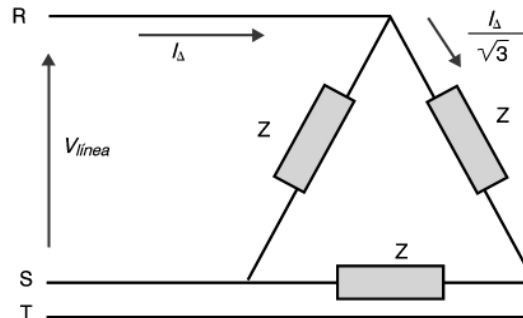
$$I_Y = \frac{V_{línea}}{\sqrt{3}Z}$$

El par de arranque en un sistema con conexión estrella, se puede definir empleando la siguiente expresión, que representa el par que desarrolla el motor cuando arranca, y que se encuentra con las relaciones básicas de un sistema en estrella:

$$T_{arranque-Y} = \frac{3R'_r(I_{r-arranque-Y})^2}{\omega_s}$$

Para el sistema en delta, empleando las leyes de circuitos eléctricos elementales, se tiene que el valor de la corriente en delta es igual a:

$$I_{\Delta} = \sqrt{3} \frac{V_{línea}}{Z}$$



**Figura 7.24** Representación del sistema en delta.

Se puede definir el par de arranque en un sistema en delta, mediante la siguiente expresión:

$$T_{\text{arranque}-\Delta} = \frac{3R'_r}{\omega_s} \left[ \frac{I_{r-\text{arranque}-\Delta}}{\sqrt{3}} \right]^2$$

por lo que se puede deducir, que un arranque en estrella, consume una corriente menor, pero de la misma forma se genera un par menor de arranque y esto se tiene que considerar al considerar la carga que desplazará, además de encontrar la relación entre las corrientes de arranque en estrella y delta, así como las relaciones del par de arranque, las cuales se definen por las ecuaciones siguientes:

$$I_Y = \frac{I_{\Delta}}{3}$$

$$T_{\text{arranque}-\Delta} = 3T_{\text{arranque}-Y}$$

Las siguientes respuestas muestran el arranque de un motor de inducción empleando un arrancador en estrella-delta, y lo que sucede cuando este arrancador cambia por un arranque delta-estrella. En estas gráficas se puede apreciar la disminución de la corriente de arranque cuando el motor se arranca con una conexión en estrella-delta, la cual es superior cuando se arranca en conexión delta-estrella. Se tiene que tomar en cuenta que existe un punto de interrupción de la energía, lo que deja al motor con voltaje cero durante un periodo transitorio. Esto puede ser relevante si este estado transitorio es prolongado y afecta los requerimientos del sistema mecánico de la carga.

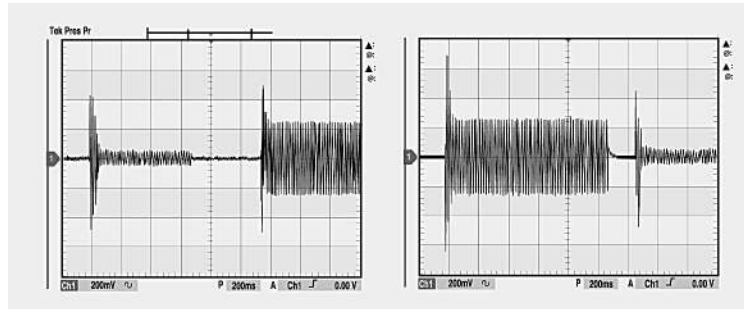


Figura 7.25 Conexión estrella-delta al arranque; gráfica de la corriente.

## 7.12 Motores de inducción con diferentes características en el rotor

Los motores de inducción pueden cambiar sus características elementales a través de su diseño, y esto permite que la curva mecánica par-velocidad tenga comportamientos diferentes de acuerdo con los requerimientos de la carga, por lo tanto, es necesario conocer éstos, así como las zonas de operación que son esenciales para su buen desempeño.

Un buen ejemplo de cómo se puede cambiar el desempeño del motor de inducción se presenta al variar el valor de la resistencia del rotor (aquí se tiene que recordar que con un valor bajo de resistencia el rendimiento del motor es alto, y el par de arranque es bajo); por otro lado, con un valor de resistencia del rotor alto, se tiene un par de arranque alto, pero un bajo rendimiento. Una buena alternativa es tener un sistema que pueda combinar las dos características de valores de resistencia dependiendo de las necesidades.

Se tiene que recordar que la reactancia en el rotor depende de la frecuencia del rotor, y ésta del valor del deslizamiento, por lo que es lógico que una reducción de la resistencia del rotor a través del aumento de la sección de la barra mejora el rendimiento, y una reducción de la sección útil, genera un aumento de la resistencia del rotor, lo que provoca un incremento en el par de arranque.

El cambio en el diseño de las barras en el rotor da lugar a tres posibilidades que son atractivas para la industria: la primera es tener barras de secciones pequeñas, las cuales presentan una alta resistencia y una baja reactancia en el rotor; la segunda es tener barras profundas con una resistencia baja y una reactancia elevada; y la tercera es la de los rotores de doble jaula que tienen las dos características anteriores.

En los motores de doble jaula de ardilla se cambian los valores de la resistencia y reactancia del rotor de acuerdo con los valores de velocidad.

### Prácticas de laboratorio

En la página web del libro se encuentran las prácticas **Motor de inducción trifásico jaula de ardilla** y **Motor de inducción trifásico rotor devanado**.



#### 7.13 Problemas del motor de inducción trifásico

##### Problema 7.1

Un motor trifásico de inducción tipo jaula tiene los siguientes datos nominales: 480 V/Y/50 Hp/4 polos/60 Hz, con una resistencia en el estator de  $0.1\Omega$ , una reactancia de  $0.35\Omega$ , una reactancia del rotor de  $0.4\Omega$  y una resistencia del rotor de  $0.125\Omega$ .

Las pérdidas (trifásicas) en el núcleo y las rotacionales son de 1200 W y 900 W respectivamente. Considérese el circuito equivalente monofásico con la reactancia de magnetización a la izquierda (en terminales de la fuente).

El motor se arranca en vacío (tomar en cuenta que en vacío, la corriente del rotor reflejada al estator  $I_r$  es igual a cero) y demanda una corriente (de magnetización) de 21 A con un factor de potencia igual a 0. Al acoplarle cierta carga mecánica el deslizamiento es de 0.025.

Determinar la reactancia de magnetización, el par electromagnético y la eficiencia del motor. (Ver la figura 7.26).

##### Solución

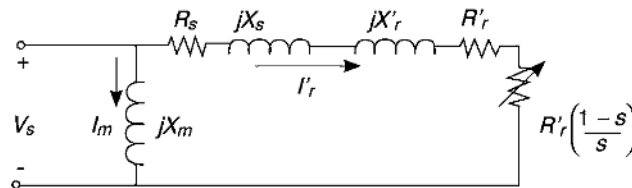


Figura 7.26 Motor trifásico de inducción para el problema 1.

En vacío:  $I_m = 21\text{A}$ ;  $fp = 0$ .

$$\hat{I}_m = 21 \angle -90^\circ \text{ A}$$



$$\widehat{V}_s = \frac{480}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 277.1 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$j\widehat{X}_m = \frac{\widehat{V}_s}{\widehat{I}_m} = 13.2 \angle 90^\circ \Omega$$

Con carga:

$$s = 0.025$$

$$I'_r \frac{V_s}{\left[ \left( R_s + \frac{R'_r}{s} \right) + j(X_r + X_s) \right]} = 53.8 \angle -8.4^\circ \text{ A}$$

La corriente total es:

$$I_s = (53.8 \angle -8.4^\circ) + (21 \angle -90^\circ) = (60.5 \angle -28.5^\circ) \text{ A}$$

$$fp = \cos\theta_s = \cos(-28.5^\circ) = 0.88$$

Velocidad de sincronismo:

$$n_s = \frac{120f_s}{\#polos} = \frac{(120)(60)}{4} = 1800 \text{ rpm}$$

$$\omega_s = 1800 \left( \frac{2\pi}{60} \right) = 188.5 \text{ rad/seg}$$

Potencia del entrehierro:

$$P_{g|3\phi} = 3|I'_r|^2 \frac{R'_r}{s} = 3(53.08)^2 \left( \frac{0.125}{0.025} \right) = 43.417 \text{ kW}$$

$$T_{em} = \frac{P_{g|3\phi}}{\omega_s} = \frac{43,417}{188.5} = 230 \text{ N m}$$

$$P_{salida} = P_0 = P_{em} - P_{rotacional}$$

$$P_0 = (1 - s)P_g - P_{rotacional}$$

$$= (1 - 0.025)(43,417) - 900 = 41.432 \text{ kW}$$

$$P_{entrada} = P_{in} = P_g + P_{estator} + P_{(nucleo)}$$

$$P_{in} = 43,417 + 3(60.5)^2(0.1) + 1200 = 45.715kW$$

$$\eta = \frac{P_0}{P_{in}} = \frac{41.432}{45.715} = 0.906$$

### Problema 7.2

Se tiene un motor trifásico de inducción, conectado en Y, 6 polos, VL=4000 V; f=60 Hz. Al realizar ensayos se obtuvieron los siguientes datos:

VACÍO:  $V_L = 4000V$ ;  $I_{vacío} = 7A$ ;  $P_{vacío} = 7kW$ .

ROTOR BLOQUEADO:  $V_L = 1340V$ ;  $I_{rb} = 32A$ ;  $P_{rb} = 18.2kW$ .

CORRIENTE DIRECTA:  $R_s = 0.7\Omega/fase$ .

Suponiendo que la reactancia del estator y la del rotor reflejada al estator son iguales, determinar el par electromagnético en el momento del arranque. Utilizar el circuito equivalente monofásico aproximado (rama de magnetización a la izquierda).

### Solución

Del ensayo de vacío:

$$|V_L| = 4000V \quad |V_f| = \frac{4000V}{\sqrt{3}} = 2309.401 [V]$$

$$I_f = |I_v| = 7 [A]$$

$$P_{vacío}|_{3\phi} = 7000W \rightarrow P_{1\phi} = \frac{7000}{3} = 2,333.3 [W]$$

$$|Z_v| = \frac{V_f}{I_f} = \frac{2309.401V}{7A} = 329.91444[\Omega]$$

$$P_{1\phi} = I_f^2 R_v \rightarrow R_v = \frac{P_{1\phi}}{I_f^2} = \frac{2,333.33}{(7)^2} = 47.619 [\Omega]$$

$$X_v = \sqrt{Z_v^2 - R_v^2} = 326.46 [\Omega]$$

Ensayo de rotor bloqueado:

$$V_L = 1340 V \rightarrow V_f = \frac{1340 V}{\sqrt{3}} = 773.65 [V]$$

$$I_{rb} = 32 \text{ A} \rightarrow I_f = 32 \text{ [A]}$$

$$Z_{rb} = \frac{V_{rb}}{I_{rb}} = \frac{773.65}{32} = 24.1765 \text{ [\Omega]}$$

$$P_{1\phi} = I_f^2 R_{rb} \rightarrow R_{rb} = \frac{P_{1\phi}}{I_f^2} = \frac{(18200/3)}{(32)^2} = 5.86 \text{ [\Omega]}$$

$$X_{rb} = \sqrt{Z_{rb}^2 - R_{rb}^2} = 23.45 \text{ [\Omega]}$$

$$X_s = 0.5X_{rb}$$

$$X'_r = 0.5X_{rb}$$

Además

$$R_s = 0.7 \text{ [\Omega]}$$

$$X_s = 11.73 \text{ [\Omega]}$$

$$X'_r = 11.73 \text{ [\Omega]}$$

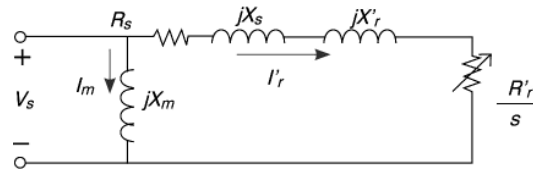
Para calcular el par electromagnético:

$$R_{aux} = R_{rb} - R_s = 5.86 - 0.7 = 5.16 \text{ [\Omega]}$$

$$R'_r = R_{aux} \left( \frac{X'_r + X_\phi}{X_\phi} \right)^2$$

$$X_\phi = X_\nu - X_s = 326.46 - 11.75 = 314.73$$

$$R'_r = 5.552 \text{ [\Omega]}$$



**Figura 7.27** Circuito para el problema 2.

$$V_s = 2309.401 \text{ [V]}$$

$$Z_{sr} = (R_s + R'_r) + j(X_s + X'_r)$$

$$= 6.252 + j23.456$$

$$Z_{st} = 24.275 \angle 75.075^\circ \text{ [\Omega]}$$

$$I'_r = \frac{V_s}{Z_{sr}} = \frac{2309.401}{24.275 \angle 75.075^\circ} = 95.135 \angle -75.075^\circ \text{ [A]}$$

$$P_g|_{1\phi} = |I_r|^2 R'_r = (95.135)^2 (5.552) = 50,278.223 \text{ [W]}$$

$$P_g|_{3\phi} = 150,834.67 \text{ [W]}$$

$$\omega_s = n_s \left( \frac{2\pi}{60} \right) = \left( \frac{120 f_s}{\# \text{ polos}} \right) = 125.664 \text{ [rad/seg]}$$

$$T_{em} = \frac{P_g}{\omega_s} = 1200.3 \text{ [N} \cdot \text{m]}$$

### Problema 7.3

Un motor de inducción trifásico de 460 V, 60 Hz y cuatro polos gira a 1740 rpm cuando opera a plena carga. Este motor tiene los siguientes parámetros por fase:

$$R_1 = 0.25 \text{ [\Omega]}$$

$$R_2 = 0.2 \text{ [\Omega]}$$

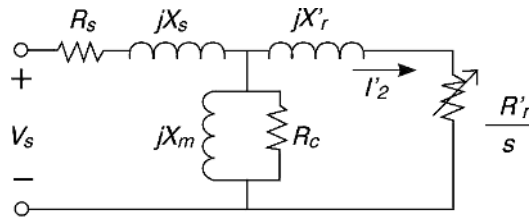
$$X_1 = X'_2 = 0.5 \text{ [\Omega]}$$

$$X_m = 30 \text{ } [\Omega]$$

Determinar (a) la corriente por fase al arrancar el motor, (b) la torca por fase al arrancar el motor, (c) el coeficiente de deslizamiento a plena carga y (d) la corriente por fase demandada por el motor a plena carga.

### Solución

El circuito equivalente es:



**Figura 7.28** Circuito equivalente para el problema 3.

Al arrancar el motor:

$$\eta_m = 0 \rightarrow s = 1$$

Se tiene que  $R_c \rightarrow \infty$ , y la impedancia de entrada es:

$$\begin{aligned} Z_i &= (R_s + jX_s) + jX_m || (R'_2 + jX'_2) \\ &= (0.25 + j0.5) + j30 || (0.2 + j0.5) \end{aligned}$$

$$Z_i = 1.088 \angle 66^\circ \text{ } [\Omega]$$

a) La corriente de arranque por fase es:

$$I_{arr} = \frac{V_\phi}{Z_i} = \frac{265.6 \text{ V}}{1.088 \angle 66^\circ \Omega} = 244.2 \angle -66^\circ \text{ } [A]$$

b)  $\tau_{arr} = \frac{I'_2}{\omega_{sin}} \frac{R'_2}{s}$  donde para  $s = 1$  se tiene que:

$$(I'_2)^2 = \frac{V_{th}^2}{(R_{th} + R'_r)^2} + (X_{th} + X'_r)^2$$

pero;

$$R_{th} \cong \left( \frac{X_m}{X_s + X_m} \right)^2 R_s = 0.242 \text{ } [\Omega]$$

$$R_{th} \cong X_s = 0.5 \text{ } [\Omega]$$

$$V_{th} \cong \frac{X_m}{X_s + X_m} V_s = 261.2 \text{ } [V]$$

así que;

$$(I_2')^2 = 57,080.5 \text{ } A^2$$

Y con  $\omega_s = \frac{\pi f_s}{p} = 188.5 \text{ rad/seg}$ , se llega a:

$$\tau_{arr} = \frac{57,080.5}{188.5} (0.2) = 60.6 \text{ } [N \cdot m]$$

c) En plena carga:

$$s = \frac{1800 - 1740}{1800} = 0.033$$

d) Ahora se tiene:

$$\frac{R_2'}{s} = \frac{0.2}{0.033} = 6 \text{ } [\Omega]$$

Así que:

$$Z_i = (R_s + jX_s) + jX_m || (R_2' + jX_2)$$

$$Z_i = 6.202 \angle 19.7^\circ \text{ } [\Omega]$$

se tendrá:

$$I_{pc} = \frac{460/\sqrt{3} \text{ } V}{6.202 \angle 19.7^\circ} \Omega$$

$$= 42.8 \angle -19.7^\circ \text{ } A$$

Nótese la fuerte reducción en la corriente demandada por el motor.

**Problema 7.4**

Un motor de inducción trifásico con los datos de placa 460 V, 15 Hp, 60 Hz, 1728 rpm, cuatro polos, entrega potencia nominal cuando la carga se acopla en la flecha. Las pérdidas por fricción y rotacionales son de 750 W. Para condiciones nominales determinar:

- La potencia mecánica desarrollada incluyendo las pérdidas.
- La velocidad síncrona en rpm.
- El deslizamiento.
- Las pérdidas en el cobre del rotor.

**Solución**

- a) Para la potencia mecánica desarrollada por el motor se tiene que

$$P_{out} = (746 \text{ W/HP})(15 \text{ HP}) = 11.19 \text{ kW}$$

$$P_{mec} = 11.19 + 0.75 = 11.94 \text{ [kW]}$$

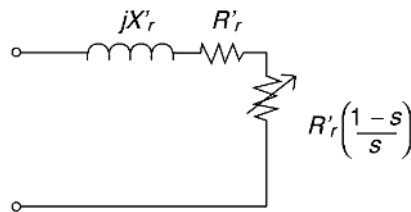
- b) La velocidad del motor en rpm se calcula usando la frecuencia de alimentación:

$$n_s = \frac{120f_s}{4} = 1800 \text{ [rpm]}$$

- c) El deslizamiento del motor se obtiene con la velocidad nominal y la velocidad síncrona:

$$s = \frac{1800 - 1728}{1800} = 0.04 = 4\%$$

- d) El circuito equivalente del rotor es:



**Figura 7.29** Circuito equivalente del rotor del problema 4.

- e) La analogía es:

$$\frac{P_{cobre}}{P_{mec}} = \frac{R'_r}{\frac{R'_r}{s}(1-s)} = \frac{s}{s-1}$$

$$P_{cobre} = \frac{s}{s-1} P_{mec}$$

$$= \left( \frac{0.04}{1-0.04} \right) (11.94 kW)$$

$$= 497.5 [W]$$

**Problema 7.5** Un motor trifásico tipo jaula de ardilla con los datos de placa 10 Hp, 220 V, 60 Hz, 1746 rpm, 4 polos, está conectado en estrella y tiene los siguientes parámetros:

$$R_s = 0.4 [\Omega]$$

$$R_r = 0.14 [\Omega]$$

$$R_c = \text{Circuito abierto}$$

$$X_s = 0.35 [\Omega]$$

$$X_r = 0.35 [\Omega]$$

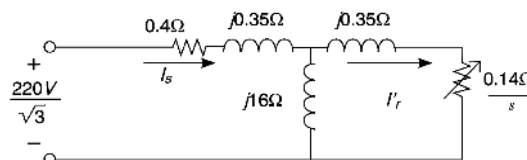
$$X_m = 16 [\Omega]$$

Las pérdidas rotacionales totales suman 360 [W] y la máquina está trabajando a condiciones nominales. Utilizando esta información:

- Dibujar el circuito equivalente mostrando los parámetros internos del motor (rotor y estator).
- Determinar el deslizamiento del motor.
- Determinar la corriente por fase en el rotor (referida al estator).
- Determinar el par total desarrollado por el motor.

### Solución

El diagrama equivalente del motor es:



**Figura 7.30** Diagrama equivalente del motor, para el problema 5.



Para la velocidad síncrona se tiene que:

$$\begin{aligned}n_s &= \frac{120f_s}{4} = 1800 \text{ [rpm]} \\n_m &= 1746 \text{ rpm} \\s &= \frac{n_s - n_m}{n_s} = 0.03\end{aligned}$$

Teniendo el deslizamiento y el valor de la resistencia del rotor, entonces se calcula la resistencia en estado permanente trabajando en condiciones nominales:

$$\frac{0.14}{s} = 4.67 \text{ } [\Omega]$$

Se calcula  $I_2$ :

$$\begin{aligned}\frac{220}{\sqrt{3}} &= (0.4 + j16.35)I_1 - (j16)I_2 \\0 &= (-j16)I_1 + (4.76 + j16.35)I_2\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema  $I_r' = I$  se obtiene que:

$$= (24.4 \angle -6.51^\circ) \text{ [A]}$$

Para encontrar el par desarrollado por el motor se tiene que:

$$\begin{aligned}k_{th} &= \frac{x_m}{X_s + X_m} = \frac{16\Omega}{16.35\Omega} + 0.9786 \\V_{th} &= K_{th}V_s = 215.3 \text{ V} \\R_{th} &= 0.383 \text{ } \Omega = K_{th}^2 R_s\end{aligned}$$

Usando el deslizamiento, la velocidad síncrona y el número de polos se tiene que:

$$T_\phi = \frac{(215.3)^2 (.014\Omega)}{(0.83 + \frac{0.14}{0.03})^2 + (0.35 + 0.35)^2} = 44.16 \text{ [N} \cdot \text{m]}$$

Pero esto es sólo por fase. El par total entregado por el motor es tres veces lo calculado:

$$\tau_{total} = 3\tau_\phi = 132.5 \text{ [N} \cdot \text{m]}$$

**Problema 7.6** Un motor de inducción entrega 50 kW a una carga conectada en el eje. Bajo esta condición de carga, la eficiencia del motor es del 88 % y las pérdidas del estator, del rotor, en el entrehierro y las mecánicas, son iguales. Determinar el deslizamiento.

**Solución**

La potencia de entrada es:

$$P_{in} = \frac{P_0}{\eta} = 56.81818 \text{ [kW]}$$

$$P_{totales} = P_{in} - P_0 = 6.81818 \text{ [kW]}$$

$$P_g = P_{in} - P_{est} - P_{núcleo}$$

$$= P_{in} - \frac{P_{totales}}{4} - \frac{P_{totales}}{4}$$

$$= 53.4091 \text{ [kW]}$$

$$P_{rotor} = \frac{P_{totales}}{4} = 1.7045455 \text{ [KW]}$$

También:

$$P_{rotor} = sP_g$$

Entonces:

$$s = \frac{P_{rotor}}{P_g} = 0.032$$

**Problema 7.7** Un motor de inducción trifásico de 25 [HP], 440 [V], 60 [Hz] y cuatro polos, tiene los siguientes parámetros:

$$R_s = 0.5 \text{ [}\Omega\text{]}$$

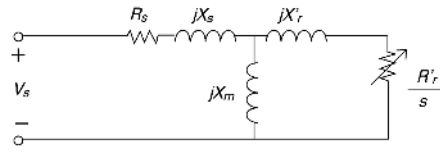
$$R'_s = 0.35 \text{ [}\Omega\text{]}$$

$$X_s = 1.2 \text{ [}\Omega\text{]}$$

$$X'_r = 1.2 \text{ [}\Omega\text{]}$$

$$X_m = 25 \text{ [}\Omega\text{]}$$

La combinación de las pérdidas mecánicas y del entrehierro suman 1250 [W], y se supone que son constantes. Para un deslizamiento del 2.5 % a voltaje y frecuencia nominales, determinar el par de salida y la eficiencia del motor.



**Figura 7.31** Circuito equivalente para el problema 7

Para determinar el par y la eficiencia se tiene que

$$N_s = \frac{120f_s}{4} = 1800 \text{ [rpm]}$$

$$\omega_s = n_s \frac{2\pi}{60} = 188.3 \text{ [rad/seg]}$$

$$n_r = 1755 \text{ [rpm]}$$

$$\omega_r = n_r \frac{2\pi}{60} = 183.8 \text{ [rad/seg]}$$

$$Z'_r = \frac{R_r}{s} + jX'_r = (14 + j1.2) \text{ } [\Omega]$$

La impedancia total es:

$$Z_T = Z_{st} = \frac{(jX_m)(Z'_r)}{jX_m + Z'_r} = (10.42 + j7.64)\Omega = (12.92 \angle 36.3^\circ) \text{ } [\Omega]$$

$$I_s = \frac{V_s}{Z_T} = \frac{440/\sqrt{3}}{(12.92 \angle 36.3^\circ)} = (19.66 \angle -36.3^\circ) \text{ } [A]$$

Utilizando el ángulo de la corriente se tiene la potencia real de salida para calcular el par:

$$P_0 = P_{in} - P_{est} - P_{rotor} - P_{mecanica}$$

$$P_{in} = 3|V_s||I_s|\cos\theta = 12.075 \text{ [kW]}$$

$$P_{est} = 3|I_s|^2 R_s = 580 \text{ [W]}$$

$$P_{rotor} = 3|I_r|^2 R_r = 287 \text{ [W]}$$

$$P_0 = 12.075 \text{ kW} - 580 \text{ W} - 287 \text{ W} = 9.958 \text{ [kW]}$$

$$T_0 = \frac{P_0}{\omega_r} = 54.18 \text{ [N} \cdot \text{m]}$$

$$\eta = \frac{P_0}{P_{in}} = 0.825 = 82.5 \%$$

**Problema 7.8** Un motor de inducción de 7.5 [Hp], 440 [V], 1730 [rpm], entrega un valor al arranque de 2.5 veces el nominal cuando es alimentado con un voltaje nominal. Determinar el valor del par al arranque cuando se alimenta con 230 [V].

**Solución**

En el arranque se tiene que  $s=1$

$$Z_{arr} = R_s + jX_s + jX'_r + R'_r$$

$$T_{arr} = \frac{P_g}{\omega_s} = \frac{3|I'_r|^2 R'_r}{\omega_s}$$

$$|I'_r| = \frac{|V_s|}{|Z|}$$

$$T_{arr} = \frac{3 \left( \frac{|V_s|}{|Z|} \right)^2 R'_r}{\omega_s} = \frac{3|V_s|^2 R'_r}{|Z|^2 \omega_s}$$

El par nominal es:

$$T_1 = \frac{P_0}{\omega_r} = 30.8834 \text{ [N} \cdot \text{m]}$$

$$T_{arr1} = 2.5T_1 = 77.2085 \text{ [N} \cdot \text{m]}$$

$$T_{arr1} = \frac{3|440/\sqrt{3}|^2 R'_r}{|Z|^2 \omega_s}$$

$$T_{arr1} = \frac{3|230/\sqrt{3}|^2 R'_r}{|Z|^2 \omega_s}$$

$$\frac{T_{arr2} \frac{3|230/\sqrt{3}|^2 R'_r}{|Z|^2 \omega_s}}{T_{arr1} \frac{3|440/\sqrt{3}|^2 R'_r}{|Z|^2 \omega_s}} = \frac{(230)^2}{(440)^2}$$

$$T_{arr1} = \left( \frac{230^2}{440^2} \right) T_{arr1} = 0.27324(77.2058) [N \cdot m]$$

**Capítulo 8**  
**Máquinas síncronas**

**8.1 Introducción**

**8.2 Clasificación y construcción física**

**8.3 Circuito equivalente de la máquina síncrona**

**8.4 Problemas**

## 8.1 Introducción

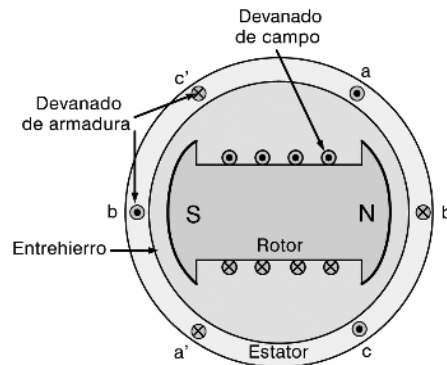
Casi toda la potencia eléctrica usada en el mundo, es generada mediante las máquinas síncronas movidas por turbinas hidráulicas, turbinas de vapor o motor de combustión. Cuando se emplean máquinas eléctricas en régimen de motor, el motor de inducción predomina sobre el motor síncrono, esto es cuando se convierte energía eléctrica a mecánica, pero la máquina síncrona es la principal máquina eléctrica para la conversión de energía mecánica a eléctrica, régimen de generador.

En diferentes tipos de centrales eléctricas es común el empleo de generadores síncronos, por lo que estas máquinas tienen una importancia muy grande.

Los generadores síncronos, son la principal fuente de energía eléctrica en los sistemas de potencia, y muchas cargas pesadas, son accionadas por motores síncronos. Los condensadores síncronos son a veces usados para compensar potencia reactiva y control de voltaje.

En la figura 8.1 se muestran las partes principales de una máquina síncrona trifásica con un par de polos en el campo. La máquina consta de dos devanados principales, el de campo y el de armadura. El devanado de campo es alimentado con una fuente de corriente continua para producir el campo magnético fijo que induce el voltaje de corriente alterna en el devanado de armadura, una vez que el campo o la armadura esté en movimiento.

Una máquina síncrona, es una máquina doblemente excitada, ya que el devanado de armadura se conecta a una fuente de alimentación de c.a. y el devanado de campo se conecta a una fuente de c.c. El devanado de armadura de una máquina síncrona es similar al devanado del estator de un motor de inducción trifásico, en donde se tienen tres devanados colocados a 120 eléctricos uno del otro. La diferencia con esta máquina, está en el rotor.



**Figura 8.1** Partes de una máquina síncrona trifásica.

La principal ventaja de las máquinas síncronas respecto de los demás tipos de máquinas, es que puede operar con un factor de potencia unitario, factor de potencia en adelanto o un factor de potencia en

atraso, únicamente manipulando la corriente del devanado de campo. Ya que los motores síncronos monofásicos están limitados para aplicaciones de baja potencia y de velocidad precisa, no se consideran en este libro. Se analizarán únicamente las máquinas síncronas trifásicas.

## 8.2 Clasificación y construcción física

El devanado de campo de una máquina síncrona, requiere de una fuente de c.c. para crear el campo magnético controlado, mediante la magnitud de la fuente, también este campo magnético puede provenir de un imán permanente, con el problema de que no se tiene un control independiente del campo, y una tercera opción para la fuente de c.c. de esta máquina, es aprovechar el voltaje inducido en el devanado del rotor y rectificarlo para luego aplicarlo a los devanados de campo.

**Estator.** Este devanado (también conocido como devanado de armadura) es similar al devanado de una máquina de inducción, y se conecta a una fuente trifásica, ya sea como motor o como generador.

La velocidad del campo magnético de la armadura se calcula igual que en una máquina de inducción:

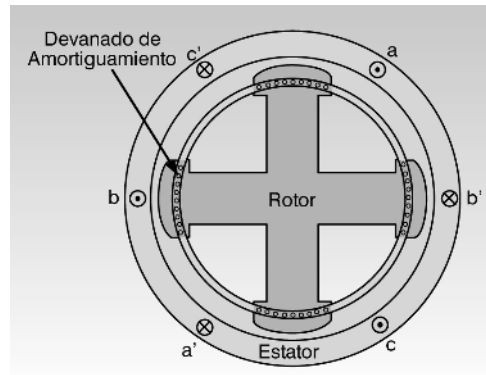
$$n_{sín} = \frac{120f}{p}$$

en donde  $n_{sín}$  es la velocidad síncrona en revoluciones por minuto (rpm),  $f$  es la frecuencia de la red en Hz y  $p$  es el número de polos. La amplitud del campo magnético del estator es constante y similar a la de la máquina de inducción, pero la forma de la onda será similar si la reluctancia en la periferia del entrehierro es constante.

**Rotor.** Es un devanado (conocido también como devanado de campo) alimentado por una fuente de c.d. para crear un electroimán, controlando la magnitud del campo por dicha fuente. Dependiendo de la velocidad de la máquina, se tienen dos tipos de rotores: los rotores de polos lisos o de alta velocidad, y los de polos salientes de baja velocidad.

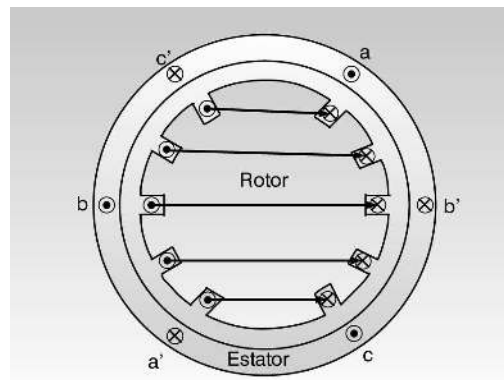
Las turbinas hidráulicas, operan en baja velocidad, por lo tanto, se requiere un mayor número de polos para proporcionar la frecuencia nominal. Estos rotores normalmente son de tipo polos salientes con el problema de que la reluctancia en la periferia del entrehierro, no es uniforme; este problema se puede resolver colocando un devanado de amortiguamiento en forma de barras de cobre en cortocircuito alrededor del rotor, similar a la jaula de ardilla en una máquina de inducción, como se muestra en la figura 8.2. La forma de este rotor, es de una gran longitud, pero de un diámetro pequeño.





**Figura 8.2** Rotor tipo polo saliente con devanado de amortiguamiento.

Las turbinas de vapor y de gas, operan a una alta velocidad por lo que estas máquinas tienen rotores lisos con dos o cuatro polos; este tipo de rotores no requieren devanado de amortiguamiento como el de polos salientes. En la figura 8.3 se muestra el diagrama de este rotor. Si no se toman en cuenta las ranuras en la periferia del rotor, se puede considerar como constante a la reluctancia en el entrehierro. La forma de este rotor es corta pero de gran diámetro.



**Figura 8.3** Rotor tipo polo liso.

### 8.3 Circuito equivalente de la máquina síncrona

Para obtener el modelo del circuito equivalente de la máquina síncrona, se considera que es de rotor tipo polo liso, el voltaje  $E_a$  es el voltaje en las terminales de la armadura, el voltaje  $V_\phi$  es el voltaje de fase que se convertirá en el voltaje de terminal dependiendo de la conexión de la máquina (estrella o delta) y la reactancia síncrona  $X_s$  es la suma de la reactancia de magnetización  $X_m$  y la reactancia de dispersión o de fuga  $X_d$  :

$$X_s = X_m + X_d$$

En la figura 8.4, se puede observar el circuito equivalente de esta máquina.

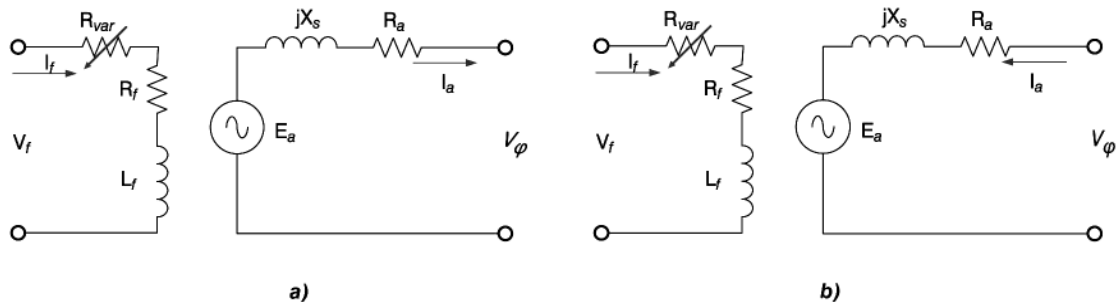
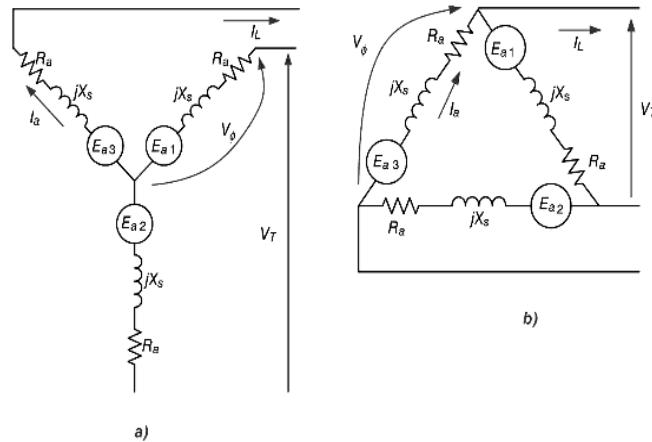


Figura 8.4 Circuito equivalente de una máquina síncrona.

Como se puede observar en la figura 8.4 ambos circuitos equivalentes monofásicos son similares, la única diferencia es el sentido de la corriente de armadura. En el circuito de campo se forma un electroimán, ya que la fuente  $V_f$  es de corriente continua, sin embargo, se tiene un control del voltaje aplicado al campo por medio de la resistencia variable externa ( $R_{var}$ ). Para el análisis de este circuito equivalente es suficiente un circuito monofásico ya que si se requiere un análisis trifásico esto se repite 3 veces, como se puede observar en la figura 8.5.



**Figura 8.5** Circuito equivalente trifásico de la máquina síncrona: (a) conexión estrella, (b) conexión delta.

En el circuito equivalente de la figura 8.5 se puede observar que las ecuaciones de la máquina síncrona son

$$V\phi = E_a - I_a(R_a + jX_s)$$

para el generador síncrono:

$$V\phi = E_a + I_a(R_a + jX_s)$$

para el motor síncrono. Para el campo se tiene la ecuación:

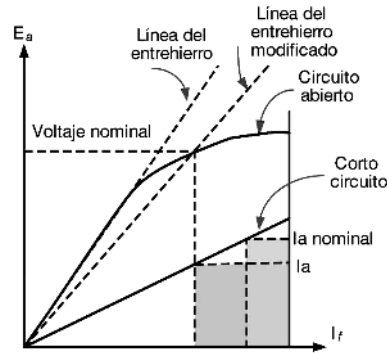
$$If = \frac{Vf}{Rf + R_{V_{ar}}}$$

En la conexión estrella, las corrientes de fase y de línea son las mismas, y el voltaje de línea es mayor en  $\sqrt{3}$  veces que el voltaje de fase. Para una conexión delta, los voltajes de fase y de línea son iguales, pero la corriente de línea es mayor en  $\sqrt{3}$  veces a la corriente de fase.

**Determinación de la reactancia síncrona.** Existe una relación directa entre las ecuaciones de la armadura, y el campo que permite determinar la reactancia síncrona de esta máquina; son la prueba de vacío y la de cortocircuito.

**Prueba de circuito abierto.** Esta prueba se realiza cuando la máquina está en vacío, por lo que la corriente  $I_a = 0$  y con esto se asegura que  $E_a = V_\psi$ . El procedimiento es llevar la máquina a la velocidad síncrona, y posteriormente se excita la corriente de campo desde cero hasta la condición nominal. La curva que se obtiene en esta prueba se puede observar en la figura 8.6, (circuito abierto); la primera parte de esta prueba es prácticamente lineal y la segunda muestra la región de saturación de la máquina. Cuando se tiene una corriente de campo cero, el voltaje generado  $E_a$  no es precisamente cero como se

muestra en la figura 8.6, ya que debido al flujo remanente, puede aparecer un voltaje ligeramente mayor a cero volts. La gráfica de la línea del entrehierro es el voltaje generado sin saturación magnética.



**Figura 8.6** Prueba de cortocircuito y circuito abierto de una máquina síncrona.

**Prueba de corto circuito.** El procedimiento que se lleva a cabo para esta prueba es parecido a la prueba de vacío: primero se conectan las terminales de la máquina en cortocircuito, y un amperímetro para medir la corriente de cortocircuito de la armadura, luego se lleva la máquina a su velocidad síncrona, posteriormente se empieza a variar la corriente de campo hasta alcanzar la corriente nominal en la armadura; la curva que se obtiene de la variación de estos dos parámetros se muestra en la figura 8.6 (cortocircuito). Como se puede observar en esta prueba, no se tiene una saturación magnética como en la prueba de vacío.

**Reactancia síncrona saturada.** La reactancia síncrona saturada se calcula a partir de las mediciones hechas en la prueba de vacío y cortocircuito, mediante la siguiente expresión:

$$Z_s(sat) = \frac{\text{Voltaje nominal de circuito abierto}}{\text{Corriente de cortocircuito}} = R_a + jX_s(sat)$$

Sin tomar en cuenta  $R_a$  se tiene que:

$$X_s(sat) = \frac{\text{Voltaje nominal de circuito abierto}}{\text{Corriente de cortocircuito}}$$

**Reactancia síncrona no saturada.** La reactancia síncrona no saturada se obtiene de forma similar a la anterior utilizando la expresión:

$$Z_s(no\_sat) = \frac{\text{Voltaje del entrehierro}}{\text{Corriente de cortocircuito}} = R_a + jX_s(no\_sat)$$

Sin tomar en cuenta  $R_a$  se tiene que:

$$X_{s(no\_sat)} = \frac{\text{Voltaje del entrehierro}}{\text{Corriente de cortocircuito}}$$

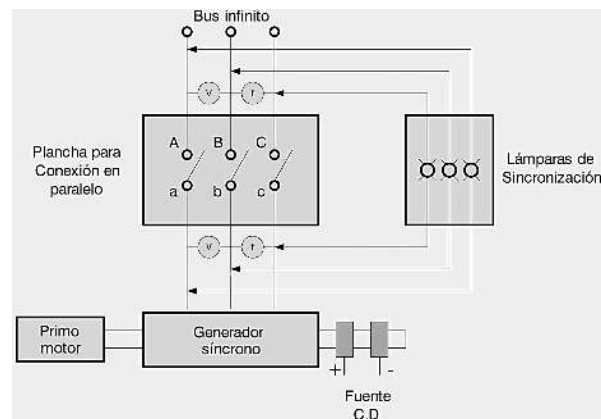
**Bus infinito.** Un generador síncrono normalmente no trabaja de forma aislada, sino que lo hace interconectado con otros generadores de energía, y a esta conexión de generadores, se le conoce como bus infinito ya que los parámetros de voltaje y frecuencia que se manejan en este bus, no sufren de variaciones significativas cuando una o varias cargas son conectadas a ella.

**Conexión a una red trifásica.** Un generador síncrono debe reunir varias condiciones para que se pueda conectar a un bus infinito, y éstas son las siguientes:

- El mismo nivel de voltaje que el bus infinito.
- La misma frecuencia.
- La misma secuencia de fase.
- El mismo defasamiento.

Para conectar un generador síncrono a un bus infinito, se puede utilizar el método clásico de las lámparas, cuya conexión se muestra en la figura 8.7. Se conectan 3 lámparas, una en cada fase. Estas lámparas tienen un comportamiento muy peculiar, ya que se supone que cuando el voltaje es cero entre sus terminales deben de apagarse, sin embargo en lugar de esto, empiezan a parpadear simulando una luz que gira. Si las tres lámparas encienden y apagan al mismo tiempo, significa que dos de las fases están en la posición incorrecta por lo que hay que invertir las. Si la luz emitida por las lámparas gira, se deben de hacer los ajustes necesarios sobre la frecuencia y el voltaje para que dos de ellas apaguen al mismo tiempo y la otra encienda; cuando se cumple esta condición es momento de cerrar el interruptor del acople en paralelo.

El proceso de sincronización de un generador a la red, en un sistema de potencia, se realiza de forma automática con una computadora que monitorea las señales enviadas por los sensores instalados en la máquina.



**Figura 8.7** Conexión en paralelo de un generador síncrono

**Generador aislado.** Cuando el generador síncrono opera de forma aislada, suministra una carga limitada, y puede tener variaciones de voltaje en las terminales dependiendo de la carga que se le conecte, inclusive pequeñas variaciones en la frecuencia si no se ajusta correctamente la velocidad del primo motor, lo que no sucede cuando se conecta a un bus infinito. Las principales variaciones que hay que vigilar en esta máquina, son las del voltaje en las terminales, ya que cuando se le conectan cargas con un factor de potencia unitario y en atraso, el voltaje en las terminales cae ligeramente, y cuando se le agrega carga con factor de potencia en adelante, el voltaje de terminales aumenta.

**Potencia y par.** La potencia de salida que proporcionan las máquinas síncronas, ya sea de forma eléctrica para el caso del generador o de forma mecánica en el motor, se deben de analizar con respecto a la potencia de entrada y las pérdidas que tienen estas máquinas:

$$P = 3V\phi I\phi \cos\theta = \sqrt{3}V_L I_L \cos\theta \quad [Watts]$$

$$Q = 3V\phi I\phi \sin\theta = \sqrt{3}V_L I_L \sin\theta \quad [VAR]$$

$$S = 3V\phi I\phi + \sqrt{3}V_L I_L \quad [VA]$$

en donde:  $P$  es la potencia real,  $Q$  es la potencia reactiva,  $S$  es la potencia reactiva,  $V_\phi$  es el voltaje de fase,  $i_\phi$  es la corriente de fase,  $V_L$  es el voltaje de línea e  $I_L$  es la corriente de línea.

El par en esta máquina se puede determinar a partir de la siguiente expresión:

$$P = \tau\omega_{sin}$$

en donde  $\tau$  es el par de la máquina en Newton-metro y  $\omega_{sin}$  es la velocidad síncrona de la máquina en radianes/segundo.

Tomando en cuenta las pérdidas que tiene la máquina síncrona (pérdidas en el cobre, pérdidas en el núcleo, pérdidas por fricción y ventilación -(pérdidas mecánicas)- y las pérdidas adicionales) se puede calcular la eficiencia de la máquina como:

$$\eta = \frac{\text{Potencia de salida}}{\text{Potencia de entrada}}$$

o bien como:

$$\eta = \frac{\text{Potencia de salida}}{\text{Potencia de entrada} + \text{pérdidas}}$$

La regulación de voltaje de esta máquina es:

$$V_r = \frac{V_{IV} - V_{Ipc}}{V_{Ipc}}$$

en donde  $V_{lv}$  es el voltaje de línea en vacío de la máquina, y  $V_{lpc}$  es el voltaje a plena carga de la máquina.

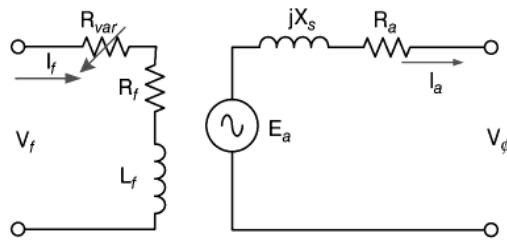
## 8.4 Problemas

**Problema 8.1** Se tiene un alternador trifásico (cuyos datos de placa son 500 kVA, 1100 Volts, 60 Hz) conectado en estrella con impedancia síncrona por fase de  $Z_s 0.1 + 1.2j$ . Calcular la regulación de voltaje para los siguientes casos:

- Factor de potencia unitario, considerando:
  - 100 % de la corriente nominal.
  - 75 % de la corriente nominal.
  - 50 % de la corriente nominal.
- Factor de potencia de 0.9 en adelante, considerando los incisos (a), (b) y (c) anteriores.

### Solución

Para calcular la regulación del voltaje se debe de partir del circuito equivalente por fase.



**Figura 8.8** Circuito equivalente por fase, para el problema 1.

El voltaje de fase es:

$$V = \phi = \frac{1100}{\sqrt{3}} = 635.08 \text{ [V]}$$

La corriente de línea es:

$$I = L \frac{S}{\sqrt{3}V_L} = \frac{500000}{\sqrt{3}(1100)} = 262.43 \text{ [A]}$$

Por el tipo de conexión, la corriente de línea es igual a la corriente de fase.

**1(a)** Factor de potencia unitario con el 100 % de la corriente nominal:

$$V_R = \frac{V_{IV} - V_{lpc}}{V_{lpc}}$$

$$V_{lpc} = 1100 \text{ Volts}$$

El voltaje en vacío de la máquina se puede calcular a partir de la expresión  $V\phi = E_a - I_a(R_a + jX_s)$  de donde:

$$\begin{aligned} E_a &= V\phi + I_a(R_a + jX_s) \\ &= 635.08\angle 0^\circ + (262.43\angle 0^\circ)(0.1 + 1.2j) \\ &= 661.32 + 314.92j \\ &= 732.47\angle 25.46^\circ \text{ [V]} \end{aligned}$$

$$V_{IV} = \sqrt{3}E_a = 1268.67 \text{ Volts}$$

$$V_r \frac{1268.67 - 1100}{1100} \times 100 \% = 15.33 \%$$

**1(b)** Factor de potencia unitario con el 75 % de la corriente nominal.

El 75 % de la corriente nominal es igual a 196.82 [A], por lo tanto

$$\begin{aligned} &= E_a = V\phi + I_a(R_a + jX_s) \\ &= 635.08\angle 0^\circ + (196.82\angle 0^\circ)(0.1 + 1.2j) \\ &= 654.76 + 236.18j \\ &= 696.054\angle 19.83^\circ \text{ [V]} \end{aligned}$$



$$V_{iV} = \sqrt{3}E_a = 1205.6 \text{ [V]}$$

$$V_R = \frac{1205.6 - 1100}{1100} \times 100\% = 9.6\%$$

**1(c)** Factor de potencia unitario con el 50 % de la corriente nominal.

El 50 % de la corriente nominal es igual a 131.215 [A], por lo tanto:

$$\begin{aligned} E_a &= V\phi + I_a(R_a + jX_s) \\ &= 635.08 \angle 0^\circ + (131.215 \angle 0^\circ)(0.1 + 1.2j) \\ &= 667.05 \angle 13.65^\circ \text{ [V]} \end{aligned}$$

$$V_{iV} = \sqrt{3}E_a = 1155.36 \text{ [V]}$$

$$V_R = \frac{1155.36 - 1100}{1100} \times 100\% = 5.03\%$$

**2(a)** Factor de potencia con 0.9 en adelanto y 100 % de la corriente nominal.

$$V_{ipc} = 1100 \text{ [V]}$$

$F.P. = 0.9 = \cos\theta$ , y por lo tanto, existe un ángulo de defasamiento  $\theta = -25.84^\circ$  en adelanto. De aquí se tiene que:

$$\begin{aligned} E_a &= V\phi + I_a(R_a + jX_s) \\ &= 635.08 \angle 0^\circ + (262.43 \angle 25.84^\circ)(0.1 + 1.2j) \\ &= 521.44 + 294.87j \\ &= 599.039 \angle 29.48^\circ \text{ [V]} \end{aligned}$$

$$V_{iV} = \sqrt{3}E_a = 1037.56 \text{ [V]}$$

$$V_R = \frac{1037.56 - 1100}{1100} \times 100\% = -5.67$$

**2(b)** Factor de potencia con 0.9 en adelante y 75 % de la corriente nominal. El 75 % de la corriente nominal es igual a 196.82 [A]. Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} E_a &= V\phi + I_a(R_a + jX_s) \\ &= 635.08\angle 0^\circ + (196.82\angle 25.84^\circ)(0.1 + 1.2j) \\ &= 549.86 + 221.15j \\ &= 592.66\angle 21.9^\circ [V] \end{aligned}$$

$$V_{IV} = \sqrt{3}E_a = 1026.51 [V]$$

$$V_R = \frac{1026.51 - 1100}{1100} \times 100\% = -6.68$$

**2(c)** Factor de potencia con 0.9 en adelante y 50 % de la corriente nominal. El 50 de la corriente nominal es igual a 131.215 Amperes. Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} E_a &= V\phi + I_a(R_a + jx_s) \\ &= 635.08\angle 0^\circ + (131.215\angle 25.84^\circ)(0.1 + 1.2j) \\ &= 578.26 + 147.43j \\ &= 596.75\angle 14.3^\circ j \\ V_{IV} &= \sqrt{3}E_a = 1033.60 [V] \end{aligned}$$

$$V_R = \frac{1033.60 - 1100}{1100} \times 100\% = -6.03$$

**Problema 8.2****Calcular**

- a) La frecuencia del voltaje que se debe aplicar al estator de un motor síncrono trifásico de 10 polos, 220 V, que se necesita para hacerlo trabajar a 1200 rpm.
- b) El número de polos que necesita tener un motor síncrono trifásico de 220 V para trabajar a una velocidad de 500 rpm, cuando se aplica corriente de 50 Hz al estator.
- c) La velocidad a plena carga de un motor síncrono de 36 polos, 60 Hz, 220 V, en rpm y en rad/seg.

**Solución**

- a) La velocidad síncrona de la máquina es:

$$n_s = \frac{120f}{p}$$

por lo tanto la frecuencia requerida es:

$$f = \frac{n_s p}{120} = \frac{1200 \cdot 10}{120} = 100 [Hz]$$

- b) En este caso se tiene que:

$$p = \frac{120f}{n_s} = \frac{120 \cdot 50}{500} = 12 [polos]$$

- c) Finalmente, resulta que:

$$n_s \frac{120f}{p} = \frac{120 \cdot 60}{36} = 200 [rpm]$$

**Problema 8.3**

Un generador con turbina de vapor de 13.5 kV, 20 MVA, factor de potencia de 0.8 en atraso, 60 Hz, bipolar, conectado en estrella, tiene una reactancia síncrona  $X_s = 5.0\Omega$  por fase y resistencia de inducido  $R_a = 5.0\Omega$  por fase. Este generador está operando en paralelo con el sistema de potencia (barraje infinito).

- a) ¿Cuál es la magnitud de  $E_a$  en condiciones nominales?
- b) ¿Cuál es el ángulo de par del generador en condiciones nominales?
- c) Si la corriente de campo es constante, ¿cuál es la máxima potencia posible de salida del generador?

d) A la potencia máxima posible, ¿cuánta potencia reactiva estará generando o consumiendo este generador?

### Solución

a) El voltaje generado se calcula mediante la siguiente expresión:

$$E_a = V\phi + I_a(R_a + jX_s)$$

Debido a la conexión estrella se tiene que:

$$V\phi = \frac{V_L}{\sqrt{3}} = \frac{13500}{\sqrt{3}}$$

La corriente de línea y de fase son iguales y se puede calcular a partir de la potencia:

$$S = \sqrt{3}V_L I_L$$

Despejando la corriente resulta que:

$$I_L = I_a = \frac{S}{\sqrt{3}V_L} = \frac{20000000}{\sqrt{3}V_L(13500)} = 855.33 \text{ [A]}$$

El ángulo de la corriente debido al factor de potencia es  $\theta = \cos^{-1}0.8 = 36.86^\circ$  en atraso. Por lo tanto:

$$E_a = \frac{13500}{\sqrt{3}} + (855.33 \angle -36.86^\circ)(0.5 + j5) \\ 1116.255 \angle 16.47^\circ \text{ [V]}$$

b) El ángulo de par del generador es  $\delta = 16.47^\circ$ .

c) La potencia máxima se obtiene cuando  $\delta = 90^\circ$ , por lo tanto se tiene que

$$P = \frac{(3) |V\phi| |E_a|}{|X_s|} = \frac{(3) \left(\frac{13500}{\sqrt{3}}\right) (1116.255)}{5} = 52.19 \text{ [MW]}$$

d) A potencia máxima se tiene que  $\delta = 90$ , y por lo tanto:

$$Q = \frac{3 |V\phi| |E_a|}{|X_s|} \cos\delta - \frac{3|V\phi|^2}{|X_s|} = -\frac{3|V\phi|^2}{|X_s|}$$

$$Q = \frac{3 \left( \frac{13500}{\sqrt{3}} \right)^2}{5} = 36.44 [MVAR]$$

En esta expresión, el signo negativo indica que el generador está consumiendo esta potencia reactiva.

#### Problema 8.4

Una fuente trifásica de 60 Hz y dos máquinas síncronas trifásicas se encuentran disponibles. Determinar la velocidad y el número adecuado de polos de cada máquina síncrona para suministrar:

- a) Una fuente trifásica a 180 Hz.
- b) Una fuente trifásica a 500 Hz.

#### Solución

a) Para este caso se tiene una fuente de excitación de 60 [Hz] y se requiere suministrar una frecuencia de 180 [Hz]. Como se encuentran disponibles las máquinas síncronas, sin especificar si son motor o generador, se puede proponer que una de ellas opere como primo motor y la otra como generador.

Si el motor que se conecta a la fuente de alimentación es de 2 polos, entonces su velocidad de operación es de 3600 rpm:

$$n_{sin=\frac{120f}{p}} = \frac{120*}{2} = 3600 [rpm]$$

y con esta velocidad, se puede determinar el número de polos que debe tener el generador:

$$p = \frac{120f}{n_{sin}} = \frac{120*180}{3600} = 6$$

b) Siguiendo el mismo planteamiento del problema anterior, se tiene que si el motor es de 6 polos entonces:

$$p = \frac{120f}{p} = \frac{120*60}{6} = 1200 \text{ rpm}$$

y el número de polos del generador debe ser:

$$p = \frac{120f}{n_{sin}} = \frac{120*500}{1200} = 50$$

## Capítulo 9

### El generador síncrono

#### 9.1 Introducción

#### 9.2 Tipos de rotores

#### 9.3 Sistemas de excitación

#### 9.4 Devanado de estator y de rotor

#### 9.5 Cálculo del factor de paso

#### 9.6 Cálculo del factor de distribución

#### 9.7 Velocidad síncrona

#### 9.8 Flujo rotatorio de reacción de armadura

#### 9.9 Pruebas a generadores: Curva de saturación y prueba de corto circuito

#### 9.10 Diagrama fasorial

#### 9.11 Relación de corto circuito y de reactancia síncrona

#### 9.12 Operación con carga resistiva y su diagrama fasorial

- 9.13 Operación con carga inductiva y su diagrama fasorial
- 9.14 Operación con carga capacitiva y su diagrama fasorial
- 9.15 Prueba de excitación y de factor de potencia igual a cero
- 9.16 Diagrama fasorial con la reactancia síncrona
- 9.17 Límite de estabilidad estática del generador
- 9.18 Diagramas circulares y la construcción de la curva de capacidad de un generador
- 9.19 Reactancias del generador en cortocircuito trifásico
- 9.20 Sistemas de regulación de voltaje
- 9.21 Diagrama fasorial
- 9.22 Problemas resueltos
- 9.23 Resumen
- 9.24 Problemas propuestos

### Competencias

- Conocer la teoría de operación de los generadores síncronos.
- Conocer la operación del generador síncrono con diferentes tipos de cargas.
- Conocer las aplicaciones prácticas de los generadores síncronos.

## 9.1 Introducción

Los generadores síncronos o alternadores, son máquinas síncronas utilizadas para convertir potencia mecánica en potencia eléctrica de corriente alterna. En un generador síncrono se aplica una corriente continua al devanado del rotor, la cual produce un campo magnético en el rotor. En seguida, el rotor del generador gira mediante un motor primario y produce un campo magnético giratorio dentro de la máquina. Este campo magnético giratorio, introduce un conjunto de voltajes trifásicos dentro de los devanados del estator del generador.

Algunos términos comunes que se utilizan para describir los devanados de una máquina son: *devanado de campo* y *devanado del inducido*. En general, el término “devanado de campo” se aplica a los devanados que producen el campo magnético principal en la máquina; y el término “devanados del inducido” se aplica a los devanados donde se induce el voltaje principal. En las máquinas síncronas, los devanados de campo están en el rotor, por lo que los términos “devanados del rotor” y “devanados de campo” se utilizan indistintamente. De manera similar, los términos “devanado del estator” y “devanado del inducido” se utilizan indistintamente.

El rotor de un generador síncrono es en esencia, un electroimán grande. Los polos magnéticos en el rotor pueden ser tanto salientes como no salientes. El término saliente significa proyectado hacia afuera o “prominente” y un *polo saliente* es un polo magnético proyectado hacia fuera de la superficie del rotor. Por otro lado, un polo no saliente es un polo magnético construido al mismo nivel de la superficie del rotor.

Generalmente, los rotores de polos no salientes se utilizan para motores de dos o cuatro polos, mientras que los rotores de polos salientes normalmente se usan para rotores con cuatro o más. Debido a que el rotor está sujeto a campos magnéticos variables, éste deberá construirse con láminas delgadas para reducir las pérdidas por corrientes parásitas. Se debe suministrar una corriente, de corriente continua al circuito de campo del rotor. Dado a que el rotor está girando, se requiere de un arreglo especial para que la potencia en corriente continua llegue a los devanados de campo. Existen dos formas comunes de

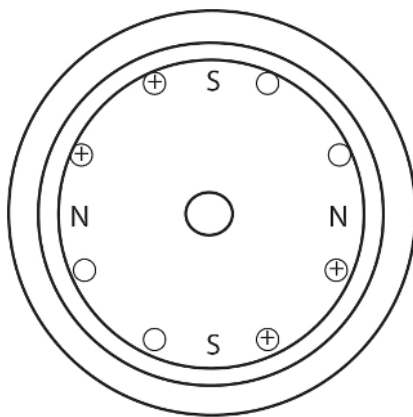


suministrar esta potencia en corriente continua:

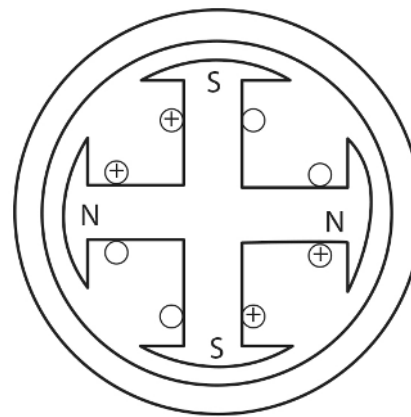
1. Suministrar al rotor la potencia de corriente continua desde una fuente externa de corriente continua por medio de anillos rozantes y escobillas.
2. Suministrar la potencia de corriente continua desde una fuente de potencia de corriente continua especial, montada directamente en el eje del generador síncrono.

## 9.2 Tipos de rotores

Los generadores síncronos se clasifican por su tipo de rotor en: polos salientes; para velocidades iguales o menores de 1800 rpm y polos lisos; para velocidades iguales a 3600 rpm.



**Figura 9.1** Generador de 4 polos lisos salientes (rotor cilíndrico)



**Figura 9.2** Generador de 4 polos salientes

Los motores de 4 polos lisos (figura 9.1), son usados en la construcción típica de motores asíncronos y turboalternadores. En las máquinas de polos lisos en el conjunto magnético no existen partes salientes. En estas máquinas se forman zonas por las cuales sale el flujo desde la parte de atrás (Polo Norte) o entra en ella después de recorrer la armadura (Polo Sur) (figura 9.2).

Los generadores de 4 polos salientes, tienen núcleos de hierro unidos sólidamente por la parte de atrás, rodeados por bobinas que al hacer pasar una corriente eléctrica, originan un flujo eléctrico que polariza la masa de hierro, creando en sus extremos los polos correspondientes. En estas máquinas, se completa

el circuito magnético con otra parte metálica llamada “armadura”, la cual está provista de ranuras en las que va alojada el segundo circuito eléctrico.

Dentro de las máquinas de polos salientes se distinguen dos tipos:

- Aquellas en las cuales los polos salientes pertenecen a la parte fija o del estator, siendo la forma típica de los dínamos y de los motores de corriente continua.
- Aquellas en las cuales los polos salientes pertenecen a la parte móvil, en las que giran los polos, la parte de atrás y el eje, formando una rueda polar. Esta es la forma típica de los alternadores y motores síncronos.

### 9.3 Sistemas de excitación

En una máquina síncrona, se lleva a cabo una alternancia de flujos de corriente en el devanado de inducido o armadura, y el devanado de campo se abastece de una corriente directa de excitación. El devanado de inducido o armadura invariablemente se encuentra en el estator y por lo general es trifásico. El devanado de campo se ubica en el rotor. La estructura cilíndrica del rotor se aplica en los *turbo generadores* tetrapolares y bipolares. La estructura de polos salientes se adapta mejor a los generadores hidroeléctricos de baja velocidad multipolares, así como la mayoría de los motores síncronos. La potencia de corriente continua que se requiere para la excitación, aproximadamente del 1 al 5% de índice necesario en las máquinas síncronas, se abastece por el *sistema de excitación*.

En las máquinas más antiguas, la corriente de excitación en general es abastecida por los anillos de deslizamiento de una máquina de corriente continua denominados excitadores, que con frecuencia se montan sobre el mismo eje de la máquina síncrona. En sistemas más modernos, la excitación se abastece a partir de excitadores de corriente alterna y rectificadores de estado sólido (ya sea puentes de diodos o rectificadores de control de fase). En algunos casos, la rectificación se lleva a cabo en el marco estacionario, y la corriente de excitación rectificada alimenta al rotor a través de anillos de deslizamiento. En otros sistemas, denominados sistemas de excitación sin escobillas, el alternador del excitador de corriente alterna se deposita en el rotor, como sucede en el sistema de rectificación, y la corriente abastece directamente al devanado de campo sin la necesidad de anillos de deslizamiento.

### 9.4 Devanado de estator y de rotor

La ecuación  $e = \frac{d\lambda}{dt}$ , se usa para determinar los voltajes inducidos por medio de campos magnéticos de variación temporal. La conversión de energía electromagnética toma lugar cuando se producen cambios en la dispersión de flujo  $\lambda$ , debido al movimiento mecánico. En las máquinas de rotación los voltajes en general en los devanados, o en los grupos de bobinas al girar estos devanados de manera mecánica

a través de un campo magnético; al girar mecánicamente un campo magnético por el devanado; o al diseñar el circuito magnético de manera que la reluctancia varíe con la rotación del rotor. Con cualquiera de estos métodos, el acoplamiento que vincula una bobina específica, se cambia de forma cíclica, y se genera un voltaje variante con el tiempo.

Al conjunto de dichas bobinas conectadas entre sí, comúnmente se le denomina devanado de armadura o inducido. En términos generales, el concepto *devanado de armadura o inducido*, se emplea para referirse a un devanado o conjunto de devanados en una máquina de rotación que lleva corrientes alternas. En las *máquinas de corriente alterna*, como son las máquinas de inducción o síncronas, el devanado de armadura o inducido se encuentra en la porción estacionaria del motor conocido como estator, en cuyo caso, a estos devanados también se les denominará devanados *estatóricos*.

Dentro de una *máquina de corriente, continua* el devanado de la armadura o inducido, se encuentra en el miembro que gira, denominado *rotor*. El devanado de armadura o inducido de una máquina de corriente continua consiste en varias bobinas conectadas entre sí para formar una curva cerrada. Mientras el rotor gira, se emplea un contacto mecánico de rotación para abastecer de corriente al devanado de armadura o inducido.

Las máquinas síncronas y de corriente continua por lo general, incluyen un devanado secundario (o un conjunto de devanados) que llevan corriente continua, y se utilizan para producir el flujo principal de operación en la máquina. A un devanado como éste, comúnmente se le denomina *devanado de excitación*. En una máquina de corriente continua, el devanado de excitación casi siempre se localiza en el estator, mientras que en una máquina síncrona dicho devanado se ubica en el rotor, en cuyo caso, la corriente deberá abastecer al devanado de excitación a través de un contacto de rotación mecánica. Los imanes permanentes también producen un flujo magnético de corriente continua y se emplean en lugar de los devanados de excitación en algunas máquinas.

## 9.5 Cálculo del factor de paso

En las máquinas de corriente continua, hay varias maneras en las que se pueden conectar las espiras en el rotor (*también llamado inducido o armadura*) a sus segmentos del conmutador. Estas conexiones diferentes afectan el número de caminos de corriente paralelos que existen en el rotor, el voltaje de salida del rotor, el número y la posición de las escobillas montadas sobre los segmentos del conmutador.

### 9.5.1 Bobinas del rotor

Sin importar la manera en que los devanados estén conectados a los segmentos del conmutador, la mayoría de los devanados del rotor constan de bobinas preformadas en forma de diamante insertadas en las ranuras del inducido como una sola unidad.

Cada bobina consta de una cantidad de *vuelatas* (espiras) de alambre y cada una está envuelta con

cinta, y se encuentra aislada de las otras, y de la ranura del rotor. A cada lado de una vuelta se le llama *conducto*. El número de conductores en el inducido de una máquina está dado por:

$$Z = 2CN_C$$

donde:

$Z$  = Número de conductores en el rotor.

$C$  = Número de bobinas en el rotor.

$N_C$  = Número de vueltas en cada bobina.

Normalmente una bobina abarca  $180^\circ$  eléctricos. Esto significa que cuando un lado no está debajo del centro de cierto polo magnético, el otro lado está debajo del centro de polo magnético con *polaridad opuesta*. Los polos físicos pueden no estar localizados a  $180^\circ$  mecánicos el uno del otro, pero el campo magnético invierte su polaridad cuando pasa por debajo de un polo al siguiente. La relación entre el ángulo eléctrico y el ángulo mecánico en cierta máquina, está dado por:

$$\theta_e = \frac{P}{2}\theta_m$$

donde:

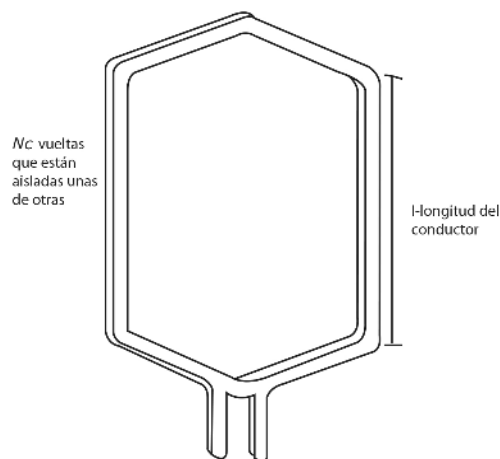
$\theta_e$  = Ángulo eléctrico en grados.

$\theta_m$  = Ángulo mecánico en grados.

$P$  = Número de polos magnéticos en la máquina.

Si una bobina abarca  $180^\circ$  eléctricos, los voltajes en los conductores en cualquier lado de la bobina serán exactamente iguales en magnitud, y opuestos en dirección en todo momento.

Este tipo de bobina se llama *bobina de paso diametral*.



**Figura 9.3** Forma de una bobina típica de rotor preformada.

Hay algunas bobinas que abarcan menos de  $180^\circ$  eléctricos, se les llama bobinas de *paso fraccionario*, y al devanado de rotor embobinado con bobinas de paso fraccionario se les llama devanado de cuerdas. La cantidad de encordado en un devanado se define como el *factor de paso*  $p$ , que se expresa como

$$p = \frac{\text{angulo electrico de la bobina}}{180^\circ} 100^\circ$$

A veces se puede utilizar una pequeña cantidad de encordado en los devanados del rotor para mejorar la conmutación. (Ver la figura 9.3).

La mayoría de los devanados de rotor constan de dos capas, lo que quiere decir que se insertan los lados de las dos bobinas diferentes en cada ranura. Un lado de cada bobina estará en el fondo de su ranura, y el otro lado estará en la parte superior de la misma. Este tipo de construcción requiere que se coloquen las bobinas individuales en las ranuras del rotor por medio de un procedimiento muy complicado. Un lado de cada bobina, se coloca en el fondo de su ranura y una vez que se colocan todos los lados en el fondo, se coloca el otro lado de cada bobina en la parte superior de cada ranura. De esta manera, todos los devanados se entretrejen conjuntamente, incrementando la fuerza mecánica y la uniformidad de la estructura final.

## 9.6 Cálculo del factor de distribución

Si se divide el número total requerido de vueltas en bobinas independientes, es posible lograr un uso más eficiente de la superficie interior del estator y se proporciona más fuerza estructural, puesto que las ranuras labradas en el marco del estator pueden ser más pequeñas. Sin embargo, el hecho de que las vueltas que componen una cierta fase estén en diferentes ángulos, significa que sus voltajes serán un poco más pequeños de lo que se esperaría de otra manera.

### Cinturón de fase.

Para un mejor entendimiento de este problema, se muestra la figura 9.4. Esta máquina tiene un devanado de una capa y el devanado del estator de cada fase (cada cinturón de fase) está distribuido entre tres ranuras separadas por  $20^\circ$ .

$$E_{a2} = E \angle 0^\circ [V]$$

Entonces, los voltajes en las otras dos bobinas de la fase “a” serán:

$$E_{a1} = E \angle -20^\circ [V]$$

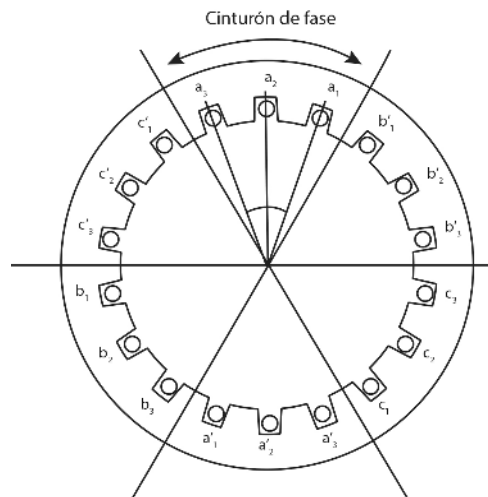
$$E_{a2} = E \angle 20^\circ [V]$$

El voltaje total de la fase está dado por:

$$\begin{aligned}
 E_a &= E_{a1} + E_{a2} + E_{a3} \\
 &= E \angle -20^\circ + E \angle 20^\circ \\
 &= E \cdot \cos(-20^\circ) + j \cdot E \cdot \sin(-20^\circ) + E + E \cdot \cos(20^\circ) + j \cdot E \cdot \sin(20^\circ) \\
 &= E - 2 \cdot E \cdot \cos(20^\circ) = 2.789 E
 \end{aligned}$$

Este voltaje en la fase “a” no es exactamente la que se esperaría si las bobinas en una fase dada hubieran estado todas concentradas en la misma ranura. En ese caso, el voltaje  $E_a$  sería igual a  $3E$  en lugar de  $2.789E$ . La relación entre el voltaje real en una fase del devanado distribuido y su valor esperado en un devanado concentrado con el mismo número de vueltas, se llama *factor de amplitud o factor de distribución del devanado*. El factor de distribución se define como:

$$k_d = \frac{V_\phi \text{ real}}{V_\phi \text{ esperando sin distribución}}$$



**Figura 9.4** Estator de dos polos con un devanado de una capa que consta de tres bobinas por fase, cada una separada por  $20^\circ$ .

Por lo tanto, el factor de distribución de la máquina en la figura 9.4 es:

$$k_d = \frac{2.789E}{3E} = 0.960$$

El factor de distribución, es una manera conveniente de resumir la disminución del voltaje provocada por la distribución espacial de las bobinas en un devanado del estator. Se puede mostrar que en un devanado con “n” ranuras por cinturón de fase espaciadas por  $\gamma$  grados, el factor de distribución está dada por:

$$k_c = \frac{\text{sen}\left(\frac{n\gamma}{2}\right)}{n \cdot \text{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

### 9.7 Velocidad síncrona

Como en el caso de los motores trifásicos, la velocidad síncrona de todos los motores de inducción monofásicos está dada por la ecuación:

$$n_s = \frac{120f}{p}$$

donde:

$n_s$  = velocidad síncrona [rpm].

$f$  = frecuencia de la fuente, [Hz].

$p$  = número de polos.

El rotor gira a una velocidad un poco menor que la síncrona, y el deslizamiento a plena carga es por lo general, 3 a 5 por ciento para motores de caballos de fuerza fraccionarios.

### 9.8 Flujo rotatorio de reacción de armadura

Esta expresión se deriva de la fuerza electromotriz inducida en las terminales de los devanados de la armadura que se encuentra bajo la influencia del movimiento de los conductores, regida por el campo que se origina en los polos. Cuando el generador es usado, éste deberá entregar una salida eléctrica a una carga. En tal caso, los conductores de la armadura también llevan corrientes y producen un campo propio. La interacción entre los campos debe ser por lo tanto, propiamente concebida para entender el comportamiento de la máquina con carga. Como la estructura magnética es compleja debido a que se está interesado en el corte de flujo de los conductores; se enfocará el estudio en primera instancia, en la superficie de la armadura. Una convención de signo es requerida en la fuerza magnetomotriz debido a que ésta y el campo de fuerza magnetomotriz; son dos diferentes miembros de la máquina. La convención usada aquí, es que la fuerza magnetomotriz actuando sobre la banda de aire y la densidad de flujo en la banda de aire, son mostradas como positivas cuando actúan en la dirección del sistema de campo a la armadura. El flujo actual producido es proporcional a la fuerza magnetomotriz total y a la permeancia.

El flujo producido por el campo y el producido por la armadura podría añadirse para obtener el flujo total, solo en el caso de un circuito magnético lineal.

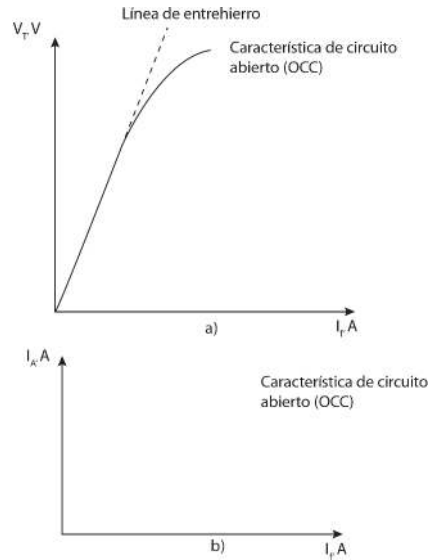
### 9.9 Pruebas a generadores: Curva de saturación y prueba de corto circuito

El circuito equivalente de un generador síncrono que se ha obtenido, consta de tres cantidades que se deben determinar para descubrir completamente el comportamiento de un generador síncrono real:

1. La relación entre la corriente de campo y el flujo (y, por lo tanto, entre la corriente de campo y  $E_A$ ).
2. La reactancia síncrona.
3. La resistencia del inducido.

Esta sección describe una técnica muy simple para determinar estas cantidades en un generador síncrono. El primer paso en el proceso, es la realización de la prueba de *circuito abierto* en el generador. Para realizar esta prueba, el generador se hace girar a velocidad nominal, se desconectan las terminales de cualquier carga y se establece la corriente de campo como cero. Entonces, se incrementa gradualmente por etapas la corriente de campo y se mide el voltaje en las terminales de cada etapa. Con los terminales abiertos  $I_A = 0$ , por lo que  $E_A$  es igual a  $V_\phi$ . A partir de esta información, es posible dibujar una gráfica de  $E_A$  o  $V_T$  e  $I_f$ . A esta gráfica también se le llama *característica de circuito abierto* (OCC, por sus siglas en inglés) de un generador. Con esta característica es posible encontrar el voltaje interno del generador dada cualquier corriente de campo. En la figura 9.5(a) se muestra una característica de circuito abierto típica. Nótese que al principio, la curva es casi perfectamente lineal, hasta que se observa cierta saturación con corrientes de campo más altas. El hierro no saturado en el marco de la máquina síncrona tiene una reluctancia muchos miles de veces menor a la reluctancia en el entrehierro, por lo que al principio, casi toda la fuerza magnetomotriz pasa a través del entrehierro, y el incremento en el flujo restante es lineal. Cuando finalmente se satura el hierro, la reluctancia es éste, se incrementa de manera notoria y el flujo se incrementa mucho más despacio con el incremento de la fuerza magnetomotriz. La porción lineal de una OCC se llama *línea de entrehierro de la curva característica*.





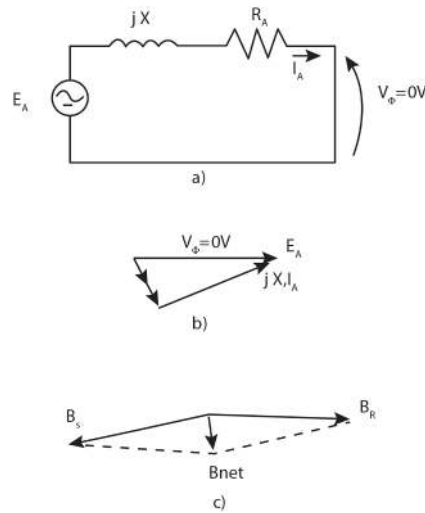
**Figura 9.5** Característica de circuito abierto (OCC) de un generador síncrono. (b) Característica de cortocircuito (SCC) de un generador síncrono.

El segundo paso en el proceso, es la realización de una prueba de *cortocircuito*. Para realizar una prueba de cortocircuito, se establece la corriente de campo igual a cero, y se hace un cortocircuito en las terminales del generador, por medio de un conjunto de amperímetros. Entonces, se mide la corriente en el inducido  $I_A$  o la corriente de línea  $I_L$  conforme se incrementa la corriente de campo. Una gráfica como ésta se llama característica de cortocircuito (SCC, por sus siglas en inglés) y se muestra en la figura 9.5(b). Es esencialmente una línea recta. Para entender por qué esta curva característica es una línea recta, se debe analizar el circuito equivalente en la figura 9.6(a) cuando las terminales de la máquina están en cortocircuito. En la figura 9.6(b) se aprecia un circuito con estas características. Nótese que cuando las terminales están en cortocircuito, la corriente en el inducido  $I_A$  está dada por:

$$I_A = \frac{E_A}{R_A + jK_s}$$

y su magnitud está dada por:

$$I_A = \frac{E_A}{\sqrt{R_A^2 + X_s^2}}$$



**Figura 9.6** (a) Circuito equivalente de un generador síncrono durante la prueba de cortocircuito. (b) Diagrama fasorial resultante. (c) Campo magnéticos durante la prueba de corto circuito.

El diagrama fasorial resultante puede observarse en la figura 9.6(c), así los campos magnéticos correspondientes. Debido a que  $B_s$  casi cancela a  $B_R$ , el campo magnético neto  $B_{net}$  es muy pequeño (corresponde únicamente a las caídas resistivas e inductivas internas). Debido a que el campo magnético neto en la máquina es tan pequeño, la máquina no está saturada y la SCC es lineal.

Para entender la información que proporcionan ambas características, nótese que si  $V_\phi$  es igual a cero, la impedancia interna de la máquina está dada por:

$$Z_s = \sqrt{R_A^2 + X_s^2} = \frac{E_A}{I_A}$$

Debido a que  $X_s \gg R_A$ , esta ecuación se reduce a:

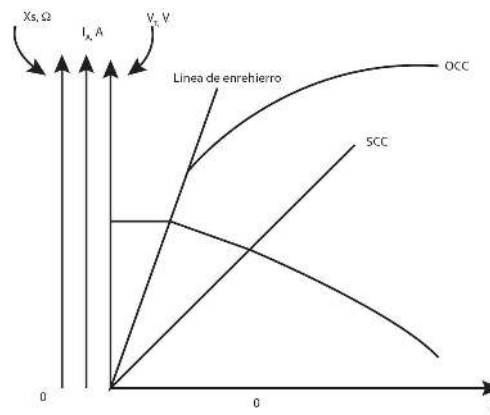
$$X_s \approx \frac{E_A}{I_A} = \frac{V_{o,oc}}{I_A}$$

Si se conoce  $E_A$  e  $I_A$  para cierta situación, entonces se puede encontrar la reactancia síncrona  $X_s$ . Por lo tanto, el método aproximado para determinar la reactancia síncrona para una corriente de campo dado es:

1. Obtener el voltaje interno generado  $E_A$  de la OCC para esa corriente de campo.
2. Obtener el flujo de corriente en cortocircuito  $I_{A,SC}$  para esa corriente de campo de la SCC.
3. Encontrar  $X_s$ .

Sin embargo, este método presenta una dificultad: El voltaje interno generado  $E_A$  se obtiene de la OCC, donde la máquina está parcialmente *saturada* para grandes corrientes de campo, mientras que  $I_A$  se obtiene de la SCC, donde la máquina *no está saturada* a ningún nivel de la corriente de campo. Por lo tanto, mientras más altas son las corrientes de campo, el  $E_A$  obtenido de la OCC dada cierta corriente de campo, no es el mismo que el  $E_A$  con la misma corriente de campo en condiciones de cortocircuito y esta diferencia causa que el valor obtenido de  $X_S$ , sea sólo una aproximación.

Sin embargo, la respuesta que brinda este método es exacta hasta el punto de saturación, por lo que la *reactancia síncrona no saturada*  $X_{s,ns}$  de la máquina, se puede encontrar por medio de  $X_s$  para cualquier corriente de campo en la porción lineal (en la línea del entrehierro) de la curva OCC.



**Figura 9.7** Gráfica de la reactancia síncrona aproximada de un generador síncrono en función de la corriente de campo en la máquina. El valor constante de la reactancia que se encuentra en los valores bajos de la corriente de campo, es la reactancia síncrona no saturada de la máquina.

El valor aproximado de la reactancia síncrona varía con el grado de saturación de la OCC, por lo que el valor de la reactancia síncrona que se utiliza para resolver un problema debe ser calculado con el valor aproximado de la carga sobre la máquina. En la figura 9.7 se muestra una gráfica de la reactancia síncrona aproximada en función de la corriente de campo.

Es importante saber la resistencia del devanado, así como la reactancia síncrona, y se puede obtener un valor aproximado de la resistencia por medio de la aplicación de un voltaje de corriente en los devanados; mientras la máquina está en estado estacionario, y midiendo el flujo de corriente resultante. La utilización de un voltaje de corriente continua significa que la reactancia de los devanados será igual a cero durante el proceso de medición.

Esta técnica no es del todo exacta, debido a que la resistencia de corriente alterna será un poco más grande que la resistencia de corriente continua (como resultado del efecto peculiar a altas frecuencias). Si se desea, se puede introducir el valor medido de la resistencia para mejorar el valor estimado de  $X_s$ .

### 9.9.1 Curva de saturación

Las características presentes en las máquinas eléctricas, dependen en gran medida de la aplicación de los materiales magnéticos. Estos materiales se requieren para crear el circuito magnético, y el fabricante los utiliza para obtener características específicas en las máquinas debido a que los materiales magnéticos no son ideales. Al incrementarse su flujo, se da lugar a la saturación, con la consecuencia de que su capacidad de permeabilidad magnética comienza a decrecer, además de la carencia de efectividad al contribuir con la densidad de flujo total en la máquina.

Tanto el par electromecánico, como el voltaje generado en todas las máquinas, dependen de las reluctancias de las porciones de hierro de los circuitos magnéticos, y de los entrehierros. Por consiguiente, la saturación pudiera afectar de manera considerable las características que presentan las máquinas.

Otro aspecto de la saturación (más agudo y difícil de evaluar sin las comparaciones experimentales teóricas), tiene que ver con su influencia en las premisas básicas a partir de las que se desarrolla el enfoque analítico de las máquinas. Específicamente, las ecuaciones para la fuerza magnetomotriz del entrehierro, por lo general, se basan en la suposición de que la reluctancia es insignificante en el hierro. Cuando estas ecuaciones se aplican a las máquinas reales con diferentes niveles de saturación en el hierro, es posible esperar errores significativos en los resultados analíticos. Para perfeccionar esas ecuaciones analíticas, la máquina real puede remplazarse por una equivalente al tomar en cuenta las siguientes consideraciones: una cuyo hierro presente una reluctancia insignificante, pero cuya longitud de entrehierro se incrementa lo suficiente para absorber la caída de potencial magnético en el hierro de la máquina real.

De manera similar, también se incorporan los efectos de la carencia de uniformidad en el entrehierro como ranuras y conductores de ventilación al incrementar la longitud efectiva del entrehierro. Por último estas diferentes aproximaciones técnicas, deberán verificarse y confirmarse por métodos experimentales. En los casos donde dichas técnicas simples se encuentren inadecuadas, es posible utilizar un análisis a detalle, como los que se emplean en el elemento finito u otras técnicas numéricas. Sin embargo, se debe reconocer que el uso de estas técnicas, representa un aumento importante en la complejidad del modelo.

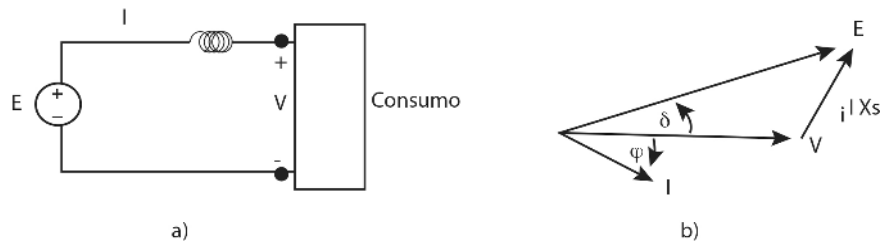
Las características de saturación de las máquinas de rotación, generalmente se presentan en forma de una *característica de circuito abierto*, también denominado curva de *magnetización o de saturación*. Esta característica representa la curva de magnetización para el tipo específico de hierro y la geometría articular de la máquina bajo la consideración. Para una máquina síncrona, la curva de saturación de circuito abierto, se obtiene al operar la máquina a una velocidad constante, y al medir el voltaje de inducido del circuito abierto como una función de la corriente de campo. La línea recta tangente que va en la parte inferior de la curva, representa la *línea de entrehierro*, que corresponde a los bajos niveles del flujo dentro de la máquina. Bajo estas condiciones, la reluctancia del hierro de la máquina por lo general, es insignificante, y la fuerza magnetomotriz que se requiere para excitar la máquina es simplemente la requerida, para vencer la reluctancia del entrehierro. Si no fuera por los efectos de la saturación, la línea de entrehierro y la curva característica de circuito abierto coincidirán. Así, la partida de la curva de la línea es una indicación del grado de saturación que se encuentra presente.

En una etapa de diseño, la característica de circuito abierto se calcula a partir de las técnicas de información del diseño como de los análisis del elemento finito.

La curva de magnetización para una máquina síncrona real, se determina al operar la máquina como un generador sin carga, al medir los valores de voltaje terminal correspondiente a una serie de valores de la corriente de excitación. Para un motor de inducción, la máquina opera a una velocidad síncrona o se acerca a ella (en cuyo caso, se inducirá muy poca corriente en los devanados del rotor), y los valores de la corriente magnetizante se obtiene para una serie de valores impresos del voltaje del estator. Sin embargo, es necesario hacer énfasis en que la saturación en una máquina con carga completa, se lleva a cabo como consecuencia de la fuerza magnetomotriz total que actúa sobre el circuito magnético. Dado que la distribución del flujo bajo carga generalmente difiere de las condiciones de no carga, los detalles de las características de saturación en la máquina, pueden variar con respecto a la curva de circuito abierto.

### 9.10 Diagrama fasorial

Si se considera un generador suministrando potencia directamente a un consumo. El circuito equivalente por fase, y el diagrama fasorial se demuestran en la figura 9.7.



**Figura 9.7** Generador síncrono de rotor cilíndrico: (a) Circuito equivalente; (b) Diagrama fasorial.

La potencia suministrada por el generador al consumo es:

$$\dot{S}_g = P_g + jQ_g = \dot{V}I$$

Si  $V \Rightarrow V \angle 0^\circ$  y  $E = E \angle \delta$ ; del circuito se tiene que:

$$\dot{I} = \frac{\vec{E} - \vec{V}}{jX_s} = j \frac{V - E \angle \delta}{X_s}$$

### 9.11 Relación de corto circuito y de reactancia síncrona

Otro parámetro que se utiliza para descubrir los generadores síncronos es la relación de cortocircuito. La relación de cortocircuito de un generador se define como *la relación entre la corriente de campo requerida para el voltaje nominal en el circuito abierto, y la corriente de campo requerida para la corriente del inducido nominal en cortocircuito*. Se puede demostrar que esta cantidad es simplemente el valor inverso del valor aproximado por unidad de la reactancia síncrona saturada.

A pesar de que la relación de cortocircuito no añade información adicional sobre el generador, a la que ya se tenía con la reactancia síncrona saturada, es importante saber qué es, ya que ocasionalmente se utiliza éste término en la industria.

#### Reactancia síncrona

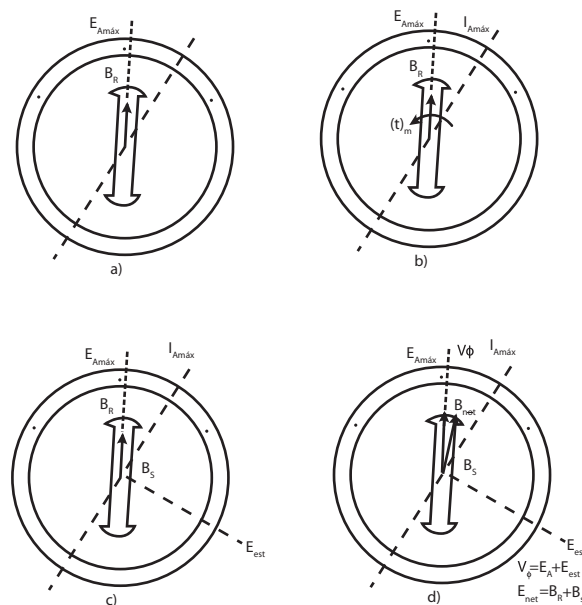
Con dos voltajes presentes en los devanados del estator, el voltaje total en una fase es simplemente la suma del voltaje interno generado  $E_A$  más el voltaje de reacción del inducido  $E_{est}$ :

$$V_\phi = E_A + E_{est}$$

El campo magnético neto  $B_{net}$ , es simplemente la suma de los campos magnéticos del rotor y del estator:

$$B_{net} = B_R + B_S$$

Debido a que los ángulos de  $E_A$  y  $B_R$  son iguales, el campo magnético resultante  $B_{net}$  coincidirá con el voltaje neto  $V_\phi$ . Los voltajes y corrientes resultante se muestra en la figura 9.8.



**Figura 9.8** Desarrollo de un modelo de la reacción al inducido (a) Un campo magnético giratorio produce el voltaje interno generado  $E_A$ . (b) El voltaje resultante produce *un flujo de corriente* en retraso cuando se conecta a una carga en retraso. (c) La

corriente en el estator produce su propio campo magnético  $B_S$ , que produce su propio voltaje  $E_{est}$  en los devanados del estator de la máquina. (d) El campo magnético  $B_S$  se suma  $B_R$  y se transforma en  $B_{net}$ . El voltaje  $E_{est}$  se suma a  $E_A$  y produce  $V_\phi$  en la salida de la fase.

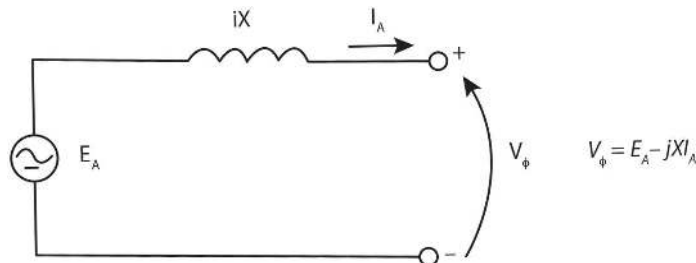
¿Cómo se pueden modelar los efectos de la reacción del inducido en el voltaje de fase? Primero nótese que el voltaje  $E_{est}$  tiene un ángulo de  $90^\circ$  atrás del plano de la corriente máxima  $I_A$ . Segundo, el voltaje  $E_{est}$  es directamente proporcional a la corriente  $I_A$ . Si  $X$  es una constante de proporcionalidad, entonces el voltaje de reacción del inducido se puede expresar como:

$$E_{est} = -jXI_A$$

Por lo tanto, el voltaje en una fase es:

$$V_\phi = E_A - jXI_A$$

Dado el siguiente circuito y su ley de voltaje de Kirchhoff:



**Figura 9.9** Circuito simple.

Ésta, es exactamente la misma ecuación que describe el voltaje de reacción del inducido. Por lo tanto, se puede modelar el voltaje de reacción del inducido, como un inductor en serie con un voltaje interno generado.

Además de los efectos de la reacción del inducido, las bobinas del estator tienen una autoinductancia y una resistencia. Si se le llama  $L_A$  a la autoinductancia del estator (y se llama  $R_A$  a la resistencia del estator, entonces la diferencia total entre  $E_A$  y  $V_\phi$ , está dada por:

$$V_\phi = E_A - jXI_A - jX_A I_A - R_A I_A$$

Tanto los efectos de la reacción del inducido como la autoinductancia en la máquina, se representan por medio de reactancias, y se acostumbre combinarlas en una sola llamada *reactancia síncrona de la máquina*:

$$X_s = X + X_A$$

Por lo tanto, la ecuación final que describe  $V_\phi$  es:  $V_\phi = E_A - jK_s I_A - R_A I_A$

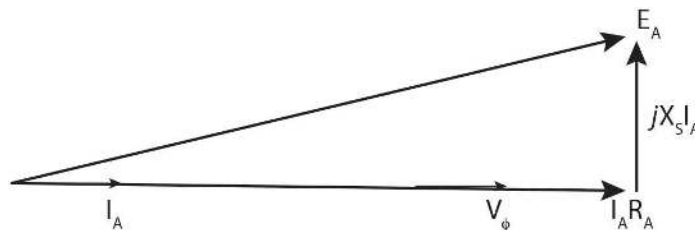
### 9.12 Operación con carga resistiva y su diagrama fasorial

En la gráfica de la figura 9.10 se muestran estas relaciones cuando el generador alimenta una carga puramente resistiva (una carga con un factor de potencia unitario). La corriente de fase en la armadura  $I_A$  está en fase con el voltaje de fase entre terminales  $V_\phi$ . La caída de voltaje por fase a través de la resistencia efectiva de la armadura  $I_A R_A$  también se encuentra en fase con la corriente de armadura. La caída de voltaje inductiva debida a la reactancia,  $X_A I_A$ , siempre está adelantada  $90^\circ$  con respecto a la corriente que pasa por la armadura.

