

# Álgebra elemental

Sexta edición



PEARSON  
Prentice  
Hall®

Allen R.

**ANGEL**

# Capítulo 1 Números reales

## Fracciones

### Suma

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$$

### Resta

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}$$

### Multiplicación

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

### División

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

**Números naturales** {1, 2, 3, 4, ...}

**Números completos** {0, 1, 2, 3, ...}

**Enteros** {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}

**Números racionales** {cociente de dos enteros, denominador distinto de 0}

La suma de dos números positivos será un número positivo.

La suma de dos números negativos será un número negativo.

La suma de un número positivo y uno negativo puede resultar en un número positivo o negativo.

El producto (o cociente) de dos números con signos iguales será un número positivo.

El producto (o cociente) de dos números con signos diferentes será un número negativo.

$a - b$  significa  $a + (-b)$

$$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$$

$$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdots b}_n$$

$n$  factores de  $b$

## Orden de las operaciones

1. Evaluar las expresiones dentro de los paréntesis.
2. Evaluar las expresiones con exponentes.
3. Evaluar todas las multiplicaciones o divisiones en el orden en que suceden de izquierda a derecha.
4. Evaluar todas las adiciones o sustracciones en el orden en que aparecen, de izquierda a derecha.

## Propiedades de los números reales

**Conmutativa:**  $a + b = b + a$ ,  $a \cdot b = b \cdot a$

**Asociativa:**  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ,  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

**Distributiva:**  $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

**Identidad:**  $a + 0 = 0 + a = a$ ,  $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

**Inverso:**  $a + (-a) = -a + a = 0$ ,  $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

# Capítulo 2 Solución de ecuaciones y desigualdades lineales

**Propiedad de igualdad de la suma:** Si  $a = b$ , entonces  $a + c = b + c$ , para cualesquiera números reales  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

**Propiedad de igualdad de la multiplicación:** Si  $a = b$ , entonces  $a \cdot c = b \cdot c$ , para cualesquiera números reales  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

**Ecuación lineal:**  $ax + b = c$ , para números reales  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

## Para resolver ecuaciones lineales con la variable en ambos lados del signo de igualdad

1. Si la ecuación contiene fracciones, se multiplican ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador (mcd).
2. Aplicar la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis.
3. Reducir los términos semejantes en el mismo lado del signo de igualdad.
4. Utilizar la propiedad de la suma para reescribir la ecuación con todos los términos que contienen a la variable en un lado del signo de igualdad, y todos los que no la contienen en el otro lado de dicho signo. El uso repetido de la propiedad de la

suma eventualmente dará como resultado una ecuación de la forma  $ax = b$ .

5. Emplear la propiedad de la multiplicación para despejar la variable. Esto dará una solución de la forma  $x = \text{algún número}$ .
6. Comprobar la solución, en la ecuación original.

**Multiplicación cruzada:** Si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  entonces  $ad = bc$

## Desigualdades

Si  $a > b$  entonces  $a + c > b + c$ .

Si  $a > b$  entonces  $a - c > b - c$ .

Si  $a > b$  y  $c > 0$  entonces  $ac > bc$ .

Si  $a > b$  y  $c > 0$  entonces  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ .

Si  $a > b$  y  $c < 0$  entonces  $ac < bc$ .

Si  $a > b$  y  $c < 0$  entonces  $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ .

# Capítulo 3 Fórmulas y aplicaciones del álgebra

## Procedimiento para resolver problemas de aplicación

### 1. Entender el problema.

Identificar la cantidad o cantidades que se pide encontrar.

### 2. Traducir el problema a lenguaje matemático (expresar el problema como una ecuación).

a) Escoger una variable que represente una cantidad, y *escribir lo que representa*. Representar cualquier otra cantidad por calcular en términos de esta variable.

b) Utilizar la información del inciso a) para escribir una ecuación que represente la aplicación.

3. Efectuar los cálculos matemáticos (resolver la ecuación).

4. Comprobar la respuesta (con el empleo de la ecuación original).

5. Responder la pregunta que se planteó.

**Fórmula del interés simple:**  $i = prt$

**Fórmula de la distancia:**  $d = rt$

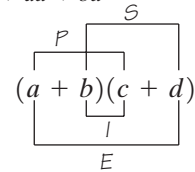
**Fórmulas geométricas:** véase la sección 3.1 y el apéndice C.

## Capítulo 4 Exponentes y polinomios

### Reglas de los exponentes

- $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$  **regla del producto**
- $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, x \neq 0$  **regla del cociente**
- $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$  **regla de las potencias**
- $x^0 = 1, x \neq 0$  **regla del exponente cero**
- $x^{-m} = \frac{1}{x^m}, x \neq 0$  **regla del exponente negativo**
- $\left(\frac{ax}{by}\right)^m = \frac{a^m x^m}{b^m y^m}, b \neq 0, y \neq 0$  **regla de la potencia expandida**
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m, a \neq 0, b \neq 0$  **regla de una fracción elevada a un exponente negativo**

**Método PIES** (Primeros, Internos, Externos, Segundos) para multiplicar binomios:  $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$



**Producto de la suma y resta de dos términos iguales:**  
 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

**Cuadrado de un binomio:**  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$   
 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

## Capítulo 5 Factorización

Si  $a \cdot b = c$ , entonces  $a$  y  $b$  son **factores** de  $c$ .

**Diferencia de cuadrados:**  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

**Suma de dos cubos:**  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

**Diferencia de dos cubos:**  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

### Procedimiento general para factorizar un polinomio

- Si todos los términos del polinomio tienen un máximo común denominador distinto de 1, factorícelo.
- Si el polinomio tiene dos términos (o es un binomio), determine si se trata de una diferencia de cuadrados o una suma o resta de dos cubos. En cada caso, factorícelo por medio de la fórmula apropiada.
- Si el polinomio tiene tres términos, factorice el trinomio con los métodos que estudió en las secciones 5.3 y 5.4.
- Si el polinomio tiene más de tres términos, intente factorizarlo por agrupamiento.

- Como paso final, estudie el polinomio que factorizó para determinar si los términos de cualesquiera factores tienen algún factor común. Si encuentra alguno, factorícelo en este punto.

**Ecuación cuadrática:**  $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ .

**Propiedad del factor cero:** Si  $ab = 0$ , entonces  $a = 0$  o  $b = 0$ .

### Para resolver una ecuación cuadrática por factorización

- Escribimos la ecuación en forma estándar con el término cuadrático con coeficiente positivo. Esto dará como resultado que un lado de la ecuación sea 0.
- Factorizamos el lado de la ecuación que no es igual a 0.
- Igualamos a 0 cada uno de los factores que *contiene la variable* y resolvemos cada ecuación.
- Comprobamos cada solución encontrada en el paso 3 en la ecuación original.

**Teorema de Pitágoras**  $a^2 + b^2 = c^2$

## Capítulo 6 Expresiones y ecuaciones racionales

### Para simplificar expresiones racionales

- Factorice el numerador y el denominador tanto como sea posible.
- Divida el denominador y el numerador entre los factores comunes.

### Para multiplicar expresiones racionales

- Factorice por completo todos los numeradores y los denominadores.
- Divida entre los factores comunes.
- Multiplique los numeradores por los numeradores y los denominadores por los denominadores.

### Para sumar o restar dos expresiones racionales

- Determine el mínimo común denominador (mcd).
- Reescriba cada fracción como una fracción equivalente con el mcd.
- Sume o reste los numeradores y conserve el mcd.

- Quando sea posible, factorice el numerador que queda y simplifique la fracción.

### Para resolver ecuaciones racionales

- Determine el mcd de todas las fracciones en la ecuación.
- Multiplique ambos lados de la ecuación por el mcd. Esto hará que cada término en la ecuación se multiplique por el mcd.
- Elimine los paréntesis y reduzca términos semejantes en cada lado de la ecuación.
- Resuelva la ecuación.
- Compruebe su solución en la ecuación original.

### Variación

**Variación directa:**  $y = kx$

**Variación inversa:**  $y = \frac{k}{x}$

## Capítulo 7 Graficación de ecuaciones lineales

**Ecuación lineal con dos variables:**  $ax + by = c$

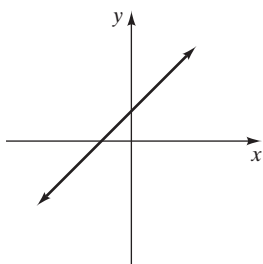
Una **gráfica** es una ilustración de un conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación.

Toda **ecuación lineal** de la forma  $ax + by = c$ , al graficarla, será una recta.

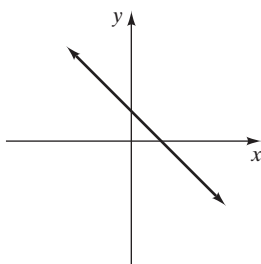
**Para determinar la intersección y** (en donde la gráfica cruza al eje y) haga  $x = 0$  y despeje a  $y$ .

**Para determinar la intersección x** (en donde la gráfica cruza al eje x) haga  $y = 0$  y despeje a  $x$ .

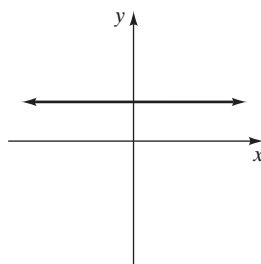
$$\text{pendiente } (m) = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



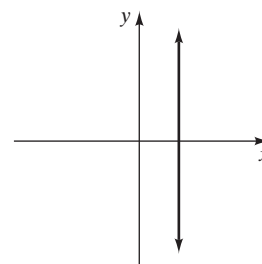
Pendiente positiva  
(asciende hacia la derecha)



Pendiente negativa  
(desciende hacia la derecha)



La pendiente es cero  
(recta horizontal)



La pendiente está indefinida  
(recta vertical)

### Ecuaciones lineales

**Forma estándar de una ecuación lineal:**  $ax + by = c$

**Forma pendiente ordenada al origen de una ecuación lineal:**  $y = mx + b$ , donde  $m$  es la pendiente y  $(0, b)$  es la intersección y (ordenada al origen).

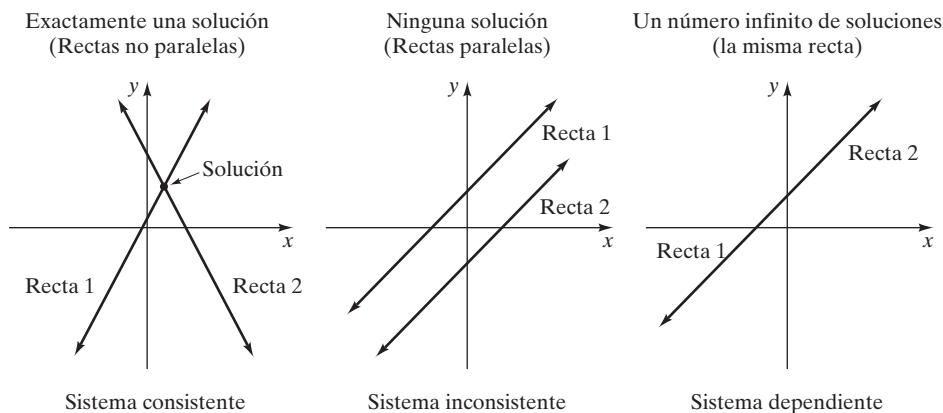
**Forma punto-pendiente de una ecuación lineal:**  $y - y_1 = m(x - x_1)$ , donde  $m$  es la pendiente y  $(x_1, y_1)$  es un punto de la recta.

Una **relación** es cualquier conjunto de pares ordenados.

Una **función** es un conjunto de pares ordenados, en el que cada primer componente corresponde exactamente con un segundo componente.

## Capítulo 8 Sistemas de ecuaciones lineales

La **solución** para un sistema de ecuaciones lineales es el par o pares ordenados que satisface todas las ecuaciones del sistema. Un sistema de ecuaciones lineales puede no tener solución, tener exactamente una solución o bien un número infinito de soluciones.



Un sistema de ecuaciones lineales puede resolverse de forma gráfica, o de forma algebraica por medio del método de sustitución o mediante el método de suma (o eliminación).



## Capítulo 9 Raíces y radicales

### Reglas de los radicales

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}, a \geq 0, b \geq 0$$

$$\sqrt{a^2} = a, a \geq 0$$

$$\sqrt{a^{2n}} = a^n, a \geq 0$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}, a \geq 0$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{m/n}, a \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, a \geq 0, b > 0$$

### Una raíz cuadrada está simplificada cuando

1. Ningún radicando tiene un factor que sea un cuadrado perfecto.
2. Ningún radicando tiene una fracción.
3. Ningún denominador tiene una raíz cuadrada.

### Para resolver ecuaciones radicales

1. Utilice las propiedades adecuadas para reescribir la ecuación dejando al término con la raíz cuadrada en un solo lado de la ecuación.
2. Reduzca términos semejantes.
3. Eleve al cuadrado ambos lados de la ecuación para eliminar la raíz cuadrada.
4. Despeje la variable de la ecuación.
5. Compruebe la solución en la ecuación original para descartar las raíces extrañas.

**Fórmula de la distancia:**  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

## Capítulo 10 Ecuaciones cuadráticas

**Forma estándar de una ecuación cuadrática:**  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$

Una ecuación cuadrática puede resolverse mediante factorización, completando el cuadrado o bien utilizando la fórmula cuadrática.

**Propiedad de la raíz cuadrada:** Si  $x^2 = a$ , entonces  $x = \sqrt{a}$  o  $x = -\sqrt{a}$  (o  $x = \pm\sqrt{a}$ )

**Fórmula cuadrática:**  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

**Discriminante:**  $b^2 - 4ac$

Si  $b^2 - 4ac > 0$ , entonces la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales y distintas.

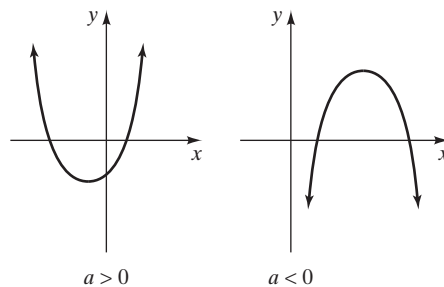
Si  $b^2 - 4ac = 0$ , entonces la ecuación cuadrática tiene una solución real.

Si  $b^2 - 4ac < 0$ , entonces la ecuación cuadrática no tiene soluciones reales.

La gráfica de  $y = ax^2 + bx + c$  será una parábola con vértice en  $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ , que abre hacia arriba cuando  $a > 0$  y hacia abajo cuando  $a < 0$ . El **eje de simetría** de una parábola es

$$x = -\frac{b}{2a}$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

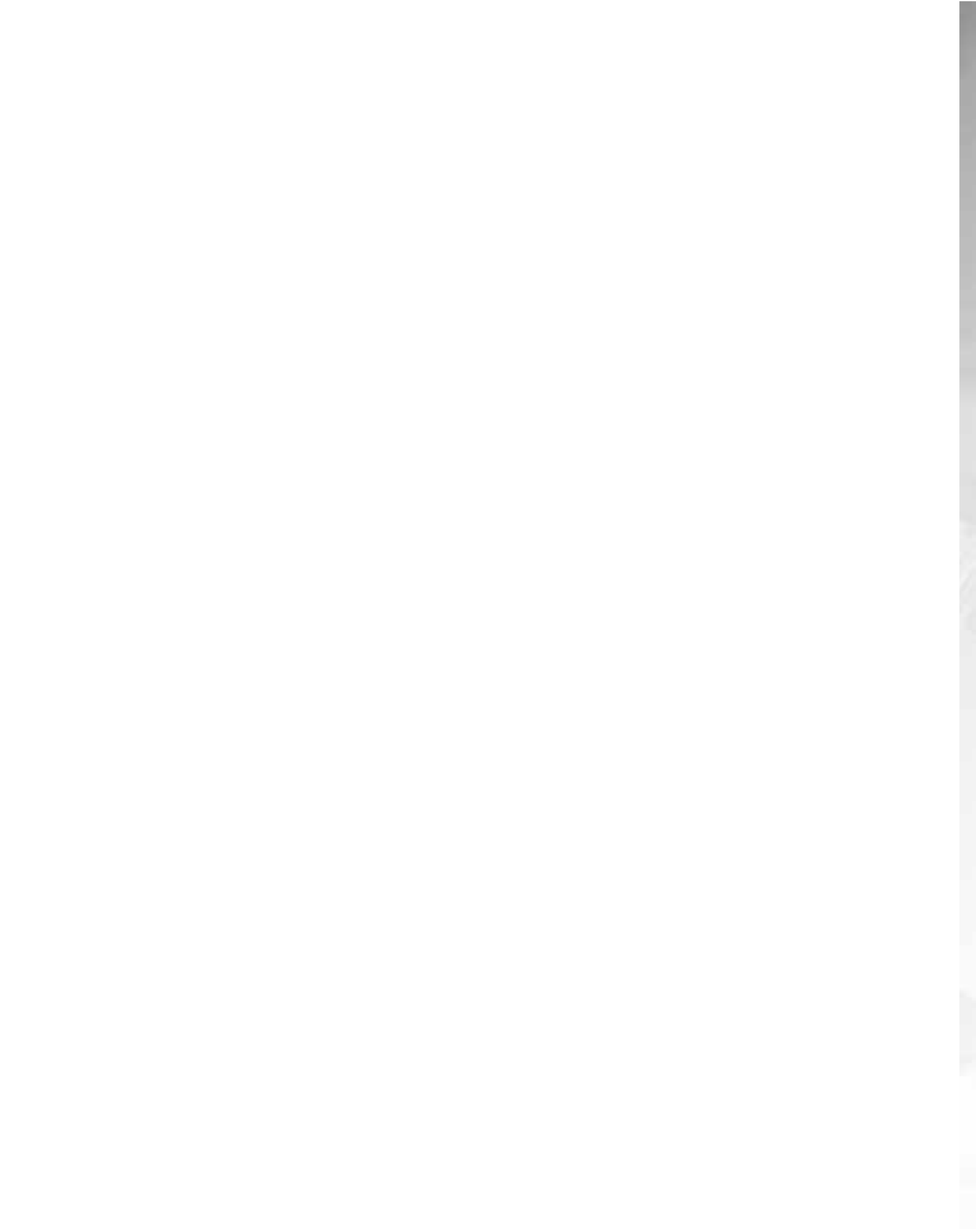


### Números complejos

$$i = \sqrt{-1}$$

$$\sqrt{-n} = i\sqrt{n}, n > 0$$

**Números complejos:**  $a + bi$



# Álgebra elemental

Sexta edición

Allen R. Angel

Monroe Community College

con la colaboración de

**Richard Semmler**

Northern Virginia  
Community College

**Donna R. Petrie**

Monroe Community  
College

**Traducción:**

**Víctor Hugo Ibarra Mercado**

*Escuela de Actuaría Universidad Anáhuac  
ESFM-IPN*

**Javier Enríquez Brito**

*Facultad de Ingeniería,  
Universidad Nacional Autónoma de México*

**Revisión técnica:**

**Ing. Juan de Santiago Castillo**

*Director del Departamento de Ciencias y Matemáticas  
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey,  
campus San Luis Potosí*



México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador  
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

ANGEL, R., ALLEN

Álgebra elemental  
Sexta edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2007

ISBN: 978-970-26-0775-5

Área: Bachillerato

Formato: 20 × 25.5 cm

Páginas: 736

Authorized translation from the English language edition, entitled *Elementary algebra for college students*, by *Allen R. Angel*, with assistance from Donna R. Petrie and Richard Semmler, published by Pearson Education, Inc., publishing as PRENTICE HALL, INC., Copyright © 2004. All rights reserved.

ISBN 0-13-140023-1

Traducción autorizada de la edición en idioma inglés, titulada *Elementary algebra for college students*, por *Allen R. Angel*, con la colaboración de Donna R. Petrie y Richard Semmler, publicada por Pearson Education, Inc., publicada como PRENTICE-HALL INC., Copyright © 2004. Todos los derechos reservados.

Esta edición en español es la única autorizada.

**Edición en español**

Editor: Enrique Quintanar Duarte

e-mail: enrique.quintanar@pearsoned.com

Editor de desarrollo: Miguel B. Gutiérrez Hernández

Supervisor de producción: Rodrigo Romero Villalobos

**Edición en inglés:**

Senior Acquisitions Editor: Paul Murphy

Editor in Chief: Christine Hoag

Project Manager: Ann Heath

Media Project Manager, Developmental Math: Audra J. Walsh

Vice President/Director of Production and Manufacturing:

David W. Riccardi

Executive Managing Editor: Kathleen Schiaparelli

Senior Managing Editor: Linda Mihatov Behrens

Production Editor: Elm Street Publishing Services, Inc.

Production Assistant: Nancy Bauer

Assistant Managing Editor, Math Media Production:

John Matthews

Manufacturing Buyer: Michael Bell

Manufacturing Manager: Trudy Piscioti

Executive Marketing Manager: Eilish Collins Main

Marketing Assistant: Annett Uebel

Development Editor: Don Gecewicz

Supplements Coordinator: Liz Covello

Editor in Chief, Development: Carol Trueheart

Editorial Assistant/Supplements Editor: Kerri-Ann O'Donnell

Art Director/Cover Designer: John Christiana

Interior Designer: Jonathan Boylan

Art Editor: Thomas Benfatti

Creative Director: Carole Anson

Director of Creative Services: Paul Belfanti

Director, Image Resource Center: Melinda Reo

Manager, Rights and Permissions: Zina Arabia

Interior Image Specialist: Beth Brenzel

Cover Image Specialist: Karen Sanatar

Image Coordinator: Charles Morris

Photo Researcher: Sheila Norman

Cover Photo: © Galen Rowell/CORBIS

Art Studio: Scientific Illustrators

Compositor: Preparé, Inc.

**SEXTA EDICIÓN 2007**

D.R. © 2007 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Atacomulco 500, 5° piso

Col. Industrial Atoto

53519 Naucalpan de Juárez, Edo. de México

E-mail: editorial.universidades@pearsoned.com

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031

Prentice Hall es una marca registrada de Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.



ISBN 10:970-26-0775-2

ISBN 13:978-970-26-0775-5

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 09 08 07

A mi esposa, Kathy  
y a mis hijos, Robert y Steven





# Contenido

---

Prefacio

xi

Al estudiante

xxii

## 1 Números reales

1



<b>1.1</b>	Habilidades de estudio para tener éxito en matemáticas	<b>2</b>
<b>1.2</b>	Solución de problemas	<b>8</b>
<b>1.3</b>	Fracciones	<b>20</b>
<b>1.4</b>	El sistema de números reales	<b>31</b>
<b>1.5</b>	Desigualdades	<b>37</b>
<b>1.6</b>	Suma de números reales	<b>42</b>
<b>1.7</b>	Resta de números reales	<b>52</b>
<b>1.8</b>	Multiplicación y división de números reales	<b>62</b>
<b>1.9</b>	Exponentes, paréntesis y orden de las operaciones	<b>71</b>
<b>1.10</b>	Propiedades del sistema de números reales	<b>83</b>
	Resumen del capítulo	<b>91</b>
	Ejercicios de repaso del capítulo	<b>92</b>
	Examen de práctica del capítulo	<b>95</b>

## 2 Solución de ecuaciones y desigualdades lineales

97



<b>2.1</b>	Reducción de términos semejantes	<b>98</b>
<b>2.2</b>	La propiedad de igualdad de la suma	<b>107</b>
<b>2.3</b>	La propiedad de igualdad de la multiplicación	<b>116</b>
<b>2.4</b>	Solución de ecuaciones lineales con una variable en un solo lado de la ecuación	<b>123</b>
<b>2.5</b>	Solución de ecuaciones lineales con la variable en ambos lados de la ecuación	<b>133</b>
<b>2.6</b>	Razones y proporciones	<b>143</b>
<b>2.7</b>	Desigualdades en una variable	<b>158</b>
	Resumen del capítulo	<b>165</b>
	Ejercicios de repaso del capítulo	<b>166</b>
	Examen de práctica del capítulo	<b>168</b>
	Examen de repaso acumulativo	<b>169</b>

### 3 Fórmulas y aplicaciones del álgebra 170



<b>3.1</b>	Fórmulas	<b>171</b>	
<b>3.2</b>	Conversión de problemas de aplicación en ecuaciones		<b>185</b>
<b>3.3</b>	Solución de problemas de aplicación	<b>199</b>	
<b>3.4</b>	Problemas geométricos	<b>212</b>	
<b>3.5</b>	Problemas de movimiento, dinero y mezclas		<b>218</b>
	Resumen del capítulo	<b>234</b>	
	Ejercicios de repaso del capítulo		<b>235</b>
	Examen de práctica del capítulo		<b>237</b>
	Examen de repaso acumulativo		<b>239</b>

### 4 Exponentes y polinomios 241



<b>4.1</b>	Exponentes	<b>242</b>	
<b>4.2</b>	Exponentes negativos	<b>252</b>	
<b>4.3</b>	Notación científica	<b>260</b>	
<b>4.4</b>	Suma y resta de polinomios	<b>272</b>	
<b>4.5</b>	Multiplicación de polinomios	<b>280</b>	
<b>4.6</b>	División de polinomios	<b>290</b>	
	Resumen del capítulo	<b>297</b>	
	Ejercicios de repaso del capítulo		<b>298</b>
	Examen de práctica del capítulo		<b>300</b>
	Examen de repaso acumulativo		<b>301</b>

### 5 Factorización 302



<b>5.1</b>	Factorización de un monomio a partir de un polinomio		<b>303</b>
<b>5.2</b>	Factorización por agrupamiento	<b>310</b>	
<b>5.3</b>	Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ , $a = 1$	<b>316</b>	
<b>5.4</b>	Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ , $a \neq 1$	<b>325</b>	
<b>5.5</b>	Fórmulas de factorización especial y repaso general de la factorización	<b>338</b>	
<b>5.6</b>	Solución de ecuaciones cuadráticas mediante factorización	<b>346</b>	
<b>5.7</b>	Aplicaciones de las ecuaciones cuadráticas		<b>352</b>
	Resumen del capítulo	<b>361</b>	
	Ejercicios de repaso del capítulo		<b>362</b>
	Examen de práctica del capítulo		<b>364</b>
	Examen de repaso acumulativo		<b>364</b>

## 6 Expresiones racionales y ecuaciones 366



- 6.1** Simplificación de expresiones racionales **367**
- 6.2** Multiplicación y división de expresiones racionales **375**
- 6.3** Suma y resta de expresiones racionales con denominador común y determinación del mínimo común denominador **382**
- 6.4** Suma y resta de expresiones racionales **390**
- 6.5** Fracciones complejas **399**
- 6.6** Solución de ecuaciones racionales **404**
- 6.7** Ecuaciones racionales: aplicaciones y solución de problemas **413**
- 6.8** Variación **426**
- Resumen del capítulo **433**
- Ejercicios de repaso del capítulo **434**
- Examen de práctica del capítulo **436**
- Examen de repaso acumulativo **437**

## 7 Graficación de ecuaciones lineales 439



- 7.1** Sistema de coordenadas cartesianas y ecuaciones lineales con dos variables **440**
- 7.2** Graficación de ecuaciones lineales **450**
- 7.3** Pendiente de una recta **462**
- 7.4** Formas pendiente-ordenada al origen y punto-pendiente de una ecuación lineal **474**
- 7.5** Graficación de desigualdades lineales **487**
- 7.6** Funciones **490**
- Resumen del capítulo **501**
- Ejercicios de repaso del capítulo **502**
- Examen de práctica del capítulo **505**
- Examen de repaso acumulativo **506**

## 8 Sistemas de ecuaciones lineales 508



- 8.1** Solución gráfica de sistemas de ecuaciones **509**
- 8.2** Solución de sistemas de ecuaciones por el método de sustitución **520**
- 8.3** Solución de sistemas de ecuaciones por el método de suma y resta (reducción o eliminación) **526**
- 8.4** Sistemas de ecuaciones: aplicación y solución de problemas **535**
- 8.5** Solución de sistemas de desigualdades lineales **548**
- Resumen del capítulo **551**
- Ejercicios de repaso del capítulo **551**
- Examen de práctica del capítulo **553**
- Examen de repaso acumulativo **554**

## 9 Raíces y radicales 556



<b>9.1</b>	Evaluación de raíces cuadradas	<b>557</b>
<b>9.2</b>	Simplificación de raíces cuadradas	<b>565</b>
<b>9.3</b>	Suma, resta y multiplicación de raíces cuadradas	<b>571</b>
<b>9.4</b>	División de raíces cuadradas	<b>577</b>
<b>9.5</b>	Solución de ecuaciones con radicales	<b>586</b>
<b>9.6</b>	Radicales: Aplicaciones y solución de problemas	<b>593</b>
<b>9.7</b>	Raíces de orden superior y exponentes racionales	<b>601</b>
	Resumen del capítulo	<b>609</b>
	Ejercicios de repaso del capítulo	<b>609</b>
	Examen de práctica del capítulo	<b>612</b>
	Examen de repaso acumulativo	<b>612</b>

## 10 Ecuaciones cuadráticas 614



<b>10.1</b>	La propiedad de la raíz cuadrada	<b>615</b>
<b>10.2</b>	Solución de ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado	<b>620</b>
<b>10.3</b>	Solución de ecuaciones cuadráticas por medio de la fórmula cuadrática (fórmula general)	<b>627</b>
<b>10.4</b>	Graficación de ecuaciones cuadráticas	<b>639</b>
<b>10.5</b>	Números complejos	<b>649</b>
	Resumen del capítulo	<b>653</b>
	Ejercicios de repaso del capítulo	<b>654</b>
	Examen de práctica del capítulo	<b>656</b>
	Examen de repaso acumulativo	<b>656</b>

### Apéndices

A	Repaso de decimales y porcentajes	<b>658</b>
B	Determinación del máximo común divisor (MCD) y del mínimo común denominador (mcd)	<b>661</b>
C	Geometría	<b>663</b>

**Respuestas** **R1**

**Índice** **I1**

**Créditos de fotos** **C1**

# Prefacio

---

**E**l objetivo principal de este libro es ofrecer una obra que los estudiantes puedan leer, entender y disfrutar. Para lograrlo hemos utilizado oraciones cortas, explicaciones claras y muchos ejemplos resueltos con detalle. A fin de que el libro tenga más relevancia para los estudiantes, se abordan aplicaciones prácticas a lo largo de todo el texto.

## Características del libro

---

**Formato a dos colores** Los dos colores se utilizan de forma pedagógica de la siguiente manera:

- El segundo color permite que el estudiante identifique con facilidad las características importantes o variables que se vayan a modificar en los ejemplos.
- Se resaltan en cuadros las definiciones y procedimientos más importantes.
- El segundo color se utiliza para resaltar conceptos importantes, además de las definiciones y procedimientos.
- En las ilustraciones, el segundo color resalta los conceptos explicados en el texto.
- El texto es más atractivo y ameno debido a que se resaltan los títulos y subtítulos.

**Legibilidad** Una de las características más importantes del texto es que resulta muy fácil de comprender, incluso por aquellos que no son muy hábiles en la lectura. Se utilizan oraciones breves y claras, y en lo posible en un lenguaje fácil de entender y reconocer.

**Precisión** En los textos de matemáticas, la precisión es esencial; para garantizarla, matemáticos tanto de Estados Unidos como de Latinoamérica leyeron el contenido con sumo cuidado, a fin de detectar errores tipográficos y verificar todas las respuestas.

**Relaciones** Muchos estudiantes tienen problemas para dominar completamente los nuevos conceptos la primera vez que se les presentan. En este texto, se pide a los estudiantes que establezcan relaciones; esto es, se presenta un concepto, lo volvemos a mencionar

brevemente y, más adelante, proporcionamos ejemplos donde se le utiliza. Los conceptos importantes se utilizan en muchas secciones del texto. Cuando esto sucede, le recordamos al estudiante en dónde se empleó y en dónde se usará de nueva cuenta. Esto sirve para hacer hincapié en la importancia del concepto. Además, los conceptos de mayor relevancia se refuerzan a lo largo de todo el texto, especialmente en los “Ejercicios de repaso acumulativo” y en los “Exámenes de repaso acumulativo”.

**Problema de aplicación al inicio de cada capítulo** Cada capítulo inicia con un problema de la vida real, en donde se sugiere cómo aplicar en la práctica el material que se abordará en seguida. Cuando los estudiantes terminen de estudiar el capítulo, habrán adquirido los conocimientos necesarios para resolver ese problema.

**Avance de la lección** Esta sección, que encontrará al inicio de cada capítulo, proporciona un adelanto de lo que se abordará en el mismo, e indica en qué otros capítulos del libro se utilizará. Este material ayuda al estudiante a establecer relaciones entre los diferentes temas del libro, y su aplicación en situaciones reales.

**Iconos** Al inicio de cada capítulo y de cada sección aparece un icono que indica en dónde puede obtener ayuda adicional en caso de necesitarla. Este icono hace referencia al sitio Web de Allen Angel. Más adelante encontrará información adicional.

**Objetivos clave de cada sección** Cada sección inicia con una lista de las habilidades que el estudiante deberá adquirir. Los objetivos están numerados en la secuencia en que se revisarán a lo largo de la sección.

**Solución de problemas** En la sección 1.2 se analiza el procedimiento de George Polya de cinco pasos para la solución de problemas; a lo largo del libro se hace hincapié en la solución de problemas a partir de este modelo.

**Aplicaciones prácticas** En todo el texto se hace énfasis en las aplicaciones prácticas del álgebra. Los estudiantes necesitan aprender cómo traducir problemas de aplicación a símbolos algebraicos. El método de solución de problemas utilizado en este texto proporcio-



na una amplia práctica de este sentido. Las aplicaciones prácticas motivan a los estudiantes.

**Ejemplos resueltos detalladamente** A lo largo del texto se presenta la solución detallada, paso a paso, de muchos ejemplos. Los pasos más importantes en cada procedimiento de resolución aparecen resaltados y no se omite ninguno de ellos hasta que los estudiantes hayan visto un número suficiente de ejemplos similares.

**Ahora resuelva el ejercicio** En cada sección se pide resolver problemas específicos al mismo tiempo que se dan los ejemplos necesarios. Estas secciones, identificadas con la frase “Ahora resuelva el ejercicio”, pretenden que los estudiantes se vuelvan activos durante el proceso de aprendizaje. Al resolver los problemas, refuerzan los conceptos analizados, de manera que puedan aplicar de forma inmediata lo que han aprendido.

**Problemas de aplicación** Muchos de los estudiantes que toman cursos de álgebra tienen malos hábitos de estudio. En la sección 1.1, la primera del texto, analizamos los hábitos necesarios para tener éxito en matemáticas. Esta sección será de gran utilidad para estudiantes, y los ayudará a alcanzar el éxito en sus estudios.

**Sugerencia** Los recuadros de “Sugerencia” ofrecen consejos para la solución de problemas y otros temas diversos. Se han resaltado de manera especial dentro del texto para asegurar su lectura.

**Consejo para estudiar** Ésta es una nueva característica del texto, los recuadros “Consejo para estudiar” ofrecen información valiosa sobre temas relacionados con el estudio y el aprendizaje del material que se presenta.

**Cómo evitar errores comunes** En esta sección se presentan los errores que se cometen con más frecuencia, explicando las razones por las que los procedimientos son incorrectos e ilustrando el procedimiento correcto para resolver el problema.

**Matemáticas en acción** Esta nueva característica evidencia la necesidad de utilizar las matemáticas en situaciones de la vida real. En ella se proporcionan ejemplos del uso de las matemáticas en muchas profesiones, y de la forma en que las utilizamos en la vida cotidiana, a veces sin darles mucha importancia. Esto puede motivar a los estudiantes y ayudarles a apreciar mejor las matemáticas.

**Uso de la calculadora** Los recuadros de Uso de la calculadora se encuentran en lugares estratégicos dentro del texto, de manera que ayuden a reforzar los temas algebraicos que se presentan en la sección inmediata anterior, y proporcionen al estudiante información pertinente sobre el uso de calculadoras científicas para resolver problemas algebraicos.

**Uso de la calculadora graficadora** Este libro está diseñado para dar al profesor la opción de utilizar o no calculadoras graficadoras en sus cursos. Los recuadros Uso de la calculadora graficadora se encuentran en lugares estratégicos dentro del texto, de manera que ayuden a reforzar los temas algebraicos analizados en la sección inmediata anterior, ofreciendo, en ocasiones, métodos alternativos para resolver problemas. Muchos de estos recuadros contienen ejercicios para calculadoras graficadoras, cuyas soluciones aparecen en la sección de respuestas del libro. Las ilustraciones que se muestran en los recuadros corresponden a la calculadora *Texas Instruments 83 Plus (TI-8-3 Plus)*. Usted puede utilizar la calculadora graficadora o el software de matemáticas (que le permita graficar), lo que prefiera. Estos recuadros se escribieron suponiendo que el estudiante no tiene experiencia con calculadoras graficadoras.

## Conjunto de ejercicios

El Conjunto de ejercicios se divide en tres categorías principales: Ejercicios conceptuales, Problemas de aplicación y Solución de problemas. Muchos conjuntos de ejercicios también presentan Problemas de reto y/o Actividades en grupo. La dificultad de cada conjunto de ejercicios está graduada; los primeros ejercicios ayudan a desarrollar la confianza del estudiante antes de plantearle problemas más difíciles. En cada sección aparece una cantidad suficiente y variada de ejemplos para que el estudiante resuelva con éxito los problemas más difíciles. La cantidad de ejercicios de cada sección es más que suficiente para que los alumnos hagan tareas y practiquen.

**Ejercicios conceptuales** Casi todos los conjuntos de ejercicios incluyen una sección en donde se pide al estudiante responder por escrito a fin de reforzar los conceptos analizados. Estos ejercicios mejoran la comprensión del material cubierto en el texto e implican la solución de problemas para el mejoramiento de las habilidades de razonamiento y de pensamiento crítico de los alumnos. Los ejercicios conceptuales se indican mediante el símbolo  $\backslash$ .

**Solución de problemas** Estos ejercicios ayudan a acostumbrarse a la resolución y análisis de problemas. Es muy importante que los estudiantes sean capaces de aplicar en situaciones de la vida real lo que han aprendido, por lo que en esta sección se plantean muchos ejercicios de este tipo.

**Problemas de reto** Los Problemas de reto que forman parte de muchos de los conjuntos de ejercicios, propor-



cionan una amplia variedad de situaciones. Muchos de ellos se escribieron para estimular la reflexión; otros más proporcionan aplicaciones adicionales de álgebra o presentan material que se analizará en secciones posteriores, de manera que se estudien por su cuenta los temas antes de verlos en clase; en otros casos, estos problemas representan un reto mayor que los del conjunto de ejercicios general.

**Ejercicios de repaso acumulativo** Todos los conjuntos de ejercicios (salvo los dos primeros) contienen preguntas referentes a secciones y capítulos anteriores. Los ejercicios planteados en la sección Ejercicios de repaso acumulativo refuerzan los temas estudiados con anterioridad, y ayudan a retener el material ya analizado mientras se estudia el nuevo. Para beneficio de los estudiantes, los ejercicios de repaso acumulativo indican, por medio de corchetes como [3.4], la sección en donde se revisó el material.

**Actividad en grupo** Muchos conjuntos de ejercicios tienen actividades en grupo que conducen a interesantes discusiones en grupo. Algunos estudiantes aprenden mejor en un ambiente cooperativo, y estos ejercicios permitirán que los alumnos hablen de matemáticas entre ellos.

**Resumen del capítulo** Al final de cada capítulo se muestra un resumen que incluye “Términos y frases importantes”.

**Ejercicios de repaso del capítulo** Al final de cada capítulo hay ejercicios de repaso que abarcan todos los temas analizados en el mismo. Los números en color rojo y entre corchetes sirven para identificar la sección en donde se presentó el material por primera vez.

**Examen de práctica del capítulo** El amplio examen que se encuentra al final de cada capítulo permite que los estudiantes determinen qué tan preparados están para presentar el examen real de cada parte del curso.

**Examen de repaso acumulativo** El propósito de estos exámenes, que aparecen al final de cada capítulo (salvo en el primero), es verificar los conocimientos adquiridos respecto del material analizado desde el principio del libro hasta el capítulo en que se encuentre. Puede utilizar estos exámenes como repaso o como preparación para el examen final. Al igual que los Ejercicios de repaso acumulativo, estos exámenes sirven para reforzar lo aprendido de los temas analizados con anterioridad. Las respuestas a las preguntas del examen de repaso acumulativo aparecen enseguida del mismo, de modo que se puedan verificar rápidamente sus resultados. Después de cada respuesta se incluye una leyenda entre corchetes, como [Sec. 4.2, obj. 5], pa-

ra indicar la sección y el objetivo en donde se estudió el material correspondiente.

**Respuestas** El libro proporciona las *respuestas a los problemas de número impar* de cada conjunto de ejercicios, así como las *respuestas a todos* los ejercicios de la sección de uso de la calculadora graficadora, los ejercicios de repaso acumulativo, los ejercicios de repaso, los exámenes y los exámenes de repaso acumulativo del capítulo. Por otro lado, no se da la respuesta a los ejercicios de actividad en grupo, ya que su intención es que los estudiantes logren acuerdos al respecto.

## Modos de enseñanza

---

El constante refuerzo de los conceptos da por resultado una mayor comprensión y retención del material por parte de los estudiantes. Por otro lado, el formato y la legibilidad de este libro lo hacen apropiado para muchos estilos de enseñanza, por ejemplo:

- clase institucional (clásica)
- educación a distancia
- aprendizaje autodidacta
- clase modificada
- estudio en grupo o cooperativo
- laboratorio de enseñanza

## Cambios en la sexta edición

---

Cuando escribí la sexta edición, tomé en cuenta muchos comentarios y revisiones de los estudiantes y profesores. Quiero agradecer a todos aquellos que hicieron sugerencias para mejorar este libro. También quiero agradecer a la gran cantidad de profesores y estudiantes que escribieron para informarme lo mucho que disfrutaron, apreciaron y aprendieron del texto. Algunos de los cambios realizados en esta sexta edición son:

- En el capítulo 3, se reescribieron fórmulas y aplicaciones del álgebra, muchos de los ejercicios se acortaron, y se agregaron explicaciones adicionales donde fue necesario. Reorganizamos la sección 3.5 para mayor claridad y actualizamos los problemas de aplicación de la vida real.
- En el capítulo 1 se mejoró mucho la adición y sustracción de fracciones.
- En el capítulo 2 se introdujo la solución de ecuaciones con fracciones y se agregaron muchos ejemplos y ejercicios.
- Se amplió el tratamiento de la jerarquía de operaciones con paréntesis anidados.

- Se agregaron las propiedades de identidad e inversas.
- Debido a la solicitud de muchos profesores, se agregó el teorema de Pitágoras en el capítulo 5.
- La variación directa e inversa se agregó en la última sección del capítulo 6.
- En este libro se dedica una sección completa a las Aplicaciones de las ecuaciones cuadráticas.
- Los conjuntos de ejercicios se han mejorado en todo el libro, y además se han agregado más problemas y ejercicios.
- Se hizo mayor hincapié en la geometría, ya que se introducen más ejemplos y ejercicios relacionados.
- Al final de algunas secciones se agregaron ejercicios más difíciles.
- Los números racionales se explican más a fondo.
- En el capítulo 10 se agregó una breve introducción de los números complejos, para que la puedan utilizar los profesores que lo consideren conveniente.
- El libro tiene un nuevo diseño que permite identificar con mayor facilidad los ejercicios.
- Las respuestas al Examen de repaso acumulativo aparecen ahora justo después de ellos, de forma que tenga una retroalimentación inmediata. Además, se indica el número de la sección y el objetivo en donde se analizó el material.
- La sección Avance de la lección reemplazó a la sección Vista preliminar y perspectiva. La información que se proporciona ahora ofrece a los estudiantes un panorama general del capítulo, y de la forma en que su contenido se relaciona con otros temas del libro y con situaciones del mundo real.
- Se agregó la sección Matemáticas en acción, con el propósito de reforzar la necesidad de las matemáticas en la vida real y su importancia en la resolución de problemas cotidianos. Esta sección puede ser una gran motivación para los estudiantes.
- Se agregaron recuadros de “Sugerencia” y “Cómo evitar errores comunes” en lugares estratégicos.
- Para reforzar y ampliar las habilidades de estudio necesarias para tener éxito en el aprendizaje y aplicación de las matemáticas (analizadas a detalle en la sección 1.1) se agregaron recuadros de Consejo para estudiar.
- Los problemas de aplicación se actualizaron y se hicieron más interesantes a lo largo de todo el libro.
- En esta edición, los recuadros “Uso de la calculadora graficadora” muestran, a manera de ejemplo, secuencias de teclas y pantallas de una calculadora modelo Texas Instruments 83 Plus.

- Se cubre más a fondo el tema de una fracción elevada a un exponente negativo.
- Se eliminaron las barras de equilibrio de las explicaciones en el capítulo 2.
- Al factorizar por agrupamiento se colocó el factor común a la izquierda para guardar consistencia con otros problemas de factorización.
- Se introdujeron las rectas perpendiculares en el texto y no en el conjunto de ejercicios.
- Se reorganizó y reescribió el capítulo 9, Raíces y radicales, para facilitar su comprensión.
- Con frecuencia se utilizaron variables diferentes de  $x$  y  $y$  en los ejemplos y ejercicios.
- Para que el texto fuera más atractivo e interesante se agregaron más fotografías.
- En la sección de notación científica se presentó una breve introducción a las unidades de medición del sistema métrico.

### Suplementos de la sexta edición

Para esta edición, el autor coordinó personalmente el desarrollo del *Instructor's Solution Manual*. Para su redacción, seleccionaron con sumo cuidado profesores con basta experiencia en la enseñanza de las matemáticas y en el desarrollo de este tipo de materiales. Cabe hacer mención de que todo el material complementario mencionado en esta sección aparece en **idioma inglés**.

### Para los maestros (en inglés)

#### Suplementos electrónicos

NUEVO! TestGen-EQ con el CD-ROM QuizMaster (Windows/Macintosh) (0-13-140035-5)

- Programa de prueba específico de texto, ejecutado algorítmicamente.
- Se puede utilizar en red para administrar los exámenes y clarificarlos en línea.
- Edite y agregue sus propias preguntas para crear un número casi ilimitado de exámenes.
- Utilice la nueva característica *Function Plotter* para crear gráficas.
- Los exámenes se pueden exportar con facilidad a HTML, de modo que puedan colocarse en un sitio Web para que los estudiantes practiquen.
- Para los usuarios en red, incluye una función de correo electrónico (e-mail), que permite a los profesores enviar mensajes a un estudiante específico o bien a todo un grupo.

- Disponibilidad de informes y resúmenes de calificaciones acumuladas o seleccionadas para una clase o para un estudiante a través de la red.

#### Sitio Web Companion

([www.pearsoneducacion.net/angel](http://www.pearsoneducacion.net/angel))

- Elabore un temario personalizado en línea con el Syllabus Manager.
- Asigne cuestionarios (o exámenes rápidos), o supervise a los estudiantes y envíeles resultados de sus exámenes vía correo electrónico.
- Incluye vínculos a otros sitios Web en donde se ofrece información adicional sobre los temas.



#### Sitio Web Companion

([www.pearsoneducacion.net/angel](http://www.pearsoneducacion.net/angel))

- Problemas de práctica y exámenes de práctica con retroalimentación instantánea.
- Instrucciones de las secuencias de teclas para realizar operaciones en calculadoras graficadoras.
- Incluye vínculos a otros sitios Web en donde se ofrece información adicional sobre los temas.

#### Reconocimientos

Escribir un libro de texto es un proyecto que exige una gran cantidad de tiempo. Muchas personas merecen mi agradecimiento por su empeño y por su apoyo en la realización de este proyecto. A quien más deseo agradecer su ayuda es a mi esposa Kathy y a mis hijos Robert y Steven. Sin su apoyo y comprensión constantes, este proyecto no se hubiera convertido en realidad. También quiero agradecer a mi nuera, Kathy, por su apoyo.

Deseo dar las gracias a Richard Semmler, del Northern Virginia Community College, y a Larry Clar y Donna Petrie, del Monroe Community College, por su minuciosidad y atención a los detalles que tuvieron para revisar las páginas, ilustraciones y respuestas. Le doy las gracias en especial a Richard, que se involucró en todos los aspectos del proyecto.

Quiero agradecer también a Lauri Semarne por leer las páginas y revisar las respuestas. Mitchel Levy, del Broward Community College, también le doy las gracias por hacer sugerencias valiosas para los conjuntos de ejercicios y ayudar con los exámenes de repaso acumulativo.

Asimismo, agradezco a mis editores de Prentice Hall, Paul Murphy y Ann Heath, a mi editor de desarrollo Don Gecewicz, y a mi editor de proyecto Phyllis Crittenden, de Elm Street Publishing Services, Inc., por sus valiosas sugerencias y meticulosidad en la realización de este proyecto.

Agradezco también a quienes trabajaron conmigo en el desarrollo de los diferentes suplementos que acompañan este libro. A continuación listo algunos de ellos:

Manuales de instrucciones del estudiante y el profesor: Doreen Kelly, *Mesa Community College*  
Manual de Exámenes del Profesor: Kelli Hammer, *Broward Community College*

También me gustaría expresar mi agradecimiento a los siguientes revisores y lectores de pruebas, por sus razonables comentarios y sugerencias:

Frances Alvarado, *University of Texas-Pan American*  
Jose Alvarado, *University of Texas-Pan American*  
Ben Anderson, *Darton College (GA)*

Sharon Berrian, *Northwest Shoals Community College*  
Dianne Bolen, *Northeast Mississippi Community*

*College*

Julie Bonds, *Sonoma State University*

Clark Brown, *Mojave Community College (AZ)*

Connie Buller, *Metropolitan Community College (NE)*

Lisa DeLong Cuneo, *Pennsylvania State University-Dubois*

Stephan Delong, *Tidewater Community College*

William Echols, *Houston Community College (TX)*

Dale Felkins, *Arkansas Technical University*

Reginald Fulwood, *Palm Beach Community College (FL)*

Abdollah Hajikandi, *State University of New York-Buffalo*

Richard Hobbs, *Mission College (CA)*

Joe Howe, *St. Charles Community College*

Mary Johnson, *Inver Hills Community College (MN)*

Mike Kirby, *Tidewater Community College*

Mitchel Levy, *Broward Community College (FL)*

Mitzi Logan, *Pitt Community College (NC)*

Constance Meade, *College of Southern Idaho*

Lynnette Meslinsky, *Erie Community College (NY)*

Elizabeth Morrison, *Valencia Community College (FL)*

Elsie Newman, *Owens Community College*

Charlotte Newsom, *Tidewater Community College*

Charles Odion, *Houston Community College (TX)*

Behnaz Rouhani, *Athens Technical College (CA)*

Brian Sanders, *Modesto Junior College (CA)*

Rebecca Schantz, *Prairie State College (IL)*

Cristela Sifuentez, *University of Texas-Pan American*

Fereja Tahir, *Illinois Central College*

Burnette Thompson, Jr., *Houston Community College (TX)*

Ronald Yates, *Community College of Southern Nevada*

# Enfoque pedagógico

La serie Angel es bien conocida y muy respetada por su enfoque realista y práctico del álgebra, que incluye ejemplos y datos del mundo real, y conjuntos de ejercicios con un enfoque pedagógico, integrado y actualizado.

**Avance de la lección** En este capítulo proporcionaremos las bases tanto de este curso como de cursos posteriores. Para muchos estudiantes, la sección 1.1, *Habilidades de estudio para tener éxito en las matemáticas*, podría ser la más importante del libro. Léala con cuidado y siga sus consejos. Si adopta estas habilidades de estudio, aumentarán sus posibilidades de éxito en este curso de matemáticas.

En la sección 1.2, presentaremos un procedimiento de solución de 5 pasos que se empleará a lo largo del libro. Otros temas importantes que cubriremos en este capítulo son las fracciones y la estructura del sistema de números reales. Antes de pasar al capítulo siguiente, es esencial comprender la *suma, resta, multiplicación y división de números reales* que estudiaremos en las secciones 1.6 a 1.8.

## 1.1 HABILIDADES DE ESTUDIO PARA TENER ÉXITO EN MATEMÁTICAS



- 1 Reconocer los objetivos de este libro de texto.
- 2 Adquirir hábitos de estudio adecuados.
- 3 Estudiar y presentar exámenes.
- 4 Administrar el tiempo.
- 5 Aprender a utilizar una calculadora.

Esta sección es muy importante; léala con calma y siga sus consejos; para muchos podría ser la sección principal del libro.

La mayoría de quienes siguen este curso pertenecen a una de las siguientes tres categorías: (1) aquellos que no estudiaron álgebra en el bachillerato, (2) quienes asistieron a un curso de álgebra en el bachillerato pero no comprendieron el material, o (3) los que asistieron a un curso de álgebra en el bachillerato y tuvieron éxito pero han estado fuera de la escuela por un tiempo y necesitan tomar el curso nuevamente. Cualquiera que sea el caso, usted necesita adquirir hábitos de estudio para los cursos de matemáticas.

Antes de analizar los hábitos de estudio, presentaremos los objetivos del libro, que le ayudarán a darse cuenta de la razón de incluir ciertos temas y de la forma de exponerlos.

▲ Página 2

## Avance de la lección

Cada capítulo inicia con un **Avance de la lección** para dar al estudiante un panorama global del capítulo y explicar cómo se relaciona éste con el resto del material y con situaciones reales.

## Habilidades de estudio para tener éxito en matemáticas (sección 1.1)

Desarrollar las habilidades de estudio que se presentan en esta sección aumenta de manera considerable las oportunidades para tener éxito en éste y en todos los demás cursos de matemáticas.

## Ejemplos en el texto

Una gran cantidad de **ejemplos** ilustran el concepto que se presenta en el texto, y proporciona una solución detallada, paso a paso.

## Ahora resuelva el ejercicio

**Ahora resuelva el ejercicio** aparece después de algunos ejemplos seleccionados, y su propósito es reforzar conceptos importantes. Esta sección permite practicar sus nuevos conocimientos de manera inmediata, convirtiendo a los estudiantes en sujetos activos.

178 • Capítulo 3 • Fórmulas y aplicaciones del álgebra

**EJEMPLO 10** **Perímetro de un rectángulo** La fórmula para el perímetro de un rectángulo es  $P = 2l + 2a$ . Despeje la longitud,  $l$ .

**Solución** Aísle  $l$  en un lado de la ecuación. Comenzamos eliminando  $2a$  del lado derecho de la ecuación a fin de despejar al término que contiene a  $l$ .

$$P - 2a = 2l + 2a - 2a \quad \text{Restamos } 2a \text{ de ambos lados.}$$

$$P - 2a = 2l$$

$$\frac{P - 2a}{2} = \frac{2l}{2} \quad \text{Dividimos los dos lados entre 2.}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 45

$$\frac{P - 2a}{2} = l \quad \left( \text{o bien } l = \frac{P}{2} - a \right)$$

**EJEMPLO 11** **Fórmula del interés simple** En el ejemplo 1 utilizamos la fórmula del interés simple  $i = prt$ . Despeje el capital,  $p$ .

**Solución** Despejemos  $p$ . Como ésta se encuentra multiplicada tanto por  $r$  como por  $t$ , dividimos ambos lados de la ecuación entre  $rt$ .

▲ Página 178

La serie Angel está diseñada para ayudar a los estudiantes a identificar rápidamente la información importante que necesitan para aprender conceptos y temas.

## Definiciones, procedimientos y hechos importantes

**Definiciones, procedimientos y hechos importantes**, se presentan en recuadros a lo largo del texto, lo cual permite localizar fácilmente el material y concentrarse en él al estudiar o prepararse para los exámenes.

Página 21 ►

Sección 1.3 • Fracciones • 21

**Símbolos de multiplicación**

Si  $a$  y  $b$  representan dos cantidades matemáticas cualesquiera, entonces podemos utilizar cada una de las siguientes expresiones para indicar el producto de  $a$  y  $b$  ("a por b").

$ab$   $a \cdot b$   $a(b)$   $(a)b$   $(a)(b)$

Ejemplos		
3 por 4 se escribe:	3 por $x$ se escribe:	$x$ por $y$ se escribe:
$3(4)$	$3x$	$xy$
$(3)4$	$3(x)$	$x(y)$
$(3)(4)$	$(3)(x)$	$(x)(y)$

Ahora introduciremos el término *factores*, que emplearemos en todo el libro. A continuación se define factores.

**DEFINICIÓN** Los números o variables multiplicados en un problema de multiplicación se llaman **factores**.

Si  $a \cdot b = c$ , entonces  $a$  y  $b$  son **factores** de  $c$ .

Por ejemplo, en  $3 \cdot 5 = 15$ , los números 3 y 5 son factores del producto 15. En  $2 \cdot 15 = 30$ , los números 2 y 15 son factores del producto 30. Observe que 30 tiene otros muchos factores. Como  $5 \cdot 6 = 30$ , los números 5 y 6 también son factores de 30. Debido a que  $3x$  significa 3 por  $x$ , tanto 3 como  $x$  son factores de  $3x$ .

**SUGERENCIA** De los ejemplos 2 y 3, observamos que cuando un factor pasa del denominador al numerador o del numerador al denominador, el signo del *exponente* cambia.

$x^{-4} = \frac{1}{x^4}$	$\frac{1}{x^{-4}} = x^4$
$3^{-5} = \frac{1}{3^5}$	$\frac{1}{3^{-5}} = 3^5$

▲ Página 253

**SUGERENCIA** A continuación se listan algunas sugerencias, por si usted tiene dificultades con los problemas de aplicación.

*CONSEJO PARA ESTUDIAR*

1. Profesor – Haga una cita para ver a su profesor. Asegúrese de haber leído el material del libro y de haber intentado resolver todos los problemas de tarea. Acuda a la cita con su instructor, llevando preguntas específicas.
2. Asesoría – Si su escuela ofrece asesoría gratuita, aprovéchela.
3. Grupo de estudio – Forme un grupo de estudio con sus compañeros de clase. Intercambie números telefónicos y direcciones de correo electrónico. Podrían ayudarse unos a otros.

▲ Página 206

**CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES** Una expresión elevada a la potencia cero no es igual a 0; es igual a 1.

<b>CORRECTO</b>	<b>INCORRECTO</b>
$x^0 = 1$	<del><math>x^0 = 0</math></del>
$5^0 = 1$	<del><math>5^0 = 0</math></del>

▲ Página 245

## Sugerencia

Las **Sugerencias** ofrecen instrucciones útiles para resolver problemas y otros temas.

## Sugerencia-Consejos para estudiar

Las **Sugerencias-Consejo para estudiar** refuerzan las habilidades de estudio para tener éxito en matemáticas, que se analizan en la sección 1.1.

## Cómo evitar errores comunes

Los recuadros **Cómo evitar errores comunes** ilustran errores frecuentes, explican por qué ciertos procedimientos están equivocados y muestran métodos correctos para resolver el problema.



# Enfoque en la resolución de problemas

En la sexta edición de este libro se sigue haciendo hincapié en la resolución de problemas, de manera que los estudiantes aprendan a trabajar con ellos cada vez con más confianza. En el proceso, el texto ayuda a entender *por qué* se realiza cierta operación y, al mismo tiempo, se enseña *cómo* realizarla. Aunque aparece a lo largo de todo el texto, la resolución de problemas se presenta al principio del libro.

## Procedimiento de cinco pasos para la resolución de problemas

Los ejemplos en el texto demuestran cómo resolver cada ejercicio de aplicación con base en el procedimiento de cinco pasos, de Polya, para la resolución de problemas de: **entender el problema, traducir, realizar los cálculos, comprobar y responder.**

### Lineamientos para resolver problemas

#### 1. Entender el problema.

- Lea el problema *cuidadosamente* al menos dos veces. En la primera lectura, obtenga un panorama general. En la segunda, determine **(a)** qué es exactamente lo que tiene que hallar, y **(b)** qué información proporciona el problema.
- Haga una lista de los hechos conocidos. Determine cuáles de ellos son pertinentes para la solución del problema.
- Determine si es posible sustituir los números por otros más pequeños o sencillos, a fin de hacer más comprensible el problema.
- Si organizar la información lo ayuda, enléstela en una tabla.
- De ser posible, elabore un diagrama para ilustrar el problema. Rotule la información que se da.

#### 2. Traducir el problema a lenguaje matemático.

- Por lo general, esto incluye expresar el problema en términos de una expresión o ecuación algebraica. (En el capítulo 3 se explicará la forma de expresar problemas de aplicación como ecuaciones).
- Determine si existe una fórmula que pueda utilizarse para resolver el problema.

#### 3. Realizar los cálculos matemáticos necesarios para resolver el problema.

#### 4. Comprobar la respuesta obtenida en el paso 3.

- Pregúntese, *¿tiene sentido la respuesta?*, *¿es razonable?* Si la respuesta no es razonable, revise su método para solucionar el problema, así como sus cálculos.
- Si es posible, compruebe la solución en el problema original.

#### 5. Asegurarse de haber respondido la pregunta.

- Enuncie la respuesta con claridad.

▲ Página 9

### Solución de problemas

- 17. Comisiones** Barbara Riedell gana el 5% de comisión por los aparatos que vende. La última semana, sus ventas fueron por un total de \$9400. Encuentre sus ingresos de esa semana.
- 18. Edificio Empire State** El 1 de mayo de 1931 fue la inauguración del Empire State. Mide 1454 pies, o 443 metros, de altura. Utilice esta información para determinar el número aproximado de pies que hay en un metro.
- 19. Impuestos sobre ventas** a) El impuesto sobre las ventas en Jefferson County es de 7%. ¿Cuál es el impuesto que pagó Jack Mayleben por un carro usado que costó \$16,700 antes de impuestos?  
b) ¿Cuál es el costo total del carro, incluyendo impuestos?
- 20. Cuenta de cheques** El saldo de la cuenta de cheques de Lois Heater es de \$312.60. Ella adquirió cinco discos compactos a \$17.11 cada uno, ya con IVA. Si paga con un cheque, ¿cuál es el nuevo saldo en su cuenta?
- 21. Compra de una computadora** Scott Borden quiere comprar una computadora que se vende en \$950. Puede pagar al contado o dar a la tienda un enganche de \$200 y 24 mensualidades de \$33.  
a) Si da el enganche y los pagos mensuales, ¿cuánto pagará por la computadora?  
b) ¿Cuánto dinero ahorraría si pagara el total del costo al contado?



- 24. Valores de la energía** La siguiente tabla proporciona los valores aproximados de la energía de ciertos alimentos, y el consumo de energía aproximado de algunas actividades, en kilojoules (kJ). Determine cuánto tiempo le tomaría utilizar la energía de los siguientes alimentos.  
a) una hamburguesa, si corriera  
b) una malteada de chocolate, si caminará  
c) un vaso de leche descremada, con ciclismo

### Solución de problemas

Están diseñados para ayudar a los estudiantes a ser más analíticos.

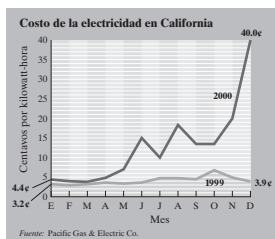
▲ Página 17



# Enfoque en problemas de aplicación del mundo real

Cada capítulo inicia con una aplicación ilustrada del mundo real para motivar a los estudiantes y estimularlos a utilizar el álgebra como una parte importante de su vida cotidiana. A lo largo de todo el libro aparecen problemas que tienen como base datos reales de una amplia diversidad de temas.

**28. Costo de la electricidad** Por medio de la gráfica que se muestra, determine la diferencia aproximada en el costo de la electricidad para una familia que usó 1500 kilowatt-hora de electricidad en diciembre de 1999, contra el que tuvo en diciembre de 2000, si adquirieron su electricidad de Pacific Gas & Electric Company.



de agua por minuto desperdicia 11.25 galones por día.

**a)** ¿Cuántos galones de agua se desperdician en un año (no bisiesto)?

**b)** Si el agua cuesta \$5.20 por 1000 galones, ¿cuánto dinero adicional se paga al año en la cuenta respectiva?

**32. Presión de las llantas** Cuando la presión de las llantas del auto de Sandra Hakanson es de 28 libras por pulgada cuadrada (psi), su carro rinde en promedio 17.3 millas por galón (mpg) de gasolina. Si la presión se incrementa a 32 psi, promedia 18.0 mpg.

**a)** ¿Qué tanto más lejos viajaría por cada galón de gasolina, si inflara sus llantas a la presión más elevada?

**b)** Si manejara un promedio de 12,000 millas por año, ¿cuántos galones de gasolina ahorraría en un año si incrementara la presión de sus llantas de 28 a 32 psi?

**c)** Si la gasolina cuesta \$1.40 por galón, ¿cuánto dinero ahorraría en un año?

**33. Viaje en taxi** Un taxi cobra \$2 de banderazo a un cliente que haga uso de él, y después 30 centavos por cada  $\frac{1}{4}$  de milla que viaje y 20 centavos por cada 30 segundos que pase detenido en el tráfico. David López toma un taxi para viajar una distancia de 3 millas y el vehículo pasa 90 segundos detenido en el tráfico. Determine el costo del viaje de David.

## Aplicaciones del mundo real

Una gran cantidad de maravillosos ejemplos del mundo real, totalmente actualizados, hacen que el estudiante realmente ponga en práctica sus conocimientos sobre álgebra. El empleo de **datos reales** en situaciones cotidianas realzan la importancia del material estudiado.

◀ **Página 18**

## Aplicaciones al inicio del capítulo

Nuevas aplicaciones al inicio de cada capítulo hacen hincapié en el papel que desempeñan las matemáticas en la vida cotidiana y en el mercado de trabajo, lo que permite introducir a los estudiantes a los temas que se abordarán desde una perspectiva real.

**Página 97** ▶

## Capítulo 2

### Solución de ecuaciones y desigualdades lineales



- 2.1 Reducción de términos semejantes
  - 2.2 La propiedad de igualdad de la suma
  - 2.3 La propiedad de igualdad de la multiplicación
  - 2.4 Solución de ecuaciones lineales con una variable en un solo lado de la ecuación
  - 2.5 Solución de ecuaciones lineales con la variable en ambos lados de la ecuación
  - 2.6 Razones y proporciones
  - 2.7 Desigualdades en una variable
- Resumen del capítulo  
Ejercicios de repaso del capítulo  
Examen de práctica del capítulo  
Examen de repaso acumulativo

Al tratar de predecir si un atleta impondrá un récord nuevo, es frecuente que los periodistas y entrenadores comparen su ritmo y desempeño actual con el ritmo que mantuvo el poseedor del récord en épocas diferentes durante la estación en que lo rompió. En la página 156 empleamos proporciones para determinar cuántos jonrones necesitaría anotar un jugador durante los primeros 50 juegos de una temporada de béisbol, para estar en posibilidad de romper el récord de 73 jonrones que estableció Barry Bond en la temporada de 2001 de béisbol.



97

## Matemáticas en acción

### El aire que respiramos

La Agencia de Protección Ambiental (EPA, por sus siglas en inglés) ha identificado la calidad del aire de los interiores como la preocupación sanitaria número uno del presente. Lo que provoca que la calidad del aire de los interiores sea baja, es, con mucho, la mala calidad del aire del exterior, en particular en las áreas urbanas. Contaminantes como polvo, polen y de origen automotriz, con frecuencia encuentran un camino hacia el interior de los edificios. Con más y más productos químicos en uso, la gente sufre cada vez más de hipersensibilidad química a los formaldehídos, pesticidas, ozono, solventes para limpieza, fibra de vidrio, asbestos, plomo y radón. Las alergias a los plásticos hoy están más difundidas que nunca. Ningún edificio o sitio de trabajo está a salvo.

Para los sitios de trabajo relacionados con farmacéuticos y biotecnología, el asunto del aire libre de contaminantes es aún más crucial. Un tipo de filtro que utilizamos en esta clase de instalaciones es el HEPA (High Efficiency Particulate Air), que fue desarrollado originalmente para retirar contaminantes radiactivos del aire durante el desarrollo de la primera bomba atómica.

La ciencia de la filtración involucra la captura de objetos que van desde el polvo de carbón a los virus. Es común expresar el tamaño de las partículas que filtramos en micras, donde 1 micra (abreviatura de 1 micrómetro) = 1 millonésima de metro =  $10^{-6}$  metros = 0.000001 metros. La medición indica el diámetro de la partícula.

## Matemáticas en acción

La sección **Matemáticas en acción** destaca la necesidad y la importancia de las matemáticas en el mundo real.

◀ **Página 267**

# Enfoque en ejercicios

Los conjuntos de ejercicios se desarrollaron con mucho cuidado. Cada ejercicio es más difícil que el anterior con el objetivo de ayudar al estudiante a ganar confianza e intentar ejercicios de mayor complejidad. Al final de cada conjunto de ejercicios se incluye también un conjunto de problemas de reto.

▼ Página 180

## Ejercicios conceptuales

Los **Ejercicios conceptuales** alientan al estudiante a analizar y escribir sobre los conceptos que está aprendiendo.

180 • Capítulo 3 • Fórmulas y aplicaciones del álgebra

### Conjunto de ejercicios 3.1

#### Ejercicios conceptuales

1. ¿Qué es una fórmula?
2. ¿Qué significa *evaluar una fórmula*?
3. Escriba la fórmula del interés simple, luego indique lo que representa cada letra que aparece en ella.
4. ¿Qué es un cuadrilátero?
5. ¿Cuál es la relación entre el radio y el diámetro de un círculo?
6. ¿ $\pi$  es igual a 3.14? Explique su respuesta.
7. Con el uso de cualquier fórmula para calcular algún área, explique por qué medimos ésta en unidades cuadradas.
8. Emplee cualquier fórmula para obtener un volumen, y explique por qué medimos éste en unidades cúbicas.

## Ejercicios de práctica de habilidades

Los ejercicios de la sección **Práctica de habilidades** cubren todos los tipos de problemas presentados en el capítulo.

### Práctica de habilidades

Simplifique cada fracción. Si una de ellas ya está simplificada, dígalos.

21.  $\frac{3}{12}$

22.  $\frac{40}{10}$

23.  $\frac{10}{15}$

24.  $\frac{19}{25}$

25.  $\frac{17}{17}$

26.  $\frac{9}{21}$

27.  $\frac{36}{76}$

28.  $\frac{16}{72}$

29.  $\frac{40}{264}$

30.  $\frac{60}{105}$

31.  $\frac{12}{25}$

32.  $\frac{80}{124}$

▲ Página 28

### Solución de problemas

17. **Comisiones** Barbara Riedell gana el 5% de comisión por los aparatos que vende. La última semana, sus ventas fueron por un total de \$9400. Encuentre sus ingresos de esa semana.
18. **Edificio Empire State** El 1 de mayo de 1931 fue la inauguración del Empire State. Mide 1454 pies, o 443 metros, de altura. Utilice esta información para determinar el número aproximado de pies que hay en un metro.
19. **Impuestos sobre ventas** a) El impuesto sobre las ventas en Jefferson County es de 7%. ¿Cuál es el impuesto que pagó Jack Mayleben por un carro usado que costó \$16,700 antes de impuestos?  
b) ¿Cuál es el costo total del carro, incluyendo impuestos?
20. **Cuenta de cheques** El saldo de la cuenta de cheques de Lois Heater es de \$312.60. Ella adquirió cinco discos compactos a \$17.11 cada uno, ya con IVA. Si paga con un cheque, ¿cuál es el nuevo saldo en su cuenta?
21. **Compra de una computadora** Scott Borden quiere comprar una computadora que se vende en \$950. Puede pagar al contado o dar a la tienda un enganche de \$200 y 24 mensualidades de \$33.  
a) Si da el enganche y los pagos mensuales, ¿cuánto pagará por la computadora?  
b) ¿Cuánto dinero ahorraría si pagara el total del costo al contado?



24. **Valores de la energía** La siguiente tabla proporciona los valores aproximados de la energía de ciertos alimentos, y el consumo de energía aproximado de algunas actividades, en kilojoules (kJ). Determine cuánto tiempo le tomaría utilizar la energía de los siguientes alimentos.  
a) una hamburguesa, si corriera  
b) una malteada de chocolate, si caminara  
c) un vaso de leche descremada, con ciclismo

## Ejercicios de solución de problemas

Los ejercicios de la sección **Solución de problemas** están diseñados para ayudar a los estudiantes a ser más analíticos.

▲ Página 17

## Problemas de reto

Los problemas de la sección **Reto** estimulan el interés de los estudiantes con ejercicios más demandantes o difíciles en los aspectos conceptual o de realización.

## Actividad en equipo

Las **actividades en equipo** proporcionan a los estudiantes oportunidades para desarrollar el aprendizaje colaborativo.

## Ejercicios de repaso acumulativo

Los **Ejercicios de repaso acumulativo** refuerzan los temas tratados con anterioridad. Estos ejercicios indican las secciones en donde se explicó el material.

### Problemas de reto

111. **Caja de cereal** Una caja de cereal se fabricará doblando una hoja de cartón a lo largo de las líneas punteadas, según se indica en la figura de la derecha.

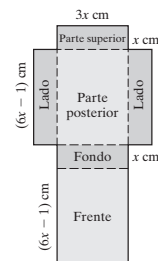


- a) Utilice la fórmula

$$\text{volumen} = \text{longitud} \cdot \text{ancho} \cdot \text{altura}$$

escriba una ecuación para encontrar el volumen de la caja.

- b) Calcule el volumen de la caja si  $x = 7$  cm.  
 c) Escriba una ecuación para el área superficial de la caja.  
 d) Determine el área superficial cuando  $x = 7$  cm.



### Actividad en grupo

112. **Cara de un cubo** Considere la siguiente fotografía. El frente de la figura es un cuadrado que contiene en el centro, otro más pequeño pintado de negro. Suponga que la longitud de un lado del cuadrado mayor es  $A$ , y la del cuadrado menor (en negro) es  $B$ . Asimismo, considere que el espesor del bloque es  $C$ .



- a) Miembro 1 del grupo: Determine una expresión para la superficie del cuadrado negro.  
 b) Miembro 2 del grupo: Determine una expresión para el área del cuadrado más grande (la cual incluye al cuadrado menor).  
 c) Miembro 3 del grupo: encuentre el área del cuadrado mayor menos el cuadrado negro (es decir, encuentre el área del cuadrado más grande).  
 d) Como grupo, escriban una expresión para calcular el volumen de todo el bloque sólido.  
 e) Como grupo, determinen el volumen de todo el bloque sólido, si su longitud es de 1.5 pies y su ancho es de 0.8 pies.

### Ejercicios de repaso acumulativo

[1.9] 113. Evalúe  $[4(12 \div 2^2 - 3)^2]^2$ .

- [2.6] 114. **Caballos** Un establo tiene cuatro caballos de raza Morgan y seis Árabes. Calcule la razón de los Árabes a los Morgan.

115. **Vaciar una alberca** Bombear 25 galones de agua fuera de una alberca toma 3 minutos. ¿Cuánto

tiempo tomará extraer 13,500 galones? Escriba una proporción que se utilice para resolver el problema, y después encuentre el valor que se pide.

[2.7] 116. Resuelva  $2(x - 4) \geq 3x + 9$ .

# Al estudiante

---


**E**l álgebra es una disciplina que no puede aprenderse por observación: usted debe convertirse en un participante activo; debe leer el texto, poner atención en clase y, lo más importante, resolver ejercicios. Cuantos más ejercicios resuelva, mejor.

El texto se escribió teniéndolo a usted en mente. Se utilizan oraciones claras y breves, y se proporcionan muchos ejemplos para ilustrar puntos específicos. El libro hace hincapié en las aplicaciones prácticas del álgebra. Esperamos que, conforme avance en el curso, se dé cuenta que el álgebra no es sólo otro curso obligatorio de matemáticas, sino una disciplina con aplicaciones útiles.

Este texto incluye varios tipos de información que usted identificará fácilmente gracias al uso de recuadros.

Por ejemplo, los recuadros que llevan por título **Sugerencias** deben estudiarse con cuidado, ya que resaltan la información más importante. Los recuadros **Cómo evitar errores comunes** también deben analizarse atentamente, dado que señalan los errores que con más frecuencia cometen los estudiantes y muestran los procedimientos correctos para evitarlos en la resolución de problemas.

Pregunte a su profesor lo más pronto posible si podrá usar una calculadora durante el curso. Si su respuesta es positiva, preste particular atención a las secciones **Uso de la calculadora** y **Uso de la calculadora graficadora** (esto último aunque no se le permita utilizarla en clase). Tal vez la información que se presenta allí le ayude a comprender mejor los conceptos algebraicos.

Algo más que debe preguntar a su profesor al inicio del curso es: ¿en dónde obtener ayuda si el profesor no está disponible? (el sitio Web de Angel,  ).

Tal vez desee formar un grupo de estudio con otros compañeros de clase. Muchos estudiantes han descubierto que el trabajo en grupos pequeños resulta un excelente mecanismo de aprendizaje. Al discutir con otras personas o explicar los conceptos y ejercicios, se refuerza su propia comprensión. Una vez determinados los criterios y procedimientos con los que trabajará su grupo, asegúrese de cumplirlos.

Una de las primeras cosas que debe hacer es leer la sección 1.1; en ella se listan los hábitos de estudio necesarios para tener éxito en matemáticas. Lea esta sección lenta y cuidadosamente, y preste particular atención a los consejos que se brindan en ella. Relea estas recomendaciones de vez en cuando. Lea el material con cuidado al hacer su tarea o asistir a clase.

Al final de todos los conjuntos de ejercicios (salvo los dos primeros) están los **Ejercicios de repaso acumulativo**. Debe

resolver estos problemas de manera regular, aun si no se le han asignado. Estos problemas se refieren a secciones y capítulos anteriores del texto, así que le servirán para refrescar su memoria y reforzar su aprendizaje de los temas correspondientes. Si tiene problemas al resolver estos ejercicios, lea la sección adecuada del texto o estudie sus notas correspondientes a ese material. La sección del texto en donde se presenta la información relativa a los ejercicios de repaso acumulativo se indica mediante corchetes, [ ], a la izquierda del ejercicio. Si aun después de revisar el material tiene problemas, haga una cita con su profesor. Trabajar con los ejercicios de repaso acumulativo a lo largo del curso le ayudará a prepararse para el examen final.

Al final de cada capítulo se encuentra el **Resumen del capítulo**, **Ejercicios de repaso del capítulo**, y un **Examen de práctica del capítulo**. Antes de cada examen, debe revisar cuidadosamente ese material y realizar el examen propuesto. Si usted obtiene buenos resultados en él, seguramente también logrará una buena calificación en el examen formal que aplique su profesor. Las preguntas Al lado de las preguntas de los ejercicios de repaso aparece el número de la sección en donde se presentó el material correspondiente por primera vez. Si tiene problemas con alguna pregunta de los ejercicios de repaso, vuelva a leer la sección indicada. Por otro lado, tal vez sería conveniente que realizara el **Examen de repaso acumulativo** que aparece al final de cada capítulo.

Al final del texto se encuentra la **sección de respuestas** con las soluciones a los ejercicios de *número impar*, incluyendo los **Problemas de reto**. También se proporcionan *todas* las respuestas a los ejercicios para calculadora graficadora, a los ejercicios de repaso acumulativo, a los ejercicios de repaso del capítulo y a los exámenes de práctica del capítulo. Sin embargo, no se proporcionan las respuestas a los ejercicios de actividades en grupo, ya que deseamos que los estudiantes lleguen a algún acuerdo entre ellos para responderlos. Sólo debe utilizar las respuestas para verificar su trabajo. Las respuestas a los ejercicios del examen de repaso aparecen inmediatamente después de él, para que tenga una retroalimentación inmediata. Después de cada respuesta aparecen los números de sección y objetivo en donde se abordó este tipo de problemas.

Intenté hacer este libro lo más claro posible y evitar los errores en la medida de mis posibilidades. Sin embargo, ningún texto es perfecto. Si el texto es de su agrado, si encuentra algún error o ejemplo o sección que piense no están demostrados, agradeceremos nos lo haga saber. Puede ponerse en contacto conmigo en <http://www.pearsoneducacion.net/angel>

Allen R. Angel

# Capítulo 1

## Números reales



- 1.1** Habilidades de estudio para tener éxito en matemáticas
  - 1.2** Solución de problemas
  - 1.3** Fracciones
  - 1.4** El sistema de números reales
  - 1.5** Desigualdades
  - 1.6** Suma de números reales
  - 1.7** Resta de números reales
  - 1.8** Multiplicación y división de números reales
  - 1.9** Exponentes, paréntesis y orden de las operaciones
  - 1.10** Propiedades del sistema de números reales
- Resumen del capítulo  
Ejercicios de repaso del capítulo  
Examen de práctica del capítulo

La cobertura que brindan las pólizas de seguros médicos difieren según el tipo de póliza que tenga un individuo. Además de los pagos anuales, ciertos planes para el cuidado de la salud requieren el pago de un deducible por cada visita al consultorio médico. Otros tipos de póliza requieren que el individuo pague anualmente, cierta cantidad de dinero en gastos médicos, y la compañía aseguradora cubre un gran porcentaje de los costos restantes. En las páginas 11 y 12 emplearemos las técnicas desarrolladas por el famoso matemático George Polya para determinar la proporción de una cuenta de gastos médicos que una persona tiene la responsabilidad de pagar, y la parte que cubrirá la compañía aseguradora.



## Avance de la lección

En este capítulo proporcionaremos las bases tanto de este curso como de cursos posteriores. Para muchos estudiantes, la sección 1.1, *Habilidades de estudio para tener éxito en las matemáticas*, podría ser la más importante del libro. *Léala con cuidado y siga sus consejos*. Si adopta estas habilidades de estudio, aumentarán sus posibilidades de éxito en este curso de matemáticas.

En la sección 1.2, presentaremos un procedimiento de solución de 5 pasos que se empleará a lo largo del libro. Otros temas importantes que cubriremos en este capítulo son las fracciones y la estructura del sistema de números reales. Antes de pasar al capítulo siguiente, es esencial comprender la *suma, resta, multiplicación y división de números reales* que estudiaremos en las secciones 1.6 a 1.8.

### 1.1 HABILIDADES DE ESTUDIO PARA TENER ÉXITO EN MATEMÁTICAS



- 1 Reconocer los objetivos de este libro de texto.
- 2 Adquirir hábitos de estudio adecuados.
- 3 Estudiar y presentar exámenes.
- 4 Administrar el tiempo.
- 5 Aprender a utilizar una calculadora.

Esta sección es muy importante; léala con calma y siga sus consejos; para muchos podría ser la sección principal del libro.

La mayoría de quienes siguen este curso pertenecen a una de las siguientes tres categorías: (1) aquellos que no estudiaron álgebra en el bachillerato, (2) quienes asistieron a un curso de álgebra en el bachillerato pero no comprendieron el material, o (3) los que asistieron a un curso de álgebra en el bachillerato y tuvieron éxito pero han estado fuera de la escuela por un tiempo y necesitan tomar el curso nuevamente. Cualquiera que sea el caso, usted necesita adquirir hábitos de estudio para los cursos de matemáticas.

Antes de analizar los hábitos de estudio, presentaremos los objetivos del libro, que le ayudarán a darse cuenta de la razón de incluir ciertos temas y de la forma de exponerlos.

#### 1 Reconocer los objetivos de este libro de texto

Los objetivos de este libro de texto son:

1. Presentarle los temas tradicionales del álgebra.
2. Prepararlo para cursos más avanzados.
3. Darle confianza y fomentar el gusto por las matemáticas.
4. Mejorar su razonamiento y capacidad de pensamiento crítico.
5. Incrementar su comprensión acerca de la importancia de las matemáticas en la solución de problemas de la vida cotidiana.
6. Animarlo a pensar en forma matemática, de modo que se sienta cómodo al traducir problemas de la vida cotidiana a ecuaciones matemáticas, para después resolver los problemas.

Es importante darse cuenta de que este curso de matemáticas es la base para otros cursos más avanzados. Si tiene una buena comprensión del álgebra le será más sencillo tener éxito en cursos posteriores.



## 2 Adquirir hábitos de estudio adecuados

### Mantener una actitud positiva

Podría estar pensando: “*Odio las matemáticas*” u “*Ojalá no tuviera que tomar esta clase*”. Quizá haya escuchado el concepto “*fobia a las matemáticas*” y considere que usted cae en esa categoría. Lo primero que necesita hacer para tener éxito en este curso es cambiar esa actitud por una más positiva. Debe estar dispuesto a darse y darle a este curso una oportunidad.

Con base en sus experiencias con las matemáticas, tal vez piense que esto es difícil. Sin embargo, las matemáticas son una disciplina en la que es preciso trabajar. Muchos de quienes leen este libro de texto son más maduros ahora que cuando asistieron a otros cursos de matemáticas. Su madurez y deseo por aprender son muy importantes y pueden establecer una enorme diferencia para tener éxito. Creo que puede tener éxito en este curso, pero usted también debe creerlo.

### Prepararse para la clase y poner atención en ella

Como preparación para la clase debe realizar la tarea. Si tiene dificultades con ella, o con algún concepto, escriba las preguntas para plantearlas a su profesor. Si se le asignó una lectura como tarea, lea el material apropiado antes de la clase. En caso de que no se le asigne ninguna lectura, dedique unos cuantos minutos antes de la clase para revisar el nuevo material. En este punto no tiene que comprender todo lo que lea; sino familiarizarse un poco con las definiciones y conceptos que se analizarán. Esta rápida revisión le ayudará a comprender lo que explique su maestro durante la clase.

Después de que se haya explicado el material en clase, lea lenta y cuidadosamente, palabra por palabra, las secciones correspondientes del libro.

Debe planear la asistencia a todas las clases. Muchos profesores están de acuerdo en que existe una relación inversa entre inasistencias y buenas calificaciones; es decir, entre más se ausente de la clase, menor será su calificación. Cada vez que falte, perderá información importante. Si debe faltar a alguna clase, comuníquese previamente con su profesor y consiga la lectura y tarea correspondientes a esa clase. De ser posible, antes de la siguiente clase pida a un amigo que le preste sus notas y cópielas, para comprender el material faltante.

Para tener un buen desempeño en este curso, debe comprender todo el material de este capítulo, en especial las fracciones, pero también la suma y resta de números reales. Si tiene dificultades con esos temas, pida ayuda a su maestro.

*En álgebra y otros cursos de matemáticas, el material aprendido es acumulativo; es decir, el nuevo material se basa en el que se presentó anteriormente. Debe entender cada sección antes de pasar a la siguiente, y cada capítulo antes de continuar con el siguiente; por lo tanto, no se atrase.* Busque ayuda tan pronto como la necesite, ¡no espere! Asegúrese de realizar toda la tarea y estudiar el libro de texto cuidadosamente. Aumentará sus probabilidades de éxito en este curso si lleva a cabo todas las recomendaciones que se dan en esta sección.

Cuando esté en clase, ponga atención a lo que dice su profesor. Si no comprende algo, pídale que repita la lección o que la explique nuevamente. Si leyó el material por anticipado y tiene dudas, pregunte a su profesor; si no lo hace, éste no sabrá que usted tiene problemas para comprender la lección.

En la clase, tome notas cuidadosamente. Escriba los números y letras con claridad, de modo que pueda leerlos más tarde. Asegúrese de que las  $x$  no parezcan  $y$  o viceversa. No es necesario que escriba todo lo que dice el profesor; tome nota de los puntos principales y de los ejemplos que no estén en el libro de texto. Escribir de manera frenética podría ocasionar que pierda la secuencia de lo que está diciendo su profesor. Creer que puede escribir todo lo que se discute en clase sin entenderlo y suponer que podrá comprenderlo después es un error.

### Lea el libro de texto

Los libros de texto de matemáticas no son novelas, así que deben leerse lenta y cuidadosamente, palabra por palabra. Si no comprende lo que está leyendo, vuelva a leer el material. Al llegar a un concepto o definición nuevos, tal vez convenga subrayarlos para resaltarlos, y dar con ellos fácilmente más tarde. Al llegar a un ejemplo, léalo y sígalo línea por línea. No haga una lectura superficial. Después resuélvalo usted mismo en una hoja. Además, trabaje la sección **Ahora resuelva los ejercicios** que aparece en el libro de texto después de varios ejemplos; esta sección está diseñada para que usted tenga la oportunidad de aplicar inmediatamente los nuevos conocimientos. Tome notas de todo lo que no comprenda y pregunte a su profesor.

Este libro de texto tiene características especiales para ayudarlo. Le sugiero que preste particular atención a los apartados de **Cómo evitar errores comunes** y **Sugerencias**, así como a los procedimientos y definiciones importantes que aparecen destacados. Los recuadros de **Cómo evitar errores comunes** se centran en los errores más frecuentes que cometen los estudiantes. Lea y estudie cuidadosamente dicho material y asegúrese de comprender lo que se explica. Si evita cometer dichos errores comunes, sus probabilidades para triunfar en éste y otros cursos de matemáticas aumentarán en gran medida. Las **Sugerencias** ofrecen muchas técnicas valiosas para resolver ciertos problemas; también presentan información muy útil o demuestran una alternativa para solucionar dichos problemas.

### Haga la tarea

*Los dos compromisos más importantes que usted debe contraer para tener éxito en este curso son: asistir a clase y hacer la tarea con regularidad.* Sus ejercicios debe hacerlos a conciencia y por completo. Haga la tarea tan pronto como sea posible, de modo que el material que se presentó en clase esté fresco en su mente. Las investigaciones demuestran que para los cursos de matemáticas, estudiar y hacer la tarea poco después de la clase mejora la retención y el desempeño. Las matemáticas no se aprenden por observación. Es necesario practicar lo que escuchó en clase. Gracias a las tareas usted realmente aprenderá el material; al hacerlas, se dará cuenta de los problemas en los que necesita ayuda. Si no realiza los ejercicios asignados, no sabrá qué preguntar en clase.

Cuando haga la tarea asegúrese de escribir bien y con cuidado, indique el número de ejercicio junto a cada problema y realícelo paso a paso. De ese modo podrá hacer referencia a él más tarde y comprender lo que está escrito. Preste particular atención a la escritura correcta de los signos y exponentes.

No olvide comprobar las respuestas de sus tareas. Las respuestas a los ejercicios de número impar están al final de este libro, en donde también encontrará la solución a todos los **Ejercicios de repaso acumulativo**, **Ejercicios de repaso del capítulo** y **Exámenes de práctica del capítulo**. Las respuestas a los **Ejercicios de repaso acumulativo** aparecen justo después de las preguntas específicas. Además, después de cada respuesta encontrará entre corchetes los números de la sección y del objetivo en donde se presentó por primera vez el concepto relacionado. Las respuestas a los ejercicios de **Actividad en equipo** no se proporcionan porque queremos que las obtenga precisamente mediante el trabajo en equipo.

Si tiene alguna dificultad con algunos de los ejercicios, márquelos y no dude en preguntar acerca de ellos en clase. No se detenga hasta que entienda todos los conceptos necesarios para resolver todos los problemas asignados.

### Estudie

Estudie en el ambiente apropiado, es decir, en un área donde no se le interrumpa constantemente, de tal manera que toda su atención esté dedicada a lo que está leyendo. Esta área debe estar bien ventilada e iluminada; su escritorio debe tener

suficiente espacio para distribuir en él todo el material, y su silla debe ser cómoda. Es recomendable que minimice las distracciones mientras estudia. Por otro lado, no debe estudiar sin parar; lo mejor es tomar breves periodos de descanso cada cierto tiempo.

Antes de comenzar a estudiar, asegúrese de contar con todos los materiales necesarios (lápices, marcadores, calculadora, etcétera). No estaría de más resaltar los puntos importantes analizados en clase o en el libro de texto.

Se recomienda a los estudiantes que dediquen al menos dos horas para estudiar y hacer la tarea por cada hora de clase. Algunos estudiantes requieren más tiempo que otros. Es importante distribuir el tiempo de estudio a lo largo de la semana en lugar de estudiar durante un lapso único.

Al estudiar no sólo debe entender cómo resolver un problema, sino también por qué sigue unos pasos específicos para hacerlo. Si no comprende por qué está siguiendo un proceso específico, no podrá resolver problemas similares.

Al final de cada sección, a partir de la 1.2, encontrará una serie de **Ejercicios de repaso acumulativo**. Aun si estos ejercicios no se dejaran como tarea, le sugiero que los resuelva como parte de su proceso de estudio, ya que refuerzan lo visto en las secciones anteriores, y será menos probable que lo olvide si lo revisa varias veces durante el curso. También le serán muy provechosos al prepararse para el examen final. Si ha olvidado la forma de resolver alguno de los *ejercicios de repaso acumulativo*, deberá volver a la sección que se indica entre corchetes junto al problema y revisarla. Después, intente resolver nuevamente el problema.

### 3 Estudiar y presentar exámenes

Si estudia un poco todos los días, no tendrá que desvelarse la noche anterior al examen. Comience a estudiar pronto. Si espera hasta el último minuto tal vez no tenga tiempo de buscar la ayuda necesaria en caso de no poder resolver un problema.

Para preparar un examen realice lo siguiente:

1. Lea las notas que tomó en clase.
2. Revise los ejercicios de tarea.
3. Estudie las fórmulas, definiciones y procedimientos que necesitará en el examen.
4. Lea cuidadosamente los recuadros de Cómo evitar errores comunes y Sugerencias.
5. Lea el resumen al final de cada capítulo.
6. Realice los ejercicios de repaso al final de cada capítulo. Si tiene dificultades, vuelva a estudiar las secciones correspondientes. Si los problemas continúan, pida ayuda.
7. Resuelva el examen de práctica del capítulo.
8. Responda los cuestionarios que se den en forma previa en caso de que el material cubierto por ellos se incluya en el examen.
9. En caso de que el examen abarque material de los capítulos anteriores, resuelva el Examen de repaso acumulativo.

#### Exámenes de mitad de curso y exámenes finales

Al estudiar para un examen largo de mitad o final de curso, siga los procedimientos analizados para prepararse, y además:

1. Estudie cuidadosamente todos los exámenes y cuestionarios previos. Asegúrese de haber aprendido a resolver los problemas que hubiese omitido.
2. Resuelva los Exámenes de repaso acumulativo que aparecen al final de cada capítulo. Éstos cubren el material desde el comienzo del libro hasta el punto en que se encuentren.



3. Si su profesor le ha proporcionado una hoja de trabajo o un examen de práctica, asegúrese de realizarlo. Formule preguntas acerca de los problemas que no comprenda.
4. Comience su proceso de estudio con anticipación, de modo que pueda pedir toda la ayuda necesaria en el momento oportuno.

### Para presentar el examen

Asegúrese de dormir lo suficiente la noche anterior al examen. Si ha estudiado apropiadamente, no tendrá que desvelarse haciéndolo en el último momento. Llegue temprano al lugar del examen, de modo que disponga de unos cuantos minutos para relajarse. Si llega tarde comenzará con nerviosismo y ansiedad. Al recibir el examen, haga lo siguiente:

1. Escriba todas las fórmulas o ideas que necesita recordar.
2. Revise rápidamente todo el examen para tener una idea de su extensión. También asegúrese de que no faltan páginas.
3. Lea con cuidado las instrucciones.
4. Lea minuciosamente cada pregunta. Responda por completo cada una y asegúrese de que contestó la pregunta indicada.
5. Primero responda las preguntas que entienda mejor; después regrese para resolver aquellas de las que no esté seguro. No invierta demasiado tiempo en un problema pues podría no concluir el examen. Prepárese para dedicar más tiempo a los problemas que valen más puntos.
6. Trate de resolver todos los problemas. Si no obtiene la respuesta correcta, al menos habrá conseguido algún crédito parcial. Si no trata de responder la pregunta perderá todo su valor.
7. Trabaje cuidadosamente y paso a paso. Al hacerlo, copie todos los signos y exponentes en forma correcta, y asegúrese de copiar la pregunta original del examen correctamente.
8. Escriba con claridad, de modo que el profesor pueda leer su trabajo; si no escribe claramente podrá perder puntos. Además, si su escritura no es clara, podría cometer un error al ir de un paso a otro. En los casos adecuados, asegúrese de que la respuesta final quede destacada encerrándola en un cuadro.
9. Si tiene tiempo, revise su trabajo y sus respuestas.
10. No se preocupe si otros terminan antes o si usted es el último. Utilice cualquier tiempo adicional para revisar su trabajo.

Mientras resuelve el examen permanezca calmado. No se preocupe si llega a un problema que no puede solucionar. Pase a otra cosa y después regrese a él.

## 4 Administrar el tiempo

---

Como mencionamos, es recomendable que los estudiantes dediquen, en promedio, dos horas para estudiar y hacer tareas por cada hora de clase. No siempre es fácil encontrar el tiempo necesario para el estudio. A continuación se hacen algunas sugerencias que podrían serle útiles.

1. Planee. Determine cuándo estudiará y hará la tarea. En esos periodos no programe otras actividades, y trate de distribuirlos de manera uniforme durante la semana.
2. Sea organizado, de modo que no desperdicie tiempo en la búsqueda de sus libros, pluma, calculadora o notas.
3. Si se le permite emplear una calculadora, utilícela para hacer los cálculos tediosos.

4. Al terminar de estudiar, marque con claridad el punto del texto en que se detuvo.
5. Trate de no aceptar otras responsabilidades. Debe establecer sus prioridades. Si su educación tiene la máxima prioridad, como debe ser, tiene que reducir el tiempo que dedica a otras actividades.
6. Si el tiempo es un problema, no se agobie con demasiados cursos. Si el sistema de su escuela lo permite, considere la posibilidad de cursar menos materias. Si no cuenta con suficiente tiempo para estudiar, tanto su aprendizaje como las calificaciones de todos sus cursos se verán afectados.

### Utilice los suplementos

Este libro de texto incluye una gran variedad de suplementos. Averigüe cuáles de ellos están disponibles; le serán muy útiles. Los suplementos no sustituyen la lectura del libro de texto, pero pueden ayudarle a comprender mejor éste. Visite el sitio Web de este libro en [www.pearsoneducacion.net/angel](http://www.pearsoneducacion.net/angel), donde encontrará muchísimo material, en inglés, que le ayudará en sus lecciones: ejercicios adicionales, cuestionarios de práctica que pueden calificarse, instrucciones para el uso de la calculadora graficadora de todas las marcas, y proyectos de los capítulos.

### Busque ayuda

Un consejo que subrayo mucho a mis estudiantes es: ¡obtenga ayuda tan pronto como sea posible! ¡No espere! En matemáticas, por lo general el material que se revisa un día se basa en el que se analizó el día anterior. Así que si no entiende el material de hoy, no podrá entender el de mañana.

¿En dónde buscar ayuda? Con frecuencia en los mismos colegios o universidades existen varios lugares en donde obtener ayuda. Sería bueno que tratara de hacer un amigo en clase, alguien con quien pueda estudiar; a menudo esto redundará en una ayuda mutua. Otra idea sería formar un grupo de estudio con algunos compañeros de su clase. Analizar los conceptos y hacer las tareas junto con sus compañeros reforzará su propia comprensión del material.

No dude en acudir a su profesor cuando tenga problemas con el material. Sin embargo, asegúrese de leer el material asignado e intente hacer la tarea antes de acudir con el profesor. Llegue preparado y haga preguntas específicas.

Con frecuencia hay otras fuentes de ayuda a su disposición. Muchos colegios tienen un laboratorio o un centro de aprendizaje de matemáticas con asesores para ayudar a los estudiantes. Pregunte a su profesor al principio del curso si la institución cuenta con este servicio y en dónde se localiza. Utilice la asesoría cuando sea necesario.

## 5 Aprender a utilizar una calculadora

---

Consiga una calculadora científica o graficadora en cuanto le sea posible. Pregunte al maestro si recomienda alguna en particular para esta clase de matemáticas u otras; o si puede utilizarla en la clase, tareas o exámenes. Si así fuera, utilícela siempre que sea posible para ahorrar tiempo.

Si la calculadora contiene una tecla  $\boxed{\text{LOG}}$  o  $\boxed{\text{SIN}}$ , se trata de una calculadora científica. No es posible utilizar la tecla de raíz cuadrada  $\boxed{\sqrt{\quad}}$  para distinguir entre las calculadoras científicas y las no científicas, ya que ambas la tienen. Debe prestar particular atención a los apartados **Uso de la calculadora**, que explican la forma de utilizarla para resolver problemas. Si utiliza una calculadora graficadora, ponga especial atención a los recuadros de **Uso de la calculadora graficadora**.

También es posible que en ocasiones se vea obligado a recurrir al manual de referencia adjunto con su calculadora.

### Comentario final

Puede tener un buen desempeño en las matemáticas si asiste a clases en forma regular, pone atención, estudia su libro de texto cuidadosamente, hace la tarea a diario, repasa con regularidad y pide ayuda apenas la necesite. Buena suerte en su curso.

## Conjunto de ejercicios 1.1

¿Conoce usted toda la información siguiente? Si no, pregúntesela a su profesor lo más pronto posible.

1. El nombre y las horas de oficina de su profesor.
2. La ubicación de su oficina y su número telefónico.
3. ¿Dónde y cuándo obtener ayuda si su instructor no está disponible?
4. El nombre y número telefónico de un amigo de su clase.
5. ¿Cuáles suplementos están disponibles para auxiliar su aprendizaje?
6. ¿Recomienda su instructor el empleo de una calculadora en particular?
7. ¿Cuándo utilizar la calculadora en este curso?

Si no sabe las respuestas de los puntos 1 a 7, debe investigarlas tan pronto como sea posible.

8. ¿Cuáles son sus razones para tomar este curso?
9. ¿Qué objetivos tiene para este curso?
10. ¿Comienza este curso con actitud positiva? Es importante que lo haga.
11. Enumere todo lo necesario para prepararse en forma adecuada para la clase.
12. Explique cómo debe leerse un libro de texto de matemáticas.
13. Por cada hora de clase, ¿cuántas horas fuera de ella se recomiendan para estudiar y hacer la tarea?
14. Al estudiar, no sólo se debe entender cómo resolver un problema, sino también la razón de seguir cada paso. ¿Por qué?
15. Dos objetivos muy importantes que debe plantearse para tener éxito en este curso son **a)** hacer la tarea en forma regular y completa, y **b)** asistir a clase con regularidad. Explique por qué son necesarios.
16. Escriba un resumen de los pasos a seguir a la hora de presentar un examen.
17. ¿Ha pensado estudiar con un amigo o grupo de compañeros? ¿Se da cuenta de las ventajas de hacerlo? ¿Detecta alguna desventaja?

## 1.2 SOLUCIÓN DE PROBLEMAS



- 1 Aprender los cinco pasos del procedimiento de solución de problemas.
- 2 Solucionar problemas que involucran gráficas de barras, líneas o círculos.
- 3 Solucionar problemas que implican estadísticas.

### 1 Aprender los cinco pasos del procedimiento de solución de problemas



George Polya

Una de las principales razones para estudiar matemáticas es que son útiles en la solución de problemas de la vida cotidiana. A lo largo de este libro de texto, se resolverán problemas. Para solucionar en forma matemática la mayoría de los problemas de la vida cotidiana es necesario tener la capacidad de expresarlos con símbolos matemáticos. Ésta es una parte importante del procedimiento para la solución de los problemas que se presentarán a continuación. En el capítulo 3 se dedicará mucho tiempo a explicar cómo expresar los problemas de la vida cotidiana por medio de matemáticas.

A continuación presentaremos el **procedimiento general, de cinco pasos, para la solución de problemas**, desarrollado por George Polya y presentado en su libro *How to Solve It*. Con este procedimiento general es posible enfocar cualquier problema.



## Lineamientos para resolver problemas

### 1. Entender el problema.

- Lea el problema *cuidadosamente* al menos dos veces. En la primera lectura, obtenga un panorama general. En la segunda, determine **(a)** qué es exactamente lo que tiene que hallar, y **(b)** qué información proporciona el problema.
- Haga una lista de los hechos conocidos. Determine cuáles de ellos son pertinentes para la solución del problema.
- Determine si es posible sustituir los números por otros más pequeños o sencillos, a fin de hacer más comprensible el problema.
- Si organizar la información lo ayuda, enléstela en una tabla.
- De ser posible, elabore un diagrama para ilustrar el problema. Rotule la información que se da.

### 2. Traducir el problema a lenguaje matemático.

- Por lo general, esto incluye expresar el problema en términos de una expresión o ecuación algebraica. (En el capítulo 3 se explicará la forma de expresar problemas de aplicación como ecuaciones).
- Determine si existe una fórmula que pueda utilizarse para resolver el problema.

### 3. Realizar los cálculos matemáticos necesarios para resolver el problema.

### 4. Comprobar la respuesta obtenida en el paso 3.

- Pregúntese, *¿tiene sentido la respuesta?*, *¿es razonable?* Si la respuesta no es razonable, revise su método para solucionar el problema, así como sus cálculos.
- Si es posible, compruebe la solución en el problema original.

### 5. Asegurarse de haber respondido la pregunta.

- Enuncie la respuesta con claridad.

En el paso 2 se emplean las palabras *expresión algebraica*. Una **expresión algebraica**, que en ocasiones sólo recibe el nombre de **expresión**, es un término general para cualquier conjunto de números, letras (llamadas variables), símbolos de agrupación como paréntesis ( ) o corchetes [ ], y **operaciones** (como suma, resta, multiplicación y división). En esta sección no se emplearán variables; su uso se estudiará más adelante.

### Ejemplos de expresiones

$$3 + 4, \quad 6(12 \div 3), \quad (2)(7)$$

Los siguientes ejemplos muestran la manera de aplicar los lineamientos para la solución de problemas. En ocasiones, se proporcionarán, en los ejemplos, los cinco pasos para ilustrar el procedimiento general. Sin embargo, en ciertos problemas no es posible o necesario enlistar cada uno de los pasos. En ciertos ejemplos se emplean números decimales y porcentajes. Si necesita repasar los procedimientos para sumar, restar, multiplicar o dividir cifras decimales, o para revisar los porcentajes, lea el Apéndice A antes de continuar.

**EJEMPLO 1 Transporte** El aeropuerto O'Hara, de Chicago, es el más saturado del mundo, con alrededor de 65 millones de pasajeros que llegan y salen anualmente. El autobús express recorre, entre el aeropuerto y el centro de la ciudad, una distancia de 19 millas. Un autobús en particular hace 8 viajes redondos por día entre dichos



puntos, y lleva en promedio 12 pasajeros por viaje (en cada sentido). La tarifa en cada sentido es de \$17.50.

**a)** ¿Cuáles son los ingresos del autobús por un día de operación?

**b)** Si la tarifa en un solo sentido se incrementara un 10%, determine cuál sería la nueva tarifa.

## Solución

**a) Entender el problema** La lectura cuidadosa del problema indica que la tarea consiste en encontrar los ingresos totales por un día de operación. Es necesario hacer una lista de toda la información que se da y determinar cuál es necesaria para encontrar el total de los ingresos.



### Pertinente para resolver el problema

#### Información disponible

65 millones de pasajeros que llegan o salen anualmente	no
19 millas del aeropuerto al centro	no
8 viajes redondos al día	sí
12 pasajeros por viaje (en cada sentido)	sí
Tarifa de \$17.50 (en cada sentido)	sí

Para calcular los ingresos totales no es necesario conocer el número de pasajeros que utilizan el aeropuerto, ni la distancia entre éste y el centro. Para solucionar este problema es necesario que se dé cuenta de que los ingresos totales dependen del número de viajes en cada sentido, del número promedio de pasajeros por viaje, y del costo por pasajero; todo esto en un día. El producto de estos tres números arrojará los ingresos totales diarios. Tenemos 8 viajes redondos por día, por lo tanto,  $2 \times 8$ , o 16 viajes en un sentido cada día.

#### Traducir el problema a lenguaje matemático

$$\left( \begin{array}{c} \text{ingresos} \\ \text{en un} \\ \text{día} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{número de} \\ \text{viajes en un} \\ \text{sentido por día} \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{c} \text{número de} \\ \text{pasajeros} \\ \text{por viaje} \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{c} \text{costo por} \\ \text{pasajeros en} \\ \text{cada sentido} \end{array} \right)$$

#### Efectuar los cálculos

$$= 16 \times 12 \times \$17.50 = \$3360.00$$

También podrían haberse utilizado 8 viajes redondos y una tarifa de \$35.00 por persona para obtener la respuesta. ¿Podría explicar por qué?

**Revisar la respuesta** La respuesta de \$3,360.00 es razonable, con base en la información que se da.

**Responder la pregunta que se hace** Los ingresos por un día de operación son de \$3,360.00.

**b) Entender** Si la tarifa se incrementa un 10%, la nueva será 10% más alta que \$17.50. Por lo tanto, es necesario agregar el 10% de \$17.50 a esta cifra para obtener la respuesta. Al realizar los cálculos, los números que expresan porcentajes en general cambian a cifras con decimales.

**Traducir** Tarifa nueva = tarifa original + 10% de la tarifa original

**Calcular**

$$\begin{aligned} \text{Tarifa nueva} &= \$17.50 + 0.10(\$17.50) \\ &= \$17.50 + \$1.75 = \$19.25 \end{aligned}$$

**Revisar** La respuesta de \$19.25, es un poco mayor que \$17.50, parece razonable.

**Responder** Al incrementarse un 10%, la tarifa nueva es de \$19.25. 

**EJEMPLO 2 Velocidad de un procesador** En febrero de 2001, el procesador más veloz de Intel, el Pentium 4, podía realizar alrededor de 1.5 mil millones de operaciones por segundo (1.5 gigahertzios, que se representa como 1.5 GHz). ¿Cuántas operaciones podrían efectuarse en 0.3 segundos?

**Solución Entender** Se da el nombre del procesador, la velocidad de alrededor de 1.5 mil millones (1,500,000,000) de operaciones por segundo, y 0.3 segundos. Para determinar la respuesta de este problema no es necesario el nombre del procesador, Pentium 4.

A fin de obtener la respuesta, ¿se requiere multiplicar o dividir? Es frecuente que un problema muy sencillo parezca más difícil debido a los números que involucra. Cuando números muy grandes o muy pequeños hagan parecer confuso un problema, hay que tratar de sustituirlos por otros de uso más común para determinar la manera de resolverlo. Supongamos que el procesador puede ejecutar 6 operaciones por segundo. ¿Cuántas operaciones realizaría en dos segundos? La respuesta a esta pregunta debería ser obvia. Es  $6 \times 2$  o 12. Para obtener este resultado tuvimos que multiplicar; por lo tanto, también debemos multiplicar para obtener la respuesta al problema que se plantea.

**Traducir**

Número de operaciones en 0.3 segundos = 0.3 (número de operaciones por segundo)

**Calcular** 
$$= 0.3(1,500,000,000)$$
$$= 450,000,000$$
 *Con una calculadora*

**Revisar** La respuesta, 450,000,000 de operaciones, es menor que las 1,500,000,000 de operaciones por segundo, lo que tiene sentido debido a que el procesador opera durante menos de un segundo.

**Responder** En 0.3 segundos, el procesador realiza 450,000,000 de operaciones. 

**EJEMPLO 3 Seguros médicos** La póliza de seguro médico de Beth Rechsteiner es similar a la de muchos trabajadores. La póliza de Beth requiere que pague los primeros \$100 de gastos médicos de cada año calendario (que se llama *deducible*). Después de pagar el deducible, ella cubre el 20% de los gastos médicos (que se denomina *copago*) y la compañía aseguradora paga el 80%. (Hay un copago máximo de \$600 que debe pagar al año. Después de eso, la empresa aseguradora cubre el 100% del costo de atención.) El 1 de enero, Beth se torció su tobillo mientras jugaba tenis. Fue al consultorio del doctor para que la revisara y obtuviera una placa de rayos X. La cuenta total que se envió a la compañía aseguradora fue de \$325.

**a)** ¿Qué monto de la cuenta será responsabilidad de Beth?

**b)** ¿De cuánto es responsable la compañía de seguros?

**Solución a) Entender** En primer lugar enlistamos la información *relevante*.

**Información disponible**

Deducible de \$100

20% de copago después del deducible

80% que paga la compañía de seguros después del deducible

\$325 de la cuenta del médico

El resto de la información no es necesaria para la solución del problema. Beth será responsable de los primeros \$100 y del 20% del saldo restante. La compañía aseguradora tiene la responsabilidad del 80% del saldo después del deducible. Antes de calcular lo que adeuda Beth es necesario determinar el saldo de la cuenta después de pagar el deducible. El saldo de la cuenta después del deducible es de  $\$325 - \$100 = \$225$ .

**Traducir** Responsabilidad de Beth = deducible + 20% de la cuenta después del deducible.

**Calcular**

$$\begin{aligned} \text{Responsabilidad de Beth} &= 100 + 20\%(225) \\ &= 100 + 0.20(225) \\ &= 100 + 45 \\ &= 145 \end{aligned}$$


**Revisar la respuesta** La respuesta parece razonable. Beth le deberá al doctor \$145.

**b)** La compañía aseguradora será responsable del 80% del saldo después del deducible.

$$\begin{aligned} \text{Responsabilidad de la compañía de seguros} &= 80\% \text{ del saldo después del deducible} \\ &= 0.80(225) \\ &= 180 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la compañía aseguradora es responsable de \$180. Esto tiene sentido ya que la suma de esta cantidad y la que debe pagar Beth es igual a la cuenta que pasó el doctor.

$$\$145 + \$180 = \$325$$

También podríamos haber respondido el inciso **b)** si restáramos lo que debe Beth del total de la factura; pero para que usted pudiese practicar más con los porcentajes decidimos obtener la solución de esta forma. 

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 33

## 2 Solucionar problemas que involucran gráficas de barras, líneas o círculos

Con frecuencia, la solución de problemas implica comprender y leer gráficas y conjuntos de datos (o números). En todo el libro se emplearán gráficas de barras, de líneas (poligonales) y circulares (o de tipo pastel), así como conjuntos de datos. En esta sección emplearemos algunas de estas gráficas y explicaremos cómo interpretarlas. Para resolver el ejemplo 4, usted debe interpretar gráficas de barras y circulares, y trabajar con datos.

**EJEMPLO 4 Comercio electrónico global** Forrester Research Inc. (forrester.com) proporcionó la siguiente información. Las gráficas nos dan información sobre las ventas en el comercio electrónico (ventas que se realizan por Internet) e incluyen dos tipos de ventas: de negocio a negocio y de negocio a consumidor. Se estima que en 2007, esta clase de ventas podrían llegar a ser por un total de \$6.8 billones (estos datos sólo son representativos).

La **gráfica de barras** de la figura 1.1 muestra las ventas mundiales en el comercio electrónico. La **gráfica circular** de la figura 1.2 ilustra el desglose de ventas electrónicas por regiones seleccionadas.

**a)** Por medio de la gráfica de la figura 1.1, estime las ventas en el comercio electrónico para 2007.

**b)** Si las ventas mundiales en el comercio electrónico en 2007 son de \$6.8 billones, utilice la figura 1.2 para estimar las ventas en el comercio electrónico para Norteamérica, Asia/Pacífico, Europa Occidental, y el resto del mundo.

### Solución

**a)** Con el empleo de la figura 1.1, se estima que en 2007 las ventas en el comercio electrónico serán de alrededor de \$6.8 billones. Observe que se utiliza la parte frontal de la barra para obtener la estimación. Siempre que se trabaje con una gráfica de barras tridimensional, como en este caso, se usará la cara del frente para determinar la lectura.

**c) Entender** La gráfica circular de la figura 1.2 indica que alrededor del 50.9% de las ventas mundiales en el comercio electrónico en 2007 corresponde a Norteamérica, el 24.3% a Asia/Pacífico, 22.6% a Europa Occidental, y 2.2% al resto del

**Comercio electrónico global**

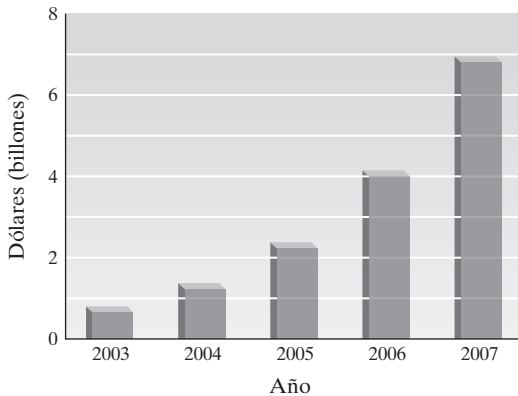


FIGURA 1.1

**Desglose estimado de comercio electrónico global**  
(Ventas por región en 2007)

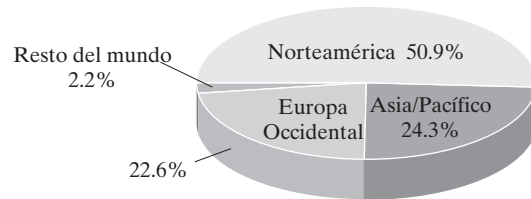


FIGURA 1.2

mundo. La suma de estos porcentajes es de 100%. (Observe que el 50.9% del área del círculo la ocupa Norteamérica, 24.3% es para Asia/Pacífico, 22.6% para Europa Occidental, y 2.2% para el resto del mundo.) Para determinar la cantidad aproximada de ventas en el comercio electrónico en Norteamérica, es necesario calcular el 50.9% del total de ventas electrónicas. Para hacer esto, multiplicamos del siguiente modo.

Traducir

$$\left( \begin{array}{c} \text{cantidad de ventas en el comercio} \\ \text{electrónico en Norteamérica} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{porcentaje del total de ventas} \\ \text{electrónicas en Norteamérica} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{ventas electrónicas} \\ \text{totales} \end{array} \right)$$

Calcular

$$\begin{aligned} \text{Cantidad de ventas en el comercio electrónico en Norteamérica} &= 0.509(\$6.8 \text{ billones}) \\ &= \$3.4612 \text{ billones} \end{aligned}$$

Por lo tanto, se espera que, en 2007, alrededor de \$3.4612 billones de ventas en el comercio electrónico ocurran en Norteamérica.

Para obtener las ventas electrónicas en las demás áreas del mundo, efectuamos cálculos similares.

$$\begin{aligned} \text{ventas electrónicas en Asia/Pacífico} &= 0.243(\$6.8 \text{ billones}) \\ &= \$1.6524 \text{ billones} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ventas electrónicas en Europa Occidental} &= 0.226(\$6.8 \text{ billones}) \\ &= \$1.5368 \text{ billones} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ventas electrónicas en el resto del mundo} &= 0.022(\$6.8 \text{ billones}) \\ &= \$0.1496 \text{ billones} \end{aligned}$$

Revisar Si sumamos las cuatro cifras, obtendremos un total de \$6.8 billones. Por tanto, nuestra respuesta es correcta.

$$\$3.4612 \text{ billones} + \$1.6524 \text{ billones} + \$1.5368 \text{ billones} + \$0.1496 \text{ billones} = \$6.8 \text{ billones}$$

Responder Las ventas electrónica estimadas en 2007 fueron: Norteamérica: \$3.4612 billones; Asia/Pacífico: \$1.6524 billones; Europa Occidental: \$1.5368 billones; el resto del mundo: \$0.1496 billones.

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 23**

En el ejemplo 5 se usará el símbolo  $\approx$ , que se lee **es aproximadamente igual a**. Por ejemplo, si la respuesta de un problema fuera 34.12432, se escribiría como  $\approx 34.1$ .

**EJEMPLO 5 El Supertazón** La **gráfica de líneas (poligonal)** de la figura 1.3 muestra el costo de un comercial de 30 segundos durante los Supertazones de 1967 a 2002. Los precios de la publicidad los establece la red de televisión.

- a) Estime el costo de los comerciales de 30 segundos en 1975 y 2001.  
 b) ¿Qué diferencia hubo en el costo por un comercial de 30 segundos en 2001 y uno en 1975?  
 c) ¿Cuántas veces fue mayor el costo de un comercial de 30 segundos en 2001 sobre el de 1975?

### Solución

a) Al leer una gráfica de línea (poligonal) en la que ésta tiene cierto espesor, como la de la figura 1.3, usaremos el centro de la línea para marcar la estimación. Al observar la línea punteada en la gráfica, se estima que el costo de un comercial de 30 segundos fue de alrededor de \$375,000 en 1975, y de cerca de \$2.3 millones (o \$2,300,000) en 2001.

b) Se usa el procedimiento de solución de problemas para responder la pregunta.

**Entender** Para determinar la diferencia en el costo de un comercial de 30 segundos, entre los años 2001 y 1975, es necesario realizar una resta.

**Traducir** diferencia en el costo = costo en 2001 – costo en 1975

**Calcular**  $= \$2,300,000 - \$375,000 = \$1,925,000$

**Responder y revisar** La respuesta parece razonable. El costo fue de \$1,925,000 más en 2001.

c) **Entender** Si examinamos los incisos b) y c), podríamos pensar que son iguales, pero no es así. En la sección 1.1 se indica que es importante leer un libro de matemáticas con cuidado, palabra por palabra. Los dos incisos difieren en que el b) pregunta “cuál es la diferencia en el costo”, mientras que el c) pregunta “cuántas veces más”. Para determinar el número de veces que el costo en 2001 ha sido mayor que el de 1975, es necesario dividir el costo en 2001 entre el de 1975, como se observa a continuación.

**Traducir** número de veces más =  $\frac{\text{costo en 2001}}{\text{costo en 1975}}$

**Calcular** calcular número de veces más =  $\frac{2,300,000}{375,000} \approx 6.13$


**Revisar y responder** Al observar la gráfica, vemos que la respuesta es razonable. El costo de un comercial de 30 segundos durante el Supertazón de 2001 fue alrededor de 6.13 veces el costo del de 1975. 



FIGURA 1.3

### 3 Solucionar problemas que implican estadísticas

Debido a que la comprensión de la estadística es tan importante en nuestra sociedad, a continuación se estudiarán ciertos temas estadísticos que emplearemos para resolver problemas.

La *media* y la *mediana* son dos **medidas de tendencia central**, conocidas también como *promedios*. Un promedio es un valor que representa un conjunto de datos (o números). Si usted toma un curso de estadística, estudiará estos promedios con más detalle, y conocerá otros promedios.

Para obtener la **media** de un conjunto de datos primero sumamos todos los valores y luego dividimos el resultado entre el número de valores. Por ejemplo, para calcular la media de 6, 9, 3, 12, 12, hacemos lo siguiente.

$$\text{media} = \frac{6 + 9 + 3 + 12 + 12}{5} = \frac{42}{5} = 8.4$$

Se dividió la suma entre 5 porque hay cinco valores. La media es el promedio que se usa con mayor frecuencia, y por lo general es el valor en el que pensamos al utilizar la palabra *promedio*.

La **mediana** es el valor de en medio (valor central) de un conjunto de **datos ordenados**. Ordenamos los datos de menor a mayor o viceversa. Para encontrar la mediana de 6, 9, 3, 12, 12, ordenamos los datos del más pequeño al más grande, como sigue.

$$3, 6, 9, 12, 12$$

↑  
Valor central

El valor central del conjunto de datos ordenados es 9. Por lo tanto, la mediana es 9. Observe que la cantidad de datos examinados es un número impar (non) y que la mitad de los valores está por encima de la mediana y la otra mitad está por debajo de ella.

Si tenemos un número par de datos por examinar, la mediana está entre los dos valores centrales. Por ejemplo, para calcular la mediana de 3, 12, 5, 12, 17, 9, ordenamos los datos de mayor a menor o viceversa.

$$3, 5, 9, 12, 12, 17$$

↑  
Valores centrales

Como hay seis datos (número par), buscamos el valor que está a la mitad entre los dos valores centrales, que son 9 y 12. Para encontrar la mediana, sumamos dichos valores y dividimos el resultado entre 2.

$$\text{media} = \frac{9 + 12}{2} = \frac{21}{2} = 10.5$$

Así, la mediana es 10.5. Observe que la mitad de los valores se encuentran arriba de ella, y la mitad por debajo.

**EJEMPLO 6** **La calificación media.** Las seis primeras calificaciones de Alfonso Ramírez son 90, 87, 76, 84, 78 y 62.

- Encuentre la media de las seis calificaciones de Alfonso.
- Si hubiera un examen más, ¿cuál sería la calificación mínima que Alfonso necesita para obtener cuando menos una B como promedio (es decir, un promedio de 80 o más)?
- ¿Es posible que Alfonso obtenga un promedio de A (90 o más)? Explique su respuesta.

### Solución

- a)** Para obtener la media, sumamos las seis calificaciones y el resultado lo dividimos entre 6.

$$\text{media} = \frac{90 + 87 + 76 + 84 + 78 + 62}{6} = \frac{477}{6} = 79.5$$

- b)** Mostraremos los pasos para resolver el problema para esta parte del ejemplo.

**Entender** La respuesta a esta parte se encuentra de diversas maneras. Para que la media de siete exámenes sea 80, los puntos totales de ellos debe ser de  $7(80)$  o 560. ¿Podría explicar por qué? La calificación mínima necesaria se encuentra si se resta de 560 la suma de las seis calificaciones.

**Traducir**

calificación mínima que se necesita obtener


en el séptimo examen =  $560 - \text{suma de las primeras seis calificaciones}$

$$\begin{aligned} \text{Calcular} \quad &= 560 - (90 + 87 + 76 + 84 + 78 + 62) \\ &= 560 - 477 \\ &= 83 \end{aligned}$$

**Revisar** Se verifica que una séptima calificación, 83, nos dé una media de 80, de la siguiente manera.

$$\text{media} = \frac{90 + 87 + 76 + 84 + 78 + 62 + 83}{7} = \frac{560}{7} = 80$$

**Respuesta** Una séptima calificación de 83 o más, al menos, dará como resultado un promedio de B.

**c)** Se utiliza el mismo razonamiento que en el inciso **b)**. Para un promedio de 90, el total de puntos que Alfonso necesita obtener es de  $90(7) = 630$ . Como su total de puntos es de 477, necesitará  $630 - 477$  o 153 puntos para obtener un promedio de A. Como el número máximo de puntos de que se dispone la mayoría de los exámenes es de 100, Alfonso no podría obtener una A en el curso. 

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 41**

## Conjunto de ejercicios 1.2

### Ejercicios conceptuales

- Mencione los cinco pasos del procedimiento para resolver problemas.
- ¿Qué es una expresión?
- Si un problema es difícil de resolver porque los números en él son muy grandes o muy pequeños, ¿qué puede hacerse para que el problema sea más fácil de solucionar?
- Explique cómo se encuentra la media de un conjunto de datos.
- Explique cómo se halla la mediana de un conjunto de datos.
- ¿En qué medida de tendencia central se piensa por lo general como *el promedio*?
- Considere el conjunto de datos 2, 3, 5, 6, 30. Sin realizar ningún cálculo, ¿podría determinar cuál es más grande, la media o la mediana? Explique su respuesta.
- Considere el conjunto de datos 4, 101, 102, 103. Sin hacer ningún cálculo, determine cuál es mayor, la media o la mediana. Explique su respuesta.
- Para sacar una calificación de B, un estudiante debe tener una media de 80. Pat Mast tiene una media de 79 de 10 exámenes. Se acerca a su maestro y le pide una B, con el razonamiento de que sólo le falta un punto para alcanzarla. ¿Qué es lo que está equivocado en su planteamiento?
- Considere el conjunto de datos 3, 3, 3, 4, 4, 4. Si uno de los cuatros cambiara a 5, ¿qué es lo que cambiaría, ¿la media y/o la mediana? Explique su respuesta.

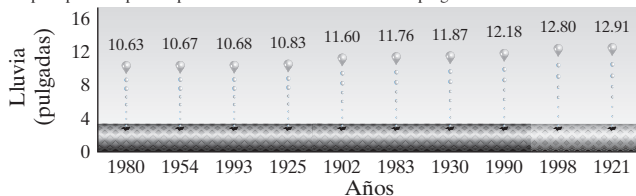
### Practique sus habilidades

En este conjunto de ejercicios, utilice una calculadora para ahorrar tiempo.

- Calificaciones de examen** Las calificaciones de Jenna Webber son 78, 97, 59, 74 y 74. Para éstas, determine: **a)** la media y **b)** la mediana.
- Puntuación de boliche** La puntuación de Eric Flemming en cinco juegos fue de 161, 131, 187, 163 y 145. Para los juegos de Eric, calcule: **a)** la media y **b)** la mediana.
- Facturas de tiendas** Las facturas mensuales de Liz Kaster para los cinco primeros meses de 2003, fueron de \$204.83, \$153.85, \$210.03, \$119.76 y \$128.38. Para las facturas de Liz, obtenga **a)** la media y **b)** la mediana.
- Cuentas de electricidad** Las cuentas eléctricas de Los Foxes de enero a junio de 2002, fueron de \$96.56, \$108.78, \$87.23, \$85.90, \$79.55 y \$65.88. Para estas cuentas, encuentre **a)** la media y **b)** la mediana.
- Veranos secos** La siguiente figura muestra los 10 veranos más secos en el sureste, de 1895 a 2001. Halle **a)** la media y **b)** la mediana de las pulgadas de lluvia para los 10 años que se muestran.

#### Veranos más secos en el sureste

La precipitación pluvial promedio en el sureste es de 15.61 pulgadas.



Fuente: Gloria Forthun, Southeast Regional Climate Center  
Registros de 1895 a 2001. El sureste comprende a Va, N.C. S.C., Ga, Fla y Ala.



16. **Casas en venta** En cierta comunidad hay ocho casas en venta. Sus precios son de \$124,100, \$175,900, \$142,300, \$164,800, \$146,000, \$210,000, \$112,200, y \$153,600. Deter-

mine **a)** la media y **b)** la mediana del precio de venta de las ocho casas.

## Solución de problemas

17. **Comisiones** Barbara Riedell gana el 5% de comisión por los aparatos que vende. La última semana, sus ventas fueron por un total de \$9400. Encuentre sus ingresos de esa semana.

18. **Edificio Empire State** El 1 de mayo de 1931 fue la inauguración del Empire State. Mide 1,454 pies, o 443 metros, de altura. Utilice esta información para determinar el número aproximado de pies que hay en un metro.

19. **Impuestos sobre ventas** **a)** El impuesto sobre las ventas en Jefferson County es de 7%. ¿Cuál es el impuesto que pagó Jack Mayleben por un carro usado que costó \$16,700 antes de impuestos?

**b)** ¿Cuál es el costo total del carro, incluyendo impuestos?

20. **Cuenta de cheques** El saldo de la cuenta de cheques de Lois Heater es de \$312.60. Ella adquirió cinco discos compactos a \$17.11 cada uno, ya con IVA. Si paga con un cheque, ¿cuál es el nuevo saldo en su cuenta?

21. **Compra de una computadora** Scott Borden quiere comprar una computadora que se vende en \$950. Puede pagar al contado o dar a la tienda un enganche de \$200 y 24 mensualidades de \$33.

**a)** Si da el enganche y los pagos mensuales, ¿cuánto pagará por la computadora?

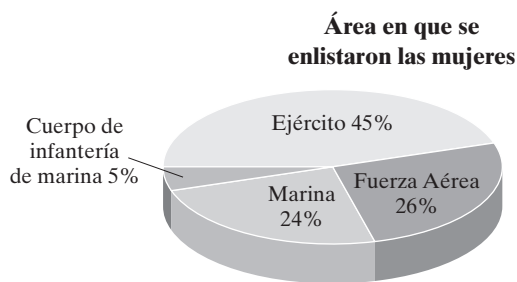
**b)** ¿Cuánto dinero ahorraría si pagara el total del costo al contado?

22. **Estacionamiento** El Midtown Parking Lot cobra \$1.50 por cada hora, o fracción, de estacionamiento. Alfredo Irizarri estaciona su auto de las 9:00 a.m. a las 5:00 p.m., cinco días a la semana.

**a)** ¿Cuál es su costo semanal por el estacionamiento?

**b)** ¿Cuánto dinero ahorraría si pagara una tarifa semanal de \$35.00?

23. **Militares** La siguiente gráfica muestra el área de la defensa en que las mujeres se enlistaron al mes de enero de 2001. Si el número total de mujeres que se dio de alta es aproximadamente de 91,600, determine cuántas mujeres más se enlistaron en el ejército que en la marina.



Fuente: Departamento de Defensa de los E.U.



Consulte el ejercicio 24. b)

24. **Valores de la energía** La siguiente tabla proporciona los valores aproximados de la energía de ciertos alimentos, y el consumo de energía aproximado de algunas actividades, en kilojoules (kJ). Determine cuánto tiempo le tomaría utilizar la energía de los siguientes alimentos.

**a)** una hamburguesa, si corriera

**b)** una malteada de chocolate, si caminara

**c)** un vaso de leche descremada, con ciclismo

Valor energético, alimento	(kJ)	Consumo de energía, actividad	(kJ/min)
Malteada de chocolate	2,200	Caminata	25
Huevo frito	460	Ciclismo	35
Hamburguesa	1,550	Natación	50
Pastel de fresa	1,440	Carrera	80
Vaso de leche descremada	350		

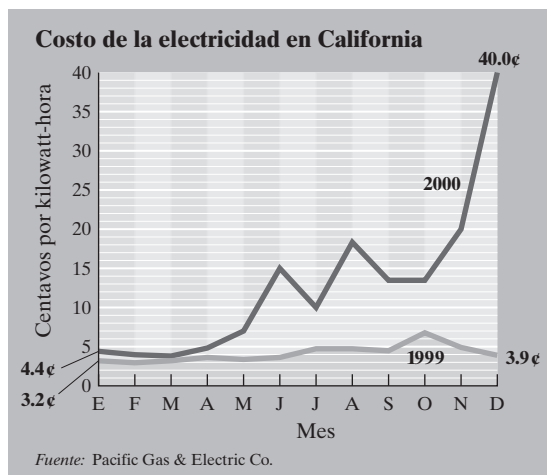
25. **Gasolina por distancia** Cuando el odómetro del auto de Tribet LaPierre da una lectura de 16,741.3, él llena el tanque de gasolina. La siguiente vez que lo llena, caben 10.5 galones y su odómetro indica 16,935.4. Determine el número de millas por galón que rinde su carro.

26. **Jet Ski** El costo de la renta de un jet ski en Don's Ski Rental, es de \$10.00 por 15 minutos, y en Carol's Ski Rental es de \$25 por media hora. Suponga que planea rentar un jet ski por 3 horas.

**a)** ¿Cuál es el mejor trato?

**b)** ¿Cuánto ahorraría?

- 27. Compra de llantas** Eric Weiss compró cuatro llantas por correo. Pagó \$62.30 más \$6.20 de gastos de envío y manejo por cada llanta. No hubo impuesto sobre esta compra. Al recibir las llantas, Eric tuvo que pagar \$8.00 por montar y balancear cada llanta. En una tienda local de llantas, el costo total de las cuatro, con el montaje y balanceo, habría sido de \$425 más 8% de impuesto sobre las ventas. ¿Cuánto ahorró Eric al comprarlas por correo?
- 28. Costo de la electricidad** Por medio de la gráfica que se muestra, determine la diferencia aproximada en el costo de la electricidad para una familia que usó 1500 kilowatt-hora de electricidad en diciembre de 1999, contra el que tuvo en diciembre de 2000, si adquirieron su electricidad de Pacific Gas & Electric Company.



- 29. Impuestos al ingreso** En la siguiente tabla se ilustra el tabulador de la tasa de impuesto federal sobre el ingreso para 2001.

Ingreso bruto ajustado	Impuestos
\$0 – \$45,200	15% del ingreso
\$45,200 – \$109,250	\$6,780.00 + 27.5% de lo que sobrepase de \$45,200
\$109,250 – \$166,500	\$24,393.75 + 30.5% de lo que sobrepase de \$109,250
\$166,500 – \$297,350	\$41,855.00 + 35.5% de lo que sobrepase de \$166,500
\$297,350 y más	\$88,306.75 + 39.1% de lo que sobrepase de \$297,350

- a) Si el ingreso bruto ajustado de los Donovin en 2001 fue de \$34,612, determine sus impuestos.
- b) Si el ingreso bruto ajustado de los Ortega en 2001 fue de \$53,710, determine sus impuestos.

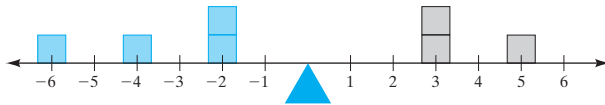
- 30. Conversiones** a) ¿A cuánto equivale 1 milla por hora en pies por hora? En una milla hay 5280 pies.
- b) ¿A cuánto equivale 1 milla por hora en pies por segundo?
- c) ¿A cuánto es igual 60 millas por hora, en pies por segundo?
- 31. Goteo de un grifo** Un grifo que gotea a razón de 1 onza de agua por minuto desperdicia 11.25 galones por día.
- a) ¿Cuántos galones de agua se desperdician en un año (no bisiesto)?
- b) Si el agua cuesta \$5.20 por 1000 galones, ¿cuánto dinero adicional se paga al año en la cuenta respectiva?
- 32. Presión de las llantas** Cuando la presión de las llantas del auto de Sandra Hakanson es de 28 libras por pulgada cuadrada (psi), su carro rinde en promedio 17.3 millas por galón (mpg) de gasolina. Si la presión se incrementa a 32 psi, promedia 18.0 mpg.
- a) ¿Qué tanto más lejos viajaría por cada galón de gasolina, si inflara sus llantas a la presión más elevada?
- b) Si manejara un promedio de 12,000 millas por año, ¿cuántos galones de gasolina ahorraría en un año si incrementara la presión de sus llantas de 28 a 32 psi?
- c) Si la gasolina cuesta \$1.40 por galón, ¿cuánto dinero ahorraría en un año?
- 33. Viaje en taxi** Un taxi cobra \$2 de banderazo a un cliente que haga uso de él, y después 30 centavos por cada  $\frac{1}{4}$  de milla que viaje y 20 centavos por cada 30 segundos que pase detenido en el tráfico. David López toma un taxi para viajar una distancia de 3 millas y el vehículo pasa 90 segundos detenido en el tráfico. Determine el costo del viaje de David.
- 34. Seguros** Los conductores menores de 25 años que aprueban un curso de manejo, por lo general tienen un premio en el seguro de su auto que consiste en una rebaja del 10%. La mayoría de las aseguradoras ofrecen esta deducción hasta que el chofer llega a los 25 años de edad. Un curso particular de manejo cuesta \$70. Andre DePue, que acaba de cumplir 18, tiene un seguro para autos que cuesta \$630 por año.
- a) Si se excluye el costo del curso de manejo, ¿cuánto ahorraría Andre en premios por el seguro de su carro, de los 18 a los 25 años, si tomara el curso?
- b) ¿Cuál sería su ahorro neto después de pagar el costo del curso?
- 35. Cuidado de los niños** La siguiente tabla muestra las tarifas promedio por el cuidado de un niño en distintas ciudades. Determine lo siguiente:
- a) La diferencia por el cuidado de los niños si se usa un día de atención en centros en Austin y en Santa Mónica, durante 20 semanas.
- b) El número promedio de horas de cuidadoras vespertinas (con edades de 14 a 18) que se obtendría en Minneapolis, si la cantidad máxima que se desea gastar es de \$132.

Tarifas promedio por	Austin	Minneapolis	Ciudad de Nueva York	Santa Monica, Calif.
<b>Día de cuidado en un centro<sup>1</sup></b>	\$109/semana	\$135/semana	\$350/semana	\$480/semana
<b>Niñera (tiempo completo)</b>	\$550/semana	\$575/semana	\$650/semana	\$700/semana
<b>Niñera (tiempo parcial)</b>	\$12/hora	\$12/hora	\$14/hora	\$13/hora
<b>Niñera vespertina (18 años o más)</b>	\$12/hora	\$10/hora	\$13/hora	\$12/hora
<b>Niñera vespertina (edad de 14 a 18)</b>	\$7/hora	\$6/hora	\$8/hora	\$7/hora

<sup>1</sup>para un preescolar.  
Fuente: Money magazine, sept. de 2001.

36. **Salarios en el béisbol** Alex Rodríguez, de los Texas Rangers, fue el jugador profesional de béisbol mejor pagado en 2001, con ingresos de \$25.2 millones. Roger Clemens, de los Yanquis de Nueva York, fue el lanzador mejor pagado, con \$15.5 millones. En 2001, Rodríguez bateó 632 veces y Clemens (en la temporada regular) lanzó 220.1 entradas. Determine aproximadamente cuánto más recibió Clemens por entrada lanzada que Rodríguez por cada batazo.

37. **Equilibrio** Considere la figura que se muestra. Suponga que las barras grises y rojas tienen el mismo peso, ¿en dónde debe colocarse un bloque gris, ■, para que la escala esté equilibrada? Explique cómo determinó su respuesta.



38. **Exámenes** El promedio de Andy Gilfillan en seis exámenes es de 78. Encuentre la suma de estas calificaciones.
39. **Costo de un hotel** Lisa Davis, consultora, pasó una noche en cada uno de 8 hoteles diferentes cuando hacía negocios. La cantidad total de las cuentas de los 8 hoteles fue de \$1470.72. Determine el costo medio de su estancia en los hoteles.
40. **Datos de construcción** Elabore un conjunto de cinco datos individuales cuya media sea de 70 sin que haya dos valores iguales.
41. **Calificaciones de exámenes** Se necesita obtener una media de 60 en todos los exámenes para aprobar un curso. En sus primeros cinco exámenes, las calificaciones de Lamond Paine fueron de 50, 59, 67, 80 y 56.
- a) ¿Cuál es la calificación mínima que Lamond debe obtener en el sexto examen para poder aprobar el curso?

- b) Es necesario un promedio de 70 para alcanzar una C en el curso. ¿Es posible esto para Lamond? Si así fuera, ¿cuál es la calificación mínima que debería obtener en el sexto examen?

42. **Ingresos** Considere los siguientes datos proporcionados en un reporte periodístico del 18 de julio de 2002 por la U.S. Census Bureau. Los datos muestran el promedio de ingresos durante la vida de individuos con diferente grado de educación.

Suponga que la persona promedio trabaja 40 años, 40 horas a la semana y 48 semanas por año (ignore los días festivos y vacaciones).

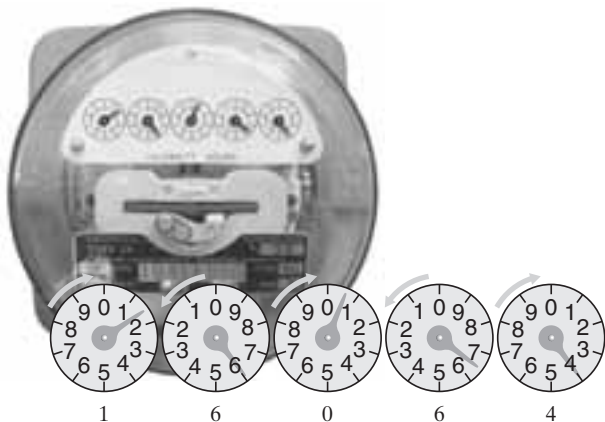
Ingresos promedio durante la vida	
Educación	Ingresos
Grado profesional	\$4.4 millones
Doctorado	\$3.4 millones
Maestría	\$2.5 millones
Licenciatura	\$2.1 millones
Pasante o carrera técnica	\$1.6 millones
Certificado de preparatoria	\$1.2 millones

- a) Determine el número de horas que se trabaja en una vida.
- b) Calcule el salario promedio por hora de una persona con certificado de preparatoria
- c) Obtenga el salario promedio por hora para una persona con grado profesional.
43. **Esperanza de vida** En octubre de 2001, la U.S. Census Bureau anunció que la esperanza<sup>o</sup> de vida de los estadounidenses se había incrementado un poco, a 76.9 años. ¿Cree usted que la institución utiliza la media o la mediana? Explique.