La caída de voltaje por reacción en la armadura  $E_{ar}$ , precede a la corriente de armadura  $I_A$  que la produjo, y se encuentra en fase con la caída de voltaje  $I_A X_A$  por reactancia de armadura. Se puede formular ahora la ecuación básica del generador para cargas de factor de potencia unitario como la siguiente suma fasorial:

$$E_A = (V_\phi + I_A) + j(I_A X_A + E_{ar})$$

De aquí, se puede ver que con un factor de potencia unitario, el voltaje por fase entre terminales  $V_\phi$  es menor que el voltaje generado por fase en una caída total por impedancia igual a  $I_A(R_A + jK_s)$  siendo  $jI_A X_s$  la caída de voltaje por reactancia síncrona de cuadratura.



**Figura 9.10** Diagrama fasorial de un generador síncrono con una carga con factor de potencia unitario.

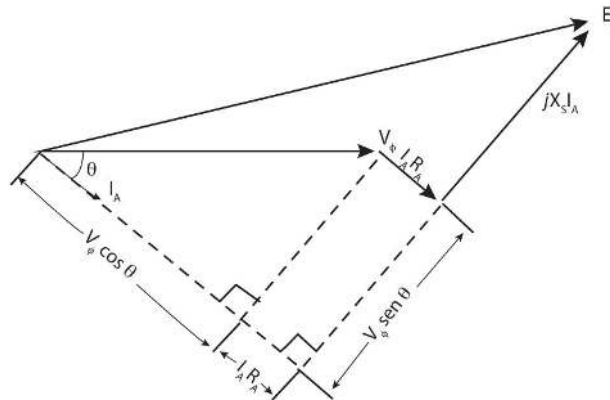


### 9.13 Operación con carga inductiva y su diagrama fasorial

Si la corriente de fase de armadura  $I_A$  está retrasada con respecto al voltaje de fase entre terminales un determinado ángulo  $\theta$ , como resultado de una carga externa principalmente inductiva a través del generador síncrono, se pueden representar los voltajes mediante el diagrama de la figura 9.11. La caída  $I_A R_A$  está todavía en fase con la corriente de fase en la armadura y las caídas de voltaje por reactancia de cuadratura y por reacción de armadura preceden  $90^\circ$  la corriente de armadura. El valor de  $E_A$  se puede indicar en términos de sus componentes horizontal y vertical como:

$$E_A = (V_o \cos \theta + I_A R_A) + j(V_o \sin \theta + I_A X_S)$$

De acuerdo a esto, se puede ver que para obtener el mismo voltaje nominal en terminales por fase, se requiere un voltaje inducido mayor por fase con factores de potencia en retraso, que con factores de potencia unitarios.



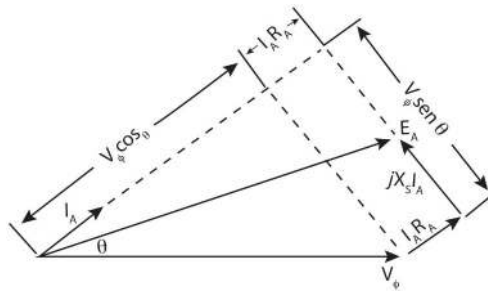
**Figura 9.11** Diagrama fasorial de un generador síncrono con una carga con factor de potencia en retraso.

### 9.14 Operación con carga capacitiva y su diagrama fasorial

Si la corriente de fase de la armadura está adelantada un ángulo  $\phi$  con respecto al voltaje de fase entre terminales, como resultado de una carga externa que tenga un componente capacitivo a través del generador síncrono, se pueden representar los voltajes como en la figura 9.12. La caída  $I_A R_A$  que está en fase con la corriente de fase en la armadura y la caída por reactancia síncrona de cuadratura  $I_A X_S$  antecede  $90^\circ$  a la corriente de armadura. Si se representa  $E_A$  en términos de los componentes horizontal y vertical se obtiene:

$$E_A = (V_o \cos \theta + I_A R_A) + j(V_o \sin \theta - I_A X_S)$$

De acuerdo a esto, se puede ver que para obtener el mismo voltaje nominal en terminales por fase, se requiere generar menos voltaje para un factor de potencia en adelanto que para uno en retraso.



**Figura 9.12** Diagrama fasorial de un generador síncrono con una carga con factor de potencia en adelanto.

**9.15 Prueba de excitación y de factor de potencia igual a cero ( $F.P. = 0$ ), para la obtención de la reactancia de dispersión por el método del Triángulo de Potier**

El Método del Triángulo de Potier, se aplica a las máquinas síncronas de rotor cilíndrico que trabajan en la región de saturación. En estas máquinas saturadas la aplicación del método de Behn-Eschenburg conduce a ciertos errores; ya que las fuerzas electromotrices ( $fem$ ) no son proporcionales ahora a las fuerzas magnetomotrices ( $fmm$ ) debido a la no linealidad de la zona del circuito magnético en que trabaja.

El Método de Potier determina el valor de la caída en la reactancia de dispersión  $X_\sigma I$  y la fuerza magnetomotriz ( $fmm$ ) que produce la reacción del inducido.

Para calcular la regulación por el Método de Potier, es preciso conocer la curva de vacío que representa la fuerza electromotriz ( $E_o$ ) en función de la fuerza magnetomotriz ( $fmm$ ) de excitación  $F_e$ , y además, es necesario realizar un ensayo con carga inductiva pura, representando en un gráfico la curva de tensión de salida respecto a la fuerza magnetomotriz ( $fmm$ ) de excitación para una corriente de inducido constante e igual a la intensidad asignada. En la Figura 9.13, se muestra el diagrama de conexiones de este ensayo con carga reactiva o de factor de potencia nulo (cero).

En el supuesto caso de despreciar la resistencia del inducido frente a su reactancia, da lugar a la construcción mostrada en la Figura 9.14 (a). Se observa que los fasores  $V$ ,  $X_\sigma I$  y  $E_r$  están en fase, e igualmente, las fuerzas magnetomotrices ( $fmm$ )  $F_e$ ,  $Fr$  y  $-Fi$ ; en consecuencia, se tienen las siguientes

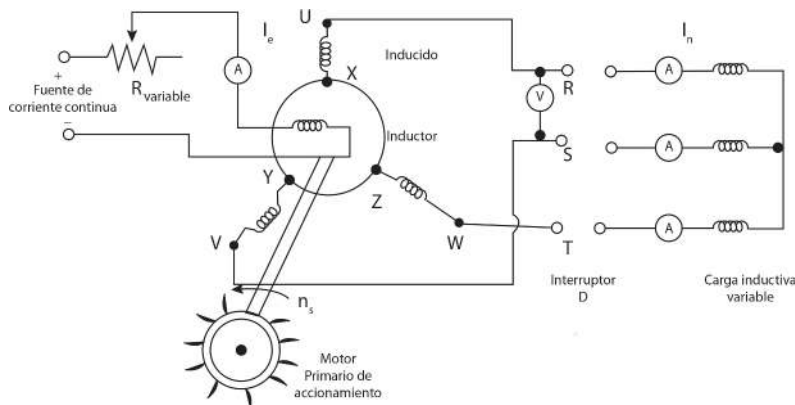
relaciones entre magnitudes:

$$F_e = F_i + F_r$$

$$Er = V + X_\sigma I$$

Se deduce de la Figura 9.15 que la reactancia de inducido, es contrario a la fuerza magnetomotriz ( $fmm$ ) de excitación, lo que era de esperar al ser la carga inductiva, ya que produce un efecto desmagnetizante. En la Figura 9.15(b) se ha presentado la característica reactiva junto con la característica de vacío. Puede observarse que las dos curvas son semejantes, lo cual es lógico, ya que en ambas, el circuito magnético es el mismo.

El desplazamiento entre ambas curvas se debe a la fuerza magnetomotriz de reacción del inducido y a la fuerza magnetomotriz necesaria para compensar la caída de voltaje por la reactancia de dispersión.



**Figura 9.14** Ensayo con carga inductiva pura (factor de potencia nulo) del generador.

De la curva reactiva, se deduce que cuando se tiene el voltaje asignado en las terminales, la fuerza magnetomotriz ( $fmm$ ) necesaria en la excitación  $F_e$  es igual al segmento  $\overline{OF}$ ; si  $\overline{MF}$  indica la fuerza magnetomotriz de reacción del inducido  $F_i$ ; la fuerza magnetomotriz ( $fmm$ ) resultante  $F_r$  de acuerdo con  $F_e = F_i + F_r$ , corresponderá al segmento  $\overline{OM}$ . Esta fuerza magnetomotriz induce una fuerza electromotriz ( $fem$ ) resultante  $Er = \overline{MC}$ . Teniendo en cuenta que  $Er = V + X_\sigma I$ , y la representación de la Figura 9.15 (b) se deduce que la caída de tensión por la reactancia de dispersión viene definida por el segmento  $\overline{CB}$ . Si se supone constante la reactancia  $X_\sigma$  (independiente de la saturación de la máquina) y la corriente de carga  $I$ , se pueden obtener los demás puntos de la característica reactiva, desplazando paralelamente el triángulo  $ABC$ , denominado Triángulo de Potier, de tal forma que si el vértice  $C$  recorre la curva de vacío, el vértice  $A$  describirá la curva reactiva. En particular, cuando la base del triángulo se apoya en el eje de abscisas se obtiene el punto  $A^9$  de la curva de carga. Este punto tiene una gran importancia, ya que corresponde a la excitación  $OA^9$  necesaria para que circule la corriente de plena

carga en cortocircuito, por lo que la magnitud  $OA^9$  puede obtenerse de la característica de cortocircuito. En efecto, conociendo únicamente los puntos  $A$  y  $A^9$  puede construirse el triángulo  $ABC$ , que permite determinar las dos magnitudes citadas. Si en la Figura 9.15 (b) se traza en la ordenada correspondiente al voltaje asignado desde el punto  $A$ , el segmento  $\overline{AD} = A^9O$  (determinado por la característica de cortocircuito para el valor dado de la corriente  $I$ ), y se traza la línea  $DC$  paralela, entonces, se obtiene el punto  $C$  de intersección con la de vacío. De esta construcción se observa que:

$$\overline{CB} = X_\sigma I; \overline{AB} = Fi$$

Conocidas estas magnitudes, podrá construirse el diagrama fasorial del alternador, para deducir posteriormente, la regulación de la máquina y la fuerza electromotriz ( $fem$ )  $E_o$ . Desde el punto de vista riguroso, el segmento  $\overline{CB}$  no da realmente la caída de voltaje en la reactancia de dispersión, sino en una nueva reactancia denominada “reactancia de Potier”, que es algo superior en valor a  $X_\sigma$ . Esto se debe a que la curva de vacío que expresa en general la relación  $E_o = f(F_e)$ , no es la misma que la que define la fuerza electromotriz ( $fem$ ) resultante  $E_r$  en función de  $F_r$ , y que se han considerado idénticas. Esta divergencia se explica por el aumento del flujo de dispersión del rotor a medida que aumenta la corriente de excitación. La diferencia entre la reactancia de dispersión y la reactancia de Potier, no es muy grande en las máquinas de rotor cilíndrico, y este método da resultados bastante correctos en los turboalternadores. Inclusive, la experiencia demuestra que el empleo de este diagrama de Potier en máquinas con polos salientes, da resultados bastante aceptables, si se efectúa la construcción del Triángulo de Potier para valores de la excitación correspondientes a 1.2 -1.3 veces el voltaje asignado. Por ello, este método que teóricamente sólo es exacto para las máquinas de rotor cilíndrico, se aplica en la práctica también a las máquinas con polos salientes.

Para concluir este punto, puede establecerse que en el mundo de hoy, es muy rara la existencia de un alternador único que de manera aislada alimente su propia carga; esta situación sólo se presenta en algunas aplicaciones tales como los grupos electrógenos.

Es norma general, que los alternadores se sitúen en centrales eléctricas al lado de donde se encuentran las fuentes de energía primarias.

Con el objetivo de aumentar el rendimiento y la fiabilidad del sistema, las diferentes centrales están conectadas entre sí en paralelo, por medio de líneas de transporte y de distribución. La conexión en paralelo de un alternador a la red, implica una serie de operaciones complejas que constituyen la llamada sincronización de la máquina. Es evidente que para que tal conexión se realice sin ninguna perturbación, se hace necesario que el valor instantáneo del voltaje del generador tenga igual magnitud y fase que el valor instantáneo del voltaje de la red.

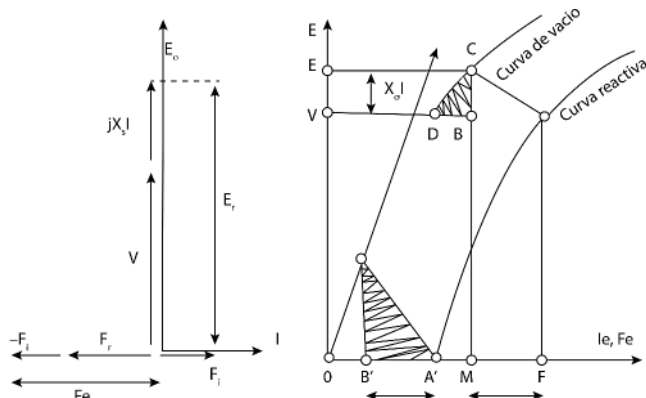


Figura 9.15 Determinación de la reactancia de Potier a través del Triángulo Potier.

9.16 Diagrama fasorial con la reactancia síncrona

Hacia la primera década del Siglo XX, el ingeniero Behn-Eschenburg de los talleres suizos Oerlikon, tuvo como objetivo y función inicial, poder establecer la caída de voltaje de un alternador. Se aplica a máquinas con rotor cilíndrico que traban en régimen lineal, lo que significa que los flujos son totalmente proporcionales a las fuerzas magnetomotrices (*fmm*), y por lo tanto; puede utilizarse el principio de superposición (la ventaja más importante de este método consiste en obtener un circuito equivalente eléctrico de la máquina síncrona con las ventajas analíticas que esto supone).

Existe un flujo único en el entrehierro de la máquina síncrona, que es producido por la acción conjunta de las fuerzas magnetomotrices de excitación  $F_e$  y de reacción de inducido  $F_i$ . Sin embargo, resulta cómodo considerar que cada fuerza magnetomotriz produce un flujo independiente que crea a su vez su correspondiente fuerza electromotriz inducida. De esta forma, se trabaja solamente con fuerzas electromotrices (*fem*) y magnitudes eléctricas, dejando a un lado las magnitudes magnéticas.

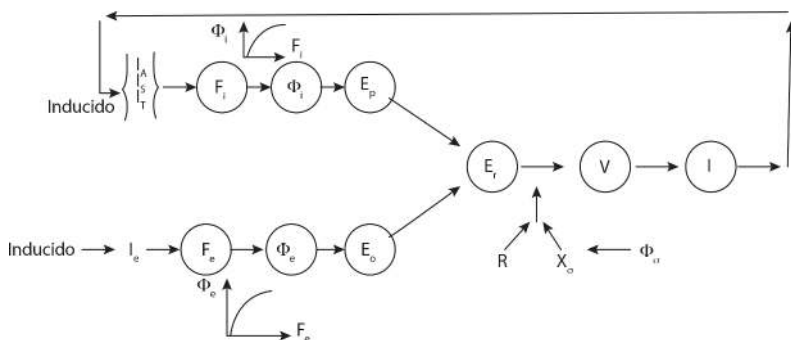


Figura 9.16 Relaciones funcionales entre las diversas variables de una máquina síncrona.

En la Figura 9.16 se representa esta idea. Obsérvese que están implicados tres flujos:

- El flujo de dispersión  $\phi_\sigma$  que se obtiene en las cabezas de las bobinas, que además, está en fase con la corriente del inducido, y que da lugar a una caída de voltaje en la reactancia  $X_\sigma$ , representada por el valor:

$$+jX_\sigma I$$

es decir; la caída de voltaje producida por la reactancia de dispersión se adelanta  $90^\circ$  respecto a la corriente del inducido.

- El flujo de excitación  $\phi_e$  producido por la fuerza magnetomotriz ( $F_e$ ), y en fase con ella, que es el causante de la fuerza electromotriz ( $fem$ ) producida en vacío  $E_o$ . Esta fuerza electromotriz ( $fem$ ) de acuerdo con la ley de Faraday estará retrasada  $90^\circ$  respecto al flujo  $\phi_e$ .
- El flujo de reacción de inducido  $\phi_i$  producido por la fuerza magnetomotriz ( $F_i$ ) y en fase con la corriente, lo que da lugar a una fuerza electromotriz ( $Ep$ ) retrasada  $90^\circ$  respecto de  $\phi_i$ , y, por lo tanto; de la corriente del inducido que puede expresarse como:

$$E = p - jXpI$$

El factor complejo ( $-j$ ) en la ecuación 9.3.1, indica el retraso de  $90^\circ$  de  $Ep$  respecto de  $I$ ; el término  $Xp$  expresa el factor de proporcionalidad entre ambas magnitudes y que se denomina reactancia de reacción de inducido.

En la figura 9.17 se muestra el nuevo diagrama fasorial que se obtiene y en el que se incluyen las fuerzas electromotrices ( $fem$ ) que se acaban definir. Se ha dibujado también la composición fasorial de las fuerzas magnetomotrices ( $fmm$ ) de un modo análogo como se realizó anteriormente. En concreto, la figura 9.17 representa la acción de las siguientes ecuaciones:

$$Fr = Fe + Fi$$

Esta ecuación expresa la resultante de fuerzas magnetomotrices; ahora, esta expresión se sustituye por la ecuación proporcional de fuerzas electromotrices:

$$Er = Eo + Ep$$

y teniendo en cuenta lo expresado en la ecuación anterior, la expresión puede ahora escribirse como:

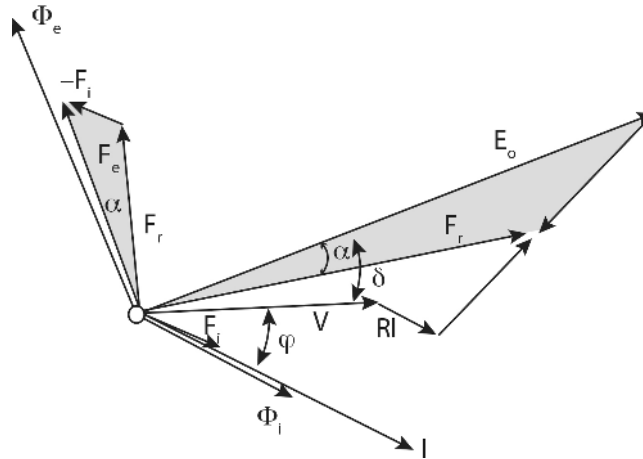
$$Er = Eo - jXpI$$

y sustituyendo el valor anterior de  $Er$ , puede establecerse de forma general:

$$E_o - jX_p I = V + RI + jX_\sigma I$$

y reordenando términos, puede expresarse como:

$$E_o = V + RI + jX_\sigma I + jX_p I$$



**Figura 9.17** Diagrama fasorial de voltajes y fuerzas magnetomotrices de un generador síncrono.

Lo que indica que la fuerza electromotriz inducida en el vacío ( $E_o$ ), debida a la fuerza magnetomotriz de excitación ( $F_e$ ), se puede considerar como la resultante de añadir al voltaje ( $V$ ) en las terminales del generador síncrono, las caídas de voltaje por resistencia  $RI$ ;  $jX_\sigma I$ . En la Figura 9.18 se muestra el circuito eléctrico que resume el significado real de las ecuaciones. El esquema final de la Figura 9.17 (b) representa el circuito eléctrico equivalente por fase de la máquina síncrona. Las dos reactancias en sen  $X_p + X_\sigma$ , dan lugar a la denominada reactancia síncrona ( $X_s$ ).

$$X_s = X_p + X_\sigma$$

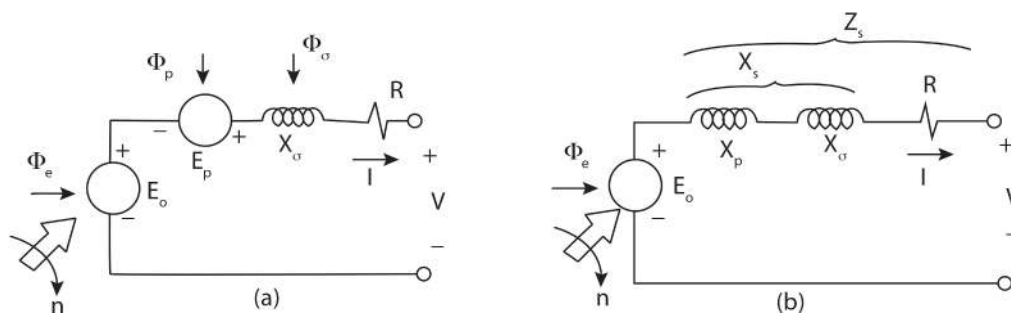
Esta reactancia es una magnitud ficticia que representa en un único término los efectos combinados de dispersión y de reacción del inducido, y que para una máquina no saturada (régimen lineal) tiene una magnitud constante. De este modo, puede expresarse la ecuación de la siguiente forma:

$$E_o V + RI + jX_s I = V(R + jX_s)$$

en esta última expresión, la suma  $R + jX_s$  se define como impedancia síncrona:

$$Z_s = R + jX_s$$

En conclusión, la Figura 9.18(b) representa un circuito equivalente tipo Thévenin, constituido por un generador de voltaje  $E_o$  en serie con la impedancia síncrona de la máquina.



**Figura 9.18** Desarrollo del circuito equivalente de un generador síncrono.

Para tener una idea de los parámetros comparativos de las magnitudes  $R$ ,  $X_\sigma$  y  $X_s$  se acostumbra frecuentemente en la ingeniería eléctrica, a definirla en valores “en por unidad” (p.u.) en función de una impedancia base tomada con referencia. Si se considera un generador conectado en estrella con un voltaje asignado simple  $V_n$ , y una corriente asignada  $I_n$ , la impedancia base se define así:

$$Z_b = \frac{V_n}{I_n}$$

y los valores en por unidad de  $R$ ,  $X_\sigma$  y  $X_s$  serán:

$$R(p.u.) = \frac{R}{Z_b}; \quad X_\sigma(p.u.) = \frac{X_\sigma}{Z_b}; \quad X_s(p.u.) = \frac{X_s}{Z_b}$$

Por lo que, la ventaja de definir las magnitudes en valores “en por unidad” (p.u.), es que resulta más simple comparar las características de diferentes máquinas, ya que los valores reales de las impedancias de máquinas de potencias muy dispares son muy desiguales. Sin embargo, los valores en por unidad (p.u.) varían en un margen más estrecho. En un generador síncrono se observa que el valor de la resistencia del inducido es generalmente del orden de 0.01 [p.u.], lo que significa que la caída de voltaje en esta resistencia a la corriente asignada es del 1% del voltaje asignado. La reactancia de dispersión varía entre 0.1 y 0.2 [p.u.]; mientras que la reactancia síncrona tiene una magnitud cercana a 1 [p.u.]. Teniéndose en cuenta estos valores, puede observarse que la reactancia síncrona es del orden de cien veces la resistencia  $R$  de un individuo, y es por esta razón, por la que se desprecia el valor de  $R$  en el circuito equivalente del generador síncrono de la Figura 9.18 (b); de esta forma, la impedancia síncrona se convierte en una reactancia síncrona, lo que es muy frecuente en el estudio de los sistemas eléctricos de potencia.



### 9.17 Límite de estabilidad estática del generador

Una máquina síncrona cilíndrica en una red de potencia infinita, tiene un par que sólo depende del ángulo  $\delta$ . Este ángulo es el que forman los fasores de la fuerza electromotriz de vacío  $E_0$  y de tensión en los bornes  $V$ .

La fuerza electromotriz es originada por la acción del campo magnético generado por el bobinado del rotor. Los fasores de ambas magnitudes están alineados cuando el par es nulo (y, en consecuencia,  $\delta = 0$ ). Por lo tanto, el defase ( $\delta$ ) entre ambos fasores, se corresponde con el de fase, que físicamente existe entre la posición del rotor en un momento dado con respecto a un punto que gire siempre a la velocidad de sincronismo.

Esto permite establecer una analogía mecánica Figura 9.19 del par de una máquina síncrona, la cual facilita la comprensión de este fenómeno.

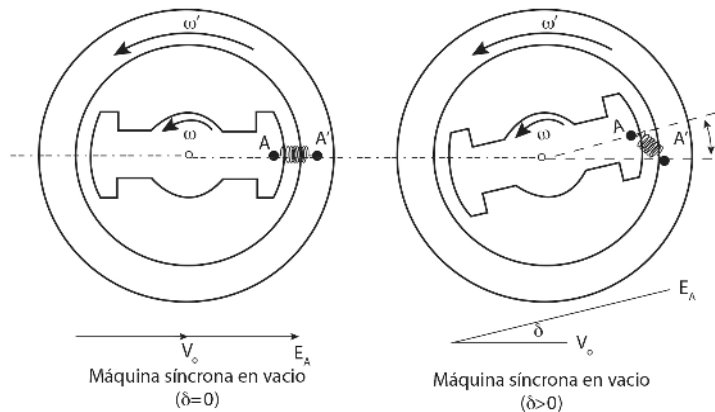
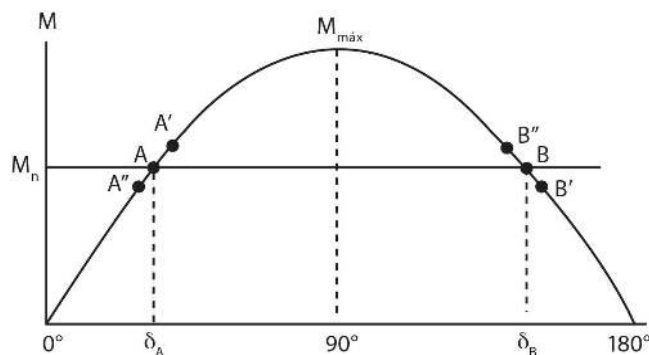


Figura 9.19 Analogía mecánica del funcionamiento de una máquina síncrona.

Considérense dos puntos imaginarios en el entrehierro de la máquina. Uno, el  $A$ , está fijo al rotor y gira a la velocidad  $\omega'$  de la máquina. El otro punto, el  $A'$ , está en el lado del estator, pero no está inmóvil; sino que gira siempre a la velocidad del sincronismo  $\omega'$ , constante e impuesta por la red de potencia infinita. Ambos puntos se encuentran alineados cuando la máquina está en vacío, es decir, cuando el par es nulo y  $\delta = 0$ , el efecto del par es equivalente a que entre  $A$  y  $A'$  hubiera un resorte de forma que no ejerce ninguna fuerza cuando  $A$  y  $A'$  están alineados, pero que comienza a tensarse y a ejercer par cuando  $A$  y  $A'$  se separan entre sí. Con la máquina en vacío, ambos puntos giran siempre a igual velocidad ( $\omega = \omega'$ ) y el resorte no se tensa, y no se transmite par entre ambos puntos.

Considérese una máquina síncrona cilíndrica de resistencia de estator  $R$  despreciable e intensidad de excitación  $I_e$  y reactancia síncrona  $X_s$  constantes, que está funcionando como generador acoplado a una red de potencia infinita. En estas condiciones, la curva de par de esta máquina, está representada en la

figura 9.20, donde se observa que si el motor de accionamiento está proporcionando un par constante  $M_n$  la máquina en régimen permanente puede estar funcionando en dos puntos ( $A$  y  $B$ ) de la curva de par.



**Figura 9.20** Estudio de la estabilidad estática de un generador síncrono.

Los ángulos de par  $\delta_A$  y  $\delta_B$  verifican que:

$$M_n = M_A = M_{m\acute{a}x} \text{sen}(\delta_A); \quad M_n = M_B = M_{m\acute{a}x} \text{sen}(\delta_B).$$

Supóngase que la máquina funciona en el punto  $A$ , con el ángulo de par  $\delta_A$  y se produce una pequeña perturbación transitoria que provoca un ligero aumento del par, con lo cual el ángulo del par, pasa a ser  $\delta'_A$ . La máquina síncrona pasa, entonces, a colocarse en el punto  $A'$ . En cuanto cese esta perturbación, el par-motor vuelve a ser  $M_n$ ; pero la inercia mecánica de la máquina impide que el ángulo del par vuelva instantáneamente a valer  $\delta_A$ ; ahora, la máquina se encuentra en un estado de desequilibrio de pares, el par motor es  $M_n = M_A$ ; pero el par de la máquina es mayor, ya que corresponde al punto  $A'$ . La máquina síncrona está actuando como generador, lo que significa que ejerce un par de frenado. Ahora, se tiene un par de frenado  $M'_A$  superior al par-motor  $M_A$ ; por lo que la máquina reduce entonces su velocidad. Esto provoca que el ángulo del par vaya disminuyendo hasta que, al final, acabe valiendo  $\delta_A'$  y se alcancen otra vez el punto de equilibrio  $A$ , y la velocidad de sincronismo  $\omega'$ .

Si la perturbación transitoria desde el punto  $A$  produjo una disminución del par, la máquina pasará al punto  $A''$ , cuyo ángulo de par es  $\delta_A''$ . Al desaparecer la perturbación, el par-motor sigue siendo  $M_n = M_A$ , pero el par de la máquina es inferior (es  $M_A''$ ).

Por lo tanto, el par-motor es mayor que el par de frenado y la máquina aumentará su velocidad. Esto hace que el ángulo del par aumente, hasta que vuelva a valer  $\delta_A$  y se alcance otra vez el punto de equilibrio  $A$  y la velocidad de sincronismo  $\omega'$ .

En resumen, aunque parezcan perturbaciones transitorias que desvíen, tanto en sentido positivo como negativo, el ángulo del par con respecto al punto de equilibrio inicial  $A$ ; la máquina vuelve a recuperar el equilibrio en el punto  $A$ . Por lo tanto, el punto  $A$  es un punto de funcionamiento estable del generador

síncrono.

Supóngase que ahora, la máquina se encuentra inicialmente en el punto de equilibrio  $B$  y que se produce una pequeña perturbación transitoria que provoca una ligera disminución del par, con lo que el ángulo del par pasa a ser  $\delta'_B$ . La máquina síncrona se coloca, entonces, en el punto  $B'$ . En el momento de desaparecer la perturbación, el par-motor sigue siendo  $M_n = M_B$ , pero el par de la máquina es inferior (es  $M'_B$ ). Por lo tanto, el par-motor es mayor que el par de frenado y la máquina aumentará su velocidad. Esto hace que el ángulo del par aumente, separándose cada vez más de  $\delta_B$  hasta que la máquina pierda el sincronismo con la red.

Si la perturbación transitoria desde el punto  $B$  produjo un aumento del par, la máquina pasará al punto  $B'$ , cuyo ángulo de par es  $\delta_{B'}$ . Al desaparecer la perturbación, el par-motor sigue siendo  $M_n = M_B$ , pero el par de la máquina es mayor (es  $M''_B$ ). Luego, el par-motor es inferior que el par de frenado y la máquina reducirá su velocidad. Esto hace que el ángulo del par disminuya, alejándose cada vez más de  $B$ , hasta que alcance un nuevo equilibrio en el punto  $A$ .

En resumen, si aparecen perturbaciones transitorias que desvíen, tanto en sentido positivo como negativo, el ángulo de par con respecto al punto de equilibrio inicial  $B$ , la máquina es incapaz de recuperar el equilibrio en el punto  $B$ . Por lo tanto, el punto  $B$  es un punto de funcionamiento inestable del generador síncrono. De aquí se puede deducir que los puntos de funcionamiento del generador síncrono cuyos ángulos del par  $\delta$  estén comprendidos entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$  son estables; mientras que si están comprendidos entre  $90^\circ$  y  $180^\circ$  son inestables. Por lo tanto, el ángulo de par  $\delta = 90^\circ$  es el límite de estabilidad estática.

### 9.18 Diagramas circulares y la construcción de la curva de capacidad de un generador

Un diagrama de capacidad, es una gráfica de potencia compleja  $S = P + jQ$ . Esta fórmula se obtiene del diagrama fasorial del generador, asumiendo que  $V\phi$  es constante en el voltaje nominal de la máquina.

La curva de capacidad final de un generador síncrono (figura 9.21), es una gráfica de  $P$  y  $Q$ , con la potencia real  $P$  en el eje horizontal, y la potencia reactiva  $Q$  en el eje vertical. Las líneas de corriente constante del inducido  $I_A$  aparecen como líneas de  $S = 3V\phi I_A$  constante, que son círculos concéntricos alrededor del origen. Las líneas de corriente de campo constante corresponden a las líneas de  $E_A$  constante, que se muestran como círculos de magnitud  $3E_A V\phi / X_s$  con su centro en el punto:

$$Q = -\frac{3V_\phi^2}{X_s}$$

El límite de corriente del inducido aparece como el círculo correspondiente a  $I_A$  nominal, y el límite de la corriente de campo aparece como un círculo correspondiente a  $E_A$  nominal. Cualquier punto que se encuentre dentro de ambos círculos, es un punto de operación seguro para el generador.

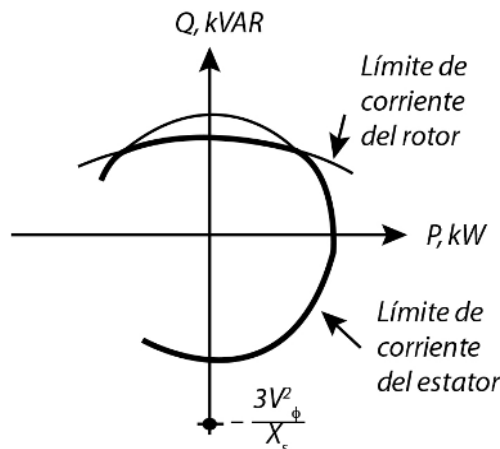


Figura 9.21 Curva de capacidad resultante del generador síncrono.

### 9.19 Reactancias del generador en cortocircuito trifásico

En el instante del cortocircuito, lo único que limita la corriente, es la resistencia casi despreciable del generador, ya que necesita la reacción de armadura de varios ciclos para debilitar apreciablemente al campo, desmagnetizado. Esta irrupción de corriente momentánea máxima de cortocircuito puede ser tan excesiva, que pueda dañar los interruptores, las barras de distribución y los devanados de la máquina. Por esto, se acostumbra colocar reactores limitadores de corriente en serie con cada fase del generador. Sin estos reactores, la corriente de cortocircuito puede ser hasta diez veces la corriente a plena carga. Con los reactores en serie, la corriente de cortocircuito por lo general, se limita a aproximadamente el doble de la corriente a plena carga ya que los reactores crean una caída por impedancia (que es casi reactancia pura) tan alta como el 20 % del voltaje nominal del generador. En cuestión de pocos ciclos después del golpe de corriente, la reacción de armadura reduce la corriente de cortocircuito desde el máximo hasta su valor sostenido o estable de cortocircuito, el cual, se puede interrumpir simultáneamente mediante el equipo de sobrecarga.

Para protección de la máquina, se acostumbra diseñar los generadores con una alta relación de reactancia síncrona de armadura a la resistencia, para reducir la corriente sostenida de cortocircuito a aproximadamente el valor nominal.

Una vez que se acumula la reactancia de estado transitorio, a lo largo de varios ciclos de voltaje generado de corriente alterna, ya se puede tolerar la sobrecarga; sin embargo, la presencia de reactores limitadores de corriente, reduce instantáneamente la corriente inicial de corto circuito.

### 9.20 Sistemas de regulación de voltaje

Mientras menor sea el factor de potencia en adelanto, mayor es el aumento de voltaje entre el funcionamiento sin carga y el funcionamiento a plena carga. Mientras menor sea el factor de potencia en atraso, mayor es la disminución de voltaje desde el funcionamiento sin carga hasta el funcionamiento a plena carga.

Si se eleva el factor de potencia desde un valor en retraso hasta un factor de potencia unitario, esto aún no es suficiente para producir regulación de voltaje de 0% y que el voltaje de terminales seguirá decreciendo en tanto que se aplique carga puramente resistiva al alternador.

Con cargas en adelanto, la reacción de armadura es de magnetización y tiende a producir más voltaje generado cuando se aplica la carga, produciendo una regulación negativa. Este alto voltaje generado es más que suficiente para compensar la caída de voltaje resistivo interno en la armadura. A determinado factor de potencia en adelanto, la magnetización adicional producida por la reacción de armadura, se compensa exactamente por las caídas internas de voltaje y la regulación de voltaje es cero. Con cargas en retraso, la reacción de armadura es de desmagnetización y su efecto de reducir el voltaje generado, aunado con las caídas de voltaje internas de armadura reactiva y resistiva tiene por consecuencia una disminución rápida del voltaje de terminales al aplicar la carga.

La regulación de voltaje de un generador síncrono está dada por:

$$RV(\text{porcentaje de regulacion de voltaje}) = \frac{V_{nl} - V_{fl}}{V_{fl}} \times 100\%$$

y se calcula normalmente en la modalidad por fase aunque se puede calcular utilizando los valores de voltaje de línea, con los mismos resultados. Un factor de potencia con el suficiente adelanto produce un aumento de voltaje. Los factores de potencia unitarios y en retraso, siempre producen una caída en el voltaje de terminales al aplicar la carga.

### 9.21 Diagrama fasorial

Normalmente los voltajes de un generador síncrono se expresan como fasores debido, a que éstos son de corriente alterna. Puesto que los fasores tienen magnitud y ángulo, la relación entre ellos se debe expresar en una gráfica bidimensional. Cuando se hace una gráfica de los voltajes dentro de una fase ( $E_A$ ,  $V\phi$ ,  $jX_s I_A$  y  $R_A I_A$ ) y la corriente  $I_A$  en la fase, de tal forma que se muestran las relaciones entre ellos, la gráfica resultante se conoce como diagrama fasorial.

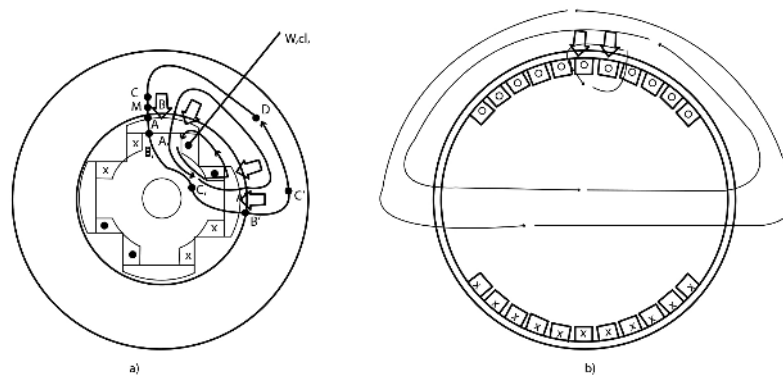
Por ejemplo, en la Figura 9.10 se muestran estas relaciones cuando el generador alimenta una carga con un factor de potencia unitario (carga puramente resistiva). Y se obtiene de la fórmula:  $V\phi = E_A - jX_s I_A - R_A I_A$  que el voltaje  $E_A$  difiere del voltaje en los terminales de la fase  $V\phi$  por las caídas de voltaje resistivo e inductivo. Todas las corrientes y los voltajes están referenciados a  $V\phi$ , y se

asume arbitrariamente que tienen un ángulo de  $0^\circ$ .

Este diagrama fasorial se puede comparar con los diagramas fasoriales de los generadores que operan con factores de potencia en retraso (Figura 9.11) y en adelante Figura 9.12. Cabe recalcar que para cierto voltaje de fase y cierta corriente del inducido, es necesario un voltaje interno generado  $E_A$  más grande para las cargas en retraso, que para las cargas en adelante. Por lo tanto, se necesita una corriente de campo más grande, para obtener el mismo voltaje en las terminales en las cargas en retraso, debido a que:  $E_A = K\phi\omega$ , y  $\omega$  debe ser constante para mantener una frecuencia constante.

Igualmente, para cierta corriente de campo y una específica corriente de carga, el voltaje en los terminales es menor para cargas en retraso y mayor para cargas en adelante.

En las máquinas síncronas reales, regularmente la reactancia síncrona es mayor que la resistencia del devanado  $R_A$ , por lo que generalmente, se desprecia  $R_A$  en el estudio cualitativo de las variaciones de voltaje; aunque para obtener resultados numéricos exactos se debe considerar esta resistencia.  $jX_S I_A$  debe extenderse entre  $V\phi$  a un ángulo de  $0^\circ$  y  $E_A$  que tiene la restricción de mantener la misma magnitud que antes del incremento en la carga. Si se dibujan estas restricciones en el diagrama fasorial, hay un solo punto en el que el voltaje de reacción del inducido es paralelo a su posición original, mientras se incrementa su tamaño. En la Figura 9.22 se muestra la gráfica resultante. Si se cumplen las restricciones, se observa que conforme se incrementa la carga, el voltaje  $V\phi$  decrece abruptamente. Ahora supóngase que se carga el generador con cargas con factores de potencia unitarios. ¿Qué pasa si añaden más cargas con el mismo factor de potencia? Con las mismas restricciones que antes, ahora se puede observar que  $V\phi$  decrece ligeramente (figura 9.22(b)).



**Figura 9.22** Líneas de flujo sin carga (a) Rotor de polo saliente, (b) Rotor de polo no saliente.

Por último, supóngase que el generador se carga con consumidores de potencia con factores de potencia en adelante. Si ahora se añaden nuevas cargas con el mismo factor de potencia, el valor del voltaje de reacción del inducido es mayor a su valor previo, y  $V\phi$  aumenta (Figura 9.22(b)). En este último caso, un incremento en la carga en el generador produjo un incremento en el voltaje en las terminales. Este resultado no es el que se esperarí si se basa el lector únicamente en la intuición.

Las conclusiones generales de la discusión sobre el comportamiento de los generadores síncronos son:

Tensión de línea ( $E_0, V$ )	0	120	200	220	240	260	300
$I_{exe}$ en circuito abierto	0	1.44	2.60	300	3.50	4.10	5.90
$I_{exe}$ con $fdp$ cero y corriente asignada	2.2	3.64	5.20	5.80	6.56	7.50	

1. Si se añaden cargas en retraso ( $+Q$  o cargas de potencia reactiva inductivas) a un generador,  $V_\phi$  y el voltaje en las terminales  $V_T$ , decrecen significativamente.
2. Si se añaden cargas con factores de potencia unitarios (no potencia reactiva) a un generador, hay una pequeña disminución en  $V_\phi$  y en el voltaje de las terminales.
3. Si se añaden cargas en el adelanto ( $-Q$  o cargas de potencia reactiva capacitivas) a un generador,  $V_\phi$  y el voltaje terminal, aumentarán.

Una forma conveniente de comparar el comportamiento del voltaje de dos generadores es su *regulación de voltaje*. La regulación de voltaje ( $VR$ ) de un generador se define por medio de la ecuación.

$$VR = \frac{V_{sc} - V_{pc}}{V_{pc}}$$

donde;  $V_{sc}$  es el voltaje sin carga del generador y  $V_{pc}$  es el voltaje a plena carga del generador.

## 9.22 Problemas resueltos

**Problema 9.1** Un alternador trifásico conectado en estrella de 45 [KVA], 220 [V], ha dado los siguientes resultados en ensayos de vacío y factor de potencia nulo. Considérese  $F_i = 1.7$  [A] e  $I_r = 3.65$  [A].

- a. Calcular la reactancia de dispersión por fase.
- b. Calcular la corriente de excitación equivalente a la reacción de inducido a plena carga.
- c. Calcular la corriente de excitación necesaria en el inductor para desarrollar la plena carga a la tensión asignada con un factor de potencia de 0.8 inductivo.
- d. Calcular la regulación de voltaje.

Nota: Despreciar el valor de la resistencia del inducido.

**Respuestas:**

a. 
$$X_\sigma I = \frac{260 - 220}{\sqrt{3}} = 23.1[V]$$

$$F_i = I_i = 1.7[A]$$

$$I = \frac{45000}{(\sqrt{3})(220)} = 118[A]$$

$$X_\sigma = \frac{23.1}{118} = 0.196[\Omega]$$

b.

$$F_i = I_i = 1.7[A]$$

c.

$$V = \frac{220 \angle 0^\circ}{\sqrt{3}} = 127 \angle 0^\circ [V]$$

$$I = \frac{45,000}{(\sqrt{3})(220)} = 118[A]$$

Y en consecuencia, la fuerza electromotriz resultante por fase es:

$$E_r = 127 \angle 0^\circ + (j 0.196)(118) \angle -36.87^\circ = 127 \angle 0^\circ + 23.1 \angle 53.13^\circ = 142.07 \angle 7.5^\circ [V]$$

que corresponde a un módulo de la fuerza electromotriz de línea:

$$(142.07 \angle 7.5^\circ)(\sqrt{3}) = 246 \angle 7.5^\circ [V]$$

la corriente de excitación viene dada por:

$$I_{exc} = 5 [A]$$

$$I_{exc} = \sqrt{I_r^2 + I_i^2 - 2I_r I_i \cos(90^\circ + 44.4)} = 5 [A]$$

d. La excitación anterior produce una fuerza electromotriz en vacío de 284[V] y en consecuencia, la regulación tendrá un valor igual a:

$$RV = \frac{284 - 220}{220} (100\%) = 29.1\% \Rightarrow RV = \mathcal{E} = 29.1\%$$

**Problema 9.2** Un alternador o generador trifásico conectado en estrella de 165[KVA], 950[V] tiene una resistencia de inducido de 0.3[Ω]. Una corriente de excitación ( $I_{exc}$ ) de 15[A] produce una corriente en el inducido de 200[A] en cortocircuito y una fuerza electromotriz de línea de 780[V] en circuito abierto.

a. Calcular la impedancia y la reactancia síncrona.



- b. Calcular la regulación de voltaje a plena carga en un factor de potencia de 0.8 inductivo.

**Respuestas:**

- a. La impedancia síncrona al estar conectado en estrella el generador es:

$$Z_s = \left( \frac{780/\sqrt{3}}{200} \right) = 2.25[\Omega] \Rightarrow Z_s = 2.25[\Omega]$$

la reactancia síncrona es:

$$X_s = \sqrt{(Z_s)^2 - (R)^2} = \sqrt{(2.25)^2 - (0.3)^2} = 2.23[\Omega] \Rightarrow X_s = 2.23 [\Omega]$$

- b. Para calcular la regulación a plena carga, se debe determinar previamente la fuerza electromotriz  $E_o$ :

$$E_o = V + (R + jX_s)(I)[V]$$

la corriente a plena carga o asignada del generador es:

$$I = \frac{S}{(\sqrt{3})(V_L)} = \frac{165,000}{(\sqrt{3})(950)} = 100.3 [A]$$

Tomándose la tensión simple como referencia, los valores fasoriales de voltaje y de corriente son:

$$V = \frac{950 \angle 0^\circ}{\sqrt{3}} = 450.33 \angle 0^\circ [V]; I = 100.3 \angle -36.87^\circ [A]$$

Finalmente:

$$E_o = 450.33 \angle 0^\circ + (0.3 + j2.23)(100.3 \angle -36.87^\circ) = 629.5 \angle 14.8^\circ [V]$$

que se corresponde a una magnitud de línea de  $(629.5)(\sqrt{3}) = 1090.33 [V]$ , y una regulación:

$$\mathcal{E} = RV \frac{1090.33 - 950}{950} = (100\%) = 14.77\% \Rightarrow \mathcal{E} = RV = 14.77\%$$

**Problema 9.3** Un generador trifásico conectado en estrella de rotor cilíndrico de  $3000[KVA]$ ;  $6600[V]$ ;  $50[Hz]$  y 2 polos, tiene una resistencia de inducido de  $0.07[\Omega]$ , y una reactancia de dispersión de  $0.7[\Omega/fase]$ . La curva de vacío viene expresada por la ecuación:

$$\mathcal{E} = \frac{5800F_e}{F_e + 9300}$$

donde:  $E$  es la fuerza electromotriz por fase generada por el alternador y  $F_e$  es la fuerza magnetomotriz de excitación del inductor en AV/polo. La fuerza magnetomotriz de reacción del inducido a plena carga es de 13000 AV/polo. Si el generador funciona a plena carga con un factor de potencia de 0.8 inductivo.

- Calcular la fuerza electromotriz resultante  $E_r$ .
- Calcular la fuerza magnetomotriz total  $F_e$  necesaria en la excitación.
- Si manteniendo fija la fuerza magnetomotriz anterior, se desconecta la carga, ¿cuál será el valor de la fuerza electromotriz  $E_o$  que aparecerá en las terminales del generador?

### Respuestas:

- El voltaje asignado por fase en las terminales del generador vale:

$$V = \frac{6,000}{\sqrt{3}} = 3.840.5 \text{ [V]}$$

y la corriente de plena carga del generador es:

$$I = \frac{S}{(VS)(V_L)} = \frac{3,000,000}{(\sqrt{3})(6,000)} = 262.4 \text{ [A]}$$

Si se considera el voltaje como referencia de fases, las expresiones fasorial de voltaje y de corriente serán:

$$V = 3810.5 \angle 0^\circ \text{ [V]; } I = 262.4 \angle -36.87^\circ \text{ [A]}$$

el ángulo de  $\angle -36.87^\circ$  se obtiene a partir de considerar el factor de potencia inductivo de 0.8. Entonces;  $\cos^{-1}(0.8) = 36.87^\circ$ ; pero como es inductivo se coloca en retraso con el signo negativo (-).

Finalmente; la fuerza electromotriz resultante es:

$$E_r = 3,810.5 \angle 0^\circ + (0.07 + j0.7)(262.4 \angle -36.87^\circ) = 3942.2 \angle 1.9^\circ \text{ [V]}$$

$$\vec{E}_r = 3942.2 \angle 1.9^\circ \text{ [V]}$$

que corresponde a un módulo de la fuerza electromotriz resultante de línea de  $(3,942.2)(\sqrt{3}) = 6,828.15 \text{ [V]}$

- Para producir la fuerza electromotriz anterior, se requerirá una fuerza magnetomotriz resultante  $F_r$  determinada por la curva de vacío:

$$3642.2 = \frac{(5800)(Fr)}{Fr + 9300} \Rightarrow Fr = 19,734.1 \text{ [AV/polo]}$$

y como quiera que esta fuerza magnetomotriz debe estar adelantada  $90^\circ$  respecto a  $E_r$ ; entonces, la expresión fasorial corresponde es:

$$\vec{F}_r = 19,734.1 \angle 91.9^\circ [A.V/polo]$$

Ahora bien, según el enunciado de la fuerza magnetomotriz de reacción de inducido a plena carga, vale  $13,000[AV/polo]$  y tiene que estar en fase con la corriente de inducido, por lo que su expresión fasorial es:

$$\vec{F}_i = 13,000 \angle -36.37^\circ [A.V/polo]$$

y en consecuencia, la fuerza magnetomotriz total necesaria en la excitación es:

$$F_e = F_r - F_i = 19,734.1 \angle 91.9^\circ - 13000 \angle -36.87^\circ = 29000 \angle 112^\circ [AV/polo]$$

es decir:

$$F_e = 29,000 [AV/polo]$$

- c. Si dejando fija la fuerza magnetomotriz anterior, se abre el inducido, el voltaje simple que aparecerá en las terminales del generador, se deduce de la curva de vacío:

$$E_o = \frac{(5,800)(29,660)}{29,660 + 9,300} = 4,415.54 [V] \Rightarrow \vec{E}_o = 4,415.5 [V]$$

que corresponde a un valor compuesto:  $E_o = (4,415.5)(\sqrt{3}) = 7,648 [V]$

**Problema 9.4** Un generador de polos salientes conectado en estrella de  $1,500[KVA]$ ;  $6,600[V]$  y  $50[Hz]$  tiene una resistencia del inducido despreciable. Las reactancias síncronas por fase en los ejes directo y cuadratura son respectivamente  $23.2[\Omega]$  y  $14.5[\Omega]$ . Si la máquina suministra la corriente de plena carga con un factor de potencia de 0.8 inductivo.

- Calcular la fuerza electromotriz  $E_o$  de línea.
- Calcular las corrientes  $I_d$  e  $I_q$ .

### Respuestas:

- El voltaje simple del generador vale:

$$V = \frac{6,600}{\sqrt{3}} = 3,810.5 \text{ [V]}$$

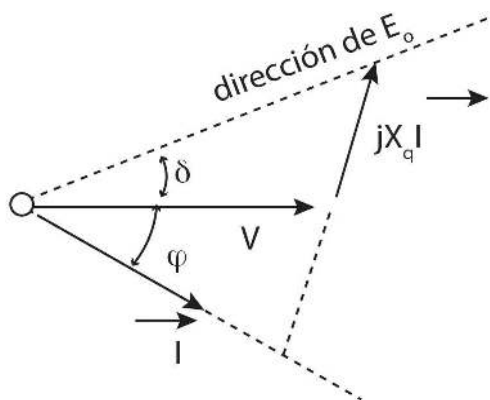
y la corriente de plena carga es:

$$I = \frac{S}{(\sqrt{3})(V_L)} = \frac{150,000}{(\sqrt{3})(6,600)} = 131.2 \text{ [A]}$$

tomando el voltaje como referencia de fases, las expresiones fasoriales de voltaje de corriente son:

$$\vec{V} = 3,810.5 \angle 0^\circ \text{ [V]}; \vec{I} = 131.2 \angle -36.87^\circ \text{ [A]}$$

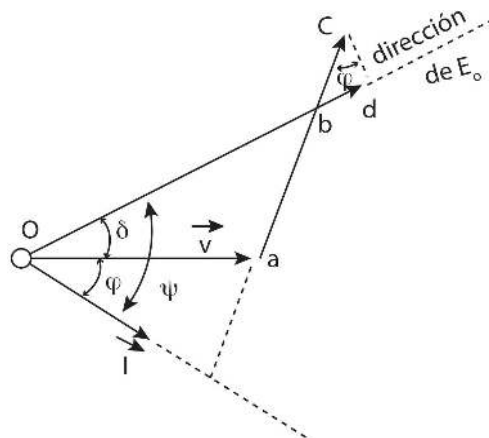
De acuerdo a la construcción gráfica para determinar la dirección de  $E_o$ : (Ver la Fig. 9.23).



**Figura 9.23** Dirección de  $E_o$  para el problema 9.22.4.

$$\vec{V} + jX_q \vec{I} = 3810.5 \angle 0^\circ + (j14.5)(131.2 \angle -36.87^\circ) = 5180.5 \angle 17^\circ$$

Por consiguiente; el ángulo  $\delta$  de la figura anterior es igual a  $17^\circ$ , siendo la distancia  $\overline{ob}$  de la siguiente figura igual a  $5180.5 \text{ [V]}$  y el ángulo  $\Psi = \varphi + \delta = 36.87^\circ + 17^\circ = 54^\circ$ . (Ver la Fig. 9.24).



**Figura 9.24** Representación del segmento  $\overline{ob}$ , con magnitud de 5180 [V]

En consecuencia,  $\overline{bd} = (X_d - X_q)\vec{I} \sin \Psi = (X_d - X_q)I_d$ ; entonces:

$$\overline{bd} = (23.2 \angle -14.5)(131.2) \sin(54^\circ) = 923.4$$

y por lo tanto; la magnitud de la fuerza electromotriz  $E_o$  por fase es:

$$E_o = 5,180.5 + 923.4 = 6,105 \text{ [V]}$$

$$E_o = 6,105 \text{ [V]}$$

que se corresponde con una fuerza electromotriz de línea de 10,572.4[V].

**b.** De acuerdo con la figura 9.25; las corrientes  $I_d$  e  $I_q$  valdrán:

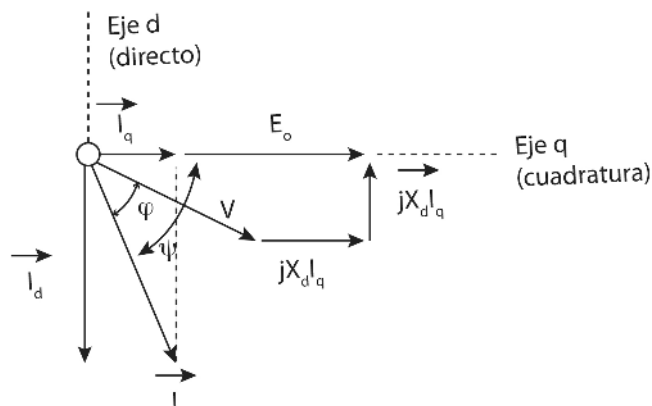


Figura 9.25 Representación de las corrientes  $I_d$  e  $I_q$  para el problema 9.22.4

$$I_d = I \sin \Psi = 131.2 \sin(54^\circ) = 106.14 \text{ [A]} \Rightarrow I_d = 106.14 \text{ [A]}$$

$$I_q = I \cos \Psi = 131.2 \cos(54^\circ) = 77.12 \text{ [A]} \Rightarrow I_q = 77.12 \text{ [A]}$$

**Problema 9.5** Un generador de 2.5[MW] y 50[Hz] tiene un estatismo de 5%. El generador tiene en vacío una frecuencia de 51[Hz].

- ¿Cuál será la frecuencia a la que funcionará el alternador cuando alimenta una carga de 1,000[KW] con un factor de potencia inductivo de 0.8?
- Si se añade otra carga que consume 1000[KW] con un factor de potencia inductivo de 0.6, ¿cuál será ahora, la nueva frecuencia de trabajo?
- Después de conectar la segunda carga, ¿qué deberá hacerse para restablecer la frecuencia de funcionamiento a 50[Hz]?

**Respuestas:**

- De acuerdo con la constante del regulador o potencia regulante que se mide en [MW/Hz], se tiene que:

$$K = \frac{P_n}{S r f n} = \frac{2.5}{(0.05)(50)} = 1 \text{ [MW/Hz]}$$

y de acuerdo a la expresión:

$$f = f_1 - \frac{1}{K}(P)$$

se tiene que; para una potencia de 1 [MW]:

$$f = (51 - 1)(1) = 50[Hz] \Rightarrow f = 50[Hz]$$

- b. La segunda carga representa una potencia activa de 600[KW] que añadida a los 1000[KW] dan un total de 1.6[MW]. La nueva frecuencia de trabajo es:

$$f = 51 - 1.6(1) = 49.4 [Hz] \Rightarrow f = 49.4 [Hz]$$

- c. Para volver la frecuencia de funcionamiento a 50[Hz], se tendrá que actuar sobre la regulación secundaria del regulador de velocidad, de tal modo que el generador dé en vacío una frecuencia de 51.6[Hz] (es decir; 50+1.6), y de este modo se compensará la caída de frecuencia de 1.6[Hz] que sufre el generador cuando se alimentan los 1,600[KW].

### 9.23 Resumen

Las máquinas síncronas son máquinas eléctricas cuya velocidad de rotación “n” (en revoluciones por minutos, [rpm]), está vinculada rígidamente con la frecuencia  $f$  de la red de corriente alterna con la cual trabaja, de acuerdo con la expresión:

$$\eta = \frac{(60)(f)}{\rho}$$

Las máquinas síncronas, como cualquier otro convertidor electromecánico de energía, están sometidas al principio de reciprocidad electromagnética, pudiendo funcionar tanto en régimen generador, como en régimen motor. Sin embargo, en la práctica de las instalaciones eléctricas es mayor su empleo como generadores para producir energía eléctrica de corriente alterna en las centrales eléctricas, a partir de fuentes primarias de energía hidráulica, térmica o nuclear. Las frecuencias industriales de los voltajes generados, oscilan entre los 50 [Hz] en Europa y 60 [Hz] en gran parte de América. En aplicaciones especiales como es el caso de la aeronáutica, se utilizan frecuencias más elevadas, del orden de los 400 [Hz], lo que trae como consecuencia una reducción del tamaño y peso de los equipos de abordo.

En la generación de energía eléctrica a pequeña escala, se emplean generadores acoplados a motores de combustión interna (que se denominan grupos electrógenos), que se utilizan con equipos de emergencia en hospitales, aeropuertos, salas y centros de cómputo, centrales telefónicas, etcétera; y que entran en servicio en el momento que falta el voltaje de la red. También se utilizan estos grupos en el suministro de energía a instalaciones remotas o aisladas, alejadas de las redes de distribución de energía eléctrica,

como es el caso de obras civiles, y en ciertas aplicaciones rurales: regadíos, granjas, extracción de agua en pozos profundos, etcétera.

Cuando la máquina síncrona trabaja con un factor de potencia capacitivo se dice que funciona como compensador o condensador síncrono. Las centrales eléctricas de bombeo constituyen un ejemplo singular de funcionamiento de las máquinas síncronas en sus dos formas básicas. Estas centrales están constituidas por un grupo binario: turbina y máquina síncrona. En donde, por el día se aprovecha el salto hidráulico para mover la turbina que hace girar al generador, obteniéndose energía eléctrica. Por la noche, o en general en las horas de menor consumo, coincidiendo con el valle de la curva de la demanda, la máquina síncrona funciona como motor, aprovechando la energía eléctrica sobrante de otros tipos de centrales (generalmente térmicos y nucleares), de tal forma que por medio de la turbina se bombea agua de un embalse situado “aguas abajo” de la presa de la central hasta otro embalse superior, provocando un aumento del nivel de este último, que permite en horas de mayor consumo, tener un remanente mayor de energía acumulada, lo que mejora el rendimiento general de toda la instalación.

En este modo de funcionamiento, el motor puede trabajar también como un condensador síncrono, mejorando el factor de potencia de la red.

Finalmente; hay dos tipos principales de máquinas eléctricas de corriente alterna: las síncronas y las de inducción. La diferencia fundamental entre los dos tipos, es que las máquinas síncronas requieren que se les suministre una corriente de campo de corriente continua a sus rotores; mientras que las máquinas de inducción (también llamadas máquinas asíncronas), inducen una corriente de campo a sus rotores, por medio de una acción transformadora.

Si se suministra un sistema de corrientes trifásicos, a un sistema de tres bobinas espaciadas 120° eléctricos en un estator, se producirá un campo magnético giratorio uniforme dentro del estator. La dirección de rotación del campo magnético, se puede invertir simplemente conmutando las conexiones de dos de las tres fases. De manera inversa, un campo magnético giratorio producirá un conjunto de voltajes trifásicos dentro del grupo de bobinas.

## 9.24 Problemas

**9.1** Un generador trifásico de 1,500[KVA]; 6,600[V]; conectado en estrella [Y], tiene una curva de vacío definida por la siguiente ecuación:

$$E_o = \frac{(12210)(Fe)}{4250 + Fe}$$

en donde:  $E_o$  se expresa en el voltaje de línea y  $Fe$  representa la fuerza magnetomotriz de excitación en [AV/polo]. La resistencia y la reactancia de dispersión del inducido por fase son 0.6[Ω] y 2.3[Ω], respectivamente. La fuerza magnetomotriz de reacción del inducido a plena carga es de 2500[A.V/polo].

- a. Calcular la fuerza electromotriz  $E_r$  de línea a plena carga, y con un factor de potencia inductivo



$I_e [A]$	10	20	30	40	60	80	100
$E_o / fase [V]$	960	1,920	2,800	3,440	4,220	4,600	4,800
$I_{cc} [A]$	232	464					

de 0.8.

- b. Calcular la corriente de excitación necesaria en el inductor, cuando la máquina está girando a plena carga con un factor de potencia inductivo de 0.8, si se sabe además, que la máquina eléctrica tiene polos salientes devanados con 190 espiras cada uno.
- c. Si en la situación del inciso (b) se desconecta repentinamente la carga, ¿cuál será el valor del voltaje de línea que aparecerá en las terminales de la máquina?
- d. ¿Cuánto vale la regulación de voltaje de la máquina?

**9.2** Un generador trifásico de 5,000[KVA]; 6,600[V]; conectado en estrella, tiene una curva de vacío definida por la siguiente expresión:

$$E_o = \frac{(7400)(I_3)}{8.5 + I_e}$$

en donde:  $E_o$  se expresa en [volts/fase], e  $I_e$  representa la corriente de excitación. La resistencia y la reactancia de dispersión del inducido por fase son respectivamente, 0.2[Ω] y 1[Ω]. La fuerza magnetomotriz de reacción del inducido es equivalente a una corriente de excitación de 20[A].

- a. Calcular el margen de excitación necesario para dar un voltaje asignado constante desde vacío a plena carga con un factor de potencia inductivo de 0.6.
- b. Si las pérdidas en el hierro por fricción y rozamiento con el aire asciende a un total de 10[KW], y las bobinas del campo están alineadas y alimentadas por una fuente de excitación de 200[V], calcular el rendimiento a plena carga con un factor de potencia de 0.6.

**9.3** Un generador trifásico conectado en estrella de 4000[KVA]; 6600[V], ha dado los siguientes resultados en unos ensayos de vacío y de cortocircuito, La resistencia del inducido es despreciable.

- a. Calcular la regulación a plena carga con un factor de potencia inductivo de 0.8
- b. Calcular la corriente de excitación necesaria en el caso anterior del inciso (a).

**Nota:** Tómese como reactancia síncrona, la primera aproximación obtenida de los ensayos; es decir, la que corresponde a la excitación necesaria para obtener el voltaje asignado en vacío.

Excitación [A.V/polo]	2,000	3,250	4,025	5,200	6,500
$E_o$ (línea)	4,300	6,600	7,250	7,920	8,580

$E_o$ [V] línea	1,848	3,696	5,511	6,600	7,128	7,590	7,986
$F_e$ [A.V/polo]	1,000	2,000	3,500	5,000	6,000	7,000	8,000

**9.4** Un generador trifásico conectado en estrella de 1,000[KVA], 6,600[V], ha dado los siguientes resultados en un ensayo de vacío:

Por el método de Potier, se ha determinado el valor de la reactancia de dispersión y la fuerza magnetomotriz de reacción del inducido a plena carga, resultando los valores:  $X_\sigma = 3.1 [\Omega]$ ;  $F_i = 2,000 [AV/polo]$ .

- Calcular la fuerza magnetomotriz de excitación necesaria a plena carga, con un factor de potencia inductivo de 0.8.
- Calcular la regulación de voltaje.

**9.5** Un generador síncrono trifásico conectado en estrella de 1,500[KVA]; 6,600[V] ha dado los siguientes resultados en un ensayo de vacío:

En un ensayo de cortocircuito se obtiene la corriente de plena carga para una excitación de 2,500[AV/polo]. En un ensayo con carga reactiva se necesitan 8,250[AV/polo], para que circule la corriente asignada al voltaje de régimen de 6,600[V].

- Calcular la fuerza magnetomotriz de excitación necesaria en los polos cuando el generador suministra la plena carga, con un factor de potencia inductivo de 0.8.
- Calcular la fuerza electromotriz correspondiente en vacío.
- Calcular la regulación de voltaje del generador en este régimen.

**9.6** Un generador trifásico de 1,000[KVA]; 11,000[V], conectada en estrella, tiene una resistencia de inducido despreciable. Los ensayos de vacío y con carga reactiva pura a la intensidad asignada, han dado los siguientes resultados:

Determinar por el método de Potier:

- La caída de voltaje en la reactancia de dispersión a plena carga.
- La fuerza magnetomotriz de reacción del inducido con corriente asignada.

$I_e$ [A]	20	25	55	70	90
$E_o$ [V] (línea)	5,800	7,000	12,500	13,750	15,000
$V(f.d.p = 0)$	0	1,400	8,500	10,500	12,400

- c. La fuerza electromotriz resultante  $E_r$ , cuando el generador funciona a plena carga con tensión asignada, y un factor de potencia inductivo de 0.8.
- d. La fuerza magnetomotriz necesaria en la excitación en el caso anterior.
- e. La fuerza electromotriz  $E_o$  que producirá en vacío, la excitación anterior.
- f. La regulación de voltaje del generador en las condiciones anteriores.

**9.7** Un generador trifásico con una impedancia síncrona de  $0.5+j5[\Omega]$ , y que está conectado a una red de potencia infinita de  $11,000[V]$  suministrando una corriente de  $220[A]$  con un factor de potencia unitario. Sin cambiar la entrada de potencia al generador, se eleva la fuerza electromotriz un 25 %.

- a. Calcular la intensidad del inducido y el factor de potencia en esas condiciones.
- b. Calcular la potencia activa máxima que podrá ceder la máquina a la red, antes de perder el sincronismo con el nuevo valor de la excitación.
- c. Calcular la intensidad y el factor de potencia en las condiciones del apartado anterior.

**9.8** Un generador trifásico conectado en estrella, tiene una resistencia de inducido despreciable, y una reactancia síncrona de  $30[\Omega/\text{fase}]$ . Está acoplado a una red de potencia infinita de  $11[KV]$  y desarrolla  $4,000[KVA]$  con un factor de potencia unitario. Si se aumenta la fuerza electromotriz un 20 %, permaneciendo constante la entrada de potencia al generador, determinar el nuevo factor de potencia con que trabajará el generador, y la potencia aparente que suministra.

**9.9** Un alternador trifásico conectado en estrella, tiene una resistencia de inducido despreciable, y una reactancia síncrona de  $10[\Omega/\text{fase}]$ . Está acoplado a una red de suministro de potencia infinita de  $11,000[V]$ , y se sabe que desarrolla una potencia con un factor de potencia inductivo de 0.673, siendo el ángulo de potencia  $\delta = 0^\circ$ .

- a. Calcular la fuerza electromotriz de línea producida por el generador.
- b. Calcular la potencia activa que suministra a la red.

**9.10** Dos generadores idénticos de  $2,000[KVA]$  funcionan en paralelo alimentado una carga aislada. El regulador de la primera máquina eléctrica es tal, que la frecuencia cae uniformemente de  $50[Hz]$  en vacío, a  $48[Hz]$  a plena carga. La correspondiente caída uniforme de velocidad de la segunda máquina eléctrica es de  $50[Hz]$  a  $47.5[Hz]$ .

- a. ¿Cómo se distribuirán entre los dos generadores, una potencia activa consumida por la carga de  $2700[KW]$ ?
- b. ¿Cuál es la potencia activa máxima con un factor de potencia unitario, que puede suministrarse sin sobrecargar ninguno de los generadores?

## **Capítulo 10**

### **Operación de generadores síncronos en estado estable**

#### **10.1 Introducción**

#### **10.2 Operación de generadores**

#### **10.3 Especificaciones y normas**

#### **10.4 Problemas resueltos**

#### **10.5 Resumen**

### Competencias

- Conocer la operación del generador síncrono en estado estable.
- Establecer la operación de los generadores síncronos en paralelo.
- Determinar los principales parámetros utilizados en la operación de los generadores síncronos en estado estable.
- Conocer las principales aplicaciones de los generadores síncronos en estado estable.

## 10.1 Introducción

En los estudios para el planteamiento operativo y de expansión de los sistemas de potencia, es de suma importancia conocer el comportamiento dinámico de la red. Parte de estos estudios se centra en el funcionamiento y respuesta de los generadores síncronos a los cambios del sistema. Por tal razón, es importante conocer el procedimiento para la obtención de los parámetros dinámicos del generador síncrono mediante un análisis matemático sencillo que arroje resultados confiables.

Para generar potencia eléctrica, el generador síncrono es el más utilizado en los sistemas de potencia, los cuales constructivamente son de polos salientes o de polos cilíndricos. El devanado de la armadura, generalmente se coloca en el estator de la máquina, para lograr la señal trifásica al nivel de voltaje y de potencia deseados.

En el rotor, se tiene el devanado de campo, también llamado de excitación, colocado en ranuras sobre su periferia. Para el caso de polos cilíndricos, utilizados para las máquinas eléctricas de alta velocidad, se emplean por lo regular dos o cuatro polos; por el contrario, en máquinas eléctricas de baja velocidad, más de cuatro polos van configurados en bobinas prefabricadas que se colocan en los polos. Lo anterior predetermina el comportamiento tanto en estado estacionario como en condición transitoria, debido a la variación del entrehierro que modifica los valores de reactancia de la máquina síncrona.

Hay varias razones para que el generador síncrono se construya “de dentro, hacia fuera”, entre ellas, las que a continuación se mencionan:

- La mayor parte de los generadores síncronos se construyen en tamaños mucho más grandes que sus contrapartes de corriente continua. Un incremento en la magnitud de la potencia de un generador

requiere conductores más gruesos en el devanado de su armadura para conducir corrientes elevadas o reducir al mínimo las pérdidas en el cobre. También son necesarias ranuras más profundas para acomodar los conductores gruesos. Puesto que el estator tiene menos limitaciones para fabricarse suficientemente grande, se convierte de forma inadvertida en la parte preferida para alojar los conductores de la armadura.

- Como la salida de un generador síncrono es de tipo alterno, los conductores de la armadura en el estator pueden conectarse directamente a la línea de transmisión, lo cual elimina la necesidad de anillos rozantes para una salida de potencia de corriente alterna.
- Puesto que la mayor parte del calor se genera por el devanado de la armadura, una parte externa estacionaria puede enfriarse eficazmente que otra interna giratoria.
- Como el devanado de la armadura de una máquina síncrona es más complicado que el devanado del campo, es más fácil construirlo sobre la parte estacionaria.
- Puesto que la fuerza electromotriz inducida en el devanado de la armadura es muy elevada, es más fácil (relativamente) aislarla cuando se devana dentro de la parte estacionaria que en la parte giratoria. Un bastidor rígido también permite sujetar el devanado de la armadura con mayor firmeza.
- La colocación de un devanado del campo de baja potencia sobre el rotor, no es motivo de disuasión para la construcción de dentro hacia fuera de un generador síncrono. La potencia al devanado del campo puede suministrarse por medio de anillos rozantes, y si el campo se establece por medio de imanes permanentes, pueden eliminarse los anillos.

Los generadores de corriente alterna, suelen recibir el nombre de generadores síncronos o alternadores. Una máquina síncrona, ya sea como generador o como motor, opera a velocidad síncrona; es decir, a la velocidad a la que gira el campo magnético creado por las bobinas del campo. Los generadores síncronos son la principal fuente de potencia eléctrica del mundo, convirtiendo energía mecánica en energía eléctrica desde una fracción de [KVA] hasta los 1,500[MVA].

## 10.2 Operación de generadores

Los componentes básicos de una máquina síncrona son el estator, que alberga los conductores de la armadura; y un rotor, que provee el campo necesario. A continuación, se explica lo referente al estator, al rotor y los devanados de la armadura.

- **El estator.** También conocido como armadura de una máquina síncrona, el estator está formado por laminaciones delgadas de acero sumamente permeable a fin de reducir las pérdidas en el núcleo. Las laminaciones se mantienen juntas por medio del bastidor del estator. El bastidor, que puede ser de hierro de fundición o fabricarse con placas soldadas de acero suave, no se diseña para

conducir flujo, sino para dar apoyo mecánico al generador síncrono. El interior de estator tiene una variedad de ranuras cuyo objetivo es alojar los gruesos conductores de la armadura (bobinas o devanados). Los conductores de la armadura se encuentran simétricamente dispuestos para formar un devanado polifásico equilibrado. Para ello, el número de ranuras por polo y por fase debe ser un número entero siempre. La fuerza electromotriz inducida por fase en los generadores síncronos de gran tamaño, es del orden de los [KV] con capacidad de generación que se mide en [MVA].

La longitud axial del núcleo del estator, es comparativamente corta para los generadores de baja velocidad y gran diámetro, los cuales tienen muchos polos, se dejan abiertos en ambos extremos con fines de autoenfriamiento, y se instalan en lugares donde es posible generar energía hidroeléctrica. La longitud axial de los generadores de alta velocidad con dos o cuatro polos, puede ser de varias veces su diámetro. Estos generadores requieren circulación forzada de aire para enfriarse y son totalmente cerrados. Se utilizan cuando los rotores se impulsan por medio de turbinas de gas o de vapor.

- **El rotor.** En el diseño de generadores síncronos se usan dos tipos de rotores, el cilíndrico y el de polos salientes. El rotor se hace girar a velocidad síncrona mediante un impulsor primario, como una turbina de vapor. Además, tiene tantos polos como el estator, y su devanado conduce corriente continua, de modo que produce flujo constante por polo. El devanado del campo generalmente recibe su energía de un generador de corriente continua de 115[V] ó 230[V]. El generador de corriente continua puede impulsarse por medio del mismo impulsor primario del generador síncrono, o por un motor eléctrico independiente.

El rotor de polos salientes se utiliza en generadores de velocidad baja y media, porque la pérdida en el devanado es pequeña a esas velocidades, consta de un conjunto de polos laminados que se proyectan hacia fuera. Cada polo tiene un extremo que se ajusta en un hueco en forma de cuña, o se sujeta con tornillos a una rueda magnética llamada araña. Los polos deben alternar su polaridad.

El rotor cilíndrico se emplea en un turbogenerador bi o tetrapolar de alta velocidad. Está formado por un cilindro liso y sólido de acero forjado, con cierto número de ranuras sobre su periferia exterior, las cuales se diseñan para alojar las bobinas del campo. La construcción cilíndrica proporciona los siguientes beneficios:

- Resulta en una operación silenciosa a velocidad alta.
  - Ofrece mejor equilibrio que el rotor de polos salientes.
  - Reduce la pérdida por el viento.
- **Devandos de la armadura.** Los estatores armaduras de casi todos los generadores síncronos están devanados con tres arrollamientos distintos e independientes para generar energía eléctrica trifásica. Cada devanado representa una fase de un generador trifásico. Los tres devanados son exactamente iguales a su forma, pero desplazados  $120^\circ$  eléctricos uno del otro, para garantizar que las fuerzas electromotrices inducidas en tales devanados estén exactamente a  $120^\circ$  en tiempo

de fase. Los devanados trifásicos pueden conectarse para formar una conexión en Y o en  $\Delta$ . Si los devanados están conectados internamente para formar una conexión en Y, el punto neutro también se lleva afuera, de modo que pueda referirse a tierra de modo apropiado para operar con seguridad.

El devanado de doble capa se usa con frecuencia para devanar la armadura de un generador síncrono. Un devanado de doble capa necesita tantas bobinas idénticas como ranuras haya en el estator. Un lado de cada bobina se sitúa en la mitad inferior de una ranura y el otro lado de la misma bobina lleva la mitad superior de la otra ranura. A fin de colocar de tal modo las bobinas, éstas deben devanarse previamente sobre formas especiales para el propósito, y después insertarse en las ranuras. La cantidad de bobinas por fase (o el número de ranuras por fase para un devanado de doble capa) debe ser siempre un número entero. Como las bobinas deben estar distribuidas igualmente entre los polos, el número de bobinas (ranuras) por polo y por fase también debe ser un número entero. Es decir; si “S” es un número de ranuras en la armadura, “p” el número de polos y “q” es el número de fases, se tiene que el número de bobinas por polo, y por fase es:

$$\eta = \frac{S}{p_q}$$

Donde  $\eta$  debe ser un número entero. La cantidad de bobinas por polo y por fase “n”, suele conocerse como grupo de fase o cinturón de fase. Cuando el estator de un generador síncrono trifásico tetrapolar tiene 24 ranuras, el número de bobinas en cada grupo de fase es 2. Hay 12 grupos de fase (polos\*fases). Todas las bobinas en un grupo de fase están conectados en serie.

Cada bobina en un grupo de fase puede devanarse como bobina de paso completo. Dicho de otro modo, cada bobina en la armadura puede abarcar  $180^\circ$  eléctricos. Con las fuerzas electromotrices inducidas en ambos lados de una bobina de paso completo están exactamente en fase en cualquier instante, el ideal teórico prescribirá la colocación de bobinas de paso completo desde el punto de vista de la fuerza electromotriz inducida. Sin embargo, rara vez se usa una bobina de paso completo; más bien, los generadores se devanan con bobinas de paso fraccionario por las siguientes razones:

- Una bobina de paso fraccionario diseñada en forma apropiada, reduce las armónicas que generan distorsión y produce una forma de onda más apegada a la senoidal.
- Una bobina de paso fraccionario acorta las conexiones finales de los devanados, por lo que no sólo ahorra cobre, sino que también, reduce las pérdidas en el cobre de la bobina.
- Es más fácil manejar una bobina más corta, y reducir la acumulación de espiras finales en ambos lados del cuerpo del estator, lo cual disminuye la longitud total del generador, y reduce al mínimo la dispersión del flujo.
- La eliminación de las armónicas de alta frecuencia también disminuye las pérdidas magnéticas en el generador.



La desventaja de una bobina de paso fraccionario, es que la fuerza electromagnética inducida en ella, es más pequeña que en una bobina de paso completa. Ello se debe a que el flujo total que enlaza la bobina de paso fraccionario es más pequeño que el de la bobina de paso completo. La razón del flujo que enlaza la bobina de paso fraccionario respecto al flujo que enlazaría la de paso completo, se llama factor de paso. Para ilustrar la colocación de los devanados de fase en las ranuras de un generador síncrono, se supondrá lo siguiente:

- Todas las bobinas son idénticas.
- Cada bobina es de paso fraccionario, en tanto un grupo de fase contenga más de una bobina. Todas las bobinas en un grupo de fase están conectadas en serie.
- Cada grupo de fase, se extiende  $180^\circ$  eléctricos (un paso completo). Por lo tanto, las “n” bobinas en un grupo de fase deben situarse en forma tal, que el extremo inicial de la primera quede bajo el principio de un polo, y el extremo final de la n-ésima bobina, quede bajo el extremo de salida del polo.

El ángulo eléctrico desde el centro de una ranura al centro de otra adyacente se conoce como alcance de ranura o paso de ranura. El alcance de bobina o paso de bobina, que es el número de ranuras que abarca cada bobina, puede expresarse en términos de grados eléctricos o del número de ranuras.

### 10.2.1 Características de circuito abierto y de corto circuito

Para obtener los parámetros de un generador síncrono, se llevan a cabo tres pruebas sencillas, descritas a continuación:

- La prueba de resistencia. Esta prueba se realiza para medir la resistencia del devanado de la armadura de un generador síncrono cuando se halla en reposo, y el devanado de campo está abierto. La resistencia se mide entre dos líneas al mismo tiempo, y se turna el promedio de tres lecturas de resistencia como el valor medido de la resistencia  $R_L$ , de línea a línea. Si el generador está conectado en estrella (Y), la resistencia por fase es:

$$R_a = (0.5)(R_L)[\Omega]$$

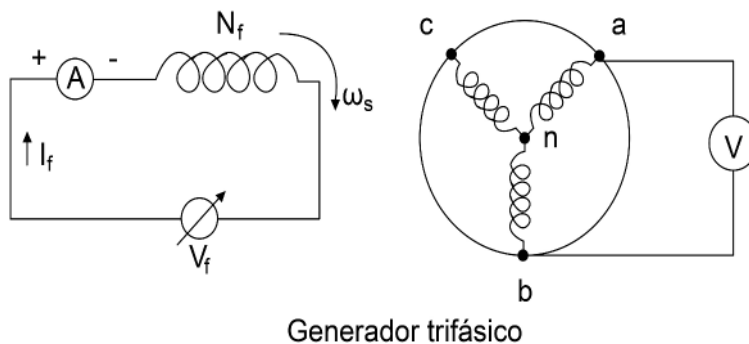
Sin embargo, para un generador conectado en delta ( $\Delta$ ), la resistencia por fase es:

$$R_a = (1.5)(R_L)[\Omega]$$

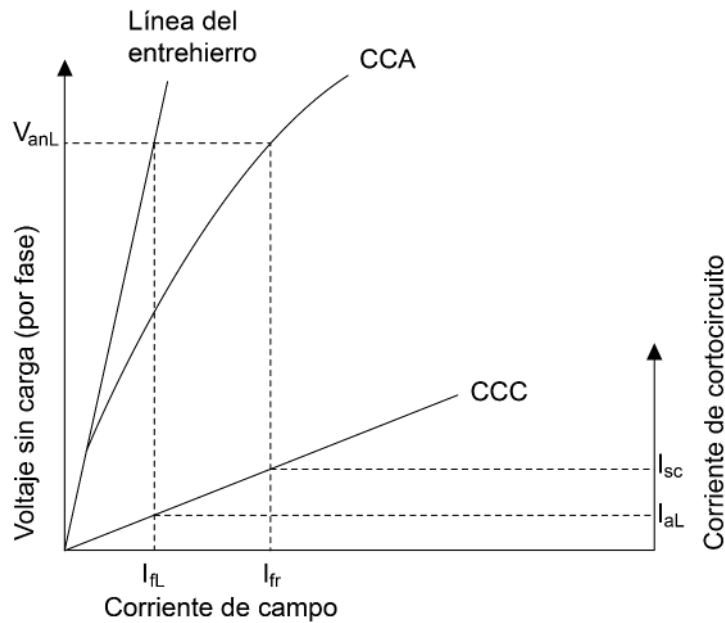
- La prueba de circuito abierto. También llamada prueba sin carga, se efectúa impulsando el generador a su velocidad nominal al tiempo que se deja abierto el devanado de la armadura. La corriente del campo se varía en pasos apropiados, y se registran los valores correspondientes del voltaje a circuito abierto entre dos pares cualesquiera de terminales de los devanados de la armadura, como

se describe en la figura 10.1, para un generador conectado en estrella (Y). La corriente de campo puede aumentarse hasta que el voltaje a circuito abierto sea el doble del valor especificado. De los datos registrados para el voltaje a circuito abierto, es posible calcular el voltaje por fase (circuito abierto). Cuando se grafica el voltaje por fase (circuito abierto) como función de la corriente de campo, se obtiene una gráfica llamada característica (curva) de saturación a circuito abierto, (CCA).

La CCA sigue una relación en línea recta, en tanto el circuito magnético del generador síncrono no se sature. Debido a que en la región lineal, el entrehierro consume la mayor parte de la fuerza magnetomotriz (fmm), la recta recibe el nombre de línea del entrehierro. A medida que la saturación se establece, la CCA comienza a desviarse de la línea de entrehierro, como se muestra en la figura 10.2. La CCA se considera la curva de magnetización del generador en condiciones sin carga.

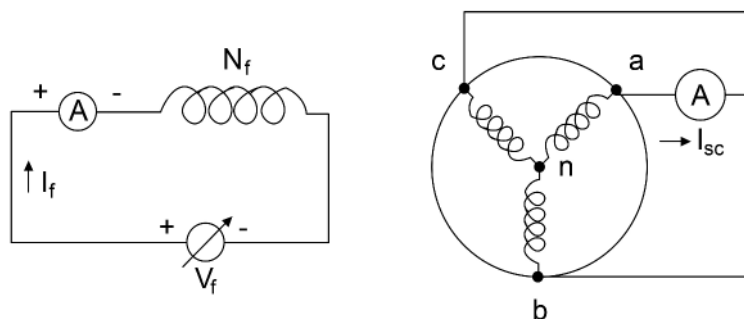


**Figura 10.1** Diagrama del circuito para realizar una prueba de circuito abierto a un generador síncrono.



**Figura 10.2** Características de circuito abierto y cortocircuito de un generador síncrono.

- Prueba de cortocircuito.** La prueba en cortocircuito, proporciona información acerca de las potencialidades de corriente de un generador síncrono. Se lleva a cabo impulsando el generador a su velocidad nominal, con las terminales del devanado de la armadura en cortocircuito, como se muestra en la figura 10.3 para un generador en estrella (Y). Se coloca un amperímetro en serie con una de las tres líneas en cortocircuito. Se incrementa gradualmente la corriente del campo y se registra el valor correspondiente de la corriente. La corriente máxima de la armadura en cortocircuito, no debe exceder el doble de la corriente especificada del generador. Con base en los datos registrados, se calcula la corriente por fase en cortocircuito. Cuando esta última se grafica como función de la corriente del campo, la gráfica se llama característica en cortocircuito (CCC) de un generador. Por razones prácticas, la CCA y la CCC se trazan en la misma gráfica, como se muestra en la Figura 10.2.



**Figura 10.3** Diagrama del circuito para ejecutar una prueba de cortocircuito.

Puesto que el voltaje en las terminales en condiciones de cortocircuito es igual a cero, el voltaje por fase generado debe ser igual a la caída del voltaje a través de la impedancia síncrona. Para calcular la impedancia por fase síncrona a partir de la CCA y de la CCC de un generador síncrono a su voltaje nominal se lleva a cabo el procedimiento siguiente:

- Se encuentra el valor de la corriente del campo ( $I_{fr}$ ) que corresponde al valor especificado por fase ( $V_{anL}$ ) a partir de la CCA del generador.
- Se encuentra el valor de la corriente en cortocircuito ( $I_{sc}$ ) a parte de la CCC para el mismo valor de corriente del campo  $I_{fr}$ .
- La magnitud de la impedancia síncrona es igual al voltaje a circuito abierto dividido entre la corriente en cortocircuito. Es decir;

$$Z_S = \frac{V_{anL}}{I_{sc}} [\Omega]$$

Como la resistencia de cada devanado de fase de la armadura ya se conoce gracias a la prueba de resistencia, la reactancia síncrona del generador es:

$$X_S = \sqrt{(Z_s)^2 - (R_a)^2}$$

En realidad, a partir de la CCA y la CCC, es posible graficar la impedancia síncrona como función de la corriente del campo. En la figura 10.4 se aprecia una gráfica típica. En tanto, la densidad de flujo se encuentra abajo del punto de inflexión de la curva de saturación (el flujo es proporcional a la fuerza magnetomotriz (ffm) aplicada), la impedancia síncrona es casi constante, y se conoce como impedancia síncrona no saturada. Cuando el generador opera arriba del punto de inflexión de su curva de saturación, el voltaje generado es más pequeño de lo que hubiera sido sin saturación. En consecuencia, la impedancia síncrona saturada es menor que su valor no saturado. Tanto la impedancia síncrona no saturada, como la saturada pueden determinarse a partir de la Figura 10.2, al voltaje nominal del generador. La línea del

entrehierro proporciona la corriente de campo necesaria  $I_{fl}$  al voltaje nominal  $V_{anL}$ , para la impedancia síncrona no saturada y la corriente en cortocircuito correspondiente  $I_{aL}$ . Por lo tanto, la magnitud de la impedancia síncrona no saturada es:

$$Z_{Su} = \frac{V_{anL}}{I_{aL}} [\Omega]$$

Y la magnitud de la impedancia síncrona (saturada), se determinó a partir de la ecuación anterior.

En consecuencia, debe resultar evidente que la impedancia síncrona de un generador síncrono puede variar en forma considerable desde una carga ligera hasta plena carga. Para los cálculos, se supondrá que  $Z_s$  es constante, y que su valor corresponde al voltaje de especificación (o nominal) sin carga.

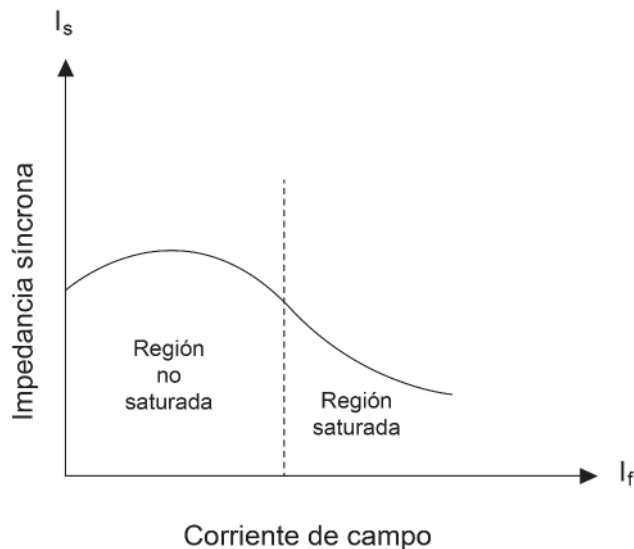


Figura 10.4 Impedancia síncrona como función de la corriente del campo

### 10.2.2 Análisis del comportamiento bajo diferentes condiciones de carga

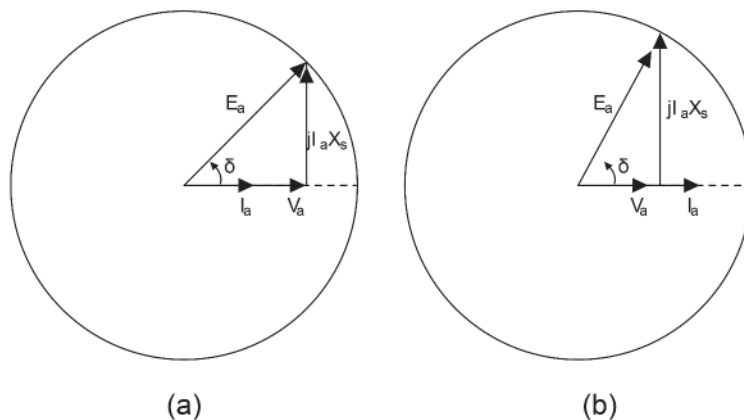
La característica externa de un generador síncrono, muestra la variación del voltaje en las terminales con la carga de un generador independiente. Un generador independiente es el que puede ser movido por un motor de gasolina a velocidad constante que es capaz de suministrar energía eléctrica en forma independiente. Su voltaje en las terminales varía con la carga. Si la corriente de excitación se mantiene constante, el valor generado por fase  $\vec{E}_a$  será constante. Por lo que, el voltaje en las terminales es:

$$\vec{V}_a = \vec{E}_a - j\vec{I}_a X_S [v]$$

Puesto que  $\vec{E}_a$  y  $X_S$  son constantes, el voltaje en las terminales  $\vec{V}_a$  depende de la magnitud de la corriente de la carga, y de su factor de potencia.

Aunque la magnitud del voltaje de fase  $\vec{E}_a$  es constante, su fase (el ángulo de potencia) tiene libertad para cambiar. Por lo tanto, debe resultar obvio que el lugar geométrico de  $\vec{E}_a$  debe ser un círculo. A continuación, se estudian los cambios  $\vec{V}_a$  como función de la carga con factores de potencia igual a la unidad, en atraso y en adelante.

El incremento en la corriente de la carga ocasiona que: (a) se incremente la caída del voltaje a través de a reactancia síncrona; (b) aumente el ángulo de potencia; y (c) disminuya el voltaje en las terminales, tal como se muestra en la Figura 10.5. Debe recordarse que al trazar los diagramas fasoriales, la escala de la corriente en general es diferente que la escala del voltaje. La característica externa (es decir; el voltaje en las terminales como función de la carga para el factor de potencia unitario), se muestra en la Figura 10.6.



**Figura 10.5** Efecto de la carga resistiva sobre el voltaje en las terminales de un generador síncrono independiente para corrientes en la armadura: (a) pequeñas, y (b) grandes.

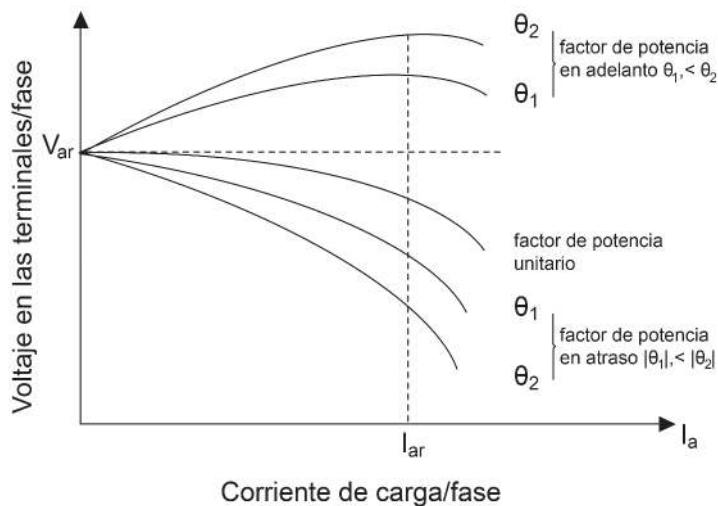
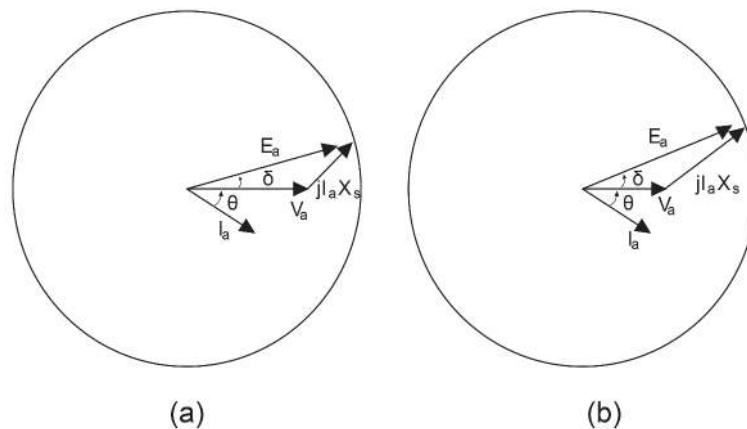
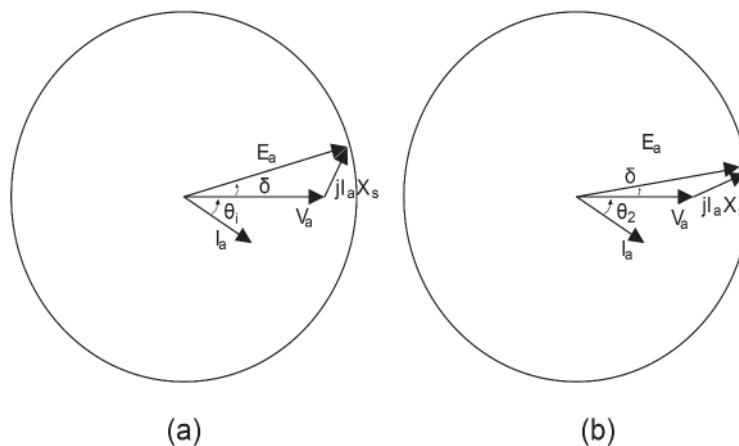


Figura 10.6 Características externas de un generador síncrono en distintas condiciones de carga.

- **Factor de potencia igual a la unidad.** Para una carga puramente resistiva,  $Z_L = R_L$ , el voltaje en las terminales  $\vec{V}_a$  y la corriente de la carga  $\vec{I}_a$  están en fase.
- **Factor de potencia en atraso.** Para una carga inductiva  $Z_L = R_L + jX_L$ , la corriente de la carga está en atraso respecto del voltaje en las terminales en un ángulo de factor de potencia, el aumento en la corriente de la carga ocasiona la disminución del voltaje en las terminales, según se muestra en la Figura 10.7. Sin embargo, para una magnitud constante de la corriente de la carga, ese voltaje disminuye todavía más con el decrecimiento del factor de potencia como se ilustra en la Figura 10.8. En la Figura 10.6 se muestran las características externas para los dos factores de potencia en atraso.



**Figura 10.7** Efecto de la carga inductiva sobre el voltaje en las terminales de un generador síncrono independiente para corrientes de carga, (a) pequeñas y (b) grandes.

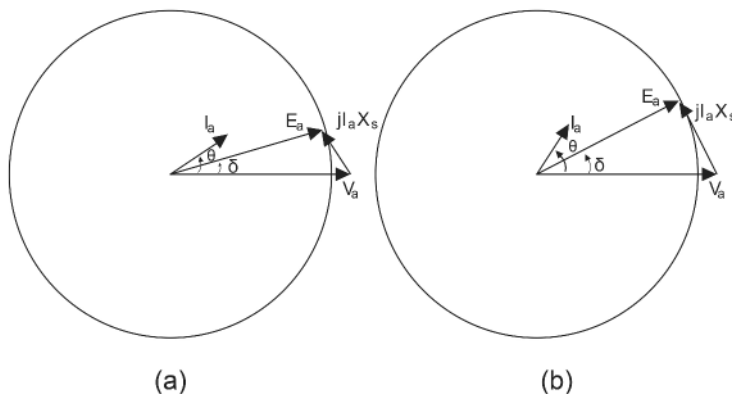


**Figura 10.8** Efecto de un factor de potencia en atraso sobre el voltaje en las terminales de un generador síncrono independiente para ángulos de factor de potencia, (a) pequeños y (b) grandes.

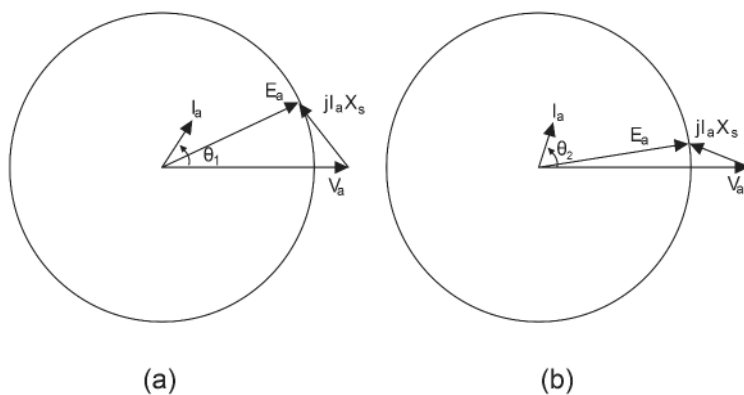
- Factor de potencia en adelanto.** Para una carga capacitiva  $Z_L = R_L + jX_s$  la corriente de la carga se adelanta al voltaje en las terminales en un ángulo  $\theta$ . En la Figura 10.9, se muestran los diagramas fasoriales para corrientes en la armadura, pequeñas y grandes, para un ángulo  $\theta$  del factor de potencia. En dicha figura, resulta evidente que el voltaje en las terminales se incrementa con el aumento en la corriente de la carga. En la Figura 10.10 se muestran los diagramas fasoriales



para ángulos pequeños y grandes del factor de potencia para la misma magnitud de la corriente de la carga. Es evidente que el voltaje en las terminales se incrementa aún más con el aumento en el ángulo del factor de potencia.



**Figura 10.9** Efecto de la carga capacitiva sobre el voltaje en las terminales de un generador síncrono independiente para corrientes de carga, (a) pequeñas y (b) grandes.)

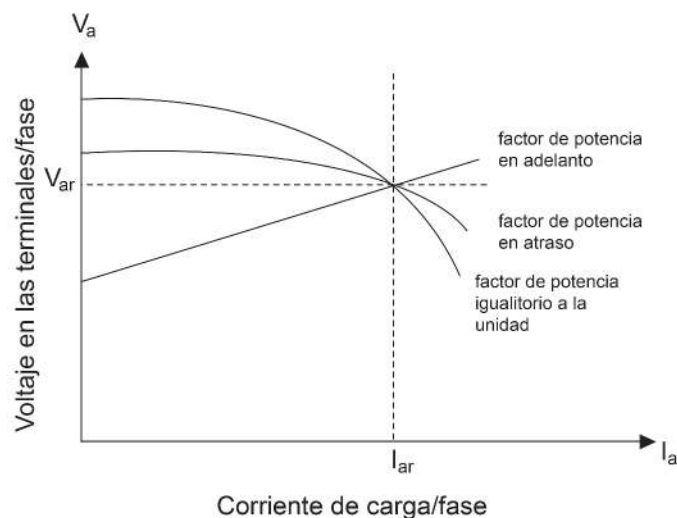


**Figura 10.10** Efecto de un factor de potencia en adelante sobre el voltaje en las terminales de un generador síncrono independiente para ángulos de factor de potencia, (a) pequeños y (b) grandes.

Para un generador que opere independientemente, es posible ajustar la corriente del campo (excitación) para cada carga, de modo que el generador alimente la carga especificada a su voltaje nominal. Si se varía la corriente de la carga, sin efectuar otros ajustes en la corriente de excitación, se observa lo siguiente:

1. Para una carga resistiva, el voltaje en las terminales se incrementa con la disminución en la corriente de la carga.
2. Para una carga inductiva, el voltaje en las terminales también se incrementa con la disminución en la corriente de la carga. Sin embargo, el incremento es mayor para una carga inductiva, que para una carga resistiva.
3. Para una carga capacitiva, el voltaje en las terminales decrece con la disminución en la corriente de línea.

En la Figura 10.11, se ilustran las características externas de un generador independiente, ajustado para operar a su voltaje y carga especificados.



**Figura 10.11** Características externas de un generador síncrono independiente, ajustado para operar con carga nominal sujeta a distintas condiciones de carga.

### 10.2.3 Diagrama de Potier

Es un triángulo característico de la máquina síncrona que proporciona dos datos de interés:

- FMM de armadura ( $F_a$ )
- Reactancia de dispersión ( $X_I$ )

Análisis en condiciones de corto circuito.

El circuito equivalente que se encontró es el que se muestra:

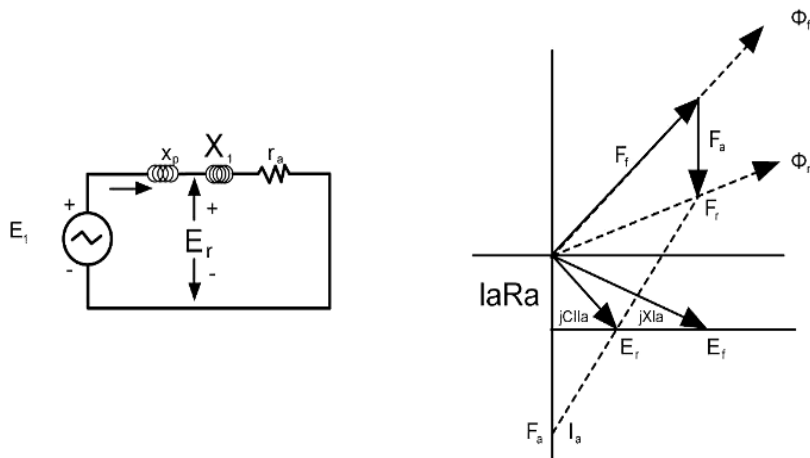


Figura 10.12 Circuito y diagrama fasorial

Del diagrama fasorial:

$$\vec{E}_r = \vec{I}_a(R_a + jX_l)$$

Con:

$R_a$ : Resistencia de armadura por fase.

$X_l$ : Reactancia de dispersión por fase.

$X_\phi$ : Reactancia de reacción de armadura  $\vec{E}_r$ : f.e.m.i del entrehierro producida por  $\phi_r$ .

El diagrama fasorial de la Figura 10.12 (b) muestra esta situación.

Adicionalmente como:

$R_a \ll X_l$ , entonces, la máquina está trabajando en condiciones no saturadas, como se especificó previamente.

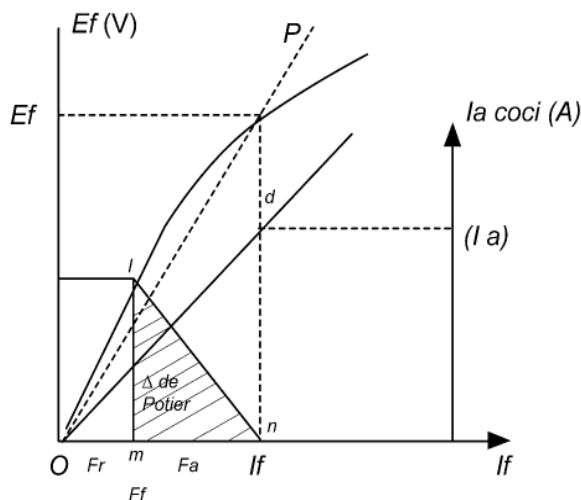


Figura 10.13 Triángulo de Potier.

Del diagrama fasorial de la Figura 10.12 (b), puede apreciarse que  $F_f$  debe ser lo suficientemente grande para vencer a  $F_a$  en oposición, e inducir una fuerza electromotriz que equilibre la caída de voltaje  $Z_a I_a = (R_a + jX_2) I_a$ .

La figura 10.13, muestra la curva característica de vacío y de cortocircuito, mediante el triángulo de Potier. Ahora, si en la característica de vacío se hace:

$L_m = I_a Z_a$ , entonces;  $\bar{o}m$  es la fuerza magnetomotriz  $F_r = F_a f$ , necesaria para inducir la fuerza electromotriz que equilibre a  $I_a Z_a = E_r = \bar{A}$ .

Además,  $\bar{o}m = F_f$ . Entonces;  $m - n = F_a$ . Si se hace  $\bar{n}d = I_a$ , y se une con el origen 0; entonces,  $\bar{o}d$  es la característica de cortocircuito.

De lo anterior, el triángulo Lmn es el conocido triángulo de Potier. Donde:

$$X_l \approx Z_a = \frac{l_m}{I_a}$$

$$F_a = \bar{m}\bar{n}$$

Las características en condiciones en carga son los siguientes a partir de la figura 10.14.

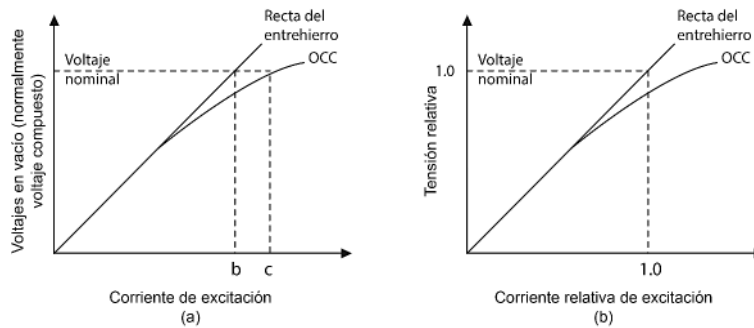


Figura 10.14 Característica de vacío de la máquina síncrona.

De acuerdo a la figura 10.14 se tiene que, el circuito de la Figura 10.15 arroja las expresiones:

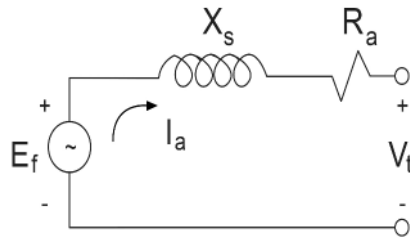


Figura 10.15 Circuito equivalente del generador síncrono de rotor cilíndrico, no saturada.

$$\vec{E}_f = \vec{V}_t + \vec{I}_a(R_a + jX_s)[v]$$

Es decir:

$V_t = f(I_f F_f)$  para  $I_a$  y un ángulo de factor de potencia de la carga constantes.

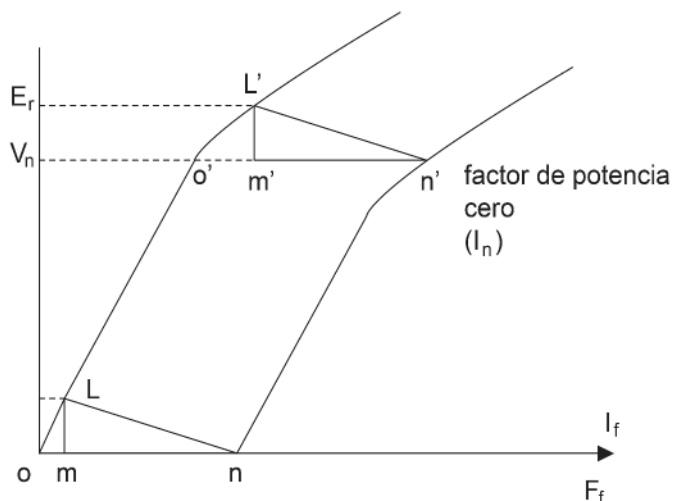
Si en una prueba equivalente se reemplaza la barra de alimentación por una carga puramente inductiva variable, de modo que la corriente de fase permanezca constante y atrasada en  $90^\circ$  a medida que  $I_f$  aumenta, se tiene una curva llamada, la característica a factor de potencia cero atrasada (de voltaje entre terminales).

- Llevando en una misma gráfica (Figuras 10.14), la característica de vacío y la curva de factor de potencia cero en atraso, se puede encontrar la curva de  $V_t = f(I_f)$  para  $\cos \varphi = 0$  si se dispone de

la característica de vacío y del triángulo de Potier. Esto es posible, ya que  $\cos \varphi = 0$ . Entonces,  $F_a$  está en oposición con  $F_f$ .

La Figura 10.16, muestra la construcción del Triángulo de Potier, al conocerse dos puntos de la curva  $V_t = f(I_f)$  a factor de potencia cero en atraso.

Por  $n'$  se traza línea paralela al eje de  $I_f$  y se copia  $o'$ . Por  $o'$  se traza una línea paralela a la recta del entrehierro, que al cortarse con la característica de vacío del generador, da el punto  $L'$ . Por este punto se pasa una vertical, que al cortarse con el valor del voltaje nominal da el punto  $m'$ . El Triángulo de Potier es ahora entonces  $L', m', n'$ .



**Figura 10.16** Construcción del Triángulo de Potier.

Inversamente, conocido el Triángulo de Potier y la característica de vacío, se puede encontrar relativamente fácil, la curva de voltaje o tensión nominal a factor de potencia nulo en atraso; simplemente, trasladando el Triángulo de Potier a lo largo de la curva de vacío y la recta del entrehierro, o paralelas a ellas, cuando ambas líneas se separan. El valor que se obtiene bajo estas condiciones para la reactancia de dispersión es aceptable, para el caso de los generadores síncronos de polos salientes, y bastante más exactos para las máquinas síncronas de rotor cilíndrico.

$$\left| \vec{E}_r \right| = \left| \vec{j}l_a X_l \right|$$

#### 10.2.4 Teoría de las dos reactancias. Teoría de Blondel

Las cantidades de la armadura de una máquina síncrona pueden resolverse hacia dos componentes giratorias, una alineada con el eje del devanado de campo, la componente en el eje directo, y una cuadratura con ese eje, que se introducen como un medio para facilitar el análisis de la máquina de polos salientes. La utilidad de este concepto, se basa en el hecho de que aun cuando cada una de las fases del estator ve una inductancia variable en el tiempo debido a los polos salientes del rotor, las cantidades transformadas giran con éste, y por consiguiente, ven trayectorias magnéticas contantes. Aun cuando no se consideren los efectos adicionales de los polos salientes, están presentes en condiciones transitorias, debido a las diferentes trayectorias conductoras en el rotor, lo que hace que el concepto de esta transformación sea lo más útil de todo.

De modo análogo, esta transformación es útil desde el punto de vista del análisis de la interacción del rotor y las ondas de flujo y de la fmm del estator, independientemente de si están presentes o no los efectos de los polos salientes. Al transformar las cantidades del estator en cantidades equivalentes que giran en sincronismo con el rotor en condiciones de estado estable, estas interacciones se convierten en las ondas constantes de fmm y de flujo separadas por un ángulo espacial constante. De hecho, este punto de vista corresponde al de un observador en el marco de referencia del rotor.

La idea que se encuentra detrás de este transformador es vieja, con base en el trabajo de André Blondel en Francia, y la técnica a veces se menciona como método de las dos reacciones de Blondel. Gran parte del desarrollo en la forma usada en lo sucesivo fue llevado a cabo por R. E. Doherty, C.A. Nickel, R.H. Park y sus asociados en los Estados Unidos de América. La propia transformación, conocida como la transformación dq0, se puede representar en una forma directa en términos del ángulo eléctrico  $\theta m$  (igual a polos/2, multiplicado por el ángulo espacial  $\theta m$ ), entre el eje directo del rotor y el eje de la fase a del estator. (Figura 10.17).

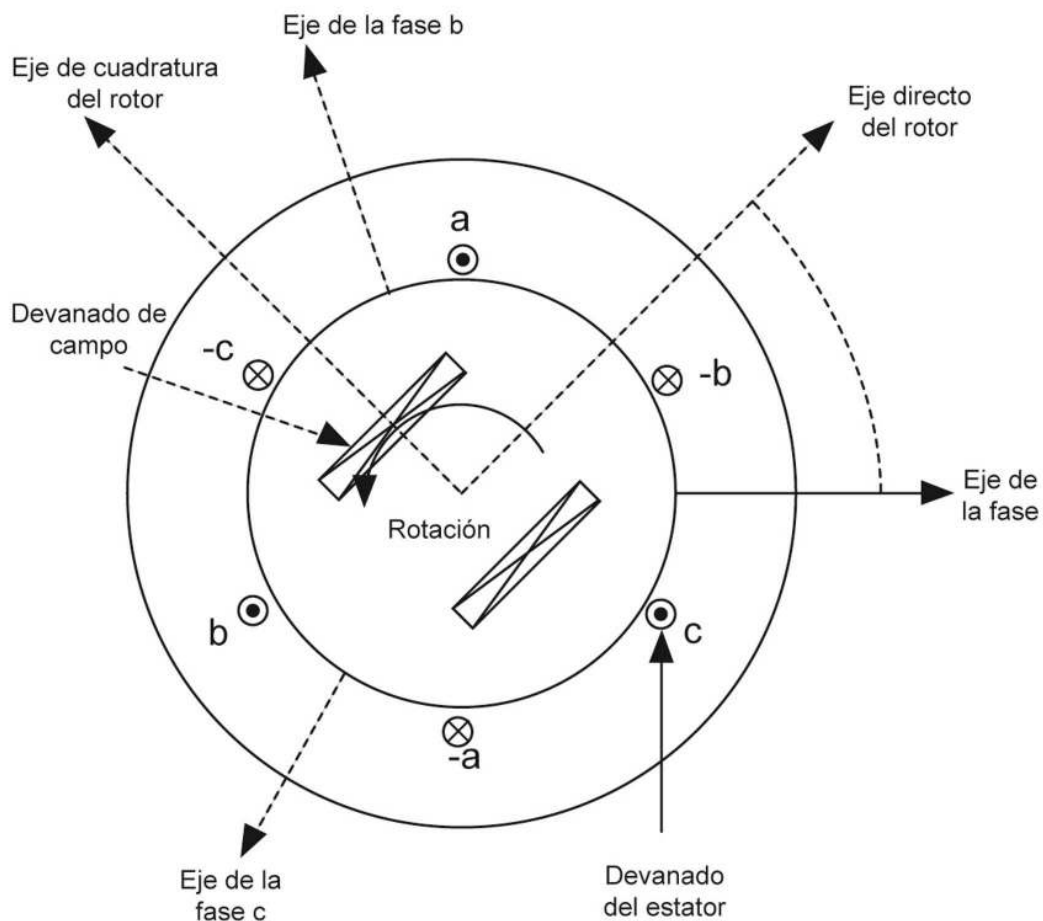


Figura 10.17 Máquina síncrona idealizada.

Suponiendo que  $S$  representa una cantidad del estator que se va a transformar (corriente, voltaje o flujo), es posible escribir la transformación en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} S_c \\ S_q \\ S_o \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\theta_{me}) & \cos(\theta_{me} - 120^\circ) & \cos(\theta_{me} + 120^\circ) \\ -\text{sen}(\theta_{me}) & -\text{sen}(\theta_{me} - 120^\circ) & -\text{sen}(\theta_{me} + 120^\circ) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_a \\ S_b \\ S_c \end{bmatrix}$$

Y la transformación inversa como:

$$P_2 = E_2 l \cos \phi$$

Donde  $\phi$  representa el ángulo de fase de  $\vec{I}$  con respecto a  $\vec{E}_2$ . La corriente del fasor es:



$$\vec{I} = \frac{E_1 - E_2}{Z}$$

Si los voltajes fasores y la impedancia se expresan en forma polar:

$$\vec{E}_1 = E_1 e^{j\delta}$$

$$\vec{E}_2 = E_2$$

$$Z = R + jX = |Z| e^{j\phi_z}$$

Donde  $\delta$  es el ángulo de fase mediante el que  $E_1$  conduce a  $E_2$  y  $\phi_z = \tan^{-1}(X/R)$  representa el ángulo de fase de impedancia  $Z$ , por lo tanto:

$$\vec{I} = I e^{j\phi} = \frac{E_1 e^{j\delta} - E_2}{|Z| e^{j\phi_z}} = \frac{E_1}{|Z|} e^{j(\delta - \phi_z)} - \frac{E_2}{|Z|} e^{-j\phi_z}$$

De esta ecuación se obtiene:

$$I \cos\phi = \frac{E_1}{|Z|} \cos(\delta - \phi_z) - \frac{E_2}{|Z|} \cos(-\phi_z)$$

Advierta que el  $\cos(-\phi_z) = \cos(\phi_z) = R/|Z|$  y observe que la sustitución en la ecuación anterior, da como resultado la siguiente expresión:

$$P_2 = \frac{E_1 E_2}{|Z|} \cos(\delta - \phi_z) - \frac{E_2^2 R}{|Z|^2}$$

O, también queda como:

$$P_2 = \frac{E_1 E_2}{|Z|} \text{sen}(\delta + \alpha_z) - \frac{E_2^2 R}{|Z|^2}$$

Donde:

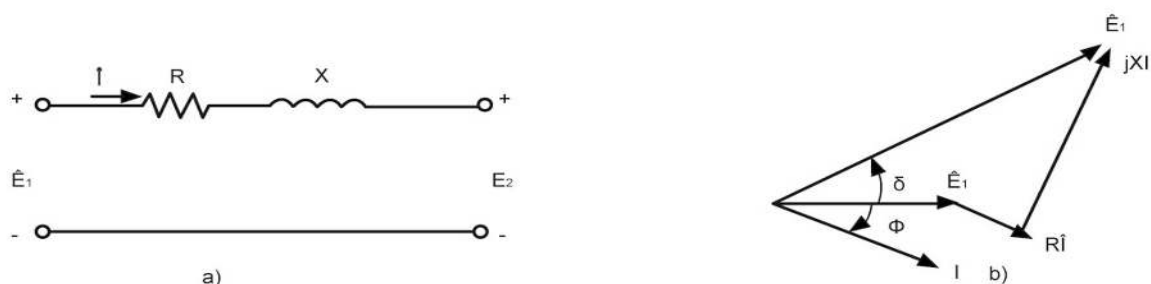
$$\begin{bmatrix} S_a \\ S_b \\ S_c \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\theta_{me}) & -\text{sen}(\theta_{me}) & 1 \\ \cos(\theta_{me} - 120^\circ) & -\text{sen}(\theta_{me} - 120^\circ) & 1 \\ \cos(\theta_{me} + 120^\circ) & -\text{sen}(\theta_{me} + 120^\circ) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_d \\ S_q \\ S_o \end{bmatrix}$$

En este caso, la letra  $S$  se refiere a la cantidad que se va a transformar y los subíndices  $d$  y  $q$ , representan los ejes directo y cuadratura, respectivamente. También se incluye una tercera componente la componente de secuencia cero, indicada por el subíndice  $0$ ; ésta, se requiere para obtener una transformación única de cantidades de las tres fases del estator; corresponde a las componentes de la corriente

en la armadura que no producen flujo neto en el entrehierro, y como consecuencia, ningún flujo neto que enlace los circuitos del rotor. En condiciones trifásicas balanceadas, no se tienen componentes de secuencia cero.

### 10.2.5 Ángulo de potencia

La potencia máxima de una máquina síncrona se determina mediante el par máximo que puede aplicarse sin pérdida de sincronía con respecto al sistema externo al cual se conecta. Ya que tanto el sistema externo y la máquina misma pueden representarse como una impedancia en serie con una fuente de voltaje, el estudio de los límites de la potencia se convierte sólo en un caso especial del problema más general que abarca los límites del flujo de potencia a través de la impedancia en serie. Por lo tanto, la impedancia incluirá la impedancia síncrona de la máquina así como una impedancia equivalente al sistema externo (que quizá consista en líneas de transmisión y en bancos de transformador, es así como en las máquinas síncronas adicionales).



**Figura 10.18** (a) Impedancia que conecta dos voltajes; (b) Diagrama fasorial.

Se considera el circuito simple que se muestra en la Figura 10.18(a), el cual consta de dos voltajes de corriente alterna  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$  conectados mediante una impedancia  $Z = R + jX$ . El diagrama fasorial se presenta en la figura 10.18(b). Adviértase que en ese diagrama, la dirección de referencia para los ángulos positivos es en contra de las manecillas del reloj. De esta forma, el ángulo  $\delta$  es positivo; mientras que el ángulo  $\phi$  es negativo.

La potencia  $P_2$  que corre a través de la impedancia a una fuente de voltaje de carga parásita  $\vec{E}_2$  es:

$$\alpha_z = 90^\circ - \phi_z = \tan^{-1} \left( \frac{R}{X} \right)$$

De manera similar, la potencia  $P_1$  en el extremo de la fuente  $E_1$  de la impedancia, puede expresarse de la siguiente forma:

$$P_1 = \frac{E_1 E_2}{|Z|} \text{sen}(\delta - \alpha_Z) - \frac{E_1^2 R}{|Z|^2}$$

Si, como sucede con la frecuencia, la resistencia presenta un valor insignificante, entonces;  $R \ll |Z|$ ,  $|Z| \approx X$ ,  $\alpha_Z \approx 0$ , como consecuencia:

$$P_1 = P_2 = \frac{E_1 E_2}{X} \text{sen}(\delta)$$

Esta expresión, es muy importante para el estudio de las máquinas síncronas, al igual que en el estudio de los sistemas de potencia de corriente alterna en general. Cuando se aplica el caso de las máquinas síncronas que se conectan a un sistemas de corriente alterna, la síncrona, y el ángulo “ $\delta$ ” se llama ángulo de potencia. Si la resistencia presenta un valor insignificantes y los voltajes son constantes, entonces a partir de esta ecuación la máxima transferencia de potencia ocurre en:

$$P_{1m\acute{a}x} = P_{2m\acute{a}x} = \frac{E_1 E_2}{X}$$

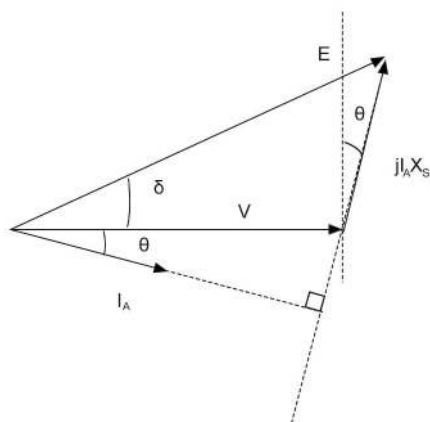
Cuando  $\delta = 90^\circ$ . Adviértase que si  $\delta$  tiene un valor positivo,  $\vec{E}_1$  conduce a  $\vec{E}_2$ , la potencia fluye de una fuente  $\vec{E}_1$  hacia  $\vec{E}_2$ . De manera similar, cuando  $\delta$  tiene un valor negativo,  $\vec{E}_1$  desfasa a  $\vec{E}_2$  y la potencia fluye de  $\vec{E}_2$  hacia  $\vec{E}_1$ .

### 10.2.6 Diagrama de capacidad

Existen tres tipos básicos de límites físicos en la operación:

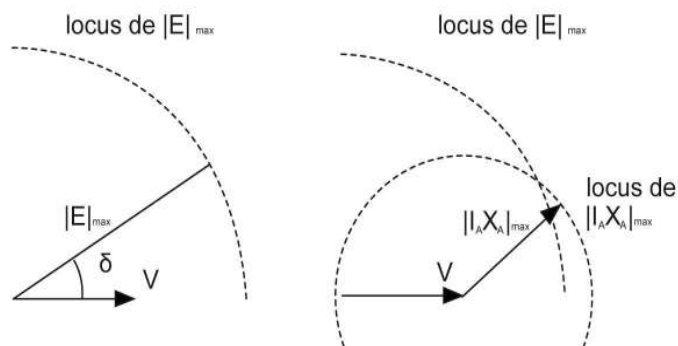
1. Térmico.
2. Mecánico.
3. Electromagnético.

Para entender el impacto de los límites físicos de un generador síncrono que se encuentra en operación, primero se debe considerar un diagrama fasorial simplificado como el que se muestra en la Figura 10.19.



**Figura 10.19** Diagrama fasorial con un factor de potencia simplificado en atraso.

Los límites térmicos, establecen el máximo rango en temperatura, y por lo tanto, la máxima pérdida de potencia en diferentes partes de la máquina. Comenzando por el rotor; la mayor causa de pérdidas en el rotor son las pérdidas resistivas en el campo del devanado. Si la corriente de campo está por encima de cierto nivel, la potencia  $I^2R$  perdida, será muy grande, posiblemente causará una falla de aislamiento en el campo de los devanados. Con el fin de poder controlar las condiciones térmicas, las corrientes de campo estará limitada debido a la excitación inducida en los devanados de la armadura. El límite de calentamiento en el rotor estará establecido por  $|E|_{\text{máx}}$ . Similar al estator, las corrientes de armadura excesivas, causarán que la temperatura del estator alcance un nivel perjudicial para la máquina. El límite de calentamiento en el estator se establece en  $|I_A|_{\text{máx}}$ . En estado estable, este límite de corriente es el alcanzado por la máquina. (Este puede ser excedido por un “factor de servicio permitido”). Los límites de calor pueden ser dibujados como locus en el diagrama de fase de la Figura 10.20.



**Figura 10.20** Diagrama de fase.

Mecánicamente, la potencia de entrada a los generadores está limitada por la capacidad física del primer motor. Como resultado, el límite del primer motor se establece a la máxima salida de potencia del generador,  $P_{m\acute{a}x} = |E \text{sen} \delta|_{m\acute{a}x}$ . El límite final está relacionado a la entrada mecánica y la habilidad del generador para que electromecánicamente, cree un torque igual y opuesto al torque mecánico de conducción. Se debe recalcar que el torque puede ser considerado como el producto cruz de dos campos electromagnéticos, o como la función del seno del ángulo entre  $V$  y  $E$ . A tal excitación, si el torque mecánico se incrementa, el rotor incrementará su velocidad, aumentando  $\delta$  y el torque electromagnético. Esta retroalimentación negativa continúa hasta que se balancee el torque mecánico y electromagnético. Sin embargo, si el generador es operado, un ángulo  $\delta$  cercano a los  $90^\circ$  cuando el rotor se acelere,  $\delta$  se incrementará más allá de los  $90^\circ$ , las caídas en el torque electromagnético así como en la retroalimentación positiva ocurrirán, causando que el rotor se acelere más, el sistema dejará de ser síncrono y la potencia de salida será cero, causando posiblemente una falla catastrófica. La estabilidad estática límite se establece en  $\delta = 90$ . Si se añaden estos límites al diagrama fasorial de la Figura 10.21.

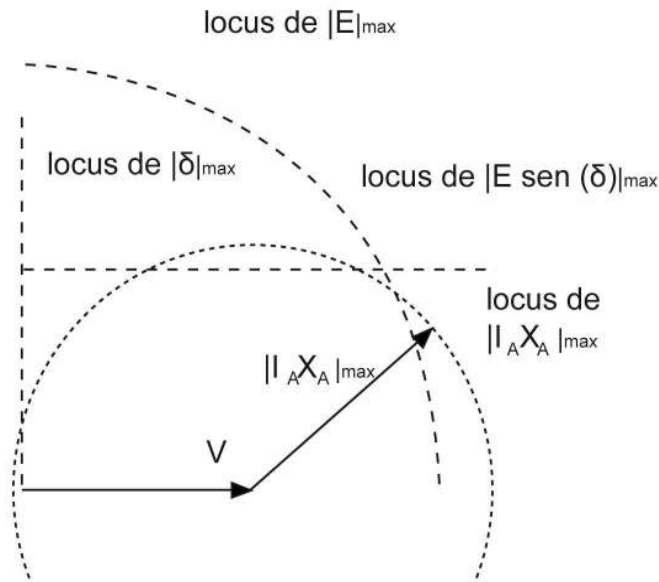
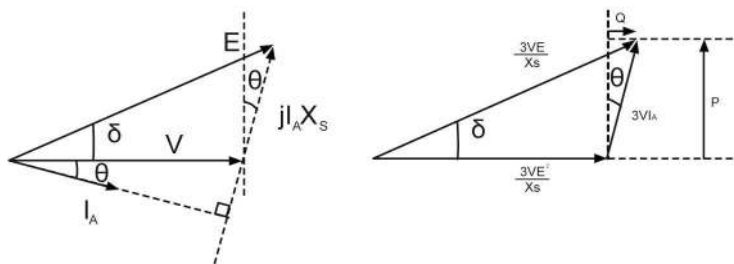


Figura 10.21 Diagrama fasorial de la estabilidad estática límite.

### Límites de potencia

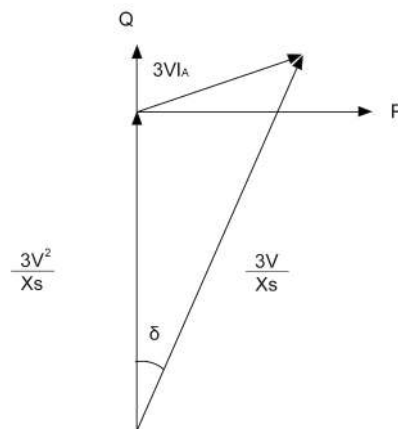
Mientras el diagrama fasorial usado en la Figura 10.21 puede ser utilizado en los límites de operación del generador, es más útil pensar en términos de los límites de potencia, potencia reactiva y volt-ampère.

Por esta razón, el diagrama fasorial puede ser escalado por  $3V/X_s$  para obtener potencia y potencia reactiva como se muestra en Figura 10.22.



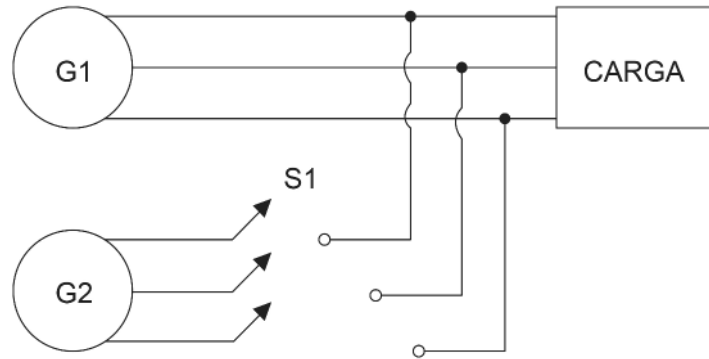
**Figura 10.22** A la izquierda se muestra el factor de potencia en atraso, y a la derecha el factor de potencia en atrasado escalado.

En el diagrama de la Figura 10.22, la potencia activa está sobre el eje Y, y la reactiva sobre el eje X. Debido a que es más usual observar la potencia real en el eje X, y la reactiva en el eje Y, el diagrama puede ser dibujado como se muestra en la Figura 10.23.



**Figura 10.23** Diagrama fasorial con ejes corregidos.

Finalmente, el diagrama de capacidad, representa los límites del diagrama fasorial que se representa en una gráfica de  $P - Q$ , para obtener el diagrama de capacidad total, como lo muestra la Figura 10.24.



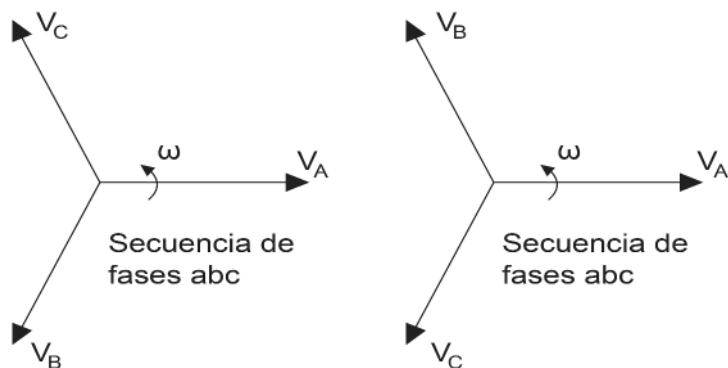
**Figura 10.24** Generador que se conecta en paralelo con un sistema eléctrico de potencia e operación.

### 10.2.7 Operación en paralelo

En la actualidad, es raro encontrar la existencia de un alternador único que de manera aislada alimente carga(s). Esto solamente se puede encontrar en aplicaciones tales como los generadores de emergencia.

Con el objetivo de aumentar el rendimiento y confiabilidad del sistema eléctrico de potencia, las diferentes centrales están conectadas entre sí en paralelo, por medio de líneas de transporte y de distribución. La red así constituida, representa un generador gigantesco, en el que prácticamente el voltaje y la frecuencia se mantienen constantes. Esto se debe a que sobre esta gran red, la introducción de un nuevo generador no altera los parámetros básicos anteriores por representar una potencia muy reducida frente al conjunto total.

Varios generadores pueden alimentar una carga más grande que lo que haría una sola máquina síncrona. Tener varios generadores incrementa la confiabilidad del sistema eléctrico de potencia, debido a que la falla de alguno de ellos, no causa la pérdida total de potencia en la carga. Tener múltiples generadores que operen en paralelo, permite la remoción de uno o más de ellos para cortes de potencia y mantenimientos preventivos. La figura 10.24 muestra un generador síncrono que se llama G1 que suministra potencia a una carga, con otro generador G2, a punto de conectarse en paralelo con G1 por medio del cierre del interruptor  $S_1$ .



**Figura 10.25** Esquema de secuencia de fases para conectar dos generadores síncronos para alimentar una carga.

Si el interruptor  $S_1$  se cierra de manera arbitraria en cualquier momento, es posible que los generadores se dañen severamente, y que la carga pierda potencia. Si los voltajes no son exactamente iguales en cada uno de los generadores que se conectan juntos, habrá un flujo de corriente muy grande cuando se cierre el interruptor.

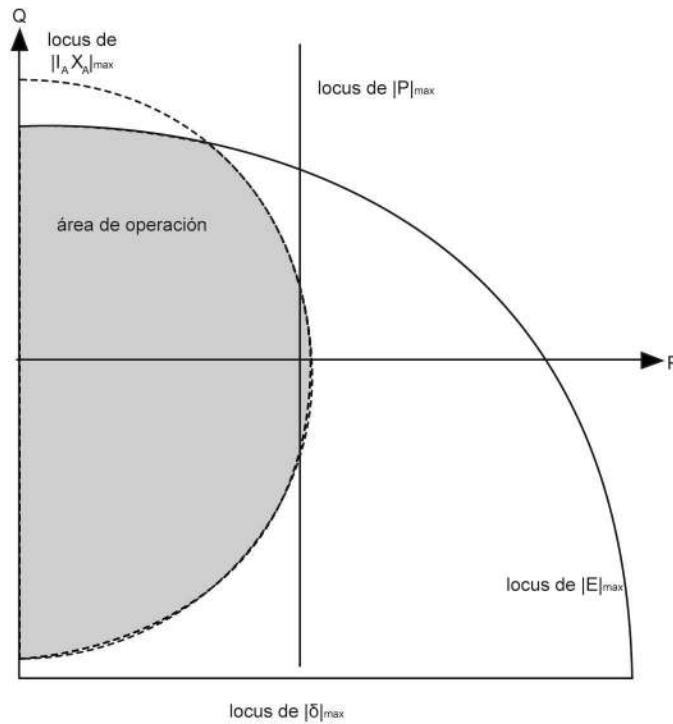
Para evitar este problema, cada una de las tres fases debe tener exactamente la misma magnitud de voltaje y ángulo de fase que el conductor al que se conectará.

Por lo que, para conectar entonces dos o más generadores síncronos en paralelo, se deben cumplir las siguientes condiciones:

- Deben ser iguales los voltajes de línea rms.
- Los dos (o más) generadores, deben tener la misma secuencia de fase(s).
- Los ángulos de fase de las dos fases deben ser iguales.
- La frecuencia del generador que se conectará (llamado generador de aproximación), debe ser un poco mayor que la frecuencia del sistema en operación.

Estas condiciones de puesta en paralelo requieren ciertas explicaciones: La condición (1) es obvia: Para que dos (o más) grupos de voltajes sean idénticos, deben tener la misma magnitud de voltaje rms (tal como puede verse en la Figura 10.25).





**Figura 10.26** Diagrama de capacidad total.

Los voltajes en las fases “a” y “A” serán completamente idénticos en todo momento, si ambas magnitudes y sus ángulos son iguales, lo que explica la condición. La condición (2) asegura que la secuencia en la que el voltaje de fase llegue a su pico en los dos generadores sea a misma. Si la secuencia de fase es diferente en la Figura 10.25; entonces aun cuando un par de voltaje (los de fase G) estén en fase, los otros dos pares de voltajes estarán desfasados por  $120^\circ$  eléctricos. Si se conectan los generadores de esta manera, no habrá problema con la fase G, pero fluirán enormes corrientes en las fases b y c; lo que dañará ambos generadores.

Como se sabe, la energía eléctrica de corriente alterna se genera, se transmite y se distribuye, de manera eficiente y confiable, reduciendo tiempos de interrupción en la energía, por ello, los esquemas eléctricos de potencia se configuran de tal forma, que los generadores síncronos se conectan en paralelo para abastecer la gran demanda de potencia eléctrica de los usuarios. Algunas de las razones por las que se conectan en paralelo los generadores síncronos son:

1. Dos o más generadores síncronos pueden abastecer una carga mucho mayor que un solo generador.
2. El tener varios generadores síncronos, aumenta la confiabilidad del sistema, debido a la configuración que se tiene (en anillo), en casi de falla de alguno de ellos, se puede abastecer esa carga con

los demás generadores conectados.

3. El tener varios generadores síncronos, facilita el mantenimiento preventivo en cualquiera de ellos.

En caso que se tuviera un solo generador para abastecer toda la carga, y ésta no estuviera conectada al 100 %, provocaría una baja eficiencia de la máquina, en cambio al tener varios generadores de menor capacidad, únicamente estarían trabajando aquellos que fuera necesario.

Antes de conectar el generador síncrono en paralelo con otro, o a un bus infinito, se debe de sincronizar, esto es; se debe verificar que se cumplan ciertas condiciones antes de su conexión, enseguida se indican estas condiciones:

- El voltaje del generador debe ser igual al voltaje del sistema.
- La frecuencia eléctrica del generador debe ser igual a la frecuencia del sistema.
- El voltaje del generador debe estar en fase con el voltaje del sistema, esto es, que los ángulos de fase de las dos fases A deben ser iguales.
- La secuencia de fases del generador debe ser igual a la secuencia de fases del sistema.

### 10.3 Especificaciones y normas

Existen normas que rigen la construcción de los generadores síncronos, tal es el caso de la NEMA e IEC.

La mayoría de los generadores síncronos se usan para transmisión de potencia mediante sistemas de potencia a varias cargas; sin embargo, también hay aplicaciones para uso específico. El diseño exitoso, así como operación de un generador síncrono depende en gran medida de un buen acuerdo entre el que manufactura y el usuario, en lo que concierne a los requerimientos técnicos o especificaciones. Existen estándares publicados tales como el de American National Standards Institute (ANSI) C50.13 e International Electrotechnical Commission (IEC) 34-1, que contienen los requerimientos técnicos para una amplia gama de generadores síncronos. El Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) recientemente publicó dos nuevos; consolidando los estándares para generadores síncronos:

- C50.12 para generadores de polos largos salientes.
- C50.13 para generadores con rotores cilíndricos largos.

La liberación del mercado eléctrico, ha permitido desde hace 10 años, la separación gradual de la producción, transporte y alimentación de energía eléctrica. Consecuentemente, para proveer de manera segura y a un costo razonable (código de trama) en donde se presentaron recientemente utilidades privadas alrededor del mundo.

Los códigos de trama no alinean en muchos casos con los estándares establecidos, tales como IEEE y ANSI. Algunos códigos de trama exceden los estándares nacionales e internacionales de “Requerimientos en Generadores Síncronos”. Tales requerimientos pueden impactar sin necesidad, en los costos de un generador, a pesar de que no produzcan beneficios notables sobre la estabilidad del sistema.

La integración de los estándares internacionales con los códigos de trama se convierte en necesaria y es una meta que los fabricantes de generadores síncronos como los intermediarios, se han propuesto alcanzar. Las especificaciones de los parámetros de los generadores están hechos de acuerdo al servicio y a su costo. Algunas cuestiones de diseño que deben considerarse al fabricar un generador síncrono son:

- Número de ranuras en el estator.
- Diseño del devanado del estator.
- Diseño del núcleo del estator.
- Diseño del rotor en polos salientes.
- Diseño del rotor cilíndrico.
- Curva de saturación del circuito abierto.
- Corriente de campo en carga completa.
- Inductancia de fuga en el estator, cálculo de la resistencia y de la reactancia síncrona.
- Cálculo de pérdidas y eficiencia.
- Cálculo de constante de tiempo, de reactancia transitoria y subtransitoria.
- Sistema de refrigeración y diseño térmico.
- Diseño de escobillas y anillos.
- Diseño de rodaduras.
- Frenos y diseño enchufes.
- Diseño del excitador.

#### 10.4 Problemas resueltos

**Problema 10.1** Un generador síncrono de 9[KVA]; 208[V]; trifásico y conectado en estrella (Y) tiene un devanado con resistencia de  $0.1[\Omega/fase]$ , y una reactancia síncrona de  $5.6 [\Omega/fase]$ . Calcular su regulación de voltaje, cuando el factor de potencia de la carga es:

- a. 80 % en atraso.
- b. La unidad.
- c. 80 % en adelanto.

**Respuestas:**

Como la regulación del voltaje está definida solamente a plena carga, se supondrá que el generador síncrono trifásico, entrega plena carga a su voltaje nominal (o especificada). Por lo tanto:

$$V_a = \frac{208[V]}{\sqrt{3}} = 120[V]$$

El valor medio cuadrático (*rms*) de la corriente por fase a plena carga es:

$$I_a = \frac{9,000}{(120)(3)} = 25[A]$$

- a. Para un factor de potencia en atraso de 0.8;  $\theta = -36.87^\circ$

$$\vec{E}_a = 120 + (0.1 + j5.6)(25) = 233.77[V]$$

$$P_1V(\%) = \frac{233.77 - 120}{120}(100\%) = 94.8\% \Rightarrow RV(\%) = 94.8\%$$

- b. Para un factor de potencia igual a la unidad;  $\theta = 0^\circ$

$$\vec{E}_a = 120 + (0.1 + j5.6)(25) = 186.03[V]$$

$$RV(\%) = \frac{186.03 - 120}{120}(100\%) = 55.03\% \Rightarrow RV(\%) = 55.03\%$$

- c. Para un factor de potencia en adelanto de 0.8;  $\theta = 36.87^\circ$

$$\vec{E}_a = 120 + (0.1 + j5.6)(25) = 119.69[V]$$

$$RV(\%) = \frac{119.69 - 120}{120}(100\%) = -0.26\% \Rightarrow RV(\%) = 0.26\%$$

**Problema 10.2** Un generador síncrono trifásico de 9[KVA]; 208[V]; 1200[rpm]; 60[Hz] y conectado en estrella (Y), tiene una resistencia al devanado de campo de 4.5[Ω]. La impedancia del devanado de la armadura es de 0.3 + j5[Ω/fase]. Cuando el generador opera a plena carga con un factor de potencia de

0.8 en atraso, la corriente en el devanado del campo es de 5[A]. La pérdida por rotación es de 500[W]. Determinar:

- La regulación del voltaje.
- La eficiencia del generador.
- El par aplicado por el impulso primario.

**Respuestas:**

El voltaje por fase en las terminales es:

$$\vec{V}_a = (208)(\sqrt{3}) = 120[V]$$

La potencia aparente por fase del generador es:

$$\frac{9[KVA]}{3} = 3[KVA]$$

Por lo tanto; la corriente especificada por fase es:

$$\frac{3,000[VA]}{120[V]} = 25[A]$$

Pero; para un factor de potencia de 0.8 en atraso, se tiene  $\varphi = -36.87^\circ$ ; por lo que la corriente por fase es:

$$\vec{I}_a = 25[A]$$

El voltaje por fase generado es:

$$\vec{E}_a = 120 + (0.3 + j5)(25) = 222.534[V]$$

a) La regulación de voltaje es:

$$RV(\%) = \frac{222.534 - 120}{120} * 100 \% = 85.45 \% \Rightarrow RV(\%) = 85.45 \%$$

b) La potencia de salida es:

$$p = (3)(120)(25)(0.8) = 7,200[W]$$

Las pérdidas en el cobre son:

$$\rho_{cu} = (3)(25)^2(0.3) = 562.5[W]$$

La potencia desarrollada es:

$$\rho_{\theta} = 7,200 + 562.5 = 7,762.5[W]$$

La pérdida constante es:

$$\rho_c = (500) + (5)^2(4.5) = 612.5[W]$$

La potencia total de entrada es:

$$\rho_{ent} = 7,762.5 + 612.5 = 8,375[W]$$

Finalmente; la eficiencia del generador es:

$$\eta = \frac{7,200}{8,375} * 100 \% = 86 \% \Rightarrow \eta = 86 \%$$

c) La velocidad angular del impulsor primario es:

$$\omega_S = \frac{(2\pi)(rpm)}{f} = \frac{(2\pi)(1,200)}{60} = 40\pi \left[ \frac{rad}{s} \right]$$

La potencia mecánica en términos de la potencia eléctrica de entrada es:

$$\rho_{ent_{mecánica}} = \rho_d + \rho_r = 7,262.5 + 500 = 8,262.5[W]$$

Finalmente; el par que se aplica el impulsor primario es:

$$T_S = \frac{\rho_{ent_{mecánica}}}{\omega_S} = \frac{8,262.5}{(40)(\pi)} = 65.75[N \cdot m]$$

$$T_S = 65.75[N \cdot m]$$

**Problema 10.3** Un generador síncrono trifásico de 500[KVA]; 2,300[V]; conectado en estrella (Y), trabaja a su velocidad especificada para obtener su voltaje nominal sin carga. Cuando se establece un cortocircuito, la corriente de fase es de 150[A]. La resistencia promedio de cada fase es de 0.5[A].

- Calcular la reactancia síncrona por fase.
- Con el sistema en valores por unidad, calcular la regulación porcentual del voltaje, cuando el generador alimenta la carga especificada a su voltaje nominal, y con un factor de potencia de 0.8 en atraso.

**Respuestas:**

El voltaje de fase a circuito abierto es:

$$V_{an}L = (2,300)(\sqrt{3}) = 1,327.91[V]$$

La corriente de fase a cortocircuito es:

$$I_{Sc} = 150[A]$$

Entonces;

$$Z_S = \frac{1,327.91}{150} = 8.85[\Omega] \text{ y } X_S = \sqrt{(8.85)^2 - (0.5)^2} = 8.84[\Omega]$$

Y la corriente especificada (a plena carga) es:

$$I_a = \frac{500,000}{(3)(1,327.91)} = 125.51[A]$$

Si se utiliza el voltaje por fase, y la corriente especificada como valores base. Es decir:

$$V_b = 1,327.91[V]$$

$$I_b = 125.51[A]$$

$$Z_b = \frac{1,327.91}{125.51} = 10.58[\Omega]$$

Entonces, cuando el generador opera a su carga especificada, las cantidades por unidad son:

$$\vec{I}_{a_{p.u.}} = 1[A] ; \vec{V}_{a_{p.u.}} = 1[V]$$

$$Z_{S_{pu}} = \frac{0.5 + j8.84}{10.58} = 0.047 + j0.836$$

Por lo tanto;

$$\vec{E}_{a_{p.u.}} = 1 + (0.047 + j0.836)(1) = 1.667[V]$$

Luego, el voltaje generado por fase es:

$$\vec{E}_a = (1327.91)(1.667) = 2213.63[V]$$

En términos de los valores por unidad, la regulación porcentual del voltaje es:

$$RV(\%) = (1.667 - 1) * \% = 66.7\% \Rightarrow RV(\%) = 66.7\%$$

**Problema 10.4** Un generador síncrono, trifásico de 70[MVA]; 13.8[KV]; 60[Hz] conectado en estrella (Y) y de polos salientes tiene una  $X_d = 1.83[\Omega]$  y una  $X_q = 1.21[\Omega]$ . Alimenta una carga especificada con un factor de potencia de 0.8 en atraso. La resistencia de la armadura es despreciable.

- Calcular la regulación de voltaje.
- La potencia desarrollada por el generador.

**Respuestas:**

Sobre una base por fase, los valores medios cuadráticos (rms) de los voltajes en las terminales y la corriente de la carga son:

$$V_a = \frac{13,800[V]}{\sqrt{3}} = 7,967.43[V] ; I_a = \frac{70 \times 10^6}{(\sqrt{3})(13,800)} = 2,928.59[A]$$

El ángulo del factor de potencia es:

$$\theta = -\cos^{-1}(0.8) = -36.87^\circ \Rightarrow \theta = -36.87^\circ$$

Utilizando:

$$\tan(\delta) = \frac{I_a X_q \cos\theta}{V_a + I_a X_q \sin\theta} = \frac{(2,928.59)(1.21)(0.8)}{(7,967.43 + 2,928.59)(1.21)(0.6)} = 0.28$$

Entonces;

$$\delta = \tan^{-1}(0.28) = 15.69^\circ$$

Si se supone que  $\vec{V}_a$  es un fasor de referencia, se tiene que  $\vec{E}_a$  se adelanta a  $\vec{V}_a$  en  $15.69^\circ$  e  $\vec{I}_a$  se atrasa respecto de  $\vec{V}_a$  en  $36.87^\circ$ . Por lo tanto;

$$\vec{V}_a = 7,967.43[V]$$

$$\vec{I}_a = 2,928.59[A]$$

Las corrientes en los ejes “d” y “q” son:

$$\vec{I}_d = I_a \sin(52.56^\circ) = 2,325.27[A]$$

$$\vec{I}_q = I_a \cos(52.56^\circ) = 1,780.38[A]$$



Según la ecuación:  $\vec{E}_a = \vec{V}_a + \vec{I}_a R_a + j\vec{I}_d X_d + j\vec{I}_q X_q$   
 el voltaje generado por fase es:

$$\vec{E}_a = 7,967.43 + (2,325.27)(j1.83) + (1,780.38)(j1.21) = 11,925.8$$

Luego, la regulación porcentual del voltaje es:

$$RV(\%) = \frac{11,925.8 - 7,967.43}{7,967.43} * 100\% = 49.68\% \Rightarrow RV(\%) = 49.68\%$$

Puesto que la potencia desarrollada es la misma que la potencia de salida, entonces:

$$\rho_a = \rho_o = (3)(7,967.43)(2,928.59)(0.8) = 56[MW] \Rightarrow \rho_d = \rho_o = 56[MW]$$

$$\rho_d \rho_o = 56[MW]$$

**Problema 10.5** Dos generadores síncronos, trifásicos, conectados en estrella (Y), tienen voltajes generados por fase de  $120[V]$  en condiciones sin carga y reactancias de  $j5[\Omega]$  y  $j8[\Omega]$ , respectivamente. Están conectados en paralelo a una impedancia de carga de  $4 + j3[\Omega/fase]$ .

- Calcular el voltaje por fase en las terminales.
- Calcular la corriente de la armadura de cada generador.
- Calcular la potencia suministrada por cada generador.
- La potencia total de salida.

### Respuestas:

Sobre una base por fase:

$$\vec{E}_{a1} = 120[V] ; \vec{E}_{a2} = 120[V]$$

$$Z_{S1} = j5[\Omega] ; Z_{S2} = j8[\Omega] ; Z_L = 4 + j3 = 3[\Omega]$$

a) Con base en la ecuación:

$$\vec{V}_a = \frac{(\vec{E}_{a1})(Z_{S2}) + (\vec{E}_{a2})(Z_{S1})}{(Z_L)(Z_{S1+Z_{S2}}) + (Z_{S1})(Z_{S2})}(Z_L) = \frac{(120)(j8) + 120)(j5)}{(4 + j3)(j5 + j8) + (j5)(j8)}(4 + j3)$$

$$\vec{V}_a = 82.17[V]$$

b) La corriente de la armadura para cada generador es:

$$\vec{I}_{a_1} = \frac{\vec{E}_{a_1} - \vec{V}_a}{Z_{s_1}} = \frac{120 - 82.17}{j5} = 9.36[A] \Rightarrow \vec{I}_{a_1} = 9.36$$

$$\vec{I}_{a_2} = \frac{\vec{E}_{a_2} - \vec{V}_a}{Z_{s_2}} = \frac{120 - 82.17}{j8} = 7.31[A] \Rightarrow I_{a_z} = 7.31[A]$$

La corriente de la carga es:

$$\vec{I}_L = 9.36 + 7.31 = 16.44[A] \Rightarrow \vec{I}_L = 16.44[A]$$

c) La potencia de salida de cada generador es:

$$\rho_{o_1} = (3)Re[(82.17)(9.36)] = 1,624.68[W] \Rightarrow \rho_{o_1} = 1,624.68[W]$$

$$\rho_{o_2} = (3)Re[(82.17)(7.31)] = 1,617.82[W] \Rightarrow \rho_{o_2} = 1,617.82[W]$$

d) La potencia total de salida es:

$$\rho_0 = \rho_{o_1} + \rho_{o_2} = 1,624.68 + 1,617.82 = 3,242.5[W]$$

$$\rho_o = 3,242.5[W]$$

## 10.5 Resumen

Puede establecerse que un generador síncrono, es un dispositivo cuyo objetivo es convertir potencia mecánica de un primer motor, en potencia eléctrica de corriente alterna, con una diferencia de potencial y una frecuencia específicas. El término síncrono hace referencia a que la frecuencia eléctrica de la máquina eléctrica está sincronizada con la tasa de rotación mecánica del eje. De esta manera, los generadores síncronos se ocupan para producir la mayor parte de la potencia eléctrica que se utiliza a nivel mundial, debido a su relativo, fácil uso e instalación; así como a lo económico que a largo plazo sale utilizarlos.

Por otro lado, el voltaje interno generado de esta máquina eléctrica, depende de la tasa de rotación del eje, y de la magnitud del flujo en el campo. El voltaje de fase de la máquina, difiere del voltaje interno generado por los efectos de la reacción en el inducido en el generador, y también por la resistencia

y reactancia interna en los devanados del inducido. El voltaje en las terminales del generador será igual al voltaje de fase, o estará relacionado con éste, por un factor  $\sqrt{3}$ , lo cual depende de que la máquina eléctrica esté conectada en estrella (Y) o en delta( $\Delta$ ).

Es también importante establecer, que la manera o forma en que opera un generador síncrono en un sistema de potencia real, depende directamente de sus propias restricciones. Esto significa que cuando un generador opera solo, las potencias real y reactiva por suministrar, deben estar determinadas por la carga impuesta, y los puntos de ajuste del mecanismo regulador y corriente de campo controlan la frecuencia y el voltaje en las terminales respectivamente. Cuando se conecta un generador síncrono a un bus infinito, tanto su frecuencia como su voltaje son constantes; por lo que, los puntos de ajuste del mecanismo regular y la corriente de campo controlan el flujo de potencial real y reactiva del generador.

En los sistemas reales que constan de generadores de tamaño aproximadamente igual, los puntos de ajuste del mecanismo regulador afectan tanto la frecuencia como el flujo de potencia y la corriente de campo incide tanto sobre el voltaje terminal, como sobre el flujo de potencia reactiva.

Finalmente; la capacidad de un generador síncrono para producir potencia eléctrica está limitada principalmente por el calentamiento interno de la máquina eléctrica. Por lo que, cuando se calientan los devanados del generador, la vida útil de éste, puede acortarse drásticamente y dramáticamente. Debido a que existen dos tipos diferentes de devanados (de inducido y de campo), se tienen igualmente, dos restricciones diferentes sobre el generador. El calentamiento máximo que permiten los devanados del inducido, establece los [KVA] máximo que permite el generador síncrono; mientras que el calentamiento máximo que aceptan los devanados de campo, establece el tamaño máximo de  $E_A$ .

Por lo que, el tamaño máximo de  $E_A$  más el tamaño máximo de  $I_A$ , determinan el factor de potencia nominal del generador síncrono.

## 10.6 Problemas

**10.1** Se realiza una prueba a un generador síncrono de 200[KVA]; 480[V]; 50[Hz], conectado en estrella (Y) con una corriente de campo nominal de 5[A] y se obtiene la siguiente información:

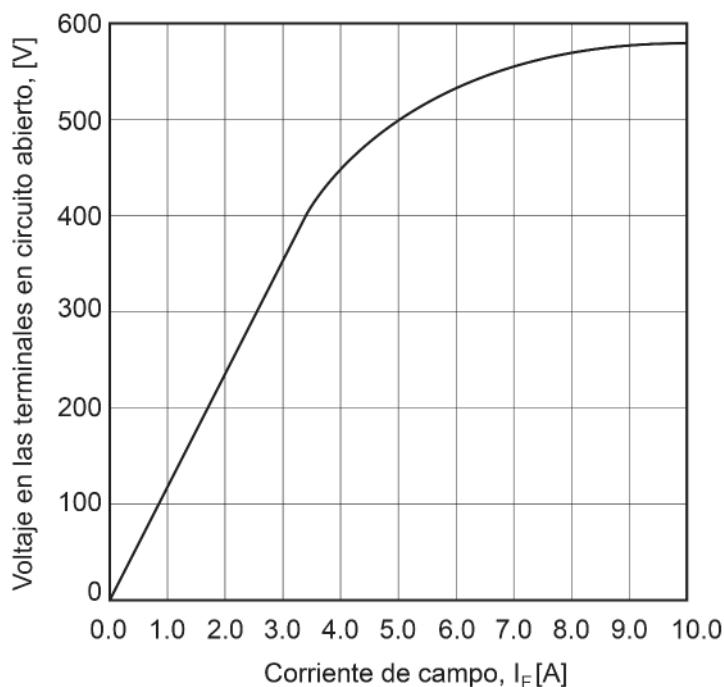
1.  $V_{T_{CA}}$  es igual a 540[V]; es decir, se define como el voltaje total en circuito abierto, con una corriente nominal  $I_F$ .
2.  $I_{L_{SC}}$  es igual a 300[A]; es decir, se define como la corriente de la carga en cortocircuito, con una corriente nominal  $I_F$ .
3. Cuando se aplica un voltaje de 10[V] de corriente continua en dos terminales, el valor de la corriente es de 25[A].

Calcular los valores de la resistencia del inducido, y la reactancia síncrona aproximada en  $[\Omega]$ , que se utilizaría en el modelo del generador en condiciones nominales.

**10.2** Un generador síncrono con cuatro polos se 480[V] a 60[Hz] conectado en delta ( $\Delta$ ), tiene la OCC que se muestra en la figura 10.27.

Este generador tiene una reactancia síncrona de  $0.1[\Omega]$ , y una resistencia del inducido de  $0.015[\Omega]$ . A plena carga, la máquina eléctrica suministra  $1,200[\text{A}]$  con un factor de potencia de 0.8 en retraso. En condiciones de plena carga, las pérdidas en el núcleo son de  $30[\text{KW}]$ . Despréciense las pérdidas en el circuito de campo.

- a. ¿Cuál es la velocidad de rotación del generador?
  
- b. ¿Cuánta corriente de campo se debe suministrar al generador para que el voltaje en las terminales sea de  $480[\text{V}]$  en vacío?
  
- c. Si el generador síncrono se interconecta a una carga, y esta carga toma  $1200[\text{A}]$  con un factor de potencia de 0.8 en atraso, ¿cuánta corriente de campo se requiere para mantener el voltaje en las terminales iguales a  $480[\text{V}]$ .
  
- d. ¿Cuánta potencia suministra ahora el generador?, ¿cuánta potencia suministra al generador, el motor principal?, ¿cuál es la eficiencia total del generador?
  
- e. Si se desconecta repentinamente de la línea, la carga del generador, ¿qué le sucedería al voltaje en las terminales?
  
- f. Por último, supóngase que el generador se conecta a una carga que toma  $1,200[\text{A}]$  con un factor de potencia de 0.8 en adelanto. ¿Cuánta corriente de campo se requiere para mantener el voltaje total ( $V_T$ ) en  $480[\text{V}]$ ?



**Figura 10.27** Occ de un generador síncrono, para resolver el problema 10.6.2.

**10.3** Un generador síncrono con 6 polos de 480[V]; 50[Hz], conectado en estrella (Y), tiene una reactancia síncrona por fase de 1.0[Ω]. Su corriente de inducido a plena carga es de 60[A] con un factor de potencia de 0.8 en retraso. Este generador tiene pérdidas por fricción y por rozamiento con el aire por 1.5[KW], y pérdidas en el núcleo por 1.0[KW] a 60[Hz] a plena carga. Debido a que se desprecia la resistencia del inducido, se supone que las pérdidas  $I^2R$  son insignificantes. Lo corriente de campo está ajustada de tal manera que el voltaje en las terminales es igual a 480[V] en vacío.

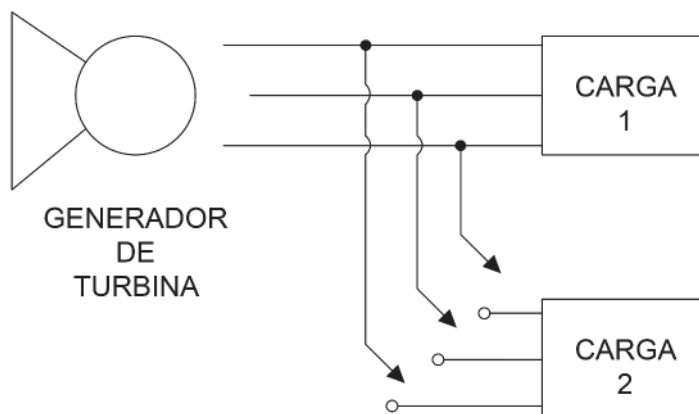
- a. ¿Cuál es la velocidad de rotación de este generador?
- b. Si se cumplen los siguientes supuestos, ¿cuál es el voltaje en las terminales del generador?
  1. Está cargado con una corriente nominal con un factor de potencia de 0.8 en retraso.
  2. Está cargado con una corriente nominal con un factor de potencia de 1.0.
  3. Está cargado con una corriente nominal con un factor de potencia de 0.8 en adelante.
- c. ¿Cuál es la eficiencia del generador (despreciar las pérdidas eléctricas) cuando opera a corriente nominal con un factor de potencia de 0.8 en retraso?

- d. ¿Cuánto par del eje debe aplicar el motor principal a plena carga?, ¿qué tan grande es el par opositor, inducido?
- e. ¿Cuál es la regulación de voltaje de este generador con un factor de potencia de 0.8 en retraso?, ¿y con un factor de potencia de 1.0?, ¿y con un factor de potencia de 0.8 en adelante?

**10.4** Suponga que un generador síncrono con seis polos salientes de  $480[V]$ ;  $50[Hz]$ , conectado en estrella (Y), tiene una reactancia síncrona por fase de  $1.0[\Omega]$ . La corriente de inducida a plena carga es de  $60[A]$  con un factor de potencia de 0.8 en retraso. Dicho generador síncrono tiene pérdida por fricción y por rozamiento con el aire por  $1.5[KW]$ ; así como pérdida en el núcleo por  $1.0[KW]$  a  $60[Hz]$  a plena carga. Se desprecia la resistencia del inducido y se supone que las pérdidas  $I^2R$  son insignificantes. La corriente de campo está ajustada de tal manera que el voltaje en las terminales del generador síncrono es igual a  $480[V]$  en vacío.

- a. Hacer la gráfica de la característica de las terminales (el voltaje en las terminales y la corriente de línea) de este generador síncrono conforme varía la corriente en el inducido desde vacío, hasta plena carga con un factor de potencia (a) de 0.8 en retraso y (b) de 0.8 en adelante. Supóngase que a corriente de campo permanece constante.

**10.5** La siguiente figura, muestra un generador síncrono que suministra potencia a una carga. Se conecta una segunda carga en paralelo con la primera. El generador tiene una frecuencia en vacío de  $61.0[Hz]$  y una pendiente  $S_p$  de  $1[MW/Hz]$ . La carga 1 consume una potencia real de  $1000[KW]$  con un factor de potencia de 0.8 en atraso; mientras que la carga 2, consume una potencia real de  $800[KW]$  con un factor de potencia de 0.707 en retraso.



- a. Antes de que se cierre el interruptor, ¿cuál es la frecuencia de operación del sistema?

- b.** Después de conectar la carga 2, ¿cuál es la frecuencia de operación del sistema?
- c.** Después de conectar la carga 2, ¿qué acciones pueden llevar a cabo el operador del sistema eléctrico de potencia, para restaurar la frecuencia del sistema a 60[Hz]?

## **Capítulo 11**

### **Operación de motores y condensadores síncronos**

#### **11.1 Introducción**

#### **11.2 Motores síncronos**

#### **11.3 Condensadores síncronos**

#### **11.4 Problemas resueltos**

#### **11.5 Resumen**

#### **11.6 Problemas**



### Competencias

- Conocer la teoría de operación de los motores síncronos.
- Conocer la teoría de operación de los condensadores síncronos.
- Conocer las aplicaciones prácticas de los motores y los condensadores síncronos.

## 11.1 Introducción

Los motores síncronos son máquinas síncronas que se utilizan para convertir potencia eléctrica en potencia mecánica de rotación. La característica principal de este tipo de motores, es que trabajan a velocidad constante, que depende sólo de la frecuencia de la red eléctrica, y de otros aspectos constructivos de la máquina. A diferencia de los motores asíncronos, la puesta en marcha requiere de maniobras especiales, a no ser que se trate con un sistema automático de arranque. Otra particularidad de motor síncrono, es que al operar de forma sobreexcitada, consume potencia reactiva y mejora el factor de potencia.

La máquina síncrona es una máquina reversible, ya que puede utilizarse como generador de corriente alterna, o como motor síncrono. Está constituido por dos devanados independientes:

- Un devanado inductor, construido en forma de arrollamiento concentrado o distribuido en ranuras, alimentado por corriente continua que da lugar a los polos de la máquina, y que se coloca en el rotor.
- Un devanado inducido, distribuido formando un arrollamiento trifásico recorrido por corriente alterna, ubicado en el estator que está construido de un material ferromagnético, generalmente de chapas de acero al silicio.

## 11.2 Motores síncronos

Las aplicaciones de motores síncronos en la industria (la mayoría de las veces), resultan en ventajas económicas u operacionales considerables, debido a sus características de funcionamiento. Las principales ventajas son:

- **Corrección del factor de potencia.** Los motores síncronos pueden ayudar a reducir los costos de energía eléctrica y mejorar el rendimiento del sistema de energía corrigiendo el factor de potencia en la red eléctrica donde están instalados. En pocos años, el ahorro de energía eléctrica puede equipararse al valor invertido en el motor.
- **Velocidad constante.** Los motores síncronos mantienen la velocidad constante, tanto en las situaciones de sobrecarga, como durante momentos de oscilaciones de voltaje, respetándose los límites del conjugado máximo (pull-out).
- **Alto rendimiento.** En la conversión de energía eléctrica en mecánica, es más eficiente, generando mayor ahorro de energía. Los motores síncronos son proyectados para operar con alto rendimiento en un amplio rango de velocidad, y para proveer un mejor aprovechamiento de energía para una gran variedad de cargas.
- **Alta capacidad de torque.** Los motores síncronos son proyectos con altos torques en régimen, manteniendo la velocidad constante, incluso en aplicaciones con grandes variaciones de carga.
- **Mayor estabilidad en la utilización con convertidores de frecuencia.** El motor síncrono, puede actuar en un amplio rango de velocidad, manteniendo la estabilidad independiente de la variación de la carga. Por ejemplo; laminadoras o extrusoras de plástico.

Por lo que, los motores síncronos presentan la ventaja de que son fabricados específicamente para atender las necesidades de cada aplicación. Debido a sus características constructivas, operación con alto rendimiento y adaptabilidad a todo tipo de ambiente, son utilizados en prácticamente todos los sectores de la industria, tales como:

- Minería (moledoras, molinos, cintas transportadoras, entre otras aplicaciones).
- Siderurgia (laminadores, ventiladores, bombas y compresores).
- Papel y celulosa (extrusoras, picadoras, desfibradoras, compresores y refinadoras).
- Saneamiento (bombas).
- Química y petroquímica (compresores, ventiladores, extractores y bombas).
- Cemento (moledoras, molinos y cintas transportadoras).
- Goma (extrusoras, molinos y mezcladoras).

Dependiendo de la aplicación, los motores síncronos pueden ser:

- **Motores síncronos verticales.** Se fabrican con cojinetes de rodamiento de esferas, de rodillos o de contacto angular, lubricados con grasa. Cuando estos motores son sometidos a altas cargas de

empuje axial, pueden (y deben) ser fabricados con conjuntos de rodamientos lubricados en aceite o con cojinetes de deslizamiento. Los motores síncronos con construcción vertical son proyectados y fabricados para atender las aplicaciones en bombas, moladoras, mezcladoras, entre otras muchas.

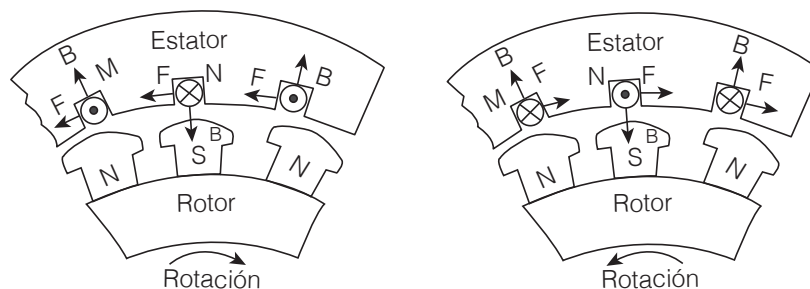
- **Motores síncronos para atmósferas explosivas.** Estos motores se fabrican con características de seguridad específicas, aptos para operar en locales donde productos inflamables son continuamente manipulados, procesados o almacenados. Se suministran con tipos de protección  $Ex - n$  (no encendible) y  $Ex - p$  (presurizado), atendiendo las exigencias de todas las normas, siendo probados y aprobados por organismos certificados reconocidos mundialmente a través de la Organización Internacional de Estándares (ISO).

### 11.2.1 Principio de operación y características constructivas

El principio de operación del motor síncrono es que el rotor “persigue” al campo magnético giratorio del estator alrededor de un círculo y “nunca lo alcanza”. Lo anterior se explica expresando que un conjunto de corrientes trifásicas en el inducido de un devanado produce un campo magnético giratorio uniforme ( $B_s$ ).

Por lo tanto, hay dos campos magnéticos presentes en la máquina eléctrica configurada como motor síncrono, y el campo del rotor tenderá a alinearse con el campo del estator, al igual que dos imanes tenderán a alinearse, si se colocan uno cerca del otro. Debido a que el campo magnético del estator gira, el campo magnético del rotor (y el rotor mismo) tratará constantemente de alcanzarlo. Mientras más grande sea el ángulo entre los dos campos magnéticos (hasta un ángulo máximo), mayor será el par en el rotor de la máquina. Debido a que el motor síncrono es físicamente igual que un generador síncrono, todas las ecuaciones de velocidad, potencia y par se utilizan indistintamente entre generadores y motores síncronos.

Debe establecerse por otro lado, que el motor síncrono presenta el inconveniente o desventaja, de que el par conserva un sentido único solamente cuando la máquina eléctrica síncrona se halla ya sincronizada; es decir, cuando el rotor gira a la misma velocidad del inducido. Si el rotor está en reposo o gira a otra velocidad diferente a la de sincronismo, el par medio que desarrolla al conectarlo a la red es nulo. En efecto, considérese el esquema de la Figura 11.1, en el cual se muestran dos conductores del inducido enfrentando a dos polos consecutivos del rotor.



**Figura 11.1** Principio de funcionamiento del motor síncrono.

En el instante adecuado e indicado en (a) la corriente en el conductor M es saliente al plano de la página de este libro; y en el instante ya comentado, en el conductor N es entrante al plano de esta misma página; de tal forma que se ejerce una fuerza sobre los conductores del inducido en el sentido contrario a las agujas del reloj, que obliga a girar a los polos (del rotor) en sentido opuesto.

Si la frecuencia de las corrientes que recorren el estator es de 50 [Hz] (por ejemplo), al cabo de  $1/100$  segundos, se invierte el sentido de las mismas, como lo muestra la Figura 11.1(b), resultando un par en el rotor de sentido contrario al anterior. En consecuencia, el rotor se ve sometido a un par alternativo que impide el arranque de la máquina en reposo. Para obtener un par útil en el árbol de la máquina, es preciso que el rotor avance un semipaso polar en el tiempo correspondiente al semiperiodo de la corriente del inducido. De esta manera, aunque cambie el sentido de la corriente, también cambia la polaridad del polo enfrentando a los conductores, lo que trae como consecuencia, que no se cambie el sentido del par producido. Debido a la inercia del rotor, no se puede, partiendo del reposo, obtener este avance de los polos en tan breve espacio de tiempo. Por lo que se requiere el uso de dispositivos especiales de arranque, para la puesta en operación (marcha) de estos motores síncronos.

Por ejemplo, en los motores síncronos que sí es factible arrancar en vacío, la puesta en marcha se realiza a través de un motor auxiliar (llamado comúnmente Motor Pony); generalmente este motor auxiliar es asíncrono, con igual número de polos que el motor síncrono (principal), de tal forma que se consigue una velocidad de rotación casi síncrona, y la conexión a la red se efectúa utilizando equipos de sincronización igual que se hace en el acoplamiento de un alternador a la red. También es posible emplear para este objetivo, motores de corriente continua, debido a su ventaja de regulación de velocidad, o bien, utilizar motores asíncronos con un par de polos menos que los polos que tiene el motor síncrono, y en este caso específico, la conexión a la red eléctrica se lleva a cabo, una vez que se ha desconectado el motor auxiliar, y el grupo pase “suavemente” por la velocidad de sincronía.

Existe otro método para la puesta en funcionamiento de un motor síncrono, el cual consiste en su arranque como si fuera un motor asíncrono. Para este objetivo se requiere poner un arrollamiento en arreglo “Jaula de Ardilla” sobre los polos de la máquina. Para lograr el arranque asíncrono, el devanado de la excitación debe estar cerrado sobre una resistencia óhmica cuya magnitud debe ser entre 10 y 15

veces superior a la propia. Es peligroso dejar el arrollamiento inductor abierto, debido a que el campo giratorio podría inducir en él, una fuerza electromotriz fem muy elevada (relativamente), lo que podría provocar la posible rotura del aislamiento.

De igual forma, será un inconveniente, cerrar el devanado en cortocircuito, ya que al hacerlo, se creará una elevada corriente monofásica que llegaría a frenar el rotor. Generalmente, y debido a que los motores síncronos son de una gran potencia, se aplican las conexiones estrella-delta, o se usa un autotransformador. Una vez hecha la puesta en operación (marcha) como motor asíncrono, cuando se obtiene la velocidad de régimen cercana a la del sincronismo, se conecta a la corriente continua al devanado de excitación, y entonces se producen, unas oscilaciones de velocidad respecto a la sincronía, y al cabo de unos periodos, se llega a la velocidad asignada. Este proceso constituye la llamada autosincronización del motor. Terminada la operación del arranque del mencionado motor síncrono, se podrá ya reglar su corriente de excitación para que la máquina trabaje en régimen de subexcitación o de sobreexcitación con el objetivo de regular su factor de potencia; de esta forma, este motor puede cumplir el doble objetivo de arrastrar una carga mecánica y compensar la corriente reactiva de la red eléctrica.

En lo que respecta a las características constructivas, se tiene lo siguiente:

- **La carcasa.** Su principal función, es la de apoyar y proteger el motor síncrono, alojando también el paquete de chapas y devanados del estator. Pueden ser construidas en los tipos horizontal y vertical, y con grado de protección de acuerdo con las necesidades del ambiente. La carcasa está construida en chapas y perfiles de acero soldado, formando un conjunto sólido y robusto que es la base estructural de la máquina. Todo el conjunto de la carcasa recibe un tratamiento de normalización para alivio de tensiones provocadas por las soldaduras. Ese tipo de construcción proporciona excelente rigidez estructural, de forma que se pueden soportar satisfactoriamente los esfuerzos mecánicos provenientes de eventuales cortocircuitos y vibraciones, capacitando al motor síncrono, a atender las más severas necesidades y condiciones de operación.
- **Estator.** Constituido por un paquete laminado de chapas de acero de alta calidad, con ranuras para alojar el devanado del estator, que opera con alimentación de potencia en corriente alterna, para generar el campo magnético giratorio.
- **Rotor.** El rotor puede ser construido con polos lisos o salientes, dependiendo de las características de construcción del motor; así como de su aplicación. El rotor completo está formado por la estructura que compone o soporta los polos, los devanados de campo y la jaula de arranque, que son las partes activas giratorias del motor síncrono. Los polos de campo son magnetizados a través de la corriente continua de la excitatriz, o directamente, por anillos colectores y escobillas. En funcionamiento, los polos se alinean magnéticamente por el entrehierro y giran en sincronismo con el campo giratorio del estator. Los ejes son fabricados en acero forjado y mecanizados según las especificaciones técnicas requeridas. La punta del eje normalmente es cilíndrica o bridada.
- **Cojinetes de rodamiento.** Estos cojinetes están normalmente constituidos por rodamiento de esferas o de rodillos cilíndricos, dependiendo de la rotación, de los esfuerzos axiales y radiales a

los que son sometidos, en algunas aplicaciones, pueden ser utilizados rodamientos especiales. Los cojinetes de rodamientos pueden ser lubricados con aceite o grasa.

- **Cojinetes de deslizamiento.** Los cojinetes de deslizamiento pueden tener lubricación natural (auto-lubricables) o lubricación forzada (lubricación externa).

En cuanto al tipo de excitación se establece lo siguiente: Los motores síncronos requieren de una fuente de excitación de corriente continua para alimentar el devanado de campo (devanado del rotor), que usualmente es abastecido a través de una excitatriz giratoria con escobillas (Brushless), o a través de anillos recolectores y escobillas (excitatriz estática). A continuación, se explica el funcionamiento de cada una de ellas:

- **Excitatriz sin escobillas (Brushless).** Los motores síncronos con sistema de excitación sin escobillas, poseen una excitatriz giratoria, normalmente localizada en un compartimiento ubicado en la parte trasera del motor. Dependiendo de la operación del motor, la excitatriz es construida con:
  - Excitatriz con alimentación de corriente continua en el estator.
  - Excitatriz con alimentación de corriente alterna en el estator.

El rotor de la excitatriz alimenta el devanado de la excitación del motor a través de un puente rectificador trifásico giratorio.

- **Excitatriz estática (con escobillas).** Los motores síncronos con excitatriz de tipo estática están constituidos por anillos recolectores y escobillas que posibilitan la alimentación de corriente de los polos del rotor, a través de contacto deslizante. La corriente continua para alimentación de los polos debe ser proveniente de un convertidor y controlador estático (c-a/c-c). Los motores síncronos con excitación estática son más utilizados en aplicaciones con variación de velocidad a través de convertidores de frecuencia.
- **Bobinado.** El proceso de bobinado es proyectado y especificado para el voltaje y la aplicación específica a la que el motor se destina. Las bobinas de los motores de alto voltaje son fabricadas con alambre de cobre rectangular, preformadas y completamente aisladas con cinta porosa de mica. También son utilizadas en el proceso de bobinado, cintas conductoras y semiconductoras que envuelven las bobinas, garantizando las características adecuadas al nivel de aislamiento necesario.
- **Sistema de aislamiento.** Se basa en el proceso “Vacuum Pressure Impregnation” (VPI), que utiliza resinas epoxi especiales, que garantizan el perfecto aislamiento del embobinado de los motores en un proceso totalmente exento de alguna emisión de gases nocivos hacia la atmósfera. El proceso VPI, ha demostrado por muchos años su eficiencia y confiabilidad en máquinas eléctricas giratorias en las más variadas aplicaciones. El sistema de aislamiento es aplicado en máquinas de alta y de baja tensión, que utilizan bobinas preformadas desde 380[V] y hasta 15,000[V].

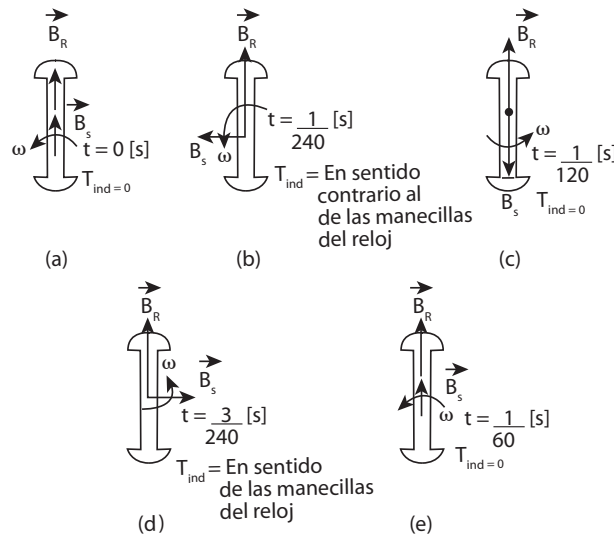
- **Balanceo.** Se realiza un balance computarizado de hasta 3,600[rpm] en los rotores. Como consecuencia, los motores síncronos actuales, presentan niveles de vibración muy reducidos. Este balanceo se realiza en tres planos.

Finalmente, los motores síncronos son equipados con los accesorios necesarios para su correcto funcionamiento y monitoreo. En cuanto a la especificación del motor, es importante informar los accesorios especiales deseados, para que sean incluidos en el proyecto y fabricación del motor. Las listas de accesorios son:

- **Accesorios estándar:**
  - Sensores de temperatura en los devanados del estator.
  - Sensores de temperatura en los cojinetes.
  - Resistencia de calentamiento.
  - Escobilla para puesta a tierra del eje, en motores accionados por convertidores de frecuencia.
- **Accesorios especiales:**
  - Condensadores para protección contra sobrevoltaje.
  - Pararrayos para protección contra sobrevoltaje.
  - Transformadores de corriente para protección diferencial.
  - Sensores de vibración.
  - Indicador de posición del eje (encoder).
  - Dispositivo para izamiento del motor.
  - Sensores de temperatura para entrada y salida de aire.
  - Indicador de pérdida de agua.
  - Flujóstato para agua.
  - Flujóstato para aceite.
  - Visor de flujo de aceite.
  - Visor de flujo de agua.
  - Unidad hidráulica para lubricación de los cojinetes.
  - Sistema para inyección de aceite sobre presión, para el arranque y el paro del motor (Hydrostatic Jacking).
  - Termómetro para aceite (cojinetes).
  - Termómetro para agua (intercambiador de calor).
  - Termómetro para aire (ventilación).
  - Placa de anclaje.
  - Dispositivo de presurización en motores síncronos Ex-p.
  - Condensadores para lectura(s) de descarga(s) parcial(es).
  - Indicador de centro magnético.

### 11.2.2 Arranque

Se parte de que el motor siempre se enciende a velocidad síncrona. Lo que hasta el momento no se ha considerado, es la siguiente pregunta: ¿Cómo llega el motor a dicha velocidad síncrona? Para comprender oportuna y adecuadamente la naturaleza del problema, se debe observar la Figura 11.2.



**Figura 11.2** Problemas en el arranque de un motor síncrono: el par alterna rápidamente en magnitud y dirección; por lo que, el par de arranque neto es cero.

La figura anterior muestra esquemáticamente un motor síncrono a 60[Hz] en el momento en que se aplica potencia a los devanados del estator. El rotor del motor está estacionario y, por lo tanto; el campo magnético  $\vec{B}_R$ , también. El campo magnético del estator  $\vec{B}_S$  comienza a girar dentro del motor a velocidad síncrona. La Figura 11.2. muestra la máquina en el tiempo  $t=0[s]$ , cuando  $\vec{B}_R$  y  $\vec{B}_S$  están perfectamente alineados.

Con la ecuación de par inducido:

$$\tau_{ind} = k \vec{B}_R \times \vec{B}_S$$

El par inducido en el eje del rotor es cero. En la ecuación anterior, se realiza el “producto cruz” de los vectores  $\vec{B}_R$  y  $\vec{B}_S$ .

En la Figura 11.2 (b), se observa la situación en el tiempo  $t = \frac{1}{240}[s]$ . En tan corto tiempo, el rotor apenas se ha movido, pero el campo magnético del estator apunta ahora hacia la izquierda. Con la



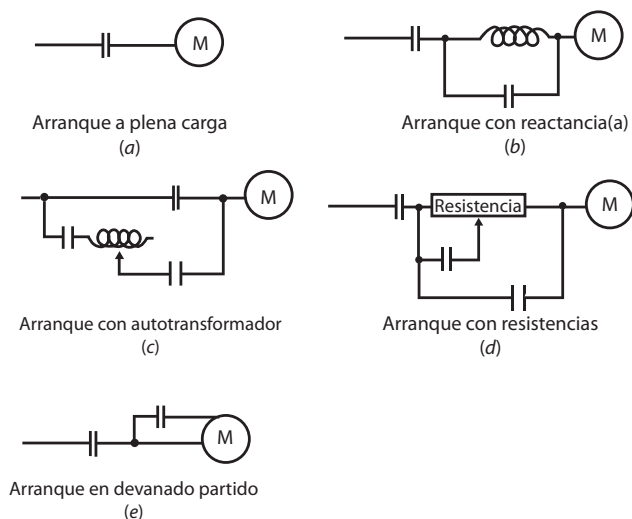
ecuación de par inducido, el par en el eje del rotor ahora tiene un sentido contrario al de las manecillas del reloj. La Figura 11.2 (c), muestra la situación en el tiempo  $t = \frac{1}{120}[s]$ . En ese momento,  $\vec{B}_R$  y  $\vec{B}_S$  apuntan en direcciones opuestas y  $\tau_{ind} = 0$  una vez más. En el tiempo  $t = \frac{3}{240}[s]$ , el campo magnético del estator apunta hacia la derecha, y el par resultante tiene el sentido de las manecillas del reloj.

Por último, en  $t = \frac{1}{60}[s]$ , el campo magnético del estator está alineado una vez más en el campo magnético del rotor y  $\tau_{ind} = 0$ . Durante un ciclo eléctrico, el par pasó de tener una dirección en sentido opuesto a las manecillas del reloj; a tener una dirección en el sentido de las manecillas del reloj, y el par promedio durante el ciclo completo es cero. Lo que le sucede al motor, es que vibra muy fuerte con cada ciclo eléctrico, y finalmente se sobrecalienta. Este método de arranque de un motor síncrono no es nada óptimo ni satisfactorio. Por lo que, queda siempre la pregunta: ¿Cuál es la mejor manera de arrancar un motor síncrono?

Los motores síncronos pueden arrancarse a través de las siguientes formas:

- a) **Arranque por medio de la reducción de la frecuencia eléctrica.** Si los campos magnéticos del estator en un motor síncrono giran a una velocidad lo suficientemente baja, no habrá ningún problema para que el rotor se acelere y se enlace con el campo magnético del estator. De esta manera, se puede incrementar la velocidad de los campos magnéticos del estator, aumentando de manera gradual la frecuencia, hasta alcanzar su valor nominal de 50 ó 60[Hz]; para lograr esto, pueden utilizarse accionadores de estado sólido como cicloconvertidores. Un cicloconvertidor es un variador de frecuencia que funciona con conmutación natural. Las tensiones o voltajes alternos de salida se obtienen por una sucesión de fragmentos de los voltajes alternos de entrada. Dados el valor y la frecuencia de los voltajes de entrada, el cicloconvertidor permite cambiar de forma continua el valor y la frecuencia de los voltajes de salida. Sin embargo, el máximo de la frecuencia de salida es claramente inferior a la frecuencia de entrada se trata por lo tanto, de un demultiplicador de frecuencia con relación variable de forma continua. Estos convertidores utilizan las mismas conexiones de los rectificadores reversibles en corriente y tensión.
- b) **Arranque con un motor primario externo.** Para llevar al motor a su velocidad síncrona, se le puede adjuntar un motor de arranque externo. Una vez alcanzada esa velocidad, se conecta la máquina en paralelo a la red, y se desconecta el motor primario del eje. El motor de arranque puede tener valores nominales mucho más pequeños que el motor que arranca, ya que sólo debe superar la inercia de la máquina síncrona en vacío.
- c) **Arranque con devanados de amortiguamiento.** Este es el método más popular de arranque. Recibe el nombre de devanado amortiguador, porque reduce las oscilaciones que se producen en los procesos transitorios de las máquinas: acoplamiento a la red, vibraciones bruscas de carga eléctrica o mecánica, etcétera. Los devanados de amortiguamiento son barras especiales dispuestas en ranuras hechas en la cara del rotor en un motor, y en cortocircuito en cada extremo con un anillo. Esto crea un rotor del tipo “Jaula de Ardilla” , y el motor arranca como si fuera un motor asíncrono trifásico.

A continuación, se muestran los diferentes métodos de arranque para un motor síncrono; (Ver Figura 11.3).



**Figura 11.3** Diferentes métodos de arranque de motores síncronos de voltaje en los que el motor podía soportar sin salirse del sincronismo.

- **Par nominal (Full-Load Torque)**. En este caso, es el par desarrollado a velocidad de sincronismo, con valores nominales de voltaje, corriente, frecuencia y corriente de excitación.
- **Par crítico (Breakdown Torque)**. Es el máximo par que un motor síncrono funcionando en un estado asíncrono sobre la p Polea, puede desarrollar sin que el rotor se desenganche del campo rotatorio. Puede observarse que esto ocurre en un punto de la característica mecánica, donde la velocidad es menor que la de sincronismo, y aun menor, que la velocidad de plena carga.
- **Par de bloqueo (Locked-Rotor Torque)**. Es el par desarrollado con el rotor en reposo con valores nominales de voltaje, frecuencia y corriente de excitación.

### 11.2.3 Diagrama fasorial

En la práctica, los motores síncronos tienen como función, proporcionar potencia a cargas que son básicamente dispositivos que giran a velocidad constante. Es práctica regular que dichos motores se conecten a sistemas eléctricos de potencia mucho más grandes que los motores individuales, por lo que los sistemas de potencia semejan buses infinitos de motores. Esto significa que el voltaje en las terminales;

así como la frecuencia del sistema son constantes, sin importar la cantidad de potencia que consume el motor. La velocidad de rotación del motor se asocia directamente con el rango de rotación de los campos magnéticos; así como con la tasa de rotación de los campos magnéticos que se aplican se asocia a la frecuencia eléctrica que se utiliza, por lo que la velocidad del motor síncrono será siempre constante sin importar la carga que se conecte a dicho motor. La velocidad fija de rotación se calcula como:

$$n_m = \frac{120fe}{P}$$

donde:  $n_m$  es la velocidad mecánica de rotación.

$f_e$  es la frecuencia eléctrica del estator.

$P$  es el número de polos en el motor.