## Problema de desafío

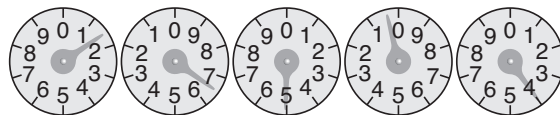
44. **Medidores** La figura en la parte superior izquierda de la siguiente página muestra cómo leer un medidor de electricidad (o gasolina).
1. Comience con el medidor de la derecha. Use el número más pequeño (excepto cuando esté entre 9 y 0; en tal caso utilice el 9). Observe que las flechas sobre el medidor indican la dirección en que se mueve la aguja (en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, y después en sentido contrario).

2. Si la aguja está directamente sobre un número, vea el medidor de la *derecha* para asegurarse de que rebasó el 0 y está apuntando hacia el 1. Si el medidor de la derecha no ha pasado el 0, utilice el número más bajo siguiente. El número en los medidores de la parte superior izquierda de la página es 16064.



Fuente: Southern California Edison, Understanding Your Electricity Bill

Suponga que la lectura del mes anterior es la que se muestra a la izquierda, y que la de este mes es la siguiente.



- Determine la lectura para este mes.
- Determine el costo de la electricidad para este mes, primero con la resta de la lectura del mes anterior de la del actual (se mide en kilowatt-hora), y después multiplique la diferencia por el costo por kilowatt-hora de electricidad. Suponga que la electricidad cuesta 24.3 centavos por kilowatt-hora.

### 1.3 FRACCIONES



- Conocer los símbolos de la multiplicación e identificar los factores.
- Reducir fracciones.
- Multiplicar fracciones.
- Dividir fracciones.
- Sumar y restar fracciones.
- Convertir números mixtos a fracciones, y viceversa.

Con frecuencia, los estudiantes que cursan álgebra por primera vez preguntan “¿cuál es la diferencia entre la aritmética y el álgebra?”. Al hacer aritmética, se conocen todas las cantidades que se usan en los cálculos. Sin embargo, en álgebra hay una o más cantidades que se desconocen y deben calcularse.

**EJEMPLO 1** **Harina necesaria para una receta** Una receta requiere 3 tazas, la señora Clark tiene dos. ¿Cuántas tazas más necesita?

**Solución** La respuesta es 1 taza.



Aunque es muy elemental, éste es un ejemplo de problema algebraico. La cantidad desconocida es el número de tazas adicionales de harina necesarias.

Para tener éxito en álgebra es esencial entender los números decimales (vea el apéndice A) y las fracciones. Usted debe saber cómo simplificar una fracción y sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones. En esta sección revisaremos estos temas. También explicaremos el significado de los factores.

#### 1 Conocer los símbolos de la multiplicación e identificar los factores

Con frecuencia, en álgebra utilizamos letras llamadas **variables** para representar a los números. Las letras que más se utilizan como variables son ***x***, ***y*** y ***z***, pero también pueden emplearse otras letras. Por lo general, las variables se escriben con cursivas. Por ello no hay confusión entre la variable ***x*** y el signo de multiplicación, aunque por lo general se emplea notación diferente para indicar una multiplicación.

**Símbolos de multiplicación**

Si  $a$  y  $b$  representan dos cantidades matemáticas cualesquiera, entonces podemos utilizar cada una de las siguientes expresiones para indicar el producto de  $a$  y  $b$  (“ $a$  por  $b$ ”).

$$ab \quad a \cdot b \quad a(b) \quad (a)b \quad (a)(b)$$

**Ejemplos**

3 por 4  
se escribe:

$$3(4) \\ (3)4 \\ (3)(4)$$

3 por  $x$   
se escribe:

$$3x \\ 3(x) \\ (3)x \\ (3)(x)$$

$x$  por  $y$   
se escribe:

$$xy \\ x(y) \\ (x)y \\ (x)(y)$$

Ahora introduciremos el término *factores*, que emplearemos en todo el libro. A continuación se define factores.

**DEFINICIÓN**

Los números o variables multiplicados en un problema de multiplicación se llaman **factores**.

Si  $a \cdot b = c$ , entonces  $a$  y  $b$  son *factores* de  $c$ .

Por ejemplo, en  $3 \cdot 5 = 15$ , los números 3 y 5 son factores del producto 15. En  $2 \cdot 15 = 30$ , los números 2 y 15 son factores del producto 30. Observe que 30 tiene otros muchos factores. Como  $5 \cdot 6 = 30$ , los números 5 y 6 también son factores de 30. Debido a que  $3x$  significa 3 por  $x$ , tanto 3 como  $x$  son factores de  $3x$ .

**2 Reducir fracciones**

Ahora tenemos la información necesaria para analizar las **fracciones**. El número que está en la parte superior de una fracción se llama **numerador**, y el que está en la parte inferior recibe el nombre de **denominador**. En la fracción  $\frac{3}{5}$ , 3 es el numerador y 5 el denominador.

**SUGERENCIA**

Considere la fracción  $\frac{3}{5}$ . Hay métodos equivalentes para expresarla, como se ilustra a continuación.

$$\frac{3}{5} = 3 \div 5 = 5\overline{)3}$$

En general,  $\frac{a}{b} = a \div b = b\overline{)a}$

Ahora se estudiará cómo simplificar una fracción.

Una fracción se **simplifica** (o **reduce a su mínima expresión**) cuando el numerador y el denominador no tienen factores comunes distintos de 1. Para simplificar una fracción, siga estos pasos.

**Para simplificar una fracción**

1. Determine el número mayor que dividida (sin residuo) tanto al numerador como al denominador. Este número se llama **máximo común divisor** (MCD).
2. Después, divida tanto el numerador como el denominador entre el máximo común divisor.

Si no recuerda cómo encontrar el máximo común divisor de dos o más números, lea el apéndice B.

**EJEMPLO 2** Simplifique **a)**  $\frac{10}{25}$  **b)**  $\frac{6}{18}$ .

**Solución** **a)** El número más grande que divide tanto a 10 como a 25 es 5. Por tanto, 5 es el máximo común divisor. Dividamos tanto el numerador como el denominador entre 5 para simplificar la fracción en su mínima expresión.

$$\frac{10}{25} = \frac{10 \div 5}{25 \div 5} = \frac{2}{5}$$

**b)** Tanto 6 como 18 se dividen entre 1, 2, 3 y 6. El mayor de estos números es 6, por tanto es el máximo común divisor. Divida tanto el numerador como el denominador entre 6.

$$\frac{6}{18} = \frac{6 \div 6}{18 \div 6} = \frac{1}{3}$$



Observe en el ejemplo 2b) que tanto el numerador como el denominador podrían haberse escrito como un producto con un factor común (6). Entonces, el factor común 6 podría eliminarse.

$$\frac{6}{18} = \frac{1 \cdot \cancel{6}}{3 \cdot \cancel{6}} = \frac{1}{3}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 23

Al trabajar con fracciones debe reducir las respuestas a su mínima expresión.

### 3 Multiplicar fracciones

Para multiplicar dos o más fracciones, multiplique sus numeradores y después sus denominadores.

#### Multiplicación de fracciones

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

**EJEMPLO 3** Multiplique  $\frac{3}{13}$  por  $\frac{5}{11}$ .

**Solución**  $\frac{3}{13} \cdot \frac{5}{11} = \frac{3 \cdot 5}{13 \cdot 11} = \frac{15}{143}$



Para evitar tener que simplificar respuestas, es necesario que antes de multiplicar fracciones divida tanto el numerador como el denominador entre el máximo común divisor.

**EJEMPLO 4** Multiplique **a)**  $\frac{8}{17} \cdot \frac{5}{16}$  **b)**  $\frac{27}{40} \cdot \frac{16}{9}$ .

**Solución** **a)** Debido a que el numerador 8 y el denominador 16 son divisibles entre el máximo común divisor 8, primero se divide entre 8 y después se multiplica.

$$\frac{8}{17} \cdot \frac{5}{16} = \frac{\overset{1}{\cancel{8}}}{17} \cdot \frac{5}{\underset{2}{\cancel{16}}} = \frac{1 \cdot 5}{17 \cdot 2} = \frac{5}{34}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 51

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad \frac{27}{40} \cdot \frac{16}{9} &= \frac{\overset{3}{\cancel{27}}}{40} \cdot \frac{16}{\underset{1}{\cancel{9}}} && \text{Se divide tanto 27 como 9 entre 9.} \\
 &= \frac{\overset{3}{\cancel{27}}}{\underset{5}{\cancel{40}}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{16}}}{\underset{1}{\cancel{9}}} && \text{Se divide tanto 40 como 16 entre 8.} \\
 &= \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 1} = \frac{6}{5}
 \end{aligned}$$



Los números 0, 1, 2, 3, 4, ... son llamados **enteros no negativos**. Los tres puntos después del 4, que se denominan *elipsis*, indican que los enteros no negativos continúan en forma indefinida de la misma manera. Por tanto, los números 468 y 5043 también son enteros no negativos. En la sección 1.4 analizaremos los enteros no negativos. Para multiplicar un entero no negativo por una fracción, se escribe el entero no negativo con el denominador de 1 y realice la multiplicación.

**EJEMPLO 5 Motor de una podadora** Ciertos motores operan con una mezcla de gasolina y aceite. El motor de una podadora en particular requiere de una mezcla de  $\frac{5}{64}$  de galón de aceite por cada galón de gasolina que utiliza. Una compañía de jardinería quiere elaborar una mezcla para este motor empleando 12 galones de gasolina. ¿Cuánto aceite debe utilizar?

**Solución** Para determinar la cantidad de aceite por usar debe multiplicarse 12 por  $\frac{5}{64}$ . En primer lugar, se escribe 12 como  $\frac{12}{1}$ , y después se divide tanto 12 como 64 entre su máximo común divisor, 4, como sigue.

$$12 \cdot \frac{5}{64} = \frac{12}{1} \cdot \frac{5}{64} = \frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{1} \cdot \frac{5}{\underset{16}{\cancel{64}}} = \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 16} = \frac{15}{16}$$

Así, para elaborar la mezcla apropiada hay que agregar  $\frac{15}{16}$  de galón de aceite a los 12 galones de gasolina.

## 4 Dividir fracciones

Para dividir una fracción entre otra, invierta el divisor (la segunda fracción, si es que está escrita con el signo  $\div$ ) y proceda como en la multiplicación.

### Para dividir fracciones

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

En ocasiones, en lugar de pedir la respuesta de un problema sumando, restando, multiplicando o dividiendo, se puede solicitar la evaluación de una expresión. **Evaluar** una expresión significa obtener la respuesta al problema por medio de las operaciones dadas.

**EJEMPLO 6** Evaluar a)  $\frac{3}{5} \div \frac{5}{6}$     b)  $\frac{3}{8} \div 12$ .

**Solución** a)  $\frac{3}{5} \div \frac{5}{6} = \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3 \cdot 6}{5 \cdot 5} = \frac{18}{25}$



AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 59

b) Escribir 12 como  $\frac{12}{1}$ . Después, invertir el divisor y multiplicar.

$$\frac{3}{8} \div 12 = \frac{3}{8} \div \frac{12}{1} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{32}$$



## 5 Sumar y restar fracciones

Sólo se pueden sumar o restar las fracciones que tienen el mismo denominador (un denominador común). Para sumar (o restar) fracciones con el mismo denominador, sume (o reste) los numeradores y conserve dicho denominador.

### Suma y resta de fracciones

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{o bien} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

**EJEMPLO 7** Evaluemos a)  $\frac{6}{15} + \frac{2}{15}$     b)  $\frac{8}{13} - \frac{5}{13}$

**Solución** a)  $\frac{6}{15} + \frac{2}{15} = \frac{6+2}{15} = \frac{8}{15}$     b)  $\frac{8}{13} - \frac{5}{13} = \frac{8-5}{13} = \frac{3}{13}$



**Para sumar (o restar) fracciones con denominadores diferentes, primero debemos reescribir dichas fracciones con el mismo, o común, denominador.** El número más pequeño que es divisible entre dos o más denominadores se llama **mínimo común denominador** o mcd [que es el **mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores diferentes**]. Si ha olvidado cómo encontrar el mínimo común denominador, revise el apéndice B.

**EJEMPLO 8** Sumar  $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ .

**Solución** No podemos sumar estas fracciones hasta escribirlas con un denominador común. Como el menor número divisible entre 2 como entre 5 (sin que haya residuo) es 10, primero reescribamos ambas fracciones con el mínimo común denominador, que es 10.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{5} = \frac{5}{10} \quad \text{y} \quad \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2}{10}$$

Ahora se suma.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$$



Observe que al multiplicar tanto el numerador como el denominador por el mismo número es lo mismo que multiplicar por 1. Por ello, el valor de la fracción no cambia.

**EJEMPLO 9** ¿Qué tanto es más grande  $\frac{3}{4}$  de pulgada que  $\frac{2}{3}$  de pulgada?

**Solución** Para saber qué tanto más grande, se necesita restar  $\frac{2}{3}$  de pulgada de  $\frac{3}{4}$  de pulgada.

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$$

El mínimo común denominador es 12. Por tanto, reescribamos ambas fracciones con un denominador igual a 12.

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{9}{12} \quad \text{y} \quad \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{4} = \frac{8}{12}$$

Ahora, se resta.

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 75

Por tanto,  $\frac{3}{4}$  de pulgada es  $\frac{1}{12}$  de pulgada mayor que  $\frac{2}{3}$  de pulgada. 

### CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Es importante darse cuenta de que la cancelación de un factor común en el numerador de una fracción y en el denominador de otra fracción diferente, sólo puede llevarse a cabo cuando se multiplican fracciones. *No es posible realizar dicho proceso cuando se suman o restan fracciones.*

#### PROBLEMAS CORRECTOS DE MULTIPLICACIÓN

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \\ \hline \frac{1}{15} \end{array}$$

#### PROBLEMAS INCORRECTOS DE SUMA

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \\ \hline \frac{2}{8} + \frac{2}{3} \\ \hline \frac{4}{1} \end{array}$$

## 6 Convertir números mixtos a fracciones, y viceversa

Considere el número  $5\frac{2}{3}$ . Éste es un ejemplo de **número mixto**. Un número mixto consta de un entero no negativo seguido de una fracción. El número mixto  $5\frac{2}{3}$  significa  $5 + \frac{2}{3}$ . El número mixto  $5\frac{2}{3}$  puede cambiarse a una fracción de la siguiente manera:

$$5\frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3} = \frac{15}{3} + \frac{2}{3} = \frac{15 + 2}{3} = \frac{17}{3}$$

Note que expresamos el entero no negativo, 5, como una fracción con denominador 3, y entonces sumamos las fracciones.

**EJEMPLO 10** Cambiar  $7\frac{3}{8}$  a fracción.

**Solución**

$$7\frac{3}{8} = 7 + \frac{3}{8} = \frac{56}{8} + \frac{3}{8} = \frac{56 + 3}{8} = \frac{59}{8}$$

Ahora, considere la fracción  $\frac{17}{3}$ . Esta fracción se convierte a un número mixto, como sigue:

$$\frac{17}{3} = \frac{15}{3} + \frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3} = 5\frac{2}{3}$$

Observe que se escribió  $\frac{17}{3}$  como la suma de dos fracciones, cada una con el denominador de 3. La primera fracción que se suma es el equivalente del entero más grande que es menor de  $\frac{17}{3}$ .

**EJEMPLO 11** Cambiar  $\frac{43}{6}$  a un número mixto.

**Solución**

$$\frac{43}{6} = \frac{42}{6} + \frac{1}{6} = 7 + \frac{1}{6} = 7\frac{1}{6}$$

**SUGERENCIA**

Observe que en el ejemplo 11, la fracción  $\frac{43}{6}$  es una fracción simplificada debido a que el máximo común divisor del numerador y del denominador es 1. No hay que confundir la simplificación de una fracción con el cambio de una fracción con valor mayor que 1 a un número mixto. La fracción  $\frac{43}{6}$  puede convertirse al número mixto  $7\frac{1}{6}$ . Sin embargo,  $\frac{43}{6}$  es una fracción simplificada.

Ahora, se resolverán ejemplos que contienen números mixtos.

**EJEMPLO 12**

**Plomería** Para reparar una fuga en un tubo, se pega un acoplamiento de  $\frac{1}{2}$  pulgada de largo a un tubo de plástico que mide  $2\frac{9}{16}$  pulgadas de largo. ¿Cuál es el largo de la combinación? Vea la figura 1.4.

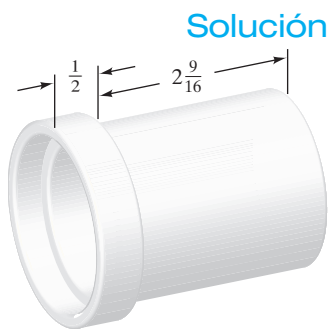


FIGURA 1.4

**Solución**

**Entender y traducir** Es necesario sumar  $2\frac{9}{16}$  pulgadas más  $\frac{1}{2}$  pulgada para obtener las longitudes combinadas. Se colocarán los dos números uno sobre el otro. Después de que se escriban las dos fracciones con un denominador común, se sumará.

**Calcular**

$$\begin{array}{r} 2\frac{9}{16} \\ + \frac{1}{2} \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 2\frac{9}{16} \\ + \frac{8}{16} \\ \hline 2\frac{17}{16} \end{array}$$

Como  $2\frac{17}{16} = 2 + \frac{17}{16} = 2 + 1\frac{1}{16} = 3\frac{1}{16}$ , la suma es  $3\frac{1}{16}$ .

**Revisar y responder** La respuesta parece razonable. Así, la longitud total es de  $3\frac{1}{16}$  pulgadas.

**EJEMPLO 13**

**Crece más** La gráfica de la figura 1.5 muestra la altura de Kelly el 1 de enero de 2002 y el 1 de enero de 2003. ¿Cuánto creció Kelly durante ese lapso?

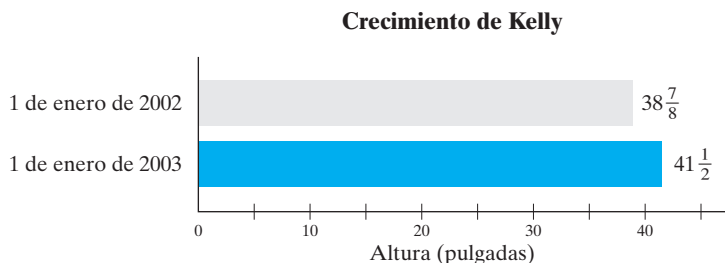


FIGURA 1.5

**Solución**


**Entender y traducir** Para encontrar el crecimiento, es necesario restar la altura del 1 de enero de 2002 de la del 1 de enero de 2003; la resta se hará en forma vertical.

**Calcular**

$$\begin{array}{r} 41\frac{1}{2} \\ - 38\frac{7}{8} \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 41\frac{4}{8} \\ - 38\frac{7}{8} \\ \hline \end{array}$$

Como deseamos restar  $\frac{7}{8}$  de  $\frac{4}{8}$ , y  $\frac{7}{8}$  es mayor que  $\frac{4}{8}$ , escribimos  $41\frac{4}{8}$  como  $40\frac{12}{8}$ . Para obtener  $40\frac{12}{8}$ , tomamos 1 unidad del número 41 y la escribimos como  $\frac{8}{8}$ . Esto da  $40 + 1 + \frac{4}{8} = 40 + \frac{8}{8} + \frac{4}{8} = 40 + \frac{12}{8} = 40\frac{12}{8}$ . Ahora se resta como sigue.

$$\begin{array}{r} 41\frac{1}{2} \\ -38\frac{7}{8} \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 41\frac{4}{8} \\ -38\frac{7}{8} \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 40\frac{12}{8} \\ -38\frac{7}{8} \\ \hline 2\frac{5}{8} \end{array}$$

**Revisar y responder** Al examinar la gráfica, observamos que la respuesta es razonable. Por lo tanto, Kelly creció  $2\frac{5}{8}$  pulgadas en ese tiempo. 

Aunque no es necesario cambiar números mixtos a fracciones cuando se suman o restan éstos, es necesario cambiarlos a fracciones si se multiplican o dividen. Este procedimiento se ilustra con el ejemplo 14.

**EJEMPLO 14 Cortar tiras** Una pieza rectangular de material de 3 pies de ancho por  $12\frac{1}{2}$  pies de largo, se corta en cinco tiras iguales, como se ilustra en la figura 1.6. Encuentre las dimensiones de cada tira.

### Solución

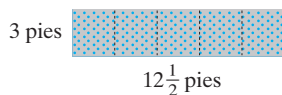



FIGURA 1.6

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 95

**Entender y traducir** Por el diagrama sabemos que un lado tendrá un ancho de 3 pies. Para encontrar el largo de las tiras, necesitamos dividir  $12\frac{1}{2}$  entre 5.

**Calcular**

$$12\frac{1}{2} \div 5 = \frac{25}{2} \div \frac{5}{1} = \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

**Revisar y responder** Si multiplicamos  $2\frac{1}{2}$  por 5, obtenemos la longitud original de  $12\frac{1}{2}$ . Por lo tanto, el cálculo fue correcto. Las dimensiones de cada tira serán de 3 pies por  $2\frac{1}{2}$  pies. 

## Conjunto de ejercicios 1.3

### Ejercicios conceptuales

1. a) ¿Qué son las variables?  
b) ¿Qué letras es frecuente utilizar para representar variables?
2. ¿Qué son los factores?
3. Muestre cinco formas diferentes en que puede escribirse "5 por  $x$ ".
4. En una fracción, ¿cuál es el nombre de a) el número de arriba, y b) el número de abajo?
5. Explique cómo se simplifica una fracción.
6. a) ¿Cómo se llama a los tres puntos en la secuencia 4, 5, 6, 7, ...?  
b) ¿Qué significan los tres puntos que siguen al 7?
7. a) ¿Cuál es el mínimo común denominador de dos o más fracciones?  
b) Escriba dos fracciones y después dé el mcd de ellas.
8. ¿Cuál es el mcd de las fracciones  $\frac{3}{8}$  y  $\frac{7}{10}$ ? Explique.

En los ejercicios 9 y 10, ¿cuál inciso, a) o b), presenta una fracción que se simplifica? Explique su respuesta.

9. a)  $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$       b)  $\frac{2}{4}$
10. a)  $\frac{4}{12}$       b)  $\frac{7}{12} \cdot \frac{1}{5}$

En los ejercicios 11 y 12, uno de los procedimientos a) o b) es incorrecto. Determine cuál es y explique por qué.

11. a)  $\frac{1}{5} + \frac{3}{8}$     b)  $\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{8}$

12. a)  $\frac{4}{15} \cdot \frac{1}{7}$     b)  $\frac{4}{15} + \frac{1}{7}$

En los ejercicios 13 y 14 indique cualesquiera partes en las que pueda dividirse un factor común como primer paso para evaluar la expresión. Explique su respuesta.

13. a)  $\frac{4}{5} + \frac{1}{4}$     b)  $\frac{4}{5} - \frac{1}{4}$     c)  $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4}$     d)  $\frac{4}{5} \div \frac{1}{4}$

14. a)  $6 + \frac{5}{12}$     b)  $6 \cdot \frac{5}{12}$     c)  $6 - \frac{5}{12}$     d)  $6 \div \frac{5}{12}$

15. Explique cómo se multiplican las fracciones.

16. Diga cómo se dividen las fracciones.

17. Explique cómo se suman o restan fracciones.

18. Dé un ejemplo de número mixto.

19. ¿La fracción  $\frac{24}{5}$  está simplificada? Explique su respuesta.

20. ¿La fracción  $\frac{20}{3}$  está simplificada? Explique su respuesta.

## Práctica de habilidades

Simplifique cada fracción. Si una de ellas ya está simplificada, dígalo.

21.  $\frac{3}{12}$

22.  $\frac{40}{10}$

23.  $\frac{10}{15}$

24.  $\frac{19}{25}$

25.  $\frac{17}{17}$

26.  $\frac{9}{21}$

27.  $\frac{36}{76}$

28.  $\frac{16}{72}$

29.  $\frac{40}{264}$

30.  $\frac{60}{105}$

31.  $\frac{12}{25}$

32.  $\frac{80}{124}$

Convierta cada número mixto en una fracción.

33.  $2\frac{3}{5}$

34.  $5\frac{1}{3}$

35.  $2\frac{13}{15}$

36.  $6\frac{5}{12}$

37.  $4\frac{3}{4}$

38.  $6\frac{2}{9}$

39.  $4\frac{13}{19}$

40.  $3\frac{3}{32}$

Escriba cada fracción como un número mixto.

41.  $\frac{7}{4}$

42.  $\frac{17}{5}$

43.  $\frac{15}{4}$

44.  $\frac{9}{2}$

45.  $\frac{110}{20}$

46.  $\frac{67}{13}$

47.  $\frac{32}{7}$

48.  $\frac{72}{14}$

Encuentre cada producto o cociente. Simplifique la respuesta.

49.  $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$

50.  $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7}$

51.  $\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{15}$

52.  $\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{15}$

53.  $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$

54.  $\frac{15}{16} \cdot \frac{4}{3}$

55.  $\frac{3}{8} \div \frac{3}{4}$

56.  $\frac{3}{8} \cdot \frac{10}{11}$

57.  $\frac{5}{12} \div \frac{4}{3}$

58.  $\frac{15}{4} \cdot \frac{2}{3}$

59.  $\frac{10}{3} \div \frac{5}{9}$

60.  $\frac{12}{5} \div \frac{3}{7}$

61.  $\left(2\frac{1}{5}\right)\left(\frac{7}{8}\right)$

62.  $\frac{28}{13} \cdot \frac{2}{7}$

63.  $5\frac{3}{8} \div 1\frac{1}{4}$

64.  $4\frac{4}{5} \div \frac{8}{15}$

Sume o reste. Simplifique cada respuesta.

65.  $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$

66.  $\frac{3}{8} + \frac{2}{8}$

67.  $\frac{5}{12} - \frac{1}{12}$

68.  $\frac{18}{36} - \frac{1}{36}$

69.  $\frac{8}{17} + \frac{2}{34}$

70.  $\frac{3}{7} + \frac{17}{35}$

71.  $\frac{4}{5} + \frac{6}{15}$

72.  $\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$

73.  $\frac{1}{6} - \frac{1}{18}$

74.  $\frac{11}{28} + \frac{1}{7}$

75.  $\frac{5}{12} - \frac{1}{8}$

76.  $\frac{5}{8} - \frac{4}{7}$

77.  $\frac{7}{12} - \frac{2}{9}$

78.  $\frac{3}{7} + \frac{5}{12}$

79.  $\frac{5}{9} - \frac{4}{15}$

80.  $\frac{1}{32} + \frac{5}{12}$

81.  $6\frac{1}{3} - 3\frac{1}{5}$

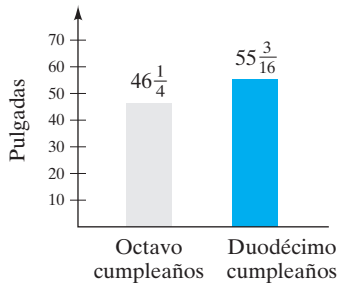
82.  $2\frac{3}{8} + \frac{1}{4}$

83.  $5\frac{3}{4} - \frac{1}{3}$

84.  $2\frac{1}{3} + 1\frac{1}{8}$

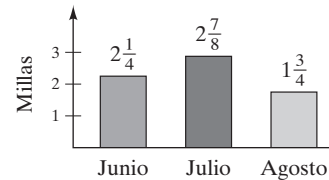
### Solución de problemas

85. **Aumento de estatura** La siguiente gráfica muestra la estatura de Kim Brugger, en pulgadas, en su octavo y duodécimo cumpleaños. ¿Cuánto creció Kim en los 4 años?



86. **Pavimentación de un camino** La siguiente gráfica muestra el avance de la Davenport Paving Company en la pavimentación de la Memorial Highway. ¿Qué tanto de la autopista se pavimentó de junio a agosto?

Autopista pavimentada en meses seleccionados



En muchos problemas se necesitará restar una fracción de 1, en donde 1 representa “el todo” o la “cantidad total”. Los ejercicios 87 a 90 se responden al restar la fracción dada de 1.

87. **Empleados en línea** En 2001, aproximadamente  $\frac{25}{36}$  de todos los empleados de los E.U. estaban en línea. ¿Qué fracción de todos ellos no estaban en línea en 2001?
88. **Calentamiento global** La probabilidad de que un evento no ocurra se encuentra al restar a 1 la probabilidad de que sí ocurra. Si la probabilidad de que esté ocurriendo un calentamiento global es de  $\frac{7}{9}$ , encuentre la probabilidad de que no esté sucediendo.
89. **Venta de camiones** Utilice la siguiente gráfica para determinar la fracción aproximada del mercado, de las ventas de camionetas, minivanes y SUV, que se importaron en 2001.

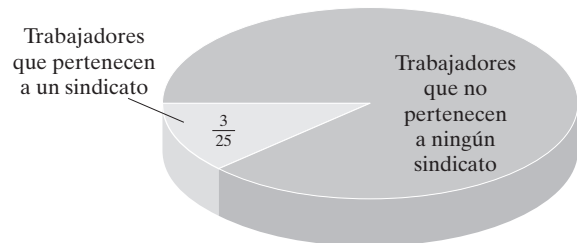
Ventas en E.U. en 2001 para camionetas, minivanes y SUV.



Fuente: J.D. Power and Associates

90. **Miembros de sindicatos** La siguiente gráfica ilustra la fracción aproximada de trabajadores de E.U. que pertenecían a sindicatos en 2001. Determine la fracción de trabajadores de E.U. que no pertenecían a ningún sindicato en ese año.

Miembros de sindicatos en E.U., 2001

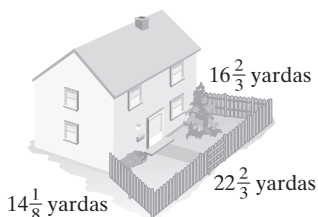


Fuente: Bureau of Labor Statistics

91. **Peso de camiones** Un camión de plataforma que pesa  $4\frac{1}{2}$  toneladas carga dos automóviles. Uno de éstos pesa  $1\frac{1}{6}$  ton y el otro  $1\frac{3}{4}$  ton. ¿Cuál es el peso total del camión con los dos autos?

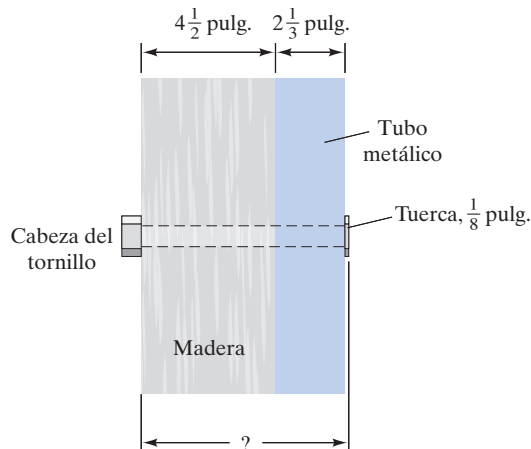


92. **Corte de madera** De una pieza de madera de  $3\frac{1}{16}$  pulgadas de longitud, se corta un trozo de  $16\frac{3}{4}$  pulgadas. ¿Cuál es la longitud del trozo sobrante?
93. **Crecimiento de la albina** Una serpiente pitón albina de Cypress Gardens, Florida, al nacer medía 3 pies  $3\frac{1}{4}$  pulgadas. Su longitud actual es de 15 pies  $2\frac{1}{2}$  pulgadas. ¿Cuánto ha crecido desde que nació?
94. **Largo de los pantalones** El largo de un par de pantalones nuevos es 30 pulgadas. Si la talla de Sean Leland es de  $28\frac{3}{8}$  pulgadas, ¿cuánto necesita cortarse a la prenda?
95. **Corte de madera** Dawn Foster cortó una pieza de madera que medía  $3\frac{1}{8}$  pulgadas en dos piezas iguales. ¿Cuánto mide cada pieza?
96. **Hornear el pavo** Las instrucciones en un pavo indican que uno que pese entre 12 a 16 libras debe hornearse a  $325^{\circ}\text{F}$  durante 22 minutos por libra. Donna Draus planea hornear un pavo de  $13\frac{1}{2}$  libras. ¿Aproximadamente cuánto tiempo debe hornear el pavo?
97. **Cebollas cortadas** Una receta para carne asada requiere  $\frac{1}{4}$  tasa de cebollas cortadas por cada libra de carne. Para  $5\frac{1}{2}$  libras de filete, ¿cuántas tasas de cebolla cortada se necesitan?
98. **Cerca** Rick O'Shea quiere cercar su patio, según se ilustra. Los tres lados por cercar miden  $16\frac{2}{3}$  yardas,  $22\frac{2}{3}$  yardas y  $14\frac{1}{8}$  yardas.



- a) ¿Qué longitud de cerca necesitará Rick?
- b) Si Rick comprara 60 yardas de cerca, ¿cuánta sobraría?
99. **Champú** Una botella de champú contiene 15 onzas de fluido. Si Tierra Bentley utiliza  $\frac{3}{8}$  de onza cada vez que lava su cabello, ¿cuántas veces lo lavará Tierra con una botella?
100. **Dosis de medicamento** Una enfermera debe dar  $\frac{1}{16}$  de miligramo de cierta medicina por cada kilogramo que pese el paciente. Si el Sr. Duncan pesa 80 kilogramos, calcule la cantidad de medicina que debe dársele.
101. **Ventanas** Una ventana aislada para una casa está construida con dos piezas de vidrio, cada una de  $\frac{1}{4}$  de pulgada de espesor, con un espacio de 1 pulg entre ellas. ¿Cuál es el espesor total de esta ventana?
102. **Pie de crema** Un *pie* de crema de Boston pesa  $1\frac{5}{16}$  libras. Si el *pie* se divide en partes iguales para 6 personas, ¿cuánto corresponderá a cada una?

103. **Madera cortada** Un tramo de 28 pulgadas de madera va a cortarse en tiras de  $4\frac{2}{3}$  de pulgada. ¿Cuántas tiras completas se obtendrán? Ignore la pérdida de madera debido a los cortes.
104. **Tornillos sujetadores** Un mecánico quiere utilizar un tornillo para unir una pieza de madera de  $4\frac{1}{2}$  pulgadas de espesor a un tubo de  $2\frac{1}{3}$  pulgadas de espesor. Si el espesor de la tuerca es de  $\frac{1}{8}$  de pulgada, calcule la longitud del eje del tornillo de modo que la tuerca se ajuste a la perfección con el extremo del tornillo (consulte la siguiente figura).



105. **Gabinete para computadora** Marcinda James planea comprar una computadora por correo. El catálogo describe una que mide  $7\frac{1}{2}$  pulgadas de alto con un monitor de  $14\frac{3}{8}$  pulgadas de altura. Marcinda espera colocar el monitor sobre la computadora y los dos elementos juntos dentro de cierto espacio, según se muestra en seguida.



- a) ¿Habrá suficiente altura para hacer esto?
- b) Si así fuera, ¿cuánto espacio sobrante habría?
- c) Encuentre la altura total del mueble para la computadora.
106. **Refresco** Si cinco botellas de 2 litros van a distribuirse por igual entre 30 personas, ¿cuánto corresponderá a cada una?

## Problemas de reto

107. Suma o resta las siguientes fracciones por medio de la regla que se estudió en esta sección. Su respuesta debe consistir en una sola fracción, y contener los símbolos que se dan en el ejercicio.

a)  $\frac{*}{a} + \frac{?}{a}$       b)  $\frac{\ominus}{?} - \frac{\square}{?}$

c)  $\frac{\triangle}{\square} + \frac{4}{\square}$       d)  $\frac{x}{3} - \frac{2}{3}$

e)  $\frac{12}{x} - \frac{4}{x}$

108. Multiplique las siguientes fracciones por medio de la regla que se estudió en esta sección. La respuesta debe consistir en una sola fracción y contener los símbolos que se dan en el ejercicio.

a)  $\frac{\triangle}{a} \cdot \frac{\square}{b}$

b)  $\frac{6}{3} \cdot \frac{\triangle}{\square}$

c)  $\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b}$

d)  $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{y}$

e)  $\frac{3}{x} \cdot \frac{x}{y}$

109. **Dosis de medicina** Una píldora de alopurina viene en dosis de 300 miligramos. La Dra. Highland quiere que una paciente corte las píldoras a la mitad y tome  $\frac{1}{2}$  píldora tres veces al día para que consuma 450 miligramos cada día. Si quiere prescribir píldoras suficientes para un periodo de 6 meses (suponga 30 días por mes), ¿cuántas píldoras debe prescribir?



## Actividad en grupo

Estudie y responda en grupo el ejercicio 110.

110. **Papas** La siguiente tabla da la cantidad de cada ingrediente que se recomienda para obtener 2, 4 y 8 porciones de papas instantáneo.

Porciones	2	4	8
Agua	$\frac{2}{3}$ de taza	$1\frac{1}{3}$ taza	$2\frac{2}{3}$ tazas
Leche	2 tazas	$\frac{1}{3}$ de taza	$\frac{2}{3}$ de taza
Mantequilla*	1 taza	2 tazas	4 tazas
Sal†	$\frac{1}{4}$ de taza	$\frac{1}{2}$ taza	1 taza
Hojuelas de papa	$\frac{2}{3}$ de taza	$1\frac{1}{3}$ taza	$2\frac{2}{3}$ tazas
* O margarina.			
† Si lo desea, utilice menos sal.			

Determine la cantidad de hojuelas de papa y la leche que se necesita para hacer 6 porciones con los diferentes métodos que se describen. Al trabajar con la leche considere que 16 cucharadas soperas = 1 taza.

- a) Miembro 1 del grupo: determine la cantidad de hojuelas de papa y leche necesarias para elaborar 6 porciones; multiplique por 3 las cantidades para 2 porciones.
- b) Miembro 2 del grupo: determine las cantidades, por medio de una suma, es decir, sume las cantidades necesarias para dos porciones a las cantidades necesarias para 4 porciones.
- c) Miembro 3 del grupo: Calcule las cantidades mediante el promedio (media) de 4 y 8 porciones.
- d) Como grupo, determinen la cantidad restando la cantidad para 2 porciones de la cantidad que se utiliza para 8 porciones.
- e) Como grupo, comparen sus respuestas de los incisos a) al d). ¿Son las mismas? Si no lo fueran, ¿podrían explicar por qué? (Esto tal vez sea un tanto rebuscado.)

## Ejercicios de repaso acumulativo

[1.1] 111. ¿Cuál es el nombre y las horas de oficina de su profesor?

[1.2] 112. ¿Cuál es la media de 9, 8, 15, 32, 16?

113. ¿Cuál es la mediana de 9, 8, 15, 32, 16?

[1.3] 114. ¿Qué son las variables?

## 1.4 EL SISTEMA DE NÚMEROS REALES



- 1 Identificar conjuntos de números.
- 2 Conocer la estructura de los números reales.

En este libro de texto hablaremos y utilizaremos diversos tipos de números. Esta sección, que presenta algunos de esos números y la estructura del sistema de números reales, es un rápido vistazo.

## 1 Identificar conjuntos de números

Un **conjunto** es una colección de **elementos** enumerados entre llaves  $\{ \}$ . El conjunto  $\{a, b, c, d, e\}$  consta de cinco elementos, que son  $a, b, c, d$  y  $e$ . Un conjunto que no contiene elementos se denomina **conjunto vacío** (o **conjunto nulo**). Los símbolos  $\{ \}$  o  $\emptyset$  se utilizan para representar al conjunto vacío.

Existen muchos conjuntos diferentes de números. Dos conjuntos importantes son los números naturales y los enteros no negativos, estos últimos ya presentados.

**Números naturales:**  $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

**Enteros no negativos:**  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Para comprender los conjuntos de los números, se puede recurrir a la recta de los números reales (vea la figura 1.7).

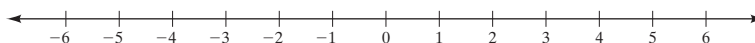


FIGURA 1.7

La recta de los números reales continúa en forma indefinida en ambas direcciones. Los números a la derecha del 0 son positivos, y los que están a la izquierda del 0 son negativos. El cero no es positivo ni negativo (vea la figura 1.8).



FIGURA 1.8

En la figura 1.9 se indican los números naturales en una recta numérica. Los naturales también se llaman **enteros positivos** o **números para conteo**.

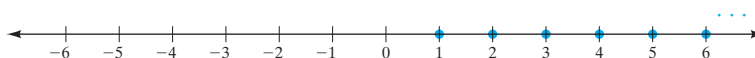


FIGURA 1.9

Otro conjunto importante de números es el de los enteros.

**Enteros:**  $\{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$   
Enteros negativos Enteros positivos

Los enteros constan de los enteros negativos, 0, y los enteros positivos. Los enteros están señalados en la recta numérica (figura 1.10).



FIGURA 1.10

¿Puede pensar en algún número que no sea entero? Probablemente piense en *fracciones* o *números decimales*. Estos números pertenecen al conjunto de números racionales. El conjunto de **números racionales** consta de todos los números que se expresan como cociente de dos enteros, con el denominador distinto de 0.

**Números racionales** {cociente de dos enteros, denominador distinto de 0}

Todos los enteros son racionales puesto que es posible expresarlos con un denominador de 1. Por ejemplo,  $3 = \frac{3}{1}$ ,  $-12 = \frac{-12}{1}$ , y  $0 = \frac{0}{1}$ . Todas las fracciones que contienen enteros en el numerador y en el denominador (diferente de 0), son números racionales. Por ejemplo, la fracción  $\frac{3}{5}$  es el cociente de dos enteros y por ello es un número racional.

Cuando una fracción que es razón de dos enteros se convierte a número decimal con la división del numerador entre el denominador, el cociente siempre será un *número decimal terminal*, como 0.3 y 3.25, o un *número decimal repetitivo* como 0.3333..., y 5.2727.... Los tres puntos al final de un número como 0.333... indican que el número se repite en forma indefinida. Todos los números decimales terminales y los repetitivos son números racionales que es posible expresar como cociente de dos enteros. Por ejemplo,  $0.3 = \frac{3}{10}$ ,  $3.25 = \frac{325}{100}$ ,  $0.3333\dots = \frac{1}{3}$  y  $5.2727\dots = \frac{522}{99}$ . En la figura 1.11 se ilustran algunos números racionales sobre la recta numérica.



FIGURA 1.11

La mayoría de los números que utilizamos son racionales. Sin embargo, algunos no lo son. Números como la raíz cuadrada de 2, que se escribe  $\sqrt{2}$ , no son racionales. Cualquier número que pueda representarse en la recta numérica y que no sea racional, se denomina **número irracional**. Los números irracionales son números no terminales, no repetitivos. Así, por ejemplo,  $\sqrt{2}$  no puede expresarse con exactitud como un número decimal. Los números irracionales sólo se *aproximan* con números decimales. La  $\sqrt{2}$  es *aproximadamente* 1.41. Por ello, se escribe  $\sqrt{2} \approx 1.41$ . La figura 1.12 ilustra algunos números irracionales en la recta numérica. En capítulos posteriores se estudiará tanto a los números racionales como a los irracionales.

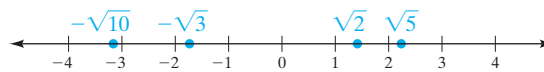


FIGURA 1.12

## 2 Conocer la estructura de los números reales

Observe que es posible ilustrar diversos tipos de números sobre la recta numérica. Cualquier número susceptible de representarse en la recta numérica es un **número real**.

**Números reales:** {todos los números que pueden representarse en una recta numérica}

El símbolo  $\mathbb{R}$  se utiliza para representar el conjunto de números reales. Todos los números mencionados hasta ahora son números reales. Los números naturales, enteros no negativos, enteros, racionales e irracionales, son todos números reales. Existen ciertos tipos de números que no son reales, pero van más allá del alcance de este capítulo. La figura 1.13 ilustra las relaciones entre los distintos conjuntos de números dentro del conjunto de números reales.

En la figura 1.13b se observa que al combinar los números racionales con los irracionales, obtenemos los números reales. Al combinar los enteros con los racionales no enteros (como  $\frac{1}{2}$  y 0.42), obtenemos los números racionales. Al reunir los enteros no negativos y los enteros negativos, obtenemos el conjunto de enteros.

Considere el número natural 5. Si seguimos las ramas de la figura 1.13a hacia arriba, vemos que el número 5 también es un entero no negativo, entero, racional y real. Ahora consideremos el número  $\frac{1}{2}$ . Pertenecer a los números racionales no enteros. Si seguimos las ramas hacia arriba, podremos ver que  $\frac{1}{2}$  también es un número racional y real.

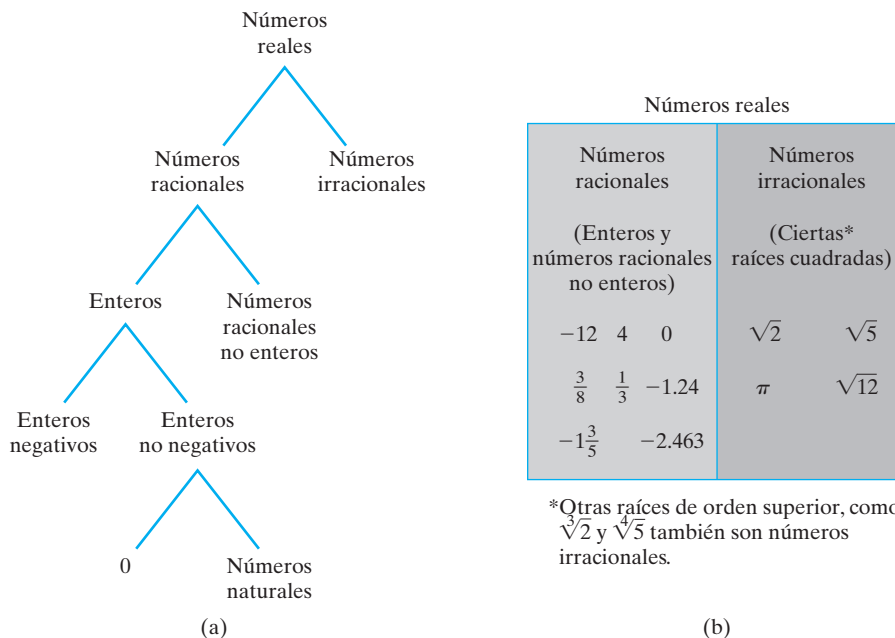


FIGURA 1.13

**EJEMPLO 1** Considere el siguiente conjunto de números:

$$\left\{ -2, -0.8, 4\frac{1}{2}, -59, \sqrt{3}, 0, 9, -\frac{4}{7}, -2.9, \sqrt{7}, -\sqrt{5} \right\}$$

Enliste los elementos del conjunto que son

- a)** números naturales.      **b)** enteros no negativos.      **c)** enteros.  
**d)** números racionales.      **e)** números irracionales.      **f)** números reales.

**Solución** Se enlistarán los elementos de izquierda a derecha según aparezcan en el conjunto. Sin embargo, pueden enlistarse en cualquier orden.

- a)** 9      **b)** 0, 9      **c)** -2, -59, 0, 9      **d)** -2, -0.8,  $4\frac{1}{2}$ , -59, 0, 9,  $-\frac{4}{7}$ , -2.9  
**e)**  $\sqrt{3}, \sqrt{7}, -\sqrt{5}$       **f)** -2, -0.8,  $4\frac{1}{2}$ , -59,  $\sqrt{3}, 0, 9, -\frac{4}{7}, -2.9, \sqrt{7}, -\sqrt{5}$  \*

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 51

## Conjunto de ejercicios 1.4

### Ejercicios conceptuales

- ¿Qué es un conjunto?
- ¿Cómo se llama al conjunto que no tiene elementos?
- Describa un conjunto que sea un conjunto vacío.
- Dé dos símbolos que se utilicen para representar al conjunto vacío.
- ¿En qué difieren el conjunto de los números naturales y el de los enteros no negativos?
- ¿Cuáles son otros dos nombres del conjunto de números naturales?
- ¿Qué es un número racional?
  - Explique por qué todo entero es un número racional.
- Explique por qué el número natural 7 también es un entero positivo.
  - número racional.
  - número real.
- El 0 es miembro del conjunto de los
  - ¿enteros?

- b) ¿enteros positivos?
- c) ¿enteros negativos?
- d) ¿números racionales?

- 10. Escriba un párrafo o dos para describir la estructura del sistema de números reales. Explique cómo se relacionan entre sí los enteros no negativos, números para contar, enteros, números racionales, irracionales y reales.

## Práctica de habilidades

En los ejercicios 11 a 15 enliste cada conjunto de números.

- 11. Enteros.
- 12. Números para contar.
- 13. Enteros no negativos.
- 14. Enteros positivos.
- 15. Enteros negativos.
- 16. Enteros naturales.

En los ejercicios 17 a 48 indique si cada enunciado es verdadero o falso.

- 17. El 0 es un entero no negativo
- 18.  $-1$  es un entero negativo.
- 19.  $-7.3$  es un número real.
- 20.  $\frac{3}{5}$  es un entero.
- 21.  $0.6$  es un entero.
- 22. El 0 es un entero.
- 23.  $\sqrt{2}$  es un número racional.
- 24.  $\sqrt{3}$  es un número real.
- 25.  $-\frac{1}{5}$  es un número racional.
- 26.  $-2\frac{1}{3}$  es un número racional.
- 27. El 0 es un número racional.
- 28.  $-2.4$  es un número racional.
- 29.  $4\frac{5}{8}$  es un número irracional.
- 30. El 0 no es un número positivo.
- 31.  $-\frac{5}{3}$  es un número irracional.
- 32. Todo número para contar es racional.
- 33. El símbolo  $\emptyset$  se utiliza para representar al conjunto vacío.
- 34. Todo entero es positivo.
- 35. Todo número real es racional.
- 36. Todo entero negativo es un número real.
- 37. Todo número racional es real.
- 38. Todo número negativo es entero negativo.
- 39. Algunos números reales no son racionales.
- 40. Ciertos números racionales no son reales.
- 41. Cuando se agrega el 0 al conjunto de números para contar, se forma el conjunto de enteros no negativos.
- 42. Todos los números reales pueden representarse sobre la recta numérica.
- 43. Se emplea el símbolo  $\mathbb{R}$  para representar al conjunto de números reales.
- 44. En la recta numérica, cualquier número a la izquierda del cero es negativo.
- 45. Todo número mayor que cero es un entero positivo.
- 46. No es posible representar a los números irracionales en la recta numérica.
- 47. Cuando se combinan los enteros negativos, los enteros positivos y el 0, se forman los enteros.
- 48. Los números naturales, los números para contar, y los enteros positivos, son nombres diferentes para el mismo conjunto de números.

- 49. Por lo general se piensa que las direcciones de las viviendas incluyen números enteros mayores que 0. ¿Ha visto alguna casa cuyo número no sea un entero mayor que 0? En algunas ciudades y pueblos de los Estados Unidos hay unas cuantas direcciones de este tipo. En Legare Street, en Charleston, SC, existen casas con los números 0 y  $2\frac{1}{2}$ . Considere los números 0 y  $2\frac{1}{2}$  que se menciona aquí, y enliste aquellos que sean



- a) enteros
- b) racionales
- c) reales
- 50. Algunos de los hoteles más antiguos de Europa tienen elevadores que enlistan números negativos para los pisos por debajo del nivel del lobby. Por ejemplo, un piso podría designarse como  $-2$ . En los Estados Unidos y en muchos países, se omite el piso número 13 debido a la superstición. Considere los números  $-2$  y 13 y enliste los que sean
  - a) enteros positivos
  - b) números racionales
  - c) números reales
  - d) enteros no negativos.
- 51. Considere el siguiente conjunto de números.

$$\left\{ -\frac{5}{7}, 0, -2, 3, 6\frac{1}{4}, \sqrt{7}, -\sqrt{3}, 1.63, 77 \right\}$$

Enliste aquellos que sean

- a) enteros positivos.
- b) enteros no negativos.
- c) enteros.
- d) racionales.

e) irracionales.

f) reales.

52. Considere el siguiente conjunto de números.

$$\left\{-6, 7, 12.4, -\frac{9}{5}, -2\frac{1}{4}, \sqrt{3}, 0, 9, \sqrt{7}, 0.35\right\}$$

Enliste los números que sean

a) enteros positivos.

b) enteros no negativos.

c) enteros.

d) racionales.

e) irracionales.

f) reales.

## Solución de problemas

Dé tres ejemplos de números que satisfagan las condiciones que se dan.

53. Un entero, pero que no sea negativo.

54. Un número real, pero no entero.

55. Un irracional y positivo.

56. Un real e irracional.

57. Uno racional pero no entero.

58. Uno entero y además racional.

59. Un entero negativo que sea racional.

60. Entero negativo y real.

61. Número real pero no racional positivo.

62. Racional pero no negativo.

63. Número real pero no irracional.

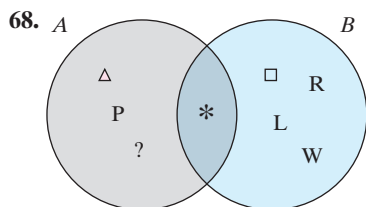
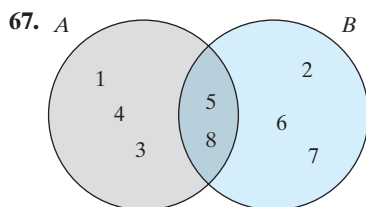
64. Negativo pero no entero.

Los tres puntos dentro de un conjunto indican que éste continúa de la misma forma. Por ejemplo  $\{1, 2, 3, \dots, 84\}$  es el conjunto de números naturales que va de 1 a 84, inclusive. En los ejercicios 65 y 66, determine el número de elementos en cada conjunto.

65.  $\{8, 9, 10, 11, \dots, 94\}$ 66.  $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, \dots, 64\}$ 

## Problemas de reto

Los esquemas de los ejercicios 67 y 68 se llaman diagramas de Venn (en honor del matemático inglés John Venn). Los diagramas de Venn se emplean para ilustrar conjuntos. Por ejemplo, en los diagramas, el círculo  $A$  contiene todos los elementos que están en el conjunto  $A$ , el círculo  $B$  contiene a todos los elementos que están en el conjunto  $B$ . Para cada diagrama determine, **a)** el conjunto  $A$ , **b)** el conjunto  $B$ , **c)** el conjunto de elementos que pertenecen a  $A$  y a  $B$ , y **d)** el conjunto de elementos que pertenecen a cualquiera, al conjunto  $A$  o al conjunto  $B$ .



69. Considere los conjuntos  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $B = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ .
- a) Explique la diferencia entre el conjunto  $A$  y el  $B$ .
- b) ¿Cuántos elementos hay en el conjunto  $A$ ?
- c) ¿Cuántos elementos hay en el conjunto  $B$ ?
- d) El conjunto  $A$  es un ejemplo de *conjunto finito*. ¿Puede usted adivinar el nombre que se da a un conjunto como el  $B$ ?
70. ¿Cuántos números decimales hay
- a) entre 1.0 y 2.0?
- b) entre 1.4 y 1.5? Explique su respuesta.
71. ¿Cuántas fracciones hay
- a) entre 1 y 2?
- b) entre  $\frac{1}{3}$  y  $\frac{1}{5}$ ? Explique su respuesta.



## Actividad en grupo

Analice y responda el ejercicio 72, como grupo.

72. El conjunto  $A$  **unión** conjunto  $B$ , se simboliza con  $A \cup B$ , y consiste en el conjunto de elementos que pertenecen al conjunto  $A$  o al conjunto  $B$  (o a ambos). El conjunto  $A$  **intersección** el conjunto  $B$ , se simboliza con  $A \cap B$ , y consiste en el conjunto de elementos en común que tienen tanto el conjunto  $A$  como el  $B$ . Observe que sólo se enlista una vez a los elementos que pertenecen a ambos elementos en la unión de los conjuntos.



Considere los pares de conjuntos siguientes.

Miembro del grupo 1:  $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$   $B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$

Miembro del grupo 2:  $A = \{a, b, c, d, g, i, j\}$   $B = \{b, c, d, h, m, p\}$

Miembro del grupo 3:  $A = \{\text{rojo, azul, verde, amarillo}\}$   $B = \{\text{rosa, naranja, morado}\}$

- Encuentre la unión e intersección de los conjuntos que se indican para los miembros del grupo 1.
- Encuentre la unión e intersección de los conjuntos que se dan para los miembros del grupo 2.
- Encuentre la unión e intersección de los conjuntos que se marcan para los miembros del grupo 3.
- Ahora, como grupo, revisen el trabajo de todos. Corrijan cualquier error.
- Como grupo, con los conjuntos de los miembros del grupo 1, construyan diagramas de Venn como los de los ejercicios 67 y 68.

### Ejercicios de repaso acumulativo

[1.3] 73. Convierta  $5\frac{2}{5}$  a fracción.

75. Sume  $\frac{3}{5} + \frac{5}{8}$ .

74. Escriba  $\frac{16}{3}$  como número mixto.

76. Multiplique  $\left(\frac{5}{9}\right)\left(4\frac{2}{3}\right)$ .

## 1.5 DESIGUALDADES



- Determinar cuál es el mayor de dos números.
- Encontrar el valor absoluto de un número.

### 1 Determinar cuál es el mayor de dos números

Para explicar las desigualdades se utilizará la recta numérica, que muestra números que crecen de izquierda a derecha (vea la figura 1.14). Al comparar dos números, **el número a la derecha de la recta numérica es el mayor, y el que está a la izquierda es el menor**. El símbolo  $>$  se emplea para representar las palabras “es mayor que”. El símbolo  $<$  se utiliza para representar las palabras “es menor que”.

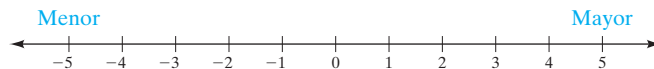


FIGURA 1.14

La afirmación de que el número 3 es mayor que el 2 se escribe  $3 > 2$ . Observe que en la recta numérica, 3 está a la derecha del 2. La proposición de que 0 es mayor que  $-1$  se escribe  $0 > -1$ . Observe que el 0 está a la derecha del  $-1$  en la recta numérica.

En vez de afirmar que 3 es mayor que 2, podríamos decir que 2 es menor que 3, lo que escribimos como  $2 < 3$ . Observe que en la recta numérica el 2 está a la izquierda del 3. La afirmación de que el  $-1$  es menor que el 0 se escribe como  $-1 < 0$ . Observe que el  $-1$  está a la izquierda del 0 en la recta numérica.

**EJEMPLO 1** Inserte cualquiera de los símbolos  $>$  o  $<$  en el área sombreada entre los pares de números, para hacer la proposición verdadera.

- a)  $-4$     $-2$       b)  $-\frac{3}{2}$     $2.5$       c)  $\frac{1}{2}$     $\frac{1}{4}$       d)  $-2$     $4$

**Solución** Los puntos dados se muestran en la recta numérica (vea la figura 1.15).



FIGURA 1.15

- a)  $-4 < -2$ ; observe que el  $-4$  queda a la izquierda del  $-2$ .
- b)  $-\frac{3}{2} < 2.5$ ; observe que  $-\frac{3}{2}$  está a la izquierda del  $2.5$ .
- c)  $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$ ; observe que  $\frac{1}{2}$  está a la derecha de  $\frac{1}{4}$ .
- d)  $-2 < 4$ ; observe que  $-2$  está a la izquierda de  $4$ . ✧

**EJEMPLO 2** Inserte cualquiera de los símbolos  $>$  o  $<$  en el área sombreada entre cada par de números, de modo que la proposición sea verdadera.

- a)  $-1$     $-2$     b)  $-1$     $0$     c)  $-2$     $2$     d)  $-4.09$     $-4.9$

**Solución** En la recta numérica se aprecian los números dados (vea la figura 1.16).

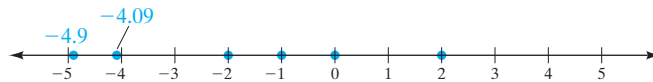


FIGURA 1.16

- a)  $-1 > -2$ ; observe que  $-1$  está a la derecha de  $-2$ .
- b)  $-1 < 0$ ; observe que el  $-1$  se localiza a la izquierda del  $0$ .
- c)  $-2 < 2$ ; observe que el  $-2$  se encuentra a la izquierda del  $2$ .
- d)  $-4.09 > -4.9$ ; observe que  $-4.09$  queda a la derecha de  $-4.9$ . ✧

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 29

## 2 Encontrar el valor absoluto de un número

El concepto de valor absoluto se explicará con ayuda de la recta numérica que se aprecia en la figura 1.17. El **valor absoluto** de un número se considera como la distancia que hay entre el número en cuestión y el 0, sobre la recta numérica. Así, el valor absoluto de 3, que se escribe como  $|3|$ , es 3, ya que se localiza a 3 unidades de distancia sobre la recta numérica. De modo similar, el valor absoluto de  $-3$ , que se denota con  $|-3|$ , también es 3, puesto que está a 3 unidades del 0.

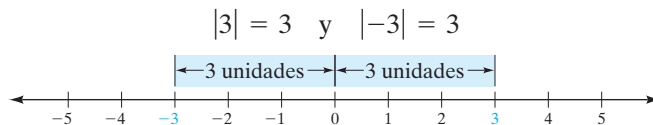


FIGURA 1.17

Como el valor absoluto de un número mide la distancia (sin importar la dirección) que hay del número al 0, sobre la recta numérica, *el valor absoluto de cualquier número será positivo o cero.*

Número	Valor absoluto del número
6	$ 6  = 6$
-6	$ -6  = 6$
0	$ 0  = 0$
$-\frac{1}{2}$	$\left -\frac{1}{2}\right  = \frac{1}{2}$

El negativo del valor absoluto de un número distinto de cero siempre será un número negativo. Por ejemplo,

$$-|2| = -(2) = -2 \quad \text{y} \quad -|-3| = -(3) = -3$$

**EJEMPLO 3** Inserte cualquiera de los símbolos  $>$ ,  $<$  o  $=$ , en cada área sombreada, de manera que el enunciado sea verdadero.

a)  $|3|$    3    b)  $|-2|$     $|2|$     c)  $-2$     $|-4|$     d)  $|-5|$    0    e)  $\left|-\frac{4}{9}\right|$     $|-18|$

**Solución**

a)  $|3| = 3$ .    b)  $|-2| = |2|$ , ya que tanto  $|-2|$  como  $|2|$  es igual a 2.  
 c)  $-2 < |-4|$ , puesto que  $|-4| = 4$ .    d)  $|-5| > 0$ , puesto que  $|-5| = 5$ .

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 57

e)  $\left|-\frac{4}{9}\right| < |-18|$ , ya que  $\left|-\frac{4}{9}\right| = \frac{4}{9}$  y  $|-18| = 18$ . ✪

En las secciones 1.6 y 1.7 se usará el valor absoluto para sumar y restar números reales. El concepto de valor absoluto es muy importante en cursos de matemáticas de nivel superior. Si usted sigue un curso de álgebra intermedia, aprenderá una definición más formal del valor absoluto.

## Conjunto de ejercicios 1.5

### Ejercicios conceptuales

1. a) Dibuje una recta numérica.  
 b) Marque los números  $-2$  y  $-4$  en la recta numérica que dibujó.  
 c) ¿ $-2$  es menor que  $-4$ , o  $-2$  es mayor que  $-4$ ? Explique.  
 En los incisos d) y e), escriba un enunciado correcto con el empleo de  $-2$  y  $-4$ , así como el símbolo que se da.  
 d)  $<$   
 e)  $>$
2. ¿Qué es el valor absoluto de un número?
3. a) Explique por qué el valor absoluto de 4,  $|4|$ , es 4.  
 b) Diga por qué el valor absoluto de  $-4$ ,  $|-4|$ , es 4.  
 c) Diga por qué el valor absoluto de 0,  $|0|$ , es 0.
4. ¿Existen cualesquiera números reales cuyo valor absoluto no sea un número positivo? Explique su respuesta.
5. Suponga que  $a$  y  $b$  representan a dos números reales cualesquiera. Si  $a > b$  es verdad, ¿también será verdad que  $b < a$ ? Explique y dé algunos ejemplos en los que utilice números específicos para  $a$  y  $b$ .
6. ¿Será siempre verdad que  $|a| - |a| = 0$ , para cualquier número real  $a$ ? Explique.
7. Suponga que  $a$  y  $b$  representan dos números reales cualesquiera. Suponga que es verdad que  $a > b$ . ¿Será verdad también que  $|a| > |b|$ ? Explique y dé un ejemplo que apoye su respuesta.
8. Suponga que  $a$  y  $b$  son dos números reales cualesquiera. Suponga que es verdad que  $|a| < |b|$ . ¿También será verdad que  $a < b$ ? Explique y proporcione un ejemplo para respaldar su respuesta.
9. Suponga que  $a$  y  $b$  son dos números reales cualesquiera. Suponga que se cumple que  $|a| > |b|$ . ¿También se cumplirá que  $a > b$ ? Explique y dé un ejemplo que ilustre su respuesta.
10. Suponga que  $a$  y  $b$  son dos números reales cualesquiera. Suponga que  $a < b$  es cierto. ¿También será cierto que  $|a| < |b|$ ? Explique su respuesta y dé un ejemplo que la apoye.

### Práctica de habilidades

Evalúe lo siguiente.

11.  $|7|$   
16.  $|54|$

12.  $|-6|$   
17.  $-|-5|$

13.  $|-15|$   
18.  $-|92|$

14.  $|-10|$   
19.  $-|21|$

15.  $|0|$   
20.  $-|-34|$

Inserte cualquiera de los símbolos  $<$  o  $>$  en cada área sombreada, de modo que el enunciado sea verdadero.

- |  |  |  |   |
|--|--|--|---|
| 21. $5 \blacksquare 2$                       | 22. $4 \blacksquare -2$                          | 23. $-6 \blacksquare 0$                      | 24. $-6 \blacksquare -4$                                    |
| 25. $\frac{1}{2} \blacksquare -\frac{2}{3}$  | 26. $\frac{3}{5} \blacksquare \frac{4}{5}$       | 27. $0.7 \blacksquare 0.8$                   | 28. $-0.2 \blacksquare -0.4$                                |
| 29. $-\frac{1}{2} \blacksquare -1$           | 30. $-0.1 \blacksquare -0.9$                     | 31. $3 \blacksquare -3$                      | 32. $-\frac{3}{4} \blacksquare -1$                          |
| 33. $-2.1 \blacksquare -2$                   | 34. $-1.83 \blacksquare -1.82$                   | 35. $\frac{4}{5} \blacksquare -\frac{4}{5}$  | 36. $-9 \blacksquare -12$                                   |
| 37. $-\frac{3}{8} \blacksquare \frac{3}{8}$  | 38. $-4.09 \blacksquare -5.3$                    | 39. $0.49 \blacksquare 0.43$                 | 40. $-1.0 \blacksquare -0.7$                                |
| 41. $5 \blacksquare -7$                      | 42. $0.001 \blacksquare 0.002$                   | 43. $-0.006 \blacksquare -0.007$             | 44. $\frac{1}{2} \blacksquare -\frac{1}{2}$                 |
| 45. $\frac{5}{8} \blacksquare 0.6$           | 46. $2.7 \blacksquare \frac{10}{3}$              | 47. $-\frac{4}{3} \blacksquare -\frac{1}{3}$ | 48. $\frac{9}{2} \blacksquare \frac{7}{2}$                  |
| 49. $-\frac{1}{2} \blacksquare -\frac{3}{2}$ | 50. $-0.4 \blacksquare -0.5$                     | 51. $0.3 \blacksquare \frac{1}{3}$           | 52. $\frac{9}{20} \blacksquare 0.42$                        |
| 53. $\frac{13}{15} \blacksquare \frac{8}{9}$ | 54. $-\frac{17}{30} \blacksquare -\frac{16}{20}$ | 55. $-(-6) \blacksquare -(-5)$               | 56. $-\left(-\frac{12}{13}\right) \blacksquare \frac{7}{8}$ |

Inserte cualquiera de los símbolos  $<$ ,  $>$  o  $=$ , en cada área sombreada, de modo que el enunciado sea verdadero.

- |  |   |  |   |
|--|---|--|---|
| 57. $3 \blacksquare  -2 $  | 58. $ -8  \blacksquare  -7 $                        | 59. $ -4  \blacksquare \frac{2}{3}$                  | 60. $ -4  \blacksquare -3$                          |
| 61. $ 0  \blacksquare  -4 $  | 62. $ -2.1  \blacksquare  -1.8 $                    | 63. $4 \blacksquare \left -\frac{9}{2}\right $       | 64. $-5 \blacksquare  5 $                           |
| 65. $\left -\frac{4}{5}\right  \blacksquare \left -\frac{5}{4}\right $ | 66. $\left \frac{2}{5}\right  \blacksquare  -0.40 $ | 67. $ -4.6  \blacksquare \left -\frac{23}{5}\right $ | 68. $\left -\frac{8}{3}\right  \blacksquare  -3.5 $ |

Inserte cualquiera de los símbolos  $>$ ,  $<$  o  $=$ , en cada área sombreada, de modo que el enunciado sea verdadero.

- |  |   |  |
|--|---|--|
| 69. $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \blacksquare 4 \cdot \frac{2}{3}$ | 70. $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$       | 71. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \div \frac{1}{2}$       |
| 72. $5 \div \frac{2}{3} \blacksquare \frac{2}{3} \div 5$                                     | 73. $\frac{5}{8} - \frac{1}{2} \blacksquare \frac{5}{8} \div \frac{1}{2}$ | 74. $2\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \blacksquare 2\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$ |

Ordene los números del menor al mayor.

- |   |  |
|---|--|
| 75. $ -6 , - -8 , \frac{3}{5}, \frac{4}{9}, 0.38$           | 76. $-\frac{3}{4}, - 0.6 , -\frac{5}{9}, -1.74,  -1.9 $          |
| 77. $\frac{2}{3}, 0.6,  -2.6 , \frac{19}{25}, \frac{5}{12}$ | 78. $- -5 ,  -9 , \left -\frac{12}{5}\right , 2.7, \frac{7}{12}$ |

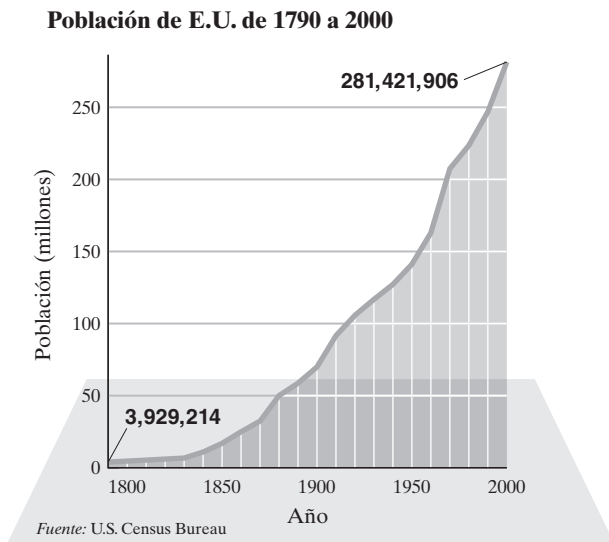
## Solución de problemas

79. ¿Cuáles números están a 4 unidades del 0, sobre la recta numérica?      80. ¿Sobre la recta numérica, qué números están a 5 unidades del 0?

En los ejercicios 81 a 88, dé tres números reales que satisfagan todos los criterios que se enuncian. Si ningún número real los satisface, dígalos y explique por qué.

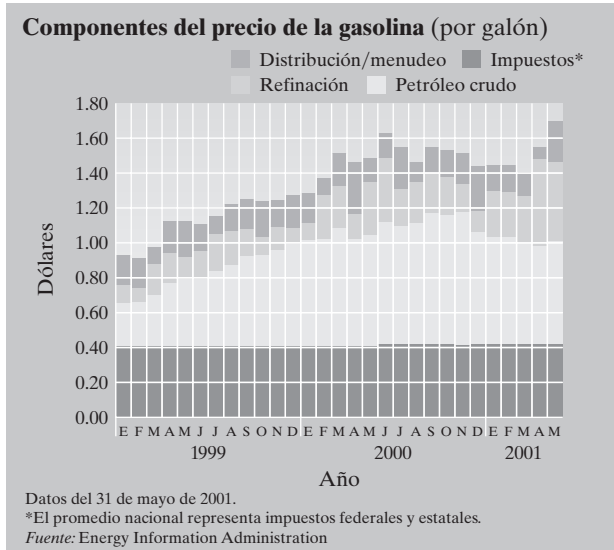
- |                               |                                     |
|-------------------------------|-------------------------------------|
| 81. Mayor que 4 y menor que 6 | 83. Menor que $-2$ y mayor que $-6$ |
| 82. Menor que $-2$            | 84. Menor que 4 y mayor que 6       |

- 85. Mayor que  $-3$  y mayor que  $3$
- 86. Menor que  $-3$  y menor que  $3$
- 87. Mayor que  $|-2|$  y menor que  $|-6|$
- 88. Mayor que  $|-3|$  y menor que  $|3|$
- 89. a) Considere la palabra *entre*. ¿Qué significa dicho término?  
 b) Enliste tres números reales entre 4 y 6.  
 c) El número 4, ¿está entre 4 y 6? Explique.  
 d) El número 5, ¿está entre 4 y 6? Explique.  
 e) ¿Es verdadero o falso que los números reales entre 4 y 6 son los reales que son tanto mayores que 4 y menores que 6? Explique.
- 90. La gráfica siguiente ilustra la población de los E.U. de 1790 a 2000.



- a) Estime el periodo de diez años en que la población de E.U. rebasó por primera vez los 100 millones de personas.

- b) Calcule el periodo de diez años cuando la población de E.U. sobrepasó por vez primera los 200 millones de personas.
- c) Estime los periodos de diez años cuando la población de E.U. fue mayor que 50 millones y menor que 150 millones de personas.
- 91. La gráfica que sigue muestra el costo promedio de un galón de gasolina en los Estados Unidos, de enero de 1999 a junio de 2000. La gráfica también muestra los componentes que conforman el precio de un galón del combustible.



- a) Durante este periodo, ¿cuándo fueron los impuestos menores de 50 centavos?
- b) Durante este periodo, ¿cuándo fue el costo de un galón de gasolina mayor de \$1.50 por primera vez?
- c) Durante este periodo, ¿cuándo fue el costo de un galón de gasolina menor de \$1.00?
- d) Durante este periodo, ¿cuándo fue el costo de un galón de gasolina mayor o igual que \$1.40, pero menor o igual que \$1.60?

## Problemas de reto

- 92. Un número mayor que 0 y menor que 1 (o entre 0 y 1) se multiplica por sí mismo. ¿El producto será menor que el número original, igual a éste, o mayor que él? Explique por qué siempre es verdad lo anterior.
- 93. Un número entre 0 y 1 se divide entre sí mismo. ¿El cociente será menor que el número original, igual a éste o mayor que él? Explique por qué siempre es verdad esto.
- 94. ¿Cuáles son dos números que pueden sustituir a  $x$  para que el enunciado  $|x| = 3$  sea verdadero?
- 95. ¿Hay algún o algunos valores para  $x$  que harían que el enunciado  $|x| = |-x|$  fuera verdadero?
- 96. a) ¿A qué es igual  $|x|$ , si  $x$  representa un número real mayor que 0 o igual a éste? b) ¿A qué es igual  $|x|$  si  $x$  representa un número real menor que 0? c) Llene las áreas sombreadas siguientes a fin de que el enunciado sea verdadero.

$$c) |x| = \begin{cases} \square, & x \geq 0 \\ \square, & x < 0 \end{cases}$$



## Actividad en grupo

Como grupo, analicen y respondan el ejercicio 97.

97. a) Miembro 1 del grupo: dibuje una recta numérica y marque puntos sobre ella que representen los números siguientes:

$$|-2|, \quad -|3|, \quad -\left|\frac{1}{3}\right|$$

- b) Miembro 2 del grupo: haga lo mismo que en el inciso a), pero sobre la recta numérica marque los números siguientes:

$$|-4|, \quad -|2|, \quad \left|-\frac{3}{5}\right|$$

- c) Miembro 3 del grupo: haga lo mismo que en los incisos a) y b), pero señale los puntos para los números siguientes.

$$|0|, \quad \left|\frac{16}{5}\right|, \quad -|-3|$$

- d) Como grupo, construyan una recta numérica que contenga todos los puntos que se enlistaron en los incisos a), b) y c).

## Ejercicios de repaso acumulativo

[1.3] 98. Haga la resta  $1\frac{2}{3} - \frac{3}{8}$ .

- [1.4] 99. Enliste el conjunto de enteros no negativos.

100. Enliste el conjunto de números para contar.

101. Considere el conjunto siguiente de números.

$$\left\{5, -2, 0, \frac{1}{3}, \sqrt{3}, -\frac{5}{9}, 2.3\right\}$$

Enliste los números que sean

- a) naturales.
- b) enteros no negativos.
- c) enteros.
- d) racionales.
- e) irracionales.
- f) reales.

## 1.6 SUMA DE NÚMEROS REALES



- 1 Sumar números reales mediante la recta numérica.
- 2 Sumar fracciones.
- 3 Identificar los opuestos.
- 4 Sumar utilizando el valor absoluto.
- 5 Sumar con calculadora.

Existen muchos usos prácticos para los números negativos. Un submarino que desciende bajo el nivel del mar, una cuenta bancaria sobregirada, un negocio que gasta más de lo que gana, y una temperatura bajo cero son algunos ejemplos.

Las cuatro **operaciones** básicas de la aritmética son suma, resta, multiplicación y división. En las siguientes secciones explicaremos cómo sumar, restar, multiplicar y dividir números. Consideraremos tanto números positivos como negativos. En esta sección estudiaremos la suma.

### 1 Sumar números reales mediante la recta numérica

Para sumar números haremos uso de una recta numérica. Representaremos el primer número que se va a sumar (el primer *sumando*) con una flecha que comience en 0. Se dibuja la flecha hacia la derecha si el número es positivo; y hacia la izquierda si es negativo. Desde la punta de la primera flecha se dibuja una segunda para representar al segundo sumando. Se dibuja esta segunda flecha hacia la derecha o izquierda, según se explicó. La suma de los dos números se encuentra en la punta de la segunda flecha. Observe que con excepción del 0, *cualquier número sin un signo frente a sí es positivo*. Por ejemplo, 3 significa +3 y 5 significa +5.

**EJEMPLO 1** Evalúe  $3 + (-4)$ , con una recta numérica.

**Solución** Siempre se comienza en el 0. Como el primer sumando, 3, es positivo, la primera flecha comienza en el 0 y se prolonga 3 unidades a la derecha (vea la figura 1.18).

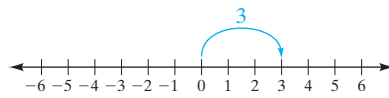


FIGURA 1.18

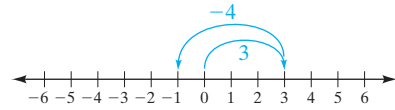


FIGURA 1.19

La segunda flecha comienza en 3 y se traza 4 unidades a la izquierda, ya que el segundo sumando es negativo (consulte la figura 1.19). El extremo de la segunda flecha está en  $-1$ . Entonces,

$$3 + (-4) = -1$$



**EJEMPLO 2** Evalúe  $-4 + 2$ , por medio de una recta numérica.

**Solución** Se comienza en 0. Como el primer sumando es negativo,  $-4$ , la primera flecha se traza 4 unidades hacia la izquierda. Desde ahí, como el 2 es positivo, la segunda flecha se dibuja 2 unidades hacia la derecha. La segunda flecha termina en  $-2$  (vea la figura 1.20).

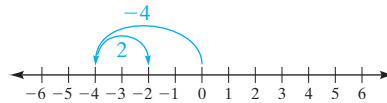


FIGURA 1.20

$$-4 + 2 = -2$$



**EJEMPLO 3** Evalúe  $-3 + (-2)$ , por medio de una recta numérica.

**Solución** Se comienza en 0. Como ambos números por sumar son negativos, se dibujan las dos flechas hacia la izquierda. (Vea la figura 1.21).

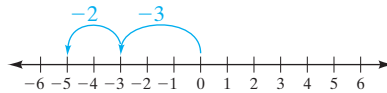


FIGURA 1.21

$$-3 + (-2) = -5$$



En el ejemplo 3, podemos pensar en la expresión  $-3 + (-2)$  como una combinación de *perder* 3 y luego *perder* 2 para en total *perder* 5, o sea  $-5$ .

**EJEMPLO 4** Evalúe  $5 + (-5)$ , por medio de una recta numérica.

**Solución** La primera flecha comienza en el 0 y se traza 5 unidades hacia la derecha. La segunda flecha comienza en 5 y se traza 5 unidades hacia la izquierda. El extremo de la segunda flecha está en el 0. Entonces,  $5 + (-5) = 0$  (vea la figura 1.22).

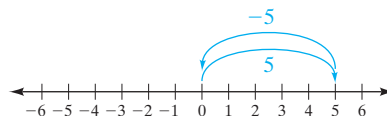


FIGURA 1.22

$$5 + (-5) = 0$$





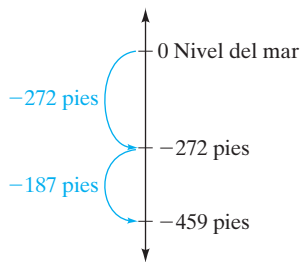


FIGURA 1.23

**EJEMPLO 5**

**Profundidad de un submarino** Un submarino desciende 272 pies. Más tarde baja otros 187 pies. Encuentre la profundidad a la que está el submarino (suponga que se indican las profundidades bajo el nivel del mar con números negativos).

**Solución**

Una recta numérica vertical ayudará a visualizar este problema.

**AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 117**

$$-272 + (-187) = -459 \text{ pies} \quad \star$$

**2 Sumar fracciones**

En la sección 1.3 estudiamos las fracciones y explicamos la manera de sumar fracciones positivas. Para sumar fracciones, en las que una o más de ellas son negativas, utilizamos el mismo procedimiento general que se estudió en dicha sección. Cuando los denominadores no sean los mismos, debe obtenerse un común denominador. Una vez que lo obtenemos, conseguimos la respuesta sumando los numeradores que ya tienen el común denominador. Por ejemplo, suponga que después de obtener el común denominador tiene  $-\frac{19}{29} + \frac{13}{29}$ . Para obtener el numerador de la respuesta sumamos  $-19 + 13$  arriba de la recta numérica para obtener  $-6$ . El denominador de la respuesta es el común denominador, 29. Así, la respuesta es  $-\frac{6}{29}$ . Estos cálculos se indican de la siguiente manera.

$$-\frac{19}{29} + \frac{13}{29} = \frac{-19 + 13}{29} = \frac{-6}{29} = -\frac{6}{29}$$

Se ilustrará con otro ejemplo. Suponga que después de obtener un común denominador tenemos  $-\frac{7}{40} + (-\frac{5}{40})$ . Para obtener el numerador de la respuesta sumamos  $-7 + (-5)$  sobre la recta numérica, para obtener  $-12$ . El denominador de la respuesta es 40. Por lo tanto, la respuesta antes de simplificar es  $-\frac{12}{40}$ . La respuesta final ya simplificada sería  $-\frac{3}{10}$ . A continuación se muestran estos cálculos:

$$-\frac{7}{40} + \left(-\frac{5}{40}\right) = \frac{-7 + (-5)}{40} = \frac{-12}{40} = -\frac{3}{10}$$

**EJEMPLO 6**

Sumar  $-\frac{5}{12} + \frac{4}{5}$ .

**Solución**

En primer lugar, determinamos el mínimo común denominador, que resulta ser 60. Al cambiar cada fracción a otra con dicho denominador, obtenemos

$$-\frac{5}{12} \cdot \frac{5}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{12}$$

o bien  $-\frac{25}{60} + \frac{48}{60}$

Ahora, las fracciones por sumar tienen un común denominador. Para sumarlas, se conserva éste y se suman los numeradores, para obtener,

$$-\frac{5}{12} + \frac{4}{5} = -\frac{25}{60} + \frac{48}{60} = \frac{-25 + 48}{60}$$

Ahora, se suma  $-25 + 48$  en la recta numérica y obtenemos el numerador de la fracción, 23; vea la figura 1.24.

Entonces,  $\frac{-25 + 48}{60} = \frac{23}{60}$  y  $-\frac{5}{12} + \frac{4}{5} = \frac{23}{60}$ .

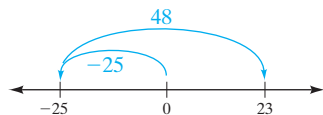


FIGURA 1.24



**EJEMPLO 7** Sumar  $-\frac{7}{8} + \left(-\frac{3}{40}\right)$ .

**Solución** El mínimo común denominador (o mcd) es 40. Al reescribir cada fracción con el mcd se llega a lo siguiente.

$$\begin{aligned} -\frac{7}{8} + \left(-\frac{3}{40}\right) &= -\frac{7}{8} \cdot \frac{5}{5} + \left(-\frac{3}{40}\right) \\ &= -\frac{35}{40} + \left(-\frac{3}{40}\right) = \frac{-35 + (-3)}{40} \end{aligned}$$

Ahora, sumamos  $-35 + (-3)$  para obtener el numerador de la fracción,  $-38$ ; vea la figura 1.25.

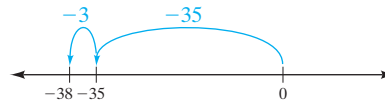


FIGURA 1.25

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 83

Entonces,  $-\frac{7}{8} + \left(-\frac{3}{40}\right) = \frac{-35 + (-3)}{40} = \frac{-38}{40} = -\frac{19}{20}$ .



### SUGERENCIA

En el ejemplo 6, de la figura 1.24, se ilustró que al comenzar en 0 y moverse 25 unidades a la izquierda, y después 48 unidades a la derecha, se termina en el número positivo 23. Así,  $-25 + 48 = 23$ .

Cuando los números son grandes, no es de esperarse que en realidad marque y cuente las unidades. Por ejemplo, no es necesario contar 48 unidades a la derecha de  $-25$  para obtener la respuesta de 23.

En el objetivo 3 se mostrará cómo obtener  $-25 + 48$  sin tener que dibujar rectas numéricas. Aquí se presentó la suma sobre la recta numérica para ayudarlo a determinarla sin hacer cálculos, sea que la suma de los dos números fuera un número positivo, negativo o cero.

## 3 Identificar los opuestos

Ahora, consideraremos a los **opuestos**, o **inversos aditivos**.

### DEFINICIÓN

Se dice que dos números cualesquiera cuya suma sea cero son **opuestos** (o **inversos aditivos**) uno del otro. En general, si se representa con  $a$  cualquier número real, entonces su opuesto es  $-a$  y  $a + (-a) = 0$ .

En el ejemplo 4, la suma de 5 más  $-5$  dio 0. Así,  $-5$  es el opuesto de 5, y 5 es el opuesto de  $-5$ .

**EJEMPLO 8** Encuentre los opuestos de cada número. **a)** 3 **b)**  $-4$  **c)**  $-\frac{7}{8}$

**Solución** **a)** El opuesto de 3 es  $-3$ , ya que  $3 + (-3) = 0$ .

**b)** El opuesto de  $-4$  es 4, puesto que  $-4 + 4 = 0$ .

**c)** El opuesto de  $-\frac{7}{8}$  es  $\frac{7}{8}$ , toda vez que  $-\frac{7}{8} + \frac{7}{8} = 0$ .

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 15




## 4 Sumar utilizando el valor absoluto


Ahora que tenemos cierta práctica sumando números con signo sobre una recta numérica, daremos una regla (en dos partes) para utilizar el valor absoluto en la suma de números con signo. Recuerde que el valor absoluto de un número distinto de cero siempre es positivo. A continuación se enuncia la primera parte de la regla:

**Para sumar números reales con el mismo signo** (ambos positivos o ambos negativos), sume sus valores absolutos. El resultado tiene el mismo signo que los números sumados.

**EJEMPLO 9** Sumar  $4 + 8$ .

**Solución** Como ambos números tienen el mismo signo (ambos positivos), se suman sus valores absolutos:  $|4| + |8| = 4 + 8 = 12$ . Como los dos números que se suman son positivos, la suma es positiva. Así,  $4 + 8 = 12$ . 


**EJEMPLO 10** Sumar  $-6 + (-9)$ .

**Solución** Ya que ambos números tienen el mismo signo (ambos negativos), se suman sus valores absolutos:  $|-6| + |-9| = 15$ . Como los números que se suman son negativos, la suma será negativa. Entonces,  $-6 + (-9) = -15$ . 


**La suma de dos números positivos siempre será positiva, y la de dos números negativos siempre será negativa.**

**Para sumar dos números con signos diferentes** (uno positivo y el otro negativo), se resta el valor absoluto más pequeño del valor absoluto más grande. La respuesta tiene el signo del número con valor absoluto más grande.


**EJEMPLO 11** Sumar  $10 + (-6)$ .

**Solución** Los dos números por sumar tienen signos diferentes, por lo que se resta el valor absoluto más pequeño del más grande:  $|10| - |-6| = 10 - 6 = 4$ . Como  $|10|$  es mayor que  $|-6|$  y el signo de 10 es positivo, la suma es positiva. Entonces,  $10 + (-6) = 4$ . 

**EJEMPLO 12** Sumar  $12 + (-18)$ .

**Solución** Los dos números por sumar tienen signos diferentes, por lo que se resta el valor más pequeño del más grande:  $|-18| - |12| = 18 - 12 = 6$ . Como  $|-18|$  es mayor que  $|12|$ , y el signo de  $-18$  es negativo, la suma es negativa. Así,  $12 + (-18) = -6$ . 

**EJEMPLO 13** Sumar  $-21 + 20$ .

**Solución** Los dos números por sumar tienen signos diferentes, por lo que se resta el valor absoluto más pequeño del más grande:  $|-21| - |20| = 21 - 20 = 1$ . Como  $|-21|$  es mayor que  $|20|$ , la suma es negativa. Por tanto,  $-21 + 20 = -1$ . 

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 45

Ahora veremos algunos ejemplos que contienen fracciones y números decimales.


**EJEMPLO 14** Sumar  $-\frac{3}{5} + \frac{4}{7}$ .

**Solución** Cada fracción se escribe con el mínimo común denominador, 35.

$$\begin{aligned} -\frac{3}{5} + \frac{4}{7} &= -\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{5} \\ &= \frac{-21}{35} + \frac{20}{35} = \frac{-21 + 20}{35} \end{aligned}$$

Como  $|-21|$  es mayor que  $|20|$ , la respuesta final será negativa. En el ejemplo 13 se halló que  $-21 + 20 = -1$ . Por lo tanto, escribimos

$$\frac{-21}{35} + \frac{20}{35} = \frac{-21 + 20}{35} = \frac{-1}{35} = -\frac{1}{35}$$


Entonces,  $-\frac{3}{5} + \frac{4}{7} = -\frac{1}{35}$ . 

**EJEMPLO 15** Sumar  $-24.23 + (-17.96)$ .

**Solución** Como ambos números tienen el mismo signo, negativo, sumamos sus valores absolutos:  $|-24.23| + |-17.96| = 24.23 + 17.96$ .

$$\begin{array}{r} 24.23 \\ + 17.96 \\ \hline 42.19 \end{array}$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 57**

Como se suman dos números negativos, el resultado es negativo. Por lo tanto,  $-24.23 + (-17.96) = -42.19$ . 

**La suma de dos números con signos diferentes puede ser positiva o negativa. El signo de la suma será igual al signo del número con mayor valor absoluto.**

## SUGERENCIA

Los arquitectos hacen un modelo a escala de un edificio antes de iniciar su construcción. Este “modelo” los ayuda a visualizar el proyecto y con frecuencia a evitar problemas.

Los matemáticos también construyen modelos. Un *modelo* matemático es una representación física de un concepto matemático. Puede ser tan simple como usar rayas o bolas que representen números específicos. Por ejemplo, a continuación se utiliza un modelo para explicar la suma de números reales. Esto tal vez le ayude a entender mejor los conceptos.

Se decide que una bolita roja representa  $+1$  y una gris  $-1$ .

$$\bullet = +1 \quad \bullet = -1$$

Si sumamos  $+1$  y  $-1$ , o una bolita roja con una gris, obtenemos 0.

Ahora consideremos el problema de sumar  $3 + (-5)$ . Esto se representa así,

$$\underbrace{\bullet \bullet \bullet}_3 + \underbrace{\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet}_{-5}$$

Si eliminamos 3 bolitas rojas y 3 grises, o tres ceros, quedan 2 grises, lo que representa el resultado de  $-2$ . Así,  $3 + (-5) = -2$ .

$$\cancel{\bullet} \cancel{\bullet} \cancel{\bullet} + \bullet \bullet$$

(continúa en la página siguiente)

Ahora, consideremos el problema de sumar  $-4 + (-2)$ . Esto se representa con

$$\underbrace{\circ \circ \circ \circ}_{-4} + \underbrace{\circ \circ}_{-2}$$

Como se termina con 6 bolitas grises y cada una representa  $-1$ , el resultado es  $-6$ . Por tanto,  $-4 + (-2) = -6$ .

**EJEMPLO 16 Ganancia o pérdida netas** La compañía B.J. Donaldson Printing tuvo una pérdida de \$4,000 durante los 6 primeros meses del año, y una utilidad de \$29,500 durante los siguiente 6 meses. Encuentre la utilidad o pérdida neta del año.

**Solución Entender y traducir** Este problema se representa como  $-4,000 + 29,500$ . Como los dos números por sumar tienen signos diferentes, restamos el valor absoluto más pequeño del más grande.

**Calcular**  $|29,500| - |-4,000| = 29,500 - 4,000 = 25,500$

Así,  $-4,000 + 29,500 = 25,500$ .

**AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 12** **Revisar y responder** La respuesta es razonable. Por tanto, la utilidad neta del año fue de \$25,500. 

## 5 Sumar con calculadora



A lo largo del libro, en el recuadro de Uso de la calculadora se dará información acerca de ellas. Algunos serán para calculadoras científicas; otros, para calculadoras graficadoras, y algunos más para ambas. En el margen se observan dos ilustraciones; una calculadora científica (la de la izquierda) y una calculadora graficadora (la de la derecha). Las calculadoras graficadoras hacen lo mismo y un poco más que una calculadora científica. Pregunte al profesor si recomienda una calculadora en particular para este curso. Si planea seguir cursos adicionales de matemáticas, tal vez deba considerar el tipo de calculadora que podría emplear en los otros cursos.

Es importante que entienda los procedimientos para sumar, restar, multiplicar y dividir números reales *sin* emplear calculadora. *No debe depender de una calculadora para resolver problemas*. Sin embargo, si se le permite utilizarla, empleela para ahorrar tiempo con los cálculos difíciles. Si comprendió los conceptos básicos, y la respuesta no parece razonable, usted será capaz de darse cuenta si cometió un error al introducir los datos a la calculadora.

A continuación presentaremos el primero de muchos recuadros del Uso de la calculadora y del Uso de la calculadora graficadora. Observe que en ellos *no se presenta material nuevo*. Se presentan para ayudarle a emplear la calculadora que utilice en este curso. No se preocupe si no sabe lo que hacen todas las teclas. Su profesor le indicará cuáles necesita conocer para poder utilizarla.

En los recuadros de Uso de la calculadora graficadora, cuando se muestren secuencias de teclas o pantallas gráficas (llamadas ventanas), serán para los modelos Texas Instruments TI-83 o Texas Instruments TI-83 Plus. Para el material que se cubre en este libro de texto, las pulsaciones de teclas y las gráficas que se obtienen serán las mismas para ambas calculadoras. Debe leerse el manual de la calculadora graficadora para obtener instrucciones más detalladas.



## Uso de la calculadora

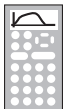
### Introducción de números negativos

La mayoría de calculadoras tienen una tecla  $\boxed{+/-}$ , que se emplea para introducir números negativos. Para introducir  $-5$ , oprima  $5 \boxed{+/-}$  y aparecerá un  $-5$ . A continuación se muestra cómo evaluar ciertos problemas de suma en una calculadora científica.

#### Suma de números reales

EVALUAR	TECLAS*	RESPUESTA EN PANTALLA
$-9 + 24$	$9 \boxed{+/-} \boxed{+} 24 \boxed{=}$	15
$15 + (-22)$	$15 \boxed{+} 22 \boxed{+/-} \boxed{=}$	-7
$-30 + (-16)$	$30 \boxed{+/-} \boxed{+} 16 \boxed{+/-} \boxed{=}$	-46

\* En algunas calculadoras científicas, el signo negativo se introduce antes del número, igual que en las calculadoras graficadoras.



## Uso de la calculadora graficadora

### Introducción de números negativos

Las calculadoras graficadoras tienen dos teclas similares, como se muestra a continuación



#### Suma de números reales

EVALUAR	TECLAS	RESPUESTA EN PANTALLA
$-9 + 24$	$\boxed{(-)} 9 + 24 \boxed{\text{ENTER}}$	15
$15 + (-22)$	$15 + \boxed{(-)} 22 \boxed{\text{ENTER}}$	-7
$-30 + (-16)$	$\boxed{(-)} 30 + \boxed{(-)} 16 \boxed{\text{ENTER}}$	-46

Para hacer que un número sea negativo en una calculadora graficadora, primero se oprime la tecla  $\boxed{(-)}$ , y después se introduce el número.

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 97

## Conjunto de ejercicios 1.6

### Ejercicios conceptuales

1. ¿Cuáles son las cuatro operaciones básicas de la aritmética?
2. **a)** ¿Qué son los opuestos o inversos aditivos?  
**b)** Dé un ejemplo de dos números que sean opuestos.
3. **a)** Los números  $-\frac{2}{3}$  y  $\frac{3}{2}$ , ¿son opuestos? Explique.  
**b)** Si los números del inciso **a)** no son opuestos, ¿cuál es el opuesto de  $-\frac{2}{3}$ ?
4. Si se suman dos números negativos, ¿la suma será un número positivo o uno negativo? Explique.
5. Si se suma un número positivo y otro negativo, ¿la suma será positiva, negativa u otra? Explique.
6. **a)** Si se suma  $-24,692$  más  $30,519$ , ¿la suma será positiva o negativa? Sin hacer ningún cálculo, explique cómo hizo para determinar la respuesta.  
**b)** Repita el inciso **a)** para los números  $24,692$  y  $-30,519$ .  
**c)** Vuelva a hacer el inciso **a)** para los números  $-24,692$  y  $-30,519$ .

7. Explique con sus propias palabras cómo sumar dos números con signos iguales.
8. Explique con sus propias palabras cómo sumar dos números con signos distintos.
9. El Sr. Dabskic compró artículos por \$175 con su tarjeta de crédito. Después realizó un pago de \$93.
- a) Explique por qué el balance de su tarjeta se encuentra con la suma de  $-175 + 93$ .
- b) Encuentre la suma de  $-175 + 93$ .
- c) En el inciso b), usted debe haber encontrado la suma de  $-82$ . Explique por qué este número indica que el Sr. Dabskic debe \$82 a su tarjeta de crédito.
10. La Sra. Goldstein debía \$163 a su tarjeta de crédito. Ella compró un artículo que costaba \$56.
- a) Explique por qué el balance nuevo en su tarjeta de crédito se encuentra con la suma de  $-163 + (-56)$ .
- b) Encuentre la suma de  $-163 + (-56)$ .
- c) En el inciso b), usted debe haber obtenido una suma de  $-219$ . Explique por qué este  $-219$  indica que la Sra. Goldstein debe \$219 a su tarjeta de crédito.

En los ejercicios 11 y 12, diga si los cálculos son correctos, si no lo son explique por qué.

$$11. \frac{-5}{12} + \frac{9}{12} = \frac{-5+9}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$12. \frac{-6}{70} + \left(\frac{-9}{70}\right) = \frac{-6+(-9)}{70} = \frac{-15}{70} = -\frac{3}{14}$$

## Práctica de habilidades

Escriba el opuesto de cada número.

13. 9

14. -7

15. -28

16. 3

17. 0

18. -5

19.  $\frac{5}{3}$

20.  $-\frac{1}{4}$

21.  $2\frac{3}{5}$

22. -1

23. 3.72

24. -0.721

Sume.

25.  $5 + 6$

26.  $-8 + 2$

27.  $4 + (-3)$

28.  $8 + (-7)$

29.  $-4 + (-2)$

30.  $-3 + (-5)$

31.  $6 + (-6)$

32.  $-8 + 8$

33.  $-4 + 4$

34.  $-6 + 9$

35.  $-8 + (-2)$

36.  $6 + (-5)$

37.  $-6 + 6$

38.  $-7 + 3$

39.  $-8 + (-5)$

40.  $0 + (-3)$

41.  $0 + 0$

42.  $0 + (-0)$

43.  $-6 + 0$

44.  $-9 + 13$

45.  $18 + (-9)$

46.  $-7 + 7$

47.  $-33 + (-31)$

48.  $-27 + (-9)$

49.  $-42 + (-9)$

50.  $56 + (-14)$

51.  $6 + (-27)$

52.  $-16 + 9$

53.  $-35 + 40$

54.  $-12 + 17$

55.  $-4.2 + 6.5$

56.  $-8.3 + 5.7$

57.  $-9.7 + (-5.4)$

58.  $10.34 + (-8.57)$

59.  $180 + (-200)$

60.  $-33 + (-92)$

61.  $-67 + 28$

62.  $183 + (-183)$

63.  $184 + (-93)$

64.  $-19 + 176$

65.  $-452 + 312$

66.  $-94 + (-98)$

67.  $-26 + (-79)$

68.  $49 + (-63)$

69.  $-24.6 + (-13.9)$

70.  $80.5 + (-90.4)$

71.  $106.3 + (-110.9)$

72.  $-124.7 + (-19.3)$

Sume.

73.  $\frac{3}{5} + \frac{1}{7}$

74.  $\frac{5}{8} + \frac{3}{5}$

75.  $\frac{5}{12} + \frac{6}{7}$

76.  $\frac{2}{9} + \frac{3}{10}$

77.  $-\frac{8}{11} + \frac{4}{5}$

78.  $-\frac{4}{9} + \frac{5}{27}$

79.  $-\frac{7}{10} + \frac{11}{90}$

80.  $\frac{8}{9} + \left(-\frac{1}{3}\right)$

81.  $\frac{9}{25} + \left(-\frac{3}{50}\right)$

82.  $\frac{3}{20} + \left(-\frac{9}{100}\right)$

83.  $-\frac{7}{30} + \left(-\frac{5}{6}\right)$

84.  $-\frac{1}{15} + \left(-\frac{5}{6}\right)$

85.  $-\frac{4}{5} + \left(-\frac{5}{75}\right)$

86.  $-\frac{9}{24} + \frac{5}{7}$

87.  $\frac{5}{36} + \left(-\frac{5}{24}\right)$

88.  $-\frac{9}{40} + \frac{4}{15}$


89.  $-\frac{5}{12} + \left(-\frac{3}{10}\right)$

90.  $\frac{7}{16} + \left(-\frac{5}{24}\right)$

91.  $-\frac{13}{14} + \left(-\frac{7}{42}\right)$

92.  $-\frac{11}{27} + \left(-\frac{7}{18}\right)$



 En los ejercicios 93 a 108, **a)** determine por observación si la suma será un número positivo, cero o negativo; **b)** encuentre el resultado por medio de su calculadora, y **c)** revise su respuesta del inciso **b)** para determinar si es razonable y tiene sentido.

- |                              |                              |                               |                              |
|------------------------------|------------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| <b>93.</b> $587 + (-197)$    | <b>94.</b> $-140 + (-629)$   | <b>95.</b> $-84 + (-289)$     | <b>96.</b> $-647 + 352$      |
| <b>97.</b> $-947 + 495$      | <b>98.</b> $762 + (-762)$    | <b>99.</b> $-496 + (-804)$    | <b>100.</b> $-354 + 1090$    |
| <b>101.</b> $-375 + 263$     | <b>102.</b> $1127 + (-84)$   | <b>103.</b> $-1833 + (-2047)$ | <b>104.</b> $-426 + 572$     |
| <b>105.</b> $3124 + (-2013)$ | <b>106.</b> $-9095 + (-647)$ | <b>107.</b> $-1025 + (-1025)$ | <b>108.</b> $7513 + (-4361)$ |

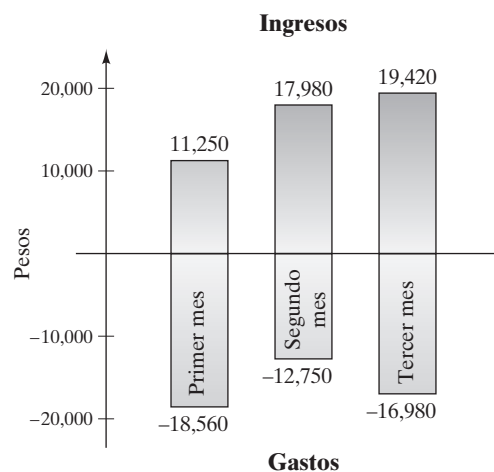
Indique si cada enunciado es verdadero o falso.

- 109.** La suma de dos números negativos siempre es negativo.  
**110.** La suma de un número negativo con otro positivo a veces es negativo.  
**111.** La suma de dos números positivos nunca es negativo.  
**112.** La suma de un número positivo y uno negativo siempre es negativo.  
**113.** La suma de un número positivo y uno negativo siempre es positivo.  
**114.** La suma de un número y su opuesto siempre es igual a cero.

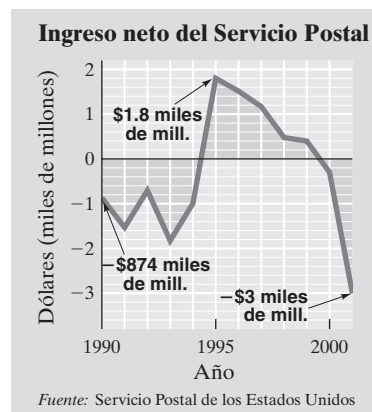
## Solución de problemas

Escriba una expresión que pueda utilizarse para resolver cada problema y después solúcelo.

- 115. Tarjeta de crédito** El Sr. Peter debía \$94 a su tarjeta de crédito. Compró un artículo que costaba \$183. Encuentre la cantidad que el Sr. Peter debe al banco.
- 116. Tarjeta de débito** La Sra. Chu compró artículos por \$142 con su tarjeta de débito. Encuentre su saldo después de realizar un pago de \$87.
- 117. Fútbol** Un equipo de fútbol americano perdió 18 yardas en un juego y en el siguiente otras 3. ¿Cuál fue su pérdida total de yardas?
- 118. Impuesto al ingreso** La Sra. Poweski pagó \$1,823 en impuestos federales. Cuando fue auditada, tuvo que pagar \$471 adicionales. ¿Cuál fue su impuesto total?
- 119. Perforación en busca de agua** Una compañía perforadora excava un pozo. Durante la primera semana perforó 27 pies, y durante la segunda avanzó 34 pies antes de encontrar agua. ¿Qué tan profundo es el pozo?
- 120. Valle de la muerte** Los Duncan se encuentran en un punto a 267 pies por debajo del nivel del mar, en el Valle de la Muerte, en California. Proceden a escalar una distancia vertical de 198 pies en una montaña. ¿Cuál es su posición vertical en términos del nivel del mar?
- 121. Alta montaña** La edición 2002 de *The Guinness Book of World Records*, menciona que el Mauna Kea, en Hawai, es la montaña más alta del mundo si se mide de su base a la cumbre. La base del Mauna Kea se encuentra a 19,684 pies bajo el nivel del mar. La altura total de la montaña de la base a la cumbre es de 33,480 pies. ¿A qué altitud está el pico del Mauna Kea, sobre el nivel del mar?
- 122. Barra de café** Los French abrieron una cafetería. Su ingreso y gastos durante sus primeros tres meses de operación aparecen en la siguiente gráfica.
- Encuentre la utilidad o pérdida neta (la suma del ingreso y los gastos) durante el primer mes.
  - Determine la utilidad o pérdida neta durante el segundo mes.
  - Calcule la utilidad o pérdida neta en el tercer mes.



- 123.** La siguiente gráfica ilustra las utilidades o pérdidas del Servicio Postal durante los años de 1990 a 2001.



- Determine la ganancia o pérdida neta del Servicio Postal durante 2001.

- b) Estime la ganancia o pérdida netas del Servicio Postal durante cada uno de los años de 1999, 2000 y 2001. Después, calcule la ganancia o pérdida neta de 1999 a 2001 con la suma de las tres ganancias netas.

**124.** En la siguiente gráfica se muestran los cambios porcentuales de 1996 a 2000, para delitos seleccionados, en los Estados Unidos.

- a) Determine el cambio porcentual en robo de auto, de 1998 a 2000, con la suma de los porcentajes individuales durante los años de 1998, 1999 y 2000.
- b) Determine el cambio porcentual en delitos violentos en los E.U., de 1998 a 2000.

### Cambio porcentual respecto del año anterior para delitos en los E.U.

Año	Delito violento	Robo de auto
1996	-6.5%	-5.2%
1997	-3.2%	-2.9%
1998	-6.4%	-8.4%
1999	-6.7%	-7.7%
2000	0.1%	2.7%

Fuente: FBI

## Problemas de reto

Evalúe cada ejercicio con la suma de los números de izquierda a derecha. En breve se estudiarán problemas como éstos.

**125.**  $(-4) + (-6) + (-12)$

**126.**  $5 + (-7) + (-8)$

**127.**  $29 + (-46) + 37$

**128.**  $4 + (-5) + 6 + (-8)$

**129.**  $(-12) + (-10) + 25 + (-3)$

**130.**  $(-4) + (-2) + (-15) + (-27)$

**131.**  $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5}$

**132.**  $-\frac{3}{8} + \left(-\frac{2}{9}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)$

Realice las siguientes sumas. Explique cómo determinó su respuesta. (Sugerencia: Empareje los números pequeños con los grandes, a partir de cada extremo.)

**133.**  $1 + 2 + 3 + \cdots + 10$

**134.**  $1 + 2 + 3 + \cdots + 20$

## Ejercicios de repaso acumulativo

[1.3] **135.** Multiplique  $\left(\frac{3}{5}\right)\left(1\frac{2}{3}\right)$ .

**136.** Reste  $3 - \frac{5}{16}$ .

[1.4] **137.** Enliste el conjunto de números para contar.

[1.5] Inserte cualquiera de los símbolos  $<$ ,  $>$  o  $=$ , en cada una de las áreas sombreadas, para que la proposición sea verdadera.

**138.**  $|-3| \blacksquare 2$

**139.**  $8 \blacksquare |-7|$

## 1.7 RESTA DE NÚMEROS REALES



- 1 Restar números.
- 2 Restar números en forma mental.
- 3 Evaluar expresiones que contienen más de dos números.

### 1 Restar números

Cualquier problema de resta puede ser escrito de nuevo como un problema de suma mediante el inverso aditivo.

#### Resta de números reales

En general, si  $a$  y  $b$  representan dos números reales cualesquiera, entonces

$$a - b = a + (-b)$$

Esta regla afirma que para restar  $b$  de  $a$ , hay que sumar el opuesto o inverso aditivo de  $b$  a  $a$ .

**EJEMPLO 1** Evalúe  $9 - (+4)$ .

**Solución** Estamos restando un 4 positivo de 9. Para hacer esto, sumamos el opuesto de  $+4$ , que es  $-4$ , a 9.

$$9 - (+4) = 9 + (-4) = 5$$

↑
↑
↑
↑

Resta
4 positivo
Suma
4 negativo

Evaluamos  $9 + (-4)$  con los procedimientos para *sumar* números reales, que presentamos en la sección 1.6.

Con frecuencia, en un problema de sustracción, cuando el número por restar es positivo, el signo  $+$  que lo precede no se escribe. Por ejemplo, en la resta  $9 - 4$ ,

$$9 - 4 \text{ significa } 9 - (+4)$$

Así, para evaluar  $9 - 4$ , se suma el opuesto de 4, que es  $-4$ , a 9.

$$9 - 4 = 9 + (-4) = 5$$

↑
↑
↑
↑

Resta
4 positivo
Suma
4 negativo

Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 2.

**EJEMPLO 2** Evalúe  $5 - 3$ .

**Solución** Debe restarse un 3 positivo de 5. Para cambiar este problema a otro de suma, se suma el opuesto de 3, que es  $-3$ , a 5.

$$\overbrace{5 - 3}^{\text{Problema de resta}} = \overbrace{5 + (-3)}^{\text{Problema de suma}} = 2$$

↑
↑
↑
↑

Resta
3 positivo
Suma
3 negativo



**EJEMPLO 3** Evalúe

**a)**  $4 - 9$     **b)**  $-4 - 2$

**Solución** **a)** Sumar el opuesto de 9, que es  $-9$ , a 4.

$$4 - 9 = 4 + (-9) = -5$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 15

**b)** Sumar el opuesto de 2, que es  $-2$ , a  $-4$ .

$$-4 - 2 = -4 + (-2) = -6$$



**EJEMPLO 4** Evalúe  $4 - (-2)$ .

**Solución** Se pide restar de 4 un 2 negativo. Para hacer esto, se suma el opuesto de  $-2$ , que es 2, a 4.

$$4 - (-2) = 4 + 2 = 6$$

↑
↑
↑
↑

Restar
2 negativo
Sumar
2 positivo



**SUGERENCIA**

Al examinar el ejemplo 4 se observa que

$$4 - (-2) = 4 + 2$$

Siempre que restamos un número negativo, se reemplazan los dos signos negativos por uno positivo.

**EJEMPLO 5**

Evalúe

**a)**  $7 - (-5)$       **b)**  $-15 - (-12)$

**Solución**

**a)** Como se está restando de 7 un número negativo, sumando el opuesto de  $-5$ , que es 5, quedan dos signos negativos juntos que se sustituyen por uno positivo.

$$7 - (-5) = 7 + 5 = 12$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 19

**b)**  $-15 - (-12) = -15 + 12 = -3$

**SUGERENCIA**

Ahora se indicará cómo se ilustra la resta por medio de bolitas. Recuerde que en la sección anterior una bolita roja representaba  $+1$  y una gris  $-1$ .

$$\bullet = +1 \quad \bullet = -1$$

Consideremos el problema de restar  $2 - 5$ . Si cambiamos éste a un problema de suma, queda  $2 + (-5)$ . Entonces, podemos sumar como se hizo en la sección anterior. La siguiente figura muestra que  $2 + (-5) = -3$ .

$$\text{///} + \text{///} + \text{///} + \text{///} + \text{///} + \text{///}$$

Ahora consideremos  $-2 - 5$ . Esto significa  $-2 + (-5)$ , que se puede representar como sigue:

$$\text{///} + \text{///} + \text{///} + \text{///} + \text{///} + \text{///}$$

Así,  $-2 - 5 = -7$ .

Ahora considere el problema de hacer  $-3 - (-5)$ . Esto se reescribe como  $-3 + 5$ , que se representa de la siguiente manera:

$$\text{///} + \text{///} + \text{///} + \text{///} + \text{///} + \text{///}$$

Así,  $-3 - (-5) = 2$ .

Algunos estudiantes tienen problemas para comprender por qué cuando se resta un número negativo se obtiene uno positivo. Se estudiará el problema  $3 - (-2)$ . En esta ocasión lo analizaremos desde un punto de vista un poco diferente. Se comienza con 3:

$$\bullet + \bullet + \bullet$$

De esto se desea restar un 2 negativo. Al  $+3$  que se muestra arriba se sumarán dos ceros con combinaciones de sumas de  $+1 -1$ . Recuerde que  $+1 -1$  suman 0.

$$\begin{array}{c} \bullet + \bullet + \bullet + \bullet + \bullet + \bullet \\ \hline +3 \quad \quad 0 \quad \quad 0 \end{array}$$

Ahora es posible restar o *eliminar* los dos  $-1$ , como se muestra:

$$\bullet + \bullet + \bullet + \text{///} + \text{///}$$

De esto, se observa que queda  $3 + 2$  o 5. Entonces,  $3 - (-2) = 5$ .

**EJEMPLO 6** Restar 12 de 3.**Solución**

$$3 - 12 = 3 + (-12) = -9$$

**SUGERENCIA**

En el ejemplo 6 se pidió “restar 12 de 3”. Probablemente usted esperaba que esto se escribiera como  $12 - 3$ , debido a la costumbre de obtener un número positivo. Sin embargo, la forma correcta de escribir lo anterior es  $3 - 12$ . Observe que el número que sigue a la palabra “de” es el punto de arranque. Ahí es donde el cálculo comienza. Por ejemplo:

Restar 2 de 7 significa  $7 - 2$ .

De 7 restar 2, quiere decir  $7 - 2$ .

Restar 5 de  $-1$  es  $-1 - 5$ .

De  $-1$  restar 5, significa  $-1 - 5$ .

Restar  $-4$  de  $-2$  quiere decir  $-2 - (-4)$ .

De  $-2$  restar  $-4$ , quiere decir  $-2 - (-4)$ .

Sustraer  $-3$  de 6 quiere decir  $6 - (-3)$ .

De 6 sustraer  $-3$ , significa  $6 - (-3)$ .

Restar  $a$  de  $b$  significa  $b - a$ .

De  $a$  restar  $b$ , quiere decir  $a - b$ .

**EJEMPLO 7** Restar 5 de 5.**Solución**

$$5 - 5 = 5 + (-5) = 0$$

**EJEMPLO 8** Restar  $-6.48$  de  $4.25$ .**Solución**

$$4.25 - (-6.48) = 4.25 + 6.48 = 10.73$$



**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 65**

Ahora se llevarán a cabo problemas que contienen fracciones.

**EJEMPLO 9** Restar  $\frac{5}{9} - \frac{13}{15}$ **Solución**

Se comienza con el cambio de un problema de sustracción a otro de suma.

$$\frac{5}{9} - \frac{13}{15} = \frac{5}{9} + \left(-\frac{13}{15}\right)$$

Ahora reescribimos las fracciones con mcd, 45, y sumamos como se hizo en la última sección.

$$\begin{aligned} \frac{5}{9} + \left(-\frac{13}{15}\right) &= \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{5} + \left(-\frac{13}{15}\right) \cdot \frac{3}{3} \\ &= \frac{25}{45} + \left(-\frac{39}{45}\right) = \frac{25 + (-39)}{45} = \frac{-14}{45} = -\frac{14}{45} \end{aligned}$$

$$\text{Así, } \frac{5}{9} - \frac{13}{15} = -\frac{14}{45}.$$

**EJEMPLO 10** Reste  $-\frac{7}{18}$  de  $-\frac{9}{15}$ .**Solución**

Este problema se escribe como  $-\frac{9}{15} - \left(-\frac{7}{18}\right)$ .

Esto se simplifica como sigue.

$$-\frac{9}{15} - \left(-\frac{7}{18}\right) = -\frac{9}{15} + \frac{7}{18}.$$

El mcd de 15 y 18 es 90. Al reescribir las fracciones con el común denominador, queda

$$\begin{aligned} -\frac{9}{15} \cdot \frac{6}{6} + \frac{7}{18} \cdot \frac{5}{5} &= -\frac{54}{90} + \frac{35}{90} = \frac{-54 + 35}{90} \\ &= \frac{-19}{90} = -\frac{19}{90}. \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 87



Se verán algunas aplicaciones que involucran la sustracción.

**EJEMPLO 11 Saldo del libro contable** El libro de contabilidad de Duncan indica un saldo de \$237 antes de hacer un cheque de \$364. Encuentre el nuevo saldo en su libro contable.

**Solución** **Entender y traducir** Se obtiene el nuevo saldo al restar 364 de 237.

**Calcular**  $237 - 364 = 237 + (-364) = -127$

**Revisar y resolver** El signo negativo indica un déficit, que era lo que esperábamos. Por tanto, hay un sobregiro de \$127.

**EJEMPLO 12 Diferencia de temperatura** El 1 de febrero de 2002, la temperatura mínima del día en Honolulu, Hawai, fue de 72 °F. En el mismo día, la temperatura mínima en Delta Junction, Alaska (al final de la Autopista de Alaska, alrededor de 80 millas al sureste de Fairbanks), fue de -23 °F. Encuentre la diferencia de temperaturas.

**Solución** **Entender y traducir** La palabra “diferencia” en el título del ejemplo indica una resta. La diferencia de temperaturas se obtiene con la siguiente sustracción.

**Calcular**  $72 - (-23) = 72 + 23 = 95$

**Revisar y responder** Por tanto, la temperatura en Honolulu fue 95 °F mayor que la de Delta Junction.

**EJEMPLO 13 Medición de la precipitación pluvial** Se colocó un pluviómetro en el patio de una casa en Beverly Broomell, y no se toca durante 2 días. Suponga que en el primer día cayeron  $2\frac{1}{4}$  pulgadas de lluvia. En el segundo día no cayó lluvia, pero se evaporó  $\frac{3}{8}$  de pulgada de la lluvia del primer día.


¿Cuánta agua queda en el pluviómetro después del segundo día?

**Solución** **Entender y traducir** De la primera cantidad,  $2\frac{1}{4}$  pulgadas, se debe restar  $\frac{3}{8}$  de pulgada.

**Calcular** Comenzamos con el cambio de un problema de sustracción a otro de suma. Después cambiamos el número mixto a una fracción, y reescribimos cada fracción con su mcd, 8.

$$\begin{aligned}
2\frac{1}{4} - \frac{3}{8} &= 2\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{8}\right) \\
&= \frac{9}{4} + \left(-\frac{3}{8}\right) \\
&= \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{2} + \left(-\frac{3}{8}\right) \\
&= \frac{18}{8} + \left(-\frac{3}{8}\right) \\
&= \frac{18 + (-3)}{8} = \frac{15}{8} \quad \text{o bien} \quad 1\frac{7}{8}
\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 135

**Revisar y responder** Así, después del segundo día quedó  $1\frac{7}{8}$  pulgadas de agua en el pluviómetro. Con base en los números dados en el problema, la respuesta parece razonable. 


### EJEMPLO 14

Evalúe

- a)**  $15 + (-4)$       **b)**  $-16 - 3$       **c)**  $19 + (-14)$   
**d)**  $7 - (-9)$       **e)**  $-9 - (-3)$       **f)**  $8 - 13$

### Solución

Los incisos **a)** y **b)** son problemas de suma, mientras que los demás incisos son restas. Podemos reescribir cada problema de sustracción como uno de suma para evaluarlo.

- a)**  $15 + (-4) = 11$       **b)**  $-16 - 3 = -16 + (-3) = -19$   
**c)**  $19 + (-14) = 5$       **d)**  $7 - (-9) = 7 + 9 = 16$   
**e)**  $-9 - (-3) = -9 + 3 = -6$       **f)**  $8 - 13 = 8 + (-13) = -5$  

## 2 Restar números en forma mental

En los ejercicios anteriores cambiamos los problemas de resta por problemas de suma. Hicimos esto debido a que sabíamos sumar números reales. Después de este capítulo, cuando resolvamos un problema de resta, no mostraremos este paso. *Usted necesita practicar y comprender la forma de sumar y restar números reales. Debe comprender este material tal que, al pedírsele que evalúe una expresión como  $-4 - 6$ , pueda calcular la respuesta mentalmente. Debe comprender que  $-4 - 6$  significa lo mismo que  $-4 + (-6)$ , pero no necesita escribir los cálculos para encontrar el valor de la expresión,  $-10$ .*

Evaluaremos algunos problemas de resta sin mostrar el proceso de cambio, de resta a suma.

### EJEMPLO 15

Evalúe.

- a)**  $-7 - 5$       **b)**  $4 - 12$       **c)**  $18 - 25$       **d)**  $-20 - 12$

### Solución

- a)**  $-7 - 5 = -12$       **b)**  $4 - 12 = -8$   
**c)**  $18 - 25 = -7$       **d)**  $-20 - 12 = -32$  

En el ejemplo 15 **a)**, podríamos haber razonado que  $-7 - 5$  significa  $-7 + (-5)$ , que es  $-12$ , pero no necesitamos mostrar todo el proceso.

### EJEMPLO 16

Evalúe  $-\frac{3}{5} - \frac{7}{8}$ .



**Solución** El mínimo común denominador es 40. Escriba cada fracción con el mcd, 40.

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 79

$$-\frac{3}{5} \cdot \frac{8}{8} - \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{5} = -\frac{24}{40} - \frac{35}{40} = \frac{-24 - 35}{40} = -\frac{59}{40} = -1\frac{19}{40} \quad \star$$

Observe que en el ejemplo 16, cuando sumamos  $-\frac{24}{40} - \frac{35}{40}$ , pudimos haber escrito  $\frac{-24 + (-35)}{40}$ , pero en este momento decidimos escribir  $\frac{-24 - 35}{40}$  porque  $-24 - 35$  es  $-59$ , la respuesta es  $-\frac{59}{40}$  o bien  $-1\frac{19}{40}$ .

### 3 Evaluar expresiones que contienen más de dos números

Al evaluar expresiones que involucran más de una suma o resta, se trabaja de izquierda a derecha, a menos que haya paréntesis u otros símbolos de agrupación.

**EJEMPLO 17** Evaluar

**a)**  $-5 - 13 - 4$     **b)**  $-3 + 1 - 7$     **c)**  $8 - 10 + 2$

**Solución** Se trabaja de izquierda a derecha.

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 11

$$\begin{array}{lll} \mathbf{a)} & \underline{-5 - 13} - 4 & \mathbf{b)} & \underline{-3 + 1} - 7 & \mathbf{c)} & \underline{8 - 10} + 2 \\ & = -18 - 4 & & = -2 - 7 & & = -2 + 2 \\ & = -22 & & = -9 & & = 0 \end{array} \quad \star$$

A partir de esta sección, por lo general no escribiremos expresiones como  $3 + (-4)$  sino  $3 - 4$ . Recuerde que  $3 - 4$  significa  $3 + (-4)$ , de acuerdo con nuestra definición de resta. **Siempre que veamos una expresión del tipo  $a + (-b)$ , podremos escribirla como  $a - b$ .** Por ejemplo,  $12 + (-15)$  se escribe  $12 - 15$ , y  $-6 + (-9)$  se escribe  $-6 - 9$ .

Como ya dijimos, **siempre que veamos una expresión de la forma  $a - (-b)$ , podemos reescribirla como  $a + b$ .** Por ejemplo,  $6 - (-13)$  se reescribe  $6 + 13$ , y  $-12 - (-9)$  se escribe  $-12 + 9$ . Con el uso de ambos conceptos, la expresión  $9 + (-12) - (-8)$  se simplifica como  $9 - 12 + 8$ .

**EJEMPLO 18** **a)** Evaluar  $-5 - (-9) + (-12) + (-3)$ .

**b)** Simplificar la expresión del inciso **a**).

**c)** Evaluar la expresión simplificada en el inciso **b**).

**Solución** **a)** Se trabaja de izquierda a derecha. Las áreas sombreadas indican las sumas que se realizan para obtener el siguiente paso.

$$\begin{aligned} -5 - (-9) + (-12) + (-3) &= \underline{-5 + 9} + (-12) + (-3) \\ &= \underline{4 + (-12)} + (-3) \\ &= -8 + (-3) \\ &= -11 \end{aligned}$$

b) La expresión se simplifica como sigue:

$$-5 - (-9) + (-12) + (-3) = -5 + 9 - 12 - 3$$

c) Evaluar la expresión simplificada de izquierda a derecha. Comenzamos por sumar  $-5 + 9$  para obtener 4.

$$\begin{aligned} -5 + 9 - 12 - 3 &= 4 - 12 - 3 \\ &= -8 - 3 \\ &= -11 \end{aligned}$$



**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 125**

Al llegar a una expresión como la del ejemplo 18 a) debemos simplificarla como se hizo en el inciso b), y después evaluar la expresión simplificada.



### Uso de la calculadora

#### Resta con una calculadora científica

En el recuadro de Uso de la calculadora de la página 49, indicamos que la tecla  $\boxed{+/-}$  por lo general se oprime después de introducir un número para hacer que éste sea negativo. A continuación presentaremos algunos ejemplos de resta en una calculadora científica.

EVALUAR	TECLAS	RESPUESTA EN PANTALLA
$-5 - 8$	5 $\boxed{+/-}$ $\boxed{-}$ 8 $\boxed{=}$	-13
$2 - (-7)$	2 $\boxed{-}$ 7 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$	9



#### Resta con una calculadora graficadora

En el recuadro Uso de la calculadora graficadora, mencionamos que en una calculadora graficadora debemos oprimir la tecla  $\boxed{(-)}$  antes de introducir el número para que éste sea negativo. La tecla  $\boxed{-}$  de las calculadoras graficadoras se emplea para restar. Los siguientes son algunos ejemplos de resta en ellas.

EVALUAR	TECLAS	RESPUESTA EN PANTALLA
$-5 - 8$	$\boxed{(-)}$ 5 $\boxed{-}$ 8 $\boxed{\text{ENTER}}$	-13
$2 - (-7)$	2 $\boxed{-}$ $\boxed{(-)}$ 7 $\boxed{\text{ENTER}}$	9

## Conjunto de ejercicios 1.7

### Ejercicios conceptuales

- Escriba una expresión que ilustre 7 restado de 2.
- Escriba una expresión que ilustre  $-6$  restado de  $-4$ .
- Escriba una expresión que denote  $*$  restado de  $\square$ .
- Escriba una expresión para ilustrar  $?$  restado de  $\odot$ .
- Explique en sus propias palabras cómo restar un número  $b$  de un número  $a$ .
  - Escriba una expresión en la que se utilice la suma para restar 14 de 5.
  - Evalúe la expresión que determinó en el inciso b).
- Expresar la resta  $a - (-b)$  en forma simplificada.
  - Escriba una expresión simplificada que se utilice para evaluar  $-4 - (-12)$ .
  - Evalúe la expresión simplificada que se obtuvo en el inciso b).
- Expresar la resta  $a - (+b)$  en forma simplificada.
  - Simplifique la expresión  $7 - (+9)$ .
  - Evalúe la expresión simplificada que obtuvo en el inciso b).
- Cuando se suman tres números o más sin paréntesis, ¿cómo se evalúa la expresión?

9. a) Simplifique  $3 - (-6) + (-5)$  con la eliminación de dos signos uno junto a otro y su remplazo por uno solo. (Consulte el ejemplo 18b.) Explique cómo determinó su respuesta.

b) Evalúe la expresión simplificada que se obtuvo en el inciso a).

10. a) Simplifique  $-12 + (-5) - (-4)$ . Explique cómo llegó a la respuesta.

b) Evalúe la expresión simplificada que obtuvo en el inciso a).

En los ejercicios 11 y 12, diga si los cálculos siguientes son correctos. Si no lo fueran, explique por qué.

$$11. \frac{4}{9} - \frac{3}{7} = \frac{28}{63} - \frac{27}{63} = \frac{28 - 27}{63} = \frac{1}{63}$$

$$12. -\frac{5}{12} - \frac{7}{9} = -\frac{15}{36} - \frac{28}{36} = \frac{-15 - 28}{36} = -\frac{43}{36}$$

## Práctica de habilidades

Evalúe lo siguiente.

13.  $12 - 5$

14.  $-1 - 6$

15.  $8 - 9$

16.  $3 - 3$

17.  $-4 - 2$

18.  $-7 - (-4)$

19.  $-4 - (-3)$

20.  $-3 - 3$

21.  $-4 - 4$

22.  $7 - (-7)$

23.  $0 - 7$

24.  $9 - (-9)$

25.  $8 - 8$

26.  $9 - (-3)$

27.  $-3 - 1$

28.  $-5 - (-3)$

29.  $5 - 3$

30.  $4 - 9$

31.  $6 - (-3)$

32.  $6 - 10$

33.  $0 - (-5)$

34.  $-6 - 6$

35.  $-9 - 11$

36.  $-4 - (-2)$

37.  $-4 - (-4)$

38.  $14 - 7$

39.  $-8 - (-12)$

40.  $9 - 9$

41.  $-6 - (-2)$

42.  $18 - (-4)$

43.  $-9 - 2$

44.  $-25 - 16$

45.  $-35 - (-8)$

46.  $37 - 40$

47.  $-90 - 60$

48.  $-52 - 37$

49.  $-45 - 37$

50.  $-50 - (-40)$

51.  $70 - (-70)$

52.  $130 - (-90)$

53.  $42.3 - 49.7$

54.  $81.3 - 92.5$

55.  $-7.85 - (-3.92)$

56.  $-12.43 - (-9.57)$

57. Reste 9 de  $-20$ .

58. Reste  $-3$  de  $-10$ .

59. Reste 8 de  $-8$ .

60. Reste 5 de  $-20$ .

61. Reste  $-3$  de  $-5$ .

62. Reste 15 de  $-5$ .

63. Reste  $-4$  de 9.

64. Reste  $-23$  de  $-23$ .

65. Reste 24 de 13.

66. Reste  $-11$  de  $-5$ .

67. Reste  $-12.4$  de  $-6.3$ .

68. Reste 17.3 de  $-9.8$ .

Evalúe lo siguiente.

69.  $\frac{4}{5} - \frac{5}{6}$

70.  $\frac{5}{9} - \frac{3}{8}$

71.  $\frac{8}{15} - \frac{7}{45}$

72.  $\frac{5}{12} - \frac{7}{8}$

73.  $-\frac{1}{4} - \frac{2}{3}$

74.  $-\frac{7}{10} - \frac{5}{12}$

75.  $-\frac{4}{15} - \frac{3}{20}$

76.  $-\frac{5}{4} - \frac{7}{11}$

77.  $\frac{3}{8} - \frac{6}{48}$

78.  $-\frac{5}{6} - \frac{3}{32}$

79.  $-\frac{7}{12} - \frac{5}{40}$

80.  $\frac{17}{18} - \frac{13}{20}$

81.  $\frac{3}{16} - \left(-\frac{5}{8}\right)$

82.  $-\frac{4}{9} - \left(-\frac{3}{5}\right)$

83.  $-\frac{5}{12} - \left(-\frac{3}{8}\right)$


84.  $\frac{5}{20} - \left(-\frac{1}{8}\right)$

85. Reste  $\frac{7}{9}$  de  $\frac{4}{7}$ .

86. Reste  $\frac{7}{15}$  de  $\frac{5}{8}$ .

87. Reste  $-\frac{3}{10}$  de  $-\frac{5}{12}$ .

88. Reste  $-\frac{5}{16}$  de  $-\frac{9}{10}$ .

 En los ejercicios 89 a 106, a) determine por observación si la diferencia será un número positivo, cero o uno negativo; b) encuentre la diferencia por medio de su calculadora, y c) revise su respuesta al inciso b) para ver si es razonable y tiene sentido.

89.  $378 - 279$

90.  $483 - 569$

91.  $-482 - 137$

92.  $178 - (-377)$

93.  $843 - (-745)$

94.  $864 - (-762)$

95.  $-408 - (-604)$

96.  $-623 - 111$

97.  $-1024 - (-576)$

98.  $-104.7 - 27.6$

99.  $165.7 - 49.6$

100.  $-40.2 - (-12.6)$

101. Reste 364 de 295.

102. Reste  $-433$  de  $-932$ .

103. Reste 647 de  $-1023$ .

104. Reste 2432 de  $-4120$ .

105. Reste  $-7.62$  de  $-7.62$ .

106. Reste 36.7 de  $-103.2$ .

Evalúe lo siguiente.

107.  $7 + 5 - (+8)$

110.  $9 - 4 + (-2)$

113.  $-9 - (-3) + 4$

116.  $12 + (-5) - (-4)$

119.  $-36 - 5 + 9$

122.  $-2 - 7 - 13$

125.  $-4 - 6 + 5 - 7$

128.  $32 + 5 - 7 - 12$

108.  $15 - (+9) - (+5)$

111.  $-13 - (+5) + 3$

114.  $15 + (-7) - (-3)$

117.  $17 + (-8) - (+14)$

120.  $45 - 3 - 7$

123.  $25 - 19 + 3$

126.  $-9 - 3 - (-4) + 5$

129.  $-9 + (-7) + (-5) - (-3)$

109.  $-6 + (-6) + 6$

112.  $7 - (+4) - (-3)$

115.  $5 - (-9) + (-1)$

118.  $-7 + 6 - 3$

121.  $-2 + 7 - 9$

124.  $-4 - 1 + 5$

127.  $17 + (-3) - 9 - (-7)$

130.  $6 - 9 - (-3) + 12$

## Solución de problemas

131. **El fin de la tierra** El catálogo del departamento de *El fin de la tierra* tenía 300 suéteres tejidos azules en inventario, al 1 de diciembre. El 9 de diciembre, había recibido 343 órdenes de suéteres.

a) ¿Cuántos suéteres extra fueron pedidos para surtir las órdenes?

b) Si se requieren 100 suéteres adicionales a los que se habían ordenado, ¿cuántos suéteres extra se necesitaría pedir?

132. **Leadville, Co.** De acuerdo con el *Guinness Book of World Records*, la ciudad a mayor altitud en los Estados Unidos es Leadville, Colorado, a 10,152 pies. La ciudad a menor altitud en el mismo país está a 184 pies bajo el nivel del mar, y es Calipatria, California. ¿Cuál es la diferencia de elevación entre dichas ciudades?



Leadville, Colorado

133. **Perforación** Los Jackson, que viven cerca de Myrtle Beach, Carolina del Sur, tienen una casa que está a una altitud de 42 pies sobre el nivel del mar. Contratan a RL Schlichter Drilling Company para que perfore un pozo. Después de encontrar agua, la compañía informa a los Jackson que

perforaron 58 pies hasta el líquido. ¿Qué tan profundo es el pozo respecto del nivel del mar?

134. **Valle de la Muerte** Un paquete de suministro médico se lanza desde un helicóptero que vuela a 1605 pies sobre el nivel del mar, hacia el Valle de la Muerte, California. El paquete aterriza en una localidad que se encuentra a 267 pies bajo el nivel del mar. ¿Qué distancia vertical recorrió el paquete?

135. **Cambio de temperatura** El mayor cambio de temperatura que se haya registrado en un periodo de 24 horas, ocurrió en Browning, Montana, el 23 de enero de 1916. La temperatura pasó de 44 °F a -56 °F. ¿Cuánto cambió la temperatura?

136. **Trenes** Dos trenes arrancan de la misma estación al mismo tiempo. El Amtrak viaja 68 millas en 1 hora. El Pacific Express recorre 80 millas en 1 hora.

a) Si los dos trenes viajan en direcciones opuestas, ¿qué tan lejos estarán uno de otro en 1 hora?

b) Si los dos ferrocarriles viajan en la misma dirección, ¿qué tan lejos estarán uno de otro en 1 hora?

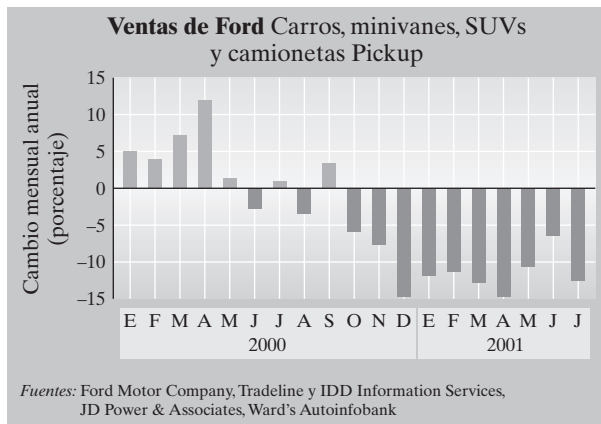
137. **Golf** Cuando esto se escribió, Tiger Woods era la persona más joven que había ganado el torneo de golf para Masters, que se lleva a cabo en el mes de abril en Augusta, Georgia. La siguiente tabla muestra sus puntuaciones en el Masters de años distintos.

Tiger Woods en el Masters	
Fecha*	Puntuación (arriba o abajo de par)
2002	-12
2001	-16
2000	-4
1999	+1
1998	-3
1997	-18
1995	+5
* Tiger Woods no pasó el corte para terminar el torneo en 1996 Fuente: USA Today, 5 de abril de 2001, página 5E	

- a) Si el par para el Masters es de 288 golpes, determine la puntuación en 2002.
- b) ¿Cuál fue la diferencia en sus golpes para el Masters entre 2002 y 2000?
- c) ¿Cuál fue su promedio de golpes para el Masters en 2000, 2001 y 2002, si el par para el campo fue de 288 golpes en cada año?

**138. Disminución de las ventas** La gráfica de la derecha muestra el cambio total mensual en las ventas, en porcentaje, para la Ford Motor Company, de enero de 2000 a julio de 2001.

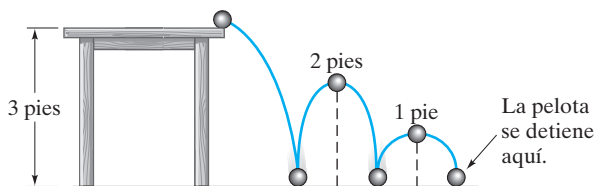
- a) Estime el cambio en las ventas entre junio de 2001 y julio de 2001.
- b) Estime el cambio en las ventas entre abril de 2000 y diciembre de 2000.



### Problemas de reto

Encuentre el valor de cada suma.

- 139.  $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10$
- 140.  $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 99 - 100$
- 141. Considere la recta numérica.
  - a) ¿Cuál es la distancia, en unidades, entre  $-2$  y  $5$ ?
  - b) Escriba un problema de resta que represente dicha distancia (ésta ha de ser positiva).
- 142. **Acciones** Jody Coffee compra una acción en \$50. ¿Generará más utilidades si disminuye un 10% y luego sube 10%, que si aumenta 10% y luego baja 10%, o el valor será el mismo?
- 143. **Pelota que rueda** Una pelota rueda y cae de una mesa, y sigue la trayectoria que se indica en la figura. Suponga que la altura máxima que alcanza la pelota en cada rebote es 1 pie menos que el rebote anterior.



- a) Determine la distancia vertical que recorre la pelota.
- b) Si se considera que la dirección de la pelota hacia abajo es negativa, y positiva hacia arriba, ¿cuál fue la distancia vertical neta que recorrió (desde su punto inicial)?

### Ejercicios de repaso acumulativo

- [1.4] 144. Enliste el conjunto de los enteros.
- [1.5] [1.5] Inserte cualquiera de los símbolos  $>$ ,  $<$  o  $=$ , en cada una de las áreas sombreadas, de modo que el enunciado sea verdadero.
- 145. Explique la relación que hay entre el conjunto de los números racionales, el de los irracionales y el de los reales.

146.  $|-3| \blacksquare -5$

147.  $|-6| \blacksquare |-7|$

[1.7] 148. Evalúe  $\frac{4}{5} - \frac{3}{8}$ .

## 1.8 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS REALES



- 1 Multiplicar números.
- 2 Dividir números.
- 3 Eliminar signos negativos de los denominadores.
- 4 Evaluar divisiones que involucran al 0.

## 1 Multiplicar números

Al multiplicar dos números, se utilizan las siguientes reglas para determinar el signo del producto.

### Signo del producto de dos números reales

1. El producto de dos números con signos **iguales** es un número **positivo**.
2. El producto de dos números con signos **diferentes** es un número **negativo**.

Según esta regla, el producto de dos números positivos o de dos números negativos será positivo. El producto de un número positivo y uno negativo será un número negativo.

**EJEMPLO 1** Evalúe lo siguiente.

**a)**  $4(-5)$     **b)**  $(-6)(7)$     **c)**  $(-9)(-3)$

**Solución**

**a)** Como los números tienen signos diferentes, el producto es negativo.

$$4(-5) = -20$$

**b)** Como los números tienen signos diferentes, el producto es negativo.

$$(-6)(7) = -42$$

**c)** Como los números tienen signos iguales, ambos son negativos, el producto es positivo.

$$(-9)(-3) = 27$$



**EJEMPLO 2** Evalúe lo siguiente.

**a)**  $(-8)(5)$     **b)**  $(-4)(-8)$     **c)**  $4(-9)$     **d)**  $0(6)$     **e)**  $0(-2)$     **f)**  $-3(-6)$

**Solución**

**a)**  $(-8)(5) = -40$     **b)**  $(-4)(-8) = 32$     **c)**  $4(-9) = -36$

**d)**  $0(6) = 0$     **e)**  $0(-2) = 0$     **f)**  $-3(-6) = 18$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 29

Observe que el cero multiplicado por cualquier número real, es cero.