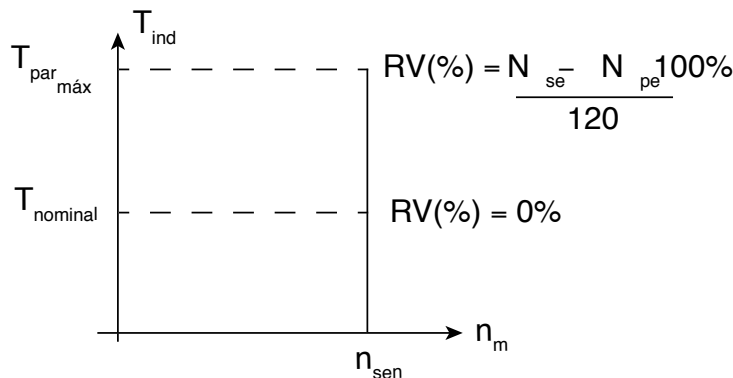
La Figura 11.4 muestra la curva característica par-velocidad. En este caso, la velocidad en el estado estacionario del motor síncrono es constante desde el vacío y hasta el par máximo que el motor puede suministrar, y que se denomina como par máximo; de esto se desprende que la regulación de velocidad del motor síncrono es de 0%. Entonces, la ecuación del par es la siguiente:

$$\tau_{ind} = k\vec{B}_R\vec{B}_{net}sen(\delta)$$

O también, el par puede calcularse como:

$$\tau_{ind} = \frac{3V_\phi E_A sen(\delta)}{\omega_m X_S}$$

Puede establecerse entonces, que el par máximo se presenta cuando  $\delta=90^\circ$ . Pero, los pares normales a plena carga, son mucho menores a  $90^\circ$ . En realidad, el par máximo es por lo general, tres veces el par del motor síncrono a plena carga.



**Figura 11.4** Curva característica Par-Velocidad de un motor síncrono. Puesto que la velocidad del motor es constante; entonces, su regulación de velocidad (RV) es cero.

Por otro lado, cuando el par en el eje de un motor síncrono sobrepasa el par máximo; entonces, el rotor no puede seguir unido al campo magnético del estator y tampoco al campo magnético neto, sino que comienza a retrasarse en relación con ellos. Por lo que, conforme el rotor pierde velocidad, el campo magnético del estator lo rebasa múltiples veces, y la dirección del par inducido en el rotor se invierte con cada uno de los rebases. El gran par resultante oscila primero hacia un lado, posteriormente hacia el otro lado, provocando que todo el motor vibre con fuerza. Finalmente, la pérdida de sincronización una vez que se excede el par máximo, se conoce como deslizamiento de los polos. De lo anterior se deduce que el par máximo del motor está dado por:

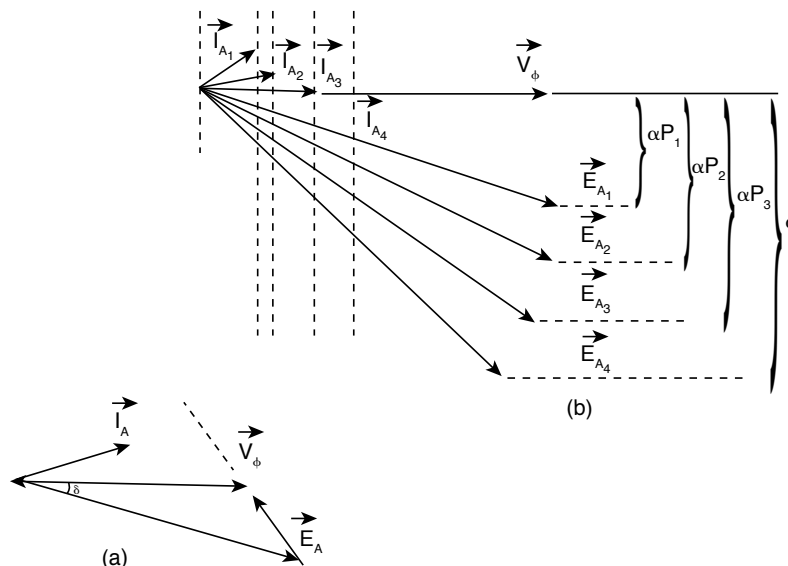
$$\tau = k B_R B_{net}$$

O como:

$$\tau_{ind} = \frac{3V_\phi E_A}{\omega_m X_S}$$

Desde un enfoque operativo del motor síncrono, si se fija una carga al eje de dicho motor, éste desarrollará suficiente par como para mantener el motor y su carga a la velocidad síncrona; pero, ¿qué ocurre si la carga en un motor síncrono cambia?

Para responder esta importante pregunta, debe actualizarse un motor síncrono que opera inicialmente con un factor de potencia adelantado, tal como se muestra en la Figura 11.5.



**Figura 11.5** (a). Diagrama fasorial de un motor síncrono que opera con un factor de potencia en adelanto. (b) Efecto de incrementar la carga en la operación real de un motor síncrono.

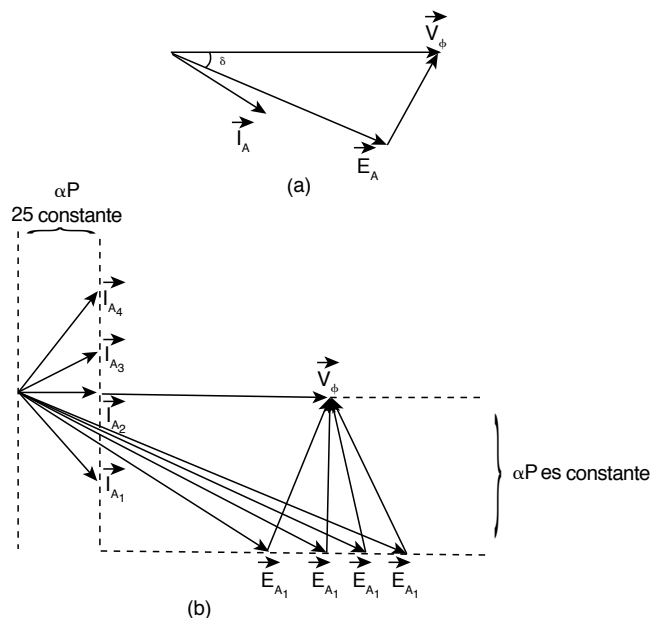
Al analizar a detalle la Figura 11.5 se tiene lo siguiente: Si se incrementa la carga en el eje del motor, el rotor empezará a perder velocidad. Conforme pierde velocidad, el ángulo del par ( $\delta$ ) se hace grande, y por ende, se aumenta inmediatamente el par inducido. Dicho aumento en el par inducido, en poco tiempo acelera nuevamente el rotor, y el motor vuelve a girar a su velocidad de sincronía, pero con un ángulo del par más grande.

Pero, ¿cuál es la forma del diagrama fasorial durante este proceso? Para poder responder adecuadamente esta interesante pregunta, hay que analizar las restricciones sobre la máquina durante un cambio en la carga asociada al motor síncrono. La Figura 11.5(a) muestra el diagrama fasorial del motor antes de que se incremente(n) la(s) carga(s). Puede deducirse que el voltaje interno generado  $E_A$  se iguala a  $k\phi\omega$ ; y por lo tanto, únicamente depende de la corriente de campo en el motor síncrono y de su velocidad. Sin embargo, la velocidad está restringida a ser constante en función de la fuente de voltaje de entrada y, dado que no se ha manipulado el circuito de campo, igualmente es constante la corriente de campo. De esta forma,  $|\vec{E}_A|$  debe ser constante aun cuando la carga sí varíe.

Se incrementarán las distancias proporcionales a la potencia ( $\vec{E}_A \text{sen}(\delta)$  e  $\vec{I}_A \text{cos}(\theta)$ ). Sin embargo, la magnitud de  $\vec{E}_A$  debe ser constante. A medida que varía la carga  $\vec{E}_A$  se mueve hacia abajo, tal y como lo muestra la Figura 11.5 (b). Conforme que  $\vec{E}_A$  se mueve cada vez más hacia abajo, es necesario incrementar la cantidad  $jX_S \vec{I}_A$  para arribar a la punta de  $\vec{E}_A$  hasta  $\vec{V}_\phi$ ; de esta forma, también se incrementa la corriente en el inducido  $\vec{I}_A$ . Debe notarse que el ángulo( $\delta$ ) del factor de potencia, también cambia; es decir, cada vez está más en atraso y mucho menos en adelanto.

En los párrafos anteriores, se ha analizado detalladamente cómo un cambio o modificación de la carga en el eje de una máquina síncrona afecta al motor.

Sin embargo, existe otro parámetro en un motor síncrono que puede ajustarse. Es la corriente de campo. La pregunta inmediata es: ¿Qué efecto tiene un cambio de/en la corriente de campo en un motor síncrono? Ahora, para responder técnicamente la pregunta anterior, debe estudiarse la Figura 11.6. En la parte (a) de dicha figura, se muestra un motor síncrono que opera de origen con un factor de potencia en retraso. Empero, increméntese la corriente de campo, y debe observarse el resultado en el motor síncrono.



**Figura 11.6** (a) Motor síncrono que opera con un factor de potencia en retraso. (b) Efecto del incremento de la corriente de campo en la operación de este motor síncrono.

Puede notarse que si se da un incremento en la corriente de campo, de la misma forma, se incrementa la magnitud de  $\vec{E}_A$ ; empero, no afecta la potencia real que suministra el motor síncrono. La potencia que suministra el motor síncrono únicamente cambia cuando se modifica el par en la carga del eje. Dado que un cambio en  $I_F$  no afecta la velocidad del eje  $n_m$ , y debido a que la carga en el eje no cambia, la potencia real suministrada, tampoco lo hace. Por supuesto que  $V_T$  también es constante debido a que la fuente de potencia que alimenta al motor síncrono, lo mantiene constante. Las distancias proporcionales a la potencia en el diagrama fasorial ( $E_A \text{sen}(\delta)$  e  $I_A \text{cos}(\theta)$ ), deben de permanecer constante.

Entonces, cuando se incrementa la corriente de campo; también  $\vec{E}_A$  debe incrementarse; pero únicamente lo puede lograr a través de un deslizamiento de la línea con la potencia constante. Esto se muestra en la Figura 11.6 (b). Véase que conforme se incrementa el valor de  $\vec{E}_A$ , la magnitud de la corriente en el inducido  $I_A$  primero disminuye, para luego incrementarse. Si se tiene un  $\vec{E}_A$  bajo, entonces la corriente en el inducido está en retraso, y el motor síncrono, es una carga inductiva. Actúa como una combinación de inductor y de resistor; y consume potencia reactiva  $Q$ . En la medida en que se incrementa la corriente de campo, la corriente en el inducido a la larga, se alinea con  $\vec{V}_\phi$ , y el motor parece solamente resistiva. Si se incrementa la corriente de campo todavía más, la corriente en el inducido está en adelanto; entonces, el motor síncrono se convierte en una carga capacitiva. Ahora entonces, actúa como una combinación de capacitor y de resistor, consume potencia reactiva negativa ( $-Q$ ); o alternativamente, suministra potencia reactiva ( $Q$ ) al sistema.

### 11.2.4 Curvas “V”

Se estudia la relación entre la corriente de carga  $I$  y la corriente de excitación  $I_{exc}$  para carga constante. En el arreglo de la Figura 11.7, se observa que al crecer la excitación, la corriente comienza a disminuir y se hace mínimo para  $\cos(\varphi) = 1$  y luego, vuelve a incrementarse cuando se hace capacitivo el efecto.

Es posible trazar una familia de curvas “V”, una para cada estado de  $\varphi$ . De esta forma, en la Figura 11.7, se han trazado las curvas para plena carga, media carga y un cuarto de carga. Para bajos valores de excitación, el motor es inductivo (zona izquierda). Para  $\cos(\varphi) = 1$ , la corriente es mínima; por consiguiente, los valores mínimos determinan la curva de  $\cos(\varphi) = 1$ . Estos puntos se encuentran desplazados hacia la derecha, porque a mayor carga, mayor reacción del inducido; por lo tanto, se necesita aumentar la excitación. Pero, para valores grandes de excitación, la máquina es capacitiva (zona derecha). Para muy bajos valores de excitación (para cada estado de carga), llega a un punto que la fuerza de atracción magnética no es suficiente para mantener el rotor ligado al campo rodante de la máquina síncrona, y es entonces que el motor se desengancha y se detiene, estos punto determinan el límite de estabilidad.

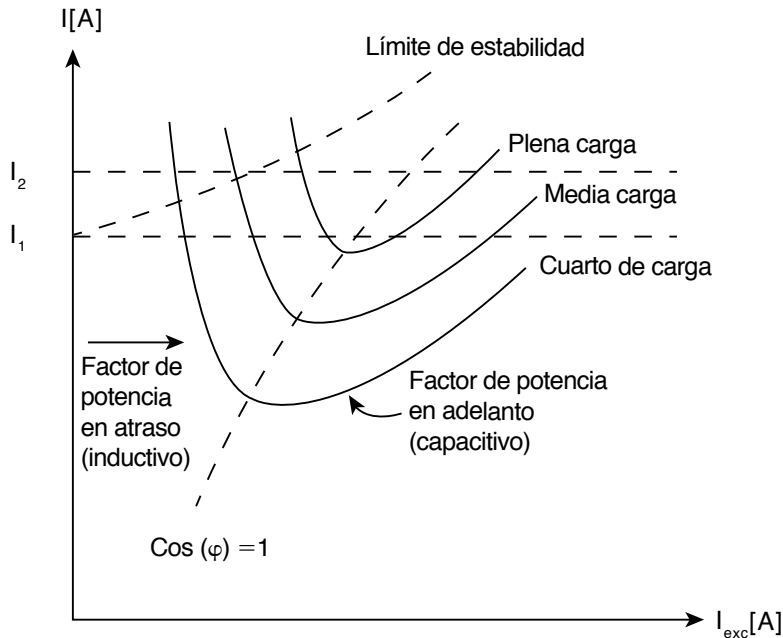


Figura 11.7 Curvas en “V” de un motor síncrono.

### 11.2.5 Análisis de comportamiento bajo diferentes condiciones de carga

En este apartado, se explicarán las diferentes aplicaciones del motor síncrono, las cuales son:

- a) Trabajando como motor, entregando potencia útil solamente. Representando en el eje de las ordenadas (Y) y los  $[KVA_r]$  y en el eje de las abscisas (X) los  $[KW]$  de una carga, un vector cualesquiera representará los  $[KVA]$ . La proyección sobre las abscisas del punto en que este vector corta a un círculo de radio indica el  $\cos(\varphi)$  de dicha carga. Agregar un motor síncrono a  $\cos(\varphi) = 1$  (potencia útil solamente) significa sumar a los  $[KVA]$  existentes, un vector  $[KW]$  paralelo a las abscisas; su suma vectorial dará la nueva potencia aparente absorbida por la carga  $[KVA]$ . Se observa que la nueva potencia aparente absorbida, si bien aumenta, es menor que la suma escalar, y se ha mejorado el  $\cos(\varphi)$  de la instalación (ver la Figura 11.8 (a)).

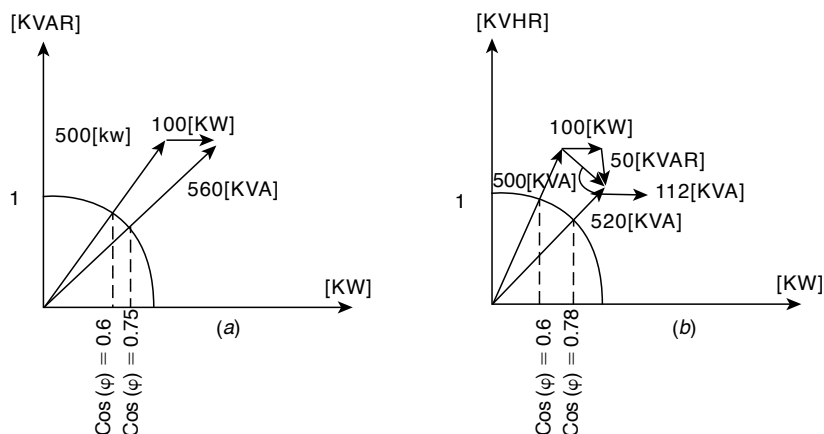
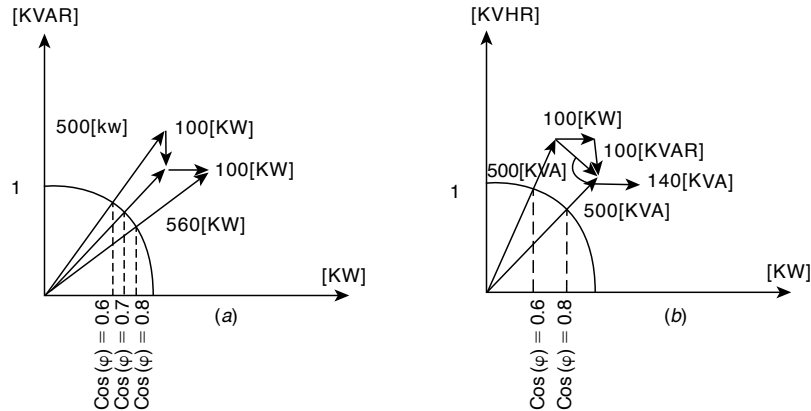


Figura 11.8 Diagrama fasorial de un motor síncrono entregando potencia útil en su operación.

- b) **Trabajando como motor, entregando potencia útil y sobre-excitada.** En estas condiciones, a la potencia aparente existente en  $[KVA]$ , se le debe sumar los  $[MW]$  útiles que requiere la máquina accionada (paralela a las abscisas) más la portencia reactiva capacitiva, debido a la sobre-excitación  $[KVA_r]$  (paralelo a las ordenadas). La suma vectorial de estos dos últimos, representa la potencia aparente del motor agregado al sistema. La suma vectorial de los  $[KVA]$  originales, más los  $[KVA]$  del motor, da la nueva potencia aparente absorbida en  $[KVA]$ . Se deduce un menor incremento de la potencia absorbida y un mejor  $\cos(\varphi)$  ver la Figura 11.8 (b)
- c) **Conectado como compensador síncrono.** De esta manera, absorbe potencia reactiva solamente  $[KVA_r]$  (paralelo a las ordenadas), disminuyendo la potencia aparente absorbida  $[KVA_1]$  y mejorando el  $\cos(\varphi)$ . Además, esta forma libera potencia útil, ya que se puede llegar a agregar



[KW] del motor, sin que aumente los [KVA] originales en módulo, sólo cambiaría su fase a  $[KVA_2]$ , inclusive mejorando nuevamente el  $\cos(\varphi)$ . (Ver la Figura 11.9 (a)).



**Figura 11.9** Diagrama fasorial de un motor síncrono entre potencia útil al conectarse como condensador síncrono.

- d) **Caso de que no se disponga de mayor potencia aparente.** En este caso, con un motor síncrono, se puede agregar potencia útil al sistema sin incrementar la potencia aparente de suministro. Esto se puede realizar adicionando un motor síncrono sobre-excitado, de tal manera que su triángulo de potencia, mantenga los [KVA] originales, (ver la Figura 11.9 (b)).

### 11.3 Condensadores síncronos

Un capacitor síncrono, es una máquina síncrona cuyo eje no está unido a ninguna carga. La corriente en su devanado de campo se controla a través de un regulador de voltaje, de forma que la máquina genera o consume potencia reactiva según lo requiere el sistema al que está conectada. Algunas de sus ventajas en comparación con otros dispositivos de compensación son las siguientes:

- Regula el voltaje de forma continua, sin los transitorios electromagnéticos asociados a los cambios de tomas de otros tipos de dispositivos.
- No introduce armónicos en la red, no se ve afectado por ellos.
- No causa problemas por resonancia eléctrica.
- En caso de caída de voltaje por una falla en la red, son capaces de proporcionar corriente de cortocircuito durante un tiempo limitado facilitando el ajuste de las protecciones de sobrecorriente.

### 11.3.1 Control de tensión y de factor de potencia

Un motor síncrono que se utiliza para accionar una carga puede funcionar sobre-excitado para suministrar la debida potencia reactiva ( $Q$ ) a un sistema de potencia específica.

Es factible comprar un motor síncrono que se use en vacío; solamente para corregir el factor de potencia. En la Figura 11.10, se muestra el diagrama fasorial de un motor síncrono sobre-excitado y operando en vacío.

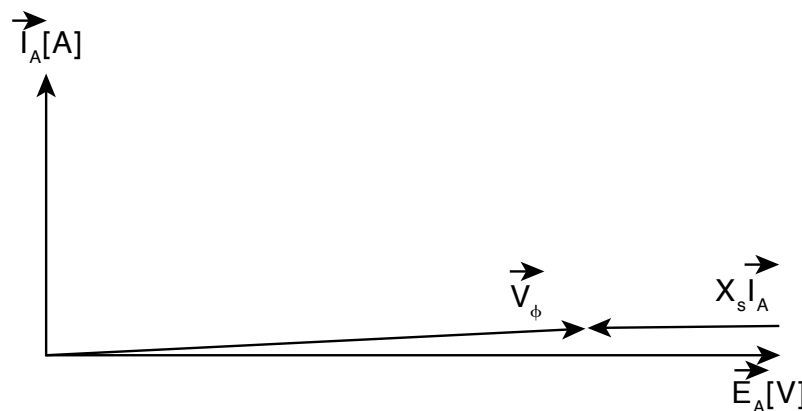


Figura 11.10 Diagrama fasorial de un condensador síncrono.

Debido a que no sale potencia del motor, las distancias proporcionales a la potencia ( $E_A \text{sen}(\varphi)$  e  $I_A \text{cos}(\varphi)$ ) son cero. Debido a que la expresión de la Ley de Kirchhoff de un motor síncrono es:

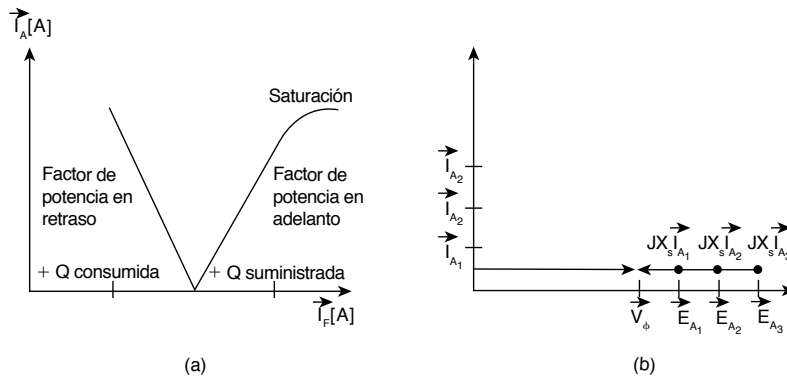
$$\vec{V}_\phi = \vec{E}_A + jX_S \vec{I}_A$$

En donde el término  $jX_S \vec{I}_A$  apunta hacia la izquierda, y por lo tanto, la corriente en el inducido  $\vec{I}_A$  apunta directamente hacia arriba. De esta forma, si se examina  $\vec{V}_\phi$  e  $\vec{I}_A$ , la relación voltaje-corriente entre ellos se parece a la de un capacitor.

Un motor síncrono sobre-excitado en vacío, parece un capacitor grande para el sistema de potencia. Ciertos motores síncronos se comercializaban para utilizarse como correctores de factor de potencia. Estas máquinas incluían ejes que no salían del marco del motor; no se les podía conectar una carga aun si así se quisiera.

Estos motores síncronos con propósito especial frecuentemente se llaman condensadores síncronos. En la Figura 11.11 (a) puede observarse la curva en “V” de un capacitor síncrono. Debido a que la potencia

real que proporciona al motor es cero (excepto por las pérdidas) con un factor de potencia unitario, la corriente  $I_A = 0$  conforme se incrementa la corriente de campo por arriba de ese punto, la corriente en la línea (y la potencia reactiva que suministra el motor) aumenta de manera casi lineal hasta llegar al punto de saturación. En la figura 11.11(b) se muestra el efecto de incrementar la corriente de campo en el diagrama fasorial del motor.



**Figura 11.11** (a) Curva en “d” “V” de un condensador síncrono.  
(b) Diagrama fasorial de la máquina correspondiente.

### 11.3.2 Arranque

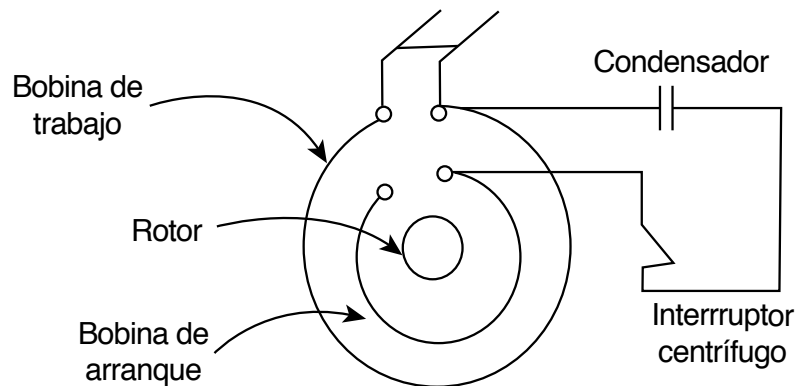
Para aumentar el par de arranque de estos motores, se añade un condensador en serie con el embobinado auxiliar, de tal forma que el ángulo de desfase entre los flujos producidos por ambas bobinas se acerque a  $90^\circ$ . El ángulo de arranque conseguido será mayor, cuanto mayor sea la capacidad del condensador. Sin embargo, una capacidad excesivamente elevada del condensador, puede reducir la impedancia total del devanado auxiliar a valores muy pequeños, lo que trae consigo un aumento de la corriente absorbida por el embobinado auxiliar. Si este devanado no se desconecta una vez arrancado el motor, el calor producido por la fuerte corriente, puede llegar a destruirlo. Para que esto no ocurra, una vez que el motor haya alcanzado cierta velocidad (representada por una cantidad de [revoluciones por minuto, rpm]), se procede a la desconexión del conjunto formado por el condensador y el devanado auxiliar.

Dicha desconexión se puede realizar mediante un interruptor centrífugo (Figura 11.12).

De hecho, este interruptor que está acoplado al eje del motor, abre sus contactos cuando se alcanzan unas ciertas revoluciones; en otros motores, el interruptor automático se sustituye por un pulsador manual.

En el caso de que el condensador se desee dejar continuamente conectado; este debe poseer una potencia reactiva  $[KVA_r]$  por cada  $[KW]$  de potencia del motor. Para motores en los que sea muy importante el par de arranque, y que se desconecte el embobinado auxiliar, el condensador síncrono deberá ser unos  $4[KVA_r]$  por cada  $[KW]$  de potencia del motor síncrono.

Finalmente, en los motores sin condensador síncrono, el campo de aplicación se ve limitado por su bajo par de arranque; por lo que se emplean, por ejemplo, para ventiladores o en bombas centrífugas, entre otras aplicaciones.



**Figura 11.12** Esquema de conexión de un motor síncrono con condensador e interruptor centrífugo de arranque.

#### 11.4 Problemas resueltos

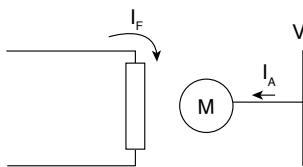
**Problema 11.1** Un motor síncrono trifásico de polos cilíndricos, conectado en estrella (Y) a  $1732[V]$  entre línea; con  $r_a = 0[\Omega]$ ,  $X_S = 10[\Omega]$ . Las pérdidas de potencia por fricción mecánica y del aire, más las del núcleo suman  $9[KW]$ .

La potencia de salida es de  $390[HP]$ . La tensión de excitación máxima ( $E_{F_{máx}}$ ) es de  $2500[V]$  por fase.

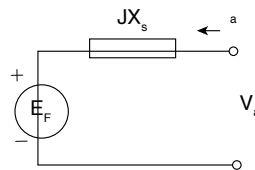
- Calcular la corriente de armadura ( $I_a$ ) y el factor de potencia con la tensión de excitación máxima.
- Calcular la tensión de excitación mínima  $E_{F_{mín}}$

#### Respuestas

En primera instancia, se constituyen los esquemas correspondientes al esquema simplificado del motor síncrono; posteriormente, el circuito equivalen por fase, y finalmente el diagrama fasorial.



Esquema simplificado del motor síncrono



Circuito equivalente por fase

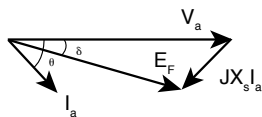
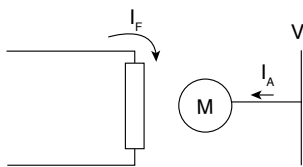
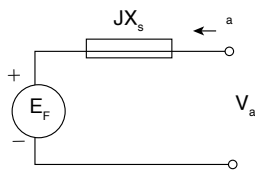


Diagrama fasorial



Esquema simplificado del motor síncrono



Circuito equivalente por fase

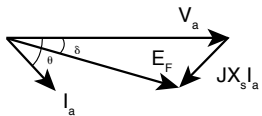


Diagrama fasorial

a. Para calcular la corriente de armadura  $I_a$  y el factor de potencia a  $E_{F_{máx}}$  se utilizan las siguientes expresiones.

$$V_a = E_F + jX_S I_a \quad I_a = \frac{V_a - E_F}{jX_S}$$

$$\rho_a = \frac{(V_a)(E_{F_{m\acute{a}x}}) \operatorname{sen}(\delta)}{X_S} = \rho_{salida} + \rho_{p\acute{e}rdidas} = \frac{(390)(746) + 9,000}{3} = 99,980$$

$$\delta = \operatorname{sen}^{-1} \left[ \frac{(p_a)(X_S)}{(V_a)(E_{F_{m\acute{a}x}})} \right] = \operatorname{sen}^{-1} \left[ \frac{(99,980)(10)}{\left(\frac{1732}{\sqrt{3}}\right)(2,500)} \right] = 23.57^\circ \Rightarrow \delta = 23.57^\circ$$

$$I_a = \frac{\frac{1732}{\sqrt{3}} - 2,500}{j^{10}} = 163.32 \Rightarrow I_a = 163.32[A]$$

El factor de potencia es:  $F.p. = \cos(52.26^\circ) = 0.61 \Rightarrow F.p. = 0.61$  en adelanto

b. Para calcular la tensión de excitación mínima se utiliza:

$$E_{F_{min}} = \frac{P_a X_S}{V_a} = \frac{(99,980)(10)}{\frac{1732}{\sqrt{3}}} = 999.83 \left[ \frac{\text{volts}}{\text{fase - neutro}} \right]$$

$$E_{F_{min}} = 999.83 \left[ \frac{\text{volts}}{\text{fase - neutro}} \right]$$

**Problema 11.2** Un motor síncrono de polos cilíndricos, trifásico con 1,250[HP] recibe una potencia constante de 800[KW] a 1,110[V];  $R_a = 0[\Omega]$  conectado en estrella (Y). La corriente nominal de plena carga es de 52[A].

Si la corriente de armadura  $I_a$  no debe exceder del 135% del valor de plena carga. Calcular el rango dentro del cual puede variarse la fuerza electromotriz (fem) de excitación mediante el ajuste de la corriente de campo.

**Respuesta:**

$$\rho_a = (3)(V_a)(I_a \cos(\theta)) \Rightarrow \theta =_{\pm} \cos^{-1} \left[ \frac{\rho_a}{(3)(V_a)(I_a)} \right]$$

$$E_F = V_a - jX_S I_a = V_a - jX_S I_a$$

Entonces; calculando el valor del ángulo ( $\theta$ ) se tiene que:

$$\theta =_{\pm} \cos^{-1} \left[ \frac{80,000}{(3) \left(\frac{11,000}{\sqrt{3}}\right) (1.35)(52)} \right] =_{\pm} \cos(0.5923) =_{\pm} 53.26^\circ$$

Con un factor de potencia en adelanto; se tiene entonces:  $\theta = 53.26^\circ$

$$E_F = \frac{11,000}{\sqrt{3}} - (j50)(1.35)(52) = 9401 \left[ \frac{\text{volts}}{\text{fase - neutro}} \right]$$

Con un factor de potencia en atraso; se tiene entonces:  $\theta = -53.26^\circ$

$$E_F = \frac{11000}{\sqrt{3}} - (j50)(1.35)(52) = 4114 \left[ \frac{\text{volts}}{\text{fase} - \text{neutro}} \right]$$

El rango de variación de la fem de excitación mediante el ajuste de la corriente de campo es:

$$E_F = \text{Rango}[\text{mín} - \text{máx}] = \text{Rango}[4, 114 - 9, 401] \left[ \frac{\text{volts}}{\text{fase} - \text{neutro}} \right]$$

**Problema 11.3** Todo en estrella, tiene una reactancia síncrona de  $3[\Omega]$ , y una resistencia de  $0.25[\Omega]$ . Si trabaja con un ángulo de potencia (*par*)  $\delta = 15^\circ$ , y la excitación (corriente de campo) está ajustada de forma tal que  $E_F$  sea igual al voltaje o tensión nominal aplicada al motor:

- Calcular la corriente de armadura,  $I_A$ .
- Calcular el factor de potencia.
- Calcular la potencia desarrollada.
- Calcular la caída de tensión interna.

### Respuestas:

Primero se determina  $E_F$  a través de:  $E_F = \frac{2300}{\sqrt{3}} = 1,194.56[V]$

Luego se calcula  $V_a$  mediante:  $V_a = \frac{2300}{\sqrt{3}} = 1327.91[V]$

- Para calcular la corriente de armadura  $I_a$ :

$$I_a = \frac{V_a - E_F}{r_a + jX_S} = \frac{1,694.56 - 1,327.91}{0.25 + j3} = \frac{346.65}{3.01} = 115.15[A]$$

$$I_a = 115.15[A]$$

- El factor de potencia se determina como:

$$F.p := \cos(-2.74^\circ) = 0.9989 \text{ en atraso} \Rightarrow F.p. = 0.9989 \text{ en atraso}$$

- La potencia desarrollada se calcula como:

$$\rho_{salida} = \rho_{entrada} - \rho_{pérdidas} = (3)(V_a)(I_a)\cos(\varphi) - (3)(r_a)|I_a|^2$$

$$\rho_{salida} = (3)(1327.91)(0.9989) - (3)(0.25)(115.15)^2 = 448,226[W] = 48[kW]$$

$$\rho_{salida} = 48[kW]$$

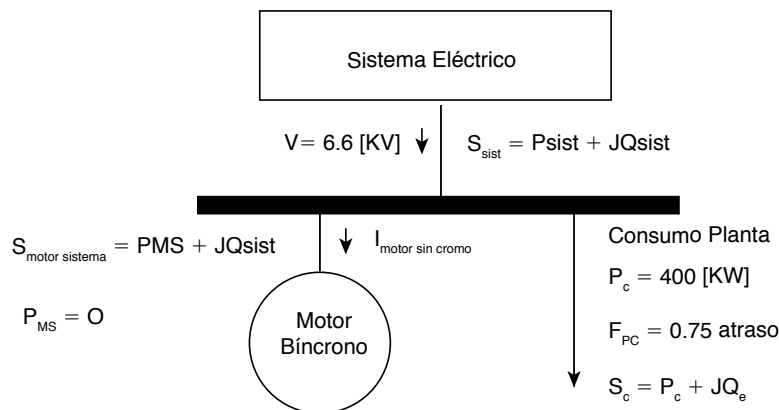
d. La caída de voltaje interna:

$$\Delta V = |V_a - E_F| = |1327.91 - 1674.56| = 346.65[V] \Rightarrow \Delta V = 346.65[V]$$

**Problema 11.4** Un motor síncrono de 6.6[KV], 45[A] se emplea como compensador síncrono para corregir el factor de potencia de una planta que consume 400[KW] con un factor de potencia de 0.75 en atraso. Calcular la potencia reactiva, la corriente de armadura y la fuerza electromotriz (fem) inducida ( $E_F$ ) por el campo del motor en valor absoluto y en porcentaje (%), si se desea que el factor de potencia del conjunto planta y compensador síncrono sea de:

- 0.95 en atraso
- 1.00
- 0.95 en adelanto

Supóngase que la reactancia síncrona del motor es de 0.85, despreciar las pérdidas, y considerar que el motor está en vacío.



### Respuestas:

Como la reactancia síncrona del motor síncrono está en por unidad, se supone que los valores bases correspondan a los valores nominales del motor síncrono; esto es:



corriente-base:  $I_B = 45[A]$ ; tensión-base:  $V_B = 6.6[kV]$  y la potencia-base:  $S_B = (\sqrt{3})(V_B)(I_B) = (\sqrt{3})(6.6)(45) = 514.42[KVA]$ ;  $S_B = 514.42[KVA]$

De acuerdo a los sentidos de los flujos de potencia, se debe cumplir en la barra del sistema, la Ley de Kirchhoff de potencia, esto es:

$$S_{sist} = S_C + S_{MS}$$

$$p_{sist} = p_C$$

$$Q_{sist} = Q_C + Q_{MS}$$

Donde:

$$Q_C = \frac{\text{Potencia real}}{Fp_C} \text{sen}[\cos^{-1}(F\rho_C)] = \frac{400}{0.75} \text{sen}[\cos^{-1}(0.75)] = 352.77[KVA_r]$$

La incógnita del problema es determinar la potencia reactiva que toma (absorbe) el motor  $Q_{MS}$  para los factores de potencia solicitados, esto es:

$$Q_{MS} = Q_{sist} - Q_C; \quad Q_{sist} = \frac{p_{sist}}{Fp_{sist}} \text{sen}[\cos^{-1}(Fp_{sist})]; \quad \text{como } p_{sist} = p_C$$

$$\rho_{sist} = \frac{p_C}{Fp_{sist}} \text{sen}[\cos^{-1}(Fp_{sist})]; \quad Q_{sist} = \frac{400}{Fp_{sist}} \text{sen}[\cos^{-1}(F\rho_{sist})][KVA_r]$$

$$S_{MS} = (\sqrt{3})(V_{MS})(I^{*MS}) = 0 + jQ_{MS}; \quad I_{MS} = \left[ \frac{S_{MS}}{(\sqrt{3})(V_{MS})} \right]^* = -j \frac{Q_{MS}}{(\sqrt{3})|V_{MS}|} [A]$$

$$I_{MS} \text{ en valor absoluto} = \frac{Q_{MS}}{(\sqrt{3})|V_{MS}|} [A]$$

$$I_{MS} \text{ en valores por unidad} = \frac{I_{MS}}{I_B} [A]; \quad E_F = V_{MS} - jX_S I_{MS}$$

a. Con un factor de potencia de 0.95 en atraso:

$$Q_{sist} = \frac{400}{0.95} \text{sen}[\cos^{-1}(0.95)] = 131.47[KVA_r]$$

$$Q_{MS} = Q_{sist} - Q_C = 131.47 - 352.77 = -221.30[KVA_r]$$

$$Q_{MS} = \frac{Q_{MS}}{S_B} = \frac{-221.30}{514.42} = -0.4302 \text{ en valores por unidad.}$$

$$I_{MS} = -j \frac{-221.30 [KVA_r]}{(\sqrt{3})(6.6) [KV]} = j19.36 [A]$$

$$I_{MS} \text{ en valores por unidad: } I_{MS} = \frac{j19.36}{45} = j0.4302$$

$$V_{MS} = \frac{V_{MS}}{V_B} = \frac{6.6}{6.6} = 1 \text{ en por unidad}$$

$$E_F = 1 - j 0.85(j 0.4302) = 1 + (0.85)(0.4302) = 1.3657$$

$$E_F = (E_F)(V_B) = (1.3657)(6.6) = (\sqrt{3})(5.2040) [KV]$$

b. Con un factor de potencia de 1.0:

$$Q_{sist} = \frac{400}{1} \text{sen}[\cos^{-1}(1)] = 0 [KVA_r]$$

$$Q_{MS} = Q_{sist} - Q_C = -352.77 [KVA_r]$$

$$Q_{MS} = \frac{Q_{MS}}{S_B} = \frac{-352.77}{514.42} = -0.6858 \text{ en por unidad}$$

$$I_{MS} \text{ en por unidad} = \frac{j19.36}{45} = j 0.6858 \text{ en por unidad}$$

$$E_F = 1 - j 0.85(j 0.6858) = 1 + (0.85)(0.6858) = 1.5829 \text{ en por unidad}$$

$$E_F = (E_F)(V_B) = (1.5829)(6.6) = \sqrt{3}(6.0320) [KV]$$

c. Con un factor de potencia de 0.95 en adelanto:

$$Q_{sist} = -\frac{400}{0.95} \text{sen}[\cos^{-1}(0.95)] = -131.47 [KVA_r]$$

$$Q_{MS} = Q_{sist} - Q_C = -131.47 - 352.77 = -484.24 [KVA_r]$$

$$Q_{MS} = \frac{Q_{MS}}{S_B} = \frac{484.24}{514.42} = 0.9413 \text{ en por unidad}$$

$$I_{MS} = -j \frac{-483.24 [KV A_r]}{(\sqrt{3})(6.6) ([KV])} = j42.36 [A]$$

$$I_{MS} \text{ por unidad} = \frac{j19.36}{45} = j0.9413 \text{ en por unidad}$$

$$E_F = 1 - j0.85(j0.9413) = 1 + (0.85)(0.9413) = 1.8 \text{ en por unidad}$$

$$E_F = (E_F)(V_B) = (1.8)(6.6) = (\sqrt{3})(6.8590) [KV]$$

**Problema 11.5** Un motor síncrono de 480[V]; 400[HP]; factor de potencia de 0.8 en adelanto; 60[Hz], 8 polos, conectado en delta ( $\Delta$ );  $X_S = 1[\Omega]$ . Ignórese el rozamiento; así como las pérdidas en el núcleo.

- Calcular, si el motor está suministrado inicialmente 400[HP] a un factor de potencia de 0.8 en atraso, ¿cuáles son las magnitudes y los ángulos del voltaje de campo y la corriente de armadura?
- El torque inducido se debe calcular; igualmente, hágase una relación con el toque máximo en porcentaje.
- Calcular si el voltaje de campo ( $E_F$ ) aumente en un 5% la magnitud de la nueva corriente de armadura, luego indíquese el nuevo factor de potencia.

### Respuestas:

- La corriente de armadura  $I_a$ ; voltaje de campo  $E_a$ :

$$P_{entrada} = P_{salida} = (400)(746) = 298,400 [W]$$

$$P_{entrada} = (\sqrt{3}) |V_a| |I_L| \cos(\theta) \Rightarrow I_L = \frac{P_{entrada}}{\sqrt{3} |V_a| \cos(\theta)}$$

$$|I_L| = \frac{298,499}{(\sqrt{3})(480)(0.8)} = 448.65 [A]; |I_a| = \frac{|I_L|}{\sqrt{3}} = 259.03 [A]$$

$$I_a = 259.03 [A]$$

$$\theta = -36.87^\circ$$

$$E_a = V_a - jX_S I_a \Rightarrow E_a = 480 - j(1)(259.03) = 385.1[V]$$

$$E_a = 385.1[V]$$

b. El torque inducido, y el torque máximo:

$$\omega_S = \frac{2\pi f_e}{\text{polos}} = \frac{(2\pi)(60)}{4} = 95.25 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \right]$$

$$\tau_{ind} = \frac{p_{entrada}}{\omega_S} = \frac{298,400}{95.25} = 3,166.12[N - m] \Rightarrow \tau_{ind} = 3166.12[N - m]$$

$$\tau_{max} = \frac{(3)(V_a)(E_a)}{\omega_S X_S} = \frac{(3)(480)(385.1)}{(95.25)(1)} = 5,883.76[N - m]$$

$$\tau_{max} = 5,883.76[N - m]$$

Finalmente; la relación (%) =  $\frac{\tau_{ind}}{\tau_{max}}(100\%) = \frac{3166.12}{5883.76}(100\%) = 53.81\%$

Relacion (%) =  $\frac{\tau_{ind}}{\tau_{max}} = 53.81\%$

## 11.5 Resumen

Un motor síncrono es idéntico a un generador síncrono; la única excepción es que la dirección del flujo de potencia real es inversa. Por otro lado, los motores síncronos se conectan a sistemas eléctricos de potencia y la frecuencia y el voltaje (diferencia potencial) en las terminales de un motor síncrono son fijos. Es decir, el sistema eléctrico de potencia, es sumamente parecido a un bus infinito para el motor.

Finalmente, un motor síncrono no tiene un par de arranque establecido; por lo tanto, no puede arrancar por sí mismo. Existen tres maneras para hacer arrancar al motor síncrono, y éstas son:

1. Reducir la frecuencia del estator a un nivel del arranque seguro.
2. Utilizar en la práctica, un motor primario externo.
3. Colocar devanados de amortiguamiento en el motor síncrono, para lograr acelerarlo hasta cerca de la velocidad síncrona, previo a aplicar una corriente continua en los devanados de campo.

Por otro lado, estos motores son llamados síncronos, debido a que la velocidad del campo magnético del estator y la velocidad del rotor, son exactamente iguales. Los motores síncronos son utilizados en máquinas de gran tamaño que tienen una carga variable y que necesitan de una velocidad constante, también existen motores síncronos monofásicos de tamaño pequeño utilizados en control y relojes eléctricos (Widi, 2007; Gurú, 2003).

Los motores síncronos son motores trifásicos de corriente alterna que funcionan a la velocidad del sincronismo sin deslizamiento. Estos motores tienen las siguientes características (Wildi, 2007; Michael y Clyde, 1972):

- Tienen un estator trifásico similar al de un motor de inducción. Son usados por lo general en instalaciones de mediana tensión.
- Tienen un rotor bobinado (campo rotatorio) que tiene el mismo número de polos que el estator, el cual es excitado por medio de una fuente externa de corriente continua. El rotor puede ser de polos lisos o polos salientes.
- Arranca con un motor de inducción. El motor síncrono tiene también un devanado tipo “Jaula de Ardilla” conocido como devanado amortiguador que sirve para producir la fuerza de torsión para el arranque del motor.

## 11.6 Problemas

**11.1** Un motor síncrono trifásico de rotor cilíndrico conectado en estrella a 2300[V] 60[Hz],  $X_S = 11[\Omega]$ , potencia de salida de 100[HP], tiene un rendimiento del 85 %, su ángulo-par es de  $7^\circ$ , considérese la resistencia de la armadura como despreciable.

- a. Calcular  $E_F$ .
- b. Calcular  $I_a$ .
- c. Calcular el factor de potencia.

**11.2** Un motor síncrono trifásico conectado en estrella (Y) a 440[V], tiene una reactancia síncrona de  $6.06[\Omega]$ , una resistencia de armadura despreciable, una tensión de excitación de  $200[\frac{\text{volts}}{\text{fase-neutro}}]$ , y un ángulo-par de  $36.4^\circ$ .

- a. Calcular la corriente de armadura y el factor de potencia.
- b. Calcular la tensión de excitación, si el factor de potencia es 1.0.

**11.3** Un motor síncrono trifásico en conexión estrella de 380[V] entre fases; 1,500[rpm]; 50[Hz]; 100[KW] con un factor de potencia unitario ( $f.p.=1$ ) y voltaje nominal;  $R_a$  despreciable y  $X_S = 0.5[\Omega]$ . El motor síncrono desarrolla 100[KW] en el eje, factor de potencia 0.8 inductiva y voltaje nominal. Se ajusta la corriente de campo para un factor de potencia de 0.8 capacitivo.

- Calcular la corriente de campo y explicar si dicha corriente aumenta o disminuye.
- Determinar cuál será la nueva corriente de armadura.
- Calcular qué magnitud tiene el voltaje inducido antes del ajuste.
- Calcular qué magnitud tendrá el voltaje indicado después del ajuste.
- Determinar cuál es el torque desarrollado por el motor síncrono.

**11.4** Un motor síncrono de 208[V]; 60[HZ]; 45[KVA] a un factor de 0.80 en adelanto, conectado en triángulo;  $X_S = 2.5[\Omega]$ . Las pérdidas por fricción y ventilación son de 1.5[KW] y las pérdidas en el núcleo son de 1[KW]. Inicialmente el eje está alimentando una carga de 15[HP] a un factor de potencia 0.80 en adelanto.

- Bosqueje el diagrama fasorial de este motor síncrono, y calcule los valores de  $I_a$ ,  $I_L$ ,  $E_a$  y  $\delta$ .
- Supóngase que ahora se incrementa la carga en el eje a 30[HP]; repetir los cálculos del inciso (a).
- Calcular el nuevo factor de potencia.

**11.5** Con respecto al problema anterior (11.6.4), si la corriente de excitatriz del motor síncrono disminuye en un 25%. Calcular la corriente de armadura y el factor de potencia.

$$I_a = 24.08[A]; f.p. = 0.91 \text{ en atraso}$$

**11.6** Un motor síncrono trifásico de 10[HP]; 230[V]; 60[Hz]; conectado en estrella (Y), suministra plena carga con un factor de potencia de 0.707 en adelanto. La reactancia síncrona del motor es de  $j5[\Omega/\text{fase}]$ . La pérdida de rotación es de 230[W], y la pérdida del devanado del campo es de 70[W]. Calcular el voltaje generado y la eficiencia del motor. Desprecie la resistencia del devanado de la armadura.

**11.7** Un motor síncrono trifásico de polos salientes de 480[V], conectado en estrella (Y), trabaja a plena carga, utilizando una toma de corriente de 50[A], con un factor de potencia unitario. Las reactancias en los ejes “d” y “q” son  $3.5[\Omega/\text{fase}]$  y  $2.5[\Omega/\text{fase}]$  respectivamente. La resistencia del devanado de la armadura es de  $0.5[\Omega/\text{fase}]$ .

- Calcular el voltaje de excitación del motor síncrono.
- Calcular la potencia desarrollada por el motor síncrono.

**11.8** Un motor síncrono trifásico de 440[V] conectado en delta ( $\Delta$ ); tiene una reactancia síncrona de  $36[\Omega/fase]$ . Su resistencia del devanado de la armadura es despreciable. Cuando el motor gira a una velocidad de  $188.5[\frac{rad}{seg}]$  consume 9[KW], y el voltaje de excitación es de 560[V].

- a. Calcular el factor de potencia.
- b. Calcular el ángulo de potencia.
- c. Calcular el voltaje de excitación de línea a línea para una secuencia de fase positiva.
- d. El par desarrollado por el motor.

**11.9** Un motor síncrono de polos salientes y trifásico de 208[V]; 60[HZ] y que está conectado en Y, está operando a plena carga y utiliza una corriente de 40[A] con un factor de potencia de 0.8 en atraso. Las reactancias en los ejes “d” y “q” son de  $2.7[\Omega/fase]$  y de  $1.7[\Omega/fase]$  respectivamente.

La resistencia del devanado de la armadura puede despreciarse y la pérdida por rotación es de 5% de la potencia desarrollada por el motor.

- a. Calcular el voltaje de excitación.
- b. Calcular la potencia desarrollada debido a la excitación del campo.
- c. Calcular la potencia desarrollada debido a la estructura de polos salientes del motor.
- d. Calcular la potencia total desarrollada.
- e. Calcular la eficiencia del motor.
- f. Calcular la potencia máxima desarrollada por el motor.

**11.10** Se tiene un motor síncrono, trifásico de 120[V]; 60[Hz], que está conectado en estrella (Y), tiene un rotor cilíndrico y una resistencia del devanado de la armadura de  $0.5 + j3[\Omega/fase]$ . El motor toma corriente de 10[A] con un factor de potencia de 0.8 en adelanto cuando opera con cierta corriente de campo. La carga se incrementa gradualmente hasta que el motor desarrolla el par máximo, en tanto, que la corriente del campo se mantiene constante. Determinar la nueva corriente de línea, el factor de potencia y la potencia desarrollada por el motor por fase.

# **Cuarta parte**

**Capítulo 12 Máquinas de corriente directa**

**Capítulo 13 Accionamientos eléctricos  
de velocidad variable**

**Capítulo 14 Control vectorial de los motores  
de inducción**

**Capítulo 15 Control directo del par**

**En la página web del libro:**

**Capítulo 16 Máquinas eléctricas especiales**



## Capítulo 12

### Máquinas de corriente continua

12.1 Introducción

12.2 Partes principales de las máquinas de c.c.

12.3 Clasificación de las máquinas de c.c.

12.4 Motor serie

12.5 Motor paralelo

12.6 Motor compuesto

12.7 Generador serie

12.8 Generador paralelo

12.9 Generador compuesto

12.10 Problemas resueltos

12.11 Resumen

12.12 Problemas propuestos

## 12.1 Introducción

Las máquinas de corriente continua (c.c.), especialmente las de excitación separada, se caracterizan por estar desacopladas; es decir, que se tiene un control independiente del flujo principal y del par electromagnético. Otra característica importante de estas máquinas es que se puede encontrar una de acuerdo con la aplicación que se requiera ya que existen diferentes tipos de conexiones y entre las principales se encuentra la conexión serie, paralelo, compuesto, excitación independiente con imanes permanentes, etc. Debido a la facilidad de control de estas máquinas, se emplean en donde se requieren aplicaciones de velocidad variable, tomando en cuenta los problemas que tienen en su operación: una menor eficiencia con respecto a las máquinas de corriente alterna (c.a.) debido a las escobillas que conectan la parte fija y la móvil de la máquina. Aun con este problema, existen aplicaciones en donde las máquinas de c.c. no han podido ser sustituidas por máquinas de c.a.

Una máquina de c.c. puede funcionar, ya sea como motor o como generador. El motor convierte la potencia eléctrica en potencia mecánica, en tanto que el generador transforma la potencia mecánica en potencia eléctrica; y por lo tanto, el generador debe ser impulsado mecánicamente a fin de generar electricidad. Como se verá más adelante, estas máquinas pueden operar como generador o como motor, ya que el circuito equivalente de éstas, varía únicamente en la dirección de las corrientes en cada modelo.

### Guerra de las corrientes

Edison George Westinghouse Jr. (1846-1914) fue un inventor estadounidense, y el principal responsable de la adopción de la corriente alterna para el suministro de energía eléctrica en Estados Unidos. Para esto, tuvo que vencer la enconada oposición del popular inventor Thomas Edison, partidario de la corriente continua, quien llegó a financiar la invención de la silla eléctrica como parte de este desacuerdo.



## 12.2 Partes principales de las máquinas de c.c.

Las partes principales de una máquina de corriente continua son: el estator que es la parte fija, y el rotor que es la parte móvil. Para algunas máquinas de c.c. también son indispensables los carbones o las escobillas, que conectan la parte fija y la móvil, el colector de delgas que actúa como un rectificador mecánico, y los polos auxiliares que ayudan a reducir el efecto de la reacción de inducido. En estas máquinas, también es necesario comentar que el devanado de campo es colocado en el estator y al devanado que va colocado en el rotor se le conoce como devanado de armadura.

### Estator y rotor

La estructura de una máquina eléctrica tiene dos componentes principales: el estator y el rotor, los cuales están separados por un entrehierro.

El estator es la carcasa de la máquina y es una parte no móvil de ésta. Por otro lado, el rotor está libre para moverse, y por lo general, es la parte interna de la máquina.

Tanto el estator como el rotor están hechos con materiales ferromagnéticos, y la mayor parte de los estatores tienen ranuras externas e internas en las cuales se colocan conductores.

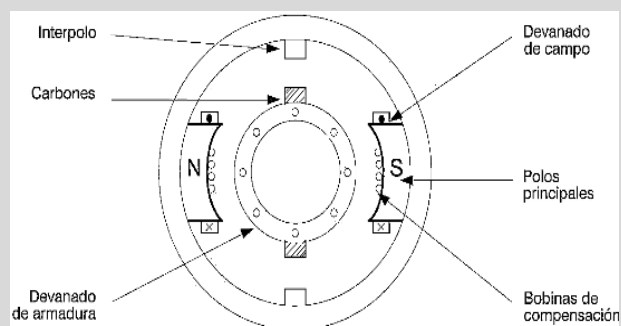


Figura 12.1 Partes de una máquina de c.c.

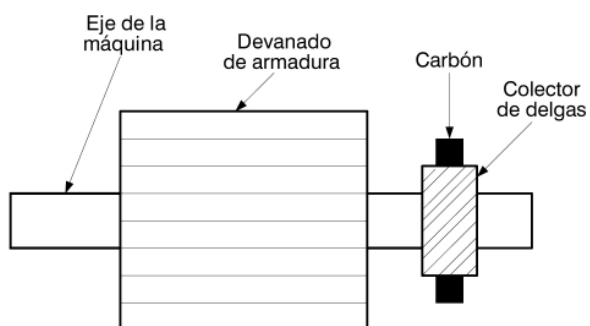


Figura 12.2 Devanado de armadura de una máquina de c.c.

### 12.3 Clasificación de las máquinas de c.c.

Puesto que el devanado de campo es un electroimán, una intensidad de corriente debe fluir a través de él para producir un campo magnético; esta corriente se conoce como corriente de excitación y se puede suministrar al devanado del campo en dos formas: puede provenir de una fuente externa independiente de c.c., en cuyo caso, el motor o generador se clasifica como de excitación independiente, o bien puede provenir de la propia conexión de la armadura del motor o generador, en cuyo caso se denomina autoexcitado.

Cuando un devanado de campo se excita por medio de una corriente continua, se establece un flujo magnético fijo en la máquina, y si se aplica un esfuerzo mecánico al eje del rotor (o más correctamente, a la armadura) haciendo que gire, las bobinas de la armadura cortarían el flujo magnético induciéndose en ellas una tensión de c.a., convirtiéndola en c.c. mediante el colector de delgas y las escobillas, y en este caso, la máquina se encuentra operando como generador de c.c. Si el devanado de la armadura es excitado mediante una fuente de c.c., y al mismo tiempo el devanado de campo es excitado por la misma fuente de c.c. o una fuente externa, ambos flujos interactúan haciendo que la armadura de la máquina gire en cierta dirección; en este caso, esta máquina está operando como motor.

### 12.4 Motor serie

Se designa así al motor de corriente continua cuya bobina de campo (inductor) está conectada en serie con la bobina de la armadura (inducido). Al igual que en los generadores serie, las bobinas de campo son construidas de pocas espiras y con un conductor de gran sección.

Este motor se caracteriza por su par de arranque elevado, ya que el par de esta máquina es directamente proporcional a la corriente de armadura al cuadrado. El problema que tiene esta máquina es que si se deja en vacío en condiciones nominales, presenta el peligro de embalsarse debido al reducido valor del flujo de campo que depende de la corriente de campo. Recordando que la corriente de campo es igual que la corriente de armadura, por estar conectados en serie y como la máquina se encuentra en vacío, la corriente de armadura es prácticamente cero. En consecuencia, la velocidad del motor depende totalmente de la corriente de campo, por lo tanto, la velocidad es baja cuando la carga es pesada y alta con cargas ligeras. El circuito equivalente de este motor se encuentra representado en la figura 2.3, en donde se puede ver que las ecuaciones de la máquina son:

$$V_t = E_a + (R_a + R_s)I_a$$

$$I_a = I_s = I_L$$

en donde:  $V_t$  es el voltaje en las terminales,  $E_a$  es el voltaje de armadura,  $R_a$  y  $R_s$  son las resistencias de armadura y de serie, respectivamente; e  $I_a$  e  $I_s$  son las corrientes de armadura y de serie.

El voltaje en las terminales de la armadura también se puede calcular a partir de:

$$E_a + k\phi\omega$$

en donde:  $K$  es una constante que depende de la construcción de la máquina,  $\phi$  es el flujo del devanado de campo serie dado en [webers] y  $\omega$  es la velocidad angular de la máquina en [rad/seg]. El par que entrega la máquina entre sus terminales está dado por:

$$\tau = k\phi I_a$$

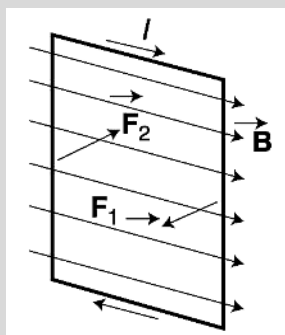
en donde:  $\tau$  es el par que proporciona la máquina en  $[N - m]$  y la  $I_a$  es la corriente de la armadura.

### Momento magnético de una espira

Como se muestra en la figura 12.3, al situar en un campo magnético uniforme  $\vec{B}$  una espira por la que circula una corriente  $I$ , de acuerdo con la expresión de la fuerza de Lorentz sobre la espira actúan las fuerzas  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$ , de igual magnitud y de dirección; pero de sentido contrario, que originan un par que hace girar a la espira.

Si se representa el área de la espira con un vector  $A$ , normal al plano que contiene a la espira y con el mismo sentido que  $\vec{F}_2$ , entonces el momento  $N$  del par se expresa como:

$$N = IA \times B$$



**Figura 12.3** Representación de la Fuerza de Lorentz sobre una espira.

### Potencia eléctrica y mecánica

La potencia eléctrica, se define como la cantidad de trabajo realizado por una corriente eléctrica. En el caso de la corriente continua, la potencia eléctrica desarrollada por un dispositivo de dos terminales, es el producto de la diferencia de potencial entre las terminales, por la intensidad de la corriente que pasa a través del dispositivo:

$$P = I \cdot V$$

donde:  $I$  es la corriente, y  $V$  es el voltaje.

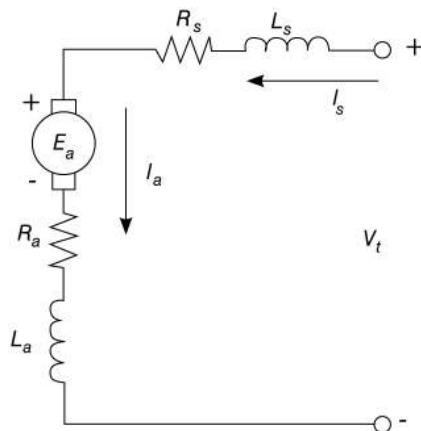
Cuando el dispositivo es una resistencia  $R$ , la potencia es:

$$P = I^2 \cdot R = \frac{V^2}{R}$$

Por otro lado, la potencia mecánica se define como el trabajo realizado por una fuerza durante la unidad de tiempo.



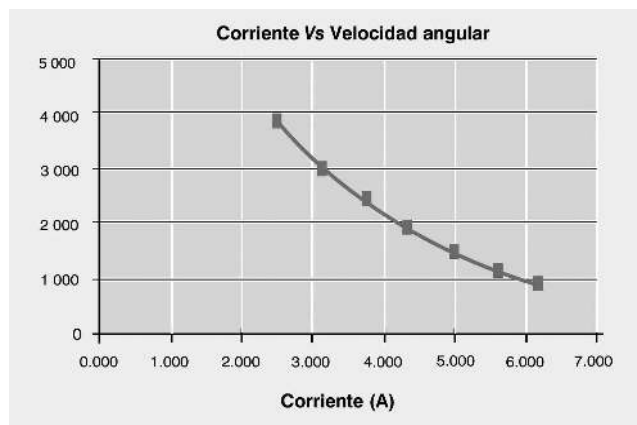
En la figura 12.4 se pueden ver las bobinas  $L_a$  y  $L_s$  de forma ficticia, ya que como se sabe, una bobina alimentada con una fuente de corriente directa se comporta como un cortocircuito en estado permanente creando un campo magnético fijo.



**Figura 12.4** Circuito equivalente del motor serie.

En la figura 12.5 se puede observar una prueba que se desarrolla en un motor de c.c. excitación serie;

desde la carga nominal se le va quitando la carga de forma gradual, hasta llegar aproximadamente a un cuarto de la misma. En este caso, es evidente la elevación de la velocidad, ya que la velocidad nominal de la máquina bajo prueba es de 3500 rpm.



**Figura 12.5** Curva característica de velocidad contra corriente de armadura.

### Velocidad angular

La velocidad angular se define como:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

donde:  $\theta$  es el ángulo de rotación, y sus unidades son [radianes por segundo].

En el caso de un movimiento periódico, la relación que hay entre la velocidad angular, el periodo y la frecuencia es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

donde:  $T$  es el periodo, y  $f$  es la frecuencia.



## 12.5 Motor paralelo

El motor de c.c. en paralelo, es diferente del motor de serie, ya que el devanado inductor está conectado en paralelo con la armadura. Puesto que el devanado inductor se conecta en paralelo al devanado del

inducido, a este tipo de máquinas se le conoce como motor con excitación en paralelo, o simplemente motor paralelo.

Un motor en paralelo o en derivación, tiene características diferentes en construcción al motor en serie, ya que la bobina de campo en derivación, está devanada con alambre de calibre delgado y muchas vueltas para generar un campo lo suficientemente fuerte para mantener la velocidad de esta máquina prácticamente constante. Esto significa que el motor tiene un par de arranque menor que el motor en serie, pero es más estable con respecto a su velocidad de operación.

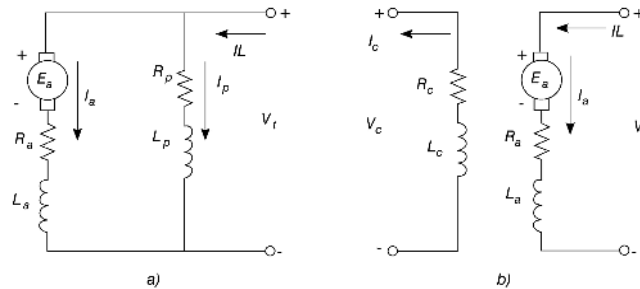
Las ecuaciones que rigen a este tipo de máquina se pueden obtener a partir del circuito equivalente mostrado en la figura 12.6.

$$v_t = E_a + I_a R_a$$

$$V_p = V_t$$

En donde:  $V_t$ , es el voltaje en las terminales de la máquina,  $E_a$  es el voltaje en las terminales de la armadura,  $I_a$  es la corriente en la armadura,  $R_a$  es la resistencia de armadura y  $V_p$  es el voltaje de en paralelo o voltaje de campo paralelo.

Las ecuaciones anteriores se aplican de la misma forma a este tipo de máquina.



**Figura 12.6** Circuito equivalente del motor paralelo a) autoexcitado, b) excitación separada.

En la figura 12.7 se muestra la curva de par contra velocidad, en donde se puede observar que la velocidad de este tipo de máquina es prácticamente constante en comparación con el motor en serie.



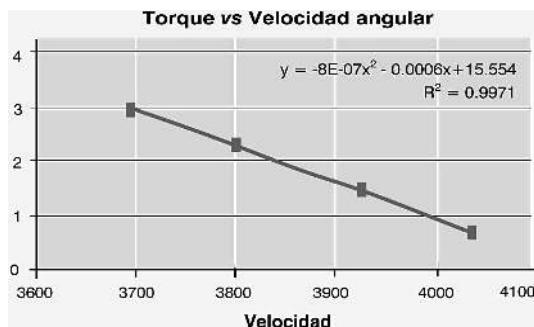


Figura 12.7 Curva característica par contra velocidad del motor paralelo.

### Aproximación de una curva a través de polinomios

Para aproximar una función (curva)  $f(x)$ , infinitamente derivable (muy suave) y definida en un intervalo abierto  $a - \delta$ ,  $a + \delta$ , a través de polinomios se utiliza la Serie de Taylor de la función que se define como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

en donde  $f^{(n)}(a)$  es la  $n$ -ésima derivada de  $f(x)$  evaluada en  $a$ .

En la siguiente figura, se muestra la aproximación de  $f(x) = \text{sen}(x)$  utilizando polinomios de grados 1, 3, 5, 7, 9, 11 y 13 (Ver la Fig. 12.8).

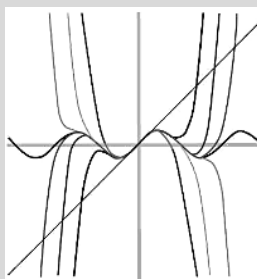


Figura 12.8 Aproximación de  $f(x)=\text{sen}(x)$  utilizando polinomios de grados 1, 3, 5, 7, 9, 11 y 13.

## 12.6 Motor compuesto

Un motor compuesto, combina las características de los motores serie y paralelo, ya que esta máquina tiene un devanado de campo serie y un devanado de campo paralelo. Dependiendo de la conexión de estos devanados, estas máquinas pueden clasificarse como: motor compuesto largo o motor compuesto corto, y éstas a su vez, pueden ser aditivas o sustractivas.

Cuando el devanado de campo serie se conecta en serie con la armadura, se conoce como motor compuesto largo, cuando el devanado de campo serie se conecta en serie con la línea se le conoce como motor compuesto corto. Dependiendo de las marcas de la polaridad de las bobinas de excitación serie y paralelo, se clasifican como aditivas y sustractivas. Si la dirección de las corrientes en las bobinas serie y paralelo entran o salen por las marcas de polaridad a esta máquina, se le conoce como motor compuesto (largo o corto) aditivo, si la corriente en uno de los devanados entra por el signo de polaridad y en el otro devanado el sentido de la corriente sale por el signo de polaridad al motor, se le conoce como motor compuesto (largo o corto) sustractivo.

En la figura 12.9 se muestra el circuito equivalente del motor compuesto largo y corto. En esta máquina se debe de tener cuidado con la conexión respetando las marcas de polaridad, ya que si se conecta con la polaridad de los (\*) los flujos internos de la máquina se suman (aditivo), y si se conectan con la polaridad de los (.), los flujo internos se restan (sustractivo).

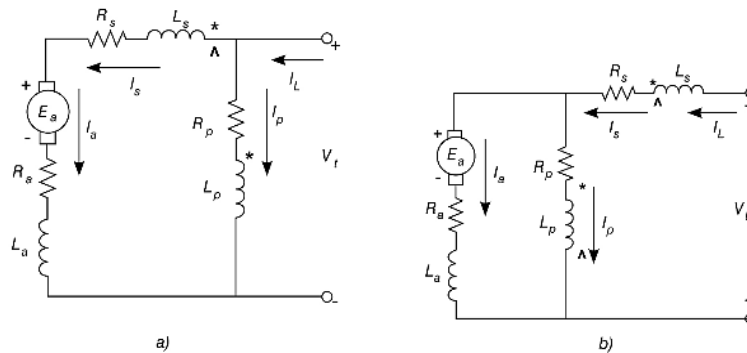


Figura 12.9 Curva característica par contra velocidad del motor paralelo.

### Nodos y mallas en un circuito eléctrico

Los nodos de un circuito eléctrico, son los puntos en donde se conectan dos o más elementos. Por otro lado, una trayectoria cerrada o lazo de un circuito eléctrico es el recorrido que se hace partiendo de un nodo y regresando al mismo sin pasar por un nodo intermedio más de una vez. Una malla es un caso especial de lazo. Una malla es un lazo que no contiene otros lazos.



A partir del circuito equivalente de la figura 12.9(a) se pueden obtener las ecuaciones del motor compuesto:

$$V_t = E_a + (R_a + R_s)I_a$$

$$V_t = V_p$$

$$I_L = I_a + I_p$$

$$I_a = I_s$$

$$I_p = \frac{V_p}{R_p}$$

y a partir de la figura 12.9 (b) se pueden obtener las ecuaciones:

$$V_t = E_a + R_a I_a + R_s I_s$$

$$V_p = E_a + R_a I_a$$

$$I_L = I_s = I_a + I_p$$

$$I_p = \frac{V_p}{R_p}$$

en donde:  $V_t$  es el voltaje en las terminales de la máquina,  $E_a$  es el voltaje en las terminales de la armadura,  $R_a$ ,  $R_s$ ,  $R_p$  respectivamente son las resistencias de armadura, serie y paralelo,  $V_p$  es el voltaje de campo paralelo,  $I_a$  es la corriente de armadura e  $I_p$  es la corriente de campo paralelo

En la figura 12.10, se muestra el comportamiento del motor compuesto de la velocidad con respecto a la potencia consumida; se puede afirmar que este comportamiento es muy parecido al comportamiento del motor de c.c., excitación en paralelo.

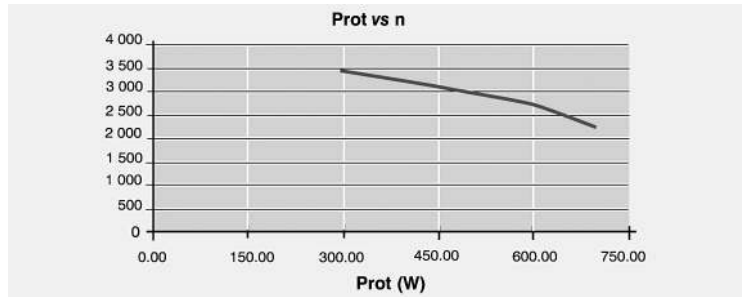


Figura 12.10 Curva característica de velocidad contra potencia consumida por la máquina.

## 12.7 Generador serie

Un generador de c.c. serie, es muy parecido al motor serie en cuanto a sus componentes y a su estructura; en el devanado de campo serie circula una corriente que es igual a la corriente de armadura, por lo que el flujo que produce el devanado de campo serie está en función de la corriente en la armadura, que a su vez depende de la carga conectada en las terminales de la máquina. En la figura 12.11, se muestra el circuito equivalente del generador serie.

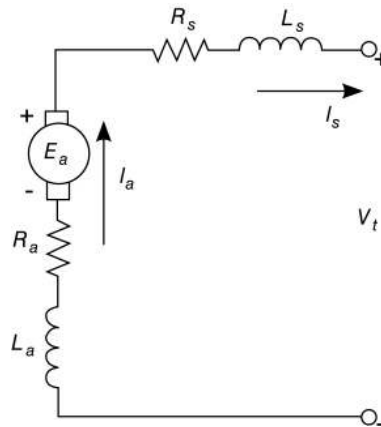


Figura 12.11 Circuito equivalente del generador serie.

Las ecuaciones del generador serie son:

$$V_t = E_a - (R_a + R_s)I_a$$

$$I_a = I_s$$

en donde:  $V_t$  es el voltaje en las terminales,  $E_a$  es el voltaje de armadura,  $R_a$  y  $R_s$  son las resistencias de armadura y serie e  $I_a$  e  $I_s$  son las corrientes de armadura y serie.

En la figura 12.12, se muestra la curva del voltaje generado de esta máquina, en función de la carga conectada en sus terminales. Se puede ver que el voltaje generado no inicia exactamente en cero, debido al flujo remanente que presenta, y una vez que la máquina alcanzó su condición nominal, la máquina se satura y el voltaje generado nuevamente empieza a disminuir.

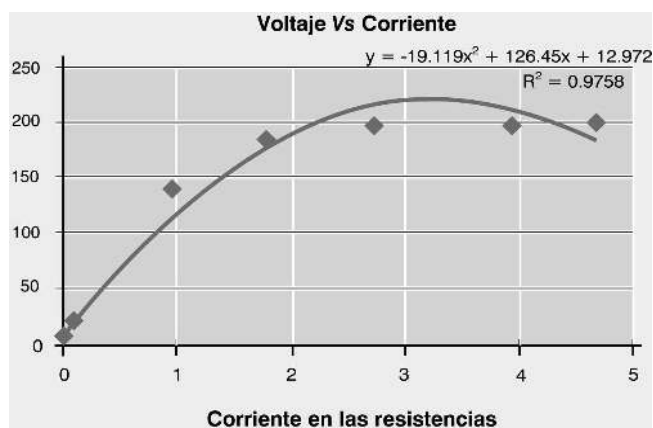
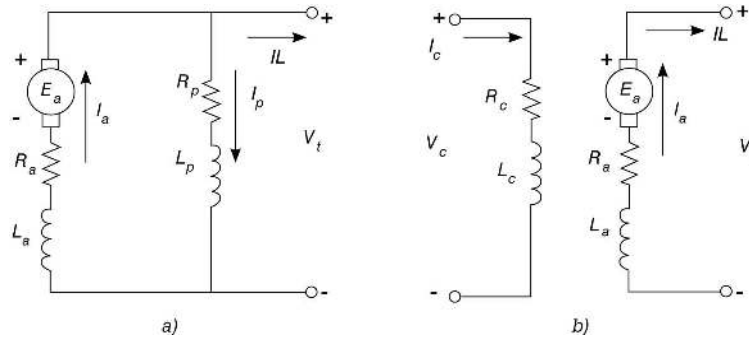


Figura 12.12 Curva característica de voltaje generado contra corriente de la carga.

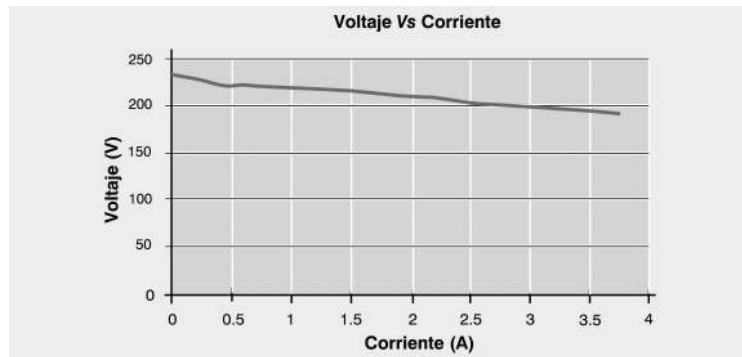
## 12.8 Generador paralelo

Un generador de c.c. paralelo o en derivación, es aquel que suministra su propia corriente de campo conectando su campo directamente a las terminales de la máquina. En el circuito equivalente mostrado en la figura 12.13 la corriente de armadura de la máquina alimenta tanto al circuito de campo como a la carga conectada a la máquina. El generador paralelo es similar al motor paralelo.

Este tipo de generador tiene una clara ventaja sobre el generador de c.c. de excitación separada, porque no requiere de una fuente externa alguna, para alimentar el circuito de campo. El voltaje inicial en las terminales del generador, depende de la presencia de un flujo residual en los polos del generador.



**Figura 12.13** Circuito equivalente del generador paralelo: a) autoexcitado, b) excitación separada.



**Figura 12.14** Curva característica de velocidad contra potencia consumida por la máquina.

Las ecuaciones del generador paralelo se pueden obtener del circuito equivalente mostrado en la figura 12.13:

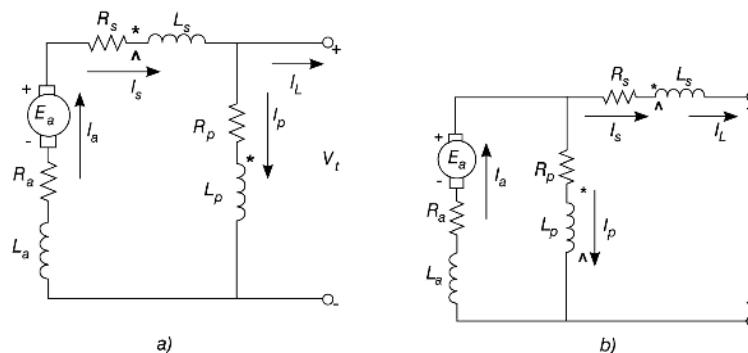
$$V_T = E_a - I_a R_a$$

$$V_p = V_t$$

en donde:  $V_t$  es el voltaje en las terminales de la máquina,  $E_a$  es el voltaje en las terminales de la armadura,  $I_a$  es la corriente en la armadura,  $R_a$  es la resistencia de armadura y  $V_p$  es el voltaje de en paralelo o voltaje de campo paralelo

## 12.9 Generador compuesto

El generador compuesto, tiene las mismas características que un motor de c.c. compuesto. Tiene una bobina de campo en paralelo con la armadura del generador y una bobina en serie con la armadura. Dependiendo de la forma de conexión que se comentó, al motor compuesto se le da el nombre de generador compuesto largo o generador compuesto corto, y éstos a su vez pueden ser aditivos o sustractivos. El circuito equivalente del generador compuesto se muestra en la figura 12.15.



**Figura 12.15** Circuito equivalente del generador compuesto: a) largo, b) corto.

A partir del circuito equivalente de la figura 12.15 (a), se pueden obtener las ecuaciones del generador compuesto:

$$V_t = E_a - (R_a + R_s)I_a$$

$$V_t = V_p$$

$$I_a = I_s$$

$$I_L = I_a - I_p$$

$$I_p = \frac{V_p}{R_p}$$

y a partir de la figura 2.15 (b), se pueden obtener las ecuaciones:

$$V_t = E_a - R_a I_a - R_s I_s$$

$$V_p = E_a - R_a I_a$$

$$I_L = I_s = I_a - I_p$$

$I_a(A)$	0	1	3	4	5	6	7	8
$E_a(V)$	5.7	53	122	174	195	212	225	232

Cuadro 12.1 Tabla 1.

$$I_p = \frac{V_p}{R_p}$$

en donde:  $V_t$  es el voltaje en las terminales de la máquina,  $E_a$  es el voltaje en las terminales de la armadura,  $R_a$ ,  $R_s$ ,  $R_p$ , son las resistencias de armadura, serie y paralelo,  $V_p$  es el voltaje de campo paralelo,  $I_a$  es la corriente de armadura e  $I_p$  es la corriente de campo paralelo.

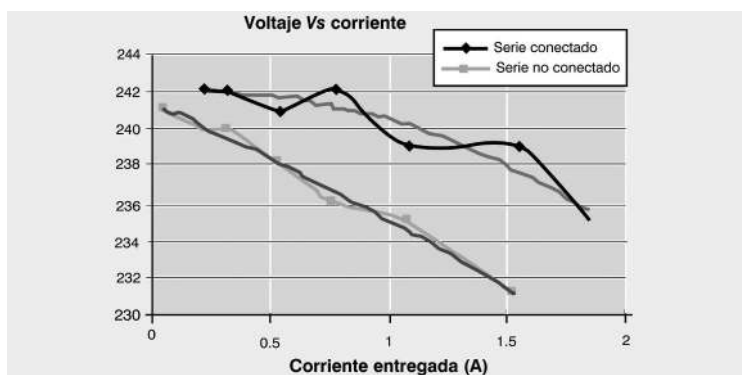


Figura 12.16 Curva característica de voltaje generado contra corriente entregada por la máquina.

Para la determinación de los parámetros y de las curvas de operación de un motor y generador de c.c., véanse los archivos de la carpeta: Motores De CD contenida en la carpeta Prácticas de Laboratorio.



## 12.10 Problemas

**Problema 12.1** Se tiene un generador de corriente continua (c.c.) con excitación en serie, con los siguientes datos de placa (1.5 kW, 220 V, 3,400 rpm). La suma de los devanados de campo y de armadura son  $R_a + R_s = 4.41\Omega$ . La curva de magnetización del generador se muestra en la siguiente tabla:



Determinar el voltaje entregado en las terminales del generador cuando la carga varía con las corrientes de armadura siguientes, también calcular la pérdida de potencia en el devanado serie y de campo para cada caso:

$$a) I_a = 1 \text{ Amp}$$

$$b) I_a = 5 \text{ Amp}$$

$$c) I_a = 8 \text{ Amp}$$

### Solución

a) Para una corriente  $I_a = 1 \text{ Ampre}$  y el voltaje  $E_a = 53 \text{ [Volts]}$ , de  $V_t = E_a - (R_a + R_s)I_a$  se tiene que

$$V_t = 53 - (4.41)(1) = 48.59 \text{ [Volts]}.$$

La pérdida de potencia en los devanados es:

$$P = VI = (4.41)(1) = 4.41 \text{ [Watts]}.$$

b) Para una corriente  $I_a = 5 \text{ Ampres}$  y el voltaje  $E_a = 195 \text{ [V]}$ , se tiene que:

$$V_T = 195 - (4.41)(5) = 172.95 \text{ [Volts]}$$

La pérdida de potencia en los devanados es:

$$P = VI = (22.05)(5) = 110.25 \text{ [Watts]}$$

c) Para una corriente  $I_a = 8 \text{ Ampres}$  y el voltaje  $E_a = 232 \text{ [Volts]}$  se tiene que

$$V_T = 232 - (4.41)(8) = 196.72 \text{ [Volts]}$$

La pérdida de potencia en los devanados es:

$$P = VI = (35.28)(8) = 282.24 \text{ [Watts]}$$

**Problema 12.2** La resistencia de armadura de un motor de corriente continua en derivación es  $R_a = 0.5\Omega$ , el voltaje en las terminales es  $V_t = 250 \text{ [V]}$  y gira a una velocidad de  $1,200 \text{ [rpm]}$ . Determinar la resistencia externa que debe de conectar en serie con la resistencia de armadura para reducir la velocidad del motor a  $1,000 \text{ [rpm]}$  si la corriente de armadura es de  $60 \text{ [Ampres]}$  y el flujo se mantiene constante.

### Solución

De  $E_a = V_t - I_a R_a$  y  $E_a = K\phi n$  se tiene que

$$E_a = 250 - (60)(0.5) = 220 \text{ [V]}$$

$$K\phi = \frac{E_a}{n} = \frac{220}{1200} = 0.183$$

Si  $n = 1,000$  [rpm] y  $K\phi = 0.183$ ; entonces  $E_a = (0.183)(1000) = 183$  [V] y también:

$$R'_a = \frac{V_t - E_a}{I_a} = \frac{250 - 183}{50} = 1.34 \text{ } [\Omega]$$

$$R_{externa} = R'_a - R_a = 1.34\Omega - 0.5\Omega = 0.84 \text{ } [\Omega]$$

**Problema 12.3** Un motor de corriente continua en derivación, con un voltaje de alimentación de  $V_t = 200$ [V] desarrolla un par de  $45[N - m]$  cuando su corriente de armadura absorbe  $12$ [A]. . Calcular el par de la máquina cuando la corriente de armadura tiene los siguientes cambios:

$$a) I_a = 6[A]$$

$$b) I_a = 18[A]$$

$$a) I_a = 24[A]$$

### Solución

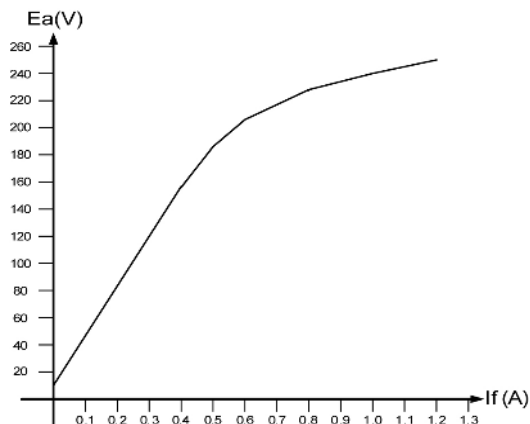
Si  $\tau = 45[N - m]$  con una corriente de armadura de  $12$  [Ampères], usando  $\tau = K\phi I_a$  y  $K\phi = \frac{45}{12} = 3.75$  se tiene que:

$$a) \tau = (3.75)(6) = 22.5[N - m]$$

$$b) \tau = (3.75)(18) = 67.5[N - m]$$

$$c) \tau = (3.75)(24) = 90[N - m]$$

**Problema 12.4** Un generador de corriente continua con excitación separada tiene los siguientes datos de placa (10 H.P., 240 Volts, 1500 rpm). La resistencia de armadura es  $R_a = 0.18\Omega$  , la resistencia de campo es  $R_f = 0.110\Omega$  y la curva de magnetización de la máquina se muestra en la siguiente figura.



Cuando la corriente de campo se ajusta a  $I_f = 0.18A$  y se conecta una carga resistiva  $R_L = 0.8\Omega$  en las terminales de la máquina, sin tomar en cuenta el efecto de la reacción de inducido determinar:

- El voltaje  $E_a$
- La corriente  $I_a$
- La potencia consumida en la carga

### Solución

Como se sabe, el par de la máquina se puede calcular con la fórmula  $\tau = K\phi I_a$  y el voltaje con  $E_a = K\phi\omega$ . Si  $n = 1,500$  [rpm], entonces

$$\omega = 1,500 \left( \frac{2\pi}{60} \right) = 157.079 \text{ [rad/seg]}$$

- Con una corriente de campo de  $I_f = 1.0$  [Amp], de acuerdo con la curva de magnetización se tiene un voltaje de  $E_a = 120$  [volts].
- A partir del voltaje generado  $E_a = 120$  [volts] se tiene que la corriente de armadura es:

$$I_a = \frac{E_a}{R_a + R_L} = \frac{120}{5.18} = 23.166 \text{ Amperes}$$

- La expresión de la potencia consumida en la carga es  $P = I_a V_a V_L = I_a^2 R_L$  y de aquí se tiene que:

$$P = (23.166)^2 (5) = 2,683.317 \text{ [Watts]}$$

$$V_L = \frac{E_a R_L}{R_a + R_L} = \frac{(120)(5)}{5.18} = 115.83 \text{ [Volts]}$$

$$P = (23.166)(115.83) = 2,683.317 \text{ [Watts]}$$

**Problema 12.5** Una máquina de corriente continua tiene los siguientes datos de placa (30 H.P., 300 Volts, 1000 rpm). Cuando esta máquina se conecta a una fuente de voltaje de 300 volts, su voltaje es de  $E_a = 270 \text{ Volts}$  y tiene una corriente de armadura de 75 Ampères, así como la resistencia de campo de la máquina es de  $R_f = 150\Omega$ . En vacío la máquina absorbe una corriente de 4 Ampères, con una velocidad de 1,000 rpm.

- Esta máquina, ¿está operando como motor o como generador?
- Calcular la resistencia de armadura de esta máquina.
- Calcular la potencia de pérdida del circuito de armadura.
- Calcular el par desarrollado por la máquina.
- Calcular la eficiencia de la máquina.

### Solución

a) La diferencia de voltajes nos indica el tipo de máquina; en este caso como el voltaje  $E_a$  es menor que el voltaje de línea, esta máquina está operando como motor.

b) Se tiene que  $V_t = E_a + I_a R_a$  para una máquina con excitación en paralelo, y de aquí resulta que

$$R_a = \frac{V_t - E_a}{I_a} = \frac{300 - 270}{75} = 0.4 \text{ } [\Omega]$$

Para el caso de una máquina con excitación serie o compuesto, esta resistencia sería la suma de las resistencias serie y de armadura.

c) En este caso se tiene que:

$$P = V_a R_a = (30)(75) = 2,250 \text{ [Watts]}$$

d) La potencia en la armadura de la máquina es:

$$P_a = E_a I_a = (270)(75) = 20,250 \text{ [Watts]}$$

y por lo tanto, el par desarrollado por la máquina es:

$$\tau = P_a \omega = (20250)(52.359) = 1,060,269.75 \text{ [N - m]}$$

En vacío, la potencia electromagnética desarrollada son las pérdidas rotacionales:

$$P_{rotacionales} = E_a I_a = (270)(4) = 1,080 \text{ [Watts]}$$

$$P_{salida} = E_a I_a - P_{rotacionales} = (20250)(2) - 1080 = 19,170 \text{ [Watts]}$$

$$P_{entrada} = V_t I_t = V_t (I_a + I_f) = (300)(75) (1/2) = 23,100 \text{ [Watts]}$$

La eficiencia de la máquina es:

$$\eta = \frac{P_{salida}}{P_{entrada}} \times (100\%) = \frac{19170}{23100} \times 100\% = 82.98\%$$

## Capítulo 13

### Accionamientos eléctricos de velocidad variable

#### 13.1 Introducción

#### 13.2 Característica mecánica de los accionamientos eléctricos

#### 13.3 Accionamiento eléctrico de velocidad variable para motores de corriente continua

#### 13.4 Función de transferencia experimental

#### 13.5 Control en cascada en motores de corriente continua

#### 13.6 Elementos básicos de electrónica de potencia que conforman el convertidor

#### 13.7 Diagrama de bloques simplificado de control de posición de un motor

#### 13.8 Observador lineal en motores de corriente continua

#### 13.9 Retroalimentación de estados

- 13.10 Pasos básicos para la retroalimentación de estado
- 13.11 Accionamiento eléctrico de velocidad variable para motores de inducción
- 13.12 Control por variación de la resistencia del rotor
- 13.13 Control del voltaje de línea
- 13.14 Operación a frecuencia de deslizamiento constante
- 13.15 Esquema de control general
- 13.16 Operación voltaje/frecuencia en diferentes zonas de operación
- 13.17 Métodos de control del inversor
- 13.18 Inversor PWM senoidal
- 13.19 Medición de la distorsión armónica
- 13.20 Formas de corriente, voltaje y velocidad para un esquema  $v/f$
- 13.21 Control en lazo cerrado de velocidad para un motor de inducción

## 13.1 Introducción

La evolución de los accionamientos eléctricos de velocidad variable, ha tenido un despegue sin igual desde que se iniciaron los estudios para el control de máquinas de corriente continua (c.c.), y esto ha permitido el empleo de los mismos en un sin número de aplicaciones industriales de velocidad variable y fija. En esta evolución han aparecido los accionamientos eléctricos empleando máquinas de corriente alterna (c-a) que logran tener un mejor desempeño, simplicidad y confiabilidad en cada una de las aplicaciones industriales.

Los primeros sistemas de control de velocidad variable que provocaron que la industria pusiera atención en ellos, fueron los que se implementaron con motores de c.c., de excitación separada, los cuales presentaban una ecuación desacoplada del par electromagnético que permite un control sencillo de la máquina, esto es, un canal para el control del par, y otro para el control del flujo del motor.

Desde el punto de vista de diseño la máquina de c-c., presenta muchas desventajas al ser comparada con otras máquinas eléctricas, en especial con las máquinas de c-a. Comparados con los motores de c.c., los motores de inducción jaula de ardilla de c-a. presentan varias ventajas significativas en la robustez de su diseño: tienen un tamaño más reducido, prácticamente no necesitan de mantenimiento, se pueden instalar casi en cualquier tipo de medio ambiente, y los costos de estas máquinas son mucho menores que los de los motores de c-c. Sin embargo, los motores de c-a, presentan una desventaja muy importante: la ecuación del par electromagnético se encuentra acoplada, por lo que el control de estas máquinas es más complicado.

El desarrollo de la electrónica de potencia y del control digital; así como de la teoría del control, han permitido mejorar los accionamientos para el control de motores de inducción de c-a., logrando así que cada vez sea más común encontrar este tipo de motores en las industrias, cumpliendo con las exigencias de los procesos industriales. La tendencia que muestra la industria es tener un incremento mayor de accionamientos eléctricos de c-a., donde anteriormente dominaron los accionamientos de c-c. Una clasificación general de los accionamientos eléctricos se puede encontrar si se divide la evolución en las máquinas de c-c. y c-a., siendo las siguientes estrategias de control en accionamientos eléctricos de c-a, las más empleadas en la industria:

- Control Escalar o Voltaje-Frecuencia.
  
- Control Vectorial.
  
- Control Directo del Par.



### Electrónica de potencia

La electrónica de potencia, es la rama de la ingeniería eléctrica que se refiere a la aplicación de dispositivos electrónicos, principalmente semiconductores, al control y transformación de potencia eléctrica. Esto incluye tanto aplicaciones en sistemas de control, como de suministro eléctrico a consumos industriales, o incluso, la interconexión de sistemas eléctricos de potencia.

El principal objetivo de esta disciplina, es el procesamiento de energía con la máxima eficiencia posible, por lo que se evita utilizar elementos resistivos, que son generadores potenciales de pérdidas por efecto Joule. Los principales dispositivos utilizados por tanto son bobinas y condensadores, así como semiconductores trabajando en modo corte/saturación (on/off).



### Sistemas digitales

Un sistema digital, es cualquier dispositivo destinado a la generación, transmisión, procesamiento o almacenamiento de señales digitales. Para el análisis y la síntesis de sistemas digitales binarios se utiliza como herramienta el álgebra de Boole.

Los sistemas se clasifican en sistemas digitales combinatoriales (cuyas salidas sólo dependen del estado de sus entradas en un momento dado), y los sistemas digitales secuenciales (cuyas salidas dependen además del estado de sus entradas en un momento dado, de estados previos).



Antes de analizar cada uno de estos métodos es importante clasificarlos y considerar lo que permiten realizar.

El control escalar o control voltaje / frecuencia ( $v/f$ ), es una estrategia de control con la que, mediante la variación del voltaje y la frecuencia de las señales de voltaje con que se alimenta al motor, se puede controlar la velocidad y el par de la máquina. La forma de controlar la velocidad de sincronía del motor es mediante las variaciones en la frecuencia del voltaje estator, y para el control del par electromagnético se regula la magnitud del voltaje y la frecuencia en las terminales del estator.

Este esquema, presenta además la ventaja de poder operar en lazo abierto sin un sensor de velocidad. Sin embargo, esta estrategia, a pesar de que es sencilla, presenta desventajas importantes debido a que desprecia las caídas de tensión en la máquina, por lo que a frecuencias de operación bajas (bajas

velocidades) el par no es suficiente para vencer la inercia (que depende de la carga), y se tiene que calcular un voltaje de compensación (voltaje Boost), que depende del tipo de carga, lo cual representa una gama de velocidades limitada y una pobre respuesta de par a bajas velocidades, por lo que a pesar de su algoritmo de control sencillo, y de que el sistema es en lazo abierto (menos elementos, costo y mantenimiento), no cumple con las características necesarias para sistemas de alto desempeño, pero es ideal su uso en aplicaciones de sistemas que no requieran de exigencias altas de par y de velocidad. Este control se realiza con el comportamiento en estado permanente de la máquina.

### Accionamientos eléctricos

En el archivo Videos de Aplicacion ATV71, se presentan ejemplos claros de accionamientos eléctricos de velocidad variable, así como la importancia que tienen en la industria.



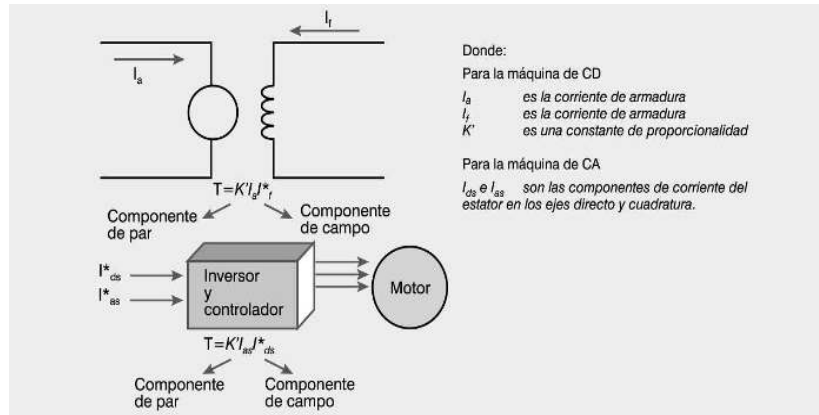
### Lazo abierto y cerrado

Los sistemas de control se clasifican en sistemas de lazo abierto y cerrado, y esta clasificación está relacionada con la acción de control, que es la que activa al sistema para producir la salida. Un sistema de control de lazo abierto, es aquel en el que la acción de control es independiente de la salida, y uno de control de lazo cerrado es un sistema en el que la acción de control es dependiente de la salida.