### SUGERENCIA

En este momento, ciertos estudiantes comienzan a confundir problemas como  $-2 - 3$  con  $(-2)(-3)$  y como  $2 - 3$  con  $2(-3)$ . Si no comprende la diferencia entre  $-2 - 3$  y  $(-2)(-3)$ , haga una cita con su profesor tan pronto como sea posible.

#### Problemas de resta

$$-2 - 3 = -5$$

$$2 - 3 = -1$$

#### Problemas de multiplicación

$$(-2)(-3) = 6$$

$$(2)(-3) = -6$$

**EJEMPLO 3** Evalúe lo siguiente

**a)**  $\left(\frac{-1}{8}\right)\left(\frac{-3}{5}\right)$     **b)**  $\left(\frac{3}{20}\right)\left(\frac{-3}{10}\right)$ .

**Solución**

**a)**  $\left(\frac{-1}{8}\right)\left(\frac{-3}{5}\right) = \frac{(-1)(-3)}{8(5)} = \frac{3}{40}$     **b)**  $\left(\frac{3}{20}\right)\left(\frac{-3}{10}\right) = \frac{3(-3)}{20(10)} = -\frac{9}{200}$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 41



En ciertos problemas se le pedirá que realice más de una multiplicación. Cuando esto ocurra, puede determinar el signo del producto final contando la cantidad

de números negativos por multiplicar. *El producto de una cantidad par de números negativos siempre será positivo. El producto de una cantidad impar de números negativos siempre será negativo. ¿Puede explicar por qué?*

**EJEMPLO 4** Evalúe lo siguiente.

**a)**  $(-4)(3)(-2)(-1)$       **b)**  $(-3)(2)(-1)(-2)(-4)$

**Solución** **a)** Como hay tres números negativos (número impar), el producto será negativo, según se ilustra.

$$\begin{aligned} (-4)(3)(-2)(-1) &= (-12)(-2)(-1) \\ &= (24)(-1) \\ &= -24 \end{aligned}$$

**b)** Como hay cuatro números negativos (número par), el producto será positivo.

$$\begin{aligned} (-3)(2)(-1)(-2)(-4) &= (-6)(-1)(-2)(-4) \\ &= (6)(-2)(-4) \\ &= (-12)(-4) \\ &= 48 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 35



## 2 Dividir números

Las reglas para dividir números son muy similares a las que se utilizan para multiplicarlos.

### El signo del cociente de dos números reales

1. El cociente de dos números con signos **iguales** es un número positivo.
2. El cociente de dos números con signos **diferentes** es un número negativo.

Por lo tanto, el cociente de dos números positivos o dos negativos siempre será un número positivo. El cociente de un número positivo y uno negativo, será negativo.

**EJEMPLO 5** Evalúe lo siguiente.

**a)**  $\frac{10}{-5}$       **b)**  $\frac{-45}{5}$       **c)**  $\frac{-36}{-6}$

**Solución** **a)** Como los números tienen signos distintos, el cociente es negativo.

$$\frac{10}{-5} = -2$$

**b)** Como los números tienen signos diferentes, el cociente es negativo.

$$\frac{-45}{5} = -9$$



c) Los signos de los números son iguales, por tanto, el cociente es positivo.

$$\frac{-36}{-6} = 6$$



### EJEMPLO 6

Evalúe lo siguiente **a)**  $-16 \div (-2)$     **b)**  $\frac{-2}{3} \div \frac{-5}{7}$

#### Solución

**a)** Como los números tienen signos iguales, ambos negativos, el cociente es positivo.

$$\frac{-16}{-2} = 8$$

**b)** El divisor  $\frac{-5}{7}$ , se invierte, y después se multiplica.

$$\frac{-2}{3} \div \frac{-5}{7} = \left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{7}{-5}\right) = \frac{-14}{-15} = \frac{14}{15}$$



### SUGERENCIA

Para multiplicar y dividir dos números reales:

$$\left. \begin{array}{l} (+)(+) = + \\ (-)(-) = + \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{(+)}{(+)} = + \\ \frac{(-)}{(-)} = + \end{array}$$

*Signos iguales dan productos y cocientes positivos.*

$$\left. \begin{array}{l} (+)(-) = - \\ (-)(+) = - \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{(+)}{(-)} = - \\ \frac{(-)}{(+)} = - \end{array}$$

*Signos diferentes dan productos y cocientes negativos.*

### 3 Eliminar signos negativos de los denominadores

Ahora sabemos que el cociente de un número positivo y uno negativo es un número negativo. Las fracciones  $-\frac{3}{4}$ ,  $\frac{-3}{4}$  y  $\frac{3}{-4}$  representan el mismo número negativo, que es tres cuartos negativos.

Si  $a$  y  $b$  representan cualesquiera números reales,  $b \neq 0$ , entonces

$$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$$

En matemáticas, por lo general no escribimos una fracción con el signo negativo en el denominador. Cuando en el denominador aparece un signo negativo, se puede trasladar al numerador o colocarlo frente a la fracción. Por ejemplo, la fracción  $\frac{5}{-7}$  debe escribirse como  $-\frac{5}{7}$  o  $\frac{-5}{7}$ . Las fracciones también pueden escribirse con una diagonal, /. Por ejemplo, la fracción  $-\frac{5}{7}$  puede escribirse como  $-5/7$  o  $-(5/7)$ .

### EJEMPLO 7

Evalúe lo siguiente  $\frac{2}{5} \div \left(\frac{-8}{15}\right)$ .

$$\frac{2}{5} \div \left(\frac{-8}{15}\right) = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{15}{-8}\right) = \frac{1(3)}{1(-4)} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$



#### Solución

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 73

La tabla 1.1 resume las operaciones con los números reales.

TABLA 1.1 Resumen de las operaciones con los números reales				
Signos de los números	Suma	Resta	Multiplicación	División
<p>Ambos números son positivos</p> <p>Ejemplos</p> <p>6 y 2</p> <p>2 y 6</p>	<p>La suma siempre es positiva</p> <p><math>6 + 2 = 8</math></p> <p><math>2 + 6 = 8</math></p>	<p>La diferencia puede ser positiva o negativa</p> <p><math>6 - 2 = 4</math></p> <p><math>2 - 6 = -4</math></p>	<p>El producto siempre es positivo</p> <p><math>6 \cdot 2 = 12</math></p> <p><math>2 \cdot 6 = 12</math></p>	<p>El cociente siempre es positivo</p> <p><math>6 \div 2 = 3</math></p> <p><math>2 \div 6 = \frac{1}{3}</math></p>
<p>Un número es positivo y el otro es negativo</p> <p>Ejemplos</p> <p>6 y -2</p> <p>-6 y 2</p>	<p>La suma puede ser positiva o negativa</p> <p><math>6 + (-2) = 4</math></p> <p><math>-6 + 2 = -4</math></p>	<p>La diferencia puede ser positiva o negativa</p> <p><math>6 - (-2) = 8</math></p> <p><math>-6 - 2 = -8</math></p>	<p>El producto siempre es negativo</p> <p><math>6(-2) = -12</math></p> <p><math>-6(2) = -12</math></p>	<p>El cociente siempre es negativo</p> <p><math>6 \div (-2) = -3</math></p> <p><math>-6 \div 2 = -3</math></p>
<p>Ambos números son negativos</p> <p>Ejemplos</p> <p>-6 y -2</p> <p>-2 y -6</p>	<p>La suma siempre es negativa</p> <p><math>-6 + (-2) = -8</math></p> <p><math>-2 + (-6) = -8</math></p>	<p>La diferencia puede ser positiva o negativa</p> <p><math>-6 - (-2) = -4</math></p> <p><math>-2 - (-6) = 4</math></p>	<p>El producto siempre es positivo</p> <p><math>-6(-2) = 12</math></p> <p><math>-2(-6) = 12</math></p>	<p>El cociente siempre es positivo</p> <p><math>-6 \div (-2) = 3</math></p> <p><math>-2 \div (-6) = \frac{1}{3}</math></p>

#### 4 Evaluar divisiones que involucran al 0

Ahora analizaremos las divisiones que involucran al número 0. ¿A qué es igual  $\frac{0}{1}$ ? Observe que  $\frac{6}{3} = 2$  porque  $3 \cdot 2 = 6$ . Podemos seguir el mismo procedimiento para determinar el valor de  $\frac{0}{1}$ . Supongamos que  $\frac{0}{1}$  es igual a cierto número, que se designará con  $?$ .

$$\text{Si } \frac{0}{1} = ? \text{ entonces } 1 \cdot ? = 0$$

Como sólo  $1 \cdot 0 = 0$  el signo  $?$  debe ser 0. Por tanto,  $\frac{0}{1} = 0$ . Con la misma técnica se demuestra que cero dividido entre cualquier número distinto de 0 es igual a cero.

Si  $a$  representa cualquier número real excepto 0, entonces

$$0 \div a = \frac{0}{a} = 0$$

Ahora, ¿a qué es igual  $\frac{1}{0}$ ?

$$\text{Si } \frac{1}{0} = ? \text{ entonces } 0 \cdot ? = 1$$

Como 0 multiplicado por cualquier número será 0, no hay un valor que pueda reemplazar a  $?$ . Se dice que  $\frac{1}{0}$  es **indefinido**. Con la misma técnica, se demuestra que cualquier número real, excepto 0, dividido entre 0, es indefinido.

Si  $a$  representa cualquier número real excepto 0, entonces

$$a \div 0 \quad \text{o} \quad \frac{a}{0} \quad \text{es indefinido}$$

¿A qué es igual  $\frac{0}{0}$ ?

$$\text{Si } \frac{0}{0} = ? \quad \text{entonces} \quad 0 \cdot ? = 0$$

Pero como el producto de cualquier número y 0 es igual a 0, el signo  $?$  se reemplaza por cualquier número real. Por tanto, el cociente  $\frac{0}{0}$  no puede determinarse, por lo que no existe respuesta. Entonces, no se le usará en este curso.\*

### Resumen de la división que involucra a 0

Si  $a$  representa cualquier número real excepto 0, entonces

$$\frac{0}{a} = 0 \quad \frac{a}{0} \text{ es indefinido}$$

**EJEMPLO 8** Indique si cada cociente es 0 o indefinido.

a)  $\frac{0}{2}$     b)  $\frac{5}{0}$     c)  $\frac{0}{-4}$     d)  $\frac{-2}{0}$

### Solución

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 95

La respuesta de los incisos **a)** y **c)** es 0. La respuesta a los incisos **b)** y **d)** es indefinida. 



### Uso de la calculadora

#### Multiplicación y división con una calculadora científica

A continuación se muestra cómo multiplicar y dividir en una calculadora.

EVALUAR	TECLAS	RESPUESTA EN PANTALLA
$6(-23)$	6 $\times$ 23 $+/-$ $=$	-138
$\frac{-240}{-16}$	240 $+/-$ $\div$ 16 $+/-$ $=$	15



#### Multiplicación y división en una calculadora graficadora

EVALUAR	TECLAS	RESPUESTA EN PANTALLA
$6(-23)$	6 $\times$ $(-)$ 23 $\text{ENTER}$	-138
$\frac{-240}{-16}$	$(-)$ 240 $\div$ $(-)$ 16 $\text{ENTER}$	15

Como un número positivo multiplicado por uno negativo será otro negativo, para obtener el producto de  $6(-23)$  se multiplica  $(6)(23)$  y se escribe un signo negativo antes de la respuesta. Como un número negativo dividido entre otro negativo es uno positivo, hubiera podido encontrarse  $\frac{-240}{-16}$  con la división de  $\frac{240}{16}$ .

\*En este nivel, algunos profesores prefieren llamar a  $\frac{0}{0}$  *indeterminado* mientras que otros prefieren llamarlo indefinido. En cursos de matemáticas de nivel superior, en ocasiones se llama a  $\frac{0}{0}$  *forma indeterminada*.

## Conjunto de ejercicios 1.8

### Ejercicios conceptuales

1. Enuncie las reglas que se emplean para determinar el signo del producto de dos números reales.
2. Diga las reglas que se utilizan para determinar el signo del cociente de dos números reales.
3. Al multiplicar tres o más números reales, explique cómo se determina el signo del producto de los números.
4. ¿Cuál es el producto de 0 por cualquier número real?
5. Por lo general, ¿cómo se reescribe una fracción de la forma  $\frac{a}{-b}$ , donde  $a$  y  $b$  representan cualesquiera números reales?
6. a) ¿A qué es igual  $\frac{0}{a}$ , donde  $a$  es cualquier número real diferente de cero?
- b) ¿A qué es igual  $\frac{a}{0}$ , donde  $a$  es cualquier número real distinto de cero?
7. a) Explique la diferencia entre  $3 - 5$  y  $3(-5)$ .  
b) Evalúe  $3 - 5$  y  $3(-5)$ .
8. a) Explique la diferencia entre  $-4 - 2$  y  $(-4)(-2)$ .  
b) Evalúe  $-4 - 2$  y  $(-4)(-2)$ .
9. a) Explique la diferencia entre  $x - y$  y  $x(-y)$ , donde  $x$  y  $y$  representan números reales cualesquiera. Si  $x$  es igual a 5 y  $y$  es igual a  $-2$ , encuentre el valor de b)  $x - y$ , c)  $x(-y)$ , y d)  $-x - y$ .
10. Si  $x$  es  $-8$  y  $y$  es 3, encuentre el valor de a)  $xy$ , b)  $x(-y)$ , c)  $x - y$ , y d)  $-x - y$ .

Encuentre cada uno de los productos siguientes.

11.  $(8)(4)(-5)$       12.  $(-9)(-12)(20)$       13.  $(-102)(-16)(24)(19)$   
 14.  $(1054)(-92)(-16)(-37)$       15.  $(-40)(-16)(30)(50)(-13)$       16.  $(-1)(3)(-462)(-196)(-312)$

### Práctica de habilidades

Encuentre cada uno de los productos siguientes.

- |                      |                     |                      |                       |
|----------------------|---------------------|----------------------|-----------------------|
| 17. $(-5)(-4)$       | 18. $-4(2)$         | 19. $6(-3)$          | 20. $6(-2)$           |
| 21. $(-2)(4)$        | 22. $(-3)(2)$       | 23. $0(-5)$          | 24. $-1(8)$           |
| 25. $6(7)$           | 26. $-9(-4)$        | 27. $(7)(-8)$        | 28. $7(-7)$           |
| 29. $(-5)(-6)$       | 30. $-2(5)$         | 31. $0(3)(8)$        | 32. $5(-4)(2)$        |
| 33. $(21)(-1)(4)$    | 34. $2(8)(-1)(-3)$  | 35. $-1(-3)(3)(-8)$  | 36. $(2)(-4)(-5)(-1)$ |
| 37. $(-4)(5)(-7)(1)$ | 38. $(-3)(2)(5)(3)$ | 39. $(-1)(3)(0)(-7)$ | 40. $(-6)(6)(4)(-4)$  |

Encuentre cada uno de los cocientes que siguen.

- |  |   |   |  |
|--|---|---|--|
| 41. $\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$  | 42. $\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{-3}{5}\right)$   | 43. $\left(\frac{-5}{9}\right)\left(\frac{-7}{15}\right)$ | 44. $\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{-3}{10}\right)$ |
| 45. $\left(\frac{6}{-3}\right)\left(\frac{4}{-2}\right)$ | 46. $\left(\frac{9}{-10}\right)\left(\frac{6}{-7}\right)$ | 47. $\left(\frac{-3}{8}\right)\left(\frac{5}{6}\right)$   | 48. $\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{7}{-8}\right)$ |

Encuentre cada uno de los cocientes que siguen.

- |                      |                      |                     |                      |
|----------------------|----------------------|---------------------|----------------------|
| 49. $\frac{10}{5}$   | 50. $25 \div 5$      | 51. $-16 \div (-4)$ | 52. $\frac{-18}{9}$  |
| 53. $\frac{-36}{-9}$ | 54. $\frac{30}{-6}$  | 55. $\frac{36}{-2}$ | 56. $\frac{-15}{-1}$ |
| 57. $\frac{-19}{-1}$ | 58. $-15 / (-3)$     | 59. $40 / (-4)$     | 60. $\frac{-6}{-1}$  |
| 61. $\frac{-42}{7}$  | 62. $\frac{-25}{-5}$ | 63. $\frac{36}{-4}$ | 64. $\frac{-10}{10}$ |

65.  $-64 \div (-8)$       66.  $-64/(-4)$       67. Divida 0 entre 4.      68. Divida 26 entre  $-13$ .  
 69. Divida 30 entre  $-10$ .      70. Divida  $-30$  entre  $-5$ .      71. Divida  $-120$  entre 30.      72. Divida  $-25$  entre  $-5$ .

Evalúe las operaciones siguientes.


73.  $\frac{3}{12} \div \left(\frac{-5}{8}\right)$       74.  $(-3) \div \frac{5}{19}$       75.  $\frac{-5}{12} \div (-3)$       76.  $\frac{-4}{9} \div \left(\frac{-6}{7}\right)$   
 77.  $\frac{-15}{21} \div \left(\frac{-15}{21}\right)$       78.  $\frac{6}{15} \div \left(\frac{7}{30}\right)$       79.  $(-12) \div \frac{5}{12}$       80.  $\frac{-16}{3} \div \left(\frac{5}{-9}\right)$

Evalúe las operaciones siguientes.

81.  $-4(8)$       82.  $\frac{-18}{-2}$       83.  $\frac{100}{-5}$       84.  $-50 \div (-10)$   
 85.  $-7(2)$       86.  $-5(-7)$       87.  $27 \div (-3)$       88. Divida  $-120$  entre  $-10$ .  
 89.  $-100 \div 5$       90.  $4(-2)(-1)(-5)$       91. Divida 60 entre  $-6$       92.  $(6)(1)(-3)(4)$

Indique si cada cociente es igual a 0 o no está definido

93.  $0 \div 8$       94.  $0 \div (-7)$       95.  $\frac{5}{0}$       96.  $\frac{-2}{0}$   
 97.  $\frac{0}{1}$       98.  $\frac{6}{0}$       99. 8 dividido entre 0      100. 0 dividido entre 12

 Para los ejercicios 101 a 116, **a)** determine por observación si el producto o cociente será un número positivo, cero, negativo o indefinido; **b)** encuentre el producto o cociente con su calculadora (un mensaje de error indicaría que el cociente es indefinido; **c)** revise su respuesta para el inciso **b)** con el fin de saber si parece razonable y tiene sentido.

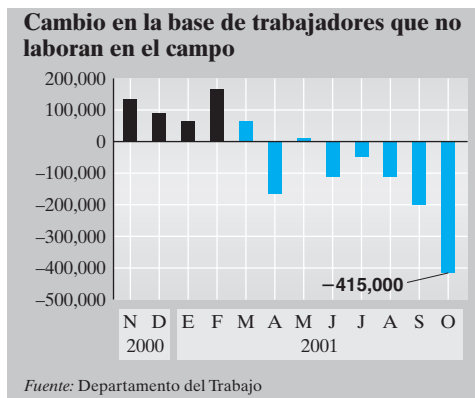
101.  $92(-38)$       102.  $-168 \div 42$       103.  $-240/15$       104.  $190/10$   
 105.  $243 \div (-27)$       106.  $(323)(-115)$       107.  $(-49)(-126)$       108.  $(1530)(0)$   
 109.  $0 \div 5335$       110.  $-86.4 \div (-36)$       111.  $8.2 \div 0$       112.  $-37.74 \div 37$   
 113.  $8 \div (2.5)$       114.  $(1.1)(9.72)(6.3)$       115.  $(-3.0)(4.2)(-18)$       116.  $-288.86/1.43$

Indique si cada enunciado es verdadero o falso.

117. El producto de dos números negativos es otro negativo.      123. Cero dividido entre 1 es igual a 1.  
 118. El producto de un número positivo y uno negativo es otro número negativo.      124. Seis dividido entre 0 es igual a 0.  
 119. El cociente de dos números con signos diferentes es un número positivo.      125. Cero dividido entre 1 está indefinido.  
 120. El cociente de dos números negativos es uno positivo.      126. Cinco dividido entre 0 es una indefinición.  
 121. El producto de un número par de cifras negativas es un número positivo.      127. El producto de 0 y cualquier número real es igual a 0.  
 122. El producto de un número impar de cifras negativas es un número negativo.      128. La división entre 0 no da como resultado un número real.

## Solución de problemas

129. **Futbol** A un equipo escolar de futbol americano lo castigan cuatro veces, cada una con una pérdida de 15 yardas, o  $-15$  yardas. Encuentre la pérdida total debido a los castigos.
130. **Descenso submarino** Un submarino se encuentra a una profundidad de  $-160$  pies (160 pies por debajo del nivel del mar). Desciende a 3 veces dicha profundidad. Encuentre la profundidad nueva a que se encuentra.
131. **Tarjeta de crédito** El saldo de la tarjeta de crédito de Leona De Vito es de  $-\$450$  (debe  $\$450$ ). Paga  $\frac{1}{3}$  de dicha cifra.
- a) ¿Cuánto pagó?  
b) ¿Cuál es su saldo nuevo?
132. **Dinero que se adeuda** Dominike Jason debe  $\$300$  a un amigo. Después de que hace cuatro pagos de  $\$30$  cada uno, ¿cuánto debe todavía?
133. **Pérdida accionaria** Si una acción pierde  $1\frac{1}{2}$  puntos en cada uno de tres días sucesivos, ¿cuánto habrá perdido en total?
134. **Factor de enfriamiento por el viento** El lunes, el factor de enfriamiento por el viento en Minneapolis fue de  $-30$  °F. El martes, fue de sólo  $\frac{1}{3}$  de lo que fue el lunes. ¿Cuál fue el factor de enfriamiento por el viento el día martes?
135. **Empleo** La gráfica siguiente muestra el cambio del salario en la base de trabajadores que no trabajan en el campo (ajustada por estaciones) para los Estados Unidos, de noviembre de 2000 (N) a octubre de 2001 (O).



a) ¿Cuántas veces más grande fue el cambio en octubre que en septiembre?

b) ¿Cuántas veces más grande fue el cambio en octubre que en julio?

136. **Recíprocos** La mayoría de calculadoras tienen una tecla de recíprocos  $\frac{1}{x}$ .



a) Oprima una tecla numérica de la calculadora, entre 1 y 9. Después oprima la tecla  $\frac{1}{x}$ . Diga lo que pasa al hacerlo.

b) Oprima otra vez la tecla  $\frac{1}{x}$ . ¿Qué sucede ahora?

c) ¿Qué piensa que pasará si introduce 0 y después oprime la tecla  $\frac{1}{x}$ ? Explique su respuesta.

d) Introduzca 0 y luego oprima la tecla  $\frac{1}{x}$  para ver si su respuesta al inciso c) fue correcta. Si no lo fue, explique por qué.

137. **Frecuencia cardiaca** La *Johns Hopkins Medical Letter* dice que para encontrar la frecuencia cardiaca deseable en latidos por minuto, se aplica el procedimiento siguiente: Se resta la edad de la persona de 220, después se multiplica esta diferencia por 60% y por 75%. La diferencia que se multiplicó por 60% da el límite inferior, y la que se multiplicó por 75% marca el límite superior.

a) Encuentre la frecuencia cardiaca deseable de una persona de 50 años de edad.

b) Encuentre su propia frecuencia cardiaca deseable.

## Problemas de reto

En la sección siguiente se aprenderá que  $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$  y que  $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n$ .

*n factores de x*

Utilice esta información para evaluar cada una de las expresiones que siguen.

138.  $3^4$

139.  $(-2)^3$

140.  $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

141.  $1^{100}$

142.  $(-1)^{81}$

143. El producto de  $(-1)(-2)(-3)(-4)\dots(-10)$ , ¿es un número positivo o negativo? Explique cómo determinó su respuesta.

144. El producto de  $(1)(-2)(3)(-4)(5)(-6)\dots(33)(-34)$ , ¿es un número positivo o negativo? Explique cómo hizo para determinar la respuesta.



## Actividad en grupo

Como grupo, analicen y resuelvan el ejercicio 145, de acuerdo con las instrucciones.

145. a) Cada miembro del grupo ha de seguir este procedimiento por separado. En este momento, no comunique su número a los demás integrantes de su grupo.
1. Escoja un número entre 2 y 10.
  2. Multiplique su número por 9.
  3. Sume los dos dígitos del producto.
  4. Reste 5 de la suma anterior.
  5. Ahora, elija la letra del alfabeto que corresponda a la diferencia que halló. Por ejemplo, 1 es a, 2 es b, 3 es c, y así sucesivamente.
  6. Elija el nombre de un país (de *una palabra*) que comience con dicha letra.
  7. Ahora, elija el nombre de un animal (de *una palabra*) que empiece con la última letra del país que eligió.
  8. Por último, escoja un color que inicie con la última letra del animal que seleccionó.
- b) Ahora comparta su respuesta final con los otros miembros de su grupo. ¿Obtuvieron la misma respuesta?
- c) La mayoría de personas obtienen la respuesta *amarillo*. Como grupo, escriban un párrafo o dos para explicar por qué.

## Ejercicios de aprendizaje acumulativo

[1.3] 146. Encuentre el cociente de  $\frac{5}{7} \div \frac{1}{5}$ .

[1.8] 150. Evalúe  $-40 \div (-8)$ .

[1.7] 147. Reste  $-18$  de  $-20$ .

148. Evalúe  $6 - 3 - 4 - 2$ .

149. Evalúe  $5 - (-2) + 3 - 7$ .

## 1.9 EXPONENTES, PARÉNTESIS Y ORDEN DE LAS OPERACIONES



- 1 Aprender el significado de los exponentes.
- 2 Evaluar expresiones que contengan exponentes.
- 3 Aprender la diferencia entre  $-x^2$  y  $(-x)^2$ .
- 4 Aprender el orden de las operaciones.
- 5 Conocer el uso de los paréntesis.
- 6 Evaluar expresiones que contengan variables.

### 1 Aprender el significado de los exponentes

Para comprender ciertos temas de álgebra, deben entenderse los exponentes. En esta sección se introducen los exponentes y se analizan con más detalle en el capítulo 4.

En la expresión  $4^2$ , el 4 se llama **base**, y el 2 es el **exponente**. El número  $4^2$  se lee “cuatro al cuadrado” o “4 elevado a la segunda potencia”, y significa

$$\underbrace{4 \cdot 4}_{2 \text{ factores de } 4} = 4^2$$

↖ base  
← exponente

El número  $4^3$  se lee “cuatro al cubo”, o “4 a la tercera potencia”, y significa

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{3 \text{ factores de } 4} = 4^3$$



En general, el número  $b$  elevado a la  $n$ -ésima potencia, se escribe  $b^n$ , y significa

$$\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_n = b^n$$

*n factores de b*

Así,  $b^4 = b \cdot b \cdot b \cdot b$ , o bien  $bbbb$ , y  $x^3 = x \cdot x \cdot x$  o bien  $xxx$ .

## 2 Evaluar expresiones que contengan exponentes

Ahora evaluaremos algunas expresiones que contienen exponentes.

**EJEMPLO 1** Evaluar **a)**  $3^2$  **b)**  $2^5$  **c)**  $1^5$  **d)**  $(-6)^2$  **e)**  $(-2)^3$  **f)**  $\left(\frac{2}{3}\right)^2$

**Solución**

**a)**  $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

**b)**  $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

**c)**  $1^5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$  (1 elevado a cualquier potencia da 1; ¿por qué?)

**d)**  $(-6)^2 = (-6)(-6) = 36$

**e)**  $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$

**f)**  $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 29



No es necesario escribir exponentes que sean 1. Por lo tanto,  $xy$ , se escribe  $x^2y$  y no  $x^2y^1$ . **Siempre que se vea una letra o número sin exponente, asumiremos que su exponente es 1.**

### Ejemplos de notación exponencial

**a)**  $xyxx = x^3y$

**b)**  $xyzzy = xy^2z^2$

**c)**  $3aabbb = 3a^2b^3$

**d)**  $5xyyyy = 5xy^4$

**e)**  $4 \cdot 4rrs = 4^2r^2s$

**f)**  $5 \cdot 5 \cdot 5mmn = 5^3m^2n$

Observe en los incisos **a)** y **b)** que el orden de los factores no importa.

### SUGERENCIA

Observe que  $x + x + x + x + x + x = 6x$  y que  $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^6$ . Tenga cuidado de no confundir la suma con la multiplicación.

## 3 Aprender la diferencia entre $-x^2$ y $(-x)^2$

**Un exponente se refiere sólo al número o letra que lo precede en forma directa, a menos que utilicemos paréntesis para indicar otra cosa.** Por ejemplo, en la expresión  $3x^2$ , sólo la  $x$  está elevada al cuadrado. En la expresión  $-x^2$  sólo la  $x$  está al cuadrado. Podría escribirse  $-x^2$  como  $-1x^2$  porque es posible multiplicar cualquier número real por 1 sin que se afecte su valor.

$$-x^2 = -1x^2$$

Al considerar la expresión  $-1x^2$  observamos que sólo la  $x$  está al cuadrado, no el  $-1$ . Si toda la expresión de  $-x$  fuera a elevarse al cuadrado, sería necesario emplear paréntesis y escribir  $(-x)^2$ . Observe la diferencia en los dos ejemplos siguientes:

$$-x^2 = -(x)(x)$$

$$(-x)^2 = (-x)(-x)$$

Considere las expresiones  $-3^2$  y  $(-3)^2$ . ¿En qué difieren?

$$-3^2 = -(3)(3) = -9$$

$$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$$

### SUGERENCIA

La expresión  $-x^2$  se lee “menos  $x$  cuadrada”, o “el opuesto de  $x$  al cuadrado”. La expresión  $(-x)^2$  se lee “menos  $x$  al cuadrado”.

**EJEMPLO 2** Evalúe. **a)**  $-5^2$     **b)**  $(-5)^2$     **c)**  $-2^3$     **d)**  $(-2)^3$

**Solución** **a)**  $-5^2 = -(5)(5) = -25$     **b)**  $(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$   
**c)**  $-2^3 = -(2)(2)(2) = -8$     **d)**  $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$  ✨

**EJEMPLO 3** Evalúe. **a)**  $-2^4$     **b)**  $(-2)^4$

**Solución** **a)**  $-2^4 = -(2)(2)(2)(2) = -16$     **b)**  $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$  ✨

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 105



### Uso de la calculadora

Empleo de las teclas  $x^2$ ,  $y^x$  y  $^{\wedge}$

La tecla  $x^2$  se utiliza para elevar un valor al cuadrado. Por ejemplo, para evaluar  $5^2$  se haría lo siguiente.

	TECLAS	RESPUESTA EN PANTALLA
Calculadora científica	5 $x^2$	25
Calculadora graficadora	5 $x^2$ ENTER	25

Para evaluar  $(-5)^2$  en una calculadora, se haría lo siguiente.

	TECLAS	RESPUESTA EN PANTALLA
*Calculadora científica	5 +/- $x^2$	25
Calculadora graficadora	( (-) 5 ) $x^2$ ENTER	25

Para elevar un valor a una potencia mayor que 2, utilizamos la tecla  $y^x$  \* o la tecla  $^{\wedge}$ . Para utilizarlas, introducimos el número y después oprimimos ya sea la tecla  $y^x$  o  $^{\wedge}$ , y después introducimos el exponente. A continuación se muestra cómo evaluar  $2^5$  y  $(-2)^5$ .

	EVALUAR	TECLAS	RESPUESTA EN PANTALLA
Calculadora científica	$2^5$	2 $y^x$ 5 =	32
*Calculadora científica	$(-2)^5$	2 +/- $y^x$ 5 = **	-32
Calculadora graficadora	$2^5$	2 $^{\wedge}$ 5 ENTER	32
Calculadora graficadora	$(-2)^5$	( (-) 2 ) $^{\wedge}$ 5 ENTER	-32

Es posible que la manera más fácil de elevar números negativos a una potencia, sea elevar el número positivo a la potencia y después escribir un signo menos antes de la respuesta final, si fuera necesario. *Un número negativo elevado a una potencia impar será negativo, y un número negativo elevado a una potencia par será positivo.* ¿Puede explicar por qué?

\* Algunas calculadoras científicas muy recientes tienen una tecla  $(-)$ . En ellas, para evaluar una expresión negativa elevada a una potencia, siga las instrucciones correspondientes a la calculadora graficadora.

\*\* Algunas calculadoras tienen una tecla  $x^y$  en lugar de otra  $y^x$ .

## 4 Aprender el orden de las operaciones

Ahora que se introdujeron los exponentes, es posible presentar el **orden de las operaciones**. ¿Puede evaluar  $2 + 3 \cdot 4$ ? ¿Es 20 o 14? Para responder esta pregunta debemos conocer el orden de las operaciones por seguir cuando evaluemos una expresión matemática. Con frecuencia tenemos que evaluar expresiones que contienen operaciones múltiples.

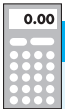
### Orden de las operaciones Para evaluar expresiones matemáticas, se usa el siguiente orden

1. Primero evalúe la información dentro de los **paréntesis** ( ), corchetes [ ], o llaves { }. Estos se llaman **símbolos de agrupación**, porque agrupan información. Una barra de fracción,  $\frac{\quad}{\quad}$ , también sirve como símbolo de agrupación. Si la expresión contiene paréntesis anidados (un par de paréntesis dentro de otro), primero evalúe la información en los paréntesis internos.
2. A continuación, evalúe todos los **exponentes**.
3. Luego, evalúe todas las **multiplicaciones** o **divisiones** en el orden en que suceden de izquierda a derecha.
4. Por último, evalúe todas las **adiciones** o **sustracciones** en el orden en que aparecen, de izquierda a derecha.

Algunos estudiantes recuerdan la palabra PEMDAS o la frase “Pedro Escucha Mientras Dos Alumnos Sonríen” para ayudarse a recordar el orden: **P**aréntesis, **E**xponentes, **M**ultiplicación, **D**ivisión, **A**dición, **S**ustracción. Recuerde que esto no implica hacer la multiplicación antes que la división o la suma antes que la sustracción.

Ahora se puede evaluar  $2 + 3 \cdot 4$ . Como las multiplicaciones se llevan a cabo antes que las adiciones,

$$2 + 3 \cdot 4 \text{ significa } 2 + (3 \cdot 4) = 2 + 12 = 14$$



### Uso de la calculadora

Ahora sabemos que  $2 + 3 \cdot 4$  significa  $2 + (3 \cdot 4)$  y tiene un valor de 14. ¿Qué desplegaría una calculadora al introducir la siguiente secuencia de teclas?

$$2 \boxed{+} 3 \boxed{\times} 4 \boxed{=}$$

La respuesta depende de la calculadora. *Las calculadoras científicas y graficadoras* evaluarán una expresión de acuerdo con las reglas que se acaban de dar.

	TECLAS	RESPUESTA EN PANTALLA
Calculadora científica	$2 \boxed{+} 3 \boxed{\times} 4 \boxed{=}$	14
Calculadora graficadora	$2 \boxed{+} 3 \boxed{\times} 4 \boxed{\text{ENTER}}$	14

Las calculadoras que no son científicas ejecutarán las operaciones en el orden en que se introducen.

	TECLAS	RESPUESTA EN PANTALLA
Calculadora no científica	$2 \boxed{+} 3 \boxed{\times} 4 \boxed{=}$	20

Recuerde que en álgebra, a menos que se diga otra cosa por medio de paréntesis, siempre se ejecutarán las multiplicaciones y divisiones antes que las sumas y restas. En este curso, debe utilizar una calculadora científica o graficadora.

## 5 Conocer el uso de los paréntesis

Los paréntesis o corchetes se emplean para (1) cambiar el orden que debe seguirse en las operaciones para evaluar una expresión algebraica, o (2) ayudar a aclarar la comprensión de una expresión.

Para evaluar la expresión  $2 + 3 \cdot 4$ , lo normal sería realizar primero la multiplicación,  $3 \cdot 4$ . Si quisiéramos ejecutar la suma antes de la multiplicación, eso se indicaría con la colocación de paréntesis alrededor de  $2 + 3$ , así:

$$(2 + 3) \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20$$

Considere la expresión  $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4$ . De acuerdo con el orden de las operaciones, se realizan las multiplicaciones antes de las adiciones. Esta expresión puede reescribirse como  $(1 \cdot 3) + (2 \cdot 4)$ . Observe que el orden de las operaciones no cambió. Sólo se utilizaron los paréntesis para ayudar a aclarar el orden a seguir.

En ocasiones es necesario utilizar más de un conjunto de paréntesis para indicar el orden que se debe seguir en una expresión. Como se indica en el paso 1 del recuadro de Orden de las operaciones, cuando un conjunto de paréntesis se encuentra dentro de otro reciben el nombre de **paréntesis anidados**. Por ejemplo, la expresión  $6(2 + 3(4 + 1))$  tiene paréntesis anidados. Con frecuencia, para hacer que una expresión con paréntesis anidados sea más fácil de seguir, se emplean corchetes,  $[ ]$ , o llaves,  $\{ \}$ , en lugar de paréntesis múltiples. Así, la expresión  $6(2 + 3(4 + 1))$  podría escribirse como  $6[2 + 3(4 + 1)]$ . Siempre que se da una expresión con paréntesis anidados, se evalúan *primero* los números en *el paréntesis más interior*. En los siguientes ejemplos se emplea sombra de color para indicar el orden en que se evalúa la expresión.

$$6[2 + 3(4 + 1)] = 6[2 + 3(5)] = 6[2 + 15] = 6[17] = 102$$

$$4[3(6 - 4) \div 6] = 4[3(2) \div 6] = 4[6 \div 6] = 4[1] = 4$$

$$\{2 + [(8 \div 4)^2 - 1]\}^2 = [2 + (2^2 - 1)]^2 = [2 + (4 - 1)]^2 = (2 + 3)^2 = 5^2 = 25$$

Ahora, se resolverán algunos ejemplos, pero antes de hacerlo lea la siguiente Sugerencia.

### SUGERENCIA

Si no se usan paréntesis para cambiar el orden de las operaciones, siempre se hacen primero las multiplicaciones y divisiones, antes de las sumas y restas. Si un problema sólo tiene multiplicaciones y divisiones, se trabaja de izquierda a derecha. De manera similar, si un problema sólo tiene sumas y restas, se resuelve de izquierda a derecha.

**EJEMPLO 4** Evaluar  $6 + 3 \cdot 5^2 - 4$ .

**Solución** Se emplea sombra de color para indicar el orden en que se evaluará la expresión.

$$\begin{aligned} & 6 + 3 \cdot 5^2 - 4 && \text{Exponente.} \\ & = 6 + 3 \cdot 25 - 4 && \text{Multiplicar.} \\ & = 6 + 75 - 4 && \text{Sumar y restar, de izquierda a derecha.} \\ & = 81 - 4 \\ & = 77 \end{aligned}$$



**EJEMPLO 5** Evaluar  $6 + 3[(32 \div 4^2) + 5]$ .

**Solución**

$$\begin{aligned}
 & 6 + 3[(32 \div 4^2) + 5] && \text{Exponente.} \\
 & = 6 + 3[(32 \div 16) + 5] && \text{Dividir.} \\
 & = 6 + 3[2 + 5] && \text{Sumar.} \\
 & = 6 + 3[7] && \text{Multiplicar.} \\
 & = 6 + 21 \\
 & = 27
 \end{aligned}$$



**EJEMPLO 6** Evaluar  $(8 \div 2) + 7(5 - 2)^2$ .

**Solución**

$$\begin{aligned}
 & (8 \div 2) + 7(5 - 2)^2 && \text{Paréntesis.} \\
 & = 4 + 7(3)^2 && \text{Exponente.} \\
 & = 4 + 7 \cdot 9 && \text{Multiplicar.} \\
 & = 4 + 63 \\
 & = 67
 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 81



**EJEMPLO 7** Evaluar  $-8 - 81 \div 9 \cdot 2^2 + 7$ .

**Solución**

$$\begin{aligned}
 & -8 - 81 \div 9 \cdot 2^2 + 7 && \text{Exponente.} \\
 & = -8 - 81 \div 9 \cdot 4 + 7 && \text{Multiplicar y dividir, de izquierda a derecha.} \\
 & = -8 - 9 \cdot 4 + 7 && \text{Multiplicar.} \\
 & = -8 - 36 + 7 && \text{Sumar y restar, de izquierda a derecha.} \\
 & = -44 + 7 \\
 & = -37
 \end{aligned}$$



**EJEMPLO 8** Evaluar **a)**  $-4^2 + 6 \div 3$     **b)**  $(-4)^2 + 6 \div 3$

**Solución**

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a)} \quad & -4^2 + 6 \div 3 && \text{Exponente.} && \mathbf{b)} \quad & (-4)^2 + 6 \div 3 && \text{Exponente.} \\
 & = -16 + 6 \div 3 && \text{Dividir.} && & = 16 + 6 \div 3 && \text{Dividir.} \\
 & = -16 + 2 && && & = 16 + 2 && \\
 & = -14 && && & = 18 && 
 \end{aligned}$$



**EJEMPLO 9** Evaluar  $\frac{3}{8} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{12}$ .

**Solución**

Primero se ejecuta la multiplicación.

$$\begin{aligned}
 & \frac{3}{8} - \left( \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{12} \right) && \text{Multiplicar.} \\
 & = \frac{3}{8} - \frac{1}{30} && \text{Restar.} \\
 & = \frac{45}{120} - \frac{4}{120} \\
 & = \frac{41}{120}
 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 91



**EJEMPLO 10** Escriba los siguientes enunciados como expresiones matemáticas con el uso de paréntesis y corchetes, y después evalúelos: restar 3 de 15, dividir esta diferencia entre 2 y multiplicar dicho cociente por 4.

**Solución**

$$\begin{aligned}
 &15 - 3 && \text{Restar 3 de 15.} \\
 &(15 - 3) \div 2 && \text{Dividir entre 2.} \\
 &4[(15 - 3) \div 2] && \text{Multiplicar el cociente por 4.}
 \end{aligned}$$

Ahora se evalúa.

$$\begin{aligned}
 &4[(15 - 3) \div 2] \\
 &= 4[12 \div 2] \\
 &= 4(6) \\
 &= 24
 \end{aligned}$$



Como se vio en el ejemplo 10, en ocasiones se emplean corchetes en lugar de paréntesis para ayudar a evitar que haya confusión. Si sólo se emplearan paréntesis, la expresión precedente parecería como  $4((15 - 3) \div 2)$ .



### Uso de la calculadora

#### Uso de paréntesis

En la calculadora, al evaluar una expresión en la que el orden de las operaciones ha de cambiar, será necesario usar paréntesis. En caso de que no esté seguro si son o no necesarios, úselos, no afectará en nada. Considere la expresión  $\frac{8}{4-2}$ . Como queremos dividir 8 entre la diferencia de  $4 - 2$ , necesitaremos paréntesis.

EVALUAR	TECLAS	RESPUESTA EN PANTALLA
$\frac{8}{4-2}$	8 $\div$ ( 4 - 2 ) = *	4

¿Qué se obtendría si se evaluara  $8 \div 4 - 2 =$  en una calculadora científica? ¿Por qué se obtuvo dicho resultado?

Para evaluar  $(\frac{2}{5})^2$  en una calculadora científica, se presionan las siguientes teclas.

EVALUAR	TECLAS	RESPUESTA EN PANTALLA
$(\frac{2}{5})^2$	2 $\div$ 5 = $x^2$ **	.16
	o bien ( 2 $\div$ 5 ) $x^2$	.16

¿Qué resultaría si se evaluara  $2 \div 5 x^2$  en una calculadora científica? ¿Por qué?

\* Si se usa una calculadora graficadora, se reemplaza = con ENTER. Todo lo demás permanece sin cambio.

\*\* En una calculadora graficadora se sustituye = con ENTER y se oprime ENTER después de  $x^2$ .

## 6 Evaluar expresiones que contengan variables

Ahora se evaluarán algunas expresiones para valores dados de las variables.

**EJEMPLO 11** Evalúe  $5x - 4$ , para  $x = 3$ .

**Solución** En la expresión se sustituye 3 en lugar de  $x$ .

$$5x - 4 = 5(3) - 4 = 15 - 4 = 11$$



**EJEMPLO 12** Evalúe **a)**  $x^2$  y **b)**  $-x^2$  para  $x = 3$ .

**Solución** Se sustituye 3 en lugar de  $x$ .

$$\mathbf{a)} \quad x^2 = 3^2 = 3(3) = 9$$

$$\mathbf{b)} \quad -x^2 = -3^2 = -(3)(3) = -9$$



**EJEMPLO 13** Evalúe **a)**  $y^2$  y **b)**  $-y^2$  para  $y = -4$ .

**Solución** Se sustituye  $-4$  en lugar de  $y$ .

$$\mathbf{a)} \quad y^2 = (-4)^2 = (-4)(-4) = 16$$

$$\mathbf{b)} \quad -y^2 = -(-4)^2 = -(-4)(-4) = -16$$



Observe que  $-x^2$  siempre será un número negativo para cualquier valor de  $x$  distinto de cero, y que  $(-x)^2$  siempre será positivo para cualquier valor de  $x$  diferente de cero. ¿Es capaz de explicar por qué? Consulte el ejercicio 6 en la página 80.

### CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

La expresión  $-x^2$  significa  $-(x^2)$ . Cuando se pide evaluar  $-x^2$  para cualquier número real como valor de  $x$ , muchos estudiantes intentan calcular  $-x^2$  como  $(-x)^2$ . Por ejemplo, para evaluar  $-x^2$  cuando  $x = 5$ ,

**CORRECTO**

$$-5^2 = -(5^2) = -(5)(5) \\ = -25$$

**INCORRECTO**

$$-5^2 = (-5)(-5) \\ = 25$$

**EJEMPLO 14** Evalúe  $(4x + 1) + 2x^2$  cuando  $x = \frac{1}{4}$ .

**Solución** Se sustituye  $\frac{1}{4}$  en lugar de cada  $x$  que haya en la expresión; después se evalúa en el orden de las operaciones.

$$\begin{aligned} (4x + 1) + 2x^2 &= \left[ 4\left(\frac{1}{4}\right) + 1 \right] + 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 && \text{Sustituir.} \\ &= [1 + 1] + 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 && \text{Multiplicar.} \\ &= 2 + 2\left(\frac{1}{16}\right) && \text{Sumar, exponente.} \\ &= 2 + \frac{1}{8} && \text{Multiplicar.} \\ &= 2\frac{1}{8} \end{aligned}$$



**EJEMPLO 15** Evaluar  $-y^2 + 3(x + 2) - 5$  cuando  $x = -3$  y  $y = -2$ .

**Solución** Se sustituye  $-3$  en lugar de cada  $x$  y  $-2$  en cada  $y$ ; después se evalúa en el orden de las operaciones.

$$\begin{aligned} -y^2 + 3(x + 2) - 5 &= -(-2)^2 + 3(-3 + 2) - 5 && \text{Sustituir.} \\ &= -(-2)^2 + 3(-1) - 5 && \text{Paréntesis.} \\ &= -(4) + 3(-1) - 5 && \text{Exponente.} \\ &= -4 - 3 - 5 && \text{Multiplicar.} \\ &= -7 - 5 && \text{Sustraer, de izquierda a derecha.} \\ &= -12 \end{aligned}$$







## Uso de la calculadora

### Evaluación de expresiones en una calculadora científica

Más adelante será necesario evaluar una expresión como  $3x^2 - 2x + 5$  para varios valores de  $x$ . A continuación se muestra cómo evaluar dichas expresiones.

EVALUAR

TECLAS

a)  $3x^2 - 2x + 5$ , para  $x = 4$

$$3(4)^2 - 2(4) + 5$$

$$3 \times 4 \ x^2 \ - \ 2 \times 4 \ + \ 5 \ = \ 45$$

b)  $3x^2 - 2x + 5$ , para  $x = -6$

$$3(-6)^2 - 2(-6) + 5$$

$$3 \times 6 \ +/- \ x^2 \ - \ 2 \times 6 \ +/- \ + \ 5 \ = \ 125$$

c)  $-x^2 - 3x - 5$ , para  $x = -2$

$$-(-2)^2 - 3(-2) - 5$$

$$1 \ +/- \ \times \ 2 \ +/- \ x^2 \ - \ 3 \ \times \ 2 \ +/- \ - \ 5 \ = \ -3$$

En el inciso c) hay que recordar que  $-x^2 = -1x^2$ .



## Uso de la calculadora graficadora

### Evaluación de expresiones en una calculadora graficadora

Todas las calculadoras graficadoras tienen un procedimiento para evaluar expresiones. Para utilizarlo, por lo general se necesita introducir el valor por usar para la variable y la expresión que ha de evaluarse. Después de oprimir la tecla **ENTER**, la calculadora graficadora mostrará la respuesta. El procedimiento varía de una calculadora a otra. A continuación se muestra la forma de evaluar una expresión en el modelo TI-83 Plus. En dicha calculadora, se emplea la tecla **STO ►** para almacenar un valor. Los valores y expresiones almacenados se separan por medio de una coma, que se obtiene al oprimir **ALPHA** seguida de **.**.

EVALUAR

TECLAS EN LA TI-83 PLUS

$3x^2 - 2x + 5$  para  $x = -6$

En la pantalla aparece:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} (-) & 6 & \text{STO} \blacktriangleright & \text{X, T, } \theta, n^* & \text{ALPHA} & \cdot & 3 & x & x^2 & - & 2 & x & + & 5 & \text{ENTER} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ -6 & \rightarrow & x & : & 3 & x^2 & - & 2 & x & + & 5 & 125 \end{array}$$

Observe que para obtener una  $x^2$  en la pantalla, se oprime la tecla **X, T,  $\theta$ , n** para seleccionar la variable  $x$ , y después se oprime la tecla  **$x^2$** , que se usa para elevar al cuadrado la variable o número seleccionado.

Una característica útil de las calculadoras graficadoras es que para evaluar una expresión para valores diferentes de la variable, no es necesario introducir nuevamente la expresión en cada ocasión. Por ejemplo, en la TI-83 Plus, si se oprime **2<sup>nd</sup>** seguida de **ENTER**, se muestra nuevamente la expresión. Después sólo se regresa y se cambia el valor almacenado de la  $x$  por el nuevo valor y se oprime **ENTER** para evaluar la expresión con el nuevo valor de la variable.

Cada marca de calculadoras utiliza teclas y procedimientos diferentes. Aquí sólo se hizo una revisión rápida. Por favor, lea el manual que viene con la calculadora graficadora para que obtenga una explicación completa de cómo evaluar expresiones.

\* Esta tecla se utiliza para generar cualesquiera de dichas letras ( $\theta$  es una letra griega). De aquí en adelante, al mostrar las teclas que se oprimen para generar una  $x$  sólo se mostrará  **$x$**  en lugar de **X, T,  $\theta$ , n**.

## Conjunto de ejercicios 1.9

### Ejercicios conceptuales

1. En la expresión  $a^b$ , ¿cómo se les llama a la  $a$  y a la  $b$ ?
2. Explique el significado de
  - a)  $3^2$
  - b)  $5^4$
  - c)  $x^n$
3. a) ¿Cuál es el exponente de un número o letra que no tiene escrito ningún exponente?  
 b) En la expresión  $5x^3y^2z$ , ¿cuál es el exponente sobre el 5, la  $x$ , la  $y$  y la  $z$ ?
4. Escriba una expresión simplificada para las siguientes expresiones.
  - a)  $y + y + y + y$
  - b)  $y \cdot y \cdot y \cdot y$
5. Escriba una expresión simplificada para las siguientes expresiones.
  - a)  $x + x + x + x + x$
  - b)  $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$
6. a) Explique por qué  $-x^2$  siempre arrojará un número negativo para cualquier número real que se seleccione como valor de  $x$ .  
 b) Explique por qué  $(-x)^2$  siempre será un número positivo para cualquier número real diferente de cero que se elija como valor de  $x$ .
7. Enliste el orden de las operaciones que se sigue al evaluar una expresión matemática.
8. Cuando una expresión tiene sólo sumas y restas o sólo multiplicaciones o divisiones, ¿cómo se evalúa?
9. Si se evalúa  $4 + 5 \times 2$  en una calculadora y se obtiene la respuesta de 18, ¿se trata de una calculadora científica? Explique su respuesta.
10. Diga dos razones de por qué se utilizan paréntesis en una expresión.
11. Determine los resultados que se obtienen en una calculadora científica si se oprimen las siguientes teclas.
  - a)  $20 \div 5 - 3 =$
  - b)  $20 \div (5 - 3) =$
  - c) ¿Cuáles teclas, **a)** o **b)**, se emplean para evaluar  $\frac{20}{5-3}$ ? Explique.
12. Determine los resultados que se obtienen en una calculadora científica si se oprimen las siguientes teclas.
  - a)  $15 - 10 \div 5 =$
  - b)  $(15 - 10) \div 5 =$
  - c) ¿Cuáles teclas, **a)** o **b)**, se emplean para evaluar  $\frac{15-10}{5}$ ? Explique.

En los ejercicios 13 y 14, **a)** escriba con sus propias palabras el procedimiento paso a paso que se emplearía para evaluar las expresiones, y **b)** evalúe la expresión.

13.  $[10 - (16 \div 4)]^2 - 6^3$
14.  $[(8 \cdot 3) - 4^2]^2 - 5$


En los ejercicios 15 y 16, **a)** escriba con sus propias palabras el procedimiento paso a paso que se emplearía para evaluar la expresión para el valor dado de la variable, y **b)** evalúe la expresión para el valor que se da para la variable.

15.  $-4x^2 + 3x - 6$  cuando  $x = 5$
16.  $-5x^2 - 2x + 8$  cuando  $x = -2$

### Práctica de habilidades

Evalúe lo siguiente.

- |                                  |                                  |                                   |                                   |
|----------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 17. $5^2$                        | 18. $2^3$                        | 19. $1^7$                         | 20. $3^3$                         |
| 21. $-5^2$                       | 22. $7^3$                        | 23. $(-3)^2$                      | 24. $-6^3$                        |
| 25. $(-1)^3$                     | 26. $2^5$                        | 27. $(-8)^2$                      | 28. $5^3$                         |
| 29. $(-6)^2$                     | 30. $(-3)^3$                     | 31. $4^1$                         | 32. $-7^2$                        |
| 33. $(-4)^4$                     | 34. $-1^4$                       | 35. $-2^4$                        | 36. $3^2(4)^2$                    |
| 37. $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ | 38. $\left(\frac{5}{8}\right)^3$ | 39. $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$ | 40. $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$ |
| 41. $5^2 \cdot 3^2$              | 42. $(-1)^4(2)^4$                | 43. $4^3 \cdot 3^2$               | 44. $(-2)^3(-1)^9$                |

 En los ejercicios 45 a 56, **a)** determine por observación si la respuesta debe ser positiva o negativa, y explique su respuesta; **b)** evalúe la expresión con su calculadora, y **c)** determine si su respuesta para el inciso **b)** es razonable y tiene sentido.

- |                            |                             |  |  |
|----------------------------|-----------------------------|--|--|
| $\backslash$ 45. $7^3$     | $\backslash$ 46. $4^6$      | $\backslash$ 47. $6^4$                         | $\backslash$ 48. $-2^5$                        |
| $\backslash$ 49. $(-3)^5$  | $\backslash$ 50. $10^3$     | $\backslash$ 51. $(-5)^4$                      | $\backslash$ 52. $(1.3)^3$                     |
| $\backslash$ 53. $(4.6)^4$ | $\backslash$ 54. $(-3.3)^3$ | $\backslash$ 55. $-\left(\frac{7}{8}\right)^2$ | $\backslash$ 56. $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$ |

Evalúe lo siguiente.

- |   |  |  |
|---|--|--|
| 57. $3 + 2 \cdot 6$   | 58. $7 - 5^2 + 2$  | 59. $6 - 6 + 8$  |
| 60. $(8^2 \div 4) - (20 - 4)$   | 61. $1 + 3 \cdot 2^2$                                    | 62. $8 \cdot 3^2 + 1 \cdot 5$                                      |
| 63. $-3^3 + 27$   | 64. $(-2)^3 + 8 \div 4$                                  | 65. $(4 - 3) \cdot (5 - 1)^2$                                      |
| 66. $-10 - 6 - 3 - 2$   | 67. $3 \cdot 7 + 4 \cdot 2$                              | 68. $[1 - (4 \cdot 5)] + 6$  |
| 69. $5 - 2(7 + 5)$  | 70. $8 + 3(6 + 4)$                                       | 71. $-32 - 5(7 - 10)^2$  |
| 72. $-40 - 3(4 - 8)^2$  | 73. $\frac{3}{4} + 2\left(\frac{1}{5}\right)^2$          | 74. $-\frac{2}{3} - 3\left(\frac{3}{4}\right)^2$                   |
| 75. $4^2 - 3 \cdot 4 - 6$   | 76. $-2[-5 + (7 + 4)]$                                   | 77. $(6 \div 3)^3 + 4^2 \div 8$                                    |
| 78. $4 + (4^2 - 13)^4 - 3$  | 79. $[-8(-2 + 5)]^2$                                     | 80. $(-3)^2 + 6^2 \div 2^2 + 5$                                    |
| 81. $(3^2 - 1) \div (3 + 1)^2$  | 82. $2[3(8 - 2^2) - 6]$                                  | 83. $[4 + ((5 - 2)^2 \div 3)^2]^2$                                 |
| 84. $(20 \div 5 \cdot 5 \div 5 - 5)^2$  | 85. $2.5 + 7.56 \div 2.1 + (9.2)^2$                      | 86. $(8.4 + 3.1)^2 - (3.64 - 1.2)$                                 |
| 87. $2[1.55 + 5(3.7)] - 3.35$   | 88. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}$        | 89. $\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{8}\right) - \frac{3}{20}$        |
| 90. $\left(\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8}\right)$ | 91. $\frac{3}{4} - 4 \cdot \frac{5}{40}$                 | 92. $\frac{1}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{5}$    |
| 93. $\frac{4}{5} + \frac{3}{4} \div \frac{1}{2} - \frac{2}{3}$                                | 94. $\frac{12 - (4 - 6)^2}{6 + 4^2 \div 2^2}$            | 95. $\frac{5 - [3(6 \div 3) - 2]}{5^2 - 4^2 \div 2}$               |
| 96. $\frac{[(7 - 3)^2 - 4]^2}{9 - 16 \div 8 - 4}$   | 97. $\frac{-[4 - (6 - 12)^2]}{[(9 \div 3) + 4]^2 + 2^2}$ | 98. $\frac{[(5 - (3 - 7)) - 2]^2}{2[(16 \div 2^2) - (8 \cdot 4)]}$ |
| 99. $\{5 - 2[4 - (6 \div 2)]\}^2$   | 100. $\{-6 - [3(16 \div 4^2)]\}^2$                       | 101. $-\{4 - [-3 - (2 - 5)]\}^2$                                   |
| 102. $3\{4[(3 - 4)^2 - 3]^3 - 1\}$  |  |  |

Evalúe **a)**  $x^2$ , **b)**  $-x^2$ , y **c)**  $(-x)^2$  para los siguientes valores de  $x$ .

- |        |        |                     |                    |
|--------|--------|---------------------|--------------------|
| 103. 3 | 104. 8 | 105. -4             | 106. -5            |
| 107. 6 | 108. 7 | 109. $-\frac{1}{3}$ | 110. $\frac{3}{4}$ |

Evalúe cada expresión para el valor que se da para la variable o variables.

- |   |  |  |
|---|--|--|
| 111. $x + 6; x = -2$                      | 112. $2x - 4x + 5; x = 3$                      | 113. $5z - 2; z = 4$                   |
| 114. $3(x - 2); x = 5$                    | 115. $a^2 - 6; a = -3$                         | 116. $b^2 - 8; b = 5$                  |
| 117. $-4x^2 - 2x + 1; x = -1$             | 118. $2r^2 - 5r + 3; r = 1$                    | 119. $3p^2 - 6p - 4; p = 2$            |
| 120. $-w^2 - 5w + 3; w = 4$               | 121. $-x^2 - 2x + 5; x = \frac{1}{2}$          | 122. $2x^2 - 4x - 10; x = \frac{3}{4}$ |
| 123. $4(3x + 1)^2 - 6x; x = 5$            | 124. $3n^2(2n - 1) + 5; n = -4$                |  |
| 125. $-3s + 2t; s = 3, t = 4$             | 126. $7m + 4n^2 - 5; m = 6, n = 7$             |  |
| 127. $r^2 - s^2; r = -2, s = -3$          | 128. $p^2 - q^2; p = 5, q = -3$                |  |
| 129. $2(x + 2y) + 4x - 3y; x = 2, y = -3$ | 130. $4(x + y)^2 + 2(x + y) + 3; x = 2, y = 4$ |  |
| 131. $6x^2 + 3xy - y^2; x = 2, y = -3$    | 132. $3(x - 4)^2 - (3y - 4)^2; x = -1, y = -2$ |  |

## Solución de problemas

Escriba los siguientes enunciados como expresiones matemáticas con el empleo de paréntesis y corchetes, y después evalúelas.

133. Multiplicar 6 por 3. De dicho producto sustraer 4. De la diferencia, restar 2.
134. Sumar 4 más 9. Dividir esta suma entre 2. Sumar 10 al cociente.
135. Dividir 18 entre 3. Sumar 9 a dicho cociente. Restar 8 de la suma. Multiplicar la diferencia por 9.
136. Multiplicar 6 por 3. A este producto sumar 27. Dividir esta suma entre 8. Multiplicar el cociente por 10.
137. Sumar  $\frac{4}{5}$  más  $\frac{3}{7}$ . Multiplicar esta suma por  $\frac{2}{3}$ .
138. Multiplicar  $\frac{3}{8}$  por  $\frac{4}{5}$ . Sumar  $\frac{7}{120}$  a este producto. De la suma, restar  $\frac{1}{60}$ .
139. ¿Para qué valor o valores de  $x$  se cumple que  $-(x^2) = -x^2$ ?
140. ¿Para qué valor o valores de  $x$  se satisface que  $x = x^2$ ?
141. **Impuesto sobre las ventas** Si el impuesto sobre la venta de un artículo es de 7%, el que corresponde a uno que cuesta  $d$  dólares se encuentra con la expresión  $0.07d$ . Determine el impuesto sobre la venta de un disco compacto que cuesta \$15.99.
142. **Viaje por carretera** Si un carro viaja a 60 millas por hora, la distancia que recorre en  $t$  horas es igual a  $60t$ . Determine qué tan lejos viaja un auto que se mueve durante 2.5 horas a 60 millas por hora.
143. **Costo de un carro** Si el impuesto sobre la venta de un artículo es de 7%, entonces el costo total de un artículo  $c$ , el impuesto inclusive, se calcula con la expresión  $c + 0.07c$ . Encuentre el costo total de un auto que cuesta \$15,000.
144. **Negocio de bicicletas** La ganancia o pérdida de un negocio, en dólares, se encuentra con la expresión  $-x^2 + 60x - 100$ , en la que  $x$  es el número de bicicletas (de 0 a 30) que se vende en una semana. Determine la utilidad o pérdida si se venden 20 en una semana.
145. En el recuadro de Uso de la calculadora, en la página 77, se mostró que para evaluar  $(\frac{2}{5})^2$  se oprimen las siguientes teclas:

$$2 \boxed{\div} 5 \boxed{=} \boxed{x^2}$$

Se obtuvo una respuesta de 16. Indique lo que mostraría una calculadora científica (o una graficadora) si se oprimiera la siguiente secuencia de teclas. (En una calculadora graficadora, oprima **ENTER** en lugar de **=** y concluya el inciso b) con **ENTER**.) Explique la razón para cada respuesta. Compruebe su solución con la calculadora.

a)  $2 \boxed{\div} 5 \boxed{x^2} \boxed{=}$

b)  $( \boxed{2 \div 5} ) \boxed{x^2}$

146. En la sección 6.1 se estudiará el uso del cero como exponente. En su calculadora, halle el valor de  $4^0$  por medio de la tecla  $y^x$ ,  $x^y$  o  $\wedge$ , y registre su valor. Evalúe otros números elevados a la potencia cero. ¿Podría sacar algunas conclusiones acerca de un número real (distinto de cero) que se eleva al exponente cero?



## Problemas de reto

147. **Crecimiento del pasto** La tasa por semana, en pulgadas, de crecimiento del pasto, depende de cierto número de factores, como la lluvia y la temperatura. Para cierta región del país, el crecimiento por semana se aproxima por la expresión  $0.2R^2 + 0.003RT + 0.0001T^2$ , donde  $R$  es

la precipitación pluvial por semana, en pulgadas, y  $T$  es la temperatura promedio semanal, en grados Fahrenheit. Encuentre la cantidad que crece el pasto en una semana en la que llueve 2 pulgadas y la temperatura promedio es de 70 °F.

Inserte un par de paréntesis para hacer que el enunciado sea verdadero.

148.  $14 + 6 \div 2 \times 4 = 40$

149.  $12 - 4 - 6 + 10 = 24$

150.  $24 \div 6 \div 2 + 2 = 1$



## Actividad en grupo

Analicen y respondan los ejercicios 151 a 154, de acuerdo con las instrucciones. Cada pregunta consta de cuatro incisos. Para los incisos **a)**, **b)** y **c)**, simplifique la expresión y escriba la respuesta en forma exponencial. Utilice el conocimiento que obtenga en los incisos **a)** a **c)** para responder el **d)**. (En el capítulo 6 se estudiarán las reglas generales que se emplean para resolver ejercicios como estos.)

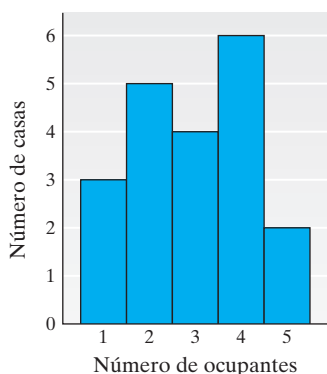
- a)** Miembro 1 del grupo: haga el inciso **a)** de cada ejercicio.  
**b)** Miembro 2 del grupo: haga el inciso **b)** de cada ejercicio.  
**c)** Miembro 3 del grupo: haga el inciso **c)** de cada ejercicio.  
**d)** Como grupo, resuelvan el inciso **d)** de cada ejercicio. Tal vez necesiten hacer otros ejemplos parecidos a los incisos **a)** a **c)** que los ayuden a responder el **d)**.

151. **a)**  $2^2 \cdot 2^3$       **b)**  $3^2 \cdot 3^3$       **c)**  $2^3 \cdot 2^4$       **d)**  $x^m \cdot x^n$   
 152. **a)**  $\frac{2^3}{2^2}$       **b)**  $\frac{3^4}{3^2}$       **c)**  $\frac{4^5}{4^3}$       **d)**  $\frac{x^m}{x^n}$   
 153. **a)**  $(2^3)^2$       **b)**  $(3^3)^2$       **c)**  $(4^2)^2$       **d)**  $(x^m)^n$   
 154. **a)**  $(2x)^2$       **b)**  $(3x)^2$       **c)**  $(4x)^3$       **d)**  $(ax)^m$

## Ejercicios de repaso acumulativo

[1.2] 155. **Ocupación de una vivienda** La gráfica muestra el número de ocupantes de varias casas seleccionadas al azar en un vecindario.

Ocupantes en casas seleccionadas



[1.8] Evalúe lo siguiente.

157.  $(-2)(-4)(6)(-1)(-3)$

158.  $\left(\frac{-5}{7}\right) \div \left(\frac{-3}{14}\right)$

- a)** ¿Cuántas casas tienen tres ocupantes?  
**b)** Elabore una tabla que muestre el número de viviendas que tienen un ocupante, dos, tres, y así sucesivamente.  
**c)** ¿Cuántos ocupantes en total hay en todas las casas?  
**d)** Determine el número medio de ocupantes en todas las viviendas que se estudiaron.

156. **Costo de un taxi** Los taxis Cabina Amarilla cobran \$2.40 por el primer  $\frac{1}{2}$  de milla más 20 centavos por cada  $\frac{1}{8}$  de milla adicional o parte proporcional. Calcule el costo de un viaje de 3 millas.

## 1.10 PROPIEDADES DEL SISTEMA DE NÚMEROS REALES



- 1 Aprender la propiedad conmutativa.
- 2 Aprender la propiedad asociativa.
- 3 Aprender la propiedad distributiva.
- 4 Aprender las propiedades de identidad.
- 5 Aprender las propiedades del inverso.

En este punto se introducen varias propiedades del sistema de números reales. Las cuales se utilizarán en todo el libro.

## 1 Aprender la propiedad conmutativa

La **propiedad conmutativa de la suma** establece que no importa el orden en que se sumen dos números reales cualesquiera.

### Propiedad conmutativa de la suma

Si  $a$  y  $b$  representan dos números reales cualesquiera, entonces

$$a + b = b + a$$

Observe que la propiedad conmutativa involucra un cambio en el *orden*. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 4 + 3 &= 3 + 4 \\ 7 &= 7 \end{aligned}$$

La **propiedad conmutativa de la multiplicación** afirma que no importa el orden en que se multiplican dos números reales cualesquiera.

### Propiedad conmutativa de la multiplicación

Si  $a$  y  $b$  representan dos números reales cualesquiera, entonces

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 6 \cdot 3 &= 3 \cdot 6 \\ 18 &= 18 \end{aligned}$$

La **propiedad conmutativa no se cumple para la resta o la división**. Por ejemplo,  $4 - 6 \neq 6 - 4$  y  $6 \div 3 \neq 3 \div 6$ .

## 2 Aprender la propiedad asociativa

La **propiedad asociativa de la suma** dice que al sumar tres números o más, es posible colocar paréntesis alrededor de dos números adyacentes cualesquiera sin que el resultado cambie.

### Propiedad asociativa de la suma

Si  $a$ ,  $b$  y  $c$  representan tres números reales cualesquiera, entonces

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Observe que la propiedad asociativa involucra un cambio en la *agrupación*. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} (3 + 4) + 5 &= 3 + (4 + 5) \\ 7 + 5 &= 3 + 9 \\ 12 &= 12 \end{aligned}$$

En este ejemplo, se agrupa al 3 y 4 en la izquierda, y al 4 y 5 en la derecha.

La **propiedad asociativa de la multiplicación** establece que al multiplicar tres o más números, se puede colocar paréntesis alrededor de dos números adyacentes cualesquiera sin que el resultado se modifique.

**Propiedad asociativa de la multiplicación**

Si  $a$ ,  $b$  y  $c$  representan tres números reales cualesquiera, entonces

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Por ejemplo,

$$(6 \cdot 2) \cdot 4 = 6 \cdot (2 \cdot 4)$$

$$12 \cdot 4 = 6 \cdot 8$$

$$48 = 48$$

Como la propiedad asociativa involucra un cambio en la agrupación, cuando se emplea la propiedad asociativa el contenido dentro del paréntesis cambia.

La propiedad asociativa **no se cumple para la resta o la división**. Por ejemplo,  $(4 - 1) - 3 \neq 4 - (1 - 3)$  y  $(8 \div 4) \div 2 \neq 8 \div (4 \div 2)$ .

Es frecuente que al sumar números se agrupen algunos de modo que se sumen con facilidad. Por ejemplo, cuando se suma  $70 + 50 + 30$ , quizá se sume primero  $70 + 30$  para obtener 100. Es posible hacer esto gracias a las propiedades conmutativa y asociativa. Observe que

$$\begin{aligned} (70 + 50) + 30 &= 70 + (50 + 30) && \text{Propiedad asociativa de la suma.} \\ &= 70 + (30 + 50) && \text{Propiedad conmutativa de la suma.} \\ &= (70 + 30) + 50 && \text{Propiedad asociativa de la suma.} \\ &= 100 + 50 && \text{Resultados de la suma.} \\ &= 150 \end{aligned}$$

Observe en el segundo paso que los mismos números quedan entre paréntesis, pero el orden de los números cambia, de  $50 + 30$  a  $30 + 50$ . Como este paso involucra un cambio en el orden (y no en la agrupación), se trata de la propiedad conmutativa de la suma.

**3 Aprender la propiedad distributiva**

Una propiedad muy importante de los números reales es la **propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma**. Es frecuente que se abrevie el nombre a **propiedad distributiva**.

**Propiedad distributiva**

Si  $a$ ,  $b$  y  $c$  representan tres números reales cualesquiera, entonces

$$a(b + c) = ab + ac$$

Por ejemplo, si se hace que  $a = 2$ ,  $b = 3$  y  $c = 4$ , entonces,

$$2(3 + 4) = (2 \cdot 3) + (2 \cdot 4)$$

$$2 \cdot 7 = 6 + 8$$

$$14 = 14$$

Por lo tanto, es posible primero sumar y luego multiplicar, o primero multiplicar y después sumar. Otro ejemplo de la propiedad distributiva es el siguiente.

$$2(x + 3) = 2 \cdot x + 2 \cdot 3 = 2x + 6$$



La propiedad distributiva se expande de la siguiente forma:

$$a(b + c + d + \dots + n) = ab + ac + ad + \dots + an$$

Por ejemplo,  $3(x + y + 5) = 3x + 3y + 15$ .

En el capítulo 2 se estudiará con más detalle la propiedad distributiva.

### SUGERENCIA

La *propiedad conmutativa* cambia el orden.

La *propiedad asociativa* cambia el agrupamiento.

La *propiedad distributiva* involucra *dos operaciones*, por lo general la multiplicación y la suma.

### EJEMPLO 1

Diga cuál propiedad es la que se ilustra.

**a)**  $4 + (-2) = -2 + 4$

**b)**  $5(r + s) = 5 \cdot r + 5 \cdot s = 5r + 5s$

**c)**  $x \cdot y = y \cdot x$

**d)**  $(-12 + 3) + 4 = -12 + (3 + 4)$

### Solución

**a)** Propiedad conmutativa de la suma

**b)** Propiedad distributiva

**c)** Propiedad conmutativa de la multiplicación

**d)** Propiedad asociativa de la suma

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 29



### SUGERENCIA

No hay que confundir la propiedad distributiva con la asociativa de la multiplicación. Asegúrese de comprender la diferencia.

**Propiedad distributiva**

**Propiedad asociativa de la multiplicación**

$$\begin{aligned} 3(4 + x) &= 3 \cdot 4 + 3 \cdot x \\ &= 12 + 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3(4 \cdot x) &= (3 \cdot 4)x \\ &= 12x \end{aligned}$$

Para utilizar la propiedad distributiva, dentro de los paréntesis, debe haber *dos términos* separados por un signo más (+) o un signo menos (-), como en  $3(4 + x)$ .

## 4 Aprender las propiedades de identidad

Ahora estudiaremos las **propiedades de identidad**. Cuando se suma el número 0 a cualquier número real, éste no cambia. Por ejemplo,  $5 + 0 = 5$ , y  $0 + 5 = 5$ . Por esta razón, el 0 se llama **elemento de identidad de la suma**. Cuando cualquier número real se multiplica por 1 no sufre ningún cambio. Por ejemplo  $7 \cdot 1 = 7$ , y  $1 \cdot 7 = 7$ . Por esta razón, el 1 recibe el nombre de **elemento de identidad de la multiplicación**. La propiedad de identidad para la suma establece que cuando se suma 0 a cualquier número real, el resultado es el mismo número real. La propiedad de identidad para la multiplicación dice que cuando se multiplica cualquier número real por 1, el resultado es el mismo número real. A continuación se resumen estas propiedades.

### Propiedades de identidad

Si  $a$  representa cualquier número real, entonces

$$a + 0 = a \quad \text{y} \quad 0 + a = a \quad \textit{Propiedad de identidad de la suma.}$$

y

$$a \cdot 1 = a \quad \text{y} \quad 1 \cdot a = a \quad \textit{Propiedad de identidad de la multiplicación.}$$

Es frecuente emplear las propiedades de identidad sin darse cuenta de que se está haciendo. Por ejemplo, al reducir  $\frac{15}{50}$ , se hace lo siguiente:

$$\frac{15}{50} = \frac{3 \cdot 5}{10 \cdot 5} = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{5} = \frac{3}{10} \cdot 1 = \frac{3}{10}$$

Cuando se hace  $\frac{3}{10} \cdot 1 = \frac{3}{10}$ , se utiliza la propiedad de identidad de la multiplicación.

## 5 Aprender las propiedades del inverso

Las últimas propiedades que se estudiarán en este capítulo son las **propiedades del inverso**. En la página 45 se indicó que números como 3 y  $-3$  eran opuestos o *inversos aditivos* porque  $3 + (-3) = 0$  y  $-3 + 3 = 0$ . Dos números cualesquiera cuya suma sea igual a 0 reciben el nombre de *inversos aditivos* uno del otro. En general, para cualquier número real  $a$ , su inverso aditivo es  $-a$ .

También se tienen inversos multiplicativos. Dos números cualesquiera cuyo producto sea 1 se denominan *inversos multiplicativos* uno del otro. Por ejemplo, debido a que  $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$  y  $\frac{1}{4} \cdot 4 = 1$ , los números 4 y  $\frac{1}{4}$  son *inversos multiplicativos* (o *recíprocos*) uno del otro. En general, para cualquier número real  $a$ , su inverso multiplicativo es  $\frac{1}{a}$ . A continuación se resumen las propiedades del inverso.

### Propiedades del inverso

Si  $a$  representa cualquier número real, entonces

$$a + (-a) = 0 \quad \text{y} \quad -a + a = 0 \quad \text{Propiedad inversa de la suma.}$$

y

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{a} \cdot a = 1 \quad (a \neq 0) \quad \text{Propiedad inversa de la multiplicación.}$$

Es frecuente que se empleen las propiedades del inverso sin percibir que se está haciendo. Por ejemplo, para evaluar la expresión  $6x + 2$ , si  $x = \frac{1}{6}$  se hace lo siguiente:

$$6x + 2 = 6\left(\frac{1}{6}\right) + 2 = 1 + 2 = 3$$

Cuando se multiplica  $6\left(\frac{1}{6}\right)$  y se reemplaza con 1, se utilizó la propiedad inversa de la multiplicación. En todo el libro se usará tanto la propiedad del idéntico como del inverso, aunque no se haga referencia explícita a ellas por su nombre.

### EJEMPLO 2 Mencione cada propiedad que se ilustra.

**a)**  $2(x + 6) = (2 \cdot x) + (2 \cdot 6) = 2x + 12$

**b)**  $3x \cdot 1 = 3x$

**c)**  $(3 \cdot 6) \cdot 5 = 3 \cdot (6 \cdot 5)$

**d)**  $y \cdot \frac{1}{y} = 1$

**e)**  $2a + (-2a) = 0$

**f)**  $3y + 0 = 3y$

### Solución

**a)** Propiedad distributiva

**b)** Propiedad de identidad de la multiplicación

**c)** Propiedad asociativa de la multiplicación

**d)** Propiedad inversa de la multiplicación

**e)** Propiedad inversa de la suma

**f)** Propiedad de identidad de la suma



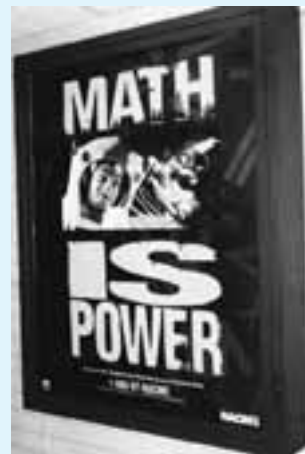
## Matemáticas en acción

### Las matemáticas, un lenguaje poderoso

De acuerdo con un informe especial del Departamento de Educación de los E. U., adquirir conocimientos en matemáticas tendrá mayor influencia en el ingreso de las personas que el conocimiento de cualquier otra disciplina. ¿A qué se debe? Esto se debe a que las matemáticas han demostrado ser el lenguaje más eficiente para analizar, controlar y crear los recursos que las personas necesitan o quieren. Piense en lo que necesita o desea. Todo, desde el seguro de salud a la logística de la comida rápida, de los archivos de audio descargables a los efectos cinematográficos especiales que doblan la mente, del diseño de modas por computadora a la lectura de códigos de barras en la caja del supermercado, sería inimaginable sin la aplicación de técnicas y pensamientos matemáticos.

En un nivel más personal, pero de gran importancia en la vida cotidiana, su calidad de vida está determinada en muchos aspectos por decisiones que toma y que dependen de la comprensión y cálculos matemáticos. El cálculo de cómo financiar una compra importante, planear un viaje y preparar una recepción para la reunión familiar, son actos que se benefician del conocimiento matemático, por no mencionar asuntos más profundos tales como si un político distorsiona los hechos con la aplicación de técnicas estadísticas dudosas.

De muchos modos y demasiados niveles, el dominio de las matemáticas le permitirá dar forma a



su vida propia, en lugar de que sean otras personas las que lo hagan por usted.

A las matemáticas no les importa si nació en Los Ángeles o Taiwán, o si habla con acento de Mississippi, Maine o Zapoteca. Nada importa en la forma en que desarrolle su propio estilo y fortaleza matemáticos, sino sólo su voluntad propia de hacer el esfuerzo necesario.

Conforme lea los ejemplos y ejercicios de este libro, no pierda de vista el panorama —cómo cada parte de conocimiento y habilidad que gana y cada problema que resuelva, lo acerca cada vez más a la meta de ser capaz de elegir cómo quiere trabajar y vivir en un mundo en el que las matemáticas son clave.

## Conjunto de ejercicios 1.10

### Ejercicios conceptuales

1. Explique la propiedad conmutativa de la suma y dé un ejemplo de ella.
2. Explique la propiedad conmutativa de la multiplicación y proporcione un ejemplo.
3. Explique la propiedad asociativa de la suma y brinde un ejemplo.
4. Explique la propiedad asociativa de la multiplicación y dé un ejemplo de ella.
5. a) Explique la diferencia entre  $x + (y + z)$  y  $x(y + z)$ .  
b) Encuentre el valor de  $x + (y + z)$  cuando  $x = 4$ ,  $y = 5$  y  $z = 6$ .  
c) Encuentre el valor de  $x(y + z)$  cuando  $x = 4$ ,  $y = 5$  y  $z = 6$ .
6. Explique la propiedad distributiva y dé un ejemplo.
7. Explique cómo es posible indicar la diferencia entre la propiedad asociativa de la multiplicación y la distributiva.
8. a) Escriba la propiedad asociativa de la suma con el empleo de  $x + (y + z)$ .  
b) Escriba la propiedad distributiva con el uso de  $x(y + z)$ .
9. ¿Cuál número es el elemento aditivo de identidad?
10. ¿Cuál número es el elemento multiplicativo de identidad?

## Práctica de habilidades

En los ejercicios 11 a 22, para las expresiones que se dan, determine **a)** el inverso aditivo, y **b)** el inverso multiplicativo.

- |                   |                    |                    |
|-------------------|--------------------|--------------------|
| 11. 6             | 12. 5              | 13. -3             |
| 14. -7            | 15. $x$            | 16. $y$            |
| 17. 1.6           | 18. -0.125         | 19. $\frac{1}{5}$  |
| 20. $\frac{1}{8}$ | 21. $-\frac{3}{5}$ | 22. $-\frac{2}{9}$ |

## Práctica de habilidades

Diga el nombre de cada propiedad que se ilustra.

- |   |  |
|---|--|
| 23. $(x + 3) + 5 = x + (3 + 5)$                 | 24. $3 + y = y + 3$                      |
| 25. $6(x + 7) = 6x + 42$                        | 26. $1(x + 3) = (1)(x) + (1)(3) = x + 3$ |
| 27. $5 \cdot y = y \cdot 5$                     | 28. $x \cdot y = y \cdot x$              |
| 29. $p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r$ | 30. $2(x + 4) = 2x + 8$                  |
| 31. $4(d + 3) = 4d + 12$                        | 32. $3 + (4 + t) = (3 + 4) + t$          |
| 33. $0 + 3y = 3y$                               | 34. $3z \cdot 1 = 3z$                    |
| 35. $2y \cdot \frac{1}{2y} = 1$                 | 36. $-4x + 4x = 0$                       |

En los ejercicios 37 a 58, al nombre de una propiedad sigue parte de una ecuación. Complete la ecuación, a la derecha del signo igual, de modo que se ilustre la propiedad de que se trata.

- |   |  |
|---|--|
| 37. Propiedad conmutativa de la suma<br>$x + 6 =$                                   | 38. Propiedad conmutativa de la suma<br>$-3 + 4 =$   |
| 39. Propiedad asociativa de la multiplicación<br>$-6 \cdot (4 \cdot 2) =$           | 40. Propiedad asociativa de la suma<br>$-5 + (6 + 8) =$  |
| 41. Propiedad distributiva<br>$1(x + y) =$  | 42. Propiedad distributiva<br>$4(x + 3) =$   |
| 43. Propiedad conmutativa de la multiplicación<br>$x \cdot y =$                     | 44. Propiedad distributiva<br>$6(x + y) =$   |
| 45. Propiedad conmutativa de la suma<br>$4x + 3y =$                                 | 46. Propiedad asociativa de la suma<br>$(3 + r) + s =$   |
| 47. Propiedad asociativa de la suma<br>$(a + b) + 3 =$                              | 48. Propiedad conmutativa de la multiplicación<br>$(x + 2)3 =$                                     |
| 49. Propiedad asociativa de la suma<br>$(3x + 4) + 6 =$                             | 50. Propiedad conmutativa de la suma<br>$3(x + y) =$   |
| 51. Propiedad conmutativa de la multiplicación<br>$3(m + n) =$                      | 52. Propiedad asociativa de la multiplicación<br>$(3x)y =$   |
| 53. Propiedad distributiva<br>$4(x + y + 3) =$                                      | 54. Propiedad distributiva<br>$3(x + y + 2) =$   |
| 55. Propiedad inversa de la suma<br>$3n + (-3n) =$                                  | 56. Propiedad de identidad de la suma<br>$0 + 2x =$  |
| 57. Propiedad de identidad de la multiplicación<br>$\left(\frac{5}{2}n\right)(1) =$ | 58. Propiedad inversa de la multiplicación<br>$\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{2}{x}\right) =$ |

## Solución de problemas

Indique si los procesos que se dan son conmutativos. Es decir, ¿si se cambia el orden en que se hacen las acciones, modifica el resultado final? Explique cada respuesta.

59. Poner azúcar y después crema en el café; poner crema y después azúcar en el café.
60. Cepillar los dientes y luego lavar la cara; lavar la cara y luego cepillar los dientes.
61. Aplicar loción de protección solar y después asolearse; asolearse y después aplicar loción de protección solar.
62. Ponerse los calcetines y luego los zapatos; ponerse los zapatos y luego los calcetines.
63. Ensuciarse las manos y después lavarlas; lavar las manos y después ensuciarlas.
64. Escribir en el pizarrón y después borrarlo; borrar el pizarrón y después escribir en él.



En los ejercicios 65 a 70, indique si los procesos dados son asociativos. Para que un proceso sea asociativo, el resultado final debe ser el mismo cuando las dos acciones primeras se ejecutan en primer lugar o cuando las dos últimas se llevan a cabo primero. Explique cada respuesta.

65. Cepillar los dientes, lavar la cara y peinar el pelo.
66. En una tienda, comprar cereal, jabón y comida para el perro.
67. Ponerse una camiseta, una corbata y un suéter.
68. Una máquina que sirve el café, coloca la tasa y después agrega el azúcar.
69. Encender un carro, mover la palanca de cambios para conducir, y detenerse en la gasolinera.
70. Poner cereal, leche y azúcar en un recipiente.
71. La propiedad conmutativa de la suma es  $a + b = b + a$ . Explique por qué  $(3 + 4) + x = x + (3 + 4)$  también muestra la propiedad conmutativa de la suma.
72. La propiedad conmutativa de la multiplicación es  $a \cdot b = b \cdot a$ . Explique por qué  $(3 + 4) \cdot x = x \cdot (3 + 4)$  también muestra la propiedad conmutativa de la multiplicación.

## Problemas de reto

73. Considere  $x + (3 + 5) = x + (5 + 3)$ . ¿Ilustra esto la propiedad conmutativa o la asociativa de la suma? Explique.
74. Considere  $x + (3 + 5) = (3 + 5) + x$ . ¿Ilustra esto la propiedad conmutativa o la asociativa de la suma? Explique.
75. Considere  $x + (3 + 5) = (x + 3) + 5$ . ¿Esto es un ejemplo de la propiedad conmutativa de la suma? Explique.
76. La propiedad conmutativa de la multiplicación es  $a \cdot b = b \cdot a$ . Explique por qué  $(3 + 4) \cdot (5 + 6) = (5 + 6) \cdot (3 + 4)$  también ilustra la propiedad conmutativa de la multiplicación.

## Ejercicios de repaso acumulativo

[1.3] 77. Sume  $2\frac{3}{5} + \frac{2}{3}$ .

[1.9] Evalúe lo siguiente.

79.  $12 - 24 \div 8 + 4 \cdot 3^2$

78. Haga la sustracción  $3\frac{5}{8} - 2\frac{3}{16}$ .

80.  $-4x^2 + 6xy + 3y^2$  cuando  $x = 2, y = -3$

## RESUMEN DEL CAPÍTULO

## Términos y frases importantes

## 1.2

Aproximadamente igual a  
 Datos ordenados  
 Expresión  
 Gráfica de barras  
 Gráfica circular (o pastel)  
 Gráfica de líneas (poligonal)  
 Media  
 Mediana  
 Medidas de tendencia central  
 Operaciones  
 Procedimiento de solución de problemas

## 1.3

Denominador  
 Enteros no negativos  
 Evaluar

Factores  
 Fracción  
 Máximo común denominador (MCD)  
 Mínimo común denominador (mcd)  
 Numerador  
 Número mixto  
 Reducir a su mínima expresión  
 Variables

## 1.4

Conjunto  
 Conjunto vacío (o nulo)  
 Elementos de un conjunto  
 Enteros  
 Enteros positivos  
 Números irracionales  
 Números naturales

Números negativos  
 Números para contar  
 Números racionales  
 Números reales

## 1.5

Valor absoluto

## 1.6

Inversos aditivos  
 Operaciones  
 Opuestos

## 1.8

Indefinido

## 1.9

Base  
 Exponente  
 Orden de las operaciones

Paréntesis  
 Paréntesis anidados  
 Símbolos de agrupación

## 1.10

Elemento de identidad para la multiplicación  
 Elemento de identidad para la suma  
 Propiedad distributiva  
 Propiedades asociativas  
 Propiedades conmutativas  
 Propiedades de identidad  
 Propiedades del inverso  
 Recíproco

## HECHOS IMPORTANTES

## Procedimiento de solución de problemas

1. Entender la pregunta.
2. Traducir a lenguaje matemático.
3. Efectuar los cálculos.
4. Revisar la respuesta.
5. Responder la pregunta que se hizo.

## Fracciones

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

## Conjuntos de números

Números naturales:  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Enteros no negativos:  $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Enteros:  $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Números racionales: {cociente de dos enteros, denominador distinto de 0}

Números irracionales: {números reales que no son racionales}

Números reales: {todos los números que se representan en una recta numérica}

## Operaciones sobre los números reales

Para *sumar números reales con el mismo signo*, sume sus valores absolutos. El resultado tiene el mismo signo que los números que se suman.

Para *sumar números reales con signo diferente*, reste el valor absoluto más pequeño del valor absoluto más grande. La respuesta tiene el signo del número con mayor valor absoluto.

(continúa en la página siguiente)

Para restar  $b$  de  $a$ , sume el opuesto de  $b$  a  $a$ .

$$a - b = a + (-b)$$

Los *productos* y *cocientes* de números con signos iguales serán *positivos*. Los *productos* y *cocientes* de números con signos *diferentes* serán *negativos*.

### División que involucra a 0

Si  $a$  representa cualquier número real excepto 0, entonces

$$\frac{0}{a} = 0$$

$\frac{a}{0}$  es indefinido

### Exponentes

$$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ factores de } b}$$

### Jerarquía de operaciones

1. Evaluar expresiones dentro de paréntesis.
2. Evaluar todas las expresiones con exponentes.
3. Llevar a cabo multiplicaciones o divisiones, de izquierda a derecha.
4. Ejecutar adiciones o sustracciones, de izquierda a derecha.

### Propiedades del sistema de números reales

#### Propiedad

#### Suma

#### Multiplicación

Conmutativa

$$a + b = b + a$$

$$ab = ba$$

Asociativa

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(ab)c = a(bc)$$

Identidad

$$a + 0 = a \quad \text{y} \quad 0 + a = a$$

$$a \cdot 1 = a \quad \text{y} \quad 1 \cdot a = a$$

Inversa

$$a + (-a) = 0 \quad \text{y} \quad -a + a = 0$$

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{a} \cdot a = 1, a \neq 0$$

Distributiva

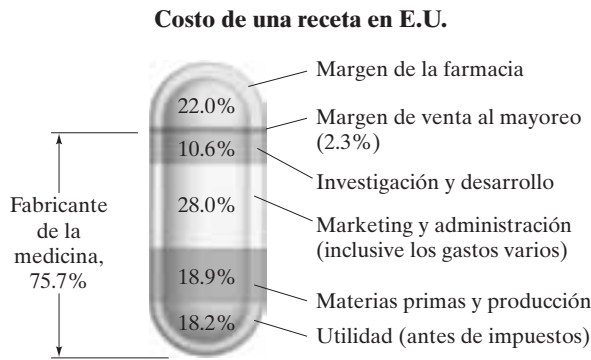
$$a(b + c) = ab + ac$$

## Ejercicios de repaso del capítulo

[1.2] Resuelva lo siguiente.

1. **Feria estatal** Paul Vaupel vende hot dogs y salchichas en las ferias estatales. En el primer día de una feria de 4 días de duración, vendió 162 hot dogs. El segundo día vendió 187 hot dogs. El tercer día vendió 196 hot dogs, y el cuarto día vendió 95 hot dogs. Si compró 60 docenas de hot dogs para la feria, ¿cuántos le sobraron?
2. **Inflación** Suponga que la tasa de inflación es de 5% durante los dos años siguientes. ¿Cuál será el costo de los bienes dentro de dos años, ajustados por la inflación, si hoy cuesta \$500.00 cada uno?
3. **Incremento del costo** El costo de un automóvil se incrementa 20% y después disminuye 20%. ¿El precio resultante del vehículo es mayor, menor o igual que el precio original? Explique.
4. **Máquina de fax** Krystall Streeter quiere comprar una máquina de fax que se vende en \$300. Podría pagar la cantidad total en el momento de la adquisición, o hacer un acuerdo con la tienda para pagar \$30 de enganche y \$25 por mes durante 12 meses. ¿Cuánto dinero ahorraría si paga el total en el momento de la compra?

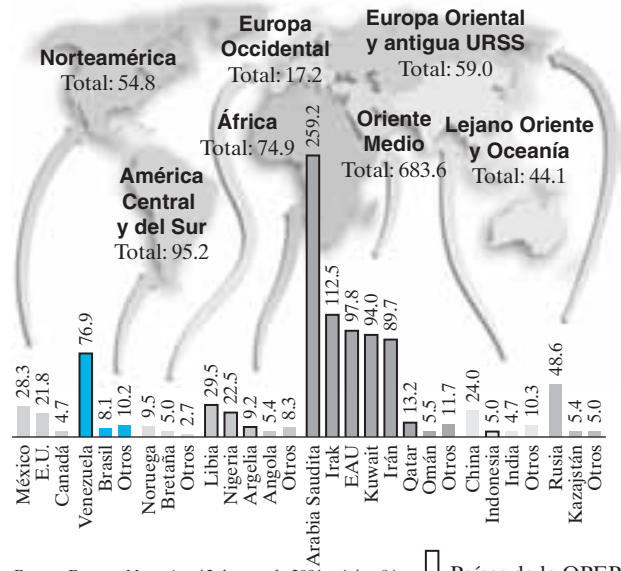
5. **Calificaciones de exámenes** En los primeros cinco exámenes de Kristen Reid, sus calificaciones fueron 75, 79, 86, 88 y 64. Para éstas calcule **a)** la media, y **b)** la mediana.
6. **Temperaturas** En Honolulu, Hawai, el 1 de julio de cada uno de los últimos cinco años las temperaturas máximas en grados Fahrenheit han sido de 76, 79, 84, 82 y 79. Para estas, encuentre **a)** la media, y **b)** la mediana.
7. **Recetas** En noviembre de 2001, el costo promedio de las recetas en E.U. fue de \$45.79. El siguiente dibujo muestra a dónde se va el dinero.
  - a) ¿Cuánto dinero de la receta promedio es la utilidad del fabricante?
  - b) Si un farmacéutico paga \$60 por una medicina, y se aplican los porcentajes del dibujo, determine el costo al que el farmacéutico vende la medicina.



Fuente: National Association of Chain Drug Stores, University of Wisconsin Sonderegger Research Center

8. **Reserva de gasolina** La gráfica de barras que sigue muestra las reservas probadas de petróleo, en miles de millones de barriles, en noviembre de 2001.
  - a) ¿Cuál es la diferencia, en miles de millones de barriles, entre las reservas de Estados Unidos y las de Canadá?
  - b) ¿Cuántas veces son mayores las reservas del Oriente Medio que las de Norteamérica?
  - c) ¿Cuál es el total mundial de reservas de petróleo?

**Reservas probadas de petróleo convencional**  
(miles de millones de barriles)



Fuente: Fortune Magazine, 12 de nov. de 2001, página 84   Países de la OPEP

[1.3] Realice cada una de las operaciones que se indica. Simplifique las respuestas.

9.  $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6}$

10.  $\frac{2}{5} \div \frac{10}{9}$

11.  $\frac{5}{12} \div \frac{3}{5}$

12.  $\frac{5}{6} + \frac{1}{3}$

13.  $\frac{3}{8} - \frac{1}{9}$

14.  $2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{5}$

- [1.4] 15. Enliste el conjunto de números naturales.  
 16. Enliste el conjunto de enteros no negativos  
 17. Enliste el conjunto de los enteros.  
 18. Describa el conjunto de los números racionales.  
 19. Considere el conjunto siguiente de números.

$$\left\{ 3, -5, -12, 0, \frac{1}{2}, -0.62, \sqrt{7}, 426, -3\frac{1}{4} \right\}$$

Enliste los números que sean

- a) enteros positivos.
- b) enteros no negativos.
- c) enteros.
- d) racionales.
- e) irracionales.
- f) reales.

20. Considere el conjunto siguiente de números.

$$\left\{ -2.3, -8, -9, 1\frac{1}{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1, -\frac{3}{17} \right\}$$

Enliste los números que sean

- a) naturales.
- b) enteros no negativos.
- c) enteros negativos.
- d) enteros.
- e) racionales
- f) reales.



[1.5] Inserte cualquiera de los símbolos  $<$ ,  $>$  o  $=$ , en cada área sombreada, de modo que el enunciado sea verdadero.

- |                               |                              |                               |  |
|-------------------------------|------------------------------|-------------------------------|--|
| 21. $-7 \blacksquare -5$      | 22. $-2.6 \blacksquare -3.6$ | 23. $0.50 \blacksquare 0.509$ | 24. $4.6 \blacksquare 4.06$                          |
| 25. $-3.2 \blacksquare -3.02$ | 26. $5 \blacksquare  -3 $    | 27. $-9 \blacksquare  -7 $    | 28. $ -2.5  \blacksquare \left  \frac{5}{2} \right $ |

[1.6–1.7] Evalúe lo siguiente.

- |                                   |                                   |                                  |   |
|-----------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|---|
| 29. $-9 + (-5)$                   | 30. $-6 + 6$                      | 31. $0 + (-3)$                   | 32. $-10 + 4$                                   |
| 33. $-8 - (-2)$                   | 34. $-2 - (-4)$                   | 35. $4 - (-4)$                   | 36. $12 - 12$                                   |
| 37. $7 - (-7)$                    | 38. $2 - 7$                       | 39. $0 - (-4)$                   | 40. $-7 - 5$                                    |
| 41. $\frac{4}{3} - \frac{3}{4}$   | 42. $\frac{1}{2} + \frac{3}{5}$   | 43. $\frac{5}{9} - \frac{3}{4}$  | 44. $-\frac{5}{7} + \frac{3}{8}$                |
| 45. $-\frac{5}{12} - \frac{5}{6}$ | 46. $-\frac{6}{7} + \frac{5}{12}$ | 47. $\frac{2}{9} - \frac{3}{10}$ | 48. $\frac{7}{15} - \left(-\frac{7}{60}\right)$ |

Evalúe lo que sigue.

- |                       |                    |                  |                     |
|-----------------------|--------------------|------------------|---------------------|
| 49. $9 - 4 + 3$       | 50. $-5 + 7 - 6$   | 51. $-5 - 4 - 3$ | 52. $-2 + (-3) - 2$ |
| 53. $7 - (+4) - (-3)$ | 54. $6 - (-2) + 3$ |                  |                     |

[1.8] Evalúe lo siguiente.

- |   |  |                                 |   |
|---|--|---------------------------------|---|
| 55. $-3(9)$   | 56. $(-8)(-5)$   | 57. $(-4)(-5)(-6)$              | 58. $\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{-2}{7}\right)$ |
| 59. $\left(\frac{10}{11}\right)\left(\frac{3}{-5}\right)$ | 60. $\left(\frac{-5}{8}\right)\left(\frac{-3}{7}\right)$ | 61. $0\left(\frac{4}{9}\right)$ | 62. $(-4)(-6)(-2)(-3)$                                  |

Evalúe las operaciones.

- |                    |   |  |   |
|--------------------|---|--|---|
| 63. $15 \div (-3)$ | 64. $12 \div (-2)$                      | 65. $-20 \div 5$                                   | 66. $0 \div 4$                                    |
| 67. $90 \div (-9)$ | 68. $-4 \div \left(\frac{-4}{9}\right)$ | 69. $\frac{28}{-3} \div \left(\frac{9}{-2}\right)$ | 70. $\frac{14}{3} \div \left(\frac{-6}{5}\right)$ |

Indique si cada cociente es igual a 0 o indefinido.

- |                 |                   |                    |
|-----------------|-------------------|--------------------|
| 71. $0 \div 5$  | 72. $0 \div (-6)$ | 73. $8 \div 0$     |
| 74. $-4 \div 0$ | 75. $\frac{8}{0}$ | 76. $\frac{0}{-5}$ |

[1.6–1.8, 1.9] Evalúe lo siguiente.

- |                                      |                        |                              |
|--------------------------------------|------------------------|------------------------------|
| 77. $-5(3 - 8)$                      | 78. $2(4 - 8)$         | 79. $(3 - 6) + 4$            |
| 80. $(-4 + 3) - (2 - 6)$             | 81. $[6 + 3(-2)] - 6$  | 82. $(-4 - 2)(-3)$           |
| 83. $[12 + (-4)] + (6 - 8)$          | 84. $9[3 + (-4)] + 5$  | 85. $-4(-3) + [4 \div (-2)]$ |
| 86. $(-3 \cdot 4) \div (-2 \cdot 6)$ | 87. $(-3)(-4) + 6 - 3$ | 88. $[-2(3) + 6] - 4$        |

[1.9] Evalúe.

- |                        |   |   |                                  |
|------------------------|---|---|----------------------------------|
| 89. $7^2$              | 90. $9^3$                               | 91. $3^4$                                   | 92. $(-3)^3$                     |
| 93. $(-1)^9$           | 94. $(-2)^5$                            | 95. $\left(\frac{-4}{5}\right)^2$           | 96. $\left(\frac{2}{5}\right)^3$ |
| 97. $5^3 \cdot (-2)^2$ | 98. $(-2)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2$ | 99. $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 3^3$ | 100. $(-4)^3(-2)^3$              |

Calcule lo que sigue.

101.  $3 + 5 \cdot 4$

104.  $10 - 36 \div 4 \cdot 3$

107.  $\frac{4 + 5^2 \div 5}{6 - (-3 + 2)}$

110.  $(-3^2 + 4^2) + (3^2 \div 3)$

113.  $(8 - 2^2)^2 - 4 \cdot 3 + 10$

116.  $2\{4^3 - 6[4 - (2 - 4)] - 3\}$

102.  $4 \cdot 6 + 4 \cdot 2$

105.  $6 - 3^2 \cdot 5$

108.  $\frac{6^2 - 4 \cdot 3^2}{-[6 - (3 - 4)]}$

111.  $2^3 \div 4 + 6 \cdot 3$

114.  $4^3 \div 4^2 - 5(2 - 7) \div 5$

103.  $(3 - 7)^2 + 6$

106.  $[6 - (3 \cdot 5)] + 5$

109.  $3[9 - (4^2 + 3)] \cdot 2$

112.  $(4 \div 2)^4 + 4^2 \div 2^2$

115.  $- \{-4[27 \div 3^2 - 2(4 - 2)]\}$

Evalúe cada expresión para los valores que se dan.

117.  $6x - 6$ ;  $x = 5$

119.  $2x^2 - 5x + 3$ ;  $x = 6$

121.  $-x^2 + 2x - 3$ ;  $x = 2$


123.  $-3x^2 - 5x + 5$ ;  $x = 1$

118.  $6 - 4x$ ;  $x = -5$

120.  $5y^2 + 3y - 2$ ;  $y = -1$

122.  $-x^2 + 2x - 3$ ;  $x = -2$

124.  $-x^2 - 8x - 12y$ ;  $x = -3$ ,  $y = -2$

 [1.6-1.9] a) Use una calculadora para evaluar cada expresión, y b) revise para ver si su respuesta es razonable.

125.  $278 + (-493)$

126.  $324 - (-29.6)$

127.  $\frac{-17.28}{6}$

128.  $(-62)(-1.9)$

129.  $(-3)^6$

130.  $-(4.2)^3$

[1.10] Diga el nombre de cada propiedad que se indica.

131.  $(7 + 4) + 9 = 7 + (4 + 9)$

133.  $4(x + 3) = 4x + 12$

135.  $6x + 3x = 3x + 6x$

137.  $r + 0 = r$

132.  $6 \cdot x = x \cdot 6$

134.  $(x + 4)3 = 3(x + 4)$

136.  $(x + 7) + 4 = x + (7 + 4)$

138.  $\frac{1}{n} \cdot n = 1$

## EXAMEN DE PRÁCTICA DEL CAPÍTULO

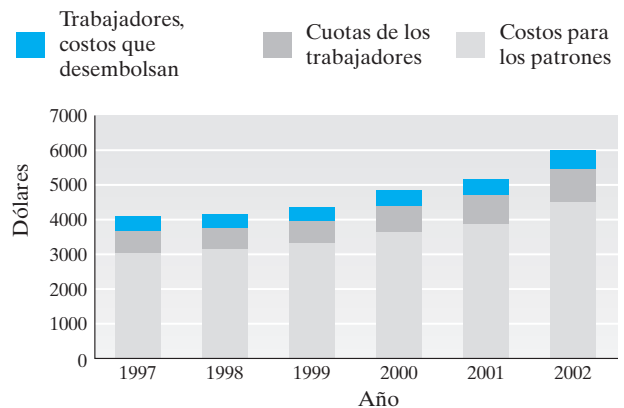
1. **Tiendas** Al ir de compras, Faith Healy adquiere dos medios galones de leche a \$1.30 cada uno, un pastel de crema de Boston a \$4.75, y tres botellas de 2 litros de refresco por \$1.10 cada una.

- ¿Cuál es el importe total de su cuenta antes de impuestos?
- Si hubiera un impuesto sobre las ventas de 7% para las botellas de refresco, ¿de cuánto sería el impuesto?
- ¿A cuánto asciende su cuenta, impuestos inclusive?
- ¿Cuánto cambio recibirá si paga con un billete de \$50?

2. **Cuidado de la salud** La gráfica del lado derecho muestra cómo se han incrementado los costos del cuidado de la salud, de 1997 a 2002.

- Estime el costo promedio, por empleado, para los patrones, en 2002.
- Estime la diferencia en el costo promedio, por trabajador, para los patrones, de 1997 a 2002.

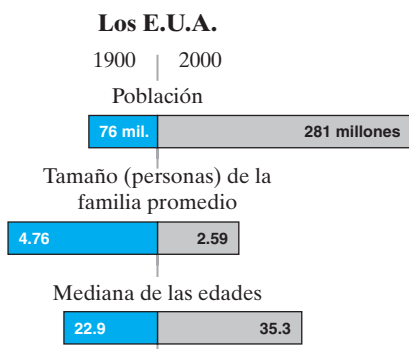
Costos crecientes del cuidado de la salud



Fuente: Hewitt Associates

3. **Información demográfica** La gráfica que sigue ilustra la información acerca de la población de E.U. en 1900 y en 2000, de acuerdo con la U.S. Census Bureau.

- a) Determine en forma aproximada cuántos hogares había en los Estados Unidos en 2000. Explique cómo determinó la respuesta.
- b) La mediana de las edades en 2000 fue de 35.3 años. Explique lo que esto significa.



4. Considere el conjunto siguiente de números.

$$\left\{ -6, 42, -3\frac{1}{2}, 0, 6.52, \sqrt{5}, \frac{5}{9}, -7, -1 \right\}$$

Enliste los números que sean

- a) naturales.  
 b) enteros no negativos.  
 c) enteros.  
 d) racionales.  
 e) irracionales.  
 f) reales.

Inserte cualquiera de los símbolos  $<$ ,  $>$  o  $=$ , en cada área sombreada, a fin de que el enunciado sea verdadero.

5.  $-9$     $-12$

6.  $|-3|$     $|-2|$

Evalúe lo siguiente.

7.  $-7 + (-8)$

8.  $-6 - 5$

9.  $15 - 12 - 17$

10.  $(-4 + 6) - 3(-2)$

11.  $(-4)(-3)(2)(-1)$

12.  $\left(\frac{-2}{9}\right) \div \left(\frac{-7}{8}\right)$

13.  $\left(-18 \cdot \frac{1}{2}\right) \div 3$

14.  $-\frac{3}{8} - \frac{4}{7}$

15.  $-6(-2 - 3) \div 5 \cdot 2$

16.  $\left(\frac{3}{5}\right)^3$

17. Escriba  $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5yzzz$  en forma exponencial.

18. Escriba  $2^2 3^3 x^4 y^2$  como el producto de factores.

Evalúe la expresión para los valores dados.

19.  $5x^2 - 8$ ;  $x = -4$

21.  $-x^2 - 6x + 3$ ;  $x = -2$

20.  $6x - 3y^2 + 4$ ;  $x = 3, y = -2$

22.  $-x^2 + xy + y^2$ ;  $x = 1, y = -2$

Diga de cuál propiedad se trata en cada caso.

23.  $x + 3 = 3 + x$

25.  $(2 + x) + 4 = 2 + (x + 4)$

24.  $4(x + 9) = 4x + 36$

## Capítulo 2

# Solución de ecuaciones y desigualdades lineales



- 2.1** Reducción de términos semejantes
- 2.2** La propiedad de igualdad de la suma
- 2.3** La propiedad de igualdad de la multiplicación
- 2.4** Solución de ecuaciones lineales con una variable en un solo lado de la ecuación
- 2.5** Solución de ecuaciones lineales con la variable en ambos lados de la ecuación
- 2.6** Razones y proporciones
- 2.7** Desigualdades en una variable

Resumen del capítulo  
Ejercicios de repaso del capítulo  
Examen de práctica del capítulo  
Examen de repaso acumulativo

**A**l tratar de predecir si un atleta impondrá un récord nuevo, es frecuente que los periodistas y entrenadores comparen su ritmo y desempeño actual con el ritmo que mantuvo el poseedor del récord en épocas diferentes durante la estación en que lo rompió. En la página 156 empleamos proporciones para determinar cuántos jonrones necesitaría anotar un jugador durante los primeros 50 juegos de una temporada de béisbol, para estar en posibilidad de romper el récord de 73 jonrones que estableció Barry Bond en la temporada de 2001 de béisbol.



## Avance de la lección

Al describir el álgebra, muchos estudiantes utilizan las palabras resolver ecuaciones. Sin duda, esto es una parte importante del álgebra. El mayor énfasis de este capítulo está en enseñarle a solucionar ecuaciones lineales. A lo largo del libro emplearemos los principios aprendidos en este capítulo.

*Para tener éxito al resolver ecuaciones lineales debemos comprender completamente la suma, resta, multiplicación y división de números reales*, material que analizamos en el capítulo 1. El material de las cuatro primeras secciones de este capítulo es el fundamento para resolver ecuaciones lineales. En la sección 2.5 combinamos el material presentado en forma previa para resolver una variedad de ecuaciones lineales.

En la sección 2.6 analizamos las razones y proporciones, cómo plantearlas y resolverlas. Las proporciones pueden ser las ecuaciones que más empleen algunos estudiantes para resolver problemas de aplicación en la vida real. En la sección 2.7 analizaremos la solución de desigualdades lineales, que es una extensión de la solución de las ecuaciones lineales.

## 2.1 REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES



- 1 Identificar términos.
- 2 Identificar términos semejantes.
- 3 Reducir términos semejantes.
- 4 Utilizar la propiedad distributiva.
- 5 Eliminar los paréntesis cuando están precedidos de un signo más o menos.
- 6 Simplificar expresiones.

### 1 Identificar términos

En la sección 1.3 y otras, indicamos que las letras llamadas **variables** se emplean para representar números. Una variable puede representar diversos números.

Como señalamos en el capítulo 1, una **expresión** (o **expresión algebraica**) es un conjunto de números, variables, símbolos de agrupación y símbolos de operación.

#### Ejemplos de expresiones

$$5, \quad x^2 - 6, \quad 4x - 3, \quad 2(x + 5) + 6, \quad \frac{x + 3}{4}$$

Cuando una expresión algebraica consta de varias partes, a las partes que se *suman* se les denomina **términos**. La expresión  $2x - 3y - 5$  puede escribirse como  $2x + (-3y) + (-5)$ , por lo que podemos decir que la expresión  $2x - 3y - 5$  tiene tres términos:  $2x$ ,  $-3y$ , y  $-5$ . La expresión  $3x^2 + 2xy + 5(x + y)$  también tiene tres términos:  $3x^2$ ,  $2xy$ , y  $5(x + y)$ .

Al enumerar los términos de una expresión no es necesario indicar el signo + al comienzo.

#### Expresión

$$-2x + 3y - 8$$

$$3y^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

#### Términos

$$-2x, 3y, -8$$

$$3y^2, -2x, \frac{1}{2}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 1

$$\begin{array}{ll}
 7 + x + 4 - 5x & 7, x, 4, -5x \\
 3(x - 1) - 4x + 2 & 3(x - 1), -4x, 2 \\
 \frac{x + 4}{3} - 5x + 3 & \frac{x + 4}{3}, -5x, 3
 \end{array}$$

La parte numérica de un término se denomina **coeficiente numérico**, o simplemente **coeficiente**. En el término  $6x$ , el 6 es el coeficiente numérico. Observe que  $6x$  significa que la variable  $x$  se multiplica por 6.

Término	Coeficiente numérico
$3x$	3
$-\frac{1}{2}x$	$-\frac{1}{2}$
$4(x - 3)$	4
$\frac{2x}{3}$	$\frac{2}{3}$ , ya que $\frac{2x}{3}$ significa $\frac{2}{3}x$
$\frac{x + 4}{3}$	$\frac{1}{3}$ , porque $\frac{x + 4}{3}$ significa $\frac{1}{3}(x + 4)$

**Siempre que un término aparezca sin coeficiente numérico, supondremos que es 1.**

### Ejemplos

$x$ significa $1x$	$-x$ significa $-1x$
$x^2$ significa $1x^2$	$-x^2$ significa $-1x^2$
$xy$ significa $1xy$	$-xy$ significa $-1xy$
$(x + 2)$ significa $1(x + 2)$	$-(x + 2)$ significa $-1(x + 2)$

Si una expresión tiene un término que es un número (sin variable), nos referimos a éste como **término constante**, o simplemente **constante**. En la expresión  $x^2 + 3x - 4$ , el  $-4$  es un término constante o una constante.

## 2 Identificar términos semejantes

Los **términos semejantes** son aquellos que tienen las mismas variables con los mismos exponentes. Los siguientes son ejemplos de términos semejantes y términos no semejantes. Observe que si dos términos son semejantes, sólo difieren en sus coeficientes numéricos.

Términos semejantes	Términos no semejantes	
$3x, -4x$	$3x, 2$	<i>(Un término tiene una variable, el otro es una constante.)</i>
$4y, 6y$	$3x, 4y$	<i>(Las variables difieren.)</i>
$5, -6$	$x, 3$	<i>(Un término tiene una variable, el otro es una constante.)</i>
$3(x + 1), -2(x + 1)$	$2x, 3xy$	<i>(Las variables difieren.)</i>
$3x^2, 4x^2$	$3x, 4x^2$	<i>(Los exponentes difieren.)</i>
$5ab, 2ab$	$4a, 2ab$	<i>(Las variables difieren.)</i>

**EJEMPLO 1** Identifique los términos semejantes

a)  $2x + 3x + 4$     b)  $2x + 3y + 2$     c)  $x + 3 + y - \frac{1}{2}$     d)  $x + 3x^2 - 4x^2$

**Solución** a)  $2x$  y  $3x$  son términos semejantes.

b) No hay términos semejantes.

c)  $3$  y  $-\frac{1}{2}$  son términos semejantes.

d)  $3x^2$  y  $-4x^2$  son términos semejantes. 

**EJEMPLO 2** Identifique los términos semejantes.

a)  $5x - x + 6$     b)  $3 - 2x + 4x - 6$     c)  $12 + x^2 - x + 7$

**Solución** a)  $5x$  y  $-x$  (o  $-1x$ ) son términos semejantes.

b)  $3$  y  $-6$  son términos semejantes;  $-2x$  y  $4x$  son términos semejantes.

c)  $12$  y  $7$  son términos semejantes. 

### 3 Reducir términos semejantes

Con frecuencia, necesitamos simplificar expresiones mediante la reducción de términos semejantes. **Reducir términos semejantes** significa sumar o restar aquellos que en una expresión sean términos semejantes. Para hacerlo, empleamos el siguiente procedimiento.

#### Reduzca términos semejantes


1. Determine cuáles términos son semejantes.
2. Sume o reste los coeficientes de los términos semejantes.
3. Multiplique el número que se haya encontrado en el paso 2 por la(s) variable(s) en común.

Los ejemplos 3 a 8 ilustran este procedimiento.


**EJEMPLO 3** Reducir los términos semejantes:  $5x + 4x$ .

**Solución**  $5x$  y  $4x$  son términos semejantes con  $x$  como la variable en común. Como  $5 + 4 = 9$ , entonces  $5x + 4x = 9x$ . 

**EJEMPLO 4** Reducir los términos semejantes:  $\frac{3}{5}x - \frac{2}{3}x$ .


**Solución** Como  $\frac{3}{5} - \frac{2}{3} = \frac{9}{15} - \frac{10}{15} = -\frac{1}{15}$ , entonces  $\frac{3}{5}x - \frac{2}{3}x = -\frac{1}{15}x$ . 

**EJEMPLO 5** Reducir los términos semejantes:  $5.23a - 7.45a$ .

**Solución** Como  $5.23 - 7.45 = -2.22$ , entonces  $5.23a - 7.45a = -2.22a$ . 

**EJEMPLO 6** Reducir los términos semejantes:  $3x + x + 5$ .

**Solución**  $3x$  y  $x$  son términos semejantes.

$$3x + x + 5 = 3x + 1x + 5 = 4x + 5$$


Debido a la propiedad conmutativa de la suma, el orden de los términos en la respuesta no tiene mucha importancia. Por ello,  $5 + 4x$  también es una respuesta aceptable para el ejemplo 6. Generalmente, al escribir las respuestas enlistamos los términos que contienen variables en orden alfabético de izquierda a derecha, y dejamos el término constante en el extremo derecho.

Al reacomodar los términos de los ejemplos 7 y 8, emplearemos las propiedades conmutativa y asociativa de la suma.

**EJEMPLO 7** Reduzca los términos semejantes:  $3b + 6a - 5 - 2a$ .

**Solución** Los únicos términos semejantes son  $6a$  y  $-2a$ .

$$\begin{aligned} 3b + 6a - 5 - 2a &= 6a - 2a + 3b - 5 && \text{Se ordenan los términos.} \\ &= 4a + 3b - 5 && \text{Se reducen los términos semejantes.} \quad \star \end{aligned}$$

**EJEMPLO 8** Reduzca los términos semejantes:  $-2x^2 + 3y - 4x^2 + 3 - y + 5$ .

**Solución**  $-2x^2$  y  $-4x^2$  son términos semejantes.

$3y$  y  $-y$  son semejantes.

$3$  y  $5$  también son semejantes.

Al agrupar los términos que son semejantes, queda

$$\begin{aligned} -2x^2 + 3y - 4x^2 + 3 - y + 5 &= -2x^2 - 4x^2 + 3y - y + 3 + 5 \\ &= -6x^2 + 2y + 8 \quad \star \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 29

#### 4 Utilizar la propiedad distributiva

En la sección 1.10 presentamos la propiedad distributiva. Debido a su importancia la estudiaremos nuevamente. Pero antes de hacerlo, regresemos un poco a la sustracción de números reales. De la sección 1.7, recordemos que

$$6 - 3 = 6 + (-3)$$

En general,

Para cualesquiera números reales,  $a$  y  $b$ ,

$$a - b = a + (-b)$$

Al analizar la propiedad distributiva haremos uso del hecho de que  $a + (-b)$  significa  $a - b$ .

#### Propiedad distributiva

Para cualesquiera números reales,  $a$ ,  $b$  y  $c$ ,

$$a(b + c) = ab + ac$$

**EJEMPLO 9** Utilice la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis.

**a)**  $2(x + 4)$       **b)**  $-2(w + 4)$

**Solución** **a)**  $2(x + 4) = 2x + 2(4) = 2x + 8$

**b)**  $-2(w + 4) = -2w + (-2)(4) = -2w + (-8) = -2w - 8$

Observe que en el inciso **b)**, en lugar de dejar la respuesta como  $-2w + (-8)$ , escribimos  $-2w - 8$ , que es la forma apropiada.  $\star$



**EJEMPLO 10** Emplee la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis.

**a)**  $3(x - 2)$       **b)**  $-2(4x - 3)$

**Solución** **a)** Por la definición de resta, escribimos  $x - 2$  como  $x + (-2)$ .

$$\begin{aligned} 3(x - 2) &= 3[x + (-2)] = 3x + 3(-2) \\ &= 3x + (-6) \\ &= 3x - 6 \end{aligned}$$

**b)**  $-2(4x - 3) = -2[4x + (-3)] = -2(4x) + (-2)(-3) = -8x + 6$  ✨

Con frecuencia utilizamos la propiedad distributiva en el álgebra, por lo que necesitamos comprenderla bien, al grado de poder emplearla para simplificar una expresión sin tener que escribir todos los pasos enumerados en los ejemplos 9 y 10. Lo invitamos a estudiar con detenimiento el siguiente recuadro de Sugerencia.

### SUGERENCIA

Con un poco de práctica, será capaz de eliminar algunos de los pasos intermedios al utilizar la propiedad distributiva. Al utilizar dicha propiedad, existen ocho combinaciones de signos. Estudie y aprenda las ocho posibilidades siguientes.

#### Coeficiente positivo

**a)**  $2(x) = 2x$   
 $2(\overbrace{x+3}) = 2x+6$   
 $2(+3) = +6$

**b)**  $2(x) = 2x$   
 $2(\overbrace{x-3}) = 2x-6$   
 $2(-3) = -6$

**c)**  $2(-x) = -2x$   
 $2(\overbrace{-x+3}) = -2x+6$   
 $2(+3) = +6$

**d)**  $2(-x) = -2x$   
 $2(\overbrace{-x-3}) = -2x-6$   
 $2(-3) = -6$

#### Coeficiente negativo

**e)**  $(-2)(x) = -2x$   
 $-2(\overbrace{x+3}) = -2x-6$   
 $(-2)(+3) = -6$

**f)**  $(-2)(x) = -2x$   
 $-2(\overbrace{x-3}) = -2x+6$   
 $(-2)(-3) = +6$

**g)**  $(-2)(-x) = 2x$   
 $-2(\overbrace{-x+3}) = 2x-6$   
 $(-2)(+3) = -6$

**h)**  $(-2)(-x) = 2x$   
 $-2(\overbrace{-x-3}) = 2x+6$   
 $(-2)(-3) = +6$

La propiedad distributiva se expande como sigue:

$$a(b + c + d + \dots + n) = ab + ac + ad + \dots + an$$

#### Ejemplos de la propiedad distributiva expandida

$$3(x + y + z) = 3x + 3y + 3z$$

$$2(x + y - 3) = 2x + 2y - 6$$

**EJEMPLO 11** Utilice la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis.

**a)**  $4(x - 3)$       **b)**  $-2(2x - 4)$       **c)**  $-\frac{1}{2}(4r + 5)$       **d)**  $-2(3x - 2y + 4z)$

**Solución** a)  $4(x - 3) = 4x - 12$       b)  $-2(2x - 4) = -4x + 8$   
 c)  $-\frac{1}{2}(4r + 5) = -2r - \frac{5}{2}$       d)  $-2(3x - 2y + 4z) = -6x + 4y - 8z$  ✨

La propiedad distributiva también se aplica por el lado derecho, como se ilustra en el ejemplo 12.

**EJEMPLO 12** Emplee la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis de la expresión  $(2x - 8y)4$ .

**Solución** Se distribuye el 4 del lado derecho del paréntesis, sobre los términos dentro de éste.

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 83

$$\begin{aligned}(2x - 8y)4 &= 2x(4) - 8y(4) \\ &= 8x - 32y\end{aligned}$$
 ✨

El ejemplo 12 hubiera podido reescribirse como  $4(2x - 8y)$ , de acuerdo con la propiedad conmutativa de la multiplicación, para después distribuir el 4 desde la izquierda y obtener la misma respuesta,  $8x - 32y$ .

## 5 Eliminar los paréntesis cuando están precedidos de un signo más o menos

¿Cómo eliminar los paréntesis en la expresión  $(4x + 3)$ ? Recordemos que cuando no se observa ningún coeficiente junto a la expresión, éste será igual a 1. Por tanto, se escribe

$$\begin{aligned}(4x + 3) &= 1(4x + 3) \\ &= 1(4x) + (1)(3) \\ &= 4x + 3\end{aligned}$$

Observe que  $(4x + 3) = 4x + 3$ . **Si a un paréntesis no lo precede ningún signo o lo hace un signo positivo, es posible eliminarlo sin tener que cambiar la expresión dentro de él.**

### Ejemplos

$$\begin{aligned}(x + 3) &= x + 3 \\ (2x - 3) &= 2x - 3 \\ +(2x - 5) &= 2x - 5 \\ +(x + 2y - 6) &= x + 2y - 6\end{aligned}$$

Ahora, considere la expresión  $-(4x + 3)$ . ¿Cómo eliminamos los paréntesis de esta expresión? En este caso, el coeficiente frente al paréntesis es  $-1$ , por lo que multiplicamos cada término de la expresión.

$$\begin{aligned}-(4x + 3) &= -1(4x + 3) \\ &= -1(4x) + (-1)(3) \\ &= -4x + (-3) \\ &= -4x - 3\end{aligned}$$

Así,  $-(4x + 3) = -4x - 3$ . **Si un signo negativo precede al paréntesis, cuando se elimina éste cambian los signos de todos los términos de adentro.**

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 77

### Ejemplos

$$\begin{aligned} -(x + 4) &= -x - 4 \\ -(-2x + 3) &= 2x - 3 \\ -(5x - y + 3) &= -5x + y - 3 \\ -(-4c - 3d - 5) &= 4c + 3d + 5 \end{aligned}$$

## 6 Simplificar expresiones

Al combinar lo que se aprendió en los análisis anteriores, obtenemos el siguiente procedimiento para **simplificar una expresión**.


### Para simplificar una expresión

1. Utilice la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis.
2. Reduzca términos semejantes.

**EJEMPLO 13** Simplifique  $6 - (2x + 3)$ .


**Solución**

$$\begin{aligned} 6 - (2x + 3) &= 6 - 2x - 3 && \text{Emplee la propiedad distributiva.} \\ &= -2x + 3 && \text{Reduzca términos semejantes.} \end{aligned}$$

*Nota:*  $3 - 2x$  es lo mismo que  $-2x + 3$ ; sin embargo, generalmente escribimos primero el término que contiene la variable. 

**EJEMPLO 14** Simplifique  $-\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\right) + 3x$


**Solución**

$$\begin{aligned} -\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\right) + 3x &= -\frac{2}{3}x + \frac{1}{4} + 3x && \text{Propiedad distributiva.} \\ &= -\frac{2}{3}x + 3x + \frac{1}{4} && \text{Ordenar términos.} \\ &= -\frac{2}{3}x + \frac{9}{3}x + \frac{1}{4} && \text{Escribir los términos de } x \text{ con el MCD, que es } 3. \\ &= \frac{7}{3}x + \frac{1}{4} && \text{Reducir términos semejantes.} \end{aligned}$$


En el ejemplo 14, observe que  $\frac{7}{3}x$  y  $\frac{1}{4}$  no pueden combinarse debido a que no son términos semejantes.

**EJEMPLO 15** Simplificar la expresión  $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}(3x - 5)$

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}(3x - 5) &= \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}(3x) + \frac{1}{2}(-5) && \text{Propiedad distributiva.} \\ &= \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \\ &= \frac{3}{4}x + \frac{6}{4}x - \frac{5}{2} && \text{Escribir los términos de } x \text{ con el MCD, que es } 4. \\ &= \frac{9}{4}x - \frac{5}{2} && \text{Reducir los términos semejantes.} \end{aligned}$$


**EJEMPLO 16** Simplifique  $3(2a - 5) - 3(b - 6) - 4a$

**Solución**  $3(2a - 5) - 3(b - 6) - 4a = 6a - 15 - 3b + 18 - 4a$  *Propiedad distributiva.*  
 $= 6a - 4a - 3b - 15 + 18$  *Ordenar términos.*  
 $= 2a - 3b + 3$  *Reducir términos semejantes.*

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 103



### SUGERENCIA

Es importante que distinga los conceptos *término* y *factor*. Al **multiplicar** dos o más expresiones, cada expresión es un **factor** del producto; por ejemplo, como  $4 \cdot 3 = 12$ , el 4 y el 3 son factores de 12. Como  $3 \cdot x = 3x$ , el 3 y la  $x$  son factores de  $3x$ . De manera similar, en la expresión  $5xyz$ , los factores son 5,  $x$ , y  $z$ .

En una expresión, las partes que se **suman** son los **términos** de la expresión. Por ejemplo, la expresión  $2x^2 + 3x - 4$ , tiene tres términos,  $2x^2$ ,  $3x$  y  $-4$ . Observe que los términos de una expresión pueden tener factores; por ejemplo, en el término  $2x^2$ , el 2 y la  $x^2$  son factores porque están multiplicados.

## Conjunto de ejercicios 2.1

### Ejercicios conceptuales

1. a) ¿Qué son los términos de una expresión?  
 b) ¿Cuáles son los términos de  $3x - 4y - 5$ ?  
 c) ¿Cuáles son los términos de  $6xy + 3x - y - 9$ ?
2. a) ¿Qué son términos semejantes? Determine si los siguientes son términos semejantes; y si no, explique por qué.  
 b)  $3x, 4y$   
 c)  $7, -2$   
 d)  $5x^2, 2x$   
 e)  $4x, -5xy$
3. a) ¿Cuáles son los factores de una expresión?  
 b) Explique por qué 3 y  $x$  son factores de  $3x$ .  
 c) Explique por qué 5,  $x$  y  $y$  son factores de la expresión  $5xy$ .
4. Considere la expresión  $2x - 5$ .  
 a) ¿Cómo se llama a la  $x$ ?  
 b) ¿Cómo se denomina a  $-5$ ?  
 c) ¿Cómo se le llama a 2?
5. a) ¿Cuál es el nombre que se da a la parte numérica de un término? Enumere los coeficientes de los siguientes términos.  
 b)  $4x$   
 c)  $x$   
 d)  $-x$   
 e)  $\frac{3x}{5}$   
 f)  $\frac{4}{7}(3t - 5)$
6. ¿Qué significa simplificar una expresión?
7. a) Explique la forma en que se elimina un paréntesis que contiene una expresión, y al cual precede un signo menos.  
 b) Escriba  $-(x - 8)$  sin paréntesis.
8. a) Diga cómo se elimina un paréntesis que contiene una expresión, cuando no lo precede ningún signo, o es un signo más el que lo precede.  
 b) Escriba  $+(x - 8)$  sin paréntesis.

### Práctica de habilidades

Reduzca los términos semejantes cuando sea posible. Si no lo es, reescriba la expresión como está.

- |                       |                        |                       |
|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| 9. $5x + 3x$          | 10. $3x + 6$           | 11. $4x - 5x$         |
| 12. $4x + 3y$         | 13. $y + 3 + 4y$       | 14. $-2x - 3x$        |
| 15. $-2x + 5x$        | 16. $4x - 7x + 4$      | 17. $2 - 6x + 5$      |
| 18. $-7 - 4m - 6$     | 19. $-2w - 3w + 5$     | 20. $5x + 2y + 3 + y$ |
| 21. $-x + 2 - x - 2$  | 22. $8x - 2y - 1 - 3x$ | 23. $3 + 6x - 3 - 6x$ |
| 24. $y - 2y + 5$      | 25. $5 + 2x - 4x + 6$  | 26. $5s - 3s - 2s$    |
| 27. $4r - 6 - 6r - 2$ | 28. $-6t + 5 + 2t - 9$ | 29. $2 - 3x - 2x + y$ |
| 30. $7x - 3 - 2x$     | 31. $-2x + 4x - 3$     | 32. $4 - x + 4x - 8$  |

- |                               |   |  |
|-------------------------------|---|--|
| 33. $b + 4 + \frac{3}{5}$     | 34. $\frac{3}{4}x + 2 + x$                | 35. $5.1n + 6.42 - 4.3n$                             |
| 36. $13.4x + 1.2x + 8.3$      | 37. $\frac{1}{2}a + 3b + 1$               | 38. $x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{8}y$                |
| 39. $2x^2 + 3y^2 + 4x + 5y^2$ | 40. $-4x^2 - 3.1 - 5.2$                   | 41. $-x^2 + 2x^2 + y$                                |
| 42. $1 + x^2 + 6 - 3x^2$      | 43. $2x - 7y - 5x + 2y$                   | 44. $3x - 7 - 9 + 4x$                                |
| 45. $4 - 3n^2 + 9 - 2n$       | 46. $9x + y - 2 - 4x$                     | 47. $-19.36 + 40.02x + 12.25 - 18.3x$                |
| 48. $52x - 52x - 63.5 - 63.5$ | 49. $\frac{3}{5}x - 3 - \frac{7}{4}x - 2$ | 50. $\frac{1}{2}y - 4 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{5}y$ |
| 51. $5w^3 + 2w^2 + w + 3$     | 52. $4p^2 - 3p^2 + 2p - 5p$               | 53. $2z - 5z^3 - 2z^3 - z^2$                         |
| 54. $5ab - 3ab$               | 55. $6x^2 - 6xy + 3y^2$                   | 56. $x^2 - 3xy - 2xy + 6$                            |
| 57. $4a^2 - 3ab + 6ab + b^2$  | 58. $4b^2 - 8bc + 5bc + c^2$              |  |

Utilice la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis.

- |   |  |                              |
|---|--|------------------------------|
| 59. $5(x + 2)$                            | 60. $3(x - 6)$                             | 61. $5(x + 4)$               |
| 62. $-2(y + 8)$                           | 63. $-2(x - 4)$                            | 64. $2(-y + 5)$              |
| 65. $-\frac{1}{2}(2x - 4)$                | 66. $-4(x + 6)$                            | 67. $1(-4 + x)$              |
| 68. $4(m - 6)$                            | 69. $\frac{4}{5}(s - 5)$                   | 70. $5(x - y + 5)$           |
| 71. $-0.3(3x + 5)$                        | 72. $-(x - 3)$                             | 73. $\frac{1}{3}(3r - 12)$   |
| 74. $-2(x + y - z)$                       | 75. $0.7(2x + 0.5)$                        | 76. $-(x + 4y)$              |
| 77. $-(-x + y)$                           | 78. $(3x + 4y - 6)$                        | 79. $-(2x + 4y - 8)$         |
| 80. $-3(2a + 3b - 7)$                     | 81. $1.1(3.1x - 5.2y + 2.8)$               | 82. $-4(-2m - 3n + 8)$       |
| 83. $2\left(3x - 2y + \frac{1}{4}\right)$ | 84. $2\left(-\frac{1}{2}x + 4y + 3\right)$ | 85. $(x + 3y - 9)$           |
| 86. $(-p + 2q - 3)$                       | 87. $-3(-x + 2y + 4)$                      | 88. $2.3(1.6x + 5.1y - 4.1)$ |

Simplifique las siguientes expresiones.

- |  |                                 |   |
|--|---------------------------------|---|
| 89. $3(x - 5) - x$                             | 90. $2 + (x - 3)$               | 91. $-2(3 - x) + 7$                             |
| 92. $-(3x - 3) + 5$                            | 93. $6x + 2(4x + 9)$            | 94. $3(x + y) + 2y$                             |
| 95. $2(x - y) + 2x + 3$                        | 96. $6 + (x - 5) + 3x$          | 97. $4(2c - 3) - 3(c - 4)$                      |
| 98. $4 + (2y + 2) + y$                         | 99. $8x - (x - 3)$              | 100. $-(x - 5) - 3x + 4$                        |
| 101. $2(x - 3) - (x + 3)$                      | 102. $3y - (2x + 2y) - 6x$      | 103. $4(x - 1) + 2(3 - x) - 4$                  |
| 104. $4(x + 3) - 2x$                           | 105. $-(3s + 4) - (s + 2)$      | 106. $6 - 2(x + 3) + 5x$                        |
| 107. $-3(x + 1) + 5x + 6$                      | 108. $-(x + 2) + 3x - 6$        | 109. $4(m + 3) - 4m - 12$                       |
| 110. $-3(a + 2b) + 3(a + 2b)$                  | 111. $0.4 + (y + 5) + 0.6 - 2$  | 112. $4 - (2 - x) + 3x$                         |
| 113. $4 + (3x - 4) - 5$                        | 114. $2y - 6(y - 2) + 3$        | 115. $4(x + 2) - 3(x - 4) - 5$                  |
| 116. $6 - (a - 5) - (2b + 1)$                  | 117. $-0.2(6 - x) - 4(y + 0.4)$ | 118. $-5(2y - 8) - 3(1 + x) - 7$                |
| 119. $-6x + 7y - (3 + x) + (x + 3)$            | 120. $3(t - 2) - 2(t + 4) - 6$  | 121. $\frac{1}{2}(x + 3) + \frac{1}{3}(3x + 6)$ |
| 122. $\frac{2}{3}(r - 2) - \frac{1}{2}(r + 4)$ |                                 |   |

## Solución de problemas

Si  $\square + \square + \square + \ominus + \ominus$  se representa como  $3\square + 2\ominus$ , escriba una expresión para representar cada una de las siguientes.

123.  $\square + \ominus + \ominus + \square + \ominus$

124.  $\otimes + \text{☺} + \otimes + \text{☺} + \text{☺} + \text{☺}$

125.  $x + y + \triangle + \triangle + x + y + y$

126.  $2 + x + 2 + \ominus + \ominus + 2 + y$

En los ejercicios 127 y 128, considere lo siguiente. Los factores positivos de 6 son 1, 2, 3 y 6, ya que

$$1 \cdot 6 = 6$$

$$2 \cdot 3 = 6$$

↑ ↑

factores

127. Enliste todos los factores positivos de 12.

128. Diga todos los factores positivos de 16.

Reduzca los términos semejantes.

129.  $3\triangle + 5\square - \triangle - 3\square$

130.  $8\text{☺} - 4\square - 2\square - 3\text{☺}$

## Problemas de reto

Simplifique.

131.  $4x^2 + 5y^2 + 6(3x^2 - 5y^2) - 4x + 3$

133.  $x^2 + 2y - y^2 + 3x + 5x^2 + 6y^2 + 5y$

132.  $2x^2 - 4x + 8x^2 - 3(x + 2) - x^2 - 2$

134.  $2[3 + 4(x - 5)] - [2 - (x - 3)]$

## Ejercicios de repaso acumulativo

[1.5] Evalúe lo siguiente.

135.  $|-7|$

136.  $-|-16|$

[1.7] 137. Evalúe  $-4 - 3 - (-6)$

[1.9] 138. Escriba un párrafo donde explique la jerarquía de operaciones.

139. Evalúe  $-x^2 + 5x - 6$  cuando  $x = -1$ .

## 2.2 LA PROPIEDAD DE IGUALDAD DE LA SUMA



- 1 Identificar ecuaciones lineales.
- 2 Comprobar las soluciones de las ecuaciones.
- 3 Identificar ecuaciones equivalentes.
- 4 Utilizar la propiedad de la suma para resolver ecuaciones.
- 5 Resolver ecuaciones siguiendo algunos pasos mentalmente.

### 1 Identificar ecuaciones lineales

Una proposición que muestra la igualdad de dos expresiones algebraicas se denomina **ecuación**. Por ejemplo,  $4x + 3 = 2x - 4$  es una ecuación. En este capítulo aprenderemos a resolver **ecuaciones lineales** con una variable.

**DEFINICIÓN**

Una **ecuación lineal** con una variable es una ecuación que se escribe de la siguiente manera:

$$ax + b = c$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales, y  $a \neq 0$ .

**Ejemplos de ecuaciones lineales**

$$x + 4 = 7$$

$$2x - 4 = 6$$

**2 Comprobar las soluciones de las ecuaciones**

La **solución de una ecuación** es el número o números que hacen que ésta sea una proposición verdadera al sustituir la variable o variables; por ejemplo, la solución de  $x + 4 = 7$  es 3. En breve aprenderemos a encontrar la solución de una ecuación, es decir, a **resolver una ecuación**; pero antes, aprenderemos a *comprobar* la solución de una ecuación.

La solución de una ecuación se **comprueba** sustituyendo en la ecuación original lo que pensamos es la solución. Si la sustitución genera una proposición verdadera, la solución es correcta; si da lugar a una proposición falsa, entonces la solución o la comprobación son incorrectas, y es necesario regresar para encontrar el error. Trate de comprobar todas sus soluciones, esto mejorará su habilidad con la aritmética y el álgebra.

Cuando se demuestre la comprobación de una solución, debe usar la notación  $\stackrel{?}{=}$ . Ésta se emplea al preguntar si una proposición es verdadera. Por ejemplo, si se usa

$$2 + 3 \stackrel{?}{=} 2(3) - 1$$

¿ $2 + 3 = 2(3) - 1$  es verdadero?

Para comprobar si 3 es la solución de  $x + 4 = 7$ , sustituimos con 3 cada  $x$  de la ecuación.

**Comprobación:**  $x = 3$

$$x + 4 = 7$$

$$3 + 4 \stackrel{?}{=} 7$$

$$7 = 7 \quad \text{Verdadero.}$$

Como la comprobación da lugar a una proposición verdadera, 3 sí es la solución.

**EJEMPLO 1**

Considere la ecuación  $2x - 4 = 6$ . Determine si su solución es 3.

**Solución**

Para determinar si 3 es la solución de la ecuación, sustituimos con 3 cada  $x$ .


**Comprobación:**  $x = 3$

$$2x - 4 = 6$$

$$2(3) - 4 \stackrel{?}{=} 6$$

$$6 - 4 \stackrel{?}{=} 6$$

$$2 = 6 \quad \text{Falso.}$$

Como obtuvimos una proposición que es falsa, 3 no es la solución de la ecuación. 