Por otro lado, el control vectorial aparece como una de las nuevas técnicas de control propuestas por F. Blashke y K. Hasse, la cual permite la operación del motor de inducción en todo el rango de velocidad con la posibilidad de poder desplazar los accionamientos de los motores de corriente continua, por el control de los motores de inducción, teniendo una dinámica similar.

Los métodos de control vectorial, están basados en la orientación del campo magnético de una máquina en ejes de referencia rotatorios, permitiendo desacoplar el flujo magnético del rotor del par electromagnético obteniéndose un comportamiento dinámico semejante al de la máquina de corriente continua. En la figura 13.1, se observa la analogía entre control vectorial y el control de una máquina de corriente directa.



**Figura 13.1** Analogía entre el motor de corriente directa y el motor de inducción en un marco rotatorio.

Como se observa en la figura 13.1, la corriente  $I_{ds}$  es análoga a la corriente de campo, y la componente  $I_{qs}$  corresponde a la corriente de armadura de la máquina de corriente directa.

Las ecuaciones que se obtienen en el marco de referencia rotatorio permiten implementar el control de la máquina de inducción, lográndose que el comportamiento dinámico, sea semejante al que se puede lograr con máquinas de corriente continua de excitación independiente.

En el control vectorial existen dos métodos:

1. Métodos directos de orientación de campo, que emplean sensores de flujo o modelos, utilizados para calcular la magnitud y la posición del vector de flujo del rotor, y de esta forma, realizar su orientación en un sistema de coordenadas ortogonales.
2. Métodos indirectos, los cuales emplean la velocidad de deslizamiento para obtener la posición del flujo del rotor, y realizar su orientación.

En ambos métodos, es necesario realizar correctamente la orientación del vector de flujo del rotor, de lo contrario existe una degradación en el control vectorial de la velocidad del motor.

Finalmente, el control directo del par, es un método de control de motores de accionamientos de c-a, que permite controlar con precisión, la velocidad y el par del motor sin el empleo de una técnica de modulación, empleando solamente una tabla de selección. En el DTC se utilizan como variables controladas el flujo del estator y el par electromagnético, y en un esquema de DTC es común el empleo de procesadores de señales digitales de alta velocidad (DSP) que pueden actualizar los cálculos del estado del motor. Debido a la continua actualización del estado del motor, y a la comparación de los valores actuales con los de referencia, cada conmutación en el inversor se determina por separado. Esto significa que el accionamiento siempre genera la combinación de conmutación óptima, y que puede actuar instantáneamente frente a los cambios dinámicos como disturbios de carga.

Luego de esta revisión, se puede ver claramente que el desarrollo tecnológico se basa en poder desacoplar al motor de c-a., para poder controlar de manera independiente el par electromagnético y el flujo del estator o del rotor del motor.

Por consiguiente, el control vectorial logra el desacople del motor a través del empleo de un modelo rotatorio de la máquina, mientras que el DTC consigue este desacople empleando los voltajes que alimentan al motor, los cuales son generados en el inversor.

En la actualidad, se han propuesto varias técnicas que permiten desacoplar el accionamiento eléctrico a través del control.

En el estudio de los accionamientos eléctricos de velocidad variable, el comportamiento mecánico del motor (como el de la carga) es muy importante, y se realiza empleando la característica mecánica (para la velocidad). Teniendo esta característica, se puede analizar el comportamiento de la carga y del motor.

### **PLC**

En los archivos Curso de PLC y Lab de PLC se encuentra el material necesario para entender los PLC, que dentro del contexto de automatización, representan un papel muy importante, junto con el accionamiento eléctrico, así como prácticas para su desarrollo.



### **Automatización**

En el archivo Automatización, se presenta una semblanza de los elementos básicos de la automatización industrial, en los que tiene un papel fundamental, los accionamientos eléctricos.



## **13.2 Característica mecánica de los accionamientos eléctricos**

Esta característica se determina a partir de la dependencia que existe entre la velocidad de rotación y el par desarrollado por el mecanismo, y es una de las más importantes en la industria, tanto para la clasificación de tipos de cargas, como para la clasificación de máquinas eléctricas, lo que permite poder conocer puntos de operación de cada uno de los sistemas diseñados.

Para poder realizar una clasificación del tipo de cargas, se recurre a una expresión empírica que permite trazar una trayectoria que define la relación entre la velocidad de rotación y el par desarrollado; la expresión queda definida como:

$$T = T_0 + (T_N - T_0) \left( \frac{\omega}{\omega_N} \right)^m$$

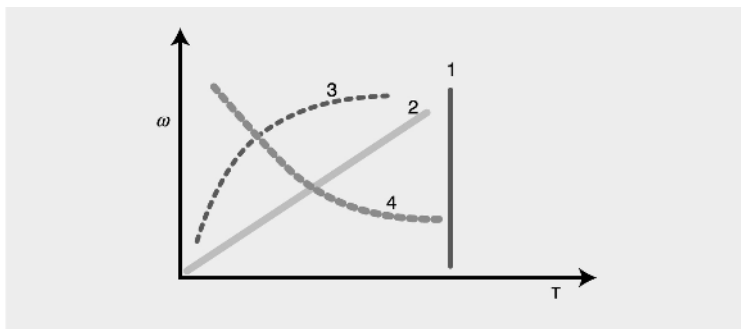
donde:  $T$  es el par del mecanismo de producción,  $T_0$  es el par de fricción,  $T_N$  es el par a velocidad nominal,  $T_W$  es la velocidad nominal,  $\omega_N$  es la velocidad y  $m$  es el factor que caracteriza el cambio del par resistente al variar la velocidad.

Empleando esta expresión, se pueden determinar cuatro características básicas, siendo éstas, dependientes del valor de término  $m$ , al obtener y clasificar los siguientes valores:

- Característica no dependiente de la velocidad, cuando  $m = 0$ : se puede encontrar que el par desarrollado no depende de la velocidad, y esta característica se encuentra en sistemas como grúas y bombas de émbolo entre otros.
- Característica lineal, cuando  $m = 1$ : en este caso se encuentra una relación lineal entre la velocidad y el par desarrollado, y la expresión se puede simplificar cuando el par de rozamiento es igual a cero. Esta característica es típica de un generador con excitación independiente.
- Característica parabólica, cuando  $m = 2$ : se tiene una dependencia cuadrática del par desarrollado y la velocidad. Esta característica se conoce como tipo ventilador, además de aparecer también en cargas como bombas centrífugas y hélices.
- Característica decreciente no-lineal, cuando  $m = -1$ : se tiene una variación que es inversamente proporcional entre el par desarrollado y la velocidad. Se encuentra en fresadoras, tornos y en bobinadoras entre otras.

Esta clasificación abarca, casi en su totalidad, todas las diferentes cargas mecánicas que se encuentran en la industria.

En la figura 13.2, se muestra el comportamiento del par desarrollado y de la velocidad, para cada una de las características correspondientes.



**Figura 13.2** Comportamiento del par y la velocidad.

### Accionamientos Eléctricos

En el archivo Accionamientos Eléctricos de Velocidad Variable, se presentan más condiciones de los tipos de cargas mecánicas, así como las posibilidades que permiten tener los accionamientos eléctricos dentro de la industria. Por otro lado, en el archivo Essentiel VVD, se expone una clasificación industrial de la selección de los accionamientos eléctricos.

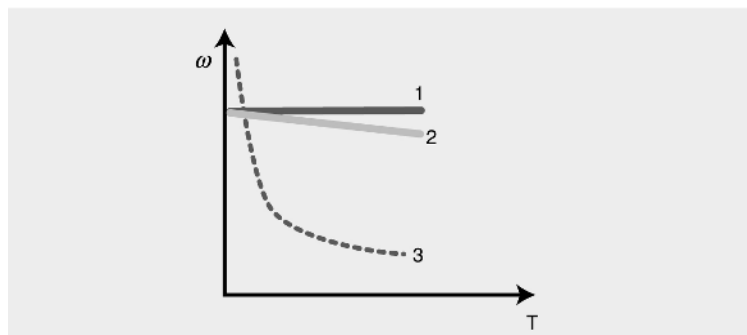


#### 13.2.1 Característica mecánica de las máquinas eléctricas

En las máquinas eléctricas rotatorias, se pueden definir las características mecánicas tomando en cuenta su desempeño, y a su vez estas características se pueden clasificar de acuerdo con los siguientes comportamientos.

1. Característica rígida: Se encuentra cuando el par no afecta a la velocidad; esto está presente en los motores síncronos.
2. Característica semi-rígida: Aparece cuando la variación del par genera una variación de la velocidad; esto sucede en los motores asíncronos.
3. Característica suave: Al cambiar el par, resulta un cambio drástico de la velocidad; esto ocurre en los motores de excitación serie.

Dentro de las características mencionadas se encuentran los principales motores eléctricos, y en la figura 13.3 se muestra el comportamiento de cada una de las características.



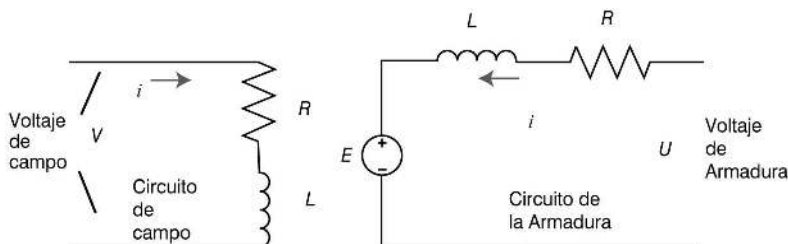
**Figura 13.3** Comportamiento de las características mecánicas.

Estas características de los motores se encuentran estudiando el modelo matemático correspondiente, por esto se analizan los motores más comunes en accionamientos eléctricos, para tener una buena

descripción del comportamiento del motor a través del modelo matemático.

### 13.3 Accionamiento eléctrico de velocidad variable para motores de corriente continua

#### 13.3.1 Características mecánicas de motor de corriente continua de excitación independiente



La característica mecánica del motor se puede determinar de manera general si se mantiene el voltaje de campo fijo ( $V$ ), y se considera un régimen en estado permanente de forma que para el circuito de la armadura se tiene:

$$U = IR + E$$

donde:  $E$  es la fuerza contra electromotriz inducida (FEM) que se expresa como  $E = k\phi\omega$  [Volts] con  $k = \frac{PN}{2\pi q}$ ,  $P$  es el número de pares de polos del motor,  $N$  es el número de conductores activos,  $q$  es el número de pares de circuitos en paralelo,  $\phi$  es el flujo magnético ( $Wb$ ) y  $\omega$  es la velocidad angular ( $rad/s$ ).

Entonces se tiene:

$$\omega = \frac{U - iR}{k\phi}$$

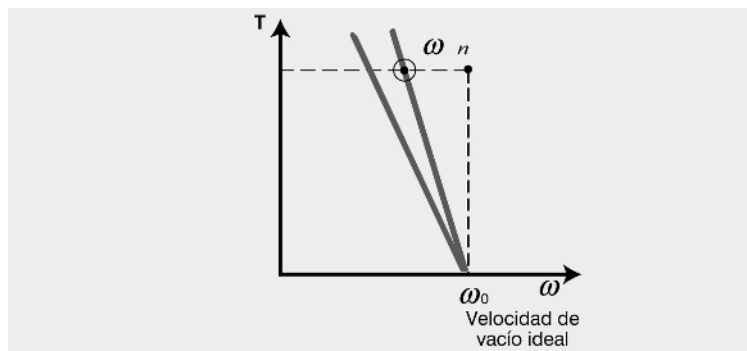
para la característica mecánica, recordando que el par electromagnético desarrollado es:

$$T = k\phi i [NM]$$

$$\omega = \frac{U}{k\phi} - T \frac{R}{k^2\phi^2} = \frac{U}{C} - T \frac{R}{C^2}$$

donde  $C = k\phi$ .

Es muy importante mencionar que si el flujo tiende a desaparecer, esto es  $C \approx 0$ , entonces teóricamente la velocidad alcanzaría valores muy elevados; esta condición puede aparecer cuando se suspenda la alimentación eléctrica en el devanado de campo. En las máquinas de imán permanente en el campo está condición no existe.



**Figura 13.4**  $\omega_0 = \frac{U}{k\phi}$  es la velocidad de vacío ideal.

Cuando se tiene una velocidad del motor mayor que la velocidad de vacío ideal y la FEM es mayor que el voltaje aplicado  $U$ , entonces la máquina eléctrica trabaja como generador por lo que la corriente cambia de sentido y se puede tener una ecuación definida por:

$$i = \frac{U - E}{R} = -\frac{E - U}{R}$$

Entonces, el par del motor cambia de signo y se tiene que:

$$T = k\phi i$$

$$\omega = \frac{U}{k\phi} + T \frac{R}{k^2\phi^2}$$

### 13.3.2 Característica mecánica del motor serie

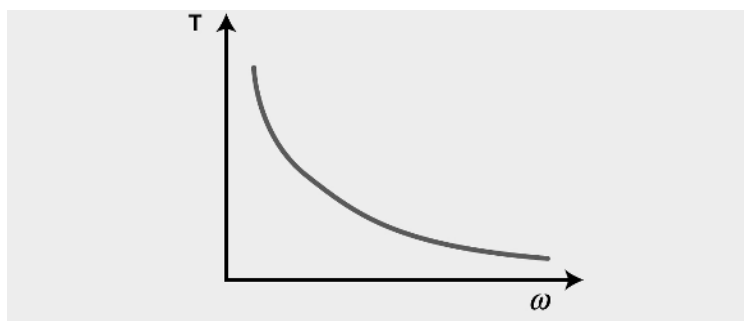
Esta característica depende de la curva de magnetización, y para simplificar el análisis, se desprecia la saturación del sistema magnético y se plantea una dependencia lineal del motor:

$$\phi = \gamma i$$



$$T = k\phi i = \gamma k i^2$$

$$\omega = \frac{U}{\gamma k \sqrt{\frac{T}{\gamma k}}} - \frac{R}{k\gamma}$$



**Figura 13.5** Curva de magnetización, para la característica mecánica del motor en serie.

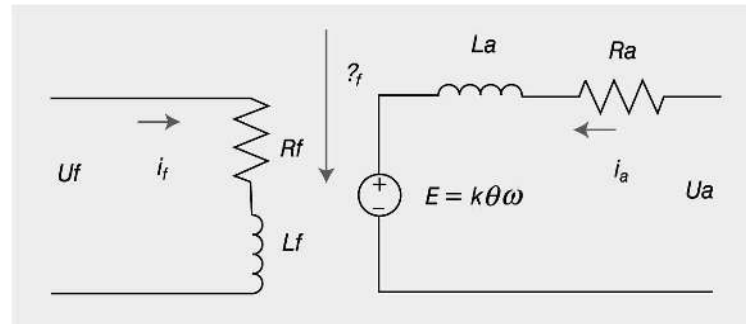
Se tiene que tener presente que estos modelos son en estado permanente, por lo que no representan el comportamiento del motor en estado transitorio, pero son una buena representación y aproximación para el análisis del motor en su punto de operación.

### 13.3.3 Variables de estado y diagramas de bloques para la representación de la máquina de corriente continua

Cuando se requiere tener un modelo dinámico se puede recurrir a un modelo en variables de estado o al empleo de un diagrama de bloques; estas dos representaciones son de las más empleadas.

Las representaciones anteriores, se basan en las ecuaciones diferenciales para la armadura y para el campo, las cuales modelan el comportamiento del motor, por lo que es necesario definir de una manera clara cada una de estas ecuaciones diferenciales.

En la figura 13.6 se muestra el modelo eléctrico del motor de c-c. en el que se tienen los circuitos de la armadura y del campo: el circuito de la armadura se puede identificar como el circuito que contiene la FEM (E), el circuito del campo se encuentra definido únicamente por una resistencia, un inductor y una fuente de alimentación.



**Figura 13.6** Modelo eléctrico del motor de c-c.

Se puede plantear la siguiente ecuación diferencial, para la descripción del circuito de la armadura:

$$u_a = I_a R_a + L_a \left( \frac{dI_a}{dt} \right) + E$$

mientras que para el circuito del campo se tiene que:

$$u_f = I_f R_f + L_f \left( \frac{dI_f}{dt} \right)$$

El par electromagnético es:

$$T = k\phi I_a = K I_a$$

La ecuación mecánica es:

$$T_e = K I_a = J \left( \frac{d\omega}{dt} \right) + \beta\omega + T_L$$

donde:  $J$  es el coeficiente de inercia,  $\beta$  es el coeficiente de fricción y  $T_L$  es el par de carga.

Después de definir las ecuaciones diferenciales que modelan el comportamiento del motor se puede plantear el modelo en variables de estado, por lo que a continuación, se presenta una revisión de las mismas.

#### VARIABLES DE ESTADO

Las variables de estado son aquellas que describen un sistema. A continuación, se plantea la definición general de estas variables y luego se presenta un ejemplo basado en un circuito RLC de segundo orden, en el que se encontrará el modelo en las variables de estado que sirve de representación del circuito.



En términos básicos, las variables de estado, son el conjunto mínimo de variables que determinan el estado de un sistema, y al ser representadas por un vector de  $n$  variables, éste recibe el nombre de vector de estado. Este concepto se emplea principalmente en sistemas con múltiples entradas y salidas, como lo son los motores eléctricos. El modelo matemático de estos sistemas, son las ecuaciones que resuelven los casos continuos y discretos, respectivamente; en ambos casos, la primera ecuación, que contiene la dinámica del sistema, se denomina ecuación de estado y la segunda ecuación de salida:

$$\begin{cases} \int \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

donde:  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son matrices reales cuyas dimensiones están especificadas en ellas mismas; mientras que  $u$ ,  $y$ ,  $x$  son los vectores que contienen las variables de entrada, salida y estado respectivamente:

$$\dot{x}_{n \times 1} = A_{n \times n}x_{n \times 1} + B_{n \times p}u_{p \times 1}$$

$$y_{q \times 1} = C_{q \times n}x_{n \times 1} + D_{q \times p}u_{p \times 1}$$

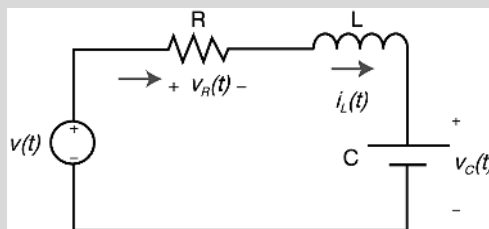
Cualquiera que sea la interpretación que se adopte, se debe tener presente que:

- Las variables de estado pueden tener o no sentido físico.
- Las variables de estado pueden o no ser medibles.
- Para un mismo sistema dinámico, las variables de estado no son únicas; de hecho, se pueden definir infinitos conjuntos de variables que sirvan como variables de estado.

**Ejemplo: Circuito eléctrico RLC.** A continuación se presenta, la descripción analítica para modelar y obtener la ecuación característica del sistema RLC.



Considérese el circuito RLC que se muestra en la figura 13.7, con la particularidad de que se supone igual a 0.



**Figura 13.7** Circuito RLC con la particularidad de ser igualado.

El estado inicial del sistema está determinado por:

$$V_c(0) = 0$$

El estado transitorio está descrito por las leyes de Kirchhoff de la siguiente forma:

#### Ley de voltajes de Kirchhoff

La suma algebraica de los voltajes alrededor de cualquier trayectoria cerrada en un circuito es cero en todo instante.

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt + V_c(0) = 0$$

Al derivar esta ecuación se obtiene que:

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = 0$$

A continuación se presentan dos formas de obtener la ecuación característica del sistema: una es empleando la descripción analítica del sistema y la otra es utilizando una representación de variables de estado.

A) Descripción analítica

Se propone la solución

$$i(t) = Ae^{\lambda t}$$

y luego de sustituir ésta en la ecuación 5.11 se obtiene que



$$AL\lambda^2 e^{\lambda t} + RA\lambda e^{\lambda t} + \frac{A}{C} e^{\lambda t} = 0$$

A continuación se presentan dos formas de obtener la ecuación característica del sistema: una es empleando la descripción analítica del sistema y la otra es utilizando una representación de variables de estado.

### A) Descripción analítica

Se propone la solución

$$i(t) = Ae^{\lambda t}$$

y luego de sustituir ésta en la ecuación 5.11 se obtiene que

$$AL\lambda^2 e^{\lambda t} + RA\lambda e^{\lambda t} + \frac{A}{C} e^{\lambda t} = 0$$

y agrupando términos se obtiene la ecuación característica que sólo depende de los parámetros del sistema como se esperaba:

$$Ae^{\lambda t} \left[ L\lambda^2 R\lambda + \frac{1}{C} \right] = 0$$

### B) Representación empleando variables de estado

Para cumplir con las condiciones del modelo en variables de estado, el sistema de ecuaciones puede representarse de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i_L(t) - \frac{i}{L}v_c(t) + \frac{1}{L}v(t) \\ \frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}i_L(t) \end{cases}$$

Empleando las dos ecuaciones diferenciales que describen al circuito se tiene que:

$$\dot{V}_c = \frac{1}{C}i_c$$

$$i_L = \frac{1}{L}V_L$$

De las leyes de Kirchhoff también se puede plantear que:

$$V_L = -Ri - V_c$$



por lo que las ecuaciones pueden agruparse en la siguiente forma matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_c \\ \dot{i}_c \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} V_c \\ i_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_c \\ i_c \end{pmatrix}$$

que en la forma de representación de estado resulta que

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L(t)}{dt} \\ \frac{dv_C(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} [v(T)]$$

Para demostrar que ambas ecuaciones características son iguales, se calcula el determinante  $\det(\lambda I - A) = 0$  donde I es la matriz identidad:

$$\det(\lambda I - A) = 0 = \det \begin{bmatrix} \lambda & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L}\lambda & +\frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

De aquí se obtiene la ecuación característica siguiente:

$$0 = \lambda^2 + \lambda \frac{R}{L} + \frac{1}{CL} = \lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C}$$

Como se puede ver, la representación mediante variables de estado es un modelo que presenta gran flexibilidad en el análisis sobre los modelos escalares y es una buena alternativa para el modelo y análisis de máquinas eléctricas, así como para el control de las mismas.



### Ecuación característica

En la teoría del control, la ecuación que describe el comportamiento del sistema es la ecuación característica, cuyas raíces se determinan en forma gráfica en el plano  $s$ . En general, la ecuación característica se expresa como un polinomio de parámetro  $s$ .



### Álgebra matricial

Una matriz  $A$  de  $m \times n$  es un arreglo rectangular de números de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Un elemento de  $A$  se representa como  $a_{ij}$  donde  $i$  denota el número de fila y  $j$  el número de columna. Sea una matriz  $B$  de  $m \times n$ , entonces los elementos de la matriz  $C = A + B$  son de la forma:

$$C_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

Sea la matriz  $D$ , de  $n \times q$ , entonces los elementos de la matriz  $E = AD$  de  $m \times q$  se obtienen a partir de:

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^q a_{ik} b_{kj}$$

En general  $AD \neq DA$ .



Para plantear el modelo del motor de c.c., en variables de estado, se obtiene el siguiente modelo matricial:

$$\dot{x} = AX + BU$$

$$y = CX$$

$$\begin{bmatrix} I_a \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{L_f I_f}{L_a} \\ \frac{K}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ T_L \end{bmatrix}$$

donde:

$$k = L_f L_f$$

$$u_a = E_a + I_a R_a + L_a \left( \frac{dI_a}{dt} \right)$$

Simplificando se obtiene que:

$$u_a = L_f I_f \omega + I_a R_a + L_a \left( \frac{dI_a}{dt} \right)$$

Entonces, el conjunto de ecuaciones diferenciales que describen al motor de c.c. es:

$$\frac{dI_f}{dt} = \frac{R_f}{L_f} I_f + \frac{1}{L_f} V_f$$

$$\frac{dI_a}{dt} = \frac{R_a}{L_a} I_a - \frac{L_f}{L_a} I_f \omega + \frac{1}{L_a} U_a$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\beta}{J} \omega + \frac{L_f I_f I_a}{J} T_L$$

Dentro de los modelos en variables de estado, existen representaciones que permiten incluir relaciones no-lineales que en ocasiones se tienen que tomar en cuenta para representar diferentes fenómenos que se presentan en la máquina de corriente continua.

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_f \\ \dot{I}_a \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_f}{L_f} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_a}{L_a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_f \\ I_a \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{L_f}{L_a} I_f \omega \\ \frac{L_f}{J} I_f I_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_f} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_f \\ V_a \\ T_L \end{bmatrix}$$

El modelo lineal (que cumple con los principios de superposición y homogeneidad para un sistema lineal), se puede encontrar si se mantiene una fuente de alimentación constante, sea ésta la de campo o armadura, por lo que el modelo del motor de c.c., con la corriente de campo constante, se define por:

$$T_e = K I_a = J \left( \frac{d\omega}{dt} + \beta \omega + T_L \right)$$

$$V_a = E_a + I_a R_a + L_a \left( \frac{dI_a}{dt} \right)$$

$$E_a = \frac{L_f I_f \omega}{K}$$

en donde:



$$L_f I_f = \text{cte.}$$

$$i \frac{R_a I_a}{L_a} + \frac{V_a}{L_a} - \frac{E}{L_a}$$

$$\omega = -\frac{\beta}{J} \omega + \frac{L_f I_f}{J} I_a - \frac{1}{J} T_L$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{L_f I_f}{L_a} \\ \frac{K}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ T_L \end{bmatrix}$$

### 13.3.4 Modelado del motor de c.c. en diagrama de bloques

Para realizar una representación en bloques, es conveniente que cada bloque contenga la descripción del comportamiento del sistema, empleando funciones de transferencia. Por lo tanto, de manera general, una función de transferencia se puede definir como la relación entre la salida y la entrada del sistema, con condiciones iniciales nulas y en el dominio de la frecuencia.

#### Transformada de Laplace

La transformada de Laplace de una función  $f(t)$ , definida para todos los números reales  $t \geq 0$  es la función  $F(s)$  definida por:

$$F(s) = \mathfrak{L}f(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

siempre que la integral esté definida.



Para determinar la función de transferencia del motor de c.c. se parte de las siguientes ecuaciones diferenciales; que describen el comportamiento físico. Las ecuaciones del motor en la armadura se pueden escribir como:

$$J\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} = K i_a$$

$$L \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = V_a - k\theta$$

Cuadro 13.1 Estados posibles del inversor.

FUNCIÓN	DOMINIO EN EL TIEMPO	DOMINIO EN LA FRECUENCIA	REGIÓN DE CONVERGENCIA
	$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$	$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$	
Seno	$\sin(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$
Coseno	$\cos(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$
Seno hiperbólico	$\sinh(\alpha t) \cdot u(t)$	$\frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$	$s >  \alpha $
Coseno hiperbólico	$\cosh(\alpha t) \cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2 - \alpha^2}$	$s >  \alpha $
Onda senoidal con amortiguamiento exponencial	$e^{-\alpha t} \sin(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$	$s > -\alpha$
Onda cosenoidal con amortiguamiento exponencial	$e^{-\alpha t} \cos(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$	$s > -\alpha$
Raíz n-ésima	$\sqrt[n]{t} \cdot u(t)$	$s^{-(n+1)/n} \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)$	$s > 0$
Logaritmo natural	$\ln\left(\frac{t}{t_0}\right) \cdot u(t)$	$-\frac{t_0}{s} [\ln(t_0 s) + \gamma]$	$s > 0$

$$T = K i_a$$

$$T - T_L = J \frac{d\omega}{dt} + \beta \omega$$

donde:  $\theta$  es la posición angular,  $T$  es el par,  $T_L$  es el par de carga,  $J$  es el coeficiente de inercia y  $\beta$  es el coeficiente de fricción.

Aplicando la transformada de Laplace se tiene que:

$$S(JS + \beta)\theta(s) = KI(s)$$

$$(L_a s + R_a)I(s) = V - ks\theta(s)$$

### Transformada de Laplace de funciones elementales básicas

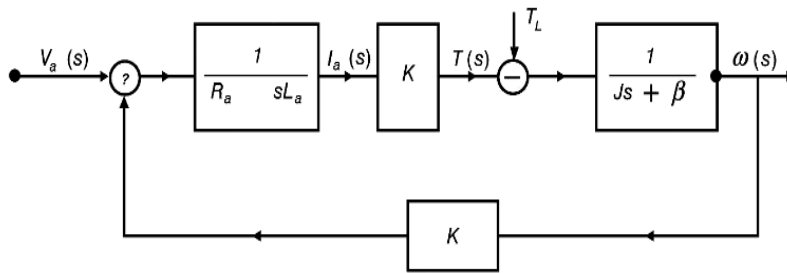
Si se elimina  $I(s)$ , se obtiene la siguiente función de transferencia, donde la salida es la velocidad del rotor  $\dot{\theta}$ :

$$\frac{\dot{\theta}}{V} = \frac{K}{(Js + \beta)(L_a s + R_a) + K^2}$$

Una representación que es muy empleada, es la representación por diagrama de Bloques, la cual puede contener funciones de transferencia en cada uno de sus bloques.

### 13.3.5 Modelado empleando diagrama de bloques para el motor de c.c.

Usando las ecuaciones diferenciales básicas del modelo del motor y mapeando al dominio de la frecuencia con la transformada de Laplace, en cada una de las ecuaciones se puede tener el diagrama mostrado en la figura 13.8 si se mantiene la corriente de campo constante.



**Figura 13.8** Diagrama de bloques para el modelo del motor.

Por otro lado, si se mantiene la corriente de armadura constante, para un modelo del motor de c.c. empleando el circuito del campo se tiene que:

$$Tk\phi i_a = L_f I_f$$

$$K_a I_f = J \frac{d\omega}{dt} + \beta \omega + T_L$$

donde:

$$K_a = L_f I_a$$

$$V_f = R_f I_f + L_f \frac{dI_f}{dt}$$

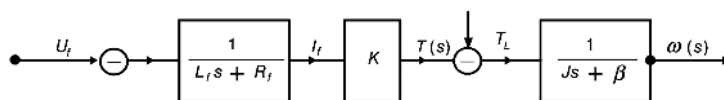
$$\frac{dI_f}{dt} = -\frac{R_f}{L_f} I_f + \frac{1}{L_f} V_f$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\beta}{J}\omega + \frac{L_f}{J}I_f I_a - \frac{1}{J}T_L$$

En variables de estado, para el modelo del motor de c.c. en ecuaciones de campo se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_f \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_f}{L_f} & 0 \\ \frac{K_f}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_f \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_f} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_f \\ T_L \end{bmatrix}$$

donde el diagrama de bloques puede definirse por la siguiente expresión:



### 13.4 Función de transferencia experimental

En muchos casos, el determinar un modelo, implica conocer los parámetros del sistema, como es el caso de las representaciones anteriores, por lo que es necesario tener métodos experimentales para obtener la descripción del mismo, cuando no se tiene la posibilidad de conocer los parámetros (por ejemplo:  $J$ ,  $\beta$ ,  $L_f$ ,  $R_f$ ,  $R_a$ ), esto es, se necesita un método experimental que sirva para obtener un modelo matemático que represente el comportamiento del motor en estado permanente y estado transitorio, lo cual se puede lograr determinando la función de transferencia que se componga de dos polos y una ganancia. Este proceso experimental, se basa en la respuesta transitoria y permanente de un sistema de segundo orden cuando se excita con una señal escalón unitario, además este método también tiene que cumplir con una condición básica, y es que se tengan los polos alejados uno del otro, aproximadamente con una diferencia de tres veces; esto lo cumple el motor de c.c., por lo que se puede aplicar este método experimental.

Tomando en cuenta las condiciones anteriores para el modelado del motor de c.c., se puede tener una función de transferencia de la siguiente forma:

$$G(s) = \frac{k}{(s + p_1)(s + p_2)}$$

Si  $\frac{p_2}{p_1} \geq 3$ , se puede aplicar una excitación del tipo escalón al sistema, para poder definir la función de transferencia, empleando la respuesta transitoria y permanente. Por expansión de fracciones parciales

esto significa escribir  $Y(s)$  como una suma de funciones más simples:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{k}{(s + p_1)(s + p_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + p_1} + \frac{C}{s + p_2}$$

Para esto, se requiere obtener las raíces de  $D(s)$  así como los coeficientes  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

En el caso del polo con multiplicidad, el coeficiente se puede calcular empleando:

$$coef_{i1} = \{(s - P_i)F(s)\} |_{s=P_i}$$

quedando definidos los coeficientes como:

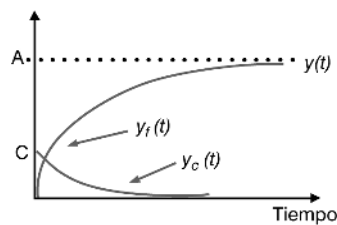
$$A = sY(s)|_{s=0} = \frac{k}{p_1 p_2}$$

$$B(s + p_1)Y(s)|_{s=-p_1} = \frac{k}{p_1(p_1 p_2)}$$

$$C(s + p_2)Y(s)|_{s=-p_2} = \frac{k}{p_2(p_2 p_1)}$$

La respuesta escalón se obtiene con la siguiente expresión:

$$y(t) = [A + Be^{-p_1 t} + Ce^{-p_2 t}] [1(t)]$$



**Figura 13.9** Gráfica de  $y(t)$

Las dos componentes de la respuesta se definen como:

$$y_f(t) = A + Be^{-p_1 t}$$

$$y_c(t) = Ce^{-p_2 t}$$

Como  $p_2 \gg p_1$  para un valor de  $t$  grande, entonces  $y(t) \approx y_f(t)$ .

También se puede definir una función  $z_f(t)$ :

$$z_f(t) = A - y(t) = -Be^{-p_1 t} - Ce^{-p_2 t}$$

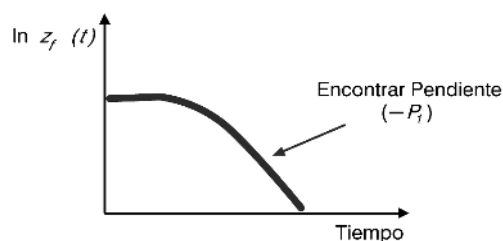
Con esto se elimina la ganancia de estado permanente, y si se tiene una  $t$  grande se obtiene que:

$$z_f(t) \rightarrow -Be^{-p_1 t}$$

por lo que se puede obtener el valor de  $p_1$  usando el logaritmo natural:

$$\frac{d}{dt} [\ln(z_f(t))] = \frac{d}{dt} [\ln(-Be^{-p_1 t})]$$

En la figura 13.10 se muestra la forma gráfica en que se puede obtener el valor de  $p_1$ , ya que con  $t$  grande, el valor de la pendiente será  $p_1$ .



**Figura 13.10** Gráfica para obtener el valor de  $p_1$ .

Para obtener el valor de  $p_2$  y  $k$ , a partir de  $A$  y  $p_1$  conocidos, se selecciona un valor de  $t$  donde  $y(t)$  se encuentra en estado permanente, por lo que:

$$y_f(t) \approx A + Be^{-p_1 t}$$

Por lo tanto:

$$B = \frac{y(t) - A}{e^{-p_1 t}}$$

Después de obtener  $B$ , se puede calcular  $C$  a partir de:

$$C = -(A + B)$$

y con este valor de  $C$ , se puede obtener el valor de  $p_2$  usando:

$$p_2 = -\frac{B}{C}p_1$$

Finalmente, el valor de  $k$ , se calcula a partir de:

$$k = Ap_1p_2$$

Para validar el proceso, empleando los datos experimentales se puede graficar:

$$y_f(t) = A + Be^{-p_1t}$$

Luego  $z_c(t)$  se define como:

$$Z_c(t) = y(t) - y_f(t) = Ce^{-p_2t}$$

y se obtiene la pendiente, que es igual a  $p_2$  dentro de valores de  $t$  grandes.

Con esto se puede encontrar una representación (modelo) del motor.

### **Función de Transferencia**

En la carpeta Funcion de Transferencia Experimental, se incluye un proyecto completo acerca de cómo obtener la función de transferencia de forma experimental, así como archivos de datos experimentales junto con programas de validación desarrollados con Matlab. Existen otras alternativas para la identificación de los parámetros de un motor eléctrico, y entre éstas, el empleo de los mínimos cuadrados es una muy importante, misma que se puede revisar en el archivo Minimos Cuadrados



Una vez que se tiene el modelo del motor, se puede diseñar el control para las variables mecánicas de interés, como son velocidad o posición. En la actualidad, el empleo de controladores que usan inteligencia artificial para el control de máquinas eléctricas ha permitido realizar el control sin necesidad de conocer el modelo matemático del sistema. De la misma forma, existen métodos experimentales para el ajuste de las ganancias del controlador convencional, por lo que se tiene que decidir cuál es la mejor alternativa para un caso particular.

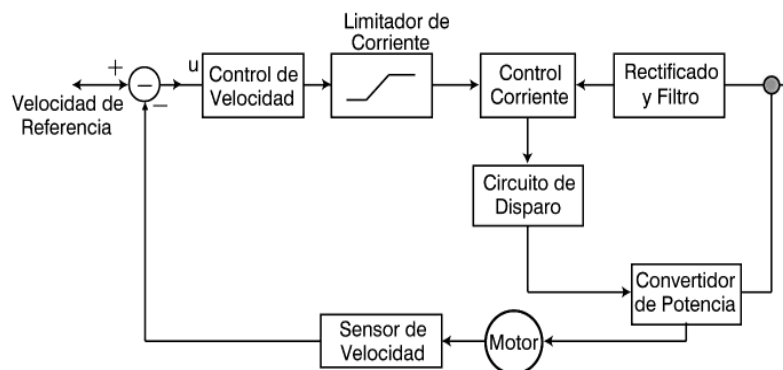
## Control de Máquinas

En el archivo Avances en Control de Máquinas se presenta un esquema en lazo abierto de la velocidad para control de motores de c.c.



### 13.5 Control en cascada en motores de corriente continua

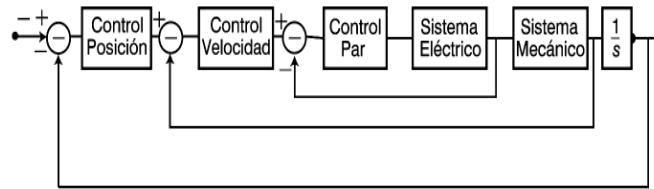
Las necesidades de la industria son cada vez mayores, y esto demanda una mayor calidad en las respuestas del controlador de las variables manipuladas. En el caso de motores, el controlador más empleado por la industria es del tipo cascada, donde normalmente se emplean uno o más lazos internos en cascada. Para realizar el control de los motores eléctricos se tiene un lazo interno de corriente y el externo de velocidad o posición; en la figura 13.11 se muestra un ejemplo.



**Figura 13.11** Diagrama de un controlador.

En la figura 13.11 se ve que la corriente es la variable interna y el lazo externo es de velocidad. Por otro lado, en la figura 13.12 se muestra un controlador de posición que está descrito mediante un diagrama de bloques.





**Figura 13.12** Controlador de posición.

En la figura 13.12 lo primero que se tiene que observar, es el lazo de corriente en el que se tiene a la FEM como un disturbio, de tal manera que su efecto puede ser negado porque su cambio es muy lento en comparación con la corriente.

El convertidor estático de potencia que se presentó en la figura 13.12, y que es fundamental en la transmisión de la energía que se le suministra al motor, se puede aproximar a través de un sistema inercial de primer orden de la siguiente forma:

$$e^{-s\tau_0} \approx \frac{1}{1 + s\tau_0}$$

donde:  $\tau_0$  es el tiempo muerto del convertidor.

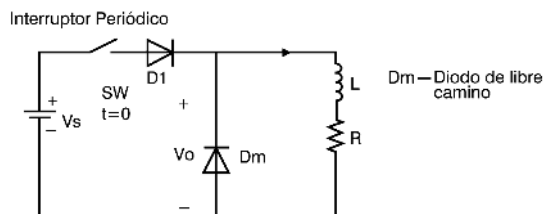
Los elementos que conforman este convertidor, básicamente son semiconductores, los cuales se pueden analizar como si fueran interruptores ideales.

### 13.6 Elementos básicos de electrónica de potencia que conforman el convertidor

Una parte fundamental en los lazos de control es la parte de electrónica de potencia que permite generar las señales de entrada al motor eléctrico, las cuales son las señales que manda el sistema de control como lo muestra la figura 13.11, para tener una correcta reproducción de las señales del controlador al actuador eléctrico (motor).

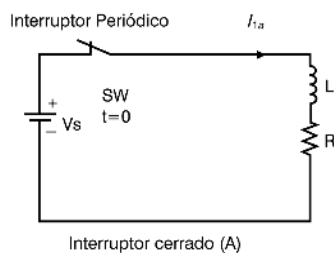
En la parte del diseño, es muy importante conocer el comportamiento de los elementos de la electrónica de potencia, por lo que a continuación, se presenta un breve resumen.

Los elementos básicos de un motor son los resistivos e inductivos, por lo que se inicia el estudio con cargas del tipo R-L y semiconductores como interruptores ideales.



**Figura 13.13** Circuito con cargas del tipo  $R - L$ .

En el circuito de la figura 13.13 se tiene que si el SW se cierra; entonces se establece una corriente a través de la carga, y si se abre el interruptor se debe proporcionar una trayectoria para la corriente hacia la carga inductiva. En caso contrario, la energía inductiva produce un voltaje alto y se disipa en forma de calor a través del interruptor. Esto se representa mediante las figuras 13.14 y 13.16, las cuales muestran el comportamiento del circuito eléctrico cuando se cierra el interruptor ideal y cuando se encuentra abierto.



**Figura 13.14** Circuito con interruptor cerrado.

#### Característica de un diodo ideal

En la figura 13.15, se muestra la característica de un diodo ideal. En la gráfica, la línea vertical corresponde a un interruptor que está encendido (cerrado) y en este caso no hay voltaje a través del dispositivo, y la línea horizontal corresponde a un interruptor que está apagado (abierto), y por lo tanto no hay corriente a través del dispositivo.



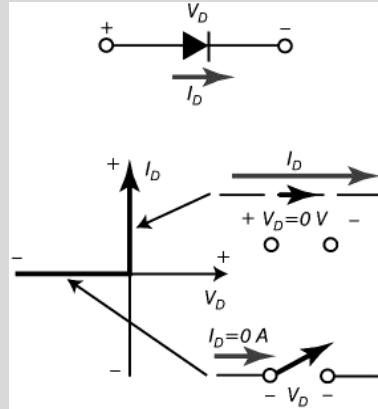


Figura 13.15 Característica del diodo ideal.

Para la condición en la cual se encuentra el interruptor cerrado, se tiene que la corriente es igual a:

$$I_{1a} = \frac{V_s}{R}(1 - e^{-tR/L})$$

como es de esperar en un sistema de primer orden.

Cuando el interruptor se encuentra abierto, se tiene la ecuación diferencial:

$$L \frac{dI_{1b}}{dt} + RI_{1b} = 0$$

la cual no incluye fuente de excitación, por lo que la corriente se define con la condición inicial:

$$I_{1b} = I_{1a}(1 - e^{-tR/L})$$

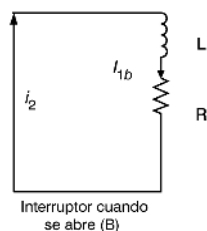


Figura 13.16 Circuito con interruptor abierto.

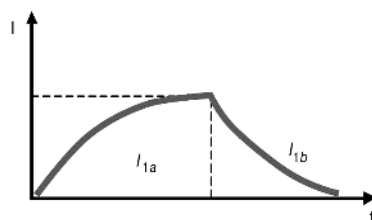


Figura 13.17 Gráfica de la corriente.

En este caso la corriente baja, de acuerdo con la constante de tiempo  $\tau = L/R$ , que es mucho mayor que  $T$  (periodo de conmutación), por lo que se tiene que definir la forma de controlar los tiempos de encendido y de apagado del semiconductor de potencia (interruptor ideal).

### 13.6.1 Convertidor estático de c.c. a c.c.

Este convertidor se basa en tener una fuente de alimentación de c.c., la cual pasa por un semiconductor de potencia, y en que se pueden regular los tiempos de encendido y de apagado, para lograr que el voltaje promedio que le se le inyecta a la carga cambie, de acuerdo con las condiciones que se establecen en el controlador (Ver la Fig. 13.18).

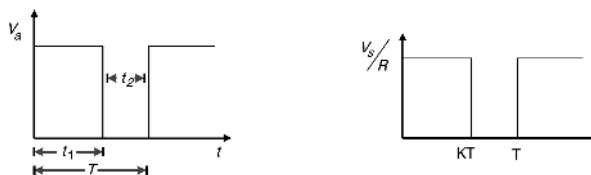


Figura 13.18 Gráficas de voltaje y corriente.

El voltaje promedio se define como:

$$V_a = \frac{1}{T} \int_0^{t_1} v_s dt = \frac{t_1}{T} V_s = f t_1 V_s = k V_s$$

y la corriente promedio como:

$$I_a = \frac{V_a}{R} = \frac{k V_s}{R}$$

donde:  $k$  es el ciclo de trabajo del interruptor,  $f$  es la frecuencia de conmutación, y  $T$  es el periodo de conmutación.

El valor RMS del voltaje de salida ( $V_s$ ) es:

$$V_s = \left( \frac{1}{T} \int_0^{KT} V_s^2 dt \right)^{1/2} = \sqrt{k} V_s$$

$$\int_0^{KT} 0$$

Analizando un circuito resistivo, se puede ver que el convertidor hace que la resistencia  $R$  sea una resistencia variable:

$$R = \frac{V_s}{I_a} = \frac{V_s}{k V_s / R} = \frac{R}{k}$$

Por lo tanto, para la generación del ciclo de trabajo se tiene una señal de referencia  $V_r$  y una señal portadora:

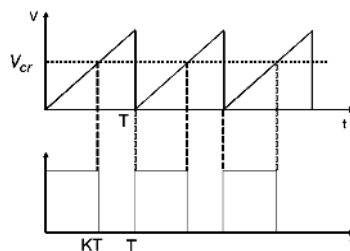
$$\bar{V}_r = \frac{V_r}{T} = t$$

$$\bar{V}_{cr} = kT$$

El ciclo de trabajo se define como:

$$k = \frac{\bar{V}_{cr}}{\bar{V}_r} = M$$

donde:  $M$  es el índice de modulación contenido en  $(0,1)$ .



**Figura 13.19** Gráfica de señal de referencia y señal portadora.

Este convertidor, es la base de un sistema de c.c. a c.c., de un solo cuadrante, y para poder controlar el motor en los cuatro cuadrantes, se tiene que diseñar un puente H, que es una expansión del convertidor presentado.

Se tiene que tomar en cuenta que el motor no está diseñado para trabajar con alta frecuencia en la señal de alimentación (siendo necesario el empleo de filtros normalmente *LC* los cuales aminoran el efecto de esta alta-frecuencia), así como el hecho de que los semiconductores tienen la mayor cantidad de pérdidas cuando conmutan de un estado a otro. Si la frecuencia de conmutación cambia, es necesario cambiar el valor del diseño del filtro pasa bajas, para que esto evite la frecuencia de conmutación. La eficiencia de los circuitos de electrónica de potencia está arriba de 92 %.

### Filtro pasabajas

Un filtro pasabajas, se caracteriza por permitir el paso de las frecuencias más bajas y atenuar las frecuencias más altas.

La función de transferencia de un filtro pasabajas de primer orden es:

$$H(s) = K \frac{1}{1 + \frac{s}{W_c}}$$

donde:  $W_c$  corresponde a la frecuencia de corte, es decir, a la frecuencia a partir de la cual el filtro comienza a atenuar la señal de entrada.

Por otro lado, la función de transferencia de un filtro pasabajas de segundo orden es:

$$H(s) = K \frac{W_o^2}{s^2 + 2EW_o s + W_o^2}$$

donde:  $W_o$  es la frecuencia natural del filtro y  $E$  es el factor de amortiguamiento de éste.



### 13.7 Diagrama de bloques simplificado de control de posición de un motor

Empleando la descripción del convertidor:

$$e^{-s\tau_0} \approx \frac{1}{1 + s\tau_0}$$

y las partes descritas anteriormente se puede simplificar el control de posición de un motor empleando el diagrama de la figura 13.20.

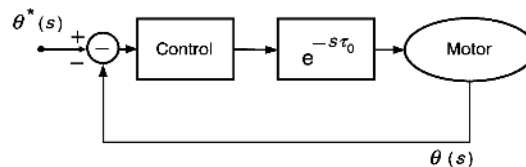


Figura 13.20 Diagrama para simplificar el control de posición.

En términos simples, si se controla la posición  $\theta(s)$  a través de la velocidad  $\varpi(s)$  se obtiene el diagrama de bloques (que no tiene perfil de carga) de la figura 13.21.

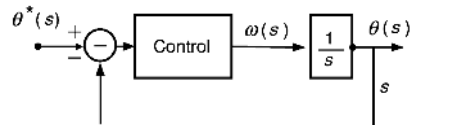


Figura 13.21 Diagrama obtenido a partir del diagrama de la figura 13.1

En este tipo de control, no es muy recomendable usar la acción diferencial debido a que puede existir ruido en la señal, el cual puede afectar de manera nociva el desempeño del sistema, por lo que se propone el empleo de controladores con acción proporcional e integral (PI).

Se puede ver que este es un sistema tipo cero, sistemas de acuerdo con el número de polos en el origen, por lo que para anular el error de posición en estado permanente se requiere un control PI. Para controlar el par, es necesario controlar primero la variable eléctrica que es la corriente, y ésta se puede controlar a través del voltaje de entrada mientras que la FEM se puede observar como una perturbación en el circuito eléctrico del motor.

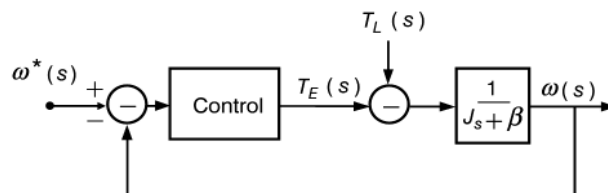


Figura 13.22 Diagrama P - I.

Para el control de velocidad, se tiene que considerar que la variable manipulada es el par electromagnético:

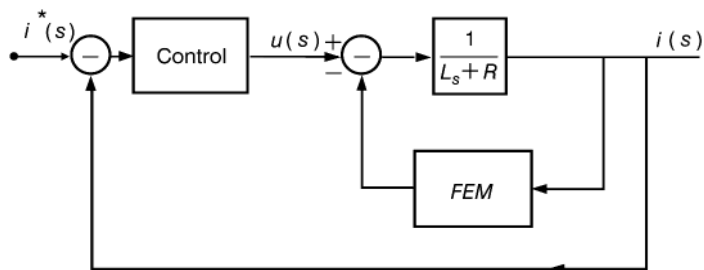


Figura 13.23

### Gráfica de Bode

Un diagrama de Bode, es la representación gráfica de la función de transferencia de un sistema, siendo la variable independiente la frecuencia.

Normalmente, un diagrama de Bode consta de dos gráficas separadas, una que corresponde a la magnitud de la función y otra a la fase de la misma.



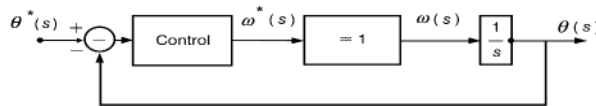


### Ancho de banda

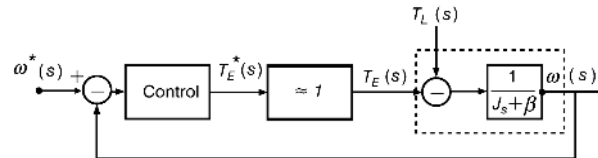
En relación con las señales analógicas, el ancho de banda es la anchura, medida en hertz, del rango de frecuencias en el que se concentra la mayor parte de la potencia de la señal. En términos analíticos, el ancho de banda se puede calcular a partir de una señal temporal mediante el análisis de Fourier.



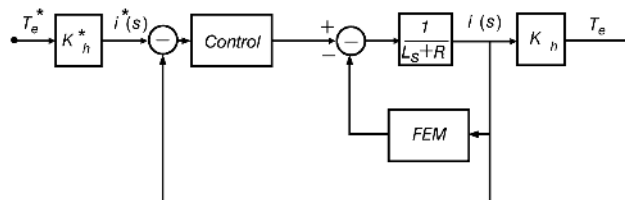
Si se ajusta el control de corriente con un ancho de banda superior a 3 veces, se puede suponer que el lazo de par electromagnético actúa de la siguiente manera:  $T_e^* \approx T_e$ , esto es, como si fuera una ganancia unitaria. De la misma forma se puede considerar que  $\omega_e^* \approx \omega_e$ , por lo tanto, se pueden tener los lazos de control mostrados en las figuras 13.24 a 13.26.



**Figura 13.24** Partiendo del lazo externo, se tiene esta configuración del control de posición.



**Figura 13.25** Como lazo de velocidad se tiene esta configuración.



**Figura 13.26** El lazo más interno es el del par electromagnético, el cual se presenta aquí.

Si se observa con detenimiento, se puede decir que el lazo de velocidad en un control de posición tiene un efecto que estabiliza el sistema. Para ilustrar esto de una manera sencilla, se pueden proponer controladores proporcionales para los dos lazos, el lazo de posición y el lazo de velocidad, donde  $k_e$  es la ganancia para la posición, y  $k_\omega$  la ganancia de velocidad como se muestra en la figura 13.27, se tiene que tomar en cuenta que se desprecia el efecto de la fricción en la ecuación mecánica.

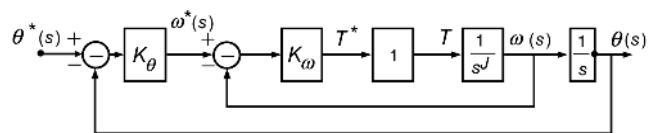


Figura 13.27 Ganancia de velocidad.

Como resultado, se tiene la siguiente función de transferencia:

$$\frac{\theta(s)}{\theta^*(s)} = \frac{k_\theta k_\omega}{Js^2 + k_\omega s} + k_\theta k_\omega$$

donde los polos se pueden definir como:

$$polos = \frac{-k_\omega}{2J} \pm \sqrt{\frac{k_\omega^2}{4J^2} - \frac{k_\omega \cdot k_\theta}{J}}$$

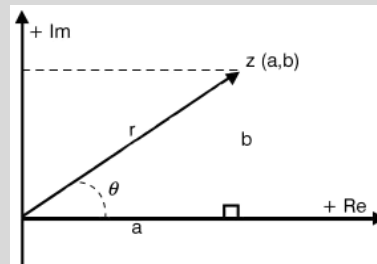
Si las ganancias de los controladores son positivas, entonces los polos están en el semiplano izquierdo del plano complejo, lo que caracteriza el comportamiento de un sistema estable; también se puede tener un sistema que garantiza ciertos márgenes de estabilidad. Si sólo se tiene el control de posición, la función de transferencia está representada por:

$$\frac{\theta(s)}{\theta^*(s)} = \frac{k_\theta}{k_\theta}$$

Los polos están en el eje imaginario y no se puede estabilizar empleando sólo el control proporcional. Lo más utilizado y recomendado en la literatura, es el empleo de controladores tipo PI, que puede ser implementado de manera analógica o digital.

### Plano complejo

El plano complejo, es el espacio de dos dimensiones en el que se representan los números complejos. Dado un número complejo  $z = a + ib$ , la representación de éste en el plano complejo, es un punto con coordenadas  $(a, b)$  como se muestra en la siguiente figura.



**Figura 13.28** Representación de un plano complejo.

En el eje horizontal se representa la parte real de  $z$ , mientras que en el vertical la parte imaginaria,  $r$  es la magnitud de  $z$  y  $\theta$  es el ángulo entre el eje real y el vector trazado desde el origen hasta el punto  $(a, b)$ .

A cada punto de este plano le corresponde un número complejo único, y a cada número complejo le corresponde un punto único de este plano.

El control tipo PI se puede definir de manera continua como se presenta a continuación, donde la entrada para el controlador es el error:

$$e(t) = y^*(t) - y(t)$$

Para evaluar la salida se tiene que:

$$u(t) = k_p \left[ e(t) + \frac{1}{\tau_i} \int e(t) dt \right]$$

La función de transferencia del controlador queda definida por:

$$u(s) = k_p \frac{1 + s\tau_i}{s\tau_i} e(s)$$

donde:  $k_p$  es la constante proporcional del controlador y  $\tau_i$  es la constante de tiempo integral.

En este tipo de controladores, se tiene que tener cuidado cuando el valor del error permanece por mucho tiempo; esto ocurre porque la acción integral se incrementa y tiende a saturarse, por lo que la señal de salida se tiene que limitar, lo cual se puede lograr de una manera muy sencilla restando la parte proporcional de la señal de salida. De manera analógica se puede tener una topología conformada por un amplificador operacional, un diodo zener, elementos resistivos y capacitivos; el diagrama de esto se muestra en la figura 13.29.

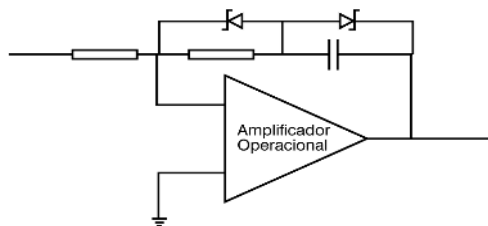


Figura 13.29 Control PI con anti-windup.

#### Diodo Zener

Un diodo Zener, es un diodo de silicio diseñado para funcionar en las zonas de ruptura. El diodo Zener, que también es conocido como diodo de avalancha o de ruptura, es la parte esencial de los reguladores de tensión casi constantes, independientemente de que se presenten grandes variaciones de la tensión de red, de la resistencia de carga y de la temperatura



#### Amplificador operacional. Configuración de los amplificadores diferenciador e integrador

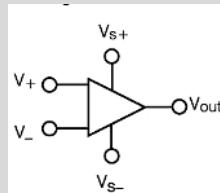
Un amplificador operacional es un circuito electrónico que se caracteriza por tener dos entradas y una salida. La salida es la diferencia de las dos entradas multiplicada por un factor ( $G$ ) de ganancia:

$$V_{out} = G \cdot (V_+ - V_-)$$

El símbolo de un amplificador operacional es el siguiente:



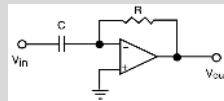
### Amplificador operacional. Configuración de los amplificadores diferenciador e integrador



**Figura 13.30** Símbolo de un amplificador operacional.

Aquí,  $V_+$  es la entrada no inversora,  $V_-$  es la entrada inversora,  $V_{out}$  es la salida,  $V_{s+}$  es la alimentación positiva y  $V_{s-}$  es la alimentación negativa.

En la siguiente figura, se muestra la configuración del amplificador derivador ideal:

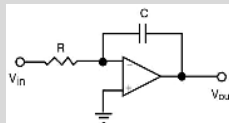


**Figura 13.31** Configuración de un amplificador operacional, como derivador.

Este amplificador deriva e invierte la señal respecto al tiempo y su voltaje de salida es:

$$V_{out} = -RC \frac{dV_{in}}{dt}$$

Finalmente, la configuración del amplificador integrador ideal es la siguiente:



**Figura 13.32** Configuración del amplificador operacional, como integrador.



Este amplificador integra e invierte la señal ( $V_{in}$  y  $V_{out}$  son funciones dependientes del tiempo) y su voltaje de salida está dado por

$$V_{out} = \int_0^t -\frac{V_{in}}{C} dt + V_{inicial}$$

Aquí  $V_{inicial}$  es el voltaje de salida en el instante inicial.



Cuando se requiere programar el controlador, empleando un microcontrolador, de manera digital, es necesario tener la ecuación en forma discreta, definiéndose de la siguiente manera:

$$u(k) = k_p \left[ y^*(k) - y(k) + \frac{T_s}{T_i} \sum_{n=0}^{n=k} (e(k)) \right]$$

$$u_{\text{integrador}}(k) = k_p \left[ \frac{T_s}{T_i} \sum_{n=0}^{n=k} (e(k)) \right]$$

$$u(k) = K_p \cdot (e(k)) + u_{\text{integrador}}(k)$$

donde el error se define por  $e(k) = y^*(k) - y(k)$

De forma digital, se puede programar un anti-windup de la siguiente manera, en la cual se tienen límites de los valores de la acción integral:

$$\begin{aligned} &\text{If } u(k) > u_{\max} \{ \\ &\quad u(k) > u_{\max} \\ &u_{\text{integrador}}(k) = u_{\max}(k) - k_p(e(k)) \\ &\quad \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{else If } u(k) < u_{\min} \{ \\ &\quad u(k) < u_{\min} \\ &u_{\text{integrador}}(k) = u_{\min}(k) - k_p(e(k)) \end{aligned}$$

}

Después de analizar el efecto de la acción integral, es importante tomar en cuenta que para el control de velocidad se tienen dos integradores, por lo que se pueden ubicar los polos teniendo en cuenta el diagrama de bloques de la figura 13.33 que representa este sistema.

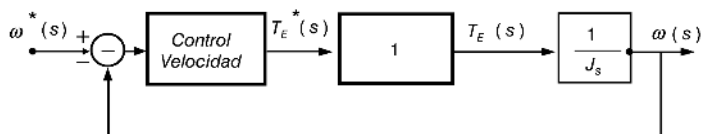


Figura 13.33 Control de velocidad

La función de transferencia se define por:

$$\frac{\omega(s)}{\omega^*(s)} = \frac{k_p(s\tau_i + 1)}{J\tau_i s^2 + k_p\tau_i s + k_p}$$

Los polos se encuentran empleando la siguiente expresión:

$$polos = \frac{-k_p}{2J} \pm \sqrt{\frac{k_p^2}{4J^2} - \frac{k_p}{J\tau_i}}$$

Se considera que el lazo de control del par es infinitamente rápido (por esta razón el valor de  $k_p$  no puede ser muy grande, porque puede demeritar la condición del lazo de par).

### Control de posición de un motor

En el archivo Anti-windup, se presenta el diseño del control de posición de un motor de c.c., con acción antisaturación.

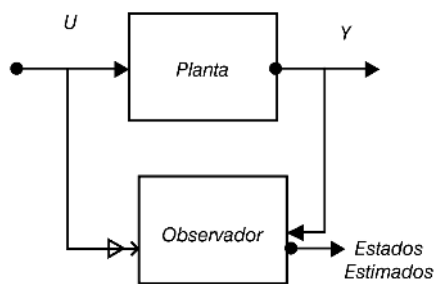


### 13.8 Observador lineal en motores de corriente continua

Se han desarrollado varias técnicas de control, para mejorar la respuesta dinámica del sistema, así como para estimar variables que no están disponibles directamente o cuando se eliminan sensores.

En esta sección, se exponen los principios básicos de los observadores, y se diseñan sistemas de control por retroalimentación de estado.

El observador lineal, se usa para estimar los estados de un sistema, basados en la dinámica de la entrada y la salida, por lo que un modelo básico puede diseñarse como se muestra en la figura 13.24.



**Figura 13.34** Estimar los estados de un sistema.

La planta se puede describir mediante la siguiente ecuación de estado:

$$s\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$y = \mathbf{c}\mathbf{x}$$

El observador se define como:

$$s\hat{\mathbf{x}} = \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\hat{y} = \mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}$$

Los dos sistemas tienen la misma entrada y salida, por lo que podría pensarse que tienen la misma dinámica; sin embargo, se tienen que tomar en cuenta las condiciones iniciales de la planta, siendo necesario definir el error entre la planta y el observador:

$$E = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$$

Se puede escribir:

$$sE = s\mathbf{x} - s\hat{\mathbf{x}}$$



$$sE = AE$$

Si el sistema es estable, entonces después de un tiempo finito el sistema converge. Para corregir el valor estimado, se suma un término proporcional a la ecuación del observador:

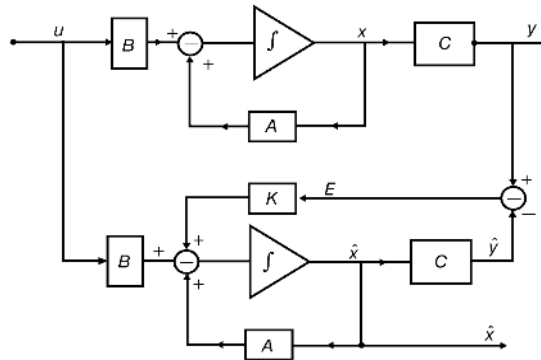
$$s\hat{x} = A\hat{x} + Bu + k(y - \hat{y})$$

donde la dinámica del error se puede escribir como:

$$sE = (A - kc)E$$

Si se selecciona el valor de la ganancia  $k$  de manera correcta, se pueden fijar los polos de la dinámica del error, lo que puede determinar la proporción de convergencia de los estados estimados, reduciendo el problema al seleccionar el valor de  $k$ , además de tomar en cuenta que la entrada del sistema no afecta el tiempo de convergencia del observador.

En la figura 13.35, se muestra el diagrama de bloques de la planta y del observador, y en él se puede ver de manera clara la conformación de cada uno de ellos. También se puede determinar que una función de transferencia de  $U(s)$  a  $Y(s)$  no es afectada por la dinámica del observador. El observador actúa como un sensor de la planta.



**Figura 13.35** Diagrama de bloques de la planta y del observador.

**Ejemplo.** Se tiene el caso de un servomotor que se describe mediante un modelo en variables de estado, las cuales son la posición y la velocidad. El objetivo, es determinar la matriz de ganancia  $k$  para el diseño de un observador, que cumpla con al menos tener una dinámica superior diez veces que la planta.

Entonces se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u$$

$$y = cx = [0 \ 1] \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix}$$

El paso inicial para el diseño del observador, es la definición de la matriz de observabilidad, para analizar si es de rango completo (número de filas o columnas linealmente independientes):

$$\begin{bmatrix} cA^c \\ cA^2 \\ cA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Para el sistema planteado se tiene que:

$$\begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}$$

que no es de rango completo, esto es, no se pueden estimar todos los estados del sistema, en consecuencia no se puede calcular la posición a través de la velocidad, por esto es necesario reformular el modelo de una manera alterna tomando como salida la posición:

$$y = \theta = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix}$$

Siendo este sistema de rango completo, se concluye que se puede estimar la velocidad a través de la posición.

En el segundo paso del diseño, se requiere el cálculo de la ganancia  $K$ ; entre los métodos existentes se tiene el de Bass Gura y la fórmula de Ackermann (que se explicará más adelante), para lo cual se tienen que definir la posición de los polos deseados. En este caso particular, se plantea que sean 10 veces más rápidos que la planta, por lo que el valor de la ganancia es igual a  $k = [1.9/0.81]^T$

En general, los dos métodos citados se describen de la siguiente forma: para el método de Bass Gura se tiene que:

$$k = \bar{k}T^1$$

$$\bar{k} = [(\bar{\alpha} - a_n)(\bar{\alpha}_{n-1} - \alpha_{n-1}) \dots (\bar{\alpha}_1 - a_1)]$$

y para el método de Ackermann:

$$k = [0 \ 0 \dots 1][M_c]^{-1}[\Phi_d(A)]$$

### 13.9 Retroalimentación de estados

Para definir con más detalle cómo se puede obtener el valor de esta ganancia  $k$ , se puede ver como una ganancia que altera la dinámica del observador, y también que puede encontrarse una ganancia que altere la dinámica de la planta (controlador).

Tomando como base el diagrama en lazo abierto de la planta que se tiene, y sumando después la matriz de ganancia en lazo cerrado se tiene un controlador que reubica los polos del sistema cambiando la dinámica de la misma.

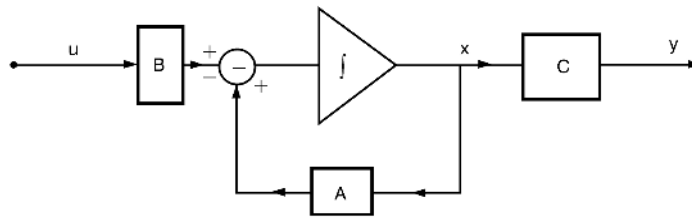


Figura 13.36 Diagrama en lazo abierto.

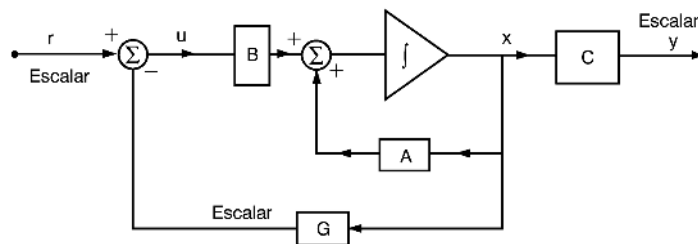


Figura 13.37 Diagrama en lazo cerrado.

Se tiene que  $G = g$ , es un vector:

$$g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$$

la señal de salida del sistema es un escalar:

$$r_m = g' x = [g_1 g_2 \dots g_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Se supone que la entrada y la salida son escalares ( $y$ ,  $r$  y  $r_m$  son escalares), entonces  $u = -r_m = -g' x$ . Sin tomar en cuenta la entrada del sistema se puede decir que:

$$\dot{x} = (A - bg')x$$

Por lo tanto, los eigenvectores en lazo cerrado son

$$\left| SI - A - bg' \right| = 0$$

y los polos buscados están definidos por

$$-\lambda_1 - \lambda_2 \dots - \lambda_n$$

**Ejemplo.** Se tiene un motor de c.c. descrito por el modelo en variables de estado que se presenta a continuación, y se desea ubicar los polos del sistema en  $s = -1 \pm j$  por lo que se requiere obtener la matriz de ganancia  $k$ , que es equivalente al vector  $g$  en el sistema en lazo cerrado.

El modelo del motor de c.c. es:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Desarrollando para obtener el vector los polos se tiene que:

$$bg' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} [g_1 \quad g_2] = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ 2g_1 & 2g_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 SI - A + bg' &= \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ 2g_1 & 2g_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} s & +1 & g_1 & g_2 \\ -1 & +2g_1 & s & 2 & 2g_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Luego de calcular el determinante, se obtiene que:

$$(s + 1 + g_1)(s + 2) + g_2 - g_2(2g_1 - 1) = 0$$

y de aquí resulta que:

$$s^2 + s(3 + g_1 + 2g_2) + (2 + 2g_1 + 3g_2) = 0$$

Usando los polos deseados se tiene que:

$$(s + 1 + j)(s + 1 - j) = s^2 + 2s + 2 = 0$$

Igualando los coeficientes correspondientes se obtiene que:

$$g_1 + 2g_2 = -1$$

$$2g_1 + 3g_2 = 0$$

y resolviendo este sistema resulta que:

$$g_1 = 3$$

$$g_2 = -2$$

$$g = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

y por lo tanto:

$$u = -g'x = -3x_1 + 2x_2$$

Otra forma de obtener el vector  $g$  es a través de la fórmula de Ackermann:

$$g'_x = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] C_T^{-1} \Lambda$$

$C_T =$  Matriz de controlabilidad

$$\Lambda = A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \dots + a_n I$$

$$s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

en donde las  $a$  son los coeficientes deseados, y  $A$  es la matriz del sistema.

Retomado el ejemplo anterior, en este caso se tiene lo siguiente.

Para el coeficiente de  $s$ , se tiene que  $a_1 = 2$  y para el coeficiente independiente  $a_2 = 2$ , por lo tanto:

$$s^2 + 2s + 2 = 0$$

y también:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C_T = [ B \quad AB ] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

La matriz de controlabilidad que cumple, es de rango completo:

$$C_T^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

para  $n = 2$ :

$$\Lambda = A^2 + a_1 A + a_2 I$$

$$\Lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$g'_x = [ 0 \quad 1 ] \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = [ 3 \quad -2 ]$$

Se tiene otro ejemplo de diseño para un motor de c.c. como se muestra en la figura 13.38, con el voltaje como entrada, y un par electromagnético (simplificado) de salida, manteniendo el par de carga

igual a cero,  $T_L = 0$ . Entonces:

$$k_\omega V_1 - c\omega = J\dot{\omega}$$

En lazo abierto:

$$\dot{\omega} = -\frac{c}{J}\omega + \frac{k_m}{J}v_i$$

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c}{J} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_m}{J} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Los datos son los siguientes:

$$\begin{cases} J = 1.0 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2 \\ c = 0.02 \text{ N} \cdot \text{m/s} \\ k_m = 8 \text{ N} \cdot \text{m/V} \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -0.02 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

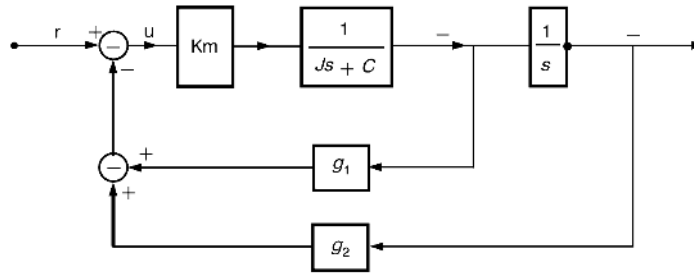
La matriz de controlabilidad, de rango completo es:

$$C_T = \begin{bmatrix} 8 & -0.16 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$C_T = |SI - (A - bg') = 0|$$

La ecuación característica del sistema en lazo cerrado es:

$$s^2 + s(0.02 + 8g_1) + 8g_2 = 0$$



**Figura 13.38** Ejemplo de diseño de un motor de c.c.

La ecuación deseada es:

$$s^2 + 2s + 1 = 0$$

$$0.02 + 8g_1 = 2$$

$$8g_2 = 1$$

y la solución del sistema es:

$$g_1 = 0.2475$$

$$g_2 = 0.125$$

Reduciendo el diagrama de bloques resulta que:

$$\frac{\theta}{v_1} = \frac{8}{s^2 + s + (0.02 + 8g_1) + 8g_2}$$

Como se ve, es igual que la anterior.

Por otro lado, se puede emplear el comando de Matlab (acker) para obtener  $g$ :

### 13.10 Pasos básicos para la retroalimentación de estado

Resumiendo los pasos más importantes para realizar la retroalimentación de estado, se puede decir que ésta es una técnica para el posicionamiento o colocación de dos valores propios. Dada la ecuación de



estado de lazo abierto:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

se aplica la ley de control  $u(t) = Nr(t) - kx(t)$ , y se obtiene la ecuación de estado de lazo cerrado:

$$\dot{x}t = (A - BK)x(t) - BN_r(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Si un sistema es controlable, proyectándose una matriz de ganancia  $\mathbf{K}$  apropiada, se pueden posicionar los autovalores de  $(\mathbf{A}-\mathbf{BK})$  en cualquier posición deseada en el plano  $s$ .

Considérese un motor de c.c., descrito por las ecuaciones de estado:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ -0.02 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$$

1. Su polinomio característico de lazo abierto (sin retroalimentación de estados) está dado por:

$$\Delta(s) = \det(sI - A) = \begin{vmatrix} s + 10 & -1 \\ 0.02 & s + 2 \end{vmatrix} = s^2 + 12s + 20.02$$

- Las raíces de la ecuación característica  $\Delta(s) = 0$ , son  $s = -9.9975$  y  $s = -2.0025$ .
- Obsérvese que al sistema le lleva aproximadamente 3 segundos para alcanzar el valor nominal. La velocidad final está cerca de 1/10 de la amplitud de la tensión de entrada.
- Se desea diseñar un controlador por retroalimentación de estados, de forma que la respuesta del motor sea más rápida, y lograr que  $\omega(t)$  siga valores constantes  $r(t)$ .

2. Para calcular la ganancia de retroalimentación adecuada, se debe seguir la matriz de controlabilidad  $M_c$ :

$$M_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}; \text{rango}(M_c) = 2$$

El sistema es controlable.

- Como el sistema no se encuentra en forma canónica controlable, se determina la transformación T necesaria para llevar el sistema a esta forma canónica. Si se conoce esta transformación de la matriz de controlabilidad  $Mc$ , se puede determinar la matriz  $\mathbf{K}$  por los tres métodos ya vistos:

- i) Por sustitución directa.
- ii) Por la ecuación de Bass Gura.
- iii) Por la ecuación de Ackermann.

A continuación, se van a aplicar los métodos (ii) y (iii), y se van a comparar los resultados.

Método (ii): Ecuación de Bass Gura. Para usar esta ecuación, se necesita determinar la matriz de transformación T, o el polinomio despejado  $\Delta_d(s)$ .

$T = McW$ .  $Mc$  se determinó anteriormente. Ahora se va a determinar la matriz W:

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con  $\Delta(s) = s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$

Como  $\Delta(s) = s^2 + 12s + 20.02$  se tiene que:

$$W = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 20 & 2 \end{bmatrix}$$

Para determinar:

$$\bar{k}[(\bar{\alpha} - a_n)(\bar{\alpha}_{n-1} - a_{n-1}) \cdots (\bar{\alpha}_1 - a_1)]$$

primero se necesita obtener un polinomio característico deseado (coeficientes  $\bar{\alpha}_i$ ), y para esto es indispensable especificar los polos deseados.

Supóngase que se desea posicionar los polos de lazo cerrado en  $s = -5 \pm j$ , los cuales resultan en una respuesta de escalón con un sobrepaso de 0.1% en un tiempo de establecimiento de aproximadamente 1 segundo. A partir de estas especificaciones, el polinomio característico deseado es:

$$\Delta k(s) = (s + 5 - j)(s + 5 + j) = s^2 + 10s + 26$$

Con  $\Delta(s)$  y  $\Delta_k(s)$ , se determina la ganancia  $\mathbf{K}$  en las coordenadas  $\hat{k}$  (forma canónica controlable):

$$\bar{k} = [(\bar{\alpha}_2 - \alpha_2)(\bar{\alpha}_1 - \alpha_1)] = [26 - 20.02 \quad 10 - 12] = [5.98 \quad -2]$$

Finalmente, se obtiene la matriz  $k$  en las coordenadas originales del problema mediante  $k = \bar{k}T^{-1}$ :

$$k = [5.98 \quad -2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 20 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = [5.98 \quad -2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 20 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{(4)}$$

$$\Rightarrow k = [12.99 \quad -1]$$

Método(iii): Ecuación de Ackermann.

$$k = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] [M_c]^{-1} [\Phi_d(A)]$$

$$\Rightarrow k = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}^{-1} [A^2 + 10 \times A + 26 \times I]$$

$$[12.99 \quad -1]$$

Autovalores de  $(A - BK) = -5 \pm j$ , como se deseaba.

Después de la revisión de estos temas, es conveniente realizar las prácticas correspondientes al motor de c-c.

Se recomienda al lector que no está familiarizado con estos temas, consultar las referencias relacionadas con sistemas lineales y control lineal multivariable; estas mismas técnicas, se pueden emplear en cualquier tipo de máquinas eléctricas, en especial en las máquinas de c.a., que son muy empleadas por la industria.

### Modelado de un motor

En el archivo Practicas Observadores y Modelos Motor De CC, se incluyen prácticas diseñadas en Matlab, para la descripción del diseño de un observador y modelado del motor de c.c.



### 13.11 Accionamiento eléctrico de velocidad variable para motores de inducción

Los accionamientos eléctricos de motores de inducción tienen gran desarrollo en la industria y son de los que requieren mayor atención. A continuación se presenta la evolución de dichos accionamientos así como las estrategias que se han empleado para poder modificar la velocidad de operación del motor de inducción, también se analizan los principios de modelado, electrónica de potencia y control, necesarios para poder llevar a cabo un accionamiento eléctrico de velocidad variable.

La exposición se inicia con algunas propuestas que intentan modificar algunos parámetros elementales que tienen inferencia sobre la curva mecánica del motor de inducción, como es modificar el número de polos o el valor de la resistencia del rotor como ocurre en el motor de inducción del tipo de anillos deslizantes. Después es claro, que las metodologías de modificar las características de respuesta de velocidad del motor de inducción se incrementaron de manera sustancial con el empleo de la electrónica de potencia y los sistemas de control, los cuales permiten modificar las características en rangos amplios del espectro de velocidad.

Durante el funcionamiento en vacío del motor de inducción, su velocidad se aproxima a la velocidad síncrona; mientras que en operación nominal, se tienen condiciones de deslizamiento con valores muy bajos, para mantener valores de eficiencia elevados.

Esta velocidad síncrona se puede alterar si se cambia el número de polos de la máquina, lo cual está planteado en las ecuaciones, en la que la velocidad síncrona  $n$  es inversamente proporcional al número de polos de la máquina,  $p$ . El cambio de número de polos se realiza de forma práctica cambiando las conexiones de las bobinas del devanado del estator. Para esto, generalmente se emplean devanados distintos, los cuales se embobinan para diferentes números de polos; un devanado se utiliza para una velocidad mayor y el otro para una velocidad menor. Los motores que se utilizan para cambio de polos se pueden diseñar de forma que posean características de par-velocidad similares a las que tienen cualquiera de las cuatro clases de NEMA de motores (A, B, C y D) normalmente del tipo jaula de ardilla, para que éstos se puedan utilizar para los diferentes tipos de carga.

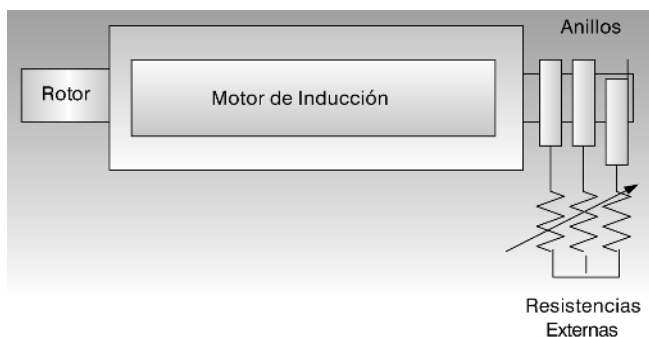
Por complicaciones inherentes al diseño de conexiones no se recomienda tener más de dos velocidades al utilizar este método; además que se necesita un estator modificado que eleva el costo de diseño del motor y puede variar la eficiencia de manera considerable:

$$n = \frac{120f}{p}$$

donde:  $n$  es la velocidad síncrona,  $p$  es el número de polos, y  $f$  es la frecuencia síncrona.

### 13.12 Control por variación de la resistencia del rotor

Este método se ha utilizado para motores de hasta 500 [Hp], y se aplica al motor de inducción de rotor devanado usando resistencias externas que pueden ser conectadas en el devanado del rotor por medio de anillos deslizantes en las terminales del rotor que existen sólo en los motores de inducción del tipo rotor devanado o anillos como lo muestra la figura 13.39, que presenta un motor de inducción de rotor devanado con resistencia externa.



**Figura 13.39** Control de velocidad por variación de la resistencia del rotor.

Como se sabe, el deslizamiento al cual ocurre el par máximo, es directamente proporcional a la resistencia del rotor, por lo que se puede aproximar mediante la siguiente expresión:

$$S_{\max} \propto (R_w + R_{EXT})$$

en donde:  $S_{\max}$  es el deslizamiento al par máximo,  $R_w$  es la resistencia por fase del devanado del rotor y  $R_{ext}$  es la resistencia por fase que se conecta externamente al devanado del rotor.

Si se desea un alto arranque, el valor de la resistencia se puede escoger de forma que el par máximo sea cuando el motor está en estado estacionario, es decir, cuando el deslizamiento sea igual a la unidad. La desventaja que se tiene al emplear este método de control, es que se obtiene una eficiencia baja a velocidades reducidas debido al alto deslizamiento que existe. Este método es aceptable en aplicaciones donde la operación a baja velocidad representa un bajo porcentaje del trabajo total (ventiladores, accionamientos de bombas y accionamiento de grúas).

### 13.13 Control del voltaje de línea

En un motor de inducción, el par desarrollado es proporcional al cuadrado del voltaje en sus terminales. En el caso de que el rotor accione una carga de ventilador, la velocidad de éste, puede variarse en un rango que va de  $n_1$  a  $n_2$  cambiando de voltaje de línea.

La forma en que se puede variar el voltaje en las terminales, es utilizando un auto-transformador trifásico de relación de transformación variable, o mediante un controlador de estado sólido. La diferencia entre las dos formas de variación del voltaje mencionadas, es que en el primer caso, la alimentación es senoidal. En el caso del controlador de estado sólido, éste se emplea generalmente para motores jaula de ardilla de pequeña potencia los cuales accionan ventiladores como cargas. Ahora si se desea utilizar en aplicaciones de gran potencia, será necesario colocar un filtro de entrada para evitar que una gran cantidad de armónicos de corriente fluya a través de la línea de alimentación.

La operación básica del controlador de voltaje a tiristores es que se necesita una señal de mando para que los tiristores sean disparados a un ángulo específico, y con esto se logra obtener un voltaje regulado en las terminales del motor para lograr una velocidad específica. Ahora, para obtener una nueva velocidad de operación, sólo se cambia la señal de mando, y con esto cambia también el ángulo de disparo de los tiristores, y por consiguiente se obtiene un nuevo voltaje en las terminales del motor.

#### Tiristor

El tiristor es un componente electrónico semiconductor que utiliza realimentación interna para producir una conmutación, y generalmente se emplea para el control de potencia.

Los principales tipos de tiristores son los siguientes: rectificador controlado de silicio (SCR), diac, triac, foto-SCR, interruptor controlado por puerta, interruptor controlado de silicio, transistor uniunión (UJT).



La operación en lazo abierto de este tipo de control no se recomienda si se necesita un control preciso de velocidad, en su lugar se puede utilizar un control en lazo cerrado. Un control con lazo cerrado trabajaría de la siguiente forma: A la entrada del lazo, se coloca la señal de referencia de la velocidad, si la velocidad actual del motor disminuye por alguna razón, como pudiera ser una fluctuación del voltaje de línea o un incremento de la carga, el ángulo de disparo de los tiristores disminuye provocando un incremento del voltaje en las terminales del motor. El incremento de la diferencia entre el voltaje en las terminales y de la fem del motor, incrementa la corriente; y de esta forma, se incrementa el par desarrollado, corrigiéndose así la caída de la velocidad.

Una de las desventajas de este método, es que para bajas velocidades, el deslizamiento se incrementa provocando que la operación del motor sea ineficiente. En cargas tipo ventilación, este problema es menos

acentuado debido a que en deslizamientos altos, el par desarrollado por el motor es menor y las pérdidas no se incrementarán de forma apreciable.

En un motor de inducción, el par desarrollado es proporcional al cuadro del voltaje en sus terminales. La forma en que se puede variar el voltaje en las terminales, es utilizando un auto-transformador trifásico de relación de transformación variable, o mediante un controlador de estado sólido. La diferencia entre estas dos formas es que en la primera la variación es senoidal mientras que en la segunda es no senoidal. La operación en lazo abierto de este tipo de control no se recomienda si se necesita un control preciso de la velocidad, en su lugar se puede utilizar un control de lazo cerrado. Una de las desventajas de este método es que para bajas velocidades el deslizamiento se incrementa provocando que la operación del motor sea ineficiente.

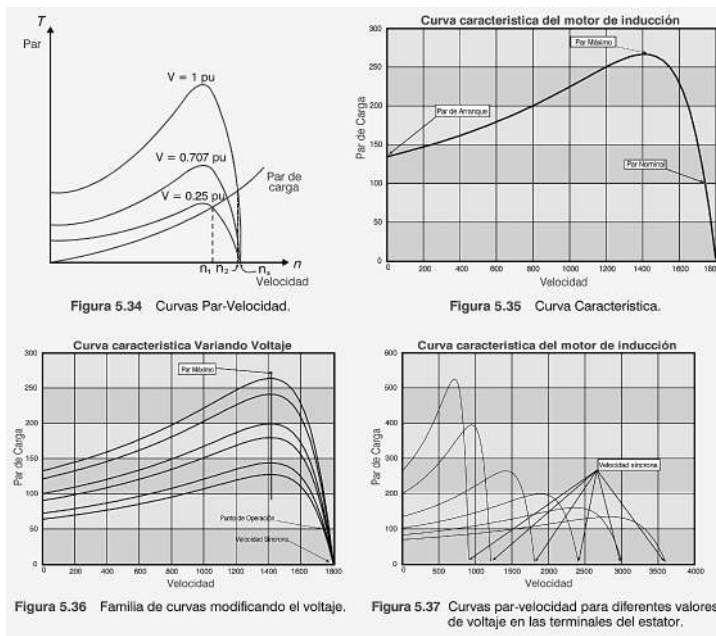
En un motor de inducción, el par electromagnético desarrollado se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$T = \frac{\frac{(|V_1|^2)(R_2)}{(S)(W_s)}}{\left(R_1 + \frac{R_2}{S}\right)^2 + (X_1 + X_2)^2}$$

En la figura 13.40 se muestra un conjunto de curvas mecánicas par-velocidad con diferentes valores de voltaje en las terminales del estator ( $V_1$ ).

El método de control del voltaje de línea para controlar el par, tiene varias desventajas que se presentan a continuación:

- Se tiene un control de la velocidad del rotor limitado entre  $n_1$  y  $n_2$ .
- Puede trabajar en una zona de potencia constante, debido a que con este control, siempre se varía el par, por lo tanto, no se puede trabajar en una zona de par constante.
- A bajas velocidades, el deslizamiento se incrementa provocando que la operación del motor sea ineficiente.



En las figuras 13.41 a 13.43, se presentan varias curvas característica, modificando la frecuencia y modificando voltaje.

En la figura 13.44 se presenta un controlador de voltaje de estado sólido, para cambiar el voltaje en las terminales del estator.

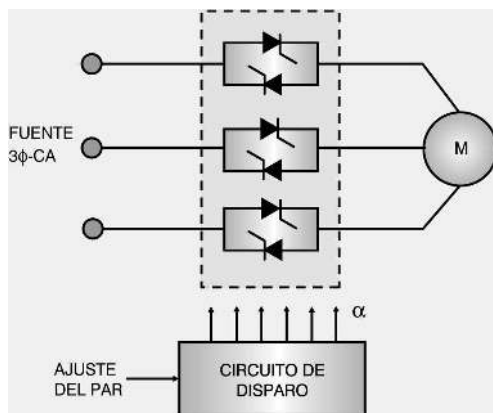


Figura 13.44 Controlador de voltaje de estado sólido.



### 13.14 Operación a frecuencia de deslizamiento constante

Para una operación eficiente del motor de inducción, es deseable una frecuencia de deslizamiento fija. Se obtiene una eficiencia alta y un alto factor de potencia si la frecuencia de deslizamiento se mantiene por debajo de la frecuencia del circuito del rotor, a la cual se desarrolla el par máximo.

En la figura 13.45 la señal  $f_n$  representa la frecuencia que corresponde a la frecuencia de velocidad del motor, y se suma o se resta la frecuencia  $f_2$ , la cual representa la frecuencia de deslizamiento o del circuito del rotor. De esta forma, se obtendrá la frecuencia  $f_1$  que representa la frecuencia del estator:

$$f_1 = f_n \pm f_2$$

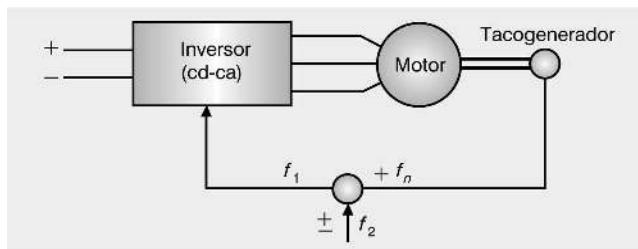


Figura 13.45 Operación de la frecuencia de deslizamiento ( $f_2$ ) constante.

La suma de  $f_2$  y  $f_n$  provocará que la máquina funcione como motor, y la resta de  $f_2$  y  $f_n$  provocará la acción de frenado regenerativo en la máquina cuando ésta cambia de régimen, a ser un generador.

#### 13.14.1 Control de velocidad en lazo cerrado

Un control de velocidad en lazo abierto, tiene la desventaja de que puede existir un incremento en el deslizamiento del rotor; esto ocurre cuando al motor de inducción se le aplica un par de carga.

Para poder mejorar la regulación de velocidad, se tiene que emplear una técnica de compensación de deslizamiento, en la que el inversor de frecuencia es ayudado por una señal proporcional a la corriente del motor. Sin embargo, el control de velocidad en lazo abierto tiene un pobre funcionamiento dinámico y un sistema en lazo cerrado con retroalimentación del tacómetro tiene mejor desempeño; la velocidad del motor entonces, es ajustada por el valor de comando, presentando mejoras en la regulación de velocidad y reduciendo la sensibilidad a las fluctuaciones de carga que generan variaciones en la velocidad establecida. La retroalimentación de la velocidad también asegura el funcionamiento uniforme del accionamiento sobre el completo rango de frecuencia, de esta forma se elimina el decremento en la estabilidad que es

un problema tradicional con los sistemas de accionamientos de velocidad ajustable en lazo abierto para fuentes de bajas frecuencias.

En un inversor de seis pasos con un simple control de voltaje/frecuencia, el voltaje del motor puede ser ajustado por una relación en lazo cerrado de un enlace de voltaje de c.c. usando el control por fase del rectificador. Esta técnica estabiliza el enlace de voltaje de c.c. contra cambios en el voltaje de c.a. utilizado.

### 13.14.2 Control de velocidad por límite de corriente

La velocidad de referencia se compara con la velocidad actual  $n$ , para determinar el error de velocidad, el cual pasa a través del control de velocidad, y se define el comando del inversor de frecuencia y voltaje. Como es usual, el diseño apropiado del control es esencial en el accionamiento eléctrico. El control caracteriza una señal de límite de corriente que sólo tiene efecto cuando las corrientes del motor rebasan el nivel máximo.

La máquina acelera con un par electromagnético constante bajo la influencia del control de límite de corriente hasta que la velocidad de referencia es alcanzada. La corriente entonces cae abajo del límite y la operación en estado estacionario se presenta. Arriba de la velocidad base el convertidor de potencia no puede entregar un incremento de voltaje, funcionamiento a voltaje constante e incrementos de frecuencia, y el motor opera en la región del campo debilitado.

### 13.14.3 Control escalar voltaje/frecuencia

Este control tiene una gran aceptación en la industria, en accionamientos eléctricos en lazo abierto así como en lazo cerrado, por lo que requiere de una atención especial.

En este apartado se explican los aspectos más relevantes; además de que se presentan resultados experimentales, así como el empleo de un simulador industrial del variador de velocidad AV58, de la compañía Schneider-Electric, el cual permitirá poder entender a detalle ejemplos de aplicaciones industriales.

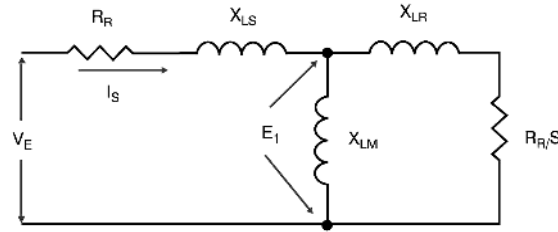
En el control voltaje/frecuencia ( $v/f$ ) también conocido como Control Escalar, se tiene que el par electromagnético del motor y la velocidad se pueden controlar modificando la relación de voltaje y de frecuencia de alimentación en las terminales del estator, y para esto, es necesario contar con un convertidor estático de frecuencia que permita poder alterar el valor de dichas variables y poder modificar de esta forma la curva mecánica del motor de inducción. Existen tres posibles zonas de operación del motor de inducción, y éstas dependen de la característica mecánica de la carga que se tiene, de tal manera que los puntos de operación se adecuen al rango completo de velocidad operación.

Si se mantiene constante la relación  $v/f$ , el flujo del entrehierro se conserva constante por lo que el par electromagnético es constante y se opera en una zona de par constante, si sólo se incrementa la frecuencia y se mantiene constante el voltaje, el flujo disminuye, por lo que el par se decrementa y se

tiene una zona de potencia constante; la tercera zona, es una zona de alta velocidad.

El principio de operación del control escalar se puede entender empleando el circuito equivalente aproximado y las ecuaciones en estado permanente que lo rigen.

En la figura 13.46, se muestra el circuito equivalente, y aplicando las leyes fundamentales de circuitos eléctricos se pueden obtener las ecuaciones que lo describen.