Ahora veremos si 5 es la solución de la ecuación del ejemplo 1. La comprobación debe demostrar que 5 sí es la solución.

Como veremos en los ejemplos 2 y 3, para comprobar ecuaciones más complejas utilizamos los mismos procedimientos.

**EJEMPLO 2** Determine si 18 es la solución de la siguiente ecuación.

$$3x - 2(x + 3) = 12$$

**Solución** Para determinar si 18 es la solución, sustituimos con 18 cada  $x$  de la ecuación. Si la sustitución genera una proposición correcta, entonces 18 es la solución.

**Comprobación:**  $x = 18$

$$\begin{aligned} 3x - 2(x + 3) &= 12 \\ 3(18) - 2(18 + 3) &\stackrel{?}{=} 12 \\ 3(18) - 2(21) &\stackrel{?}{=} 12 \\ 54 - 42 &\stackrel{?}{=} 12 \\ 12 &= 12 \quad \text{Verdadero.} \end{aligned}$$

Como se obtuvo una proposición verdadera, 18 sí es la solución. 

**EJEMPLO 3** Determine si  $-\frac{3}{2}$  es la solución de la siguiente ecuación.

$$3(n + 3) = 6 + n$$

**Solución** En esta ecuación la variable es  $n$ . Sustituimos con  $-\frac{3}{2}$  cada  $n$  de la ecuación.

**Comprobación:**  $n = -\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} 3(n + 3) &= 6 + n \\ 3\left(-\frac{3}{2} + 3\right) &\stackrel{?}{=} 6 + \left(-\frac{3}{2}\right) \\ 3\left(-\frac{3}{2} + \frac{6}{2}\right) &\stackrel{?}{=} \frac{12}{2} - \frac{3}{2} \\ 3\left(\frac{3}{2}\right) &\stackrel{?}{=} \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} &= \frac{9}{2} \quad \text{Verdadero.} \end{aligned}$$

**AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 21** Por lo tanto,  $-\frac{3}{2}$  es la solución. 



## Uso de la calculadora

### Compruebe las soluciones

Es posible utilizar las calculadoras para comprobar las respuestas de las ecuaciones. Por ejemplo, para comprobar si  $\frac{-10}{3}$  es la solución de la ecuación  $2x + 3 = 5(x + 3) - 2$ , hacemos lo siguiente.

1. Sustituimos con  $\frac{-10}{3}$  cada  $x$ , como se muestra a continuación.

$$2x + 3 = 5(x + 3) - 2$$

$$2\left(\frac{-10}{3}\right) + 3 \stackrel{?}{=} 5\left(\frac{-10}{3} + 3\right) - 2$$

2. Evaluamos por separado cada lado de la ecuación, mediante la calculadora. Si obtenemos el mismo valor en ambos lados, la solución es correcta.

### Calculadora científica



Para evaluar el lado izquierdo de la ecuación,  $2\left(\frac{-10}{3}\right) + 3$ , utilizamos las siguientes teclas:

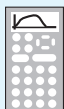
$$2 \times ( 10 \div 3 ) + 3 = -3.6666667$$

Para evaluar el lado derecho de la ecuación,  $5\left(\frac{-10}{3} + 3\right) - 2$ , utilizamos las siguientes teclas:

$$5 \times ( 10 \div 3 + 3 ) - 2 = -3.6666667$$

Como ambos lados dan el mismo valor, la solución es correcta. Observe que, en ocasiones, debido a las diferencias de fabricación que puede haber entre las calculadoras, los resultados pueden diferir en el último dígito.

### Calculadora graficadora



Lado izquierdo de la ecuación:  $2 \left( ( (-) 10 \div 3 ) + 3 \right) \text{ ENTER } -3.666666667$

Lado derecho de la ecuación:  $5 \left( ( (-) 10 \div 3 + 3 ) - 2 \right) \text{ ENTER } -3.666666667$

Como ambos lados de la ecuación dan el mismo resultado, la solución es la correcta.

## 3 Identificar ecuaciones equivalentes



FIGURA 2.1

Ahora que se sabemos cómo comprobar la solución de una ecuación, estudiaremos cómo resolverlas. En breve presentaremos los procedimientos completos para solucionarlas, pero por ahora debemos comprender que **para resolver una ecuación, es necesario aislar la variable de un lado del signo de igualdad. Esto se conoce como despejar la variable.** Para despejar la variable hacemos uso de dos propiedades: la de igualdad de la suma y para la multiplicación. Observe la figura 2.1.

Piense en una ecuación como una proposición balanceada cuyo lado izquierdo se equilibra con el derecho. Es decir, ambos lados siempre deben permanecer iguales. **Se garantiza que una ecuación siempre permanezca igual si se hace lo mismo en sus dos lados.** Por ejemplo, si sumamos un número en el lado izquierdo de la ecuación, debemos sumar exactamente el mismo número en el lado derecho. Si multiplicamos el lado derecho de la ecuación por cierto número, debemos multiplicar el lado izquierdo por el mismo número.

Al sumar el mismo número en ambos lados de una ecuación, o multiplicar por el mismo número distinto de cero, no cambia la solución de la ecuación, sólo la forma. A dos o más ecuaciones con la misma solución se les denomina **ecuaciones equivalentes**. Las ecuaciones  $2x - 4 = 2$ ,  $2x = 6$  y  $x = 3$ , son equivalentes, ya que la solución de cada una es 3.

Comprobación:  $x = 3$ 

$$\begin{array}{lll}
 2x - 4 = 2 & 2x = 6 & x = 3 \\
 2(3) - 4 \stackrel{?}{=} 2 & 2(3) \stackrel{?}{=} 6 & 3 = 3 \quad \text{Verdadero.} \\
 6 - 4 \stackrel{?}{=} 2 & 6 = 6 \quad \text{Verdadero.} & \\
 2 = 2 \quad \text{Verdadero.} & & 
 \end{array}$$

Al resolver una ecuación, empleamos las propiedades de la suma y la multiplicación para expresar una ecuación dada como ecuaciones equivalentes más sencillas, hasta obtener la solución.

#### 4 Utilizar la propiedad de la suma para resolver ecuaciones

Ahora, estamos listos para definir la **propiedad de igualdad de la suma**.

##### Propiedad de igualdad de la suma

Si  $a = b$ , entonces  $a + c = b + c$ , para cualesquiera números reales  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

Esta propiedad nos permite sumar el mismo número en ambos lados de una ecuación sin cambiar la solución. La **propiedad de la suma se utiliza para resolver ecuaciones de la forma  $x + a = b$** . Para despejar la variable  $x$  en estas ecuaciones, sumamos el opuesto o inverso aditivo de  $a$ ,  $-a$ , en ambos lados de la ecuación.

Para despejar la variable cuando resolvemos ecuaciones de la forma  $x + a = b$ , **usamos la propiedad de la suma para eliminar el número en el mismo lado del signo de igualdad en el que está la variable**. Estudie con cuidado los ejemplos que se muestran a continuación.

Ecuación	Para resolver, se usa la propiedad de la suma para eliminar el número
$x + 8 = 10$	8
$x - 7 = 12$	-7
$5 = x - 12$	-12
$-4 = x + 9$	9

Ahora, resolveremos algunos ejemplos.

**Ejemplo 4** Resuelva la ecuación  $x - 4 = -3$ .

##### Solución

Para despejar la variable,  $x$ , debe eliminarse el  $-4$  del lado izquierdo de la ecuación. Para hacer esto, sumamos 4, que es el opuesto de  $-4$ , en *ambos lados* de la ecuación.

$$\begin{array}{l}
 x - 4 = -3 \\
 x - 4 + 4 = -3 + 4 \quad \text{Sumar 4 en ambos lados.} \\
 x + 0 = 1 \\
 x = 1
 \end{array}$$

Observe cómo ayuda el proceso a despejar  $x$ .

Comprobación:

$$\begin{array}{l}
 x - 4 = -3 \\
 1 - 4 \stackrel{?}{=} -3 \\
 -3 = -3 \quad \text{Verdadero.}
 \end{array}$$



En el ejemplo 5, no se hará la comprobación. Limitaciones de espacio impiden que se hagan todas las comprobaciones. Sin embargo, *usted debe comprobar todas sus respuestas.*

**Ejemplo 5** Resuelva la ecuación  $x + 5 = 9$ .

**Solución**

Para resolver esta ecuación, debemos despejarse la variable  $x$ . Por tanto, es necesario eliminar el 5 del lado izquierdo de la ecuación. Para hacerlo, sumamos  $-5$ , opuesto de 5, en *ambos lados*.

$$\begin{aligned} x + 5 &= 9 \\ x + 5 + (-5) &= 9 + (-5) && \text{Sumar } -5 \text{ en ambos lados.} \\ x + 0 &= 4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$



En el ejemplo 5, sumamos  $-5$  en ambos lados de la ecuación. De la sección 1.7 sabemos que  $5 + (-5) = 5 - 5$ . Por lo tanto, observamos que sumar un 5 negativo en ambos lados de la ecuación equivale a restar 5 de ambos lados. De acuerdo con la propiedad de la suma, es posible *sumar* el mismo número en ambos lados de una ecuación. **Como la resta se define en términos de la suma, la propiedad de la suma también permite restar el mismo número en ambos lados de la ecuación.** Así, el ejemplo 5 hubiera podido resolverse como sigue:

$$\begin{aligned} x + 5 &= 9 \\ x + 5 - 5 &= 9 - 5 && \text{Restar 5 en ambos lados.} \\ x + 0 &= 4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

En este texto, a menos que haya una razón específica para hacer lo contrario, restaremos un número en ambos lados de la ecuación en vez de sumar uno negativo.

**Ejemplo 6** Resuelva la ecuación  $k + 7 = -3$ .

**Solución**

Debe despejarse la variable  $k$ .

$$\begin{aligned} k + 7 &= -3 \\ k + 7 - 7 &= -3 - 7 && \text{Restar 7 en ambos lados.} \\ k + 0 &= -10 \\ k &= -10 \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} k + 7 &= -3 \\ -10 + 7 &\stackrel{?}{=} -3 \\ -3 &= -3 && \text{Verdadero.} \end{aligned}$$



AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 51

**SUGERENCIA**

Recuerde que la meta al resolver una ecuación es dejar a la variable sola en un lado de la ecuación. Para ello, sumamos o restamos en ambos lados de la ecuación **el número que se encuentra del mismo lado de la variable.**

(continúa en la página siguiente)

ECUACIÓN	DEBE ELIMINARSE	NÚMERO POR SUMAR (O RESTAR) EN (O DE) AMBOS LADOS DE LA ECUACIÓN	RESULTADOS CORRECTOS	SOLUCIÓN
$x - 5 = 8$	-5	Sumar 5	$x - 5 + 5 = 8 + 5$	$x = 13$
$x - 3 = -12$	-3	Sumar 3	$x - 3 + 3 = -12 + 3$	$x = -9$
$2 = x - 7$	-7	Sumar 7	$2 + 7 = x - 7 + 7$	$9 = x$ o $x = 9$
$x + 12 = -5$	+12	Restar 12	$x + 12 - 12 = -5 - 12$	$x = -17$
$6 = x + 4$	+4	Restar 4	$6 - 4 = x + 4 - 4$	$2 = x$ o $x = 2$
$13 = x + 9$	+9	Restar 9	$13 - 9 = x + 9 - 9$	$4 = x$ o $x = 4$

Observe la columna de *Resultados correctos*; cuando la ecuación se simplifica con la reducción de términos, la  $x$  quedará despejada debido a que la suma de un número con su opuesto es igual a 0, y  $x + 0$  es igual a  $x$ .

**Ejemplo 7** Resuelva la ecuación  $6 = x - 9$ .

**Solución** La variable  $x$  está en el lado derecho de la ecuación. Para despejarla debe eliminarse el  $-9$  del mismo lado. Esto se lleva a cabo sumando 9 en ambos lados.

$$\begin{aligned}
 6 &= x - 9 \\
 6 + 9 &= x - 9 + 9 && \text{Sumar 9 en ambos lados.} \\
 15 &= x + 0 \\
 15 &= x
 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución es 15. 

**Ejemplo 8** Resuelva la ecuación  $-6.25 = y + 12.78$ .

**Solución** La variable se encuentra en el lado derecho de la ecuación. Para despejarla, restamos 12.78 de ambos lados.

$$\begin{aligned}
 -6.25 &= y + 12.78 \\
 -6.25 - 12.78 &= y + 12.78 - 12.78 && \text{Restar 12.78 en ambos lados.} \\
 -19.03 &= y + 0 \\
 -19.03 &= y
 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 67

La solución es  $-19.03$ . 

## CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Al resolver una ecuación, la meta es dejar a la variable sola en un lado del signo de igualdad. Considere la ecuación  $x + 3 = -4$ . ¿Cómo se resuelve?

### CORRECTO

Se elimina el 3 del lado derecho de la ecuación.

$$\begin{aligned}
 x + 3 &= -4 \\
 x + 3 - 3 &= -4 - 3 \\
 x &= -7
 \end{aligned}$$

La variable ya está despejada.

### INCORRECTO

Se elimina el  $-4$  del lado derecho de la ecuación.

$$\begin{aligned}
 x + 3 &= -4 \\
 x + 3 + 4 &= -4 + 4 \\
 x + 7 &= 0
 \end{aligned}$$

La variable **no** está despejada.

No olvide utilizar la propiedad de la suma para *eliminar el número que está en el mismo lado de la ecuación en el que se encuentra la variable*.

## 5 Resolver ecuaciones siguiendo algunos pasos mentalmente

Considere los siguientes problemas.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad x - 5 &= 12 \\ x - 5 + 5 &= 12 + 5 \\ x + 0 &= 12 + 5 \\ x &= 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad 15 &= x + 3 \\ 15 - 3 &= x + 3 - 3 \\ 15 - 3 &= x + 0 \\ 12 &= x \end{aligned}$$

Observe que el número que está en el mismo lado del signo de igualdad que la variable se transfiere al lado opuesto cuando se aplica la propiedad de la suma. Asimismo, note que el signo del número cambia cuando éste pasa de un lado al otro.

Una vez que sienta confianza al emplear la propiedad de igualdad de la suma, tal vez querrá efectuar algunos de los pasos mentalmente a fin de disminuir el trabajo escrito; por ejemplo, los dos problemas anteriores pueden abreviarse como sigue:

FORMA ABREVIADA

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad x - 5 = 12 \\ x - 5 + 5 = 12 + 5 \\ x = 12 + 5 \\ x = 17 \end{array} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Hacer esto} \\ \text{en forma mental} \end{array} \quad \begin{array}{l} x - 5 = 12 \\ x = 12 + 5 \\ x = 17 \end{array}$$

FORMA ABREVIADA

$$\begin{array}{l} \text{b)} \quad 15 = x + 3 \\ 15 - 3 = x + 3 - 3 \\ 15 - 3 = x \\ 12 = x \end{array} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Hacer esto} \\ \text{en forma mental} \end{array} \quad \begin{array}{l} 15 = x + 3 \\ 15 - 3 = x \\ 12 = x \end{array}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 55

## Conjunto de ejercicios 2.2

### Ejercicios conceptuales

1. ¿Qué es una ecuación?
2. a) ¿Qué quiere decir *solución de una ecuación*?  
b) ¿Qué significa *resolver una ecuación*?
3. Explique cómo comprobar la solución de una ecuación.
4. Explique con sus propias palabras la propiedad de igualdad de la suma.
5. ¿Qué son ecuaciones equivalentes?
6. Para resolver una ecuación *se aísla la variable*.  
a) Explique lo que eso significa.  
b) Diga cómo se despeja la variable de las ecuaciones que se estudiaron en esta sección.
7. Al resolver la ecuación  $x - 4 = 6$ , ¿sumaría 4 o restaría 6 en ambos lados de la ecuación? Explique su respuesta.
8. Al resolver la ecuación  $6 = x + 2$ , ¿restaría 6 o restaría 2 en ambos lados de la ecuación? Explique su respuesta.
9. Dé un ejemplo de ecuación lineal con una variable.
10. Explique por qué son equivalentes las tres siguientes ecuaciones.  
 $2x + 3 = 5, \quad 2x = 2, \quad x = 1$
11. Explique por qué la propiedad de la suma permite que se reste la misma cantidad en ambos lados de una ecuación.
12. Para resolver la ecuación  $x - \square = \triangle$ , para  $x$ , ¿se suma  $\square$  o se resta  $\triangle$  de ambos lados de la ecuación? Explique.

### Práctica de habilidades

13. ¿ $x = 2$  es solución de  $4x - 3 = 5$ ?
14. ¿ $x = -6$  es solución de  $2x + 1 = x - 5$ ?
15. ¿ $x = -3$  es solución de  $2x - 5 = 5(x + 2)$ ?
16. ¿ $x = 1$  es solución de  $2(x - 3) = -3(x + 1)$ ?
17. ¿ $p = 0$  es solución de  $3p - 4 = 2(p + 3) - 10$ ?
18. ¿ $k = -1$  es solución de  $-3(k - 3) = -4k + 3 - 5k$ ?

19.  $\zeta x = 3.4$  es solución de  $3(x + 2) - 3(x - 1) = 9$ ?  
 21.  $\zeta x = \frac{1}{2}$  es solución de  $4x - 4 = 2x - 2$ ?  
 23.  $\zeta x = \frac{11}{2}$  es solución de  $3(x + 2) = 5(x - 1)$ ?  
 20.  $\zeta x = \frac{1}{2}$  es solución de  $x + 3 = 3x + 2$ ?  
 22.  $\zeta x = \frac{1}{2}$  es solución de  $3x + 4 = 2x + 9$ ?  
 24.  $\zeta h = 3$  es solución de  $-(h - 5) - (h - 6) = 3h - 4$ ?

Resuelva cada ecuación y compruebe su respuesta.

- |                       |                         |                       |                     |
|-----------------------|-------------------------|-----------------------|---------------------|
| 25. $x + 5 = 9$       | 26. $x - 4 = 13$        | 27. $x + 1 = -6$      | 28. $x - 4 = -8$    |
| 29. $x + 4 = -5$      | 30. $x - 16 = 36$       | 31. $x + 9 = 52$      | 32. $9 + n = 9$     |
| 33. $-6 + w = 9$      | 34. $3 = 7 + t$         | 35. $27 = x + 16$     | 36. $50 = x - 25$   |
| 37. $-18 = -14 + x$   | 38. $7 + x = -50$       | 39. $9 + x = 4$       | 40. $x + 29 = -29$  |
| 41. $4 + x = -9$      | 42. $9 = x - 3$         | 43. $7 + r = -23$     | 44. $a - 5 = -9$    |
| 45. $8 = 8 + v$       | 46. $9 + x = 12$        | 47. $-4 = x - 3$      | 48. $-13 = 4 + x$   |
| 49. $12 = 16 + x$     | 50. $62 = z - 15$       | 51. $15 + x = -5$     | 52. $-20 = 4 + x$   |
| 53. $-10 = -10 + x$   | 54. $8 = 8 + x$         | 55. $5 = x - 12$      | 56. $-12 = 20 + c$  |
| 57. $-50 = x - 24$    | 58. $-29 + x = -15$     | 59. $43 = 15 + p$     | 60. $-25 = 74 + x$  |
| 61. $40.2 + x = -5.9$ | 62. $-27.23 + x = 9.77$ | 63. $-37 + x = 9.5$   | 64. $7.2 + x = 7.2$ |
| 65. $x - 8.77 = -17$  | 66. $6.1 + x = 10.2$    | 67. $9.32 = x + 3.75$ | 68. $139 = x - 117$ |

## Solución de problemas

69. ¿Piensa que la ecuación  $x + 1 = x + 2$  tiene un número real como solución? Explique su respuesta. (En la sección 2.5 se estudiarán ecuaciones como ésta).  
 70. ¿Piensa que la ecuación  $x + 4 = x + 4$  tiene más de un número real como solución? Si así fuera, ¿cuántos tiene? Explique su respuesta.

## Problemas de reto

Es posible resolver ecuaciones que contengan símbolos desconocidos. Resuelva cada ecuación para el símbolo que se indica, ya sea sumando o restando un símbolo a ambos lados de la ecuación. Explique cada respuesta. (Recuerde que para solucionar la ecuación necesitamos despejar el símbolo, es decir dejarlo solo en un lado de la ecuación).

71.  $x - \triangle = \square$ , para  $x$   
 72.  $\square + \odot = \triangle$ , para  $\odot$   
 73.  $\odot = \square + \triangle$ , para  $\square$   
 74.  $\square = \triangle + \odot$ , para  $\odot$



## Actividad en grupo

Como grupo, estudie y responda el ejercicio 75.

75. Considere la ecuación  $2(x + 3) = 2x + 6$ .  
 a) Miembro 1 del grupo: Determine si 4 es la solución de la ecuación.  
 b) Miembro 2 del grupo: Determine si  $-2$  es la solución de la ecuación.  
 c) Miembro 3 del grupo: Determine si 0.3 es la solución de la ecuación.  
 d) Cada miembro del grupo: Seleccione un número que no haya utilizado en los incisos a) a c) y diga si es la solución de la ecuación.  
 e) Como grupo, escriban la que piensen sea la solución de la ecuación  $2(x + 3) = 2x + 6$ , y redacten un párrafo con el que expliquen su respuesta.

## Ejercicios de aprendizaje acumulativo

[1.9] Evalúe las siguientes expresiones.

76.  $3x + 4(x - 3) + 2$  cuando  $x = 4$

77.  $6x - 2(2x + 1)$  si  $x = -3$

[2.1] Simplifique las siguientes expresiones.

78.  $4x + 3(x - 2) - 5x - 7$

79.  $-(2t + 4) + 3(4t - 5) - 3t$

## 2.3 LA PROPIEDAD DE IGUALDAD DE LA MULTIPLICACIÓN



- 1 Identificar los recíprocos.
- 2 Utilizar la propiedad de la multiplicación para resolver ecuaciones.
- 3 Resolver ecuaciones de la forma  $-x = a$ .
- 4 Ejecutar mentalmente algunos pasos para resolver ecuaciones.

## 1 Identificar los recíprocos

En la sección 1.10 se introdujo el **recíproco** (o inverso multiplicativo) de un número. Recuerde que dos números son recíprocos uno del otro si su producto es igual a 1. A continuación presentamos algunos ejemplos de números y sus recíprocos.

Número	Recíproco	Producto
2	$\frac{1}{2}$	$(2)\left(\frac{1}{2}\right) = 1$
$-\frac{3}{5}$	$-\frac{5}{3}$	$\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{3}\right) = 1$
-1	-1	$(-1)(-1) = 1$

El recíproco de un número positivo es otro número positivo, y el recíproco de uno negativo es otro negativo. Observe que el 0 no tiene recíproco, ¿por qué?

En general, si  $a$  representa un número distinto de cero, su recíproco es  $\frac{1}{a}$ . Por ejemplo, el recíproco de 3 es  $\frac{1}{3}$ , y el de  $-2$  es  $\frac{1}{-2}$  o  $-\frac{1}{2}$ . El recíproco de  $-\frac{3}{5}$  es  $-\frac{5}{3}$ , que se escribe como  $1 \div \left(-\frac{3}{5}\right)$ . Se simplifica y queda  $\left(\frac{1}{1}\right)\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{5}{3}$ . Por tanto, el recíproco de  $-\frac{3}{5}$  es  $-\frac{5}{3}$ .

## 2 Utilizar la propiedad de la multiplicación para resolver ecuaciones

En la sección 2.2 empleamos la propiedad de igualdad de la suma para resolver ecuaciones de la forma  $x + a = b$ , donde  $a$  y  $b$  representan números reales. En esta sección utilizaremos la propiedad de igualdad de la multiplicación para solucionar ecuaciones de la forma  $ax = b$ , donde  $a$  y  $b$  representan números reales.

Es importante que advierta la diferencia que existe entre ecuaciones como  $x + 2 = 8$  y  $2x = 8$ . En  $x + 2 = 8$ , el 2 es un *término* que se suma a la  $x$ , por lo que se usa la propiedad de la suma para resolver la ecuación. En  $2x = 8$ , el 2 es un *factor* de  $2x$ . El 2 es el coeficiente que multiplica a la  $x$ , por lo que para solucionar la ecuación se emplea la propiedad de la multiplicación. La propiedad de igualdad de la multiplicación se utiliza para resolver ecuaciones lineales en las que el coeficiente del término en  $x$  es un número diferente de 1.

A continuación se enuncia la *propiedad de igualdad de la multiplicación*.

## Propiedad de igualdad de la multiplicación

Si  $a = b$ , entonces  $a \cdot c = b \cdot c$ , para cualesquiera números reales  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

La propiedad de la multiplicación significa que es posible multiplicar ambos lados de una ecuación por un mismo número distinto de cero sin cambiar la solución. **La propiedad de la multiplicación puede utilizarse para resolver ecuaciones de la forma  $ax = b$ .** Es posible despejar la variable de ecuaciones que tengan esa forma multiplicando ambos lados por el recíproco de  $a$ , que es  $\frac{1}{a}$ . Con ello, el coeficiente numérico de la variable,  $x$ , es 1, que podemos omitir al escribir la variable. Con este proceso decimos que *eliminamos* el coeficiente de la variable.

Ecuación	Para resolver, utilice la propiedad de la multiplicación para eliminar el coeficiente
$4x = 9$	4
$-5x = 20$	-5
$15 = \frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}$
$7 = -9x$	-9

A continuación se resolverán algunos ejemplos.

**Ejemplo 1** Resuelva la ecuación  $3x = 6$ .

**Solución** Para despejar la variable,  $x$ , debe eliminarse el 3 del lado izquierdo de la ecuación; por lo que multiplicamos ambos lados por el recíproco de 3, que es  $\frac{1}{3}$ .

$$\begin{aligned}
 3x &= 6 \\
 \frac{1}{3} \cdot 3x &= \frac{1}{3} \cdot 6 && \text{Multiplicar ambos lados por } \frac{1}{3}. \\
 \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}x &= \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{6} && \text{Dividir los factores comunes.} \\
 1x &= 2 \\
 x &= 2
 \end{aligned}$$



En el ejemplo 1, observe que  $1x$  se reemplaza por  $x$  en el siguiente paso. Por lo general esto se hace mentalmente.

**Ejemplo 2** Resuelva la ecuación  $\frac{x}{2} = 4$ .

**Solución** Como dividir entre 2 es lo mismo que multiplicar por  $\frac{1}{2}$ , la ecuación  $\frac{x}{2} = 4$  es la misma que  $\frac{1}{2}x = 4$ . Por tanto, se multiplican ambos lados por el recíproco de  $\frac{1}{2}$ , que es 2.

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{2} &= 4 \\
 2 \left( \frac{x}{2} \right) &= 2 \cdot 4 && \text{Multiplicar ambos lados por 2.} \\
 x &= 2 \cdot 4 \\
 x &= 8
 \end{aligned}$$





**Ejemplo 3** Resuelva la ecuación  $\frac{2}{3}x = 6$ .

**Solución** El recíproco de  $\frac{2}{3}$  es  $\frac{3}{2}$ . Se multiplican ambos lados de la ecuación por  $\frac{3}{2}$ .

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}x &= 6 \\ \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}x &= \frac{3}{2} \cdot 6 && \text{Multiplicar ambos lados de la ecuación por } \frac{3}{2}. \\ 1x &= 9 \\ x &= 9\end{aligned}$$

Se comprobará esta solución.

**Comprobación:**  $\frac{2}{3}x = 6$

$$\frac{2}{3}(9) \stackrel{?}{=} 6$$

$$6 = 6 \quad \text{Verdadero.}$$



AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 49

En el ejemplo 1, multiplicamos ambos lados de la ecuación  $3x = 6$  por  $\frac{1}{3}$  para despejar la variable. También podríamos haber despejado la variable dividiendo ambos lados entre 3, como sigue:

$$\begin{aligned}3x &= 6 \\ \frac{1}{3}3x &= \frac{1}{3}6 && \text{Dividir ambos lados entre 3.} \\ \frac{3}{1}x &= \frac{6}{1} \\ x &= 2\end{aligned}$$

Podemos hacerlo ya que dividir entre 3 es equivalente a multiplicar por  $\frac{1}{3}$ . **Como la división puede definirse en términos de la multiplicación** ( $\frac{a}{b}$  significa  $a \cdot \frac{1}{b}$ ), **la propiedad de la multiplicación también nos permite dividir ambos lados de la ecuación entre un mismo número distinto de cero.** Este procedimiento se ilustra en los ejemplos 4 a 6.

**Ejemplo 4** Resuelva la ecuación  $8w = 3$ .

**Solución** En esta ecuación la variable es  $w$ . Para resolverla, es necesario dividir ambos lados entre 8.

$$\begin{aligned}8w &= 3 \\ \frac{8w}{8} &= \frac{3}{8} && \text{Dividir ambos lados entre 8.} \\ w &= \frac{3}{8}\end{aligned}$$



**Ejemplo 5** Resuelva la ecuación  $-15 = -3z$ .

**Solución** En esta ecuación la variable,  $z$ , se encuentra en el lado derecho del signo de igualdad. Para despejar  $z$  se dividen ambos lados de la ecuación entre  $-3$ .

$$\begin{aligned}-15 &= -3z \\ \frac{-15}{-3} &= \frac{-3z}{-3} && \text{Dividir ambos lados entre } -3. \\ 5 &= z\end{aligned}$$



**Ejemplo 6** Resuelva la ecuación  $0.24x = 1.20$ .

**Solución** Comenzamos por dividir ambos lados de la ecuación entre 0.24 a fin de despejar la variable  $x$ .

$$\begin{aligned} 0.24x &= 1.20 \\ \frac{0.24x}{0.24} &= \frac{1.20}{0.24} && \text{Dividir ambos lados entre 0.24.} \\ x &= 5 \end{aligned}$$



AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 35

Puede ahorrar algo de tiempo si utiliza su calculadora para resolver los problemas que impliquen números decimales.

### SUGERENCIA

Al resolver una ecuación de la forma  $ax = b$ , la variable puede despejarse con los siguientes pasos:

1. Multiplique ambos lados de la ecuación por el recíproco de  $a$ , que es  $\frac{1}{a}$ , como se hizo en los ejemplos 1, 2 y 3, o
2. Divida ambos lados de la ecuación entre  $a$ , como se efectuó en los ejemplos 4, 5 y 6.

Puede utilizar cualquiera de estos métodos para despejar la variable; sin embargo, si la ecuación contiene una o varias fracciones, llegará con mayor rapidez a la solución multiplicando por el recíproco de  $a$ . Esto se ilustra en los ejemplos 7 y 8.

**Ejemplo 7** Resuelva la ecuación  $-2x = \frac{3}{5}$ .

**Solución** Como esta ecuación contiene una fracción, despejaremos la variable multiplicando ambos lados por  $-\frac{1}{2}$ , que es el recíproco de  $-2$ .

$$\begin{aligned} -2x &= \frac{3}{5} \\ \left(-\frac{1}{2}\right)(-2x) &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right) && \text{Multiplicar ambos lados por } -\frac{1}{2}. \\ 1x &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right) \\ x &= -\frac{3}{10} \end{aligned}$$



En el ejemplo 7, si quisiera resolver la ecuación dividiendo ambos lados entre  $-2$ , tendría que dividir la fracción  $\frac{3}{5}$  entre  $-2$ .

**Ejemplo 8** Resuelva la ecuación  $-6 = -\frac{3}{5}x$ .

**Solución** Como esta ecuación contiene una fracción, despejemos la variable multiplicando ambos lados por el recíproco de  $-\frac{3}{5}$ , que es  $-\frac{5}{3}$ .

$$\begin{aligned} -6 &= -\frac{3}{5}x \\ \left(-\frac{5}{3}\right)(-6) &= \left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{3}{5}x\right) && \text{Multiplicar ambos lados por } -\frac{5}{3}. \\ 10 &= x \end{aligned}$$



AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 63

En el ejemplo 8 escribimos la ecuación como  $-6 = -\frac{3}{5}x$ . Esta ecuación es equivalente a las ecuaciones  $-6 = \frac{-3}{5}x$  y  $-6 = \frac{3}{-5}x$ . ¿Podría explicar por qué? Las tres ecuaciones tienen la misma solución, 10.

### 3 Resolver ecuaciones de la forma $-x = a$

Al resolver una ecuación podríamos obtener una ecuación como  $-x = 7$ . Ésta no es la solución, puesto que  $-x = 7$  significa  $-1x = 7$ . La solución de una ecuación es de la forma  $x =$  cierto número. Si una ecuación es de la forma  $-x = 7$ , se resuelve para  $x$  multiplicando ambos lados por  $-1$ , como se ilustra en el siguiente ejemplo.


**Ejemplo 9** Resuelva la ecuación  $-x = 7$ .

**Solución**  $-x = 7$  significa que  $-1x = 7$ . Pero debe resolverse para  $x$ , no para  $-x$ . Se multiplican ambos lados de la ecuación por  $-1$  a fin de despejar  $x$  en el lado izquierdo de la ecuación.

$$\begin{aligned} -x &= 7 \\ -1x &= 7 \\ (-1)(-1x) &= (-1)(7) && \text{Multiplicar ambos lados por } -1. \\ 1x &= -7 \\ x &= -7 \end{aligned}$$

**Comprobación:**

$$\begin{aligned} -x &= 7 \\ -(-7) &\stackrel{?}{=} 7 \\ 7 &= 7 && \text{Verdadero.} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución es  $-7$ . 

También podemos resolver el ejemplo 9 dividiendo ambos lados de la ecuación entre  $-1$ . Intente hacerlo para ver que obtiene la misma solución. Siempre que tengamos al opuesto (o negativo) de una variable igual a una cantidad, como en el ejemplo 9, podemos despejar la variable multiplicando (o dividiendo) ambos lados de la ecuación por  $-1$ .

**Ejemplo 10** Resuelva la ecuación  $-x = -5$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} -x &= -5 \\ -1x &= -5 \\ (-1)(-1x) &= (-1)(-5) && \text{Multiplicar ambos lados por } -1. \\ 1x &= 5 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 23



### SUGERENCIA

Para cualquier número real  $a$ , si  $-x = a$ , entonces  $x = -a$ .

#### Ejemplos

$$\begin{array}{ll} -x = 7 & -x = -2 \\ x = -7 & x = -(-2) \\ & x = 2 \end{array}$$

#### 4 Ejecutar mentalmente algunos pasos para resolver ecuaciones

Cuando se sienta seguro al utilizar la propiedad de la multiplicación, tal vez quiera hacer algunos de estos pasos mentalmente a fin de reducir el trabajo por escrito. A continuación se presentan dos ejemplos resueltos detalladamente, junto con la forma abreviada.

**Ejemplo 11** Resuelva la ecuación  $-3x = -21$ .

**Solución**

$$-3x = -21$$

$$\frac{-3x}{-3} = \frac{-21}{-3}$$

$$x = \frac{-21}{-3}$$

$$x = 7$$

← Hacer esto en forma mental

**FORMA ABREVIADA**

$$-3x = -21$$

$$x = \frac{-21}{-3}$$

$$x = 7$$



**Ejemplo 12** Resuelva la ecuación  $\frac{1}{3}x = 9$ .

**Solución**

$$\frac{1}{3}x = 9$$

$$3\left(\frac{1}{3}x\right) = 3(9)$$

$$x = 3(9)$$

$$x = 27$$

← Hacer esto en forma mental

**FORMA ABREVIADA**

$$\frac{1}{3}x = 9$$

$$x = 3(9)$$

$$x = 27$$



**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 47**

En la sección 2.2 estudiamos la propiedad de la suma, y en esta sección la de la multiplicación. Es importante comprender la diferencia entre ambas. Estudie cuidadosamente el siguiente recuadro de Sugerencia.

#### SUGERENCIA

La **propiedad de la suma** se utiliza para resolver ecuaciones de la forma  $x + a = b$ . La *propiedad de la suma* se emplea si un número *se suma o resta* de una variable.

$$\begin{aligned} x + 3 &= -6 \\ x + 3 - 3 &= -6 - 3 \\ x &= -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 5 &= -2 \\ x - 5 + 5 &= -2 + 5 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

La **propiedad de la multiplicación** se usa para resolver ecuaciones de la forma  $ax = b$ . Se utiliza cuando una variable se *multiplica por o divide entre* un número.

$$3x = 6$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$$

$$x = 2$$

$$\frac{x}{2} = 4$$

$$2\left(\frac{x}{2}\right) = 2(4)$$

$$x = 8$$

$$\frac{2}{5}x = 12$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{2}{5}x\right) = \left(\frac{5}{2}\right)(12)$$

$$x = 30$$

## Conjunto de ejercicios 2.3

### Ejercicios conceptuales

1. Explique con sus propias palabras la propiedad de igualdad de la multiplicación.
2. Explique por qué la propiedad de la multiplicación permite dividir ambos lados de la ecuación entre una cantidad distinta de cero.
3. a) Si  $-x = a$ , donde  $a$  representa cualquier número real, ¿a qué es igual  $x$ ?  
b) Si  $-x = 5$ , ¿cuánto vale  $x$ ?  
c) Si  $-x = -5$ , ¿cuánto vale  $x$ ?
4. Para resolver la ecuación  $3x = 5$ , ¿dividiría entre 3 o entre 5 ambos lados? Explique su respuesta.
5. Para solucionar la ecuación  $-2x = 5$ , ¿dividiría entre  $-2$  o entre 5 ambos lados? Explique su respuesta.
6. Si se quiere resolver la ecuación  $\frac{x}{2} = 3$ , ¿qué se haría para despejar la variable? Explíquelo.
7. Al solucionar la ecuación  $4 = \frac{x}{3}$ , ¿qué se hace para despejar la variable? Explique.
8. Si desea resolver para  $x$  la ecuación  $ax = b$ , ¿dividiría entre  $a$  o entre  $b$  ambos lados? Explique.

### Práctica de habilidades

Resuelva cada ecuación y compruebe la solución.

- |                          |                          |                          |                                   |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-----------------------------------|
| 9. $4x = 12$             | 10. $5x = 50$            | 11. $\frac{x}{2} = 4$    | 12. $\frac{y}{5} = 3$             |
| 13. $-4x = 12$           | 14. $8 = 16y$            | 15. $\frac{x}{4} = -2$   | 16. $\frac{x}{3} = -3$            |
| 17. $\frac{x}{5} = 1$    | 18. $-7x = 49$           | 19. $-27n = 81$          | 20. $16 = -4y$                    |
| 21. $-7 = 3r$            | 22. $\frac{x}{8} = -3$   | 23. $-x = -11$           | 24. $-x = 9$                      |
| 25. $10 = -y$            | 26. $-9 = \frac{k}{6}$   | 27. $-\frac{w}{3} = -13$ | 28. $5 = \frac{z}{12}$            |
| 29. $4 = -12x$           | 30. $12y = -15$          | 31. $-\frac{x}{3} = -2$  | 32. $-\frac{a}{8} = -7$           |
| 33. $43t = 26$           | 34. $-24x = -18$         | 35. $-4.2x = -8.4$       | 36. $-3.88 = 1.94y$               |
| 37. $7x = -7$            | 38. $3x = \frac{3}{5}$   | 39. $5x = -\frac{3}{8}$  | 40. $-2b = -\frac{4}{5}$          |
| 41. $15 = -\frac{x}{4}$  | 42. $\frac{c}{9} = 0$    | 43. $-\frac{b}{4} = -60$ | 44. $-x = -\frac{5}{9}$           |
| 45. $\frac{x}{5} = -7$   | 46. $-3r = 0$            | 47. $5 = \frac{x}{4}$    | 48. $-3 = \frac{x}{-5}$           |
| 49. $\frac{3}{5}d = -30$ | 50. $\frac{2}{7}x = 7$   | 51. $\frac{y}{-2} = 0$   | 52. $-6x = \frac{5}{2}$           |
| 53. $\frac{-7}{8}w = 0$  | 54. $-x = \frac{5}{8}$   | 55. $\frac{1}{5}x = 4.5$ | 56. $5 = -\frac{3}{5}s$           |
| 57. $-4 = -\frac{2}{3}z$ | 58. $-9 = \frac{-5}{3}n$ | 59. $-1.4x = 28.28$      | 60. $-0.42x = -2.142$             |
| 61. $-4w = \frac{7}{12}$ | 62. $6x = \frac{8}{3}$   | 63. $\frac{2}{3}x = 6$   | 64. $-\frac{1}{4}x = \frac{3}{4}$ |

### Solución de problemas

65. a) Explique la diferencia entre  $5 + x = 10$  y  $5x = 10$ .  
b) Resuelva  $5 + x = 10$ .  
c) Solucione  $5x = 10$ .
66. a) Explique la diferencia entre  $3 + x = 6$  y  $3x = 6$ .  
b) Resuelva  $3 + x = 6$ .  
c) Solucione  $3x = 6$ .

67. Considere la ecuación  $\frac{2}{3}x = 4$ . Ésta podría resolverse multiplicando ambos lados por  $\frac{3}{2}$ , que es el recíproco de  $\frac{2}{3}$ , o dividiendo entre  $\frac{2}{3}$ . ¿Cuál método cree que sería más fácil? Explique su respuesta. Encuentre la solución.
68. Considere la ecuación  $4x = \frac{3}{5}$ . ¿Sería más sencillo resolverla dividiendo ambos lados entre 4, o multiplicándolos por  $\frac{1}{4}$ , el recíproco de 4? Explique su respuesta. Determine la solución del problema.
69. Considere la ecuación  $\frac{3}{7}x = \frac{4}{5}$ . ¿Sería más fácil resolverla dividiendo ambos lados entre  $\frac{3}{7}$  o multiplicándolos por  $\frac{7}{3}$ , recíproco de  $\frac{3}{7}$ ? Explique su respuesta y encuentre la solución.

## Problemas de reto

70. Considere la ecuación  $\square \odot = \triangle$ .
- Si se quiere resolver para  $\odot$ , ¿cuál símbolo se necesita despejar?
  - ¿Cómo despejaríamos el símbolo que especificó en el inciso a)?
  - Resuelva la ecuación para  $\odot$ .
71. Considere la ecuación  $\odot = \triangle \square$ .
- Al resolver para  $\square$ , ¿qué símbolo sería necesario despejar?
  - ¿Cómo despejaríamos el símbolo especificado en el inciso a)?
72. Considere la ecuación  $\# = \frac{\odot}{\triangle}$ .
- Si se quiere resolver para  $\odot$ , ¿cuál símbolo se despejaría?
  - ¿Cómo despejaríamos el símbolo que especificó en el inciso a)?
  - Resuelva la ecuación para  $\odot$ .

## Ejercicios de repaso acumulativo

- [1.7] 73. Reste  $-4$  de  $-8$ .
- [1.7] 74. Evalúe  $6 - (-3) - 5 - 4$ .
- [1.9] 75. Evalúe la expresión  $4^2 - 2^3 \cdot 6 \div 3 + 6$ .
- [2.1] 76. Simplifique  $-(x + 3) - 5(2x - 7) + 6$ .
- [2.2] 77. Resuelva la ecuación  $-48 = x + 9$ .

## 2.4 SOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES CON UNA VARIABLE EN UN SOLO LADO DE LA ECUACIÓN



- Solucionar ecuaciones lineales con una variable en un solo lado del signo de igualdad.
- Resolver ecuaciones que contienen números decimales o fracciones.

### 1 Solucionar ecuaciones lineales con una variable en un solo lado del signo de igualdad

En esta sección estudiaremos cómo resolver ecuaciones lineales empleando las propiedades de igualdad *tanto* de la suma como de la multiplicación, cuando una variable se encuentra en un solo lado del signo de igualdad. En la sección 2.5 estudiaremos cómo resolver ecuaciones lineales empleando las dos propiedades cuando una variable aparece en ambos lados del signo de igualdad.

El procedimiento general para resolver ecuaciones consiste en *despejar la variable*. Es decir, dejar a la variable,  $x$ , sola de un lado del signo de igualdad.

No hay ningún método que sea el *mejor* para resolver todas las ecuaciones lineales. A continuación damos un procedimiento que puede utilizarse para resolver ecuaciones lineales cuando la variable aparece sólo de un lado de la ecuación.

#### Para resolver ecuaciones lineales con la variable en un lado del signo de igualdad

- Si la ecuación contiene fracciones, se multiplican **ambos** lados por el mínimo común denominador (mcd). Esto eliminará las fracciones de la ecuación.

(continúa en la página siguiente)

2. Aproveche la propiedad distributiva para eliminar paréntesis.
3. Reduzca los términos semejantes que estén en el mismo lado del signo de igualdad.
4. Emplee la propiedad de la suma para obtener una ecuación con todos los términos que contienen a la variable de un lado del signo de igualdad, y una constante en el otro lado. Esto producirá una ecuación de la forma  $ax = b$ .
5. Utilice la propiedad de la multiplicación para despejar la variable. Esto dará una solución de la forma  $x = \frac{b}{a}$  (o  $1x = \frac{b}{a}$ ).
6. Compruebe la solución en la ecuación original.

Al resolver una ecuación siempre debe comprobarse su solución, como se indica en el paso 6. No mostraremos todas las comprobaciones por falta de espacio.

**Al resolver una ecuación, recuerde que el objetivo es dejar la variable sola de un lado de la ecuación.**

Considere la ecuación  $2x + 4 = 10$ , que no contiene fracciones ni paréntesis, y no existen términos semejantes en el mismo lado del signo de igualdad; por tanto, comenzamos en el paso 4, con el empleo de la propiedad de la suma. Recordemos que ésta permite sumar (o restar) la misma cantidad en (o de) ambos lados de una ecuación sin cambiar la solución. En este caso, restamos 4 de ambos lados para despejar el término que contiene a la variable.

#### Ecuación

$$2x + 4 = 10$$

$$2x + 4 - 4 = 10 - 4 \quad \text{Propiedad de la suma.}$$

$$\text{o bien } 2x = 6 \quad \text{Ahora hay que despejar el término con } x.$$

Observe que el término con la variable,  $2x$ , queda solo en un lado del signo de igualdad. Ahora empleamos la propiedad de la multiplicación, paso 5, para despejar la variable  $x$ . Recuerde que la propiedad de la multiplicación permite multiplicar o dividir ambos lados de la ecuación por el mismo número diferente de cero sin cambiar la solución. En este caso dividimos ambos lados entre 2, que es el coeficiente del término con la variable, para obtener la solución, 3.

$$2x = 6$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$$

Propiedad de la multiplicación.

$$x = 3$$

$x$  ya está despejada.

La solución a la ecuación  $2x + 4 = 10$  es 3. A continuación resolveremos algunos ejemplos.

**Ejemplo 1** Resuelva la ecuación  $3x - 6 = 15$ .

#### Solución

Seguiremos el procedimiento que se enunció para resolver ecuaciones. Como la ecuación no contiene fracciones ni paréntesis, y tampoco hay términos semejantes que reducir, comenzaremos en el paso 4.

**Paso 4**

$$3x - 6 = 15$$

$$3x - 6 + 6 = 15 + 6 \quad \text{Sumar 6 en ambos lados.}$$

$$3x = 21$$

Paso 5 
$$\frac{3x}{3} = \frac{21}{3}$$
 *Dividir ambos lados entre 3.*  


$$x = 7$$

Paso 6 Comprobación: 
$$3x - 6 = 15$$
  

$$3(7) - 6 \stackrel{?}{=} 15$$
  

$$21 - 6 \stackrel{?}{=} 15$$
  

$$15 = 15$$
 *Verdadero.*

Como la comprobación es verdadera, la solución es 7. Observe que después de realizar el paso 4 obtuvimos  $3x = 21$ , que es una ecuación de la forma  $ax = b$ . Una vez que concluimos el paso 5, obtenemos la respuesta en la forma  $x =$  cierto número real. 

## SUGERENCIA

Al resolver una ecuación que no contenga fracciones, **debe utilizar la propiedad de la suma (paso 4) antes de la de la multiplicación (paso 5)**. Si utiliza la propiedad de la multiplicación antes de la propiedad de la suma, puede obtener la respuesta correcta; pero por lo general tendrá que trabajar más y podría encontrarse con fracciones. ¿Qué habría pasado si hubiésemos intentado resolver el ejemplo 1 utilizando la propiedad de la multiplicación antes que la de la suma?

## Ejemplo 2

Resuelva la ecuación  $-2r - 6 = -3$ .

### Solución

Paso 4 
$$-2r - 6 + 6 = -3 + 6$$
 *Sumar 6 en ambos lados.*  

$$-2r = 3$$

Paso 5 
$$\frac{-2r}{-2} = \frac{3}{-2}$$
 *Dividir ambos lados entre -2.*  

$$r = -\frac{3}{2}$$

Paso 6 Comprobación: 
$$-2r - 6 = -3$$
  

$$-2\left(-\frac{3}{2}\right) - 6 \stackrel{?}{=} -3$$
  

$$3 - 6 \stackrel{?}{=} -3$$
  

$$-3 = -3$$
 *Verdadero.*

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 19

La solución es  $-\frac{3}{2}$ .



Observe que las comprobaciones se realizan siempre con la ecuación *original*. En algunos de los ejemplos siguientes omitiremos la prueba para ahorrar espacio. Usted debe comprobar todas sus respuestas.

## Ejemplo 3

Resuelva la ecuación  $16 = 4x + 6 - 2x$ .

### Solución

De nuevo debemos despejar la variable  $x$ . Como el lado derecho de la ecuación tiene dos términos semejantes que contienen a la variable  $x$ , primero se reducirán.

$$16 = 4x + 6 - 2x$$
  
Paso 3 
$$16 = 2x + 6$$
 *Reducir términos semejantes.*



Paso 4	$16 - 6 = 2x + 6 - 6$	<i>Restar 6 en ambos lados.</i>
	$10 = 2x$	
Paso 5	$\frac{10}{2} = \frac{2x}{2}$	<i>Dividir ambos lados entre 2.</i>
	$5 = x$	



La solución anterior se resume como sigue.

$16 = 4x + 6 - 2x$	
$16 = 2x + 6$	<i>Se redujeron los términos semejantes.</i>
$10 = 2x$	<i>Se restó 6 en ambos lados.</i>
$5 = x$	<i>Se dividieron ambos lados entre 2.</i>

**Ejemplo 4** Resuelva la ecuación  $2(x + 4) - 5x = -3$ .

**Solución**

	$2(x + 4) - 5x = -3$	
Paso 2	$2x + 8 - 5x = -3$	<i>Emplear la propiedad distributiva.</i>
Paso 3	$-3x + 8 = -3$	<i>Reducir los términos semejantes.</i>
Paso 4	$-3x + 8 - 8 = -3 - 8$	<i>Restar 8 en ambos lados.</i>
	$-3x = -11$	
Paso 5	$\frac{-3x}{-3} = \frac{-11}{-3}$	<i>Dividir ambos lados entre -3.</i>
	$x = \frac{11}{3}$	



La solución del ejemplo 4 se resume como sigue:

$2(x + 4) - 5x = -3$	
$2x + 8 - 5x = -3$	<i>Se utilizó la propiedad distributiva.</i>
$-3x + 8 = -3$	<i>Se redujeron los términos semejantes.</i>
$-3x = -11$	<i>Se restó 8 en ambos lados.</i>
$x = \frac{11}{3}$	<i>Se dividieron ambos lados entre -3.</i>

**Ejemplo 5** Resuelva la ecuación  $2t - (t + 2) = 6$ .

**Solución**

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 79

$2t - (t + 2) = 6$	
$2t - t - 2 = 6$	<i>Se aplicó la propiedad distributiva.</i>
$t - 2 = 6$	<i>Reducción de términos semejantes.</i>
$t = 8$	<i>Se dividieron ambos lados entre 2.</i>



## 2 Resolver ecuaciones que contienen números decimales o fracciones

En el capítulo 3 resolveremos muchas ecuaciones que contienen números decimales. Para hacerlo, seguiremos el mismo procedimiento descrito. El ejemplo 6 ilustra dos métodos para solucionar una ecuación con números decimales.

**Ejemplo 6** Resuelva la ecuación  $x + 1.24 - 0.07x = 4.96$ .

**Solución** Este ejemplo se resolverá empleando dos métodos. En el primero trabajaremos con números decimales durante el proceso de solución. En el segundo, multiplicaremos los dos lados de la ecuación por una potencia de 10 para cambiar los decimales por enteros.

**Método 1**

$$x + 1.24 - 0.07x = 4.96$$

$$0.93x + 1.24 = 4.96$$

*Se redujeron los términos semejantes,  $1x - 0.07x = 0.93x$ .*

$$0.93x + 1.24 - 1.24 = 4.96 - 1.24$$

*Se resta 1.24 en ambos lados.*

$$0.93x = 3.72$$

$$\frac{0.93x}{0.93} = \frac{3.72}{0.93}$$

*Se dividen ambos lados entre 0.93.*

$$x = 4$$

**Método 2** Algunos estudiantes prefieren eliminar los números decimales de la ecuación multiplicando ambos lados por 10 si los decimales están en décimas; por 100, si están en centésimas, y así sucesivamente. Como en el ejemplo 6 los decimales se hallan en centésimas, los eliminaremos multiplicando ambos lados de la ecuación por 100. Este método alternativo da como resultado lo siguiente.

$$x + 1.24 - 0.07x = 4.96$$

$$100(x + 1.24 - 0.07x) = 100(4.96)$$

*Multiplicar ambos lados por 100.*

$$100(x) + 100(1.24) - 100(0.07x) = 496$$

*Propiedad distributiva.*

$$100x + 124 - 7x = 496$$

$$93x + 124 = 496$$

*Reducir términos semejantes.*

$$93x = 372$$

*Se restó 124 en ambos lados.*

$$x = 4$$

*Se dividieron ambos lados entre 93.*

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 41**

Estudie los dos métodos que se dan para que decida cuál prefiere. 

A continuación analizaremos la solución de ecuaciones que contienen fracciones. Habrá distintos momentos durante el curso en los que sea necesario resolver ecuaciones que incluyan fracciones. El primer paso para solucionarlas es multiplicar los dos lados por el mcd para eliminar las fracciones. Los ejemplos 7 a 9 ilustran el procedimiento.

**Ejemplo 7** Resolver  $\frac{x - 3}{5} = 7$ .

**Solución** El mcd de la fracción en este ejercicio es 5. El paso 1 del procedimiento dice que hay que multiplicar los dos lados de la ecuación por el mcd. Esto eliminará las fracciones de la ecuación.

$$\frac{x - 3}{5} = 7$$

**Paso 1**

$$5 \left( \frac{x - 3}{5} \right) = 5 \cdot 7$$

*Multiplicar ambos lados por el mcd, que es 5.*

$$x - 3 = 35$$

**Paso 4**

$$x = 38$$

*Se sumó tres en ambos lados.*

Paso 6 Comprobación:

$$\frac{x-3}{5} = 7$$

$$\frac{38-3}{5} \stackrel{?}{=} 7$$

$$\frac{35}{5} \stackrel{?}{=} 7$$

$$7 = 7 \quad \text{Verdadero.}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 45

Por tanto, la solución es 38. 

En el ejemplo 7, la ecuación  $\frac{x-3}{5} = 7$  también hubiera podido expresarse como  $\frac{1}{5}(x-3) = 7$ . Si la ecuación se hubiera dado de esta forma, habríamos comenzado la solución del mismo modo, con la multiplicación de ambos lados por el mcd, que es 5.

**Ejemplo 8** Resolver  $\frac{d}{2} + 3d = 14$ .

**Solución** El paso 1 dice que es necesario multiplicar los dos lados de la ecuación por el mcd, 2. Esto eliminará las fracciones.

Paso 1  $2\left(\frac{d}{2} + 3d\right) = 14 \cdot 2$  Multiplicar ambos lados por el mcd, 2.

Paso 2  $2\left(\frac{d}{2}\right) + 2 \cdot 3d = 14 \cdot 2$  Propiedad distributiva.

$$d + 6d = 28$$

Paso 3  $7d = 28$  Se redujeron términos semejantes

Paso 5  $d = 4$  Se dividieron ambos lados entre 7.

Paso 6 Comprobación:  $\frac{d}{2} + 3d = 14$

$$\frac{4}{2} + 3(4) \stackrel{?}{=} 14$$

$$2 + 12 \stackrel{?}{=} 14$$

$$14 = 14 \quad \text{Verdadero.}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 89



**Ejemplo 9** Resolver la ecuación  $\frac{1}{5}x - \frac{3}{8}x = \frac{1}{10}$

**Solución** El mcd de 5, 8 y 10 es 40. Se multiplican ambos lados de la ecuación por 40 para eliminar las fracciones.

$$\frac{1}{5}x - \frac{3}{8}x = \frac{1}{10}$$

Paso 1  $40\left(\frac{1}{5}x - \frac{3}{8}x\right) = 40\left(\frac{1}{10}\right)$  Multiplicar los dos lados por el mcd, 40.

Paso 2  $40\left(\frac{1}{5}x\right) - 40\left(\frac{3}{8}x\right) = 40\left(\frac{1}{10}\right)$  Propiedad distributiva.

$$8x - 15x = 4$$

Paso 3  $-7x = 4$  Se redujeron términos semejantes.

Paso 5  $x = -\frac{4}{7}$  *Se dividieron ambos lados entre  $-7$ .*

Paso 6 **Comprobación:** Sustituir con  $-\frac{4}{7}$  cada  $x$  de la ecuación.

$$\frac{1}{5}x - \frac{3}{8}x = \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{7}\right) - \frac{3}{8}\left(-\frac{4}{7}\right) \stackrel{?}{=} \frac{1}{10} \quad \text{Sustituir con } -\frac{4}{7} \text{ cada } x \text{ de la ecuación.}$$

$$-\frac{4}{35} + \frac{3}{14} \stackrel{?}{=} \frac{1}{10} \quad \text{Dividir los factores comunes y después multiplicar las fracciones.}$$

$$-\frac{8}{70} + \frac{15}{70} \stackrel{?}{=} \frac{7}{70} \quad \text{Escribir cada fracción con el mcd, 70.}$$

$$\frac{7}{70} = \frac{7}{70} \quad \text{Verdadero.}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 99



### SUGERENCIA

En el ejemplo 9, multiplicamos los dos lados de la ecuación por el mcd, que era 40. Al resolver ecuaciones que contienen fracciones, multiplicando ambos lados por *cualquier* denominador común, eventualmente se llegará a la respuesta correcta (si no se comete ningún error), pero tal vez se tenga que trabajar con números más grandes. En el ejemplo 9, si se hubieran multiplicado ambos lados por 80, 120 o 160, por ejemplo, se habría obtenido la respuesta  $-\frac{4}{7}$  eventualmente. Al resolver ecuaciones en las que hay fracciones, deben multiplicarse ambos lados por el mcd. Pero si por error se multiplicaran ambos lados por un denominador común diferente con objeto de eliminar las fracciones, todavía sería posible obtener la respuesta correcta. Para demostrar que pueden emplearse otros denominadores comunes, ahora resuelva el ejemplo 9 con la multiplicación de ambos lados de la ecuación por el denominador común 80, en lugar del mcd 40.

Tal vez quiera comprobar las soluciones de las ecuaciones en las que hay fracciones mediante una calculadora; de ser así, trabaje por separado con cada lado de la ecuación. A continuación se muestran los pasos necesarios para evaluar, empleando una calculadora científica, el lado izquierdo de la ecuación del ejemplo 9, para  $x = -\frac{4}{7}$ .\*

$$\frac{1}{5}x - \frac{3}{8}x = \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{7}\right) - \frac{3}{8}\left(-\frac{4}{7}\right) = \frac{1}{10}$$

Evaluar el lado izquierdo de la ecuación

$$1 \boxed{\div} 5 \boxed{\times} 4 \boxed{+/-} \boxed{\div} 7 \boxed{-} 3 \boxed{\div} 8 \boxed{\times} 4 \boxed{+/-} \boxed{\div} 7 \boxed{=} 0.1.$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 99

Como el lado derecho de la ecuación es  $\frac{1}{10} = 0.1$ , la respuesta sí coincide.

### SUGERENCIA

Algunos de los términos de uso más común en álgebra son *evaluar*, *simplificar*, *resolver* y *comprobar*. Asegúrese de entender el significado de cada uno y la situación en que se utilizan.

(continúa en la página siguiente)

\*Tal vez difiera la secuencia de teclas para diversas calculadoras científicas. Le recomendamos que lea el manual de instrucciones de su calculadora.

**Evaluar:** *Evaluar una expresión* significa determinar su equivalencia numérica.

$$\begin{aligned}\text{Evaluar} \quad & 16 \div 2^2 + 36 \div 4 \\ & = 16 \div 4 + 36 \div 4 \\ & = 4 + 36 \div 4 \\ & = 4 + 9 \\ & = 13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Evaluar} \quad & -x^2 + 3x - 2 \text{ cuando } x = 4 \\ & = -4^2 + 3(4) - 2 \\ & = -16 + 12 - 2 \\ & = -4 - 2 \\ & = -6\end{aligned}$$

**Simplificar:** *Simplificar una expresión* significa realizar las operaciones y reducir los términos semejantes.

$$\begin{aligned}\text{Simplificar} \quad & 3(x - 2) - 4(2x + 3) \\ & 3(x - 2) - 4(2x + 3) = 3x - 6 - 8x - 12 \\ & \qquad \qquad \qquad = -5x - 18\end{aligned}$$

Observe que al simplificar una expresión que contiene variables, por lo general no se llega a un valor numérico aislado, a menos que todos los términos de la variable sumen cero.

**Resolver:** *Resolver una ecuación* significa encontrar el valor o valores de la variable que hacen de la ecuación una proposición verdadera.

$$\begin{aligned}\text{Resolver} \quad & 2x + 3(x + 1) = 18 \\ & 2x + 3x + 3 = 18 \\ & 5x + 3 = 18 \\ & 5x = 15 \\ & x = 3\end{aligned}$$

**Comprobación:** *Comprobar la solución propuesta de una ecuación* consiste en sustituir su valor en la ecuación original. Si esta sustitución da lugar a una proposición verdadera, entonces la respuesta es correcta. Por ejemplo, para comprobar la solución de la ecuación anterior, utilizamos el 3 para sustituir cada  $x$ .

$$\begin{aligned}\text{Comprobación} \quad & 2x + 3(x + 1) = 18 \\ & 2(3) + 3(3 + 1) \stackrel{?}{=} 18 \\ & 6 + 3(4) \stackrel{?}{=} 18 \\ & 6 + 12 \stackrel{?}{=} 18 \\ & 18 = 18 \quad \text{Verdadero.}\end{aligned}$$

Como se obtuvo una proposición verdadera, la respuesta es correcta.

**Es importante darse cuenta que las expresiones se pueden evaluar o simplificar (según el problema) y las ecuaciones se resuelven y después se comprueban.**

## Conjunto de ejercicios 2.4

### Ejercicios conceptuales

1. ¿La ecuación  $x + 3 = 2x + 5$  contiene una variable en un solo lado? Explique su respuesta.
2. ¿La ecuación  $2x - 4 = 3$  contiene una variable en un solo lado? Explique su respuesta.
3. Si  $1x = \frac{1}{3}$ , ¿cuánto vale  $x$ ?
4. Si  $1x = -\frac{3}{5}$ , ¿cuánto vale  $x$ ?
5. Si  $-x = \frac{1}{2}$ , ¿cuánto vale  $x$ ?
6. ¿Cuál es el valor de  $x$  si  $-x = \frac{7}{8}$ ?
7. ¿Cuánto vale  $x$  si  $-x = -\frac{3}{5}$ ?
8. Si  $-x = -\frac{4}{9}$ , ¿cuánto vale  $x$ ?
9. ¿Una ecuación se evalúa o se resuelve? Explique su respuesta.
10. ¿Evaluaría o resolvería una expresión? Explique.
11. a) Escriba con sus propias palabras el procedimiento general para resolver una ecuación en la que la variable aparece en un solo lado del signo de igualdad.  
b) Revise nuevamente el procedimiento general para resolver ecuaciones (páginas 123 y 124) para ver si omitió alguno.
12. Cuando se resuelven ecuaciones en las que hay fracciones, ¿cuál es el primer paso del proceso para resolverlas?
13. a) Explique, paso a paso, cómo se resuelve la ecuación  $2(3x + 4) = -4$ .  
b) Solucione la ecuación con los pasos que enlistó en el inciso a).
14. a) Explique, paso a paso, cómo resolver la ecuación  $4x - 2(x + 3) = 4$ .  
b) Resuelva la ecuación mediante los pasos que enlistó en el inciso a).

### Práctica de habilidades

Resuelva cada ecuación. Tal vez desee emplear una calculadora para resolver aquellas que contienen números decimales.

- |                                      |                                      |                                     |                                      |
|--------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 15. $3x + 6 = 12$                    | 16. $2x - 4 = 8$                     | 17. $-4w - 5 = 11$                  | 18. $-4x + 6 = 20$                   |
| 19. $5x - 6 = 19$                    | 20. $6 - 3x = 18$                    | 21. $5x - 2 = 10$                   | 22. $-5k - 4 = -19$                  |
| 23. $-2t + 9 = 21$                   | 24. $20 = 2d + 6$                    | 25. $12 - x = 9$                    | 26. $-3x - 3 = -12$                  |
| 27. $8 + 3x = 19$                    | 28. $-2x + 7 = -10$                  | 29. $16x + 5 = -14$                 | 30. $19 = 25 + 4x$                   |
| 31. $-4.2 = 3x + 25.8$               | 32. $-24 + 16x = -24$                | 33. $7r - 16 = -2$                  | 34. $-2w + 4 = -8$                   |
| 35. $60 = -5s + 9$                   | 36. $15 = 7x + 1$                    | 37. $-2x - 7 = -13$                 | 38. $-2 - x = -12$                   |
| 39. $2.3x - 9.34 = 6.3$              | 40. $x + 0.05x = 21$                 | 41. $x + 0.07x = 16.05$             | 42. $-2.7 = -1.3 + 0.7x$             |
| 43. $28.8 = x + 1.40x$               | 44. $8.40 = 2.45x - 1.05x$           | 45. $\frac{x - 4}{6} = 9$           | 46. $\frac{m - 6}{5} = 2$            |
| 47. $\frac{d + 3}{7} = 9$            | 48. $\frac{1}{5}(x + 2) = -3$        | 49. $\frac{1}{3}(t - 5) = -6$       | 50. $\frac{2}{3}(n - 3) = 8$         |
| 51. $\frac{3}{4}(x - 5) = -12$       | 52. $\frac{x + 4}{7} = \frac{3}{7}$  | 53. $\frac{1}{4} = \frac{z + 1}{4}$ | 54. $\frac{4x + 5}{6} = \frac{7}{2}$ |
| 55. $\frac{3}{4} = \frac{4m - 5}{6}$ | 56. $\frac{5}{6} = \frac{5t - 4}{2}$ | 57. $4(n + 2) = 8$                  | 58. $3(x - 2) = 12$                  |
| 59. $5(3 - x) = 15$                  | 60. $-2(x - 3) = 26$                 | 61. $-4 = -(x + 5)$                 | 62. $-3(2 - 3x) = 9$                 |
| 63. $12 = 4(x - 3)$                  | 64. $-2(x + 8) - 5 = 1$              | 65. $22 = -(3x - 4)$                |                                      |
| 66. $-2 = 5(3x + 1) - 12x$           | 67. $-3r + 4(r + 2) = 11$            | 68. $9 = -2(a - 3)$                 |                                      |
| 69. $x - 3(2x + 3) = 11$             | 70. $3(4 - x) + 5x = 9$              | 71. $5x + 3x - 4x - 7 = 9$          |                                      |
| 72. $4(x + 2) = 13$                  | 73. $0.7(x - 3) = 1.4$               | 74. $21 + (c - 9) = 24$             |                                      |
| 75. $2.5(4q - 3) = 0.5$              | 76. $0.1(2.4x + 5) = 1.7$            | 77. $3 - 2(x + 3) + 2 = 1$          |                                      |
| 78. $2(3x - 4) - 4x = 12$            | 79. $1 + (x + 3) + 6x = 6$           | 80. $5x - 2x + 7x = -81$            |                                      |
| 81. $4.85 - 6.4x + 1.11 = 22.6$      | 82. $5.76 - 4.24x - 1.9x = 27.864$   | 83. $7 = 8 - 5(m + 3)$              |                                      |

$$84. -4 = 3 - 6(t - 5)$$

$$85. 10 = \frac{2s + 4}{5}$$

$$86. 12 = \frac{4d - 1}{3}$$

$$87. x + \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$$

$$88. n - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$89. \frac{t}{4} - t = \frac{3}{2}$$

$$90. n - \frac{n}{3} = \frac{1}{2}$$

$$91. \frac{3}{7} = \frac{3t}{4} + 1$$

$$92. \frac{5}{8} = \frac{5t}{6} + 2$$

$$93. \frac{1}{2}r + \frac{1}{5}r = 7$$

$$94. \frac{2}{8} + \frac{3}{4} = \frac{w}{5}$$

$$95. \frac{x}{3} - \frac{3x}{4} = \frac{1}{12}$$

$$96. \frac{x}{4} - \frac{x}{6} = \frac{1}{4}$$

$$97. \frac{1}{2}x + 4 = \frac{1}{4}$$

$$98. \frac{4}{5} + n = \frac{1}{3}$$

$$99. \frac{4}{5}s - \frac{3}{4}s = \frac{1}{10}$$

$$100. \frac{2}{3} = \frac{1}{5}(t + 2)$$

$$101. \frac{4}{9} = \frac{1}{3}(n - 7)$$

$$102. -\frac{3}{8} = \frac{1}{8} - \frac{2x}{7}$$

$$103. -\frac{3}{5} = -\frac{1}{9} - \frac{3}{4}x$$

$$104. -\frac{3}{5} = -\frac{1}{6} - \frac{5}{4}m$$

## Solución de problemas

105. a) Explique por qué es más fácil resolver la ecuación  $3x + 2 = 11$  si primero se resta 2 en ambos lados, en lugar de dividirlos primero entre 3.  
b) Resuelva la ecuación.
106. a) Diga por qué es más fácil resolver la ecuación  $5x - 3 = 12$  si primero se suma 3 en ambos lados, en vez de primero dividirlos entre 5.  
b) Resuelva la ecuación.

## Problemas de reto

Para los ejercicios 107 a 109, resuelva cada ecuación.

$$107. 3(x - 2) - (x + 5) - 2(3 - 2x) = 18$$

$$108. -6 = -(x - 5) - 3(5 + 2x) - 4(2x - 4)$$

$$109. 4[3 - 2(x + 4)] - (x + 3) = 13$$

$$110. \text{Resuelva la ecuación } \square \odot - \nabla = @ \text{ para } \odot.$$



## Actividad en grupo

En el capítulo 3 se estudiarán procedimientos para escribir problemas de aplicación como ecuaciones. Ahora se verá una aplicación.

**Fiesta de cumpleaños.** John Logan compró dos barras grandes de chocolate y una tarjeta de cumpleaños. La tarjeta cuesta \$3. El precio total de los tres artículos fue de \$9. ¿Cuál fue el precio de cada chocolate?

Este problema se representa mediante la ecuación  $2x + 3 = 9$  que se emplea para resolverlo. Al resolver la ecuación, encontramos que el precio de cada chocolate ( $x$ ) es de \$3.

Para los ejercicios 111 y 112, cada miembro del grupo debe hacer los incisos a) y b). Después, todo el grupo hará el inciso c).

- a) Plantee una ecuación que se utilice para resolver el problema.  
b) Resuelva la ecuación y responda la pregunta.  
c) Compare y revise el trabajo de los demás.
111. **Obsequios** Eduardo Verner compró tres cajas de obsequios. También adquirió papel para envolver regalos y tarjetas de agradecimiento. Si el costo total del papel y las tarjetas fue de \$6, y el pago total fue de \$42, determine el costo de cada caja de obsequios.
112. **Dulces** Mahandi Ison compró tres rollos de dulces de menta y el periódico de la localidad. Si el periódico vale 50 centavos y él pagó \$2.75 en total, ¿cuánto cuesta un rollo de dulces?

## Ejercicios de repaso acumulativo

[1.9] 113. Evalúe  $[5(2 - 6) + 3(8 \div 4)^2]^2$ .

114. Evalúe  $-2x^2 + 3x - 12$  si  $x = 5$ .

[2.2] 115. Para resolver una ecuación, ¿qué se necesita hacer a la variable?

[2.3] 116. Para solucionar la ecuación  $7 = -4x$ , ¿se sumaría 4 en ambos lados o se los dividiría entre  $-4$ ? Explique su respuesta.

## 2.5 SOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES CON LA VARIABLE EN AMBOS LADOS DE LA ECUACIÓN



- 1 Solucionar ecuaciones con la variable en ambos lados.
- 2 Solucionar ecuaciones que contienen números decimales o fracciones.
- 3 Identificar identidades y contradicciones.

### 1 Solucionar ecuaciones con la variable en ambos lados

La ecuación  $4x + 6 = 2x + 4$  contiene a la variable  $x$  en ambos lados del signo de igualdad. Para resolver ecuaciones de este tipo, deben emplearse las propiedades adecuadas para reescribir la ecuación con todos los términos que contienen a la variable en un solo lado del signo de igualdad, y en el otro lado todos los términos que no contengan a la variable. Esto permitirá despejar la variable, que es el objetivo. A continuación se presenta un procedimiento general, similar al que se dio en la sección 2.4, para resolver ecuaciones lineales en las que aparezca la variable en ambos lados del signo de igualdad.

#### Para resolver ecuaciones lineales con la variable en ambos lados del signo de igualdad

1. Si la ecuación contiene fracciones, multiplique **ambos** lados por el mínimo común denominador. Esto eliminará las fracciones de la ecuación.
2. Aplique la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis.
3. Reduzca los términos semejantes en el mismo lado del signo de igualdad.
4. Utilice la propiedad de la suma para reescribir la ecuación con todos los términos que contienen a la variable en un lado del signo de igualdad, y todos los que no la contengan en el otro. Tal vez sea necesario usar la propiedad de la suma dos veces para lograr lo anterior. En algún momento obtendrá la ecuación de la forma  $ax = b$ .
5. Utilice la propiedad de la multiplicación para despejar la variable. Esto dará una solución de la forma  $x = \text{cierto número}$ .
6. Compruebe la solución en la ecuación original.

Los pasos que se enlistan aquí son en esencia los mismos del procedimiento que está en el recuadro de las páginas 123 y 124, excepto porque en el paso 4 quizá sea necesario emplear más de una vez la propiedad de la suma con objeto de obtener una ecuación de la forma  $ax = b$ .

**Recuerde que nuestro objetivo al resolver ecuaciones es despejar la variable, es decir, dejarla sola en un lado de la ecuación.**

Considere la ecuación  $3x + 4 = x + 12$ , que no contiene fracciones ni paréntesis, y no tiene términos semejantes en el mismo lado del signo de igualdad;



por tanto, comenzamos con el paso 4, la propiedad de la suma, que aplicaremos dos veces a fin de obtener una ecuación en la que la variable aparezca en un solo lado del signo de igualdad. Comenzamos restando  $x$  en ambos lados para que todos los términos que contienen la variable queden en el lado izquierdo. Esto dará lo siguiente:

#### Ecuación

$$3x + 4 = x + 12$$

$$3x - x + 4 = x - x + 12 \quad \text{Propiedad de la suma.}$$

$$\text{o} \quad 2x + 4 = 12 \quad \text{La variable aparece sólo en el lado izquierdo del signo de igualdad.}$$

Observe que la variable,  $x$ , aparece sólo de un lado de la ecuación. Sin embargo, el  $+4$  todavía está en el mismo lado del signo de igualdad en que está  $2x$ . Emplearemos nuevamente la propiedad de la suma para hacer que el término con la variable quede sólo en un lado de la ecuación. Restando 4 de ambos lados obtenemos  $2x = 8$ , que es una ecuación de la forma  $ax = b$ .

#### Ecuación

$$2x + 4 = 12$$

$$2x + 4 - 4 = 12 - 4 \quad \text{Propiedad de la suma.}$$

$$2x = 8 \quad \text{Ahora, el término con } x \text{ está despejado.}$$

Ahora que el  $2x$  quedó aislado en un lado de la ecuación, empleamos la propiedad de la multiplicación, paso 5, para despejar la variable  $x$ , para lo cual dividimos ambos lados entre 2 y así resolvemos la ecuación.

$$2x = 8$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{4}{8}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{2}{1} \quad \text{Propiedad de la multiplicación.}$$

$$x = 4 \quad \text{La } x \text{ está despejada.}$$

La solución de la ecuación es 4.

### Ejemplo 1 Solución

Resolver la ecuación  $4x + 6 = 2x + 4$ .

Recuerde que nuestro objetivo es que todos los términos que contienen la variable queden en un lado del signo de igualdad, y todos los términos que no la contienen se queden del otro lado. Los términos con la variable pueden agruparse en cualquiera de los dos lados del signo de igualdad, así como también podemos utilizar muchos métodos para despejar la variable; aquí ilustraremos dos de estos métodos. En el método 1 dejaremos la variable del lado izquierdo de la ecuación, en el método 2, del lado derecho. En ambos métodos seguiremos los pasos del recuadro de la página 133. Como esta ecuación no contiene fracciones o paréntesis, y no hay términos semejantes en el mismo lado del signo de igualdad, comenzamos con el paso 4.

**Método 1:** Despejar la variable en el lado izquierdo

$$4x + 6 = 2x + 4$$

$$\text{Paso 4} \quad 4x - 2x + 6 = 2x - 2x + 4 \quad \text{Restar } 2x \text{ en ambos lados.}$$

$$2x + 6 = 4$$

$$\text{Paso 4} \quad 2x + 6 - 6 = 4 - 6 \quad \text{Dividir ambos lados entre 2.}$$

$$2x = -2$$

$$\begin{array}{l} \text{Paso 5} \quad \frac{2x}{2} = \frac{-2}{2} \quad \text{Dividir ambos lados entre 2.} \\ x = -1 \end{array}$$

**Método 2:** Despejar la variable en el lado derecho

$$\begin{array}{l} 4x + 6 = 2x + 4 \\ \text{Paso 4} \quad 4x - 4x + 6 = 2x - 4x + 4 \quad \text{Restar } 4x \text{ en ambos lados.} \\ 6 = -2x + 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Paso 4} \quad 6 - 4 = -2x + 4 - 4 \quad \text{Restar 4 en ambos lados.} \\ 2 = -2x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Paso 5} \quad \frac{2}{-2} = \frac{-2x}{-2} \quad \text{Dividir ambos lados entre } -2. \\ -1 = x \end{array}$$

Obtenemos la misma respuesta si despejamos la variable del lado izquierdo o del derecho. Sin embargo, con el método 2 es necesario dividir ambos lados de la ecuación entre un número negativo.

$$\begin{array}{l} \text{Paso 6 Comprobación:} \quad 4x + 6 = 2x + 4 \\ 4(-1) + 6 \stackrel{?}{=} 2(-1) + 4 \\ -4 + 6 \stackrel{?}{=} -2 + 4 \\ 2 = 2 \quad \text{Verdadero.} \end{array}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 19



**Ejemplo 2** Resuelva la ecuación  $2x - 3 - 5x = 13 + 4x - 2$ .

**Solución** Agrupamos los términos que contienen la variable en el lado derecho de la ecuación a fin de producir un coeficiente positivo para  $x$ . Como hay términos semejantes en el mismo lado del signo de igualdad, comenzaremos por reducirlos.

$$\begin{array}{l} \text{Paso 3} \quad 2x - 3 - 5x = 13 + 4x - 2 \\ -3x - 3 = 4x + 11 \quad \text{Se reducen los términos semejantes.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Paso 4} \quad -3x + 3x - 3 = 4x + 3x + 11 \quad \text{Sumar } 3x \text{ en ambos lados.} \\ -3 = 7x + 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Paso 4} \quad -3 - 11 = 7x + 11 - 11 \quad \text{Restar 11 en ambos lados.} \\ -14 = 7x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Paso 5} \quad \frac{-14}{7} = \frac{7x}{7} \quad \text{Dividir ambos lados entre 7.} \\ -2 = x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Paso 6 Comprobación:} \quad 2x - 3 - 5x = 13 + 4x - 2 \\ 2(-2) - 3 - 5(-2) \stackrel{?}{=} 13 + 4(-2) - 2 \\ -4 - 3 + 10 \stackrel{?}{=} 13 - 8 - 2 \\ -7 + 10 \stackrel{?}{=} 5 - 2 \\ 3 = 3 \quad \text{Verdadero.} \end{array}$$

Como la comprobación se cumple, la solución es  $-2$ .



La solución al ejemplo 2 se resume como sigue:

$$\begin{aligned}
 2x - 3 - 5x &= 13 + 4x - 2 \\
 -3x - 3 &= 4x + 11 && \text{Se redujeron términos semejantes.} \\
 -3 &= 7x + 11 && \text{Se sumó } 3x \text{ en ambos lados.} \\
 -14 &= 7x && \text{Se restó } 11 \text{ en ambos lados.} \\
 -2 &= x && \text{Se dividieron ambos lados entre } 7.
 \end{aligned}$$

Resolvimos el ejemplo 2 moviendo los términos con la variable al lado derecho de la ecuación. Ahora, hay que resolver nuevamente el problema, esta vez moviendo los términos con la variable al lado izquierdo. Debe obtener la misma respuesta.

### Ejemplo 3 Solución

Resuelva la ecuación  $2(p + 3) = -3p + 10$ .

$$\begin{aligned}
 &2(p + 3) = -3p + 10 \\
 \text{Paso 2} & \quad 2p + 6 = -3p + 10 && \text{Se usó la propiedad distributiva.} \\
 \text{Paso 4} & \quad 2p + 3p + 6 = -3p + 3p + 10 && \text{Sumar } 3p \text{ en ambos lados.} \\
 & \quad 5p + 6 = 10 \\
 \text{Paso 4} & \quad 5p + 6 - 6 = 10 - 6 && \text{Restar } 6 \text{ en ambos lados.} \\
 & \quad 5p = 4 \\
 \text{Paso 5} & \quad \frac{5p}{5} = \frac{4}{5} && \text{Dividir ambos lados entre } 5. \\
 & \quad p = \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

La solución del ejemplo 4 se resume como sigue:

$$\begin{aligned}
 2(p + 3) &= -3p + 10 \\
 2p + 6 &= -3p + 10 && \text{Se usó la propiedad distributiva.} \\
 5p + 6 &= 10 && \text{Se sumó } 3p \text{ en ambos lados.} \\
 5p &= 4 && \text{Se restó } 6 \text{ en ambos lados.} \\
 p &= \frac{4}{5} && \text{Se dividieron ambos lados entre } 5.
 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 27



### SUGERENCIA

Después de aplicar la propiedad distributiva en el ejemplo 3, obtuvimos la ecuación  $2p + 6 = -3p + 10$ . Luego había que decidir si agrupar los términos con la variable en el lado izquierdo o en el derecho del signo de igualdad. Si queremos que la suma de los términos que contienen a la variable sea positiva, usamos la propiedad de la suma para eliminar la variable que tenga el coeficiente numérico *más pequeño* de un lado de la ecuación. Como  $-3$  es más pequeño que  $2$ , sumamos  $3p$  en ambos lados, lo que eliminó  $-3p$  del lado derecho e hizo que la suma de los términos que contienen a la variable quedasen del izquierdo con signo positivo ( $5p$ ).

### Ejemplo 4 Solución

Resuelva la ecuación  $2(x - 5) + 3 = 3x + 9$ .

$$\begin{aligned}
 &2(x - 5) + 3 = 3x + 9 \\
 \text{Paso 2} & \quad 2x - 10 + 3 = 3x + 9 && \text{Se empleó la propiedad distributiva.} \\
 \text{Paso 3} & \quad 2x - 7 = 3x + 9 && \text{Se redujeron los términos semejantes.} \\
 \text{Paso 4} & \quad -7 = x + 9 && \text{Se restó } 2x \text{ en ambos lados.} \\
 \text{Paso 4} & \quad -16 = x && \text{Se restó } 9 \text{ en ambos lados.}
 \end{aligned}$$



**Ejemplo 5** Resolver la ecuación  $7 - 2x + 5x = -2(-3x + 4)$ .

**Solución**  $7 - 2x + 5x = -2(-3x + 4)$

**Paso 2**  $7 - 2x + 5x = 6x - 8$  *Se usó la propiedad distributiva.*

**Paso 3**  $7 + 3x = 6x - 8$  *Se redujeron los términos semejantes.*

**Paso 4**  $7 = 3x - 8$  *Se restó 3x en ambos lados.*

**Paso 4**  $15 = 3x$  *Se sumó 8 en ambos lados.*

**Paso 5**  $5 = x$  *Se dividieron ambos lados entre 3.*

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 63**

La solución es 5.



## 2 Solucionar ecuaciones que contienen números decimales o fracciones

Ahora resolveremos una ecuación que contiene números decimales. Como explicamos en la sección anterior, esa clase de ecuaciones se resuelven mediante diversos procedimientos. En la solución del ejemplo 6 se ilustrarán dos de ellos.

**Ejemplo 6** Resuelva la ecuación  $5.74x + 5.42 = 2.24x - 9.28$ .

**Solución** **Método 1** En primer lugar, observe que no hay términos semejantes en el mismo lado del signo de igualdad que pudieran reducirse. Agrupamos en el lado izquierdo los términos que contienen la variable.

$$5.74x + 5.42 = 2.24x - 9.28$$

**Paso 4**  $5.74x - 2.24x + 5.42 = 2.24x - 2.24x - 9.28$  *Restar 2.24x en ambos lados.*

$$3.50x + 5.42 = -9.28$$

**Paso 4**  $3.50x + 5.42 - 5.42 = -9.28 - 5.42$  *Restar 5.42 en ambos lados.*

$$3.50x = -14.7$$

**Paso 5**  $\frac{3.50x}{3.50} = \frac{-14.7}{3.50}$  *Dividir ambos lados entre 3.5.*

$$x = -4.20$$

**Método 2** En la sección anterior introdujimos un procedimiento para eliminar, de las ecuaciones, números decimales; si están dados en décimas, multiplicamos ambos lados de la ecuación por 10. Si están en centésimas, multiplicamos ambos lados por 100, y así sucesivamente. Como la ecuación de que se trata tiene números en centésimas, multiplicaremos por 100.

$$5.74x + 5.42 = 2.24x - 9.28$$

$$100(5.74x + 5.42) = 100(2.24x - 9.28)$$
 *Multiplicar los dos lados por 100.*

$$100(5.74x) + 100(5.42) = 100(2.24x) - 100(9.28)$$
 *Propiedad distributiva.*

$$574x + 542 = 224x - 928$$

**Paso 4**  $574x + 542 - 542 = 224x - 928 - 542$  *Restar 542 en ambos lados.*

$$574x = 224x - 1470$$


**Paso 4**  $574x - 224x = 224x - 224x - 1470$  *Restar 224x en ambos lados.*

$$350x = -1470$$

Paso 5 
$$\frac{350x}{350} = \frac{-1470}{350}$$
 *Dividir los dos lados entre 350.*  

$$x = -4.20$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 25

Observe que obtenemos la misma respuesta con cualquier método. Usted puede utilizar el que más le agrade para resolver ecuaciones de este tipo. 

Ahora veremos algunas ecuaciones que contienen fracciones en ambos lados del signo de igualdad.

**Ejemplo 7** Resuelva la ecuación  $\frac{1}{2}a = \frac{3}{4}a + \frac{1}{5}$ .

**Solución** Paso 1 En esta ecuación la variable es  $a$ . El mínimo común denominador es 20. Comenzamos multiplicando ambos lados de la ecuación por el mcd.

$$\frac{1}{2}a = \frac{3}{4}a + \frac{1}{5}$$

Paso 1  $20\left(\frac{1}{2}a\right) = 20\left(\frac{3}{4}a + \frac{1}{5}\right)$  *Multiplicar ambos lados por el mcd, 20.*


Paso 2  $10a = 20\left(\frac{3}{4}a\right) + 20\left(\frac{1}{5}\right)$  *Propiedad distributiva.*  
 $10a = 15a + 4$

Paso 4  $-5a = 4$  *Se restó 15a en ambos lados.*

Paso 5  $a = -\frac{4}{5}$  *Se dividieron ambos lados entre -5.*

Paso 6 **Comprobación:**  $\frac{1}{2}a = \frac{3}{4}a + \frac{1}{5}$   
 $\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{5}\right) \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{1}{5}$   
 $-\frac{2}{5} \stackrel{?}{=} -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}$   
 $-\frac{2}{5} = -\frac{2}{5}$  *Verdadero.*

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 51

La solución de la ecuación es  $-\frac{4}{5}$ . 

## SUGERENCIA

La ecuación del ejemplo 7,  $\frac{1}{2}a = \frac{3}{4}a + \frac{1}{5}$ , hubiera podido darse como  $\frac{a}{2} = \frac{3a}{4} + \frac{1}{5}$  debido a que  $\frac{1}{2}a$  es lo mismo que  $\frac{a}{2}$ , y  $\frac{3}{4}a$  lo mismo que  $\frac{3a}{4}$ . Usted habría resuelto la ecuación  $\frac{a}{2} = \frac{3a}{4} + \frac{1}{5}$  de la misma forma que la del ejemplo 7. Comenzaría por multiplicar ambos lados de la ecuación por el mcd, 20.

**Ejemplo 8** Resuelva la ecuación  $\frac{x}{4} + 3 = 2(x - 2)$ .

**Solución** Comience por multiplicar ambos lados de la ecuación por el mcd, 4.

$$\begin{aligned}\frac{x}{4} + 3 &= 2(x - 2) \\ 4\left(\frac{x}{4} + 3\right) &= 4[2(x - 2)] && \text{Multiplicar ambos lados por el mcd, 4.} \\ 4\left(\frac{x}{4}\right) + 4(3) &= 4[2(x - 2)] && \text{Propiedad distributiva (se usó en el lado izquierdo).} \\ x + 12 &= 8(x - 2) \\ x + 12 &= 8x - 16 && \text{Propiedad distributiva (se usó en el lado derecho).} \\ 12 &= 7x - 16 && \text{Se restó } x \text{ en ambos lados.} \\ 28 &= 7x && \text{Se sumó 16 en ambos lados.} \\ 4 &= x && \text{Se dividieron ambos lados entre 7.}\end{aligned}$$

La comprobación mostrará que la solución es 4. 

### SUGERENCIA

Observe que la ecuación del ejemplo 8 tenía *dos términos* en el lado izquierdo del signo de igualdad,  $\frac{x}{4}$  y 3; y sólo *un término* del lado derecho,  $2(x - 2)$ . Por tanto, después de multiplicar los dos lados de la ecuación por 4, el siguiente paso fue utilizar la propiedad distributiva en el lado izquierdo

**Ejemplo 9** Resuelva la ecuación  $\frac{1}{2}(2x + 3) = \frac{2}{3}(x - 6) + 4$ .

Observe que esta ecuación contiene un término en el lado izquierdo del signo de igualdad y dos en el derecho.

**Solución** Se multiplican ambos lados de la ecuación por el mcd, 6.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(2x + 3) &= \frac{2}{3}(x - 6) + 4 \\ 6 \cdot \frac{1}{2}(2x + 3) &= 6\left[\frac{2}{3}(x - 6) + 4\right] && \text{Multiplicar los dos lados por el mcd, 6.} \\ 3(2x + 3) &= 6 \cdot \frac{2}{3}(x - 6) + 6 \cdot 4 && \text{Propiedad distributiva (se usó en el lado derecho).} \\ 6x + 9 &= 4(x - 6) + 24 && \text{Propiedad distributiva (se usó en el lado izquierdo).} \\ 6x + 9 &= 4x - 24 + 24 && \text{Propiedad distributiva (se usó en el lado derecho).} \\ 6x + 9 &= 4x && \text{Se redujeron términos semejantes.} \\ 9 &= -2x && \text{Se restó } 6x \text{ en ambos lados.} \\ -\frac{9}{2} &= x && \text{Se dividieron ambos lados entre } -2.\end{aligned}$$

**Comprobación:** En la ecuación, se sustituye con  $-\frac{9}{2}$  cada  $x$ .

$$\frac{1}{2}(2x + 3) = \frac{2}{3}(x - 6) + 4$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[ 2 \left( -\frac{9}{2} \right) + 3 \right] &\stackrel{?}{=} \frac{2}{3} \left( -\frac{9}{2} - 6 \right) + 4 \\ \frac{1}{2} (-9 + 3) &\stackrel{?}{=} \frac{2}{3} \left( -\frac{9}{2} - \frac{12}{2} \right) + 4 \\ \frac{1}{2} (-6) &\stackrel{?}{=} \frac{2}{3} \left( -\frac{21}{2} \right) + 4 \\ -3 &\stackrel{?}{=} -7 + 4 \\ -3 &= -3 \end{aligned} \quad \text{Verdadero.}$$

Por tanto, la solución es  $-\frac{9}{2}$ .



#### AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 75

En el ejemplo 9, la ecuación dada podría haberse representado como  $\frac{2x + 3}{2} = \frac{2(x - 6)}{3} + 4$ . Si la ecuación se hubiera dado en esta forma, el primer paso para encontrar la solución habría sido multiplicar sus dos lados por el mcd, 6. Debido a que ésta sólo es otra manera de escribir la ecuación del ejemplo 9, la respuesta sería  $-\frac{9}{2}$ .

En la sección 6.6 se estudiará más la solución de ecuaciones que contienen fracciones.

### 3 Identificar identidades y contradicciones

Hasta este momento, todas las ecuaciones que hemos resuelto han tenido una solución única. Este tipo de ecuaciones se conoce como **ecuaciones condicionales**, ya que son verdaderas sólo en condiciones específicas. Algunas ecuaciones, como las del ejemplo 10, son verdaderas para todas las instancias de  $x$ ; a estas ecuaciones se les denomina **identidades**. Las de la tercera clase, como las del ejemplo 11, no tienen solución y reciben el nombre de **contradicción**.

#### Ejemplo 10

Resuelva la ecuación  $2x + 6 = 2(x + 3)$ .

#### Solución

$$\begin{aligned} 2x + 6 &= 2(x + 3) \\ 2x + 6 &= 2x + 6 \end{aligned}$$

Como la misma expresión aparece en ambos lados del signo de igualdad, la proposición es verdadera para todas las instancias de  $x$ . Si continuamos resolviendo esta ecuación obtendremos

$$\begin{aligned} 2x &= 2x && \text{Se restó 6 en ambos lados.} \\ 0 &= 0 && \text{Se restó 2x en ambos lados.} \end{aligned}$$

*Nota:* el proceso de solución puede terminar en  $2x + 6 = 2x + 6$ . Como un lado es idéntico al otro, la ecuación es verdadera para todas las instancias de  $x$ . **Por lo tanto, las soluciones de la ecuación son todos los números reales. Al resolver una ecuación, como la del ejemplo 10, que siempre es verdadera, la respuesta se escribe como “todos los números reales”.**



#### Ejemplo 11


Resuelva la ecuación  $-3x + 4 + 5x = 4x - 2x + 5$ .

#### Solución

$$\begin{aligned} -3x + 4 + 5x &= 4x - 2x + 5 \\ 2x + 4 &= 2x + 5 && \text{Se redujeron los términos semejantes.} \end{aligned}$$

$$2x - 2x + 4 = 2x - 2x + 5 \quad \text{Se resta } 2x \text{ en ambos lados.}$$

$$4 = 5 \quad \text{Falso.}$$

Al resolver una ecuación, si se obtiene una proposición que es obviamente falsa, como en este ejemplo, la ecuación *no tiene solución*. Ninguna sustitución de  $x$  hará que sea una proposición verdadera. **Al resolver una ecuación como la del ejemplo 11, que nunca es verdad, la respuesta se escribe como “sin solución”.** Una respuesta que se deje en blanco tal vez se tomará como errónea. 

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 31

### SUGERENCIA

Algunos estudiantes comienzan a resolver ecuaciones en forma correcta, pero no llegan a la solución. En ocasiones no están seguros de si lo que hacen es correcto y se rinden por falta de confianza. Usted debe tener confianza en sí mismo. Mientras siga el procedimiento de la página 133, llegará a la solución correcta aunque tenga que realizar varios pasos. Recuerde dos aspectos importantes: (1) nuestro objetivo es despejar la variable, y (2) cualquier cosa que haga en un lado de la ecuación también debe hacerla en el otro. Es decir, debe tratar ambos lados de la ecuación por igual.

## Conjunto de ejercicios 2.5

### Ejercicios conceptuales

1. a) Con sus propias palabras, escriba el procedimiento general para resolver una ecuación sin fracciones y con la variable en ambos lados.  
b) Consulte la página 133 para saber si omitió algunos pasos.
2. ¿Qué es una ecuación condicional?
3. a) ¿Qué es una identidad?  
b) ¿Cuál es la solución de la ecuación  $3x + 5 = 3x + 5$ ?
4. Al resolver una ecuación, ¿cómo sabe si se trata de una identidad?
5. Explique por qué la ecuación  $x + 5 = x + 5$  debe ser una identidad.
6. a) ¿Qué es una contradicción?  
b) ¿Cuál es la solución de una contradicción?
7. Al resolver una ecuación, ¿cómo sabe si no tiene soluciones reales?
8. Explique por qué la ecuación  $x + 5 = x + 4$  debe ser una contradicción.
9. a) Explique, paso a paso, cómo resolver la ecuación  $4(x + 3) = 6(x - 5)$ .  
b) Resuelva la ecuación de acuerdo con los pasos que enlistó en el inciso a).
10. a) Explique, paso a paso, cómo se soluciona la ecuación  $4x + 3(x + 2) = 5x - 10$ .  
b) Resuelva la ecuación según los pasos que enlistó en el inciso a).

### Práctica de habilidades

Resuelva cada ecuación.

11.  $3x = -2x + 15$

14.  $3a = 4a + 8$

17.  $21 - 6p = 3p - 2p$

20.  $-5x = -4x + 9$

23.  $9 - 0.5x = 4.5x + 8.5$

26.  $8.71 - 2.44x = 11.02 - 5.74x$

12.  $x + 4 = 2x - 7$

15.  $5x + 3 = 6$

18.  $8 - 3x = 4x + 50$

21.  $6 - 2y = 9 - 8y + 6y$

24.  $124.8 - 9.4x = 4.8x + 32.5$

27.  $5x + 3 = 2(x + 6)$

13.  $-4x + 10 = 6x$

16.  $-6x = 2x + 16$

19.  $2x - 4 = 3x - 6$

22.  $-4 + 2y = 2y - 6 + y$

25.  $0.62x - 0.65 = 9.75 - 2.63x$

28.  $x - 14 = 3(x + 2)$



29.  $x - 25 = 12x + 9 + 3x$       30.  $5y + 6 = 2y + 3 - y$       31.  $2(x - 2) = 4x - 6 - 2x$   
 32.  $4r = 10 - 2(r - 4)$       33.  $-(w + 2) = -6w + 32$       34.  $7(-3m + 5) = 3(10 - 6m)$   
 35.  $5 - 3(2t - 5) = 3t + 13$       36.  $4(2x - 3) = -2(3x + 16)$       37.  $\frac{a}{5} = \frac{a - 3}{2}$   
 38.  $\frac{b}{16} = \frac{b - 6}{4}$       39.  $6 - \frac{x}{4} = \frac{x}{8}$       40.  $\frac{n}{10} = 9 - \frac{n}{5}$   
 41.  $\frac{5}{2} - \frac{x}{3} = 3x$       42.  $\frac{x}{4} - 3 = -2x$       43.  $\frac{5}{8} + \frac{1}{4}a = \frac{1}{2}a$   
 44.  $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x$       45.  $0.1(x + 10) = 0.3x - 4$       46.  $5(3.2x - 3) = 2(x - 4)$   
 47.  $2(x + 4) = 4x + 3 - 2x + 5$       48.  $3(y - 1) + 9 = 8y + 6 - 5y$   
 49.  $5(3n + 3) = 2(5n - 4) + 6n$       50.  $-4(-3z - 5) = -(10z + 8) - 2z$   
 51.  $-(3 - p) = -(2p + 3)$       52.  $12 - 2x - 3(x + 2) = 4x + 6 - x$   
 53.  $-(x + 4) + 5 = 4x + 1 - 5x$       54.  $18x + 3(4x - 9) = -6x + 81$   
 55.  $35(2x - 1) = 7(x + 4) + 3x$       56.  $10(x - 10) + 5 = 5(2x - 20)$   
 57.  $0.4(x + 0.7) = 0.6(x - 4.2)$       58.  $0.5(6x - 8) = 1.4(x - 5) - 0.2$   
 59.  $\frac{3}{5}x + 4 = \frac{1}{5}x + 5$       60.  $\frac{3}{5}x - 2 = x + \frac{1}{3}$   
 61.  $\frac{3}{4}(2x - 4) = 4 - 2x$       62.  $\frac{1}{5}(w + 2) = w + 4$   
 63.  $-(x - 5) + 2 = 3(4 - x) + 5x$       64.  $3(x - 4) = 2(x - 8) + 5x$   
 65.  $3(x - 6) - 4(3x + 1) = x - 22$       66.  $-2(-3x + 5) + 6 = 4(x - 2)$   
 67.  $5 + 2x = 6(x + 1) - 5(x - 3)$       68.  $4 - (6x + 6) = -(-2x + 10)$   
 69.  $7 - (-y - 5) = 2(y + 3) - 6(y + 1)$       70.  $12 - 6x + 3(2x + 3) = 2x + 5$   
 71.  $\frac{1}{2}(2d + 4) = \frac{1}{3}(4d - 4)$       72.  $\frac{3}{5}(x - 6) = \frac{2}{3}(3x - 5)$   
 73.  $\frac{3(2r - 5)}{5} = \frac{3r - 6}{4}$       74.  $\frac{3(x - 4)}{4} = \frac{5(2x - 3)}{3}$   
 75.  $\frac{2}{7}(5x + 4) = \frac{1}{2}(3x - 4) + 1$       76.  $\frac{5}{12}(x + 2) = \frac{2}{3}(2x + 1) + \frac{1}{6}$   
 77.  $\frac{a - 5}{2} = \frac{3a}{4} + \frac{a - 25}{6}$       78.  $\frac{a - 7}{3} = \frac{a + 5}{2} - \frac{7a - 1}{6}$

## Solución de problemas

79. a) Construya una *ecuación condicional* que contenga tres términos en el lado izquierdo del signo de igualdad y dos en el derecho.  
 b) Explique cómo se sabe que la respuesta del inciso a) es una ecuación condicional.  
 c) Resuelva la ecuación.
80. a) Construya una *ecuación condicional* que contenga dos términos en el lado izquierdo del signo de igualdad y tres en el derecho.  
 b) Diga cómo se sabe que la respuesta del inciso a) es una ecuación condicional.  
 c) Resuelva la ecuación.
81. a) Construya una *identidad* que contenga tres términos en el lado izquierdo del signo de igualdad y dos en el derecho.  
 b) ¿Cómo se sabría que la respuesta del inciso a) es una identidad?  
 c) ¿Cuál es la solución de la ecuación?
82. a) Construya una *identidad* en la que haya dos términos en el lado izquierdo del signo de igualdad y tres en el derecho.  
 b) Explique cómo se sabría que la respuesta del inciso a) es una identidad.  
 c) ¿Cuál es la solución de la ecuación?

83. a) Construya una *contradicción* que contenga tres términos en el lado izquierdo del signo de igualdad y dos en el derecho.  
 b) Explique cómo se sabría si la respuesta al inciso a) es una contradicción.  
 c) ¿Cuál es la solución de la ecuación?
84. a) Construya una *contradicción* que contenga tres términos en el lado izquierdo del signo de igualdad y cuatro en el derecho.  
 b) Explique cómo saber que la respuesta al inciso a) es una contradicción.  
 c) ¿Cuál es la solución de la ecuación?

## Problemas de reto

85. Resuelva la ecuación  $5* - 1 = 4* + 5$  para  $*$ .  
 86. Resuelva la ecuación  $2\Delta - 4 = 3\Delta + 5 - \Delta$  para  $\Delta$ .  
 87. Resuelva la ecuación  $3\text{☺} - 5 = 2\text{☺} - 5 + \text{☺}$  para  $\text{☺}$ .
88. Resuelva la ecuación  $-2(x + 3) + 5x = 3(4 - 2x) - (x + 2)$ .  
 89. Resuelva la ecuación  $4 - [5 - 3(x + 2)] = x - 3$ .



## Actividad en grupo

Como grupo analicen y respondan el ejercicio 90. En el capítulo siguiente se estudiarán procedimientos para escribir problemas de aplicación como ecuaciones. Ahora se obtendrá cierta práctica.

90. **Barras de chocolate.** Considere la descripción del siguiente problema. Mary Kay compró dos barras grandes de chocolate. El costo total de los dos artículos fue igual al costo de uno de ellos más \$6. Determinen el costo de una barra.
- a) Cada miembro del grupo: represente este problema como ecuación, con la variable  $x$ .
- b) Cada miembro del grupo: resuelva la ecuación que se planteó en el inciso a).
- c) Como grupo, comprueben la ecuación y la respuesta para estar seguros de que tiene sentido.

## Ejercicios de repaso acumulativo

- [1.5] 91. Evalúe a)  $|4|$  b)  $|-7|$  c)  $|0|$ .  
 [1.9] 92. Evalúe  $\left(\frac{2}{3}\right)^5$  con la calculadora.  
 [2.1] 93. Explique la diferencia entre factores y términos.
94. Simplifique la expresión  $2(x - 3) + 4x - (4 - x)$ .  
 [2.4] 95. Resuelva  $2(x - 3) + 4x - (4 - x) = 0$ .  
 96. Resuelva  $(x + 4) - (4x - 3) = 16$ .

## 2.6 RAZONES Y PROPORCIONES



- 1 Entender las razones.
- 2 Resolver proporciones mediante productos cruzados.
- 3 Resolver aplicaciones.
- 4 Usar proporciones para convertir unidades.
- 5 Emplear proporciones para solucionar problemas que involucran figuras semejantes.

### 1 Entender las razones

Una **razón** es un cociente de dos cantidades. Las razones proporcionan una manera de comparar dos números o cantidades. La razón del número  $a$  al número  $b$  se escribe así:

$$a \text{ es a } b, \quad a:b, \quad \text{o bien} \quad \frac{a}{b}$$

donde  $a$  y  $b$  reciben el nombre de **términos de la razón**.

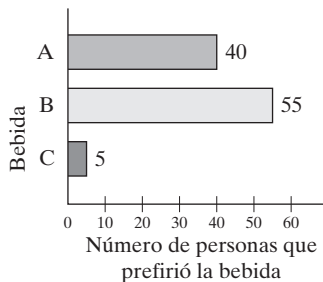
**Ejemplo 1**

FIGURA 2.2

**Prueba de degustación** En diversos centros comerciales, una empresa de bebidas llevó a cabo una prueba de tres bebidas, A, B y C, respectivamente. El propósito de la prueba era determinar cuál de las tres nuevas bebidas se lanzaría al mercado. Se pidió a los participantes en la Plaza de América que probaran las tres e indicaran cuál había sido su favorita. En la figura 2.2 se muestran los resultados de la prueba.

**a)** Encuentre la razón del número de personas que seleccionó B, a aquellos que seleccionaron A.

**b)** Halle la razón del número de personas que seleccionó C al número total que participó en el sondeo.

**Solución** Se empleará nuestro procedimiento de cinco pasos para resolver problemas.

**a) Entender y traducir** La razón que se busca es

$$\text{Número que seleccionó B} : \text{Número que seleccionó A}$$

**Calcular** Sustituimos los valores apropiados en la razón; esto da

$$55 : 40$$

Ahora, simplificamos dividiendo cada número entre 5, el número mayor que divide ambos términos de la razón. El resultado es

$$11 : 8$$

**Revisar y responder** La división es correcta. La razón es 11:8.

**b)** Usamos el mismo procedimiento que en el inciso **a)**. Cinco personas seleccionaron la bebida C. Se sondeó a  $40 + 55 + 5$ , es decir 100, personas. Así, la razón es 5:100, que se simplifica como

$$1 : 20$$



La respuesta al inciso **a)** del ejemplo 1 también hubiera podido escribirse como  $\frac{11}{8}$ , o bien 11 es a 8. La respuesta al inciso **b)** también hubiera podido escribirse como  $\frac{1}{20}$ , o 1 es a 20.

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 17**

**Ejemplo 2**

**Nivel de colesterol** Hay dos tipos de colesterol: las lipoproteínas de densidad baja (LDL, que se considera el tipo perjudicial de colesterol) y las lipoproteínas de densidad alta (HDL, que se considera el tipo de colesterol saludable). Algunos médicos recomiendan que la razón de colesterol de baja densidad al de alta densidad, sea menor o igual a 4:1. La prueba del Sr. Suárez mostró que su nivel de colesterol de densidad baja fue de 167 miligramos por decilitro, y el de densidad alta fue de 40 miligramos por decilitro. ¿La razón del Sr. Suárez, de colesterol de densidad baja al de densidad alta es menor o igual que la razón recomendable de 4:1?

**Solución**

**Entender** Necesitamos determinar si la razón de colesterol de densidad baja del señor Suárez, al de densidad alta es menor o igual de 4:1.

**Traducir** La razón del Sr. Suárez de colesterol de baja densidad al de alta, es de 167:40. Para hacer que el segundo término sea igual a 1, dividimos ambos términos de la razón entre el segundo, que es 40.

**Calcular**

$$\frac{167}{40} : \frac{40}{40}$$

o bien  $4.175 : 1$

**Revisar y responder** La división es correcta. Por tanto, la razón del Sr. Suárez no es menor ni igual a la deseable de 4:1.

**Ejemplo 3**

**Mezcla de aceite y gasolina** Ciertos equipos de potencia, como sierras de cadena y calentadores, utilizan una mezcla de gasolina y aceite para el funcionamiento de


su motor. Las instrucciones para una sierra en particular indican que debe mezclarse 5 galones de gasolina con 40 onzas de aceite especial, para obtener la mezcla adecuada. Encuentre la razón de gasolina a aceite de la mezcla apropiada.

**Solución Entender** Para expresar estas cantidades como una razón, ambas deben estar en las mismas unidades. Podemos convertir 5 galones a onzas o bien 40 onzas a galones.

**Traducir** Cambiaremos los 5 galones a onzas. Como en un galón hay 128 onzas, 5 galones de gasolina son iguales a  $5(128)$ , o 640 onzas. La razón que se busca es

$$\text{onzas de gasolina : onzas de aceite}$$

**Calcular**  $640 : 40$   
o bien  $16 : 1$  *Dividir ambos términos entre 40, para simplificar.*

**Revisar y contestar** La simplificación es correcta. La razón apropiada de gasolina a aceite para esta sierra es de 16:1. 

**Ejemplo 4 Razón de engranes** La razón de engranes, para dos de ellos, se define como


$$\text{razón de engranes} = \frac{\text{número de dientes en el engrane impulsor}}{\text{número de dientes en el engrane impulsado}}$$

Determine la razón de los engranes que se ilustran en la figura 2.3.

**Solución Entender y traducir** Para encontrar la razón de engranes es necesario sustituir los valores apropiados.

**Calcular**  $\text{razón de engranes} = \frac{\text{número de dientes en el engrane impulsor}}{\text{número de dientes en el engrane impulsado}} = \frac{60}{8} = \frac{15}{2}$

Por tanto, la razón de engranes es de 15:2. Por lo general, las razones de engranes se expresan como alguna cantidad a 1. Si dividimos ambos términos de la razón entre el segundo número, obtendremos una razón de cierto número a 1. Dividimos tanto 15 como 2 entre 2 y obtenemos una razón de engranes de 7.5:1.

**Revisar y responder** La razón de engranes es de 7.5:1. Esto significa que mientras el engrane impulsor gira una vez, el engrane impulsado lo hace 7.5 veces (una razón de engranes que es común en un auto de pasajeros en primera velocidad es de 3.545:1). 

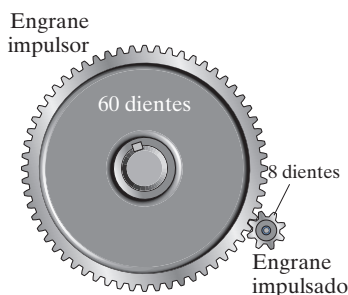


FIGURA 2.3

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 27**

## 2 Resolver proporciones mediante productos cruzados

Una **proporción** es un tipo especial de ecuación. Es una proposición de igualdad entre dos razones. Una forma de denotar una proporción es  $a : b = c : d$ , que se lee “ $a$  es a  $b$  como  $c$  es a  $d$ ”. En este texto escribimos las proporciones como

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$a$  y  $d$  son los **extremos** de la proporción, mientras que  $b$  y  $c$  son los **medios**. En las secciones 2.4 y 2.5 se resolvieron ecuaciones que contenían fracciones multiplicando ambos lados de la ecuación por el mcd para eliminar las fracciones. Por ejemplo, para la proporción

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} &= \frac{35}{15} \\ 15\left(\frac{x}{3}\right) &= 15\left(\frac{35}{15}\right) \quad \text{Multiplicar ambos lados} \\ 5x &= 35 \quad \text{por el mcd, que es 15.} \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Otro método que se utiliza para resolver las proporciones es el de los **productos cruzados**. Este proceso arroja los mismos resultados que multiplicar ambos lados de la ecuación por el mcd. Sin embargo, muchos estudiantes prefieren usar los productos cruzados porque de ese modo no tienen que determinar el mcd de las fracciones, y luego multiplicar ambos lados de la ecuación por el mcd.

### Productos cruzados

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ entonces } ad = bc.$$

Observe que *el producto de los medios es igual al producto de los extremos*.

Si se conocen tres de las cuatro cantidades de una proporción, es posible encontrar la cuarta con facilidad.

**Ejemplo 5** Resuelva  $\frac{x}{3} = \frac{35}{15}$  mediante los productos cruzados.

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} &= \frac{35}{15} \\ x \cdot 15 &= 3 \cdot 35 \\ 15x &= 105 \\ x &= \frac{105}{15} = 7 \end{aligned}$$

**Comprobación:**

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} &= \frac{35}{15} \\ \frac{7}{3} &\stackrel{?}{=} \frac{35}{15} \\ \frac{7}{3} &= \frac{7}{3} \quad \text{Verdadero.} \end{aligned}$$



Antes de que se introdujeran los productos cruzados, se resolvió la proporción  $\frac{x}{3} = \frac{35}{15}$  multiplicando ambos lados de la ecuación por 15. Observe que en cada caso se obtuvo la misma solución, 7. Cuando se resuelve una ecuación con productos cruzados, en realidad se está multiplicando ambos lados por el producto de los dos denominadores, y luego se dividen los factores comunes. Sin embargo, este proceso no se demuestra.

**Ejemplo 6** Resuelva  $\frac{-8}{3} = \frac{64}{x}$  para  $x$ , mediante productos cruzados.

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{-8}{3} &= \frac{64}{x} \\ -8 \cdot x &= 3 \cdot 64 \\ -8x &= 192 \\ \frac{-8x}{-8} &= \frac{192}{-8} \\ x &= -24 \end{aligned}$$

**Comprobación:**

$$\begin{aligned} \frac{-8}{3} &= \frac{64}{x} \\ \frac{-8}{3} &\stackrel{?}{=} \frac{64}{-24} \\ \frac{-8}{3} &\stackrel{?}{=} \frac{8}{-3} \\ \frac{-8}{3} &= \frac{-8}{3} \quad \text{Verdadero.} \end{aligned}$$



### 3 Resolver aplicaciones

Es frecuente que se resuelvan ciertos problemas prácticos empleando proporciones. Para solucionarlos, se utiliza el procedimiento de cinco pasos que se ha estado empleando a lo largo del texto. A continuación se presenta el procedimiento con instrucciones más específicas para traducir problemas a proporciones.

#### Para resolver problemas utilizando proporciones

1. Entienda el problema.
2. Traduzca el problema a lenguaje matemático.
  - a) En primer lugar, represente la cantidad desconocida con una variable (una letra).
  - b) En segundo lugar, plantee la proporción escribiendo la razón dada del lado izquierdo del signo de igualdad, y la incógnita y la otra cantidad dada del lado derecho. Al plantear el lado derecho de la proporción, las cantidades respectivas deben ocupar las mismas posiciones en ambos lados; por ejemplo, una proporción aceptable es

$$\text{Razón dada} \left\{ \frac{\text{millas}}{\text{hora}} = \frac{\text{millas}}{\text{hora}} \right.$$

3. Efectuar los cálculos matemáticos necesarios para resolver el problema.
  - a) Una vez que ha escrito la proporción en forma correcta, elimine las unidades y multiplique en forma cruzada.
  - b) Resuelva la ecuación resultante.
4. Comprueba la respuesta que se obtuvo en el paso 3.
5. Asegurarse de responder la pregunta original.

**Observe que las dos razones\* deben tener las mismas unidades.** Por ejemplo, si una razón se da en millas/hora, y la segunda en pies/hora, debemos cambiar una de las razones antes de plantear la proporción.

**Ejemplo 7** **Aplicación de fertilizante** Un saco de fertilizante de 30 libras cubrirá un área de 2500 pies cuadrados.

- a) ¿Cuántas libras se requieren para cubrir una superficie de 16,000 pies cuadrados?
- b) ¿Cuántos sacos de fertilizante se necesitan?

#### Solución

**a) Entender** La razón dada es 30 libras para 2500 pies cuadrados. La cantidad desconocida es el número de libras necesario para cubrir 16,000 pies cuadrados.

**Traducir** Sea  $x$  = número de libras.

$$\text{Razón dada} \left\{ \frac{30 \text{ libras}}{2500 \text{ pies cuadrados}} = \frac{x \text{ libras}}{16,000 \text{ pies cuadrados}} \right. \begin{array}{l} \leftarrow \text{Incógnita.} \\ \leftarrow \text{Cantidad dada.} \end{array}$$

Observe que el peso y el área están dados en las mismas posiciones relativas.

\*Si se habla con propiedad, un cociente de dos cantidades con unidades diferentes, como  $\frac{6 \text{ millas}}{1 \text{ hora}}$ , se

llama *tasa*. Sin embargo, en el estudio de las proporciones, pocos libros hacen la distinción entre razones y tasas.



**Calcular**

$$\frac{30}{2500} = \frac{x}{16,000}$$

$$30(16,000) = 2500x \quad \text{Productos cruzados.}$$

$$480,000 = 2500x \quad \text{Resolver.}$$

$$\frac{480,000}{2500} = x$$


$$192 = x$$

**Revisar** Con una calculadora, se determina que ambas razones en la proporción,  $30/2500$  y  $192/16,000$ , tienen un valor de 0.012. Así, la respuesta de 192 libras es correcta.

**Respuesta** La cantidad de fertilizante que se necesita para cubrir un área de 16,000 pies cuadrados es 192 libras.

**b)** Como cada saco pesa 30 libras, determinamos el número de sacos con una división.

$$192 \div 30 = 6.4 \text{ sacos}$$

Entonces, el número de sacos necesario es de 7, ya que sólo pueden comprarse sacos completos. 

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 65

### Ejemplo 8

**Almuerzo de caridad** Cada año, en Tampa, Florida, el equipo de Los Yanquis de Nueva York ofrece un almuerzo de caridad cuyos ingresos están destinados para apoyar a los clubes de niños y niñas de Tampa. En la reunión, los participantes abordan a los miembros del equipo y obtienen sus autógrafos. Si un jugador en particular firma, en promedio, 33 autógrafos en 4 minutos, ¿cuánto tiempo tardará en firmar 350 autógrafos?

### Solución



La cantidad desconocida es el tiempo que necesita un jugador para firmar 350 autógrafos. Se sabe que, en promedio, firma 33 autógrafos en 4 minutos. Se empleará esta razón para plantear la proporción.

**Traducir** Se representará con  $x$  el tiempo para firmar 350 autógrafos.

$$\text{Razón dada} \left\{ \begin{array}{l} \frac{33 \text{ autógrafos}}{4 \text{ minutos}} = \frac{350 \text{ autógrafos}}{x \text{ minutos}} \end{array} \right.$$


**Calcular**

$$\frac{33}{4} = \frac{350}{x}$$

$$33x = 4(350)$$

$$33x = 1400$$

$$x = \frac{1400}{33} \approx 42.4$$

**Revisar y responder** Con una calculadora, determine que ambas razones de la proporción,  $\frac{33}{4}$  y  $\frac{350}{42.4}$  tengan el mismo valor aproximado de 8.25. Por tanto, se necesita alrededor de 42.4 minutos para que el jugador firme 350 autógrafos. 

### Ejemplo 9


**Dosis de medicina** Un doctor pide a una enfermera que administre a un paciente 250 miligramos de simeticona. El medicamento sólo está disponible en una solución cuya concentración es de 40 miligramos de sustancia por cada 0.6 mililitros de solución. ¿Cuántos mililitros de solución debe administrar la enfermera al paciente?

**Solución** *Entender y traducir* Establezcamos la proporción utilizando el medicamento disponible como la razón dada, y la cantidad de mililitros necesarios como la incógnita.

$$\text{Razón dada (prescripción)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{40 \text{ miligramos}}{0.6 \text{ mililitros}} = \frac{250 \text{ miligramos}}{x \text{ mililitros}} \end{array} \right. \begin{array}{l} \leftarrow \text{Prescripción} \\ \leftarrow \text{que se desea.} \\ \leftarrow \text{Incógnita.} \end{array}$$

**Calcular**

$$\begin{aligned} \frac{40}{0.6} &= \frac{250}{x} \\ 40x &= 0.6(250) && \text{Productos cruzados.} \\ 40x &= 150 && \text{Resolver.} \\ x &= \frac{150}{40} = 3.75 \end{aligned}$$

**Revisar y responder** La enfermera debe administrar 3.75 mililitros de la solución de simeticona. 

**SUGERENCIA**

Al plantear una proporción, no importa cuál unidad de la razón dada esté en el numerador y cuál en el denominador, siempre que las unidades en el otro lado ocupen *la misma posición relativa*. Por ejemplo, los planteamientos

$$\frac{60 \text{ millas}}{1.5 \text{ horas}} = \frac{x \text{ millas}}{4.2 \text{ horas}} \quad \text{y} \quad \frac{1.5 \text{ horas}}{60 \text{ millas}} = \frac{4.2 \text{ horas}}{x \text{ millas}}$$

darán el mismo resultado de 168 (inténtelo y compruebe que así es). Al plantear la proporción, hágalo de modo que tenga el máximo sentido para usted. Observe que cuando se establece una proporción que contiene unidades diferentes, no debe multiplicarse éstas por sí mismas durante los productos cruzados.

**Correcto**

$$\frac{\text{millas}}{\text{horas}} = \frac{\text{millas}}{\text{horas}}$$

**Incorrecto**

$$\frac{\cancel{\text{millas}}}{\text{horas}} = \frac{\text{horas}}{\cancel{\text{millas}}}$$

**4 Usar proporciones para convertir unidades**

También podemos utilizar las proporciones para transformar una cantidad en otra; por ejemplo, para convertir una medida en pies a otra en metros, o de libras a kilogramos. Los siguientes ejemplos ilustran la conversión de unidades.

**Ejemplo 10 Pies a millas** En una milla hay 5280 pies. ¿A qué distancia equivalen, en millas, 18,362 pies?

**Solución** *Entender y traducir* Sabemos que 1 milla equivale a 5280 pies. Se usa este hecho en una de las razones de la proporción. En la segunda razón se plantea las cantidades con las mismas unidades en las posiciones respectivas. La cantidad desconocida es el número de millas, que se denotará con  $x$ .

$$\text{Razón conocida} \left\{ \frac{1 \text{ milla}}{5280 \text{ pies}} = \frac{x \text{ millas}}{18,362 \text{ pies}} \right.$$


Observe que ambos numeradores contienen las mismas unidades, así como los dos denominadores.



**Calcular** Ahora eliminemos las unidades y despejemos  $x$  mediante productos cruzados.

$$\begin{aligned}\frac{1}{5280} &= \frac{x}{18,362} \\ 1(18,362) &= 5280x && \text{Productos cruzados.} \\ 18,362 &= 5280x && \text{Resolver.} \\ \frac{18362}{5280} &= \frac{5280x}{5280} \\ 3.48 &\approx x\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 75

**Revisar y responder** Así, 18,362 pies son alrededor de 3.48 millas. 

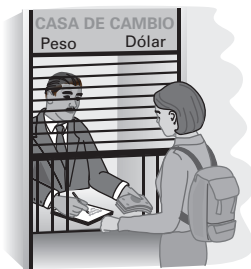
### Ejemplo 11

**Cambio de moneda** Cuando la gente viaja a un país extranjero, con frecuencia necesita cambiar su dinero. Donna Boccio visitó Cancún, México. Entró en un banco local y le dijeron que 1 dólar equivalía a 9.696 pesos.

**a)** ¿Cuántos pesos obtendría si cambiara 150 dólares?

**b)** Más tarde, ese mismo día, Donna fue al mercado de la ciudad y compró una figura de cerámica. Negoció por ésta un precio de 245 pesos. Con el tipo de cambio que se dio, determine el costo en dólares que tuvo la figura.

### Solución



**a) Entender** Dijimos que 1 dólar equivalía a 9.696 pesos mexicanos. Utilizamos esto para establecer una razón de la proporción. En la segunda razón, planteamos las cantidades con las mismas unidades en las mismas posiciones respectivas.

**Traducir** La cantidad desconocida es el número de pesos, que se denota con  $x$ .

$$\text{Razón dada } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1 \text{ dólar}}{9.696 \text{ pesos}} = \frac{150 \text{ dólares}}{x \text{ pesos}} \end{array} \right.$$

Observe que ambos numeradores contienen dólares, y los dos denominadores pesos.

**Calcular**

$$\begin{aligned}\frac{1}{9.696} &= \frac{150}{x} \\ 1x &= 9.696(150) \\ x &= 1454.4\end{aligned}$$

**Revisar y responder** Así, 150 dólares podrían cambiarse por 1454.4 pesos mexicanos.

**b) Entender y traducir** Se emplea la misma razón dada que en el inciso **a)**. Ahora debe encontrarse el equivalente en dólares de 245 pesos mexicanos. Se denotará con  $x$  la cantidad equivalente en dólares.

$$\text{Razón dada } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1 \text{ dólar}}{9.696 \text{ pesos}} = \frac{x \text{ dólares}}{245 \text{ pesos}} \end{array} \right.$$

**Calcular**

$$\begin{aligned}\frac{1}{9.696} &= \frac{x}{245} \\ 1(245) &= 9.696x \\ 245 &= 9.696x \\ 25.27 &\approx x\end{aligned}$$

**Revisar y responder** El costo en dólares de la figura es de 25.27. 

**SUGERENCIA**

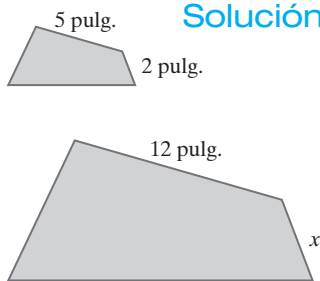
Algunos de los problemas que hemos resuelto con proporciones, hubieran podido solucionarse sin éstas. Sin embargo, al trabajar con problemas de este tipo, es frecuente que los estudiantes tengan dificultad para decidir si multiplicar o dividir para obtener la respuesta correcta. Si plantea una proporción, entenderá mejor el problema y será más fácil obtener la respuesta correcta.

**5 Emplear proporciones para solucionar problemas que involucran figuras semejantes**

También es posible utilizar las proporciones para resolver problemas de geometría y trigonometría. Los siguientes ejemplos muestran la forma de emplear las proporciones para resolver problemas con **figuras semejantes**. Dos figuras son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales, y sus lados correspondientes son proporcionales. Dos figuras semejantes tienen la misma forma.

**Ejemplo 12**

Las figuras que se muestran a la izquierda son semejantes. Encuentre la longitud del lado que se denota con  $x$ .



**Solución**

Se plantea una proporción de los lados correspondientes con el fin de hallar la longitud del lado  $x$ .

Longitudes de la figura más chica      ↓      Longitudes de la figura más grande  
 5 pulgadas y 12 pulgadas son correspondientes.      →       $\frac{5}{2} = \frac{12}{x}$   
 2 pulgadas y  $x$  son lados correspondientes de figuras semejantes.      →       $5x = 24$   
 $x = \frac{24}{5} = 4.8$

Así, el lado que se denota con  $x$  mide 4.8 pulgadas de longitud. ✧

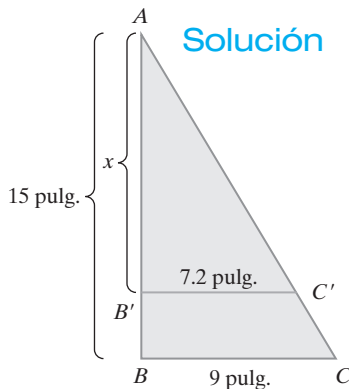
En el ejemplo 12, observe que la proporción también hubiera podido plantearse como

$$\frac{5}{12} = \frac{2}{x}$$

debido a que un par de lados correspondientes se encuentra en los numeradores y otro par en los denominadores.

**Ejemplo 13**

Los triángulos  $ABC$  y  $AB'C'$  son triángulos semejantes. Utilice una proporción para encontrar la longitud del lado  $AB'$ .



**Solución**

Se plantea una proporción de los lados correspondientes a fin de encontrar la longitud del lado  $AB'$ . Se hará que  $x$  denote la longitud del lado  $AB'$ . La proporción que se debe usar es

$$\frac{\text{longitud de } AB}{\text{longitud de } BC} = \frac{\text{longitud de } AB'}{\text{longitud de } B'C'}$$

Ahora, se insertan los valores apropiados y se resuelve para la variable  $x$ .

$$\begin{aligned} \frac{15}{9} &= \frac{x}{7.2} \\ (15)(7.2) &= 9x \\ 108 &= 9x \\ 12 &= x \end{aligned}$$

**AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 53**

Así, la longitud del lado  $AB'$  es de 12 pulgadas. ✧

## Las matemáticas en acción

### Razones calificadoras

Cuando solicite un préstamo hipotecario, tal vez perciba que se juzga si es rentable que reciba dinero para comprar una casa. Sin embargo, en cierto sentido, el juicio se establece en gran medida con el acomodo de números en un par de razones simples, que reciben el nombre de *razones calificadoras*. Una de éstas es la *razón de la vivienda* y la otra es la *razón de deuda*.



Por ejemplo, si la institución de crédito utiliza una razón de la vivienda de 27, significa que los gastos

mensuales por ella —pago mensual al capital por la hipoteca, pagos de interés, impuestos sobre la propiedad y seguro del propietario, entre otros pagos— no debe exceder el 27 por ciento del ingreso mensual bruto del cliente. Suponga que el ingreso bruto mensual en su hogar fuera de \$6500 y que los gastos mensuales por vivienda fueran de \$1700, entonces la razón de la vivienda sería de 26.2 (porque  $\frac{1700}{6500} = 0.262 = 26.2\%$ ) y se aprobaría su crédito. Por cierto, observe que se utiliza en forma indistinta razones, decimales y porcentajes.

Si la razón de deuda de la institución de crédito es de 38, esto significa que los gastos mensuales por la vivienda más la deuda de largo plazo no deben exceder el 38 por ciento de su ingreso bruto mensual. Continuemos con el ejemplo anterior; si tuviera que hacer pagos mensuales de \$900 por un vehículo recreativo, la razón de deuda sería de 40 (porque  $\frac{1700 + 900}{6500} = 0.40 = 40\%$ ) y sobre esa base la institución de crédito quizá rechazaría la solicitud de préstamo hipotecario.

Usted no debe descorazonarse. La razón de vivienda y la de deuda no son los únicos criterios que se aplican. Aun si éstas fueran algo elevadas, el prestamista podría juzgar favorablemente el préstamo con base en factores como la estabilidad de su empleo a largo plazo y la historia crediticia.

En Internet es posible encontrar cierto número de calculadoras en línea con el uso de un motor de búsqueda como [www.google.com](http://www.google.com) y las palabras clave **calculadora hipotecaria**. Encontrará calculadoras interactivas de todos los colores, tamaños y formas. Si las estudia cuidadosamente, descubrirá que los números por los que preguntan son los que se necesitan para calcular la razón de la vivienda y la razón de deuda, en forma casi invariable.

## Conjunto de ejercicios 2.6

### Ejercicios conceptuales

1. ¿Qué es una razón?
2. En la razón  $a:b$ , ¿cómo se denomina a  $a$  y a  $b$ ?
3. Mencione tres formas de escribir la razón de  $c$  a  $d$ .
4. ¿Qué es una proporción?
5. Como ya aprendió, las proporciones se emplean para resolver una variedad de problemas. ¿Qué información se necesita para plantear un problema como proporción y resolverlo?
6. ¿Qué son figuras semejantes?
7. ¿Las figuras semejantes deben ser del mismo tamaño? Explique.
8. ¿Las figuras semejantes deben tener la misma forma? Explique.

En los ejercicios 9 a 12, ¿la proporción está planteada en forma correcta? Explique.

9.  $\frac{\text{gal}}{\text{min}} = \frac{\text{gal}}{\text{min}}$
10.  $\frac{\text{pies}^2}{\text{lb}} = \frac{\text{pies}^2}{\text{lb}}$
11.  $\frac{\text{pie}}{\text{seg}} = \frac{\text{seg}}{\text{pie}}$
12.  $\frac{\text{imp.}}{\text{costo}} = \frac{\text{costo}}{\text{imp.}}$

## Práctica de habilidades

Los resultados de un examen de matemáticas son 6 A, 4 B, 9 C, 3 D y 2 F. Escriba las siguientes razones en sus términos mínimos.

- |                                 |   |
|---------------------------------|---|
| 13. A a C                       | 14. B al total de calificaciones                                |
| 15. D a A.                      | 16. Calificaciones mejores que C al total de calificaciones     |
| 17. Total de calificaciones a D | 18. Calificaciones mejores que C a calificaciones menores que C |

Determine las siguientes razones. Escriba cada razón en su mínima expresión.

- |                           |  |
|---------------------------|--|
| 19. 7 galones a 4 galones | 20. 50 dólares a 60 dólares                              |
| 21. 5 onzas a 15 onzas    | 22. 18 minutos a 24 minutos                              |
| 23. 3 horas a 30 minutos  | 24. 6 pies a 4 yardas                                    |
| 25. 26 onzas a 4 libras   | 26. 7 monedas de 10 centavos a 12 monedas de 5 centavos. |

Determine cada razón de los engranes en sus términos mínimos. (Consulte el ejemplo 4.)

- |   |  |
|---|--|
| 27. Engrane impulsor, 40 dientes; engrane impulsado, 5 dientes. | 28. Engrane impulsor 30 dientes; engrane impulsado, 8 dientes. |
|---|--|



En los ejercicios 29 a 32, **a)** Determine la razón indicada, y **b)** escriba la razón con alguna cantidad a 1.

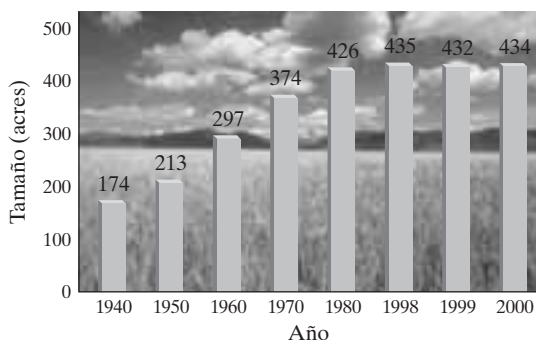
29. **Olimpiadas de verano** En los Juegos Olímpicos de verano de 2000, en Sydney, Australia, estuvieron representadas 199 naciones. En las Olimpiadas de verano de 1984, en Los Ángeles, California, hubo 140 naciones. ¿Cuál es la razón del número de naciones representadas en el año 2000 al de las que estuvieron en 1984?
30. **Correspondencia** En enero de 2002, el costo de enviar una onza de correspondencia era de 34 centavos, y el costo de enviar dos onzas, 57 centavos. ¿Cuál es la razón del costo de enviar una carta de una onza al costo de enviar otra de dos onzas?
31. **Fuerzas armadas** En enero de 2000, había en todo el mundo cerca de 1.13 millones de tropas de las fuerzas armadas de E.U., de los cuales alrededor de 0.38 millones pertenecían al ejército. ¿Cuál es la razón del total de fuerzas armadas a las del ejército?
32. **Población** La población de los Estados Unidos en 1990 era cerca de 249 millones, y en 2000 era alrededor de 281 millones. ¿Cuál es la razón de la población de E.U. en 2000 a la de 1990?

En los ejercicios 33 a 36 se presentan gráficas. Para cada uno, encuentre la razón que se indica.

### 33. Tamaño de una granja

- a) Determine la razón del tamaño promedio de una granja en 2000 al tamaño promedio en 1940.
- b) Calcule la razón del tamaño promedio de una granja en 1970 al de 2000.

Tamaño promedio de las granjas de E.U.

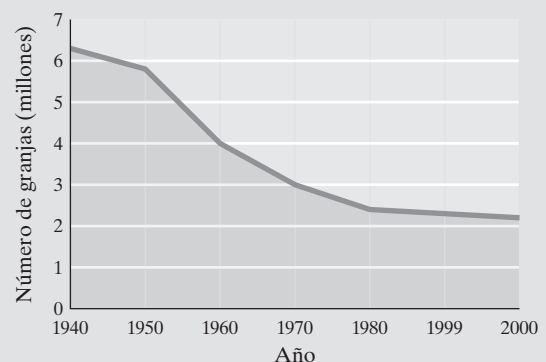


Fuente: Departamento de Agricultura de los E. U.

### 34. Número de granjas

- a) Estime la razón de las granjas en los E.U. en 1940 a las de 2000.
- b) Encuentre la razón de las granjas en los E.U. en 2000 a las de 1970.

Granjas en los E.U.

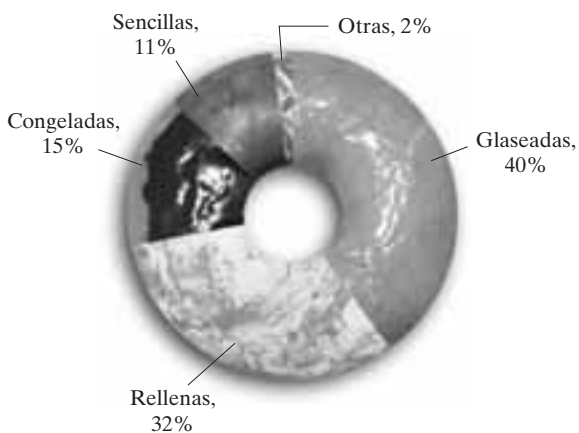


Fuente: Departamento de Agricultura

**35. Dona favorita**

- a) Determine la razón de personas cuyas donas favoritas son las glaseadas a las personas que prefieren las rellenas.
- b) Calcule la razón de personas cuyas donas favoritas son las congeladas a aquellas que las prefieren sencillas.

**Sabores favoritos de donas**

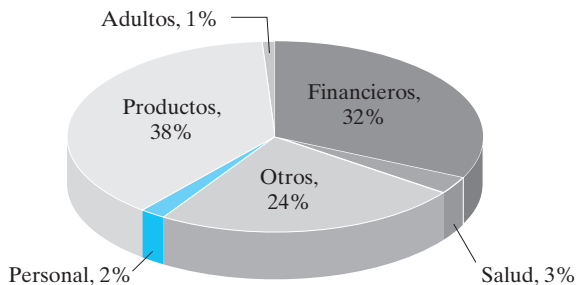


Fuente: The Heller Research Group

**36. Correo basura**

- a) Determine la razón de correo electrónico basura para Finanzas al correo basura para Salud.
- b) Calcule la razón de correo basura para Productos a todo el correo basura.

**Correo basura (o spam), 12 a 18 de febrero de 2001**



Fuente: Brightmail Inc.

Resuelva cada proporción para la variable por productos cruzados.

37.  $\frac{3}{x} = \frac{5}{20}$

38.  $\frac{x}{8} = \frac{24}{48}$

39.  $\frac{5}{3} = \frac{75}{a}$

40.  $\frac{x}{3} = \frac{90}{30}$

41.  $\frac{90}{x} = \frac{-9}{10}$

42.  $\frac{8}{12} = \frac{n}{6}$

43.  $\frac{15}{45} = \frac{x}{-6}$

44.  $\frac{y}{6} = \frac{7}{42}$

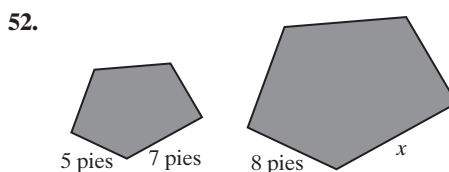
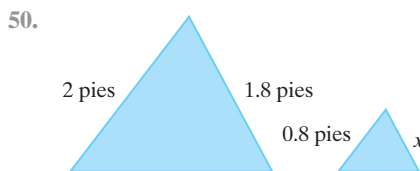
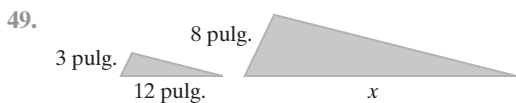
45.  $\frac{3}{z} = \frac{-1.5}{27}$

46.  $\frac{3}{12} = \frac{-1.4}{z}$

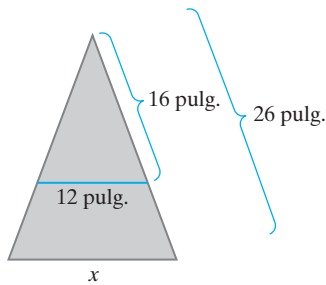
47.  $\frac{9}{12} = \frac{x}{8}$

48.  $\frac{2}{20} = \frac{x}{200}$

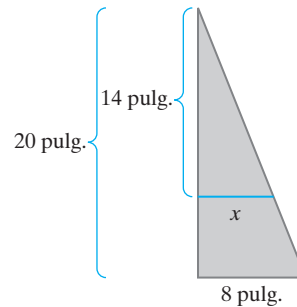
Las siguientes figuras son semejantes. Para cada pareja, encuentre la longitud del lado que se denota con  $x$ .



53.



54.



## Solución de problemas

En los ejercicios 55 a 74, escriba una proporción que se utilice para resolver el problema. Después, resuelva la ecuación con objeto de obtener la respuesta..

55. **Lavado de ropa** Una botella de líquido Tide para lavar, contiene 100 onzas de fluido. Si una carga de ropa requiere 4 onzas del detergente, ¿cuántas cargas de ropa se pueden lavar con una botella?
56. **Tendido de cable** Una brigada de teléfonos tiende cable a razón de 42 pies por hora. ¿Cuánto tiempo les tomará tender 252 pies de cable?
57. **Distancia recorrida en auto** Un auto Ford Mustang 2002, con motor de 4.6 litros, está diseñado para rendir 23 millas por galón (manejo en autopista). ¿Qué tan lejos llegará con un tanque lleno con 15.7 galones de gasolina?
58. **Pintar la casa** Un galón de pintura cubre 825 pies cuadrados. ¿Cuánta pintura se necesita para cubrir una casa cuya superficie por pintar es de 5775 pies cuadrados?
59. **Modelo de tren** Un modelo de tren está a escala de 1:20. Es decir, un pie del modelo representa 20 pies del tren original. Si un cabús mide 30 pies de largo, ¿cuánto medirá su modelo?
60. **Distribuir fertilizante** Si un saco de 40 libras de fertilizante cubre 5000 pies cuadrados, ¿cuántas libras de fertilizante se necesitan para cubrir un área de 26,000 pies cuadrados?
61. **Aplicación de insecticida** Las instrucciones de una botella de insecticida líquido dicen “use 3 cucharaditas de insecticida por cada galón de agua”. Si el rociador tiene capacidad para 8 galones, ¿cuánto insecticida debe emplearse para llenar el rociador?
62. **Impuestos a la propiedad** El impuesto a la propiedad en la ciudad de Hendersonville, Carolina del Norte, es de \$9.475 por cada \$1000 de valor catastral. Si la casa de Estever está valuada en \$145,000, ¿cuál será el impuesto que debe pagarse por esa propiedad?
63. **Garza azul** En la fotografía se aprecia una garza azul. Si el ejemplar que en la foto mide 3.5 pulgadas en la realidad tiene 3.75 pies de altura, ¿cuánto mide aproximadamente su pico, que en la foto mide 0.4 pulgadas?