**Figura 13.46** Circuito equivalente de un motor de inducción en estado permanente.

Analizando el circuito equivalente de un motor de inducción, se obtiene la siguiente ecuación de voltaje:

$$V_E = I_E(R_E + jX_{L_E}) + E_1$$

Si se supone una excitación senoidal, el flujo generado tienen una forma senoidal descrita por la expresión

$$\Phi(t) = \phi_{\max} \text{sen}(\omega_e t)$$

Al derivar esta expresión para obtener la fem ( $E_1 = \frac{d\phi}{dt}$ ) se tiene

$$E_1 = \phi_{\max} \cos(\omega_e t) = \phi_{\max} 2\pi f_1 \cos(\omega_e t)$$

y resolviendo para determinar el valor RMS de la fem se tiene que:

$$E_1 = \frac{2\pi f_1}{\sqrt{2}} \phi_{\max} \eta$$

Si se agrupan los términos constantes, y si se desprecia la caída de tensión  $I_E(R_E + jX_{L_E})$ , se puede aproximar  $V_E \approx E_1$  y de esto resulta la relación voltaje/frecuencia:

$$\frac{V_1}{f_1} \approx \frac{E_1}{f_1} \approx K \phi_{\max}$$

donde:  $\omega = 2\pi f_1$  es la velocidad síncrona,  $\Phi$  es el flujo del entrehierro y  $\eta$  es una constante de diseño.

Empleando esta ecuación, se puede ver que si se varía la relación voltaje/frecuencia, se cambia el flujo

mutuo ( $\Phi_m$ ), y empleando el flujo mutuo se puede derivar la siguiente expresión de par electromagnético.

La corriente del rotor se define como

$$i_2 = \frac{E_1}{\sqrt{X_{LR}^2 + \frac{R_R^2}{s}}}$$

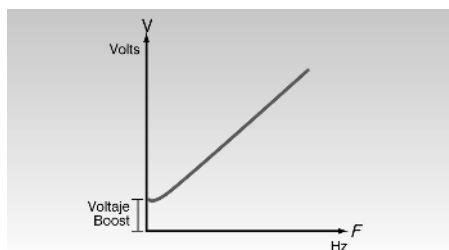
Si el flujo máximo es:

$$\phi_{\max} = \frac{\sqrt{2}E_1}{2\pi f_1}$$

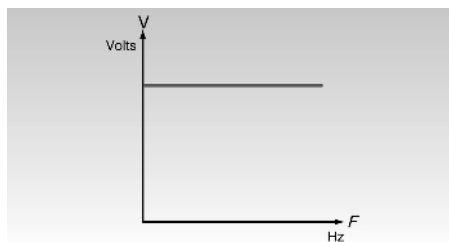
$$T = \frac{3P\pi \frac{R_R}{s} f_1}{2 \left[ X_2^2 + \left( \frac{R_R}{s} \right)^2 \right]} \phi_{\max}^2$$

Entonces, se puede tener que el par es proporcional al cuadrado del flujo. Si el flujo es constante, se puede tener un par constante.

A través de estas expresiones, se puede variar el par electromagnético así como la velocidad, dependiendo de las necesidades de la carga.



**Figura 13.47** Variación requerida de voltaje/frecuencia para mantener una zona de par constante.



**Figura 13.48** Variación requerida de voltaje/frecuencia para mantener una zona de par constante.

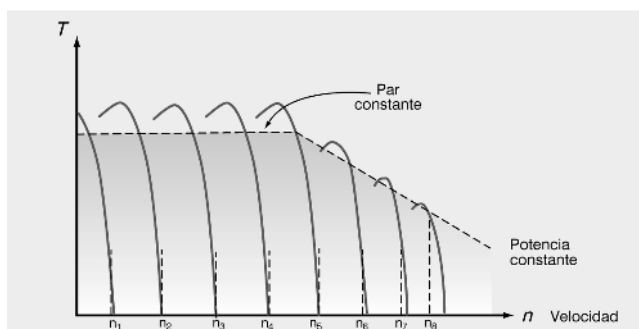
En la figura 13.47, se presenta la relación voltaje/frecuencia, para trabajar en una zona de par constante; se puede observar que es necesario un voltaje para compensar la caída de voltaje en el estator a bajas frecuencias.

Por ejemplo, si se desea tener una zona de par constante, el flujo mutuo debe ser constante, por lo tanto la relación voltaje / frecuencia también debe ser constante. Si se desea tener una zona de potencia constante, el voltaje se debe mantener constante, mientras que la frecuencia se debe incrementar.

El par electromagnético y la velocidad en un motor de inducción, se pueden controlar modificando la relación del voltaje y la frecuencia de alimentación, como se ha mencionado. Si se mantiene constante; la relación entre ambos parámetros, el flujo del entrehierro se conserva constante, sin embargo, cuando se desea emplear el motor a bajas velocidades (a baja frecuencia), como el algoritmo de control desprecia la caída de tensión en el estator, el flujo se reduce en el entrehierro, debido a que la caída de tensión mencionada es más significativa en función de los valores de voltaje de alimentación al motor, y el voltaje debe incrementarse para mantener el nivel del par en el motor por lo que se requiere un voltaje de compensación (Voltaje Boost). Esto no ocurre a velocidades más altas, por que la caída de tensión no es significativa. Para una demanda del par del motor la velocidad se puede controlar variando la frecuencia, normalmente en el motor, el par electromagnético se mantiene constante, en tanto se varía la velocidad (en la zona de par constante).

El control escalar, ofrece ventajas como es el trabajar sin la necesidad de un sensor de velocidad; y como desventajas que el par y el flujo no son directamente controlados. El control en lugar de ser provisto de una frecuencia y un voltaje de referencia, es un generador de volts constantes por hertz de salida, entonces opera un modulador de ancho de pulso (PWM). A pesar de su arreglo simple éste provee una precisión en la velocidad limitada y una pobre respuesta del par generado a bajas revoluciones.

Frecuentemente existen problemas de estabilidad al aplicar una carga ligera en un rango de frecuencias bajas. Estas modificaciones de variables ( $v/f$ ) generan cambios en la curva par-velocidad, que se presentan a continuación. (Ver la Fig. 13.49)



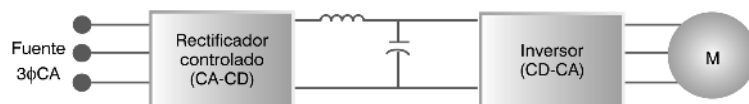
**Figura 13.49** Curvas características de la máquina de inducción de c-a.

### 13.15 Esquema de control general

Para lograr controlar la relación voltaje/frecuencia se puede emplear un esquema de control en lazo abierto con bloques de control para realizar los disparos en el inversor, y poder generar las señales de referencia de voltaje y de frecuencia. Después de tener las señales de referencia se requiere de una estrategia de modulación del ancho de los pulsos, que permite tener las señales que se inyectan al motor. Estas estrategias se pueden tener en lazo abierto o lazo cerrado. Como se puede ver, el diagrama de control se centra en el control del inversor por lo que es muy importante entender el inversor (c-c.-c-a.). Ver la Fig. 13.50



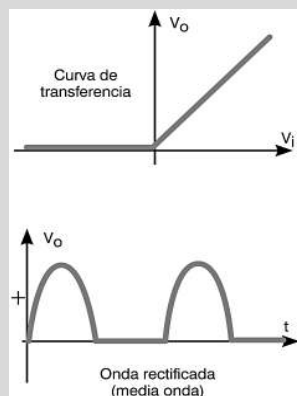
**Figura 13.50** Esquema de control escalar ( $v/f$ ), usando una estrategia PWM con vectores espaciales.



**Figura 13.51** Inversor.

### Curva de respuesta de un rectificador de media onda, y de onda completa

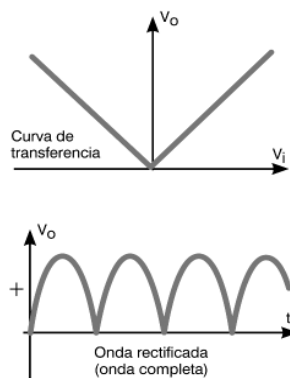
En el caso de un rectificador de media onda la curva de transferencia, que relaciona las tensiones de entrada y de salida, tiene dos tramos: para tensiones de entrada negativas la tensión de salida es nula, mientras que para entradas positivas, las tensiones son iguales. El resultado es que en la carga se ha eliminado la parte negativa de la señal de entrada. En la siguiente figura se muestra la gráfica de la curva de transferencia y la gráfica de la onda rectificada.



**Figura 13.52** Gráfica de la curva de transferencia y la gráfica de la onda rectificada

En relación con un rectificador de onda completa, la curva de transferencia, que relaciona las tensiones de entrada y de salida, tiene dos tramos: para tensiones de entrada positivas las tensiones de entrada y salida son iguales, mientras que para tensiones de entrada negativas, ambas son iguales pero de signo contrario. El resultado es que en la carga se ha eliminado la parte negativa de la señal de entrada transformándola en positiva. En la siguiente figura se muestran las gráficas correspondientes de la curva de transferencia y de la onda rectificada.





**Figura 13.53** Gráficas correspondientes de la curva de transferencia y de la onda rectificada.

De esta forma y variando los parámetros de voltaje y de la frecuencia, se puede controlar el motor manteniendo un par constante (relación lineal), figuras 13.47 y 13.48, o bien una relación no lineal, sólo programando la relación entre ambos.

Como se ve, el esquema de control presenta una nueva perspectiva para el control de velocidad de los motores de inducción de c-a., lo cual abre el panorama a la industria para el uso de estas máquinas con todas las ventajas mencionadas. Sin embargo, este método no presenta todas las ventajas que la industria demanda, las cuales son: sistema en lazo abierto, flexible al cambio de parámetros, control en toda la gama de velocidades, algoritmo de control sencillo, ahorro de energía, poca distorsión armónica y facilidad de manejo.

Una desventaja de la estrategia ( $v/f$ ), es que *está dirigida para el control en lazo abierto (aunque también se puede implementar en lazo cerrado) variando la amplitud y la frecuencia de la fuente de voltaje, es decir, este control está diseñado para usarse en estado permanente y no controla de forma correcta los transitorios.*

El problema principal, es que la relación entre el voltaje y la frecuencia se puede mantener constante, excepto a bajas velocidades, donde el voltaje presenta una caída de tensión significativa, lo que ocasiona que el par realizado por el motor no sea suficiente para generar el flujo correcto y no se tenga control del par. Esta no-linealidad de la relación ( $v/f$ ) se debe a la necesaria compensación de la caída de voltaje en la resistencia del estator. Para compensar esto, se tiene que inyectar un voltaje de compensación en las terminales, el cual depende de la carga y de la variación de la resistencia  $R_s$ , por lo que el usuario tiene que determinar la magnitud de dicho voltaje. Se recomienda el control escalar cuando se tiene definida una carga constante.

A pesar de que las demandas son muchas, este esquema de control es muy empleado en la actualidad, en especial en lazo abierto.

La tabla 13.2 presenta un comparativo entre las ventajas y desventajas que presenta el control escalar.



	Descripción	V/F
1	Control en lazo abierto (posible en lazo cerrado)	Si
2	Flexible a cambio de parámetro	No
3	Toda la gama de velocidades	No
4	Algoritmo Sencillo	Si
5	Ahorro de energía	Si
6	Baja distorsión armónica	No
7	Facilidad de manejo	Si
8	Alta precisión a baja velocidad	No
9	Pocos elementos físicos	Si

Cuadro 13.2 Ventajas y desventajas del control  $v/f$ .

### Prácticas de Control Escalar

El archivo Prácticas de Control Escalar, incluye programas de Matlab y de Simulink para analizar la evolución del desempeño del control V / F.



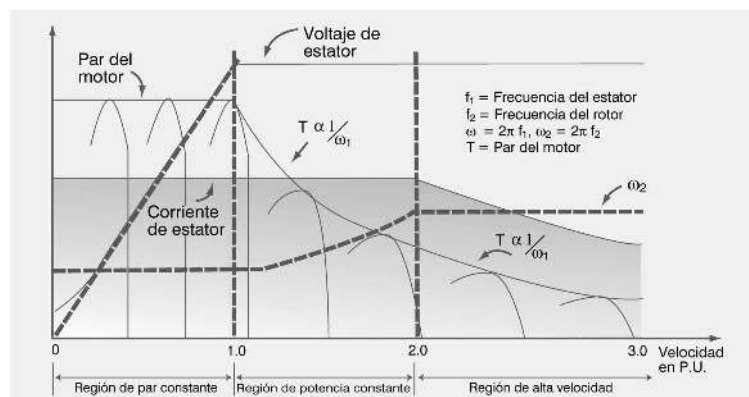
#### 13.16 Operación voltaje/frecuencia en diferentes zonas de operación

El inversor, es una parte fundamental en un accionamiento eléctrico, que genera señales senoidales sintetizadas a través de técnicas de modulación ( $PWM$ ) como es el  $PWM$  senoidal, que puede controlar relativamente fácil tanto el voltaje como la frecuencia, y conseguir que la relación ( $v/f$ ) cambie en forma constante, obteniendo una operación de par constante en el motor de inducción como se mencionó anteriormente. Cuando se arranca el motor desde una velocidad cero, la razón de la portadora puede alcanzar valores muy grandes, manteniéndose constante hasta cierto rango de frecuencia (operación asíncrona), resultando así una forma de onda de corriente casi senoidal y lográndose con esto una gran suavidad de la rotación.

Al incrementarse la velocidad, la modulación es síncrona; donde la razón de portadora comienza a variar en proporción inversa con la frecuencia de la señal de referencia (las señales de referencia y portadora están sincronizadas, siendo  $p$  un múltiplo de tres) evita que la frecuencia de conmutaciones llegue a ser excesiva en el inversor. Cuando el motor está cerca de la velocidad nominal, el índice de modulación comienza a incrementarse hasta cambiar a una operación de seis-pasos en el inversor para tener un voltaje de salida mayor.

El accionamiento del motor, a velocidades por debajo de la velocidad nominal, se realiza aplicando técnicas  $PWM$  que permiten una relación lineal entre el voltaje y la frecuencia requerida en la operación

en zona de par constante. Por encima de la velocidad base, el motor opera con una amplitud fija de voltaje (seis pasos); este modo de operación mantiene al motor en un régimen de potencia constante, donde la capacidad de par decremanta en forma inversamente proporcional con la velocidad. En la figura 13.54 se muestra una gráfica de las características del motor en estas zonas de operación.



**Figura 13.54** Regiones de operación del motor de inducción. Se tiene que  $\omega_1$  es la velocidad síncrona y  $\omega_2$  es la velocidad de deslizamiento.

## Control VF

En el archivo Control VF se presenta una revisión general de la topología del control V/F.



### 13.17 Métodos de control del inversor

#### 13.17.1 Convertidor estático de frecuencia (c.c./c.a.) como fuente de voltaje

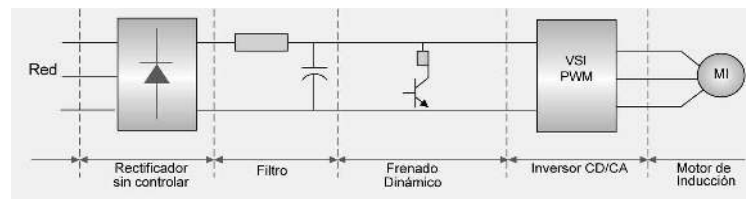
Es necesario comprender con claridad cómo se comporta el convertidor estático de frecuencia (inversor) y qué técnicas existen para controlar este convertidor de c.c./c.a., así como la forma de evitar la distorsión armónica generada por el empleo de semiconductores de potencia, y tener el máximo aprovechamiento de la fuente de energía proporcionada por el bus de c.c.

Como se puede suponer, es necesario operar el inversor como fuente de voltaje para un control voltaje/frecuencia (escalar), por lo que primero se presenta la descripción de las partes elementales que

conforman la parte del accionamiento electrónico, además de que se analizan las principales técnicas de control empleadas en la industria.

### 13.17.2 Topología básica de la etapa de alimentación

La topología básica de este tipo de convertidor se muestra en la figura 5.55, en donde el rectificador no controlado (emplea diodos) proporciona un voltaje constante de c-c., al cual se le elimina el rizado empleando un filtro a la salida del rectificador; entrada al inversor. Dos ventajas fundamentales se deducen de este hecho, por una parte el factor de potencia desde el lado de la red se mejora considerablemente (prácticamente es unitario); y por otra, se tiene la capacidad de frenado dinámico mediante una disipación de energía a través de las resistencias de frenado.



**Figura 13.55** Convertidor de voltaje con salida *PWM* como *VSI*.

En la figura 13.55, se muestra la resistencia de frenado con un interruptor estático que la gobierna, y el interruptor normalmente es activado cuando se tiene un incremento en el voltaje de las terminales del capacitor debido a que la máquina cambió de régimen de motor a generador.

En un control escalar voltaje/frecuencia, es necesario controlar dicha relación, por lo que se requiere el control de dichas variables empleando algún método de control del inversor.

Para controlar estas variables, es necesario utilizar técnicas de modulación de ancho de pulso (*PWM*), así como una técnica elemental conocida como de seis pasos, la cual no permite de manera directa modificar el voltaje de salida del inversor.

### 13.17.3 Inversor como fuente de voltaje o fuente de corriente

Dos formas básicas de funcionamiento de un convertidor son cuando se comporta como una fuente de voltaje o como una fuente de corriente. Ambas, tienen sus ventajas y aplicaciones, las cuales están relacionadas con la forma de controlar al motor ante estos tipos de alimentación. El convertidor puede recibir como señales de referencia de entrada el voltaje a generar y la frecuencia del mismo. En este caso, se modula la señal de salida, para que el valor de voltaje en la misma, sea el indicado por las referencias. En este caso el convertidor se comporta como fuente de voltaje, ya que el motor en sus terminales tiene un voltaje fijo. También se puede enviar una referencia de corriente y adecuar el voltaje de salida en

todo momento, de forma que la corriente de salida se mantenga constante. Esta forma de funcionamiento fija la corriente del motor, y por lo tanto, éste tiene una corriente fija en sus fases, comportándose el convertidor como una fuente de corriente desde este punto de vista. Cuando el convertidor trabaja de esta forma, se dice que está en modo de corriente controlada o inversor con lazo de control de la corriente, es decir, en el convertidor se tienen dos comportamientos básicos:

- Fuente de voltaje. El voltaje de salida se varía modulando el ancho de los pulsos, lo cual se logra aplicando diversas técnicas de PWM.
  
- Fuente de corriente. El voltaje de salida varía como consecuencia de un lazo de control de la corriente, de forma que el motor ve impuesta la corriente en sus fases.

A continuación, se analizará el funcionamiento del inversor con una técnica de los seis pasos, y después se estudiarán otras técnicas de PWM.

#### **13.17.4 Inversor trifásico (como fuente de voltaje) aplicando el método de los seis pasos**

El inversor trifásico, se puede ver como una fuente de voltaje (VSI) que alimenta al motor de inducción a través del convertidor estático de frecuencia de c.c./c.a., por lo que hay que mencionar que esta técnica de seis pasos no se considera una técnica de modulación del ancho de los pulsos (PWM), debido a que la magnitud de la señal de voltaje permanece constante, y ésta sólo se puede cambiar al modificar el valor del bus de corriente continua. Mientras que la frecuencia de la señal de salida generada puede ser modificada, empleando diferentes valores en intervalos de conmutación de los semiconductores de potencia, los cuales se representan como interruptores ideales en la figura, se puede observar un inversor constituido de interruptores ideales.

En el inversor cada semiconductor de potencia es conmutado a intervalos de 180 grados eléctricos y cada fase de salida es conectada al bus de c.c., de manera secuencial, durante cada medio periodo. Las señales trifásicas generadas tienen un defasaje de 120 grados eléctricos entre cada fase en las tres ramas del inversor.

La forma de onda de la señal, es el resultado de una secuencia de disparos; durante intervalos definidos en el diagrama mostrado se conmutan en intervalos de 60 grados eléctricos según se observa en la figura 13.56, además si se examina el voltaje de fase se puede ver que este dibuja una trayectoria de seis pasos de ahí su nombre.

Para simplificar el análisis de la técnica de los seis pasos, sin perder generalidad; se emplean cargas puramente resistivas y se pueden ver como divisores de voltaje, luego esto se puede expandir para el análisis del comportamiento del motor de inducción trifásico.

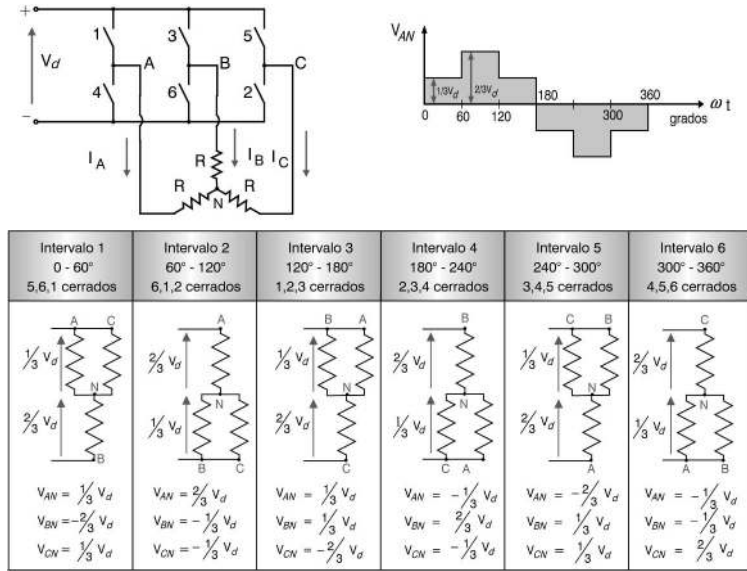


Figura 13.56 Circuito equivalente ideal del inversor y voltaje de fase. Diagrama de conmutación.

Por esto las formas de onda de las corrientes en cada fase son determinadas por el tipo de carga y son independientes del dispositivo de potencia, y sólo pueden afectar durante el instante de la conmutación.

La forma de onda de la corriente en cada fase se puede definir por el efecto de los semiconductores durante los intervalos de conmutación, y las formas exponenciales que de manera predominante son generadas por los escalones del voltaje aplicados, mientras que las formas de onda de los voltajes de línea en la carga tienen un alto contenido de armónicos que se puede apreciar empleando descomposición en serie de Fourier del voltaje de la fase, la que está expresada de la siguiente manera

$$V_{AN} = \frac{2}{\pi} V_d \left( \sin \omega t + \frac{1}{5} \text{sen } 5\omega t + \frac{1}{7} \text{sen } 7\omega t + \dots + \frac{1}{11} \text{sen } 11\omega t + \frac{1}{13} \text{sen } 13\omega t + \dots \right)$$

en donde:  $V_d$  es el voltaje del bus de c-c. y  $\omega$  es la frecuencia angular componente fundamental.

De la descomposición por Fourier se puede observar que no se encuentran presentes los armónicos de tercer orden ni múltiplos de éstos, así como tampoco están presentes en los voltajes de línea.

La amplitud del voltaje de línea para la componente fundamental está definida por:

$$V_{L(RMS)} = (V_d/2)(4/\pi)(\sqrt{3}/\sqrt{2}) \approx 0.78 V_d$$

así como la amplitud del valor RMS de línea con respecto a los armónicos, se puede obtener a partir de

$$V_{L(RMS)} = 0.78/h V_d$$

donde

$$h = 6n \pm 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

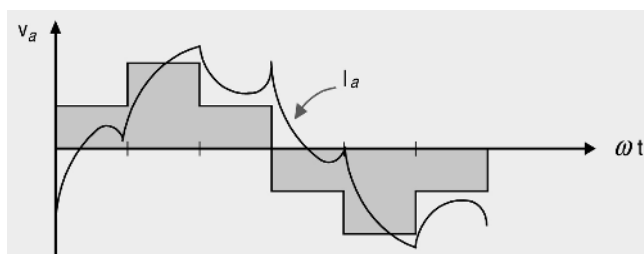
### Serie de Fourier

Si  $f$  es una función (o señal) periódica con periodo  $T$ , la serie de Fourier asociada a  $f$  es:

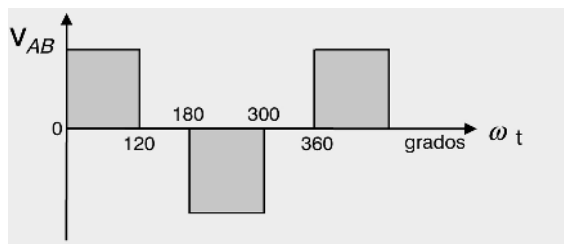
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi}{T} t + b_n \sin \frac{n\pi}{T} t \right].$$

donde:  $a_n$  y  $b_n$  son los coeficientes de Fourier que toman los valores:

$$a_n = \int_{-T}^T f(t) \cos \left( \frac{n\pi}{T} t \right) dt, \quad b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \sin \left( \frac{n\pi}{T} t \right) dt.$$



**Figura 13.57** Forma de onda de la corriente del voltaje la fase A del motor.



**Figura 13.58** Forma de onda del voltaje línea entre dos terminales del motor.

Cuando un motor de inducción es alimentado con una fuente de voltaje de seis pasos, las formas de onda de las corrientes tienen un contenido de armónicos apreciable, el cual influye en el comportamiento

del motor. Los armónicos en la corriente consumida por el motor son filtrados por la inductancia de la máquina. En consecuencia a altas frecuencias de alimentación, cerca o por encima de la frecuencia nominal, las reactancias de la máquina son grandes y los armónicos en la forma de onda de la corriente se han reducido de forma apreciable. A bajas frecuencias, esta situación empeora, causando problemas de calentamiento de la máquina. La presencia del quinto y del séptimo armónico de corriente, provoca que reaccionen con el flujo principal del entrehierro produciendo un armónico de par pulsante de sexto orden de secuencia positiva, el cual causa vibraciones en el movimiento del rotor a velocidades bajas, lo cual empeora la operación del motor como se explicara más adelante.

### EMC & Harmonics

El archivo contiene información acerca de los armónicos en accionamientos de velocidad variable.



### Compatibilidad Electromagnética

En el archivo Compatibilidad Electromagnética, se presenta un estudio detallado de la compatibilidad electromagnética.



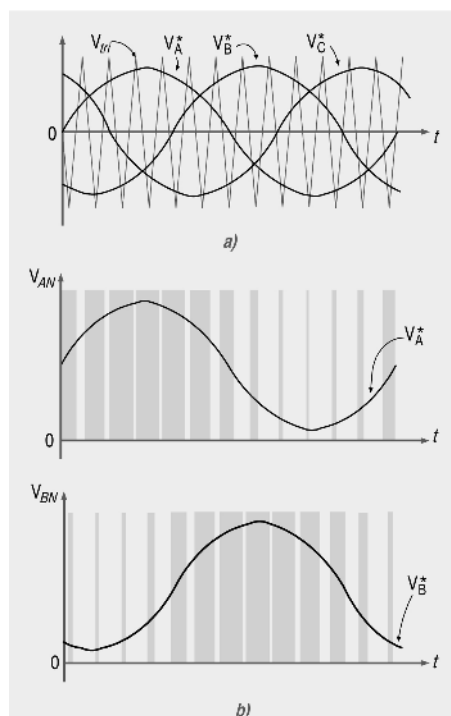
#### 13.18 Inversor PWM senoidal

En la figura 13.59(a) se puede observar la generación de las señales trifásicas senoidales de referencia, así como la señal triangular de comando o portadora. En la figura 13.59(b) se muestran los periodos de conducción de los semiconductores de la fase A y la fase B. Sobre una señal moduladora se superpone una portadora triangular de frecuencia mayor a la de referencia, cuya frecuencia determina la frecuencia de conmutación máxima de los dispositivos de potencia empleados en el inversor. Los pulsos de disparo se realizan en el momento en que la magnitud de la señal de referencia cruza con la señal de portadora, conmutando negativamente cuando la señal de referencia es menor que la onda triangular, y positivamente cuando es mayor. La generación completa de los pulsos de disparo para el puente trifásico se consigue desfasando  $120^\circ$  entre sí las señales de referencia de las tres fases para que sean comparadas con una onda triangular común a las tres fases.

Se denomina razón de portadora  $p$  a la relación entre la frecuencia de la señal portadora y la frecuencia de la señal de referencia. Es necesario operar con una  $p$  múltiplo de tres, para asegurar formas de onda

de voltajes idénticos en el sistema trifásico. Se denomina índice de modulación  $M$ , a la razón entre la amplitud de la onda de referencia y la amplitud de la onda portadora.

Para una razón de portadora grande, el inversor PWM suministra una señal de voltaje de alta calidad, debido a que las formas de onda de los voltajes tienen armónicos dominantes de alto orden, los cuales son filtrados sin dificultad por las reactancias de dispersión del propio motor. Con esto se logra suavidad en la rotación del motor a muy bajas velocidades, lográndose eliminar con esta técnica los armónicos indeseables de bajo orden y las molestas pulsaciones del par, las cuales son características de las formas de onda del inversor operando con una técnica de seis pasos.



**Figura 13.59** Modulación de ancho de pulso senoidal. Obtención del voltaje de la fase A y la fase B respecto al negativo de la fuente.

El voltaje de salida de la fase A a neutro puede expresarse como:

$$V_{AN} = M \frac{V_d}{2} \text{sen}(\omega_1 t + \phi) \sum \text{armónicos}$$

donde el índice de modulación es:

$$M = \frac{V_{\text{ref}}}{V_{\text{tri}}}$$



$V_d$  es el voltaje del bus de c-c.,  $\omega_1$  es la frecuencia de la moduladora, y  $\phi$  es el desfase entre la entrada y la salida, dependiendo de la posición de la onda moduladora.

El índice de modulación puede variar entre 0 y 1, obteniéndose el máximo valor del voltaje de entrada para  $M = 1$ . La componente fundamental del voltaje salida en este caso es

$$V_{AN} = M \frac{V_d}{2} \text{sen}(\omega_1 t + \phi) \text{armónicos}$$

Como se observa en las ecuaciones anteriores, el voltaje de salida fundamental del inversor PWM senoidal es incrementado a su máximo valor con el aumento del índice de modulación al valor de la unidad. Para ésta condición es evidente que la forma de onda del voltaje modulado tiene una reducción del área volts-segundos de los pulsos comparado con el inversor de los seis pasos, donde los voltajes polares no están modulados. Este hecho implica que la amplitud de la componente fundamental del voltaje de salida de un inversor PWM senoidal es menor que la del inversor de los seis pasos. Para el inversor PWM senoidal su valor es de 63% de  $V_d$  y para el inversor de seis pasos de 78% de  $V_d$ , teniendo este último un aprovechamiento mayor del voltaje de la fuente en un 2% aproximadamente.

Para incrementar el índice de aprovechamiento de la fuente de c-c. se puede sobremodular ( $M > 1$ ) la señal de referencia, de tal manera que algunas de las intersecciones entre la referencia y la portadora se eliminen, lográndose con esto una señal modulada con una forma de onda semejante a la onda de salida del inversor de seis pasos. Si el índice de modulación continúa incrementándose, se puede alcanzar la operación del inversor de los seis pasos. Esta forma de operación hace que el voltaje de salida fundamental se incremente, pero con la presencia de la forma de onda de los seis pasos se introducirán componentes de voltajes armónicos como ya se había tratado anteriormente.

Como se ha planteado, con las dos técnicas de control del inversor expuestas se puede ver claramente que la idea básica de mejora de las técnicas de PWM, parte de poder tener una menor distorsión armónica de las señales que se generan, así como un mejor aprovechamiento de la fuente de c-c., y es por esta razón que se realizan constantemente mejoras en las técnicas de modulación siendo una de las más novedosas el PWM por vectores espacial

### Operación del PWM

En el archivo PWM\_ESPACIAL se presentan los principios de operación del PWM espacial que es una de las técnicas más novedosas. En esta presentación también se puede observar la comparación entre esta estrategia y el método de seis pasos.



### 13.19 Medición de la distorsión armónica

A continuación se presentan algunos métodos para la medición del nivel de armónicos.

La distorsión total, armónica, es una medida de la similitud entre la forma de onda y su componente fundamental y está definida como:

$$THD = \frac{1}{V_1} \left( \sum_{n=2,3,\dots}^x V_n^2 \right)^{1/2}$$

El valor THD proporciona el contenido armónico total, pero no indica el nivel de cada uno de sus componentes. Si en la salida de los inversores se utiliza un filtro, los armónicos de orden más alto se atenuarán. Por lo tanto, resulta importante conocer tanto la frecuencia como la magnitud de cada componente. El factor de distorsión indica la cantidad de la distorsión armónica que queda en una forma de onda particular después de que las armónicas de esa forma de onda hayan sido sujetas a una atenuación de segundo orden. Por lo tanto, el valor DF es una medida de la eficacia en la reducción de las componentes armónicas no deseadas, sin necesidad de especificar valores de un filtro de carga de segundo orden, y se define como:

$$DF = \frac{1}{V_1} \left[ \left( \sum_{n=2,3,\dots}^x \left( \frac{V_n}{n^2} \right)^2 \right) \right]^{1/2}$$

El factor de distorsión de una componente armónica individual, o de orden  $n$ , se define como

$$DF_n = \frac{V_n}{V_1 n^2}$$

#### 13.19.1 Factor de potencia

Uno de los problemas derivados de los armónicos es que el factor de potencia baja, lo cual es algo que se busca evitar, ya que esto se puede traducir en pérdidas económicas por exceso de consumo y en bajo desempeño del motor. Además éste sufre calentamiento y esto puede dañar los devanados. Para realizar un análisis matemático, se puede partir de la ecuación de la potencia real y la corriente distorsionada:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2\pi} \int v(t)i(t)d(\omega t)$$

$$i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} i_n \text{sen}(n\omega t + \varphi_n)$$

Sustituyendo la ecuación de la corriente en la potencia queda lo siguiente:

$$\langle P \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int v_s i_s \sin(\omega t) \sin(n\omega t + \phi_n)$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2\pi} \int v_s i_s \sin(\omega t) \sin(n\omega t + \phi_n)$$

Se puede concluir que la única corriente que contribuye a la potencia real es la corriente fundamental, por lo que se puede llegar a la siguiente ecuación:

$$\langle P \rangle = v_{s\text{rms}} i_{1\text{rms}} \cos(\theta_1)$$

Se sabe que la relación del factor de potencia está dado por:

$$P.F. = \frac{\langle P \rangle}{v_{\text{rms}} i_{\text{rms}}}$$

y con esto se llega a la siguiente ecuación:

$$P.F. = \frac{v_{\text{rms}} i_{1\text{rms}}}{v_{\text{rms}} i_{\text{rms}}} \cos(\phi_1)$$

Se puede observar a partir de la ecuación anterior que el factor de potencia depende del cociente de la corriente fundamental y la corriente total (fundamental más armónicos). Esto se traduce en que entre más distorsión armónica presente la señal, más bajo será el factor de potencia.

### 13.19.2 Armónicos en un motor de inducción

Como una aproximación de primer orden se pueden obtener los armónicos calculando cada componente armónico del circuito equivalente por fase. Entonces las corrientes pueden determinarse usando el principio de superposición y sumando la fundamental con el resto de sus componentes. En un armónico  $h$  el flujo producido por los voltajes ( $V_{ah}, V_{bh}, V_{ch}$ ) en el entrehierro a una velocidad de:

$$\omega_{sh} = n\omega_s$$

donde la dirección puede ser la misma o en dirección contraria a la de rotación. Se puede verificar fácilmente que el flujo producido por los armónicos  $h = 6n - 1$  (donde  $n = 1, 2, 3, \dots$ ) tienen una dirección de rotación contraria a la de la fundamental. De estos armónicos, resulta un flujo en dirección contraria al rotor. Los armónicos  $h = 6n + 1$  producen un flujo en dirección igual al rotor.

Cuando se realiza un control de velocidad, el motor rota con un valor de deslizamiento razonablemente pequeño, entonces se puede asumir que la velocidad del rotor es aproximadamente la síncrona:

$$\omega_r \approx \omega_s$$

Debido a esto, a un dado armónico  $h$  en el circuito equivalente el deslizamiento relativo a la frecuencia síncrona es:

$$s_h = \frac{\omega_{sh} + \omega_r}{\omega_{sh}} \approx \frac{h \pm 1}{h} \approx 1$$

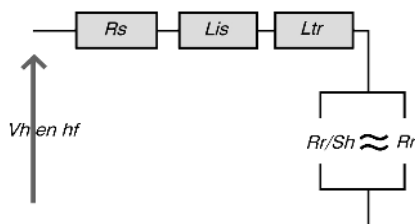
donde el signo  $+$  o  $-$  corresponde a la dirección del flujo en caso de estar a favor o en contra a la del rotor respectivamente.

En la figura que se obtiene del circuito equivalente por fase despreciando  $L_m$ , se puede observar que  $\omega_r \approx \omega_s$  y  $s_h \approx 1$ . (Ver la Fig. 13.60)

Para calcular las componentes armónicas, los términos de magnetización son generalmente despreciados y la magnitud de la corriente armónica es determinada por las reactancias en las frecuencias armónicas que predomina sobre  $R_s$  y  $R_r$ :

$$I_h \approx \frac{V_h}{h\omega} (L_{is} + l_{lr})$$

La ecuación anterior muestra que aumentando las frecuencias en las cuales los voltajes armónicos ocurren en la salida del convertidor, la magnitud de las corrientes se reduce.



**Figura 13.60** Circuito equivalente por fase armónica.

### 13.19.3 Pérdidas por armónicos en el motor de inducción

La pérdida de potencia por fase en el cobre de los devanados del estator y el rotor, debido a estas corrientes de armónicos, se pueden aproximar a:

$$\Delta P_{cu} = \sum_{h=2}^{\infty} (R_s + R_r) I_h^2$$

donde  $R_s$  y  $R_r$  aumentan de manera no lineal con las frecuencias armónicas. Es difícil estimar el resto de las pérdidas en el núcleo por las corrientes parásitas y la histéresis, debido a que éstas cambian con la geometría del motor y a que no representan más del 10 % de las pérdidas por armónicos normalmente se desprecian.

#### 13.19.4 Pulsaciones de par

La presencia de armónicos en la excitación del estator produce una componente pulsante de par. Si esto se aplica a bajas frecuencias se pueden presentar problemas de variación de la velocidad y fatiga en la flecha del motor.

Considerando las frecuencias armónicas más bajas que son la quinta y la séptima en un inversor de onda cuadrada, la generación del par pulsante puede ser explicada mejor si se analizan por separado.

En la figura 13.61 el séptimo armónico produce una componente de flujo rotatorio a una velocidad de  $7\omega_s$ , en la misma dirección que la componente fundamental del flujo del entrehierro y el rotor. Los campos  $\Phi_{ag1}$  y  $B_{r1}$ , producidos por la componente fundamental, giran a la misma velocidad y, como el torque es proporcional al producto cruz de éstos, resulta un par que no pulsa. Lo mismo es cierto para  $\Phi_{ag7}$  y  $B_{r7}$  debido a que su velocidad también es igual. Sin embargo,  $\Phi_{ag7}$  y  $B_{r1}$  tienen una velocidad relativa de  $6\omega_s$ , similar a la velocidad relativa de  $\Phi_{ag1}$  y  $B_{r7}$  que también es  $6\omega_s$ , esto hará que sus productos cruz se cancelen cíclicamente, produciendo una componente de par pulsante.

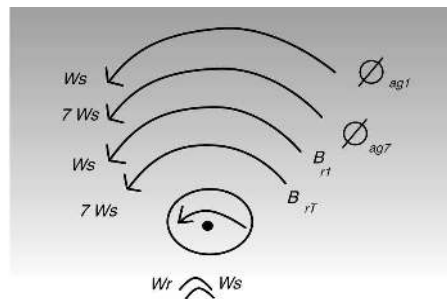
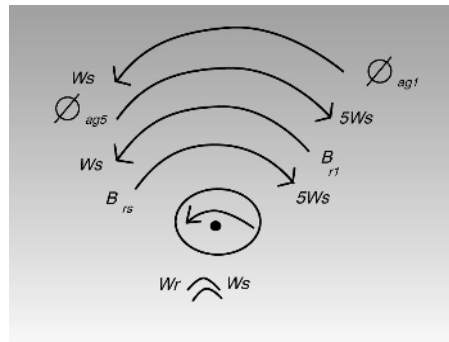


Figura 13.61 Pulsaciones de  $7^a$  armónica.

En la figura 13.62 el quinto armónico produce una componente de flujo rotatorio a una velocidad de  $5\omega_s$ , en dirección opuesta al rotor. De esta manera  $\Phi_{ag5}$  y  $B_{r1}$  tienen una velocidad relativa de  $6\omega_s$  al igual que  $\Phi_{ag1}$  y  $B_{r5}$ . Esto hará que sus productos cruz se cancelen cíclicamente, produciendo una componente de par pulsante.

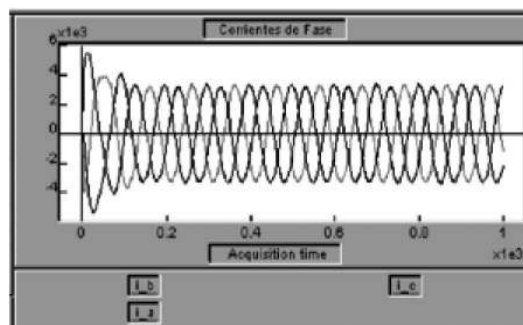
La  $5^a$  y  $7^a$  componentes producen, por lo tanto, pulsaciones en frecuencias de sexto armónico y sus consecuencias se suman por superposición. De modo que estas dos componentes se tratan de evitar en todo caso, para mejorar el desempeño del sistema.



**Figura 13.62** Pulsaciones de 5ª armónica.

### 13.20 Formas de corriente, voltaje y velocidad para un esquema $v/f$

Las siguientes figuras muestran la respuesta dinámica del sistema de diferentes valores de frecuencia. El esquema es un control  $v/f$  en lazo abierto.



**Figura 13.63** Corrientes de fase reales a frecuencia de referencia de 10 Hz.

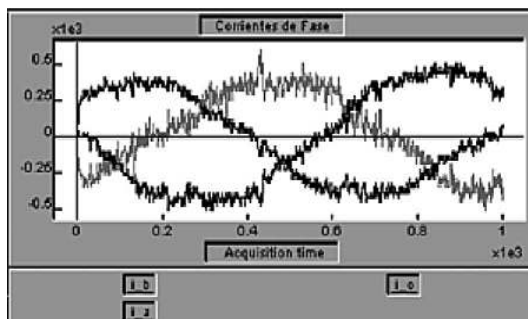


Figura 13.64 Corrientes de fase reales a frecuencia de referencia de 1 Hz

A medida que la frecuencia disminuye, se aumenta el error entre la frecuencia de referencia y la frecuencia real. Esto se debe a que se requiere compensar la caída de tensión variando la relación voltaje/frecuencia. Este problema también se presenta cuando se realizan inversiones de giro como lo muestra la figura 13.67, donde la relación  $v/f$  es igual a 8. A medida que se aproxima la frecuencia real a cero, el motor permanece en esta frecuencia por un periodo de tiempo el cual se puede disminuir incrementando el valor de la relación  $v/f$ .

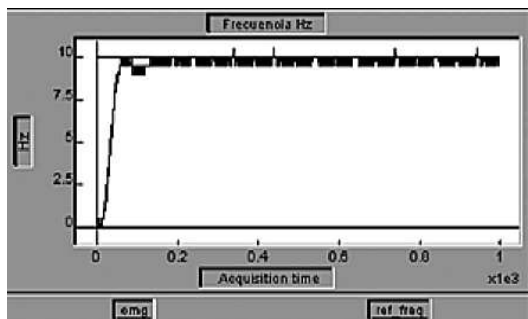


Figura 13.65 Frecuencia real y de referencia a 10 Hz

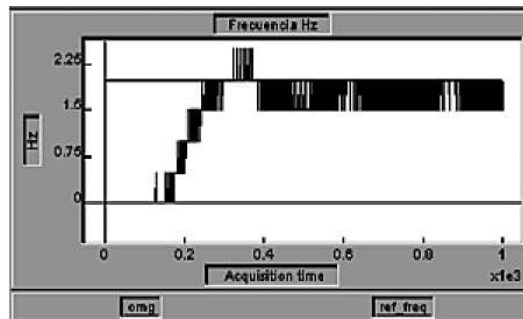


Figura 13.66 Frecuencia real y de referencia a 2 Hz.

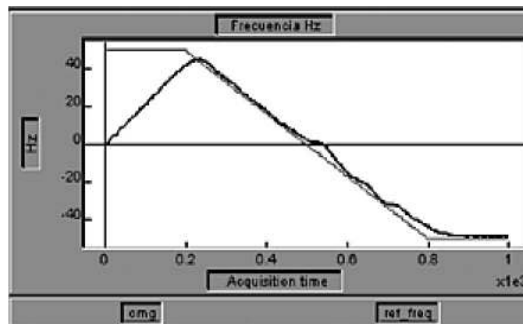


Figura 13.67 Frecuencia real y frecuencia de referencia con inversion de giro de 50 Hz a menos 50 Hz.

Los voltajes de línea así como su distorsión armónica con una relación  $v/f$  igual a 8, a diferentes valores de frecuencia de referencia se muestran en las figuras 13.68, 13.69 y 13.70.

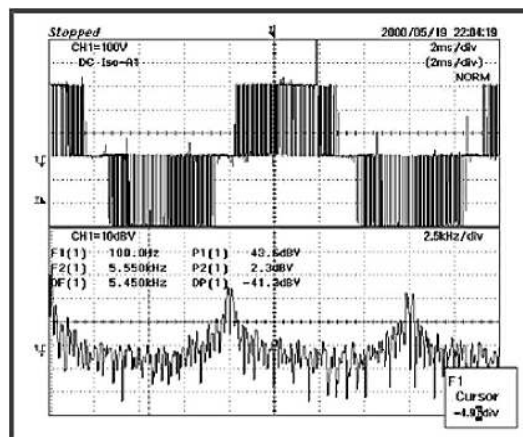
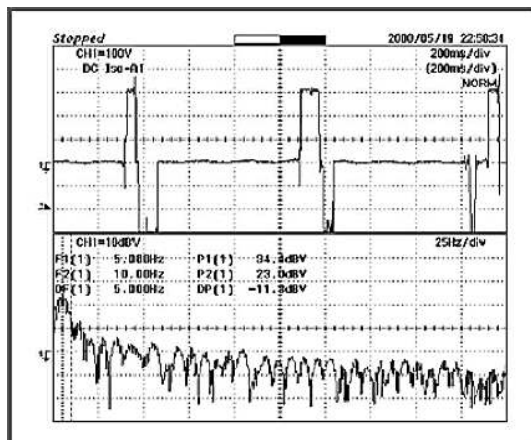
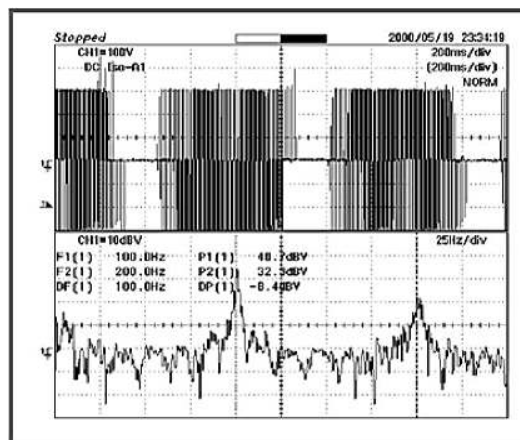


Figura 13.68 Voltaje de línea y distorsión armónica con una frecuencia de referencia de 90 Hz.





**Figura 13.69** Voltaje de línea y distorsión armónica con una frecuencia de referencia de 5 Hz.



**Figura 13.70** Voltaje de línea y distorsión armónica con una frecuencia de referencia de 100 Hz.

Con este estudio se comprueba que la estrategia de control escalar voltaje frecuencia en lazo abierto es relativamente sencilla de implementar, pero pueden surgir problemas en el desempeño del accionamiento, especialmente a bajas velocidades. El uso de esta estrategia está limitado en los accionamientos de velocidad variable de altos desempeños debido a los problemas expuestos durante el estudio presente en esta sección, sin embargo resulta una buena alternativa para los accionamientos de menos requerimientos en lo referente al control de la velocidad, por lo que el control en lazo cerrado  $v/f$  es una buena aproximación.

### 13.21 Control en lazo cerrado de velocidad para un motor de inducción utilizando el control de voltaje-frecuencia

El control escalar se puede implementar en lazo abierto y en lazo cerrado; en lazo abierto está diseñado para usarse en estado permanente y no controla los transitorios, y en lazo cerrado mejora la respuesta dinámica y se obtiene un control preciso de par y velocidad. Por esta razón en este estudio se propone la utilización del control de velocidad en lazo cerrado para un motor de inducción utilizando el esquema voltaje-frecuencia. El control busca que la velocidad del rotor del motor se mantenga constante (igual a una referencia dada) sin importar las variaciones que pueda sufrir la carga. Para comprobar esto se realizaron pruebas en vacío y con variaciones de carga, con lo cual se observó que este control responde de manera adecuada presentando problemas a bajas velocidades debido a la compensación.

### 13.21.1 Esquema de lazo cerrado de velocidad

Se implementa el esquema de control en lazo cerrado, para garantizar que la velocidad tiende al valor de referencia prefijado. En la figura 13.71, se muestra el esquema de control propuesto.

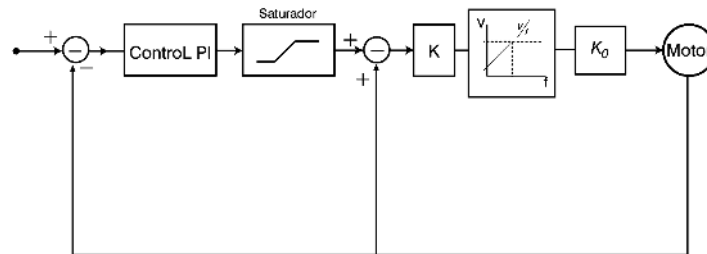
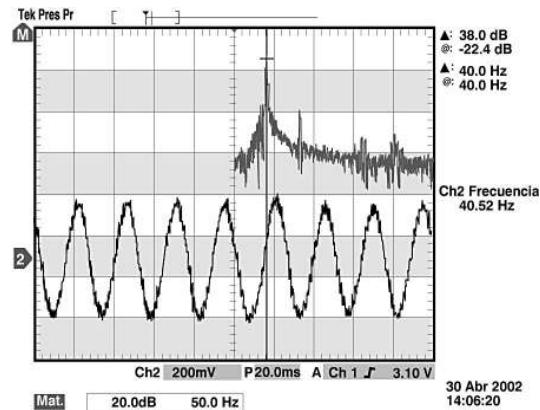


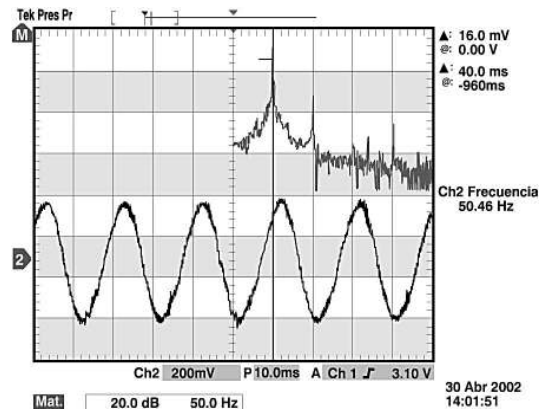
Figura 13.71 Esquema de control.

En el esquema ( $v/f$ ) se determina la velocidad de referencia, y es comparada con la velocidad actual del motor de inducción. El error se hace pasar por un controlador proporcional integral ( $PI$ ). El siguiente bloque es una saturación que limita los valores de salida del  $PI$ . La salida del bloque de saturación es la velocidad de deslizamiento, que se suma a la velocidad obtenida desde el sensor de velocidad para obtener la velocidad síncrona correspondiente. Se empleó una ganancia que relaciona las revoluciones por minuto con los Hertz, de manera analógica y en forma de voltaje. De esta forma se tiene la entrada de frecuencia síncrona al esquema  $v/f$  que determina automáticamente el valor de voltaje necesario para mantener el flujo en el entrehierro constante. Por último se tiene el bloque del inversor que mediante una técnica de  $PWM$  senoidal determina la frecuencia de conmutación de los dispositivos semiconductores. Este bloque está conectado directamente al motor de inducción.

En las figuras 13.72 y 13.73 se muestran las formas de corriente de fase en el estator y su componente fundamental. Como lo muestran las gráficas, a medida que la velocidad aumenta las distorsiones armónicas de la corriente van disminuyendo.



**Figura 13.72** Distorsión armónica de la corriente de fase del estator a 40 Hz y 2,396 rpm.



**Figura 13.73** Distorsión armónica de la corriente de fase del estator a 50 Hz y 2,980 rpm.

En la figura 13.74 se muestra la forma de onda del voltaje de línea y corriente a la salida del inversor para una velocidad de 3000 rpm. Se observa que la forma de voltaje no es una senoide pura, pero a esta velocidad el motor puede filtrar gran parte de la distorsión armónica.

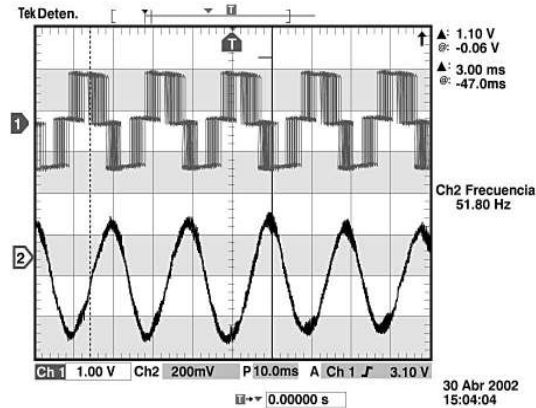


Figura 13.74 Formas de onda de voltaje de línea a 3000 rpm.

Se propone emplear un recortador de precisión para limitar los valores enviados por el controlador PI, ya que de no tener este bloque el sistema enviaba valores demasiado altos y perdía estabilidad.

### 13.21.2 Resultados experimentales de velocidad

Se puede evaluar la respuesta de velocidad del motor de inducción, después de tener sintonizado el controlador; las pruebas demuestran el desempeño del sistema.

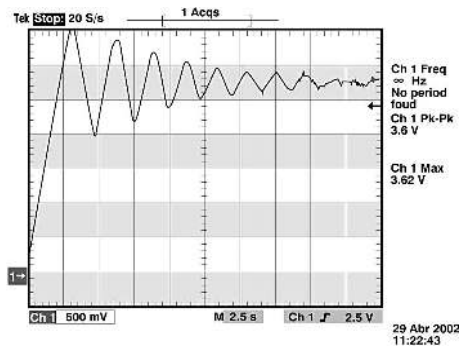


Figura 13.75 Arranque del motor en vacío con el controlador.

La figura 13.76 muestra la velocidad (línea continua) y la corriente del estator contra el tiempo. La variación de velocidad fue de 819 a 3000 rpm con una carga constante de 1.7 Nm. Como lo muestra la figura, el control funciona con carga o sin carga.

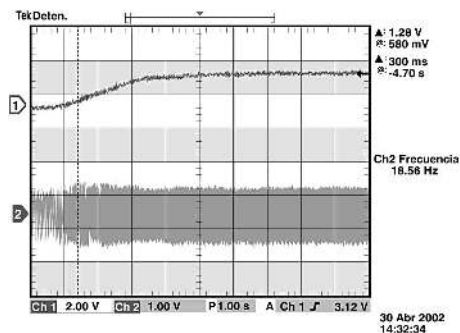


Figura 13.76 Variación de velocidad a carga constante.

Se probó también la respuesta del control para alcanzar la velocidad cero. La figura 13.77, muestra la forma de la velocidad variando de 3,000 rpm hasta velocidad cero.

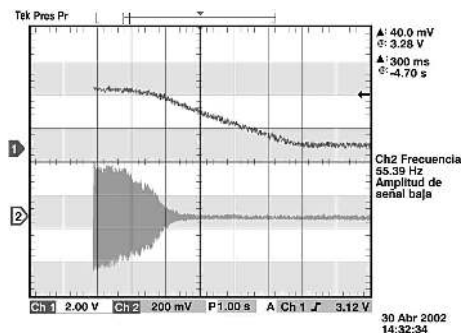


Figura 13.77 Disminución de velocidad hasta velocidad cero.

La figura 13.78 muestra cuando el motor se encuentra en estado permanente y se liberó la carga de 1.29 a 0.2 Nm. La velocidad del rotor presentó ligeras oscilaciones pero el control lo mantiene en la referencia (3100 rpm) como lo muestra la gráfica

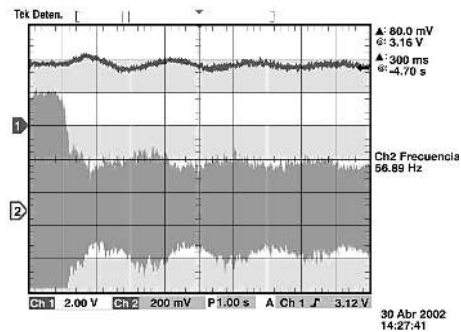


Figura 13.78 Liberación de carga de 1.29 a 0.2 Nm.

Como lo muestran las figuras 13.77 y 13.78 y, las oscilaciones presentadas en la prueba de vacío al llegar al estado estable fueron amortiguadas por la carga. Esto se debe a que la carga funciona como un filtro para las vibraciones mecánicas. Lo anterior se observa en la figura 13.79, en donde hubo un aumento en la carga de 0.25 a 1.29 [Nm]. Sólo se percibe una pequeña variación en la velocidad pero vuelve inmediatamente a la referencia de 3,100 [rpm].

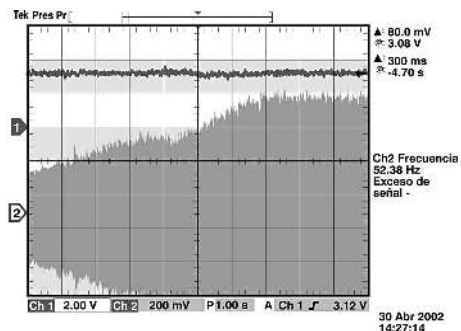
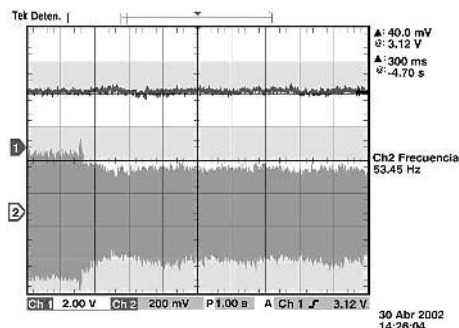


Figura 13.79 Aumento de carga de 0.25 a 1.29 Nm.

Finalmente, en estado permanente el motor fue sometido a variaciones cíclicas de carga de 0.63 a 1.25 Nm, como se muestra en la figura 13.79. En esta figura se ve que a velocidad del rotor sufre pequeñas perturbaciones que son eliminadas por el controlador.



**Figura 13.80** Variaciones de carga.

Con este estudio se comprobó que el control voltaje frecuencia en lazo cerrado demostró un desempeño excelente para el control de velocidad del motor de inducción, como lo muestran las figuras presentadas. Además es un control mucho más simple que otros métodos de control en lazo cerrado (como el DTC o el control vectorial).

La velocidad del rotor sigue la referencia sin ningún problema y presenta, en estado estable, muy pequeñas oscilaciones cuando se somete a disturbios de carga. A bajas frecuencias, el control en lazo cerrado sigue presentando los mismos problemas de compensación de voltaje que en lazo abierto. El esquema de control  $v/f$  en lazo cerrado es una herramienta eficaz y sencilla para aplicaciones de accionamientos eléctricos de velocidad variable.

### Simulador de Schneider Electric

Es recomendable que el lector use el simulador de la compañía Schneider Electric, de un control  $V/f$ , que se encuentra en el archivo ATV58. Antes de hacer la revisión del simulador hay que revisar el manual ATV58.



### Técnicas Novedosas de Control

En los archivos Técnicas Novedosas de Control se presentan otras posibilidades de control, para accionamientos de altos desempeños.



## Capítulo 14

### Control vectorial de los motores de inducción

#### 14.1 Introducción

#### 14.2 Principios de control vectorial con orientación del flujo del rotor

#### 14.3 Localización del vector de flujo del rotor

#### 14.4 Implementación del control vectorial

#### 14.5 Método directo de campo orientado

#### 14.6 Método indirecto de campo orientado

#### 14.7 Cálculo de la corriente de magnetización modificada

#### 14.8 Principios básicos para el desarrollo del control vectorial

#### 14.9 Análisis del desempeño del PWM banda de histéresis

#### 14.10 Estimación del flujo del rotor

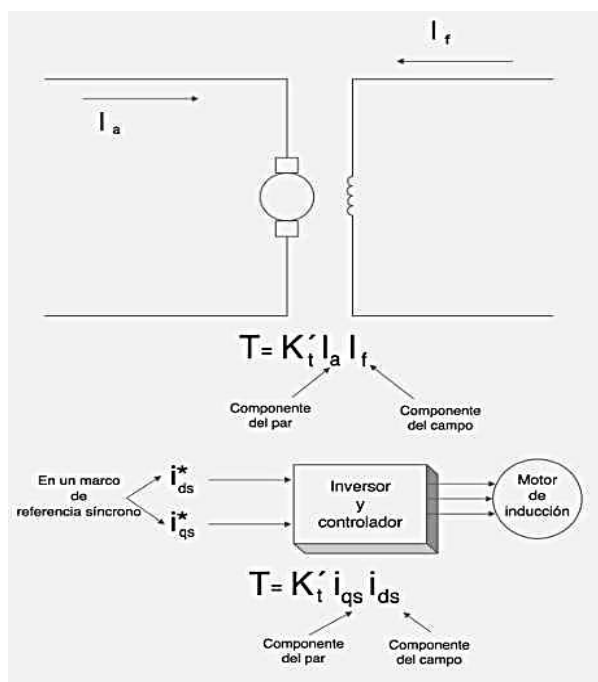


- 14.11 Estimación de la resistencia del rotor
- 14.12 Estimación de la constante de tiempo del rotor
- 14.13 Control de flujo y velocidad
- 14.14 Respuesta global del control vectorial
- 14.15 Eliminación de sensores de velocidad en accionamientos de motores de inducción
- 14.16 Redes neuronales artificiales (RNA) para la estimación de la velocidad

## 14.1 Introducción

Los accionamientos tradicionales de los motores de inducción con inversores de voltaje o de corriente utilizan en gran medida métodos escalares de control, donde las variables a controlar tienen valores escalares y pueden ser voltajes, corrientes, frecuencias, velocidades, flujos magnéticos, par electromagnético, etc. Estas variables tienen un efecto de acoplamiento entre ellas, por ejemplo el flujo magnético y el par desarrollado por el motor de inducción están acoplados, y esto es la causa fundamental que ha imposibilitado la utilización de este tipo de máquina en accionamientos eléctricos de altos desempeños.

Al principio de la década de los años 70 en Alemania Occidental surgió el Principio de Campo Orientado con los trabajos de Hass y Blaschke. Mediante este método se logra desacoplar el par y el flujo magnético de la máquina, obteniéndose un comportamiento dinámico semejante al de la máquina de corriente continua. Los métodos de control vectorial o de campo orientado son generales y se pueden aplicar a máquinas de inducción y máquinas síncronas. En la figura 14.1 se muestra la analogía entre el control vectorial y el control de una máquina de corriente continua.



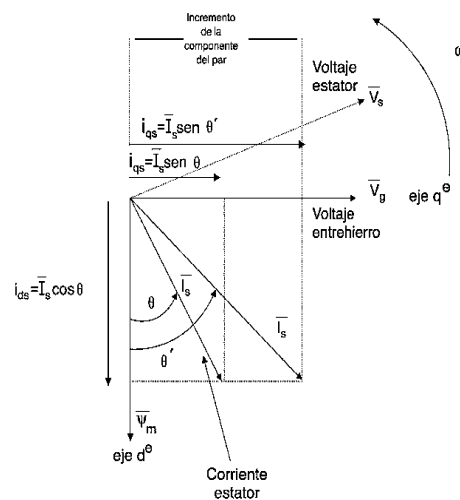
**Figura 14.1** Analogía entre el control vectorial del motor de inducción y el control clásico del motor de corriente continua

Como se sabe, si se desprecia el efecto de la saturación y de la reacción de la armadura, la expresión del par electromagnético en una máquina de corriente continua está dada por

$$T = K'_t I_a I_f$$

donde la corriente de armadura  $I_a$  es la corriente para el devanado de campo y  $K'_t$  es una constante de proporcionalidad. Las variables  $I_a$  e  $I_f$  son las variables de control en la máquina de corriente continua y pueden ser consideradas como vectores ortogonales o desacoplados. En condiciones normales, la corriente  $I_f$  se mantiene constante e igual a su valor nominal provocando que el par sea proporcional a la corriente de armadura  $I_a$ . De esta forma, existe un desacoplamiento entre  $I_f$  (flujo magnético) y la corriente de armadura (par), lo cual permite una máxima sensibilidad del par en régimen permanente y transitorio. Este modo de control también puede ser implementado en el motor de inducción, si se tiene el modelo del motor referenciado a unos ejes ortogonales rotatorios que giran a la velocidad síncrona. En estos ejes rotatorios síncronos o coordenadas de campo, las variables senoidales se convierten en magnitudes continuas. En la figura 14.1 se muestra el motor de inducción, el inversor y el control con dos variables de entrada (  $e$  ). Las corrientes  $I_{ds}$  e  $I_{qs}$  son las componentes de corrientes del estator en los ejes directo y de cuadratura respectivamente, y la componente  $I_{ds}$  es análoga a la corriente de campo así como la componente  $I_{qs}$  es análoga a la corriente de armadura  $I_a$  de la máquina de corriente continua. De esta forma, el par puede ser expresado como:

$$T = K_t |\overline{\psi}_m| i_{qs} = K'_t I_{qs} I_{ds}$$



**Figura 14.2** Diagrama fasorial considerado en el control vectorial o control por campo orientado.

En la figura 14.2 se muestra el diagrama fasorial de las corrientes referidas a los ejes  $d^e - q^e$  síncronos. Para simplificar no se considera la inductancia de dispersión del rotor. El diagrama fasorial se dibujó con el voltaje en el entrehierro (f.e.m.) en fase con el eje  $q^e$ . La corriente del estator está retrasada un ángulo de  $(90-0)$  con respecto a la f.e.m. o voltaje del entrehierro, lo que significa que  $\overline{i_{qs}} = \overline{i_s} \text{sen} \theta$  está en fase con  $\overline{V_g e^{i_{ds}}} = \overline{I_s} \text{cos} \theta$  está en cuadratura con  $V_g$ . La corriente  $i_{qs}$  es la componente activa o de par, siendo  $i_{qs} V_g$  la potencia activa a través del entrehierro. La componente de corriente  $i_{ds}$  es la componente de campo o reactiva y es la encargada de fijar el valor del flujo del entrehierro. La potencia reactiva a través del entrehierro es  $i_{ds} V_g$ .

Blaschke demostró en sus trabajos que la orientación del flujo del entrehierro puede convertirse en un serio problema de estabilidad, por esta razón se realiza la orientación del flujo del rotor en lugar del flujo del entrehierro.

Del diagrama fasorial de la figura 14.2 se puede extraer la siguiente expresión del par desarrollado:  $T = K_t |\overline{\psi_m}| i_{qs} = K_t' I_{qs} I_{ds}$ . Entonces la ecuación del par es idéntica a la expresión del par para una máquina de corriente continua. Las variables  $i_{qs}$  e  $i_{ds}$  están desacopladas mutuamente y pueden ser variadas independientemente sin afectar la componente ortogonal. En la región de par constante, al igual que en la máquina de c-c., la componente de flujo  $i_{ds}$  permanece constante y el par puede ser variado mediante la componente  $i_{qs}$ . En la figura 14.2 se muestra una variación del vector  $\overline{i_s}$ , que provoca una variación del par sin afectar la componente de flujo. El control vectorial se puede implementar en forma polar o cartesiana. El enfoque de W. Leonard, quien es uno de los más prominentes científicos en esta área, utiliza una representación polar de los vectores.

En la figura 14.3 se muestra la esencia de la implementación del control vectorial utilizando un modelo de la máquina. El inversor es omitido en la figura pero se supone que el mismo fija las corrientes de fase del estator  $i_a, i_b$  e  $i_c$  a partir de los valores de las corrientes de referencia  $i_a^*, i_b^*$  e  $i_c^*$ . El modelo de la máquina se muestra en el extremo derecho de la figura. Las corrientes de fase  $i_a, i_b$  e  $i_c$  son transformadas en corrientes bifásicas  $i_{\alpha s}$  e  $i_{\beta s}$  en un marco de referencia estacionario. Posteriormente son convertidas a un marco de referencia síncrono mediante una rotación realizada, considerando al vector unitario  $\text{cos} \omega_1 t + \text{sen} \omega_1 t$ . Las variables  $i_{qs}$  e  $i_{ds}$  que se obtienen a partir de la rotación vectorial son las entradas al modelo de la máquina. Por otro lado, el control realiza también dos etapas de transformación pero inversas, resultando una correspondencia entre los parámetros de control  $i_{ds}^*$  e  $i_{qs}^*$  y las variables de la máquina  $i_{ds}$  e  $i_{qs}$  respectivamente.

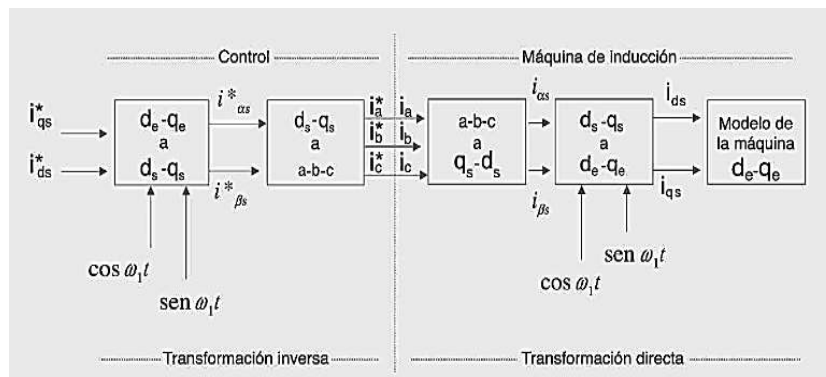


Figura 14.3 Diagrama general del control vectorial del motor de inducción

## Modelos dinámicos

Para esta parte es recomendable revisar el archivo modelos dinamicos motor induccion.swf



El vector unitario fija la alineación entre los vectores  $\overline{i_{ds}}$  y  $\overline{\psi_r}$  (flujo del rotor), y entre  $\overline{i_{qs}}$  y  $\overline{V_g}$  (f.e.m. de la máquina o voltaje en el entrehierro de la máquina). De lo anterior se observa que las transformaciones no incorporan ningún retardo de tiempo, obteniéndose una respuesta casi instantánea.

Un aspecto importante del control, además de la rápida respuesta transitoria, es que no va a existir el problema convencional de estabilidad que tienen los motores de inducción debido a la existencia del par máximo en su característica mecánica. El control se puede diseñar fácilmente para una operación en los cuatro cuadrantes permitiendo que, mediante el control vectorial, los motores de inducción puedan ser utilizados en aplicaciones de altos desempeños donde tradicionalmente se utilizó a la máquina de corriente continua.

En general, el control vectorial se divide en dos grandes métodos:

- Los métodos directos, desarrollados por F. Blaschke.
- Los métodos indirectos, desarrollados por K. Hass.

La diferencia básica entre estos métodos es la forma en que se genera el vector unitario utilizado en la orientación del campo.

## 14.2 Principios de control vectorial con orientación del flujo del rotor

El valor instantáneo del par electromagnético del motor de inducción, en coordenadas del estator, se puede determinar a partir de la siguiente ecuación:

$$T = \frac{2}{3} M I m \left[ \overline{i_s} \left[ \overline{i_r e^{j\epsilon}} \right]^* \right]$$

Esta expresión general del par muestra la dificultad de controlar un motor de inducción jaula de ardilla, debido a que no se tiene acceso directo al vector corriente del rotor por lo que tiene que ser controlado indirectamente a través de los voltajes y las corrientes del estator.

Para sustituir el término  $i_r e^{j\epsilon}$  por una cantidad equivalente que pueda ser medida en las terminales del estator o en la flecha de la máquina, se pueden utilizar diferentes alternativas, por ejemplo el flujo mutuo del entrehierro es una medida de la corriente magnetizante y puede ser detectado a través de sensores de Efecto Hall, o de bobinas en el estator. Esta medición define el vector de la corriente magnetizante  $\overline{i_m}$ , el cual es la suma de los vectores de las corrientes del estator y del rotor en un marco de referencia común. En coordenadas del estator, la ecuación que define al vector de la corriente magnetizante se puede expresar como:

$$\overline{i_m} = \overline{i_s} + \overline{i_r e^{j\epsilon}}$$

Esta expresión puede ser utilizada para eliminar el término de la corriente del rotor,  $\overline{i_r e^{j\epsilon}}$ , en la ecuación anterior del par. Se pueden utilizar varias alternativas, sin embargo una de las mejores opciones es definir el vector corriente de magnetización modificado,  $\overline{i_{mr}}$ , asociado con el flujo del rotor donde se considere al flujo disperso del rotor y al flujo mutuo entre estator y rotor. Este vector es definido en coordenadas del estator por la ecuación:

$$\overline{i_{mr}} = \overline{i_s} + [1 + \sigma_r] \overline{i_r e^{j\epsilon}}$$

Sustituyendo las ecuaciones resulta que:

$$T = \frac{2}{3} \frac{M}{1 + \sigma_r} \overline{i_s} I m \left[ \overline{i_s} \left[ \overline{i_{mr}} - \overline{i_s} \right]^* \right]$$

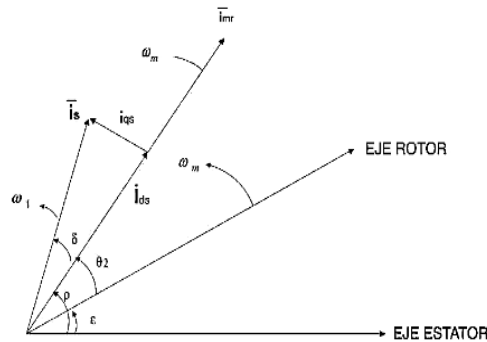
$$T = \frac{2}{3} \frac{M}{1 + \sigma_r} I m \left[ \overline{i_s} i_{mr}^* \right]$$

El vector de corriente magnetizante  $\overline{i_{mr}}$  se puede expresar como  $i_{mr} e^{j\rho}$ , donde  $i_{mr}$  y  $\rho$  son el valor modular y el ángulo del vector en coordenadas polares, teniendo como referencia al eje del estator. En la figura 14.4 se muestra el diagrama vectorial de las corrientes del estator.

Sustituyendo  $i_{mr}$  en forma polar en la ecuación anterior se obtiene que:

$$T = \frac{2}{3} \frac{M}{1 + \sigma_r} i_{mr} \text{Im} [\bar{i}_s e^{-j\rho}]$$

El vector rotatorio  $e^{-j\rho}$  realiza la transformación de coordenadas del estator hacia un marco de referencia rotatorio, el cual es definido por el vector corriente de magnetización  $\bar{i}_{mr}$  que se encuentra asociado con el flujo del rotor. El vector  $\bar{i}_s e^{j\rho}$  en la ecuación anterior es el vector de corriente del estator en coordenadas de campo, debido a que se aplicó una rotación vectorial al ser multiplicado por el vector unitario  $e^{j\rho}$ . Esto se puede observar en la figura 14.4 en donde se considera el rotor de una máquina de dos polos que tiene una velocidad angular  $\omega_m$ , siendo  $\omega_1$  la velocidad angular síncrona de rotación del vector  $\bar{i}_s$  y  $\omega_{mr}$  la velocidad angular instantánea del vector  $\bar{i}_{mr}$ .



**Figura 14.4** Diagrama vectorial de las corrientes de un motor de inducción

El vector de corriente del estator en coordenadas de campo tiene dos componentes ortogonales, la componente continua  $i_{ds}$  y la componente en cuadratura  $i_{qs}$ , paralela y perpendicular respectivamente al vector  $\bar{i}_{mr}$  mostrado en la figura 14.4, es decir:

$$i_{sd} = \text{Re} [\bar{i}_s e^{-j\rho}] = i_s \cos \delta$$

$$i_{sq} = \text{Im} [\bar{i}_s e^{-j\rho}] = i_s \sin \delta$$

Sustituyendo la ecuaciones, se obtiene la siguiente ecuación de par electromagnético

$$T = \frac{2}{3} \frac{M}{1 + \sigma_r} i_{mr} i_{sq} = K i_{mr} i_{sq}$$

en donde  $k = \frac{2}{3} \frac{M}{1 + \sigma_r}$ . La ecuación anterior es semejante a la ecuación de par de una máquina de c-c. con excitación independiente, donde el par es proporcional al flujo y a la corriente de armadura. Si se

sustituye la ecuación previa, en la ecuación de voltajes del rotor, se obtiene la ecuación diferencial para  $\overline{i_{mr}}$  :

$$\tau_r \frac{d\overline{i_{mr}}}{dt} + [1 - j\omega_m \tau_r] \overline{i_{mr}} = \overline{i_s}$$

donde:  $\tau_r = \frac{L_r}{R_r}$  es la constante de tiempo del rotor.

### Ecuaciones dinámicas del modelo del motor de inducción

Las ecuaciones dinámicas del motor, se pueden empezar a describir por los flujos instantáneos de cada una de las fases del estator, as, bs y cs, y el vector espacial flujo del estator se puede definir como

$$\overline{\lambda_s} = \lambda_{as} + a\lambda_{bs} + a^2\lambda_{cs}$$

El término de la derecha de la ecuación de flujo representa la contribución de cada una de las tres fases, entonces el vector flujo  $\overline{\lambda_s}$  puede ser físicamente interpretado como un vector espacial que representa la magnitud y dirección de la distribución senoidal del flujo resultante en el estator de la máquina, el cual incluye una componente de flujo de concatenación y una componente de flujo de dispersión. De manera semejante, se puede plantear la expresión del vector espacial flujo del rotor en coordenadas del rotor:

$$\overline{\lambda_r} = \lambda_{ar} + a\lambda_{br} + a^2\lambda_{cr}$$

Si  $\nu_{as}$ ,  $\nu_{bs}$  y  $\nu_{cs}$  son los voltajes instantáneos de línea a neutro en el estator, entonces:

$$\nu_{as} = R_s i_{as} + \frac{d\lambda_{as}}{dt}$$

$$\nu_{bs} = R_s i_{bs} + \frac{d\lambda_{bs}}{dt}$$

$$\nu_{cs} = R_s i_{cs} + \frac{d\lambda_{cs}}{dt}$$

donde:  $R_s$  es la resistencia del estator por fase.

La expresión del vector espacial del voltaje del estator,  $\overline{v_s}$ , se define de la forma siguiente:





$$\bar{v}_s = v_{as} + av_{bs} + a^2v_{cs}$$

Las ecuaciones de voltajes se pueden combinar en una sola ecuación vectorial, y se obtiene la expresión para el voltaje del estator:

$$\bar{v}_s = R_s \bar{i}_s + \frac{d\bar{\lambda}_s}{dt}$$

y para el voltaje del rotor:

$$0 = R_r \bar{i}_r + \frac{d\bar{\lambda}_r}{dt}$$

donde:  $R_s$  es la resistencia por fase del rotor.

El flujo del estator en coordenadas del estator puede ser expresado de forma vectorial, considerando la inductancia del estator ( $L_s$ ) y la inductancia mutua ( $M$ ), de la forma siguiente:

$$\bar{\lambda}_s = L_s \bar{i}_s + M i_r e^{j\epsilon}$$

De igual forma para el rotor se tiene que:

$$\lambda_r = L_r \bar{i}_r + M \bar{i}_s e^{-j\epsilon}$$

Las ecuaciones se plantean a partir del circuito equivalente bifásico, pero también se pueden obtener directamente de la máquina trifásica. El término exponencial  $e^{j\epsilon}$  en la ecuación de flujo indica que el vector de corriente del rotor es transformado a un marco de referencia estacionario. De forma similar, el vector rotatorio  $e^{-j\epsilon}$  se puede emplear para la transformación del vector de corriente del estator en coordenadas del rotor. Si el devanado del estator y del rotor tiene el mismo número de vueltas, el coeficiente de dispersión del estator ( $\sigma_s$ ) y del rotor ( $\sigma_r$ ) pueden ser definidos a través de las ecuaciones:

$$L_s = (1 + \sigma_s M)$$

$$L_r = (1 + \sigma_r M)$$

El coeficiente total de dispersión está dado por la ecuación:

$$\sigma = 1 - \frac{1}{(1 + \sigma_s)(1 + \sigma_r)}$$



Sustituyendo las ecuaciones de flujo en las de voltaje del estator y del rotor se obtienen las siguientes ecuaciones de voltaje:

$$\bar{v}_s = R_s \bar{i}_s + L_s \frac{d\bar{i}_s}{dt} + M \frac{d}{dt} [\bar{i}_r e^{j\epsilon}]$$

$$0 = R_r \bar{i}_r + L_s \frac{d\bar{i}_r}{dt} + M \frac{d}{dt} [\bar{i}_r e^{-j\epsilon}]$$

A estas ecuaciones generales de voltaje se les añade la ecuación de par electromagnético, la cual se obtiene de considerar la fuerza tangencial ejercida en los devanados del rotor por el campo magnético rotatorio producido por la fuerza magnetomotriz del estator. Este análisis muestra que el par es proporcional al producto vectorial de las corrientes  $\bar{i}_s$  e  $\bar{i}_r$  en cualquier marco de referencia común, y de esta forma el resultado es proporcional al seno del ángulo entre el vector corriente del estator y el vector corriente del rotor considerando una máquina de dos polos. La ecuación del par en coordenadas del estator se escribe en forma general como:

$$T = \frac{2}{3} M \text{Im} \left[ \bar{i}_s [\bar{i}_r e^{j\epsilon}]^* \right]$$

donde:  $\text{Im}$  indica la parte imaginaria del término entre corchetes e  $\bar{i}^*$  es el vector complejo conjugado de  $i$ . El vector corriente del rotor está multiplicado por el término exponencial  $e^{j\epsilon}$  que indica que está referido al marco de referencia del estator.

Si  $T_L$  es el par de carga y  $J$  es la inercia del motor y de la carga, entonces:

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = T - T_L = \frac{2}{3} M \text{Im} \left[ \bar{i}_s [\bar{i}_r e^{j\epsilon}]^* \right] - T_L$$

La velocidad angular del rotor es:

$$\omega_m = \frac{d\epsilon}{dt}$$

El comportamiento dinámico de una máquina de inducción simétrica con formas de ondas arbitrarias en las corrientes y en los voltajes, está descrito por las ecuaciones previas que forman un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales.

Las ecuaciones de voltaje del estator y voltaje del rotor, están en coordenadas del estator y del rotor respectivamente. Utilizando el vector rotatorio se pueden referir dichas ecuaciones a un marco de referencia rotatorio de coordenadas d-q que gira a una velocidad arbitraria.



El voltaje y la corriente pueden ser expresados en coordenadas rectangulares o polares con respecto a los ejes directo y de cuadratura en un marco de referencia común. Este procedimiento define las componentes d-q de voltajes y de corrientes. Si se separan las ecuaciones resultantes en parte real e imaginaria se obtienen cuatro ecuaciones de voltaje en los ejes d-q.

Estas ecuaciones junto con la ecuación de par electromagnético y mecánico definen el modelo general del motor de inducción, formado por seis ecuaciones diferenciales no lineales, mismas que son utilizadas ampliamente en el estudio dinámico del motor de inducción.



La ecuación anterior se encuentra en coordenadas del estator. Si se transforma a coordenadas de campo rotatorias multiplicando por el vector unitario  $e^{-j\rho}$  y se considera que  $\overline{i_{mr}} = i_{mr}e^{j\rho}$ , entonces se tiene que:

$$\tau_r \frac{di_{mr}}{dt} + j\tau_r i_{mr} \frac{d\rho}{dt} + [1 - j\omega_m \tau_r] i_{mr} = \overline{i_s} e^{-j\rho}$$

Luego de separar la parte real y la imaginaria, se obtienen las siguientes ecuaciones en coordenadas de campo:

$$\tau_r \frac{di_{mr}}{dt} + i_{mr} = i_{sd}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \omega_{mr} = \omega_m + \frac{i_{qs}}{\tau_r i_{mr}}$$

En el motor de inducción  $i_{mr}$  es análoga al flujo principal de la máquina de c-c. y es controlada por la componente continua de la corriente del estator en coordenadas de campo, como se muestra en la ecuación anterior. La constante de tiempo del rotor introduce un retardo significativo en la respuesta de  $i_{mr}$  al variar  $i_{ds}$ , este efecto es semejante al retardo introducido por el devanado de excitación de la máquina de c-c.

La componente en cuadratura  $i_{qs}$  es análoga a la corriente de armadura de la máquina de c-c. y puede ser variada rápidamente para realizar un ajuste en el par desarrollado, obteniéndose una rápida respuesta dinámica semejante a la obtenida en la máquina de c-c. La ecuación del par, muestra que  $i_{qs}$  controla a  $\omega_{mr}$ , y en la figura 14.4 se observa que la velocidad angular síncrona de la corriente del estator es

$$\omega_1 = \omega_{mr} + \frac{d\delta}{dt}$$

donde:  $\delta$  es el ángulo de par. En una operación estable el ángulo de par es constante, siendo  $\omega_1 = \omega_{mr}$  y los vectores  $\overline{i_s}$  e  $i_{mr}$  rotan en sincronismo. Las componentes  $i_{qs}$  e  $i_{ds}$  pueden ser controladas independientemente lográndose un desacople entre el flujo magnético del rotor y el par, al igual que en la máquina de c-c. con excitación independiente. Este es el principio básico de la orientación de campo o el control por campo orientado. Para completar el modelo matemático en coordenadas de campo del motor de inducción, a las ecuaciones anteriores se le añade la ecuación de movimiento del accionamiento eléctrico:

$$j \frac{d\omega_m}{dt} = T - T_L = k i_{mr} i_{sq} - T_L$$

donde:  $T_L$  es el par de carga y  $J$  es el momento de inercia equivalente en la flecha del motor.

La transformación de coordenadas del estator a coordenadas de campo se realiza en dos etapas: primero se hace una transformación desde un marco de referencia trifásico estacionario a un marco de referencia ortogonal estacionario, posteriormente se realiza una rotación vectorial hacia un marco de referencia rotatorio (coordenadas de campo d-q). La rotación vectorial se realiza tomando como base el vector unitario  $e^{-j\rho}$ , es decir:

$$\overline{i_s} e^{-j\rho} = [i_{\alpha s} + j i_{\beta s}] [\cos\rho - \text{sen}\rho]$$

$$\overline{i_s} e^{-j\rho} = [i_{\alpha s} \cos\rho + i_{\beta s} \text{sen}\rho] + [j [i_{\beta s} \cos\rho - i_{\alpha s} \text{sen}\rho]]$$

En forma matricial se tiene que:

$$\begin{bmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\rho & \text{sen}\rho \\ -\text{sen}\rho & \cos\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \end{bmatrix}$$

### 14.3 Localización del vector de flujo del rotor

Para la implementación del método directo de orientación del campo se requiere la medición o cálculo del vector flujo del rotor, expresado por la magnitud y el ángulo de la corriente magnetizante del rotor,  $\overline{i_{mr}}$ . Mediante sensores de flujo colocados en el entrehierro se puede determinar el vector de flujo del entrehierro que está relacionado con el vector corriente magnetizante,  $\overline{i_m}$ . Combinando esta señal con la de la corriente del estator se puede generar el vector corriente magnetizante modificado,  $\overline{i_{mr}}$ . Se obtiene que:

$$\overline{i_{mr}} = \overline{i_s} + (1 + \sigma_r) \overline{i_r} e^{j\epsilon}$$

$$= (1 + \sigma_r) \overline{i_m} - \sigma_r \overline{i_s}$$

Entonces  $i_{mr}$  puede ser calculado a partir de mediciones realizadas en el estator del motor.

El flujo del entrehierro puede ser sensado usando dispositivos de Efecto Hall o bobinas colocadas en el estator. Ambas técnicas tienen la desventaja de requerir de una modificación en el motor de inducción, además los sensores de Efecto Hall son frágiles y sensibles a la temperatura mientras que las bobinas no pueden ser usadas a frecuencias menores de 1 [Hz] debido a los problemas que presenta con la integración analógica.

En un motor de inducción se puede emplear el propio devanado del estator como sensor de flujo. Para realizar esto es necesario determinar la f.e.m. del motor a partir del voltaje terminal conociendo la caída de voltaje en el estator. Integrando la señal de la f.e.m. se obtiene el flujo en el entrehierro. La implementación de este método requiere conocer con exactitud los parámetros del estator lo cual se dificulta si se tiene en cuenta la variación de la resistencia con la temperatura.

En general, los métodos de medición del flujo están relacionados con un proceso de integración. La dificultad de la integración analógica puede ser eliminada.

La ecuación de voltaje del rotor en función de  $\overline{i_{mr}}$  puede ser resuelta en tiempo real originando un modelo de flujo que permite conocer los valores de  $\overline{i_{mr}}$  y  $\rho$  en coordenadas del estator. Otra alternativa es realizar el cálculo de una forma más eficiente en coordenadas de campo. En ambos casos se requiere como variables de entrada la velocidad en la flecha del rotor y dos de las tres corrientes de fase. La tercera corriente puede ser calculada a partir de las otras dos. La utilización del modelo de flujo en los métodos directos tiene la ventaja de que la operación es factible a velocidad cero ya que las ecuaciones son válidas para  $\omega_m$  igual a cero, sin embargo los cálculos tienen en cuenta la constante de tiempo  $\tau_r$  la cual no considera los cambios de la resistencia del rotor provocados por la temperatura y los cambios de la inductancia del rotor debido a los efectos de la saturación.

Para evitar la desorientación del flujo del rotor debido a una variación de la constante de tiempo, se pueden emplear diferentes técnicas de adaptación de parámetros. Los primeros trabajos aparecen reportados en la literatura por R. Gabriel y W. Leonard.

En los servo-accionamientos las condiciones de operación cambian rápidamente y esto propicia una variación en los parámetros del motor de inducción, afectando de forma directa la constante de tiempo del rotor  $\tau_r$ . En estos casos, la utilización de un modelo adaptable del motor en tiempo real es fundamental.

Los métodos indirectos eliminan la necesidad de la medición o el cálculo computacional del vector del flujo del rotor, pero se requiere determinar la posición instantánea del vector flujo del rotor. Los métodos indirectos también involucran a la constante de tiempo del rotor, y son sensibles a las variaciones de los parámetros durante la operación del motor.

## 14.4 Implementación del control vectorial

Para la implementación del método directo de orientación del campo se requiere la medición o cálculo del vector flujo del rotor, expresado por la magnitud y el ángulo de la corriente magnetizante del rotor,  $\lambda_r$ . Mediante sensores de flujo colocados en el entrehierro se puede determinar el vector de flujo del entrehierro que está relacionado con el vector corriente magnetizante. Combinando esta señal con la de la corriente del estator se puede generar el vector corriente magnetizante modificado.

Este control es usado en aplicaciones de altos desempeños como son los servo-accionamientos de máquinas herramienta, en robótica, etcétera, donde la potencia continua de demanda es generalmente menor a los 10 [kW].

En general un servo-accionamiento debe tener las siguientes características:

- Operación en los cuatro cuadrantes del motor de inducción.
- Respuesta transitoria rápida.
- Alta densidad de potencia.
- Alta razón par/inercia mecánica.
- Un suave ajuste de par a bajas velocidades.
- Control de par hasta velocidad cero.

Estas características pueden ser alcanzadas a través de un control por campo orientado de un motor de inducción jaula de ardilla, alimentado por un inversor PWM con control de corriente. La energía del frenaje es normalmente disipada en una resistencia (frenaje dinámico) que es conmutada en el eslabón intermedio de corriente continua del inversor. Este tipo de frenaje requiere una baja inercia del rotor para permitir una rápida respuesta transitoria.

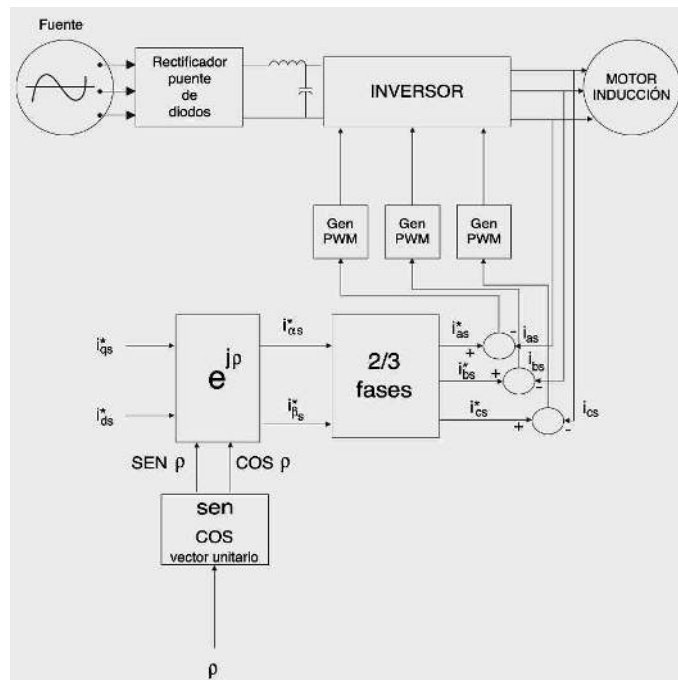
Como se explicó anteriormente, la estrategia de control de la velocidad por orientación del campo tiene la capacidad de hacer trabajar al motor de inducción como un motor de c-c. en estado transitorio y estable. Consecuentemente las estrategias de control que normalmente se utilizan en un motor de c-c. se pueden emplear en el motor de inducción, ya que la corriente de magnetización del motor de inducción representa la magnitud del flujo del rotor que es mantenida constante al máximo valor posible, limitada solamente por la saturación magnética. La corriente de magnetización del rotor disminuye cuando se trabaja en la zona de debilitamiento del campo.

### 14.5 Método directo de campo orientado

En la figura 14.5 se muestra el diagrama de bloques simplificado del control por campo orientado, usando un inversor PWM con lazo de control de la corriente. Las magnitudes de referencia  $i_{qs}^*$  e  $i_{ds}^*$  son los valores de referencia del par y del flujo respectivamente. Estos valores son generados por un lazo de control externo como se verá más adelante.

Las referencias  $i_{qs}^*$  e  $i_{ds}^*$  son transformadas a un marco de referencia bifásico estacionario y a continuación se realiza una transformación de este marco hacia el de referencia trifásico del estator, generándose a las salidas las corrientes de referencia  $i_{as}^*$ ,  $i_{bs}^*$  e  $i_{cs}^*$ . Estas corrientes de referencia son fijadas en el estator por el inversor PWM con control de la corriente.

La acción interna del motor es mostrada en la figura 14.3 en donde se observa una transformación de las tres corrientes de fase del estator a dos corrientes equivalentes,  $i_{qs}$  e  $i_{ds}$ . Estas corrientes son una reproducción de las corrientes de referencia  $i_{qs}^*$  e  $i_{ds}^*$ , esto significa que el control se realiza en términos de estas componentes de corriente en los ejes directo y de cuadratura, lográndose un control desacoplado del flujo y del par como sucede en un motor de corriente continua.



**Figura 14.5** Sistema básico del control por campo orientado para un motor de inducción con inversor PWM en modo de corriente controlada.

El vector unitario de rotación en la figura 14.5 está en función del ángulo del vector espacial flujo de rotor ( $\rho$ ), indicando esto que la información que se obtiene sobre la posición del flujo del rotor es vital. En el diagrama de la figura 14.6 se muestra un control completo por campo orientado que incorpora un modelo de flujo que genera el vector corriente de magnetización del rotor ( $i_{mr}$ ) por medio de la adquisición de dos de las corrientes del estator y de la velocidad de la flecha. De esta forma se mantiene un cálculo continuo ( $\rho$ ),  $i_{qs}$  e  $i_{mr}$ .

Los valores de  $i_{qs}$  e  $i_{mr}$  se multiplican para calcular el par actual del motor,  $T$ . El diagrama de bloques mostrado en la figura 14.6 es similar al accionamiento del motor de corriente continua con control de la velocidad. La salida del regulador de velocidad es el comando del lazo de control del par,  $T^*$ , el cual es comparado con el par actual,  $T$ . La salida del regulador del par es una señal proporcional a la corriente de referencia  $i_{qs}^*$ . La corriente de magnetización de referencia  $i_{mr}^*$  es comparada con el valor actual de  $i_{mr}$ , siendo el error la señal de entrada al regulador de flujo. La salida del regulador es la corriente de referencia en el eje directo ( $i_{ds}^*$ ).

La magnitud de  $i_{mr}^*$  permanece constante en el intervalo  $-\omega_b$ ,  $\omega_b$  correspondiente a la zona de operación conocida como de par constante. El accionamiento de la figura 14.6 no emplea un oscilador de referencia, ya que la frecuencia del estator es fijada por la señal de flujo que proviene de la máquina o desde su modelo. Si la velocidad de referencia se cambia rápidamente o si el motor es sobrecargado, la señal de error de velocidad satura al regulador y de esta forma el par no puede exceder el valor máximo.