64. **Sopa de ajo** Una receta para preparar 6 porciones de sopa de ajo a la francesa requiere de  $1\frac{1}{2}$  tazas de ajos rebanados finamente. Si la receta fuera para hacer 15 porciones, ¿cuántas tazas de ajos se necesitarían?
65. **Mapas** En un mapa, 0.5 pulgadas representan 22 millas, ¿cuál será la longitud de un mapa que corresponda a una distancia de 55 millas?
66. **Novela de Steven King** Karen Estes lee una novela de Steven King. Si lee 72 páginas en 1.3 horas, ¿cuánto tiempo le tomará leer todo el libro de 656 páginas?
67. **Toro de Wall Street** Suponga que la escultura del toro famoso que se encuentra en la bolsa de valores de Nueva York (observe la siguiente figura) es una réplica de un toro real a razón de 2.95 a 1. Es decir, el toro de metal es 2.95 veces más grande que el de verdad. Si la longitud del toro de Wall Street es de 28 pies, ¿cuánto medirá aproximadamente el toro que sirvió de modelo?





Vea el ejercicio 67.

68. **Inundación.** Cuando los Duncan regresaron a su casa de vacaciones, el sótano estaba inundado (1 pie de agua). Se pusieron en contacto con el departamento de bomberos, que envió equipo para extraer el agua. Después de que la bomba había funcionado durante 30 minutos, se había retirado 3 pulgadas de agua, ¿cuánto tiempo, desde que comenzaron a bombear, se requeriría para retirar toda el agua del sótano?

En los ejercicios 75 a 86, utilice una proporción para hacer la conversión. Redondee las respuestas a dos cifras decimales.

75. Convierta 78 pulgadas a pies.  
 76. Transforme 22,704 pies a millas (5280 pies = 1 milla).  
 77. Convierta 26.1 pies cuadrados a yardas cuadradas (9 pies cuadrados = 1 yarda cuadrada).  
 78. Transforme 146.4 onzas a libras.  
 79. **Recién nacido** Una pulgada es igual a 2.54 centímetros. Encuentre la estatura de un recién nacido, en pulgadas, si mide 50.8 centímetros.  
 80. **Distancia** Una milla es aproximadamente igual a 1.6 kilómetros. Calcule la distancia, en kilómetros, que hay de San Diego, California, a San Francisco, California, cuya distancia es de 520 millas.



69. **Dosis de medicina** Una enfermera debe administrar 220 microgramos de sulfato de atropina. La medicina está disponible en forma de solución. La concentración de la solución de sulfato de atropina es de 400 microgramos por mililitro, ¿cuántos mililitros debe administrar?
70. **Dosis por superficie corporal** Un doctor pide a una enfermera que administre 0.7 gramos de meprobamato por metro cuadrado de superficie corporal. La superficie corporal del paciente es de 0.6 metros cuadrados, ¿cuánto meprobamato debe administrar?
71. **Tamos de natación** Jason Abbott nada 3 vueltas en 2.3 minutos, ¿cuánto tiempo aproximado le tomará nadar 30 vueltas si continúa nadando a la misma velocidad?
72. **Lectura de una novela** Mary lee 40 páginas de una novela en 30 minutos. Si lee a la misma velocidad, ¿cuánto tiempo le tomará leer todo el libro de 760 páginas?
73. **Síndrome de Prader-Willi** Se estima que cada año, en los Estados Unidos 1 de cada 12,000 (1:12,000) personas nace con una anomalía genética llamada síndrome de Prader-Willi. Si en el año 2000 en los Estados Unidos hubo casi 4,063,000 nacimientos, ¿aproximadamente cuántos niños nacieron con el síndrome de Prader-Willi?
74. **Población de E.U.** En el año 2000, la tasa de natalidad en los Estados Unidos fue de 14.5 por cada mil personas. En 2000, en ese país hubo aproximadamente 4,063,000 nacimientos. ¿Cuál era la población de E.U. en el año mencionado?
81. **Récord de jonrones** Barry Bonds, que juega para el equipo de béisbol de los Gigantes de San Francisco, tiene el récord de más jonrones, 73, en una temporada de 162 partidos. En los primeros 50 partidos de una temporada, ¿cuántos jonrones necesita anotar un jugador para estar en posibilidad de romper el récord de Bond?
82. **Tierra** Un saco de 40 libras de tierra cubre 12 pies cuadrados (con una pulgada de profundidad), ¿cuántas libras de tierra se necesitan para cubrir 350 pies cuadrados (con profundidad de una pulgada)?
83. **Oro** Si el oro se vende a \$408 por 480 pepitas (una onza troy), ¿cuál es el costo por pepita?
84. **Interés por ahorro** Jim Chao invierte cierta cantidad de dinero en su cuenta de ahorros. Si ganó \$110.52 en 180 días, ¿cuánto interés ganará en 500 días si la tasa de interés no cambia?
85. **Estadística** En un curso de estadística, se encuentra que para un conjunto de datos en particular, 15 puntos son igual a 3.75 de desviación estándar. ¿A cuántos puntos equivale una desviación estándar?
86. **Tipo de cambio** Cuando Mike Weatherbee visitó los Estados Unidos desde Canadá, cambió 13.50 dólares canadienses por 10 dólares de E.U. Si cambia sus 600

dólares canadienses que le restan por dólares de E.U., ¿cuántos de éstos recibirá?



Puente de la Paz, que conecta Estados Unidos con Canadá

- 87. Colesterol** El nivel de colesterol de baja densidad de la señora Ruff es de 127 miligramos por decilitro (mg/dL). Su nivel de colesterol de alta densidad es de 60 mg/dL. ¿La razón del nivel de colesterol de baja densidad al de alta densidad de la Sra. Ruff es menor o igual que el recomendable de 4:1? (Consulte el ejemplo 2.)

**88. Colesterol**

- a) Otra razón que algunos doctores utilizan para medir el nivel de colesterol es la razón del colesterol total al de alta densidad.\* ¿Esta razón aumenta o disminuye si el colesterol total permanece sin cambio pero el de alta densidad aumenta? Explique.
- b) Los doctores recomiendan que la razón de colesterol total al de alta densidad sea menor o igual que 4.5:1. Si el colesterol total de Mike es de 220 mg/dL, y el de alta densidad es de 50 mg/dL, ¿esta razón es menor o igual que 4.5:1? Explique.
89. Para la proporción  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , si  $a$  se incrementa, en tanto que  $b$  y  $d$  permanecen sin cambio, ¿qué ocurre a  $c$ ? Explique.
90. Para la proporción  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , si  $a$  y  $c$  no cambian, pero  $d$  disminuye, ¿qué pasa con  $b$ ? Explique.

## Problemas de reto

- 91. Llantas usadas** Una llanta nueva de Goodyear tiene un dibujo de 0.34 pulgadas. Después de recorrer 5000 millas, el dibujo es de casi 0.31 pulgadas. Si la cantidad mínima legal de dibujo para una llanta es de 0.06 pulgadas, ¿cuántas millas más durarán las llantas? (Suponga que no hay problemas con el auto y que las llantas se gastan a un ritmo parejo.)

- 92. Pay de manzana** La receta para el relleno de un pay de manzana especifica lo siguiente:

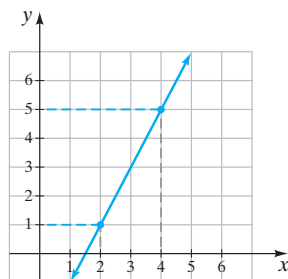
12 tazas de rebanadas de manzana  
 $\frac{1}{2}$  taza de harina  
 1 cucharadita de nuez molida  
 1 taza de azúcar  
 $\frac{1}{4}$  de taza de sal  
 2 cucharadas soperas de mantequilla o margarina  
 $\frac{1}{2}$  cucharadita de jarabe

Determine la cantidad de cada uno de los demás ingredientes que debe emplearse si sólo se dispone de 8 tazas de rebanadas de manzanas.

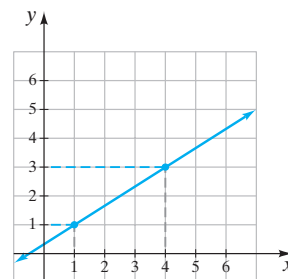
- 93. Insulina** La insulina viene en ampolletas de 10 centímetros cúbicos (cc), etiquetadas con el número de unidades de insulina por centímetro cúbico. Así que en una ampolleta diga U40 significa que hay 40 unidades de insulina por centímetro cúbico de fluido. Si un paciente requiere 25 unidades de insulina, ¿cuántos centímetros cúbicos de fluido debe incluirse en la jeringa para la ampolleta U40?

- 94. Pendiente** Un concepto importante, que se estudiará en el capítulo 4, es el de *pendiente*. La pendiente de una recta se define como la *razón* del cambio vertical al horizontal entre dos puntos cualesquiera de la recta. En las figuras siguientes, el cambio vertical se encuentra con las líneas rojas punteadas, y el horizontal con las líneas grises también punteadas.

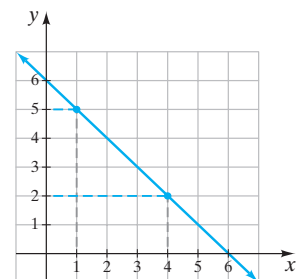
- a) Determine la pendiente de la recta de la figura 2.4a.  
 b) Calcule la pendiente de la recta de la figura 2.4b.  
 c) Calcule la pendiente de la recta de la figura 2.4c.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.4

\*El colesterol total incluye tanto el de alta densidad como el de baja, más el de otros tipos.





## Actividad en grupo

Como grupo, estudien y respondan los ejercicios 95 y 96.

95. a) Cada miembro del grupo: encontrar la razón de su estatura a la longitud del brazo (de las puntas de los dedos de una mano, a las puntas de los dedos de la otra) cuando extiende sus brazos en forma horizontal y hacia fuera. Para obtener estas medidas se necesitará la ayuda del grupo.
- b) Si fuera a dibujarse una caja para su cuerpo con los brazos extendidos, ¿ésta sería cuadrada o rectangular? Si fuera un rectángulo, la longitud de los brazos extendidos sería mayor que la estatura? Explique.
- c) Compare estos resultados con los del resto de integrantes de su grupo.
- d) ¿Qué razón se utilizaría para describir la estatura a la extensión de los brazos, para el grupo en conjunto? Explique.
96. Una razón especial en matemáticas se llama la *razón dorada*. Investigue la historia de ésta en un libro de matemáticas o en Internet, y escriban como grupo un reporte acerca de lo que es y por qué es importante.

## Ejercicios de repaso acumulativo

[1.11] Mencione cada propiedad que se ilustra.

97.  $x + 3 = 3 + x$

98.  $3(xy) = (3x)y$

99.  $2(x - 3) = 2x - 6$

[2.5] 100. Resuelva  $-(2x + 6) = 2(3x - 6)$

101. Resuelva  $3(4x - 3) = 6(2x + 1) - 15$

## 2.7 DESIGUALDADES EN UNA VARIABLE



- 1 Resolver desigualdades lineales.
- 2 Resolver desigualdades lineales cuya solución sea números reales, o no tengan solución.

### 1 Resolver desigualdades lineales

En la sección 1.5 se introdujeron los símbolos mayor que,  $>$ , y menor que,  $<$ . El símbolo  $\geq$  significa *mayor o igual*, y  $\leq$  quiere decir *menor o igual*. Una proposición de matemáticas que contenga uno o más de dichos símbolos, se denomina **desigualdad**. En ocasiones, la dirección del símbolo se denomina **sentido** o bien **orden de la desigualdad**.

#### Ejemplos de desigualdades con una variable

$$x + 3 < 5 \quad x + 4 \geq 2x - 6 \quad 4 > -x + 3$$

Para resolver una desigualdad, se debe dejar a la variable sola en un lado del símbolo de desigualdad. Para hacerlo, se utilizan propiedades muy parecidas a las que se emplearon para resolver ecuaciones. En este caso, hay cuatro propiedades que se emplean para solucionar desigualdades. Más adelante, en esta sección, se introducirán dos propiedades adicionales.

#### Propiedades que se emplean para resolver desigualdades

Para números reales  $a, b$  y  $c$ :

1. Si  $a > b$ , entonces  $a + c > b + c$ .
2. Si  $a > b$ , entonces  $a - c > b - c$ .

(continúa en la página siguiente)

3. Si  $a > b$  y  $c > 0$ , entonces  $ac > bc$ .

4. Si  $a > b$  y  $c > 0$ , entonces  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ .

La propiedad 1 dice que es posible sumar el mismo número en ambos lados de una desigualdad. La propiedad 2 establece que se puede restar el mismo número en ambos lados de una desigualdad. La propiedad 3 afirma que es válido multiplicar por el mismo número *positivo* los dos lados de una desigualdad. La propiedad 4 enuncia que el mismo número *positivo* puede usarse para dividir ambos lados de una desigualdad. Cuando se emplea cualquiera de estas cuatro propiedades, *la dirección del símbolo de desigualdad no cambia*.

**Ejemplo 1** Resuelva la desigualdad  $x - 4 > 7$ , y grafique la solución en la recta numérica.

**Solución** Para resolver esta desigualdad, se necesita despejar la variable,  $x$ . Por tanto, debe eliminarse el  $-4$  del lado izquierdo de la desigualdad. Para hacerlo, se suma 4 en ambos lados de ella.

$$\begin{aligned}x - 4 &> 7 \\x - 4 + 4 &> 7 + 4 && \text{Sumar 4 en ambos lados.} \\x &> 11\end{aligned}$$

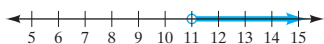


FIGURA 2.5

La solución es todos los números reales mayores que 11. En una recta numérica se ilustra lo anterior mediante un círculo claro en el número 11 de la recta, y se dibuja una flecha hacia la derecha (figura 2.5).

El círculo abierto en el 11 indica que éste *no forma parte* de la solución. La flecha que va hacia la derecha indica que todos los valores mayores que 11 son soluciones de la desigualdad. ✨

**Ejemplo 2** Resuelva la desigualdad  $2x + 6 \leq -2$ , y grafique la solución en una recta numérica.

**Solución** Para despejar la variable se debe eliminar el  $+6$  del lado izquierdo de la desigualdad. Esto se hace con la resta de 6 en ambos lados de ella.

$$\begin{aligned}2x + 6 &\leq -2 \\2x + 6 - 6 &\leq -2 - 6 && \text{Restar 6 en ambos lados.} \\2x &\leq -8 \\ \frac{2x}{2} &\leq \frac{-8}{2} && \text{Dividir ambos lados entre 2.} \\x &\leq -4\end{aligned}$$

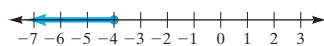


FIGURA 2.6

La solución es todos los números reales menores o iguales que  $-4$ . La solución se ilustra en la recta numérica mediante un punto en el  $-4$ , y se dibuja una flecha hacia la izquierda (figura 2.6).

El punto en el  $-4$  indica que éste *sí forma parte* de la solución. La flecha hacia la izquierda indica que todos los valores menores o iguales que  $-4$  también son soluciones de la desigualdad. ✨

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 21**

Observe que en las propiedades 3 y 4 se especificó que  $c > 0$ . ¿Qué sucede cuando una desigualdad se multiplica o divide por un número negativo? Los ejemplos 3 y 4 ilustran que **cuando se multiplica o divide una desigualdad por un número negativo, la dirección del símbolo de desigualdad cambia**.

**Ejemplo 3** Multiplique ambos lados de la desigualdad  $8 > -4$  entre  $-2$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} 8 &> -4 \\ -2(8) &< -2(-4) && \text{Cambia la dirección del símbolo de desigualdad.} \\ -16 &< 8 \end{aligned}$$



**Ejemplo 4** Divida ambos lados de la desigualdad  $8 > -4$  entre  $-2$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} 8 &> -4 \\ \frac{8}{-2} &< \frac{-4}{-2} && \text{La dirección del símbolo de desigualdad cambia.} \\ -4 &< 2 \end{aligned}$$



Ahora se establecerán dos propiedades adicionales que se utilizan cuando una desigualdad se multiplica o divide por un número negativo.

#### Propiedades adicionales que se utilizan para resolver desigualdades

5. Si  $a > b$  y  $c < 0$ , entonces  $ac < bc$ .

6. Si  $a > b$  y  $c < 0$ , entonces  $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ .

**Ejemplo 5** Resuelva la desigualdad  $-2x > 6$ , y grafique la solución en una recta numérica.

**Solución**

Para despejar la variable debe eliminarse el  $-2$  del lado izquierdo de la desigualdad. Para hacer esto, se dividen ambos lados de la desigualdad entre  $-2$ . Sin embargo, al hacer esto hay que recordar que se debe *cambiar la dirección* del signo de desigualdad.

$$\begin{aligned} -2x &> 6 \\ \frac{-2x}{-2} &< \frac{6}{-2} && \text{Dividir ambos lados entre } -2, \text{ y cambiar la} \\ &&& \text{dirección del símbolo de desigualdad.} \\ x &< -3 \end{aligned}$$

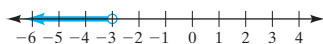


FIGURA 2.7

La solución es todos los números reales menores que  $-3$ . La solución aparece graficada en la recta numérica de la figura 2.7.



**Ejemplo 6** Resuelva la desigualdad  $4 \geq -5 - x$ , y grafique la solución en una recta numérica. Se ilustrarán dos métodos para solucionarla.

**Solución**

**Método 1:**

$$\begin{aligned} 4 &\geq -5 - x \\ 4 + 5 &\geq -5 + 5 - x && \text{Sumar 5 en ambos lados.} \\ 9 &\geq -x \\ -1(9) &\leq -1(-x) && \text{Multiplicar los dos lados por } -1 \text{ y cambiar} \\ &&& \text{la dirección del símbolo de desigualdad.} \\ -9 &\leq x \end{aligned}$$

La desigualdad  $-9 \leq x$  también se escribe como  $x \geq -9$ .

**Método 2:**

$$\begin{aligned} 4 &\geq -5 - x \\ 4 + x &\geq -5 - x + x && \text{Sumar } x \text{ en ambos lados.} \\ 4 + x &\geq -5 \end{aligned}$$

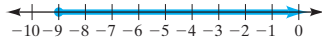


FIGURA 2.8

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 25**

La gráfica de la solución se aprecia en la recta numérica de la figura 2.8. También hubieran podido emplearse otros métodos para resolver este problema.

En el ejemplo 6, método 1, observe que se escribió  $-9 \leq x$  como  $x \geq -9$ . Aunque la solución  $-9 \leq x$  es correcta, se acostumbra escribir la solución de una desigualdad con la variable en el lado izquierdo. Una razón para ello es que con frecuencia es más fácil graficar la solución en la recta numérica. ¿Cómo graficaría  $-3 > x$ ? ¿Cómo se haría la gráfica de  $-5 \leq x$ ? Si se rescriben estas desigualdades con la variable en el lado izquierdo, la respuesta es más clara.

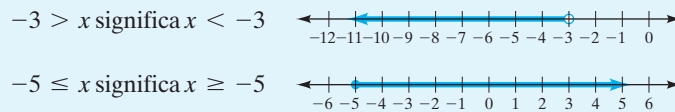
$$\begin{aligned} -3 > x & \text{ significa } x < -3 \\ -5 \leq x & \text{ significa } x \geq -5 \end{aligned}$$

Observe que la respuesta cambia de una proposición mayor que a otra menor que, o de una menor que a otra mayor que. Cuando se cambie la respuesta de una forma a la otra, hay que recordar que el símbolo de desigualdad debe apuntar hacia la letra o número al que apuntaba originalmente.

**SUGERENCIA**

$a > x$  significa  $x < a$  *Observe que ambos símbolos de desigualdad apuntan hacia la x.*  
 $a < x$  significa  $x > a$  *Observe que los dos símbolos de desigualdad apuntan hacia la a.*

**Ejemplos**



Ahora resolvamos desigualdades en las que la variable aparece en ambos lados del símbolo de desigualdad. Para resolver éstas, se utiliza el mismo procedimiento básico que se empleó para resolver ecuaciones. Sin embargo, debe recordarse que siempre que se multiplique o divida los dos lados de una desigualdad por un número negativo, debe cambiarse la dirección del símbolo de desigualdad.

**Ejemplo 7** Resuelva la desigualdad  $-5p + 9 < -2p + 6$ , y grafique la solución en una recta numérica.

**Solución** Esta desigualdad utiliza la variable  $p$ . La variable que se use no afecta el procedimiento para resolverla.

$$\begin{aligned} -5p + 9 & < -2p + 6 \\ -5p + 5p + 9 & < -2p + 5p + 6 & \text{ Sumar } 5p \text{ en ambos lados.} \\ 9 & < 3p + 6 \\ 9 - 6 & < 3p + 6 - 6 & \text{ Restar } 6 \text{ en ambos lados.} \\ 3 & < 3p \\ \frac{3}{3} & < \frac{3p}{3} & \text{ Dividir ambos lados entre } 3. \\ 1 & < p \\ \text{o bien,} & & p > 1 \end{aligned}$$

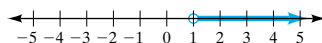


FIGURA 2.9

La solución aparece graficada en la figura 2.9.

**Ejemplo 8** Resuelva la desigualdad  $\frac{1}{2}x + 3 \leq -\frac{1}{3}x + 7$ , y grafique la solución en una recta numérica.

**Solución** Como la desigualdad contiene fracciones, se comienza por multiplicar ambos lados de ella por el mcd, 6, para eliminar las fracciones.

$$\frac{1}{2}x + 3 \leq -\frac{1}{3}x + 7$$

$$6\left(\frac{1}{2}x + 3\right) \leq 6\left(-\frac{1}{3}x + 7\right) \quad \text{Multiplicar los dos lados por el mcd, 6.}$$

$$3x + 18 \leq -2x + 42 \quad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$5x + 18 \leq 42 \quad \text{Se sumó } 2x \text{ en ambos lados.}$$

$$5x \leq 24 \quad \text{Se restó 18 en ambos lados.}$$

$$x \leq \frac{24}{5} \quad \text{Se dividió ambos lados entre 5.}$$

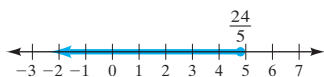


FIGURA 2.10

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 53

La solución está graficada en la figura 2.10.



## 2 Resolver desigualdades lineales cuya solución sea números reales, o no tengan solución

En los ejemplos 9 y 10 se ilustran dos tipos especiales de desigualdad. El ejemplo 9 es una que se cumple para todos los números reales, y el ejemplo 10 es otra que nunca se cumple para los números reales.

**Ejemplo 9** Resuelva la desigualdad  $2(x + 3) \leq 5x - 3x + 8$ , y grafique la solución en una recta numérica.

**Solución**

$$2(x + 3) \leq 5x - 3x + 8$$

$$2x + 6 \leq 5x - 3x + 8 \quad \text{Se usó la propiedad distributiva.}$$

$$2x + 6 \leq 2x + 8 \quad \text{Se redujeron los términos semejantes.}$$

$$2x - 2x + 6 \leq 2x - 2x + 8 \quad \text{Se restó } 2x \text{ en ambos lados.}$$

$$6 \leq 8$$



FIGURA 2.11

Como el 6 siempre es menor que 8, la solución es **todos los números reales** (figura 2.11).



**Ejemplo 10** Resuelva la desigualdad  $4(x + 1) > x + 5 + 3x$ , y grafique la solución en una recta numérica.

**Solución**

$$4(x + 1) > x + 5 + 3x$$

$$4x + 4 > x + 5 + 3x \quad \text{Se utilizó la propiedad distributiva.}$$

$$4x + 4 > 4x + 5 \quad \text{Se redujeron los términos semejantes.}$$

$$4x - 4x + 4 > 4x - 4x + 5 \quad \text{Restar } 4x \text{ en ambos lados.}$$

$$4 > 5$$

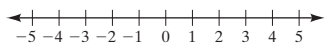


FIGURA 2.12

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 43

Como 4 nunca es mayor que 5, la respuesta es **no tiene solución** (figura 2.12). No existe ningún número real que haga que la proposición sea verdadera.



## Conjunto de ejercicios 2.7

### Ejercicios conceptuales

1. Mencione los cuatro símbolos de desigualdad que se dieron en esta sección y escriba la forma en que se lee cada uno.
2. Explique la diferencia entre  $>$  y  $\geq$ .
3. Los enunciados siguientes, ¿son falsos o verdaderos? Explique.
  - a)  $3 > 3$
  - b)  $3 \geq 3$
4. Si  $a < b$  es una proposición verdadera, ¿ $b > a$  también debe ser verdad? Explique.
5. Al resolver una desigualdad, ¿en qué condiciones será necesario cambiar la dirección del símbolo de desigualdad?
6. Mencione las seis reglas que se usan para resolver desigualdades.
7. Cuando se resuelve una desigualdad, si se obtiene el resultado  $3 < 5$ , ¿cuál sería la solución?
8. Al resolver una desigualdad, si se obtuviera el resultado  $4 \geq 2$ , ¿cuál sería la solución?
9. Al resolver una desigualdad, si se obtiene el resultado de que  $5 < 2$ , ¿cuál sería la solución?
10. Si se resuelve una desigualdad y se obtiene el resultado  $-4 \geq -2$ , ¿cuál es la solución?

### Práctica de habilidades

Resuelva cada desigualdad, y haga la gráfica de la solución en una recta numérica.

11.  $x + 2 > 6$
12.  $x - 5 > -1$
13.  $x + 9 \geq 6$
14.  $4 - x \geq 3$
15.  $-x + 3 < 8$
16.  $7 < 3 + w$
17.  $8 \leq 2 - r$
18.  $2x < 4$
19.  $-2x < 3$
20.  $-12 \geq -3b$
21.  $2x + 3 \leq 5$
22.  $-4x - 3 > 5$
23.  $6n - 12 < -12$
24.  $7x - 4 \leq 9$
25.  $4 - 6x > -5$
26.  $8 < 4 - 2x$
27.  $15 > -9x + 50$
28.  $3x - 4 < 5$
29.  $6 < 3x + 10$
30.  $-3x > 2x + 10$
31.  $6s + 2 \leq 6s - 9$
32.  $-2x - 4 \leq -5x + 12$
33.  $x - 4 \leq 3x + 8$
34.  $-4n - 6 > 4n - 20$
35.  $-x + 4 < -3x + 6$
36.  $2(x - 3) < 4x + 10$
37.  $6(2m - 4) \geq 2(6m - 12)$
38.  $-2(w + 3) \leq 4w + 5$

39.  $x + 3 < x + 4$

41.  $6(3 - x) < 2x + 12$

43.  $4x - 4 < 4(x - 5)$

45.  $5(2x + 3) \geq 6 + (x + 2) - 2x$

47.  $1.2x + 3.1 < 3.5x - 3.8$

49.  $1.2(m - 3) \geq 4.6(2 - m) + 1.7$

51.  $\frac{x}{3} \leq \frac{x}{4} + 4$

53.  $t + \frac{1}{6} > \frac{2}{3}t$

55.  $\frac{1}{8}(4 - r) \leq \frac{1}{4}$

57.  $\frac{2}{3}(t + 2) \leq \frac{1}{4}(2t - 6)$

40.  $x + 5 \geq x - 2$

42.  $2(3 - x) + 4x < -6$

44.  $-2(-5 - x) > 3(x + 2) + 4 - x$

46.  $-3(-2x + 12) < -4(x + 2) - 6$

48.  $-5.3r - 6.7 \geq 2.3 - 6.5r$

50.  $-4.6(4 - x) < 2.4(x - 3) - 0.2$

52.  $\frac{x}{5} - 2 \leq \frac{x}{6}$

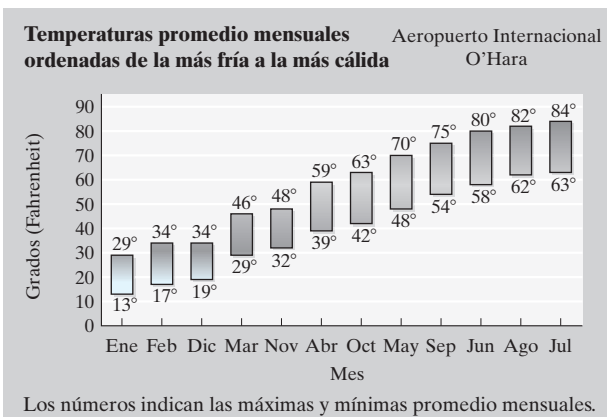
54.  $\frac{3}{5}r - 9 < \frac{3}{8}r$

56.  $5 - \frac{1}{6}x < \frac{2}{3}x$

58.  $\frac{3}{4}(n - 4) \geq \frac{2}{3}(n - 4)$

## Solución de problemas

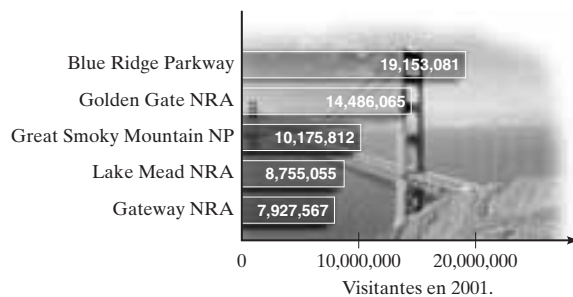
59. **Temperaturas de Chicago** La gráfica siguiente muestra las temperaturas promedio máxima y mínima mensuales en Chicago, durante un periodo de 126 años (Fuente: meteorólogo Richard Koeneman/WGN-TV). Observe que los meses no están en orden.



- ¿En cuáles meses la temperatura máxima promedio fue  $>65^{\circ}\text{F}$ ?
- ¿En cuáles meses la temperatura máxima promedio fue  $\leq 65^{\circ}\text{F}$ ?
- ¿En cuáles meses la temperatura mínima promedio fue  $<29^{\circ}\text{F}$ ?
- ¿En cuáles meses la temperatura mínima promedio fue  $\leq 58^{\circ}\text{F}$ ?

60. **Parques populares** La gráfica siguiente indica los 5 sitios más visitados del Sistema de Parques Nacionales de Estados Unidos, durante el año 2001.

Parques más visitados en los E.U.



Fuente: National Parks Service

- ¿En cuáles sitios el número de visitantes fue  $\geq 12,000,000$ ?
  - ¿En cuáles sitios el número de visitantes fue  $\geq 10,000,000$ , pero  $\leq 15,000,000$ ?
  - ¿En cuáles sitios el número de visitantes fue  $> 8,000,000$  pero  $\leq 10,175,812$ ?
  - ¿En cuáles sitios el número de visitantes fue  $\geq 14,486,065$  y  $\leq 14,486,065$ ?
61. Los símbolos de desigualdad que se han estudiado hasta este momento son  $<$ ,  $\leq$ ,  $>$  y  $\geq$ . ¿Podría citar alguno que no se hubiera mencionado en esta sección?

62. A continuación se presenta una parte de la hoja de devolución de impuestos del Florida Individual and Joint Intangible Tax Return, para 2001.

HOJA PARA CALCULAR IMPUESTOS		
Instrucciones. Determine cuál columna se aplica con base en el estado de llenado. Ocupe sólo la columna aplicable.	(Ocupe <i>sólo</i> una columna de las de abajo)	
	Individual	Conjunto
6A. Introduzca los Activos Totales Intangibles del Programa A, Línea 5.	\$	\$
6B. Multiplique por la Tasa Impositiva	× 0.001	× 0.001
6C. Impuesto bruto	\$	\$
6D. Reste la exención personal	– \$20.00	– \$40.00
6E. Introduzca el impuesto total debido al paso de la cantidad al Programa A, Línea 6.	\$	\$

Utilice la Hoja para Calcular Impuestos a fin de determinar el impuesto total que se adeuda (Línea 6E), si los activos totales gravables del Programa A, línea 5, son los que siguen.

- a) 30,000 y el llenado es individual.                      b) \$175,000 y su llenado es individual.  
 c) \$200,000 y su llenado es conjunto.                      d) \$300,000 y su llenado es conjunto.

63. Considere la desigualdad  $xy > 6$ , donde  $x$  y  $y$  representan números reales. Explique por qué *no se puede* hacer el paso siguiente:

$$\frac{xy}{y} > \frac{6}{y} \quad \text{Dividir ambos lados entre } y.$$

## Problemas de reto

64. Resuelva la desigualdad siguiente.

$$3(2 - x) - 4(2x - 3) \leq 6 + 2x - 4x$$

65. Solucione la siguiente desigualdad.

$$6x - 6 > -4(x + 3) + 5(x + 6) - x$$

## Ejercicios de repaso acumulativo

[1.9] 66. Evalúe  $-x^2$  para  $x = 3$ .

67. Evalúe  $-x^2$  para  $x = -5$ .

[2.5] 68. Resuelva  $4 - 3(2x - 4) = 5 - (x + 3)$ .

- [2.6] 69. **Cuenta de la electricidad.** La Milford Electric Company cobra \$0.174 por kilowatt-hora de electricidad. La factura mensual de los Vega por consumo fue de \$87 durante julio, ¿cuántos kilowatts-hora de electricidad usaron los Vega en el mes de julio?

## RESUMEN DEL CAPÍTULO

### Términos y frases importantes

#### 2.1

Coficiente numérico  
 Constante  
 Expresión  
 Factor  
 Reducir términos semejantes  
 Simplificar una expresión  
 Término  
 Términos semejantes  
 Variable

#### 2.2

Comprobar una ecuación  
 Despejar la variable  
 Ecuaciones equivalentes  
 Ecuación lineal  
 Propiedad de igualdad de la suma  
 Resolver una ecuación  
 Solución de una ecuación

#### 2.3

Propiedad de la multiplicación de igualdad  
 Recíproco

#### 2.5

Contradicción  
 Ecuaciones condicionales  
 Identidad

#### 2.6

Extremos

Figuras semejantes  
 Medios  
 Pendiente  
 Productos cruzados  
 Proporción  
 Razón  
 Términos de una razón

#### 2.7

Desigualdad  
 Sentido (u orden) de la desigualdad

(continúa en la página siguiente)



## HECHOS IMPORTANTES

Propiedad distributiva

$$a(b + c) = ab + ac$$

Propiedad de la suma

$$\text{Si } a = b, \text{ entonces } a + c = b + c.$$

Propiedad de la multiplicación

$$\text{Si } a = b, \text{ entonces } a \cdot c = b \cdot c, c \neq 0.$$

Productos cruzados

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ entonces } ad = bc.$$

## Propiedades que se usan para resolver desigualdades

1. Si  $a > b$ , entonces  $a + c > b + c$ .

2. Si  $a > b$ , entonces  $a - c > b - c$ .

3. Si  $a > b$  y  $c > 0$ , entonces  $ac > bc$ .

4. Si  $a > b$  y  $c > 0$ , entonces  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ .

5. Si  $a > b$  y  $c < 0$ , entonces  $ac < bc$ .

6. Si  $a > b$  y  $c < 0$ , entonces  $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ .

## Ejercicios de repaso del capítulo

**[2.1]** Utilice la propiedad distributiva para simplificar.

1.  $3(x + 4)$

2.  $3(x - 2)$

3.  $-2(x + 4)$

4.  $-(x + 2)$

5.  $-(m + 3)$

6.  $-4(4 - x)$

7.  $5(5 - p)$

8.  $6(4x - 5)$

9.  $-5(5x - 5)$

10.  $4(-x + 3)$

11.  $\frac{1}{2}(2x + 4)$

12.  $-(3 + 2y)$

13.  $-(x + 2y - z)$

14.  $-3(2a - 5b + 7)$

Simplifique.

15.  $7x - 3x$

16.  $5 - 3y + 3$

17.  $1 + 3x + 2x$

18.  $-2x - x + 3y$

19.  $4m + 2n + 4m + 6n$

20.  $9x + 3y + 2$

21.  $6x - 2x + 3y + 6$

22.  $x + 8x - 9x + 3$

23.  $-4x^2 - 8x^2 + 3$

24.  $-2(3a^2 - 4) + 6a^2 - 8$

25.  $2x + 3(x + 4) - 5$

26.  $4(3 - 2b) - 2b$

27.  $6 - (-x + 6) - x$

28.  $2(2x + 5) - 10 - 4$

29.  $-6(4 - 3x) - 18 + 4x$

30.  $4y - 3(x + y) + 6x^2$

31.  $\frac{1}{4}d + 2 - \frac{3}{5}d + 5$

32.  $3 - (x - y) + (x - y)$

33.  $\frac{5}{6}x - \frac{1}{3}(2x - 6)$

34.  $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}n - \frac{1}{3}(n + 2)$

**[2.2-2.5]** Resuelva.

35.  $6x = 6$

36.  $x + 6 = -7$

37.  $x - 4 = 7$

38.  $\frac{x}{3} = -9$

39.  $2x + 4 = 8$

40.  $14 = 3 + 2x$

41.  $4c + 3 = -21$

42.  $4 - 2a = 10$

43.  $-x = -12$

44.  $3(x - 2) = 6$

45.  $-12 = 3(2x - 8)$

46.  $4(6 + 2x) = 0$

47.  $-6n + 2n + 6 = 0$

50.  $4x + 6 - 7x + 9 = 18$

53.  $8.4r - 6.3 = 6.3 + 2.1r$

56.  $-2.3(x - 8) = 3.7(x + 4)$

59.  $\frac{3}{5}(r - 6) = 3r$

62.  $-(w + 2) = 2(3w - 6)$

65.  $3x - 12x = 24 - 9x$

68.  $4 - c - 2(4 - 3c) = 3(c - 4)$

71.  $4(x - 3) - (x + 5) = 0$

74.  $\frac{x}{6} = \frac{x - 4}{2}$

77.  $\frac{2}{5}(2 - x) = \frac{1}{6}(-2x + 2)$

48.  $-3 = 3w - (4w + 6)$

51.  $4 + 3(x + 2) = 10$

54.  $19.6 - 21.3t = 80.1 - 9.2t$

57.  $\frac{p}{3} + 2 = \frac{1}{4}$

60.  $\frac{2}{3}w = \frac{1}{7}(w - 2)$

63.  $2x + 6 = 3x + 9 - 3$

66.  $5p - 2 = -2(-3p + 6)$

69.  $2(x + 7) = 6x + 9 - 4x$

72.  $-2(4 - x) = 6(x + 2) + 3x$

75.  $\frac{1}{5}(3s + 4) = \frac{1}{3}(2s - 8)$

78.  $\frac{x}{4} + \frac{x}{6} = \frac{1}{2}(x + 3)$

49.  $6 - (2n + 3) - 4n = 6$

52.  $-3 + 3x = -2(x + 1)$

55.  $0.35(c - 5) = 0.45(c + 4)$

58.  $\frac{d}{6} + \frac{1}{7} = 2$

61.  $9x - 6 = -3x + 30$

64.  $-5a + 3 = 2a + 10$

67.  $4(2x - 3) + 4 = 8x - 8$

70.  $-5(3 - 4x) = -6 + 20x - 9$

73.  $\frac{x + 3}{2} = \frac{x}{2}$

76.  $\frac{2(2t - 4)}{5} = \frac{3t + 6}{4} - \frac{3}{2}$

[2.6] Determine las razones siguientes. Escriba cada razón en sus términos mínimos.

79. 12 pies a 20 pies

80. 80 onzas a 12 libras

81. 32 onzas a 2 libras

Resuelva cada proporción.

82.  $\frac{x}{4} = \frac{8}{16}$

83.  $\frac{5}{20} = \frac{x}{80}$

84.  $\frac{3}{x} = \frac{15}{45}$

85.  $\frac{20}{45} = \frac{15}{x}$

86.  $\frac{6}{5} = \frac{-12}{x}$

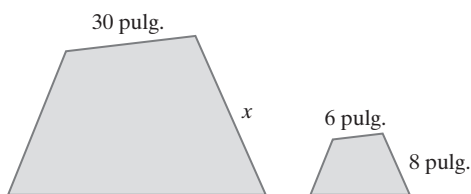
87.  $\frac{b}{6} = \frac{8}{-3}$

88.  $\frac{-4}{9} = \frac{-16}{x}$

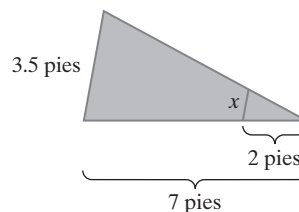
89.  $\frac{x}{-15} = \frac{30}{-5}$

Los pares de figuras siguientes son semejantes. Para cada par encuentre la longitud del lado que se denota como  $x$ .

90.



91.



[2.7] Resuelva cada desigualdad y grafique la solución en una recta numérica.

92.  $3x + 4 \geq 10$

93.  $-4a - 6 > 4a - 14$

94.  $5 - 3r \leq 2r + 15$

95.  $2(x + 4) \leq 2x - 5$

96.  $2(x + 3) > 6x - 4x + 4$

97.  $x + 6 > 9x + 30$

98.  $x - 2 \leq -4x + 7$

99.  $-(x + 2) < -2(-2x + 5)$

100.  $\frac{x}{2} < \frac{2}{3}(x + 3)$

101.  $\frac{3}{10}(t - 2) \leq \frac{3}{4}(4 + 2t)$

[2.6] *Plantee una proporción y resuelva cada problema.*

102. **Viaje en lancha** Una embarcación navega 40 millas en 1.8 horas. Si viaja a la misma velocidad, ¿cuánto tiempo le tomará recorrer 140 millas?



103. **Pastel** Si una rebanada de 4 onzas de pastel tiene 160 calorías, ¿cuántas tendrá una rebanada de 6 onzas?
104. **Máquina copiadora** Si una máquina puede copiar 20 páginas por minuto, ¿cuántas páginas copiará en 22 minutos?
105. **Escala de un mapa** Si la escala de un mapa es de 1 pulgada a 60 millas, ¿qué distancia en el mapa representará a 380 millas?
106. **Modelo de carro** Bryce Winston construye un modelo de carro a escala de 1 pulgada a 1.5 pies. Si el modelo terminado mide 10.5 pulgadas, ¿cuál es el tamaño real del auto?
107. **Tipo de cambio** Si 1 dólar estadounidense se cambia por 9.165 pesos mexicanos, encuentre el valor de 1 peso en términos de dólares estadounidenses.
108. **Catsup** Si una máquina puede llenar y sellar 80 botellas de catsup en 50 segundos, ¿cuántas botellas llenará y sellará en 2 minutos?

## Examen de práctica del capítulo

Utilice la propiedad distributiva para simplificar.

- $-3(4 - 2x)$
- $-(x + 3y - 4)$

Simplifique

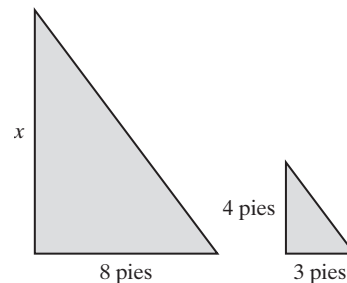
- $5x - 8x + 4$
- $4 + 2x - 3x + 6$
- $-y - x - 4x - 6$
- $a - 2b + 6a - 6b - 3$
- $2x^2 + 3 + 2(3x - 2)$

Resuelva los ejercicios 8 a 16.

- $2.4x - 3.9 = 3.3$
- $\frac{5}{6}(x - 2) = x - 3$
- $6m - (4 - 2m) = 0$
- $3w + 2(2w - 6) = 4(3w - 3)$
- $2x - 3(-2x + 4) = -13 + x$
- $3x - 4 - x = 2(x + 5)$
- $-3(2x + 3) = -2(3x + 1) - 7$
- $\frac{9}{x} = \frac{3}{-15}$
- $\frac{1}{7}(2x - 5) = \frac{3}{8}x - \frac{5}{7}$
- ¿Cómo se llama una ecuación que tiene
  - exactamente una solución,
  - ninguna solución,
  - todos los números reales como solución?

Resuelva los ejercicios 18 a 21 y grafique la solución en una recta numérica.

- $2x - 4 < 4x + 10$
- $3(x + 4) \geq 5x - 12$
- $4(x + 3) + 2x < 6x - 3$
- $-(x - 2) - 3x = 4(1 - x) - 2$
- Las siguientes figuras son semejantes. Encuentre la longitud del lado  $x$ .



- Insecticida** Si 6 galones de insecticida alcanzan para dar tratamiento a 3 acres de terreno, ¿cuántos galones se necesitarán para tratar 75 acres?
- Utilidad de una gasolinera** Suponga que el propietario de una gasolinera logra una utilidad de 40 centavos por galón de gasolina que vende. ¿Cuántos galones tendría que vender en un año a fin de obtener una utilidad de \$20,000 por las ventas de gasolina?
- Tiempo de viaje** Mientras viaja, el lector observa que recorre 25 millas en 35 minutos. Si su velocidad no cambia, ¿cuánto tiempo le tomará recorrer 125 millas?

## Examen de repaso acumulativo

Haga el siguiente examen y revise sus respuestas con que aparecen al final. Repase cualquier pregunta que haya respondido en forma incorrecta. La sección y objetivo en que se cubrió el material se indica después de cada respuesta.

- Multiplique  $\frac{52}{15} \cdot \frac{10}{13}$
- Divida  $\frac{5}{24} \div \frac{2}{9}$
- Inserte cualquiera de los símbolos  $<$ ,  $>$ , o  $=$ , en el área sombreada a fin de que la proposición sea verdadera:  $|-2| \blacksquare 1$ .
- Evalúe  $-5 - (-4) + 12 - 8$ .
- Reste  $-6$  de  $-7$ .
- Evalúe  $20 - 6 \div 3 \cdot 2$ .
- Evalúe  $3[6 - (4 - 3^2)] - 30$ .
- Evalúe  $-2x^2 - 6x + 8$  cuando  $x = 2$ .
- Diga el nombre de la propiedad que se ilustra.  
 $(x + 4) + 6 = x + (4 + 6)$

Simplifique

- $8x + 2y + 4x - y$
- $9 - \frac{2}{3}x + 16 + \frac{3}{4}x$

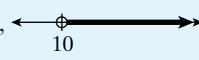
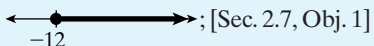
Resuelva.

- $6x + 2 = 10$
- $-6x - 5x + 6 = 28$
- $4(x - 2) = 5(x - 1) + 3x + 2$
- $\frac{40}{30} = \frac{3}{x}$
- $\frac{3}{4}n - \frac{1}{5} = \frac{2}{3}n$

Resuelva y grafique la solución en una recta numérica.

- $x - 3 > 7$
- $2x - 7 \leq 3x + 5$
- Fertilizante** Una bolsa de 36 libras de fertilizante sirve para mejorar un área de 5000 pies cuadrados. ¿Cuántas libras de fertilizante necesitará Marisa Neilson para fertilizar sus 22,000 pies cuadrados de césped?
- Ingresos** Si Samuel tiene ingresos de \$10.50 por trabajar 2 horas atendiendo embarcaciones en un muelle, ¿cuánto gana por 8 horas?

## Respuestas al examen de repaso acumulativo

- $\frac{8}{3}$ ; [Sec. 1.3, Obj. 3]
- $\frac{15}{16}$ ; [Sec. 1.3, Obj. 4]
- $>$ ; [Sec. 1.5, Obj. 2]
- 3; [Sec. 1.7, Obj. 3]
- $-1$ ; [Sec. 1.7, Obj. 1]
- 16; [Sec. 1.9, Obj. 4]
- 3; [Sec. 1.9, Obj. 5]
- 12; [Sec. 1.9, Obj. 6]
- Propiedad asociativa de la suma; [Sec. 1.10, Obj. 2]
- $12x + y$ ; [Sec. 2.1, Obj. 3]
- $\frac{1}{12}x + 25$ ; [Sec. 2.1, Obj. 3]
- $\frac{4}{3}$ ; [Sec. 2.4, Obj. 1]
- $-2$ ; [Sec. 2.4, Obj. 1]
- $-\frac{5}{4}$ ; [Sec. 2.5, Obj. 1]
- 2.25; [Sec. 2.6, Obj. 2]
- $\frac{12}{5}$ ; [Sec. 2.5, Obj. 2]
- $x > 10$ , ; [Sec. 2.7, Obj. 1]
- $x \geq -12$ , ; [Sec. 2.7, Obj. 1]
- 158.4 libras; [Sec. 2.6, Obj. 3]
- \$42; [Sec. 2.6, Obj. 3]

## Capítulo 3

# Fórmulas y aplicaciones del álgebra



### 3.1 Fórmulas

### 3.2 Conversión de problemas de aplicación en ecuaciones

### 3.3 Solución de problemas de aplicación

### 3.4 Problemas geométricos

### 3.5 Problemas de movimiento, dinero y mezclas

Resumen del capítulo

Ejercicios de repaso del capítulo

Examen de práctica del capítulo

Examen de repaso acumulativo

**E**l acondicionamiento físico se ha vuelto parte importante en la vida cotidiana. Encontramos gente corriendo, haciendo ciclismo y patinando en pistas de parques locales y en senderos naturales. Hacer ejercicio con amigos es motivador y ayuda al entretenimiento. En la página 221 resolvemos una ecuación con base en la fórmula de la distancia para determinar cuánto tiempo tardará una persona en bicicleta en alcanzar a un amigo que comenzó a correr más temprano por la ruta del Parque Griffith, en los Ángeles, California.



## Avance de la lección

En este capítulo mostraremos la terminología y técnicas necesarias para escribir problemas de la vida real como ecuaciones. Después resolveremos las ecuaciones mediante los procedimientos del capítulo 2. Para que las matemáticas sean pertinentes, deben ser útiles. En este capítulo explicaremos e ilustraremos las aplicaciones del álgebra en la vida real; debido a su importancia, queremos que lo aprenda bien y sienta confianza al aplicar las matemáticas a situaciones reales. Es por ello que el material de este capítulo lo cubriremos a un ritmo especial: lentamente. Debe tener confianza en su trabajo y hacer todas las tareas; mientras más problemas resuelva, mejor desempeño tendrá al plantear y resolver problemas de aplicación (o verbales).

Comenzaremos con el análisis de las fórmulas. Explicaremos cómo evaluar una fórmula y despejar una variable. La mayoría de los cursos de matemáticas y ciencias utilizan una amplia variedad de fórmulas, al igual que en muchas otras disciplinas, incluso en las artes, negocios y economía, medicina y tecnología, sólo por citar algunas.

## 3.1 FÓRMULAS



- 1 Uso de la fórmula del interés simple.
- 2 Uso de fórmulas geométricas.
- 3 Despejar una variable de una fórmula.

Una **fórmula** es una ecuación utilizada por lo general para expresar una relación matemática particular; por ejemplo, la fórmula del área de un rectángulo es:

$$\text{área} = \text{largo} \cdot \text{ancho, o bien } A = l \cdot a$$

Para **evaluar una fórmula**, sustituimos los valores numéricos de las variables y realizamos las operaciones indicadas.

## 1 Uso de la fórmula del interés simple

Una fórmula utilizada en el sistema bancario es la **fórmula de interés simple**.

## Fórmula de interés simple

$$\text{interés} = \text{capital} \cdot \text{tasa de interés} \cdot \text{tiempo, o bien } i = prt$$

Aplicamos esta fórmula para determinar el interés simple,  $i$ , generado por algunas cuentas de ahorro, o bien el interés simple que una persona debe pagar por ciertos préstamos. En la fórmula de interés simple,  $i = prt$ ,  $p$  es el capital (la cantidad invertida o recibida en préstamo),  $r$  es la tasa de interés expresada en forma decimal, y  $t$  es el tiempo de inversión o préstamo.


**EJEMPLO 1 Crédito para automóvil** Darcy Betts pide un préstamo de \$10,000 a 3 años, para comprar un carro. El banco cobra una tasa de interés simple de 5% por el préstamo. ¿Cuánto pagará de intereses al banco?

**Solución** **Entender y traducir** Como el banco cobra interés simple, empleamos la fórmula de éste para resolver el problema. Tenemos la tasa de interés,  $r$ , de 5% o 0.05 en forma decimal. El capital,  $p$ , es de \$10,000, y el tiempo,  $t$ , de 3 años. Sustituimos estos valores en la fórmula de interés simple y resolvemos para el interés,  $i$ .

$$\begin{aligned} i &= prt \\ \text{Calcular} \quad i &= 10,000(0.05)(3) \\ i &= 1500 \end{aligned}$$

**Revisar** Hay varios modos de revisar este problema. En primer lugar, pregúntese: “¿es lógica la respuesta?” \$1500 es un valor lógico. El interés por \$10,000 al 5% en el año 1 es \$500. Por tanto, para tres años es de \$1500.

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 91

**Respuesta** Darcy pagará \$1,500 de interés. Después de 3 años, cuando devuelva el préstamo, pagará el capital, \$10,000, más el interés de \$1,500, lo que hará un total de \$11,500. 

**EJEMPLO 2**

**Cuenta de ahorros** John Starmack invierte \$4000 durante dos años en una cuenta de ahorro que paga interés simple. Si el interés que ganó por la cuenta es de \$500, encuentre la tasa de interés.

**Solución**

**Entender y traducir** Empleamos la fórmula del interés simple,  $i = prt$ . Tenemos el capital,  $p$ , el tiempo,  $t$ , y el interés,  $i$ . Debemos calcular la tasa de interés,  $r$ . Sustituimos los valores dados en la fórmula de interés simple y despejamos  $r$ .

**Calcular**


$$i = prt$$

$$500 = 4000(r)(2)$$

$$500 = 8,000r$$



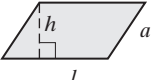
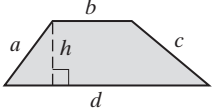
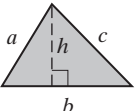
$$\frac{500}{8000} = \frac{8000r}{8000}$$

$$0.0625 = r$$

**Revisar y responder** La tasa de interés simple de 0.0625 o 6.25% por año es lógica. Si sustituimos  $p = \$4000$ ,  $r = 0.0625$  y  $t = 2$ , obtenemos el interés,  $i = \$500$ . Así, la respuesta coincide. La tasa de interés simple es de 6.25%. 

**2** Uso de fórmulas geométricas

El **perímetro**,  $P$ , es la suma de las longitudes de los lados de una figura. Expresamos el perímetro en la misma unidad de longitud utilizada para los lados; por ejemplo, en centímetros, pulgadas o pies. El **área**,  $A$ , es la superficie total dentro de los límites de la figura. Medimos las áreas en unidades cuadradas como: centímetros cuadrados, pulgadas cuadradas o pies cuadrados. En la tabla 3.1 presentamos

TABLA 3.1 Fórmulas de áreas y perímetros de cuadriláteros y triángulos*			
Figura	Dibujo	Área	Perímetro
Cuadrado		$A = l^2$	$P = 4l$
Rectángulo		$A = la$	$P = 2l + 2a$
Paralelogramo		$A = lh$	$P = 2l + 2a$
Trapezio		$A = \frac{1}{2}h(b + d)$	$P = a + b + c + d$
Triángulo		$A = \frac{1}{2}bh$	$P = a + b + c$

\*Para información adicional acerca de la geometría y figuras geométricas, consulte el apéndice C.

las fórmulas para calcular las áreas y los perímetros de triángulos y cuadriláteros. **Cuadrilátero** es el nombre general para una figura de cuatro lados.

En la tabla 3.1 utilizamos la letra  $h$  para representar la altura. En el trapecio, los lados  $b$  y  $d$  reciben el nombre de *bases*. En el triángulo, el lado  $b$  se denomina *base*.

**EJEMPLO 3 Construcción de un área para ejercicio** El médico veterinario Hal Balmer decidió cercar un área rectangular del patio trasero de su oficina, con la finalidad de ejercitar a los perros que están pensionados. La sección que va a cercar tendrá 40 pies de largo y 23 de ancho (figura 3.1).

a) ¿Qué cantidad de cerca necesita?

b) ¿Qué tan grande, en pies cuadrados, será el área cercada?

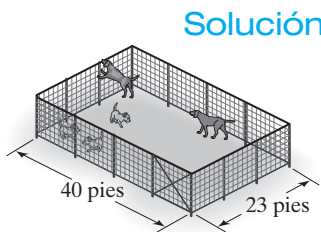


FIGURA 3.1

a) **Entender** Para encontrar la cantidad de cerca que requerirá, necesitamos calcular el perímetro del espacio que se va a cercar. Sustituamos 40 por  $l$  y 23 por  $a$  en la fórmula del perímetro del rectángulo:  $P = 2l + 2a$ .

$$P = 2l + 2a$$

**Calcular**

$$P = 2(40) + 2(23) = 80 + 46 = 126$$

**Revisar y responder** Al ver la figura 3.1, observamos que un perímetro de 126 pies es una respuesta razonable. Así que, necesitamos 126 pies de material para cercar el espacio en que se ejercitará a los perros.

b) Para obtener la superficie que va a cercar, sustituimos en la fórmula del área del rectángulo 40 para la longitud y 23 para el ancho. Medimos tanto la longitud como el ancho en pies. Como multiplicaremos una cantidad medida en pies por otra también medida en pies, la respuesta estará en pies cuadrados (o pies<sup>2</sup>).

$$\begin{aligned} A &= la \\ &= 40(23) = 920 \text{ pies cuadrados (o } 920 \text{ pies}^2) \end{aligned}$$

Con base en los datos proporcionados, el área de 920 pies<sup>2</sup> es lógica. La superficie por cercar será de 920 pies cuadrados.

**EJEMPLO 4 Fotos panorámicas** Cathy Panic compró una cámara para tomar fotos panorámicas (como la que se muestra), además de fotos regulares. Una foto panorámica tiene un perímetro de 27 pulgadas y una longitud de 10. Encuentre el ancho de la foto.





**Solución** *Entender y traducir* El perímetro,  $P$ , es de 27 pulgadas, y la longitud,  $l$ , es de 10. Sustituimos estos valores en la fórmula del perímetro de un rectángulo y despejamos el ancho,  $a$ .

$$P = 2l + 2a$$

$$27 = 2(10) + 2a$$

*Calcular*

$$27 = 20 + 2a$$

$$27 - 20 = 20 - 20 + 2a \quad \text{Restar 20 de ambos lados.}$$

$$7 = 2a$$

$$\frac{7}{2} = \frac{2a}{2}$$

*Dividir ambos lados entre 2.*

$$\frac{7}{2} = a$$

$$3.5 = a$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 95**

*Revisar y responder* Comparando la fotografía con alguna otra que tenga a la mano podría darse cuenta de que las dimensiones de 10 pulgadas de largo y la respuesta de que el ancho de la foto es de 3.5 pulgadas son razonables. ✨

### EJEMPLO 5

Karin Wagner, propietaria de un velero pequeño, necesita reemplazar una vela triangular que está desgastada. Al ordenar la vela, necesita especificar la base y altura de ésta. Mide la base y encuentra que tiene 5 pies (figura 3.2). También recuerda que la vela tiene un área de 30 pies cuadrados. Ella no quiere retirar la vela para medir su altura, de modo que emplea el álgebra para calcularla. Encuentre la altura de la vela de Karin.

**Solución** *Entender y traducir* Empleamos la fórmula proporcionada en la tabla 3.1 para el área de un triángulo.

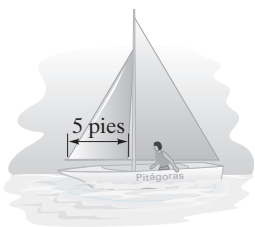


FIGURA 3.2

$$A = \frac{1}{2}bh$$

$$30 = \frac{1}{2}(5)h$$

*Calcular*

$$2 \cdot 30 = 2 \cdot \frac{1}{2}(5)h \quad \text{Multiplicar ambos lados por 2.}$$

$$60 = 5h$$

$$\frac{60}{5} = \frac{5h}{5}$$

*Dividir los dos lados entre 5.*

$$12 = h$$

*Revisar y responder* La altura del triángulo es de 12 pies. Al ver la figura 3.2, nos damos cuenta que una vela de 12 pies de altura y 5 de base es razonable. Por tanto, la respuesta es correcta. ✨

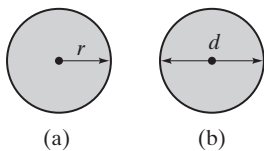
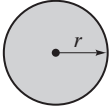


FIGURA 3.3

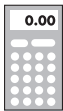
Otra figura que vemos y utilizamos de manera cotidiana, es el círculo. La **circunferencia**,  $C$ , es la longitud (o perímetro) de la curva que constituye al círculo. El **radio**,  $r$ , es el segmento de línea recta que va del centro a cualquier punto del círculo (figura 3.3a). El **diámetro** es un segmento de línea que pasa por el centro

y cuyos dos extremos están sobre el círculo (figura 3.3b). *Observe que la longitud del diámetro es el doble del radio.*

La tabla 3.2 muestra las fórmulas tanto para el área como para el perímetro (o circunferencia) de un círculo.

TABLA 3.2 Fórmulas para el círculo		
Círculo	Área	Perímetro
	$A = \pi r^2$	$P = 2\pi r$

El valor de **pi**, representado por la letra griega minúscula  $\pi$ , es un número irracional que no se puede expresar con exactitud en forma de número decimal o como cociente de dos números; por tanto, podemos decir que el valor de pi es *aproximadamente* de 3.14.



### Uso de la calculadora

Las calculadoras científicas y graficadoras tienen una tecla para el valor de  $\pi$ . Si oprimimos la tecla  $\pi$ , la calculadora mostrará en la pantalla el número 3.1415927. Éste sólo es una aproximación de  $\pi$ . Si tiene una calculadora científica o graficadora, utilice la tecla  $\pi$  para evaluar expresiones que contengan a  $\pi$ . Si su calculadora no tiene una tecla  $\pi$ , use el valor de 3.14 para aproximarlos. *Al evaluar una expresión que contenga  $\pi$ , usaremos la tecla  $\pi$  de la máquina para obtener la respuesta.* Por tanto, la solución final que se presente en el texto o en la sección de respuestas, tal vez sea un poco diferente (y más precisa) que la que obtenga si utiliza 3.14 como valor de  $\pi$ .

**EJEMPLO 6 Helipuerto** El Centro Médico Universitario (University Medical Center) tiene cerca de la entrada a la sala de emergencias un helipuerto circular, para los helicópteros ambulancia. Determine el área y perímetro del helipuerto si su diámetro es de 40 pies.

**Solución** El radio es la mitad del diámetro, por lo que  $r = \frac{40}{2} = 20$  pies.

$$A = \pi r^2$$

$$P = 2\pi r$$


$$A = \pi(20)^2$$

$$P = 2\pi(20)$$

$$A = \pi(400)$$

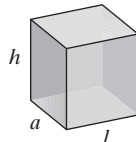

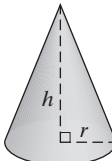
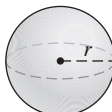
$$P \approx 125.66 \text{ pies}$$

$$A \approx 1256.64 \text{ pies cuadrados}$$

Para obtener nuestra respuesta de 1256.64, utilizamos la tecla  $\pi$  de una calculadora, y la respuesta final se redondeó al centésimo más cercano. Si no posee una calculadora que tenga la tecla  $\pi$  y utilizó el valor de 3.14 para  $\pi$ , la respuesta para el área habrá sido de 1256. 

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 99**

La tabla 3.3 proporciona fórmulas para calcular el volumen de ciertas **figuras tridimensionales**. El **volumen** se mide en unidades cúbicas, como centímetros cúbicos o pies cúbicos.

TABLA 3.3 Fórmulas para calcular volúmenes de figuras tridimensionales		
Figura	Dibujo	Volumen
Prisma rectangular		$V = lah$
Cilindro circular recto		$V = \pi r^2 h$
Cono circular recto		$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$
Esfera		$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

**EJEMPLO 7** **Wilson** En la película *Castaway (El náufrago)*, con Tom Hanks, Tom tiene una pelota de voleibol como amiga y la llama *Wilson*. Wilson tiene un diámetro de aproximadamente 8.6 pulgadas.\* Calcule el volumen de aire que hay dentro de la pelota.

**Solución** **Entender y traducir** La tabla 3.3 proporciona la fórmula para el volumen de la esfera. Esta fórmula involucra el radio. Como el diámetro es de 8.6 pulgadas, su radio es de  $\frac{8.6}{2} = 4.3$  pulgadas.

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

**Calcular** 
$$V = \frac{4}{3} \pi (4.3)^3 = \frac{4}{3} \pi (79.507) \approx 333.04$$



\*La circunferencia oficial de una pelota de voleibol no debe ser menor de 25 pulgadas ni mayor de 27.

**Revisar y responder** Un pie cúbico ocupa un espacio de  $12 \text{ pulg} \times 12 \text{ pulg} \times 12 \text{ pulg}$ , o 1728 pulgadas cúbicas. Como una pelota de voleibol cabría en una caja de 1 pie por 1 pie por 1 pie, y la respuesta es menor que 1728 pulgadas cúbicas, es aceptable. El volumen de la pelota de voleibol es de alrededor de 333 pulgadas cúbicas. ✨

**EJEMPLO 8 Altura de un recipiente para gas** El recipiente que se ilustra en la figura 3.4 es un cilindro circular recto. Encuentre su altura si tiene un radio de 8 pulgadas y volumen de 4021 pulgadas cúbicas.

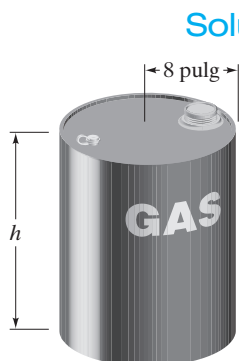


FIGURA 3.4

**Solución**

**Entender y traducir** Sabemos que  $V = 4021$  y que  $r = 8$ . Sustituimos estos valores en la fórmula del volumen de un cilindro recto, y despejamos la altura,  $h$ .

$$V = \pi r^2 h$$

$$4021 = \pi(8)^2 h$$

**Calcular**

$$4021 = \pi(64)h$$

$$\frac{4021}{64\pi} = \frac{64\pi h}{64\pi} \quad \text{Dividir ambos lados entre } 64\pi$$

$$20 \approx h$$

**Respuesta** La altura del recipiente es alrededor de 20 pulgadas.

**AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 25** ✨

**EJEMPLO 9 Diagonales de un cuadrilátero** Un cuadrilátero es un polígono\* que tiene cuatro lados (figura 3.5). Observe que tiene dos diagonales. El número de diagonales,  $d$ , de un polígono de  $n$  lados está dado por la fórmula  $d = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$ .

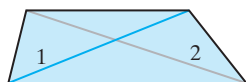


FIGURA 3.5

**Solución**

- a) ¿Cuántas diagonales tiene un pentágono (cinco lados)?  
 b) ¿Cuántas diagonales tendrá un octágono (ocho lados)?

$$\begin{aligned} \text{a) } d &= \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n & \text{b) } d &= \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n \\ &= \frac{1}{2}(5)^2 - \frac{3}{2}(5) & &= \frac{1}{2}(8)^2 - \frac{3}{2}(8) \\ &= \frac{1}{2}(25) - \frac{3}{2}(5) & &= \frac{1}{2}(64) - 12 \\ &= \frac{25}{2} - \frac{15}{2} = \frac{10}{2} = 5 & &= 32 - 12 = 20 \end{aligned}$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 77**

Un pentágono tiene 5 diagonales y un octágono tiene 20. ✨

### 3 Despejar una variable de una fórmula

Es frecuente que en este curso y en otros de matemáticas y ciencias, demos una ecuación o fórmula con una variable despejada y tengamos que despejar otra; ahora aprenderemos cómo hacerlo. Este material reforzará lo que aprendió en el capítulo 2 acerca de la forma de resolver ecuaciones. En muchas otras secciones del libro emplearemos los procedimientos aprendidos en este capítulo a fin de resolver problemas.

Para despejar una variable en una fórmula, consideramos cada una de las cantidades, excepto la que vamos a despejar, como si fueran constantes. Después, despejamos la variable deseada, aislándola en un lado de la ecuación, como se hizo en el capítulo 2.

\*Un polígono es una figura cerrada formada por segmentos de líneas rectas (por ejemplo, un triángulo o un cuadrado). En el apéndice C se estudian los polígonos.

**EJEMPLO 10** **Perímetro de un rectángulo** La fórmula para el perímetro de un rectángulo es  $P = 2l + 2a$ . Despeje la longitud,  $l$ .

**Solución** Aísle  $l$  en un lado de la ecuación. Comenzamos eliminando  $2a$  del lado derecho de la ecuación a fin de despejar al término que contiene a  $l$ .

$$\begin{aligned}
 P &= 2l + 2a \\
 P - 2a &= 2l + 2a - 2a && \text{Restamos } 2a \text{ de ambos lados.} \\
 P - 2a &= 2l \\
 \frac{P - 2a}{2} &= \frac{2l}{2} && \text{Dividimos los dos lados entre 2.} \\
 \frac{P - 2a}{2} &= l \quad \left( \text{o bien } l = \frac{P}{2} - a \right)
 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 45



**EJEMPLO 11** **Fórmula del interés simple** En el ejemplo 1 utilizamos la fórmula del interés simple  $i = prt$ . Despeje el capital,  $p$ .

**Solución** Despejemos  $p$ . Como ésta se encuentra multiplicada tanto por  $r$  como por  $t$ ; dividimos ambos lados de la ecuación entre  $rt$ .

$$\begin{aligned}
 i &= prt \\
 \frac{i}{rt} &= \frac{prt}{rt} \\
 \frac{i}{rt} &= p
 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 41



Cuando estudiemos el tema de graficación, en el capítulo 7, necesitaremos despejar  $y$  en muchas ecuaciones. Asimismo, al graficar una ecuación en una calculadora graficadora, necesitaremos despejar  $y$  antes de trazar su gráfica. En el ejemplo 12 se ilustra el procedimiento para despejar  $y$  en una ecuación.

**EJEMPLO 12** **a)** Despeje  $y$  en la ecuación  $2x + 3y = 12$ .  
**b)** Encuentre el valor de  $y$  si  $x = 6$ .

**Solución** **a)** Comenzamos por aislar el término que contiene la variable  $y$ .

$$\begin{aligned}
 2x + 3y &= 12 \\
 2x - 2x + 3y &= 12 - 2x && \text{Restamos } 2x \text{ de ambos lados.} \\
 3y &= 12 - 2x \\
 \frac{3y}{3} &= \frac{12 - 2x}{3} && \text{Dividimos los dos lados entre 3.} \\
 y &= \frac{12 - 2x}{3}
 \end{aligned}$$

$$\left( \text{o bien } y = \frac{12}{3} - \frac{2x}{3} = 4 - \frac{2}{3}x \right)$$

**b)** Para calcular el valor de  $y$  cuando  $x$  vale 6, sustituimos 6 en lugar de  $x$  en la ecuación que resolvimos para  $y$  en el inciso **a)**.

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{12 - 2x}{3} \\
 y &= \frac{12 - 2(6)}{3} = \frac{12 - 12}{3} = \frac{0}{3} = 0
 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 61

Observamos que cuando  $x = 6, y = 0$ .



Ciertas fórmulas contienen fracciones. Si en una fórmula hay una fracción, la eliminamos multiplicando ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador, como se ilustra en el ejemplo 13. Empleamos la propiedad de igualdad de la multiplicación, como explicamos en la sección 2.3.

**EJEMPLO 13** La fórmula para obtener el área de un triángulo es  $A = \frac{1}{2}bh$ . Despeje  $h$ .

**Solución** Multiplicamos ambos lados de la ecuación por el mcd, a fin de eliminar la fracción. Después, despejamos la variable  $h$ .

$$A = \frac{1}{2}bh$$

$$2 \cdot A = 2 \cdot \frac{1}{2}bh \quad \text{Multiplicamos ambos lados por 2.}$$

$$2A = bh$$

$$\frac{2A}{b} = \frac{bh}{b} \quad \text{Dividimos ambos lados entre } b.$$

$$\frac{2A}{b} = h$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 43

$$\text{Así, } h = \frac{2A}{b}.$$



En el capítulo 7 introduciremos la forma punto-pendiente de una ecuación lineal; usted deberá resolver ecuaciones similares a las del ejemplo 14.

**EJEMPLO 14** Despeje  $y$  en la ecuación  $y - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}(x - 6)$ .

**Solución** Multiplicamos ambos lados de la ecuación por el mcd, que es 12.

$$y - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}(x - 6)$$

$$12 \left( y - \frac{1}{3} \right) = 12 \cdot \frac{1}{4}(x - 6) \quad \text{Multiplicar por 12 los dos lados.}$$

$$12y - 4 = 3(x - 6) \quad \text{Utilizar la propiedad distributiva en el lado izquierdo.}$$

$$12y - 4 = 3x - 18 \quad \text{Utilizar la propiedad distributiva en el lado derecho.}$$

$$12y = 3x - 14 \quad \text{Sumar 4 en ambos lados.}$$

$$y = \frac{3x - 14}{12} \quad \text{Dividir ambos lados entre 12.}$$

La respuesta  $y = \frac{3x - 14}{12}$  puede expresarse como  $y = \frac{3}{12}x - \frac{14}{12}$  o bien  $y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{6}$ .

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 73



## Conjunto de ejercicios 3.1

### Ejercicios conceptuales

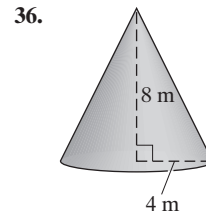
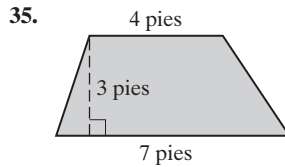
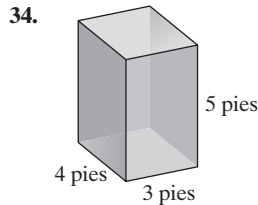
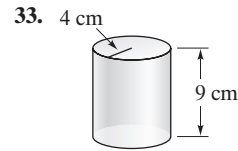
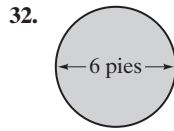
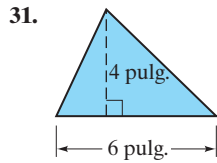
1. ¿Qué es una fórmula?
2. ¿Qué significa *evaluar una fórmula*?
3. Escriba la fórmula del interés simple, luego indique lo que representa cada letra que aparece en ella.
4. ¿Qué es un cuadrilátero?
5. ¿Cuál es la relación entre el radio y el diámetro de un círculo?
6. ¿ $\pi$  es igual a 3.14? Explique su respuesta.
7. Con el uso de cualquier fórmula para calcular algún área, explique por qué medimos ésta en unidades cuadradas.
8. Emplee cualquier fórmula para obtener un volumen, y explique por qué medimos éste en unidades cúbicas.

### Práctica de habilidades

Aplique la fórmula para determinar el valor de la variable indicada. Use una calculadora para ahorrar tiempo, y, si es necesario, redondee la respuesta al centésimo más cercano.

9.  $P = 4s$  (perímetro de un cuadrado); encuentre  $P$  si  $l = 6$ .
10.  $A = la$  (área de un rectángulo); determine  $A$  para valores de  $l = 12$  y  $a = 8$ .
11.  $A = l^2$  (área de un cuadrado); encuentre  $A$  si  $l = 7$ .
12.  $cm = 2.54 in$  (para cambiar pulgadas a centímetros); obtenga  $cm$  cuando  $pulg = 12$ .
13.  $P = 2l + 2a$  (perímetro de un rectángulo); determine  $P$  si  $l = 8$  y  $a = 5$ .
14.  $f = 1.47 m$  (para convertir la velocidad expresada en mph, a pie/s); encuentre  $f$  para  $m = 60$ .
15.  $A = \pi r^2$  (área de un círculo); calcule  $A$  si  $r = 5$ .
16.  $p = i^2 r$  (fórmula para determinar la potencia eléctrica); determine  $r$  cuando  $p = 2000$  e  $i = 4$ .
17.  $z = \frac{x - m}{s}$  (fórmula estadística para obtener el valor  $z$ ); encuentre  $z$  para  $x = 100$ ,  $m = 80$ , y  $s = 10$ .
18.  $A = \frac{1}{2}bh$  (área de un triángulo); obtenga  $b$  cuando  $A = 30$  y  $h = 10$ .
19.  $V = \frac{1}{3}Bh$  (volumen de un cono); obtenga  $h$  si  $V = 60$  y  $B = 12$ .
20.  $P = 2l + 2a$  (perímetro de un rectángulo); determine  $l$  para  $P = 28$  y  $a = 6$ .
21.  $A = \frac{m + n}{2}$  (media de dos valores); calcule  $n$  para valores de  $A = 36$  y  $m = 16$ .
22.  $A = P(1 + rt)$  (fórmula financiera para hallar la cantidad disponible que hay en una cuenta); diga cuánto vale  $r$  si  $A = 1050$ ,  $t = 1$ , y  $P = 1000$ .
23.  $F = \frac{9}{5}C + 32$  (para convertir temperaturas de grados Celsius a Fahrenheit); encuentre  $F$  si  $C = 15$ .
24.  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  (volumen de una esfera); determine el valor de  $V$  cuando  $r = 8$ .
25.  $V = \pi r^2 h$  (volumen de un cilindro); calcule  $h$  para valores de  $V = 678.24$  y  $r = 6$ .
26.  $C = \frac{5}{9}(F - 32)$  (para convertir temperaturas de grados Fahrenheit a Celsius); determine  $F$  si  $C = 68$ .
27.  $B = \frac{703a}{h^2}$  (para hallar el índice de masa corporal); encuentre el valor de  $a$  cuando  $B = 24$  y  $h = 61$ .
28.  $F = \frac{1}{2}mg^2$  (para obtener la fuerza de atracción); calcule  $m$  si  $F = 6000$  y  $g = 32$ .
29.  $PV = C + rC$  (para determinar el precio de venta si se tiene el margen de utilidad de un artículo); determine  $PV$  para  $C = 160$  y  $r = 0.12$  (o 12%).
30.  $PV = C - rC$  (para hallar el precio de venta de un artículo con descuento); obtenga  $C$  para valores de  $PV = 92$  y  $r = 0.08$  (u 8%).

En los ejercicios 31 a 36, utilice las tablas 3.1, 3.2 y 3.3 y determine cuál es la fórmula para calcular el área o volumen de la figura. Después calcule ya sea la superficie o el volumen.



En los ejercicios 37 a 60, despeje la variable indicada.

37.  $P = 4s$ , para  $l$

38.  $A = la$ , para  $a$

39.  $d = rt$ , para  $t$

40.  $C = \pi d$ , para  $d$

41.  $V = lah$ , para  $l$

42.  $i = prt$ , para  $t$

43.  $A = \frac{1}{2}bh$ , para  $b$

44.  $E = IR$ , para  $I$

45.  $P = 2l + 2a$ , para  $a$

46.  $PV = KT$ , para  $T$

47.  $5 - 2t = m$ , para  $t$

48.  $3m + 2n = 25$ , para  $n$

49.  $y = mx + b$ , para  $b$

50.  $A = P + Prt$ , para  $r$

51.  $y = mx + b$ , para  $x$

52.  $d = a + b + c$ , para  $b$

53.  $ax + by = c$ , para  $y$

54.  $ax + by + c = 0$ , para  $y$

55.  $V = \pi r^2 h$ , para  $h$

56.  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ , para  $h$

57.  $A = \frac{m + d}{2}$ , para  $m$

58.  $A = \frac{m + 2d}{3}$ , para  $d$

59.  $R = \frac{I + 3w}{2}$ , para  $w$

60.  $A = \frac{a + b + c}{3}$ , para  $c$

Para los ejercicios 61 a 76, a) Despeje y para cada ecuación, después b) encuentre el valor de  $y$  para el valor dado de  $x$ .

61.  $3x + y = 5$ ,  $x = 2$

62.  $6x + 2y = -12$ ,  $x = -3$

63.  $4x = 6y - 8$ ,  $x = 10$

64.  $-2y + 6x = -10$ ,  $x = 0$

65.  $5y = -12 + 3x$ ,  $x = 4$

66.  $15 = 3y - x$ ,  $x = 3$

67.  $-3x + 5y = -10$ ,  $x = 4$

68.  $3x - 2y = -18$ ,  $x = -1$

69.  $15 - 3x = -6y$ ,  $x = 0$

70.  $-12 = -2x - 3y$ ,  $x = -2$

71.  $-8 = -x - 2y$ ,  $x = -4$

72.  $2x + 5y = 20$ ,  $x = -5$

73.  $y + 3 = -\frac{1}{3}(x - 4)$ ,  $x = 6$

74.  $y - 3 = \frac{2}{3}(x + 4)$ ,  $x = 3$

75.  $y - \frac{1}{5} = 2\left(x + \frac{1}{3}\right)$ ,  $x = 4$

76.  $y + 5 = \frac{3}{4}\left(x + \frac{1}{2}\right)$ ,  $x = 0$

Con el empleo de la fórmula del ejemplo 9,  $d = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$ , encuentre el número de diagonales de la figura cuyo número de lados se proporciona.

77. 10 lados

78. 6 lados



Utilice la fórmula  $C = \frac{5}{9}(F - 32)$  para determinar la temperatura Celsius ( $C$ ) equivalente a la temperatura Fahrenheit ( $F$ ) dada.

79.  $F = 50^\circ$

80.  $F = 86^\circ$

Utilice la fórmula  $F = \frac{9}{5}C + 32$ , para determinar la temperatura Fahrenheit ( $F$ ) equivalente a la temperatura dada en grados Celsius ( $C$ ).

81.  $C = 25^\circ$

82.  $C = 10^\circ$

En química, la ley del gas ideal es  $P = KT/V$ , donde  $P$  es la presión,  $T$  es la temperatura,  $V$  el volumen y  $K$  es una constante. Determine la cantidad faltante.

83.  $T = 20, K = 2, V = 1$

84.  $T = 30, P = 3, K = 0.5$

85.  $P = 80, T = 100, V = 5$

86.  $P = 100, K = 2, V = 6$

## Solución de problemas

87. Considere la fórmula para calcular el área de un cuadrado,  $A = l^2$ . Si la longitud del lado,  $l$ , se duplica, ¿cuál es el cambio en su área?

88. Considere la fórmula para obtener el volumen de un cubo,  $V = l^3$ . Si se duplica la longitud de su arista,  $l$ , ¿cuál es el cambio que sufre su volumen?

La suma de los primeros  $n$  números pares se encuentra por medio de la fórmula  $S = n^2 + n$ . Determine la suma de los números que se indica.

89. Primeros 6 números pares

90. Los primeros 10 números pares

En los ejercicios 91 a 94 utilice la fórmula del interés simple.

91. **Préstamo para auto** Thang Tran decidió pedir a Citibank un préstamo de \$6000 que lo ayudará a pagar un auto. Su préstamo es por 3 años con una tasa de interés simple de 8%. ¿Qué cantidad pagará de intereses?

92. **Préstamo con interés simple** Danielle Maderi prestó \$4,000 a su hermano por un periodo de 2 años. Al final de los 2 años, su hermano había pagado los \$4,000 más \$640 de interés. ¿Qué tasa de interés simple pagó?

93. **Cuenta de ahorros** Kate Lynch invirtió cierta cantidad de dinero en una cuenta de ahorros que paga el 3% de interés simple por año. Cuando retiró su dinero al final de 3 años, recibió \$450 de intereses. ¿Cuánto dinero había depositado Kate en la cuenta?

94. **Cuenta de ahorros** Peter Ostroushko depositó \$6,000 en una cuenta de ahorros que paga el  $3\frac{1}{2}\%$  de interés simple por año. Cuando retiró su dinero, recibió \$840 por concepto de intereses. ¿Cuánto tiempo tuvo su dinero en la cuenta?

Utilice las fórmulas que se dan en las tablas 3.1, 3.2 y 3.3 para resolver los ejercicios 95 a 108.

95. **Tabla triangular** Para exhibir ciertos libros en una convención, Cynthia Lenno utilizó la cubierta de una mesa

triangular cuyos lados medían 12, 8 y 5 pies. Encuentre el perímetro de la cubierta de la mesa.

96. **Pantalla de calculadora** La pantalla rectangular de la calculadora Texas Instruments tiene una zona de trabajo (o ventana) de 2.5 pulgadas por 1.5 pulgadas. Encuentre el área de la ventana.

97. **Señalamiento** Un señalamiento es triangular, con base de 36 pulgadas y altura de 35 pulgadas. Encuentre el área del señalamiento.

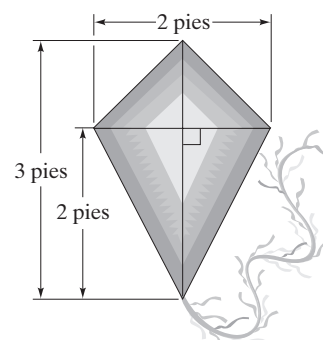


98. **Cerca** Milt McGowen tiene un lote rectangular que mide 100 pies por 60 pies. Si Milt quiere cercarlo, ¿qué cantidad de cerca necesitará?

99. **Mesa del comedor** Una mesa redonda de un comedor tiene una cubierta cuyo diámetro mide 3 pies. Encuentre el área de la cubierta de la mesa.

100. **Alberca** Una alberca circular tiene un diámetro de 24 pies. Determine su circunferencia.

101. **Papalote** A continuación presentamos un papalote. Calcule su área.



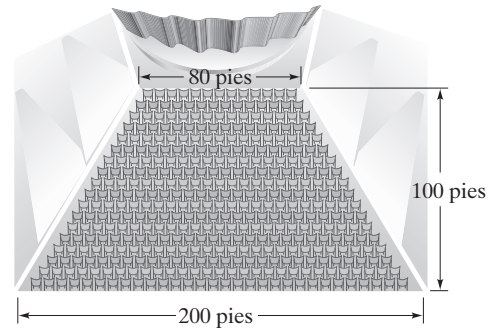
- 102. Señal trapezoidal** Canter Martin hizo un letrero para exhibirlo en un juego de béisbol. Tenía forma de trapecio. Sus bases medían 4 y 3 pies, y su altura 2 pies. Calcule el área del letrero.



- 103. Jacuzzi** El interior circular de un jacuzzi mide 8 pies de diámetro. Si el agua dentro de él tiene una profundidad de 3 pies, calcule, en pies cúbicos, el volumen del agua que contiene.
- 104. Árbol del tule** El árbol del tule más grande de los Estados Unidos se encuentra en Edison House, en Fort Myers, Florida. La circunferencia de las raíces aéreas del árbol mide 390 pies. Determine su *diámetro*, aproximando a décimas de pie.



- 105. Anfiteatro** Los asientos en un anfiteatro se encuentran dentro de un área trapezoidal, como se ilustra en la figura.



Las bases del trapecio miden 80 y 200 pies, y la altura 100 pies. Calcule el área del piso que ocupan los asientos.

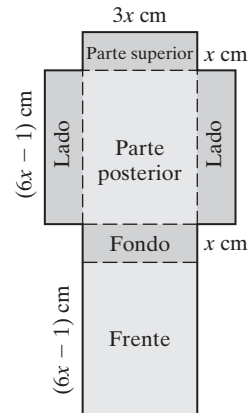
- 106. Tambo de aceite** Roberto Sánchez tiene un tambo de aceite vacío que utiliza para almacenamiento. El tambo mide 4 pies de alto y tiene un diámetro de 24 pulgadas. Encuentre su volumen en pies cúbicos.
- 107. Helado** Calcule el volumen de un cono de helado (sólo el del cono), si su diámetro mide 3 pulgadas y su altura 5 pulgadas.



- 108. Rockefeller Center** Una pista de hielo para patinar, en el Rockefeller Center de Nueva York, tiene forma casi rectangular (sus esquinas están curvadas). La longitud es de 150 pies y el ancho de 120 pies. Si el hielo que la cubre tiene una profundidad de 0.25 pies, determine el volumen de hielo que contiene (suponga que la pista es rectangular).
- 109. Índice de masa corporal** El índice de masa corporal de una persona (IMC) se encuentra con la multiplicación del peso del individuo,  $w$ , en libras, por 703, y después se divide dicho producto entre el cuadrado de la estatura de la persona,  $h$ , en pulgadas.
- Escriba la fórmula para hallar el IMC.
  - Brandy Belmont mide 5 pies 3 pulgadas de estatura, y pesa 135 libras. Calcule su IMC.
- 110. Índice de masa corporal** Consulte el ejercicio 109. El peso de Mario Guzza es de 162 libras, y mide 5 pies 7 pulgadas de estatura. Determine su IMC.

## Problemas de reto

111. **Caja de cereal** Una caja de cereal se fabricará doblando una hoja de cartón a lo largo de las líneas punteadas, según se indica en la figura de la derecha.



- a) Utilice la fórmula

$$\text{volumen} = \text{longitud} \cdot \text{ancho} \cdot \text{altura}$$

escriba una ecuación para encontrar el volumen de la caja.

- b) Calcule el volumen de la caja si  $x = 7$  cm.  
 c) Escriba una ecuación para el área superficial de la caja.  
 d) Determine el área superficial cuando  $x = 7$  cm.

## Actividad en grupo

112. **Cara de un cubo** Considere la siguiente fotografía. El frente de la figura es un cuadrado que contiene en el centro, otro más pequeño pintado de negro. Suponga que la longitud de un lado del cuadrado mayor es  $A$ , y la del cuadrado menor (en negro) es  $B$ . Asimismo, considere que el espesor del bloque es  $C$ .



- a) Miembro 1 del grupo: Determine una expresión para la superficie del cuadrado negro.  
 b) Miembro 2 del grupo: Determine una expresión para el área del cuadrado más grande (la cual incluye al cuadrado menor).  
 c) Miembro 3 del grupo: encuentre el área del cuadrado mayor menos el cuadrado negro (es decir, encuentre el área del cuadrado más grande).  
 d) Como grupo, escriban una expresión para calcular el volumen de todo el bloque sólido.  
 e) Como grupo, determinen el volumen de todo el bloque sólido, si su longitud es de 1.5 pies y su ancho es de 0.8 pies.

## Ejercicios de repaso acumulativo

- [1.9] 113. Evalúe  $[4(12 \div 2^2 - 3)^2]^2$ .  
 [2.6] 114. **Caballos** Un establo tiene cuatro caballos de raza Morgan y seis Árabes. Calcule la razón de los Árabes a los Morgan.  
 115. **Vaciar una alberca** Bombear 25 galones de agua fuera de una alberca toma 3 minutos. ¿Cuánto

tiempo tomará extraer 13,500 galones? Escriba una proporción que se utilice para resolver el problema, y después encuentre el valor que se pide.

- [2.7] 116. Resuelva  $2(x - 4) \geq 3x + 9$ .

### 3.2 CONVERSIÓN DE PROBLEMAS DE APLICACIÓN EN ECUACIONES



- 1 Traducción de frases a expresiones matemáticas.
- 2 Escribir expresiones que involucran porcentajes.
- 3 Expresar las relaciones entre dos cantidades relacionadas.
- 4 Escribir expresiones que implican multiplicación.
- 5 Conversión de aplicaciones en ecuaciones.

#### 1 Traducción de frases a expresiones matemáticas

##### SUGERENCIA

##### CONSEJO PARA ESTUDIAR

Es importante que se prepare cuidadosamente para el resto del capítulo. Asegúrese de leer el libro y resolver los ejemplos a conciencia. *Asista todos los días a clase, y, lo más importante, haga todos los ejercicios de tarea.*

Conforme lea los ejemplos del capítulo, piense acerca de cómo extenderlos a otros problemas similares. Por ejemplo, en el ejercicio 1a) se afirma que la distancia,  $d$ , incrementada en 12 millas, se representa como  $d + 12$ . Esto se generaliza a otros problemas parecidos. Por ejemplo, un peso,  $w$ , incrementado en 15 libras, se representaría como  $w + 15$ .

Una ventaja práctica del álgebra es su utilidad para solucionar problemas cotidianos que requieren de las matemáticas. A fin de que el álgebra sea útil para resolver problemas cotidianos, usted debe ser capaz de *transformar los problemas de aplicación al lenguaje matemático*. El propósito de esta sección es ayudarlo a abordar un problema de aplicación, también conocido como *problema verbal* o *en palabras*, y escribirlo en forma de ecuación matemática.

La parte más difícil de la solución de un problema de aplicación es transformarlo en una ecuación. Antes de hacerlo, debe entender el significado de ciertas palabras y frases, y la manera en que se expresan en forma matemática. La tabla 3.4 es una lista de palabras y frases seleccionadas, así como de las operaciones que implican. Se utiliza la variable  $x$ . Sin embargo, pudo haberse empleado cualquier otra.

**TABLA 3.4**

Palabra o frase	Operación	Enunciado	Forma algebraica
Sumado a Más que Incrementado en La suma de	Suma	7 <i>sumado a</i> un número 5 <i>más que</i> un número Un número <i>incrementado en</i> 3 <i>La suma de</i> un número y 4	$x + 7$ $x + 5$ $x + 3$ $x + 4$
Restado de Menos de Disminuido en La diferencia entre	Resta	6 <i>restado de</i> un número 7 <i>menos de</i> un número Un número <i>disminuido en</i> 5 <i>La diferencia entre</i> un número y 9	$x - 6$ $x - 7$ $x - 5$ $x - 9$
Multiplicado por El producto de El doble de un número, 3 veces un número, etc. De, cuando se usa con un porcentaje o fracción	Multiplicación	Un número <i>multiplicado por</i> 6 <i>El producto de</i> 4 y un número <i>El doble de un número</i> 20% <i>de</i> un número	$6x$ $4x$ $2x$ $0.20x$
Dividido entre El cociente de La mitad de un número, un tercio, etcétera.	División	Un número <i>dividido entre</i> 8 <i>El cociente de</i> un número y 6 <i>Un séptimo de un número</i>	$\frac{x}{8}$ $\frac{x}{6}$ $\frac{x}{7}$

Es frecuente que un enunciado contenga más de una operación. La tabla que sigue proporciona algunos ejemplos de esto.

Enunciado	Forma algebraica
Cuatro más que el doble de un número	$\underbrace{2x} + 4$ <i>El doble de un número</i>
Cinco menos que el triple de un número	$\underbrace{3x} - 5$ <i>El triple de un número</i>
Tres veces la suma de un número y 8	$3(\underbrace{x + 8})$ <i>La suma de un número y 8</i>
Dos veces la diferencia entre un número y 4	$2(\underbrace{x - 4})$ <i>La diferencia entre un número y 4</i>

Para obtener más práctica con los términos matemáticos, convertiremos algunas expresiones algebraicas en enunciados. Con frecuencia, una expresión algebraica puede escribirse de diferentes maneras. A continuación damos una lista de algunos de los enunciados posibles que utilizamos para representar algunas expresiones algebraicas dadas.

Algebraica	Enunciados
$2x + 3$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Tres más que el doble de un número</li> <li>La suma del doble de un número y 3</li> <li>El doble de un número, incrementado en 3</li> <li>Tres sumado al doble de un número</li> </ul>
$3x - 4$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Cuatro menos que el triple de un número</li> <li>El triple de un número, disminuido en 4</li> <li>La diferencia entre el triple de un número y 4</li> <li>Cuatro restado del triple de un número</li> </ul>

**EJEMPLO 1** Exprese cada enunciado como expresión algebraica.

- a) La distancia,  $d$ , incrementada en 12 millas
- b) Ocho menos que el doble del área,  $a$
- c) Cuatro libras más que 5 veces el peso,  $w$
- d) El doble de la suma de la altura,  $h$ , y tres pies

**Solución** a)  $d + 12$       b)  $2a - 8$       c)  $5w + 4$       d)  $2(h + 3)$

**EJEMPLO 2** Escriba tres enunciados diferentes para representar las siguientes expresiones.

- a)  $5x - 2$       b)  $2x + 7$


**Solución**

- a)
  1. Dos menos que 5 veces un número
  2. Cinco veces un número, disminuido en 2
  3. La diferencia entre el quíntuplo de un número y 2
- b)
  1. Siete más el doble de un número
  2. Dos veces un número, incrementado en 7
  3. La suma del doble de un número y 7

**EJEMPLO 3** Escriba un enunciado que represente cada expresión.

- a)**  $3x - 4$       **b)**  $3(x - 4)$

**Solución**

- a)** Uno de muchos enunciados posibles es el triple de un número menos 4.  
**b)** La expresión entre paréntesis puede escribirse como “la diferencia entre un número y 4”. Por tanto, toda la expresión se escribiría como el triple de la diferencia entre un número y 4. 

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 37

## 2 Escribir expresiones que involucran porcentajes

Como el empleo de porcentajes es tan frecuente, debe tener una comprensión clara de cómo escribir expresiones que involucran porcentajes. Siempre que realicemos un cálculo que implique porcentajes, por lo general primero se cambia a su forma decimal o de fracción.

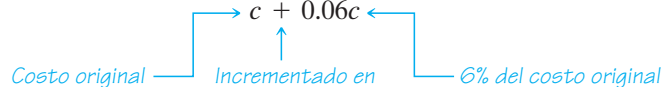
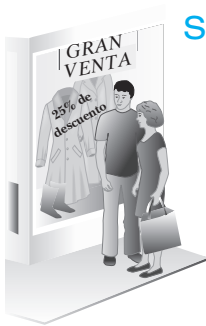
**EJEMPLO 4**

Expresar cada frase como expresión algebraica.

- a)** El costo de un par de botas,  $c$ , incrementado en 6%.  
**b)** La población en la ciudad de Brooksville,  $p$ , disminuida en 12%.

**Solución**

- a)** Al ir de compras se ven letreros que dicen “25% de descuento”. Se supone que esto significa 25% menos del “costo original”, aun cuando no se diga así. En este ejercicio se pregunta por el costo incrementado en un 6%. Se supone que esto significa el costo original incrementado en un 6%, y se escribe



Así, la respuesta es  $c + 0.06c$ .

- b)** Con el empleo del mismo razonamiento que en el inciso **a)** la respuesta es  $p - 0.12p$ . 

### CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

En el ejemplo 4a) se pide representar un costo,  $c$ , incrementado en 6%. Observemos que la respuesta es  $c + 0.06c$ . Es frecuente que los estudiantes escriban la respuesta a esta pregunta como  $c + 0.06$ . Es importante darse cuenta de que un porcentaje de una cantidad siempre es un porcentaje multiplicado por algún número o letra. A continuación presentamos ciertas frases que involucran la palabra porcentaje, y la interpretación correcta e incorrecta.

FRASE	CORRECTA	INCORRECTA
Impuesto de $7\frac{1}{2}\%$ sobre las ventas por $c$ pesos	$0.075c$	$0.075$
El costo, $c$ , incrementado un $7\frac{1}{2}\%$ por el impuesto sobre las ventas	$c + 0.075c$	$c + 0.075$
El costo, $c$ , reducido un 25%	$c - 0.25c$	$c - 0.25$

## 3 Expresar las relaciones entre dos cantidades relacionadas

En ocasiones, en un problema los números se relacionan de cierta forma. Con frecuencia, representamos al número más sencillo, o más básico, como una variable, y el otro como una expresión que contiene a dicha variable. A continuación damos algunos ejemplos.

Enunciado	Un número	Segundo número
Dos números difieren en 5	$x$	$x + 5$
La edad de Mike ahora y dentro de 8 años	$x$	$x + 8$
Un número es 6 veces otro número	$x$	$6x$
Un número es 12% menos que el otro	$x$	$x - 0.12x$



Observe que a menudo se pueden utilizar diversas parejas de expresiones para representar los dos números. Por ejemplo, “dos números difieren en 5” también se expresa como  $x$  y  $x - 5$ . Ahora veremos dos enunciados más.

Enunciado	Un número	Segundo número
La suma de dos números es igual a 10	$x$	$10 - x$
Una pieza de madera de 25 pies de longitud se corta en dos piezas	$x$	$25 - x$

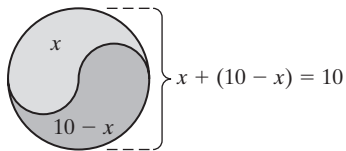


FIGURA 3.6

Tal vez no es obvio por qué en “la suma de dos números es igual a 10”, los dos números se representan como  $x$  y  $10 - x$ . Suponga que un número es 2; ¿cuál es el otro número? Como la suma es 10, el segundo número debe ser  $10 - 2$ , u 8. Suponga que un número fuera 6, el segundo número debería ser  $10 - 6$ , o 4. En general, si el primer número es  $x$ , el segundo debe ser  $10 - x$ . Observe que la suma de  $x$  y  $10 - x$  es 10 (figura 3.6).

Considere el enunciado *una pieza de madera de 25 pies de longitud se corta en dos piezas*. Si se llama  $x$  a una longitud, entonces la otra longitud debe ser  $25 - x$ . Por ejemplo, si una longitud es de 6 pies, la otra debe ser de  $25 - 6$ , o 19 pies (figura 3.7).



FIGURA 3.7

### EJEMPLO 5

Para cada una de las relaciones siguientes, seleccionemos una variable que represente una cantidad y definamos lo que representa. Después, expresemos la segunda cantidad en términos de la variable seleccionada.

- a) Los Bisontes obtuvieron 12 puntos más que los Chicklets.
- b) Sheila caminaba 1.4 veces más rápido que Jim.
- c) Bill y Mary comparten \$75.
- d) Kim tiene 7 más que el quintuplo de la cantidad que tiene Sylvia.
- e) La longitud de un rectángulo es 3 pies menos que el cuádruplo de su ancho.
- f) En Delphi Corporation, el número de empleados se incrementó un 12% de 2002 a 2003.
- g) La utilidad de un negocio, en porcentaje, la comparten dos socios, Luigi y Juan.

### Solución

Al responder estas preguntas, en primer lugar debemos decidir qué cantidad será la que represente la variable. En general, si damos una cantidad en términos de otra, haremos que la variable represente la cantidad básica (es decir, la original) en que basamos la segunda. Por ejemplo, suponga que decimos que “Paul tiene 6 años



Vea el ejemplo 5 f).

más que George”. Como damos la edad de Paul en términos de la de George, hacemos que la variable represente la edad de George.

Ahora necesitamos decidir cuál letra emplear como variable. Aunque para ello se emplea la  $x$  con frecuencia, es posible usar otras letras. Por ejemplo, en el enunciado “Paul tiene 6 años más que George”, si  $x$  representa la edad de George, entonces la de Paul es  $x + 6$ . Si representamos la edad de George con  $g$ , entonces la edad de Paul es igual a  $g + 6$ . Ambas respuestas son correctas; todo depende de qué letra elija. A continuación responderemos las preguntas.

**a)** Sea  $c$  el número de puntos que obtuvieron los Chicklets. Entonces los que lograron los Bisontes son  $c + 12$ .

**b)** Sea  $j$  la velocidad de Jim. Entonces, la de Sheila es de  $1.4j$ .

**c)** No se dice cuánto recibe cada uno de los \$75. En este caso, la variable representa a cualquier persona. Si  $a$  es la cantidad que recibe Bill. Entonces la que recibe Mary es  $75 - a$ . Por ejemplo, si Bill recibiera \$20, Mary recibiría  $75 - 20$ , o \$55.

**d)** Si  $s$  representa la cantidad que tiene Silvia. Entonces, la que tiene Kim es  $5s + 7$ .

**e)** Como damos la longitud en términos del ancho, haremos que la variable represente esta dimensión. Si  $a$  es el ancho, por tanto, la longitud es  $4a - 3$ .

**f)** Basamos el número de empleados que había en 2003 en el que había en 2002. Por tanto, si  $n$  es el número de trabajadores en 2002; este número incrementado en 12% es  $n + 0.12n$ . Así, el número de empleados en Delphi Corporation en 2003, es de  $n + 0.12n$ .

**g)** El total por compartir es 100%, pero no sabemos cuánto corresponde a cada socio. Hacemos que la variable represente ya sea el porcentaje de Luigi o el de Juan. Si  $p$  es el porcentaje de Luigi, entonces  $100 - p$  es el que logra Juan. Observe que la utilidad total es 100%. [Es decir,  $p + (100 - p) = 100$ .] ✨

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 27

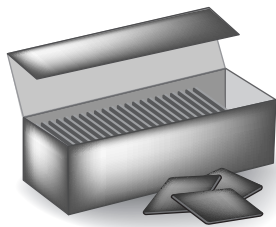
#### 4 Escribir expresiones que involucran multiplicación

Considere el enunciado “el costo de 3 artículos a \$5 cada uno”. ¿Cómo representamos esta cantidad con símbolos matemáticos? Es probable que piense que el costo es 3 por \$5, y escriba  $3 \cdot 5$  o  $3(5)$ .

Ahora considere el enunciado “el costo de  $x$  artículos a \$5 cada uno”. ¿Cómo lo representamos con notación matemática? Si empleamos el mismo razonamiento, podemos escribir  $x \cdot 5$  o  $x(5)$ . Otra manera de escribir este producto es  $5x$ ; por tanto, el costo de  $x$  artículos a \$5 cada uno podría representarse como  $5x$ .

Por último, consideremos el enunciado “el costo de  $x$  artículos a  $y$  pesos cada uno”. Al seguir el razonamiento que empleamos en las dos ilustraciones anteriores, podemos escribir  $x \cdot y$  o bien  $x(y)$ . Como estos productos se escriben como  $xy$ , el costo de  $x$  artículos a  $y$  pesos cada uno podría representarse como  $xy$ .

#### EJEMPLO 6



Escriba cada enunciado como una expresión algebraica.

- El costo de comprar  $x$  plumas a \$2 cada una.
- Una comisión de 5% por  $x$  pesos de venta.
- La cantidad de pesos que ganamos en  $h$  horas, si una persona gana \$6.50 por hora.
- El número de calorías en  $x$  barras de chocolate, si cada barra tiene 55 calorías.
- El incremento de la población de una ciudad en  $n$  años, si crece a razón de 300 personas por año.
- La distancia que viajamos en  $t$  horas si se recorren 55 millas por hora.

#### Solución

**a)** Podemos razonar lo siguiente: una pluma costaría  $1(2)$  pesos, dos plumas costarían  $2(2)$  pesos, tres,  $3(2)$ , cuatro,  $4(2)$ , y así sucesivamente. Al continuar con este proceso de razonamiento observamos que  $x$  plumas costarían  $x(2)$  o  $2x$  pesos.



**b)** Una comisión de 5% por ventas de \$1 sería  $0.05(1)$ , por ventas de \$2,  $0.05(2)$ , de \$3,  $0.05(3)$ , de \$4,  $0.05(4)$ , etcétera. Por tanto, la comisión sobre las ventas de  $x$  pesos sería  $0.05(x)$  o  $0.05x$ .

**c)**  $6.50h$

**d)**  $55x$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 9

**e)**  $300n$

**f)**  $55t$



### EJEMPLO 7

**Costo del cine** El costo del boleto para ver una película en una sala de cine AMC es de \$6.50 por adulto y \$4.25 por niño. Escriba una expresión algebraica que represente el ingreso total que el cine recibe por la admisión de  $x$  adultos y  $y$  niños.

#### Solución

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 33

Por  $x$  adultos, el cine recibe  $6.50x$  pesos.

Por  $y$  niños, el cine recibe  $4.25y$  pesos.

Por  $x$  adultos y  $y$  niños, el cine recibe  $6.50x + 4.25y$  pesos.



### EJEMPLO 8

Escriba una expresión algebraica para cada enunciado.

**a)** El número de onzas en  $x$  libras.

**b)** El número de centavos en  $a$  monedas de 10 centavos y  $b$  monedas de cinco centavos.

**c)** El número de segundos en  $x$  horas,  $y$  minutos y  $z$  segundos (3,600 segundos = 1 hora).

#### Solución

**a)** Como una libra contiene 16 onzas,  $x$  libras es igual a  $16 \cdot x$ , o  $16x$  onzas.

**b)** Como  $a$  monedas de 10 centavos es  $10a$  centavos y  $b$  monedas de 5 centavos es  $5b$  centavos, la respuesta es  $10a + 5b$ .

**c)**  $3600x + 60y + z$



Algunos términos que utilizaremos en el texto, son enteros consecutivos, pares consecutivos e impares consecutivos. Los **enteros consecutivos** son aquellos que difieren en una unidad. Por ejemplo, 6 y 7 son enteros consecutivos. Representamos dos enteros consecutivos como  $x$  y  $x + 1$ . Los **enteros pares consecutivos** son aquellos que difieren en dos unidades. Por ejemplo, 6 y 8 son enteros pares consecutivos. Los **enteros impares consecutivos** también difieren en 2 unidades. Por ejemplo, 7 y 9 son enteros impares consecutivos. Representamos dos pares o impares consecutivos como  $x$  y  $x + 2$ .

## 5 Conversión de aplicaciones en ecuaciones

La palabra *es*, cuando aparece en un problema de aplicación, con frecuencia significa *es igual a*, y se representa por medio de un signo de igualdad. A continuación presentamos algunos ejemplos de enunciados escritos como ecuaciones.

Enunciado	Ecuación
Seis unidades más que el doble de un número <i>es</i> 4.	$2x + 6 = 4$
Un número disminuido en 4 <i>es</i> 3 más que el doble del número.	$x - 4 = 2x + 3$
El producto de dos enteros consecutivos <i>es</i> 56.	$x(x + 1) = 56$
La suma de un número y ese número incrementado en 4 <i>es</i> 60.	$x + (x + 4) = 60$
El doble de la diferencia de un número y 3 <i>es</i> la suma del número y 20.	$2(x - 3) = x + 20$
Un número incrementado en 15% <i>es</i> 120.	$x + 0.15x = 120$
La suma de dos impares consecutivos <i>es</i> 24.	$x + (x + 2) = 24$

Ahora, convirtamos algunas ecuaciones en enunciados; a continuación presentamos algunos ejemplos. Sólo escribiremos dos enunciados por cada ecuación, pero recuerde que existen otras posibilidades para escribirlas.

Ecuación	Enunciados
$3x - 4 = 4x + 3$	<div style="font-size: 3em; color: #00AEEF; margin: 0 10px;">{</div> Cuatro menos que el triple de un número <i>es</i> 3 más que el cuádruplo del número. El triple de un número disminuido en 4 <i>es</i> el cuádruplo del número incrementado en 3.
$3(x - 2) = 6x - 4$	
	<div style="font-size: 3em; color: #00AEEF; margin: 0 10px;">{</div> El triple de la diferencia entre un número y 2 <i>es</i> 4 menos que el séxtuplo del número. El producto de 3 y la diferencia entre un número y 2 <i>es</i> el séxtuplo del número disminuido en 4.

**EJEMPLO 9** Escriba dos enunciados para representar la ecuación  $x - 4 = 3x - 6$ .

**Solución**

1. Un número disminuido en 4 *es* 6 menos que el triple del número.
2. La diferencia entre un número y 4 *es* la diferencia entre el triple del número y 6.

**EJEMPLO 10** Escriba un enunciado que represente la ecuación  $x + 2(x - 4) = 6$ .

**Solución** La suma de un número y el doble de la diferencia entre el número y 4 *es* 6.

**EJEMPLO 11 Traducir palabras a ecuaciones** Escriba cada problema como una ecuación.

- a) Un número es 4 menos que el doble de otro. Su suma es 14.
- b) Para dos enteros consecutivos, la suma del menor y el triple del mayor es 23.

**Solución** a) En primer lugar, expresamos los dos números en términos de la variable.

$$\begin{aligned} \text{Sea } x &= \text{un número} \\ \text{entonces } 2x - 4 &= \text{segundo número} \end{aligned}$$

Ahora escribimos la ecuación utilizando la información dada.

$$\begin{aligned} \text{primer número} + \text{segundo número} &= 14 \\ x + (2x - 4) &= 14 \end{aligned}$$

b) En primer lugar, expresamos los dos enteros consecutivos en términos de la variable.

$$\begin{aligned} \text{Sea } x &= \text{el menor de los enteros consecutivos} \\ \text{entonces } x + 1 &= \text{el mayor de los enteros consecutivos} \end{aligned}$$

Ahora escribimos la ecuación con el empleo de la información dada.

$$\begin{aligned} \text{menor} + 3 \text{ veces el mayor} &= 23 \\ x + 3(x + 1) &= 23 \end{aligned}$$



**SUGERENCIA**

Si examinamos el ejemplo 11a), veremos que empleamos la palabra *es* dos veces, una en cada oración. Sin embargo, sólo aparece un signo igual en las ecuaciones. Cuando la palabra *es* aparece más de una vez, como en el ejemplo 11a), por lo general la utilizamos una vez para expresar la relación entre los números, y la segunda ocasión para representar el signo igual en la ecuación. Cuando atraviere esta situación, debe leer la pregunta cuidadosamente para determinar cuál es la palabra *es* que representa al signo igual.

**EJEMPLO 12 Traducir palabras a ecuaciones** Escriba el problema siguiente como ecuación. Un tren recorre 3 millas más que el doble de la distancia que recorre otro tren. La distancia total que viajan ambos trenes es de 800 millas.

**Solución** En primer lugar, expresamos la distancia que viaja cada tren en términos de la variable.

$$\begin{aligned} \text{Sea } x &= \text{distancia que viaja un tren} \\ \text{entonces } 2x + 3 &= \text{distancia que viaja el segundo tren} \end{aligned}$$

Ahora escribimos la ecuación por medio de la información dada.

$$\begin{aligned} \text{distancia recorrida por el tren 1} + \text{distancia recorrida por el tren 2} &= \text{distancia total} \\ x + (2x + 3) &= 800 \quad \star \end{aligned}$$

**EJEMPLO 13 Traducir palabras a ecuaciones** Escriba el siguiente problema como una ecuación. Lori Soushon tiene 4 años más que el triple de la edad de su hijo Ron. La diferencia entre la edad de Lori y la de Ron es de 26 años.

**Solución** Como tenemos la edad de Lori en términos de la de Ron, haremos que la variable represente la edad de éste.

$$\begin{aligned} \text{Sea } x &= \text{edad de Ron} \\ \text{entonces } 3x + 4 &= \text{edad de Lori} \end{aligned}$$

Dijimos que la diferencia entre la edad de Lori y la de Ron es de 26 años. La palabra *diferencia* indica una resta.

$$\begin{aligned} \text{Edad de Lori} - \text{edad de Ron} &= 26 \\ (3x + 4) - x &= 26 \quad \star \end{aligned}$$

**SUGERENCIA**

En una expresión escrita utilizamos diversas palabras en lugar de *es* para representar al signo igual. Algunas de ellas son “será”, “fue” y “resulta”. Por ejemplo, expresamos el enunciado “cuando sumamos 4 a un número, la suma *será* el triple del número”, como  $x + 4 = 3x$ .

“Expresamos seis restado de un número *fue* la mitad del número”, como  $x - 6 = \frac{1}{2}x$ .

“Expresamos cinco sumado a un número *resulta* en el triple del número”, como  $x + 5 = 3x$ .

Por lo general, empleamos la palabra *es* para representar al signo igual, pero en ciertos casos es necesario estudiar el planteamiento de la pregunta para determinar el sitio donde colocaremos el signo igual.

**EJEMPLO 14 Traducir palabras a ecuaciones** Expresar cada problema como ecuación.

**a)** George Devenney rentó un bote por  $x$  días a un costo de \$22 por día. El costo de la renta *fue* de \$88.

**b)** La distancia que viajó Scott Borden durante  $x$  días a 600 millas por día *fue* de 1500 millas.

**c)** La población en la ciudad de Rush aumenta en 500 personas cada año. El incremento de la población en  $t$  años *es* de 2500.

**d)** El número de centavos en  $d$  monedas de 10 centavos *es* 120.

### Solución

**a)** El costo de rentar el bote durante  $x$  días es  $22x$ . Por tanto, la ecuación es  $22x = 88$ .

**b)** La distancia recorrida a 600 millas por día durante  $x$  días es  $600x$ . Entonces, la ecuación es  $600x = 1500$ .

**c)** El aumento de población en  $t$  años es  $500t$ . Por tanto, la ecuación es  $500t = 2500$ .

**d)** El número de centavos en  $d$  monedas de 10 centavos es  $10d$ . Por tanto, la ecuación es  $10d = 120$ .

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 85



### SUGERENCIA

Es importante que comprenda esta sección y resuelva todos los problemas de tarea, ya que emplearemos lo aprendido en las dos siguientes secciones y a lo largo del libro.

En los ejemplos de esta sección empleamos letras diferentes para representar la variable. Es frecuente que empleemos la letra  $x$ , pero también es posible utilizar otras. Por ejemplo, al estudiar una expresión o ecuación que involucre distancia, sería posible usar  $x$  para representar la distancia, o tal vez podríamos emplear  $d$  u otra variable. Así, para representar la expresión “la distancia incrementada en 20 millas”, escribiríamos como  $x + 20$ , o  $d + 20$ . Ambas formas son correctas.

Si el maestro, o el ejercicio, no indica cuál letra utilizar para representar la variable, seleccione la que desee. Si en el apéndice de respuestas hay una que diga  $d + 20$  y la de usted es  $x + 20$ , ésta sería correcta, si  $x$  y  $d$  representan la misma cantidad.

## Conjunto de ejercicios 3.2

### Ejercicios conceptuales

1. Proporcione cuatro frases que indiquen la operación de suma.
2. Proporcione cuatro frases que indiquen la operación de resta.
3. Proporcione cuatro frases que indiquen la operación de multiplicación.
4. Proporcione cuatro frases que indiquen la operación de división.
5. Explique por qué  $c + 0.25$  *no* representa el costo de un artículo incrementado en 25 por ciento.
6. Explique por qué  $c - 0.10$  *no* representa el costo de un artículo disminuido en 10 por ciento.

### Práctica de habilidades

7. **Edad** LeDawn Webb tiene una edad de  $n$  años. Escriba una expresión que represente su edad dentro de 7 años.
8. **Edad** Hannah Whitlock tiene una edad de  $t$  años. Escriba una expresión que represente la de David Alevy, si éste tiene cuatro veces más edad que ella.
9. **Plumas** En una venta, una pluma marca Dr. Gripp cuesta \$4. Escriba una expresión que represente el costo de comprar  $x$  plumas.
10. **Precio nuevo** Un artículo que cuesta  $r$  pesos es incrementado en \$6. Escriba una expresión que represente el precio nuevo.

11. **Motocicleta** Melissa Blum vende su motocicleta. Pedía  $x$  pesos por ella pero rebajó el precio a la mitad. Escriba una expresión que represente el nuevo precio.
12. **Zapatos** Keri Goldberg va a comprar zapatos. La tienda tiene una venta al dos por uno, es decir: que al comprar un par se regala otro. Escriba una expresión que represente el número de pares de zapatos que obtendrá Keri si compra  $y$  pares.
13. **Jirafa en crecimiento** En un año, la estatura,  $h$ , de una jirafa se incrementa en 0.8 pies. Escriba una expresión que represente su estatura actual.



14. **Lectura veloz** John Debruzzi solía leer  $p$  palabras por minuto. Después de tomar un curso de lectura veloz, su velocidad aumentó a 60 palabras por minuto. Escriba una expresión que represente su velocidad nueva de lectura.
15. **Precio de acciones** En 2002, el precio  $p$  de las acciones de General Electric cayó 8%. Escriba una expresión para el precio después de que bajó.
16. **Reciclar llantas** Cada año, en Estados Unidos se desechan  $t$  llantas. Sólo se recicla el 7% de todas. Escriba una expresión que represente el número de las llantas recicladas.
17. **Vitaminas** En una cápsula de vitaminas Solaray, el número de miligramos de riboflavina es 5 menos que una décima del número de miligramos de vitamina C. Si  $n$  representa el número de miligramos de ésta, escriba una expresión para el número de miligramos de riboflavina.
18. **Población** En 2001, China tenía la población más grande, mientras que India tenía la segunda más grande. Si  $p$  representa la población de India, en millones, escriba una expresión para la población de China si ésta tenía 40 millones más que 1.2 veces la población de India.
19. **Ascenso** Suponga que el último año José Rivera tenía un salario de  $m$  pesos. Este año recibió un ascenso y su nuevo salario es de \$16,000 más ocho novenos del anterior. Escriba una expresión que represente su salario nuevo.

20. **Montaña rusa** En una bajada específica de cierta montaña rusa en los Universal Studios, la velocidad de los carros que descienden es 12 millas por hora mayor que 8 veces la velocidad,  $s$ , de los que suben por otro lugar. Escriba una expresión que represente la velocidad de los carros que bajan por la pendiente específica.



21. **Renta de camioneta** Bob Melina rentó una camioneta para hacer un viaje. Hizo un pago diario de \$45 y una tarifa por distancia de 40 centavos por milla. Escriba una expresión que represente su costo total, si viaja  $x$  millas en un día.
22. **Incremento de la población** La ciudad de Clarkville tiene una población de 4000. Si ésta se incrementa en 300 personas por año, plantee una expresión que represente la población en  $n$  años.
23. **Dinero** Carolyn Curley vio que tenía  $x$  monedas de 25 centavos en su bolsa. Escriba una expresión que represente la cantidad de dinero en centavos.
24. **Estatura** La estatura de Dennis De Valeriz es de  $x$  pies y  $y$  pulgadas. Escriba una expresión que represente su estatura en pulgadas.
25. **Peso** El peso de Kim Wager es de  $x$  libras y  $y$  onzas. Plantee una expresión que represente su peso en onzas.
26. **Recién nacido** El bebé recién nacido de Jill tiene una edad de  $m$  minutos y  $s$  segundos. Escriba una expresión que represente su edad en segundos.
27. **Equipo de ventas** El equipo de ventas de Prentice Hall Publishing Company se incrementó en 4% de 2001 a 2002. Si  $n$  representa el número de personas en dicho equipo en 2001, escriba una expresión para el número en 2002.
28. **Reactores nucleares** El número de reactores nucleares en Europa Occidental es de 137 menos que 2.4 veces el número en los Estados Unidos. Si  $r$  representa el número en los Estados Unidos, escriba una expresión para el número en Europa Occidental.

29. **Manatíes** Un manatí en particular (también se los conoce como *vaca marina*) perdió el 2% de su peso en los meses de invierno. Si su peso original era de  $p$  libras, escriba una expresión para su nuevo peso.
30. **Impuestos** Por medio de una planeación fiscal cuidadosa, Gil French pudo reducir sus impuestos federales de 2002 a 2003 en un 18%. Si sus impuestos de 2002 fueron por  $t$  pesos, escriba una expresión que represente los de 2003.
31. **Conteo de calorías** Cada rebanada de pan blanco tiene 110 calorías, y cada cucharadita de mermelada de fresa tiene 80. Si Donna Contoy se prepara un sándwich (2 rebanadas de pan) de mermelada de fresa y utiliza  $x$  cucharaditas de ésta, escriba una expresión que represente el número de calorías que contiene el sándwich.
32. **Crecimiento de Las Vegas** De acuerdo con la U.S. Census Bureau, Las Vegas, Nevada, tuvo el crecimiento más grande de población entre 1990 y 2000 que cualquier otra de las ciudades principales de los Estados Unidos. En 2000, la población de Las Vegas fue de 38,156 menos que el doble de la que tenía en 1990. Si  $p$  representa la que había en 1990, escriba una expresión para la que Las Vegas tenía en 2000.
33. **Colesterol** Un huevo promedio de pollo contiene cerca de 275 miligramos (mg) de colesterol, y una onza de pollo, 25 mg. Escriba una expresión que represente la cantidad de colesterol en  $x$  huevos de pollo y  $y$  onzas de pollo.



Vea el ejercicio 32, Las Vegas de noche

34. **Lectura de etiquetas de alimentos** De acuerdo con los lineamientos de Estados Unidos, cada gramo de carbohidratos contiene 4 calorías, cada gramo de proteína tiene 4 calorías, y en cada gramo de grasa hay 9 calorías. Escriba una expresión que represente el número de calorías en un producto que contiene  $x$  gramos de carbohidratos,  $y$  gramos de proteína y  $z$  gramos de grasa.

Escriba cada expresión matemática en forma de enunciado. (Hay muchas respuestas correctas.)

- |                |                |
|----------------|----------------|
| 35. $x - 3$    | 36. $x + 5$    |
| 37. $4x + 1$   | 38. $3x - 4$   |
| 39. $6x - 7$   | 40. $7x - 6$   |
| 41. $4x - 2$   | 42. $5 - x$    |
| 43. $2 - 3x$   | 44. $4 + 6x$   |
| 45. $2(x - 1)$ | 46. $3(x + 2)$ |

En los ejercicios 47 a 74 damos una variable que representa una cantidad. Expresé la cantidad que se especifica en términos de la variable que damos. Por ejemplo, para el enunciado “Mike tiene 2 años más que el triple de la edad de Don,  $d$ ”, entonces la edad de Mike se representaría como  $3d + 2$ . Con el enunciado “El salario de Paul en 2003 fue 8% mayor que el de 2002,  $s$ ”, entonces el salario de Paul en 2003 se representaría como  $s + 0.08s$ . Véase el ejemplo 5 para ver más ilustraciones.

47. **Edad** Judy tiene 5 años más que la edad de Scott,  $s$ . Escriba una expresión para la edad de Judy.
48. **Edad** El hijo de Lois Heater tiene un tercio de la edad de Lois,  $l$ . Escriba una expresión para la edad del hijo.
49. **Carrera docente** Traci ha practicado la docencia durante 6 años menos que Ben,  $b$ . Escriba una expresión para el tiempo que Traci ha sido maestra.
50. **Dinero** Se dividen cien pesos entre Romaine y Jim,  $j$ . Escriba una expresión para la cantidad de Romaine.
51. **Tierra** En dos camiones colocamos un total de seiscientas libras de tierra. Si en uno de ellos ponemos  $a$  libras, escriba una expresión para la cantidad de tierra que colocamos en los dos vehículos.



52. **Compra de televisión** Una televisión marca Sony cuesta 1.4 veces lo que una RCA,  $r$ . Escriba una expresión para el costo de la Sony.
53. **Utilidades** Mónica y Julia comparten las utilidades, en porcentaje, de una tienda de juguetes. Escriba una expresión para la cantidad que recibe Julia si lo que recibe Mónica es  $m$ .
54. **Calorías** Las calorías en una porción de mezcla de nueces es de 280 calorías menos que el doble del número de calorías de una castaña,  $c$ . Escriba una expresión para el número de calorías en una porción de mezcla de nueces.
55. **Número de empleados** En Elten-Mark Company, el número de empleadas mujeres es de 6 menos que dos tercios de los hombres,  $m$ . Escriba una expresión para el número de mujeres empleadas.
56. **Superficie del territorio** El estado con mayor superficie de los Estados Unidos es Alaska, y el que tiene menos es Rhode Island. El área de Alaska es 462 millas cuadradas más que 479 veces la de Rhode Island,  $r$ . Escriba una expresión para el área de Alaska.
57. **Jonrones** En el béisbol profesional, el líder de todos los tiempos en cuanto a jonrones es Hank Aaron, y Babe Ruth es el segundo. Hank Aaron hizo 673 jonrones menos que el doble de los de Babe Ruth,  $r$ . Escriba una expresión para el número de jonrones que anotó Hank Aaron.



58. **Esperanza de vida** En 2001, el país con la esperanza de vida más elevada era Japón, y el que tenía la más baja era Botswana. La esperanza de vida promedio en Japón era de 9.3 años más que el doble de Botswana,  $b$ . Escriba una expresión para la esperanza de vida promedio en Japón. (Fuente: Naciones Unidas.)
59. **Museo saturado** En 2000, el número de visitantes al National Air and Space Museum (que forma parte del Smithsonian) fue de 2.7 millones menos que el doble del número que acudió al Louvre, en París,  $p$ . Escriba una expresión para el número de visitantes que tuvo en 2000 el Air and Space Museum. (Fuente: USA Today.)
60. **Boleto para el cine** En abril de 2001, el precio promedio de un boleto para el cine en los Estados Unidos era de 70 centavos menos que 30 veces el precio promedio en 1928,  $p$ . Escriba una expresión para el precio, en centavos, de un boleto para el cine en abril de 2001. (Fuente: Money Magazine.)
61. **Viaje al trabajo** El tiempo promedio de viaje al trabajo en el estado de Nueva York (el promedio más elevado) es de 15 minutos menos que el triple del tiempo del viaje promedio en Dakota del Norte (el promedio más bajo),  $n$ . Escriba una expresión para el tiempo promedio de viaje rumbo al trabajo en el estado de Nueva York. (Fuente: USA Today.)
62. **Espectáculos en Broadway** Al 2 de septiembre de 2001, la obra que había permanecido más tiempo en cartelera en Broadway era *Cats*, y en segundo lugar *A Chorus Line*. Esta última tuvo 16,318 menos representaciones que el triple del número que tuvo *Cats*,  $c$ . Escriba una expresión para el número de representaciones que tuvo *A Chorus Line*.
63. **Mediana del ingreso** De acuerdo con la Oficina del Censo, en el año 2000, Nueva Jersey fue el estado con la mediana del ingreso doméstico más elevada. La mediana en E.U. fue de \$67,109 menos que el doble de la de Nueva Jersey,  $n$ . Escriba una expresión para el promedio (mediana) de los E.U.
64. **Precio de acciones** El precio de las acciones de Enron en enero de 2002 fue de \$0.60 menos que  $\frac{1}{130}$  veces su precio en enero de 2001,  $p$ . Escriba una expresión para el precio de las acciones de dicha empresa en enero de 2002.
65. **Incremento de las ventas** Mike Sutton es representante de una compañía de suministros médicos. Sus ventas de 2003 aumentaron 20% sobre las de 2002,  $s$ . Escriba una expresión para las ventas de 2003.
66. **Consumo de electricidad** El consumo de electricidad de George Young en 2003, disminuyó 12% respecto del que tuvo en 2002,  $e$ . Escriba una expresión para el consumo de 2003.
67. **Aumento salarial** Karen Moreau, ingeniera, tuvo un aumento de salario de 15% sobre el del año anterior,  $s$ . Plantee una expresión para su salario de este año.
68. **Golf femenino** Karrie Webb fue la jugadora de golf femenino que más dinero ganó tanto en 1999 como en 2000. Sus ingresos se incrementaron alrededor de 18% de 1999 a 2001. Si  $w$  representa los ingresos de Karrie Webb, escriba una expresión para éstos en 2000.
69. **Tienda de pizzas** El número de clientes de Family Fun Pizza Parlor disminuyó 12% de septiembre a octubre. Si  $f$  representa el número de clientes en septiembre, escriba una expresión para el número de ellos en octubre.
70. **Casos de gripe** El número de casos de gripe en Archville disminuyó 2% en relación con el año anterior. Si  $f$  representa el número de casos de gripe en dicha población durante el año anterior, escriba una expresión para el número de casos en este año.
71. **Costo de un carro** El costo de un auto nuevo que se adquiere en Collier County incluye un impuesto de 7% sobre la venta. Si  $c$  representa el costo del carro antes de impuestos, escriba una expresión para el costo total, que incluya el impuesto.
72. **Venta de camisetitas** En una venta de remate con 25% de descuento en todos los artículos, Bill Winchief compró una camiseta nueva. Si  $c$  representa el costo anterior a la venta, plantee una expresión para el precio de venta de la camiseta.

- 73. Contaminación** El nivel de contaminación en Detroit disminuyó en 50%. Si  $p$  representa el nivel que había antes de la disminución, escriba una expresión para el nuevo nivel.
- 74. Calificaciones** El número de estudiantes que obtuvieron una calificación de A en este curso, se incrementó en

100%. Si  $n$  representa el número de los que sacaron A antes del incremento, escriba una expresión para el número de estudiantes que ahora lograron una A.

Lea con cuidado cada uno de los ejercicios 75 a 92. Después seleccione una letra que represente una de las cantidades y enuncie con exactitud lo que la letra (o variable) represente. Después escriba una ecuación para representar el problema. Por ejemplo, si se dice que “La edad de Steve es el doble de la de Gail, y la suma de ambas es 20”, quizá se haga que  $g$  represente la edad de Gail, por lo que la de Steve sería  $2g$ . Como la suma de las dos edades es 20, la ecuación que buscamos es  $2g + g = 20$ . Como pudimos utilizar letras diferentes para representar la variable, es posible que haya otras respuestas. Por ejemplo,  $2a + a = 20$  también sería aceptable si empleamos la letra  $a$  para representar la edad de Gail. Consulte los ejemplos 11 a 14 para tener más ilustraciones.

- 75. Dos números** Un número es el cuádruplo de otro. La suma de los dos números es 20.
- 76. Edad** Marie tiene 6 años más que Denise. La suma de sus edades es 48.
- 77. Enteros consecutivos** La suma de dos enteros consecutivos es 41.
- 78. Enteros pares** El producto de dos enteros pares consecutivos es 728.
- 79. Números** El doble de un número, disminuido en 8 es 12.
- 80. Enteros consecutivos** Para dos enteros consecutivos, la suma del más pequeño y el doble del más grande es 29.
- 81. Números** Un quinto de la suma de un número y 10 es 150.
- 82. Trote** David Ostrow corre 5 veces más distancia que Jennifer Freer. La distancia total que recorren los dos es de 8 millas.
- 83. Amtrak** Un tren de Amtrak recorre 4 millas menos que el doble de la distancia que viaja otro de Southern Pacific. La distancia total que recorren ambos es de 890 millas.
- 84. Viaje en carreta** En un viaje en carreta, el número de muchachas fue 8 menos que el doble del número de chicos. El total de todos los que iban en la carreta fue de 24.



- 85. Carro nuevo** Carlotta Díaz compró un carro nuevo. El costo del vehículo más el impuesto de 7% sobre la venta fue de \$32,600.
- 86. Chamarras deportiva** David Guillespie compró una chamarras deportiva con un 25% de descuento. Pagó por ella \$195.

- 87. Costo de la comida** Beth Rechsteiner comió en un restaurante. El costo de la comida más la propina de 15% fue de \$42.50.
- 88. Cintas de video** En Better Buy Warehouse, Anne Long compró una reproductora de videos en \$208; el precio estaba rebajado un 10%.
- 89. Salario** En 2000, el área metropolitana con el salario promedio anual más elevado fue San José, California, y el segundo lugar era San Francisco. El salario promedio en San José fue alrededor de 1.28 veces el promedio en San Francisco. La diferencia entre los promedios de las dos ciudades fue de \$16,762. (Fuente: Bureau of Labor Statistics.)
- 90. Esperanza de vida** Las mujeres vivieron mucho más en 2000 de lo que vivían en 1900. La esperanza de vida para las mujeres de Estados Unidos, en 2000, fue de 16.9 años menos que el doble de su esperanza de vida en 1900. La diferencia en ambas esperanzas fue de 31.4 años. (Fuente: U.S. Census Bureau.)
- 91. Cirugía con láser** El número de cirugías oftálmicas con láser fue de 0.55 millones más en 2000 que en 1999. La suma total de ellas en 1999 y 2000 fue de 2.45 millones. (Fuente: U.S. News and World Report.)
- 92. Ferrocarril** En una vía férrea estrecha, la distancia entre los rieles es alrededor de 64% de la distancia entre los de una vía estándar. La diferencia en las distancias entre los rieles de una vía estándar y otra estrecha es de casi 1.67 pies.





En los ejercicios 93 a 104, exprese cada ecuación en forma de enunciado. (Existen muchas respuestas correctas.)

\ 93.  $x + 2 = 5$

\ 94.  $x - 5 = 2x$

\ 95.  $3x - 1 = 2x + 4$

\ 96.  $x - 3 = 2x + 3$

\ 97.  $4(x - 1) = 6$

\ 98.  $4x + 6 = 2(x - 3)$

\ 99.  $5x + 6 = 6x - 1$

\ 100.  $x - 3 = 2(x + 1)$

\ 101.  $x + (x + 4) = 8$

\ 102.  $x + (2x + 1) = 5$

\ 103.  $2x + (x + 3) = 5$

\ 104.  $2x - (x + 3) = 6$

\ 105. Explique por qué el costo de la compra de  $x$  artículos a 6 pesos cada uno está representado por  $6x$ .

\ 106. Explique por qué el costo de la compra de  $x$  artículos a  $y$  pesos cada uno está representado como  $xy$ .

## Problemas de reto

### 107. Tiempo

- Escriba una expresión algebraica para el número de segundos en  $d$  días,  $m$  minutos y  $s$  segundos.
- Emplee la expresión que halló en el inciso **a)** para determinar el número de segundos que hay en 4 días, 6 horas, 15 minutos y 25 segundos.

108. **Cuotas** Al momento de escribir esto, la cuota por utilizar la autopista sur del puente Golden Gate es de \$1.50 por cada *eje* del vehículo (no se cobra por usar la autopista norte, la circulación es gratuita los fines de semana).

- Si el número de ejes de los vehículos con 2, 3, 4, 5 y 6 se representa con las letras  $r$ ,  $s$ ,  $t$ ,  $u$  y  $v$ , respectivamente, escriba una expresión para el ingreso diario de la Golden Gate Bridge Authority.
- Escriba una *ecuación* que se emplee para determinar el ingreso diario,  $d$ .



## Actividad en grupo

Los ejercicios 109 y 110 lo ayudarán a prepararse para la siguiente sección, en la que planteamos y resolvemos problemas de aplicación. Como grupo, estudien y resuelvan cada ejercicio. Para cada uno, escriban la cantidad que pedimos encontrar y represéntenla con una variable. Después escriban una ecuación que contenga la variable que se utilizó para resolver el problema. No resuelvan la ecuación.

109. **Uso del agua** Un baño de tina promedio utiliza 30 galones de agua, y una ducha promedio emplea 6 galones del líquido por minuto. ¿En cuánto tiempo una ducha usaría la misma cantidad de agua que un baño de tina?

110. **Planes salariales** Un empleado tiene la posibilidad de escoger entre dos planes de salario. El Plan A proporciona un salario semanal de \$200 más una comisión de 5% sobre las ventas del empleado. El Plan B proporciona un salario semanal de \$100 más una comisión de 8% sobre las ventas que haga. ¿Cuáles deben ser las ventas semanales para que los dos planes brinden el mismo salario semanal?

## Ejercicios de repaso acumulativo

[1.9] 111. Evalúe  $3[(4 - 16) \div 2] + 5^2 - 3$ .

[2.6] 112. Resuelva la proporción  $\frac{3.6}{x} = \frac{10}{7}$ .

[2.7] 113. Resuelva la desigualdad  $2x - 4 > 3$  y grafique la solución sobre una recta numérica.

[3.1] 114.  $P = 2l + 2w$ ; encuentre  $l$  cuando  $P = 40$  y  $w = 5$ .

115. Resuelva  $3x - 2y = 6$  para  $y$ . Después encuentre el valor de  $y$  cuando  $x$  tiene un valor de 6.

## 3.3 SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE APLICACIÓN



- 1 Utilizar el procedimiento de solución de problemas.
- 2 Plantear y resolver problemas numéricos de aplicación.
- 3 Plantear y resolver problemas de aplicación que involucran dinero.
- 4 Plantear y resolver aplicaciones que implican porcentajes.

## 1 Utilizar el procedimiento de solución de problemas



Hay muchos tipos de problemas de aplicación que pueden resolverse utilizando el álgebra. En esta sección presentamos algunos; además, en las secciones 3.4, 3.5 y a lo largo del libro, introduciremos tipos adicionales de aplicaciones. Su profesor tal vez no tenga tiempo de cubrir todas las aplicaciones que presentamos en el texto. Si así fuera, tal vez querrá dedicar parte de su tiempo a leer dichos problemas a fin de adquirir experiencia sobre las aplicaciones que se presentan.

Para prepararse para esta sección, debe entender el material que presentamos en la sección 3.2. La práctica es la mejor forma de aprender a plantear un problema de aplicación o verbal. Entre más problemas resuelva, más fácil será solucionarlos.

Es frecuente que traduzcamos problemas a términos matemáticos sin darnos cuenta de ello. Por ejemplo, si necesitamos 3 tazas de leche para una receta, y en el recipiente para medir sólo caben 2 tazas, razonamos que necesitamos 1 taza adicional de leche después de las 2 iniciales. Tal vez no lo note, pero al hacer esta operación simple se está utilizando el álgebra.

Sea  $x$  = número de tazas adicionales de leche que necesitamos

**Proceso completo:**

$$(2 \text{ tazas iniciales}) + \left( \begin{array}{c} \text{número} \\ \text{adicional de tazas} \end{array} \right) = \text{leche total que se necesita}$$

**Ecuación que representa el problema:**  $2 + x = 3$

Al despejar  $x$  obtenemos 1 taza de leche.

Es probable que nos preguntemos: ¿por qué tengo que hacer todo eso si sé que la respuesta es  $3 - 2 = 1$  taza? Al realizar dicha resta, ha resuelto mentalmente la ecuación  $2 + x = 3$ .

$$\begin{aligned} 2 + x &= 3 \\ 2 - 2 + x &= 3 - 2 && \text{Restar 2 en ambos lados.} \\ x &= 3 - 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Esta ilustración es muy elemental. Sin embargo, la mayoría de problemas en este capítulo no se resolverán por observación y requerirá el uso del álgebra.

Recordemos el procedimiento general para resolver problemas que vimos en la sección 1.2 para solucionar todos los tipos de problemas verbales. A continuación presentamos nuevamente el **procedimiento de cinco pasos para resolver problemas**, a fin de que lo consulte con facilidad. Incluimos cierta información adicional en los pasos 1 y 2, porque en esta sección haremos énfasis en la transformación de problemas de aplicación en ecuaciones.

### Procedimiento para resolver problemas de aplicación

#### 1. Entender el problema

Identificar la cantidad o cantidades que se pide encontrar.

#### 2. Traducir el problema a lenguaje matemático (expresarlo en forma de ecuación).

- Elegir una variable que represente una cantidad, y *escribir exactamente lo que representa*. Hay que representar cualesquiera otras cantidades que encontremos, en términos de esta variable.
- Utilizar la información del inciso a), escribir una ecuación que represente la aplicación.

#### 3. Efectuar los cálculos matemáticos (resolver la ecuación).

#### 4. Revisar la respuesta (empleando la aplicación *original*).

#### 5. Responder la pregunta que se pide.

A veces combinaremos dos pasos del procedimiento de resolución de problemas si ayuda a aclarar la explicación. En ocasiones no haremos la comprobación de un problema a fin de ahorrar espacio. Aun si no se hiciera, debe revisar el problema y asegurarse de que su respuesta es razonable y tiene sentido.

Ahora plantearemos y resolveremos ciertos problemas de aplicación empleando este procedimiento. Primero resolveremos problemas de aplicación que contienen porcentajes, después haremos lo mismo con otros que sí los contienen.

## 2 Plantear y resolver problemas numéricos de aplicación

Los ejemplos que presentamos en este objetivo involucran información y datos, pero no contienen porcentajes. Al resolverlos seguiremos el procedimiento de cinco pasos para resolver problemas.

**EJEMPLO 1 Un número desconocido** Dos restado del cuádruplo de un número es 10. Encuentre dicho número.

**Solución** **Entender** Para resolver este problema, necesitamos expresar como ecuación el enunciado dado. Pedimos encontrar el número desconocido. Usamos la información que aprendimos en la sección anterior para escribir la ecuación.

**Traducir** Sea  $x$  = número desconocido. Ahora, escribimos la ecuación.

$$\begin{array}{r} \text{2 restado del} \\ \text{cuádruplo de} \\ \text{un número} \end{array} \text{ es } 10$$

$$4x - 2 = 10$$

**Calcular**

$$\begin{aligned} 4x &= 12 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

**Revisar** Sustituimos 3 por el número en el problema original: 2 restado del cuádruplo de un número es 10.

$$\begin{aligned}4(3) - 2 &\stackrel{?}{=} 10 \\10 &= 10 \quad \text{Verdadero.}\end{aligned}$$

**Respuesta** Como la solución coincide, el número desconocido es 3. 

**EJEMPLO 2** **Problema numérico** La suma de dos números es 26. Encuentre los dos números si el mayor es 2 menos que el triple del menor.

**Solución** **Entender** Este problema involucra el cálculo de dos números. Cuando encontramos dos números, si expresamos el segundo en términos del primero, por lo general hacemos que la variable represente al primero. Después representamos al segundo como una expresión que contiene a la variable que utilizamos para el primer número. En este ejemplo, se dice que “el número mayor es 2 menos que el triple del menor”. Observe que el número mayor está expresado en términos del menor. Por tanto, haremos que la variable represente al menor.

**Traducir** Sea  $x$  = número menor  
entonces  $3x - 2$  = número mayor

La suma de los dos números es 26. Por tanto, escribimos la ecuación

$$\begin{aligned}\text{número menor} + \text{número mayor} &= 26 \\x + (3x - 2) &= 26\end{aligned}$$

**Calcular** Ahora resolvemos la ecuación.

$$\begin{aligned}4x - 2 &= 26 \\4x &= 28 \\x &= 7\end{aligned}$$

El número menor es 7. En seguida se obtiene el número mayor.

$$\begin{aligned}\text{número mayor} &= 3x - 2 \\&= 3(7) - 2 \quad \text{Sustituir 7 en lugar de } x. \\&= 19\end{aligned}$$

El número mayor es 19.

**Revisar** La suma de los dos números es 26.

$$\begin{aligned}7 + 19 &\stackrel{?}{=} 26 \\26 &= 26 \quad \text{Verdadero.}\end{aligned}$$

**Respuesta** Los dos números son 7 y 19. 

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 5**

### SUGERENCIA

Al leer un problema verbal, pregúntese “¿cuántas respuestas se requieren?” En el ejemplo 2, preguntamos por los dos números. La respuesta es 7 y 19. Es importante que leamos la pregunta e identifiquemos lo que pedimos. Si la pregunta hubiera sido “encuentre el *menor* de los dos números si el mayor es 2 menos que el triple del menor”, entonces la respuesta habría sido sólo el 7. Si la pregunta hubiera sido obtener el *mayor* de los dos números, entonces la respuesta habría sido sólo el 19. *Asegúrese de responder la pregunta.*

### EJEMPLO 3

**Tenis** Candice Cotton y Thomas Johnson formaron una corporación que manufactura tenis. Su corporación, denominada CoJo, fabricará 1,200 pares de tenis este año. Quiere aumentar la producción a razón de 550 pares hasta alcanzar anualmente los 4,500 pares. ¿Cuánto tiempo les tomará alcanzar su meta de producción?

#### Solución



**Entender** Pedimos calcular el número de años que tomará que su producción alcance 4500 pares al año. El próximo año su producción aumentará en 550 pares. En dos años su producción se incrementará en  $2(550)$  más que la del presente año. En  $n$  años, su producción crecerá en  $n(550)$  o  $550n$ . Utilizaremos esta información cuando se escriba la ecuación para resolver el problema.

**Traducir**

Sea  $n$  = número de años  
 entonces  $550n$  = incremento de la producción en  $n$  años

$$(\text{producción presente}) + \left( \begin{array}{c} \text{Producción incrementada} \\ \text{en } n \text{ años} \end{array} \right) = \text{producción futura}$$

$$1,200 + 550n = 4,500$$

**Calcular**

$$550n = 3,300$$

$$n = \frac{3,300}{550}$$

$$n = 6 \text{ años}$$

**Revisar y responder** Como comprobación, hacemos una lista del número de pares producidos este año y los siguientes 6.

Este año	Año siguiente	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5	Año 6
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1,200	1,750	2,300	2,850	3,400	3,950	4,500

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 19

Así, en 6 años producirán 4500 pares de tenis por año. ☀

## 3 Plantear y resolver problemas de aplicación que involucran dinero

### EJEMPLO 4

**Renta de un camión** Armando Rodríguez va a mudarse. Planea rentar un camión por un día para hacer el traslado local. El costo de rentar el camión es de \$60 diarios más 40 centavos por milla. Encuentre la distancia máxima que Armando puede recorrer si sólo cuenta con \$92.

#### Solución



**Entender** El costo total de rentar el camión de manzanas consta de dos partes: un costo fijo de \$60 por día, y otro variable de 40 centavos por milla. Necesitamos determinar el número de millas que Armando puede recorrer de modo que el costo total sea \$92. Como el costo fijo está dado en pesos, escribiremos el costo variable, o costo por milla, también en pesos.

**Traducir**

Sea  $x$  = número de millas  
 entonces  $0.40x$  = costo de manejar  $x$  millas  
 costo diario + costo por milla = costo total

**Calcular**

$$60 + 0.40x = 92$$

$$0.40x = 32$$

$$\frac{0.40x}{0.40} = \frac{32}{0.40}$$

$$x = 80$$

**Revisar** El costo de recorrer 80 millas a 40 centavos por milla es  $80(0.40) = \$32$ . Al sumarlo al costo diario de \$60 se obtiene \$92, por lo que la respuesta coincide.

**Respuesta** Armando puede recorrer un máximo de 80 millas. 

**EJEMPLO 5** **Sistemas de seguridad** José Alvarado planea instalar un sistema de seguridad en su casa. Ha reducido su elección a dos proveedores: Moneywell y Doile. El sistema de Moneywell cuesta \$3,580 por concepto de instalación y \$20 al mes por cuota de vigilancia. El sistema equivalente de Doile cuesta sólo \$2,620 por instalación, pero su cuota de vigilancia es de \$32 por mes. Si suponemos que las cuotas de vigilancia no cambian, ¿en cuántos meses serían equivalentes los costos de Moneywell y Doile?

**Solución**



**Entender** El sistema de Doile tiene un costo inicial más pequeño (\$2,620 contra \$3,580); sin embargo, sus cuotas mensuales por vigilancia son mayores (\$32 contra \$20). Se pide calcular el número de meses después de los cuales el costo total de los dos sistemas sería el mismo.


**Traducir**

Sea  $n$  = número de meses  
 entonces  $20n$  = costo mensual por vigilancia del sistema Moneywell, por  $n$  meses  
 y  $32n$  = costo mensual por vigilancia por el sistema de Doile, por  $n$  meses

$$\begin{aligned} \text{costo total de Moneywell} &= \text{costo total de Doile} \\ \left( \begin{array}{c} \text{costo} \\ \text{inicial} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{costo mensual} \\ \text{por } n \text{ meses} \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{c} \text{costo} \\ \text{inicial} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{costo mensual} \\ \text{por } n \text{ meses} \end{array} \right) \\ 3580 + 20n &= 2620 + 32n \end{aligned}$$

**Calcular**

$$\begin{aligned} 960 + 20n &= 32n \\ 960 &= 12n \\ 80 &= n \end{aligned}$$

**Revisar y responder** El costo total sería el mismo dentro de 80 meses, o alrededor de 6.7 años. Dejaremos la comprobación como ejercicio para usted. Si conservamos el sistema de seguridad por menos de 6.7 años, Doile sería la alternativa menos costosa. Después de 6.7 Años, Moneywell sería la más barata. 

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 31

**EJEMPLO 6** **Hipotecas** Kristen Schwartz va a comprar su primera casa y ha reducido sus elecciones de pedir una hipoteca a dos bancos, el Bank of America y Sun Trust. El Bank of America le informa que el pago mensual por concepto del capital más el interés sería de \$650 al mes. Sun Trust le dice que su pago mensual sería de \$637 por mes, más \$1,500 que necesita pagar por cuotas (o puntos) para obtener la hipoteca. ¿Cuánto tiempo tomaría que el costo de ambas hipotecas fuera el mismo?

**Solución**



**Entender** Los pagos mensuales con Sun Trust son menores que los de Bank of America, pero Sun Trust exige una cuota de \$1,500 que el otro banco no pide. Necesitamos determinar el número de meses en que los pagos más bajos equivaldrían a la cuota adicional de \$1,500.

**Traducir**

Sea  $x$  = número de meses  
 entonces  $650x$  = pagos mensuales en  $x$  meses con Bank of America  
 y  $637x$  = pagos mensuales en  $x$  meses con Sun Trust

Ahora, planteamos la ecuación para resolver el problema.

Bank of America

Sun Trust

pagos mensuales = pagos mensuales + cuotas

$$650x = 637x + 1500$$

$$13x = 1500$$

$$x \approx 115.4$$

**Revisar** Comprobamos esta respuesta calculando los costos totales en 115.4 meses para ambos bancos.

Bank of America

Sun Trust


$$650x$$

$$637x + 1500$$

$$650(115.4) = 75,010$$

$$637(115.4) + 1500 = 75,009.80$$

Observe que las cantidades son casi las mismas. Hay un pequeño error de redondeo.

**Respuesta** El costo total de ambas hipotecas sería el mismo en unos 115.4 meses (o 9.62 años). Si Kristen planea conservar la casa por un tiempo menor que ese, el Bank of America sería la opción menos cara. Si planea conservar el inmueble por más de ese plazo, Sun Trust sería la más barata. 

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 37

#### 4 Plantear y resolver aplicaciones que implican porcentajes

A continuación veremos algunos problemas de aplicación que involucran porcentajes. Hay que recordar que un porcentaje siempre es un porcentaje de algo. Así, si incrementamos el costo de un artículo,  $c$ , en 8%, representaríamos el costo nuevo como  $c + 0.08c$ , y no como  $c + 0.08$ . Consulte el recuadro de Cómo evitar errores comunes, en la página 187.

#### EJEMPLO 7

**Renta de bicicletas acuáticas** En un hotel frente al mar, el costo de rentar una bicicleta acuática es de \$20 por media hora, lo que incluye un impuesto sobre las ventas de  $7\frac{1}{2}\%$ . Calcule el costo de la renta antes de impuestos.

#### Solución



**Entender** Pedimos calcular el costo de la renta de una bicicleta acuática antes de impuestos. El costo de la renta antes del impuesto más éste una vez que alquilamos la bicicleta debe ser igual a \$20.

**Traducir** Sea  $x$  = costo de la renta antes del impuesto  
entonces  $0.075x$  = impuesto sobre la renta

**Calcular**

$$(\text{costo de la renta de la bicicleta acuática antes del impuesto}) + (\text{impuesto sobre la renta}) = 20$$


$$x + 0.075x = 20$$

$$1.075x = 20$$

$$x = \frac{20}{1.075}$$

$$x \approx 18.60$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 41

**Revisar y responder** La comprobación mostrará que si el costo de la renta es de \$18.60, al incluir el impuesto de  $7\frac{1}{2}\%$  será de \$20. 

**EJEMPLO 8 Incremento salarial** En 2003, Cho Chi, vendedor de seguros, tuvo un incremento salarial de 18% sobre sus percepciones de 2002. Si en 2003 su salario era de \$43,000, determine cuál era el de 2002.

**Solución Entender** Es posible representar el salario de Cho en 2003 en términos del que tenía en 2002. Por tanto, seleccionaremos una variable que lo represente. Una vez que obtengamos una expresión para el salario de Cho en 2003, plantearemos la expresión igual a \$43,000 y resolveremos la ecuación a fin de obtener la respuesta.

**Traducir** Sea que  $s$  = salario de Cho en 2002  
entonces  $s + 0.18s$  = salario Cho en 2003


$$\text{salario de Cho en 2003} = \$43,000$$

$$s + 0.18s = 43,000$$

**Calcular**  $1.18s = 43,000$

$$s = \frac{43,000}{1.18}$$

$$s = 36,440.68$$

**Revisar y responder** Como  $s$  representa el salario de Cho en 2002, el cual es menor que el de 2003, nuestra respuesta es razonable. El salario de Cho en 2002 era de \$36,440.68. 

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 43

**EJEMPLO 9 Planes salariales** Jacqueline Johnson, recién graduada de la universidad, aceptó un puesto de ventas de suministros y equipos médicos. Durante su primer año le dieron a escoger entre varios planes de salario. El Plan 1 es de \$450 semanales de salario base más una comisión de 3% sobre las ventas semanales. El Plan 2 es sólo por el 10% de las comisiones de las ventas semanales.

**a)** Jacqueline debe seleccionar uno de los planes, pero no está segura de las ventas en pesos que necesita realizar para que su salario de la semana sea el mismo con los dos planes. ¿Puede usted determinarlas?

**b)** Si Jacqueline está segura de hacer ventas por \$8,000 a la semana, ¿cuál plan debería seleccionar?

**Solución a) Entender** Pedimos encontrar los *pesos de las ventas* que harían que Jacqueline recibiera el mismo salario total con ambos planes. Para resolver este problema, escribimos expresiones que representen el salario con cada uno de los planes. Después, obtenemos la ecuación que deseamos al incluir los salarios de los dos planes e igualarlos uno con el otro.

**Traducir** Sea  $x$  = pesos de venta  
entonces  $0.03x$  = comisión por las ventas del Plan 1  
y  $0.10x$  = comisión por las ventas del Plan 2

$$\text{Salario del Plan 1} = \text{Salario del Plan 2}$$

$$\text{salario base} + 3\% \text{ de comisión} = 10\% \text{ de comisión}$$

$$450 + 0.03x = 0.10x$$

**Calcular**  $450 = 0.07x$

o bien  $0.07x = 450$


$$\frac{0.07x}{0.07} = \frac{450}{0.07}$$

$$x \approx 6428.57$$



**Revisar** Dejaremos a usted la comprobación de que las ventas por \$6,428.57 harían que Jacqueline recibiera el mismo salario semanal con ambos planes.

**Respuesta** El salario semanal de Jacqueline sería el mismo con los dos planes si vendiera \$6,428.57 por concepto de suministros y equipo médico.

**b)** Si las ventas que hiciera Jacqueline fueran por \$8,000, ganaría más por semana si trabajara sólo por la comisión, con el Plan 2. Verifique esto con el cálculo del salario con ambos planes y su comparación. 

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 53**

## SUGERENCIA

### CONSEJO PARA ESTUDIAR

A continuación se listan algunas sugerencias, por si usted tiene dificultades con los problemas de aplicación.

1. Profesor – Haga una cita para ver a su profesor. Asegúrese de haber leído el material del libro y de haber intentado resolver todos los problemas de tarea. Acuda a la cita con su instructor, llevando preguntas específicas.
2. Asesoría – Si su escuela ofrece asesoría gratuita, aprovéchela.
3. Grupo de estudio – Forme un grupo de estudio con sus compañeros de clase. Intercambie números telefónicos y direcciones de correo electrónico. Podrían ayudarse unos a otros.
4. Sitio Web – Si dispone de una computadora, visite el sitio Web de Pearson Educación y Allen Angel en [pearsoneducacion.net/angel](http://pearsoneducacion.net/angel) y estudie el material relacionado con este capítulo. Encontrará más ejemplos y ejercicios resueltos.

¡Es importante que usted siga esforzándose! Recuerde que conforme más practique, mejor será en la resolución de problemas de aplicación.

## Matemáticas en acción

### Establecimiento dinámico de precios

Muchas de las aplicaciones en el libro tienen que ver con la compra de objetos. La suposición es que los artículos susceptibles de adquirirse *tienen* un precio. Con él salen a la venta o tienen descuento por varias razones, pero si una persona entra a una tienda y otra desea comprar un artículo, éste se vendería a ambas por la misma cantidad de dinero.

Ese mundo de precios fijos está cambiando con rapidez gracias a Internet. Comprar boletos de aerolíneas por Internet se ha vuelto un juego increíble de opciones, con la perspectiva de que el viajero navegue de un sitio a otro con la esperanza de llegar a alguno en el momento apropiado. Un cazador de boletos podría regresar a un sitio 15 minutos después de que preguntó un precio y encontrar que éste ya subió o bajó. Lo que las aerolíneas ponen en práctica en ocasiones recibe el nombre de *establecimiento dinámico de precios*.

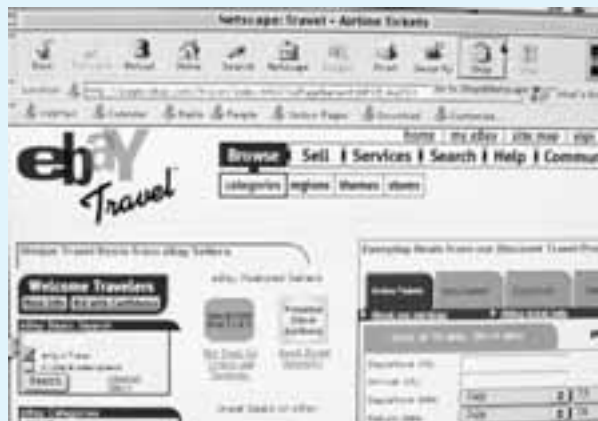
De un minuto a otro, el precio de un asiento cambia en función de factores como la tasa a que se llena el avión, lo cerca que está la fecha de salida, si lo adquirimos en la aerolínea o en una compañía de servicios, y, quizá, los precios de los boletos que ya se vendieron.

Una nueva generación de software está en desarrollo para el establecimiento dinámico de precios, el cual ayuda a los comerciantes por Internet a llevar más lejos el modelo de las aerolíneas. Estos programas toman en cuenta factores como la edad del consumidor, ingreso y localización geográfica, con la suposición de que la información está disponible a partir de una base de datos en algún lado. Otros factores incluyen el historial de ventas de ese consumidor, otros sitios visitados por éste, época del año, qué otras personas están dispuestas a pagar por un artículo, qué cantidad de éste se tiene en inventario, y cuánto cobran los competidores por el mismo artículo u otros similares.

(continúa en la página siguiente)

El diseño de software como el que se ilustra, usarlo, e incluso imaginarse si ha sido eficaz, requiere la colaboración de expertos en marketing, programadores, sicólogos, contadores y personas capaces de hacer análisis matemáticos avanzados. Es como un problema de aplicación muy complejo que da como resultado millones de pesos de ingresos adicionales si se resuelve con éxito.

Como persona que un día estará involucrada en transacciones, este enfoque analítico a la comercialización tal vez lo emocione. Como consumidor actual, le conviene.



## Conjunto de ejercicios 3.3

### Ejercicios conceptuales

1. Enuncie el procedimiento de cinco pasos para resolver problemas.
2. Si tiene dificultades con algún material de esta sección, enliste alguna de las cosas que podría hacer para ayudarse. Vea la Sugerencia anterior.

### Práctica de habilidades/Solución de problemas

Los ejercicios 3 a 24 involucran el cálculo de un número o números. Lea los ejemplos 1 a 3 y después plantee una ecuación para resolver el problema y **responda la pregunta**. Emplee una calculadora en los ejercicios donde sea necesario.

3. **Números consecutivos** La suma de dos enteros consecutivos es 85. Encuentre dichos números.
4. **Enteros consecutivos** La suma de dos enteros consecutivos es 107. Determine cuáles son esos números.
5. **Números impares** La suma de dos enteros impares consecutivos es 104. Diga cuáles son.
6. **Enteros pares** La suma de dos enteros pares consecutivos es 146. Halle esos números.
7. **Suma de números** Un número es 3 más que el doble de un segundo número. Su suma es 27. Encuentre dichos números.
8. **Suma de números** Un número es 5 menos que el triple de un segundo número. Su suma es 43. Determine cuáles son.
9. **Números** El mayor de dos enteros es 8 menos que el doble del menor. Cuando el menor se resta del mayor, la diferencia es 17. Calcule ambos números.
10. **Páginas opuestas** La suma de los números de dos páginas opuestas de un libro abierto es 145. ¿Cuáles son los números de las páginas?
11. **Esperanza de vida** La esperanza de vida de los hombres en Estados Unidos en el año 2000 fue de 19 años menos que el doble de su esperanza de vida en el año 1900. Si la diferencia en las esperanzas de vida entre el año 2000 y el año 1900 fue de 27.3 años, determine la esperanza de vida para los hombres de Estados Unidos en el año 2000. (Fuente: U.S. Census Bureau).
12. **Semana laboral** La semana laboral promedio en el 2000 en los Estados Unidos era de 136 horas menos que el triple de lo que era en el año 1900. Si la suma de las semanas laborales promedio en los años 1900 y 2000 fue de 104 horas, ¿cuál fue la semana laboral promedio en el año 1900? (Fuente: U.S. Labor Bureau).
13. **DVD's** En el 2002, Electronics City vendió 20 más del doble de los reproductores de DVD que vendió en el 2001. Si en esos dos años vendió 3260 aparatos, ¿cuántos vendió en el 2002? (Fuente: U.S. News and World Report).
14. **Presidentes de los E.U.** Hasta el 2001, había habido 43 presidentes de los Estados Unidos. De éstos, el número de

los que sirvieron como generales fue 21 menos que el número de los que no lo hicieron. ¿Cuántos presidentes fueron generales?\*



El autor, Allen R. Angel aparece en esta foto.

15. **Regalos de abuelita** La abuelita dio algunas tarjetas de béisbol a Richey y otras a Erin. A Erin dio el triple de las que regaló a Richey. Si la cantidad total que dio a los dos fue de 260 tarjetas, ¿cuántas obsequió a Richey?
16. **Tienda de esquí** La Alpine Valley Ski Shop vende esquís tanto de campo traviesa como de deslizamiento. Durante un año vendió esquís de deslizamiento por 6 veces la cantidad de los que son para campo traviesa. Determine el número de pares de esquís para campo traviesa que vendió si la diferencia en el número que vendió de ambos tipos es 1800.
17. **Arte animal** Muchas ciudades exhiben réplicas inusuales de animales u otros objetos que eventualmente venden para recabar fondos para obras de caridad en la localidad. Joseph Murray diseñó y construyó un caballo para exhibirlo. Adherir unos guantes de béisbol al caballo le llevó 1.4 horas más del doble del número de horas que dedicó a diseñarlo. Si el tiempo total que le tomó diseñar y colocar los guantes en el caballo fue de 32.6 horas, ¿cuánto tiempo le tomó adherir los guantes al caballo?
18. **Taller de velas** Un taller de velas hace 60 por semana. Planean incrementar en 8 el número de velas que fabrican por semana, hasta que logren una producción de 132 velas por semana. ¿Cuántas semanas llevará para que alcancen su programa de producción?
19. **Colección de ranas** Mary Shapiro colecciona ranas de cerámica y de otros materiales. Actualmente tiene 624 ranas. Desea sumar 6 ranas por semana a su colección hasta llegar a un total de 1,000 ranas. ¿Cuánto tiempo tomará para que la colección de Mary tenga 1,000 ranas?
20. **Cinco estrellas** Existe sólo un número limitado de oficiales que han alcanzado el rango de cinco estrellas (sean generales o almirantes). El número de generales que recibieron cinco estrellas es de 11 menos que el cuádruplo del número de almirantes que las obtuvieron. La diferencia entre el número de generales y almirantes de cinco estrellas es de 1. Determine el número de almirantes y el de generales de cinco estrellas.
21. **Población** La ciudad de Dover tiene en la actualidad una población de 6,500. Si su población crece a razón de 1,200 personas por año, ¿cuánto tiempo tomará para que llegue a 20,600?
22. **Tarjetas de circuitos** La FGN Company produce tarjetas de circuitos. Ahora tiene 4,600 empleados en todo el país. Se desea reducir el número de trabajadores en 250 por año por medio de retiros, hasta que su plantilla total sea de 2200. ¿Cuánto tiempo tomará esto?
23. **Computadoras** La CTN Corporation tiene un suministro de 3,600 computadoras. Se quiere embarcar 120 cada semana, hasta que sus existencias disminuyan a 2,000. ¿Cuánto tiempo llevará lograrlo?
24. **Sala de lectura** Un grupo en una gran sala de lectura en la American University tiene en la actualidad 280 estudiantes. Si 4 de ellos desertan del curso cada semana, ¿cuánto tiempo pasará antes de que el grupo se reduzca a 228 estudiantes?

\*Los once presidentes que sirvieron como generales fueron: George Washington, Andrew Jackson, William H. Harrison, Zachary Taylor, Franklin Pierce, Andrew Johnson, Ulises S. Grant, Rutherford B. Hayes, James Garfield, Benjamin Harrison y Dwight D. Eisenhower.

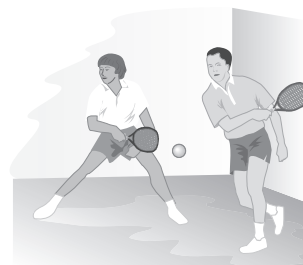
Los ejercicios 25 a 38 involucran dinero. Lea los ejemplos 4 a 6, plantee una ecuación que utilice para resolver el problema y responda la pregunta.

25. **Renta de una camioneta** Lori Sullivan renta una camioneta por un día y paga \$50 diarios más 30 centavos por milla. ¿Qué tan lejos irá en un día si sólo dispone de \$92?
26. **Membresía en un gimnasio** En Goldies Gym hay una cuota de \$300 por membresía más pagos de \$40 por mes. Si Carlos Manieri ha gastado un total de \$700 en Goldies Gym, ¿durante cuánto tiempo ha sido miembro?



27. **Máquina copiadora** Yamil Bermádez compró una máquina copiadora en \$2,100 y como protección adquirió un plan de mantenimiento por un año, por el que paga 2 centavos por copia realizada. Si en un año gasta un total de \$2,462, lo que incluye el costo de la máquina y de las copias, determine el número de copias que ha sacado.
28. **Plan de llamadas** Con un plan de llamadas de AT&T, se paga \$4.95 por mes más 7 centavos por minuto de tiempo de conversación. En un mes específico, el costo total por la cuota mensual y el tiempo de plática fue de \$29.45. Determine cuántos minutos se habló.
29. **Plan de llamadas** Con un plan particular de llamadas por teléfono celular, hay un cargo mensual de \$25.95, que incluye 500 minutos gratis para quien llama. Después de utilizar los primeros 500 minutos, el usuario paga 40 centavos por minuto o fracción. Si la cuenta del teléfono de Anke Braun en cierto mes fue de \$61.95, determine el número de minutos que lo usó después de los 500 iniciales.
30. **Cuota en un puente** Mari Choi paga una cuota mensual de \$25 que le permite cruzar un puente, en cualquier dirección, 60 veces por mes. Si en este periodo lo hace más de 60 veces, paga 25 centavos cada vez que lo atraviesa. Durante un mes, Mari pagó un total de \$38.25 por sus cruces. ¿Cuántas veces adicionales (más de 60) cruzó Mary el puente en dicho mes?
31. **Lavadoras** Scott Montgomery estudia dos lavadoras con fines de compra, una Kenmore y una Neptune. La Neptune cuesta \$454, mientras que la Kenmore cuesta \$362. La guía energética indica que la operación de la Kenmore costará aproximadamente \$84 por año, y la Neptune \$38 por año. ¿Cuánto tiempo pasaría antes de que el costo total fuera el mismo para ambas lavadoras?

32. **Compra de un edificio** Jason O'Connor estudia la compra del edificio en que tiene su oficina. La renta mensual por ésta es de \$890. Si diera un enganche de \$31,350, sus pagos hipotecarios mensuales serían de \$560. ¿Cuántos meses tomaría que el enganche más los pagos mensuales de la hipoteca fueran iguales a lo que paga por la renta?
33. **Salarios** Brooke Mills tiene ofertas de trabajo de varias empresas de alta tecnología. Data Technology Corporation le ofrece un salario anual de \$40,000 anuales más un aumento de \$2,400 por año. Nuteck ofrece un salario anual de \$49,600 anuales más un incremento de \$800 cada año. ¿En cuantos años los salarios de las compañías serán los mismos?
34. **Club de squash** El Coastline Racquet Club tiene dos planes de pago para sus miembros. El Plan 1 tiene una tarifa mensual de \$20 más \$8 por hora de renta de la cancha. El Plan 2 no tiene tarifa mensual, pero el tiempo de la cancha cuesta \$16.25 por hora. Si la cancha se renta en intervalos de 1 hora, ¿cuántas horas tendría que jugarse por mes de modo que el Plan 1 fuera la opción mejor de compra?



35. **Impresoras** Brandy Hawk va a comprar una de dos impresoras de inyección de tinta, una Hewlett-Packard o una Lexmark. La Hewlett Packard cuesta \$149 y la Lexmark cuesta \$99. Suponga que debido al precio de los cartuchos de tinta, el costo de imprimir una página en la Hewlett-Packard es de \$0.02, y el de hacerlo en la Lexmark es de \$0.03 por página. ¿Cuántas páginas necesitarían imprimirse en las dos máquinas para que el costo total fuera el mismo?
36. **Proveedor de Internet** Un proveedor del servicio de Internet tiene un plan por el que cobra una cuota mensual de \$20.00, con el que da 250 horas de conexión gratis. Por cada hora que se sobrepase este tiempo, cobra \$0.50 por hora. Si con este plan una factura es por \$38.00, ¿cuántas horas adicionales se usó de tiempo de Internet?
37. **Hipotecas** La familia de Juan García va a comprar una casa. Para obtener una hipoteca consideran dos bancos, el First Union y el Kensington. Con el First Union cada pago mensual sería de \$980, sin cuotas adicionales. Con el Kensington, su pago hipotecario mensual sería de \$910, pero hay un pago único de \$2,000. ¿Cuántos meses tendrían que pasar para que el costo total fuera el mismo con ambos bancos?

38. **Hipotecas** Dennis Williams estudia dos bancos para obtener una hipoteca, el Citibank y el Huntington Bank. Su pago hipotecario con el Citibank sería de \$1,025 por mes, más un pago único de \$1,500. Su pago hipotecario con el Huntington Bank sería de \$967 más un pago único de \$2,500. ¿Cuánto tiempo tendría que pasar para que el costo total fuera el mismo con los dos bancos?

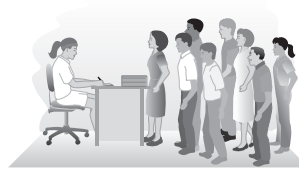
Los ejercicios 39 a 60 involucran porcentajes. Lea los ejemplos 7 a 9 y después plantee una ecuación que utilice para resolver el problema. Solucione la ecuación y **responda las preguntas que se hacen.**

39. **Planeador financiero** Dan Rinn, planeador financiero, cobra una tarifa anual de 1% sobre los activos de los clientes que asesora. Si su tarifa anual por administrar el portafolio de retiro de Judy Mooney es de \$620.00, ¿cuánto dinero administra para Judy?
40. **Ventas de almacén** En el Buyrite Warehouse, por una cuota anual de \$60 se ahorra 8% del precio de todos los artículos que se compran en la tienda. ¿Cuánto necesita comprar Mary durante el año de modo que sus ahorros igualen a la cuota anual?
41. **Tarifa aérea** La tarifa aérea por un vuelo de Amarillo, Texas, a Nueva Orleans, cuesta \$280, lo que incluye un impuesto de 7% sobre las ventas. ¿Cuál es el costo del vuelo antes del impuesto?



42. **Carro nuevo** Yoliette Fournier compró un carro nuevo. El costo del vehículo, incluyendo 7.5% de impuesto sobre la venta, fue de \$24,600. ¿Cuál era el costo del coche antes del impuesto?
43. **Aumento salarial** Zhen Tong acaba de recibir una oferta de trabajo con el que obtendría un salario 30% mayor que el que tiene en su trabajo actual. Si el nuevo salario fuese de \$30,200, determine de cuánto es el actual.
44. **Oficinas centrales nuevas** Tarrach and Associates planean aumentar 20% el tamaño de sus oficinas centrales. Si las nuevas medirán 14,200 pies cuadrados, determine el tamaño de las actuales.

45. **Disminución** Los hijos de Marty y Betty McKane crecieron y dejaron el hogar, por lo que aquéllos decidieron vivir en una casa más chica. La vivienda nueva tiene un área 18% menor en pies cuadrados que la antigua. Si su casa nueva tiene una superficie de 2,200 pies cuadrados, calcule el tamaño de la otra.
46. **Ingresos en el retiro** Ray y Mary Burnham han decidido jubilarse. Estiman que su ingreso anual después de su jubilación se reducirá 15% respecto del anterior. Si suponen que su ingreso posterior a la jubilación será de \$42,000, encuentre el anterior a ella.
47. **Autógrafos** Una estrella del tenis fue contratada para firmar autógrafos en una convención. Le pagaron \$3,000 más 3% de todas las entradas en la taquilla. La cantidad total que recibió ese día fue de \$3,750. Calcule el ingreso total en la taquilla.



48. **Venta** En una venta con descuento de 20%, Jane Demsky compró un sombrero en \$25.99. ¿Cuál es el precio normal del sombrero?
49. **Baja de salarios** Una planta manufacturera opera con pérdidas. Para evitar los despidos, los trabajadores aceptan un recorte temporal de 2% en sus salarios. Si el salario promedio en la planta después del recorte es de \$38,600, ¿cuál era el salario promedio anterior?
50. **Maestros** Durante las negociaciones salariales de 2002, el consejo escolar de la ciudad aprobó un aumento de 4% en el salario de sus maestros, efectivo a partir de 2003. Si Dana Frick, profesora de primer año, proyecta que su pago anual en 2003 sea de \$36,400, ¿cuál es el que tiene en la actualidad?
51. **Volumen de ventas** Bruce Gregory recibe un salario semanal de \$350. También recibe una comisión de 6% sobre el volumen total de las ventas en pesos que realiza. ¿Cuántos pesos deben importar sus ventas en una semana si ha de obtener un total de \$710?
52. **Recorrido de podadora** Mona Fabricant acaba de comprar una podadora móvil. Con ella, le toma 15% menos tiempo podar el césped que con la antigua podadora. Si recortarlo con la nueva le lleva 1.1 horas, ¿cuánto le tomaría hacerlo con la anterior?
53. **Planes de salario** Vince McAdams, vendedor, tiene dos ofertas de planes de salario. El Plan 1 consiste en un salario semanal de \$600 más 2% de comisión por ventas. El Plan 2 es la sola comisión de 10% sobre las ventas. ¿Cuánto debe vender Vince en una semana para que ambos planes den lugar al mismo salario?



- 54. Planes de salario** Becky Schwartz, vendedora, recibe dos planes de salario. El Plan 1 es un pago semanal de \$400 más una comisión de 2% sobre las ventas. El Plan 2 es un salario de \$250 a la semana más el 16% de comisión por las ventas. ¿Cuánto necesita vender Becky para que el salario de los dos planes sea el mismo?
- 55. Planeación financiera** Belen Poltorade, planeadora financiera, ofrece a sus clientes dos planes financieros para administrar sus activos. Con el plan 1 cobra una tarifa de \$1,000 más el 1% de los activos que administre para sus clientes. Con el plan 2 cobra una cuota de \$500 más una tarifa de 2% de los activos que maneje. ¿De cuánto deben ser los activos de sus clientes para que los dos planes tengan las mismas tarifas totales?
- 56. Exposición artística** Bill Rush es un artista. Va a montar una exposición de su trabajo. Para ello, Bill negocia con una organización para que le rente su edificio. La organización ofrece a Bill dos planes de renta. El Plan 1 es una tarifa de \$500 por la semana más el 3% de las ventas en pesos que realice. El Plan 2 es un cobro de \$100 por la semana, más 15% de las ventas en pesos que efectúe. ¿Cuántos pesos por venta darían lugar a que ambos planes tuvieran el mismo costo total?
- 57. Cuotas por membresía** El Holiday Health Club redujo en 10% su cuota anual por membresía. Además, si se contrata en lunes se tendrá un descuento adicional de \$20 sobre el precio ya reducido. Si Jorge Sánchez compra una membresía de un año en lunes, y paga \$250, ¿cuál es la cuota regular por membresía?
- 58. Sin comer** Una vez que Linda Kodama ha tomado asiento en un restaurante, se da cuenta de que sólo tiene \$30. De éstos, debe pagar un impuesto de 7% y desea dejar una propina de 15%. ¿Cuál es el precio máximo que está en posibilidad de pagar por una comida?
- 59. Bienes raíces** Phil Dodge dejó una propiedad valuada en \$140,000. En su testamento especificaba que su esposa obtendría 25% más de dicha propiedad que lo que correspondiera a su hija. ¿Cuánto recibirá la esposa?
- 60. Obra de caridad** Charles Ford hizo una contribución de \$200,000 en efectivo a dos organizaciones de beneficencia, la American Red Cross y la United Way. La cantidad que recibió la American Red Cross fue 30% mayor que la que de United Ways. ¿Cuánto recibió United Ways?

## Problemas de reto

- 61. Valor promedio** Para calcular el *promedio* de un conjunto de valores, se obtiene la suma de éstos y se divide el resultado entre el número de ellos.
- a) Si las tres primeras calificaciones de Paul Lavenski son de 74, 88 y 76, escriba una ecuación que se utilice para encontrar la que debe obtener en el cuarto examen para alcanzar un promedio de 80.
- b) Resuelva la ecuación del inciso a) y determine la calificación que debe obtener Paul.

Para los ejercicios 62 y 63, determine una ecuación que se utilice para resolver el problema y responda la pregunta que se hace.

- 62. Básquetbol** En un juego de básquetbol, el Boston College obtuvo 78 puntos. El equipo hizo 12 tiros libres (cada uno vale 1 punto). También hizo el cuádruplo de tiros de 2 puntos que los de 3 puntos (éstos son los que se tiran desde una distancia mayor a 18 pies de la canasta). ¿Cuántos tiros de dos puntos y cuántos de 3 hicieron?



- 63. Escuela de manejo** Un curso de manejo cuesta \$45 pero genera un ahorro de 10% a los menores de 25 años sobre sus cuotas de seguro anual, hasta que cumplan 25. Scott Day acaba de cumplir 18 años y su seguro cuesta \$600 por año.
- a) ¿Cuánto tiempo pasará para que la cantidad que ahorra en el seguro sea igual al precio del curso?
- b) Cuando Scott cumpla 25, ¿cuánto habrá ahorrado, incluido el costo del curso?

## Actividad en grupo

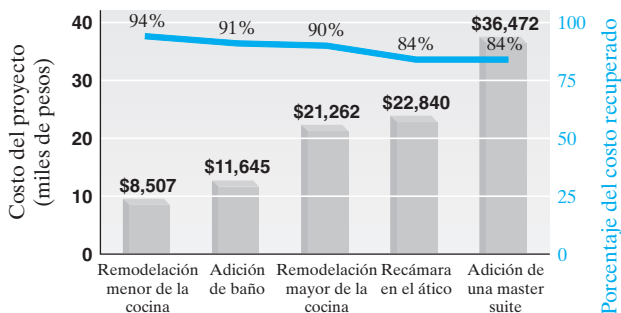
Como grupo, estudien y respondan el ejercicio 64.

### 64. Costos de remodelación

- Cada miembro del grupo debe utilizar la gráfica de la derecha para hacer su propia descripción verbal del problema que puede resolverse en forma algebraica. Existen muchos tipos diferentes de problemas que pueden surgir. Resuelva el suyo en forma algebraica.
- Comparta el problema que construyó con el resto de los miembros de su grupo.
- Para cada problema que dé, determine una ecuación que se utilice para resolverlo y responda la pregunta planteada.
- Compare sus respuestas para cada problema con todos los miembros de su grupo. Si las de cualquiera de ellos no fueran correctas, trabajen juntos para determinar la apropiada.

### Costos y rendimiento de la remodelación

Costo promedio nacional de cinco de los proyectos de remodelación más frecuentes, y porcentaje promedio que se gana sobre el costo cuando la casa se vende.



Fuente: National Association of Home Builders

## Ejercicios de repaso acumulativo

[1.9] 65. Evalúe  $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \div \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ .

Diga cuál es cada una de las propiedades que se indica.

[1.10] 66.  $(x + y) + 5 = x + (y + 5)$

67.  $xy = yx$

68.  $x(x + y) = x^2 + xy$

[2.6] 69. **Barbacoa de pollo** En la barbacoa de pollo anual de los bomberos, el jefe estima que necesitará  $\frac{1}{2}$  li-

bra de ensalada por cada 5 personas. Si se espera atender a 560 residentes, ¿Cuántas libras de ensalada se requerirá?

[3.1] 70. Resuelva para  $b$  la fórmula  $A = \frac{1}{2}bh$

## 3.4 PROBLEMAS GEOMÉTRICOS



### 1 Resolver problemas geométricos.

## 1 Resolver problemas geométricos

En esta sección perseguimos dos propósitos. El primero es repasar las fórmulas geométricas que introdujimos en la sección 3.1. El segundo es reforzar los procedimientos para plantear y resolver los problemas verbales que estudiamos en las secciones 3.2 y 3.3. Entre más práctica tenga en su planteamiento y solución, mejor desempeño logrará.

**EJEMPLO 1 Construcción de un patio** Catherine Moushon planea construir un patio rectangular de concreto en la parte trasera de su casa. El patio tendrá 8 pies más de largo que de ancho (figura 3.8). La cantidad total de madera por usar para construir el marco del patio (llamada “forma”) es de 56 pies. Encuentre las dimensiones del patio que Catherine planea construir.

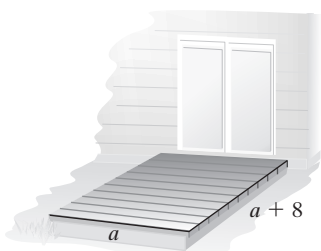
**Solución**

FIGURA 3.8

**Entender** Pedimos calcular las dimensiones del patio que Catherine piensa construir. Como la cantidad de madera que usará para el marco es de 56 pies, el perímetro es de 56 pies. Como la longitud se da en términos del ancho, se hará que la variable lo represente. Entonces, podemos expresar la longitud en función de la variable seleccionada. Para resolver este problema utilizamos la fórmula del perímetro de un rectángulo,  $P = 2l + 2a$ , donde  $P = 56$  pies.

**Traducir** Sea  $a =$  ancho del patio  
entonces  $a + 8 =$  longitud del patio

$$P = 2l + 2a$$

$$56 = 2(a + 8) + 2a$$

**Calcular**

$$56 = 2a + 16 + 2a$$

$$56 = 4a + 16$$

$$40 = 4a$$

$$10 = a$$

El ancho es de 10 pies. Como la longitud es 8 pies mayor que el ancho, aquélla es  $10 + 8 = 18$  pies.

**Revisar** Revisaremos la solución sustituyendo los valores apropiados en la fórmula del perímetro.

$$P = 2l + 2a$$

$$56 \stackrel{?}{=} 2(18) + 2(10)$$

$$56 = 56 \quad \text{Verdadero.}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 23

**Respuesta** El ancho del patio será de 10 pies y la longitud de 18 pies. ✨

**EJEMPLO 2**

**Esquina de un terreno** Llamamos **isósceles** a un triángulo que tenga dos lados de igual longitud. En los triángulos isósceles, los ángulos opuestos a los dos lados de la misma longitud miden lo mismo. El Sr. y la Sra. Harmon Katz tienen en una esquina un lote con forma de triángulo isósceles. Dos ángulos de su lote triangular miden lo mismo, y el tercero es  $30^\circ$  mayor que cualquiera de los otros dos. Encuentre la medida de los tres ángulos (figura 3.9).

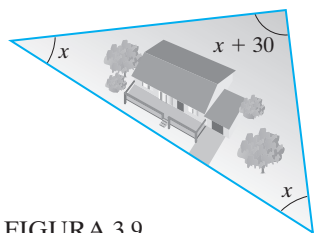
**Solución**

FIGURA 3.9

**Entender** Para resolver este problema, debe saberse que los ángulos internos de cualquier triángulo suman  $180^\circ$ . Pedimos calcular la medida de cada uno de los tres ángulos, dos de los cuales miden lo mismo. Haremos que la variable represente la medida de los ángulos más pequeños, y después expresaremos el mayor en términos de la variable seleccionada para los más chicos.

**Traducir** Sea  $x =$  medida de cada ángulo pequeño  
entonces  $x + 30 =$  medida del ángulo mayor

$$\text{suma de los tres ángulos} = 180$$

$$x + x + (x + 30) = 180$$

**Calcular**

$$3x + 30 = 180$$

$$3x = 150$$

$$x = \frac{150}{3} = 50^\circ$$

Cada uno de los dos ángulos más pequeños mide  $50^\circ$ . El ángulo más grande mide  $x + 30^\circ$ , es decir  $50^\circ + 30^\circ = 80^\circ$ .

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 11

**Revisar y responder** Como  $50^\circ + 50^\circ + 80^\circ = 180^\circ$ , la respuesta es correcta. Cada uno de los dos ángulos más pequeños mide  $50^\circ$ , y el más grande mide  $80^\circ$ . ✨



En la sección 3.1 vimos que un cuadrilátero es una figura con cuatro lados. Los cuadriláteros incluyen a los cuadrados, rectángulos, paralelogramos y trapecios. La suma de las medidas de los ángulos internos de cualquier cuadrilátero es de  $360^\circ$ . En el ejemplo 3 emplearemos esta información.

### EJEMPLO 3

**Bebederos** Sarah Fuqua es propietaria de algunos caballos y utiliza bebederos cuyos extremos tienen forma de trapecio. La medida de los dos ángulos de la base menor de un trapecio es la misma, y la de los ángulos de la base mayor también. Los ángulos de la base menor miden  $15^\circ$  menos que el doble de la medida de los de la base mayor. Calcule la medida de cada ángulo.

#### Solución

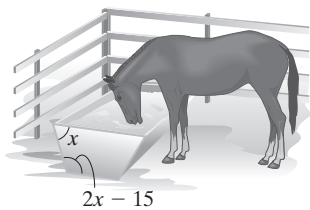


FIGURA 3.10

**Entender** Para visualizar el problema, le sugerimos dibujar un trapecio, como el de la figura 3.10. Sabemos que la suma de las medidas de los cuatro ángulos internos de un cuadrilátero es igual a  $360^\circ$ .

**Traducir** Sea  $x$  = la medida de cada uno de los dos ángulos menores entonces  $2x - 15$  = la medida de cada uno de los dos ángulos mayores

$$\left( \begin{array}{l} \text{medida de los dos} \\ \text{ángulos menores} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{medida de los dos} \\ \text{ángulos mayores} \end{array} \right) = 360$$

$$x + x + (2x - 15) + (2x - 15) = 360$$

**Calcular**

$$x + x + 2x - 15 + 2x - 15 = 360$$

$$6x - 30 = 360$$

$$6x = 390$$

$$x = 65$$

Cada ángulo menor mide  $65^\circ$ . Cada ángulo mayor mide  $2x - 15 = 2(65) - 15 = 115^\circ$ .

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 27

**Revisar y responder** Como  $65^\circ + 65^\circ + 115^\circ + 115^\circ = 360^\circ$ , la respuesta es correcta. Cada ángulo menor mide  $65^\circ$ , y cada ángulo mayor mide  $115^\circ$ .

### EJEMPLO 4

**Cerca interior** Richard Jeffries comenzó hace poco una granja de avestruces. Va a separar a las aves en tres áreas iguales por medio de cercas, como apreciamos en la figura 3.11. La longitud del área cercada es  $l$  y será 30 pies más grande que el ancho, y la cantidad total de cerca disponible es de 660 pies. Calcule el largo y ancho del área cercada.

#### Solución

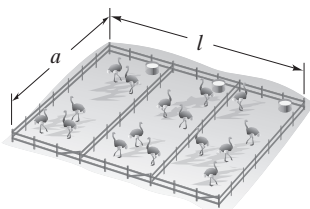


FIGURA 3.11

**Entender** La cerca consta de cuatro tramos para el ancho  $a$  y dos tramos para la longitud  $l$ .

**Traducir**

Sea  $a$  = ancho del área cercada  
entonces  $a + 30$  = largo del área cercada

$$\left( \begin{array}{l} 4 \text{ tramos de cerca} \\ \text{de longitud } a \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} 2 \text{ tramos de cerca} \\ \text{de longitud } a + 30 \end{array} \right) = 660$$

$$4a + 2(a + 30) = 660$$

**Calcular**

$$4a + 2a + 60 = 660$$

$$6a + 60 = 660$$

$$6a = 600$$

$$a = 100$$

Como el ancho es de 100 pies, la longitud es  $a + 30$ , o bien  $100 + 30 = 130$  pies.

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 35

**Revisar y responder** Toda vez que  $4(100) + 2(130) = 660$ , la respuesta es correcta. El ancho de la granja de avestruces es de 100 pies, y la longitud es igual a 130 pies.

## Conjunto de ejercicios 3.4

### Ejercicios conceptuales

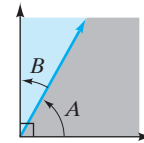
- En la ecuación  $A = l \cdot a$ , ¿qué pasa al área si la longitud se duplica y el ancho se reduce a la mitad? Explique su respuesta.
- En la ecuación  $A = l^2$ , ¿qué sucede al área si la longitud de un lado,  $l$ , incrementa su valor tres veces? Explique su respuesta.
- En la ecuación  $V = l \cdot a \cdot h$ , ¿qué ocurre al volumen si se duplica la longitud, el ancho y la altura? Explique su respuesta.
- En la ecuación  $P = 2\pi r$ , ¿qué sucede a la circunferencia si el radio se triplica?
- En la ecuación  $A = \pi r^2$ , ¿qué es lo que pasa al área si el radio se triplica?
- En la ecuación  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ , ¿qué sucede al volumen si el radio aumenta su valor tres veces? Explique su respuesta.
- ¿Qué es un triángulo isósceles?
- ¿Qué es un cuadrilátero?
- ¿Cuál es la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo?
- ¿Cuál es la suma de la medida de los ángulos internos de un cuadrilátero?

### Práctica de habilidades/Resolución de problemas

Resuelva los problemas geométricos siguientes.\*

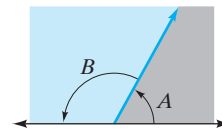
- Triángulo isósceles** En un triángulo isósceles, un ángulo es  $42^\circ$  mayor que los otros dos ángulos iguales. Encuentre la medida de los tres ángulos. Consulte el ejemplo 2.
- Construcción triangular** Este edificio en la ciudad de Nueva York, el cual se conoce como Flat Iron Building, tiene forma de triángulo isósceles. Si su lado más corto mide 50 pies menos que los dos lados más largos, y el perímetro del edificio es de 196 pies, determine la longitud de los tres lados del edificio.
- Ángulos complementarios** Dos ángulos son **complementarios** si la suma de sus medidas es de  $90^\circ$ . Los ángulos  $A$  y  $B$  son complementarios, y el ángulo  $A$  mide  $21^\circ$  más que el ángulo  $B$ . Calcule las medidas de los ángulos  $A$  y  $B$ .

Ángulos complementarios



- Ángulos complementarios** Los ángulos  $A$  y  $B$  son complementarios, y el ángulo  $B$  mide  $14^\circ$  menos que el ángulo  $A$ . Calcule las medidas de los ángulos  $A$  y  $B$ . Véase el ejercicio 15.
- Ángulos suplementarios** Dos ángulos son **suplementarios** si la suma de sus medidas es  $180^\circ$ . Los ángulos  $A$  y  $B$  son suplementarios, y el ángulo  $B$  mide  $8^\circ$  menos que el triple del ángulo  $A$ . Encuentre las medidas de los ángulos  $A$  y  $B$ .

Ángulos suplementarios

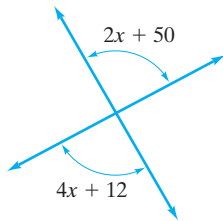


- Un triángulo especial** Un **triángulo equilátero** es el que tiene sus tres lados de la misma longitud. El perímetro de un triángulo equilátero es de 28.5 pulgadas. Calcule la longitud de cada lado.
- Triángulo equilátero** El perímetro de un triángulo equilátero es de 48.6 centímetros. Obtenga la longitud de cada lado. Consulte el ejercicio 13.
- Ángulos suplementarios** Los ángulos  $A$  y  $B$  son suplementarios, y el ángulo  $A$  mide  $2^\circ$  más que el cuádruplo del ángulo  $B$ . Halle las medidas de los ángulos  $A$  y  $B$ . Consulte el ejercicio 17.
- Ángulos verticales (también llamados ángulos opuestos por el vértice)** Cuando dos líneas se cruzan, denominamos a los ángulos opuestos **ángulos verticales**. Los ángulos verticales tienen la misma medida. Determine las

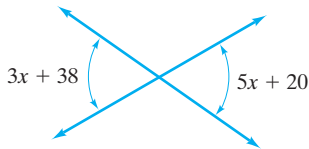
\*Consulte el apéndice C para más información sobre geometría.



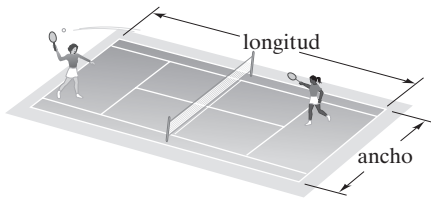
medidas de los ángulos verticales que se ilustran en la siguiente figura.



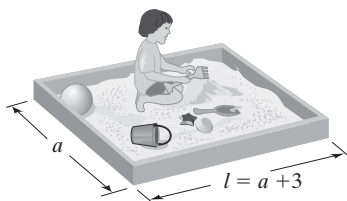
20. **Ángulos verticales (opuestos por el vértice)** En la figura ilustramos un par de ángulos verticales. Determine su medida. Consulte el ejercicio 19.



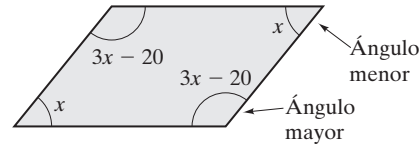
21. **Ángulos desconocidos** Un ángulo de un triángulo es  $10^\circ$  mayor que el más pequeño, y el tercero es  $30^\circ$  menor que el doble del más chico. Encuentre las medidas de los tres ángulos.
22. **Ángulos desconocidos** Un ángulo de un triángulo mide  $20^\circ$  más que el más pequeño, y el tercer ángulo es 6 veces mayor que éste. Determine lo que miden los tres ángulos.
23. **Dimensiones de un rectángulo** El largo de un rectángulo es de 8 pies más que su ancho. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo si su perímetro es de 48 pies?
24. **Dimensiones de un rectángulo** El perímetro de un rectángulo es de 120 pies. Halle el largo y el ancho del rectángulo si su longitud mide lo doble que su ancho.
25. **Cancha de tenis** La longitud de una cancha de tenis reglamentaria es de 6 pies más que el doble de su ancho. El perímetro de la cancha mide 228 pies. Encuentre la longitud y el ancho de la cancha.



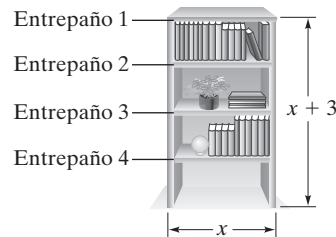
26. **Caja de arena** La Sra. Christine O'Connor planea construir una caja de arena para su hija. Tiene 26 pies de madera para construir el perímetro. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja rectangular si la longitud es 3 pies mayor que el ancho?



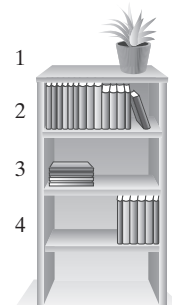
27. **Paralelogramo** En un paralelogramo, los ángulos opuestos tienen las mismas medidas. Cada uno de los dos ángulos mayores de cierto paralelogramo mide  $20^\circ$  menos que el triple de los ángulos menores. Determine lo que mide cada ángulo.



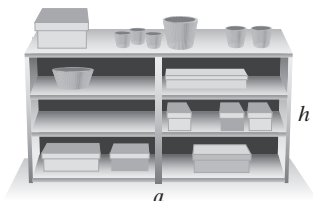
28. **Paralelogramo** Los dos ángulos más pequeños de un paralelogramo tienen medidas iguales, y cada uno de los dos ángulos mayores mide  $27^\circ$  menos que el doble de cada uno de los más pequeños. Calcule la medida de cada ángulo.
29. **Cuadrilátero** La medida de un ángulo de cierto cuadrilátero es  $10^\circ$  mayor que la del ángulo más pequeño; el tercer ángulo es  $14^\circ$  mayor que el doble del más pequeño; y el cuarto ángulo mide  $21^\circ$  más que el más pequeño. Encuentre las medidas de los cuatro ángulos del cuadrilátero.
30. **Cuadrilátero** La medida de un ángulo de cierto cuadrilátero es el doble de la del más pequeño; el tercer ángulo mide  $20^\circ$  más que el más pequeño; y el cuarto ángulo es  $20^\circ$  menor que el doble del ángulo más pequeño. Encuentre la medida de los cuatro ángulos del cuadrilátero.
31. **Construcción de un librero** Un librero va a tener cuatro entrepaños, incluida la parte superior, según se aprecia en la ilustración. La altura del librero será de 3 pies más que el ancho. Encuentre lo que medirá de ancho y altura el librero, si sólo se dispone de 30 pies de madera.



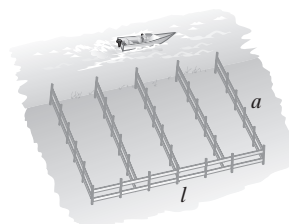
32. **Librero** Un librero va a tener cuatro entrepaños, como se ilustra en la figura. La altura del librero tendrá 2 pies más que el ancho, y sólo se dispone de 20 pies de madera. ¿Cuál debe ser el ancho y altura del librero?



33. **Librero** ¿Cuál debe ser el ancho y alto del librero del ejercicio 32, si la altura ha de ser del doble de su ancho?
34. **Entrepaños** Carlota planea construir los entrepaños que mostramos en la figura. Sólo tiene 45 pies de madera para toda la unidad, y quisiera que el ancho fuera 3 veces mayor que la altura. Encuentre lo que la unidad mediría de ancho y alto.

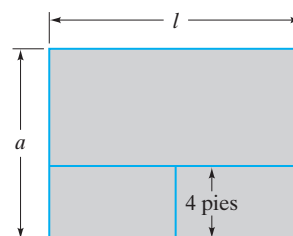


35. **Cerca interior** Un área que se encuentra sobre la ribera de un río va a cercarse, como se ilustra en la figura. La longitud del área cercada va a tener 4 pies más que el ancho, y la cantidad total de cerca por usar es de 64 pies. Calcule el ancho y largo del área cercada.



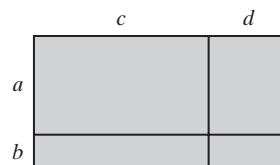
Vea el ejercicio 35.

36. **Jardinería** Trina Zimmerman va a colocar límites alrededor y en el interior de un jardín en el que planea sembrar flores (vea la figura). Tiene 60 pies de material para limitar, y la longitud del jardín va a ser 2 pies más grande que el ancho. Encuentre el largo y ancho del jardín. En la figura, las líneas rojas muestran la ubicación de todo el límite.



## Problemas de reto

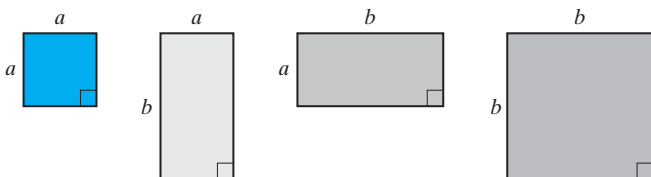
37. Una manera de expresar el área de la figura de la derecha es  $(a + b)(c + d)$ . ¿Puede determinar otra, con el empleo del área de los cuatro rectángulos, que represente el área de la figura?



## Actividad en grupo

Como grupo, estudien y resuelvan el ejercicio 38.

38. Considere las cuatro piezas que se muestran. Dos de ellas son cuadrados y dos, rectángulos.



- a) En forma individual, reacomode las cuatro piezas de modo que juntas formen un cuadrado.
- b) El área del cuadrado que construyó es  $(a + b)^2$ . Escriba otra expresión para ella, por medio de sumar las cuatro áreas individuales.

- c) Compare sus respuestas. Si no todos los miembros del grupo dieron las mismas respuestas para los incisos a) y b), trabajen juntos para determinar la solución correcta.
- d) Como grupo, respondan las preguntas siguientes. Si  $b$  es lo doble de la longitud  $a$ , y el perímetro del cuadrado que formó es de 54 pulgadas, calcule las longitudes de  $a$  y  $b$ .
- e) Emplee los valores de  $a$  y  $b$  que obtuvo en el inciso d) para calcular el área del cuadrado que formó.
- f) Utilice los valores de  $a$  y  $b$  que determinó en el inciso d) para encontrar las áreas de las cuatro piezas individuales que constituyen el cuadrado grande.
- g) ¿La suma de las áreas de las cuatro piezas, que encontró en el inciso f), es igual al área del cuadrado grande, que obtuvo en el inciso e)? ¿Era lo que esperaba? Explique.

## Ejercicios de repaso acumulativo

En cada una de las áreas sombreadas, inserte cualquiera de los símbolos  $>$ ,  $<$  o  $=$ , de modo que el enunciado sea verdadero.

[1.5] 39.  $-|-6|$   $\square$   $|-4|$

40.  $|-3|$   $\square$   $-|3|$

[1.7] 41. Evaluar  $-6 - (-2) + (-4)$ .

[2.1] 42. Simplificar  $-6y + x - 3(x - 2) + 2y$ .

[3.1] 43. Despeje y en la ecuación  $2x + 3y = 9$ ; después, encuentre el valor de  $y$  si  $x = 3$ .

## 3.5 PROBLEMAS DE MOVIMIENTO, DINERO Y MEZCLAS



- 1 Resolver problemas de movimiento que involucran sólo una tasa.
- 2 Solucionar problemas de movimiento que involucran dos tasas.
- 3 Resolver problemas de dinero.
- 4 Solucionar problemas de mezclado.

A continuación estudiaremos tres tipos adicionales de aplicaciones: problemas de movimiento, dinero y mezclas. Agrupamos estos problemas en la misma sección debido a que, como se dará cuenta en breve, empleamos el mismo procedimiento general de multiplicación para resolverlos. Comenzaremos con el análisis de los problemas de movimiento.

## 1 Resolver problemas de movimiento que involucran sólo una tasa

Un **problema de movimiento** es aquel en que el objeto se mueve a una tasa específica durante un periodo específico. Son problemas de movimiento los siguientes: un automóvil que viaje a velocidad constante, una alberca que se llena o vacía (agregamos o retiramos agua a una tasa específica), y espagueti cortado en una banda transportadora moviéndose a una velocidad determinada.

A continuación presentamos la fórmula que utilizamos con frecuencia para resolver problemas de movimiento.

## Fórmula del movimiento

$$\text{cantidad} = \text{tasa} \cdot \text{tiempo}$$

La cantidad puede ser una medida de magnitudes diferentes, lo que depende de la tasa. Por ejemplo, si la tasa consiste en medir *distancia* por unidad de tiempo, la cantidad será *distancia*. Si la tasa es la medición de *volumen* por unidad de tiempo, la cantidad será *volumen*, y así sucesivamente.

## EJEMPLO 1



**Soldadoras robóticas** En una planta automotriz de Detroit, Michigan, un robot realiza soldaduras en los vehículos. Si el robot es capaz de hacer 8 soldaduras por minuto, ¿cuántas hará en 20 minutos?

**Entender y traducir** En este ejemplo, la cantidad es el número de soldaduras realizadas. Por tanto, la fórmula que usaremos es  $\text{cantidad} = \text{tasa} \cdot \text{tiempo}$ . Damos la tasa, 8 soldaduras por minuto, y el tiempo es 20 minutos. Se pide encontrar el número de soldaduras.

$$\begin{aligned} \text{número de soldaduras} &= \text{tasa} \cdot \text{tiempo} \\ &= 8 \cdot 20 = 160 \end{aligned}$$

Calcular

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 3

**Respuesta** Por tanto, en 20 minutos se harán 160 soldaduras. 

A continuación, miraremos de cerca las unidades del ejemplo 1. Damos la tasa en soldaduras por minuto, y proporcionamos el tiempo en minutos. Si analizamos las unidades (proceso que llamamos *análisis dimensional*), observamos que obtenemos la respuesta en soldaduras.

$$\begin{aligned}\text{número de soldaduras} &= \text{taza} \cdot \text{tiempo} \\ &= \frac{\text{soldaduras}}{\text{minutos}} \cdot \text{minutos} \\ &= \text{soldaduras}\end{aligned}$$

Cuando la *cantidad* en la fórmula de la tasa es *distancia*, la conocemos como **fórmula de la distancia**.

### Fórmula de la distancia

$$\text{distancia} = \text{tasa} \cdot \text{tiempo} \quad \text{o bien} \quad d = r \cdot t$$

El ejemplo 2 ilustra el uso de la fórmula de la distancia.

## EJEMPLO 2

**El oleoducto de Alaska** El oleoducto de Alaska se extiende de la bahía Prudhoe a Valdez, en dicho estado. La distancia, o longitud, del oleoducto es de 800.3 millas. El petróleo fluye por el ducto a una tasa promedio de 5.4 millas por hora. ¿Cuánto tiempo tardará el líquido que entra al tubo en la bahía Prudhoe para salir en Valdez?

### Solución




**Entender y traducir** Como damos una distancia de 800.3 millas, utilizaremos la fórmula de la distancia. Proporcionamos la distancia y la tasa, y necesitamos despejar el tiempo,  $t$ .

$$\begin{aligned}\text{distancia} &= \text{tasa} \cdot \text{tiempo} \\ 800.3 &= 5.4t \\ \frac{800.3}{5.4} &= t \\ 148.2 &\approx t \\ \text{o bien } t &\approx 148.2 \text{ horas}\end{aligned}$$

**Calcular**

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 9

**Respuesta** El petróleo que vaya de la bahía Prudhoe a Valdez por el oleoducto de Alaska, tardará 148.2 horas en el recorrido; alrededor de 6.18 días. 

## SUGERENCIA

Al trabajar con problemas de movimiento, las unidades deben ser congruentes una con otra. Si diéramos un problema en el que no fueran congruentes, necesitaríamos cambiar una de ellas de modo que concuerden antes de sustituir los valores en la fórmula. Por ejemplo, si encontramos la tasa en pies por segundo y la distancia en pulgadas, necesitamos convertir la distancia en pies o bien la tasa a pulgadas por segundo.

## 2 Solucionar problemas de movimiento que involucran dos tasas

Ahora estudiaremos algunos problemas de movimiento que involucran *dos tasas*, como dos trenes que viajen a velocidades distintas. En estos problemas, por lo general comenzamos haciendo que la variable represente una de las cantidades desconocidas. Por ejemplo, supongamos que un tren viaja a 20 millas por hora más rápido que el otro. Haríamos que  $r$  representara la tasa del tren más lento y  $r + 20$  sería la del más veloz.



Para resolver problemas de este tipo por medio de la fórmula de la distancia, por lo general sumamos las dos distancias o bien restamos la más pequeña de la más grande, o igualamos las dos distancias, lo cual depende de la información que proporcione el problema.

Al resolver problemas que involucran dos tasas diferentes, con frecuencia construimos una tabla, como la siguiente, a fin de organizar la información. La fórmula en la parte superior de la tabla muestra cómo calculamos la distancia en la última columna.

Tasa × Tiempo = Distancia			
Concepto	Tasa	Tiempo	Distancia
Concepto 1			distancia 1
Concepto 2			distancia 2

En función de la información dada en el problema, planteamos uno de tres tipos de ecuaciones, como indicamos a continuación, para resolver el problema.

$$\begin{aligned} \text{distancia 1} + \text{distancia 2} &= \text{distancia total} \\ \text{distancia 1} - \text{distancia 2} &= \text{diferencia de distancia} \\ (\text{o bien, distancia 2} - \text{distancia 1} &= \text{diferencia de distancia}) \\ \text{distancia 1} &= \text{distancia 2} \end{aligned}$$

Los ejemplos 3 a 5 ilustran el procedimiento a seguir.

**EJEMPLO 3 Campamento** La familia Justinger ha decidido salir de campamento. Viajarán en canoas por el canal Erie, en el estado de Nueva York. Comienzan en Tonawanda (cerca de Buffalo), en camino a Rochester. Mike y Danny, adolescentes, van en una canoa, y Paul y Maryanne, papá y mamá, ocupan la otra. Alrededor del mediodía, Mike y Danny deciden remar más rápido que sus padres para llegar al lugar del campamento antes que ellos, de modo que puedan instalar todo. Mientras que los padres reman a una velocidad tranquila de 2 millas por hora, los muchachos lo hacen a 4 millas por hora. ¿En cuántas horas estarán separados los chicos y sus padres por una distancia de 5 millas?

**Solución Entender y traducir** Pedimos calcular el tiempo que tomará que las canoas estén separadas 5 millas. Construiremos una tabla que ayude a plantear el problema.

Sea  $t$  = tiempo en que las canoas estarán separadas 5 millas.

Hacemos un dibujo para visualizar el problema (figura 3.12). Cuando las dos canoas estén separadas por una distancia de 5 millas, cada una habrá viajado durante el mismo número de horas,  $t$ .

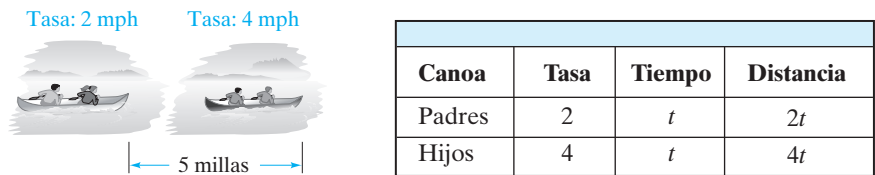


FIGURA 3.12

Como las canoas viajan en la misma dirección, la distancia entre ellas se encuentra con la resta de la distancia que recorre la más rápida menos la que recorre la más lenta.

$$\left( \begin{array}{l} \text{distancia que recorre} \\ \text{la canoa más rápida} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{l} \text{distancia que recorre} \\ \text{la canoa más lenta} \end{array} \right) = 5 \text{ millas}$$

$$4t - 2t = 5$$

Calcular

$$2t = 5$$

$$t = 2.5$$

**Respuesta** Las canoas estarán separadas por una distancia de 5 millas después de 2.5 horas. 

**EJEMPLO 4 Tubo de desagüe** Dos equipos de construcción están separados por una distancia de 20 millas y trabajan uno en dirección del otro. Ambos colocan tubos de drenaje en línea recta que eventualmente se conectarán. Ambos equipos van a trabajar las mismas horas. Uno tiene mejores herramientas y más trabajadores, por lo que tienden una longitud mayor de tubería por día. El equipo más rápido coloca 0.4 millas de tubo por día más que el equipo más lento, y los dos tramos de tubo se conectan después de 10 días. Calcule la tasa a que cada equipo tiende la tubería.

**Solución Entender y traducir** Pedimos calcular las dos tasas. Afirmamos que los dos equipos trabajan durante 10 días.

Sea  $r$  = tasa del equipo más lento

entonces  $r + 0.4$  = tasa del equipo más rápido

Elaboramos un dibujo (figura 3.13) y una tabla de valores.

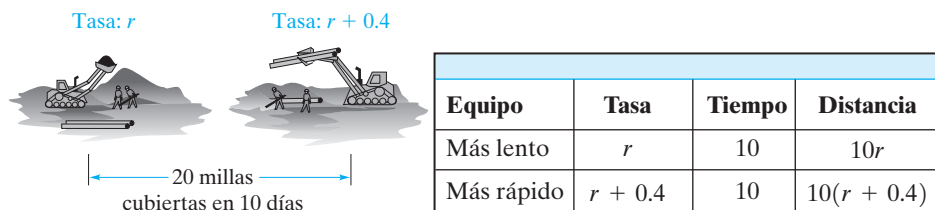


FIGURA 3.13

La distancia total que cubren los dos equipos es 20 millas

$$\left( \begin{array}{l} \text{distancia cubierta por el} \\ \text{equipo más lento} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{distancia cubierta por el} \\ \text{equipo más rápido} \end{array} \right) = 20 \text{ millas}$$

$$10r + 10(r + 0.4) = 20$$

Calcular

$$10r + 10r + 4 = 20$$

$$20r + 4 = 20$$

$$20r = 16$$

$$\frac{20r}{20} = \frac{16}{20}$$

$$r = 0.8$$

**AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 19** **Respuesta** El equipo más lento tiende 0.8 millas de tubería por día, y el más rápido tiende  $r + 0.4$ , es decir  $0.8 + 0.4 = 1.2$  millas por día. 

**EJEMPLO 5 Trotando en el parque Griffith** El parque Griffith, en Los Ángeles, es el área municipal silvestre más grande dentro de una ciudad de los Estados Unidos. Tiene muchos senderos y actividades utilizadas con fines recreativos. En el parque, Connie Buller comienza a patinar a 6 millas por hora en Cristal Springs Drive, hacia el zoológico de Los Ángeles. Su amigo Richard Zucker planea encontrarla en el sendero. Richard comienza a andar en bicicleta  $\frac{1}{2}$  hora después, moviéndose a 10 millas por hora en el mismo punto donde Connie inició.





FIGURA 3.14

**Solución**

- a) ¿Cuánto tiempo después de que Richard comienza a pedalear se encontrarán?
- b) ¿A qué distancia estarán de su punto de arranque cuando se reúnan?

**a) Entender y traducir** Como Richard va más rápido, cubrirá la misma distancia en menos tiempo. Al encontrarse, cada uno habrá recorrido la misma distancia, pero Connie habrá estado en el sendero  $\frac{1}{2}$  hora más que Richard. La pregunta es: ¿después de cuánto tiempo de que Richard inicia su camino se reunirán? Como la tasa está dada en millas por hora, el tiempo estará en horas.

$$\begin{aligned} \text{Sea } t &= \text{ tiempo que Richard pedalea} \\ \text{entonces } t + \frac{1}{2} &= \text{ tiempo que Connie patina} \end{aligned}$$

Elabore un dibujo (figura 3.14) y construya una tabla.

Richard

Tasa: 10 mph  
Tiempo:  $t$

Connie

Tasa: 6 mph  
Tiempo:  $t + \frac{1}{2}$

Deportista	Tasa	Tiempo	Distancia
Richard	10	$t$	$10t$
Connie	6	$t + \frac{1}{2}$	$6\left(t + \frac{1}{2}\right)$

Distancia de Richard = distancia de Connie

$$10t = 6\left(t + \frac{1}{2}\right)$$

**Calcular**

$$10t = 6t + 3$$

$$10t - 6t = 6t - 6t + 3$$

$$4t = 3$$

$$t = \frac{3}{4}$$

**Respuesta** Así, se reunirán  $\frac{3}{4}$  de hora después de que Richard haya comenzado a moverse.

**b)** Para encontrar la distancia recorrida, se empleará la tasa y tiempo de Richard.

$$\begin{aligned} d &= r \cdot t \\ &= 10 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{2} = 7.5 \text{ millas} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 25

Connie y Richard se reunirán a 7.5 millas de su punto de arranque. ✦

**3 Resolver problemas de dinero**

Ahora resolveremos algunos ejemplos que involucran dinero. Abordamos estos problemas en este momento porque se resuelven por medio de un procedimiento muy similar al de movimiento con dos tasas. Un tipo de problema monetario involucra el interés. Al trabajar con problemas de interés, hacemos que la variable represente una cantidad de dinero, y expresamos la segunda cantidad en términos de la variable. Por ejemplo, si sabemos que la cantidad total que invertimos en dos cuentas es \$20,000, haremos que  $x$  represente la cantidad en una cuenta, entonces la cantidad invertida en la otra sería  $20,000 - x$ . En la sección 3.1 vimos que la

fórmula del interés simple es  $\text{interés} = \text{capital} \cdot \text{tasa} \cdot \text{tiempo}$ . Cuando resolvemos un problema de interés, utilizamos una tabla, como en los problemas de movimiento.

Capital $\times$ Tasa $\times$ Tiempo = Interés				
Cuenta	Capital	Tasa	Tiempo	Interés
Cuenta 1				Interés 1
Cuenta 2				Interés 2

Después de establecer las columnas de interés, en el lado derecho, para determinar la respuesta por lo general empleamos una de las siguientes fórmulas, dependiendo de la pregunta.

$$\text{Interés 1} + \text{Interés 2} = \text{Interés total}$$

$$\text{Interés 1} - \text{Interés 2} = \text{Diferencia de interés}$$

$$(\text{o bien, } \text{Interés 2} - \text{Interés 1} = \text{Diferencia de interés})$$

$$\text{Interés 1} = \text{Interés 2}$$

¿Observa las similitudes con los problemas de movimiento? Ahora resolveremos un ejemplo.

**EJEMPLO 6 Inversiones** Mitch Levy acaba de recibir el valor de un certificado de depósito que se venció y ahora dispone de \$15,000 para invertirlos. Estudia dos inversiones. Uno es un préstamo que haría a otra persona por medio de Gibraltar Mortgage Company. Esta inversión le pagaría 11% de interés simple por un año. Una segunda inversión, más segura, consiste en adquirir un certificado de depósito a 1 año que paga 5%. Mitch decide colocar algo de dinero en cada inversión, pero necesita ganar por ambas inversiones un total de \$1500 por concepto de interés en 1 año. ¿Cuánto dinero debe colocar en cada inversión?

**Solución** *Entender y traducir* Para resolver este problema utilizamos la fórmula de interés simple que presentamos en la sección 3.1:  $\text{interés} = \text{capital} \cdot \text{tasa} \cdot \text{tiempo}$ .

Sea  $x$  = cantidad por invertir al 5%

entonces  $15,000 - x$  = cantidad por invertir al 11%

Cuenta	Capital	Tasa	Tiempo	Interés
CD	$x$	0.05	1	$0.05x$
Préstamo	$15,000 - x$	0.11	1	$0.11(15,000 - x)$

Como la suma del interés por las dos inversiones es igual a \$1500, escribimos la ecuación siguiente:

$$\left( \begin{array}{l} \text{interés por el} \\ \text{CD al 5\%} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{interés por la} \\ \text{inversión al 11\%} \end{array} \right) = \text{interés total}$$

$$0.05x + 0.11(15,000 - x) = 1500$$

**Calcular**  $0.05x + 0.11(15,000) - 0.11(x) = 1500$

$$0.05x + 1650 - 0.11x = 1500$$

$$-0.06x + 1650 = 1500$$


$$-0.06x = -150$$

$$x = \frac{-150}{-0.06} = 2500$$

**Revisar y responder** Así, debe invertir \$2,500 al 5% de interés. La cantidad por invertir al 11% es

$$15,000 - x = 15,000 - 2,500 = 12,500$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 35**

La cantidad total invertida es \$15,000, lo que coincide con la información que se proporciona. 

En el ejemplo 6, hicimos que  $x$  representara la cantidad invertida al 5%. Si se hubiera hecho que  $x$  fuera la cantidad invertida al 11%, la respuesta no habría cambiado. Vuelva a resolver el ejemplo 6 con  $x$  representando la cantidad invertida al 11%.

En otros tipos de problemas que involucran dinero, por lo general construimos una tabla parecida. Por ejemplo, si sus pagos anuales por ingresos incluyen dos cantidades diferentes, elaboramos una tabla como la siguiente.

Número de meses $\times$ renta = cantidad pagada			
Renta	Número de meses	Renta	Cantidad pagada
Renta más baja			Cantidad pagada a la renta más baja
Renta más elevada			Cantidad pagada a la renta más elevada

Después, para responder la pregunta utilizamos la cantidad pagada, igual como hicimos con la distancia y el interés.

Ahora veremos otro ejemplo que involucra dinero.

**EJEMPLO 7**

**Venta de arte** En una feria, Mary Gallagher vende pinturas pequeñas y grandes. Las pequeñas se venden a \$50 cada una, y las grandes a \$175. Al final del día, Mary ya no sabe el número de pinturas de cada tamaño que vendió. Sin embargo, al ver sus recibos se da cuenta de que vendió 14 pinturas por un total de \$1,200. Calcule el número de pinturas pequeñas y grandes que vendió.

**Solución**

**Entender y traducir** Pedimos calcular el número de pinturas que vendió de cada tamaño.



Sea  $x$  = número de pinturas pequeñas que vendió

entonces  $14 - x$  = número de pinturas grandes que vendió

El ingreso recibido por la venta de pinturas pequeñas se encuentra con la multiplicación del número de ellas que vendió por lo que cuesta una sola. El ingreso que recibió por la venta de las pinturas grandes se obtiene de la multiplicación del número de ellas por el costo de una sola. El ingreso total que recibió ese día es la suma del ingreso por las pinturas chicas y las grandes.

$(\text{Costo de una pintura}) \times (\text{Número de pinturas}) = (\text{Ingreso por las pinturas})$			
Pintura	Costo	Número de pinturas	Ingreso por las pinturas
Pequeña	50	$x$	$50x$
Grande	175	$14 - x$	$175(14 - x)$

$$\left( \begin{array}{l} \text{ingreso por las} \\ \text{pinturas pequeñas} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{ingreso por las} \\ \text{pinturas grandes} \end{array} \right) = \text{ingreso total}$$

$$50x + 175(14 - x) = 1200$$

Calcular

$$50x + 2450 - 175x = 1200$$

$$-125x + 2450 = 1200$$

$$-125x = -1250$$

$$x = \frac{-1250}{-125} = 10$$

Revisar y responder Vendió diez pinturas pequeñas y  $14 - 10$ , es decir 4, grandes.

Comprobar

$$\text{ingreso por 10 pinturas chicas} = 500$$

$$\text{ingreso por 4 pinturas grandes} = 700$$

$$\text{total} = 1200 \quad \text{Verdadero.}$$



AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 45

#### 4 Solucionar problemas de mezclado

Ahora resolveremos algunos problemas de mezclado. Cualquier problema en el que combinemos dos o más cantidades para producir otra diferente, o en el que separemos una sola cantidad en dos o más distintas, se considera un **problema de mezclado**. Los problemas de mezclado resultan familiares a todos debido a que los observamos en ejemplos cotidianos como los siguientes.

Con frecuencia, al resolver problemas de mezclado la variable representa una cantidad desconocida, y expresamos una segunda cantidad también desconocida en términos de la primera. Por ejemplo, si se sabe que se mezclan dos soluciones para formar un total de 80 litros, el número de litros de una de ellas se representa con  $x$ , y el número de litros de la segunda es  $80 - x$ . Observe que cuando se suma  $x$  y  $80 - x$  obtenemos 80, que es la cantidad total.

Por lo general, resolvemos problemas de mezclado considerando que la cantidad (o valor) de una parte de la mezcla más la cantidad (o valor) de la segunda parte de la mezcla, es igual a la cantidad (o valor) total de la mezcla.

Como hicimos con los problemas de movimiento que involucraban dos tasas, usaremos una tabla que ayude a analizar el problema.

Al construir la tabla para los problemas de mezclado, por lo general tendrá tres renglones en lugar de dos, como era el caso con los problemas de movimiento y dinero. Un renglón será para cada uno de los artículos individuales que se mezclan, y el tercero para la mezcla de ellos. Al trabajar con soluciones empleamos la fórmula: *cantidad de sustancia en la solución = concentración de la solución (en porcentaje) × cantidad de la solución*. Al mezclar dos cantidades y estar interesados en la composición de la mezcla, por lo general usamos la siguiente tabla o una variación de ella.

Concentración (en porcentaje) × cantidad = cantidad de sustancia			
Solución	Concentración	Cantidad	Cantidad de sustancia
Solución 1			Cantidad de sustancia en la solución 1
Solución 2			Cantidad de sustancia en la solución 2
Mezcla			Cantidad de sustancia en la mezcla

Al utilizar esta tabla, para solucionar el problema generalmente empleamos la siguiente fórmula.

$$\left( \begin{array}{c} \text{Cantidad de sustancia} \\ \text{en la solución 1} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Cantidad de sustancia} \\ \text{en la solución 2} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Cantidad de sustancia} \\ \text{en la mezcla} \end{array} \right)$$

Ahora veremos un ejemplo de problema de mezclado en el que combinamos dos soluciones.

**EJEMPLO 8 Soluciones de mezclas ácidas** El sr. Dave Lumsford, profesor de química, necesita una solución de ácido acético al 10% para un experimento de química. Después de revisar el almacén, descubre que sólo dispone de soluciones de ácido acético al 5% y al 20%. Como no hay tiempo para ordenar la solución al 10%, el sr. Lumsford decide hacerla por medio de combinar las soluciones al 5% y al 20%. ¿Cuántos litros de la solución al 5% debe agregar a 8 litros de la que está al 20%, para obtener otra de ácido acético al 10%?

**Solución Entender y traducir** Pedimos calcular el número de litros de la solución de ácido acético al 5% que debe mezclar con 8 litros de otra que está al 20%.

Sea  $x$  = número de litros de solución de ácido acético al 5%

Se hace un dibujo de la solución (figura 3.15)

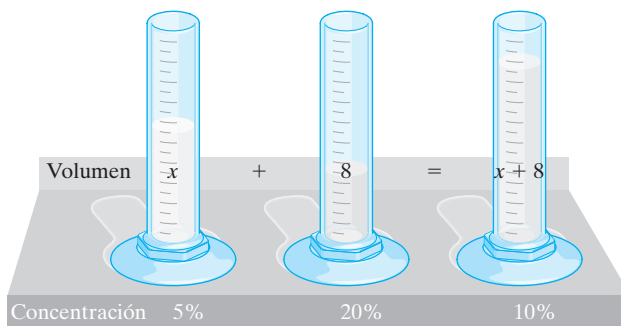


FIGURA 3.15

La cantidad de ácido en una solución dada se encuentra al multiplicar la concentración en porcentaje por el número de litros.

Solución	Concentración	Litros	Cantidad de ácido acético
5%	0.05	$x$	$0.05x$
20%	0.20	8	$0.20(8)$
Mezcla	0.10	$x + 8$	$0.10(x + 8)$

$$\left( \begin{array}{c} \text{cantidad de ácido} \\ \text{en la solución al 5\%} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{cantidad de ácido} \\ \text{en la solución al 20\%} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{cantidad de ácido} \\ \text{en la mezcla al 10\%} \end{array} \right)$$

$$0.05x + 0.20(8) = 0.10(x + 8)$$

**Calcular**

$$0.05x + 1.6 = 0.10x + 0.8$$


$$0.05x + 0.8 = 0.10x$$

$$0.8 = 0.05x$$

$$\frac{0.8}{0.05} = x$$

$$16 = x$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 57**

**Respuesta** Deben agregarse dieciséis litros de solución de ácido acético al 5% a los 8 litros de solución al 20%, para obtener la solución al 10%. El número total de litros que se obtendrá es de  $16 + 8$ , es decir 24. 

Cuando combinamos dos componentes y estamos interesados en el *valor* de la mezcla, con frecuencia empleamos la tabla siguiente, o alguna variación de ella.

Precio (por unidad) $\times$ cantidad = valor del componente			
Componente	Precio	Cantidad	Valor del componente
Componente 1			Valor del componente 1
Componente 2			Valor del componente 2
Mezcla			Valor de la mezcla

Al emplear esta tabla, por lo general usamos la fórmula siguiente para resolver el problema.

$$\text{valor del componente 1} + \text{valor del componente 2} = \text{valor de la mezcla}$$

Ahora, estudiemos un problema donde calculamos el valor de la mezcla.

**EJEMPLO 9 Mezcla de café** Becky Bugos es propietaria de una cafetería en Santa Fe, Nuevo México. En ella vende diversas mezclas de café. Una, sabor naranja, a \$7 por libra, y otra, sabor avellana, a \$4 por libra. Un día, por error, mezcló algunos granos del café sabor naranja con otros del de avellana, y descubrió que a algunos parroquianos les había gustado la mezcla cuando la probaron. Por ello, Becky decidió elaborar y vender una mezcla de los dos cafés.

- a) ¿Cuánto café sabor naranja debe mezclar con 12 libras del de sabor avellana, para obtener una mezcla de \$6 por libra?
- b) ¿Qué cantidad de mezcla obtendrá?

**Solución**

a) **Entender y traducir** Pedimos calcular el número de libras de café sabor naranja.

Sea  $x$  = número de libras de café sabor naranja

Elaboramos un bosquejo de la situación (figura 3.16) y una tabla.



FIGURA 3.16

El valor del café se encuentra con la multiplicación del número de libras por el precio por libra.

Café	Precio por libra	Número de libras	Valor del café
Sabor naranja	7	$x$	$7x$
Sabor avellana	4	12	$4(12)$
Mezcla	6	$x + 12$	$6(x + 12)$

$$\left( \begin{array}{l} \text{valor del café} \\ \text{sabor naranja} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{valor del café} \\ \text{sabor avellana} \end{array} \right) = \text{valor de la mezcla}$$

$$7x + 4(12) = 6(x + 12)$$

$$7x + 48 = 6x + 72$$

$$x + 48 = 72$$

$$x = 24 \text{ libras}$$

Calcular

**Respuesta** Por tanto, debe mezclar 24 libras de café sabor naranja con 12 libras del de sabor avellana, para obtener una mezcla con valor de \$6 por libra.

**b)** El número de libras de la mezcla es

$$x + 12 = 24 + 12 = 36 \text{ libras}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 49



## Conjunto de ejercicios 3.5

### Práctica de habilidades/Solución de problemas

Plantee una ecuación para resolver cada problema. Resuélvala y responda la pregunta. Use una calculadora cuando sea necesario.

- Velocidad promedio** En su camino de Omaha, Nebraska, a Kansas City, Kansas, Peg Hovde recorrió 150 millas en 3 horas. ¿Cuál fue su velocidad promedio?
- Uso del agua** Un artículo en Internet establece que una ducha común emplea 30 galones de agua y dura 6 minutos. ¿Cuánta agua se utiliza por minuto?
- Láser** La luz láser tiene muchos usos, desde la cirugía oftálmica al corte de puertas de acero. Un fabricante de láser produce uno capaz de cortar acero a razón de 0.2 centímetros por minuto. Durante una de sus pruebas, pasó a través de una puerta de ese metal en 12 minutos. ¿Cuál era el espesor de la puerta?
- Elaboración de copias** Paul Murphi se encuentra en Mailboxes, Etc., sacando copias de un anuncio. Mientras las copias se elaboran, él cuenta las que han salido en 2.5 minutos y encuentra que son 100. ¿A qué velocidad está funcionando la copiadora?
- Colocación de mosaicos** Mary Ann Tuerk coloca mosaicos. Ella pone 30 pies cuadrados de mosaico por hora. ¿Cuánto tiempo le llevará cubrir un cuarto que tiene 420 pies cuadrados?
- Caída libre** Mientras nada en el océano, los goggles de Elyse se le desprenden. Si caen a razón de 4 pies por segundo, ¿cuánto tiempo tardarán en recorrer los 70 pies que hay hasta la arena del fondo?
- IV's** Janette Rider se encuentra en el hospital, en recuperación de una cirugía menor. La enfermera debe administrarle 1,500 centímetros cúbicos de un fluido intravenoso que contiene un antibiótico, durante un periodo de 6 horas. ¿Cuál es la tasa de flujo del fluido?
- Cemento** Una banda transportadora en una planta de cemento transporta 600 libras por minuto de piedra molida. Calcule el tiempo que tomará transportar 20,000 libras de piedra molida.
- Viaje en canoa** En un recorrido en canoa, Jody Fry rema a una velocidad de 4 pies por segundo. ¿Cuánto tiempo le llevará remar una milla (5,280 pies)?





10. **Película** En una fábrica, una línea de producción revisa y empaca 620 rollos de película por hora. ¿En qué tiempo revisará y empacará 2,170 rollos?
11. **Carrera de autos** El récord de velocidad en una carrera de 500 millas, para autos, se obtuvo en la Michigan 500, el 9 de agosto de 1990. Al Unser Jr. la terminó en 2.635 horas. Calcule la velocidad promedio durante la carrera.
12. **Velocidad de escritura** Howie Sorkin escribió 700 palabras en 14 minutos, con un procesador de textos para computadora. Determine la velocidad a que escribe.

Resuelva los problemas de movimiento que siguen y que involucran dos tasas.

13. **Radios portátiles** Willie y Shanna Johnston tienen radios con rango de 16.8 millas. Willie y Shanna comienzan a caminar en el mismo punto en direcciones opuestas. Si Willie camina a 3 millas por hora y Shanna lo hace a 4 millas por hora, ¿cuánto tiempo pasará antes de que salgan del rango de los radios?
14. **Los Ángeles Azules** En un espectáculo aéreo de los Ángeles Azules de la Marina, dos aviones F/A-18 Hornet viajan uno en dirección de otro a una velocidad de 1,000 millas por hora. Después de que se cruzan, si continuaran su vuelo en la misma dirección y velocidad, ¿en qué tiempo los separaría una distancia de 500 millas?

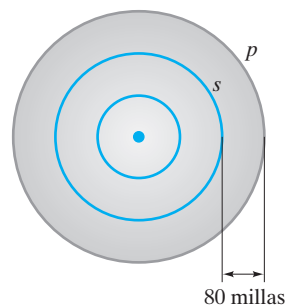


15. **Prueba de producto** La Goodyear Tire Company prueba una llanta nueva. Las llantas se colocan en una máquina que simula el rodar de ellas por la carretera. La máquina se calibra para que funcione a 60 millas por hora y las llantas ruedan a esta velocidad durante 7.2 horas. Luego, la máquina trabaja a una segunda velocidad durante 6.8 horas. Después de un periodo de 14 horas, la máquina indica que las llantas han hecho un viaje equivalente de 908 millas. Calcule la segunda velocidad de prueba de la máquina.
16. **Funicular de esquí** En Whistler Mountain, la gente debe utilizar dos bandas de funiculares distintas para llegar a la cumbre de la montaña. Suponga que el cambio ocurre exactamente a mitad del camino cuesta arriba. La primera banda viaja a 4 millas por hora durante 0.2 horas. La segunda banda se mueve durante 0.3 horas para llegar a la cumbre de la montaña. Si la distancia total que viaja hacia arriba es de 1.2 millas, encuentre la velocidad promedio de la segunda banda del funicular.



Vea el ejercicio 16.

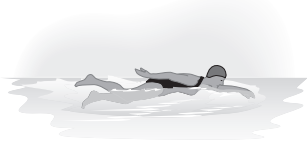
17. **Navegación en el aeropuerto O'Hare** Sadie Bragg y Dale Ewen se encuentran en el aeropuerto O'Hare de Chicago, caminando entre las terminales. Sadie camina por la banda transportadora (similar a una escalera eléctrica pero plana, y que se mueve a lo largo del piso). Su velocidad (en relación con el piso) es de 220 pies por minuto. Dale comienza a caminar a la misma velocidad al mismo tiempo junto a la banda a una velocidad de 100 pies por minuto. ¿Cuánto tiempo han caminado cuando Sadie se halla a 600 pies delante de Dale?
18. **Terremotos** Los terremotos generan dos ondas circulares, las ondas  $p$  y las  $s$ , que viajan hacia fuera del epicentro (vea la figura). Las ondas  $p$  se mueven a velocidad mayor, pero por lo general son las  $s$  las que causan más daños. Suponga que las ondas  $p$  tienen una velocidad de 3.6 millas por segundo y las  $s$  otra de 1.8 millas por segundo. Después de que inicia un terremoto, ¿en qué tiempo estarán las ondas  $p$  separadas de las  $s$  por una distancia de 80 millas?



19. **Embarcación averiada** Dos patrullas de la Guardia Costera están separadas 225 millas y viajan una en dirección de la otra, una desde el este y la otra desde el oeste, en busca de una embarcación averiada. Debido a la corriente, la patrulla del este viaja 5 millas por hora más rápido que la del oeste. Si las dos se cruzan después de tres horas, calcule la velocidad promedio de cada una.
20. **Caminata en nieve** Kathy Huet sale a dar una caminata por la nieve. Camina durante 1.2 horas a 4 millas por hora. Después, da la vuelta y regresa por la misma ruta. Si su recorrido de regreso le lleva 1.5 horas, determine su velocidad promedio durante dicho recorrido de vuelta.



- 21. Triatlón Ironman** Un triatlón consta de tres actividades: natación, ciclismo y carrera. Uno de los triatlones más famosos es el Hawaiian Ironman, que se lleva a cabo de Kailua a Kona, en Hawai (en las islas Hawai). Los participantes deben nadar cierta distancia, recorrer otra en bicicleta y luego correr otra más. La ganadora femenil en 2001 fue Natascha Badmann, de 34 años de edad, de Suiza. Nadó a una velocidad promedio de 2.38 millas por hora durante 1.01 horas; después pedaleó a un promedio de 21.17 millas por hora durante 5.29 horas. Por último, corrió a 8.32 millas por hora, en promedio, durante 3.15 horas.
- Estime la distancia que nadó.
  - Calcule la distancia que anduvo en bicicleta.
  - Determine la distancia que corrió.
  - Estime la distancia total que cubrió durante el triatlón.
  - Encuentre el tiempo ganador del triatlón.\*



- 22. Camino pavimentado** Dos equipos colocan la carpeta asfáltica de una carretera. Comienzan a la misma hora en los extremos opuestos de un camino de 1.2 millas y trabajan uno en dirección del otro. Un equipo coloca la carpeta a una tasa promedio de 0.75 millas por día más rápido que el otro. Si los dos equipos se encuentran después de 3.2 días, calcule la tasa de cada uno.
- 23. Veleo** Dos veleros están separados 9.8 millas y se mueven uno en dirección del otro. La embarcación más grande, el *Pitágoras*, navega 4 millas por hora más rápido que la más pequeña, el *Apolo*. Los dos botes pasan uno junto al otro después de 0.7 horas. Encuentre la velocidad de cada uno.
- 24. Limpieza de la playa** En el Día de la Tierra, dos grupos de personas caminan por una franja de 7 millas de Myrtle Beach, para limpiar la playa. Un grupo, encabezado por Arturo Pérez, comienza por un extremo, y el otro, dirigido por Jane Ivanov, inicia por el extremo opuesto. Comienzan al mismo tiempo y caminan uno en dirección del otro. El grupo de Arturo se mueve a razón de 0.5 millas por hora más rápido que el de Jane, y coinciden en 2 horas. Calcule la velocidad de cada grupo.
- 25. Asaltabancos** Una lancha de motor conducida por un asaltante de bancos sale de Galveston, Texas, y se dirige a Cozumel, México, a través del Golfo de México. Media hora después de que la embarcación salió de Galveston, la Guardia Costera recibe información sobre la ruta del ladrón y envía una patrulla para capturarlo. La lancha de

motor viaja a 25 millas por hora, y la patrulla a 35 millas por hora.

- ¿Cuánto tiempo tomará a la Guardia Costera capturar al asaltante?
  - ¿A qué distancia de la costa estarán las embarcaciones cuando se encuentren?
- 26. Escalada** Serge y Francine Saville van a escalar una montaña juntos. Francine comienza a subirla 30 minutos antes que Serge y avanza a un promedio de 18 pies por minuto. Cuando Serge comienza a escalar, lo hace a 20 pies por minuto. ¿En cuánto tiempo se reunirán en la montaña?



- 27. Pase largo** Phil Cheifetz es el quarterback de un equipo escolar de fútbol, y Peter Kerwin es receptor. Al comenzar un juego, Pete corre por el campo a 25 pies por segundo. Dos segundos después de iniciada la jugada, Phil lanza la pelota a alrededor de 50 pies por segundo, hacia Pete, quien continúa corriendo.
- ¿Cuánto tiempo después de que Phil lanza el balón, lo atrapará Pete?
  - ¿Qué tan lejos estará Pete desde el punto en que se lanzó el balón?
- 28. Ejercicios** Dien y Phuong Vu pertenecen a un club de salud y hacen ejercicio juntos en forma regular. Comienzan a correr en dos máquinas caminadoras al mismo tiempo. La de Dien está calibrada a 6 millas por hora, y la de Phuong a 4 millas por hora. Cuando terminan, comparan las distancias y encuentran que juntos han recorrido un total de 11 millas. ¿Durante cuánto tiempo corrieron?
- 29. Embotellamiento** Betty Truitt maneja cierto número de horas a 70 millas por hora. Después, el tráfico se hace lento y conduce a 50 millas por hora. Se mueve a esta velocidad durante 0.5 horas más de lo que lo hizo a 70 millas por hora. La diferencia en la distancia recorrida a 50 millas por hora de la que se hizo a 70 millas por hora, es de 5 millas. Determine cuánto tiempo viajó Betty a 50 millas por hora.

\*El récord de tiempo ganador del triatlón por parte de una mujer, lo impuso la californiana Paula Newby-Fraser, ocho veces triunfadora, que en 1992 terminó el recorrido en 8:55:28. Las distancias reales son: natación, 2.4 millas; ciclismo, 112 millas, y carrera, 26 millas y 385 yardas.

30. **Mina de sal** En una mina de sal, el mineral se mueve en dos bandas transportadoras distintas, para cargarse en un tren. La segunda banda avanza a razón de 0.6 pies por segundo más rápido que la primera. El mineral se mueve durante 180 segundos por la primera banda y 160 segundos por la otra. Si la distancia total que recorre es de 116 pies, determine la velocidad de la segunda banda.



31. **Velocidad de vuelo** Un aeroplano está programado para salir de San Diego, California, a las 9 A.M., y llegar a Cleveland, Ohio, a la 1 P.M. Debido a problemas mecánicos en el avión, éste se retrasa 0.2 horas. Para llegar a Cleveland a la hora que se programó en un principio, la aeronave necesita incrementar su velocidad programada en 30 millas por hora. Calcule la velocidad programada para el avión y la que tendrá con el incremento.
32. **Distancia de manejo** Yajun Yang comenzó a manejar hacia un centro comercial a una velocidad promedio de 30 millas por hora. Poco después, se dio cuenta de que había dejado su tarjeta de crédito en la cocina. Da la vuelta de regreso a casa y maneja a 20 millas por hora (hay más tráfico en el regreso). Si salir y regresar a casa le llevó un total de 0.6 horas, ¿qué distancia había manejado Yajun antes de que diera vuelta?
33. **Reparación del camino** Debe repararse cierto puente, así como el camino de acceso a él. El ingeniero estima que al equipo del camino le llevará 20 días levantar y reparar la vía, y otros 60 días para que el mismo equipo desmantele y arregle el puente. La tasa de reparación del camino es de 1.2 pies por día más rápido que la del puente, y la distancia total reparada es de 124 pies. Encuentre la tasa de reparación del camino y la del puente.
34. **Distribución del correo** Rich Poorman reparte el correo a los residentes en una ruta de 10.5 millas. Normalmente le lleva 5 horas cubrir toda la ruta. Un viernes, necesita salir temprano del trabajo, por lo que pide ayuda a su amigo Keri Goldberg. Rich comenzará el reparto por un extremo y Keri por el otro 1 hora más tarde, y se encontrarán en algún punto de la ruta. Si Keri cubre 1.6 millas

por hora, ¿En cuánto tiempo se encontrarán, después de que Keri comience?



Resuelva los siguientes problemas de dinero.

35. **Interés simple** Paul y Donna Petrie invirtieron \$9,400 a interés simple, una parte al 5% y el resto al 7%, durante un periodo de 1 año. ¿Cuánto invirtieron con cada tasa si su interés total anual por ambas inversiones fue de \$610? (Utilice la fórmula: interés = capital · tasa · tiempo.)
36. **Interés simple** Jerry Correa invirtió \$7,000 a interés simple, parte al 8% y lo demás al 5%, durante un año. Si por las dos inversiones recibió un interés total anual de \$476, ¿cuánto invirtió a cada tasa?
37. **Interés simple** Aleksandra Tomich invirtió \$6,000 a interés simple; una parte de dicha suma al 6% y otra al 4%, durante un periodo de 1 año. ¿Cuánto invirtió a cada tasa si en las dos cuentas percibió el mismo interés?
38. **Interés simple** Aimee Calhoun invirtió durante 1 año \$12,500 a interés simple, una parte al 7% y la otra al 6%. ¿De cuánto fue su inversión con cada tasa si ambas cuentas le dieron a ganar el mismo interés?
39. **Interés simple** Ming Wang invirtió \$10,000 a interés simple durante 1 año, una parte al 4% y la otra al 5%. ¿Cuánto invirtió en cada cuenta si el interés que ganó en la de 5% fue \$320 mayor que la cantidad invertida en la de 4%?
40. **Interés simple** Sharon Sledge invirtió a interés simple \$20,000 durante 1 año, parte al 5% y otra parte al 7%. ¿Cuánto invirtió en cada cuenta si el interés que ganó en la de 7% fue \$440 mayor que la cantidad que invirtió en la de 5%?
41. **Aumento de tarifa** Durante el año, la Public Service Commission aprobó un incremento en la tarifa para la General Telephone Company. Por una línea doméstica, la tarifa de servicio básico aumentó de \$17.10 a \$18.40. Mientras preparaba su declaración de impuestos, Patricia Burgess encontró que en el año había pagado un total de \$207.80 por el servicio telefónico básico. ¿En qué mes la tarifa entró en vigor?

42. **Televisión por cable** Violet Kokola sabe que su tarifa de suscripción por la conexión básica a la televisión por cable se incrementó de \$18.20 a \$19.50 en algún momento del año calendario. Ella sabía que durante éste había pagado un total de \$230.10 a la compañía de cable. Determine el mes en que tuvo lugar el incremento de la tarifa.
43. **Salarios** Mihály Sarett tiene dos trabajos de tiempo parcial. En uno de ellos, en Home Depot, le pagan \$6.50 por hora, y en el otro, en una clínica veterinaria, gana \$7.00 por hora. En la última semana, Mihály trabajó un total de 18 horas y ganó \$122.00. ¿Cuántas horas trabajó Mihály en cada empresa?
44. **Salón de la fama** En el Salón de la Fama del Béisbol, la admisión por adulto cuesta \$9.50, y por niños (7 a 12 años de edad) es de \$4.00. En cierto día se recibió un total de 2,000 adultos y niños, con un total de \$14,710 por concepto de pago del ingreso. ¿Cuántas entradas de adultos se registraron?



45. **Sistemas de cómputo** Comp USA tiene en venta dos sistemas de cómputo distintos. Uno de ellos lo vende en \$1,320, y el otro en \$1,550. Si vendió un total de 200 sistemas y los ingresos por ellos fueron de \$282,400, ¿cuántos sistemas de \$1,550 vendió?
46. **Ventas de boletos** En un cine, el costo de una entrada vespertina fue de \$7.50, y de la matutina fue de \$4.75. Cierta día hubo las dos funciones y se exhibió *Harri Potter y Sorcerer, de Stone*. Ese día se vendieron 310 boletos para adulto, lo que resultó en \$2,022.50 por concepto de entradas. ¿Cuántos adultos entraron a la función de la mañana y cuántos a la de la tarde?
47. **Venta de acciones** Suponga que se venden las acciones de General Electric a \$74 cada una, y las de PepsiCo a \$35 cada una. Mike Moussa tiene un máximo de \$8,000 para invertir. Desea adquirir cinco veces más acciones de PepsiCo que de General Electric. Sólo es posible adquirir números enteros de acciones.
- ¿Cuántas acciones de cada empresa comprará?
  - ¿Cuánto dinero quedará sin uso?
48. **Compra de acciones** Suponga que están en venta acciones de Wal Mart a \$59 cada una, y de Mattel a \$28 cada una. Amy Waller tiene un máximo de \$6,000 para invertir. De-

sea comprar cuatro veces más acciones de Wal Mart que de Mattel. Sólo pueden comprarse acciones completas.

- ¿Cuántas acciones de cada compañía comprará?
- ¿Cuánto dinero quedará sin uso?

*Resuelva los siguientes problemas de mezclado.*

49. **Semilla de césped** La semilla del pasto Scott's Family se vende a \$2.45 por libra, y la de Scott's Spot Filler a \$2.10 por libra. ¿Cuántas libras de cada tipo debe mezclarse para obtener una mezcla de 10 libras que se venda a \$2.20 por libra?
50. **Tienda de nueces** Jean Valjean es propietario de una tienda de nueces en la que las de Castilla cuestan \$6.80 por libra, y las almendras \$6.40 por libra. Jean recibe un orden en la que se solicita en específico una mezcla de 30 libras de nueces de Castilla y almendras, que costará \$6.65 por libra. ¿Cuántas libras de cada tipo de nuez debe mezclar Jean para obtener la mezcla que se pide?
51. **Bombeo de gas** Ken Yoshimoto es propietario de una gasolinera. Se agotó la gasolina tipo premium y quiere obtener 500 galones de ésta por medio de combinar gasolina regular con premium plus. La gasolina regular cuesta \$1.35 por galón. Si la premium ha de costar \$1.26 por galón, ¿cuánta gasolina de cada tipo debe mezclar para obtener los 500 galones de premium?
52. **Alimento para pájaros** En Agway Gardens se vende comida para pájaros a granel. En un barril hay semillas de girasol que se vende a \$1.80 por libra. En otro barril se encuentra maíz triturado que cuesta \$1.40 por libra. Si la tienda elabora bolsas grandes de una mezcla de ambos productos, con 2.5 libras de semillas de girasol y 2 libras de maíz triturado, ¿cuál debe ser el costo por libra de la mezcla?
53. **Dulces a granel** En una tienda, ciertos dulces que se guardan en barriles se venden a granel. Las marcas Good y Plenty cuestan \$2.49 por libra y la Sweet Treats \$2.89 por libra. Si Jim Strange toma tres bolsitas de Good y Plenty y los mezcla con 5 bolsitas de Sweet Treats, ¿en cuánto debe venderse cada libra de la mezcla? Suponga que cada bolsita contiene el mismo peso de dulces.
54. **Starbucks** Ruth Cordeff opera una cafetería en la que vende granos de café sabor almendras y chocolate a \$7.00 por libra, y sabor avellana a \$6.10 por libra. Un cliente pide a Ruth que prepare 6 libras de una mezcla del café sabor almendras y chocolate y el tipo avellana. ¿Cuántas libras de cada uno debe utilizarse si la mezcla ha de costar \$6.40 por libra?
55. **Bistec Wellington** El chef Ramón marina un bistec, el cual utiliza para preparar el Wellington, en un vino que es una mezcla de dos vinos tintos. Para elaborar su mezcla, usa 5 litros de un vino que contiene 12% de alcohol en su volumen, y dos litros de otro que contiene un volumen de 9% de alcohol. Determine el contenido de alcohol de la mezcla.

56. **Farmacia** Susan Staples, farmacéutica, tiene una solución de iodito de sodio al 60%. También tiene otra solución de la misma medicina al 25%. Recibe una receta en que se pide una solución al 40% de la medicina. ¿Qué cantidad de cada solución debe mezclar para obtener 0.5 litros de la solución al 40%?
57. **Ácido sulfúrico** En la clase de química, Todd Corbin tiene 1 litro de solución de ácido sulfúrico al 20%. ¿Qué cantidad de solución de ácido sulfúrico al 12% debe mezclarse con la que está al 20% para obtener una tercera al 15%?
58. **Pintura** Nick Pappas tiene dos latas de pintura blanca, las cuales contienen un porcentaje pequeño de un pigmento amarillo. Una lata contiene pigmento amarillo al 2%, y la otra al 5%. Nick quiere mezclar las dos pinturas para obtener pintura con pigmento amarillo al 4%. ¿Qué cantidad de la pintura con pigmento amarillo al 5% debe mezclarse con 0.4 galones de la pintura con pigmento al 2%, para obtener la pintura que se desea?
59. **Clorox** El 5.25% del blanqueador Clorox, que se emplea en lavadoras, es hipoclorito de sodio. Los tratamientos de choque de albercas son a base de 10.5% de hipoclorito de sodio en peso. Las instrucciones en la botella de Clorox dicen que hay que agregar 8 onzas (1 taza) de Clorox a un cuarto de galón de agua. ¿Qué cantidad del tratamiento de choque debe agregar Willie Williams a un cuarto de galón de agua para obtener la misma cantidad de hipoclorito de sodio en la mezcla, como cuando se agrega una taza de Clorox a un cuarto de galón de agua?
60. **Enjuague bucal** La etiqueta en la botella del enjuague bucal antiséptico Listerine Cool Mint, dice que contiene un volumen de 21.6% de alcohol. La etiqueta en el enjuague bucal marca Scope Original Mint, dice que contiene un volumen de 15.0% de alcohol. Si Hans mezcla 6 onzas de Listerine con 4 onzas de Scope, ¿cuál es el contenido de alcohol, en porcentaje, de la mezcla?
61. **Leche** Chuck Levy sabe que la leche ligera tiene 2% de su peso en grasas lácteas, y que la baja en grasas contiene 1% de su peso en grasas, pero no sabe cuál es el contenido de grasas de la leche entera. Chuck también conoce un hecho trivial: que si se mezcla 4 galones de leche entera con 5 galones de leche baja en grasas obtiene 9 galones de leche ligera. Utilice esta información para calcular el contenido de grasas de la leche entera.
62. **Jugo de naranja** Mary Ann Terwilliger elaboró 6 cuartos de galón de una bebida a base de jugo de naranja, para una fiesta. La bebida contiene 12% de jugo de naranja.

También cree que tal vez necesite más bebida, pero ya no tiene más jugo de naranja, por lo que añade  $\frac{1}{2}$  cuarto de galón de agua a la bebida. Calcule el porcentaje de jugo de naranja que hay en la mezcla nueva.

63. **Concentración salina** Suponga que los delfines de Sea World deben estar en agua salina que contenga 0.8% de sal. Después de una semana de clima cálido, la concentración de sal se ha incrementado a 0.9% debido a la evaporación del agua. ¿Cuánta agua con 0% de sal debe agregarse a 50,000 galones del agua salada al 0.9%, a fin de disminuir la concentración a 0.8%?



64. **Ponche hawaiano** La etiqueta en una lata de 12 onzas de concentrado congelado de Ponche Hawaiano indica que cuando se mezcla con 3 latas de agua fría, la mezcla que resulta contiene 10% de jugo. Encuentre el porcentaje de jugo puro que hay en el concentrado.
65. **Anticongelante** El anticongelante marca Prestone contiene 12% de etilen glicol, y el de marca Xeres contiene 9% de la misma sustancia. El radiador de Nina necesita que se agregue anticongelante, por lo que vacía el resto de un contenedor de Prestone y 1 galón del Xeres en el radiador. Si la mezcla contiene 10% de etilen glicol, ¿cuánto anticongelante Prestone se vertió?
66. **Requerimientos de calcio** La etiqueta en una botella de jugo de naranja marca Orange Sweet, enriquecido con calcio, indica que una porción satisface el 12% de los requerimientos diarios de calcio de una persona. La etiqueta de la marca Tree Top dice que una porción cubre el 2% de los requerimientos diarios de una persona. ¿Cuántas porciones de jugo de naranja marca Tree Top debe mezclarse con 0.3 porciones de Orange Sweet para obtener una mezcla que satisfaga 8% de las necesidades diarias de calcio de una persona?

## Problemas de reto

67. **Gordo Alberto** La base permanente de los aviones acróbatas *Ángeles Azules*, de la Marina, se encuentra en la Naval Air Station en Pensacola, Florida. Los inviernos los pasan en la Naval Air Facility (NAF) de El Centro, en California. Suponga que vuelan a 900 millas por hora en sus F/A-18 Hornets, cuando van de Pensacola a El Centro. En cada viaje, su avión de transporte C-130 (al que se llama con afecto *Gordo Alberto*) sale antes que ellos con suministros y personal de apoyo. El C-130 por lo general viaja a 370 millas por hora. Si los *Ángeles Azules* hacen su via-

je de Pensacola a El Centro, ¿cuánto tiempo antes que los Hornets debe salir el *Gordo Alberto*, si ha de llegar 3 horas antes que ellos? La distancia de vuelo entre las dos bases es de 1720 millas.

68. **Llenar el radiador** Al radiador del Chevrolet 2003 de Mark Jillian le caben 16 cuartos de galón. Ahora se encuentra lleno con una solución anticongelante al 20%. ¿Cuántos cuartos de galón debe extraer Mark y sustituir con anticongelante puro para que el radiador contenga una solución de anticongelante al 50%?





## Actividad en grupo

Como grupo, estudie y responda los ejercicios 69 y 70.

**69. Carrera de caballos** De acuerdo con el *Guinness Book of World Records*, la velocidad más alta de un caballo de carreras la registró uno llamado Big Racket el 5 de febrero de 1945, en la Ciudad de México. Big Racket corrió una carrera de un cuarto de milla en 62.41 segundos. Calcule la velocidad de Big Racket en millas por hora. Redondee la respuesta al centésimo más cercano.

**70. Portero automático** Un dispositivo automático para abrir la puerta de una cochera está diseñado para abrir cuando un carro se encuentra a 100 pies de ahí. ¿A qué tasa tiene que abrirse la puerta si ha de elevarse 6 pies para cuando el vehículo llegue a ella a una velocidad de 4 millas por hora? (Una milla por hora  $\approx$  1.47 pies por segundo.)

## Ejercicios de repaso acumulativo

[1.3] 71. a) Dividir  $2\frac{3}{4} \div 1\frac{5}{8}$ .

b) Sumar  $2\frac{3}{4} + 1\frac{5}{8}$ .

[2.5] 72. Resuelva la ecuación  $6(x - 3) = 4x - 18 + 2x$ .

[2.6] 73. Solucione la proporción  $\frac{6}{x} = \frac{72}{9}$ .

[2.7] 74. Resuelva la desigualdad  $3x - 4 \leq -4x + 3(x - 1)$ .

## RESUMEN DEL CAPÍTULO

### Términos y frases importantes

#### 3.1

Área  
Círculo  
Circunferencia  
Cuadrilátero  
Diámetro  
Evaluar una fórmula  
Figura tridimensional  
Fórmula  
Fórmula de interés simple  
Perímetro  
Pi ( $\pi$ )

Polígono  
Radio  
Triángulo  
Volumen

#### 3.2

Entero consecutivo  
Entero impar consecutivo  
Entero par consecutivo  
Traducción de problemas de aplicación a lenguaje matemático

#### 3.3

Procedimiento de solución de problemas

#### 3.4

Ángulos complementarios  
Ángulos suplementarios  
Ángulos verticales  
Triángulo equilátero (opuestos por el vértice)  
Triángulo isósceles

#### 3.5

Problemas de dinero  
Problemas de mezclado  
Problemas de movimiento

## HECHOS IMPORTANTES

Fórmula de interés simple:  $i = prt$

Fórmula de la distancia:  $d = rt$

Las medidas de los ángulos internos de cualquier triángulo suman  $180^\circ$ .

Las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero suman  $360^\circ$ .

### Procedimiento para resolver problemas de aplicación

- Entender el problema  
Identificar la cantidad o cantidades por calcular.
- Traducir el problema a lenguaje matemático (expresarlo como ecuación).

(continúa en la página siguiente)

- a) Elegir una variable que represente una cantidad, y *escribir exactamente lo que representa*. Representar cualquier otra cantidad que haya que calcular en términos de dicha variable.
- b) Usar la información del inciso a) para escribir una ecuación que represente la aplicación.
3. Efectuar los cálculos matemáticos (resolver la ecuación).
4. Comprobar la respuesta (con la aplicación original).
5. Responder la pregunta que se hizo.

## Ejercicios de repaso del capítulo

[3.1] Utilice la fórmula para encontrar el valor de la variable que se indica. Emplee una calculadora para ahorrar tiempo y, si es necesario, redondee la respuesta al centésimo más cercano.

1.  $P = 2\pi r$  (perímetro de un círculo); calcule  $P$  cuando  $r = 6$ .
2.  $P = 2l + 2a$  (perímetro de un rectángulo); calcule  $P$  si  $l = 4$  y  $a = 5$ .
3.  $A = \frac{1}{2}bh$  (área de un triángulo); calcule  $A$  cuando  $b = 8$  y  $h = 12$ .
4.  $K = \frac{1}{2}mv^2$  (fórmula de la energía); calcule  $m$  si  $k = 200$  y  $v = 4$ .
5.  $y = mx + b$  (forma pendiente-ordenada al origen); calcule  $b$  si  $y = 15$ ,  $m = 3$  y  $x = -2$ .
6.  $P = \frac{f}{1 + i}$  (fórmula de una inversión); calcule  $f$  si  $P = 4716.98$  e  $i = 0.06$ .

En los ejercicios 7 a 10, a) despeje y en cada ecuación, entonces b) encuentre el valor de  $y$  para el valor dado de  $x$ .

7.  $2x = 2y + 4$ ,  $x = 10$
8.  $6x + 3y = -9$ ,  $x = 12$
9.  $5x - 2y = 16$ ,  $x = 2$
10.  $2x = 3y + 12$ ,  $x = -6$

Despeje la variable indicada.

11.  $A = la$  para  $a$
12.  $A = \frac{1}{2}bh$ , para  $h$
13.  $i = prt$ , para  $t$
14.  $P = 2l + 2a$ , para  $a$
15.  $V = \pi r^2 h$ , para  $h$
16.  $V = \frac{1}{3}Bh$  para  $h$ .

17. **Interés simple** ¿Cuánto interés pagaría Tom Proietti si obtuviera un préstamo de \$600 durante 2 años con un interés simple de 9%? (Utilice  $i = prt$ .)
18. **Perímetro** El perímetro de un rectángulo es de 16 pulgadas. Calcule la longitud del rectángulo si el ancho es de 2 pulgadas.
19. Expresar  $x + (x + 5) = 9$  como enunciado.
20. Expresar  $x + (2x - 1) = 10$  como enunciado.
24. **Carro nuevo** Shaana compro hace poco un auto nuevo. ¿Cuál fue el costo del carro antes de impuestos si el costo total fue de \$23,260, incluido un impuesto de 7%?
25. **Pastelillos** Una pastelería hace y envía 520 pastelillos por mes a varios repartidores. Desean incrementar la producción y envío de los pastelillos a 20 por mes hasta alcanzar un nivel de producción y envío de 900 pastelillos. ¿Cuánto tiempo llevará esto?

[3.2, 3.3] Resuelva cada problema.

21. **Números** Un número es 8 más que otro. Encuentre ambos números si suman 74.
22. **Enteros consecutivos** La suma de dos enteros consecutivos es 237. Calcule los dos enteros.
23. **Números** El mayor de dos enteros es 3 más que el quintuplo del más pequeño. Halle los dos números si el más pequeño restado del mayor es 31.
26. **Comparación de salarios** En el puesto que ocupa actualmente Ron Gigliotti como vendedor, recibe un salario base de \$500 por semana más una comisión de 3% por las ventas que realice. Considera cambiarse a otra compañía en la que vendería los mismos artículos. Su salario base sería de sólo \$400 semanales, pero su comisión sería de 8% sobre las ventas que hiciera. ¿De cuántos pesos tendrían que ser sus ventas semanales para que los salarios totales en cada compañía fueran los mismos?

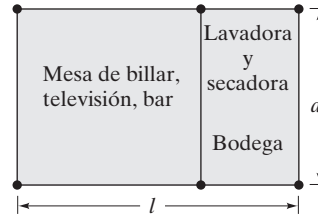
27. **Precio de venta** Durante la primera semana de una venta de remate, todos los precios se redujeron 20%. En la segunda semana, todo lo que costaba más de \$100, tuvo una rebaja adicional de \$25. En la segunda semana de la venta, Kathy Golladay compró una cámara de video en \$495. ¿Cuál era su precio original?



28. **Hipotecas** Los Burds estudian dos bancos para pedir una hipoteca, el First Federal y el Internet Bank. Con el primero, los pagos mensuales hipotecarios serían de \$889 por mes más una sola cuota inicial de \$900. El pago mensual con el Internet Bank sería de \$826 más una tarifa única de \$1200. ¿Cuántos meses llevaría para que los pagos totales de ambos bancos fueran lo mismo?

[3.4] Resuelva cada problema.

29. **Ángulos desconocidos** Un ángulo de un triángulo mide  $10^\circ$  más que el más pequeño, y el tercero mide  $10^\circ$  menos que lo doble del más pequeño. Calcule las medidas de los tres ángulos.
30. **Ángulos desconocidos** Un ángulo de un trapecio mide  $10^\circ$  más que el ángulo más pequeño; un tercer ángulo mide cinco veces más que el más pequeño; y el cuarto ángulo mide  $20^\circ$  más que el cuádruplo del más chico. Encuentre la medida de los cuatro ángulos.
31. **Jardín** Jackie Donofrio tiene un jardín rectangular cuya longitud es 4 pies mayor que su ancho. El perímetro del jardín es de 70 pies. Encuentre el ancho y la longitud del jardín.
32. **Diseño de una casa** Iram Hafeez diseña una casa que planea construir. La planta será rectangular con dos áreas. Colocó en el piso estacas y cordeles para marcar las dos habitaciones (vea la figura en la parte superior de la columna siguiente). La longitud de la planta va a ser 30 pies mayor que el ancho, y se utilizará un total de 310 pies de cordel para marcar los cuartos. Calcule el ancho y largo de la planta.



Vea el ejercicio 32.

[3.5] Resuelva cada problema.

33. **Alberca** Corey Christensen va a llenar una alberca con una manguera. Después de 3.5 horas, la alberca contiene un volumen de 105 galones. Encuentre la tasa de flujo del agua.
34. **Maratonista** Dave Morris terminó el maratón de Boston de 26 millas en 4 horas. Encuentre su velocidad promedio.
35. **Trote** Dos corredores siguen la misma ruta. Harold Lowe corre a 8 kilómetros por hora, y Susan Karney Fackert lo hace a 6 kilómetros por hora. Si salen juntos, ¿cuánto tiempo pasará para que estén separados por una distancia de 4 kilómetros?
36. **Salida de trenes** Dos trenes que van en direcciones opuestas salen de la misma estación por vías paralelas. Uno de ellos viaja a 50 millas por hora, y el otro a 60 millas por hora. ¿Cuánto tiempo pasará para que los trenes estén separados 440 millas?
37. **Pittsburgh Incline** En la foto se muestra el Duquesne Incline, en Pittsburgh, Pennsylvania. Los dos carros comienzan al mismo tiempo en extremos opuestos de la cuesta y se mueven uno hacia el otro a la misma velocidad. La longitud de la cuesta es de 400 pies, y el tiempo que lleva a los carros llegar al punto medio es de 22.73 segundos. Determine la velocidad a que viajan los vehículos, en pies por segundo.



38. **Cuentas de ahorros** Tatiana desea colocar una parte de \$12,000 en una cuenta de ahorros que paga 8% de interés simple, y otra parte en otra cuenta que da el  $7\frac{1}{4}\%$  de interés simple. ¿Cuánto debe invertir en cada cuenta si quiere ganar \$900 de intereses en el año?
39. **Cuentas de ahorros** Aimee Tait invierte \$4,000 en dos cuentas de ahorros. Una de ellas paga 3% de interés simple, y la otra 3.5% de interés simple. Si el interés que se ganó en la cuenta que da el 3.5% es de \$94.50 más que el que paga la otra, ¿cuánto se invirtió en cada cuenta?

40. **Ponche Holiday** Marcie Waderman va a tener fiesta en casa. Preparó 2 galones de una solución que contiene 2% de alcohol. ¿Cuánta bebida pura debe agregar Marcie a la bebida a fin de reducir el nivel de alcohol a 1.5%?
41. **Campanas de viento** Alan Carmell hace y vende campanas de viento. Fabrica dos tipos, uno pequeño que vende a \$8 y otro grande que vende a \$20. En una exposición de artesanías vende un total de 30 unidades, y sus ingresos totales fueron de \$492. ¿Cuántas campanas de cada tipo vendió?
42. **Solución ácida** Bruce Kennan, químico, desea elaborar 2 litros de una solución ácida al 8%, por medio de mezclar una solución ácida al 10% y otra al 5%. ¿Cuántos litros debe usar de cada una?
49. **Centros de copiado** Dos centros de copiado, uno frente a otro en la misma calle, compiten por el negocio y los dos tienen ofertas especiales. Con el plan de Copy King, por una tarifa de \$20 al mes, cada copia que se haga en el mes en cuestión costaría sólo 4 centavos. King Kopie cobra una cuota mensual de \$25 más 3 centavos por copia. ¿Cuántas serían las copias que se hiciera en un mes y que dieran como resultado que ambos centros cobraran la misma cantidad?
50. **Nadar en el mar** Las hermanas Kathy y Chris Walter deciden nadar en el mar desde un bote. Kathy comienza a nadar dos minutos antes de Chris y promedia 50 pies por minuto. Cuando Chris empieza a nadar, promedia 60 pies por minuto.
- a) ¿En cuánto tiempo se reunirán después de que Chris comenzó a nadar?
- b) ¿Qué tan lejos estarán del bote cuando se reúnan?

[3.1–3.5] Resuelva cada problema.

43. **Números** La suma de dos enteros impares es 208. Encuentre cuáles son.
44. **Televisión** ¿Cuál es el costo de un equipo de televisión antes de impuestos, si el costo total es de \$477, que incluye un impuesto de 6%?
45. **Suministros médicos** El sr. Chang vende suministros médicos. Recibe un salario semanal de \$300 más una comisión de 5% sobre las ventas que realiza. Si el sr. Chang ganó \$900 la última semana, ¿cuáles fueron sus ventas en pesos?
46. **Triángulo** Un ángulo de un triángulo es  $8^\circ$  mayor que el ángulo más pequeño. El tercer ángulo es  $4^\circ$  mayor que lo doble del más chico. Calcule la medida de los tres ángulos de la figura.
47. **Equipo en crecimiento** La Darchelle Leggett Company planea incrementar su número de empleados en 25 por año. Si ahora la compañía tiene 427 trabajadores, ¿cuánto tiempo pasará antes de que tenga 627?
48. **Paralelogramo** Cada uno de los dos ángulos mayores de un paralelogramo mide  $40^\circ$  más que los dos más pequeños. Encuentre la medida de los cuatro ángulos.
51. **Carnicero** Un carnicero combina un bistec que cuesta \$3.50 por libra con otro cuyo costo es de \$4.10 por libra. ¿Cuántas libras de cada uno usaría para elaborar 80 libras de una mezcla que vende a \$3.65 por libra?
52. **Velocidad de recorrido** Dos hermanos que se encuentran separados por 230 millas comienzan a manejar uno en dirección del otro al mismo tiempo. El más joven viaja 5 millas por hora más rápido que el mayor, y se encuentran después de 2 horas. Calcule la velocidad a que viajó cada hermano.
53. **Solución ácida** ¿Cuántos litros de una solución ácida al 30% debe mezclarse con 2 litros de otra al 12% para obtener una tercera al 15%?



## Examen de práctica del capítulo

1. **Interés simple** Liz Wood recibió un préstamo de \$12,000 a 3 años con interés simple. Si el interés que pagó fue de \$3240, encuentre la tasa de interés (emplee  $i = prt$ ).
2. Utilice  $P = 2l + 2a$  para encontrar  $P$  cuando  $l = 6$  pies y  $a = 3$  pies.
3. Emplee  $A = P + Prt$  para calcular  $A$  si  $P = 100$ ,  $r = 0.15$  y  $t = 3$ .
4. Use  $A = \frac{m + n}{2}$  para hallar  $n$  cuando  $A = 79$  y  $m = 73$  pies.
5. Utilice  $P = 2\pi r$  para hallar  $r$  si  $P = 50$ .
6. a) Despeje  $y$  de la fórmula  $4x = 3y + 9$ .  
b) Encuentre  $y$  cuando  $x = 12$ .

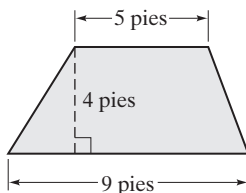


En los ejercicios 7 y 8, resuelva para la variable que se indica.

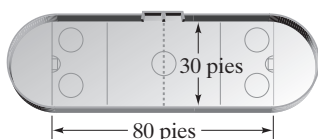
7.  $P = IR$ , para  $R$

8.  $A = \frac{a + b}{3}$ , para  $a$

9. Encuentre el área del trapecio que se muestra.



10. Halle la superficie de la pista de patinaje que se ilustra. Los extremos de ella son semicírculos.



11. **Dinero** Se dividieron \$500 entre Boris y Monique. Si ella recibió  $n$  pesos, escriba una expresión para la cantidad que recibió Boris.

12. **Restaurantes** El dinero que Sally Sestini ganó en un año en su segundo restaurante fue \$6,000 más que lo doble que ganó en el primero,  $f$ . Escriba una expresión para lo que ganó Sally en su segundo restaurante.

13. Expresé  $x + (x + 4) = 9$  como enunciado verbal.

En los ejercicios 14 a 25, planteé una ecuación, resuélvala y responda la pregunta que se haga.

14. **Enteros** La suma de dos enteros es 158. Encuéntrelos si el mayor es 10 menos que lo doble del pequeño.

15. **Enteros consecutivos** La suma de dos enteros consecutivos es 43. Diga cuáles son.

16. **Mobiliario de jardín** Tim Kent compró un juego de mobiliario de jardín. El costo, incluido 6% de impuesto, fue de \$2650. Encuentre el costo del mobiliario antes de impuestos.

17. **Comida fuera** Mark Sullivan sólo tiene \$40. Quiere dejar una propina de 15% y debe pagar un impuesto de 7%. Encuentre el precio de la comida más cara que podría ordenar.

18. **Negocio conjunto** Dos amigos forman un negocio de mucho éxito. Como Julie Burgmeier invirtió lo doble que Pe-

ter Ancona, recibe lo doble de utilidades que éste. Si la utilidad para el año fue de \$120,000, ¿cuánto recibirá cada uno?

19. **Quitanieves** William Echols va a contratar un servicio para que retire la nieve de su camino siempre que haya 3 pulgadas o más de ella. Elizabeth Suco ofrece un servicio que cobra una tarifa anual de \$80, más \$5 cada vez que limpie. Por el mismo servicio, Jon Wilkins cobra una tarifa anual de \$50 más \$10 cada vez que la quite. ¿Cuántas veces es necesario retirar la nieve para que el costo de ambos planes sea el mismo?



20. **Hipotecas** Mike y Beverly Zwick consideran dos bancos para pedir una hipoteca: el Bank of Washington y el First Trust. Con el Bank of Washington, su pago hipotecario mensual sería de \$980 más \$1,500 de cuotas. Con el First Trust, su pago hipotecario mensual sería de \$1,025, pero no hay cuotas adicionales. ¿Cuánto tiempo tomaría para que la cantidad total que se pagara fuera la misma con ambos bancos?

21. **Triángulo** Un triángulo tiene un perímetro de 75 pulgadas. Encuentre los tres lados si uno de ellos es 15 pulgadas más largo que el más pequeño, y el tercero mide lo doble que el más chico.

22. **Bandera estadounidense** La bandera estadounidense de Kim Martino tiene un perímetro de 28 pies. Encuentre las dimensiones de la bandera si la longitud es 4 pies menor que lo doble del ancho.

23. **Tendido de cable** Ellis y Harlene Matza cavan una zanja superficial de 67.2 pies de largo, a fin de tender un cable eléctrico para una reparación de una luz exterior que acaban de instalar. Comienzan a cavar al mismo tiempo en los extremos opuestos de la zanja, y avanzan uno hacia el otro. Ellis cava a razón de 0.2 pies por minuto más rápido que Harlene, y se encuentran después de 84 minutos. Calcule la velocidad a que cavó cada uno.

24. **Dulces a granel** Una tienda vende dulces a granel. En una tina está la marca Jelly Belly, que se vende a \$2.20 por libra, y en otra se encuentra Kits, que se vende a \$2.75 por libra. ¿Qué cantidad de cada tipo debe mezclarse para obtener una mezcla de 3 libras, que se venda a \$2.40 por libra?

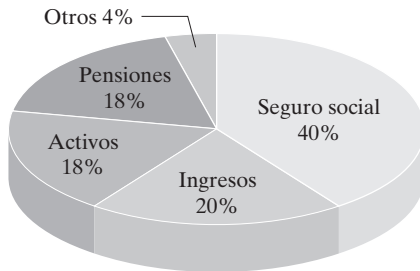
25. **Solución salina** ¿Cuántos litros de solución salina al 20% debe agregarse a 60 litros de solución salina al 40%, para obtener otra que tenga 35% de sal?

## Examen de repaso acumulativo

Resuelva el examen siguiente y revise sus respuestas con las que se encuentran al final de éste. Repase cualesquiera preguntas que responda en forma incorrecta. La sección y el objetivo en que el material se cubrió se indica después de la respuesta.

1. **Seguridad social** La gráfica circular siguiente muestra lo que recibe un jubilado común de la seguridad social, como porcentaje de su ingreso total.

**De dónde obtienen sus ingresos los pensionados de la seguridad social**

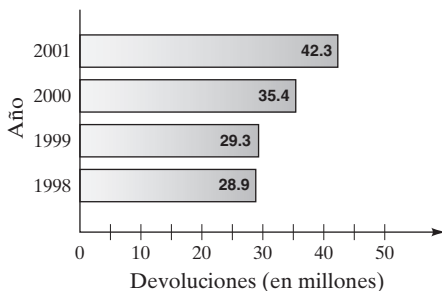


Fuente: Newsweek

Si Emily recibe \$40,000 por año, y su ingreso es el normal de todos los beneficiarios de la seguridad social, ¿cuánto recibe por ésta?

2. **Llenado electrónico** Cada año, más y más personas declaran sus impuestos por vía electrónica. La gráfica siguiente muestra el incremento en el número de formas fiscales que se llena de manera electrónica, entre 1998 y 2001.

**Devoluciones de impuestos que se llena en forma electrónica**



Fuente: Internal Revenue Service

En los ejercicios 10 a 12, resuelva la ecuación.

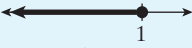
10.  $4x - 6 = x + 12$
11.  $6r = 2(r + 3) - (r + 5)$
12.  $2(x + 5) = 3(2x - 4) - 4x$
13. **Gasolina necesaria** Si el carro de Lisa Shough puede recorrer 50 millas con 2 galones de gasolina, ¿cuántos necesitará para viajar 225 millas?
14. Resuelva la desigualdad  $3x - 4 \leq -1$  y grafique la solución en una recta numérica.
15. Si  $A = \pi r^2$ , encuentre el valor de  $A$  cuando  $r = 6$ .
16. Considere la ecuación  $4x + 8y = 16$ .
- a) Despeje  $y$ .
- b) Encuentre el valor de  $y$  si  $x = -4$ .
17. Despeje  $a$  de la fórmula  $P = 2l + 2a$ .
18. **Suma de números** La suma de dos números es 29. Encuentre cuáles son si el mayor es 11 más que lo doble del pequeño.
- a) ¿Cuántas formas fiscales más se llenaron de manera electrónica en 2001 que en 2000?
- b) ¿Cuántas veces fue más grande el número de formas fiscales que se llenó electrónicamente en 2001 que en 2000?
3. **Niveles de dióxido de carbono** David Warner, ambientalista, revisa el nivel de dióxido de carbono en el aire. En cinco lecturas obtuvo los resultados siguientes.

Muestra	Dióxido de carbono (partes por millón)
1	5
2	6
3	8
4	12
5	5

- a) Calcule el nivel medio de dióxido de carbono que se detectó.
- b) Encuentre la mediana del nivel que se detectó de dióxido de carbono.
4. Evalúe la expresión  $\frac{5}{12} \div \frac{3}{4}$ .
5. ¿Cuánto más grande es  $\frac{2}{3}$  pulg. que  $\frac{3}{8}$  de pulg.?
6. a) Enliste el conjunto de números naturales.  
b) Enliste el conjunto de números completos.  
c) ¿Qué es un número racional?
7. a) Evalúe  $|-9|$ .  
b) ¿Qué número valor absoluto es más grande,  $|-5|$  o  $|-3|$ ? Explique.
8. Evalúe  $2 - 6^2 \div 2 \cdot 2$ .
9. Simplifique  $4(2x - 3) - 2(3x + 5) - 6$ .

- 19. Plan de llamadas** Lori Sypher considera dos planes de telefonía celular. El plan A tiene un cargo mensual de \$19.95 más 35 centavos por minuto. El plan B tiene un cargo mensual de \$29.95 más 10 centavos por minuto. ¿Cuánto tiempo necesitaría hablar Lori en un mes para que los dos planes tuvieran el mismo costo total?
- 20. Cuadrilátero** Un ángulo de un cuadrilátero mide  $5^\circ$  más que el ángulo más pequeño; el tercero mide  $50^\circ$  más que el más chico; y el cuarto mide  $25^\circ$  más que el cuádruplo del ángulo más pequeño. Encuentre la medida de cada ángulo del cuadrilátero.

### Respuestas al examen de repaso acumulativo

- 1.** \$16,000 [Sec. 1.2, Obj. 2]   **2. a)** 6.9 millones   **b)**  $\approx 1.19$  [Sec. 1.2, Obj. 2]   **3. a)** 7.2 partes por millón   **b)** 6 partes por millón [Sec. 1.2, Obj. 3]   **4.**  $\frac{5}{9}$  [Sec. 1.3, Obj. 4]   **5.**  $\frac{7}{24}$  pulg [Sec. 1.3, Obj. 5]   **6. a)**  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$    **b)**  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$   
**c)** un cociente de dos enteros en el que el denominador es distinto de cero [Sec. 1.4, Obj. 1]   **7. a)** 9   **b)**  $|-5|$  [Sec. 1.5, Obj. 2]   **8.**  $-34$  [Sec. 1.9, Obj. 5]   **9.**  $2x - 28$  [Sec. 2.1, Obj. 6]   **10.** 6 [Sec. 2.5, Obj. 1]   **11.**  $\frac{1}{5}$  [Sec. 2.5, Obj. 1]   **12.** No tiene solución [Sec. 2.5, Obj. 3]   **13.** 9 galones [Sec. 2.6, Obj. 3]   **14.**  $x \leq 1$ ,  [Sec. 2.7, Obj. 1]   **15.**  $\approx 113.10$  [Sec. 3.1, Obj. 2]   **16. a)**  $y = -\frac{1}{2}x + 2$    **b)** 4 [Sec. 3.1, Obj. 2]   **17.**  $a = \frac{P - 2l}{2}$  [Sec. 3.1, Obj. 3]   **18.** 6, 23 [Sec. 3.3, Obj. 2]   **19.** 40 minutos [Sec. 3.3, Obj. 3]   **20.**  $40^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 185^\circ$  [Sec. 3.4, Obj. 1]

# Capítulo 4

---

## Exponentes y polinomios



- 4.1 Exponentes
- 4.2 Exponentes negativos
- 4.3 Notación científica
- 4.4 Suma y resta de polinomios
- 4.5 Multiplicación de polinomios
- 4.6 División de polinomios

Resumen del capítulo  
Ejercicios de repaso del capítulo  
Examen de práctica del capítulo  
Examen de repaso acumulativo

**E**n la mayoría de las áreas de la ciencia y tecnología trabajamos con números muy pequeños o muy grandes. Cotidianamente escuchamos más y más terminología mencionando cantidades pequeñas y grandes. Por ejemplo, nuestra computadora tiene un disco duro de 40 gigabytes, y expresamos el tiempo que tarda en realizar los cálculos en microsegundos. La notación científica es una forma práctica de trabajar con cantidades pequeñas o grandes. En el ejercicio 85 de la página 270 le pedimos que utilice notación científica para determinar cuánto tiempo tardará la luz del sol en llegar a la tierra, dada la distancia entre los dos y la velocidad a que viaja la luz.



## Avance de la lección

En este capítulo estudiaremos los exponentes y polinomios. En las secciones 4.1 y 4.2 analizaremos las reglas de los exponentes. En la sección 4.3, al estudiar la notación científica, emplearemos dichas reglas para resolver problemas de la vida real que involucran números muy grandes o muy pequeños. El conocimiento de la notación científica también le ayudará en sus cursos de ciencias y otros.

En las secciones 4.4 a 4.6, explicamos cómo sumar, restar, multiplicar y dividir polinomios. Para tener éxito con ese material, debe entender las reglas de los exponentes que presentamos en las primeras dos secciones del capítulo. *Para comprender la factorización, que se expone en el capítulo 5, necesitamos entender los polinomios, en especial su multiplicación.* Como veremos, factorizar polinomios es lo inverso de multiplicarlos. En todo el libro trabajamos con polinomios.