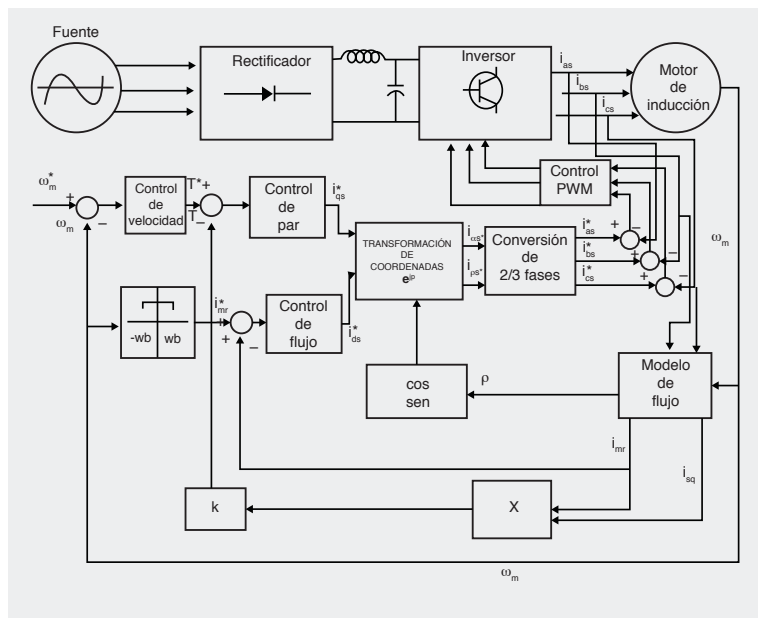


Figura 14.6 Control vectorial utilizando un método directo de orientación del flujo del rotor.



### 14.6 Método indirecto de campo orientado

El método indirecto de campo orientado es una buena alternativa para evitar la necesidad de sensores de flujo o modelos de flujo, sin embargo es necesario realizar la medición precisa de la posición del rotor para determinar la localización exacta del vector de flujo del rotor. Como se mostró anteriormente, las características del motor en coordenadas de campo son descritas por las ecuaciones:

$$T = k i_{mr} i_{qs}$$

$$\tau_r \frac{di_{mr}}{dt} + i_{mr} = i_{ds}$$

$$\omega_{mr} = \omega_m + \frac{i_{qs}}{\tau_r i_{mr}}$$

En la última ecuación se observa que el vector del flujo del rotor tiene una velocidad angular instantánea  $\omega_{mr}$ , que es la suma de la velocidad angular instantánea de la flecha,  $\omega_m$ , y la velocidad angular instantánea de deslizamiento del rotor. La velocidad angular de deslizamiento es denotada como  $\omega_2$  y se expresa como:

$$\omega_2 = \frac{i_{qs}}{\tau_r i_{mr}}$$

$$\omega_2 = \omega_{mr} - \omega_m = s \omega_{mr}$$

donde:  $s$  es el deslizamiento del rotor con respecto al vector del flujo del rotor. Las ecuaciones previas muestran que  $\omega_2$  y  $s$  quedan fijadas por los valores de  $i_{qs}$  e  $i_{mr}$ .

En el método directo de campo orientado es necesario realizar la medición o el cálculo del vector flujo del rotor, y sincronizar el vector corriente del estator con el vector flujo del rotor. Esta sincronización de  $\overline{i_s}$  e  $\overline{i_{mr}}$  asegura que la relación de deslizamiento de la ecuación anterior se cumpla siempre. La ecuación de deslizamiento puede ser implementada en el control por orientación del campo sin que sea necesario realizar la medición exacta del vector flujo del rotor. Esta suposición es la base del método indirecto de campo orientado, a menudo llamado método de control de la frecuencia del deslizamiento.

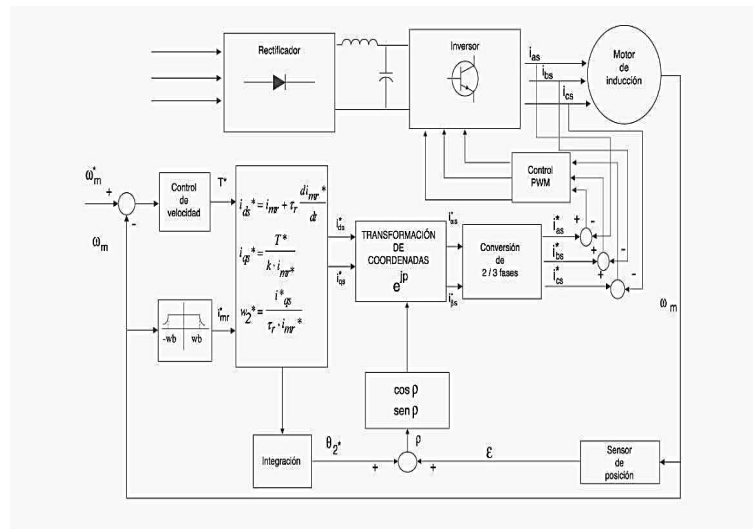
El par electromagnético y el flujo son controlados independientemente a través de la regulación apropiada de  $i_{qs}$ ,  $i_{ds}$  y  $\omega_2$ . Las ecuaciones pueden ser usadas para determinar los valores de referencia  $i_{qs}^*$ ,  $i_{ds}^*$  e  $\omega_2^*$  que demanda el par,  $T^*$ , y la corriente de magnetización del rotor,  $i_{mr}$ ; de esta manera se tienen las ecuaciones siguientes:

$$i_{ds}^* = i_{mr}^* + \tau_r \frac{di_{mr}^*}{dt}$$

$$i_{qs}^* = \frac{T^*}{K i_{mr}^*}$$

$$\omega_2^* = \frac{i_{sq}}{\tau_r i_{mr}^*}$$

En la figura 14.7 se muestra la implementación del control de la velocidad utilizando un método indirecto y un inversor PWM controlado por corriente. El error de velocidad es la entrada del controlador de velocidad, el cual genera como salida el comando de par  $T^*$ . La velocidad de la flecha se utiliza como una función generadora de la corriente de magnetización modificada,  $i_{mr}^*$ , teniendo como referencia la velocidad base ( $\omega_b$ ) que servirá para fijar la zona de debilitamiento de campo. Los comandos de par,  $T^*$ , y de corriente de magnetización modificada,  $i_{mr}^*$ , son usados para calcular los valores de  $i_{ds}^*$ ,  $i_{qs}^*$  y  $\omega_2^*$ . El comando de deslizamiento,  $\omega_2^*$ , es integrado para obtener la posición angular  $\theta_2^*$ , la cual es adicionada a la señal de posición del rotor, para determinar la posición del ángulo del flujo del rotor ( $\rho$ ). Estos cálculos son realizados de forma digital para evitar problemas de precisión.

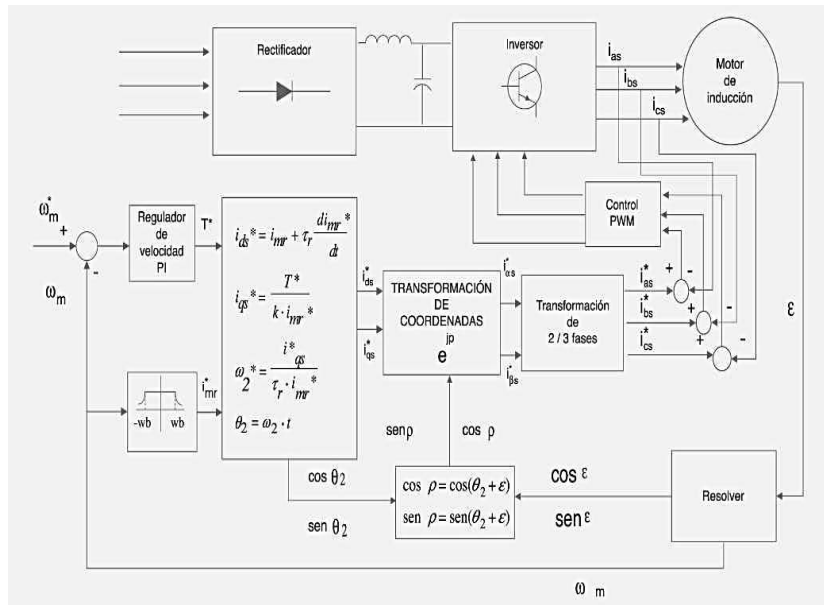


**Figura 14.7** Control de velocidad aplicando el método indirecto de campo orientado con inversor PWM con lazo de corriente.

Como se observa en la figura 14.7, el ángulo ( $\rho$ ) es utilizado para calcular el vector rotatorio  $e^{j\rho}$  que se utiliza para calcular las corrientes  $i_{\alpha s}^*$  e  $i_{\beta s}^*$  referenciadas al estator. Mediante una transformación de dos a tres fases se obtienen las corrientes de referencia que son aplicadas al motor por medio del inversor PWM, proporcionando un control de par desde velocidad cero.

En la figura 14.7 se muestra que los parámetros del motor, en particular el valor de la constante de tiempo del rotor  $\tau_r$ , son fundamentales para la exactitud del cálculo de las corrientes de referencia del estator y la frecuencia de referencia del deslizamiento. Si el valor actual de la constante de tiempo del rotor difiere del valor empleado para el cálculo de los valores de referencia, no existirá una correcta orientación del campo y se deteriorará la respuesta dinámica del control.

En general, el control de la velocidad por orientación del campo es muy similar al control por deslizamiento descrito en la literatura



**Figura 14.8** Diagrama de bloques del método indirecto de control vectorial de la velocidad con inversor con lazo de corriente y banda de histéresis adaptable.

### 14.7 Cálculo de la corriente de magnetización modificada

La corriente de magnetización modificada de referencia,  $i_{mr}^*$ , se calcula a partir de una función generadora que depende de la velocidad base. Esto significa que si la máquina de inducción está en la zona de par constante, por debajo de la velocidad base, se requiere mantener el flujo constante e igual a su valor nominal para tener un máximo de aprovechamiento de su capacidad ferromagnética, de esta manera es

necesario una corriente de magnetización modificada constante que permita tener este valor del flujo del rotor. Si la máquina tiene una velocidad mayor que la velocidad base, se encuentra en la zona de campo debilitado y en esta zona el flujo decrece y la corriente  $i_{mr}^*$  también debe decrecer, como se muestra en la figura 14.9.

Por lo tanto el valor de la corriente de magnetización modificada  $i_{mr}^*$  queda en función del valor de la velocidad de la flecha.

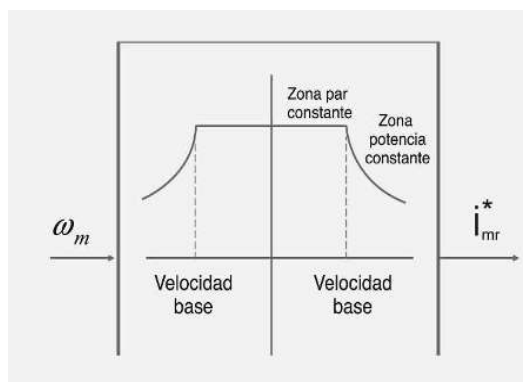
Para obtener la corriente de magnetización modificada se parte del circuito equivalente de la máquina de inducción mostrado en la figura 14.10, del cual se obtiene la ecuación:

$$\bar{i}_m = \frac{\bar{V}_s - \bar{i}_s [R_1 + jX_1]}{jX_m}$$

El valor de  $\bar{i}_s$  se obtiene de las corrientes instantáneas y de la definición de vector espacial. Sustituyendo  $\bar{i}_r e^{j\epsilon}$  en la ecuación previa se obtiene la expresión de la corriente de magnetización modificada  $\bar{i}_{mr}$ :

$$\bar{i}_{mr} = \bar{i}_s \sigma_r + [1 + \sigma_r] \left[ \frac{\bar{V}_s - \bar{i}_s Z_1}{X_m e^{j\pi/2}} \right]$$

donde  $Z_1$  es la impedancia de dispersión del estator. El valor de  $Z_1$  y de  $X_m$  varía en función de la frecuencia del estator.



**Figura 14.9** Función generadora del valor de la corriente de magnetización modificada.

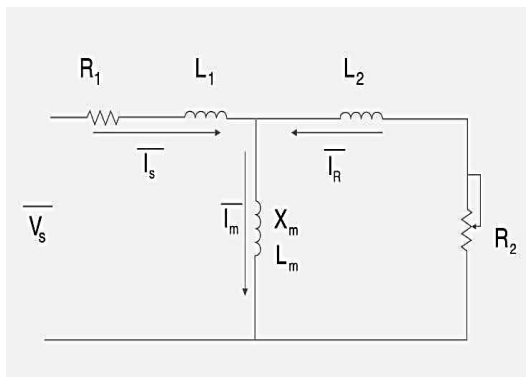


Figura 14.10 Circuito equivalente del motor de inducción.

**14.7.1 Bloque de cálculo de las componentes de corrientes de referencia  $i_{ds}^*$  e  $i_{qs}^*$  y de la velocidad de deslizamiento de referencia  $\omega_2$**

En el bloque de cálculo de las componentes comando en cuadratura  $i_{ds}^*$  e  $i_{qs}^*$  y de la velocidad comando de deslizamiento  $\omega_2^*$ , se realizan las operaciones correspondientes a las ecuaciones ya revisadas. En la figura 14.11 se muestran las entradas y salidas del bloque así como las ecuaciones para los cálculos.

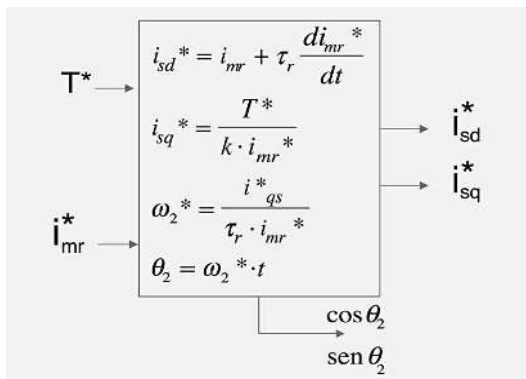


Figura 14.11 Bloque de cálculo de componentes de corriente de referencia  $i_{sd}^*$  e  $i_{sq}^*$  y de la velocidad de deslizamiento de referencia  $\omega_2^*$ .

### 14.7.2 Cálculo del vector unitario

En este bloque se realiza el cálculo del vector unitario, teniéndose como entradas el coseno y el seno del ángulo de la velocidad de deslizamiento de referencia, y el seno y el coseno del ángulo de la velocidad de la flecha del rotor. Los valores de  $\theta_2$  y  $\epsilon$  se calcularon al multiplicar  $\omega_2$  y  $\omega_m$  por el tiempo.

Las siguientes ecuaciones muestran la forma de realizar el cálculo para obtener el seno y el coseno del ángulo del vector unitario,  $\rho$ , los cuales son la salidas del bloque como se muestra en la figura 14.12.

$$\cos\rho = \cos(\epsilon + \omega_2^*t) = \cos\epsilon\cos\omega_2^*t - \text{sen}\epsilon\text{sen}\omega_2^*t$$

$$\text{sen}\rho = \text{sen}(\epsilon + \omega_2^*t) = \text{sen}\epsilon\cos\omega_2^*t + \cos\epsilon\text{sen}\omega_2^*t$$

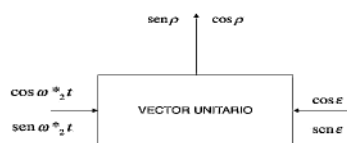


Figura 14.12 Bloque de cálculo del vector unitario.

### 14.7.3 Transformación inversa de coordenadas

La transformación de coordenadas de campo a coordenadas trifásicas del estator se realiza en dos etapas, las cuales se muestran en la figura 14.13. Primero se transforma de coordenadas de campo a coordenadas bifásicas estacionarias:

$$i_{\alpha s}^* = i_{d s}^* \cos\rho - i_{q s}^* \text{sen}\rho$$

$$i_{\beta s}^* = i_{d s}^* \text{sen}\rho + i_{q s}^* \cos\rho$$

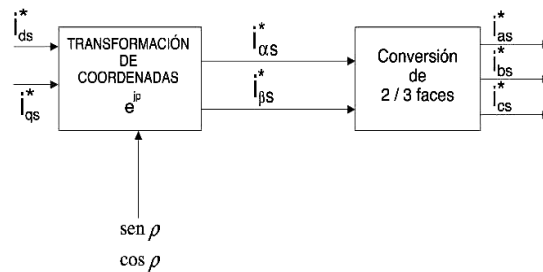
Posteriormente se transforma de coordenadas bifásicas estacionarias a coordenadas trifásicas estacionarias:

$$i_{a s}^* = \frac{2}{3} i_{\alpha s}^*$$

$$i_{bs}^* = -\frac{1}{3}i_{\alpha s}^* + \frac{1}{\sqrt{3}}i_{\beta s}^*$$

$$i_{cs}^* = -\frac{1}{3}i_{\alpha s}^* + \frac{1}{\sqrt{3}}i_{\beta s}^*$$

Los valores de las corrientes trifásicas  $i_{as}^*$ ,  $i_{bs}^*$  e  $i_{cs}^*$  son las corrientes comandos que se envían al inversor con lazo de corriente.



**Figura 14.13** Bloque de transformación inversa de coordenadas.

## 14.8 Principios básicos para el desarrollo del control vectorial

### 14.8.1 Técnica de modulación de banda de histéresis

En el control vectorial se tienen que tomar en cuenta algunos puntos importantes para su implementación, así como el equipo que se tiene que emplear. A continuación se explica todo esto; en particular la primera parte se inicia con el estudio del control de la corriente a través de una técnica de modulación del ancho de los pulsos (PWM).

Uno de los métodos más empleados para el control de la corriente en el control vectorial es el de la banda de histéresis, esto es porque en los accionamientos de la máquina de inducción de altos desempeños se utiliza la modulación del ancho de los pulsos (PWM) con lazo de control de la corriente debido a que el par de la máquina y el flujo magnético están directamente vinculados con la corriente del estator.

El método de la corriente controlada con banda de histéresis es muy común en diferentes aplicaciones. En la figura 14.14 se muestra un inversor a transistores con diodos de retroalimentación. La conexión de estos diodos en antiparalelo permite que el inversor trabaje correctamente cuando existe una diferencia de fase entre el voltaje y la corriente, y cuando el motor realice un frenado regenerativo. La esencia de este método se muestra en la figura 14.15, en donde se observa que la magnitud y la frecuencia de la corriente de fase es forzada a seguir la magnitud y frecuencia de la señal de referencia. Para lograrlo, los transistores de cada fase conmutan de la forma que se muestra forzando a la corriente a mantenerse dentro de un valor (banda de histéresis).

La frecuencia del PWM varía dentro de la banda y el contenido de armónicos de la corriente de carga está en dependencia del rizado de las señales de corrientes de fase. La corriente fundamental tiene un retraso de fase con respecto a la señal de referencia, el cual se incrementa con la frecuencia.

En la figura 14.16 se muestra el lazo de control de la corriente donde la salida del lazo es la corriente de fase con una magnitud y frecuencia que tiende a los valores de referencia. Se tiene que tener en cuenta que existen otros métodos de PWM para el control de la corriente que permiten mantener el control de ésta con una frecuencia de conmutación constante, así como una distorsión armónica baja.

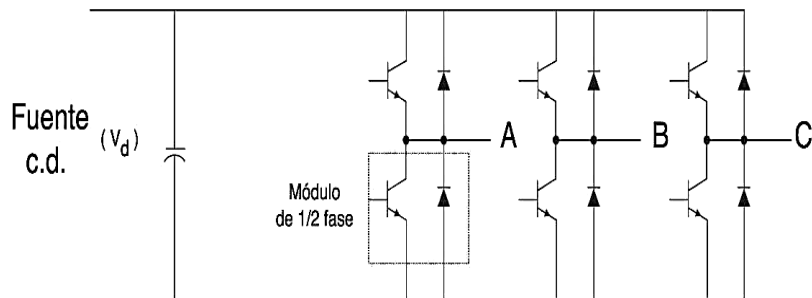
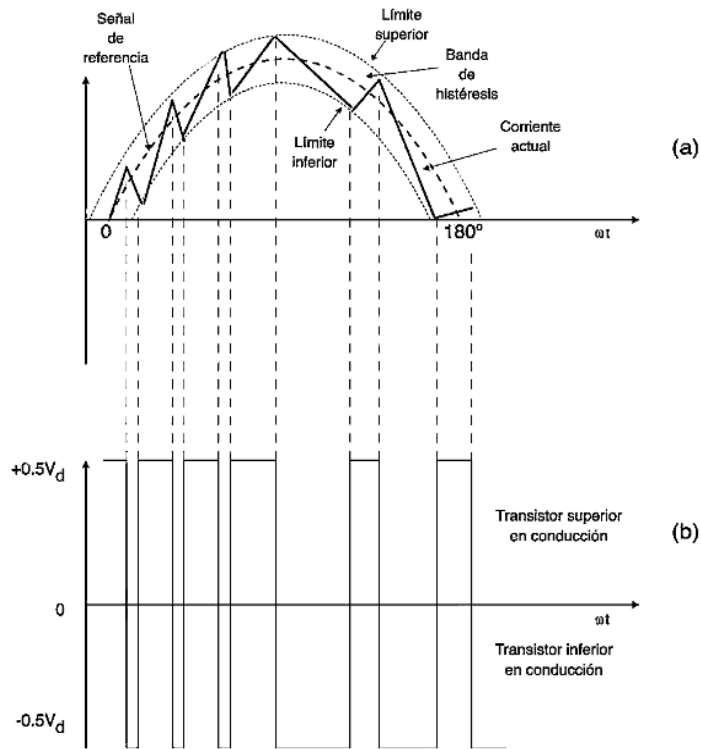
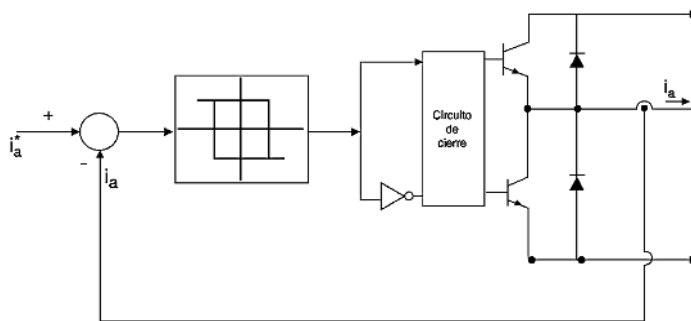


Figura 14.14 Circuito inversor.





**Figura 14.15** Principio del control de corriente PWM con banda de histéresis: (a) corriente de fase, (b) voltaje polar entre la salida de una de las fases y centro ficticio de la fuente de c-c.



**Figura 14.16** Controlador de corriente PWM con banda de histéresis.

### 14.8.2 Diagrama de conmutación de un controlador de histéresis

Hasta aquí se ha considerado que no existe conexión entre el punto medio de la fuente de corriente continua (figura 14.14) y el centro de la carga. En las aplicaciones industriales se encuentran otros tipos de controladores de histéresis además del presentado.

Mediante un diagrama del vector espacial de corriente se pueden explicar algunas de las características del controlador. Este diagrama muestra cómo se realiza la conmutación de los transistores del inversor. Para llegar al diagrama de conmutaciones, primero es necesario mostrar (figura 14.17) los vectores espaciales de la corriente de referencia ( $i^*$ ), de la corriente actual del motor ( $\bar{i}$ ) y del error ( $\overline{\Delta i}$ ). Los vectores  $\Delta \bar{i}_a$ ,  $\Delta \bar{i}_b$  y  $\Delta \bar{i}_c$  son las proyecciones del vector de corriente  $\overline{\Delta i}$  en los correspondientes ejes A, B y C.

El controlador conmuta la rama del inversor A cuando  $\Delta \bar{i}_a$  excede la banda de histéresis (BH) mostrada en la figura 14.18 a través de dos líneas de conmutación perpendiculares al eje A. Las líneas son localizadas desde el vector de referencia a través de una distancia igual a la banda de histéresis. De forma semejante, las líneas de conmutación para las fases B y C se muestran en la figura 14.19. El diagrama de conmutación es el resultado de la combinación de cada una de las fases y se desplaza con el vector corriente de referencia, el cual se localiza en el centro del diagrama en el plano complejo. El diagrama de conmutación confirma que el máximo error de la corriente de error es el doble de la banda de histéresis, 2 BH.

En la figura 14.20 se muestra una trayectoria que representa el máximo error de la corriente en una fase. Esta trayectoria ocurre cuando el vector inicial de voltaje  $\overline{V}_1$ , (A+, B-, C-) , fuerza a la corriente a pasar la banda ocurriendo una conmutación en la fase A, de una dirección A+ a una dirección A-, resultando el vector  $\overline{V}_8$ , (A-, B-, C-) . El signo positivo (+) significa que se encuentra en conducción el transistor conectado en la parte superior de la fase. El signo negativo (-) significa que se encuentra en conducción el transistor inferior.

La línea de error puede incrementarse con la presencia de una carga resistiva y el valor de la fuerza contra electromotriz. Por otro lado, el desplazamiento del diagrama de conmutación causa variación en la corriente de referencia. El vector de voltaje no cambia hasta que el vector actual de corriente cruza una línea de conmutación.

El máximo error ocurre cuando el vector actual de corriente toca a una de las esquinas de afuera del diagrama. El diagrama de conmutación puede ser usado para mostrar los ciclos límite, los cuales aparecen cuando hay una interrupción ocasional debido a la acción de los vectores cero, figura 14.20. Esto puede ocurrir cuando la fuerza contra electromotriz tiene un valor bajo.

En la figura 14.21 se muestra una trayectoria de corriente indicada a través de una línea sólida, y esta trayectoria puede aparecer durante un ciclo límite; el vector de voltaje  $\overline{V}_1$ , (A+, B-, C-) , obliga al vector de corriente a moverse en la misma dirección del vector de voltaje. Asumiendo que la fuerza

contra electromotriz y la resistencia tienen un valor igual a cero, el vector de corriente intercepta la línea de conmutación  $+C$  causando en la fase  $C$  del inversor una conmutación y la generación del vector  $\bar{V}_6$ ,  $(A+, B-, C+)$ , en el inversor. Después de que el vector de corriente intercepta la línea de conmutación  $A-$ , provoca la generación del vector de voltaje  $\bar{V}_5$ ,  $(A-, B-, C+)$ , en el inversor. Continuando con el mismo razonamiento, los seis vectores de voltaje no cero son aplicados repetidamente resultando una alta frecuencia de conmutación en el caso de existir una baja inductancia de dispersión y una banda de histéresis estrecha. Se debe notar que la magnitud del vector error de corriente no es reducido a cero durante los ciclos límite.

La línea punteada en la figura 14.21 representa una trayectoria de corriente cuando la fuerza contra electromotriz tiene un valor distinto de cero. La frecuencia de conmutación mayor ocurre durante los ciclos límite cuando la fuerza contra electromotriz es cero (debido a que la fuerza contra electromotriz tiende a reducir la frecuencia de conmutación), en estos casos se debe tener en cuenta que el inversor utilizado debe de estar diseñado para poder operar a esta frecuencia, siendo esto una de las más grandes limitaciones en este tipo de controladores.

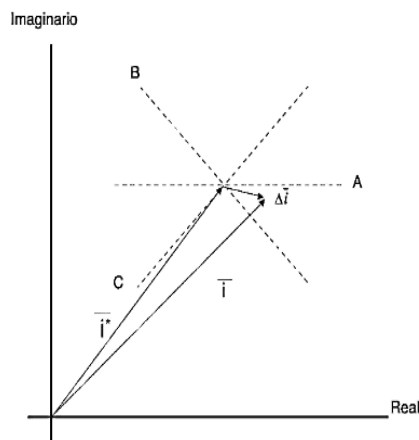


Figura 14.17 Vectores de corriente en el plano complejo.

Los ciclos límite pueden ser ocasionalmente interrumpidos al aplicar vectores de voltaje cero. Por ejemplo, si se tiene en cuenta el ciclo límite del ejemplo anterior se puede considerar la aplicación de un vector de voltaje cero que interrumpa la secuencia. Esto se realiza con el objetivo de limitar la magnitud de la frecuencia de conmutación en cargas que tengan una fuerza contra electromotriz que pueda hacerse cero (en los cruces por cero de la f.e.m. si suponemos que la carga es un motor), también para el caso de cargas resistivas o de cargas que generen un desplazamiento del diagrama de conmutación.

Si el diagrama de conmutación se desplaza, el vector de voltaje  $\bar{V}_1$ ,  $(A+, B-, C-)$  en la figura 14.20 puede causar que el vector de corriente cruce la línea de conmutación  $-A$ , en lugar de cruzar la línea de

conmutación +C, lo cual resultaría en un vector de voltaje cero  $\overline{V}_8$ , (A-, B-, C-).

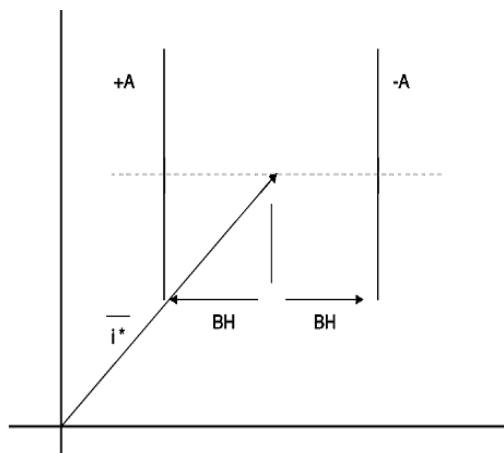


Figura 14.18 Líneas de conmutación para la fase A.

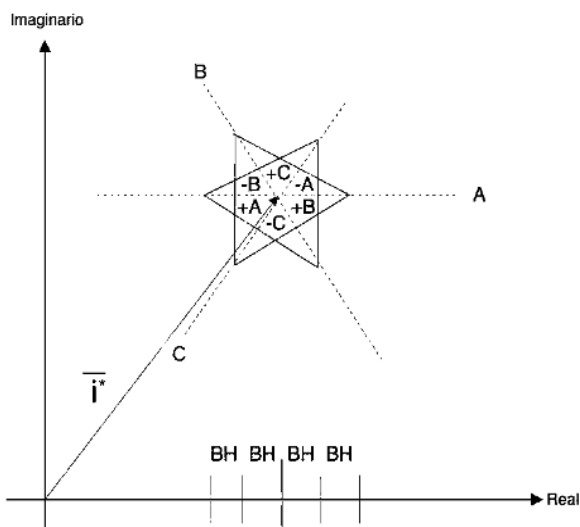
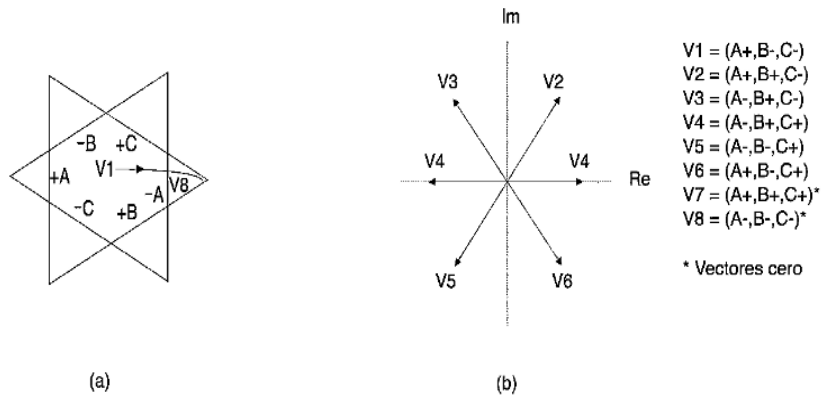
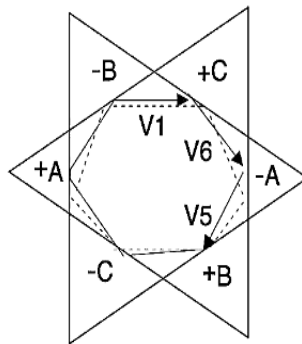


Figura 14.19 Diagrama de conmutación para un controlador de histéresis con tres controladores independientes en el plano complejo.



**Figura 14.20** (a) Trayectoria de corriente con máximo error; (b) vectores de voltaje.



**Figura 14.21** Trayectoria para dos ciclos límite. Línea sólida para fuerza contra electromotriz cero. Línea punteada para fuerza contra electromotriz distinta de cero.

### 14.9 Análisis del desempeño del PWM banda de histéresis

En las técnicas de modulación se busca tener un sistema capaz de poder transmitir de manera confiable las señales que provienen del controlador. Para esto se busca un bajo contenido de armónicos, sin embargo lo que sucede con esta técnica es que mientras más estrecha sea la banda de histéresis se pueden tener problemas con la frecuencia de conmutación de los semiconductores, ya que éstos pueden incrementar

sus pérdidas, además hay que recordar que esta técnica no permite tener una frecuencia de conmutación constante. Se puede observar que la magnitud de la banda se fija a un valor constante en el cual se tenga un compromiso entre la frecuencia de conmutación de los semiconductores y la distorsión armónica se puede decir que esta banda es respetada por la mayoría de las componentes de la señal de corriente, no importando el cambio de la frecuencia de las señales de corriente de referencia.

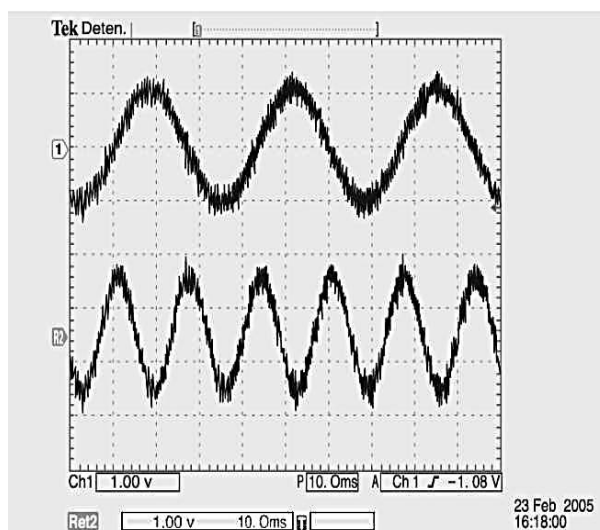


Figura 14.22 Forma de onda de corriente, 30 Hz y 50 Hz.

Como se puede observar en la figura 14.23 la señal de corriente casi en su totalidad permanece dentro de la banda de histéresis, lo que permite que se pueda tener una reproducción muy cercana de la señal de control.

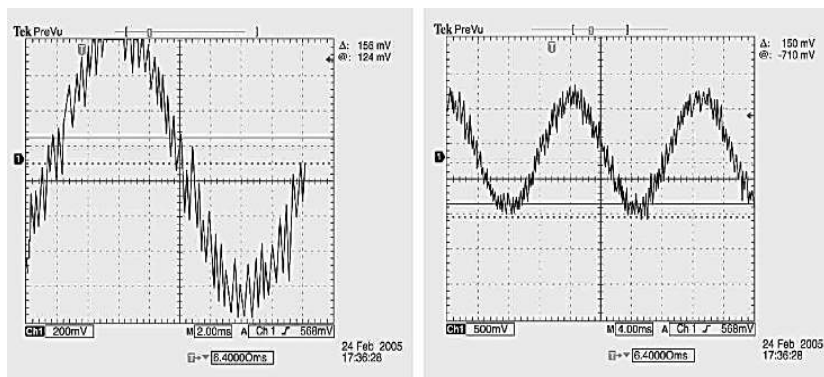
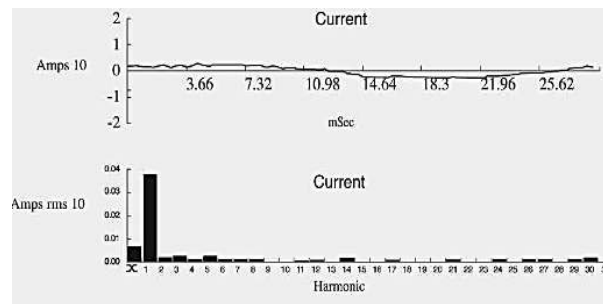


Figura 14.23 Banda de histéresis fija.

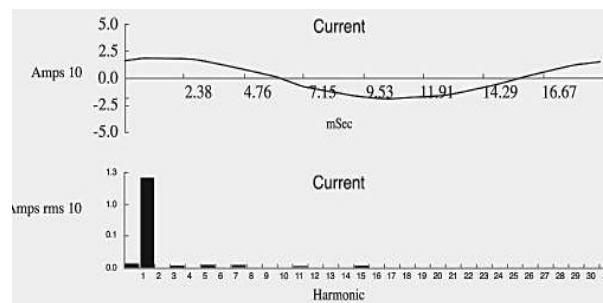
Se puede observar que el rizado se incrementa en algunos puntos de la señal de corriente, lo que provoca que la señal de corriente salga de la banda de histéresis. Esto se debe a que la F.E.M. está desfasada noventa grados con respecto a la corriente y por lo tanto es en este punto en donde alcanza sus valores más bajos. Con esto no hay una diferencia de potencial que limite a la corriente, por lo que su tiempo de respuesta se hace más pequeño.

Otro punto muy importante durante la implementación es que se tiene que emplear un sistema discreto en el cual se tiene que tomar en cuenta el tiempo de muestreo. Se recomienda que el PWM del control vectorial sea un proceso independiente con una dinámica de ejecución superior, y que sea un proceso de ejecución permanente.

Para la selección de los tiempos de muestreo se tienen que respetar los teoremas de muestreo correspondientes, para lo cual se tienen que tener las dinámicas de las señales eléctricas así como de la frecuencia máxima de conmutación de los semiconductores seleccionados.



**Figura 14.24** Análisis armónico de la señal de corriente a 34 [Hz].



**Figura 14.25** Análisis armónico de la señal de corriente a 52 [Hz].

Como se puede observar en las gráficas de las figuras 14.26 y 14.27, el comportamiento de la banda de histéresis depende del tiempo de muestreo, siendo más significativo en los puntos en los que la dinámica

de la corriente es más rápida.

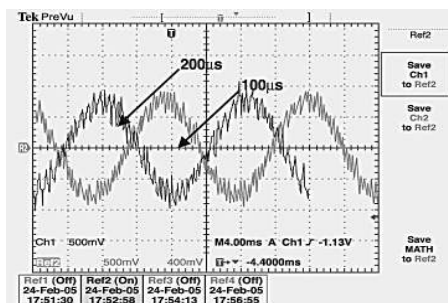


Figura 14.26 Corriente: tiempo de muestreo  $100 \mu s$  y  $200 \mu s$ .

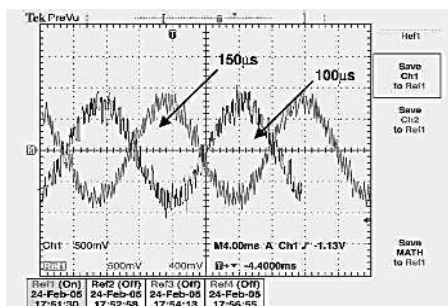


Figura 14.27 Corriente: tiempo de muestreo  $100 \mu s$  y  $200 \mu s$ .

Debido a estos fenómenos, los puntos básicos de la ejecución del algoritmo de control vectorial se tienen que encargar de:

- Medición de corrientes y de velocidad.
- Transformar las corrientes de estator del marco abc al marco dq.
- Estimar la magnitud y orientación del flujo rotórico.
- Transformar las corrientes de referencia del marco dq al marco abc.
- Controlar la corriente del motor mediante PWM por banda de histéresis (en un ciclo interno).



### 14.10 Estimación del flujo rotórico

Es posible obtener un equivalente discreto de la ecuación de flujo para la magnitud del flujo utilizando el método de Euler hacia atrás. Se puede emplear este método debido a que la frecuencia de muestreo es muy pequeña comparada con el ancho de banda del sistema, por lo que el intervalo de convergencia es grande. Para esto se tiene la siguiente ecuación de diferencias:

$$\lambda_k = \lambda_{k-1} - \frac{T}{T_r} \lambda_{k-1} + \frac{L_m T}{T_r} i_k$$

$$\lambda_k = \lambda_{k-1} - \frac{T}{T_r} \lambda_{k-1} + \frac{L_m T}{T_r} \frac{i_{max}}{\lambda_{max}} \bar{i}_k$$

Las variables se pueden normalizar de manera que es posible realizar los cálculos utilizando representación fraccionaria.

Para estimar la orientación del flujo del rotor se puede calcular primero el deslizamiento y usando éste se obtiene la velocidad de sincronía:

$$\bar{\omega}_e = \bar{\omega}_m + \frac{L_m}{T_r} \frac{i_{max}}{\lambda_{max} \omega_{max}} \frac{\bar{i}}{\lambda}$$

Después se puede integrar (Tustin) numéricamente la velocidad de sincronía para encontrar la orientación del flujo y se puede restringir su valor:

$$\bar{\rho}_k = \bar{\rho}_{k-1} + \frac{T}{2} \frac{\omega_{max}}{\rho_{max}} \bar{\omega}_{e,k} + \frac{T}{2} \frac{\omega_{max}}{\rho_{max}} \bar{\omega}_{e,k-1}$$

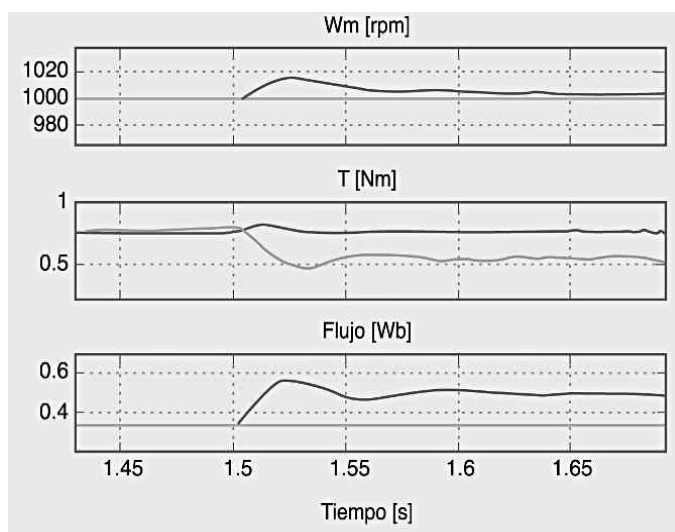
### 14.11 Estimación de la resistencia del rotor

En el método indirecto de control por campo orientado, es necesario conocer el valor actual de la constante de tiempo del rotor. Este valor se emplea en el modelo de campo orientado para conocer la magnitud y la posición del flujo del rotor.

Como se sabe, la constante de tiempo del rotor presenta variaciones debidas a la temperatura, al Efecto Skin y a las fluctuaciones en los niveles de flujo. Cuando se presentan variaciones de la constante de tiempo del rotor, la eficiencia del control tiende a deteriorarse si no es aplicada una técnica de compensación, identificación o estimación de su valor real.

Un parámetro muy importante dentro de la constante de tiempo del rotor, que es crucial para la estimación del flujo del rotor, es la resistencia del rotor. Como se mencionó anteriormente esta variable se encuentra entre las ecuaciones fundamentales del control vectorial, por lo que se encuentra que la resistencia resulta ser una variable muy importante dentro de todo el esquema, además de ser una variable que tiene variaciones significativas.

El cambio en la resistencia del motor es inevitable debido principalmente a la variación de la temperatura. La variación en la resistencia dará como resultado que la estimación del flujo no sea la correcta, ya que el ángulo  $\rho$  entre el marco  $\alpha\beta$  y el marco dq que está orientado con el flujo del rotor no sea efectiva, por lo tanto no podremos orientarnos realmente en el flujo del rotor y la estimación de éste será incorrecta. En la figura 14.28 se muestran la respuesta de la velocidad, el par y el flujo.



**Figura 14.28** Respuesta del sistema sin estimación de resistencia.

La gráfica de la figura 14.29, que depende de la variación de la resistencia, muestra el incremento de la diferencia entre el valor de referencia del flujo y el valor real.

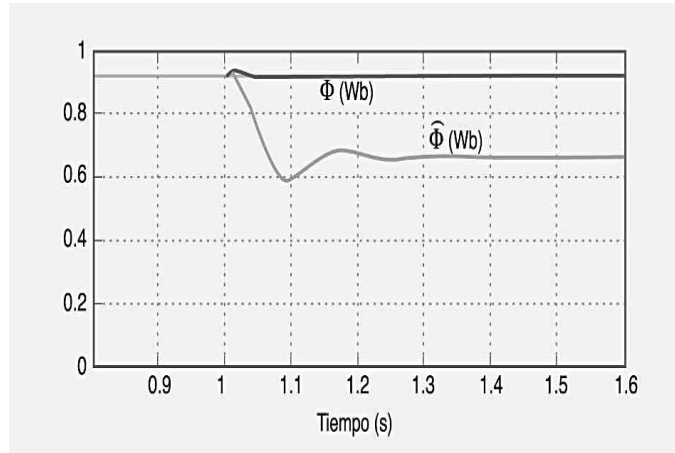


Figura 14.29 Flujo del rotor.

Las siguientes ecuaciones presentan un método sencillo que se puede emplear para determinar el factor de corrección  $\alpha$  por el cual se multiplica la resistencia para actualizar el valor de la misma una vez que ésta cambió. Lo que se pretende es que se comparen el flujo tanto del marco estacionario como el del marco rotatorio. El error entre estos dos debe ser cero, lo que quiere decir que la resistencia no ha variado su valor, si la resistencia empieza a variar su valor se presentará un error que va a ser compensado con el parámetro y se actualiza la resistencia dando como resultado una estimación correcta del flujo:

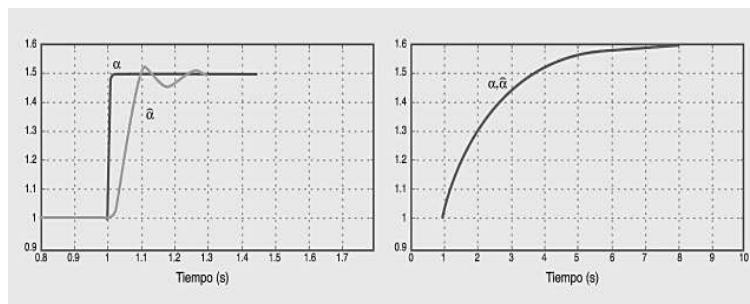
$$\hat{R}_r = \hat{\alpha} \overline{R}_r$$

$$\frac{d\lambda_r}{dt} = \hat{\alpha} \frac{M}{\tau_r} i_{sd} - \hat{\alpha} \frac{1}{\tau_r} \lambda_{rd}$$

$$V = R_s i_s + \frac{d\lambda_s}{dt}$$

$$\lambda_s = \sigma L_s i_s + \frac{M}{L_r} \lambda_s$$

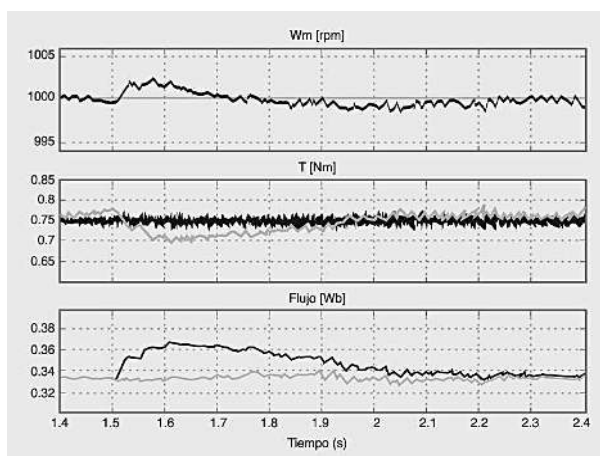
Una vez realizada la actualización de la resistencia se puede analizar la respuesta dinámica del control vectorial, como se muestra en la figura 14.30: aquí se observa cómo responde el parámetro a un cambio del 50 en la resistencia. La variación de la resistencia tiene una dinámica muy lenta, por lo que a un escalón de cambio en la misma resultará en oscilaciones, sin embargo en la segunda gráfica de la figura 14.30 se puede observar cómo se trata de simular que la dinámica de la resistencia es mucho más lenta y también se puede observar cómo sigue perfectamente la referencia asignada.



**Figura 14.30** Respuesta a entrada escalón y seguimiento en el parámetro  $\alpha$

Para que el estimador del valor de la resistencia opere de manera adecuada es necesario un controlador que minimice el error entre el flujo del marco estacionario y del rotatorio, y con esto se obtendrá un nuevo valor que va a actualizar el valor de la resistencia.

En la figura 14.31 se presentan los resultados del estimador cuando se genera un cambio en la resistencia. Aquí se puede ver cómo la velocidad se ajusta al valor real. Por otro lado, el par y el flujo al tener una estimación correcta con el nuevo valor de la resistencia llegan a los valores reales, lo que genera una orientación correcta del flujo del rotor.



**Figura 14.31** Respuesta del sistema con estimación de resistencia.

### 14.12 Estimación de la constante de tiempo del rotor mediante un modelo de flujo adaptable del sistema

Existe un método de estimación de la constante de tiempo del rotor basado en un modelo de referencia adaptable del sistema (MRAS). La estimación a partir de un modelo de flujo adaptable del sistema (MRAS) se basa en tener dos observadores del flujo del rotor, uno de ellos está referido al estator (modelo fijo) y no depende de la constante de tiempo del rotor ( $\tau_r$ ) mientras que el otro observador está referido al rotor y su modelo depende de la constante de tiempo del rotor ( $\tau_r = \frac{L_r}{R_r}$ ). Este método presenta mejores características de respuesta que la sola estimación de la resistencia que se presentó.

El modelo adaptable tiene que ajustar el valor de la constante de tiempo del rotor para lograr que los flujos del rotor, calculados por ambos modelos sean idénticos. En este modelo se supone que de todos los parámetros del motor de inducción, la resistencia del rotor que está dentro de la constante de tiempo ( $\tau_r = \frac{L_r}{R_r}$ ) es la que presenta las mayores variaciones y por lo tanto la que más influye en el valor de la constante de tiempo del rotor. En el esquema de identificación que se propone se realiza un control en lazo cerrado, teniéndose como entrada la magnitud del flujo del rotor generada por el modelo de referencia fijo, el cual es comparado con el valor del flujo obtenido del modelo de referencia adaptable. El error resultante de la comparación es la entrada al controlador difuso. El controlador difuso a partir del valor del error e incremento del error actualiza el valor de la constante de tiempo del rotor ( $\tau_r$ ), en el modelo adaptable y en las ecuaciones de campo orientado.

#### 14.12.1 Obtención de los modelos fijo y adaptable del flujo del rotor

Para la obtención de los modelos de flujo se parte de las ecuaciones vectoriales del voltaje del estator (en el marco de referencia del estator) y del voltaje del rotor (en el marco de referencia del rotor):

$$\begin{aligned}\bar{v}_s &= R_s \bar{i}_s + \frac{d\bar{\lambda}_s}{dt} \\ \bar{v}_r &= 0 = R_r \bar{i}_r + \frac{d\bar{\lambda}_r}{dt}\end{aligned}$$

donde:

$$\bar{\lambda}_s = L_s \bar{i}_s + M \bar{i}_r e^{je}$$

es el flujo del estator referido al propio estator y:

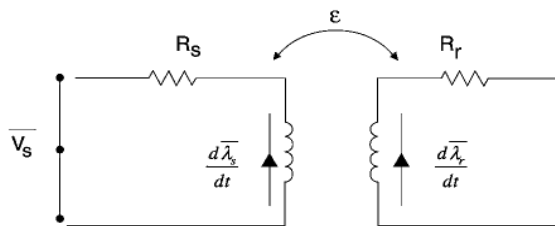
$$\bar{\lambda}_r = L_r \bar{i}_r + M \bar{i}_s e^{-je}$$

es el flujo del rotor referido al propio rotor.

Las ecuaciones vectoriales de la máquina de inducción se pueden representar a partir de un diagrama equivalente, el cual se muestra en la figura 14.32. Mediante la transformación de coordenadas se puede cambiar el marco de referencia de la ecuación anterior y transformarla desde el marco del rotor al marco del estator, obteniéndose:

$$0 = R_r \overline{i}'_r + \frac{d\overline{\lambda}'_r}{dt} - j\omega_m \overline{\lambda}'_r$$

donde  $\omega_m = \frac{de}{dt}$  es la velocidad del rotor en radianes eléctricos por segundo,  $\overline{i}'_r$  es el vector espacial corriente del rotor en coordenadas del estator y  $\overline{\lambda}'_r$  es el vector espacial flujo del rotor en coordenadas del estator.



**Figura 14.32** Diagrama equivalente del motor de inducción utilizado para mostrar las ecuaciones vectoriales.

Para transformar la ecuación previa, hacia un marco de referencia síncrono, que gire a la velocidad del flujo del rotor (coordenadas de campo), es necesario multiplicar las variables de esta ecuación por el vector unitario  $e^{j\rho}$ , obteniéndose:

$$\overline{v}_s^s = R_s \overline{i}_s^s + \frac{d\overline{\lambda}_s}{dt} + j\omega_{mr} \overline{\lambda}_s$$

donde:  $\overline{\lambda}_s$  es el vector flujo del estator en coordenadas de campo (rotatorias),  $\omega_{mr}$  es la velocidad de rotación del vector flujo del rotor,  $\overline{v}_s^s$  es el vector voltaje del estator en coordenadas de campo e  $\overline{i}_s^s$  es el vector corriente del estator en coordenadas de campo.

En un régimen estacionario la velocidad del flujo del rotor es igual a la velocidad síncrona, por lo tanto

$$\omega_1 = \omega_{mr} = \omega_m + \omega_2$$

La obtención de un modelo de referencia para el flujo del rotor se logra al conocer los voltajes del estator. Como se mostrará a continuación, el modelo que se obtiene no depende de la constante de tiempo del rotor y por lo tanto servirá como modelo de referencia para la estimación de la constante de tiempo

del rotor. De la ecuación de voltajes se obtiene la expresión de la corriente del rotor en coordenadas del estator:

$$\bar{i}_r = \frac{\bar{\lambda}'_r - M\bar{i}_s}{L_r}$$

Sustituyendo esta ecuación, se obtiene:

$$\bar{\lambda}_s = L_s\bar{i}_s + M \left[ \frac{\bar{\lambda}'_r - M\bar{i}_s}{L_r} \right] e^{j\epsilon}$$

Agrupando términos y sustituyendo el coeficiente de dispersión  $\sigma = \left[ 1 - \frac{M^2}{L_s L_r} \right]$  se obtiene:

$$\bar{\lambda}_s = L_s\sigma\bar{i}_s + \frac{M}{L_r}\bar{\lambda}'_r$$

Sustituyendo y transformando el resultado hacia un marco de referencia rotatorio síncrono (coordenadas de campo), mediante la multiplicación de las variables por el vector unitario  $e^{j\rho}$ , se obtiene la expresión vectorial siguiente:

$$\bar{v}_s^s = R_s\bar{i}_s^s + \sigma L_s \frac{d\bar{i}_s^s}{dt} + j\omega_{mr}\sigma L_s\bar{i}_s^s + j\omega_{mr}\frac{M}{L_r}\bar{\lambda}_r + \frac{M}{L_r}\frac{d\bar{\lambda}_r}{dt}$$

Con esta ecuación se han logrado relacionar los vectores espaciales voltaje del estator, corriente del estator y flujo del rotor en coordenadas de campo.

La obtención de una ecuación para el flujo del rotor que dependa de la constante de tiempo del rotor, queda como:

$$0 = (1 - j\omega_m\tau_r)\bar{\lambda}_r - M\bar{i}_s + \tau_r \frac{d\bar{\lambda}_r}{dt}$$

Transformando la ecuación anterior hacia un marco de referencia síncrono (coordenadas de campo), mediante la multiplicación de cada variable por el vector unitario  $e^{j\rho}$ , y aplicando la transformada de Laplace se obtiene que:

$$0 = -M\beta_r\bar{I}_s^s + [S + \beta_r + j(\omega_{mr} - \omega_m)]\bar{\lambda}_r$$

donde:  $\beta_r = \frac{1}{\tau_r} = \frac{R_r}{L_r}$  es el inverso de la constante de tiempo del rotor.

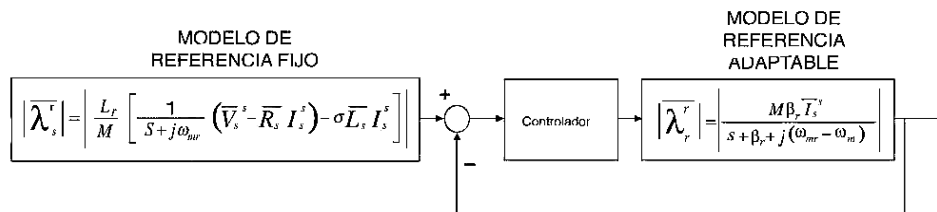
Las dos ecuaciones se encuentran en un marco de referencia síncrono o en coordenadas de campo. Al aplicar la transformada de Laplace el resultado se puede expresar en forma matricial, obteniéndose la expresión:

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_s^s \\ \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_s + \sigma L_s(S + j\omega) & \frac{M(S + j\omega_{mr})}{L_r} \\ -M\beta_r & S + \beta_r + j(\omega_{mr} - \omega_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_s^s \\ \bar{\lambda}_r \end{bmatrix}$$

Con las ecuaciones previas se logra obtener un observador del flujo del rotor referido al estator en coordenadas de campo, y se tiene un observador del flujo del rotor referido al rotor también en coordenadas de campo. Es fácil observar que el primero de ellos no depende de la constante de tiempo del rotor, sin embargo el segundo sí. El conocimiento de ambos modelos permite adaptar en línea el valor de la constante de tiempo del rotor.

En la figura 14.33 se muestra el lazo de control utilizado para la adaptación del valor de la constante de tiempo del rotor. La magnitud de entrada es el valor del flujo del rotor observado desde el estator. Esta señal de referencia se compara con la magnitud del flujo del rotor observado desde el rotor. La señal de error y su derivada son las entradas al controlador difuso, el cual realiza la actualización de la constante de tiempo del rotor. El valor estimado de la constante de tiempo del rotor se sustituye en el modelo de referencia adaptable (observador desde el rotor) y en las ecuaciones de campo orientado.

En la ecuación matricial se puede sustituir el valor de la velocidad del flujo del rotor ( $\omega_{mr}$ ) por la velocidad síncrona ( $\omega_1$ ), si se asume que el motor se encuentra en estado estacionario. En las simulaciones realizadas se consideró un estado estacionario durante la estimación de la constante de tiempo del rotor.



**Figura 14.33** Control en lazo cerrado utilizando un controlador para el ajuste de la inversa de la constante de tiempo del rotor.



### 14.13 Control de flujo y velocidad

#### 14.13.1 Control del flujo

En la figura 14.34 se observa el sistema completo en donde cada uno de los bloques de control vectorial se pueden simplificar para poder ajustar, y tomando en cuenta que el sistema de inversor se supone ideal, esto es si se considera que  $i_{sd}$  de referencia es igual a  $i_{sd}$  del motor, sólo se tiene la dinámica del motor para el flujo que se puede definir por una ecuación diferencial de primer orden.

El sistema en lazo cerrado se puede utilizar en un controlador PI para evitar tener error en estado estacionario para una entrada escalón, y su ecuación característica sería la siguiente:

$$\lambda(s) = s^2 + \left( \frac{k_p M + 1}{T_r} \right) s + \left( \frac{K_i M}{T_r} \right) = 0$$

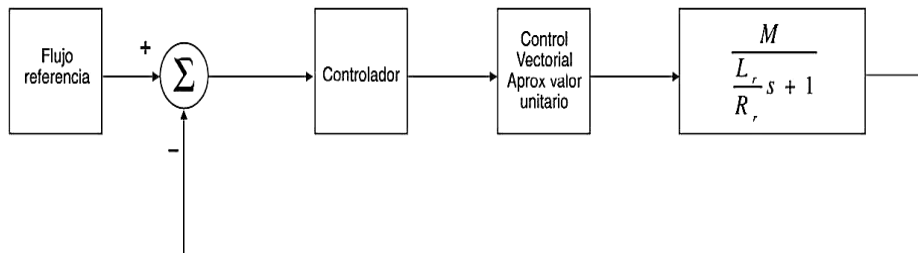


Figura 14.34 Diagrama de control vectorial.

Si la dinámica del flujo es de primer orden con un polo en  $s = -15$  y se desea hacer más rápida ésta de forma que  $t_s = 200$  [ms] con un sobreimpulso no mayor a 1.5 ( $\zeta = 0.8$ ), esto permitirá rapidez con bajos requerimientos de energía. De esta manera:

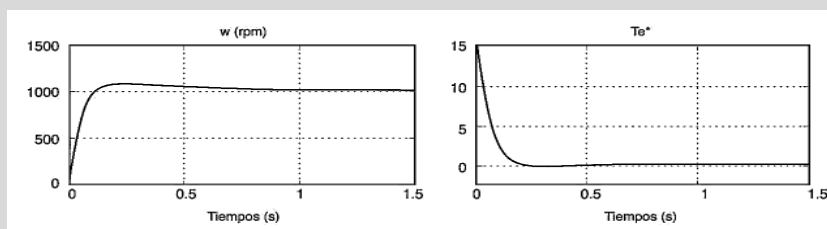
$$t_s \cong \frac{4.6}{\sigma} \rightarrow \sigma = \zeta \omega_n \cong \frac{4}{6} t_s \rightarrow \omega_n \cong \frac{4}{6} \zeta \cdot t_s$$



$$\lambda_d(s) = s^2 + \left(\frac{9.2}{t_s}\right) \cdot s + \left(\frac{4.6}{\zeta \cdot t_s}\right)^2$$

Igualando la ecuación en lazo cerrado del flujo y la ecuación del flujo deseado, es posible obtener valores para  $K_i$ ,  $K_p$ . La respuesta al escalón del flujo del rotor cumple con los parámetros establecidos y se observa que la corriente necesaria para llevar a cabo el control es como máximo dos veces la nominal, cuando el escalón es de amplitud igual al valor de flujo nominal.

Es posible observar que el tiempo de subida del sistema es de 50 [ms] por lo que un buen tiempo de muestreo nos permitiría por lo menos diez muestreos durante este tiempo. De manera que se propone  $T_{PI} = 1\text{ms}$ .



**Figura 14.35** Respuesta al escalón del flujo del rotor.

Utilizando Euler hacia atrás, la ecuación para este controlador es:

$$\bar{i}_{d,k} = \bar{i}_{d,k-1} + (K_p + K_i T_{PI}) \frac{\lambda_{m\acute{a}x}}{i_{m\acute{a}x}} \bar{e}_{\psi,k} - K_p \frac{\lambda_{m\acute{a}x}}{i_{m\acute{a}x}} \bar{e}_{\psi,k} - 1$$

### 14.13.2 Control de velocidad

Para el control de la velocidad algunas veces se considera que dentro de la dinámica mecánica la fricción es despreciable ( $B = 0$ ), por lo que el sistema del lazo cerrado se simplifica.

En la figura 14.36 se muestra el lazo de control para la velocidad del motor; en este lazo se toma en cuenta que el sistema de control vectorial e inversor controlado por corriente son ideales. Nótese que la constante del par electromagnético  $K$  está dada por un valor fijo con el flujo en su valor nominal. Esto

es, se supone que el control de flujo está regulando correctamente. Si el flujo no se encuentra en su valor nominal, las características del sistema cambiarán.

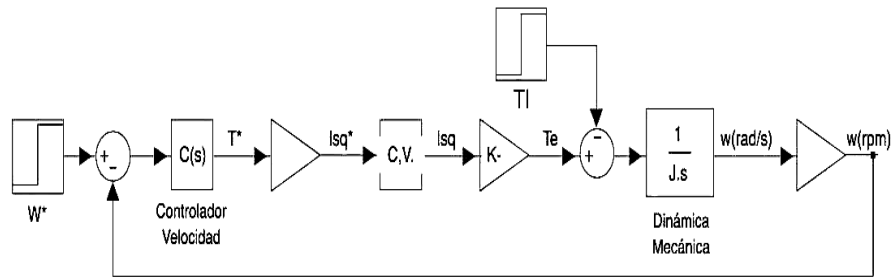


Figura 14.36 Lazo de control de velocidad.

Cuando esta simplificación es posible, el error en estado estacionario con un escalón de velocidad de referencia ( $w^*$ ) es igual a cero. Sin embargo existen perturbaciones y normalmente la más significativa es el par de carga, que también afecta el error en estado estacionario. Haciendo el lazo cerrado se obtiene la expresión:

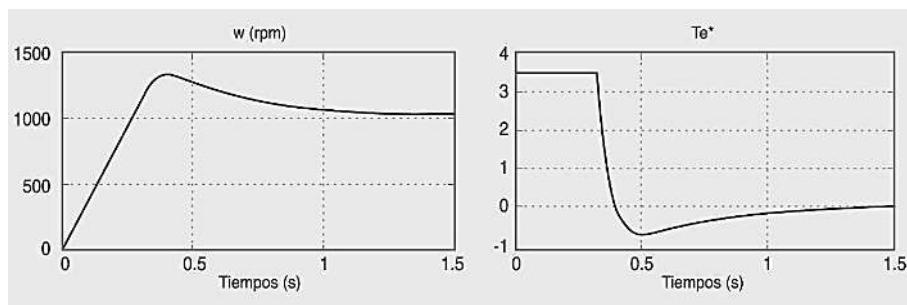
$$\frac{w}{T_L} = -\frac{1}{Js + C(s)}$$

La ecuación característica en lazo cerrado utilizando un controlador PI es:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = K_p \frac{s + c}{s}$$

$$\lambda(s) = s^2 + \left(\frac{K_p}{J} \frac{30}{\pi}\right) s + \left(\frac{K_p c}{J} \frac{30}{\pi}\right) = 0$$

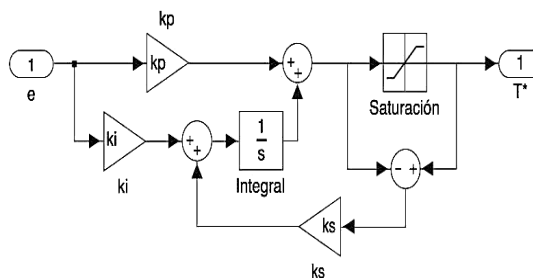
Si los requerimientos de diseño son un tiempo de establecimiento máximo  $t^s = 1$  s con un sobretiro máximo de 5% ( $\zeta = 0.7$ ), se pueden igualar las ecuaciones para encontrar las constantes  $K_p$ ,  $K_i$ , y en la figura 14.37 se puede observar que las respuestas de velocidad y par son de acuerdo con lo establecido en el diseño.



**Figura 14.37** Respuesta al escalón de velocidad con saturación en la señal de control.

Sin embargo como se mencionó anteriormente la acción integral genera una saturación de la señal de control provocando un sobreimpulso, como se muestra en la figura 14.38, por lo que se requiere una acción anti-windup que se puede desarrollar de una forma alternativa como se presenta en la figura 14.39.

En la figura 14.39 se observa que cuando la señal de control se satura, se previene el acumulación de error en el integrador por medio de una retroalimentación de la diferencia entre el par deseado y el saturado.



**Figura 14.38** Esquema de PI anti-windup.

Este sistema produce resultados adecuados pero tiene ciertos inconvenientes:

- Es complicado implementarlo.
- Si el error persiste mucho tiempo, el integrador puede ser tan grande que lleve a cabo un desbordamiento informático, comprometiendo así la estabilidad del sistema.

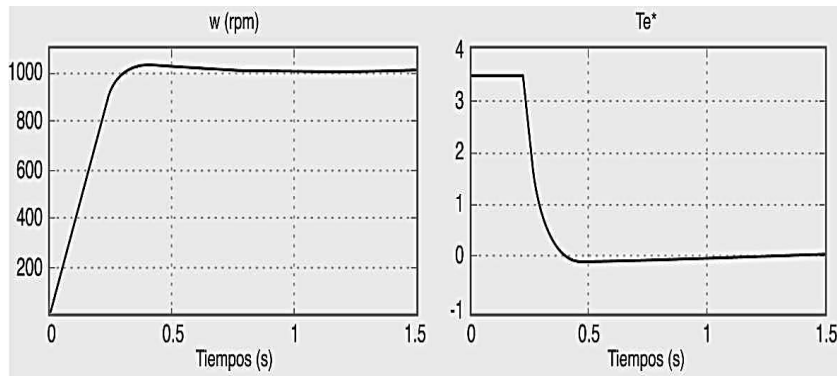
Otra alternativa es usar un controlador basado en reglas booleanas. En este caso el acumulamiento de error en el integrador se basa en dejar de integrar en las situaciones en que esto no produce ningún efecto positivo en la respuesta.

Por ejemplo, cuando el actuador está saturado (en su valor positivo) y el error es positivo, el seguir integrando no ayudará a la respuesta pues la señal de control no puede aumentar. Si en la misma situación el error es negativo (el sistema pasó la referencia), la integración ayudará a disminuir la señal de control para lograr llegar a la referencia. La ley de control es la siguiente:

$$T_{des}(t) = K_p e(t) + K_i q(t)$$

Se puede representar el sistema como un controlador PI-P, es decir, mientras no haya saturación es PI y cuando el actuador se satura se vuelve proporcional solamente estabilizando el sistema.

En la figura 14.40 se muestra la respuesta del sistema con este controlador. Como se observa, el par electromagnético se mantiene por debajo de 3.5 [N\*m] mientras que el sobreimpulso permanece dentro del rango permitido.

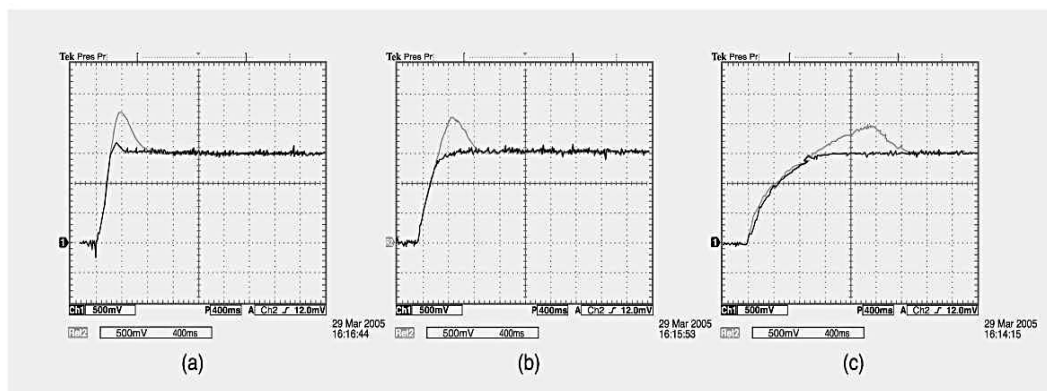


**Figura 14.39** Respuesta al escalón de Velocidad con controlador PI anti-windup.

La implementación de este controlador es muy simple. Utilizando Euler hacia atrás como equivalente discreto se obtiene que:

$$\dot{q}(t) = e(t) \rightarrow q_{k+1} = q_k + T_{PI} \cdot e_k$$

$$\dot{q}(t) = 0 \rightarrow q_{k+1} = q_k$$



**Figura 14.40** PI con y sin compensación anti-windup (implementación control vectorial). (a) Sin carga, (b) carga media, (c) plena carga.

### 14.13.3 Estabilidad del sistema

En control vectorial se puede diseñar el controlador de velocidad bajo la suposición de que el flujo se mantiene en su valor nominal. Por lo tanto, para evitar caer en inestabilidad es necesario analizar qué le sucede a los polos del sistema cuando el flujo no se encuentra en su valor nominal. Si se obtiene la función de transferencia en lazo cerrado, del sistema se obtiene la siguiente ecuación característica:

$$1 - \frac{\alpha \cdot C(s)}{J_s} = 0$$

$$\alpha = \frac{\lambda_{ss}}{\lambda_{NOM}}$$

donde:  $\alpha$  representa el cociente del flujo y su valor nominal, es decir, es una medida de qué tan cercano está el flujo a su valor nominal. De esta manera es posible encontrar el lugar de las raíces de

En la figura 14.41 se puede observar que para cualquier valor de  $\alpha$  el sistema es estable, aun cuando el sobreimpulso crezca entre diez y veinte por ciento para valores del flujo por debajo de la mitad de su valor nominal.

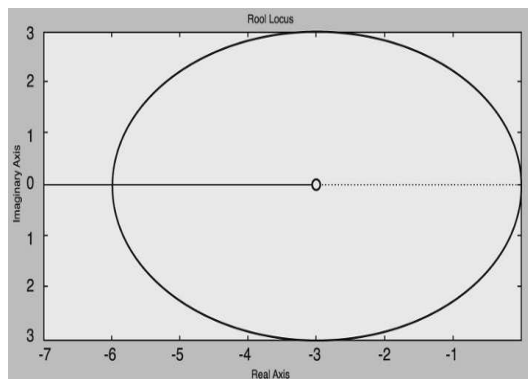


Figura 14.41 Respuesta al escalón de par.

#### 14.14 Respuesta global del control vectorial

En las figuras 14.42 y 14.43 se presenta el desempeño del sistema de manera global, y aquí se puede observar que el desempeño del controlador es el adecuado bajo diferentes requerimientos de velocidad. Es importante mencionar que este método permite utilizar los motores de inducción dentro de los accionamientos de altos desempeños, por lo que el uso de los accionamientos empleando control vectorial se incrementó de manera significativa en la industria.

#### Variador industrial

Revisar la carpeta Altivar 71 Aquí se presenta un variador industrial de control vectorial.



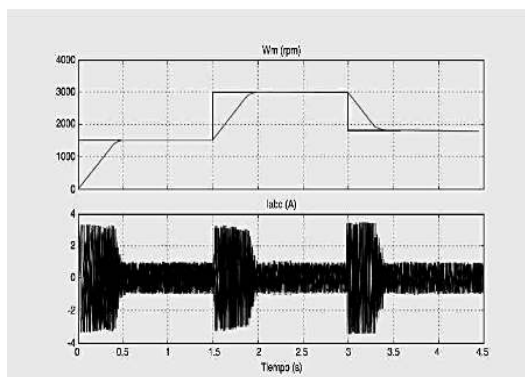


Figura 14.42 Respuesta del sistema a escalones de velocidad.

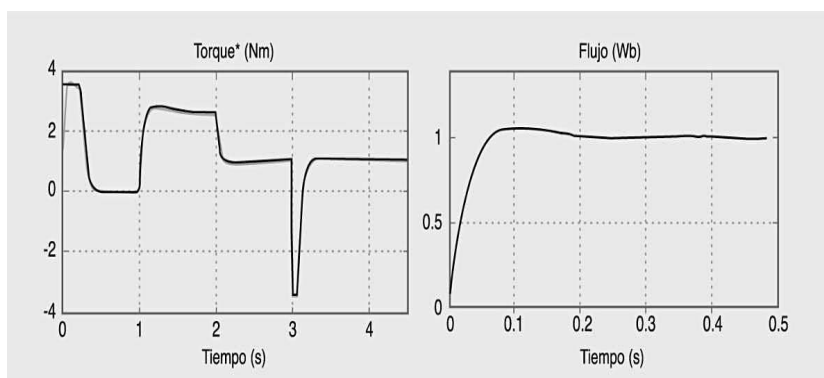


Figura 14.43 Respuesta de par y flujo.

En las figuras 14.44 y 14.45 se muestra cómo las señales de corriente desde un marco de referencia rotatorio son valores constantes, mientras que después de la transformación de coordenadas estacionarias se tienen señales de corriente de forma senoidal.

### Simulador de accionamiento

En la carpeta TAXIDRIVER se encuentra un simulador de un accionamiento de alto desempeño industrial.





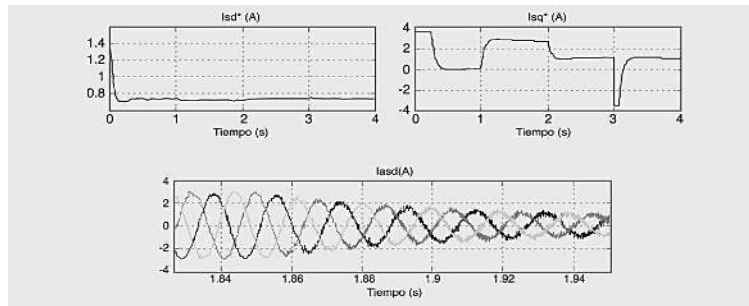


Figura 14.44 Corrientes dq referencia y corrientes abc.

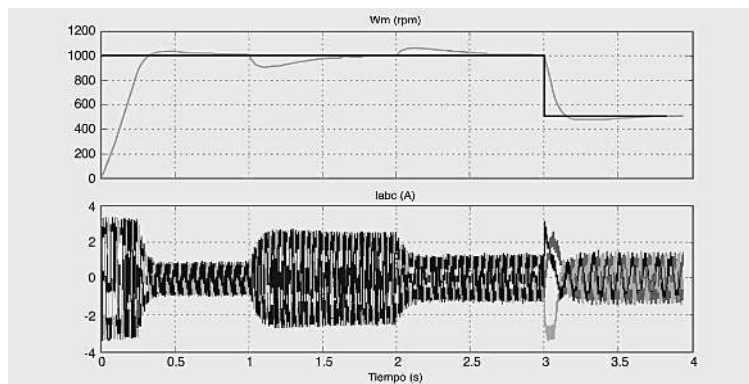


Figura 14.45 Respuesta del sistema perturbaciones de par.

## 14.15 Eliminación de sensores de velocidad en accionamientos de motores de inducción

### 14.15.1 Empleo de observadores y estimadores en el control vectorial

Como se mencionó anteriormente un observador es básicamente un estimador que utiliza un modelo del sistema y un lazo de retroalimentación para minimizar el error entre las variables medidas y estimadas, por lo que puede utilizarse para eliminar los sensores de velocidad y la necesidad de tener sensores de posición o de velocidad en el motor de inducción.

Al realizar el modelo de un sistema, normalmente se cuenta con un modelo que contiene algunos estados internos: estas variables de estado no se pueden medir de forma normal por lo que se miden

solamente variables sustitutas. Si se requiere conocer estas variables de estado internas, por ejemplo para controlarlas, tendrán que ser calculadas. Sin embargo, no siempre es posible calcular estas variables directamente a partir de las salidas que se miden.

Considérese la siguiente representación:

$$\dot{x} = A_x + Bu$$

$$y = Cx$$

Para el motor de inducción se tiene:

$$\frac{d\lambda_{ra}}{dt} = -\omega_r \lambda_{r\beta} - \frac{R_r}{L_r} \lambda_{r\alpha} + \frac{R_r M}{L_r} i_{sa}$$

$$\frac{d\lambda_{r\beta}}{dt} = \omega_r \lambda_{r\alpha} - \frac{R_r}{L_r} \lambda_{r\beta} + \frac{R_r M}{L_r} i_{s\beta}$$

$$\frac{di_{s\alpha}}{dt} = -\frac{(M^2 R_r + L_r^2 R_s)}{\sigma L_s L_r^2} i_{s\alpha} + \frac{M R_r}{\sigma L_s L_r^2} \lambda_{r\alpha} + \frac{M \omega_r}{\sigma L_s L_r} \lambda_{r\beta} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{s\alpha}$$

$$\frac{di_{s\beta}}{dt} = -\frac{(M^2 R_r + L_r^2 R_s)}{\sigma L_s L_r^2} i_{s\beta} + \frac{M \omega_r}{\sigma L_s L_r} \lambda_{r\alpha} + \frac{M R_r}{\sigma L_s L_r^2} \lambda_{r\beta} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{s\beta}$$

Agrupando y considerando la representación en estados se tiene el siguiente modelo:

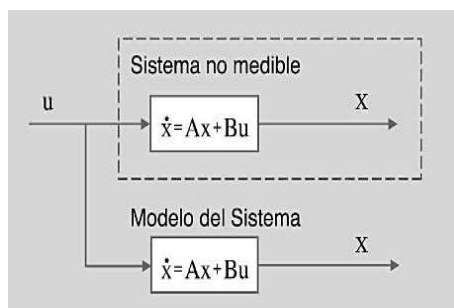
$$X = [ i_{sd} \quad i_{sq} \quad \lambda_{rd} \quad \lambda_{rq} ]^T$$

$$U = [ u_{sd} \quad u_{sq} \quad 0 \quad 0 ]^T$$

$$U = \begin{bmatrix} -\frac{(M^2 R_r + L_r^2 R_s)}{\sigma L_s L_r^2} & 0 & \frac{M R_r}{\sigma L_s L_r^2} & \frac{M \omega_r}{\sigma L_s L_r} \\ 0 & \frac{(-M^2 R_r + L_r^2 R_s)}{\sigma L_s L_r} & -\frac{M \omega_r}{\sigma L_s L_r} & \frac{M R_r}{\sigma L_s L_r^2} \\ \frac{M R_r}{L_r} & 0 & -\frac{R_r}{L_r} & -\omega_r \\ 0 & \frac{M R_r}{L_r} & \omega_r & -\frac{R_r}{L_r} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



**Figura 14.46** Diagrama a bloques de un sistema con estimador.

Sin embargo todavía se tiene el problema de no conocer el estado inicial del sistema. Esto lleva a que el vector de estado del sistema modelo es diferente al del sistema real. Este problema puede ser resuelto por el principio de que el vector de salida estimado es calculado en base al vector de estado estimado

$$\hat{y} = C\hat{x}$$

el cual puede ser comparado posteriormente con el vector de salida medido. La diferencia entre estos vectores puede ser utilizada para corregir el vector de estado del sistema modelo. Esto se conoce como el Observador de Luenberger (figura 14.47) como se presentó en el motor de c-c.

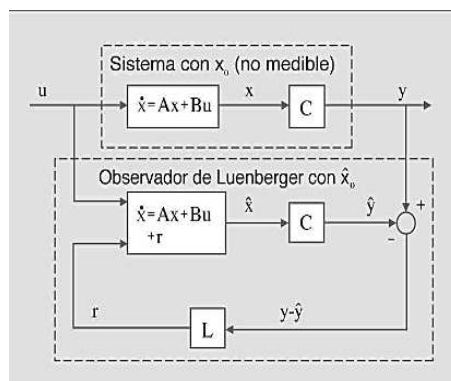


Figura 14.47 Observador de Luenberger.

Así, la ecuación de estado para el Observador de Luenberger queda de la siguiente forma:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

Lo siguiente es determinar la forma en que la matriz  $L$  hará que el error se vuelva cero. La ecuación de estado para el error se puede considerar de la forma:

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}$$

donde:

$$\tilde{x} = x - \hat{x}$$

Ahora bien, si se calcula la transpuesta de la matriz de la ecuación del error diferencial se obtiene una ecuación que resulta similar a la de una estructura de control:

$$\dot{x}_f = (A^T - C^T C^L)x_f$$

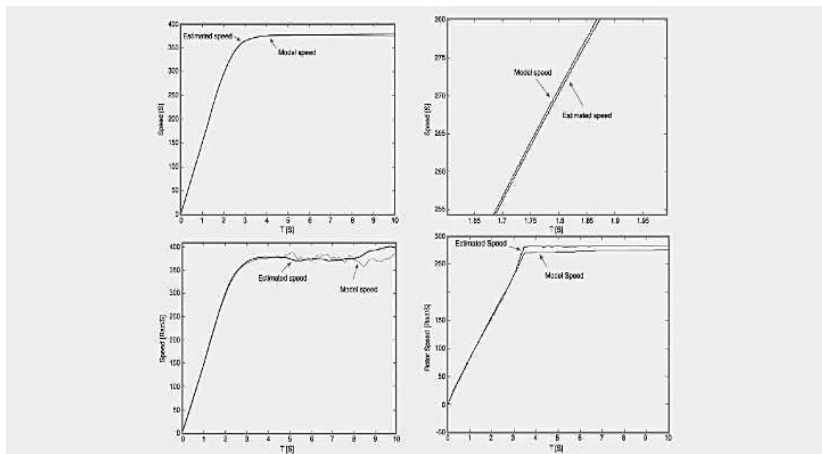


Figura 14.48 Respuesta del observador con variación de carga o variación de parámetros del motor de inducción.

### 14.15.2 El filtro de Kalman

El filtro de Kalman ofrece una solución que toma en cuenta directamente los efectos de los ruidos que perturban al sistema. Los errores en los parámetros también son considerados como ruido. Considérese el siguiente sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu + r$$

$$y = Cx + \rho$$

donde:  $r$  y  $\rho$  representan respectivamente el ruido del sistema y de la medición. Se asume que dichos ruidos son “ruido blanco”, estacionario, no correlacionado o bien ruido Gaussiano con una valor esperado de cero.

El “ruido blanco” es una señal o proceso aleatorio estacionario cuya característica principal es contar con una densidad constante en el espectro de potencia. Esto es, contiene la misma magnitud de potencia en cualquier banda en cualquier frecuencia central dado cierto ancho de banda. El término “blanco” es en analogía al concepto de luz blanca en óptica, la cual contiene todas las frecuencias visibles. Por otro lado, un proceso aleatorio es estacionario si su función de densidad es invariante frente a traslaciones en el tiempo.

Se asocia comúnmente con señales de ruido en el dominio espacial cuya autocorrelación puede ser representada por una función delta en cierta dimensión del espacio. Una señal de “ruido blanco” no guarda correlación entre dos puntos distintos en el tiempo, en otras palabras su disposición en el tiempo no

obedece a un modelo matemático determinístico. Aun cuando la señal no se encuentra correlacionada en el tiempo, cualquier distribución de valores es posible, mientras el componente de continua o c.c. sea nulo.

El “ruido blanco” no necesariamente tiene que ser “ruido Gaussiano”. El “ruido Gaussiano” se refiere a una señal cuya distribución de valores procede a una distribución Gaussiana, mientras que el término blanco se refiere a la correlación entre dos instantes de tiempo distintos los cuales son independientes de la distribución de sus amplitudes.

### 14.15.3 Covarianza del ruido

En la teoría de probabilidad y estadística la covarianza entre dos variables aleatorias reales  $X$  y  $Y$ , con valores esperados  $E(X) = \mu$  y  $E(Y) = \nu$ , se define como:

$$\text{cov}(X, Y) = E \{(X - \mu)(Y - \nu)\}$$

Simplificando:

$$\text{cov}(X, Y) = E \{(X \cdot Y)\} - \mu\nu$$

donde:  $E$  representa el operador de valor esperado, el cual no es otra cosa que la suma de las probabilidades de cada posible resultado multiplicado por el resultado real.

En otras palabras, la covarianza es la medida en la cual dos variables aleatorias varían en forma conjunta. Si dos variables tienden a variar en conjunto, esto es, cuando una de ellas se encuentra por encima de su valor esperado la otra también, su covarianza resulta positiva.

Por otro lado, si una de ellas se encuentra por encima de su valor esperado y la otra se encuentra por debajo del suyo, la covarianza entre ambas resulta negativa. De igual forma si las variables son independientes su covarianza resulta cero.

Ahora bien si las señales  $X$  y  $Y$  no son valores escalares sino vectores columna con sus respectivos valores esperados y componentes escalares  $m$  y  $n$ , la generalización natural del concepto de covarianza es la de una matriz de covarianza de tamaño  $m \times n$  de la forma:

$$\text{cov}(X, Y) = E \{(X - \mu)(Y - \nu)\}$$

Para el caso del filtro de Kalman se definen las matrices de covarianza para los ruidos como sigue:

$$\text{cov}(r) = E \{rr^T\} = Q$$

$$\text{cov}(\rho) = E \{ \rho \rho^T \} = R$$

donde:  $Q$  es la matriz de covarianza del ruido del sistema y  $R$  la matriz de covarianza del ruido en la medición, ya que como se definió al inicio de la sección el valor esperado de dichas señales de ruido es de cero.

#### 14.15.4 Estructura del filtro

La estructura general del filtro de Kalman es similar a la del Observador de Luenberger, sin olvidar que el filtro de Kalman se desempeña en el ámbito de sistemas no lineales. La ecuación del sistema es:

$$\dot{\hat{x}} = (A - KC)\hat{x} + Bu + Ky$$

donde:  $K$  es la matriz de ganancia del filtro de Kalman. La diferencia estructural entre el Observador de Luenberger y el filtro de Kalman es la forma de dicha matriz  $K$ , pues ésta depende de las matrices de covarianza de los ruidos.

#### 14.15.5 Filtro de Kalman discreto

Se supone que el proceso aleatorio por ser estimado puede modelarse de la forma:

$$x_{k+1} = \phi_k x_k + w_k$$

mientras que la observación o medición del proceso se supone que ocurre en puntos discretos de tiempo  $k$  de acuerdo a:

$$z_k = H_k x_k + v_k$$

donde:  $x_k$  es el vector de estado del proceso al tiempo  $t_k$  ( $n \times 1$ ),  $\phi_k$  es la matriz de transición de estado ( $n \times n$ ),  $w_k$  es un vector ( $n \times 1$ ) (se asume como “ruido blanco” con covarianza conocida),  $z_k$  es el vector de medición al tiempo  $t_k$  ( $m \times 1$ ),  $H_k$  es la matriz de relación entre las mediciones y el vector de estado al tiempo  $t_k$  ( $m \times n$ ) y  $v_k$  es el error en la medición ( $m \times 1$ ) (se asume como “ruido blanco” con covarianza conocida y correlación cruzada nula).

Las matrices de covarianza para  $w_k$  y  $v_k$  están dadas por:

$$E = [w_k w_k^T] = \left\{ \begin{array}{ll} Q_k, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{array} \right\}$$

$$E = [w_k \nu_i^T] = \begin{cases} R_k, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

$$E [w_k \nu_i] = 0$$

Se supone que se cuenta con una estimación inicial del proceso en algún punto en el tiempo  $t_k$  y que dicha estimación está basada en el conocimiento sobre el proceso previo al tiempo  $t_k$ . Esta estimación previa o a priori se denota como  $\widehat{x}_k^-$  donde el "sombrero" denota que es estimada y el signo menos indica que es la mejor estimación previa a asimilar la medición en  $t_k$ . También se considera conocida la matriz de covarianza del error asociada con  $\widehat{x}_k^-$ . Se define dicho error en la estimación como:

$$e_k^- = x_k - \widehat{x}_k^-$$

y la matriz de covarianza del error como:

$$P_k^- = E [e_k^- e_k^{-T}] = E [(x_k - \widehat{x}_k^-)(x_k - \widehat{x}_k^-)^T]$$

En muchos casos se comienza la estimación sin mediciones previas. Tomando en consideración que se define la media del proceso como cero o nula, la estimación inicial puede ser cero mientras que la matriz de covarianza del error se simplifica como la matriz de covarianza de  $x$  solamente.

Suponiendo que ya se tiene una estimación a priori  $\widehat{x}_k^-$ , aun se puede mejorar la estimación previa mediante la medición  $z_k$ . Dicha estimación actualizada se propone mediante una superposición lineal de la estimación previa con la medición con ruido de la forma:

$$\widehat{x}_k = \widehat{x}_k^- + K_k(z_k - H_k \widehat{x}_k^-)$$

donde:  $\widehat{x}_k$  es la estimación actualizada,  $k_k$  es la ganancia del filtro.

El problema radica en encontrar dicha ganancia  $k_k$  la cual permite obtener una estimación actualizada óptima. Se propone como criterio de desempeño minimizar el error mediante mínimos cuadrados, y se plantea la siguiente expresión para la matriz de covarianza del error con la estimación actualizada a posteriori:

$$P_k = E [e_k e_k^T] = E [(x_k - \widehat{x}_k)(x_k - \widehat{x}_k)^T]$$

Sustituyendo se tiene que:

$$\widehat{x}_k = \widehat{x}_k^- + K_k(H_k x_k + \nu_k - H_k \widehat{x}_k^-)$$

por lo que se encuentra que:



$$P_k = E [e_k e_k^T] = E [((x_k - \hat{x}_k) - K_k(H_k x_k + \nu_k - H_k \hat{x}_k))((x_k - \hat{x}_k) - K_k(H_k x_k + \nu_k - H_k \hat{x}_k))^T]$$

Desarrollando la expresión se obtiene:

$$P_k = E [((x_k - \hat{x}_k) - K_k H_k (x_k - \hat{x}_k) - K_k \nu_k)((x_k - \hat{x}_k) - K_k H_k (x_k - \hat{x}_k) - K_k \nu_k)^T]$$

Simplificando:

$$P_k = E [((I - K_k H_k)(x_k - \hat{x}_k) - K_k \nu_k)((I - K_k H_k)(x_k - \hat{x}_k) - K_k \nu_k)^T]$$

Expandiendo el operador de valor esperado  $E$ :

$$P_k = (I - K_k H_k) E [(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T] (I - K_k H_k)^T + K_k E [\nu_k \nu_k^T] K_k^T$$

Por último recordando que el factor  $(x_k - \hat{x}_k)$  es el error de estimación a priori que no se encuentra correlacionado con el error de medición  $\nu_k$ , se obtiene:

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^- (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T$$

Esta es una expresión general para la matriz de covarianza del error actualizado y aplica solamente para una ganancia  $K_k$  por lo menos subóptima.

Retomando el problema a minimizar, se intenta buscar una ganancia  $k_k$  que minimice los términos individuales a lo largo de la diagonal de  $P_k$ , ya que son estos los que representan las varianzas en el error de estimación para los elementos del vector de estado a ser estimados. Se busca optimizar la solución a través de cálculo diferencial utilizando las siguientes herramientas:

$$\frac{d(\text{traza}(AB))}{dA} = B^T$$

AB debe ser cuadrada:

$$\frac{d(\text{traza}(ACA^T))}{dA} = 2AC$$

AB debe ser simétrica:

Reescribiendo se tiene que:

$$P_k = P_k^- - K_k H_k P_k^- - P_k^- H_k^T K_k^T + K_k (H_k P_k^- H_k^T + R_k) K_k^T$$

El segundo y tercer término en la expresión son lineales para  $k_k$ , mientras que el cuarto término es

cuadrático para  $k_k$ . Se busca minimizar la traza de  $P$  porque es la suma de los errores cuadráticos medios en las estimaciones de todos los elementos del vector de estado. Se puede usar el argumento de que los errores cuadráticos medios individuales son minimizados cuando se minimiza el total, considerando que se tienen suficientes grados de libertad en la variación de  $k_k$ . Derivando la traza de  $P$  con respecto a  $k_k$  y considerando que la traza de  $P_k^- H_k^T K_k^T$  es igual a la traza de su transpuesta  $K_k H_k P_k^-$  se obtiene:

$$\frac{d(\text{trace}(P_k))}{dK_k} = -2(H_k P_k^-)^T + (H_k P_k^- H_k^T + R_k)$$

Haciendo la derivada igual a cero se resuelve el problema de ganancia óptima como:

$$-2(H_k P_k^-)^T + 2K_k(H_k P_k^- H_k^T + R_k) = 0$$

Simplificando la ecuación:

$$k_k(H_k P_k^- H_k^T + R_k) = (H_k P_k^-)^T$$

Despejando el término de ganancia:

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1}$$

Dicha ganancia, que minimiza el error en la estimación por mínimos cuadrados, es conocida como la ganancia de Kalman.

De esta forma la matriz de covarianza asociada con la estimación óptima se puede obtener sustituyendo dicha ganancia y realizando las simplificaciones debida quedando de la forma:

$$P_k = P_k^- - P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} H_k P_k^-$$

De forma similar:

$$P_k = P_k^- - K_k H_k P_k^-$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^-$$

siendo la última expresión la más sencilla de implementar y la que usualmente se utiliza para actualizar el error en la covarianza, recordando que sólo es válida para la condición de ganancia óptima.

Es posible realizar una estimación (observación) en  $t_k$  mediante la ganancia  $K_k$  obtenida. La estimación actualizada  $\hat{x}_k$  se puede proyectar hacia delante mediante la matriz de transición del sistema. Es importante mencionar en este punto que es posible ignorar la contribución de  $w_k$  ya que como se ha definido ésta presenta una media de cero y no se encuentra correlacionada con las  $w_k$  previas. Por lo tanto:

$$\hat{x}_{k+1}^- = \phi_k \hat{x}_k$$

La matriz de covarianza del error asociada con  $\hat{x}_{k+1}^-$  se obtiene formando la expresión para el error a priori:

$$e_{k+1}^- = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-$$

$$e_{k+1}^- = (\phi_k x_k + w_k) - \phi_k \hat{x}_k$$

$$e_{k+1}^- = \phi_k e_k + w_k$$

$w_k$  no guarda correlación con  $e_k$ , ya que  $w_k$  es el ruido del sistema para un paso delante de  $t_k$ . Por ende se puede escribir la expresión para  $P_{k+1}$  como:

$$P_{k+1}^- = E [e_{k+1}^- e_{k+1}^{-T}] = E [(\phi_k e_k + w_k)(\phi_k e_k + w_k)^T]$$

$$P_{k+1}^- = \phi_k P_k \phi_k^T + Q_k$$

A partir de este momento se cuenta con todas las cantidades necesarias para el tiempo  $t_{k+1}$ , por lo que la medición  $z_{k+1}$  puede ser asimilada tal como en el paso anterior.