### 4.1 EXPONENTES



- 1 Repasar los conceptos básicos de los exponentes.
- 2 Aprender las reglas de los exponentes.
- 3 Simplificar una expresión antes de utilizar la regla de la potencia expandida.

#### 1 Repasar los conceptos básicos de los exponentes

Para utilizar los polinomios necesitamos ampliar nuestro conocimiento de los exponentes que presentamos en la sección 1.9. Revisemos los conceptos fundamentales en la expresión  $x^n$ , denominamos **base** a la  $x$ , y a la  $n$ , **exponente**.  $x^n$  se lee “ $x$  elevada a la  $n$ -ésima potencia”.

$$x^2 = \underbrace{x \cdot x}$$

2 factores de  $x$

$$x^4 = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x}$$

4 factores de  $x$

$$x^m = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}$$

$m$  factores de  $x$

**EJEMPLO 1** Escribir  $xxxxxyyy$  utilizando exponentes.

**Solución**

$$\underbrace{xxxx}_4 \text{ factores de } x \quad \underbrace{yyy}_3 \text{ factores de } y = x^4 y^3$$



Recuerde que cuando un término contiene una variable sin coeficiente numérico, suponemos que éste es igual a 1. Por ejemplo  $x = 1x$  y  $x^2y = 1x^2y$ .

También recuerde que cuando una variable o un valor numérico no tienen exponente, suponemos que dicho exponente es 1. Por ejemplo,  $x = x^1$ ,  $xy = x^1y^1$ ,  $x^2y = x^2y^1$  y  $2xy^2 = 2^1x^1y^2$ .

## 2 Aprender las reglas de los exponentes

Ahora aprenderemos las reglas de los exponentes.

**EJEMPLO 2** Multiplicar  $x^4 \cdot x^3$ .

**Solución**

$$\underbrace{x^4}_{x \cdot x \cdot x \cdot x} \cdot \underbrace{x^3}_{x \cdot x \cdot x} = x^7$$



En el ejemplo 2 mostramos que al multiplicar expresiones que tienen la misma base, ésta se conserva y *sumamos* los exponentes. Veamos la **regla del producto para los exponentes**.

### Regla del producto para los exponentes

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

En el ejemplo 2, demostramos que  $x^4 \cdot x^3 = x^7$ . Este problema también hubiera podido resolverse mediante la regla del producto:  $x^4 \cdot x^3 = x^{4+3} = x^7$ .

**EJEMPLO 3** Multiplique cada expresión usando la regla del producto.

**a)**  $3^2 \cdot 3$       **b)**  $2^4 \cdot 2^2$       **c)**  $x \cdot x^4$       **d)**  $x^3 \cdot x^6$       **e)**  $y^4 \cdot y^7$

**Solución**

**a)**  $3^2 \cdot 3 = 3^2 \cdot 3^1 = 3^{2+1} = 3^3$  o 27      **b)**  $2^4 \cdot 2^2 = 2^{4+2} = 2^6$  o 64

**c)**  $x \cdot x^4 = x^1 \cdot x^4 = x^{1+4} = x^5$       **d)**  $x^3 \cdot x^6 = x^{3+6} = x^9$

**e)**  $y^4 \cdot y^7 = y^{4+7} = y^{11}$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 17



### CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Observe que en el ejemplo 3a) tenemos que  $3^2 \cdot 3^1$  es igual a  $3^3$  y no  $9^3$ . Al multiplicar potencias de la misma base, *no multiplicamos las bases*.

CORRECTO

$$3^2 \cdot 3^1 = 3^3$$

INCORRECTO

$$\cancel{3^2} \cdot \cancel{3^1} = 9^3$$

El ejemplo 4 le ayudará a comprender la **regla del cociente para exponentes**.

**EJEMPLO 4** Dividir  $x^5 \div x^3$ .

**Solución**

$$\frac{x^5}{x^3} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot x}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}} = \frac{1x^2}{1} = x^2$$



Al dividir expresiones con la misma base, conservamos ésta y restamos el exponente del denominador del exponente del numerador.

### Regla del cociente para exponentes

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, \quad x \neq 0$$

En el ejemplo 4 demostramos que  $x^5/x^3 = x^2$ . Este problema también hubiera podido resolverse mediante la regla del cociente:  $x^5/x^3 = x^{5-3} = x^2$ .

**EJEMPLO 5** Dividir cada expresión de acuerdo con la regla del cociente.

a)  $\frac{3^5}{3^2}$       b)  $\frac{6^4}{6}$       c)  $\frac{x^{12}}{x^5}$       d)  $\frac{y^{10}}{y^8}$       e)  $\frac{z^8}{z}$

**Solución** a)  $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$  o 27      b)  $\frac{6^4}{6} = \frac{6^4}{6^1} = 6^{4-1} = 6^3$  o 216

c)  $\frac{x^{12}}{x^5} = x^{12-5} = x^7$       d)  $\frac{y^{10}}{y^8} = y^{10-8} = y^2$

e)  $\frac{z^8}{z} = \frac{z^8}{z^1} = z^{8-1} = z^7$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 23



**CÓMO EVITAR  
ERRORES COMUNES**

Observe que en el ejemplo 5a) tenemos que  $3^5/3^2$  es  $3^3$  y no  $1^3$ . Al dividir potencias con la misma base, *no se dividen las bases*.

CORRECTO

$$\frac{3^5}{3^2} = 3^3 \text{ o } 9$$

INCORRECTO

~~$$\frac{3^3}{3^1} = 1^2$$~~

La respuesta al ejemplo 5c),  $x^{12}/x^5$  es  $x^7$ . Obtuvimos esta respuesta mediante la regla del cociente. También puede resolverse dividiendo los factores comunes del numerador entre los del denominador, así:

$$\frac{x^{12}}{x^5} = \frac{(x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x) \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{(x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x)} = x^7$$

Dividimos entre el producto de las cinco  $x$ , que es  $x^5$ . Indicamos este proceso en forma abreviada del siguiente modo.

$$\frac{x^{12}}{x^5} = \frac{x^5 \cdot x^7}{x^5} = x^7$$

En esta sección, para simplificar una expresión cuando el numerador y el denominador tienen la misma base y el exponente del denominador es mayor que el del numerador, dividimos los factores comunes. Por ejemplo, simplificamos  $x^5/x^{12}$  con la división del factor común,  $x^5$ , como sigue.

$$\frac{x^5}{x^{12}} = \frac{x^5}{x^5 \cdot x^7} = \frac{1}{x^7}$$

Ahora simplificaremos algunas expresiones dividiendo los factores comunes.

**EJEMPLO 6** Simplificar dividiendo un factor común tanto del numerador como del denominador.

a)  $\frac{x^9}{x^{12}}$       b)  $\frac{y^4}{y^9}$

**Solución** a) Como el numerador es  $x^9$ , el denominador se escribe como factor de  $x^9$ . Como  $x^9 \cdot x^3 = x^{12}$ , se reescribe  $x^{12}$  como  $x^9 \cdot x^3$ .

$$\frac{x^9}{x^{12}} = \frac{x^9}{x^9 \cdot x^3} = \frac{1}{x^3}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 27

b)  $\frac{y^4}{y^9} = \frac{y^4}{y^4 \cdot y^5} = \frac{1}{y^5}$



En la siguiente sección mostraremos otra forma de evaluar expresiones como  $\frac{x^9}{x^{12}}$  mediante la regla del exponente negativo.

El ejemplo 7 nos conduce a otra regla, la **regla del exponente cero**.


**EJEMPLO 7** Dividir  $\frac{x^3}{x^3}$ .

**Solución** Según la regla del cociente,

$$\frac{x^3}{x^3} = x^{3-3} = x^0$$

Sin embargo,

$$\frac{x^3}{x^3} = \frac{1x^3}{1x^3} = \frac{1 \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}}{1 \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

Como  $x^3/x^3 = x^0$  y  $x^3/x^3 = 1$ , entonces  $x^0$  debe ser igual a 1. 

### Regla del exponente cero

$$x^0 = 1, \quad x \neq 0$$

Según la regla del exponente cero, cualquier número real, excepto 0, elevado a la potencia cero es igual a 1. Obsérvese que  $0^0$  no está definida.

**EJEMPLO 8** Simplifique cada expresión. Suponga que  $x \neq 0$ .

a)  $3^0$       b)  $x^0$       c)  $3x^0$       d)  $(3x)^0$       e)  $4x^2y^3z^0$


**Solución**

a)  $3^0 = 1$

b)  $x^0 = 1$

c)  $3x^0 = 3(x^0)$   
 $= 3 \cdot 1 = 3$  *Recuerde que el exponente afecta sólo al símbolo que lo precede inmediatamente, a menos que emplee paréntesis.*

d)  $(3x)^0 = 1$

e)  $4x^2y^3z^0 = 4x^2y^3 \cdot 1 = 4x^2y^3$  

### CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Una expresión elevada a la potencia cero no es igual a 0; es igual a 1.

**CORRECTO**

$$x^0 = 1$$

$$5^0 = 1$$

**INCORRECTO**

~~$$x^0 = 0$$~~

~~$$5^0 = 0$$~~

Explicaremos la **regla de la potencia** con ayuda del ejemplo 9.

**EJEMPLO 9** Simplifique  $(x^3)^2$ .

**Solución**

$$(x^3)^2 = \underbrace{x^3 \cdot x^3}_{2 \text{ factores de } x^3} = x^{3+3} = x^6$$





**Regla de la potencia para los exponentes**

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$$

La regla de la potencia indica que cuando una expresión que ya está elevada a una potencia es elevada a otra potencia, se conserva la base y *se multiplican* los exponentes. El ejemplo 9 también hubiera podido simplificarse con el empleo de la regla de la potencia:  $(x^3)^2 = x^{3 \cdot 2} = x^6$ .

**EJEMPLO 10**

Simplificar. **a)**  $(x^3)^5$       **b)**  $(3^4)^2$       **c)**  $(y^5)^7$

**Solución**

**a)**  $(x^3)^5 = x^{3 \cdot 5} = x^{15}$       **b)**  $(3^4)^2 = 3^{4 \cdot 2} = 3^8$       **c)**  $(y^5)^7 = y^{5 \cdot 7} = y^{35}$  ✨

**SUGERENCIA**

Con frecuencia los estudiantes confunden las reglas del producto y de la potencia. Observe con cuidado la diferencia.

**Regla del producto**

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$$

**Regla de la potencia**

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$$

$$(2^3)^5 = 2^{3 \cdot 5} = 2^{15}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 51

El ejemplo 11 será útil para explicar la **regla de la potencia expandida**. Como el nombre sugiere, ésta es una expansión de la regla de la potencia.

**EJEMPLO 11**

Simplificar  $\left(\frac{ax}{by}\right)^4$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} \left(\frac{ax}{by}\right)^4 &= \frac{ax}{by} \cdot \frac{ax}{by} \cdot \frac{ax}{by} \cdot \frac{ax}{by} \\ &= \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y} = \frac{a^4 \cdot x^4}{b^4 \cdot y^4} = \frac{a^4 x^4}{b^4 y^4} \end{aligned}$$
 ✨

**Regla de la potencia expandida para exponentes**

$$\left(\frac{ax}{by}\right)^m = \frac{a^m x^m}{b^m y^m}, \quad b \neq 0, y \neq 0$$

La regla de la potencia expandida indica que elevamos cada factor dentro del paréntesis a la potencia indicada fuera de éste cuando simplificamos la expresión.

**EJEMPLO 12**

Simplifique cada expresión.

**a)**  $(4x)^2$       **b)**  $(-x)^3$       **c)**  $(5xy)^3$       **d)**  $\left(\frac{-3y}{2z}\right)^2$

**Solución**

**a)**  $(4x)^2 = 4^2 x^2 = 16x^2$       **b)**  $(-x)^3 = (-1x)^3 = (-1)^3 x^3 = -1x^3 = -x^3$   
**c)**  $(5xy)^3 = 5^3 x^3 y^3 = 125x^3 y^3$       **d)**  $\left(\frac{-3y}{2z}\right)^2 = \frac{(-3)^2 y^2}{2^2 z^2} = \frac{9y^2}{4z^2}$  ✨

**3 Simplificar una expresión antes de utilizar la regla de la potencia expandida**

Siempre que tengamos una expresión elevada a una potencia, es útil simplificar lo que esté dentro del paréntesis antes de emplear la regla de la potencia expandida. Ilustramos este procedimiento en los ejemplos 13 y 14.

**EJEMPLO 13** Simplificar  $\left(\frac{9x^3y^2}{3xy^2}\right)^3$ .

**Solución** En primer lugar simplificamos la expresión dentro del paréntesis, dividiendo los factores comunes.

$$\left(\frac{9x^3y^2}{3xy^2}\right)^3 = \left(\frac{9}{3} \cdot \frac{x^3}{x} \cdot \frac{y^2}{y^2}\right)^3 = (3x^2)^3$$

Ahora utilizamos la regla de la potencia expandida para terminar.

$$(3x^2)^3 = 3^3(x^2)^3 = 27x^6$$

Por tanto,  $\left(\frac{9x^3y^2}{3xy^2}\right)^3 = 27x^6$ .



### SUGERENCIA

#### CONSEJO PARA ESTUDIAR

Sea muy cuidadoso al escribir los exponentes. Por lo general son más pequeños que el resto del texto; tómese su tiempo, escríbalos con claridad y colóquelos en forma apropiada. Si no los escribimos con claridad es muy fácil confundir algunos de ellos, como 2 con 3, 1 con 4, o 0 con 6. Si escribimos o llevamos un exponente de un paso a otro de manera incorrecta, obtendremos una respuesta equivocada.

**EJEMPLO 14** Simplificar  $\left(\frac{25x^4y^3}{5x^2y^7}\right)^4$ .

**Solución** Comenzamos por simplificar la expresión dentro del paréntesis.

$$\left(\frac{25x^4y^3}{5x^2y^7}\right)^4 = \left(\frac{25}{5} \cdot \frac{x^4}{x^2} \cdot \frac{y^3}{y^7}\right)^4 = \left(\frac{5x^2}{y^4}\right)^4$$

Ahora utilizamos la regla de la potencia expandida para terminar.

$$\left(\frac{5x^2}{y^4}\right)^4 = \frac{5^4(x^2)^4}{(y^4)^4} = \frac{625x^8}{y^{16}}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 91

Por tanto,  $\left(\frac{25x^4y^3}{5x^2y^7}\right)^4 = \frac{625x^8}{y^{16}}$ .



### CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

En ocasiones los estudiantes comenten errores al simplificar expresiones que contienen exponentes. Uno de los más comunes es el siguiente. Estúdielo con cuidado para asegurarse de no cometerlo.

#### CORRECTO

$$\frac{4}{2x} = \frac{\frac{2}{1} \cdot 4}{\frac{2}{1} \cdot x} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{x}{xy} = \frac{\frac{1}{1} \cdot x}{\frac{1}{1} \cdot xy} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{5x^3y^2}{y^2} = \frac{5x^3 \cdot \frac{1}{1} y^2}{\frac{1}{1} y^2} = 5x^3$$

#### INCORRECTO

~~$$\frac{4}{x+2} = \frac{\frac{2}{1} \cdot 4}{\frac{2}{1} \cdot (x+2)} = \frac{2}{x+1}$$~~

~~$$\frac{x}{x+y} = \frac{\frac{1}{1} \cdot x}{\frac{1}{1} \cdot (x+y)} = \frac{1}{1+y}$$~~

~~$$\frac{5x^3+y^2}{y^2} = \frac{5x^3 + \frac{1}{1} y^2}{\frac{1}{1} y^2} = 5x^3 + 1$$~~

(continúa en la página siguiente)

Las simplificaciones del lado derecho no son correctas porque sólo los *factores* comunes se pueden dividir (recuerde que los factores se multiplican entre sí). En el primer denominador de la derecha,  $x + 2$ , la  $x$  y el 2 son términos, no factores, puesto que se están sumando. En forma similar, en el segundo denominador,  $x + y$ , la  $x$  y la  $y$  son términos y no factores, ya que se están sumando. Asimismo, en el numerador  $5x^3 + y^2$ , el  $5x^3$  y la  $y^2$  son términos, no factores. No es posible dividir ningún factor común en las fracciones del lado derecho.

### EJEMPLO 15 Simplificar $(3y^3z^2)^4(2y^4z)$

**Solución** En primer lugar simplificamos  $(3y^3z^2)^4$  por medio de la regla de la potencia expandida.

$$(3y^3z^2)^4 = 3^4 y^{3 \cdot 4} z^{2 \cdot 4} = 81y^{12}z^8$$

Ahora empleamos la regla del producto para simplificar aún más.

$$\begin{aligned} (3y^3z^2)^4(2y^4z) &= (81y^{12}z^8)(2y^4z^1) \\ &= 81 \cdot 2 \cdot y^{12} \cdot y^4 \cdot z^8 \cdot z^1 \\ &= 162y^{12+4}z^{8+1} \\ &= 162y^{16}z^9 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 125

Por tanto,  $(3y^3z^2)^4(2y^4z) = 162y^{16}z^9$ .



### Resumen de las reglas de los exponentes que presentamos en esta sección

- |   |                                       |
|---|---------------------------------------|
| 1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$  | <b>Regla del producto</b>             |
| 2. $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, \quad x \neq 0$  | <b>Regla del cociente</b>             |
| 3. $x^0 = 1, \quad x \neq 0$  | <b>Regla del exponente cero</b>       |
| 4. $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$  | <b>Regla de la potencia</b>           |
| 5. $\left(\frac{ax}{by}\right)^m = \frac{a^m x^m}{b^m y^m}, \quad b \neq 0, \quad y \neq 0$ | <b>Regla de la potencia expandida</b> |

## Conjunto de ejercicios 4.1

### Ejercicios conceptuales

1. En la expresión exponencial  $c^r$ , ¿cómo se denomina a la  $c$ ?, ¿cuál es el nombre de la  $r$ ?
2. a) Escriba la regla del producto para exponentes.  
b) Explique con sus propias palabras la regla del producto.
3. a) Escriba la regla del cociente para exponentes.  
b) Con sus propias palabras, explique la regla del cociente.
4. a) Escriba la regla del exponente cero.  
b) Con sus propias palabras, explique la regla del exponente cero.
5. a) Escriba la regla de la potencia para exponentes.  
b) Explique con sus propias palabras la regla de la potencia.
6. a) Escriba la regla de la potencia expandida para exponentes.  
b) Con sus propias palabras, explique la regla de la potencia expandida.
7. Para qué valor de  $x$  es  $x^0 \neq 1$ ?
8. Explique la diferencia entre la regla del producto y la de la potencia. Proporcione un ejemplo de cada uno.

## Práctica de habilidades

Simplifique las siguientes expresiones.

- |                     |                     |                     |                     |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 9. $x^5 \cdot x^4$  | 10. $x^6 \cdot x$   | 11. $z^4 \cdot z$   | 12. $x^4 \cdot x^2$ |
| 13. $3^2 \cdot 3^3$ | 14. $4^2 \cdot 4^3$ | 15. $y^3 \cdot y^2$ | 16. $x^3 \cdot x^4$ |
| 17. $z^3 \cdot z^5$ | 18. $2^2 \cdot 2^2$ | 19. $y^6 \cdot y$   | 20. $x^4 \cdot x^4$ |

Simplifique las siguientes expresiones.

- |                       |                       |                          |                          |
|-----------------------|-----------------------|--------------------------|--------------------------|
| 21. $\frac{6^2}{6}$   | 22. $\frac{x^4}{x^3}$ | 23. $\frac{x^{10}}{x^3}$ | 24. $\frac{y^5}{y}$      |
| 25. $\frac{3^5}{3^2}$ | 26. $\frac{4^5}{4^3}$ | 27. $\frac{y^4}{y^6}$    | 28. $\frac{a^7}{a^9}$    |
| 29. $\frac{c^4}{c^4}$ | 30. $\frac{3^4}{3^4}$ | 31. $\frac{a^3}{a^7}$    | 32. $\frac{x^9}{x^{13}}$ |

Simplifique las siguientes expresiones.

- |                |                 |                 |                       |
|----------------|-----------------|-----------------|-----------------------|
| 33. $x^0$      | 34. $5^0$       | 35. $3x^0$      | 36. $-4x^0$           |
| 37. $4(5d)^0$  | 38. $-2(4x)^0$  | 39. $-3(-4y)^0$ | 40. $-(-x)^0$         |
| 41. $5x^3yz^0$ | 42. $-5xy^2z^0$ | 43. $-5r(st)^0$ | 44. $-3(a^2b^5c^3)^0$ |

Simplifique las siguientes expresiones.

- |                 |                |                   |                   |
|-----------------|----------------|-------------------|-------------------|
| 45. $(x^4)^2$   | 46. $(x^5)^3$  | 47. $(x^5)^5$     | 48. $(y^5)^2$     |
| 49. $(x^3)^1$   | 50. $(x^3)^2$  | 51. $(x^4)^3$     | 52. $(x^5)^4$     |
| 53. $(n^6)^3$   | 54. $(2w^2)^3$ | 55. $(1.3x)^2$    | 56. $(-3x)^2$     |
| 57. $(-3x^3)^3$ | 58. $(xy)^4$   | 59. $(3a^2b^4)^3$ | 60. $(4x^3y^2)^3$ |

Simplifique las siguientes expresiones.

- |                                   |                                     |                                     |                                      |
|-----------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 61. $\left(\frac{x}{3}\right)^2$  | 62. $\left(\frac{2}{x}\right)^3$    | 63. $\left(\frac{y}{x}\right)^4$    | 64. $\left(\frac{3}{y}\right)^4$     |
| 65. $\left(\frac{6}{x}\right)^3$  | 66. $\left(\frac{4m}{n}\right)^3$   | 67. $\left(\frac{3x}{y}\right)^3$   | 68. $\left(\frac{3s}{t^2}\right)^2$  |
| 69. $\left(\frac{4p}{5}\right)^2$ | 70. $\left(\frac{3x^4}{y}\right)^3$ | 71. $\left(\frac{2y^3}{x}\right)^4$ | 72. $\left(\frac{-4x^2}{5}\right)^2$ |

Simplifique las siguientes expresiones.

- |                                  |                                      |                                    |                                      |
|----------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|
| 73. $\frac{x^6y}{xy^3}$          | 74. $\frac{x^3y^5}{x^7y}$            | 75. $\frac{10x^3y^8}{2xy^{10}}$    | 76. $\frac{5x^{12}y^2}{10xy^9}$      |
| 77. $\frac{3ab}{27a^3b^4}$       | 78. $\frac{30y^5z^3}{5yz^6}$         | 79. $\frac{35x^4y^9}{15x^9y^{12}}$ | 80. $\frac{6m^3n^9}{9m^7n^{12}}$     |
| 81. $-\frac{36xy^7z}{12x^4y^5z}$ | 82. $\frac{4x^4y^7z^3}{32x^5y^4z^9}$ | 83. $-\frac{6x^2y^7z}{3x^5y^9z^6}$ | 84. $-\frac{25x^4y^{10}}{30x^3y^7z}$ |

Simplifique las siguientes expresiones.

$$\begin{array}{llll}
 85. \left(\frac{10x^4}{5x^6}\right)^3 & 86. \left(\frac{4x^4}{8x^8}\right)^3 & 87. \left(\frac{6y^6}{2y^3}\right)^3 & 88. \left(\frac{25s^4t}{5s^6t^4}\right)^3 \\
 89. \left(\frac{9a^2b^4}{3a^7b^9}\right)^0 & 90. \left(\frac{16y^6}{24y^{10}}\right)^3 & 91. \left(\frac{x^4y^3}{x^2y^5}\right)^2 & 92. \left(\frac{2x^7y^2}{4xy}\right)^3 \\
 93. \left(\frac{9y^2z^7}{18y^9z}\right)^4 & 94. \left(\frac{y^7z^5}{y^8z^4}\right)^{10} & 95. \left(\frac{4xy^5}{y}\right)^3 & 96. \left(\frac{-64xy^6}{32xy^9}\right)^4
 \end{array}$$

Simplifique las siguientes expresiones.

$$\begin{array}{llll}
 97. (5xy^4)^2 & 98. (4ab^3)^3 & 99. (3ab^3)(b) & 100. (6xy^5)(3x^2y^4) \\
 101. (-2xy)(3xy) & 102. (-2x^4y^2)(5x^2y) & 103. (5x^2y)(3xy^5) & 104. (-5xy)(-2xy^6) \\
 105. (-3p^2q)^2(-p^2q) & 106. (2c^3d^2)^2(3cd)^0 & 107. (5r^3s^2)^2(5r^3s^4)^0 & 108. (3x^2)^4(2xy^5)
 \end{array}$$

Simplifique las siguientes expresiones.

$$\begin{array}{llll}
 109. (-x)^2 & 110. (2xy^4)^3 & 111. \left(\frac{x^5y^5}{xy^5}\right)^3 & 112. (2x^2y^5)(3x^5y^4)^3 \\
 113. (2.5x^3)^2 & 114. (-3a^2b^3c^4)^3 & 115. \frac{x^7y^2}{xy^6} & 116. (xy^4)(xy^4)^3 \\
 117. \left(-\frac{m^4}{n^3}\right)^3 & 118. \left(-\frac{12x}{16x^7y^2}\right)^2 & 119. (-6x^3y^2)^3 & 120. (3x^6y)^2(4xy^8) \\
 121. (-2x^4y^2z)^3 & 122. \left(\frac{x}{3}\right)^2 & 123. (9r^4s^5)^3 & 124. (5x^4z^{10})^2(2x^2z^8) \\
 125. (4x^2y)(3xy^2)^3 & 126. \frac{x^2y^6}{x^4y} & 127. (7.3x^2y^4)^2 & 128. \left(\frac{-3x^3}{4}\right)^3 \\
 129. (x^7y^5)(xy^2)^4 & 130. (4c^3d^2)(2c^5d^3)^2 & 131. \left(\frac{-x^4z^7}{x^2z^5}\right)^4 & 132. (x^4y^6)^3(3x^2y^5)
 \end{array}$$

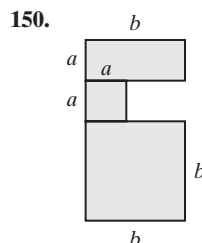
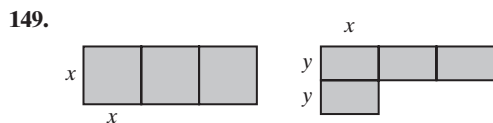
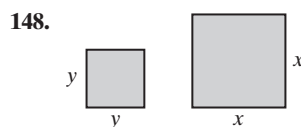
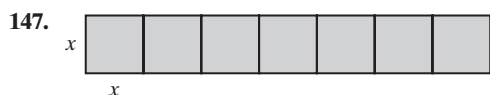
Estudie el recuadro de *Cómo evitar errores comunes de la página 247*. Simplifique las expresiones siguientes eliminando los factores comunes con una división. Si no fuera posible simplificar la expresión de este modo, indíquelo.

$$\begin{array}{llll}
 133. \frac{x+y}{x} & 134. \frac{xy}{x} & 135. \frac{y^2+3}{y} & 136. \frac{x+4}{2} \\
 137. \frac{6yz^4}{yz^2} & 138. \frac{a^2+b^2}{a^2} & 139. \frac{x}{x+1} & 140. \frac{x^4}{x^2y}
 \end{array}$$

## Solución de problemas

141. ¿Cuál es el valor de  $x^2y$ , si  $x = 4$  y  $y = 2$ ?
142. ¿Cuál es el valor de  $xy^2$ , si  $x = -3$  y  $y = -4$ ?
143. ¿Cuál es el valor de  $(xy)^0$ , si  $x = 2$  y  $y = 4$ ?
144. ¿Cuál es el valor de  $(xy)^0$ , si  $x = -5$  y  $y = 3$ ?
145. Considere la expresión  $(-x^5y^7)^9$ . Si utilizamos la regla de la potencia expandida para simplificar esta expresión, ¿el signo de la expresión simplificada será positivo o negativo? Explique cómo determinó su respuesta.
146. Considere la expresión  $(-9x^4y^6)^8$ . Si utilizamos la regla de la potencia expandida para simplificar la expresión, ¿el signo de la expresión simplificada será positivo o negativo? Explique cómo determinó su respuesta.

Escriba una expresión para calcular el área total de la figura o figuras que se muestran.



## Problemas de reto

Simplifique las siguientes expresiones.

151.  $\left(\frac{3x^4y^5}{6x^6y^8}\right)^3 \left(\frac{9x^7y^8}{3x^3y^5}\right)^2$

152.  $(3yz^2)^2 \left(\frac{2y^3z^5}{10y^6z^4}\right)^0 (4y^2z^3)^3$



## Actividad en grupo

Como grupo, estudien y resuelvan el ejercicio 153, de acuerdo con las instrucciones.

153. En la siguiente sección trabajaremos con exponentes negativos. Como preparación, utilice la expresión  $\frac{3^2}{3^3}$  para los incisos del **a)** al **c)**. Resuelva en forma individual los incisos **a)** a **d)**, después el **e)** como grupo.
- Elimine los factores comunes en el numerador y el denominador y determine el valor de la expresión.
  - Utilice la regla del cociente en la expresión dada y escriba los resultados.
  - Escriba un enunciado de igualdad empleando los incisos **a)** y **b)** anteriores.
  - Repita los incisos del **a)** al **c)** para la expresión  $\frac{2^3}{2^4}$ .
  - Como grupo, comparen las respuestas de los incisos **a)** a **d)**, y luego escriban una expresión exponencial para  $\frac{1}{x^m}$ .

## Ejercicios de repaso acumulativo

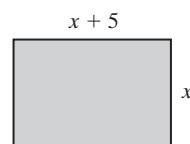
[1.9] 154. Evalúe la expresión  $3^4 \div 3^3 - (5 - 8) + 7$ .

[2.1] 155. Simplifique la expresión  $-4(x - 3) + 5x - 2$ .

[2.5] 156. Resuelva la ecuación

$$2(x + 4) - 3 = 5x + 4 - 3x + 1.$$

- [3.1] 157. **a)** Utilice la fórmula  $P = 2l + 2a$  para calcular la longitud de los lados del rectángulo que se muestra, si el perímetro del rectángulo mide 26 pulgadas.



- b)** Emplee la fórmula  $P = 2l + 2a$  para resolver la ecuación  $a$ .

## 4.2 EXPONENTES NEGATIVOS



- 1 Entender la regla del exponente negativo.
- 2 Simplificar expresiones que contienen exponentes negativos.

## 1 Entender la regla del exponente negativo

Una regla adicional que involucra a los exponentes, es la del exponente negativo. Necesitamos entender los exponentes negativos para tener éxito con la notación científica que estudiaremos en la siguiente sección.

Desarrollaremos la regla del exponente negativo por medio de la regla del cociente, que ilustramos en el ejemplo 1.

**EJEMPLO 1** Simplifique la expresión  $x^3/x^5$ , a) con la regla del cociente, y b) con la división de los factores comunes.

**Solución** a) Con la regla del cociente,

$$\frac{x^3}{x^5} = x^{3-5} = x^{-2}$$

b) Con la división de los factores comunes,

$$\frac{x^3}{x^5} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x^2}$$



En el ejemplo 1, vemos que  $x^3/x^5$  es igual tanto a  $x^{-2}$  como a  $1/x^2$ . Por tanto,  $x^{-2}$  debe ser igual a  $1/x^2$ ; es decir,  $x^{-2} = 1/x^2$ . Éste es un ejemplo de la **regla del exponente negativo**.

## Regla del exponente negativo

$$x^{-m} = \frac{1}{x^m}, \quad x \neq 0$$

Cuando elevamos una variable o número a un exponente negativo, podemos reescribir como 1 dividido entre la variable o número elevados al mismo exponente, pero con signo positivo.

## Ejemplos

$$\begin{aligned} x^{-6} &= \frac{1}{x^6} & 4^{-2} &= \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} \\ y^{-7} &= \frac{1}{y^7} & 5^{-3} &= \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} \end{aligned}$$

CÓMO EVITAR  
ERRORES COMUNES

En ocasiones los estudiantes creen que un exponente negativo hace automáticamente que el valor de la expresión sea negativo. Eso no es verdad.

EXPRESIÓN	CORRECTO	INCORRECTO	TAMBIÉN INCORRECTO
$3^{-2}$	$\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$	<del><math>-3^2</math></del>	<del><math>\frac{1}{-3^2}</math></del>
$x^{-3}$	$\frac{1}{x^3}$	<del><math>-x^3</math></del>	<del><math>\frac{1}{-x^3}</math></del>

Para ayudarlo apreciar que la regla del exponente negativo tiene sentido, considere la siguiente secuencia de expresiones exponenciales y sus valores correspondientes.

$$2^3 = 8, \quad 2^2 = 4, \quad 2^1 = 2, \quad 2^0 = 1, \quad 2^{-1} = \frac{1}{2^1} \text{ o bien } \frac{1}{2}, \quad 2^{-2} = \frac{1}{2^2} \text{ o bien } \frac{1}{4}, \quad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} \text{ o bien } \frac{1}{8}$$

Observe que cada vez que el exponente disminuye una unidad, el valor de la expresión se reduce a la mitad. Por ejemplo, si pasamos de  $2^3$  a  $2^2$ , el valor de la expresión disminuye de 8 a 4. Si continuamos con la disminución de los exponentes más allá de  $2^0 = 1$ , entonces el exponente que sigue en el patrón es  $-1$ . Y obtenemos la mitad de 1 que es  $\frac{1}{2}$ . Este patrón ilustra que  $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ .

## 2 Simplificar expresiones que contienen exponentes negativos

Por lo general, cuando simplifique una expresión exponencial, **la respuesta final no debe contener exponentes negativos**. Podemos simplificar expresiones exponenciales utilizando la regla del exponente negativo y las reglas presentadas en la sección anterior. Los siguientes ejemplos indican la manera de simplificar expresiones exponenciales que contienen exponentes negativos.

**EJEMPLO 2** Utilice la regla del exponente negativo para escribir cada expresión con un exponente positivo. Simplifique las expresiones siempre que sea posible.


a)  $x^{-3}$       b)  $y^{-4}$       c)  $3^{-2}$       d)  $5^{-1}$       e)  $-5^{-3}$       f)  $(-5)^{-3}$

**Solución**

a)  $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$       b)  $y^{-4} = \frac{1}{y^4}$

c)  $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$       d)  $5^{-1} = \frac{1}{5}$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 11


e)  $-5^{-3} = -\frac{1}{5^3} = -\frac{1}{125}$       f)  $(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \frac{1}{-125} = -\frac{1}{125}$  

**EJEMPLO 3** Utilice la regla del exponente negativo para escribir cada expresión con un exponente positivo.

a)  $\frac{1}{x^{-2}}$       b)  $\frac{1}{4^{-1}}$

**Solución**

En primer lugar, utilizamos la regla del exponente negativo en el denominador. Después, termine la operación.

a)  $\frac{1}{x^{-2}} = \frac{1}{1/x^2} = \frac{1}{1} \cdot \frac{x^2}{1} = x^2$       b)  $\frac{1}{4^{-1}} = \frac{1}{1/4} = \frac{1}{1} \cdot \frac{4}{1} = 4$  

### SUGERENCIA

De los ejemplos 2 y 3, observamos que cuando un factor pasa del denominador al numerador o del numerador al denominador, el signo del *exponente* cambia.

$$\begin{array}{ll} x^{-4} = \frac{1}{x^4} & \frac{1}{x^{-4}} = x^4 \\ 3^{-5} = \frac{1}{3^5} & \frac{1}{3^{-5}} = 3^5 \end{array}$$

Ahora resolveremos ejemplos adicionales en los que combinamos dos o más de las reglas que hemos presentado hasta este momento.



**EJEMPLO 4** Simplifique las expresiones. **a)**  $(z^{-5})^4$  **b)**  $(4^2)^{-3}$

**Solución**

**a)**  $(z^{-5})^4 = z^{(-5)(4)}$  *Por la regla de la potencia.*  
 $= z^{-20}$   
 $= \frac{1}{z^{20}}$  *Por la regla del exponente negativo.*

**b)**  $(4^2)^{-3} = 4^{(2)(-3)}$  *Por la regla de la potencia.*  
 $= 4^{-6}$   
 $= \frac{1}{4^6}$  *Por la regla del exponente negativo.*

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 25



**EJEMPLO 5** Simplifique las expresiones. **a)**  $x^3 \cdot x^{-5}$  **b)**  $3^{-4} \cdot 3^{-7}$

**Solución**

**a)**  $x^3 \cdot x^{-5} = x^{3+(-5)}$  *Por la regla del producto.*  
 $= x^{-2}$   
 $= \frac{1}{x^2}$  *Por la regla del exponente negativo.*

**b)**  $3^{-4} \cdot 3^{-7} = 3^{-4+(-7)}$  *Por la regla del producto.*  
 $= 3^{-11}$   
 $= \frac{1}{3^{11}}$  *Por la regla del exponente negativo.*

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 51



### CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

¿Cuánto vale la suma de  $3^2 + 3^{-2}$ ? Estudie con cuidado la solución correcta.

**CORRECTO**

$$3^2 + 3^{-2} = 9 + \frac{1}{9}$$

$$= 9\frac{1}{9}$$

**INCORRECTO**

~~$$3^2 + 3^{-2} = 0$$~~

Observe que  $3^2 \cdot 3^{-2} = 3^{2+(-2)} = 3^0 = 1$ .

**EJEMPLO 6** Simplifique las expresiones. **a)**  $\frac{z^{-6}}{z^{12}}$  **b)**  $\frac{5^{-7}}{5^{-4}}$

**Solución**

**a)**  $\frac{z^{-6}}{z^{12}} = z^{-6-12}$  *Por la regla del cociente.*  
 $= z^{-18}$   
 $= \frac{1}{z^{18}}$  *Por la regla del exponente negativo.*

**b)**  $\frac{5^{-7}}{5^{-4}} = 5^{-7-(-4)}$  *Por la regla del cociente.*  
 $= 5^{-7+4}$   
 $= 5^{-3}$   
 $= \frac{1}{5^3}$  o bien  $\frac{1}{125}$  *Por la regla del exponente negativo.*

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 81



Debe leer cuidadosamente la siguiente Sugerencia

### SUGERENCIA

Consideremos un problema de división en el que una variable tenga un exponente negativo ya sea en el numerador o en el denominador, como en el ejemplo 6a). Otra manera de simplificarla sería pasar la variable con el exponente negativo del numerador al denominador, o viceversa, y cambiamos el signo de ese exponente. Por ejemplo,

$$\frac{x^{-4}}{x^5} = \frac{1}{x^5 \cdot x^4} = \frac{1}{x^{5+4}} = \frac{1}{x^9}$$

$$\frac{y^3}{y^{-7}} = y^3 \cdot y^7 = y^{3+7} = y^{10}$$

Ahora consideremos un problema de división en el que un número o variable tenga exponente negativo en ambos, tanto en el numerador o como en el denominador, como en el ejemplo 6b). Otra manera de simplificar una expresión como ésta sería pasar la variable con el exponente negativo mayor del numerador al denominador, o del denominador al numerador, y cambiamos de negativo a positivo el signo del exponente. Por ejemplo,

$$\frac{x^{-8}}{x^{-3}} = \frac{1}{x^8 \cdot x^{-3}} = \frac{1}{x^{8-3}} = \frac{1}{x^5} \quad \text{Observe que } -8 < -3.$$

$$\frac{y^{-4}}{y^{-7}} = y^7 \cdot y^{-4} = y^{7-4} = y^3 \quad \text{Note que } -7 < -4.$$

**EJEMPLO 7** Simplifique las expresiones. **a)**  $7x^4(6x^{-9})$       **b)**  $\frac{16r^3s^{-3}}{8rs^2}$       **c)**  $\frac{2x^2y^5}{8x^7y^{-3}}$

**Solución** **a)**  $7x^4(6x^{-9}) = 7 \cdot 6 \cdot x^4 \cdot x^{-9} = 42x^{-5} = \frac{42}{x^5}$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{16r^3s^{-3}}{8rs^2} &= \frac{16}{8} \cdot \frac{r^3}{r} \cdot \frac{s^{-3}}{s^2} \\ &= 2 \cdot r^2 \cdot \frac{1}{s^5} = \frac{2r^2}{s^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \frac{2x^2y^5}{8x^7y^{-3}} &= \frac{2}{8} \cdot \frac{x^2}{x^7} \cdot \frac{y^5}{y^{-3}} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^5} \cdot y^8 = \frac{y^8}{4x^5} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 119



En el ejemplo 7b), pasamos la variable con el exponente negativo,  $s^{-3}$ , del numerador al denominador. En el ejemplo 7c), pasamos del denominador al numerador la variable con el exponente negativo,  $y^{-3}$ . En cada caso, al mover al factor variable cambiamos el signo del exponente de negativo a positivo.

**EJEMPLO 8** Simplifique  $(5x^{-3})^{-2}$ .

**Solución** Empleando la regla de la potencia expandida.

$$\begin{aligned} (5x^{-3})^{-2} &= 5^{-2}x^{(-3)(-2)} \\ &= 5^{-2}x^6 \\ &= \frac{1}{5^2}x^6 \\ &= \frac{x^6}{25} \end{aligned}$$



### CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

¿Puede explicar por qué es incorrecta la simplificación que se muestra en el lado derecho?

CORRECTO

$$\frac{x^3 y^{-2}}{w} = \frac{x^3}{w y^2}$$

INCORRECTO

~~$$\frac{x^3 + y^{-2}}{w} = \frac{x^3}{w + y^2}$$~~

La simplificación del lado derecho es incorrecta porque en el numerador  $x^3 + y^{-2}$ , la  $y^{-2}$  no es un factor, sino un término. Aprenderemos a simplificar expresiones como ésta cuando estudiemos fracciones complejas en la sección 6.5.

**EJEMPLO 9** Simplificar  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

**Solución** De acuerdo con la regla de la potencia expandida, escribimos

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3^2}{1} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$$



Si examinamos los resultados del ejemplo 7 vemos que

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{3^2}{2^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Este ejemplo ilustra que  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$  si  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$ . Así, por ejemplo,

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-5} = \left(\frac{4}{3}\right)^5 \text{ y } \left(\frac{5}{9}\right)^{-3} = \left(\frac{9}{5}\right)^3. \text{ Resumimos esta información como sigue:}$$

#### Regla de una fracción elevada a un exponente negativo

Para una fracción de la forma  $\frac{a}{b}$ ,  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$ ,  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$ .

**EJEMPLO 10** Simplificar **a)**  $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$  **b)**  $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{-4}$

**Solución** Utilizamos la regla anterior para simplificar.

**AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 95**

$$\mathbf{a)} \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27} \quad \mathbf{b)} \left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{-4} = \left(\frac{y^3}{x^2}\right)^4 = \frac{y^{3 \cdot 4}}{x^{2 \cdot 4}} = \frac{y^{12}}{x^8}$$



**EJEMPLO 11** Simplificar **a)**  $\left(\frac{x^2 y^{-3}}{z^4}\right)^{-5}$  **b)**  $\left(\frac{2x^{-3} y^2 z}{x^2}\right)^2$

**Solución** **a)** Resolveremos el inciso **a)** con dos métodos diferentes. En el primero, emplearemos la regla de la potencia expandida. En el segundo, utilizaremos la regla de una fracción elevada a un exponente negativo antes de utilizar la regla de la potencia expandida. Usted puede usar cualquier método.

**Método 1**

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2 y^{-3}}{z^4}\right)^{-5} &= \frac{x^{2(-5)} y^{(-3)(-5)}}{z^{4(-5)}} && \text{Regla de la potencia expandida.} \\ &= \frac{x^{-10} y^{15}}{z^{-20}} && \text{Multiplicar los exponentes.} \\ &= \frac{y^{15} z^{20}}{x^{10}} && \text{Regla del exponente negativo.} \end{aligned}$$

Método 2

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2 y^{-3}}{z^4}\right)^{-5} &= \left(\frac{z^4}{x^2 y^{-3}}\right)^5 & \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} &= \left(\frac{b}{a}\right)^m \\ &= \left(\frac{y^3 z^4}{x^2}\right)^5 & \text{Simplificar la expresión entre} & \\ &= \frac{y^{3 \cdot 5} z^{4 \cdot 5}}{x^{2 \cdot 5}} & \text{paréntesis.} & \\ &= \frac{y^{15} z^{20}}{x^{10}} & \text{Regla de la potencia expandida.} & \\ & & \text{Multiplicar los exponentes.} & \end{aligned}$$

b) Primero simplificamos la expresión entre paréntesis, después elevamos al cuadrado los resultados. Para simplificar, observamos que  $\frac{x^{-3}}{x^2}$  se convierte en  $\frac{1}{x^5}$ .

$$\left(\frac{2x^{-3}y^2z}{x^2}\right)^2 = \left(\frac{2y^2z}{x^5}\right)^2 = \frac{2^2 y^{2 \cdot 2} z^{1 \cdot 2}}{x^{5 \cdot 2}} = \frac{4y^4 z^2}{x^{10}}$$



Resumen de reglas de los exponentes

- |   |  |
|---|--|
| 1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$  | <b>regla del producto</b>                                    |
| 2. $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, \quad x \neq 0$  | <b>regla del cociente</b>                                    |
| 3. $x^0 = 1, \quad x \neq 0$  | <b>regla del exponente cero</b>                              |
| 4. $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$  | <b>regla de las potencias</b>                                |
| 5. $\left(\frac{ax}{by}\right)^m = \frac{a^m x^m}{b^m y^m}, \quad b \neq 0, y \neq 0$     | <b>regla de la potencia expandida</b>                        |
| 6. $x^{-m} = \frac{1}{x^m}, \quad x \neq 0$   | <b>regla del exponente negativo</b>                          |
| 7. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m, \quad a \neq 0, b \neq 0$ | <b>regla de una fracción elevada a un exponente negativo</b> |

Conjunto de ejercicios 4.2

Ejercicios conceptuales

- 1. Con sus propias palabras, describa la regla del exponente negativo.
- 2. ¿Está simplificada la expresión  $x^{-2}$ ? Si no lo estuviera, simplifíquela.
- 3. ¿Está simplificada la expresión  $x^5 y^{-3}$ ? Si no lo estuviera, simplifíquela.
- 4. ¿La expresión  $a^6 b^{-2}$  puede simplificarse a  $1/a^6 b^{-2}$ ? Si no fuera posible, ¿cuál sería la simplificación correcta? Explique su respuesta.
- 5. ¿La expresión  $(y^4)^{-3}$  puede simplificarse a  $1/y^7$ ? Si no es posible, ¿cuál es la simplificación correcta? Explique.
- 6. ¿Las siguientes expresiones están simplificadas? Si una expresión no lo estuviera, explique por qué y luego simplifíquela.
  - a)  $\frac{5}{x^3}$
  - b)  $n^{-5}$
  - c)  $\frac{a^{-4}}{2}$
  - d)  $\frac{x^{-4}}{x^4}$
- 7. a) Identifique los términos en el numerador de la expresión  $\frac{x^5 y^2}{z^3}$ .

- b) Identifique los factores en el numerador de la expresión.
8. a) Identifique los términos en el numerador de la expresión  $\frac{x^{-4}y^3}{z^5}$ .
- b) Identifique los factores en el numerador de la expresión.
9. Describa lo que sucede al exponente de un factor cuando éste pasa del numerador al denominador de una fracción.
10. Diga lo que ocurre al exponente de un factor cuando éste se lleva del denominador al numerador de una fracción.

## Práctica de habilidades

Simplifique las expresiones siguientes.

- |                             |                               |                             |                          |
|-----------------------------|-------------------------------|-----------------------------|--------------------------|
| 11. $x^{-6}$                | 12. $y^{-5}$                  | 13. $5^{-1}$                | 14. $5^{-2}$             |
| 15. $\frac{1}{x^{-3}}$      | 16. $\frac{1}{b^{-4}}$        | 17. $\frac{1}{x^{-1}}$      | 18. $\frac{1}{y^{-4}}$   |
| 19. $\frac{1}{6^{-2}}$      | 20. $\frac{1}{5^{-3}}$        | 21. $(x^{-2})^3$            | 22. $(m^{-5})^{-2}$      |
| 23. $(y^{-5})^4$            | 24. $(a^5)^{-4}$              | 25. $(x^4)^{-2}$            | 26. $(x^{-9})^{-2}$      |
| 27. $(2^{-2})^{-3}$         | 28. $(2^{-3})^2$              | 29. $y^4 \cdot y^{-2}$      | 30. $x^{-3} \cdot x^1$   |
| 31. $x^7 \cdot x^{-5}$      | 32. $d^{-3} \cdot d^{-4}$     | 33. $3^{-2} \cdot 3^4$      | 34. $6^{-3} \cdot 6^6$   |
| 35. $\frac{r^5}{r^6}$       | 36. $\frac{x^2}{x^{-1}}$      | 37. $\frac{p^0}{p^{-3}}$    | 38. $\frac{x^{-2}}{x^5}$ |
| 39. $\frac{x^{-7}}{x^{-3}}$ | 40. $\frac{z^{-11}}{z^{-12}}$ | 41. $\frac{3^2}{3^{-1}}$    | 42. $\frac{4^2}{4^{-1}}$ |
| 43. $3^{-3}$                | 44. $x^{-7}$                  | 45. $\frac{1}{z^{-9}}$      | 46. $\frac{1}{3^{-3}}$   |
| 47. $(p^{-4})^{-6}$         | 48. $(x^{-3})^{-4}$           | 49. $(y^{-2})^{-3}$         | 50. $z^9 \cdot z^{-12}$  |
| 51. $x^3 \cdot x^{-7}$      | 52. $x^{-3} \cdot x^{-5}$     | 53. $x^{-8} \cdot x^{-7}$   | 54. $4^{-3} \cdot 4^3$   |
| 55. $-4^{-2}$               | 56. $(-4)^{-2}$               | 57. $-(-4)^{-2}$            | 58. $-4^{-3}$            |
| 59. $(-4)^{-3}$             | 60. $-(-4)^{-3}$              | 61. $(-6)^{-2}$             | 62. $-6^{-2}$            |
| 63. $\frac{x^{-5}}{x^5}$    | 64. $\frac{y^6}{y^{-8}}$      | 65. $\frac{n^{-5}}{n^{-7}}$ | 66. $\frac{3^{-4}}{3}$   |
| 67. $\frac{2^{-3}}{2^{-3}}$ | 68. $(5a^2b^3)^0$             | 69. $(2^{-1} + 3^{-1})^0$   | 70. $(3^{-1} + 4^2)^0$   |
| 71. $\frac{2}{2^{-5}}$      | 72. $(z^{-5})^{-9}$           | 73. $(x^{-4})^{-2}$         | 74. $(x^{-7})^0$         |
| 75. $(x^0)^{-2}$            | 76. $(3^{-2})^{-1}$           | 77. $2^{-3} \cdot 2$        | 78. $6^4 \cdot 6^{-2}$   |
| 79. $6^{-4} \cdot 6^2$      | 80. $\frac{z^{-3}}{z^{-7}}$   | 81. $\frac{x^{-1}}{x^{-4}}$ | 82. $\frac{r^6}{r}$      |
| 83. $(4^2)^{-1}$            | 84. $(4^{-2})^{-2}$           | 85. $\frac{5}{5^{-2}}$      | 86. $\frac{x^6}{x^7}$    |

- |  |  |  |  |
|--|--|--|--|
| 87. $\frac{3^{-4}}{3^{-2}}$                        | 88. $x^{-10} \cdot x^8$                            | 89. $\frac{7^{-1}}{7^{-1}}$                        | 90. $2x^{-1}y$                                     |
| 91. $(6x^2)^{-2}$                                  | 92. $(3z^3)^{-2}$                                  | 93. $3x^{-2}y^2$                                   | 94. $5x^4y^{-1}$                                   |
| 95. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$                | 96. $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$                | 97. $\left(\frac{5}{4}\right)^{-3}$                | 98. $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$                |
| 99. $\left(\frac{x^2}{y}\right)^{-2}$              | 100. $\left(\frac{c^4}{d^2}\right)^{-2}$           | 101. $-\left(\frac{r^4}{s}\right)^{-4}$            | 102. $-\left(\frac{m^3}{n^4}\right)^{-5}$          |
| 103. $7a^{-3}b^{-4}$                               | 104. $(3x^2y^3)^{-2}$                              | 105. $(x^5y^{-3})^{-3}$                            | 106. $2w(3w^{-5})$                                 |
| 107. $(4y^{-2})(5y^{-3})$                          | 108. $2x^5(3x^{-6})$                               | 109. $4x^4(-2x^{-4})$                              | 110. $(9x^5)(-3x^{-7})$                            |
| 111. $(4x^2y)(3x^3y^{-1})$                         | 112. $(2x^{-3}y^{-2})(x^4y^0)$                     | 113. $(5y^2)(4y^{-3}z^5)$                          | 114. $(3y^{-2})(5x^{-1}y^3)$                       |
| 115. $\frac{12c^9}{4c^4}$                          | 116. $\frac{8z^{-4}}{32z^{-2}}$                    | 117. $\frac{36x^{-4}}{9x^{-2}}$                    | 118. $\frac{12x^{-2}y^0}{2x^3y^2}$                 |
| 119. $\frac{3x^4y^{-2}}{6y^3}$                     | 120. $\frac{16x^{-7}y^{-2}}{4x^5y^2}$              | 121. $\frac{32x^4y^{-2}}{4x^{-2}y^0}$              | 122. $\frac{21x^{-3}z^2}{7xz^{-3}}$                |
| 123. $\left(\frac{2x^2y^{-3}}{z}\right)^{-4}$      | 124. $\left(\frac{b^4c^{-2}}{2d^{-3}}\right)^{-1}$ | 125. $\left(\frac{2r^{-5}s^9}{t^{12}}\right)^{-4}$ | 126. $\left(\frac{5m^{-1}n^{-3}}{p^2}\right)^{-3}$ |
| 127. $\left(\frac{x^3y^{-4}z}{y^{-2}}\right)^{-6}$ | 128. $\left(\frac{3p^{-1}q^{-2}r^3}{p^2}\right)^3$ | 129. $\left(\frac{a^2b^{-2}}{3a^4}\right)^3$       | 130. $\left(\frac{x^{12}y^5}{y^{-3}z}\right)^{-4}$ |

### Solución de problemas

131. a) ¿Se cumple que  $a^{-1}b^{-1} = \frac{1}{ab}$ ? Explique su respuesta.    b) ¿Se cumple que  $a^{-1} + b^{-1} = \frac{1}{a+b}$ ? Explique su respuesta.
132. a) ¿Se cumple que  $\frac{x^{-1}y^2}{z} = \frac{y^2}{xz}$ ? Explique su respuesta.    b) ¿Se cumple que  $\frac{x^{-1} + y^2}{z} = \frac{y^2}{x+z}$ ? Explique su respuesta.

Evalúe lo siguiente.

- |                     |                     |                     |                     |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 133. $4^2 + 4^{-2}$ | 134. $3^2 + 3^{-2}$ | 135. $2^2 + 2^{-2}$ | 136. $6^{-3} + 6^3$ |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|

Evalúe lo siguiente.

- |                                |  |  |  |
|--------------------------------|--|--|--|
| 137. $5^0 - 3^{-1}$            | 138. $4^{-1} - 3^{-1}$                 | 139. $2 \cdot 4^{-1} + 4 \cdot 3^{-1}$ | 140. $2^{-3} - 2^3 \cdot 2^{-3}$       |
| 141. $2 \cdot 4^{-1} - 3^{-1}$ | 142. $2 \cdot 4^{-1} - 4 \cdot 3^{-1}$ | 143. $3 \cdot 5^0 - 5 \cdot 3^{-2}$    | 144. $7 \cdot 2^{-3} - 2 \cdot 4^{-1}$ |

Determine el número que, al colocarse en el área sombreada, hace que el enunciado sea verdadero.

- |                                       |  |                                       |  |
|---------------------------------------|--|---------------------------------------|--|
| 145. $3^{\blacksquare} = \frac{1}{9}$ | 146. $\frac{1}{4^{\blacksquare}} = 16$ | 147. $\frac{1}{3^{\blacksquare}} = 9$ | 148. $4^{\blacksquare} = \frac{1}{16}$ |
|---------------------------------------|--|---------------------------------------|--|

### Problemas de reto

En los ejercicios 149 a 151, determine el número (o números) que, al colocarse en el área (o áreas) sombreada, haga verdadero el enunciado.

- |   |   |  |
|---|---|--|
| 149. $(x^{\blacksquare}y^3)^{-2} = \frac{x^4}{y^6}$ | 150. $(\blacksquare x^{\blacksquare}y^{-2})^3 = \frac{8}{x^9y^6}$ | 151. $(x^4y^{-3})^{\blacksquare} = \frac{y^9}{x^{12}}$ |
|---|---|--|

152. Para cualquier número real diferente de cero  $a$ , si  $a^{-1} = x$ , defina las siguientes expresiones en términos de  $x$ .

a)  $-a^{-1}$       b)  $\frac{1}{a^{-1}}$

153. Considere  $(3^{-1} + 2^{-1})^0$ . De acuerdo con la regla del exponente cero, se sabe que esto es igual a 1. Como grupo, de-



### Actividad en grupo

Como grupo, estudien y respondan el ejercicio 154.

154. Es frecuente que los problemas que involucran exponentes se resuelvan en más de una forma. Considere

$$\left(\frac{3x^2y^3}{x}\right)^{-2}$$

- a) Miembro 1 del grupo: simplifique esta expresión, comenzando con lo que está entre paréntesis.  
 b) Miembro 2 del grupo: simplifique esta expresión, empleando antes que nada la regla de la potencia expandida

terminen el error en el cálculo siguiente. Expliquen su respuesta.

$$\begin{aligned}(3^{-1} + 2^{-1})^0 &= (3^{-1})^0 + (2^{-1})^0 \\ &= 3^{-1(0)} + 2^{-1(0)} \\ &= 3^0 + 2^0 \\ &= 1 + 1 = 2\end{aligned}$$

- c) Miembro 3 del grupo: simplifique esta expresión, empleando en primer lugar de la regla del exponente negativo.  
 d) Comparen sus respuestas. Si no obtienen la misma, determinen por qué.  
 e) Como grupo, decidan con cuál método fue más fácil simplificar la expresión —a), b) o c).

### Ejercicios de repaso acumulativo

[2.6] 155. **Veleo** Si un velero viaja 3 millas en 48 minutos, ¿cuánto viajará en 80 minutos (con todas las condiciones sin cambio)?



[3.1] 156. **Volumen** Encuentre el volumen de un cilindro recto cuyo radio mide 5 pulgadas y su altura es de 12 pulgadas.

[3.3] 157. **Enteros** El mayor de dos enteros es una unidad más que el triple del menor. Si la suma de los dos es 37, encuéntrelos.

158. **Costo de un artículo** El costo de un artículo una vez que se incrementa 20% es de \$1.50. Encuentre el precio del artículo antes del incremento.

159. **Enteros consecutivos** Calcule dos enteros consecutivos cuya suma sea 75.

## 4.3 NOTACIÓN CIENTÍFICA



- 1 Convertir números a notación científica y viceversa.
- 2 Reconocer números en notación científica con coeficiente 1.
- 3 Hacer cálculos con notación científica.

### 1 Convertir números a notación científica y viceversa

Es frecuente ver, y a veces utilizar, números muy grandes o muy pequeños. Por ejemplo, en enero de 2001, la población del mundo era cerca de 6,160,000,000 de personas. Tal vez se haya leído que el virus de la influenza mide 0.0000001 metros de diámetro. Debido a que es difícil trabajar con tantos ceros, expresamos tales nú-

meros por medio de exponentes. Por ejemplo, el número 6,160,000,000 lo escribimos como  $6.16 \times 10^9$ , y el número 0.0000001 como  $1.0 \times 10^{-7}$ .

Los números como  $6.16 \times 10^9$  y  $1.0 \times 10^{-7}$  están en una forma conocida como **notación científica**. Escribimos cada número en notación científica como un mayor o igual a 1 y menor que 10 ( $1 \leq a < 10$ ), multiplicado por alguna potencia de 10. El exponente del 10 debe ser un entero.

### Ejemplos de números en notación científica

$$\begin{aligned} 1.2 \times 10^6 \\ 3.762 \times 10^3 \\ 8.07 \times 10^{-2} \\ 1 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

A continuación cambiamos el número 68,400 a notación científica.

$$\begin{aligned} 68,400 &= 6.84 \times 10,000 \\ &= 6.84 \times 10^4 \quad \text{Observe que } 10,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4. \end{aligned}$$

Por tanto,  $68,400 = 6.84 \times 10^4$ . Para pasar de 68,400 a 6.84, el punto decimal se recorrió cuatro lugares a la izquierda. Observe que el exponente del 10, que es 4, es el mismo número de lugares que se recorre el punto decimal hacia la izquierda.

A continuación mostramos el procedimiento simplificado para escribir un número en notación científica.

#### Para escribir un número en notación científica

1. Recorrer el punto decimal del número original a la derecha del primer dígito diferente de cero. Esto dará un número mayor o igual a 1 y menor que 10.
2. Contar el número de lugares que recorrimos el punto decimal para obtener el número en el paso 1. Si el número original era 10 o mayor, consideramos la cuenta como positiva. Si el número original era menor que 1, consideramos la cuenta como negativa.
3. Multiplique el número que obtuvimos en el paso 1 por 10 elevado a la cuenta (exponente) que se obtuvo en el paso 2.

**EJEMPLO 1** Escriba los números siguientes en notación científica.

- a) 10,700      b) 0.000386      c) 972,000      d) 0.0083

#### Solución

a) El número original es mayor que 10; por tanto, el exponente es positivo. Encontramos el punto decimal de 10,700 después del último cero.

$$10,700. = 1.07 \times 10^4$$

*Cuatro lugares*

b) El número original es menor que 1; por tanto, el exponente es negativo.

$$0.000386 = 3.86 \times 10^{-4}$$

*Cuatro lugares*

c)  $972,000. = 9.72 \times 10^5$

*5 lugares*

d)  $0.0083 = 8.3 \times 10^{-3}$

*3 lugares*

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 17



Al escribir un número en notación científica, podemos dejar la respuesta con exponente negativo, como en los ejemplos 1b) y 1d).



A continuación explicamos cómo escribir un número que esté en notación científica, como número sin exponentes o en forma decimal.

### Para convertir un número de notación científica a forma decimal

1. Observar el exponente de la potencia de 10.
2. a) Si el exponente es positivo, el punto decimal del número (mayor o igual que 1 y menor que 10) se recorre a la derecha el mismo número de lugares que el exponente. Quizá sea necesario agregar ceros al número. Esto dará como resultado un número mayor o igual que 10.  
b) Si el exponente es 0, el punto decimal no se mueve. Se elimina el factor  $10^0$  porque es igual a 1. Esto dará como resultado un número mayor o igual a 1 pero menor que 10.  
c) Si el exponente es negativo, el punto decimal del número se mueve a la izquierda el mismo número de lugares que el exponente (sin contar el signo negativo). Tal vez sea necesario agregar ceros. Esto dará como resultado un número menor que 1.

**EJEMPLO 2** Escriba cada número sin exponentes.

**a)**  $2.9 \times 10^4$       **b)**  $6.28 \times 10^{-3}$       **c)**  $7.95 \times 10^8$

**Solución** **a)** Recorremos el punto decimal cuatro lugares a la derecha.

$$2.9 \times 10^4 = 2.9 \times 10,000 = 29,000$$

**b)** Recorremos el punto decimal tres lugares hacia la izquierda.

$$6.28 \times 10^{-3} = 0.00628$$

**c)** Recorremos el punto decimal ocho lugares hacia la derecha.

$$7.95 \times 10^8 = 795,000,000$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 39



## 2 Reconocer números en notación científica con coeficiente 1

Frecuentemente escuchamos términos como kilogramos, miligramos y gigabytes. Por ejemplo, un frasco de tabletas de aspirinas tal vez indica que cada pastilla contiene 325 miligramos de aspirina. El disco duro de su computadora tiene, quizá, 40 gigabytes de memoria. Los prefijos kilo, mili y giga, son algunos de los que empleamos en el *sistema métrico*. Éste se utiliza como el sistema principal de medición en todas las naciones occidentales, excepto en los Estados Unidos. Siempre los empleamos con algún tipo de unidad base. Éstas pueden ser, por ejemplo, el metro, m (unidad de longitud); gramo, g (unidad de masa); litro, ℓ (unidad de volumen); bits, b (unidad de memoria de una computadora); o hertzios, Hz (medida de frecuencia). Por ejemplo, un *milímetro* es  $\frac{1}{1000}$  metros. Un *megagramo* es 1,000,000 gramos, y así sucesivamente. La siguiente tabla ilustra el significado de algunos prefijos.\*

\*Existen otros prefijos que no se mencionan en la tabla. Por ejemplo, centi es  $10^{-2}$  o 0.01 por la unidad base.

Prefijo	Significado	Símbolo	Significado como número decimal
nano	$10^{-9}$	n	$\frac{1}{1,000,000,000}$ o 0.000000001
micro	$10^{-6}$	$\mu$	$\frac{1}{1,000,000}$ o 0.000001
mili	$10^{-3}$	m	$\frac{1}{1000}$ o 0.001
unidad base*	$10^0$		1
kilo	$10^3$	k	1000
mega	$10^6$	M	1,000,000
giga	$10^9$	G	1,000,000,000

\* La unidad base no es un prefijo. Se incluye este renglón para introducir  $10^0$  en la tabla.

En ocasiones veremos números escritos como potencias de 10, pero sin un coeficiente numérico, como en la tabla anterior. Si no se indica el coeficiente numérico, éste siempre es igual a 1. Así, por ejemplo,  $10^{-3} = 1.0 \times 10^{-3}$ , y  $10^9 = 1.0 \times 10^9$ . Un disco duro de computadora que contenga 40 gigabytes (40 Gb) contiene  $40(1.0 \times 10^9) = 40 \times 10^9 = 40,000,000,000$  bytes. Cincuenta micras ( $50 \mu\text{m}$ ) es  $50(1.0 \times 10^{-6}) = 50 \times 10^{-6} = 0.00005$  metros. Trescientos veinticinco miligramos (325 mg) es  $325(1 \times 10^{-3}) = 325 \times 10^{-3} = 0.325$  gramos. Observe que en la tabla cada prefijo representa un valor  $10^3$  o 1000 veces mayor que el prefijo anterior a él. Por ejemplo, una micra es  $10^3$  o 1000 veces mayor que un nanómetro. Un gigámetro es 1000 veces mayor que un megámetro, y así sucesivamente.

En la figura 4.1 observamos que las frecuencias de radio FM y VHFTV son de alrededor de  $10^8$  hertzios (o ciclos por segundo). Así, la frecuencia de radio FM es  $10^8 = 1.0 \times 10^8 = 100,000,000$  hertzios. Este número, cien millones de hertzios, también lo expresamos como  $100 \times 10^6$ , o 100 megahertzios, 100 MHz.

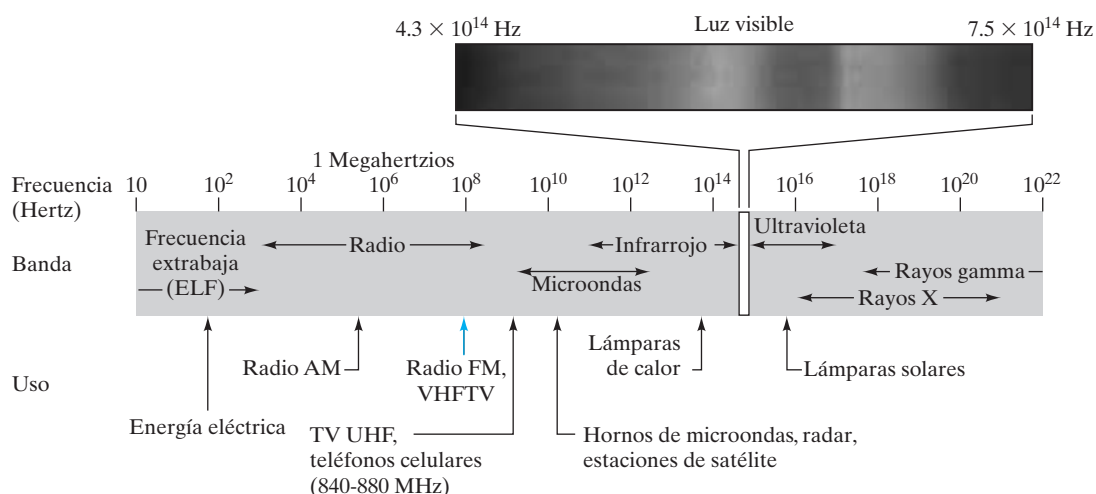


FIGURA 4.1

Ahora que ya sabemos interpretar potencias de 10 sin coeficientes numéricos, resolveremos algunos problemas empleando la notación científica.



En calculadoras científicas y graficadoras veríamos la respuesta del ejemplo anterior de las posibles maneras siguientes.

Resultados posibles

$$\begin{array}{l} 8000000 \times 600000 = 4.8 \quad 12 \\ 8000000 \times 600000 = 4.8 \quad 12 \\ 8000000 \times 600000 = 4.8E12 \end{array}$$

Cada respuesta significa  $4.8 \times 10^{12}$ . Veremos un ejemplo más.

Resultados posibles

$$\begin{array}{l} 0.0000003 \times 0.004 = 1.2 \quad -9 \\ 0.0000003 \times 0.004 = 1.2 \quad -9 \\ 0.0000003 \times 0.004 = 1.2E-9 \end{array}$$

Cada respuesta significa  $1.2 \times 10^{-9}$ . En ciertas calculadoras hay que oprimir la tecla **ENTER** en lugar de la **=**. La calculadora graficadora TI-83 Plus muestra las respuestas con el uso de E; por ejemplo, 4.8E12.

**EJEMPLO 6 Comparación de barcos grandes** El desplazamiento bruto del crucero *Disney Magic* es alrededor de  $8.5 \times 10^4$  ton. El del *Destiny* de la línea Carnival, es cerca de  $1.02 \times 10^5$  ton.

- a) ¿Cuánto más grande es el desplazamiento bruto del *Destiny* que el del *Disney Magic*?
- b) ¿Cuántas veces más grande es el desplazamiento bruto del *Destiny* que el del *Disney Magic*?



**Solución** a) **Entender** Necesitamos restar  $8.5 \times 10^4$  de  $1.02 \times 10^5$ . Para sumar o restar números en notación científica, por lo general hacemos que los exponentes sean los mismos.

**Traducir** Escribimos  $1.02 \times 10^5$  como  $10.2 \times 10^4$ . Ahora se resta como sigue.

**Calcular**

$$\begin{array}{r} 10.2 \times 10^4 \\ - 8.5 \times 10^4 \\ \hline 1.7 \times 10^4 \end{array}$$

Observe que en la resta, no restamos los  $10^4$ . Esta sustracción también la podemos efectuar así:  $(10.2 \times 10^4) - (8.5 \times 10^4) = (10.2 - 8.5) \times 10^4 = 1.7 \times 10^4$

**Comprobar** Comprobamos escribiendo los números en forma decimal.

$$\begin{array}{r} 102,000 \\ - 85,000 \\ \hline 17,000 \text{ o bien } 1.7 \times 10^4 \end{array}$$

**Respuesta** Como obtenemos los mismos resultados, la diferencia es  $1.7 \times 10^4$  (o bien, 17,000) ton.

**b) Entender** El inciso **b)** parece similar al **a)**, pero planteamos una pregunta diferente porque pedimos hallar el *número de veces* mayor que es, en lugar que *cuánto más grande es*. Para esto realizamos una división.

**Traducir** Dividir el desplazamiento bruto del *Destiny* entre el del *Disney Magic*.

**Calcular**

$$\begin{aligned} \frac{1.02 \times 10^5}{8.5 \times 10^4} &= \frac{1.02}{8.5} \times \frac{10^5}{10^4} \\ &= 0.12 \times 10^{5-4} && \text{Regla del cociente para los} \\ &= 0.12 \times 10^1 && \text{exponentes.} \\ &= 1.2 \end{aligned}$$

**Comprobar** Revisa con la escritura de los números en forma decimal.

$$\frac{102,000}{85,000} = 1.2$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 75

**Respuesta** Como obtenemos el mismo resultado, el desplazamiento del *Destiny* es 1.2 veces mayor que el del *Disney Magic*. 

## EJEMPLO 7

**Computadora más rápida** En enero de 2002, la computadora más rápida del mundo, llamada *ASCI White*, ubicada en el Lawrence Livermore National Laboratory, en California, era capaz de realizar un solo cálculo simple en 0.000000000000083 segundos (83 mil billonésimas de segundo). ¿Cuánto tiempo tomaría a esta computadora hacer 7 mil millones (7,000,000,000) de cálculos?

### Solución

**Entender** la computadora hace un cálculo en 1(0.000000000000083) segundos, 2 cálculos en 2(0.000000000000083) segundos, 3 cálculos en 3(0.000000000000083) segundos, y 7 mil millones de operaciones en 7,000,000,000(0.000000000000083) segundos.



La *ASCI White* cubre un área del tamaño de dos canchas de basquetbol

**Traducir** Multiplicaremos con la conversión de cada número en notación científica.

$$7,000,000,000(0.000000000000083) = (7 \times 10^9)(8.3 \times 10^{-14})$$

**Calcular**

$$= (7 \times 8.3)(10^9 \times 10^{-14})$$

$$= 58.1 \times 10^{-5}$$

$$= 0.000581$$

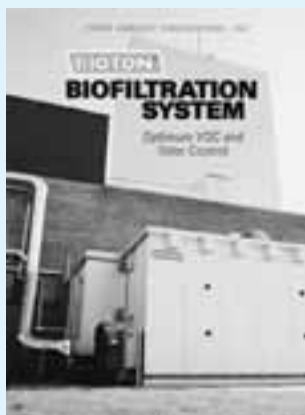
**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 79**

**Respuesta** A la *ASCI White* le tomaría 0.000581 segundos para realizar 7 millones de cálculos. 

## Matemáticas en acción

### El aire que respiramos

La Agencia de Protección Ambiental (EPA, por sus siglas en inglés) ha identificado la calidad del aire de los interiores como la preocupación sanitaria número uno del presente. Lo que provoca que la calidad del aire de los interiores sea baja, es, con mucho, la mala calidad del aire del exterior, en particular en las áreas urbanas. Contaminantes como polvo, polen y de origen automotriz, con frecuencia encuentran un camino hacia el interior de los edificios. Con más y más productos químicos en uso, la gente sufre cada vez más de hipersensibilidad química a los formaldehídos, pesticidas, ozono, solventes para limpieza, fibra de vidrio, asbestos, plomo y radón. Las alergias a los plásticos hoy están más difundidas que nunca. Ningún edificio o sitio de trabajo está a salvo.



Para los sitios de trabajo relacionados con farmacéuticos y biotecnología, el asunto del aire libre de contaminantes es aún más crucial. Un tipo de filtro que utilizamos en esta clase de instalaciones es el HEPA (High Efficiency Particulate Air), que fue desarrollado originalmente para retirar contaminantes radiactivos del aire durante el desarrollo de la primera bomba atómica.

La ciencia de la filtración involucra la captura de objetos que van desde el polvo de carbón a los virus. Es común expresar el tamaño de las partículas que filtramos en micras, donde 1 micra (abreviatura de 1 micrómetro) = 1 millonésima de metro =  $10^{-6}$  metros = 0.000001 metros. La medición indica el diámetro de la partícula.

A continuación presentamos una lista de los tipos de partículas para los que hemos desarrollado sistemas de filtración; los rangos de su diámetro se dan en micras y en metros.

	Micras	Metros
Polen	10–100	$10^{-5}$ – $10^{-4}$
Humo de cigarro	0.01–1	$10^{-8}$ – $10^{-6}$
Talco, mineral	0.4–80	$4 \times 10^{-7}$ – $8 \times 10^{-5}$
Polvo dañino para los pulmones	0.8–6	$8 \times 10^{-7}$ – $6 \times 10^{-6}$
Bacteria	0.5–50	$5 \times 10^{-7}$ – $5 \times 10^{-5}$
Virus	0.002–0.08	$2 \times 10^{-9}$ – $8 \times 10^{-8}$

## Conjunto de ejercicios 4.3

### Ejercicios conceptuales

1. Describa la forma de un número dado en notación científica.
2. **a)** Describa con sus propias palabras cómo escribimos un número igual o mayor que 10, en notación científica.  
**b)** Con el uso del procedimiento descrito en el inciso **a)**, escriba 42,100 en notación científica.
3. **a)** Con sus propias palabras, describa cómo escribimos un número menor que 1 en notación científica.  
**b)** Por medio del procedimiento descrito en el inciso **a)**, escriba 0.00568 en notación científica.
4. ¿Cuántos lugares y en qué dirección hay que mover el punto decimal cuando convertimos un número de notación

- científica a forma decimal, si el exponente sobre la base 10 es igual a 4?
5. ¿Cuántos lugares y en qué dirección hay que recorrer el punto decimal cuando convertimos un número de notación científica a forma decimal, si el exponente sobre la base es  $-5$ ?
6. Al cambiar un número a notación científica, ¿en qué condiciones será positivo el exponente sobre la base 10?
7. Al cambiar un número a notación científica, ¿en qué condiciones será negativo el exponente sobre la base 10?
8. Al escribir el número 92,129 en notación científica, ¿el exponente sobre la base 10 será positivo o negativo? Explique.
9. Al escribir el número 0.00734 en notación científica, ¿el exponente sobre la base 10 será positivo o negativo? Explique.
10. Escriba el número 1,000,000 en notación científica.
11. Escriba el número 0.000001 en notación científica.
12. a)  $82.39 \times 10^4$ , ¿está escrito en notación científica? Si no lo estuviera, ¿cómo debería escribirse?  
b)  $0.083 \times 10^{-5}$ , ¿está escrito en notación científica? Si no lo está, ¿cómo debería escribirse?

## Práctica de habilidades

Expresa cada número en notación científica.

- |                |               |                |                   |
|----------------|---------------|----------------|-------------------|
| 13. 350,000    | 14. 3,610,000 | 15. 450        | 16. 0.00062       |
| 17. 0.053      | 18. 0.000726  | 19. 19,000     | 20. 5,260,000,000 |
| 21. 0.00000186 | 22. 0.0075    | 23. 0.00000914 | 24. 74,100        |
| 25. 220,300    | 26. 0.02      | 27. 0.005104   | 28. 416,000       |

Expresa cada número en forma decimal (sin exponentes).

- |                            |                           |                           |                           |
|----------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 29. $4.3 \times 10^4$      | 30. $1.63 \times 10^{-4}$ | 31. $5.43 \times 10^{-3}$ | 32. $6.15 \times 10^5$    |
| 33. $2.13 \times 10^{-5}$  | 34. $7.26 \times 10^{-6}$ | 35. $6.25 \times 10^5$    | 36. $4.6 \times 10^1$     |
| 37. $9 \times 10^6$        | 38. $6.475 \times 10^1$   | 39. $5.35 \times 10^2$    | 40. $3.14 \times 10^{-2}$ |
| 41. $6.201 \times 10^{-4}$ | 42. $7.73 \times 10^{-7}$ | 43. $1 \times 10^4$       | 44. $7.13 \times 10^{-4}$ |

En los ejercicios 45 a 52, escriba la cantidad sin prefijos métricos. Consulte el ejemplo 3.

- |                      |                     |                       |
|----------------------|---------------------|-----------------------|
| 45. 8 micras         | 46. 23.5 milímetros | 47. 125 gigawatts     |
| 48. 8.7 nanosegundos | 49. 15.3 kilómetros | 50. 80.2 megahertzios |
| 51. 15 microgramos   | 52. 3.12 miligramos |                       |

Ejecute cada operación y exprese cada número en forma decimal (sin exponentes).

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 53. $(2 \times 10^2)(3 \times 10^5)$         | 54. $(2 \times 10^{-3})(3 \times 10^2)$      | 55. $(2.7 \times 10^{-6})(9 \times 10^4)$     |
| 56. $(1.6 \times 10^{-2})(4 \times 10^{-3})$ | 57. $(1.3 \times 10^{-8})(1.74 \times 10^6)$ | 58. $(4 \times 10^5)(1.2 \times 10^{-4})$     |
| 59. $\frac{8.4 \times 10^6}{2 \times 10^3}$  | 60. $\frac{6 \times 10^{-3}}{3 \times 10^1}$ | 61. $\frac{7.5 \times 10^6}{3 \times 10^3}$   |
| 62. $\frac{14 \times 10^6}{4 \times 10^8}$   | 63. $\frac{4 \times 10^2}{8 \times 10^5}$    | 64. $\frac{16 \times 10^3}{8 \times 10^{-3}}$ |

Realice cada una de las operaciones que se indican; primero convierta cada número a notación científica. Escriba la respuesta en notación científica.

- |                                |                              |                           |
|--------------------------------|------------------------------|---------------------------|
| 65. $(700,000)(6,000,000)$     | 66. $(0.003)(0.00015)$       | 67. $(0.0004)(320)$       |
| 68. $(67,000)(200,000)$        | 69. $\frac{2,100,000}{7000}$ | 70. $\frac{0.00004}{200}$ |
| 71. $\frac{0.00035}{0.000002}$ | 72. $\frac{150,000}{0.0005}$ |                           |
73. Enliste los siguientes números del menor al mayor:  $4.8 \times 10^5$ ,  $3.2 \times 10^{-1}$ , 4.6,  $8.3 \times 10^{-4}$ .
74. Enliste los siguientes números, del menor al mayor:  $7.3 \times 10^2$ ,  $3.3 \times 10^{-4}$ ,  $1.75 \times 10^6$ , 5.3.



## Solución de problemas

En los ejercicios 75 a 92, escriba la respuesta en forma decimal (sin exponentes) a menos que se pida otra cosa.

75. **Población** En 2002, la población de E.U. era de alrededor de  $2.81 \times 10^8$  personas, y la del mundo era de  $6.20 \times 10^9$  personas.
- ¿Cuántas personas vivían fuera de los Estados Unidos en 2002?
  - ¿Cuántas veces es mayor la población mundial que la de E.U.?
76. **Películas** A continuación presentamos una lista de las ventas brutas de boletos de las cinco películas más vistas en los Estados Unidos al 1 de enero de 2002.

Película	Año de estreno	Ventas brutas de boletos aproximadas en E.U.
1. <i>Titanic</i>	1997	\$601,000,000
2. <i>La Guerra de las Galaxias</i>	1977	\$461,000,000
3. <i>La Guerra de las Galaxias-La Amenaza Fantasma</i>	2001	\$431,000,000
4. <i>E.T.</i>	1982	\$400,000,000
5. <i>Parque Jurásico</i>	1993	\$357,000,000

- ¿Qué tanto más grande fueron las ventas brutas de boletos para ver *Titanic* que para *Parque Jurásico*? Responda en notación científica.
  - ¿Cuántas veces mayor fueron las ventas brutas de boletos de *Titanic* que las de *Parque Jurásico*?
77. **Cataratas del Niágara** Un tratado entre los Estados Unidos y Canadá requiere que durante la temporada turística, por las cataratas del Niágara fluya un mínimo de 100,000 pies cúbicos de agua por segundo (otros 130,000 a 160,000 pies cúbicos/seg son desviados para generar energía). Encuentre el volumen mínimo de agua que fluirá por ellas en un periodo de 24 horas durante la temporada turística.



78. **Big Mac** El martes 20 de noviembre de 2001, muchos periódicos publicaron un artículo sobre Don Gorske respecto de su aparición en el libro *Guinness World Records*. Cada día de los últimos 29 años, Gorske había comido de una a tres Big Mac. Hasta ese momento, había comido  $1.8 \times 10^4$  de esas hamburguesas. Las calorías en total que consumió por todas las Big Mac, eran alrededor de  $1.06 \times 10^7$ .

Con la información dada, calcule el número de calorías que hay en una Big Mac.

79. **Velocidad de una computadora** Si una computadora hace un cálculo en 0.000002 segundos, ¿cuánto tiempo, en segundos, tomará para realizar 8 billones (8,000,000,000,000) de cálculos? Escriba la respuesta en notación científica.
80. **Galletas de la fortuna** ¿Quién escribe los papeles que vienen en esas galletas? Las galletas de la fortuna son un invento estadounidense. Steven Yang, quien opera la M & Y Trading Company, en San Francisco, imprime alrededor del 90% de los  $1.02 \times 10^9$  papeles de la fortuna en las galletas de Estados Unidos en un año.
- ¿Cuántos papeles imprime Yang en un año?
  - ¿Cuántos papeles imprime Yang en un día?
81. **Pañales** Si se hiciera una fila de los 18 mil millones de pañales desechables que se tiran en Estados Unidos cada año, alcanzaría la Luna y regresaría 7 veces (siete viajes redondos).
- Escriba 18 mil millones en notación científica.
  - Si la distancia de la Tierra a la Luna es de  $2.38 \times 10^5$  millas, ¿cuál es la longitud de todos los pañales que se colocaron en fila? Escriba su respuesta en notación científica y como un número sin exponentes.
82. **Encarcelamiento** Los gastos por los encarcelamientos en los Estados Unidos han aumentado de  $\$6.9 \times 10^6$  en 1980, a cerca de  $\$4.5 \times 10^7$  en 2002.
- ¿Qué tanto más grande fue la cantidad gastada en 2002 que la de 1980?
  - ¿Cuántas veces mayor fue la cantidad gastada en 2002 que la de 1980?  
(Fuente: *Fortune Magazine*)
83. **Umpires versus árbitros** El salario de arranque en 2001 para un umpire de las ligas mayores fue de  $\$1.05 \times 10^8$ , mientras que el de un árbitro de la NFL fue de  $\$2.23 \times 10^4$ .
- ¿Qué tanto más grande fue el salario de arranque para un umpire que el de un árbitro?
  - ¿Cuántas veces mayor fue el salario de arranque para un umpire que el de un árbitro?  
(Fuente: *Money Magazine*)
84. **Astronomía** A continuación se enlista la masa de la Tierra, la de la Luna y la de Júpiter.
- |          |  |
|----------|--|
| Tierra:  | 5,794,000,000,000,000,000,000,000 toneladas métricas     |
| Luna:    | 73,400,000,000,000,000,000 toneladas métricas            |
| Júpiter: | 1,899,000,000,000,000,000,000,000,000 toneladas métricas |

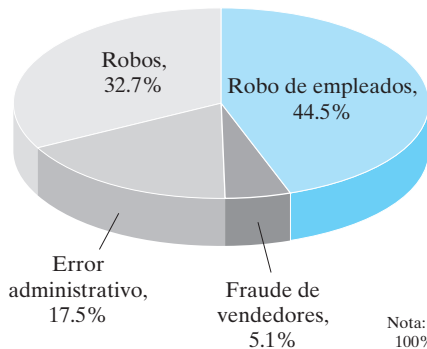


- a) Escriba la masa de la Tierra, de la Luna y de Júpiter en notación científica.
- b) ¿Cuántas veces mayor es la masa de la Tierra que la de la Luna?
- c) ¿Cuántas veces mayor es la masa de Júpiter que la de la Tierra?

85. **Luz del Sol** El Sol está a  $9.3 \times 10^7$  millas de la Tierra. La luz viaja a una velocidad de  $1.86 \times 10^5$  millas por segundo. ¿Cuánto tiempo, tanto en minutos como en segundos, tardará la luz del Sol en llegar a la Tierra?

86. **Inventario perdido** La gráfica circular que se muestra a continuación, ilustra lo que pasó con el inventario perdido en el 2000. En este año, la pérdida total anual fue de \$29,000,000,000 (\$29 mil millones). ¿Cuánto inventario se perdió por robo? Escriba su respuesta en notación científica.

¿A dónde va el inventario perdido?



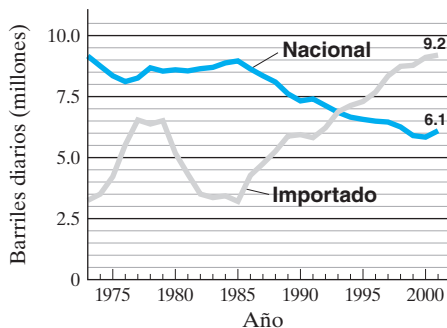
Nota: no suma 100% debido al redondeo.

Fuente: 2000 National Retail Security Survey

87. **Crecimiento de la población** Tomó la historia humana para que la población del mundo alcanzara los  $6.16 \times 10^9$  de personas en 2002. A las tasas actuales, la población mundial se duplicará en cerca de 54 años. Calcule la población del mundo en 2056. Escriba su respuesta en notación científica.

88. **Fuentes de petróleo** La siguiente gráfica de líneas (poligonal) muestra la cantidad de petróleo que se produce en Estados Unidos (nacional) y la que se importa en este país.

Flujo de petróleo en E.U.



Fuentes: Energy Information Administration; USGS, State of Alaska

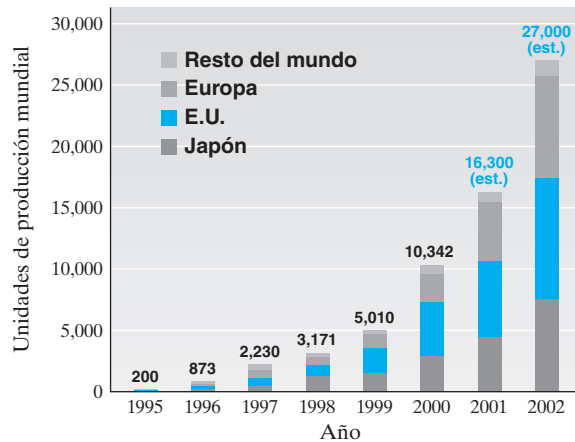
a) Escriba, con notación científica, el número de barriles de petróleo producidos en Estados Unidos en 2001, y el número de barriles importados en este país en el mismo año.

b) Determine, con notación científica, la cantidad total de petróleo producido e importado por día en Estados Unidos, en 2001.

c) Determine, con notación científica, la diferencia entre el número de barriles de petróleo crudo producido e importado por día en Estados Unidos, en 2001.

89. **Cámaras digitales** La siguiente gráfica muestra la producción mundial de cámaras digitales.

Las ventas de cámaras digitales se elevan



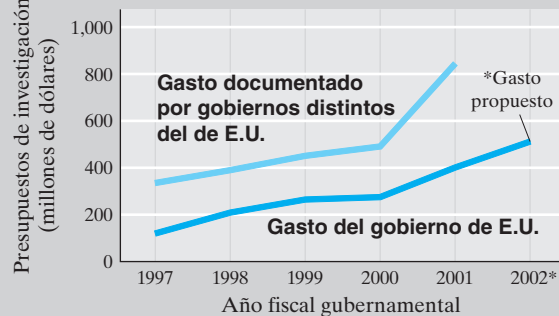
Fuente: Japan Camera Industrial Association + Olympus' Estimate

a) Proporcione, en notación científica, la producción mundial de cámaras digitales en 2002.

b) Olympus tuvo la mayor participación en las ventas de cámaras digitales en 2000. Si en el año 2000 esta compañía produjo el 22% de las cámaras digitales del mundo, ¿cuántas cámaras produjo? Escriba su respuesta sin exponentes.

90. **Nanotecnología** La siguiente gráfica muestra la cantidad gastada en nanotecnología, de 1997 a 2002.

Dólares corrientes de inversión para nanotecnología



Fuente: U.S. Senate briefing on nanotechnology, 24 de mayo de 2001, y National Science Foundation

- a) Escriba, con notación científica, estimaciones del número de dólares gastados por el gobierno de E.U. en nanotecnología, en 1997 y 2002. (Por ejemplo, escriba un número como  $\$1.3 \times 10^8$ .)
- b) Estime la diferencia, en dólares, gastados por el gobierno de E.U. en nanotecnología en 2002 y 1997.
- c) Estime con notación científica la cantidad total gastada en nanotecnología en 2001, incluidos tanto el gobierno de E.U. como otros gobiernos.
- d) Escriba sin exponentes la cantidad en dólares que determinada en el inciso c).

91. **Un número grande** El número de Avogadro, llamado así en honor del químico italiano del siglo XIX, Amadeo Avogadro,

es aproximadamente  $6.02 \times 10^{23}$ , que representa el número de átomos que hay en 12 gramos de carbón puro.

- a) Si este número se escribiera en forma decimal, ¿cuántos dígitos contendría?
- b) ¿Cuál es el número de átomos que hay en 1 gramo de carbón puro? Escriba la respuesta en notación científica.

92. **Estructura de la materia** En un artículo de *Scientific American* mencionan que los físicos han creado un *modelo estándar* que describe la estructura de la materia a  $10^{-18}$  metros. Si este número se escribiera sin exponentes, ¿cuántos ceros habría a la derecha del punto decimal?

## Problemas de reto

93. **La película Contacto** En la película *Contacto*, Jodie Foster interpreta a una astrónoma que hace la siguiente afirmación: “hay 400 mil millones de estrellas en el universo. Si sólo una de cada millón de éstas tuviera planetas, y si sólo uno de cada millón de éstos tuviera vida, y si sólo uno por cada millón de éstos hubiera vida inteligente, hablaría, literalmente, millones de civilizaciones extraterrestres”. ¿Cree usted que esta afirmación es correcta? Explique su respuesta.



94. ¿Cuántas veces, más grande o más pequeño, es  $10^{-12}$  metros que  $10^{-18}$  metros?
95. ¿Cuántas veces más pequeño es 1 nanosegundo que un milisegundo?
96. **Año luz** La luz viaja a una velocidad de  $1.86 \times 10^5$  millas por segundo. Un *año luz* es la distancia que la luz recorre en un año. Determine el número de millas que hay en un año luz.



## Actividad en grupo

Como grupo, estudien y resuelvan el ejercicio 97.

97. **Un millón versus mil millones** ¿Tiene idea de la diferencia que hay entre un millón (1,000,000), mil millones (1,000,000,000) y un billón (1,000,000,000,000)?
- a) Escriba un millón, mil millones y un billón, en notación científica.
- b) Miembro 1 del grupo: determine cuánto tiempo tomaría agotar un millón de dólares si se gastara \$1,000 diarios.

- c) Miembro 2 del grupo: repita el inciso b) para mil millones de dólares.
- d) Miembro 3 del grupo: repita el inciso b) para un billón de dólares.
- e) Como grupo, determinen cuántas veces es mayor mil millones de dólares que un millón de dólares.

## Ejercicios de repaso acumulativo

[1.9] 98. Evalúe  $4x^2 + 3x + \frac{x}{2}$  cuando  $x = 0$ .

- [2.3] 99. a) Si  $-x = -\frac{3}{2}$ , ¿cuál es el valor de  $x$ ?  
b) Si  $5x = 0$ , ¿cuál es el valor de  $x$ ?

[2.5] 100. Resuelva la ecuación  $2x - 3(x - 2) = x + 2$ .

[4.1] 101. Simplifique la expresión  $\left(\frac{-2x^5y^7}{8x^8y^3}\right)^3$ .

## 4.4 SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS



- 1 Identificar polinomios.
- 2 Sumar polinomios.
- 3 Restar polinomios.
- 4 Restar polinomios en columnas.

## 1 Identificar polinomios

Un **polinomio en  $x$**  es una expresión que contiene la suma de un número finito de términos de la forma  $ax^n$ , para cualquier número real  $a$  y cualquier *número entero positivo*  $n$ .

## Ejemplos de polinomios

$$2x$$

$$\frac{1}{3}x - 4$$

$$x^2 - 2x + 1$$

## No son polinomios

$$4x^{1/2} \quad (\text{Exponente fraccionario.})$$

$$3x^2 + 4x^{-1} + 5 \quad (\text{Exponente negativo.})$$

$$4 + \frac{1}{x} \quad \left(\frac{1}{x} = x^{-1}, \text{exponente negativo.}\right)$$

Escribimos un polinomio en **orden descendente** (o en **potencias descendentes**) de **la variable**, con los exponentes de ésta en disminución de izquierda a derecha.

## Ejemplo de polinomio en orden descendente

$$2x^4 + 4x^2 - 6x + 3$$

Observe en este ejemplo que el término constante, 3, está al final porque podemos escribirlo como  $3x^0$ . Recuerde que  $x^0 = 1$ .

Un polinomio puede tener más de una variable. Por ejemplo,  $3xy + 2$  es un polinomio con dos variables,  $x$  y  $y$ .

Un polinomio con un término se denomina **monomio**; con dos términos, **binomio**; y con tres términos, **trinomio**. Los polinomios que contienen más de tres términos no tienen nombres especiales. El prefijo “poli” significa “muchos”. La siguiente tabla resume esta información.

Tipo de polinomio	Número de términos	Ejemplos
Monomio	Uno	8, $4x$ , $-6x^2$
Binomio	Dos	$x + 5$ , $x^2 - 6$ , $4y^2 - 5y$
Trinomio	Tres	$x^2 - 2x + 3$ , $3z^2 - 6z + 7$

El **grado de un término** de un polinomio con una variable es el exponente que tiene la variable en dicho término.

## Término

## Grado del término

$$4x^2$$

Segundo

$$2y^5$$

Quinto

$$-5x$$

Primero

( $-5x$  puede escribirse como  $-5x^1$ .)

$$3$$

Cero

(es posible escribir 3 como  $3x^0$ .)

Para un polinomio con dos o más variables, el grado de un término es la suma de los exponentes de las variables. Por ejemplo, el grado del término  $4x^2y^3$  es 5 porque  $2 + 3 = 5$ . El grado del término  $5a^4bc^3$  es 8 porque  $4 + 1 + 3 = 8$ .

El **grado de un polinomio** es el mismo que el de su término de grado mayor.

Polinomio	Grado del polinomio	
$8x^3 + 2x^2 - 3x + 4$	Tercero	<i>(<math>8x^3</math> es el término de mayor grado.)</i>
$x^2 - 4$	Segundo	<i>(<math>x^2</math> es el término de mayor grado.)</i>
$2x - 1$	Primero	<i>(<math>2x</math> o <math>2x^1</math> es el término de mayor grado.)</i>
$4$	Cero	<i>(<math>4</math> o <math>4x^0</math> es el término de mayor grado.)</i>
$x^2y^4 + 2x + 3$	Sexto	<i>(<math>x^2y^4</math> es el término de mayor grado.)</i>

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 53

## 2 Sumar polinomios

En la sección 2.1 dijimos que los términos semejantes son los que tienen las mismas variables y los mismos exponentes. Es decir, los términos semejantes sólo difieren en sus coeficientes numéricos.

### Ejemplos de términos semejantes

3,	-5
$2x$ ,	$x$
$-2x^2$ ,	$4x^2$
$3y^2$ ,	$5y^2$
$3xy^2$ ,	$5xy^2$

### Suma de polinomios

Para sumar polinomios, reducimos los términos semejantes de los polinomios.

**EJEMPLO 1** Simplificar  $(4x^2 + 6x + 3) + (2x^2 + 5x - 1)$ .

#### Solución

Recuerde que  $(4x^2 + 6x + 3) = 1(4x^2 + 6x + 3)$  y que  $(2x^2 + 5x - 1) = 1(2x^2 + 5x - 1)$ . Utilizamos la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis, como observamos a continuación.

$$\begin{aligned}
 & (4x^2 + 6x + 3) + (2x^2 + 5x - 1) \\
 &= 1(4x^2 + 6x + 3) + 1(2x^2 + 5x - 1) \\
 &= 4x^2 + 6x + 3 + 2x^2 + 5x - 1 && \text{Utilizar la propiedad distributiva.} \\
 &= \underbrace{4x^2 + 2x^2} + \underbrace{6x + 5x} + \underbrace{3 - 1} && \text{Reacomodar los términos.} \\
 &= 6x^2 + 11x + 2 && \text{Reducir términos semejantes.} \quad \star
 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 67

En los siguientes ejemplos no mostraremos la multiplicación por 1, como sí se hizo en el ejemplo 1.

**EJEMPLO 2** Simplificar  $(5a^2 + 3a + b) + (a^2 - 7a + 3)$ .

#### Solución

$$\begin{aligned}
 & (5a^2 + 3a + b) + (a^2 - 7a + 3) \\
 &= 5a^2 + 3a + b + a^2 - 7a + 3 && \text{Eliminar paréntesis.} \\
 &= \underbrace{5a^2 + a^2} + \underbrace{3a - 7a} + b + 3 && \text{Reacomodar términos.} \\
 &= 6a^2 - 4a + b + 3 && \text{Reducir términos semejantes.} \quad \star
 \end{aligned}$$

**EJEMPLO 3** Simplificar  $(3x^2y - 4xy + y) + (x^2y + 2xy + 3y)$ .

**Solución**

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 77

$$\begin{aligned} & (3x^2y - 4xy + y) + (x^2y + 2xy + 3y) \\ &= 3x^2y - 4xy + y + x^2y + 2xy + 3y && \text{Eliminar paréntesis.} \\ &= \underline{3x^2y + x^2y} - \underline{4xy + 2xy} + \underline{y + 3y} && \text{Reacomodar términos.} \\ &= 4x^2y - 2xy + 4y && \text{Reducir términos semejantes. } \star \end{aligned}$$

Por lo general, cuando sumemos polinomios haremos como en los ejemplos 1 a 3. Es decir, en primer lugar arreglamos el polinomio en forma horizontal. Sin embargo, en la sección 4.6, en la división de polinomios, habrá pasos en los que los sumemos en columnas.

#### Para sumar polinomios en columnas

1. Arreglar los polinomios en orden descendente, uno bajo el otro con los términos semejantes en las mismas columnas.
2. Sumar los términos de cada columna.

**EJEMPLO 4** Sumar  $6x^2 - 2x + 2$  y  $-2x^2 - x + 7$  con el uso de columnas.

**Solución**

$$\begin{array}{r} 6x^2 - 2x + 2 \\ -2x^2 - x + 7 \\ \hline 4x^2 - 3x + 9 \end{array} \quad \star$$

**EJEMPLO 5** Sumar  $(5w^3 + 2w - 4)$  y  $(2w^2 - 6w - 3)$  por medio de columnas.

**Solución**

Como el polinomio  $5w^3 + 2w - 4$  no tiene un término  $w^2$ , sumaremos el término  $0w^2$  al polinomio. Este procedimiento ayuda en la alineación de los términos semejantes.

$$\begin{array}{r} 5w^3 + 0w^2 + 2w - 4 \\ \quad 2w^2 - 6w - 3 \\ \hline 5w^3 + 2w^2 - 4w - 7 \end{array} \quad \star$$

### 3 Restar polinomios

Ahora aprenderá a restar polinomios.

#### Para restar polinomios

1. Usamos la propiedad distributiva para eliminar paréntesis. (Esto tendrá el efecto de cambiar el signo de *cada* término dentro de los paréntesis del polinomio que se resta.)
2. Reducir términos semejantes.

**EJEMPLO 6** Simplificar  $(3x^2 - 2x + 5) - (x^2 - 3x + 4)$ .

**Solución**

$(3x^2 - 2x + 5)$  significa  $1(3x^2 - 2x + 5)$  y  $(x^2 - 3x + 4)$  significa  $1(x^2 - 3x + 4)$ . Utilizamos esta información en la solución, como mostramos a continuación.

$$\begin{aligned} (3x^2 - 2x + 5) - (x^2 - 3x + 4) &= 1(3x^2 - 2x + 5) - 1(x^2 - 3x + 4) \\ &= 3x^2 - 2x + 5 - x^2 + 3x - 4 && \text{Eliminar paréntesis.} \\ &= \underline{3x^2 - x^2} - \underline{2x + 3x} + \underline{5 - 4} && \text{Reacomodar términos.} \\ &= 2x^2 + x + 1 && \text{Reducir términos semejantes. } \star \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 101

En la sección 2.1 vimos que cuando un signo negativo precede al paréntesis, al eliminar éste cambia el signo de cada término de adentro. Mostramos esto en el ejemplo 6. En el ejemplo 7 no mostraremos la multiplicación por  $-1$ , como sí se hizo en el 6.

**EJEMPLO 7** Restar  $(-3x^2 - 5x + 3)$  de  $(x^3 + 2x + 6)$ .

**Solución**

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 107

$$\begin{aligned} & (x^3 + 2x + 6) - (-3x^2 - 5x + 3) \\ &= x^3 + 2x + 6 + 3x^2 + 5x - 3 && \text{Eliminar paréntesis.} \\ &= x^3 + 3x^2 + \underbrace{2x + 5x} + \underbrace{6 - 3} && \text{Reacomodar términos.} \\ &= x^3 + 3x^2 + 7x + 3 && \text{Reducir términos semejantes.} \end{aligned}$$



### CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Uno de los errores más comunes ocurre al restar polinomios. Al restar un polinomio de otro, **debe cambiar el signo de cada término del polinomio sustraído, y no sólo el del primer término.**

**CORRECTO**

$$\begin{aligned} & 6x^2 - 4x + 3 - (2x^2 - 3x + 4) \\ &= 6x^2 - 4x + 3 - 2x^2 + 3x - 4 \\ &= 4x^2 - x - 1 \end{aligned}$$

**INCORRECTO**

~~$$\begin{aligned} & 6x^2 - 4x + 3 - (2x^2 - 3x + 4) \\ &= 6x^2 - 4x + 3 - 2x^2 - 3x + 4 \\ &= 4x^2 - 7x + 7 \end{aligned}$$~~

¡No cometa este error!

## 4 Restar polinomios en columnas

Podemos restar, o sumar, polinomios en columnas.

### Para restar polinomios en columnas

1. Escriba *el polinomio que va a restar* debajo del polinomio del que se restará. Escriba los términos semejantes en la misma columna.
2. *Cambie el signo de cada término* en el polinomio que va a restar. (Si lo desea, puede realizar este paso mentalmente.)
3. Sumar los términos en cada columna.

**EJEMPLO 8** Restar  $(x^2 - 4x + 6)$  de  $(4x^2 + 5x + 7)$  utilizando columnas.

**Solución** Alineamos los términos semejantes en columnas (paso 1).

$$\begin{array}{r} 4x^2 + 5x + 7 \\ -(x^2 - 4x + 6) \end{array} \quad \text{Alinear términos semejantes.}$$

Cambiar *todos* los signos del segundo renglón (paso 2); después, sumamos (paso 3).

$$\begin{array}{r} 4x^2 + 5x + 7 \\ -x^2 + 4x - 6 \\ \hline 3x^2 + 9x + 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Cambiar todos los signos.} \\ \text{Sumar.} \end{array}$$



**EJEMPLO 9** Restar  $(2x^2 - 6)$  de  $(-3x^3 + 4x - 3)$  usando columnas.

**Solución** Para ayudar a alinear los términos semejantes, escribimos cada expresión en orden descendente. Si alguna potencia de  $x$  no aparece, escribimos dicho término con un coeficiente numérico de 0.

$$\begin{aligned} -3x^3 + 4x - 3 &= -3x^3 + 0x^2 + 4x - 3 \\ 2x^2 - 6 &= 2x^2 + 0x - 6 \end{aligned}$$

Alineamos los términos semejantes.

$$\begin{array}{r} -3x^3 + 0x^2 + 4x - 3 \\ -(2x^2 + 0x - 6) \\ \hline \end{array}$$

Cambiamos todos los signos del segundo renglón; después, sumamos los términos en cada columna.

$$\begin{array}{r} -3x^3 + 0x^2 + 4x - 3 \\ \quad -2x^2 - 0x + 6 \\ \hline -3x^3 - 2x^2 + 4x + 3 \end{array}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 115



*Nota:* Veremos que podemos cambiar los signos en forma mental, y por ello hacer la alineación y cambio de signos en un solo paso.

## Conjunto de ejercicios 4.4

### Ejercicios conceptuales

1. ¿Qué es un polinomio?
2. a) ¿Qué es un monomio? Escriba tres ejemplos.  
b) ¿Qué es un binomio? Escriba tres ejemplos.  
c) ¿Qué es un trinomio? Escriba tres ejemplos.
3. a) Explique cómo se encuentra el grado de un término con una variable.  
b) Explique cómo se halla el grado de un polinomio con una variable.
4. Escriba su propio polinomio de quinto grado con tres términos. Explique por qué es un polinomio de quinto grado con tres términos.
5. Explique cómo encontramos el grado de un término en un polinomio con más de una variable.
6. ¿Cuáles de los siguientes son términos de cuarto grado? Explique su respuesta.  
a)  $3xy^2$     b)  $6r^2s^2$     c)  $-2mn^3$
7. Explique por qué  $(3x + 2) - (4x - 6) \neq 3x + 2 - 4x - 6$ .
8. Explique cómo se escribe un polinomio con una variable en orden descendente.
9. ¿Por qué al escribir un polinomio en orden descendente, el término constante siempre se escribe al final?
10. Explique cómo sumamos polinomios.
11. a) Con sus propias palabras, describa la forma de sumar polinomios en columnas.  
b) ¿Cómo reescribiría  $4x^3 + 5x - 7$  a fin de sumarlo a  $3x^3 + x^2 - 4x + 8$ , usando columnas? Explique.
12. ¿ $4x^{-3} + 9$  es un polinomio? Explique.
13. ¿ $6m^3 - 5m^{1/2}$  es un polinomio? Explique.
14. ¿ $5x + \frac{2}{x}$  es un polinomio? Explique.

## Práctica de habilidades

Indique el grado de cada término.

- |               |               |                  |                 |
|---------------|---------------|------------------|-----------------|
| 15. $x^5$     | 16. $z^9$     | 17. $5a^4$       | 18. $-3b^8$     |
| 19. $-12n^7$  | 20. $-13r^6$  | 21. $x^2y$       | 22. $a^4b^3$    |
| 23. $3r^2s^8$ | 24. $6m^5n^8$ | 25. $-12p^4q^7r$ | 26. $-8x^3y^5z$ |

Indique cuáles expresiones son polinomios. Si el polinomio tiene un nombre específico —monomio, binomio o trinomio—, diga cuál es.

- |                                    |                            |  |
|------------------------------------|----------------------------|--|
| 27. $x^2 + 3$                      | 28. $2x^2 - 6x + 7$        | 29. 13   |
| 30. $4x^{-2}$                      | 31. $4x^3 - 8$             | 32. $7x + 8$   |
| 33. $7x^3$                         | 34. $3x^{1/2} + 2x$        | 35. $a^{-1} + 4$                                     |
| 36. $x^3 - 8x^2 + 8$               | 37. $6n^3 - 5n^2 + 4n - 3$ | 38. $10x^2$  |
| 39. $4 - 2b^2 - 5b$                | 40. $2x^{-2}$              | 41. $0.6r^4 - \frac{1}{2}r^3 - 0.4r^2 - \frac{1}{3}$ |
| 42. $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{x}$ |                            |  |

Escriba cada polinomio en orden descendente. Si el polinomio ya se encuentra así, dígallo. Proporcione el grado de cada polinomio.

- |                            |                             |                     |
|----------------------------|-----------------------------|---------------------|
| 43. $4 + 5x$               | 44. 5                       | 45. $-4 + x^2 - 2x$ |
| 46. $6x - 5$               | 47. $x + 3x^2 - 8$          | 48. $4 - 3p^3$      |
| 49. $-x - 1$               | 50. $2x^2 + 5x - 8$         | 51. $2t^2 - 3t + 4$ |
| 52. 15                     | 53. $-4 + x - 3x^2 + 4x^3$  | 54. $1 - x^3 + 3x$  |
| 55. $5x + 3x^2 - 6 - 2x^4$ | 56. $-3r - 5r^2 + 2r^4 - 6$ |                     |

Sumar.

- |  |   |
|--|---|
| 57. $(5x + 4) + (x - 5)$                                     | 58. $(5x - 6) + (2x - 3)$                                   |
| 59. $(-4x + 8) + (2x + 3)$                                   | 60. $(-7x - 9) + (-2x + 9)$                                 |
| 61. $(t + 7) + (-3t - 8)$                                    | 62. $(4x - 3) + (3x - 3)$                                   |
| 63. $(x^2 + 2.6x - 3) + (4x + 3.8)$                          | 64. $(-4p^2 - 3p - 2) + (-p^2 - 4)$                         |
| 65. $(4m - 3) + (5m^2 - 4m + 7)$                             | 66. $(-x^2 - 2x - 4) + (4x^2 + 3)$                          |
| 67. $(2x^2 - 3x + 5) + (-x^2 + 6x - 8)$                      | 68. $(x^2 - 6x + 7) + (-x^2 + 3x + 5)$                      |
| 69. $(-x^2 - 4x + 8) + \left(5x - 2x^2 + \frac{1}{2}\right)$ | 70. $(8x^2 + 3x - 5) + \left(x^2 + \frac{1}{2}x + 2\right)$ |
| 71. $(8x^2 + 4) + (-2.6x^2 - 5x - 2.3)$                      | 72. $(5.2n^2 - 6n + 1.7) + (3n^2 + 1.2n - 2.3)$             |
| 73. $(-7x^3 - 3x^2 + 4) + (4x + 5x^3 - 7)$                   | 74. $(6x^3 - 4x^2 - 7) + (3x^2 + 3x - 3)$                   |
| 75. $(8x^2 + 2xy + 4) + (-x^2 - 3xy - 8)$                    | 76. $(x^2y + 6x^2 - 3xy^2) + (-x^2y - 12x^2 + 4xy^2)$       |
| 77. $(2x^2y + 2x - 3) + (3x^2y - 5x + 5)$                    | 78. $(x^2y + x - y) + (2x^2y + 2x - 6y + 3)$                |

Sumar utilizando columnas.

- |  |   |
|--|---|
| 79. Sumar $3x - 6$ más $4x + 5$ .                            | 80. Sumar $-2x + 5$ más $-3x - 5$ .                   |
| 81. Sumar $4y^2 - 2y + 4$ más $3y^2 + 1$ .                   | 82. Sumar $9x^2 - 5x - 1$ más $-9x^2 + 6$ .           |
| 83. Sumar $-x^2 - 3x + 3$ más $5x^2 + 5x - 7$ .              | 84. Sumar $-2s^2 - s + 5$ más $3s^2 - 6s$ .           |
| 85. Sumar $2x^3 + 3x^2 + 6x - 9$ más $7 - 4x^2$ .            | 86. Sumar $-3x^3 + 3x + 9$ más $2x^2 - 4$ .           |
| 87. Sumar $4n^3 - 5n^2 + n - 6$ más $-n^3 - 6n^2 - 2n + 8$ . | 88. Sumar $7x^3 + 5x - 6$ más $3x^3 - 4x^2 - x + 8$ . |



Restar.

89.  $(4x - 4) - (2x + 2)$
91.  $(-2x - 3) - (-5x - 7)$
93.  $(-r + 5) - (2r + 5)$
95.  $(9x^2 + 7x - 5) - (3x^2 + 3.5)$
97.  $(5x^2 - x - 1) - (-3x^2 - 2x - 5)$
99.  $(-6m^2 - 2m) - (3m^2 - 7m + 6)$
101.  $(8x^3 - 2x^2 - 4x + 5) - (5x^2 + 8)$
103.  $(2x^3 - 4x^2 + 5x - 7) - \left(3x + \frac{3}{5}x^2 - 5\right)$
105. Restar  $(7x + 4)$  de  $(8x + 2)$
107. Restar  $(5x - 6)$  de  $(2x^2 - 4x + 8)$
109. Restar  $(4x^3 - 6x^2)$  de  $(3x^3 + 5x^2 + 9x - 7)$
90.  $(3x - 2) - (4x + 3)$
92.  $(10x - 3) - (-2x + 7)$
94.  $(4x + 8) - (3x + 9)$
96.  $(-y^2 + 4y - 5.2) - (5y^2 + 2.1y + 7.5)$
98.  $(-a^2 + 3a + 12) - (-4a^2 - 3)$
100.  $(7x - 0.6) - (-2x^2 + 4x - 8)$
102.  $\left(9x^3 - \frac{1}{5}\right) - (x^2 + 5x)$
104.  $(-3x^2 + 4x - 7) - \left(x^3 + 4x^2 - \frac{3}{4}x\right)$
106. Restar  $(-4x + 7)$  de  $(-3x - 9)$
108. Restar  $(3x^2 - 5x - 3)$  de  $(-x^2 + 3x + 10)$
110. Restar  $(-2c^2 + 7c - 7)$  de  $(-5c^3 - 6c^2 + 7)$

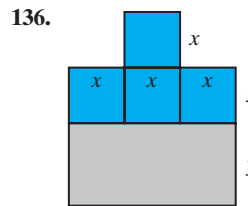
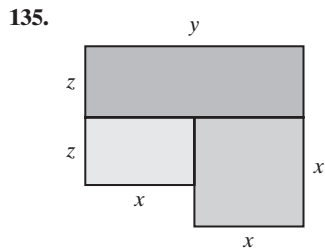
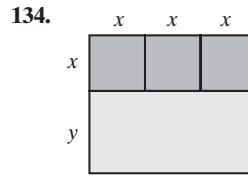
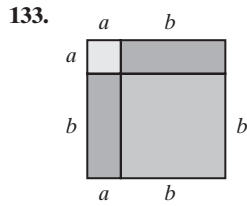
Ejecute cada resta por medio de columnas.

111. Restar  $(3x - 3)$  de  $(6x + 5)$ .
113. Restar  $(-3d - 4)$  de  $(-6d + 8)$ .
115. Restar  $(6x^2 - 1)$  de  $(7x^2 - 3x - 4)$ .
117. Restar  $(-5m^2 + 6m)$  de  $(m - 6)$ .
119. Restar  $(x^2 + 6x - 7)$  de  $(4x^3 - 6x^2 + 7x - 9)$ .
112. Restar  $(6x + 8)$  de  $(2x - 5)$ .
114. Restar  $(-3x + 8)$  de  $(6x^2 - 5x + 3)$ .
116. Restar  $(5n^3 + 7n - 9)$  de  $(2n^3 - 6n + 3)$ .
118. Restar  $(5x^2 + 4)$  de  $(x^2 + 4)$ .
120. Restar  $(2x^3 + 4x^2 - 9x)$  de  $(-5x^3 + 4x - 12)$ .

## Solución de problemas

121. Plantee un problema propio, si el resultado de sumar dos binomios es  $-2x + 4$ .
122. Construya un problema propio, en el que el resultado de sumar dos trinomios sea  $2x^2 + 5x - 6$ .
123. Elabore un problema propio, en el que la diferencia de dos trinomios sea  $3x + 5$ .
124. Plantee un problema propio, si la diferencia de dos trinomios es  $-x^2 + 4x - 5$ .
125. Cuando sumamos dos binomios, ¿la suma será un binomio siempre, a veces o nunca? Explique su respuesta y proporcione ejemplos que la sustenten.
126. Al restar un binomio de otro, ¿la diferencia será un binomio siempre, a veces o nunca? Explique la respuesta y proporcione ejemplos que la sustenten.
127. Si sumamos dos trinomios, ¿el resultado será un trinomio siempre, a veces o nunca? Explique su respuesta y proporcione ejemplos que la apoyen.
128. Si un trinomio se resta de otro, ¿la diferencia será un trinomio siempre, a veces o nunca? Explique su respuesta y dé ejemplos que la sustenten.
129. Escriba un trinomio de quinto grado con la variable  $x$ , que no tenga términos de tercer grado ni de segundo.
130. Escriba un trinomio de sexto grado con la variable  $x$ , que carezca de términos de quinto grado, cuarto o cero.
131. ¿Es posible tener un trinomio de quinto grado con  $x$  que no tenga términos de cuarto grado, tercero, segundo o primero, y no contenga términos semejantes? Explique su respuesta.
132. ¿Es posible tener un trinomio de cuarto grado con  $x$  que no tenga términos de tercer grado, segundo o cero, y no contenga términos semejantes? Explique su respuesta.

Escriba un polinomio que represente el área de cada una de las figuras mostradas.



## Problemas de reto

Simplificar.

137.  $(3x^2 - 6x + 3) - (2x^2 - x - 6) - (x^2 + 7x - 9)$

138.  $3x^2y - 6xy - 2xy + 9xy^2 - 5xy + 3x$

139.  $4(x^2 + 2x - 3) - 6(2 - 4x - x^2) - 2x(x + 2)$

## Actividad en grupo

Como grupo, estudien y solucionen el ejercicio 140.

140. Construyan un trinomio, un binomio y un trinomio diferente tal que (el primer trinomio) + (el binomio) - (segundo trinomio) = 0.

## Ejercicios de repaso acumulativo

[1.5] 141. Inserte cualquiera de los símbolos  $>$ ,  $<$  o  $=$  en el área sombreada, de modo que el enunciado sea verdadero:  $|-9|$    $|-6|$ .

[1.6-1.8] Indique si cada enunciado es verdadero o falso.

142. El producto de dos números negativos siempre es un número positivo.  
 143. La suma de dos números negativos siempre da como resultado un número negativo.  
 144. La diferencia de dos números negativos siempre es otro número negativo.

145. El cociente de dos números negativos siempre es otro número negativo.

[4.1] 146. Simplifique la expresión  $\left(\frac{4x^3y^5}{12x^7y^4}\right)^3$ .

## 4.5 MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS



- 1 Multiplicar un monomio por otro monomio.
- 2 Multiplicar un polinomio por un monomio.
- 3 Multiplicar binomios por medio de la propiedad distributiva.
- 4 Multiplicar binomios por medio del método PIES.
- 5 Multiplicar binomios con el uso de productos notables.
- 6 Multiplicar un polinomio por otro polinomio.

## 1 Multiplicar un monomio por otro monomio

Comenzaremos nuestro análisis de la multiplicación de polinomios multiplicando un monomio por otro monomio. Para multiplicar dos monomios, multiplicamos sus coeficientes y empleamos la regla del producto de los exponentes para determinar los exponentes de las variables. En la sección 4.1 resolvimos problemas de este tipo.

**EJEMPLO 1** Multiplicar **a)**  $(4x^2)(5x^5)$       **b)**  $(-6y^4)(8y^7)$

**Solución** **a)**  $(4x^2)(5x^5) = 4 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot x^5 = 20x^{2+5} = 20x^7$   
**b)**  $(-6y^4)(8y^7) = (-6)(8) \cdot y^4 \cdot y^7 = -48y^{4+7} = -48y^{11}$  \*

**EJEMPLO 2** Multiplicar  $(6x^2y)(7x^5y^4)$ .

**Solución** Recuerde que cuando una variable no tiene exponentes, suponemos que el exponente es 1.

$$(6x^2y)(7x^5y^4) = 42x^{2+5}y^{1+4} = 42x^7y^5 \quad *$$

**EJEMPLO 3** Multiplicar **a)**  $6xy^2z^5(-3x^4y^7z)$       **b)**  $(-4x^4z^9)(-3xy^7z^3)$

**Solución** **a)**  $6xy^2z^5(-3x^4y^7z) = -18x^5y^9z^6$       **b)**  $(-4x^4z^9)(-3xy^7z^3) = 12x^5y^7z^{12}$  \*

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 21

## 2 Multiplicar un polinomio por un monomio

Para multiplicar un polinomio por un monomio, empleamos la propiedad distributiva presentada anteriormente.

$$a(b + c) = ab + ac$$

Podemos extender la propiedad distributiva como sigue:

$$a(b + c + d + \cdots + n) = ab + ac + ad + \cdots + an$$

**EJEMPLO 4** Multiplicar  $3x(2x^2 + 4)$ .

**Solución** 
$$3x(2x^2 + 4) = (3x)(2x^2) + (3x)(4) \\ = 6x^3 + 12x \quad *$$

Observe que el uso de la propiedad distributiva da como resultado monomios multiplicados por monomios. Si estudiamos el ejemplo 4 veremos que tanto  $3x$  como  $2x^2$  son monomios, al igual que  $3x$  y  $4$ .

**EJEMPLO 5** Multiplicar  $-3n(4n^2 - 2n - 1)$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} -3n(4n^2 - 2n - 1) &= (-3n)(4n^2) + (-3n)(-2n) + (-3n)(-1) \\ &= -12n^3 + 6n^2 + 3n \end{aligned}$$



**EJEMPLO 6** Multiplicar  $5x^2(4x^3 - 2x + 7)$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} 5x^2(4x^3 - 2x + 7) &= (5x^2)(4x^3) + (5x^2)(-2x) + (5x^2)(7) \\ &= 20x^5 - 10x^3 + 35x^2 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 35



**EJEMPLO 7** Multiplicar  $2x(3x^2y - 6xy + 5)$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} 2x(3x^2y - 6xy + 5) &= (2x)(3x^2y) + (2x)(-6xy) + (2x)(5) \\ &= 6x^3y - 12x^2y + 10x \end{aligned}$$



En el ejemplo 8 realizamos una multiplicación en la que colocamos el monomio a la derecha del polinomio. Multiplicamos cada término del polinomio por el monomio, como observamos en el ejemplo.

**EJEMPLO 8** Multiplicar  $(3x^3 - 2xy + 3)4x$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} (3x^3 - 2xy + 3)4x &= (3x^3)(4x) + (-2xy)(4x) + (3)(4x) \\ &= 12x^4 - 8x^2y + 12x \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 41



Pudimos escribir el problema del ejemplo 8 como  $4x(3x^3 - 2xy + 3)$ , según la propiedad conmutativa de la multiplicación, y después simplificarlo como en los ejemplos 4 a 7.

### 3 Multiplicar binomios por medio de la propiedad distributiva

A continuación estudiaremos la multiplicación de un binomio por otro. Antes de explicarla, considere el problema de multiplicar  $43 \cdot 12$ .

$$\begin{array}{r} 43 \leftarrow \text{Multiplicando.} \\ 12 \leftarrow \text{Multiplicador.} \\ \hline 2(4) \longrightarrow 86 \leftarrow 2(3). \\ 1(4) \longrightarrow 43 \leftarrow 1(3). \\ \hline 516 \leftarrow \text{Producto.} \end{array}$$

Observe que el 2 multiplica tanto al 3 como al 4, y el 1 también multiplica tanto al 3 como al 4. Es decir, cada dígito del multiplicador multiplica a cada dígito en el multiplicando. El proceso de la multiplicación también se ilustra como sigue.

$$\begin{aligned} (43)(12) &= (40 + 3)(10 + 2) \\ &= (40 + 3)(10) + (40 + 3)(2) \\ &= (40)(10) + (3)(10) + (40)(2) + (3)(2) \\ &= 400 + 30 + 80 + 6 \\ &= 516 \end{aligned}$$

Siempre que multiplique dos polinomios debe seguir el mismo proceso. Es decir, **cada término de un polinomio debe multiplicar a cada término del otro polinomio.**

Considere la multiplicación de  $(a+b)(c+d)$ . Si se trata a  $(a+b)$  como un solo término y se emplea la propiedad distributiva, se obtiene

$$(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d$$

Al emplear la propiedad distributiva por segunda vez, queda

$$= ac + bc + ad + bd$$

Observe que multiplicamos cada término del primer polinomio por cada término del segundo, y que para obtener la respuesta sumamos todos los productos.

**EJEMPLO 9** Multiplicar  $(3x + 2)(x - 5)$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} (3x + 2)(x - 5) &= (3x + 2)x + (3x + 2)(-5) \\ &= 3x(x) + 2(x) + 3x(-5) + 2(-5) \\ &= 3x^2 + 2x - 15x - 10 \\ &= 3x^2 - 13x - 10 \end{aligned}$$



Observe que después de realizar la multiplicación reducimos los términos semejantes.

**EJEMPLO 10** Multiplicar  $(x - 4)(y + 3)$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} (x - 4)(y + 3) &= (x - 4)y + (x - 4)3 \\ &= xy - 4y + 3x - 12 \end{aligned}$$



#### 4 Multiplicar binomios por medio del método PIES

Un método común empleado para multiplicar dos binomios es el **método PIES**. Este procedimiento también hace que cada término de un binomio se multiplique por cada término del otro. Con frecuencia los estudiantes prefieren utilizar este método para multiplicar dos binomios.

##### El método PIES

Considere la multiplicación  $(a+b)(c+d)$ .

**P** Se refiere a los **primeros** (multiplicar los primeros términos de cada binomio):

$$\begin{array}{c} P \\ \overbrace{(a + b)(c + d)} \\ \text{producto } ac \end{array}$$

**I** Denota los **internos** (multiplicar los dos términos internos):

$$\begin{array}{c} I \\ \overbrace{(a + b)(c + d)} \\ \text{producto } bc \end{array}$$

**E** Son los **externos** (multiplicar los dos términos externos):

$$\begin{array}{c} E \\ \overbrace{(a + b)(c + d)} \\ \text{producto } ad \end{array}$$

**S** Los **segundos** (multiplicar los segundos términos de cada binomio):

$$\begin{array}{c} S \\ \overbrace{(a + b)(c + d)} \\ \text{producto } bd \end{array}$$

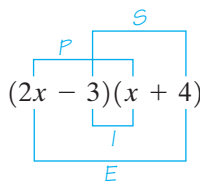
El producto de los dos binomios es la suma de estos cuatro productos.

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$$

En sí, el método PIES no es un sistema diferente para multiplicar binomios, sino un acrónimo para ayudar a los estudiantes a recordar la aplicación correcta de la propiedad distributiva. Hubiera podido usarse EPIS o cualquier otro arreglo de las cuatro letras. Sin embargo, PIES es más sencillo de recordar.

**EJEMPLO 11** Utilice el método PIES para multiplicar  $(2x - 3)(x + 4)$ .

**Solución**



$$\begin{aligned}
 & \text{P} \quad \text{I} \quad \text{E} \quad \text{S} \\
 & = (2x)(x) + (-3)(x) + (2x)(4) + (-3)(4) \\
 & = 2x^2 - 3x + 8x - 12 \\
 & = 2x^2 + 5x - 12
 \end{aligned}$$

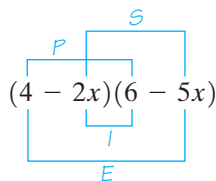
**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 45**

Así,  $(2x - 3)(x + 4) = 2x^2 + 5x - 12$ .



**EJEMPLO 12** Multiplicar  $(4 - 2x)(6 - 5x)$ .

**Solución**



$$\begin{aligned}
 & \text{P} \quad \text{I} \quad \text{E} \quad \text{S} \\
 & = 4(6) + (-2x)(6) + 4(-5x) + (-2x)(-5x) \\
 & = 24 - 12x - 20x + 10x^2 \\
 & = 10x^2 - 32x + 24
 \end{aligned}$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 63**

Así,  $(4 - 2x)(6 - 5x) = 10x^2 - 32x + 24$ .



**EJEMPLO 13** Multiplicar  $(2r + 3)(2r - 3)$ .

**Solución**

$$\begin{aligned}
 & \text{P} \quad \text{I} \quad \text{E} \quad \text{S} \\
 (2r + 3)(2r - 3) & = (2r)(2r) + (3)(2r) + (2r)(-3) + (3)(-3) \\
 & = 4r^2 - 6r + 6r - 9 \\
 & = 4r^2 - 9
 \end{aligned}$$

Así,  $(2r + 3)(2r - 3) = 4r^2 - 9$ .



### SUGERENCIA

CONSEJO PARA ESTUDIAR

Asegúrese de entender por completo la multiplicación de polinomios. En el siguiente capítulo estudiaremos la factorización, que es el proceso inverso de la multiplicación de polinomios. Para entender la factorización, primero debe entender la multiplicación de polinomios.

## 5 Multiplicar binomios con el uso de productos notables

El ejemplo 13 ilustra un producto notable, el producto de la suma y diferencia de dos términos iguales (**binomios conjugados**).

### Producto de la suma y resta de dos términos iguales (binomios conjugados)

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

En este producto notable,  $a$  representa un término y  $b$  el otro. Entonces,  $(a+b)$  es la suma de los términos, y  $(a-b)$  es la diferencia de ellos. Este producto notable también se conoce como la **fórmula para la diferencia de cuadrados** ya que la expresión en el lado derecho del signo igual es la diferencia de dos cuadrados.

**EJEMPLO 14** Utilice la regla para encontrar el producto de dos binomios conjugados (la suma y diferencia de dos cantidades) para cada expresión.

**a)**  $(x + 5)(x - 5)$       **b)**  $(2x + 4)(2x - 4)$       **c)**  $(3x + 2y)(3x - 2y)$

**Solución** **a)** Sea  $x = a$  y  $5 = b$ , entonces

$$\begin{array}{ccccccc} (a + b)(a - b) & = & a^2 & - & b^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (x + 5)(x - 5) & = & (x)^2 & - & (5)^2 \\ & & & & & & = x^2 - 25 \end{array}$$


**b)**

$$\begin{array}{ccccccc} (a + b)(a - b) & = & a^2 & - & b^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (2x + 4)(2x - 4) & = & (2x)^2 & - & (4)^2 \\ & & & & & & = 4x^2 - 16 \end{array}$$

**c)**

$$\begin{array}{ccccccc} (a + b)(a - b) & = & a^2 & - & b^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (3x + 2y)(3x - 2y) & = & (3x)^2 & - & (2y)^2 \\ & & & & & & = 9x^2 - 4y^2 \end{array}$$


**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 77**

El ejemplo 14 también hubiera podido resolverse mediante el método PIES. 

**EJEMPLO 15** Con el método PIES, encuentre  $(x + 3)^2$ .

**Solución**  $(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3)$

$$\begin{array}{cccc} & \mathbf{P} & \mathbf{I} & \mathbf{E} & \mathbf{S} \\ = & x(x) & + & 3(x) & + & x(3) & + & (3)(3) \\ = & x^2 & + & 3x & + & 3x & + & 9 \\ = & x^2 & + & 6x & + & 9 \end{array}$$

El ejemplo 15 ilustra el **cuadrado de un binomio**, que es otro producto notable. 

**Fórmulas del cuadrado de un binomio**

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$

Para elevar un binomio al cuadrado, sumamos el cuadrado del primer término más el doble producto de los dos términos, más el cuadrado del segundo término.

**EJEMPLO 16** Utilice la fórmula del cuadrado de un binomio para multiplicar cada expresión.

**a)**  $(x + 5)^2$       **b)**  $(2x - 4)^2$       **c)**  $(3r + 2s)^2$       **d)**  $(x - 3)(x - 3)$

**Solución** **a)** Sea  $x = a$  y  $5 = b$ , entonces

$$\begin{array}{ccccccc} (a + b)(a + b) & = & a^2 & + & 2ab & + & b^2 \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \downarrow & & \downarrow \\ (x + 5)^2 & = & (x + 5)(x + 5) & = & (x)^2 + 2(x)(5) + (5)^2 \\ & & & & = & & x^2 + 10x + 25 \end{array}$$

**b)**

$$\begin{array}{ccccccc} (a - b)(a - b) & = & a^2 & - & 2ab & + & b^2 \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \downarrow & & \downarrow \\ (2x - 4)^2 & = & (2x - 4)(2x - 4) & = & (2x)^2 - 2(2x)(4) + (4)^2 \\ & & & & = & & 4x^2 - 16x + 16 \end{array}$$

**c)**

$$\begin{array}{ccccccc} (a + b)(a + b) & = & a^2 & + & 2ab & + & b^2 \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \downarrow & & \downarrow \\ (3r + 2s)^2 & = & (3r + 2s)(3r + 2s) & = & (3r)^2 + 2(3r)(2s) + (2s)^2 \\ & & & & = & & 9r^2 + 12rs + 4s^2 \end{array}$$

**d)**

$$\begin{array}{ccccccc} (a - b)(a - b) & = & a^2 & - & 2ab & + & b^2 \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \downarrow & & \downarrow \\ (x - 3)(x - 3) & = & (x - 3)(x - 3) & = & (x)^2 - 2(x)(3) + (3)^2 \\ & & & & = & & x^2 - 6x + 9 \end{array}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 83



El ejemplo 16 también hubiera podido resolverse con el método PIES.

**CÓMO EVITAR  
ERRORES COMUNES**

**CORRECTO**

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

**INCORRECTO**

~~$$(a + b)^2 = a^2 + b^2$$~~

~~$$(a - b)^2 = a^2 - b^2$$~~

Al elevar al cuadrado un binomio, no hay que olvidar el término medio.

$$(x + 2)^2 \neq x^2 + 4$$

$$\begin{aligned} (x + 2)^2 &= (x + 2)(x + 2) \\ &= x^2 + 4x + 4 \end{aligned}$$

**6 Multiplicar un polinomio por otro polinomio**

Al multiplicar un binomio por otro, vimos que cada término del primero se multiplica por cada término del segundo. Cuando se trata de dos polinomios, debemos multiplicar cada término de un polinomio por cada término del otro. En la multiplicación  $(3x + 2)(4x^2 - 5x - 3)$ , utilizamos la propiedad distributiva del siguiente modo:



$$\begin{aligned}
 & (3x + 2)(4x^2 - 5x - 3) \\
 &= 3x(4x^2 - 5x - 3) + 2(4x^2 - 5x - 3) \\
 &= 12x^3 - 15x^2 - 9x + 8x^2 - 10x - 6 \\
 &= 12x^3 - 7x^2 - 19x - 6
 \end{aligned}$$

Por tanto,  $(3x + 2)(4x^2 - 5x - 3) = 12x^3 - 7x^2 - 19x - 6$ .

Podemos resolver los problemas de multiplicación utilizando la propiedad distributiva, como acabamos de mostrar; sin embargo, muchos estudiantes prefieren multiplicar un polinomio por otro en forma vertical. En la página 281 mostramos que para multiplicar 43 por 12, multiplicamos cada dígito del número 43 por cada dígito del número 12. Ahora lo invitamos a revisar ese ejemplo. Cuando multipliquemos un polinomio por otro es posible seguir un procedimiento similar, como en los siguientes ejemplos; no obstante, al ejecutar las multiplicaciones individuales debemos tener cuidado para alinear los términos semejante en sus columnas correspondientes.

**EJEMPLO 17** Multiplicar  $(3x + 4)(2x + 5)$ .

**Solución** En primer lugar escribimos los polinomios uno sobre el otro.

$$\begin{array}{r}
 3x + 4 \\
 2x + 5 \\
 \hline
 \end{array}$$

A continuación, multiplicamos cada término de  $(3x + 4)$  por 5.

$$\begin{array}{r}
 3x + 4 \\
 2x + 5 \\
 \hline
 5(3x + 4) \longrightarrow 15x + 20
 \end{array}$$

En seguida, multiplicamos cada término de  $(3x + 4)$  por  $2x$ , y alineamos los términos semejantes.

$$\begin{array}{r}
 3x + 4 \\
 2x + 5 \\
 \hline
 15x + 20 \\
 2x(3x + 4) \longrightarrow 6x^2 + 8x \\
 \hline
 6x^2 + 23x + 20
 \end{array}$$

*Sumar términos semejantes por columnas.* ✨

Con el método PIES, hubiéramos obtenido la misma respuesta para el ejemplo 17.

**EJEMPLO 18** Multiplicar  $(3x - 2)(5x^2 + 6x - 4)$ .

**Solución** Por conveniencia, colocamos la expresión más corta en la parte inferior

$$\begin{array}{r}
 5x^2 + 6x - 4 \\
 3x - 2 \\
 \hline
 -10x^2 - 12x + 8 \\
 15x^3 + 18x^2 - 12x \\
 \hline
 15x^3 + 8x^2 - 24x + 8
 \end{array}$$

*Multiplicar el polinomio de arriba por -2.*  
*Multiplicar el polinomio de arriba por 3x, y alineamos los términos semejantes.*  
*Sumamos términos semejantes por columnas.* ✨

**EJEMPLO 19** Multiplicar  $x^2 - 3x + 2$  por  $2x^2 - 3$ .

**Solución**

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 3x + 2 \\
 2x^2 - 3 \\
 \hline
 -3x^2 + 9x - 6 \\
 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 \\
 \hline
 2x^4 - 6x^3 + x^2 + 9x - 6
 \end{array}$$

*Multiplicar el polinomio de arriba por -3.*  
*Multiplicar el polinomio de arriba por 2x^2; alinear términos semejantes.*  
*Sumar términos semejantes por columnas.* ✨

**EJEMPLO 20** Multiplicar  $(3x^3 - 2x^2 + 4x + 6)(x^2 - 5x)$ .

**Solución**

$$\begin{array}{r} 3x^3 - 2x^2 + 4x + 6 \\ \phantom{3x^3 - 2x^2 + 4x + 6} \phantom{0}x^2 - 5x \\ \hline -15x^4 + 10x^3 - 20x^2 - 30x \\ 3x^5 - 2x^4 + 4x^3 + 6x^2 \\ \hline 3x^5 - 17x^4 + 14x^3 - 14x^2 - 30x \end{array}$$

*Multiplicar el polinomio de arriba por  $-5x$ .*

*Multiplicar el polinomio de arriba por  $x^2$ ; alinear términos semejantes.*

*Sumar términos semejantes por columnas.*



## Conjunto de ejercicios 4.5

### Ejercicios conceptuales

- ¿Cuál es el nombre de la propiedad que empleamos para multiplicar un monomio por un polinomio?
- Explique cómo se multiplica un monomio por otro monomio.
- ¿Qué significan las letras del acrónimo PIES?
- ¿Cómo funciona el método PIES cuando multiplicamos dos binomios?
- Al multiplicar dos binomios, ¿obtenemos el mismo resultado si multiplicamos en el orden SIEP, en lugar de PIES? Explique su respuesta.
- ¿Por qué denominamos al producto notable  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ , también como *fórmula de la diferencia de cuadrados*?
- Escriba las fórmulas de cuadrado de un binomio.
- En sus propias palabras describa cómo elevamos un binomio al cuadrado.
- ¿Se cumple que  $(x + 5)^2 = x^2 + 5^2$ ? Explique su respuesta. Si no se cumple, ¿cuál es el resultado correcto?
- ¿Es verdad que  $(x + 3)^2 = x^2 + 3^2$ ? Explique. Si no es verdad, ¿cuál es la respuesta correcta?
- Escriba un problema de multiplicación en el que multipliquemos un monomio con  $x$  por un binomio con  $x$ . Calcule el producto.
- Escriba un problema de multiplicación en el que multipliquemos un monomio con  $y$  por un trinomio con  $y$ . Determine el producto.
- Escriba un problema de multiplicación donde multipliquemos dos binomios con  $x$ . Obtenga el producto.
- Cuando multiplicamos dos polinomios, ¿es necesario que cada término de uno multiplique a cada término del otro?