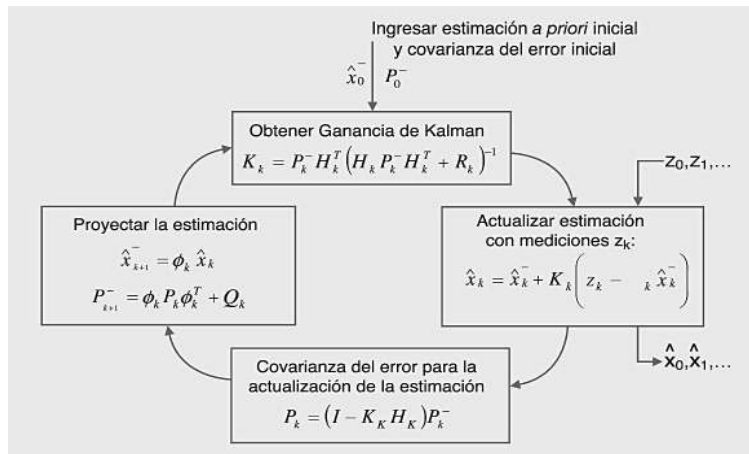


Figura 14.49 Algoritmo recursivo del filtro de Kalman.

### 14.15.6 Modelo dinámico del motor de inducción

Para el propósito de utilizar el filtro de Kalman en la estimación de la velocidad de un motor de inducción, se pueden usar diferentes modelos matemáticos cuyas diferencias se encuentran en el número de variables de estado y parámetros del motor que involucran. Es posible utilizar las ecuaciones de estos modelos en el marco de referencia orientadas al flujo de rotor o bien en el marco de referencia de estator. De elegir el marco de referencia del rotor se deben considerar como parte del modelo los términos de transformación entre marcos de referencias asociados con el espacio vectorial. Dichas transformaciones introducen no linealidades adicionales, pero innecesarias ya que se puede optar por un modelo en el marco estacionario.

### 14.15.7 Modelo de Brunsbach

El primer modelo analizado es el propuesto por Brunsbach el cual se presenta de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{mR} \\ i_{sq} \\ \omega_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\phi} \frac{1}{T_s} & -\frac{1-\phi}{\phi} \frac{1}{T_r} & \frac{1}{\sigma} \frac{1}{T_R} & \omega_{mR} & 0 \\ & \frac{1}{T_R} & -\frac{1}{T_R} & 0 & 0 \\ & -\omega_{mR} & -\frac{1-\sigma}{\sigma} \omega_{mR} T & -\frac{1}{\sigma} T_s & 0 \\ & 0 & 0 & \frac{2}{3} \frac{z_p^2}{J} (1-\sigma) L_s i_{mR} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{mR} \\ i_{sq} \\ \omega_r \end{bmatrix} + \frac{1}{\sigma T_s R_s} \begin{bmatrix} \cos(\epsilon) & \text{sen}(\epsilon) \\ 0 & 0 \\ -\text{sen}(\epsilon) & \cos(\epsilon) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{s\alpha} \\ u_{s\beta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{s\beta} \\ \omega_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\epsilon) & 0 & -\text{sen}(\epsilon) & 0 \\ \text{sen}(\epsilon) & 0 & \cos(\epsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{mR} \\ i_{sq} \\ \omega_r \end{bmatrix}$$

donde:  $i_{sd}$ ,  $i_{sq}$  son las corrientes de estator en marco rotatorio;  $i_{s\alpha}$ ,  $i_{s\beta}$  son las corrientes de estator en marco estacionario;  $i_{mr}$  es la corriente de magnetización;  $\omega_{mr}$  es la velocidad del rotor;  $L_s$  es la inductancia de estator;  $\sigma$  es el factor de Leakage =  $\frac{k_1}{L_s}$ ;  $T_r$ ,  $T_s$  son las constantes de tiempo de rotor y estator respectivamente;  $\omega_{mr}$  es la velocidad del flujo;  $P$  es el número de polos;  $i_{mr}$  es la corriente de magnetización;  $\epsilon$  es el ángulo del rotor.

En este modelo  $\omega_r$  es parte del vector de salida. Esto no significa que se está midiendo, sino que es estimado y dicho valor debe ser sustituido donde este vector de salida sea requerido. La sustitución se realiza basada en la siguiente fórmula:

$$\omega = \omega_{mr} - \frac{i_{sq}}{T_r i_{mr}}$$

Esta expresión debe ser calculada cada vez que el modelo va a ser evaluado. Sin embargo para evaluar dicha fórmula, es necesario contar con una lectura sobre la velocidad del flujo  $\omega_r$ . Así es necesario además desarrollar un modelo del flujo, el cual permitiría a su vez calcular el ángulo del flujo  $\theta$ .

### 14.15.8 Modelo de Vasson

El otro modelo del motor de inducción es el propuesto por Vasson, el cual se denota como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ \psi_{ra} \\ \psi_{r\beta} \\ \omega_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/T_s & 0 & \frac{L_m}{L'_s L_r T_r} & \frac{L_m \omega_r}{L'_s L_r} & 0 \\ 0 & -1/T_s & \frac{L_m \omega_r}{L'_s L_r} & \frac{L_m}{L'_s L_r} & 0 \\ \frac{L_m}{T_r} & 0 & \frac{1}{T_R} & -\omega_r & 0 \\ 0 & \frac{L_m}{T_R} & \omega_r & -\frac{1}{T_R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ \psi_{R\beta} \\ \psi_{R\beta} \\ \omega_r \end{bmatrix} + \frac{1}{L_s} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{s\alpha} \\ u_{s\beta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ \psi_{R\alpha} \\ \psi_{R\beta} \\ \omega \end{bmatrix}$$

donde  $T_s$  se define como:

$$\frac{1}{T_s} = \frac{1}{T'_s} + \frac{(1-\sigma)}{T'_r} = \frac{R_s + R_r(L_m/L_r)^2}{L'_s} = \frac{R_s + R_{ref}}{L'_s}$$

Además:  $i_{s\alpha}, i_{s\beta}$  son las corrientes de estator en marco estacionario;  $\psi_{r\alpha}, \psi_{r\beta}$  son los flujos de rotor;  $\omega_r$  es la velocidad del rotor;  $L_{s'}$  es la inductancia transitoria de estator  $L_{s'} = L_s - \frac{L_m^2}{L_r}$ ;  $L_r$  es la inductancia del rotor;  $L_m$  es la inductancia de magnetización;  $R_r, R_s$  son la resistencia del rotor y el estator, respectivamente;  $\sigma$  es el coeficiente de dispersión  $\frac{K_L}{L_s}$

Se supone que la derivada de la velocidad del rotor es despreciable  $\frac{d\omega_r}{dt} = 0$ . Aunque esta ecuación corresponde a un momento de inercia infinito, en realidad esto no es verdad debido al factor de corrección realizado por el filtro de Kalman. Se han despreciado además los efectos de saturación magnética ya que se presume que el filtro de Kalman no es sensible a cambios en las inductancias ya que los cambios en los parámetros de la máquina son compensados por el lazo de corriente inherente en el filtro. Cabe señalar que  $\omega_r$  se considera una variable de estado.

Además el modelo del flujo puede ser omitido ya que este modelo lo estima, por lo que el ángulo del flujo y cualquier otro parámetro pueden ser calculados directamente. El modelo es mucho más simple que el primero ya que no contiene conversiones entre el estator y el sistema de coordenadas del campo, por lo

que los términos senoidales no lineales desaparecen de las matrices de entrada y salida.

### 14.15.9 Modelo discretizado del motor

En ambos casos se requiere una versión discreta del sistema. La conversión buscada resultará en un sistema de la forma:

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d(k)u(k)$$

$$y(k) = C_x(k)$$

donde  $A_d$ ,  $B_d$  son las matrices discretas de transición del sistema y de entrada respectivamente. éstas se pueden obtener a partir de expansiones de series de Taylor de la forma:

$$A_d = e^{AT} \approx I + AT + \frac{(AT)^2}{2}$$

$$B_d = \int_0^T e^{A\xi} B d\xi \approx BT + \frac{(ABT)^2}{2}$$

donde  $T$  es el tiempo de muestreo. Si se considera que los tiempos de muestreo requeridos son demasiado cortos a fin de proveer una mayor estabilidad y precisión en el modelo, el término cuadrático de  $T$  en  $A_d$  y  $B_d$  puede ser ignorado al ser demasiado pequeño en magnitud con el resto de la ecuación por lo que:

$$A_d \approx I + AT$$

$$B_d \approx BT$$

Tomando en cuenta que  $T$  debe ser más pequeño que las constantes de tiempo características del motor de inducción, el modelo discreto queda como:

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 - \frac{T}{T_s} & 0 & \frac{TL_m}{L_s' L_r T_r} & \frac{TL_m \omega_r}{L_s' L_R} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{T}{T_s} & \frac{TL_m \omega_r}{L_s' L_r} & \frac{TL_m}{L_s' L_r T_r} & 0 \\ \frac{TL_m}{T_r} & 0 & 1 - \frac{T}{T_R} & -T \omega_r & 0 \\ 0 & \frac{TL_m}{T_R} & \omega & 1 - \frac{T}{T_R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_d = \begin{bmatrix} \frac{T}{L_s} & 0 \\ 0 & \frac{T}{L_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_d = C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con el vector de estado y de entrada:

$$x(k) = \begin{bmatrix} i_{s\alpha}(k) \\ i_{s\beta}(k) \\ \psi_{r\alpha}(k) \\ \psi_{r\beta}(k) \\ \omega_r(k) \end{bmatrix} \quad u(k) = \begin{bmatrix} u_{s\alpha}(k) \\ u_{s\beta}(k) \end{bmatrix}$$

## 14.16 Redes neuronales artificiales (RNA) para la estimación de la velocidad

### 14.16.1 Introducción

Los fundamentos de la computación neuronal datan de 1943, cuando McCulloch y Pitts propusieron por primera vez una red compuesta por neuronas artificiales capaces de desarrollar operaciones lógicas sencillas. Pero no fue sino hasta los 1990's que se le empezó a dar la importancia y el seguimiento necesarios para lograr el impacto que ahora está teniendo en nuestra sociedad; esto último debido a la vertiginosa evolución de la tecnología desde esas fechas.

Una red neuronal artificial es la forma más general para emular el proceso de pensamiento humano.

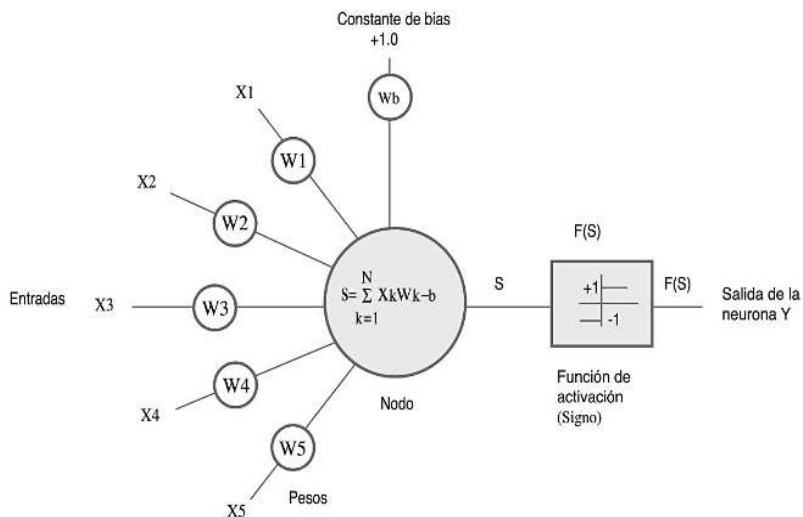
La corteza cerebral contiene aproximadamente 100 billones de células nerviosas interconectadas entre sí, formando una red neuronal biológica. La memoria y la inteligencia del cerebro humano y su correspondiente proceso de pensamiento son generados por la acción de la red neuronal. La estructura de la neurona biológica es conocida, más no la manera en que están interconectadas. Una RNA tiende a emular el sistema nervioso biológico del cerebro de una manera muy limitada a través de un circuito electrónico o programa de computadora. La RNA tiene, entonces, un gran número de nodos interconectados entre sí, que usualmente operan en paralelo y están configurados en

El reconocimiento de patrones o mapeo de entrada/salida es la base de la RNA; este reconocimiento se basa en la asociación de patrones a partir de entrenamientos de la RNA. La tecnología en RNA ha sido aplicada últimamente en problemas de identificación, visión robótica, pronóstico del clima y control de sistemas no lineales.

Una neurona biológica es un elemento de procesamiento que recibe y combina señales de otras neuronas comunicadas entre sí por medio de dendritas. Si la señal combinada es suficientemente fuerte la neurona produce una señal de salida que se conecta con otras neuronas a través de dendritas. Cada señal de entrada pasa a través de un proceso de sinapsis (un hueco es llenado de un flujo neurotransmisor que acelera o retrasa el flujo de cargas eléctricas). Las señales eléctricas fluyen a través del núcleo; el ajuste de la impedancia o conductancia del hueco hecho por el flujo neurotransmisor contribuye a la memoria del cerebro. Se puede decir entonces que la memoria o inteligencia está distribuida en todo el cerebro y utiliza la memoria asociativa para generar el proceso de pensamiento. La neurona artificial es también un elemento de procesamiento que tiene señales de entrada (continuas o discretas)  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , que pasan a través de una ganancia o peso (llamado peso sináptico); este peso  $W$  tiene una función similar a la del flujo neurotransmisor de la neurona biológica y puede ser positivo (excitador) o negativo (inhibidor). El nodo hace la sumatoria entre todas las señales de entrada (con su respectivo peso), suma una constante  $b$  y luego lo pasa a la salida a través de una función de activación (generalmente no lineal). La expresión matemática puede expresarse como:

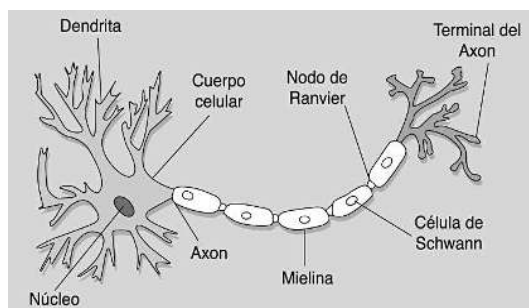
$$Y = F(S) = F \left[ \sum_{k=1}^N X_k W_k + b \right]$$





**Figura 14.50** Estructura de una neurona artificial.

La neurona es el elemento fundamental de la estructura del sistema nervioso; en la figura 14.52 se muestra un esquema de su estructura. El cerebro humano contiene aproximadamente 100000 millones de neuronas.



**Figura 14.51** Estructura básica de neurona.

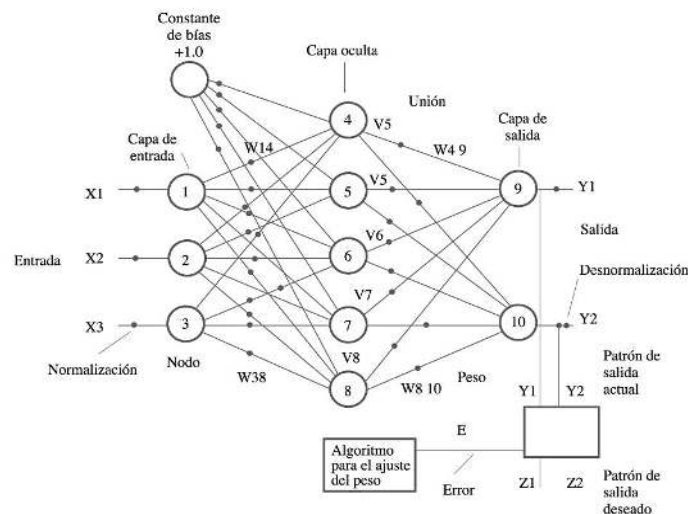
Existen distintas funciones de activación, entre ellas: lineal (se satura en  $-1$  y  $+1$ ), escalón (es  $0$  si  $S < 0$  y  $1$  si  $S > 0$ ), signo ( $+1$  si  $S > 0$  y  $-1$  si  $S < 0$ ). Pero las más comunes son funciones continuas no lineales que varían entre  $-1$  y  $+1$ . Entre ellas están: la función sigmoïdal y la hiperbólica. Estas 2 funciones tienen la característica de ser diferenciables, además de que su derivada es máxima en  $S=0$  y disminuye gradualmente con un valor mayor de  $S$ .

Así, la RNA tiene la habilidad de aprender, recordar y generalizar a partir de datos obtenidos en entrenamiento supervisado, asignando o ajustando los pesos de las conexiones.

### 14.16.2 Principios básicos de redes neuronales

Las RNA pueden ser clasificadas como redes progresivas o redes por retroalimentación (recurrentes). Las redes progresivas, las señales de neurona a neurona fluyen solamente hacia adelante; en cambio, en las recurrentes las señales pueden fluir hacia adelante como hacia atrás o hacia los lados. Entre las primeras están: el Perceptron, Adaline y Madaline, la red de retropropagación, la red de función de base radial (RBFN por sus siglas en inglés), la red de regresión general, la red neuronal difusa, etc; entre las segundas existen: la Red Hopfield, la máquina de Boltzmann, la red de recirculación, etc. Cualquier problema resuelto por redes recurrentes puede ser también resuelto por redes progresivas (agregando las conexiones externas necesarias). El 90 % de las aplicaciones actualmente utilizan redes progresivas, especialmente la de retropropagación.

Las señales de entrada/salida en una RNA son, en general, señales lógicas, bidireccionales discretas, o continuas. La red puede tener 3 capas de neuronas: la capa de entrada, la capa oculta (que puede contener a su vez varias capas, según el grado de complejidad del problema) y la capa de salida. La capa oculta sirve para asociar las capas de entrada y salida. Las capas de entrada y salida tienen el mismo número de neuronas que de señales. Una constante es suministrada a la capa oculta y a la de salida a través de un peso para generar la señal debida. Existe además un factor en cada entrada para convertir las señales al sistema por unidad (normalización) y en la salida se desnormalizan a señales normales. La red está completamente conectada si todas las neuronas de una capa están conectadas con cada neurona de la siguiente capa, o parcialmente conectada si sólo lo está con ciertas neuronas. Para el caso del motor de inducción por lo general se puede implementar con las señales de voltaje y de corriente del estator como entradas y salida la velocidad del rotor.



**Figura 14.51** Estructura de una red neuronal progresiva con entrenamiento de retropropagación.

Básicamente, la red es un sistema computacional multidimensional de entradas en paralelo y salidas en paralelo, donde el procesamiento se hace de manera distribuida (a diferencia de las computadoras digitales convencionales que utilizan una memoria de almacenamiento centralizada). Este tipo de procesamiento de redes neuronales puede hacerse en un chip ASIC o de manera serial en un DSP de alta velocidad.

Para poder realizar el mapeo no lineal de entradas/salidas (reconocimiento de patrones), la red debe ser entrenada con un patrón de datos de entrada para así, dar los patrones de salida deseados. El método de entrenamiento de retropropagación es el método más popular para redes progresivas. Fueron Rumelhart, Hinton y Williams quienes propusieron este método en 1986. En un principio se escoge la topología de la red necesaria (número de capas, número de neuronas en la(s) capa(s) oculta(s) y función de activación). Los patrones de datos de entrada/salida pueden ser tomados de manera experimental, o de la simulación del sistema (si se tuviera el modelo). La red es inicializada con pesos aleatorios (positivos y negativos) para evitar la saturación, antes de comenzar el entrenamiento. La salida es calculada con uno de los patrones de datos de entrada y comparada con el patrón de salida deseado. Los pesos se modifican hasta que el error entre el patrón calculado y el deseado sea lo suficientemente pequeño y, por lo tanto, aceptable. El mismo entrenamiento se hace para igualar todos los patrones; así, la red ya está entrenada para desarrollar funciones de utilidad. Si el error no converge, se puede cambiar el número de capas ocultas. Este proceso se puede hacer de manera secuencial o de manera simultánea (entrenamiento por lotes).

El ajuste de los pesos para la reducción del error se hace mediante la técnica del gradiente descendente, donde los pesos son iterados uno por uno empezando de atrás (desde la capa de salida). Este paso hacia atrás le da el nombre de retropropagación. Un círculo completo de cálculos, que consisten de un paso hacia adelante y uno hacia atrás, es definido como una iteración. El algoritmo es bastante complejo, por lo que generalmente es un programa computacional el que lo resuelve.

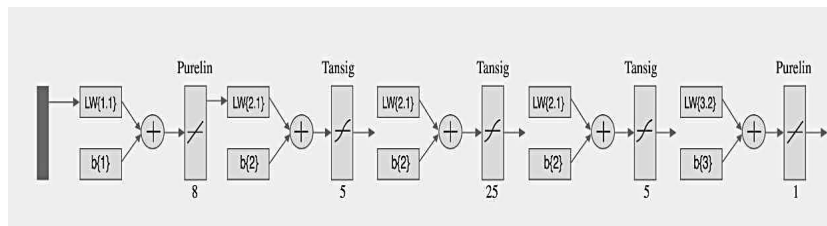
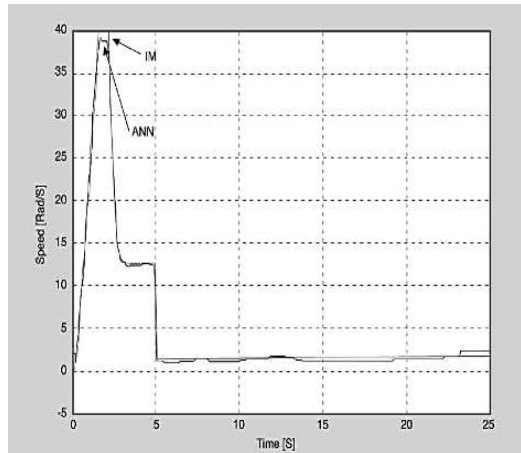
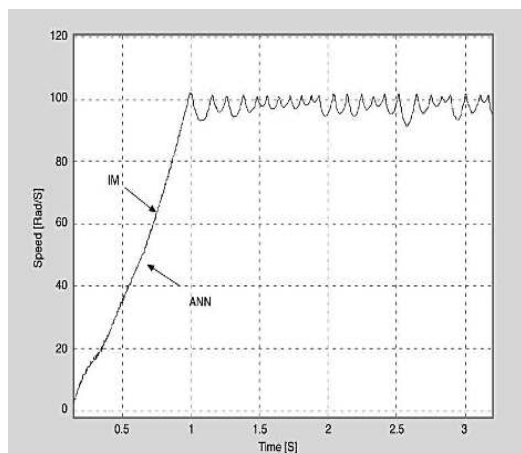


Figura 14.53 Estructura de la RNA en Matlab.



**Figura 14.54** Estimación de la velocidad con variación de referencia y del par de carga red neuronal (ANN).



**Figura 14.55** Estimación de la velocidad con variación del par de carga motor IM, red neuronal ANN



## Capítulo 15

### Control directo del par

#### 15.1 Introducción

#### 15.2 Principios básicos del control directo del par

#### 15.3 Esquema convencional del control directo del par

#### 15.4 Inversor fuente de voltaje (VSI) empleado en el DTC

#### 15.5 Resultados del desempeño dinámico del control directo del par

#### 15.6 Problema de la distorsión del flujo del estator

#### 15.7 Sectores variables en el control directo del par

#### 15.8 Lazo cerrado de velocidad en el control directo del par

## 15.1 Introducción

El control directo del par (DTC) tiene un comportamiento dinámico excelente; en comparación con el control vectorial el algoritmo del DTC es menos complejo y tiene menor dependencia a la variación de parámetros del motor. Por estas razones, en la actualidad el control directo del par se está aplicando a los accionamientos eléctricos en motores de corriente alterna como un control de altos desempeños en velocidad variable.

Este control incrementó su empleo en la industria gracias a la posibilidad de tener un control directo sobre el par electromagnético de una forma directa y sencilla; ésta es una de las principales razones para pensar en el control directo del par como una alternativa de un variador de velocidad.

A continuación se listan las principales ventajas del DTC:

- No es necesaria la transformación de coordenadas.
- No se requiere un bloque de modulación de voltaje.
- No requiere circuitos de desacoplamiento de voltaje.
- Ausencia de controladores.
- La respuesta del par es muy rápida en comparación con otros métodos.
- Menos sensible a variaciones de parámetros.
- Su esquema es más sencillo que el de otros métodos.

Las desventajas del DTC son:

- Algunos problemas en el arranque y operación a bajas velocidades.
- Requiere estimadores de flujo y par (aunque otros controladores también tienen esta desventaja).
- Frecuencia de conmutación variable.
- Valores altos de rizado en el par.

### **Evolución de los variadores de velocidad**

En la actualidad se puede decir que la tendencia al empleo de variadores de velocidad se ha incrementado de manera considerable, principalmente en donde el par y la velocidad deben variarse para controlar la velocidad, la posición, el flujo y el par. Se puede decir que el dominio de las máquinas de corriente continua marcó una pauta muy importante porque fueron las que permitieron de manera inicial la posibilidad del empleo de máquinas eléctricas en sistemas de velocidad variable. En la actualidad esta tendencia ha

cambiado drásticamente por el empleo de máquinas de corriente alterna.

En la siguiente figura se muestra una gráfica de la comercialización de los accionamientos eléctricos de corriente alterna contra los accionamientos de corriente continua.

El motor de c.d. de excitación separada permite manejar una amplia gama de velocidad, siendo el control de velocidad más simple y menos costoso en comparación con los accionamientos de c.a. La electrónica empleada en los accionamientos de corriente continua es muy simple, lo cual representa una gran ventaja, sin embargo el costo inicial y de mantenimiento de los motores de c.c. es alto.

Entre las principales desventajas se tiene la presencia del colector y escobillas, así como el aislamiento eléctrico entre las delgas que limita la alimentación de voltaje de armadura.



**Figura 15.1** Evolución de los variadores de velocidad

El motor jaula de ardilla de c.a. no tiene conmutador por lo que puede operar en ambientes industriales a alta potencia sin requerir mantenimiento periódico, es menos voluminoso, más eficiente y de menor costo. t

El uso del motor de inducción en accionamientos industriales aumentó considerablemente gracias a la modulación del ancho de pulsos (MAP o PWM -Pulse Width Modulation) de Schonung y Stmmler de 1964, que sumado al avance de la tecnología del semiconductor de potencia hizo posible la construcción del inversor de voltaje para motores síncronos y asíncronos, detectándose así las ventajas del accionamiento de corriente alterna mediante el cual se tiene la capacidad de trabajar al motor de inducción jaula de ardilla a velocidad variable en accionamientos industriales donde el motor de corriente CONTIUNUA se había utilizado.

### Conciencia sobre el empleo de variadores de velocidad

Las dos razones principales para el empleo de variadores de velocidad son: el control de procesos y el ahorro de la energía.

Los variadores de velocidad están ligados de manera directa con la mejora en el control de procesos,

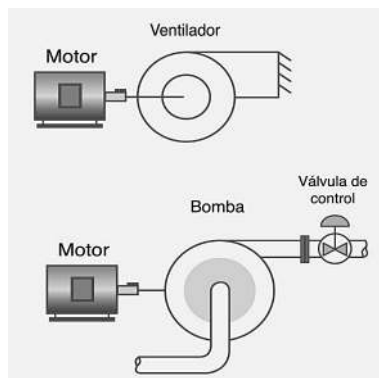


y la necesidad de tener mejores variadores se puede ver reflejada en los costos de producción y calidad de los productos generados. Debido a esto inicialmente se ha buscado la creación de mejores variadores de velocidad, y entre los más novedosos se encuentra el control vectorial y el control directo del par.

Por otro lado, el ahorro de energía ha tomado una gran importancia y esto es crucial para una buena utilización de la energía consumida durante un proceso.

Un ejemplo muy interesante es el empleo de variadores de velocidad para el control de bombas.

Cuando se tiene un motor directamente conectado a una bomba el consumo de energía del motor es siempre constante y el flujo del caudal de la bomba se puede regular a través de una válvula la cual es la responsable de dicho caudal, pero a pesar de tener el control del caudal, el consumo de la energía del motor es constante. Otra solución es el empleo de un variador de velocidad, el cual permite tener una regulación de la velocidad del motor cambiando el consumo de energía de éste dependiendo de la velocidad desarrollada. Esta forma de control permite tener un ahorro de energía así como la regulación de la velocidad.



**Figura 15.2** Aplicaciones de los variadores en bombas y ventiladores.

### a) El ajuste de la velocidad como una forma de controlar un proceso

A continuación se listan las diversas ventajas proporcionadas por el empleo de variadores de velocidad en el control del proceso:

- El ajuste de la velocidad como una forma de controlar un proceso
- Operación más suave.
- Control de la aceleración.
- Distinta velocidad de operación para cada fase del proceso.

- Compensación de variables de proceso cambiantes.
- Operación lenta para fines de ajuste o prueba.
- Ajuste de la tasa de producción.
- Posicionamiento de alta precisión.
- Control del par (torque) o de la tensión mecánica.

### b) Ahorro de energía mediante el uso de variadores de velocidad

Un equipo accionado mediante un variador de velocidad generalmente emplea menos energía que si dicho equipo fuera activado a velocidad constante. Los ventiladores y bombas representan las aplicaciones más importantes en las cuales los variadores de velocidad permiten ahorrar energía. Por ejemplo, cuando un ventilador es impulsado por un motor que opera a velocidad fija, el flujo de aire producido puede ser mayor que el necesario. En este caso el flujo podría regularse mediante una válvula de control, sin embargo resulta mucho más eficiente regular dicho flujo controlando la velocidad del motor en lugar de restringirlo por medio de la válvula.

### Tipos de variadores de velocidad

En términos generales puede decirse que existen tres tipos básicos de variadores de velocidad: mecánicos, hidráulicos y eléctrico-electrónicos. A su vez cada uno de estos tipos incluye varios subtipos, los cuales se describen a continuación. Cabe aclarar que los variadores más antiguos fueron los mecánicos, que se emplearon originalmente para controlar la velocidad de las ruedas hidráulicas de molinos, así como la velocidad de las máquinas de vapores:

#### Variadores mecánicos

- a) Variadores de paso ajustable: Estos dispositivos emplean poleas y bandas cuyo diámetro puede ser modificado.
- b) Variadores de tracción: Transmiten potencia a través de rodillos metálicos. La relación de velocidades de entrada/salida se ajusta moviendo los rodillos para cambiar las áreas de contacto entre ellos.

#### Variadores hidráulicos

- a) Variador hidrostático: Consta de una bomba y un motor hidráulicos (ambos de desplazamiento positivo). Una revolución de la bomba o el motor corresponde a una cantidad bien definida de volumen del fluido manejado. De esta forma la velocidad puede ser controlada mediante la regulación de una válvula de control, o bien cambiando el desplazamiento de la bomba o el motor.
- b) Variador hidrodinámico: Emplea aceite hidráulico para transmitir par mecánico entre un impulsor de entrada (sobre un eje de velocidad constante) y un rotor de salida (sobre un eje de velocidad ajustable). También es llamado acoplador hidráulico de llenado variable.
- c) Variador hidrovicoso: Consta de uno o más discos conectados con un eje de entrada, los cuales

estarán en contacto físico (pero no conectados mecánicamente) con uno o más discos conectados al eje de salida. El par mecánico (torque) se transmite desde el eje de entrada al de salida a través de la película de aceite entre los discos. De esta forma, el par transmitido es proporcional a la presión ejercida por el cilindro hidráulico que presiona los discos.

Los variadores de velocidad mecánicos e hidráulicos generalmente son conocidos como transmisiones cuando se emplean en vehículos, equipo agroindustrial o algunos otros tipos de maquinaria.

#### d) Variadores eléctrico-electrónicos

Existen cuatro categorías de variadores de velocidad eléctrico-electrónicos: variadores para motores de c.c., variadores de velocidad por corrientes de Eddy, variadores de deslizamiento y variadores para motores de c.a., mejor conocidos como variadores de frecuencia.

Los variadores eléctrico-electrónicos incluyen tanto el controlador como el motor eléctrico, sin embargo es práctica común emplear el término variador únicamente para el controlador.

Los variadores eléctrico-electrónicos incluyen tanto el controlador como el motor eléctrico, sin embargo es práctica común emplear el término variador únicamente para el controlador.

Los primeros variadores de esta categoría emplearon la tecnología de los tubos de vacío. Años después se han utilizado dispositivos de estado sólido, lo cual ha reducido significativamente el volumen y costo, mejorando la eficiencia y confiabilidad del dispositivo.

a) Variadores para motores de c.c.: estos variadores permiten controlar la velocidad de motores de c.d. serie, derivación, compuesto y de imanes permanentes. Para el caso de cualquiera de las máquinas anteriores se cumple la siguiente expresión:

$$V_t = K F_M N_m$$

donde:  $V_t$  es el voltaje terminal (V),  $K$  es la constante de la máquina,  $F_M$  es el flujo magnético producido por el campo (Wb) y  $N_m$  es la velocidad mecánica (rpm).

Despejando la velocidad mecánica, se tiene que:

$$N_m = V_t / (K F_M)$$

Puede observarse que la velocidad mecánica de un motor de c.c. es directamente proporcional al voltaje terminal ( $V_t$ ) e inversamente proporcional al flujo magnético ( $F_m$ ), el cual a su vez depende de la corriente de campo ( $I_F$ ). Aprovechando esta situación es que este tipo de variadores puede controlar la velocidad de un motor de c.c.: controlando su voltaje terminal o bien manipulando el valor de la corriente de campo.

b) Variadores por corrientes de Eddy: Un variador de velocidad por corrientes de Eddy consta de un motor de velocidad fija y un embrague de corrientes de Eddy. El embrague contiene un rotor de velocidad fija (acoplado al motor) y un rotor de velocidad variable, separados por un pequeño entrehierro. Se cuenta, además, con una bobina de campo cuya corriente puede ser regulada, la cual produce un campo magnético que determinará el par mecánico transmitido del rotor de entrada al rotor de salida. De esta forma, a mayor intensidad de campo magnético mayor par y velocidad transmitidos, y a menor campo magnético menores serán el par y la velocidad en el rotor de salida. El control de la velocidad de salida de este tipo de variadores generalmente se realiza por medio de lazo cerrado, utilizando como elemento de retroalimentación un tacómetro de c.a.

c) Variadores de deslizamiento: Este tipo de variadores se aplica únicamente para los motores de inducción de rotor devanado. En cualquier motor de inducción, la velocidad mecánica

$$(N_m)$$

puede determinarse mediante la siguiente expresión:

$$N_m = 120f(1-s)/P$$

donde:  $s$  es el deslizamiento del motor, cuyo valor oscila entre 0 y 1. De esta forma, a mayor deslizamiento menor velocidad mecánica del motor. El deslizamiento puede incrementarse al aumentar la resistencia del devanado del rotor, o bien al reducir el voltaje en el devanado del mismo. De esta forma es que puede conseguirse el control de la velocidad en los motores de inducción de rotor devanado. Sin embargo, este tipo de variadores es de menor eficiencia que otros, razón por la cual en la actualidad tiene muy poca aplicación.

d) Variadores para motores de CA (variadores de frecuencia): Los variadores de frecuencia (en inglés, AFD = Adjustable Frequency Drive, VFD = Variable Frequency Drive) permiten controlar la velocidad tanto de motores de inducción (jaula de ardilla y rotor devanado) como de los motores síncronos mediante el ajuste de la frecuencia de alimentación al motor.

Para el caso de un motor síncrono, la velocidad se determina mediante la siguiente expresión:

$$N_s = 120f/P$$

y cuando se trata de motores de inducción (de jaula de ardilla o de rotor devanado) se tiene

$$N_m = 120f(1-s)/P$$

donde:

$$N_s$$

es la velocidad síncrona (rpm),

$$N_m$$

es la velocidad mecánica (rpm),

$$f$$

es la frecuencia de alimentación (Hz),

$$s$$

es el deslizamiento (adimensional) y

$$P$$

es el número de polos.

Como puede verse, la frecuencia y la velocidad son directamente proporcionales, de tal manera que al aumentar la frecuencia de alimentación al motor se incrementará la velocidad de la flecha, y al reducir el valor de la frecuencia disminuirá la velocidad del eje. Por ello es que este tipo de variadores manipula la frecuencia de alimentación al motor a fin de obtener el control de la velocidad de la máquina.

Estos variadores mantienen la razón voltaje/ frecuencia (V/Hz) constante entre los valores mínimo y máximo de la frecuencia de operación, con la finalidad de evitar la saturación magnética del núcleo del motor y también porque el hecho de operar el motor a un voltaje constante por encima de una frecuencia dada (reduciendo la relación V/Hz) disminuye el par del motor y la capacidad del mismo para proporcionar potencia constante de salida.

## 15.2 Principios básicos del control directo del par

El modelo del motor de inducción utilizado en el DTC, es el modelo vectorial del motor en coordenadas d-q estacionarias. El modelo empleado no contempla la saturación del circuito magnético (además de considerar que éste se encuentra balanceado), siendo las ecuaciones utilizadas las siguientes:

$$v_{sd} = R_S i_{sd} + \dot{\psi}_{sd} - \omega_S \psi_{sq}$$

$$v_{sq} = R_S i_{sq} + \dot{\psi}_{sq} + \omega_S \psi_{sd}$$

$$0 = R_r i_{rd} + \dot{\psi}_{rd} - \omega_{slip} \psi_{rq}$$

$$0 = R_r i_{rd} + \dot{\psi}_{rq} + \omega_{slip} \psi_{rd}$$

$$\psi_{sd} = L_S i_{sd} + L_m i_{rd}$$

$$\psi_{sq} = L_S i_{sq} + L_m i_{rq}$$

$$\psi_{rd} = L_r i_{rd} + L_m i_{sd}$$

$$\psi_{rq} = L_r i_{rq} + L_m i_{sq}$$

$$T = \frac{3}{2} p (\psi_{sd} i_{sq} - \psi_{sq} i_{sd})$$

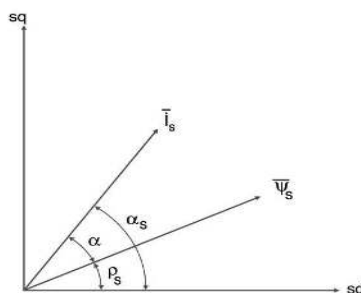
$$\omega_S = \omega_{slip} + \omega_r$$

### Motor de inducción

En el archivo se puede ver una deducción detallada del modelo de motor de inducción.



En las figuras 15.3 y 15.4 se muestran los diagramas de vectores espaciales de las corrientes y del flujo magnético del motor de inducción, en un marco de referencia d-q estacionario.



**Figura 15.3** Vectores espaciales de la corriente y el flujo del estator, en un marco de referencia estacionario ( $d - q$ ).



flujo del estator y del vector del flujo del rotor, entonces el par electromagnético se puede controlar variando el ángulo  $\gamma$ . Este es el principio del control directo del par, es decir, controlar el par electromagnético a través de la variación del ángulo  $\gamma$ .

El flujo del estator se puede estimar a partir de las ecuaciones del estator en el marco de referencia d-q estacionario, y esto se puede expresar en forma vectorial mediante la siguiente expresión:

$$\overline{\psi}_s = \int (\overline{v}_s - \overline{i}_s R_s)$$

### 15.3 Esquema convencional del control directo del par

El esquema de control directo del par surge con los trabajos de Takahashi y Depenbrock a mediados de la década de los ochenta, donde el esquema básico de control es realizado en dos etapas. En la figura 15.5 se muestra el esquema convencional del DTC.

La primera etapa se realiza implementando dos bandas de histéresis, una para el par electromagnético y la otra para el flujo del estator. En esta primera etapa se tiene que seleccionar un vector de voltaje relativo que cumpla con las necesidades del par y de flujo del estator. Este vector de voltaje relativo es seleccionado empleando las bandas de histéresis del flujo del estator, que tiene dos posibles estados, y la del par que tiene tres posibles estados. Se puede definir como estado al resultado de la comparación entre los límites de la banda y el valor real del flujo del estator o del par electromagnético, como se muestra en la figura 15.5.

Los valores de  $T$  y  $\psi_s$  se calculan empleando el modelo del motor en coordenadas estacionarias d-q y estos valores se comparan con su respectiva banda de histéresis, con lo que se producen los posibles estados que se toman en cuenta para la selección del voltaje relativo, el cual satisface las necesidades del par y del flujo para mantenerlos dentro de sus respectivas bandas de histéresis.

Los posibles estados para el flujo del estator y para el par electromagnético son los siguientes:

*Para el flujo del estator:*

$\psi_{cal} < (\psi_{ref} - \Delta\psi)$ , entonces el estado del flujo es 1 y  $\psi_s$  debe ser incrementado.

$\psi_{cal} > (\psi_{ref} + \Delta\psi)$ , entonces el estado del flujo es 0 y  $\psi_s$  debe ser incrementado.

*Para el par electromagnético:*



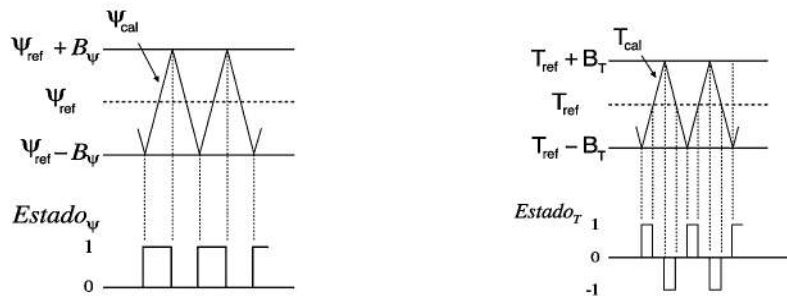
$T_{cal} < T_{ref} - \Delta$ , entonces el estado del par es 1 y  $T$  debe ser incrementado.

$T_{cal} = T_{ref}$ , entonces el estado del par es 0 y el valor del  $T$  no debe cambiar.

$T_{cal} > (T_{ref} + \Delta T)$ , entonces el estado del par es -1 y  $T$  debe ser decrementado.

La segunda etapa se realiza después de calcular el vector relativo de voltaje. En esta etapa se tiene que tener en cuenta la posición del vector de flujo del estator, permitiendo seleccionar el vector de voltaje de salida que es enviado al inversor. Estas dos etapas se implementan por medio de tablas.

Esta estrategia de control no requiere de una transformación de coordenadas ya que el desacople del motor de inducción es realizado por un simple control on-off, que utiliza una tabla de selección que se construye con los posibles voltajes relativos, y de esta manera se realiza la conmutación de los semiconductores de potencia en el inversor. Estas características simplifican de manera notable el algoritmo de control.



**Figura 15.5** Estados dentro de las bandas de histéresis para el flujo del estator y el par electromagnético.

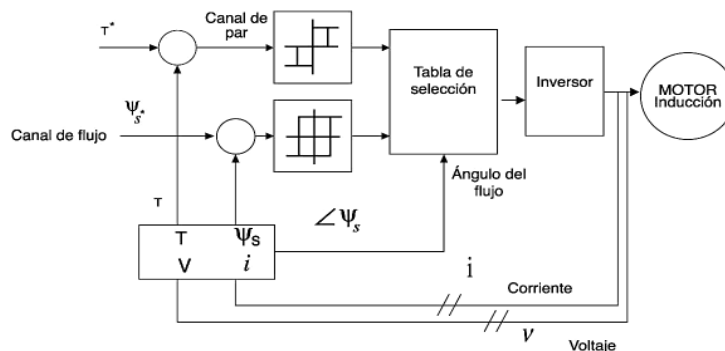
En el DTC el flujo del estator y el par electromagnético pueden ser medidos o estimados. Si estos valores se estiman se pueden emplear las señales de las terminales del motor para realizar la estimación.

En este trabajo se estiman los valores del flujo del estator, y del par electromagnético, usando las señales de las terminales del motor.

Si se desprecia la caída de tensión debida a la resistencia del estator se tiene que:

$$\Delta\psi_s = \Delta t(\nu_s)$$

En esta ecuación se observa que un cambio en el vector de voltaje del estator es proporcional, en magnitud y sentido, al vector de flujo del estator. Por esta razón, el esquema del DTC emplea un inversor fuente de voltaje (VSI) para el control del flujo del estator. (Ver la Figura 15.6)

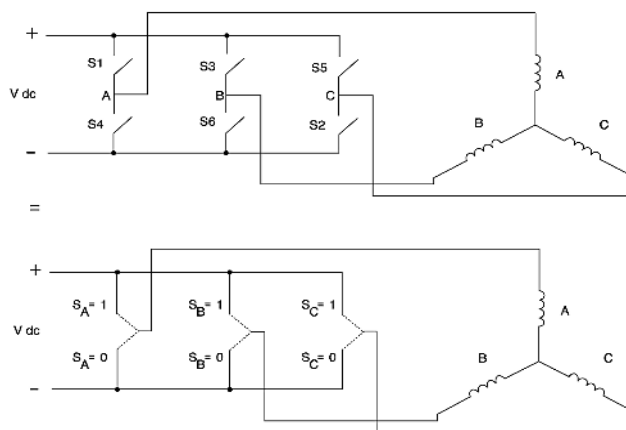


**Figura 15.6** Control convencional en lazo abierto del control directo del par.

## 15.4 Inversor fuente de voltaje (VSI) empleado en el DTC

Es posible controlar el flujo del estator y el par electromagnético, a través del control del inversor fuente de voltaje. Retomando algunas de las ideas presentadas acerca de la forma de funcionamiento del inversor y de cómo se puede controlar, se puede diseñar una estrategia que pueda ser empleada en el DTC.

El VSI utilizado en el método del DTC se muestra en la figura 15.7. Este inversor tiene 8 posibles estados, mostrados en la Tabla 15.1 y en la figura 15.7. A partir de la Tabla 15.1 se ve que se tienen 6 vectores, (0,1,1), (0,0,1), (1,0,1), (1,0,0), (1,1,0), (0,1,0), y 2 vectores cero, (0,0,0), (1,1,1).



**Figura 15.7** Inversor fuente de voltaje (VSI).

Estado del VSI	Rama A	Rama B	Rama C
$V_1$	1	0	0
$V_2$	1	1	0
$V_3$	0	1	0
$V_4$	0	1	1
$V_5$	0	0	1
$V_6$	1	0	1
$V_7$	1	1	1
$V_8$	0	0	0

Cuadro 15.1 Estados posibles del inversor.

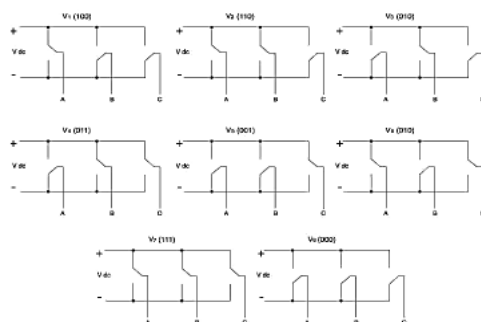


Figura 15.8 Inversor fuente de voltaje (VSI).

De acuerdo con estos 8 estados posibles, los devanados del motor pueden quedar conectados a la fuente de corriente continua como se muestra en la figura 15.9.

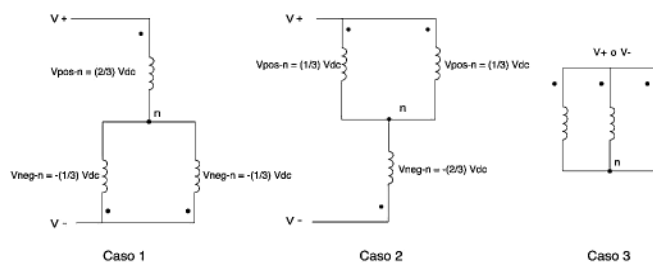


Figura 15.9 Control convencional en lazo abierto del control directo del par.

Estado del VSI	Voltaje A	Voltaje B	Voltaje C
$V_1$	$2/3$	$-1/3$	$-1/3$
$V_2$	$1/3$	$1/3$	$-2/3$
$V_3$	$-1/3$	$2/3$	$-1/3$
$V_4$	$-2/3$	$1/3$	$1/3$
$V_5$	$-1/3$	$-1/3$	$2/3$
$V_6$	$1/3$	$-2/3$	$1/3$
$V_7$	$0$	$0$	$0$
$V_8$	$0$	$0$	$0$

Cuadro 15.2 Voltajes de fase a neutro.

De acuerdo con la figura 15.9 se pueden tener tres casos:

Caso 1. Ocurre cuando dos interruptores se encuentran conectados a la terminal positiva y el otro a la terminal negativa.

Caso 2. Ocurre cuando dos interruptores se encuentran conectados a la terminal negativa y el otro a la terminal positiva.

Caso 3. Ocurre cuando los tres interruptores son conectados a la terminal positiva o a la terminal negativa.

Con estos tres casos se puede construir la Tabla 15.2, que muestra los voltajes de fase a neutro;

en la Tabla 15.2, se pueden transformar a coordenadas d-q de la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} V_{sd} \\ V_{sq} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix}$$

Los resultados de la transformación se presentan en la Tabla 15.3.

## 15.5 Resultados del desempeño dinámico del control directo del par

Empleando la Tabla 15.3 se puede determinar la posición de cada uno de los vectores de voltaje en un marco d-q. De esta forma se establece cuáles vectores de voltaje incrementan la magnitud del vector de flujo del estator, de acuerdo con la figura 15.10, si se toma en cuenta que el par del motor es proporcional al producto cruz de los vectores de flujo del rotor y flujo del estator y al seno del ángulo entre ellos; se comprende que al mantener constante la magnitud de los flujos, se puede controlar la magnitud y sentido del par al variar el ángulo entre ellos. Considerando lo anterior, se puede construir una tabla que

Estado del VSI	Voltaje d	Voltaje q
$V_1$	$2/3$	$0$
$V_2$	$1/3$	$1/\sqrt{3}$
$V_3$	$1/3$	$-1/\sqrt{3}$
$V_4$	$-2/3$	$0$
$V_5$	$-1/3$	$-1/\sqrt{3}$
$V_6$	$1/3$	$-1/\sqrt{3}$
$V_7$	$0$	$0$
$V_8$	$0$	$0$

Cuadro 15.3 Vectores espaciales de voltaje en marco estacionario (d-q).

permita obtener un vector relativo de voltaje que haga tender los valores del par y del flujo del estator con los valores de sus referencias.

Las condiciones que son impuestas en esta tabla están definidas por los posibles estados para el flujo y el par electromagnético. La Tabla 15.4 muestra el efecto que causan los vectores de voltaje relativos en el par y el flujo del estator, en el primer sector; una flecha hacia arriba indica que el voltaje relativo provoca un incremento del flujo o del par; si la dirección de la flecha es hacia abajo se produce un decremento del par o del flujo; una flecha doble indica un incremento o decremento mayor; finalmente una línea horizontal indica un efecto nulo.

Para causar el efecto deseado en el par y en el flujo del estator, es necesario conocer la posición del vector de flujo del estator, lo cual se consigue dividiendo el plano d-q en seis sectores (*k - thsector*) de 60 grados cada uno, como se muestra en la figura 15.10, y de esta manera se puede conocer el sector en que se encuentra el vector de flujo del estator.

Tomando en cuenta la forma en que los vectores de voltaje afectan al par y al flujo del estator (tabla 15.4), se pueden proponer distintas estrategias (selección de diferentes vectores de voltaje) para producir el efecto deseado y realizar el control del par y del flujo del estator.

	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$	$V_6$	$V_7, V_8$
$ \psi_s$	$\uparrow\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\dots\dots\dots$
$T$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow\downarrow$	$\downarrow\downarrow$	$\downarrow$

Cuadro 15.4 Influencia de los vectores de voltaje relativos sobre el flujo del estator y par electromagnético.

Estado del Flujo	Estado del Par	Sector 1	Sector 2	Sector 3	Sector 4	Sector 5	Sector 6
1	1	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$	$V_6$	$V_1$
	0	$V_7$	$V_8$	$V_7$	$V_8$	$V_7$	$V_8$
	-1	$V_6$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$
0	1	$V_3$	$V_4$	$V_5$	$V_6$	$V_1$	$V_2$
	0	$V_8$	$V_7$	$V_8$	$V_7$	$V_8$	$V_7$
	-1	$V_5$	$V_6$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$

Cuadro 15.5 Selección de los vectores de voltaje para cada uno de los sectores en el plano (d-q).

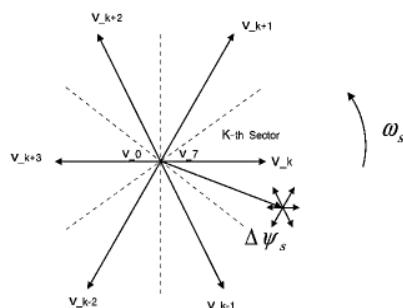
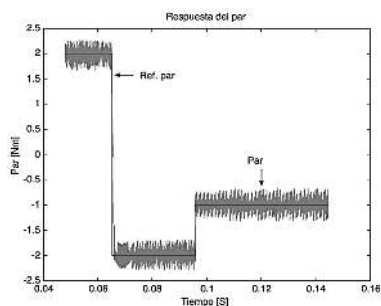


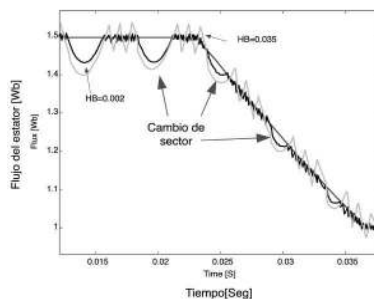
Figura 15.10 Inversor fuente de voltaje (VSI).

Se puede generalizar, para cada uno de los seis sectores, el efecto que causan los vectores relativos y llevar a cabo la selección en cada sector como se muestra en la Tabla 15.5, la cual presenta la selección de voltajes relativos empleados en el control directo del par.

En las figuras 15.11 y 15.12 se presentan respectivamente los resultados dinámicos del par electromagnético y del flujo del estator para un motor de inducción, y en éstos se puede observar su excelente respuesta dinámica así como la aparición del rizado tanto en el flujo como en el par, lo que ocurre debido a los controladores de histéresis empleados en el canal del par y del flujo.



**Figura 15.11** Respuesta transitoria del par electromagnético del motor de inducción.



**Figura 15.12** Respuesta del flujo del estator durante la operación en zona de par constante, y flujo debilitado con diferentes anchos de banda en el controlador de flujo.

## Control directo del par

En los archivos

`anovelfuzzycontrollerswitchingfrequencyofaninductionmotor.swf`

`controldirectodelparenmotoresdeinducccion.swf`

`controldirectodelparsinsensoresdevelocidadparami.swf`

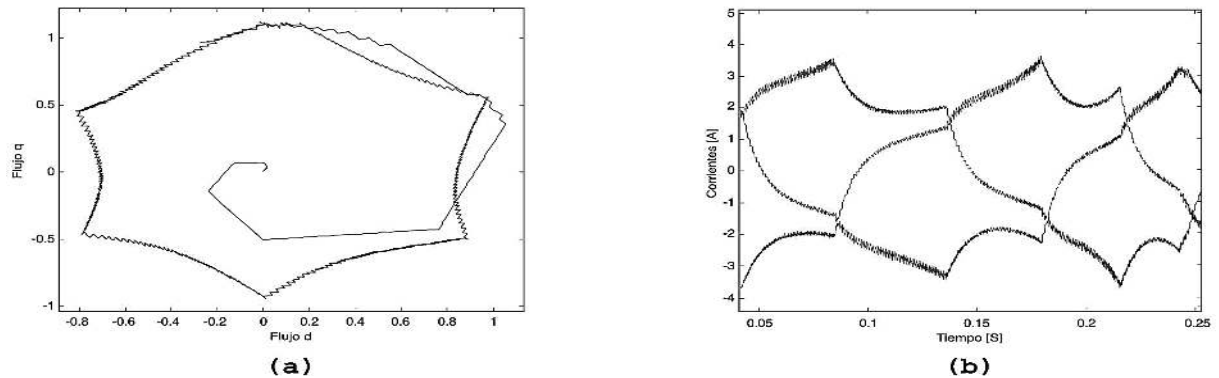
se presentan algunas alternativas y modificaciones del control directo del par.



**15.6 Problema de la distorsión del flujo del estator cuando ocurre un cambio de sector durante la rotación del flujo magnético del estator en el DTC**

Uno de los principales problemas en el DTC es la distorsión del flujo del estator durante el cambio de sector en la rotación del fasor espacial. Este problema se muestra en la figura 15.12, donde se presenta el flujo del estator en las zonas de par constante y de campo debilitado; también se observa que aparece una caída en el flujo del estator. En esta figura se utilizaron dos anchos de banda diferentes (HB) en el regulador de histéresis del flujo del estator. Como se puede observar, a medida que el ancho de la banda aumenta la distorsión del flujo durante el cambio de sector es mayor, incrementando también el rizado de la señal en ambas zonas de operación.

En la figura 15.13a se muestra la trayectoria del flujo del estator en el plano complejo (d-q), en la zona de par constante. En esta figura se observa que la trayectoria tiende a una forma hexagonal, reflejándose ésta en el incremento de la distorsión de la forma de onda de la corriente del estator, figura 15.13b. Esta distorsión se refleja en los armónicos de corriente del estator.



**Figura 15.13** (a) Flujo del estator en el plano complejo d-q. (b) Corrientes de las fases.

**15.7 Sectores variables en el control directo del par**

El concepto de sectores variables de conmutación fue propuesto originalmente por Rossi et. al. La esencia del método consiste en variar la posición angular del vector espacial flujo del estator  $\overline{\psi}_s$  en un ángulo



$\alpha$  en el plano complejo, lográndose de esta forma atenuar el problema que surge durante la rotación de  $\overline{\psi}_s$  al pasar de un sector a otro. En varios trabajos se propone un método de control para regular el valor del desplazamiento ficticio de  $\overline{\psi}_s$  en función de su posición real en el plano complejo, también se muestra que es posible lograr una reducción en el contenido de los armónicos de la señal de corriente del estator. La reducción de estos armónicos resulta obvia si se tiene en cuenta que con este método es posible atenuar considerablemente las distorsiones en el flujo del estator. Al lograr disminuir considerablemente la distorsión del flujo del estator, se logra disminuir los armónicos de la corriente de magnetización del motor y por lo tanto disminuyen los armónicos de la corriente del estator. En este método no se logra mejorar la respuesta dinámica del DTC, obteniéndose resultados semejantes entre el DTC convencional y el DTC con sectores de conmutación variables.

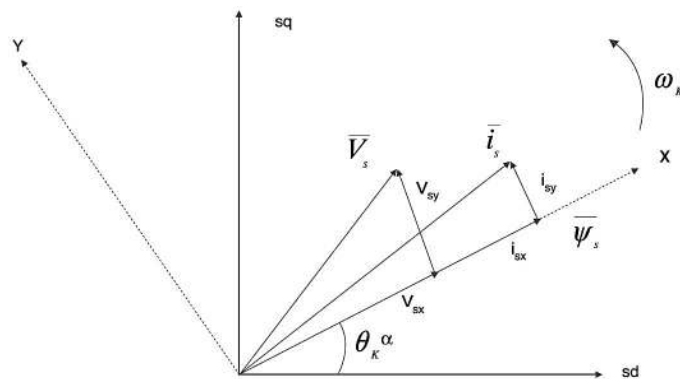
La técnica consiste en extender el ángulo de desplazamiento a diferentes valores (de cero a treinta grados), lo que permite disminuir la distorsión armónica y mejorar la respuesta dinámica del control directo del par en zona de operación de par constante y campo debilitado. Además se modifica la tabla de selección de los fasores de voltaje generados por el inversor, para tener un mayor aprovechamiento de las componentes de voltaje que pueden modificar las magnitudes del par electromagnético y del flujo del estator.

Como se describió el principio del DTC en el motor de inducción (MI), se ve que éste logra un control desacoplado del flujo del estator y del par electromagnético. La regulación del flujo y del par se logra mediante la aplicación de fasores espaciales de voltaje, generados por el inversor. Para analizar la influencia en el par electromagnético y el flujo del estator, de las componentes del fasor de voltaje aplicado en un marco de referencia rotatorio, donde uno de los ejes se orienta con el fasor espacial flujo del estator, se parte de la ecuación vectorial de voltaje del estator en un marco de referencia estacionario de forma que

$$\overline{V}_s = \overline{i}_s R_s + \frac{d\overline{\psi}_s}{dt}$$

donde  $\overline{V}_s$ ,  $\overline{i}_s$  y  $\overline{\psi}_s$  respectivamente son los fasores espaciales del voltaje, la corriente y el flujo del estator en un marco de referencia estacionario.

En la figura 15.14 se muestra el diagrama fasorial de los fasores espaciales del estator. Los ejes  $sd - sq$  se toman como marco de referencia estacionario (velocidad de giro igual a cero). Los ejes  $x - y$  giran a la velocidad del flujo del estator ( $\omega_k = d\theta_k/dt$ ), constituyendo el marco de referencia rotatorio o coordenadas del flujo del estator.



**Figura 15.14** Diagrama fasorial del flujo, corriente y voltaje del estator.

La transformación de coordenadas estacionarias (sd - sq) en coordenadas rotatorias se puede realizar utilizando el concepto de rotación vectorial, esto es:

$$\overline{\psi}_s = \overline{\psi}_{s\psi_s} e^{j\theta_k} = |\psi_s| e^{j\theta_k}$$

$$\overline{i}_s = \overline{i}_{s\psi_s} e^{j\theta_k}$$

$$\overline{V}_{s\psi_s} = \overline{V}_{s\psi_s} e^{j\theta_k}$$

donde  $\overline{V}_{s\psi_s}$ ,  $\overline{i}_{s\psi_s}$  y  $\overline{\psi}_{s\psi_s}$  respectivamente son los fasores espaciales del voltaje, la corriente y el flujo del estator en coordenadas rotatorias (x-y).

Sustituyendo las ecuaciones se obtiene la expresión vectorial de los voltajes del estator en coordenadas rotatorias, es decir:

$$\overline{V}_{s\psi_s} = \overline{i}_{s\psi_s} + \frac{d|\overline{\psi}_s|}{dt} + j\omega_k |\overline{\psi}_s|$$

pero:

$$\overline{V}_{s\psi_s} = V_{sx} + jV_{sy}$$

$$\overline{i}_{s\psi_s} = i_{sx} + ji_{sy}$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores y despreciando la caída de voltaje en el estator, se obtiene que:

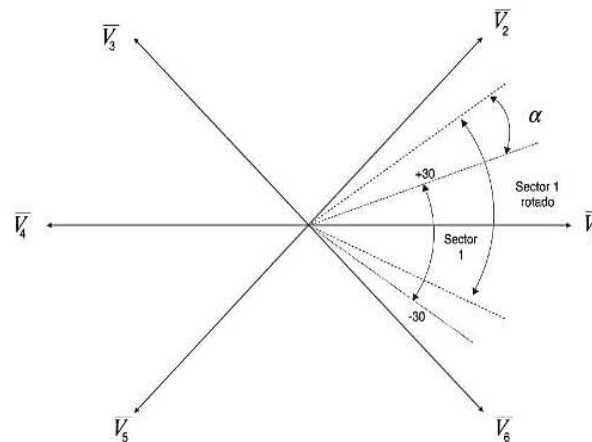
$$V_{sx} = \frac{d\overline{\psi}_s}{dt}$$

$$V_{sy} = \omega_k |\overline{\psi}_s|$$

A partir de la expresión previa se observa que la variación de la magnitud del flujo del estator depende directamente de la componente del voltaje en el eje x. Si la componente es positiva, se logra un incremento del flujo del estator, siendo éste mayor a medida que la componente  $V_{sx}$  aumenta. En esa expresión se observa que la componente de voltaje en el eje y influye directamente en la velocidad de rotación del fasor espacial flujo del estator. Si  $V_{sy}$  aumenta su valor, la velocidad de rotación incrementará en el sentido positivo o negativo, dependiendo del signo de la componente  $V_{sy}$ .

Un incremento en la velocidad provoca un incremento en el ángulo entre los fasores espaciales flujo del estator y flujo del rotor, provocándose de esta forma un incremento en el par electromagnético del MI. De lo anterior resulta obvio que, dependiendo del fasor de voltaje seleccionado (de la Tabla de selección), se tendrán diferentes valores de las componentes de voltaje  $V_{sx}$ ,  $V_{sy}$ , lográndose un mayor o menor efecto en la regulación del flujo del estator y del par electromagnético.

El concepto de sectores variables se deduce a partir de la figura 15.15. En esta figura se observa que el sector 1 se encuentra entre los  $-30^\circ$  y los  $+30^\circ$ , sin embargo puede ser rotado en el sentido antihorario un ángulo  $\alpha$ . La rotación se realiza en los seis sectores en que se divide el plano, aunque en la figura solamente se muestra la rotación en el sector 1.



**Figura 15.15** Concepto de sectores variables.

En la figura 15.15 se muestran los efectos de las componentes de voltaje  $V_{sx}$  y  $V_{sy}$  del fasor  $\overline{V}_2$  sobre el fasor  $\overline{\psi}_s$  cuando éste se encuentra en el sector 1. Como puede observarse, el valor por unidad de la

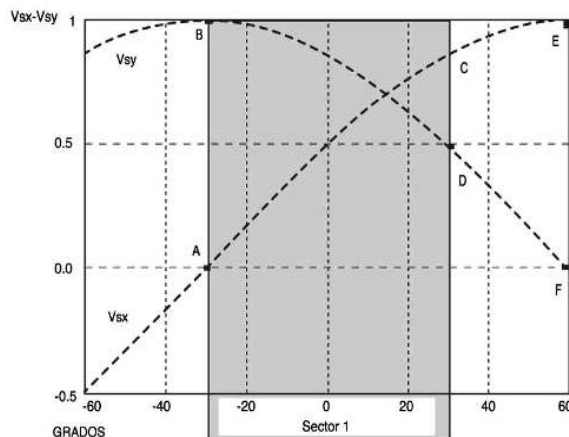
componente  $V_{sx}$ , tomando como base la magnitud de  $\overline{V}_2$ , sigue una función senoidal de amplitud unitaria. De forma semejante, para  $V_{sy}$  el comportamiento será cosenoidal.

En la figura 15.15 se muestran los efectos de las componentes de voltaje  $V_{sx}$  y  $V_{sy}$  del fasor  $\psi$  sobre el fasor cuando éste se encuentra en el sector 1. Como puede observarse, el valor por unidad de la componente  $V_{sx}$ , tomando como base la magnitud de  $\overline{V}_2$ , sigue una función senoidal de amplitud unitaria. De forma semejante, para  $V_{sy}$  el comportamiento será cosenoidal.

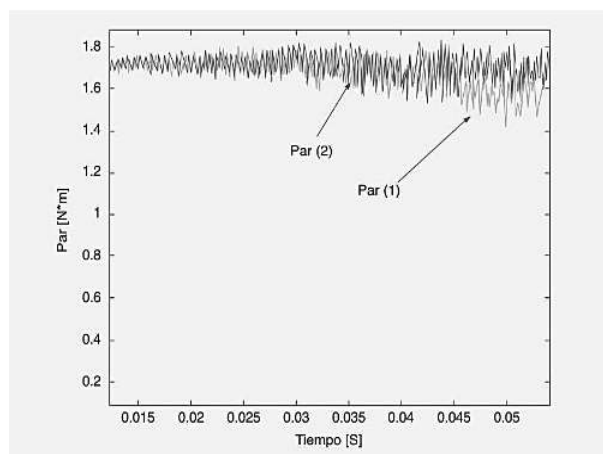
En la figura 15.15 se observa un efecto nulo de  $V_{sx}$  en el punto A, lo cual indica que el fasor de voltaje  $\overline{V}_2$  no puede mantener el flujo magnético dentro de la banda de histéresis, ocurriendo una caída de su valor (figura 15.12). En el punto B la componente de voltaje  $V_{sy}$  es máxima, coincidiendo en este punto la mejor regulación del par electromagnético. Para eliminar el efecto perjudicial de la distorsión del flujo del estator cuando el fasor espacial del flujo del estator entra en el sector (punto A), se realiza una rotación de todo el sector un ángulo  $\alpha$  (figura 15.15). A medida que el ángulo  $\alpha$  tiende a  $30^\circ$ , los puntos C y D tienden a los puntos E y F. Esta rotación se puede realizar hasta un valor máximo de  $\alpha = 15^\circ$ , debido a que un incremento mayor de  $\alpha$  provoca que la regulación del par electromagnético se deteriore considerablemente, alcanzando un efecto nulo en el punto F para  $\alpha = 30^\circ$ . Para evitar este problema, se realiza una variación en la tabla de selección de los fasores de voltaje en la zona desplazada del sector a partir de  $\alpha = 15^\circ$ . La modificación de la tabla se basa en aplicar el fasor de voltaje del estator que cumpla con los requerimientos de par y de flujo necesarios, por ejemplo si el fasor del flujo del estator se encuentra a  $55^\circ$  (ver figuras 15.15 y 15.16) cuando  $\alpha = 30^\circ$ , la utilización del vector para incrementar el par es prácticamente inoperante ya que su efecto es mínimo, sin embargo el vector  $\overline{V}_2$  para incrementar el par es prácticamente inoperante ya que su efecto es mínimo, sin embargo el vector  $\overline{V}_3$  puede causar un variación mucho mayor del par. De esta forma se realiza para  $\alpha > 15^\circ$  el cambio en las decisiones para la selección del fasor de voltaje generado por el inversor y se logra mejorar la respuesta del flujo del estator y minimizar su distorsión. En la figura 15.17 aparece la tabla de selección modificada del DTC, con la cual se logra mejorar el desempeño en la regulación del flujo del estator.

La modificación de la tabla de selección original de los fasores de voltaje en el DTC, durante las  $\alpha$  radianes, es una de las aportaciones que se propone para mejorar el problema de la distorsión del flujo del estator durante el cambio del sector y corregir la distorsión de la corriente del estator. La solución propuesta es más sencilla que otras debido a que solamente se considera una modificación constante del ángulo  $\alpha$  y no una modificación variable en función de la velocidad como aparece en otros trabajos. La variación de la tabla de selección de los fasores de voltaje permite corregir el efecto del decremento de curva mostrado en los puntos D-F y lograr una mayor efectividad en la regulación del par electromagnético al incrementar el valor de la componente de voltaje que lo controla  $V_{sy}$ . En la figura 15.16 se muestran los resultados del par electromagnético del motor para  $\alpha = 30^\circ$  cuando se utiliza la tabla de selección de los fasores de voltaje convencional (par 1) y la respuesta del par cuando se utiliza la tabla de selección propuesta (tabla 15.1, en donde se muestra cómo se realiza la modificación en el sector (1); para los demás sectores se realiza de la misma manera, cambiando únicamente el vector de voltaje que incrementa el par) mostrada en par 2. Como se puede observar en la figura 15.16, cuando se utiliza la tabla de selección propuesta de los fasores de voltaje que deben regular el valor del par electromagnético,

la regulación del par es mejor ya que sus valores se mantienen dentro de la banda de histéresis y alrededor del valor de referencia, sin embargo durante el intervalo D-F de la figura 15.16 el valor de la componente del voltaje  $V_{sy}$  que regula el par disminuye considerablemente, hasta que su valor se hace cero en F, comenzándose a degradar la respuesta del par como se puede observar en la figura 15.16.



**Figura 15.16** Comportamiento de  $V_d$  y  $V_q$  durante la extensión de los sectores.



**Figura 15.1** Figura 15.17

Respuestas del par electromagnético en un sector para  $\alpha = 30^\circ$ .

En la figura 15.18 se muestran los resultados del comportamiento dinámico del flujo del estator durante el arranque del MI, para diferentes valores de  $\alpha$ . Como se puede observar, la mejor respuesta dinámica se

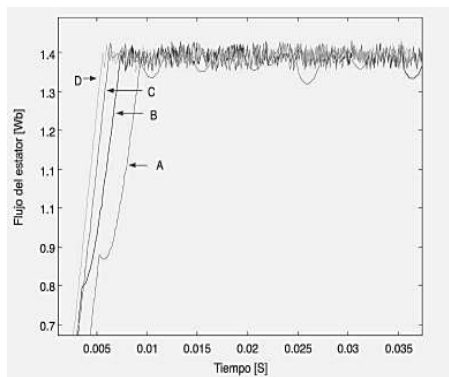
Estado de Flujos	Estado del dt	Sector (1)	Extensión del sector (1)
1	1	$V_2$	$V_3$
	0	$V_7$	$V_7$
	-1	$V_6$	$V_6$
0	1	$V_3$	$V_4$
	0	$V_8$	$V_8$
	-1	$V_5$	$V_5$

Cuadro 15.6 Variación de la tabla convencional para el sector 1 utilizando sectores variables.

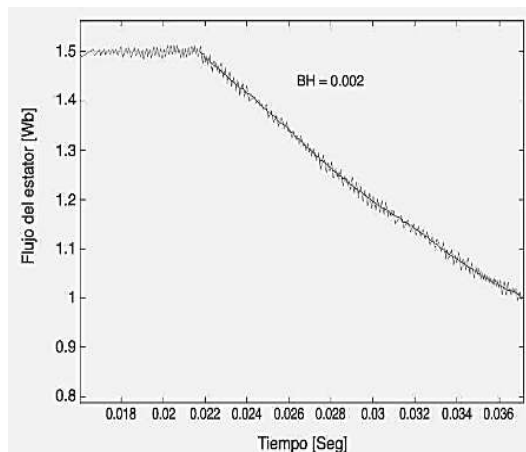
obtiene cuando  $\alpha = 30^\circ$  (valor máximo). De acuerdo a lo planteado en el punto anterior, este resultado fue posible alcanzarlo solamente con la modificación de la tabla propuesta (Tabla 15.6) debido a que el control del par se pierde en el punto F donde  $\alpha = 30^\circ$ . Esto no se puede lograr debido a que la tabla de selección se mantuvo sin variaciones.

Empleado esta técnica, las trayectorias del flujo del estator tienen un comportamiento casi circular cuando  $\alpha = 30^\circ$  (valor máximo), lográndose por lo tanto un menor contenido de armónicos en la forma de onda de la corriente del estator. También se puede lograr que el flujo del estator y del rotor tenga una mejor respuesta dinámica, lo cual se observa por la longitud de las espirales que inician en el centro del plano en el instante del arranque del MI.

En la figura 15.19 se puede observar la respuesta dinámica del flujo del estator para el DTC, en la zona de par constante con diferentes valores de  $\alpha$ .



**Figura 15.18** Respuestas del flujo del estator durante el arranque del motor. Se tiene que  $A \rightarrow \alpha = 0^\circ$ ,  $B \rightarrow \alpha = 15^\circ$ ;  $C \rightarrow \alpha = 25^\circ$ ,  $D \rightarrow \alpha = 30^\circ$ .



**Figura 15.19** Regulación del flujo del estator en las zonas de par constante y de campo debilitado para  $\alpha = 300$ , con una banda de histresis  $BH=0.002$  Wb.

En la figura 5.19 se muestran las variaciones del flujo del estator en las regiones de par constante y campo debilitado, iniciándose ésta última en 0.022 segundos. Si se realiza una comparación se puede apreciar que, con este método, se eliminan las pulsaciones en el flujo originadas por el cambio de sector durante la rotación de  $\overline{\psi}_s$ .

Para  $\alpha > 0$  se logra disminuir la frecuencia de conmutación en el inversor. Además de la ventaja anterior, también se logra reducir el contenido de armónicos de la señal de corriente del estator y mejorar la respuesta dinámica del flujo del estator, y por lo tanto también se logra mejorar la respuesta del par electromagnético. Se puede decir que el control directo del par es una alternativa de los accionamientos eléctricos de velocidad variable de máquinas de c.a.

### 15.8 Lazo cerrado de velocidad en el control directo del par

Cuando es necesario tener un mejor control de la velocidad del motor se recomienda tener un esquema en lazo cerrado de la velocidad como lo muestra la figura 15.20, siendo el controlador más empleado el tipo PI por lo que es necesario contar con un modelo lineal del motor. Para ello, se linealiza el motor alrededor de un punto de operación.





$$f + \Delta f = f_o + \frac{\partial}{\partial i_{sq}} f \Delta i_{sq} + \frac{\partial}{\partial i_{sd}} f \Delta i_{sd} + \frac{\partial}{\partial i_{rq}} f \Delta i_{rq} + \frac{\partial}{\partial i_{rd}} f \Delta i_{rd} + \frac{\partial}{\partial \omega_r} f \Delta \omega_r + \dots$$

Al desarrollar esta ecuación y expresarla matricialmente, se obtiene que:

$$\begin{bmatrix} \Delta sd \\ \Delta sq \\ \Delta rd \\ \Delta rq \\ \Delta T_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + DL_s & -\omega_k L_s & DL_m & -\omega_k L_m & 0 \\ \omega_k L_s & R_s + DL_x & \omega_k L_m & DL_m & 0 \\ DL_m & -(\omega_k - \omega_{ro}) L_m & R_r + DL_r & -(\omega_k - \omega_{ro}) L_r & L_r i_{rdo} + L_m i_{sqo} \\ (\omega_k - \omega_{ro}) L_m & DL_m & (\omega_k - \omega_{ro}) L_r & R_r + DL_r & -(L_r i_{rdo} + L_m i_{sqo}) \\ -\frac{3}{2} p L_m I_{rqo} & \frac{3}{2} p L_m I_{rdo} & \frac{3}{2} p L_m I_{sq} & \frac{3}{2} p L_m I_{sdo} & -(\beta + DJ/P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta i_{sd} \\ \Delta i_{sq} \\ \Delta i_{rd} \\ \Delta i_{rq} \\ \Delta \omega_r \end{bmatrix}$$

Una vez determinado el modelo lineal, se puede representar por:

$$EDX = -FX + U$$

donde X es la matriz de variables de estado, U es la matriz de entradas, así como F y E son:

$$F = \begin{bmatrix} R_s & -\omega_k L_s & 0 & -\omega_k L_m & 0 \\ \omega_k L_s & R_s & \omega_k L_m & 0 & 0 \\ 0 & -(\omega_k - \omega_{ro}) L_m & R_r & -(\omega_k - \omega_{ro}) L_r & L_r i_{rdo} + L_m i_{sqo} \\ -\frac{3}{2} p L_m i_{rdo} & \frac{3}{2} p L_m i_{rqo} & \frac{3}{2} p L_m i_{sdo} & \frac{3}{2} p L_m i_{sqo} & -\beta \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} L_s & -0 & L_m & -0 & 0 \\ 0 & L_s & 0 & L_m & 0 \\ L_m & 0 & L_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -J/p \end{bmatrix}$$

Se puede obtener un modelado en variables de estado:

$$\frac{d}{dt} X = AX + BU$$

$$Y = CX + DU$$

donde  $A = -E - IF$ ,  $B = E - I$  y  $C$  depende de la variable de salida cuantificada.

Al resolver el sistema con  $D = 0$ , se obtiene la solución

$$Y = C(sI - A) - IBU$$

Para obtener la función de transferencia

$$H(s) = \frac{\Delta\omega}{\Delta v_s}$$

se hace

$$U = G\Delta v_s$$

donde:

$$G = [\cos\alpha \ \text{sen}\alpha \ 000]^T$$

De la ecuación de la velocidad para ( $\Delta T_L = 0$ )

$$\Delta\omega_r = CX$$

por lo tanto:

$$C = [00001]$$

Al sustituir se obtiene la función de transferencia de la forma

$$H(s) = \frac{a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4}{s^5 + b_1 s^4 + b_2 s^3 + b_3 s^2 + b_4 s + b_5}$$

Encontrando la función de transferencia del motor se puede sintonizar el controlador PI, recordando la expresión matemática del controlador PI es de la forma

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

donde  $K_p$  es el coeficiente proporcional, y  $K_i$  es el coeficiente integral. Al desarrollar se obtiene

$$C(s) = \frac{K_p s + K_i}{s}$$

$$c(s) = K_p \frac{s + K_i/K_p}{s}$$

Se observa que el controlador tiene la forma de

$$C'(s) = \frac{s + C}{s}$$

donde  $k$  es el factor de ganancia.

El motor es un sistema de 5° orden de la forma

$$H(s) = \frac{xs^3 + ys^2 + zs + m}{s^5 + as^4 + bs^3 + cs^2 + ds + e}$$

en donde  $x, y, z, m, a, b, c, d, e$  son los coeficientes de la función de la transferencia del motor.

Se obtiene la ecuación de lazo abierto

$$L'(s) = C' H(s)$$

$$= \frac{kxs^4 + (ky + kCx)s^3 + (kz + kCy)s^2 + (mk + kCz)s + kCm}{s^6 + as^5 + bs^4 + cs^3 + ds^2 + es}$$

y en lazo cerrado

$$= \frac{kxs^4 + (ky + kCx)s^3 + (kz + kCy)s^2 + (mk + kCz)s + kCm}{s^6 + as^5 + (b + kx)s^4 + (c + ky + kCx)s^3 + (d + kz + kCy)s^2 + (e + mk + kCz)s + kCm}$$

La sintonización del PI se puede realizar por el método del lugar geométrico de las raíces, de forma que se obtengan el máximo sobretiro y tiempo de establecimiento requerido. El propósito de este método es observar la trayectoria de los polos cerrados conforme la variación de los valores de  $k$  y  $C$ . Una vez que se logran mover los polos dominantes hasta tener la respuesta transitoria deseada la sintonización se completa.

Una vez sintonizado el PI, los valores de  $K_p$  y  $K_i$  son

$$K_p = K$$

$$K_i = K_p C$$

Estos valores se emplean en el esquema de lazo cerrado de velocidad.

Con esta sintonización se puede realizar el esquema de lazo cerrado de velocidad.

### Referencias

- Cowie, Charles J. (2001). Adjustable Frequency Drive Application Training. Powerpoint presentation. Excerpts donated to Wikipedia by the author.
- Phipps, Clarence A. (1997). Variable Speed Drive Fundamentals. The Fairmont Press, Inc. ISBN 0-88173-258-3.

- Spitzer, David W. (1990). Variable Speed Drives. Instrument Society of America. ISBN 1-55617-242-7.
- Campbell, Sylvester J. (1987). Solid-State AC Motor Controls. New York: Marcel Dekker, Inc.. ISBN 0-8247-7728-X.
- Jaeschke, Ralph L. (1978). Controlling Power Transmission Systems. Cleveland, OH: Penton/IPC.
- Siskind, Charles S. (1963). Electrical Control Systems in Industry. New York: McGraw-Hill, Inc.. ISBN 0-07-057746-3.

## Índice analítico

- Álgebra matricial, 573
- Ángulo de paso, 95
- Ángulo de potencia, 479
- Ángulo de secuencia de fases, 181
- Índice horario, 274
  
- Accionamiento eléctrico, 611
- Aceites dieléctricos minerales, 196
- Aisladores pasa-tapas, 196
- Aislamiento clase 200, 318
- Aislamiento clase 220, 318
- Aislamiento clase 250, 318
- Aislamiento clase A, 317
- Aislamiento clase B, 317
- Aislamiento clase E, 317
- Aislamiento clase F, 317
- Aislamiento clase H, 317
- Aletas, 224
- Amplificado operacional, 595
- Análisis del desempeño del PWM banda de histéresis, 676
- Ancho de banda, 591
- Andre Blondel, 476
- Aproximación de una curva, 543
- Armónicos en un motor de inducción, 634
- Arranque, 509
- Autotransformador, 199
- Autotransformadores, 151, 281, 312
  
- Balanceo, 508
- Balum, 198
- Bancos de transformadores monofásicos, 257
- Bancos de transformadores trifásicos, 191
- Banda de histéresis, 670
  
- Base Tranceiver Station, 41
- Bastidores de apoyo, 224
- Blaschke, 651
- Bobina de paso diametral, 417
- Bobinado, 507
- Bobinas, 65, 195
- Bobinas de paso fraccionario, 418
- Bobinas del rotor, 416
- Bobinas secundarias, 179
- Bus infinito, 402
  
- Cálculo de Watt, 59
- Cálculo del factor de distribución, 418
- Cálculo del vector unitario, 669
- Células de combustible, 58
- Calentamiento, 319
- Calentamiento óhmico, 78
- Camino de flujo, 138
- Campo magnético, 40
- Campo magnético rotatorio trifásico, 364
- Campo rotatorio, 74
- Característica decreciente no-lineal, 564
- Característica lineal, 564
- Característica no dependiente de la velocidad, 564
- Característica parabólica, 564
- Característica rígida, 565
- Característica semi-rígida, 565
- Característica suave, 565
- Carcaza, 506
- Ciclos límite, 674
- Circuito equivalente aproximado, 370
- Circuito equivalente de la máquina síncrona, 399
- Circuito magnético de un transformador, 222
- Circuito magnético, 9

- Circuitos magnéticos, 79  
 Cojinetes de deslizamiento, 507  
 Cojinetes de rodamiento, 506  
 Conductores de sección rectangular, 223  
 Conexión a una red trifásica, 402  
 Conexión bifásica de dos transformadores, 260  
 Conexión de transformadores de distribución, 225  
 Conexión Delta-Delta, 263  
 Conexión Delta-Y, 264  
 Conexión en Delta abierta, 265  
 Conexión en T, 276  
 Conexión en zig-zag, 183  
 Conexión Estrella-Estrella, 262  
 Conexión homóloga de terminales, 274  
 Conexión Y-Delta, 263  
 Conmutador, 67  
 Conmutador de voltaje, 223  
 Control de flujo, 688  
 Control de los motores de paso a paso, 96  
 Control de velocidad, 689  
 Control de velocidad en lazo cerrado, 616  
 Control de velocidad por límite de corriente, 617  
 Control del voltaje de línea, 613  
 Control directo del par, 562, 718  
 Control en cascada, 583  
 Control escalar voltaje/frecuencia, 617  
 Control vectorial, 561  
 Controlador, 673  
 Conversión electromecánica de la energía, 106  
 Convertidor estático, 587  
 Corriente de magnetización modificada, 666  
 Corrientes de Foucault, 36  
 Corrientes de Kirchhoff, 59  
 Covarianza del ruido, 701  
 Curva de histéresis, 23, 123  
 Curva de respuesta, 622  
 Curva de saturación, 425
- Deducción del circuito equivalente, 137  
 Depenbrock, 727  
 Desplazamiento angular, 182  
 Determinación de la reactancia síncrona, 400
- Devanado de armadura, 416  
 Devanados, 65  
 Devanados de la armadura, 460  
 Diagrama de bloques, 590  
 Diagrama de capacidad, 440, 480  
 Diagrama de conmutación de un controlador de histéresis, 673  
 Diagrama de potencias, 370  
 Diagrama de Potier, 471  
 Diagrama fasorial, 423, 426, 442, 511  
 Diagrama fasorial con la reactancia síncrona, 434  
 Diodo Zener, 595  
 Disco de Faraday, 60  
 Diseño de un transformador, 172  
 Dispositivos de hierro móvil, 86  
 Distorsión del flujo del estator, 735  
 Doble jaula de ardilla, 380
- Ecuaciones dinámicas del modelo del motor de inducción, 655  
 Efecto Joule, 190  
 Efecto Skin, 288  
 Eficiencia, 147  
 Electrónica de potencia, 559  
 Energía eléctrica trifásica, 174  
 Esquema de control directo del par, 727  
 Esquema de control general, 621  
 Esquema de lazo cerrado de velocidad, 641  
 Estándares de construcción, 181  
 Estabilizador de tensión, 198  
 Estator, 397, 459, 506, 537  
 Estimación de la resistencia del rotor, 680  
 Estimación del flujo rotórico, 680  
 Estructura de fijación, 223  
 Estructura del filtro, 702  
 Excitación de núcleos ferromagnéticos, 9  
 Excitatriz estática, 507  
 Excitatriz sin escobillas, 507
- F.E.M inducida, 128  
 Factor de amplitud o distribución, 419  
 Factor de fabricación, 287

- Factor de potencia, 134, 633  
Factor de potencia en adelanto, 469  
Factor de potencia en atraso, 468  
Factor de potencia igual a la unidad, 468  
Filtro de Kalman, 700  
Filtro de Kalman discreto, 702  
Filtro pasabajas, 589  
Fluido asilante, 196  
Fluidos dieléctricos ecológicos, 196  
Flujo del entrehierro, 660  
Flujo magnético, 7  
Frecuencia de paso máximo, 96  
Frecuencia del PWM, 671  
Fuentes de radiación electromagnética, 4  
Fuerza electromotriz, 438  
Función de transferencia experimental, 579
- Generador aislado, 403  
Generador compuesto, 549  
Generador eléctrico, 39  
Generador paralelo, 547  
Generador serie, 546  
Generadores de 4 polos salientes, 414  
Generadores de corriente alterna, 459  
Generadores síncronos, 413  
George Westinghouse, 118  
Gráfica de Bode, 591  
Guerra de las corrientes, 117
- Home Location Register, 42
- Implementación del control vectorial, 661  
Inducción electromagnética, 62  
Inductancia, 29  
Inductor, 31  
Interconexión de líneas eléctricas, 114  
Interruptor magnético, 39  
Inversor, 626  
Inversor fuente de voltaje, 729  
Inversor PWM senoidal, 630
- James Clerk Maxwell, 6  
Joseph Henry, 5
- Límites de potencia, 482  
Línea de error, 673  
Líneas bifásicas, 260  
La Transformada de Laplace, 576  
Lazo abierto, 561  
Lazo cerrado, 561  
Lazo cerrado de velocidad en el control directo del par, 742  
Ley de Ampère, 7  
Ley de Ampère, 68  
Ley de Biot y Savat, 59  
Ley de Biot-Savart, 103  
Ley de inducción de Faraday, 25, 59  
Ley de Lenz, 26, 37  
Ley de los circuitos magnéticos de Ampère, 59  
Ley de Ohm, 68  
Ley de voltajes de Kirchhoff, 571  
Ley fundamental de Ohm, 59  
Leyes de los voltajes, 59
- Máquina de corriente continua, 416  
Máquina síncrona, 396, 502  
Máquina síncrona cilíndrica, 438  
Máquinas de corriente alterna, 69  
Máquinas de corriente directa, 536  
Máquinas de inducción, 72  
Máquinas eléctricas, 5  
Método del potenciómetro, 130, 188  
Método del triángulo de Potier, 431  
Método directo, 130, 188  
Método indirecto de campo orientado, 664  
Métodos de control del inversor, 625  
Mallas en un circuito eléctrico, 544  
Material ferromagnético, 126  
Materiales ferromagnéticos, 21  
Materiales no magnéticos, 21  
Media Gateway, 42  
Medición de la distorsión armónica, 633  
Medición de la relación de transformación, 188  
Medición de la resistencia de los devanados, 187  
Medio de comunicación, 4  
Medio paso, 97

- Michael Faraday, 117  
 Mobil Switching Center, 41  
 Modelo de Brunsbach, 707  
 Modelo de Vasson, 708  
 Modelo dinámico del motor de inducción, 707  
 Modelo discretizado del motor, 709  
 Modelo lineal, 575  
 Momento de inercia del rotor, 96  
 Momento magnético de una espira, 539  
 Motor, 375  
 Motor bipolar, 90  
 Motor clase A, 377  
 Motor clase B, 377  
 Motor clase C, 377  
 Motor clase D, 377  
 Motor compuesto, 544  
 Motor de inducción, 73  
 Motor de magneto permanente, 93  
 Motor de paso a paso, 88  
 Motor de reluctancia variable, 92  
 Motor híbrido, 93  
 Motor paralelo, 541  
 Motor paso a paso, 56  
 Motor serie, 538  
 Motor unipolar, 90  
 Motores bipolares, 91  
 Motores de 4 polos lisos, 414  
 Motores de inducción, 380  
 Motores eléctricos, 87  
 Motores síncronos, 502  
 Motores síncronos para atmósferas explosivas, 504  
 Motores síncronos verticales, 503  
 Motores unipolares, 90  
  
 Núcleo, 195  
 Núcleo tipo columna, 195  
 Núcleo tipo enrollado, 195  
 Núcleos de ferrita, 32  
 Núcleos de hierro, 32  
 Nemas, 377  
 Nodos en un circuito eléctrico, 544  
  
 Observador, 696  
 Observador lineal, 598  
 Onda electromagnética, 4  
 Operación a frecuencia, 616  
 Operación con carga capacitiva, 430  
 Operación con carga inductiva, 430  
 Operación voltaje/frecuencia en diferentes zonas de operación, 624  
  
 Pérdida de la carga, 190  
 Pérdidas en vacío, 286  
 Pérdidas por armónicos en el motor de inducción, 635  
 Pérdidas por efecto Joule, 288  
 Par de detención, 95  
 Par de mantenimiento, de detención y dinámico, 96  
 Par diámico de trabajo, 95  
 Para de mantenimiento, 95  
 Permeabilidad, 21  
 Plano complejo, 593  
 Polaridad, 134, 255  
 Polaridad aditiva, 179  
 Polaridad sustractiva, 179  
 Polos magnéticos, 64, 362  
 Potencia, 121  
 Potencia de salida, 121  
 Potencia eléctrica, 540  
 Potencia mecánica, 540  
 Potencia y par, 403  
 Principio de la conservación de la energía, 77  
 Principio de operación del motor síncrono, 504  
 Principio del control directo del par, 726  
 Prueba de circuito abierto, 400, 462  
 Prueba de corto circuito, 401  
 Prueba de cortocircuito, 133, 190, 464  
 Prueba de resistencia, 462  
 Prueba de vacío, 188  
  
 Ratio Network Controller, 41  
 Reacción electroquímica, 58  
 Reactancia, 400  
 Reactancia de fuga, 140



- Reactancia de magnetización, 139  
Reactancia síncrona, 427  
Reactancia síncrona no saturada, 401  
Reactancia síncrona saturada, 401  
Red de servicios integrados, 41  
Red de telefonía fija, 41  
Redes neuronales artificiales, 710  
Regla de la mano derecha, 8, 28  
Regla de la mano izquierda, 28  
Regla de Montsingner, 317  
Regulación, 144  
Relación de corriente, 120  
Relación de cortocircuito, 427  
Relación de transformación, 130  
Relación de transformación nominal, 310  
Relaciones de Fleming, 61  
Resistencias de los devanados, 142  
Rotor, 56, 397, 460, 506, 537  
Rotor de anillos deslizantes, 360  
Rotor de devanado, 74  
Rotor de un generador síncrono, 413  
Rotor jaula de ardilla, 360
- Sectores variables de conmutación, 735  
Secuencia de fases, 274  
Secuencia del circuito de control, 96  
Serie de Fourier, 629  
Sintonización del PI, 746  
Sistema de aislamiento, 507  
Sistema de corriente continua, 117  
Sistema de excitación, 415  
Sistema móvil celular, 40  
Sistemas de regulación de voltaje, 442  
Sistemas digitales, 560  
SOFC, 58  
Steve Visco, 58
- Takahashi, 727  
Tanque, 196  
Teléfono, 4  
Telefonía móvil, 5  
Tensiones de secuencia positiva, 181
- Teorema de Thevenin, 185  
The National Electric Code, 315  
Tiristor, 613  
Topología básica, 626  
Transformación de impedancia, 121  
Transformación inversa de coordenadas, 669  
Transformador, 114, 120, 309  
Transformador con diodo dividido, 198  
Transformador de aislamiento, 197  
Transformador de corriente TT/cc, 313  
Transformador de distribución, 221  
Transformador de frecuencia variable, 199  
Transformador de grano orientado, 199  
Transformador de impedancia, 198  
Transformador de línea, 198  
Transformador de medida, 199  
Transformador de núcleo de aire, 199  
Transformador de núcleo envolvente, 199  
Transformador de potencia, 308  
Transformador de pulso, 198  
Transformador diferencial de variación lineal, 198  
Transformador eléctrico, 198  
Transformador elevador / reductor de voltaje, 197  
Transformador monofásico, 173  
Transformador para montaje sobre postes, 312  
Transformador piezo-eléctrico, 199  
Transformador real, 123  
Transformador toroidal, 199  
Transformador trifásico, 174, 197  
Transformadores autoprotegidos, 312  
Transformadores de alimentación, 197  
Transformadores de clase 2, 315  
Transformadores de control, 315  
Transformadores de corriente constante, 313  
Transformadores de distribución, 311  
Transformadores de distribución trifásica, 193  
Transformadores de energía, 314  
Transformadores de etapas intermedias, 314  
Transformadores de frecuencia de audio, 314  
Transformadores de impulso, 117  
Transformadores de núcleos de aire, 115  
Transformadores de potencia, 119

- Transformadores de puesta a tierra, 313  
Transformadores de pulsos, 119  
Transformadores de radiofrecuencia, 314  
Transformadores de salida, 314  
Transformadores especiales, 315  
Transformadores móviles, 313  
Transformadores para aplicaciones de audio, 119  
Transformadores para ensayos, 316  
Transformadores para hornos, 313  
Transformadores para ignición, 316  
Transformadores para instrumentos, 117  
Transformadores para juguetes, 316  
Transformadores para máquinas-herramientas, 315  
Transformadores para radio, 314  
Transformadores para rectificadores, 315  
Transformadores para señalización, 315  
Transformadores para tubos luminiscentes, 316  
Transformadores rurales, 312  
Transformadores secos encapsulados en resina epoxy,  
311  
Transformadores subterráneos, 312  
Transporte de energía eléctrica, 114  
Triángulo de Potier, 475
- Valor THD, 633  
Variables de estado, 569  
Variador hidrodinámico, 721  
Variador hidrostático, 721  
Variador hidroviscoso, 721  
Variadores de deslizamiento, 723  
Variadores de paso ajustable, 721  
Variadores de tracción, 721  
Variadores de velocidad, 718  
Variadores para motores de c.d., 722  
Variadores para motores de CA, 723  
Variadores por corrientes de Eddy, 723  
Vector de corriente del estator, 654  
Vector de corriente magnetizante, 653  
Vector rotatorio, 654  
Velocidad síncrona, 420  
Voltaje de corriente alterna, 66  
Voltaje de línea y fase, 378