### Práctica de habilidades

*Multiplicar.*

- |                             |                           |  |
|-----------------------------|---------------------------|--|
| 15. $x^3 \cdot 2xy$         | 16. $6xy^2 \cdot 3xy^4$   | 17. $5x^3y^5(4x^2y)$                     |
| 18. $-5x^2y^4(2x^3y^2)$     | 19. $4x^4y^6(-7x^2y^9)$   | 20. $4a^3b^7(6a^2b)$                     |
| 21. $9xy^6 \cdot 6x^5y^8$   | 22. $(6m^3n^4)(3n^5)$     | 23. $(6x^2y)\left(\frac{1}{2}x^4\right)$ |
| 24. $\frac{3}{4}x(8x^2y^3)$ | 25. $(3.3x^4)(1.8x^4y^3)$ | 26. $(2.3x^5)(4.1x^2y^4)$                |

*Multiplicar.*

- |                              |   |
|------------------------------|---|
| 27. $5(x + 4)$               | 28. $3(x - 4)$                          |
| 29. $-3x(2x - 2)$            | 30. $-4p(-3p + 6)$                      |
| 31. $-2(8y + 5)$             | 32. $2x(x^2 + 3x - 1)$                  |
| 33. $-2x(x^2 - 2x + 5)$      | 34. $-6c(-3c^2 + 5c - 6)$               |
| 35. $5x(-4x^2 + 6x - 4)$     | 36. $(x^2 - x + 1)x$                    |
| 37. $0.5x^2(x^3 - 6x^2 - 1)$ | 38. $2.3b^2(2b^2 - b + 3)$              |
| 39. $0.3x(2xy + 5x - 6y)$    | 40. $-\frac{1}{2}x^3(2x^2 + 4x - 6y^2)$ |
| 41. $(x^2 - 4y^3 - 3)y^4$    | 42. $\frac{1}{4}y^4(y^2 - 12y + 4x)$    |

*Multiplicar.*

43.  $(x + 3)(x + 4)$

45.  $(2x + 5)(3x - 6)$

47.  $(2x - 4)(2x + 4)$

49.  $(5 - 3x)(6 + 2x)$

51.  $(6x - 1)(-2x + 5)$

53.  $(x - 2)(4x - 2)$

55.  $(3k - 6)(4k - 2)$

57.  $(x - 2)(x + 2)$

59.  $(2x - 3)(2x - 3)$

61.  $(6z - 4)(7 - z)$

63.  $(2x + 3)(4 - 2x)$

65.  $(x + y)(x - y)$

67.  $(2x - 3y)(3x + 2y)$

69.  $(3x + y)(2 + 2x)$

71.  $(x + 0.6)(x + 0.3)$

73.  $(2y - 4)\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$

44.  $(2x - 3)(x + 5)$

46.  $(4a - 1)(a + 4)$

48.  $(4 + 5w)(3 + w)$

50.  $(-x + 3)(2x + 5)$

52.  $(2n - 4)(3n - 2)$

54.  $(2x + 3)(x + 5)$

56.  $(3d - 5)(4d - 1)$

58.  $(3x - 8)(2x + 3)$

60.  $(7x + 3)(2x + 4)$

62.  $(6 - 2m)(5m - 3)$

64.  $(5 - 6x)(2x - 7)$

66.  $(z + 2y)(4z - 3)$

68.  $(2x + 3)(2y - 5)$

70.  $(2x - 0.1)(x + 2.4)$

72.  $(3x - 6)\left(x + \frac{1}{3}\right)$

74.  $(x + 4)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

*Con alguna fórmula de productos notables, haga las siguientes multiplicaciones.*

75.  $(x + 6)(x - 6)$

78.  $(r - 4)(r - 4)$

81.  $(x - 0.2)^2$

84.  $(5x + 4)(5x - 4)$

87.  $(5a - 7b)(5a + 7b)$

90.  $(-3m + 2n)(-3m - 2n)$

76.  $(x + 3)^2$

79.  $(x + y)^2$

82.  $(a + 3b)(a - 3b)$

85.  $(0.4x + y)^2$

88.  $(4 + 3w)(4 - 3w)$

91.  $(7a + 2)^2$

77.  $(3x - 3)(3x + 3)$

80.  $(2x - 3)(2x + 3)$

83.  $(4x + 5)(4x + 5)$

86.  $\left(x - \frac{1}{2}y\right)^2$

89.  $(-2x + 6)(-2x - 6)$

92.  $(7s - 3t)^2$

*Multiplicar.*

93.  $(x + 4)(3x^2 + 4x - 1)$

95.  $(3x + 2)(4x^2 - x + 5)$

97.  $(-2x^2 - 4x + 1)(7x - 3)$

99.  $(-3a + 5)(2a^2 + 4a - 3)$

101.  $(3x^2 - 2x + 4)(2x^2 + 3x + 1)$

103.  $(x^2 - x + 3)(x^2 - 2x)$

105.  $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

94.  $(4m + 3)(4m^2 - 5m + 6)$

96.  $(x - 1)(3x^2 + 3x + 2)$

98.  $(4x^2 + 9x - 2)(x - 2)$

100.  $(5d^2 + 1)(3d - 2)$

102.  $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 4)$

104.  $(6x + 4)(2x^2 + 2x - 4)$

106.  $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

*Determine el cubo de cada expresión como el cuadrado de una expresión multiplicada por otra. Por ejemplo,  $(x + 3y)^3 = (x + 3y)(x + 3y)^2$ .*

107.  $(x + 2)^3$

109.  $(3a - 5)^3$

108.  $(b - 1)^3$

110.  $(2z + 3)^3$

## Solución de problemas

111. El producto de un monomio por un binomio, ¿será siempre un trinomio? Explique su respuesta.

112. El producto de un monomio por otro, ¿será siempre un monomio? Explique su respuesta.

113. El producto de dos binomios después de reducir los términos semejantes, ¿es siempre un trinomio? Explique su respuesta.

114. El producto de cualquier polinomio por un binomio, ¿es siempre un polinomio? Explique.

Considere las multiplicaciones de los ejercicios 115 y 116. Determine los exponentes por colocar en las áreas sombreadas.

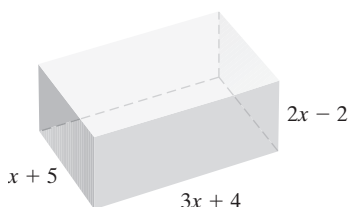
115.  $3x^2(2x^{\square} - 5x^{\square} + 3x^{\square}) = 6x^8 - 15x^5 + 9x^3$ .

116.  $4x^3(x^{\square} + 2x^{\square} - 5x^{\square}) = 4x^7 + 8x^5 - 20x^4$ .

117. Suponga que un lado de un rectángulo se representa como  $x + 2$ , y el otro lado como  $2x + 1$ .

- Expresar el área del rectángulo en términos de  $x$ .
- Encuentre el área si  $x = 4$  pies.
- ¿Qué valor tendría  $x$ , en pies, si el rectángulo fuera un cuadrado? Explique cómo determinó su respuesta.

118. Suponga que un sólido rectangular tiene una longitud de  $x + 5$ , ancho de  $3x + 4$ , y altura de  $2x - 2$  (vea la figura).



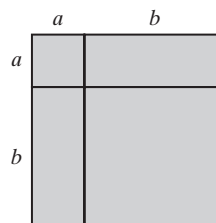
- Escriba un polinomio que represente el área de la base, con la multiplicación de la longitud por el ancho.
- El volumen de la figura se encuentra con la multiplicación del área de la base por la altura. Escriba un polinomio que represente el volumen de la figura.

c) Utilice el polinomio del inciso b), calcule el volumen de la figura si  $x$  es igual a 4 pies.

d) Con el uso de los binomios dados para la longitud, ancho y altura, calcule el volumen si  $x$  es igual a 4 pies.

e) ¿Las respuestas para los incisos c) y d) son las mismas? Si no lo son, explique por qué.

119. Considere la siguiente figura.



- Escriba una expresión para la longitud de la parte superior.
- Escriba una expresión para la longitud del lado izquierdo.
- ¿Es esta figura un cuadrado? Explique.
- Expresar el área de este cuadrado como el cuadrado de un binomio.
- Determine el área del cuadrado con la suma de las áreas de los cuatro elementos individuales.
- Con el uso de la figura y la respuesta del inciso e), complete la siguiente ecuación

$$(a + b)^2 = ?$$

## Problemas de reto

Multiplique.

120.  $\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{5}\right)$

121.  $(2x^3 - 6x^2 + 5x - 3)(3x^3 - 6x + 4)$



## Actividad en grupo

122. Consideren el trinomio  $2x^2 + 7x + 3$ .

- Como grupo, determinen si existe un número máximo de parejas de binomios cuyo producto sea  $2x^2 + 7x + 3$ . Es decir, ¿cuántas parejas diferentes de binomios podrían ocupar las áreas sombreadas?

$$2x^2 + 7x + 3 = (\square)(\square)$$

b) En forma individual, encuentre una pareja de binomios cuyo producto sea  $2x^2 + 7x + 3$ .

c) Compare su respuesta para el inciso b) con las del resto del grupo. Si no llegaron a la misma solución, expliquen por qué.

## Ejercicios de repaso acumulativo

[2.5] 123. Resuelva la ecuación  $4(x + 2) - 3 = 4x + 5$ .

[4.1] 125. Simplifique la expresión  $\left(\frac{3xy^4}{6y^6}\right)^4$ .

[3.3] 124. **Viaje en taxi** El costo de un viaje en taxi es de \$2.00 por la primera milla y \$1.50 por cada milla adicional o fracción. Encuentre la distancia máxima que Bill Lee puede viajar en taxi si sólo tiene \$20.

[4.1–4.2] 126. Evalúe lo siguiente.

a)  $-6^3$       b)  $6^{-3}$

[4.4] 127. Reste  $4x^2 - 4x - 3$  de  $-x^2 - 6x + 5$ .

## 4.6 DIVISIÓN DE POLINOMIOS



- 1 Dividir un polinomio entre un monomio.
- 2 Dividir un polinomio entre un binomio.
- 3 Comprobación de problemas de división de polinomios.
- 4 Escribir polinomios en orden descendente al dividir.

## 1 Dividir un polinomio entre un monomio

A continuación veremos cómo dividir polinomios. Comenzaremos con la división de un polinomio entre un monomio.

## Para dividir un polinomio entre un monomio

Dividimos cada término del polinomio entre el monomio.

**EJEMPLO 1** Dividir a)  $\frac{2x + 16}{2}$       b)  $\frac{10x^2 - 4x}{2x}$

**Solución** a)  $\frac{2x + 16}{2} = \frac{2x}{2} + \frac{16}{2} = x + 8$   
 b)  $\frac{10x^2 - 4x}{2x} = \frac{10x^2}{2x} - \frac{4x}{2x} = 5x - 2$

CÓMO EVITAR  
ERRORES COMUNES

## CORRECTO

$$\frac{x + 2}{2} = \frac{x}{2} + \frac{2}{2} = \frac{x}{2} + 1$$

$$\frac{x + 2}{x} = \frac{x}{x} + \frac{2}{x} = 1 + \frac{2}{x}$$

## INCORRECTO

~~$$\frac{x + \frac{2}{2}}{\frac{2}{1}} = \frac{x + 1}{1} = x + 1$$~~

~~$$\frac{\frac{1}{x} + 2}{\frac{1}{x}} = \frac{1 + 2}{1} = 3$$~~

¿Puede explicar por qué los procedimientos de la derecha no son correctos?

**EJEMPLO 2** Dividir:  $\frac{4t^5 - 6t^4 + 8t - 3}{2t^2}$ .

**Solución** 
$$\frac{4t^5 - 6t^4 + 8t - 3}{2t^2} = \frac{4t^5}{2t^2} - \frac{6t^4}{2t^2} + \frac{8t}{2t^2} - \frac{3}{2t^2}$$
  

$$= 2t^3 - 3t^2 + \frac{4}{t} - \frac{3}{2t^2}$$



**EJEMPLO 3** Dividir:  $\frac{3x^3 - 6x^2 + 4x - 1}{-3x}$ .

**Solución** Aparece un signo negativo en el denominador. Por lo general, es más fácil dividir si el divisor es positivo. A fin de obtener un denominador positivo, es posible multiplicar tanto el numerador como el denominador entre  $-1$ .

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 37

$$\begin{aligned}\frac{(-1)(3x^3 - 6x^2 + 4x - 1)}{(-1)(-3x)} &= \frac{-3x^3 + 6x^2 - 4x + 1}{3x} \\ &= \frac{-3x^3}{3x} + \frac{6x^2}{3x} - \frac{4x}{3x} + \frac{1}{3x} \\ &= -x^2 + 2x - \frac{4}{3} + \frac{1}{3x}\end{aligned}$$



## 2 Dividir un polinomio entre un binomio

Dividimos un polinomio entre un binomio de manera muy parecida a como realizamos una división larga. Explicaremos este procedimiento en el ejemplo 4.

**EJEMPLO 4** Dividir:  $\frac{x^2 + 6x + 8}{x + 2}$ . ← *Dividendo.*  
← *Divisor.*

**Solución** Reescribimos el problema de la división de la siguiente manera:

$$x + 2 \overline{)x^2 + 6x + 8}$$

Dividimos  $x^2$  (el primer término del dividendo) entre  $x$  (el primer término del divisor).

$$\frac{x^2}{x} = x$$

Colocamos el cociente,  $x$ , sobre el término semejante que contiene a  $x$  en el dividendo.

$$x + 2 \overline{)x^2 + 6x + 8} \quad \begin{array}{c} x \\ \hline \end{array}$$

A continuación, multiplicamos la  $x$  por  $x + 2$ , como haríamos en una división larga, y colocamos los términos del producto debajo de sus términos semejantes.

$$\begin{array}{r} \text{Por } \xrightarrow{\quad} x \\ x + 2 \overline{)x^2 + 6x + 8} \\ \text{Es igual a } \xrightarrow{\quad} x^2 + 2x \quad \leftarrow x(x + 2) \end{array}$$

Ahora, restamos  $x^2 + 2x$  de  $x^2 + 6x$ . Al restar, recuerde cambiar el signo de los términos restados y después sumar los términos semejantes.

$$\begin{array}{r} x \\ x + 2 \overline{)x^2 + 6x + 8} \\ \underline{-x^2 + 2x} \phantom{+ 8} \\ 4x \phantom{+ 8} \end{array}$$

Posteriormente, bajamos el 8, que es el segundo término del dividendo.

$$\begin{array}{r} x \\ x + 2 \overline{)x^2 + 6x + 8} \\ \underline{-x^2 + 2x} \phantom{+ 8} \\ 4x + 8 \end{array}$$



Cuando existe un residuo, como en este ejemplo, colocamos el cociente, agregando el residuo sobre el divisor. Por tanto,

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 57

$$\frac{6x^2 - 5x + 5}{2x + 3} = 3x - 7 + \frac{26}{2x + 3}$$



### 3 Comprobación de problemas de división de polinomios

Podemos comprobar la respuesta de un problema de división. Consideremos el problema de dividir  $13 \div 5$ .

$$\begin{array}{r} 2 \\ 5 \overline{)13} \\ \underline{10} \\ 3 \end{array}$$

Observe que el divisor por el cociente, más el residuo, es igual al dividendo:

$$\begin{aligned} (\text{divisor} \times \text{cociente}) + \text{residuo} &= \text{dividendo} \\ (5 \cdot 2) + 3 &\stackrel{?}{=} 13 \\ 10 + 3 &\stackrel{?}{=} 13 \\ 13 &= 13 \quad \text{Verdadero.} \end{aligned}$$

Utilizamos este mismo procedimiento para verificar todos los problemas de división.

#### Para verificar la división de polinomios

$$(\text{divisor} \times \text{cociente}) + \text{residuo} = \text{dividendo}$$

Comprobaremos la respuesta del ejemplo 5. El divisor es  $2x + 3$ , el cociente es  $3x - 7$ , el residuo es 26, y el dividendo es  $6x^2 - 5x + 5$ .

**Comprobación**  $(\text{divisor} \times \text{cociente}) + \text{residuo} = \text{dividendo}$

$$\begin{aligned} (2x + 3)(3x - 7) + 26 &\stackrel{?}{=} 6x^2 - 5x + 5 \\ (6x^2 - 5x - 21) + 26 &\stackrel{?}{=} 6x^2 - 5x + 5 \\ 6x^2 - 5x + 5 &= 6x^2 - 5x + 5 \quad \text{Verdadero.} \end{aligned}$$

### 4 Escribir polinomios en orden descendente al dividir

Al dividir un polinomio entre un binomio, escribimos tanto el polinomio como el binomio en orden descendente. Si no existe un término elevado a una potencia dada, a menudo es útil incluirlo con un coeficiente de 0, para conservar el lugar. Esto ayudará a mantener los términos semejantes alineados. Por ejemplo, para dividir  $(6x^2 + x^3 - 4)/(x - 2)$ , comenzamos por escribir  $(x^3 + 6x^2 + 0x - 4)/(x - 2)$ .

**EJEMPLO 6** Dividir  $(-x + 9x^3 - 28)$  entre  $(3x - 4)$ .

**Solución** En primer lugar, reescribimos el dividendo en orden descendente a fin de obtener  $(9x^3 - x - 28) \div (3x - 4)$ . Como en el dividendo no existe un término con  $x^2$ , sumaremos  $0x^2$  para alinear los términos semejantes.



$$\begin{array}{r}
 \frac{9x^3}{3x} \quad \frac{12x^2}{3x} \quad \frac{15x}{3x} \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \underline{3x^2 + 4x + 5} \\
 3x - 4 \overline{) 9x^3 + 0x^2 - x - 28} \\
 \underline{9x^3 - 12x^2} \leftarrow 3x^2(3x - 4). \\
 12x^2 - x \\
 \underline{12x^2 - 16x} \leftarrow 4x(3x - 4). \\
 15x - 28 \\
 \underline{15x - 20} \leftarrow 5(3x - 4). \\
 -8 \leftarrow \text{Residuo.}
 \end{array}$$

Por tanto,  $\frac{-x + 9x^3 - 28}{3x - 4} = 3x^2 + 4x + 5 - \frac{8}{3x - 4}$ . Lo invitamos a comprobar esta división por sí mismo empleando el procedimiento que acabamos de estudiar.

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 61**



## Conjunto de ejercicios 4.6

### Ejercicios conceptuales

1. Explique cómo dividir un polinomio entre un monomio.
2. Explique cómo comprobamos un problema de división.
3. Explique por qué  $\frac{y + 5}{y} \neq \frac{1 + 5}{1}$ . Después, haga la división del binomio entre el monomio en forma correcta.
4. Explique por qué  $\frac{2x + 8}{2} \neq \frac{x + 8}{1}$ . Después, haga de manera correcta la división del binomio entre el monomio.
5. ¿Cómo deben escribirse los términos de un polinomio y un binomio cuando van a dividirse?
6. ¿Cómo se reescribiría  $\frac{x^2 - 7}{x - 2}$  de modo que sea más fácil realizar la división?
7. ¿Cómo reescribiría  $\frac{x^3 - 14x + 15}{x - 3}$  de modo que más fácil realizar la división?
8. Demuestre que  $\frac{x^2 - 3x + 7}{x + 2} = x - 5 + \frac{17}{x + 2}$ , comprobando la división.
9. Demuestre que  $\frac{x^2 + 2x - 17}{x - 3} = x + 5 - \frac{2}{x - 3}$ , comprobando la división.
10. Demuestre que  $\frac{x^3 + 2x - 3}{x + 1} = x^2 - x + 3 - \frac{6}{x + 1}$ , comprobando la división.

Reescriba cada problema de multiplicación como un problema de división. Existe más de una respuesta correcta.

11.  $(x - 4)(x + 5) = x^2 + x - 20$

12.  $(x + 3)(3x - 1) = 3x^2 + 8x - 3$

13.  $(2x + 3)(x + 1) = 2x^2 + 5x + 3$

14.  $(2x - 3)(x + 4) = 2x^2 + 5x - 12$

15.  $(2x + 3)(2x - 3) = 4x^2 - 9$

16.  $(3n + 4)(n - 5) = 3n^2 - 11n - 20$

## Práctica de habilidades

Dividir.

17.  $\frac{3x + 6}{3}$

20.  $(-3x - 8) \div 4$

23.  $\frac{-6x + 4}{2}$

26.  $\frac{5x - 4}{-5}$

29.  $\frac{4 - 10w}{-4}$

32.  $\frac{12x^2 - 6x + 3}{3}$

35.  $(x^5 + 3x^4 - 3) \div x^3$

38.  $\frac{7x^2 + 14x - 5}{-7}$

41.  $\frac{12x^5 + 3x^4 - 10x^2 - 9}{-3x^2}$

18.  $\frac{4x - 6}{2}$

21.  $\frac{3x + 8}{2}$

24.  $\frac{-5a + 4}{-3}$

27.  $\frac{2x + 16}{4}$

30.  $\frac{6 - 5x}{-3x}$

33.  $\frac{-4x^5 + 6x + 8}{2x^2}$

36.  $(6x^2 - 7x + 9) \div 3x$

39.  $\frac{8k^3 + 6k^2 - 8}{-4k}$

42.  $\frac{-15m^3 - 6m^2 + 15}{-5m^3}$

19.  $\frac{4n + 10}{2}$

22.  $\frac{5x - 10}{5}$

25.  $\frac{-9x - 3}{-3}$

28.  $\frac{2p - 3}{2p}$

31.  $(3x^2 + 6x - 9) \div 3x^2$

34.  $\frac{6t^2 + 3t + 8}{2}$

37.  $\frac{6x^5 - 4x^4 + 12x^3 - 5x^2}{2x^3}$

40.  $\frac{-12x^4 + 6x^2 - 15x + 4}{-3x}$

Dividir.

43.  $\frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}$

46.  $\frac{2p^2 - 7p - 15}{p - 5}$

49.  $\frac{x^2 - 16}{-4 + x}$

52.  $\frac{x^2 - 36}{x - 6}$

55.  $\frac{6x + 8x^2 - 25}{4x + 9}$

58.  $\frac{x^3 + 5x^2 + 2x - 8}{x + 2}$

61.  $\frac{2x^3 - 4x^2 + 12}{x - 2}$

64.  $\frac{x^3 + 8}{x + 2}$

67.  $\frac{4x^3 - 5x}{2x - 1}$

70.  $\frac{-x^3 + 3x^2 + 14x + 16}{x + 3}$

44.  $(2x^2 + 3x - 35) \div (x + 5)$

47.  $\frac{6x^2 + 16x + 8}{3x + 2}$

50.  $\frac{6t^2 - t - 40}{2t + 5}$

53.  $(4a^2 - 25) \div (2a - 5)$

56.  $\frac{10x + 3x^2 + 6}{x + 2}$

59.  $\frac{3x^3 + 18x^2 - 5x - 30}{x + 6}$

62.  $\frac{2x^3 + 6x - 4}{x + 4}$

65.  $\frac{x^3 - 27}{x - 3}$

68.  $\frac{9x^3 - x + 3}{3x - 2}$

71.  $\frac{9n^3 - 6n + 4}{3n - 3}$

45.  $\frac{2x^2 - 9x - 18}{x - 6}$

48.  $\frac{3r^2 + 5r - 8}{r - 1}$

51.  $(2x^2 + 7x - 18) \div (2x - 3)$

54.  $\frac{9x^2 - 16}{3x - 4}$

57.  $\frac{6x + 8x^2 - 12}{2x + 3}$

60.  $\frac{2x^3 - 3x^2 - 3x + 6}{x - 1}$

63.  $(w^3 - 8) \div (w - 3)$

66.  $\frac{x^3 + 27}{x + 3}$

69.  $\frac{-m^3 - 6m^2 + 2m - 3}{m - 1}$

72.  $\frac{4t^3 - t + 4}{t + 2}$

## Solución de problemas

73. Al dividir un binomio entre un monomio, ¿el cociente debe ser un binomio? Explique y dé un ejemplo que apoye su respuesta.
74. Al dividir un trinomio entre un monomio, ¿el cociente debe ser un trinomio? Explique y proporcione un ejemplo que apoye su respuesta.
75. Si el divisor es  $x + 4$ , el cociente es  $2x + 3$ , y el residuo es 4, encuentre el dividendo (o el polinomio que fue dividido).
76. Si el divisor es  $2x - 3$ , el cociente es  $3x - 1$ , y el residuo es  $-2$ , encuentre el dividendo.
77. Si dividimos un polinomio de segundo grado con  $x$ , entre un polinomio de primer grado con  $x$ , ¿cuál será el grado del cociente? Explique su respuesta.
78. Si dividimos un polinomio de tercer grado con  $x$  entre otro de primer grado con  $x$ , ¿de qué grado será el cociente? Explique su respuesta.

Determine las expresiones que deben colocarse en las áreas sombreadas, de modo que el enunciado sea verdadero. Explique cómo determinó su respuesta.

$$79. \frac{16x^4 + 20x^3 - 4x^2 + 12x}{\square} = 4x^3 + 5x^2 - x + 3$$

$$80. \frac{9x^5 - 6x^4 + 3x^2 + 12}{\square} = 3x^3 - 2x^2 + 1 + \frac{4}{x^2}$$

Determine los exponentes que deben colocarse en las áreas sombreadas, de manera que el enunciado sea verdadero. Explique la forma en que determinó su respuesta.

$$81. \frac{8x^{\square} + 4x^{\square} - 20x^{\square} - 5x^{\square}}{2x^2} = 4x^3 + 2x - 10 - \frac{5}{2x}$$

$$82. \frac{15x^{\square} + 25x^{\square} + 5x^{\square} + 10x^{\square}}{5x^2} = 3x^5 + 5x^4 + x^2 + 2$$

## Problemas de reto

Dividir. El cociente de los ejercicios 83 y 84 tendrá fracciones.

$$83. \frac{4x^3 - 4x + 6}{2x + 3}$$

$$84. \frac{3x^3 - 5}{3x - 2}$$

$$85. \frac{3x^2 + 6x - 10}{-x - 3}$$



## Actividad en grupo

Como grupo, estudien y solucionen los ejercicios 86 y 87. Determinen el polinomio que al sustituirse en el área sombreada genera un enunciado verdadero. Expliquen la manera en que determinaron su respuesta.

$$86. \frac{\square}{x + 4} = x + 2 + \frac{2}{x + 4}$$

$$87. \frac{\square}{x + 3} = x + 1 - \frac{1}{x + 3}$$

## Ejercicios de repaso acumulativo

- [1.4] 88. Considere el conjunto de números  $\{2, -5, 0, \sqrt{7}, \frac{2}{5}, -6.3, \sqrt{3}, -\frac{23}{34}\}$ .

Liste los que sean

- naturales;
- enteros positivos y cero;
- racionales;
- irracionales; y
- reales.

- [1.8] 89. a) ¿A qué es igual  $0/1$ ?

b) ¿Cómo nombramos una expresión como  $1/0$ ?

- [1.9] 90. Dé el orden de operaciones a seguir cuando se evalúa una expresión matemática.

- [2.5] 91. Resuelva la ecuación  $2(x + 3) + 2x = x + 4$ .

- [3.1] 92. Evalúe  $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ , si  $r = 6$ .

- [4.2] 93. Simplifique  $\frac{x^7}{x^{-3}}$ .

## RESUMEN DEL CAPÍTULO

## Términos y frases importantes

4.1

Base  
Exponente

4.3

Notación científica

4.4

Binomio  
Grado de un polinomio  
Grado de un términoMonomio  
Orden descendente  
Polinomio  
Trinomio

## HECHOS IMPORTANTES

## Reglas de los exponentes

1.  $x^m x^n = x^{m+n}$

**regla del producto**

2.  $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, \quad x \neq 0$

**regla del cociente**

3.  $x^0 = 1, \quad x \neq 0$

**regla del exponente cero**

4.  $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$

**regla de las potencias**

5.  $\left(\frac{ax}{by}\right)^m = \frac{a^m x^m}{b^m y^m}, \quad b \neq 0, y \neq 0$

**regla de la potencia expandida**

6.  $x^{-m} = \frac{1}{x^m}, \quad x \neq 0$

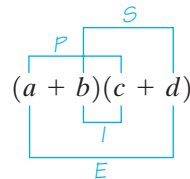
**regla del exponente negativo**

7.  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m, \quad a \neq 0, b \neq 0$

**regla de una fracción elevada a un exponente negativo**Producto de la suma y resta de dos términos iguales  
(binomios conjugados; también llamada diferencia de cuadrados):

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Método PIES para multiplicar dos binomios (Primeros, Internos, Externos, Segundos)



Cuadrado de un binomio

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

## Ejercicios de repaso del capítulo

[4.1] Simplificar.

- |                            |                                     |  |  |
|----------------------------|-------------------------------------|--|--|
| 1. $x^5 \cdot x^2$         | 2. $x^2 \cdot x^4$                  | 3. $3^2 \cdot 3^3$                         | 4. $2^4 \cdot 2$                           |
| 5. $\frac{x^4}{x}$         | 6. $\frac{a^5}{a^5}$                | 7. $\frac{5^5}{5^3}$                       | 8. $\frac{2^5}{2}$                         |
| 9. $\frac{x^6}{x^8}$       | 10. $\frac{y^4}{y}$                 | 11. $x^0$                                  | 12. $4x^0$                                 |
| 13. $(3x)^0$               | 14. $6^0$                           | 15. $(5x)^2$                               | 16. $(3a)^3$                               |
| 17. $(6s)^3$               | 18. $(-3x)^3$                       | 19. $(2x^2)^4$                             | 20. $(-x^4)^6$                             |
| 21. $(-m^4)^5$             | 22. $\left(\frac{2x^3}{y}\right)^2$ | 23. $\left(\frac{5y^2}{2b}\right)^2$       | 24. $6x^2 \cdot 4x^3$                      |
| 25. $\frac{16x^2y}{4xy^2}$ | 26. $2x(3xy^3)^2$                   | 27. $\left(\frac{9x^2y}{3xy}\right)^2$     | 28. $(2x^2y)^3(3xy^4)$                     |
| 29. $4x^2y^3(2x^3y^4)^2$   | 30. $3c^2(2c^4d^3)$                 | 31. $\left(\frac{8x^4y^3}{2xy^5}\right)^2$ | 32. $\left(\frac{21x^4y^3}{7y^2}\right)^3$ |

[4.2] Simplificar.

- |                                 |                                    |                                   |                                  |
|---------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| 33. $x^{-4}$                    | 34. $3^{-3}$                       | 35. $5^{-2}$                      | 36. $\frac{1}{z^{-2}}$           |
| 37. $\frac{1}{x^{-7}}$          | 38. $\frac{1}{3^{-2}}$             | 39. $y^5 \cdot y^{-8}$            | 40. $x^{-2} \cdot x^{-3}$        |
| 41. $p^{-6} \cdot p^4$          | 42. $a^{-2} \cdot a^{-3}$          | 43. $\frac{x^3}{x^{-3}}$          | 44. $\frac{x^5}{x^{-2}}$         |
| 45. $\frac{x^{-3}}{x^3}$        | 46. $(3x^4)^{-2}$                  | 47. $(4x^{-3}y)^{-3}$             | 48. $(-2m^{-3}n)^2$              |
| 49. $6y^{-2} \cdot 2y^4$        | 50. $(5y^{-3}z)^3$                 | 51. $(4x^{-2}y^3)^{-2}$           | 52. $2x(3x^{-2})$                |
| 53. $(5x^{-2}y)(2x^4y)$         | 54. $4x^5(6x^{-7}y^2)$             | 55. $4y^{-2}(3x^2y)$              | 56. $\frac{6xy^4}{2xy^{-1}}$     |
| 57. $\frac{12x^{-2}y^3}{3xy^2}$ | 58. $\frac{49x^2y^{-3}}{7x^{-3}y}$ | 59. $\frac{36x^4y^7}{9x^5y^{-3}}$ | 60. $\frac{4x^8y^{-2}}{8x^7y^3}$ |

[4.3] Expresar cada número en notación científica.

- |               |           |              |
|---------------|-----------|--------------|
| 61. 1,720,000 | 62. 0.153 | 63. 0.00763  |
| 64. 47,000    | 65. 4820  | 66. 0.000314 |

Expresar cada número sin exponentes.

- |                           |                           |                         |
|---------------------------|---------------------------|-------------------------|
| 67. $8.4 \times 10^{-3}$  | 68. $6.52 \times 10^{-4}$ | 69. $9.7 \times 10^5$   |
| 70. $4.38 \times 10^{-6}$ | 71. $3.14 \times 10^{-5}$ | 72. $1.103 \times 10^7$ |

Escriba cada una de las siguientes expresiones como una unidad base, sin prefijos métricos.

- |                     |                      |
|---------------------|----------------------|
| 73. 6 gigametros    | 74. 92 mililitros    |
| 75. 19.2 kilogramos | 76. 12.8 microgramos |

Realice cada una de las operaciones indicadas y escriba la respuesta sin exponentes.

- |   |   |   |
|---|---|---|
| 77. $(2.5 \times 10^2)(3.4 \times 10^{-4})$     | 78. $(4.2 \times 10^{-3})(3 \times 10^5)$     | 79. $(3.5 \times 10^{-2})(7.0 \times 10^3)$   |
| 80. $\frac{7.94 \times 10^6}{2 \times 10^{-2}}$ | 81. $\frac{6.5 \times 10^4}{2.0 \times 10^6}$ | 82. $\frac{15 \times 10^{-3}}{5 \times 10^2}$ |

Convierta cada número a notación científica. Después haga los cálculos. Expresé la respuesta en notación científica.

83.  $(14,000)(260,000)$

84.  $(12,500)(400,000)$

85.  $(0.00053)(40,000)$

86.  $\frac{250}{500,000}$

87.  $\frac{0.000068}{0.02}$

88.  $\frac{850,000}{0.025}$

89. **Tanque de leche** Un tanque de leche contiene  $6.4 \times 10^6$  onzas fluidas de leche. Si un galón es igual a  $1.28 \times 10^2$  onzas fluidas, determine el número de galones de leche que contiene el tanque.



90. **Moneda en circulación** En 2001, en los Estados Unidos, el total de moneda circulante en billetes de \$10, era de  $\$1.38 \times 10^{10}$ , y el total de billetes de \$5 en circulación era de  $\$8.54 \times 10^9$ .

- a) ¿Qué tanto más había en circulación en billetes de \$10 que de \$5? Escriba la respuesta sin exponentes.  
b) ¿Cuántas veces es mayor la cantidad en circulación en billetes de \$10 que de \$5?

[4.4] Indique si la expresión es un polinomio. Si el polinomio tiene un nombre específico, dígallo. Si el polinomio no está escrito en orden descendente, reescríbalo en dicho orden. Mencione el grado de cada polinomio.

91.  $x^{-4} - 8$

92.  $-2$

93.  $x^2 - 4 + 3x$

94.  $-3 - x + 4x^2$

95.  $13x^3 - 4$

96.  $4x^{1/2} - 6$

97.  $x - 4x^2$

98.  $x^3 + x^{-2} + 3$

99.  $2x^3 - 7 + 4x^2 - 3x$

[4.4–4.6] Realice cada una de las operaciones indicadas.

100.  $(x - 5) + (2x + 4)$

101.  $(2d - 3) + (5d + 7)$

102.  $(-x - 10) + (-2x + 5)$

103.  $(-x^2 + 6x - 7) + (-2x^2 + 4x - 8)$

104.  $(-m^2 + 5m - 8) + (6m^2 - 5m - 2)$

105.  $(6.2p - 4.3) + (1.9p + 7.1)$

106.  $(-4x + 8) - (-2x + 6)$

107.  $(4x^2 - 9x) - (3x + 15)$

108.  $(5a^2 - 6a - 9) - (2a^2 - a + 12)$

109.  $(-2x^2 + 8x - 7) - (3x^2 + 12)$

110.  $(x^2 + 7x - 3) - (x^2 + 3x - 5)$

111.  $\frac{1}{7}x(21x + 21)$

112.  $-3x(5x + 4)$

113.  $3x(2x^2 - 4x + 7)$

114.  $-c(2c^2 - 3c + 5)$

115.  $-4z(-3z^2 - 2z - 8)$

116.  $(x + 4)(x + 5)$

117.  $(3x + 6)(-4x + 1)$

118.  $(-2x + 6)^2$

119.  $(6 - 2x)(2 + 3x)$

120.  $(r + 5)(r - 5)$

121.  $(3x + 1)(x^2 + 2x + 4)$

122.  $(x - 1)(3x^2 + 4x - 6)$

123.  $(-4x + 2)(3x^2 - x + 7)$

124.  $\frac{2x + 4}{2}$

125.  $\frac{10x + 12}{2}$

126.  $\frac{8x^2 + 4x}{x}$

127.  $\frac{6x^2 + 9x - 4}{3}$

128.  $\frac{6w^2 - 5w + 3}{3w}$

129.  $\frac{8x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 2}{2x}$

130.  $\frac{8m - 4}{-2}$

131.  $\frac{5x^2 - 6x + 15}{3x}$

132.  $\frac{5x^3 + 10x + 2}{2x^2}$

133.  $\frac{x^2 + x - 12}{x - 3}$

136.  $\frac{4x^3 + 12x^2 + x - 12}{2x + 3}$

134.  $\frac{6n^2 + 19n + 3}{6n + 1}$

137.  $\frac{4x^2 - 12x + 9}{2x - 3}$

135.  $\frac{5x^2 + 28x - 10}{x + 6}$

## Examen de práctica del capítulo

Simplifique cada expresión.

1.  $5x^4 \cdot 3x^2$

2.  $(3xy^2)^3$

3.  $\frac{12d^5}{4d}$

4.  $\left(\frac{3x^2y}{6xy^3}\right)^3$

5.  $(2x^3y^{-2})^{-2}$

6.  $\frac{30x^6y^2}{45x^{-1}y}$

7.  $(4x^0)(3x^2)^0$

Convierta cada número a notación científica y después determine la respuesta. Expresé ésta en notación científica.

8.  $(175,000)(30,000)$

9.  $\frac{0.0008}{4000}$

Determine si cada expresión es un polinomio. Si el polinomio tiene un nombre específico, diga cuál es.

10.  $4x$

11.  $3b + 2$

12.  $x^{-2} + 4$

13. Escriba el polinomio  $-5 + 6x^3 - 2x^2 + 5x$  en orden descendente y diga de qué grado es.

En los ejercicios 14 a 24, realice cada una de las operaciones indicadas.

14.  $(6x - 4) + (2x^2 - 5x - 3)$

15.  $(x^2 - 4x + 7) - (3x^2 - 8x + 7)$

16.  $(4x^2 - 5) - (x^2 + x - 8)$

17.  $-5d(-3d + 8)$

18.  $(4x + 7)(2x - 3)$

19.  $(9 - 4c)(5 + 3c)$

20.  $(3x - 5)(2x^2 + 4x - 5)$

21.  $\frac{16x^2 + 8x - 4}{4}$

22.  $\frac{-12x^2 - 6x + 5}{-3x}$

23.  $\frac{8x^2 - 2x - 15}{2x - 3}$

24.  $\frac{12x^2 + 7x - 12}{4x + 5}$

25. **Vida media** La vida media de un elemento radiactivo es el tiempo necesario para que decaiga la mitad de su radioactividad. La vida media del carbono 14 ( $C^{14}$ ) es de 5730 años. La vida media del uranio 238 ( $U^{238}$ ) es  $4.46 \times 10^9$  años.

- a) Escriba la vida media del  $C^{14}$  en notación científica.  
 b) ¿Cuántas veces es mayor la vida media del  $U^{238}$  que la del  $C^{14}$ ?



## Examen de repaso acumulativo

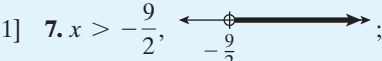
Resuelva el siguiente examen y compruebe las respuestas con las que aparecen al final. Repase cualesquiera preguntas que haya respondido en forma incorrecta. La sección y el objetivo en que estudiamos el material se indica después de la respuesta.

1. Evalúe  $12 + 8 \div 2^2 + 3$ .
2. Simplifique  $7 - (2x - 3) + 2x - 8(1 - x)$ .
3. Evalúe  $-4x^2 + x - 7$  si  $x = -2$ .
4. Diga el nombre de cada propiedad indicada.
  - a)  $(5 + 2) + 7 = 5 + (2 + 7)$ .
  - b)  $7 \cdot x = x \cdot 7$ .
  - c)  $2(y + 9) = (y + 9)2$ .
5. Resuelva la ecuación  $3x + 5 = 4(x - 2)$ .
6. Resuelva la ecuación  $3(x + 2) + 3x - 5 = 4x + 1$ .
7. Resuelva la desigualdad  $3x - 11 < 5x - 2$  y grafique la solución en una recta numérica.
8. Despeje  $y$  de la ecuación  $3x - 2 = y - 7$ .
9. Despeje  $y$  de la ecuación  $7x - 3y = 21$ , después encuentre el valor de  $y$  cuando  $x = 6$ .
10. Simplifique la expresión  $(2x^4y^3)^3(5x^2y)$ .
11. Escriba el polinomio  $-5x + 2 - 7x^2$  en orden descendente y diga de qué grado es.
13.  $(6a^2 + 3a + 2) - (a^2 - 3a - 3)$ .
14.  $(3y - 5)(2y + 3)$ .
15.  $(2x - 1)(3x^2 - 5x + 2)$ .
16.  $\frac{10d^2 + 12d - 8}{4d}$ .
17.  $\frac{6x^2 + 11x - 10}{3x - 2}$ .
18. **Sopa de pollo** En la tienda de abarrotes LeAnn's, tres latas de sopa de pollo cuestan \$1.25. Calcule el costo de 8 latas.
19. **Rectángulo** La longitud de un rectángulo es 2 menos que el triple del ancho. Encuentre las dimensiones del rectángulo si su perímetro es de 28 pies.
20. **Velocidad promedio** Bob Dolan maneja de Jackson, Mississippi, a Tallulah, Louisiana, una distancia de 60 millas. Al mismo tiempo, Nick Reide comienza a manejar de Tallulah a Jackson, por la misma carretera. Si Bob y Nick se encuentran después de 0.5 horas y la velocidad promedio de Nick fue de 7 millas por hora más que la de Bob, calcule la velocidad promedio de cada automóvil.

Ejecute cada una de las operaciones indicadas.

12.  $(x^2 + 4x - 3) + (2x^2 + 5x + 1)$ .

## Respuestas al examen de repaso acumulativo

1. 17; [Sec. 1.9, Obj. 5]   2.  $8x + 2$ ; [Sec. 2.1, Obj. 6]   3.  $-25$ ; [Sec. 1.9, Obj. 6]   4. a) Propiedad asociativa de la adición; [Sec. 1.10, Obj. 2]   b) Propiedad conmutativa de la multiplicación; [Sec. 1.10, Obj. 1]   c) Propiedad conmutativa de la multiplicación; [Sec. 1.10, Obj. 1]   5. 13; [Sec. 2.5, Obj. 1]   6. 0; [Sec. 2.5, Obj. 1]   7.  $x > -\frac{9}{2}$ ,  ;
- [Sec. 2.7, Obj. 1]   8.  $y = 3x + 5$ ; [Sec. 3.1, Obj. 3]   9.  $y = \frac{7x - 21}{3}, 7$ ; [Sec. 3.1, Obj. 3]   10.  $40x^{14}y^{10}$ ; [Sec. 4.1, Obj. 3]
11.  $-7x^2 - 5x + 2$ , segundo; [Sec. 4.4, Obj. 1]   12.  $3x^2 + 9x - 2$ ; [Sec. 4.4, Obj. 2]   13.  $5a^2 + 6a + 5$ ; [Sec. 4.4, Obj. 3]
14.  $6y^2 - y - 15$ ; [Sec. 4.5, Obj. 4]   15.  $6x^3 - 13x^2 + 9x - 2$ ; [Sec. 4.5, Obj. 6]   16.  $\frac{5}{2}d + 3 - \frac{2}{d}$ ; [Sec. 4.6, Obj. 1]
17.  $2x + 5$ ; [Sec. 4.6, Obj. 2]   18. \$3.33; [Sec. 2.6, Obj. 3]   19.  $l = 10$  pies,  $a = 4$  pies; [Sec. 3.4, Obj. 1]   20. Bob, 56.5 mph; Nick, 63.5 mph; [Sec. 3.5, Obj. 2]



# Capítulo 5

## Factorización



- 5.1** Factorización de un monomio a partir de un polinomio
  - 5.2** Factorización por agrupamiento
  - 5.3** Factorización de trinomios de la forma  $ax^2 + bx + c$ ,  $a = 1$
  - 5.4** Factorización de trinomios de la forma  $ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 1$
  - 5.5** Fórmulas de factorización especial y repaso general de la factorización
  - 5.6** Solución de ecuaciones cuadráticas mediante factorización
  - 5.7** Aplicaciones de las ecuaciones cuadráticas
- Resumen del capítulo  
Ejercicios de repaso del capítulo  
Examen de práctica del capítulo  
Examen de repaso acumulativo

¿Alguna vez ha tenido que calcular las dimensiones de un jardín rectangular, o el tamaño de un letrero rectangular, o los materiales necesarios para un piso de madera en una habitación rectangular? Es frecuente que las decisiones estén influidas por la cantidad de material disponible, o por una relación que deseamos mantener entre la longitud y el ancho de los lados de un rectángulo, o por el área de éste. El conocimiento de las ecuaciones cuadráticas lo ayudará a tomar decisiones. En el ejemplo 2, en la página 353, utilizamos ecuaciones cuadráticas para determinar las dimensiones de un letrero rectangular que ha de tener un área específica.



## Avance de la lección

En este capítulo presentamos la *factorización de polinomios*, que es el proceso inverso de la multiplicación de polinomios. Cuando factorizamos un polinomio, lo reescribimos como el producto de dos o más factores. En las secciones 5.1 a 5.4 estudiaremos técnicas de factorización para varios tipos de polinomios. En la sección 5.5 presentaremos algunas fórmulas especiales de factorización que pueden simplificar el proceso de factorización para algunos polinomios. En la sección 5.6 estudiaremos las ecuaciones cuadráticas y usaremos la factorización como un método para resolverlas. En la última sección analizaremos las aplicaciones de las ecuaciones cuadráticas.

**Es esencial que comprenda completamente la factorización, en especial en las secciones 5.3 a 5.5, para asimilar por completo el capítulo 6.** Las técnicas de factorización que empleamos en este capítulo se emplearán en todo el capítulo 6.

## 5.1 FACTORIZACIÓN DE UN MONOMIO A PARTIR DE UN POLINOMIO



- 1 Identificación de factores.
- 2 Determinación del máximo común divisor de dos o más números.
- 3 Determinación del máximo común divisor de dos o más términos.
- 4 Factorizar un monomio a partir de un polinomio.

## 1 Identificación de factores

En el capítulo 4 aprendimos a multiplicar polinomios; aquí nos enfocaremos en la factorización, que es el proceso inverso de la multiplicación. En la sección 4.5 mostramos que  $2x(3x^2 + 4) = 6x^3 + 8x$ . En este capítulo comenzamos con una expresión como  $6x^3 + 8x$  y determinamos que sus factores son  $2x$  y  $3x^2 + 4$ , y escribimos que  $6x^3 + 8x = 2x(3x^2 + 4)$ . **Factorizar una expresión** significa escribirla como el producto de sus factores. La factorización es importante porque la utilizamos para resolver ecuaciones.

**Si  $a \cdot b = c$ , entonces  $a$  y  $b$  son los factores de  $c$ .**

$$3 \cdot 5 = 15; \text{ por lo que } 3 \text{ y } 5 \text{ son factores de } 15.$$

$$x^3 \cdot x^4 = x^7; \text{ entonces, } x^3 \text{ y } x^4 \text{ son factores de } x^7.$$

$$x(x + 2) = x^2 + 2x; \text{ entonces, } x \text{ y } x + 2 \text{ son factores de } x^2 + 2x.$$

$$(x - 1)(x + 3) = x^2 + 2x - 3; \text{ entonces, } x - 1 \text{ y } x + 3 \text{ son factores de } x^2 + 2x - 3.$$

Un número o expresión puede tener muchos factores. Considere el número 30.

$$1 \cdot 30 = 30, \quad 2 \cdot 15 = 30, \quad 3 \cdot 10 = 30, \quad 5 \cdot 6 = 30$$

Por tanto, los factores positivos de 30 son 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 y 30. Los factores también pueden ser negativos, como  $(-1)(-30) = 30$ ,  $-1$  y  $-30$  también son factores de 30. De hecho, por cada factor  $a$  de una expresión también debe haber otro igual a  $-a$ . Por tanto, otros factores de 30 son  $-1$ ,  $-2$ ,  $-3$ ,  $-5$ ,  $-6$ ,  $-10$  y  $-15$ . Por lo general, cuando haya que numerar los factores de una expresión que contiene un coeficiente numérico positivo con una variable, mencionamos sólo los factores positivos.

EJEMPLO 1  
Solución

Mencione cuáles son los factores de  $6x^3$ .

$$\begin{array}{l} \overbrace{1 \cdot 6x^3}^{\text{factores}} = 6x^3 \\ 2 \cdot 3x^3 = 6x^3 \\ 3 \cdot 2x^3 = 6x^3 \\ 6 \cdot x^3 = 6x^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \overbrace{x \cdot 6x^2}^{\text{factores}} = 6x^3 \\ 2x \cdot 3x^2 = 6x^3 \\ 3x \cdot 2x^2 = 6x^3 \\ 6x \cdot x^2 = 6x^3 \end{array}$$

Los factores de  $6x^3$  son 1, 2, 3, 6,  $x$ ,  $2x$ ,  $3x$ ,  $6x$ ,  $x^2$ ,  $2x^2$ ,  $3x^2$ ,  $6x^2$ ,  $x^3$ ,  $2x^3$ ,  $3x^3$  y  $6x^3$ . El opuesto (o negativo) de cada uno de estos factores también es un factor, pero por lo general no se mencionan a menos que indiquemos lo contrario. ✨

A continuación presentamos algunos ejemplos de multiplicación y factorización. Observe que la factorización es el proceso inverso de la multiplicación.

### Multiplicación

$$\begin{aligned} 3(2x + 5) &= 6x + 15 \\ 5x(x + 4) &= 5x^2 + 20x \\ (x + 1)(x + 3) &= x^2 + 4x + 3 \end{aligned}$$

### Factorización

$$\begin{aligned} 6x + 15 &= 3(2x + 5) \\ 5x^2 + 20x &= 5x(x + 4) \\ x^2 + 4x + 3 &= (x + 1)(x + 3) \end{aligned}$$

## 2 Determinación del máximo común divisor de dos o más números

Para factorizar un monomio de un polinomio utilizamos el *máximo común divisor (MCD)*. Si después de estudiar la siguiente sección desea estudiar más material sobre cómo obtener el MCD, puede consultar el Apéndice B, en donde se analiza cómo encontrar el MCD.

En la sección 1.3 vimos que el **máximo común divisor** de dos o más números es el número más grande que divide a todos los números de manera exacta. El máximo común divisor de los números 6 y 8 es 2, ya que es el número más grande que divide tanto a 6 como a 8. ¿Cuál es el MCD de 48 y 60? Si no es sencillo encontrar el MCD de dos o más números, escribimos cada número como el producto de factores primos. Un **número primo** es un entero mayor que 1 que tiene exactamente dos factores, el mismo número y uno. Los 15 primeros números primos son:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47$$

Un entero positivo (distinto de 1) que no sea primo recibe el nombre de **compuesto**. El número 1 no es primo ni compuesto, y recibe el nombre de **unidad**. Los 15 primeros números compuestos son:

$$4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25$$

Cada número par mayor que 2 es compuesto porque tiene más de dos factores: él mismo, 1 y 2.

Para escribir un número como el producto de números primos, seguiremos el procedimiento indicado en los ejemplos 2 y 3.

### EJEMPLO 2

#### Solución

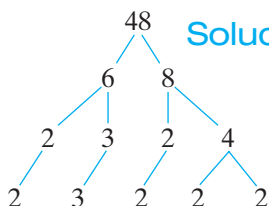


FIGURA 5.1

Escribir 48 como el producto de números primos.

Elegimos dos números cualesquiera cuyo producto sea 48. Dos posibilidades son  $6 \cdot 8$  y  $4 \cdot 12$ , pero existen alternativas. Continuamos separando los factores hasta que todos sean primos, como se ilustra en la figura 5.1.

Obsérvese que no importa cómo elijamos los factores iniciales,

$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3$$



En el ejemplo 2 se halló que  $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3$ . También conocemos a estos números,  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$  o bien  $2^4 \cdot 3$ , como **factores primos** de 48.

**EJEMPLO 3** Escriba 60 como el producto de sus factores primos.

**Solución**

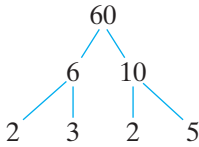


FIGURA 5.2

La figura 5.2 muestra una forma de determinar los factores primos. Por tanto,  $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ .

En el siguiente recuadro presentamos el procedimiento para determinar el máximo común divisor de dos o más números.

**Para determinar el MCD de dos o más números**

1. Escribir cada número como el producto de factores primos.
2. Determinar los factores primos comunes a todos los números.
3. Multiplicar los factores comunes que encontró en el paso 2. El producto de estos factores es el MCD.

**EJEMPLO 4** Determine el máximo común divisor de 48 y 60.

**Solución** De los ejemplos 2 y 3 sabemos que

**Paso 1**

$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3$$

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

**Paso 2** Dos factores de 2 y un factor de 3 son comunes a los dos números. El producto de estos factores es el MCD de 48 y 60:

**Paso 3**

$$\text{MCD} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

El MCD de 48 y 60 es 12. Doce es el número más grande que divide tanto a 48 como a 60.

**EJEMPLO 5** Determine el MCD de 18 y 24.

**Solución**

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$$

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$$

Un factor de 2 y un factor de 3 son comunes tanto a 18 como a 24.

$$\text{MCD} = 2 \cdot 3 = 6$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 15

**3 Determinación del máximo común divisor de dos o más términos**

Es fácil determinar el MCD de varios términos que contengan variables. Considere los términos  $x^3, x^4, x^5$  y  $x^6$ . El MCD de estos términos es  $x^3$ , puesto que  $x^3$  es la máxima potencia de  $x$  que divide a los cuatro términos. Para ilustrar esto escribimos los términos en forma factorizada.

$$x^3 = x^3 \cdot 1$$

$$x^4 = x^3 \cdot x$$

$$x^5 = x^3 \cdot x^2$$

$$x^6 = x^3 \cdot x^3$$

*El MCD de los cuatro términos es  $x^3$ .*

Observe que  $x^3$  divide a los cuatro términos.

$$\frac{x^3}{x^3} = 1, \quad y \quad \frac{x^4}{x^3} = x, \quad y \quad \frac{x^5}{x^3} = x^2, \quad y \quad \frac{x^6}{x^3} = x^3.$$


**EJEMPLO 6** Determine el MCD de los términos  $n^8, n^4, n^6$  y  $n^7$ .

**Solución**

El MCD es  $n^4$  ya que es el número mayor de las  $n$  que es común a todos los términos. 

**EJEMPLO 7** Determine el MCD de los términos  $x^2y^3, x^3y^2$  y  $xy^4$ .

**Solución**

El número mayor de las  $x$  que es común a los tres términos es  $x^1$  o  $x$ . El número mayor de las  $y$  que es común a todos los términos es  $y^2$ . Por el MCD de los tres términos es  $xy^2$ . 


### Para determinar el máximo común divisor de dos o más términos

Se toma cada factor el número más *grande* de veces que aparezca en todos los términos.

1. Calcular el MCD de los coeficientes de cada término.
2. Tomar las variables comunes de cada término.
3. De estas variables, escoger las elevadas al menor exponente.
4. Multiplicar el MCD de los coeficientes por las variables elevadas al menor exponente.

**EJEMPLO 8** Determine el MCD de los términos  $xy, x^2y^2$ , y  $x^3$ .

**Solución**

El MCD es  $x$ . La potencia más grande de  $x$  que es común a los tres términos es  $x^1$ , o  $x$ . Como el término  $x^3$  no contiene una potencia de  $y$ , el MCD no contiene a  $y$ . 

**EJEMPLO 9** Determine el MCD de cada grupo de términos.


**a)**  $18y^2, 15y^3, 27y^5$       **b)**  $-20x^2, 12x, 40x^3$       **c)**  $5s^4, s^7, s^3$

**Solución**

**a)** El MCD de 18, 15 y 27 es 3. El MCD de  $y^2, y^3$ , y  $y^5$  es  $y^2$ . Por tanto, el MCD de los tres términos es  $3y^2$ .

**b)** El MCD de  $-20, 12$  y  $40$  es 4. El MCD de  $x^2, x$ , y  $x^3$  es  $x$ . Por tanto, el MCD de los tres términos es  $4x$ .

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 33

**c)** El MCD de 5, 1 y 1 es 1. El MCD de  $s^4, s^7$ , y  $s^3$  es  $s^3$ . Por tanto, el MCD de los tres términos es  $1s^3$ , que se escribe como  $s^3$ . 

**EJEMPLO 10** Determine el MCD de cada pareja de términos.

**a)**  $x(x + 3)$  y  $2(x + 3)$       **b)**  $x(x - 2)$  y  $x - 2$

**c)**  $2(x + y)$  y  $3x(x + y)$

**Solución**

**a)** El MCD es  $(x + 3)$ .

**b)**  $x - 2$  se puede escribir como  $1(x - 2)$ . Por tanto, el MCD de  $x(x - 2)$  y  $1(x - 2)$  es  $x - 2$ .

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 39

**c)** El MCD es  $(x + y)$  

## 4 Factorizar un monomio a partir de un polinomio

En la sección 4.5 multiplicamos factores. La factorización es el proceso inverso de la multiplicación de factores. Como dijimos antes, *factorizar una expresión* significa escribirla como el producto de sus factores.

**Para factorizar un monomio de un polinomio**

1. Determinar el MCD de todos los términos del polinomio.
2. Escribir cada término como el producto del MCD y sus otros factores.
3. Utilizar la propiedad distributiva para factorizar el MCD.

En el paso 3 del proceso usamos la propiedad distributiva. En realidad, ésta se emplea a la inversa. Por ejemplo, si tenemos  $4 \cdot x + 4 \cdot 2$ , utilizamos la propiedad distributiva en sentido inverso a fin de escribir  $4(x + 2)$ .

**EJEMPLO 11** Factorizar  $6x + 18$ .

**Solución** El MCD es 6.

$$\begin{aligned} 6x + 18 &= 6 \cdot x + 6 \cdot 3 && \text{Escribir cada término como un} \\ & && \text{producto del MCD y algún otro factor.} \\ &= 6(x + 3) && \text{Propiedad distributiva.} \end{aligned}$$

**Para comprobar el proceso de factorización, multiplicamos los factores mediante la propiedad distributiva. Si la factorización es correcta, el producto será el polinomio con que comenzamos.** A continuación presentamos la comprobación de la factorización del ejemplo 11.

**Comprobación**  $6(x + 3) = 6x + 18$

**EJEMPLO 12** Factorizar  $15x - 20$ .

**Solución** El MCD es 5.

$$\begin{aligned} 15x - 20 &= 5 \cdot 3x - 5 \cdot 4 \\ &= 5(3x - 4) \end{aligned}$$

Compruebe que la factorización es correcta.

**EJEMPLO 13** Factorizar  $6y^2 + 9y^5$ .

**Solución** El MCD es  $3y^2$ .

$$\begin{aligned} 6y^2 + 9y^5 &= 3y^2 \cdot 2 + 3y^2 \cdot 3y^3 \\ &= 3y^2(2 + 3y^3) \end{aligned}$$

Compruebe que la factorización es correcta.

**EJEMPLO 14** Factorizar  $12p^3 - 24p^2 + 8p$

**Solución** El MCD es  $4p$ .

$$\begin{aligned} 12p^3 - 24p^2 + 8p &= 4p \cdot 3p^2 - 4p \cdot 6p + 4p \cdot 2 \\ &= 4p(3p^2 - 6p + 2) \end{aligned}$$

**Comprobación**  $4p(3p^2 - 6p + 2) = 12p^3 - 24p^2 + 8p$

**EJEMPLO 15** Factorizar  $35x^2 - 25x + 5$ .

**Solución** El MCD es 5.

$$\begin{aligned} 35x^2 - 25x + 5 &= 5 \cdot 7x^2 - 5 \cdot 5x + 5 \cdot 1 \\ &= 5(7x^2 - 5x + 1) \end{aligned}$$

**EJEMPLO 16** Factorizar  $4x^3 + x^2 + 8x^2y$ .

**Solución** El MCD es  $x^2$ .

$$\begin{aligned} 4x^3 + x^2 + 8x^2y &= x^2 \cdot 4x + x^2 \cdot 1 + x^2 \cdot 8y \\ &= x^2(4x + 1 + 8y) \end{aligned}$$



**En los ejemplos 15 y 16, observe que cuando uno de los términos es en sí mismo el MCD, lo expresamos en forma factorizada como el producto de dicho término por 1.**

**EJEMPLO 17** Factorizar  $x(5x - 2) + 7(5x - 2)$ .

**Solución** El MCD de  $x(5x - 2)$  y  $7(5x - 2)$  es  $(5x - 2)$ . Al factorizar, el MCD queda

$$x(5x - 2) + 7(5x - 2) = (5x - 2)(x + 7)$$

Compruebe multiplicando que la factorización es correcta.



**EJEMPLO 18** Factorizar  $4x(3x - 5) - 7(3x - 5)$

**Solución** El MCD de  $4x(3x - 5)$  y  $-7(3x - 5)$  es  $(3x - 5)$ . Al factorizar, el MCD queda

$$4x(3x - 5) - 7(3x - 5) = (3x - 5)(4x - 7)$$

En la sección 1.10 vimos que la propiedad conmutativa de la multiplicación establece que el orden con que multipliquemos dos números reales no importa. Por tanto,  $(3x - 5)(4x - 7)$  también puede reescribirse como  $(4x - 7)(3x - 5)$ . En este libro colocaremos el factor común a la izquierda.



AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 91

**EJEMPLO 19** Factorizar  $2x(x + 3) - 5(x + 3)$

**Solución** El MCD de  $2x(x + 3)$  y  $-5(x + 3)$  es  $(x + 3)$ . Al factorizar, el MCD queda

$$2x(x + 3) - 5(x + 3) = (x + 3)(2x - 5)$$



**Importante: cuando factoricemos un polinomio por cualquier método de los que presentamos en este capítulo, el primer paso siempre consistirá en ver si existe un factor común (diferente de 1) para todos los términos del polinomio. Si así fuera, factorice el máximo común denominador de cada término mediante la propiedad distributiva.**

## SUGERENCIA

### Comprobación de un problema de factorización

Comprobaremos todo problema de factorización multiplicando los factores; el producto de éstos debe ser idéntico a la expresión que factorizamos originalmente. Usted debe comprobar todos los problemas de factorización.

## Conjunto de ejercicios 5.1

### Ejercicios conceptuales

1. ¿Qué es un número primo?
2. ¿Qué es un número compuesto?
3. ¿Qué significa factorizar una expresión?
4. ¿Es primo el número 1? Si no lo es, ¿cómo se denomina?
5. ¿Cuál es el máximo común denominador de dos o más números?
6. Con sus propias palabras, explique cómo factorizar un monomio de un polinomio.
7. ¿Cómo comprobamos cualquier problema de factorización?



8. Un estudiante factorizó  $5x^2 + 15x + 5$  y como respuesta escribió  $5(x^2 + 3x + 1)$ . Otro estudiante factorizó  $5x^2 + 15x + 5$  y dio como respuesta  $5(x^2 + 3x)$ . ¿Cuál

de los dos estuvo en lo correcto? ¿Por qué es incorrecta la respuesta que dio el otro estudiante?

## Práctica de habilidades

Escriba cada número como producto de números primos.

- |         |         |        |
|---------|---------|--------|
| 9. 56   | 10. 120 | 11. 90 |
| 12. 540 | 13. 196 | 14. 96 |

Determine el máximo común denominador para cada par de números.

- |             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|
| 15. 20, 24  | 16. 45, 27  | 17. 70, 98  |
| 18. 120, 96 | 19. 80, 126 | 20. 72, 140 |

Determine el máximo común denominador para cada grupo de términos.

- |                                  |                                      |                                      |
|----------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 21. $x^5, x, x^2$                | 22. $y^3, y^5, y^2$                  | 23. $3x, 6x^2, 9x^3$                 |
| 24. $6p, 4p^2, 8p^3$             | 25. $x, y, z$                        | 26. $a, ab, ab^2$                    |
| 27. $mn, m^2n, mn^2$             | 28. $4x^2y^2, 3xy^4, 2xy^2$          | 29. $x^3y^7, x^7y^{12}, x^5y^5$      |
| 30. $6x, 12y, 18x^2$             | 31. $-5, 20x, 30x^2$                 | 32. $18r^4, 6r^2s, 9s^2$             |
| 33. $9x^3y^4, 8x^2y^4, 12x^4y^2$ | 34. $16x^9y^{12}, 8x^5y^3, 20x^4y^2$ | 35. $40x^3, 27x, 30x^4y^2$           |
| 36. $6p^4q^3, 9p^2q^5, 9p^4q^2$  | 37. $5(x + 3), 3(x + 3)$             | 38. $4(x - 5), 3x(x - 5)$            |
| 39. $x^2(2x - 3), 5(2x - 3)$     | 40. $x(9x - 3), 9x - 3$              | 41. $3w + 5, 6(3w + 5)$              |
| 42. $x(x + 7), x + 7$            | 43. $x - 4, y(x - 4)$                | 44. $3y(x + 2), 3(x + 2)$            |
| 45. $3(x - 1), 5(x - 1)^2$       | 46. $5(n + 2), 7(n + 2)^2$           | 47. $(x + 3)(x - 2), (x + 3)(x - 4)$ |
| 48. $(a + 4)(a - 3), 5(a - 3)$   |                                      |                                      |

Factorice el MCD de cada término en las expresiones.

- |                                      |                              |                       |
|--------------------------------------|------------------------------|-----------------------|
| 49. $4x - 8$                         | 50. $4x + 2$                 | 51. $15x - 5$         |
| 52. $12x + 15$                       | 53. $6p + 12$                | 54. $3t^2 - 10t$      |
| 55. $9x^2 - 12x$                     | 56. $24y - 6y^2$             | 57. $26p^2 - 8p$      |
| 58. $8x + 16x^2$                     | 59. $3x^5 - 12x^2$           | 60. $7x^5 - 9x^4$     |
| 61. $36x^{12} + 24x^8$               | 62. $45y^{12} + 30y^{10}$    | 63. $27y^{15} - 9y^3$ |
| 64. $30w^5 + 25w^3$                  | 65. $x + 3xy^2$              | 66. $4x^2y - 6x$      |
| 67. $7a^4 + 3a^2$                    | 68. $3x^2y + 6x^2y^2$        | 69. $16xy^2z + 4x^3y$ |
| 70. $80x^5y^3z^4 - 36x^2yz^3$        | 71. $48m^4n^2 - 16mn^2$      |                       |
| 72. $56xy^5z^{13} - 24y^4z^2$        | 73. $25x^2yz^3 + 25x^3yz$    |                       |
| 74. $19x^4y^{12}z^{13} - 8x^5y^3z^9$ | 75. $13y^5z^3 - 11xy^2z^5$   |                       |
| 76. $16r^4s^5t^3 - 20r^5s^4t$        | 77. $8c^2 - 4c - 32$         |                       |
| 78. $x^3 + 6x^2 - 4x$                | 79. $9x^2 + 18x + 3$         |                       |
| 80. $4x^2 + 8x + 24$                 | 81. $4x^3 - 8x^2 + 12x$      |                       |
| 82. $12a^3 - 16a^2 - 4a$             | 83. $35x^2 - 15y + 10$       |                       |
| 84. $5x^3 - xy^2 + x$                | 85. $15p^2 - 6p + 9$         |                       |
| 86. $45y^3 - 63y^2 + 27y$            | 87. $9a^4 - 6a^3 + 3ab$      |                       |
| 88. $40a^3b^2 + 36a^2c - 12ab^3$     | 89. $8x^2y + 12xy^2 + 5xy$   |                       |
| 90. $52x^2y^2 + 16xy^3 + 26z$        | 91. $x(x + 4) + 3(x + 4)$    |                       |
| 92. $5x(2x - 5) - 8(2x - 5)$         | 93. $3b(a - 2) - 4(a - 2)$   |                       |
| 94. $3x(7x + 1) - 2(7x + 1)$         | 95. $4x(2x + 1) + 1(2x + 1)$ |                       |



96.  $6n(3n - 2) - 1(3n - 2)$

98.  $3x(4x - 5) + 4x - 5$

100.  $5t(t - 2) - 3(t - 2)$

97.  $5x(2x + 1) + 2x + 1$

99.  $4z(2z + 3) - 3(2z + 3)$

## Solución de problemas

Si es posible, factorice cada expresión. Trate al símbolo desconocido como si fuera una variable.

101.  $3\star + 6$

103.  $35\Delta^3 - 7\Delta^2 + 14\Delta$

102.  $12\nabla - 6\nabla^2$

104.  $\odot + 11\Delta$

## Problemas de reto

105. Factorice  $4x^2(x - 3)^3 - 6x(x - 3)^2 + 4(x - 3)$ .

106. Factorice  $6x^5(2x + 7) + 4x^3(2x + 7) - 2x^2(2x + 7)$ .

107. Factorice  $x^{7/3} + 5x^{4/3} + 2x^{1/3}$  factorizando  $x^{1/3}$  de los tres términos.

108. Factorice  $15x^{1/2} + 5x^{-1/2}$  factorizando  $x^{-1/2}$ .

109. Factorice  $x^2 + 2x + 3x + 6$ . (Sugerencia: factorice los dos primeros términos, después factorice los dos últimos, luego factorice los dos términos resultantes. En la sección 5.2 estudiaremos problemas de factorización de este tipo.)

## Ejercicios de repaso acumulativo

[2.1] 110. Simplifique  $2x - (x - 5) + 4(3 - x)$ .

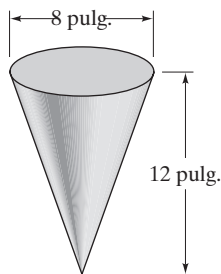
[2.5] 111. Resuelva la ecuación  $4 + 3(x - 8) = x - 4(x + 2)$ .

[3.1] 112. Despeje  $y$  en la ecuación  $4x - 5y = 20$ .

113. Calcule el volumen del cono mostrado en la figura.

[3.3] 114. La suma de dos números es 41. Diga cuáles son si el mayor es una unidad menos que el doble del menor.

[4.1] 115. Simplifique  $\left(\frac{3x^2y^3}{2x^5y^2}\right)^2$ .



## 5.2 FACTORIZACIÓN POR AGRUPAMIENTO



- Factorizar por agrupamiento un polinomio que contiene cuatro términos.

### 1 Factorizar por agrupamiento un polinomio que contiene cuatro términos

Es posible factorizar un polinomio que contiene cuatro o más términos eliminando los factores comunes de los grupos de términos. Este proceso se denomina **factorización por agrupamiento**. En las secciones 5.3 y 5.4 estudiaremos la factorización de trinomios. Uno de los métodos que emplearemos en la sección 5.4 requiere que

dominemos la factorización por agrupamiento. El ejemplo 1 ilustra el procedimiento para factorizar por agrupamiento.

**EJEMPLO 1** Factorizar  $ax + ay + bx + by$ .


**Solución**

No hay un factor (distinto de 1) común a los cuatro términos. Sin embargo,  $a$  es común a los dos primeros y  $b$  lo es a los dos últimos. Factorizamos  $a$  de los primeros dos términos y  $b$  de los dos últimos.

$$ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y)$$

Esta factorización produce dos términos y  $(x + y)$  es común a ambos. Ahora factorizamos  $(x + y)$  de cada uno, como observamos a continuación.

$$a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$$

Observe que si factorizamos  $(x + y)$  queda  $a + b$ , que se convierte en el otro factor. Así,  $ax + ay + bx + by = (x + y)(a + b)$ . 

### Para factorizar un polinomio de cuatro términos por medio de agrupamiento

1. Determinar si existe cualesquiera factores comunes a los cuatro términos. Si así fuera, factorizamos el MCD de cada uno de los cuatro términos.
2. Si es necesario, reacomodar los cuatro términos de modo que los primeros dos tengan un factor común, y los últimos dos tengan otro.
3. Utilizar la propiedad distributiva para factorizar cada grupo de dos términos.
4. Factorizar el máximo común denominador de los resultados del paso 3.

**EJEMPLO 2** Factorizar  $x^2 + 3x + 4x + 12$  por agrupamiento.

**Solución**


No existe un factor común a los cuatro términos; sin embargo, la  $x$  se puede factorizar de los primeros dos y el 4 de los dos últimos.

$$x^2 + 3x + 4x + 12 = x(x + 3) + 4(x + 3)$$

Observe que la expresión a la derecha del signo igual tiene dos *términos*, y que el *factor*  $(x + 3)$  es común a ambos. Factorizar  $(x + 3)$  por medio de la propiedad distributiva.

$$x(x + 3) + 4(x + 3) = (x + 3)(x + 4)$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 11

Por tanto,  $x^2 + 3x + 4x + 12 = (x + 3)(x + 4)$ . 

En el ejemplo anterior,  $3x$  y  $4x$  son términos semejantes y se reducen, pero no lo haremos, pues estamos explicando cómo factorizar cuatro términos por agrupamiento. Algunos polinomios de cuatro términos, como el del ejemplo 9, no tienen términos semejantes que podamos reducir. Al estudiar la factorización de trinomios en la sección 5.4, en ocasiones comenzaremos con un trinomio y lo reescribiremos utilizando cuatro términos; por ejemplo, comenzamos con un trinomio como  $2x^2 + 11x + 12$  y lo reescribimos como  $2x^2 + 8x + 3x + 12$ , y después factorizamos los cuatro términos resultantes por agrupamiento. Éste es un método útil para factorizar trinomios, como explicaremos más adelante.

**EJEMPLO 3** Factorizar  $15x^2 + 10x + 12x + 8$ , por agrupamiento.

**Solución**

$$\begin{aligned} 15x^2 + 10x + 12x + 8 &= 5x(3x + 2) + 4(3x + 2) \\ &= (3x + 2)(5x + 4) \end{aligned}$$

Factoriza  $5x$  de los dos primeros términos, y  $4$  de los dos últimos.



**Podemos comprobar un problema de factorización por agrupamiento multiplicando los factores con el método PIES. Si no cometemos un error, el resultado será el polinomio original. A continuación comprobaremos el ejemplo 3.**

Comprobación

$$\begin{aligned} (3x + 2)(5x + 4) &= \overset{P}{(3x)}\overset{I}{(5x)} + \overset{E}{(2)}\overset{S}{(5x)} + \overset{P}{(3x)}\overset{S}{(4)} + \overset{E}{(2)}\overset{S}{(4)} \\ &= 15x^2 + 10x + 12x + 8 \\ &= 15x^2 + 12x + 10x + 8 \end{aligned}$$

Es posible escribir  $12x + 10x$  como  $10x + 12x$  gracias a la propiedad conmutativa de la adición. Como este polinomio es con el que comenzamos, la factorización es correcta.

### SUGERENCIA

En el ejemplo 3, al factorizar  $15x^2 + 10x + 12x + 8$  obtuvimos

$$5x(3x + 2) + 4(3x + 2)$$

Al factorizar  $(3x + 2)$ , colocamos el factor común  $(3x + 2)$  a la izquierda para ser consistentes con la forma como obtuvimos los factores comunes en la sección 5.1. Eso da  $(3x + 2)(5x + 4)$ . Hubiéramos podido colocar el factor común a la derecha para obtener  $(5x + 4)(3x + 2)$ .

Ambas respuestas son correctas puesto que  $(3x + 2)(5x + 4) = (5x + 4)(3x + 2)$ , de acuerdo con la propiedad conmutativa de la multiplicación.

**EJEMPLO 4** Factorizar  $15x^2 + 12x + 10x + 8$  por agrupamiento.

**Solución**

$$\begin{aligned} 15x^2 + 12x + 10x + 8 &= 3x(5x + 4) + 2(5x + 4) \\ &= (5x + 4)(3x + 2) \end{aligned}$$



Observe que el ejemplo 4 es igual al ejemplo 3, pero con los dos términos medios intercambiados. Las respuestas de los ejemplos 3 y 4 son equivalentes, ya que sólo cambia el orden de los factores. Al factorizar por agrupamiento, si los dos términos medios son semejantes, se cambian y la respuesta será la misma.

**EJEMPLO 5** Factorizar por agrupamiento la expresión  $x^2 + 4x + x + 4$ .

**Solución** En los primeros dos términos,  $x$  es el factor común. ¿Existe un factor común en los últimos dos términos? Sí; recuerde que 1 es un factor de cada término. Factorizamos 1 de los dos últimos términos.

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + x + 4 &= x^2 + 4x + 1 \cdot x + 1 \cdot 4 \\ &= x(x + 4) + 1(x + 4) \\ &= (x + 4)(x + 1) \end{aligned}$$

Observe que  $x + 4$  se expresó como  $1 \cdot x + 1 \cdot 4 = 1(x + 4)$ .



**EJEMPLO 6** Factorizar por agrupamiento:  $6x^2 - 3x - 2x + 1$ .

**Solución** Al factorizar  $3x$  de los primeros dos términos, obtenemos

$$6x^2 - 3x - 2x + 1 = 3x(2x - 1) - 2x + 1$$

¿Qué debemos factorizar de los dos últimos términos? Queremos factorizar  $-2x + 1$  de manera que terminemos con una expresión que sea múltiplo de  $(2x - 1)$ .

**Cuando deseamos cambiar el signo de cada término de una expresión, se factoriza un número negativo de cada término.** En este caso, factorizamos  $-1$ .

$$-2x + 1 = -1(2x - 1)$$

Ahora, reescribimos  $-2x + 1$  como  $-1(2x - 1)$ .

$$3x(2x - 1) - 2x + 1 = 3x(2x - 1) - 1(2x - 1)$$

A continuación obtenemos el factor común  $(2x - 1)$ .

$$3x(2x - 1) - 1(2x - 1) = (2x - 1)(3x - 1) \quad *$$

**EJEMPLO 7** Factorizar  $x^2 + 5x - x - 5$  por agrupamiento.

**Solución**

$$\begin{aligned} x^2 + 5x - x - 5 &= x(x + 5) - x - 5 && \text{Factorizar } x. \\ &= x(x + 5) - 1(x + 5) && \text{Factorizar } -1. \\ &= (x + 5)(x - 1) && \text{Factorizar } (x + 5). \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 19

Observe que factorizamos  $-1$  de  $-x - 5$  para obtener  $-1(x + 5)$ . \*

**EJEMPLO 8** Factorizar  $3x^2 - 6x - 4x + 8$  por agrupación.

**Solución**

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6x - 4x + 8 &= 3x(x - 2) - 4(x - 2) \\ &= (x - 2)(3x - 4) \end{aligned}$$

Observe que  $-4x + 8 = -4(x - 2)$ . \*

## SUGERENCIA

Generalmente, al factorizar cuatro términos por agrupación, si el coeficiente del tercer término es positivo, como en los ejemplos 2 a 5, factorizamos un coeficiente positivo de los últimos dos términos. Si el coeficiente del tercer término es negativo, como en los ejemplos 6 a 8, por lo general factorizamos un coeficiente negativo de los últimos dos términos. Debemos incluir el signo del coeficiente del tercer término en la expresión, de modo que la factorización produzca dos términos. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 2x^2 + 8x + 3x + 12 &= 2x(x + 4) + 3(x + 4) = (x + 4)(2x + 3) \\ 3x^2 - 15x - 2x + 10 &= 3x(x - 5) - 2(x - 5) = (x - 5)(3x - 2) \end{aligned}$$

En los ejemplos que hemos ilustrado hasta este momento, los dos términos del medio han sido semejantes. Esto no siempre es cierto, como se aprecia en el ejemplo 9.

**EJEMPLO 9** Factorizar  $xy + 3x - 2y - 6$  por agrupamiento.

**Solución**

Este problema contiene dos variables,  $x$  y  $y$ . En este caso, el procedimiento para factorizar es en esencia el mismo que el de antes. Factorizamos  $x$  de los dos primeros términos y  $-2$  de los dos últimos.

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 41

$$\begin{aligned} xy + 3x - 2y - 6 &= x(y + 3) - 2(y + 3) \\ &= (y + 3)(x - 2) && \text{Factorizar } (y + 3). \quad * \end{aligned}$$

**EJEMPLO 10** Factorizar  $2x^2 + 4xy + 3xy + 6y^2$ .

**Solución**

Factorizamos  $2x$  de los dos primeros términos, y  $3y$  de los dos últimos.

$$2x^2 + 4xy + 3xy + 6y^2 = 2x(x + 2y) + 3y(x + 2y)$$

Ahora, sacamos el factor común  $(x + 2y)$  de cada término en el lado derecho.

$$2x(x + 2y) + 3y(x + 2y) = (x + 2y)(2x + 3y)$$

**Comprobación**

**P I E S**

$$\begin{aligned}(x + 2y)(2x + 3y) &= (x)(2x) + (2y)(2x) + (x)(3y) + (2y)(3y) \\ &= 2x^2 + 4xy + 3xy + 6y^2 \\ &= 2x^2 + 3xy + 4xy + 6y^2\end{aligned}$$



Si el ejemplo 10 se diera como  $2x^2 + 4xy + 3xy + 6y^2$ , ¿los resultados serían los mismos? Pruebe y vea.

**EJEMPLO 11** Factorizar  $6r^2 - 9rs + 8rs - 12s^2$ .

**Solución** Factorizar  $3r$  de los dos primeros términos y  $4s$  de los últimos dos términos.

$$\begin{aligned}6r^2 - 9rs + 8rs - 12s^2 &= 3r(2r - 3s) + 4s(2r - 3s) \\ &= (2r - 3s)(3r + 4s)\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 31



**EJEMPLO 12** Factorizar  $3x^2 - 15x + 6x - 30$ .

**Solución** *En cualquier problema de factorización, el primer paso es determinar si todos los términos tienen un factor común. En caso de ser así, sacamos dicho factor común.* En este polinomio, el 3 es común a todos los términos. Por tanto, comenzamos por factorizar el 3.

$$3x^2 - 15x + 6x - 30 = 3(x^2 - 5x + 2x - 10)$$

Ahora, factorizamos la expresión entre paréntesis por agrupación. Factorizamos la  $x$  de los primeros dos términos y el 2 de los últimos dos.

$$\begin{aligned}3(x^2 - 5x + 2x - 10) &= 3[x(x - 5) + 2(x - 5)] \\ &= 3[(x - 5)(x + 2)] \\ &= 3(x - 5)(x + 2)\end{aligned}$$

Por tanto,  $3x^2 - 15x + 6x - 30 = 3(x - 5)(x + 2)$ .



## Conjunto de ejercicios 5.2

### Ejercicios conceptuales

- ¿Cuál es el primer paso en cualquier problema de factorización por agrupamiento?
- ¿Cómo podemos comprobar la solución de un problema de factorización por agrupamiento?
- Factorizamos un polinomio de cuatro términos, por agrupamiento, y el resultado es  $(x - 2)(x + 4)$ . Encuentre el polinomio original y explique la forma en que determinó la respuesta.
- Factorizamos por agrupamiento un polinomio de cuatro términos y el resultado es  $(x - 2y)(x - 3)$ . Encuentre el polinomio original y explique cómo llegó a la respuesta.
- Con sus propias palabras describa los pasos para factorizar un polinomio de cuatro términos por agrupamiento.
- Cuando factorizamos, ¿qué número cambia el signo de cada término en la expresión original?

## Práctica de habilidades

Factorización por agrupación.

- |                                   |                                   |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 7. $x^2 + 3x + 2x + 6$            | 8. $x^2 + 7x + 3x + 21$           |
| 9. $x^2 + 5x + 4x + 20$           | 10. $x^2 - x + 3x - 3$            |
| 11. $x^2 + 2x + 5x + 10$          | 12. $x^2 - 6x + 5x - 30$          |
| 13. $x^2 + 3x - 5x - 15$          | 14. $r^2 - 4r + 6r - 24$          |
| 15. $4b^2 - 10b + 10b - 25$       | 16. $4x^2 - 6x + 6x - 9$          |
| 17. $3x^2 + 9x + x + 3$           | 18. $a^2 + a + 3a + 3$            |
| 19. $6x^2 + 3x - 2x - 1$          | 20. $5x^2 + 20x - x - 4$          |
| 21. $8x^2 + 32x + x + 4$          | 22. $9w^2 - 6w - 6w + 4$          |
| 23. $12t^2 - 8t - 3t + 2$         | 24. $12x^2 + 42x - 10x - 35$      |
| 25. $2x^2 - 4x - 3x + 6$          | 26. $35x^2 - 40x + 21x - 24$      |
| 27. $6p^2 + 15p - 4p - 10$        | 28. $10c^2 + 25c - 6c - 15$       |
| 29. $x^2 + 2xy - 3xy - 6y^2$      | 30. $x^2 - 3xy + 2xy - 6y^2$      |
| 31. $3x^2 + 2xy - 9xy - 6y^2$     | 32. $3x^2 - 18xy + 4xy - 24y^2$   |
| 33. $10x^2 - 12xy - 25xy + 30y^2$ | 34. $6a^2 - 3ab + 4ab - 2b^2$     |
| 35. $x^2 + bx + ax + ab$          | 36. $x^2 - bx - ax + ab$          |
| 37. $xy + 5x - 3y - 15$           | 38. $x^2 - 2x + ax - 2a$          |
| 39. $a^2 + 3a + ab + 3b$          | 40. $3x^2 - 15x - 2xy + 10y$      |
| 41. $xy - x + 5y - 5$             | 42. $y^2 - yb + ya - ab$          |
| 43. $12 + 8y - 3x - 2xy$          | 44. $3y - 9 - xy + 3x$            |
| 45. $z^3 + 5z^2 + z + 5$          | 46. $x^3 - 3x^2 + 2x - 6$         |
| 47. $x^3 + 4x^2 - 3x - 12$        | 48. $y^3 - 3y + 2y^2 - 6$         |
| 49. $2x^2 - 12x + 8x - 48$        | 50. $3x^2 - 3x - 3x + 3$          |
| 51. $4x^2 + 8x + 8x + 16$         | 52. $2x^4 - 5x^3 - 6x^3 + 15x^2$  |
| 53. $6x^3 + 9x^2 - 2x^2 - 3x$     | 54. $9x^3 + 6x^2 - 45x^2 - 30x$   |
| 55. $x^3 + 3x^2y - 2x^2y - 6xy^2$ | 56. $18x^2 + 27xy + 12xy + 18y^2$ |

Reacomode los términos de modo que los dos primeros tengan un factor común y los últimos dos tengan otro (distinto de 1). Después factorice por agrupación. Puede haber más de una forma de acomodar los factores. Sin embargo, la respuesta debe ser equivalente sin importar cómo acomode los factores.

- |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|
| 57. $5x + 3y + xy + 15$ | 58. $3a + 6y + ay + 18$ |
| 59. $6x + 5y + xy + 30$ | 60. $ax - 10 - 5x + 2a$ |
| 61. $ax + by + ay + bx$ | 62. $ax - 21 - 3a + 7x$ |
| 63. $cd - 12 - 4d + 3c$ | 64. $ca - 2b + 2a - cb$ |
| 65. $ac - bd - ad + bc$ | 66. $dc + 3c - ad - 3a$ |

## Solución de problemas

67. Si sabemos que un polinomio con cuatro términos puede ser factorizado con un arreglo específico de términos, entonces, ¿cualquier arreglo de los términos podrá ser factorizado por agrupamiento? Explique y fundamente su respuesta con un ejemplo.

Si es posible, factorice cada una de las siguientes expresiones. Considere el símbolo desconocido como una variable.

- |  |  |
|--|--|
| 68. $\textcircled{7}^2 + 3\textcircled{7} + 4\textcircled{7} + 12$ | 69. $\textcircled{2}^2 + 3\textcircled{2} - 5\textcircled{2} - 15$ |
| 70. $\textcircled{2}^2 + 3\textcircled{2} + 2\textcircled{2} + 7$  |  |

## Problemas de reto

En la sección 5.4 factorizaremos por agrupamiento trinomios de la forma  $ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 1$ . Para hacerlo, reescribiremos el término medio del trinomio,  $bx$ , como la suma o resta de dos términos. Después, factorizamos por agrupamiento el polinomio resultante de cuatro términos. Para los ejercicios 71 a 76, **a)** reescriba el trinomio como un polinomio de cuatro términos reemplazando el término  $bx$  con la suma o diferencia dada. **b)** factorice el polinomio de cuatro términos. Observe que los factores obtenidos son los del trinomio.

71.  $3x^2 + 10x + 8, 10x = 6x + 4x$

72.  $3x^2 + 10x + 8, 10x = 4x + 6x$

73.  $2x^2 - 11x + 15, -11x = -6x - 5x$

74.  $2x^2 - 11x + 15, -11x = -5x - 6x$

75.  $4x^2 - 17x - 15, -17x = -20x + 3x$

76.  $4x^2 - 17x - 15, -17x = 3x - 20x$

De ser posible, factorice cada una de las expresiones que siguen. Considere los símbolos desconocidos como variables.

77.  $\star\odot + 3\star + 2\odot + 6$

78.  $2\Delta^2 - 4\Delta\star - 8\Delta\star + 16\star^2$

## Ejercicios de repaso acumulativo

[2.5] 79. Resuelva  $5 - 3(2x - 7) = 4(x + 5) - 6$ .

[3.5] 80. **Mezcla especial** Ed y Beatrice Petrie son dueños de una pequeña tienda de abarrotes cerca de Leesport, Pennsylvania. La tienda vende una variedad de dulces a granel. Para celebrar el quinto aniversario de la apertura del establecimiento, los Petrie deciden crear una mezcla especial de dulce que contiene obleas de chocolate que venden a \$6.25 por libra, y dulces de menta que venden a \$2.50 por libra. ¿Cuántas libras de cada tipo de dulce requieren para elaborar una mezcla de 50 libras y venderla a \$4.75 por libra?

[4.6] 81. Dividir  $\frac{15x^3 - 6x^2 - 9x + 5}{3x}$ .

82. Dividir  $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ .



Ver el ejercicio 80

## 5.3 FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS DE LA FORMA $ax^2 + bx + c$ , $a = 1$



- 1 Factorizar trinomios de la forma  $ax^2 + bx + c$ , donde  $a = 1$ .
- 2 Eliminar un factor común de un trinomio.

### Nota importante respecto a factorización de trinomios

Factorizar trinomios es un tema importante del álgebra, matemáticas avanzadas, física y otros cursos de ciencias. Debido a que es importante, y también para tener un buen desempeño en el capítulo 6, debe estudiar muy bien las secciones 5.3 y 5.4.

(continúa en la página siguiente)

En esta sección aprenderemos a factorizar trinomios de la forma  $ax^2 + bx + c$ , donde  $a$ , el coeficiente numérico del término elevado al cuadrado, es igual a 1. Es decir, factorizaremos trinomios de la forma  $x^2 + bx + c$ . Un ejemplo de este tipo de trinomio es  $x^2 + 5x + 6$ . Recuerde que  $x^2$  significa  $1x^2$ .

En la sección 5.4 aprenderemos a factorizar trinomios de la forma  $ax^2 + bx + c$ , donde  $a \neq 1$ . Un ejemplo de este tipo de trinomio es  $2x^2 + 7x + 3$ .

## 1 Factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ , donde $a = 1$

A continuación estudiaremos cómo factorizar trinomios de la forma  $ax^2 + bx + c$ , donde  $a$ , el coeficiente numérico del término elevado al cuadrado es igual a 1. Algunos ejemplos de estos trinomios son:

$$\begin{array}{ll} x^2 + 7x + 12 & x^2 - 2x - 24 \\ a = 1, b = 7, c = 12 & a = 1, b = -2, c = -24 \end{array}$$

Recuerde que la factorización es el proceso inverso de la multiplicación. Es posible demostrar con el método PIES que

$$(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12 \quad \text{y} \quad (x - 6)(x + 4) = x^2 - 2x - 24$$

Por tanto, factorizamos  $x^2 + 7x + 12$  y  $x^2 - 2x - 24$  como sigue:

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4) \quad \text{y} \quad x^2 - 2x - 24 = (x - 6)(x + 4)$$

Observe que al factorizar cada uno de estos trinomios, obtenemos el producto de dos binomios en los que el primer término es  $x$  y el segundo un número (incluido su signo). En general, al factorizar un trinomio de la forma  $x^2 + bx + c$  obtenemos dos factores en forma de binomio, como sigue:

$$x^2 + bx + c = (x + \square)(x + \square)$$

Aquí van números.

Por ejemplo, si determinamos que los números que van en las áreas sombreadas de los factores son 4 y  $-6$ , escribiríamos los factores como  $(x + 4)$  y  $(x - 6)$ . Observe que en lugar de escribir el segundo factor como  $(x + (-6))$ , queda como  $(x - 6)$ .

Para determinar los números por colocar en las áreas sombreadas cuando factorizamos un trinomio de la forma  $x^2 + bx + c$ , escribimos factores de la forma  $(x + \square)(x + \square)$  y después probamos conjuntos diferentes de factores de la constante,  $c$ , para colocar en las áreas sombreadas en los paréntesis. Multiplicamos cada pareja de factores con el método PIES, y continuamos hasta hallar la pareja cuya suma de los productos de los términos exterior e interior sea el mismo que el término en  $x$  del trinomio. Por ejemplo, para factorizar el trinomio  $x^2 + 7x + 12$  determinamos los factores posibles de 12. Después probamos con el método PIES cada pareja de factores hasta obtener aquella cuyo producto contenga a  $7x$ , el mismo término que aparece en el trinomio. Denominamos este método de factorización como **ensayo y error**. En el ejemplo 1 factorizamos  $x^2 + 7x + 12$  por ensayo y error.

**EJEMPLO 1** Factorizar  $x^2 + 7x + 12$  por ensayo y error.

**Solución** Comenzamos por enlistar los factores de 12 (vea la columna de la izquierda de la tabla de la página 318). Después hacemos una lista de los factores posibles del trinomio y el producto de estos. Por último, determinamos cuáles de ellos, si los hu-





**Para factorizar trinomios de la forma  $ax^2 + bx + c$ , donde  $a = 1$**

1. Encontrar dos números cuyo producto sea igual a la constante,  $c$ , y cuya suma sea igual al coeficiente del término con  $x$ , que es  $b$ .
2. Utilizar los dos números que encontramos en el paso 1, incluidos sus signos, para escribir el trinomio en su forma factorizada. Dicho trinomio será

$$(x + \text{un número})(x + \text{segundo número})$$

¿Cómo encontramos los dos números mencionados en los pasos 1 y 2? El signo de la constante,  $c$ , es una de las claves para hallarlos. *El recuadro de Sugerencia que se presenta a continuación es muy importante y útil. Estúdielo con cuidado.*

**SUGERENCIA**

Cuando necesitemos factorizar un trinomio de la forma  $x^2 + bx + c$ , primero hay que observar el signo de la constante.

- a)** Si la constante,  $c$ , es positiva, ambos números en los factores tendrán el mismo signo, los dos positivos o los dos negativos. Además, dicho signo en común será el mismo que el signo del coeficiente del término con  $x$  que aparece en el trinomio que deseamos factorizar. Es decir, si  $b$  es positiva, los dos factores tendrán números positivos, y si  $b$  es negativa, ambos factores tendrán números negativos.

Ejemplo:

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

El coeficiente,  $b$ , es positivo.
La constante,  $c$ , es positiva.
Positivo. Positivo.

*Ambos factores contienen números positivos.*

Ejemplo:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

El coeficiente,  $b$ , es positivo.
La constante,  $c$ , es positiva.
Negativo. Negativo.

*Ambos factores contienen números negativos.*

- b)** Si la constante es negativa, los dos números de los factores tendrán signos opuestos. Es decir, un número será positivo y el otro negativo.

Ejemplo:

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$$

El coeficiente,  $b$ , es positivo.
La constante,  $c$ , es negativa.
Positivo. Negativo.

*Un factor tiene un número positivo y el otro un número negativo.*

Ejemplo:

$$x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(x - 5)$$

El coeficiente,  $b$ , es negativo.
La constante,  $c$ , es negativa.
Positivo. Negativo.

*Un factor tiene un número positivo y el otro un número negativo.*

Al factorizar trinomios, esta información se utilizará como punto de arranque.


- EJEMPLO 2** Considere un trinomio de la forma  $x^2 + bx + c$ . Con el empleo de los signos de  $b$  y  $c$  que damos a continuación, determine los signos de los números en los factores.
- a)**  $b$  es negativo y  $c$  es positivo.      **b)**  $b$  es negativo y  $c$  es negativo.  
**c)**  $b$  es positivo y  $c$  es negativo.      **d)**  $b$  es positivo y  $c$  es positivo.

**Solución** En cada caso, primero estudiamos el signo de la constante,  $c$ .

**a)** Como la constante,  $c$ , es positiva, ambos números tienen el mismo signo. Como el coeficiente del término con  $x$ ,  $b$ , es negativo, los dos factores tienen números negativos.

**b)** Dado que la constante,  $c$ , es negativa, un factor tiene un número positivo y el otro un número negativo.

**c)** Ya que la constante,  $c$ , es negativa, un factor tiene un número positivo y el otro uno negativo.

**d)** Toda vez que la constante,  $c$ , es positiva, los dos números tienen el mismo signo. Como el coeficiente del término con  $x$ ,  $b$ , es positivo, ambos factores tienen números positivos. 

- EJEMPLO 3** Factorizar  $x^2 + x - 6$ .

**Solución** Debemos encontrar dos números cuyo producto sea la constante,  $-6$ , y cuya suma sea el término en  $x$ ,  $1$ . Recuerde que  $x$  significa  $1x$ . Como la constante es negativa, un número debe ser positivo y el otro negativo. Recuerde que el producto de dos números con signos diferentes es negativo. A continuación damos los factores de  $-6$ , en busca de aquellos cuya suma sea  $1$ .

Factores de $-6$	Suma de factores
$1(-6) = -6$	$1 + (-6) = -5$
$2(-3) = -6$	$2 + (-3) = -1$
$3(-2) = -6$	$3 + (-2) = 1$
$6(-1) = -6$	$6 + (-1) = 5$

Observe que los factores  $1$  y  $-6$  del renglón superior son diferentes de los factores  $-1$  y  $6$  del renglón inferior, y su suma es diferente.

Los números  $3$  y  $-2$  tienen un producto de  $-6$  y suman  $1$ . Entonces, los factores son  $(x + 3)$  y  $(x - 2)$ .

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$$

El orden de los factores no es importante. Por ello,  $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$  también es una respuesta aceptable. 

Como dijimos antes, comprobamos **los problemas de factorización con la multiplicación de los factores, de acuerdo con el método PIES**. Si la factorización es correcta, el producto obtenido con este método será idéntico al trinomio original. A continuación comprobamos los factores que obtuvimos en el ejemplo 3.


**Comprobación**  $(x + 3)(x - 2) = x^2 + 3x - 2x - 6 = x^2 + x - 6$

Como el producto de los factores es idéntico al trinomio original, la factorización es correcta.

**EJEMPLO 4** Factorizar  $x^2 - x - 6$ .

**Solución** En el ejemplo 3 mostramos los factores de  $-6$ . Los factores cuyo producto es  $-6$  y cuya suma es  $-1$ , son  $2$  y  $-3$ .

Factores de $-6$	Suma de factores
$2(-3) = -6$	$2 + (-3) = -1$

Por tanto,  $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$  

**EJEMPLO 5** Factorizar  $x^2 - 5x + 6$ .

**Solución** Debemos encontrar dos números cuyo producto sea  $6$  y sumen  $-5$ . Como la constante,  $6$ , es positiva, ambos factores deben tener el mismo signo. Ya que el coeficiente del término con  $x$ ,  $-5$ , es negativo, los dos números deben ser negativos. Recuerde que el producto de un número negativo por otro también negativo, es positivo. A continuación mostramos los factores negativos de  $6$ , en busca de la pareja cuya suma sea  $-5$ .

Factores de $6$	Suma de factores
$(-1)(-6)$	$-1 + (-6) = -7$
$(-2)(-3)$	$-2 + (-3) = -5$

Los factores de  $6$  cuya suma es  $-5$ , son  $-2$  y  $-3$ .

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 29


$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$  

**EJEMPLO 6** Factorizar  $r^2 + 2r - 24$ .

**Solución** En este ejemplo, la variable es  $r$ , pero el procedimiento de factorización es el mismo. Debemos hallar dos factores de  $-24$  cuya suma sea  $2$ . Como la constante es negativa, uno de ellos será positivo y el otro negativo.

Factores de $-24$	Suma de factores
$(1)(-24)$	$1 + (-24) = -23$
$(2)(-12)$	$2 + (-12) = -10$
$(3)(-8)$	$3 + (-8) = -5$
$(4)(-6)$	$4 + (-6) = -2$
$(6)(-4)$	$6 + (-4) = 2$

Como encontramos los dos números,  $6$  y  $-4$ , cuyo producto es  $-24$  y su suma  $2$ , no es necesario continuar.

$r^2 + 2r - 24 = (r + 6)(r - 4)$  

**EJEMPLO 7** Factorizar  $x^2 - 10x + 25$ .

**Solución** Debemos hallar 2 factores de 25 cuya suma sea  $-10$ . Los dos factores deben ser negativos (¿puede explicar por qué?) Los dos factores cuyo producto es 25 y cuya suma es  $-10$ , son  $-5$  y  $-5$ .

$$\begin{aligned}x^2 - 10x + 25 &= (x - 5)(x - 5) \\ &= (x - 5)^2\end{aligned}$$



**EJEMPLO 8** Factorizar  $x^2 - 5x - 66$ .

**Solución** Debemos encontrar dos números que multiplicados den  $-66$  y sumados  $-5$ . Como la constante es negativa, un factor debe ser positivo y el otro negativo. Los factores que buscamos son  $-11$  y  $6$ , porque  $(-11)(6) = -66$ , y  $-11 + 6 = -5$ .

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 51

$$x^2 - 5x - 66 = (x - 11)(x + 6)$$



**EJEMPLO 9** Factorizar  $x^2 + 7x + 18$ .

**Solución** En primer lugar busquemos dos números cuyo producto sea 18 y sumen 7. Debido a que tanto la constante como el coeficiente del término con  $x$  son positivos, los dos números también son positivos.

Factores de 18

Suma de factores

(1)(18)	$1 + 18 = 19$
(2)(9)	$2 + 9 = 11$
(3)(6)	$3 + 6 = 9$

Observe que no existen dos enteros cuyo producto sea 18 y sumen 7. Si no es posible hallar dos enteros que satisfagan las condiciones dadas, el trinomio no puede factorizarse empleando exclusivamente factores enteros. *Un polinomio que no admite factorización con el solo empleo de coeficientes enteros, se denomina **polinomio primo**.* Si nos encontramos con un polinomio de este tipo, como el del ejemplo 9, no debemos dejar el problema sin respuesta. En vez de ello, debemos escribir “es primo”. Sin embargo, antes de declararlo “primo”, revisemos nuestro trabajo y aseguremos de que probamos todas las combinaciones posibles.



Al factorizar un trinomio de la forma  $x^2 + bx + c$ , existe al menos una pareja de números cuyo producto sea  $c$  y cuya suma sea  $b$ . Por ejemplo, al factorizar  $x^2 - 12x + 32$ , los dos números que multiplicados dan 32 y sumados dan  $-12$ , son  $-4$  y  $-8$ . No existe otra pareja de números que satisfaga estas condiciones específicas. Así, los únicos factores de  $x^2 - 12x + 32$  son  $(x - 4)$  y  $(x - 8)$ .

En el ejemplo 10 ilustramos un tipo de problema un poco diferente.

**EJEMPLO 10** Factorizar  $x^2 + 2xy + y^2$ .

**Solución** En este problema, el segundo término contiene dos variables,  $x$  y  $y$ , y el último término no es una constante. El procedimiento que empleamos para factorizar este trinomio es similar al que ya describimos. Sin embargo, debe darse cuenta de que el producto de los primeros términos de los factores que buscamos debe ser  $x^2$ , y el producto de los dos últimos términos de los factores debe ser  $y^2$ .

Debemos encontrar dos números cuyo producto sea 1 (por  $1y^2$ ) y cuya suma sea 2 (por  $2xy$ ). Los dos números son 1 y 1. Por tanto,

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + 1y)(x + 1y) = (x + y)(x + y) = (x + y)^2$$



**EJEMPLO 11** Factorizar  $x^2 - xy - 6y^2$ .**Solución** Encontrar dos números cuyo producto sea  $-6$  y sumen  $-1$ . Los números son  $-3$  y  $2$ . Los dos últimos términos deben ser  $-3y$  y  $2y$  a fin de obtener  $-6y^2$ .AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 67

$$x^2 - xy - 6y^2 = (x - 3y)(x + 2y)$$



## 2 Eliminar un factor común de un trinomio

En ocasiones cada término de un trinomio tiene un factor común. Cuando esto ocurre, primero factorizamos el factor común, como explicamos en la sección 5.1. **El primer paso en cualquier problema de factorización es factorizar cualesquiera factores comunes a todos los términos del polinomio. Cuando el coeficiente numérico del término de mayor grado no sea 1, debe buscarse algún factor común.** Después de factorizar cualquier factor común que haya, si es posible debe factorizarse aún más el trinomio que resulte.

**EJEMPLO 12** Factorizar  $2x^2 + 2x - 12$ .**Solución** Como el coeficiente numérico del término al cuadrado no es 1, buscamos algún factor común. Como 2 es común a todos los términos del polinomio, lo factorizamos.

$$2x^2 + 2x - 12 = 2(x^2 + x - 6) \quad \text{Encontrar el factor común.}$$

A continuación factorizamos el trinomio obtenido,  $x^2 + x - 6$ , en  $(x + 3)(x - 2)$ . Donde,

$$2x^2 + 2x - 12 = 2(x + 3)(x - 2).$$

Observe que el trinomio  $2x^2 + 2x - 12$  ya está completamente factorizado en tres factores: dos binomios,  $x + 3$  y  $x - 2$ , y un monomio, 2. Una vez que factorizamos el 2, éste no jugó ningún papel en la factorización del trinomio obtenido.

**EJEMPLO 13** Factorizar  $3n^3 + 24n^2 - 60n$ .**Solución** Observamos que  $3n$  divide a cada término del polinomio, y por tanto es un factor común. Una vez que sacamos  $3n$ , se factoriza el trinomio resultante.

$$\begin{aligned} 3n^3 + 24n^2 - 60n &= 3n(n^2 + 8n - 20) \quad \text{Encontrar el factor común.} \\ &= 3n(n + 10)(n - 2) \quad \text{Factorizar el trinomio resultante.} \end{aligned}$$

## Conjunto de ejercicios 5.3

### Ejercicios conceptuales

Para cada trinomio, determine los signos que deben tener los factores del binomio. Explique la forma en que determinó su respuesta.

1.  $x^2 + 180x + 8000$

2.  $x^2 - 500x + 4000$

3.  $x^2 + 20x - 8000$

4.  $x^2 - 20x - 8000$

5.  $x^2 - 240x + 8000$

Dadas las parejas de factores, escriba los trinomios correspondientes. Explique cómo encontró la respuesta.

6.  $(x - 3)(x - 8)$

7.  $(x - 2y)(x + 6y)$

8.  $2(x - 5y)(x + y)$

9.  $4(a + b)(a - b)$

10. ¿Cómo comprobamos un problema de factorización de un trinomio?

11. En un examen, un estudiante factorizó a  $2x^2 - 6x + 4$  como  $(2x - 4)(x - 1)$ . Aun cuando el producto  $(2x - 4)(x - 1)$  da como resultado  $2x^2 - 6x + 4$ , ¿por qué le bajó puntos su profesor o profesora?

12. En un examen, un estudiante factorizó a  $3x^2 + 3x - 18$  como  $(3x - 6)(x + 3)$ . Aun cuando el producto  $(3x - 6)(x + 3)$  da como resultado  $3x^2 + 3x - 18$ , ¿por qué le

bajaron puntos?

13. Explique cómo determinar los factores cuando se factoriza un trinomio de la forma  $x^2 + bx + c$ .  
 14. En sus propias palabras, describa el método de factorización por ensayo y error.

### Práctica de habilidades

Factorice cada polinomio. Si el polinomio es primo, dígallo.

- |                         |                         |                          |
|-------------------------|-------------------------|--------------------------|
| 15. $x^2 - 7x + 10$     | 16. $x^2 + 8x + 15$     | 17. $x^2 + 6x + 8$       |
| 18. $x^2 - 3x + 2$      | 19. $x^2 + 7x + 12$     | 20. $x^2 - x - 12$       |
| 21. $x^2 + 4x - 6$      | 22. $y^2 - 6y + 8$      | 23. $y^2 - 13y + 12$     |
| 24. $x^2 + 3x - 28$     | 25. $a^2 - 2a - 8$      | 26. $p^2 + 3p - 10$      |
| 27. $r^2 - 2r - 15$     | 28. $x^2 - 6x + 8$      | 29. $b^2 - 11b + 18$     |
| 30. $x^2 + 11x - 30$    | 31. $x^2 - 8x - 15$     | 32. $x^2 - 10x + 9$      |
| 33. $a^2 + 12a + 11$    | 34. $x^2 + 10x + 25$    | 35. $x^2 - 7x - 30$      |
| 36. $b^2 - 9b - 36$     | 37. $x^2 + 4x + 4$      | 38. $x^2 - 4x + 4$       |
| 39. $p^2 + 6p + 9$      | 40. $t^2 - 6t + 9$      | 41. $p^2 - 12p + 36$     |
| 42. $x^2 - 10x - 25$    | 43. $w^2 - 18w + 45$    | 44. $x^2 - 11x + 10$     |
| 45. $x^2 + 10x - 39$    | 46. $x^2 - 3x + 8$      | 47. $x^2 - x - 20$       |
| 48. $t^2 - 28t - 60$    | 49. $y^2 + 9y + 14$     | 50. $r^2 + 14r + 48$     |
| 51. $x^2 + 12x - 64$    | 52. $x^2 - 18x + 80$    | 53. $s^2 + 14s - 24$     |
| 54. $x^2 - 13x + 36$    | 55. $x^2 - 20x + 64$    | 56. $x^2 + 19x + 48$     |
| 57. $b^2 - 18b + 65$    | 58. $x^2 + 5x - 24$     | 59. $x^2 + 2 + 3x$       |
| 60. $m^2 - 11 - 10m$    | 61. $7w - 18 + w^2$     | 62. $30 + y^2 - 13y$     |
| 63. $x^2 - 8xy + 15y^2$ | 64. $x^2 - 2xy + y^2$   | 65. $m^2 - 6mn + 9n^2$   |
| 66. $b^2 - 2bc - 3c^2$  | 67. $x^2 + 8xy + 15y^2$ | 68. $x^2 + 16xy - 17y^2$ |
| 69. $m^2 - 5mn - 24n^2$ | 70. $c^2 + 2cd - 24d^2$ |                          |

Factorice por completo.

- |                            |                             |
|----------------------------|-----------------------------|
| 71. $6x^2 - 30x + 24$      | 72. $2a^2 - 12a - 32$       |
| 73. $5x^2 + 20x + 15$      | 74. $4x^2 + 12x - 16$       |
| 75. $2x^2 - 14x + 24$      | 76. $3y^2 - 33y + 54$       |
| 77. $b^3 - 7b^2 + 10b$     | 78. $x^3 + 11x^2 - 42x$     |
| 79. $3z^3 - 21z^2 - 54z$   | 80. $3x^3 - 36x^2 + 33x$    |
| 81. $x^3 + 8x^2 + 16x$     | 82. $2x^3y - 12x^2y + 10xy$ |
| 83. $4a^2 - 24ab + 32b^2$  | 84. $3x^3 + 3x^2y - 18xy^2$ |
| 85. $r^2s + 7rs^2 + 12s^3$ | 86. $3r^3 + 6r^2t - 24rt^2$ |
| 87. $x^4 - 4x^3 - 21x^2$   | 88. $2z^5 + 16z^4 + 30z^3$  |

### Solución de problemas

89. Las dos primeras columnas de la siguiente tabla describen los signos del término con  $x$  y el término constante de un trinomio de la forma  $x^2 + bx + c$ . Determine si la tercera columna debe contener “los dos positivos, los dos negativos” o “uno positivo y otro negativo”. Explique cómo llegó a la respuesta.

Signo del coeficiente del término con $x$	Signo de la constante del trinomio	Signo de los términos constantes en los factores del binomio
-	+	
-	-	
+	-	
+	+	

90. Suponga que un trinomio de la forma  $x^2 + bx + c$  es factorizable. Determine si los términos constantes en los factores son “los dos positivos”, los dos negativos”, o “uno positivo y otro negativo” para los signos dados de  $b$  y  $c$ . Explique su respuesta.
- a)  $b > 0, c > 0$                       b)  $b < 0, c > 0$   
 c)  $b > 0, c < 0$                       d)  $b < 0, c < 0$
91. Escriba un trinomio cuyos factores binomiales contengan dos términos constantes que sumen 5 y tengan un producto de 4. Demuestre la factorización del trinomio.
92. Escriba un trinomio cuyos factores binomiales contengan términos constantes que sumen  $-12$  y tengan un producto de 32. Demuestre la factorización del trinomio.
93. Escriba un trinomio cuyos factores binomiales contengan términos constantes que sumen  $-12$  y tengan un producto de 32. Demuestre la factorización del trinomio.
94. Escriba un trinomio cuyos factores binomiales contengan términos constantes que sumen 5 y tengan un producto de  $-14$ . Demuestre la factorización del trinomio.

## Problemas de reto

Factorizar.

95.  $x^2 + 0.6x + 0.08$                       96.  $x^2 - 0.5x - 0.06$   
 97.  $x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}$                       98.  $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$   
 99.  $x^2 + 5x - 300$                       100.  $x^2 - 24x - 256$

## Ejercicios de repaso acumulativo

- [2.5] 101. Resuelva la ecuación  $4(2x - 4) = 5x + 11$ .
- [3.5] 102. **Soluciones de mezclas** Karen Moreau, química, mezcla 4 litros de una solución ácida al 18% con 1 litro de otra solución, también ácida, al 26%. Encuentre la concentración de la mezcla.
- [4.5] 103. Multiplique  $(2x^2 + 5x - 6)(x - 2)$ .
- [4.6] 104. Divida  $3x^2 - 10x - 10$  entre  $x - 4$ .
- [5.2] 105. Factorice  $3x^2 + 5x - 6x - 10$  por agrupamiento.



Consulte el ejercicio 102.

## 5.4 FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS DE LA FORMA $ax^2 + bx + c$ , $a \neq 1$



- 1 Factorización de trinomios de la forma  $ax^2 + bx + c$ , con  $a \neq 1$ , por ensayo y error.
- 2 Factorización de trinomios de la forma  $ax^2 + bx + c$ , con  $a \neq 1$ , por agrupamiento.

### Nota importante

En esta sección estudiamos dos métodos para factorizar trinomios de la forma  $ax^2 + bx + c$ , con  $a \neq 1$ . Es decir, factorizaremos trinomios cuyo término cuadrático tiene un coeficiente numérico diferente de 1, una vez que extraemos los factores comunes. Algunos ejemplos de trinomios con  $a \neq 1$  son

$$2x^2 + 11x + 12 \quad (a = 2) \qquad 4x^2 - 3x + 1 \quad (a = 4)$$

(continúa en la página siguiente)



Los métodos que estudiamos son (1) **factorización por ensayo y error**, y (2) **factorización por agrupamiento**. Presentamos dos métodos diferentes para factorizar estos trinomios debido a que algunos estudiantes, y ciertos profesores, prefieren uno de ellos en tanto que otros se inclinan por el otro. Usted puede utilizar cualquier método a menos que su maestro pida que utilice uno en particular. Emplearemos los mismos ejemplos para ilustrar los dos métodos para que usted pueda comprobarlos. Cada método se trata en forma independiente, de modo que si su profesor le pide que utilice uno —ya sea el método por ensayo y error o por agrupamiento—, sólo tenga que leer el material específico. En la sección 5.3 introdujimos la factorización por ensayo y error, y en la 5.2 estudiamos la técnica por agrupamiento.

## 1 Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ , con $a \neq 1$ , por ensayo y error

A continuación estudiaremos la factorización de trinomios de la forma  $ax^2 + bx + c$ , con  $a \neq 1$ , por el método de ensayo y error, el cual se introdujo en la sección 5.3. Quizá sea de utilidad que consulte dicho material antes de seguir adelante.

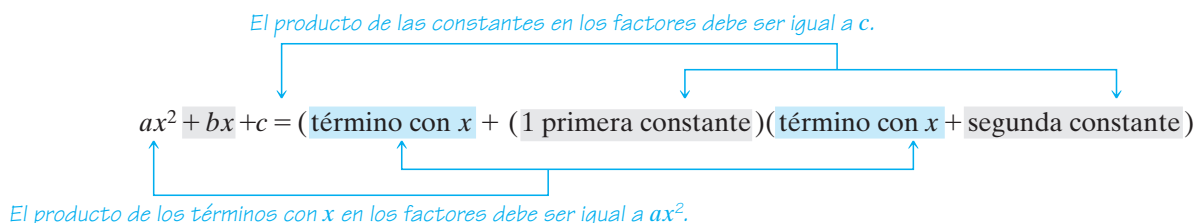
Recuerde que la factorización es el proceso inverso de la multiplicación. Considere el producto de los siguientes dos binomios:

$$\begin{aligned} (2x + 3)(x + 5) &= \overset{P}{2x}(x) + \overset{I}{3}(x) + \overset{E}{(2x)}\overset{S}{(5)} + \overset{S}{3(5)} \\ &= 2x^2 + 3x + 10x + 15 \\ &= 2x^2 + 13x + 15 \end{aligned}$$

Observe que el producto de los primeros términos del binomio da el término cuadrático de  $x$  del trinomio,  $2x^2$ . Asimismo, note que el producto de los últimos términos de los binomios produce el último término, o constante, del trinomio,  $+15$ . Por último, observe que la suma de los productos de los términos exteriores e interiores de los binomios da el término medio del trinomio,  $+13x$ . Cuando factorizamos un trinomio por ensayo y error, hacemos uso de estos hechos importantes. Observe que  $2x^2 + 13x + 15$  en forma factorizada es  $(2x + 3)(x + 5)$ .

$$2x^2 + 13x + 15 = (2x + 3)(x + 5)$$

Al factorizar un trinomio de la forma  $ax^2 + bx + c$  por ensayo y error, el producto de los primeros términos en los factores del binomio debe ser igual al primer término del trinomio,  $ax^2$ . Asimismo, el producto de las constantes en los factores del binomio, incluidos sus signos, debe ser igual a la constante,  $c$ , del trinomio.



Por ejemplo, al factorizar el trinomio  $2x^2 + 7x + 6$ , cada uno de los siguientes pares de factores tiene un producto de los primeros términos igual a  $2x^2$ , y un producto de los últimos términos que es igual a 6.

Trinomio	Factores posibles	Producto de los primeros términos	Producto de los últimos términos
$2x^2 + 7x + 6$	$\begin{cases} (2x + 1)(x + 6) \\ (2x + 2)(x + 3) \\ (2x + 3)(x + 2) \\ (2x + 6)(x + 1) \end{cases}$	$\begin{aligned} 2x(x) &= 2x^2 \\ 2x(x) &= 2x^2 \\ 2x(x) &= 2x^2 \\ 2x(x) &= 2x^2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} 1(6) &= 6 \\ 2(3) &= 6 \\ 3(2) &= 6 \\ 6(1) &= 6 \end{aligned}$

Cada una de estas parejas de factores es una respuesta posible, pero sólo una tiene los factores correctos. ¿Cómo determinamos cuál es la factorización correcta del trinomio  $2x^2 + 7x + 6$ ? La clave está en el término con  $x$ . Sabemos que cuando multiplicamos dos binomios por medio del método PIES, la suma de los productos de los términos exteriores e interiores da el término con  $x$  del trinomio. Utilizamos este concepto a la inversa para determinar la pareja correcta de factores. Necesitamos encontrar la pareja de factores cuya suma de los productos de los términos exteriores e interiores sea igual al término con  $x$  del trinomio.

$$ax^2 + bx + c = (\text{término con } x + (\text{1 primera constante}))(\text{término con } x + \text{segunda constante})$$

*La suma de los productos de los términos interiores y exteriores debe ser igual a  $bx$ .*

Ahora busquemos las posibles parejas de factores que obtuvimos para  $2x^2 + 7x + 6$ , para ver si alguna conduce al término correcto con  $x$ ,  $7x$ .

Trinomio	Factores posibles	Producto de los primeros términos	Producto de los últimos términos	Suma de los productos de los términos exteriores e interiores
$2x^2 + 7x + 6$	$\begin{cases} (2x + 1)(x + 6) \\ (2x + 2)(x + 3) \\ (2x + 3)(x + 2) \\ (2x + 6)(x + 1) \end{cases}$	$\begin{aligned} 2x^2 \\ 2x^2 \\ 2x^2 \\ 2x^2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{aligned}$	$\begin{aligned} 2x(6) + 1(x) &= 13x \\ 2x(3) + 2(x) &= 8x \\ 2x(2) + 3(x) &= 7x \\ 2x(1) + 6(x) &= 8x \end{aligned}$

Como  $(2x + 3)(x + 2)$  lleva al término correcto con  $x$ ,  $7x$ , los factores del trinomio  $2x^2 + 7x + 6$  son  $(2x + 3)$  y  $(x + 2)$ .

$$2x^2 + 7x + 6 = (2x + 3)(x + 2)$$

Comprobamos esta factorización con el método PIES.

$$\begin{aligned} \text{Comprobación } (2x + 3)(x + 2) &= \overset{P}{2x}(x) + \overset{I}{3}(x) + \overset{E}{2x}(2) + \overset{S}{3}(2) \\ &= 2x^2 + 3x + 4x + 6 \\ &= 2x^2 + 7x + 6 \end{aligned}$$

Como obtuvimos el trinomio original, la factorización es correcta.

En el ejemplo anterior observamos que  $(2x + 1)(x + 6)$  son factores diferentes de  $(2x + 6)(x + 1)$ , porque en un caso el 1 forma pareja con  $2x$ , y en el segundo caso lo hace con la  $x$ . Sin embargo, los factores  $(2x + 1)(x + 6)$  y  $(x + 6)(2x + 1)$  son el mismo conjunto de factores en orden inverso.

### SUGERENCIA

Al factorizar un trinomio de la forma  $ax^2 + bx + c$ , recuerde que el signo de la constante,  $c$ , y el signo del término con  $x$ ,  $bx$ , ofrecen información valiosa. Al factorizar un trinomio por ensayo y error, primero debe verificar el signo de la constante. Si es positivo, el signo de los dos factores debe ser el mismo que el del término con  $x$ . Si la constante es negativa, un factor tendrá un signo positivo y el otro negativo.

Ahora delinearemos el procedimiento para factorizar trinomios de la forma  $ax^2 + bx + c$ , con  $a \neq 1$ , por ensayo y error. Recuerde que entre más practique, tendrá mejor desempeño al factorizar.

### Para factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ , con $a \neq 1$ , por ensayo y error

1. Determine si existe algún factor común a los tres términos. En tal caso, factorícelo.
2. Escriba todas las parejas de factores del coeficiente del término cuadrado,  $a$ .
3. Escriba todas las parejas de factores del término constante,  $c$ .
4. Pruebe varias combinaciones de estos factores hasta encontrar el término medio correcto,  $bx$ .

Generalmente, al factorizar con este procedimiento, si hay más de una pareja de números cuyo producto sea  $a$ , comenzamos con la pareja de tamaño medio. Ilustraremos este procedimiento con los ejemplos 1 a 8.

### EJEMPLO 1 Factorizar $3x^2 + 20x + 12$ .

#### Solución

Primero determinamos que los términos no tengan factores comunes distintos de 1. Como el primer término es  $3x^2$ , un factor debe contener a  $3x$  y el otro una  $x$ . Por tanto, los factores serán de la forma  $(3x + \blacksquare)(x + \blacksquare)$ . Ahora debemos encontrar los números que colocaremos en las áreas sombreadas. El producto de los últimos términos de los factores debe ser 12. Como la constante y el coeficiente del término con  $x$  son positivos, sólo necesitamos considerar los factores positivos de 12. Haremos una lista de los factores positivos de 12, de los factores posibles del trinomio y la suma de los productos de los términos exteriores e interiores. Una vez que encontremos los factores de 12 que conducen a la suma apropiada de los productos de los términos exteriores e interiores,  $20x$ , escribimos la respuesta.

Factores de 12	Factores posibles del trinomio	Suma de los productos de los términos exteriores e interiores
1(12)	$(3x + 1)(x + 12)$	$37x$
2(6)	$(3x + 2)(x + 6)$	$20x$
3(4)	$(3x + 3)(x + 4)$	$15x$
4(3)	$(3x + 4)(x + 3)$	$13x$
6(2)	$(3x + 6)(x + 2)$	$12x$
12(1)	$(3x + 12)(x + 1)$	$15x$

Como el producto de  $(3x + 2)$  y  $(x + 6)$  lleva al término correcto con  $x$ , estos son los factores correctos.

$$3x^2 + 20x + 12 = (3x + 2)(x + 6) \quad \star$$

En el ejemplo 1 podríamos escribir nuestro primer factor con una  $x$  y el segundo con  $3x$ . De haber hecho esto, también hubiéramos obtenido la respuesta correcta:  $(x + 6)(3x + 2)$ . Además, podríamos detenernos una vez determinado el par de factores que nos dan  $20x$ . En lugar de ello, hicimos una lista de todos los factores para estudiarlos.

## EJEMPLO 2

### Solución

Factorizar  $5x^2 - 7x - 6$ .

Un factor debe tener a  $5x$  y el otro una  $x$ . Ahora haremos una lista de los factores de  $-6$  y buscaremos la pareja de factores que nos conduzcan a  $-7x$ .

Factores de $-6$	Factores posibles	Suma de los productos de los términos exteriores e interiores
$-1(6)$	$(5x - 1)(x + 6)$	$29x$
$-2(3)$	$(5x - 2)(x + 3)$	$13x$
$-3(2)$	$(5x - 3)(x + 2)$	$7x$
$-6(1)$	$(5x - 6)(x + 1)$	$-x$

Como al escribir el factor negativo con el  $5x$  no obtenemos la cantidad deseada,  $-7x$ , ahora probaremos haciendo una lista del factor negativo con la  $x$ .

Factores de $-6$	Factores posibles	Suma de los productos de los términos exteriores e interiores
$1(-6)$	$(5x + 1)(x - 6)$	$-29x$
$2(-3)$	$(5x + 2)(x - 3)$	$-13x$
$3(-2)$	$(5x + 3)(x - 2)$	$-7x$
$6(-1)$	$(5x + 6)(x - 1)$	$x$

Observamos que  $(5x + 3)(x - 2)$  produce el término  $-7x$  que buscamos. Por tanto,

$$5x^2 - 7x - 6 = (5x + 3)(x - 2)$$

De nuevo hicimos una lista de todas las combinaciones posibles para que las estudie. ★

## SUGERENCIA

En el ejemplo 2 nos pidieron factorizar  $5x^2 - 7x - 6$ . Al considerar el producto de  $-3(2)$  en el primer conjunto de factores posibles, obtuvimos

Factores de $-6$	Factores posibles	Suma de los productos de los términos exteriores e interiores
$-3(2)$	$(5x - 3)(x + 2)$	$7x$

Más adelante, en la solución probamos  $3(-2)$  y obtuvimos la respuesta correcta.

$3(-2)$	$(5x + 3)(x - 2)$	$-7x$
---------	-------------------	-------

Al factorizar un trinomio con una *constante negativa*, si obtenemos el término con  $x$  cuyo signo es el opuesto del que buscamos, *hay que invertir los signos de las constantes* en los factores. Esto debe dar el conjunto de factores que buscamos.

**EJEMPLO 3** Factorizar  $8x^2 + 33x + 4$ .

**Solución** No hay factores comunes a todos los términos. Como el primer término es  $8x^2$ , existen varias combinaciones posibles para los primeros términos en los factores. Como  $8 = 8 \cdot 1$  y  $8 = 4 \cdot 2$ , los posibles factores son de la forma  $(8x \quad)(x \quad)$  o bien  $(4x \quad)(2x \quad)$ . Por lo general, cuando esta situación ocurre comenzamos con la pareja de factores de tamaño medio. Así, comenzamos con  $(4x \quad)(2x \quad)$ . Si esta pareja no conduce a la solución, entonces probamos con  $(8x \quad)(x \quad)$ . Ahora hacemos una lista de los factores de la constante, 4. Como todos los signos son positivos, sólo incluimos los factores positivos de 4.

Factores de 4	Factores posibles	Suma de los productos de los términos exteriores e interiores
1(4)	$(4x + 1)(2x + 4)$	$18x$
2(2)	$(4x + 2)(2x + 2)$	$12x$
4(1)	$(4x + 4)(2x + 1)$	$12x$

Como no obtuvimos los factores con  $(4x \quad)(2x \quad)$ , intentamos ahora con  $(8x \quad)(x \quad)$ .

Factores de 4	Factores posibles	Suma de los productos de los términos exteriores e interiores
1(4)	$(8x + 1)(x + 4)$	$33x$
2(2)	$(8x + 2)(x + 2)$	$18x$
4(1)	$(8x + 4)(x + 1)$	$12x$

Como el producto de  $(8x + 1)$  y  $(x + 4)$  conduce al término con  $x$  correcto,  $33x$ , estos son los factores correctos.

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 7

$$8x^2 + 33x + 4 = (8x + 1)(x + 4)$$

**EJEMPLO 4** Factorice  $25t^2 - 10t + 1$ .

**Solución** Los factores deben tener la forma  $(25t \quad)(t \quad)$  o  $(5t \quad)(5t \quad)$ . Comenzaremos con los de tamaño medio  $(5t \quad)(5t \quad)$ . Como la constante es positiva y el coeficiente del término con  $x$  es negativo, ambos factores deben ser negativos.

Factores de 1	Factores posibles	Suma de los productos de los términos exteriores e interiores
$(-1)(-1)$	$(5t - 1)(5t - 1)$	$-10t$

Como encontramos los factores correctos, el proceso se detiene.

$$25t^2 - 10t + 1 = (5t - 1)(5t - 1) = (5t - 1)^2$$

**EJEMPLO 5** Factorizar  $2x^2 + 3x + 7$ .

**Solución** Los factores serán de la forma  $(2x \quad)(x \quad)$ . Sólo se necesita considerar los factores positivos de 7. ¿Puede explicar por qué?

Factores de 7	Factores posibles	Suma de los productos de los términos exteriores e interiores
1(7)	$(2x + 1)(x + 7)$	$15x$
7(1)	$(2x + 7)(x + 1)$	$9x$

Como ya probamos todas las combinaciones posibles y no obtuvimos el término en  $x$ ,  $3x$ , este trinomio *no puede factorizarse utilizando solamente factores enteros*. Como explicamos en la sección 5.3, el trinomio  $2x^2 + 3x + 7$  es un *polinomio primo*.



**EJEMPLO 6** Factorizar  $4x^2 + 7xy + 3y^2$ .

**Solución**

Este trinomio es diferente de los otros en que el último término no es constante, sino que contiene  $y^2$ . No tiene nada que temer. El proceso de factorización es el mismo, excepto que el segundo término de ambos factores tendrán a  $y$ . Comenzamos por considerar factores de la forma  $(2x \quad)(2x \quad)$ . Si no los encuentra, entonces probaremos otros de la forma  $(4x \quad)(x \quad)$ .

Factores de 3	Factores posibles	Suma de los productos de los términos exteriores e interiores
1(3)	$(2x + y)(2x + 3y)$	$8xy$
3(1)	$(2x + 3y)(2x + y)$	$8xy$
1(3)	$(4x + y)(x + 3y)$	$13xy$
3(1)	$(4x + 3y)(x + y)$	$7xy$

$$4x^2 + 7xy + 3y^2 = (4x + 3y)(x + y)$$

**Comprobación**  $(4x + 3y)(x + y) = 4x^2 + 4xy + 3xy + 3y^2 = 4x^2 + 7xy + 3y^2$  ✨

**EJEMPLO 7** Factorizar  $6x^2 - 13xy - 8y^2$ .

**Solución**

Comenzamos con factores de la forma  $(3x \quad)(2x \quad)$ . Si no encontramos la solución a partir de estos, probaremos con  $(6x \quad)(x \quad)$ . Como el último término,  $-8y^2$ , es negativo, un factor contendrá un signo positivo y el otro un signo negativo.

Factores de -8	Factores posibles	Suma de los productos de los términos exteriores e interiores
1(-8)	$(3x + y)(2x - 8y)$	$-22xy$
2(-4)	$(3x + 2y)(2x - 4y)$	$-8xy$
4(-2)	$(3x + 4y)(2x - 2y)$	$2xy$
8(-1)	$(3x + 8y)(2x - y)$	$13xy \leftarrow$

Buscamos  $-13xy$ . Al considerar  $8(-1)$ , obtuvimos  $13xy$ . Como en la Sugerencia anterior, si cambiamos el signo de los números en los factores, se obtendrá lo que buscamos.

$$\begin{aligned} (3x + 8y)(2x - y) & \text{ Da } 13xy \\ (3x - 8y)(2x + y) & \text{ Da } -13xy \end{aligned}$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 57**

Por tanto,  $6x^2 - 13xy - 8y^2 = (3x - 8y)(2x + y)$ .



A continuación presentaremos un ejemplo en el que todos los términos del trinomio tienen un factor común.

**EJEMPLO 8** Factorizar  $6x^3 + 15x^2 - 36x$ .

**Solución** *El primer paso en cualquier problema de factorización consiste en determinar si todos los términos contienen un factor común. Si así fuera, primero sacamos dicho factor común.* En este ejemplo,  $3x$  es común a los tres términos. Comenzamos por factorizar  $3x$ . Después, continuamos con la factorización por ensayo y error.

$$\begin{aligned} 6x^3 + 15x^2 - 36x &= 3x(2x^2 + 5x - 12) \\ &= 3x(2x - 3)(x + 4) \end{aligned}$$



## 2 Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ , con $a \neq 1$ , por agrupamiento

A continuación estudiaremos el uso del agrupamiento. Los pasos en el recuadro que sigue dan el procedimiento para factorizar trinomios por agrupamiento.

### Para factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ , $a \neq 1$ , por agrupamiento

1. Determinar si existe un factor común a los tres términos. Si así fuera, factorizarlo.
2. Encontrar dos números cuyo producto sea igual al producto de  $a$  por  $c$ , y cuya suma sea igual a  $b$ .
3. Reescribimos el término medio,  $bx$ , como la suma o resta de dos términos que utilicen los números que encontramos en el paso 2.
4. Factorizamos por agrupación, según explicamos en la sección 5.2.

Este proceso quedará claro en el ejemplo 9. Volveremos a resolver los ejemplos 1 a 8 por el método de factorización por agrupamiento. El ejemplo 9 es el mismo trinomio que dimos en el ejemplo 1. Después de estudiar este método e intentar resolver algunos ejercicios, estaremos en posición de decidir cuál método prefiere utilizar.

**EJEMPLO 9** Factorizar  $3x^2 + 20x + 12$ .

**Solución** En primer lugar, determinamos si existe un factor común a todos los términos del polinomio. No existen factores comunes (distintos de 1) para los tres términos.

$$a = 3 \quad b = 20 \quad c = 12$$

1. Debemos encontrar dos números cuyo producto sea  $a \cdot c$ , y cuya suma sea igual a  $b$ . Por tanto, debemos encontrar dos números cuyo producto sea igual a  $3 \cdot 12 = 36$  y cuya suma sea igual a 20. Sólo es necesario considerar los factores positivos de 36, ya que todos los signos del trinomio son positivos.

#### Factores de 36

$$(1)(36)$$

$$(2)(18)$$

$$(3)(12)$$

$$(4)(9)$$

$$(6)(6)$$

#### Suma de factores

$$1 + 36 = 37$$

$$2 + 18 = 20$$

$$3 + 12 = 15$$

$$4 + 9 = 13$$

$$6 + 6 = 12$$

Los factores que buscamos son 2 y 18.

2. Reescribimos  $20x$  como la suma o diferencia de dos términos que utilizan los valores que encontramos en el paso 1. Por tanto, reescribimos  $20x$  como  $2x + 18x$ .

$$3x^2 + 20x + 12 = 3x^2 + \boxed{2x} + \boxed{18x} + 12$$

3. Ahora factorizamos por agrupamiento. Comenzamos por sacar el factor común de los dos primeros términos y el factor común de los últimos dos. Estudiamos este procedimiento en la sección 5.2.

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} x \text{ es} \\ \text{un factor} \\ \text{común.} \end{array} \quad \begin{array}{c} 6 \text{ es un} \\ \text{factor} \\ \text{común.} \end{array} \\ & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ & 3x^2 + 2x + 8x + 12 \\ & = x(3x + 2) + 6(3x + 2) \\ & = (3x + 2)(x + 6) \end{aligned}$$



Ahora que en el paso 2 del ejemplo 9 reescribimos  $20x$  como  $2x + 18x$ . ¿Habrá habido alguna diferencia si hubiéramos escrito  $20x$  como  $18x + 2x$ ? Lo resolveremos para observar qué pasa.

$$\begin{aligned} & 3x^2 + 20x + 12 \\ & = 3x^2 + \boxed{18x} + \boxed{2x} + 12 \\ & \begin{array}{c} 3x \text{ es un} \\ \text{factor} \\ \text{común.} \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \text{ es un} \\ \text{factor} \\ \text{común.} \end{array} \\ & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ & 3x^2 + 18x + 2x + 12 \\ & = 3x(x + 6) + 2(x + 6) \\ & = (x + 6)(3x + 2) \end{aligned}$$

Como  $(x + 6)(3x + 2) = (3x + 2)(x + 6)$ , los factores son los mismos. Obtenemos la misma respuesta si escribimos  $20x$  ya sea como  $2x + 18x$  o como  $18x + 2x$ . En general, al reescribir el término medio del trinomio con el empleo de los factores específicos que encontramos, podemos hacer una lista de los términos en cualquier orden. Sin embargo, debemos comprobar los dos términos para estar seguros de que la suma de ellos es igual al término medio.

**EJEMPLO 10**  
**Solución**

Factorizar  $5x^2 - 7x - 6$ .

No hay factores comunes distintos de 1.

$$a = 5, \quad b = -7, \quad c = -6$$

El producto de  $a$  por  $c$  es  $5(-6) = -30$ . Debemos encontrar dos números cuyo producto sea  $-30$  y cuya suma sea  $-7$ .

**Factores de  $-30$**

**Suma de factores**

$(-1)(30)$	$-1 + 30 = 29$
$(-2)(15)$	$-2 + 15 = 13$
$(-3)(10)$	$-3 + 10 = 7$
$(-5)(6)$	$-5 + 6 = 1$
$(-6)(5)$	$-6 + 5 = -1$
$(-10)(3)$	$-10 + 3 = -7$
$(-15)(2)$	$-15 + 2 = -13$
$(-30)(1)$	$-30 + 1 = -29$



Reescribimos el término medio del trinomio,  $-7x$ , como  $-10x + 3x$ .

$$\begin{aligned} & 5x^2 - 7x - 6 \\ &= 5x^2 \overbrace{-10x + 3x} - 6 && \text{Ahora factorizamos por agrupación.} \\ &= 5x(x - 2) + 3(x - 2) \\ &= (x - 2)(5x + 3) \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 31



En el ejemplo 10 pudimos expresar a  $-7x$  como  $3x - 10x$  y hubiéramos obtenido la misma respuesta. Trate de resolver el ejemplo 10 escribiendo  $-7x$  como  $3x - 10x$ .

### SUGERENCIA

Observe en el ejemplo 10 que buscábamos dos factores de  $-30$  cuya suma fuera  $-7$ . Al considerar los factores  $-3$  y  $10$ , obtuvimos una suma de  $7$ . Entonces los factores que dan una suma de  $-7$  son  $3$  y  $-10$ . Observe que cuando la *constante del trinomio es negativa*, si cambiamos los signos de las constantes de los factores, cambia el signo de la suma de los factores. Así, al probar parejas de factores para obtener el término medio, si obtenemos el opuesto del coeficiente que buscamos, hay que invertir los signos de los factores. Esto debe dar el coeficiente buscado.

**EJEMPLO 11** Factorizar  $8x^2 + 33x + 4$ .

**Solución** No existen factores comunes distintos de 1. Debemos encontrar dos números cuyo producto sea  $8 \cdot 4$ , o  $32$ , y cuya suma sea  $33$ . Dichos números son  $1$  y  $32$ .

Factores de 32

Suma de factores

$$(1)(32) \qquad 1 + 32 = 33$$

Reescribimos  $33x$  como  $32x + x$ . Después factorizamos por agrupamiento.

$$\begin{aligned} & 8x^2 + 33x + 4 \\ &= 8x^2 + \overbrace{32x + x} + 4 \\ &= 8x(x + 4) + 1(x + 4) \\ &= (x + 4)(8x + 1) \end{aligned}$$



Observe en el ejemplo 11 que reescribimos  $33x$  como  $32x + x$ , en lugar de  $x + 32x$ . Hicimos esto para reforzar la factorización de 1 a partir de los dos últimos términos de una expresión. Debe obtenerse la misma respuesta si reescribe  $33x$  como  $x + 32x$ . Le proponemos comprobarlo ahora.

**EJEMPLO 12** Factorizar  $25t^2 - 10t + 1$ .

**Solución** No hay factores comunes distintos de 1. Debemos encontrar dos números cuyo producto sea  $25 \cdot 1$ , o  $25$ , y cuya suma sea  $-10$ . Como el producto de  $a$  por  $c$  es positivo, y el término con  $t$  es negativo, ambos factores numéricos deben ser negativos.

Factores de 9

Suma de factores

$$\begin{aligned} & (-1)(-25) && -1 + (-25) = -26 \\ & (-5)(-5) && -5 + (-5) = -10 \end{aligned}$$

Los factores que buscamos son  $-5$  y  $-5$ .

$$\begin{aligned}
 & 25t^2 - 10t + 1 \\
 &= 25t^2 \overbrace{-5t - 5t} + 1 && \text{Reescribir } -10t \text{ como } -5t - 5t. \\
 &= 5t(5t - 1) - 5t + 1 \\
 &= 5t(5t - 1) - 1(5t - 1) && \text{Reescribir } -5t + 1 \text{ como } -1(5t - 1). \\
 &= (5t - 1)(5t - 1) \text{ o bien } (5t - 1)^2
 \end{aligned}$$

### SUGERENCIA

Al tratar de factorizar un trinomio, si no hay dos enteros cuyo producto sea igual a  $a \cdot c$ , y cuya suma sea igual a  $b$ , el trinomio no puede factorizarse.

**EJEMPLO 13** Factorizar  $2x^2 + 3x + 7$ .

**Solución** No hay factores comunes distintos de 1. Debemos encontrar dos números cuyo producto sea 14 y su cuya suma sea 3. Sólo necesitamos considerar los factores positivos de 14. ¿Por qué?

Factores de 14	Suma de factores
(1)(14)	$1 + 14 = 15$
(2)(7)	$2 + 7 = 9$

Como no existen factores de 14 que sumen 3, se concluye que no es posible factorizar este trinomio. Éste es un ejemplo de *polinomio primo*.

**EJEMPLO 14** Factorizar  $4x^2 + 7xy + 3y^2$ .

**Solución** No existen factores comunes distintos de 1. Este trinomio contiene dos variables. Factorizamos básicamente de la misma manera que en los ejemplos anteriores. Hay que encontrar dos números cuyo producto sea  $4 \cdot 3$ , o 12, y cuya suma sea 7. Los dos números son 4 y 3.

$$\begin{aligned}
 & 4x^2 + 7xy + 3y^2 \\
 &= 4x^2 + \overbrace{4xy + 3xy} + 3y^2 \\
 &= 4x(x + y) + 3y(x + y) \\
 &= (x + y)(4x + 3y)
 \end{aligned}$$

**EJEMPLO 15** Factorizar  $6x^2 - 13xy - 8y^2$ .

**Solución** No hay factores comunes distintos de 1. Encontrar dos números cuyo producto sea  $6(-8)$ , o  $-48$ , y cuya suma sea  $-13$ . Como el producto es negativo, un factor debe ser positivo y el otro negativo. A continuación damos algunos factores.

Producto de factores	Suma de factores
(1)(-48)	$1 + (-48) = -47$
(2)(-24)	$2 + (-24) = -22$
(3)(-16)	$3 + (-16) = -13$

Existen muchos otros factores, pero encontramos la pareja que se buscaba. Los dos números cuyo producto es  $-48$  y cuya suma es  $-13$ , son 3 y  $-16$ .

$$\begin{aligned}
 & 6x^2 - 13xy - 8y^2 \\
 &= 6x^2 + 3xy - 16xy - 8y^2 \\
 &= 3x(2x + y) - 8y(2x + y) \\
 &= (2x + y)(3x - 8y)
 \end{aligned}$$

**Comprobación**  $(2x + y)(3x - 8y)$

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{cccc} \text{P} & & \text{I} & & \text{E} & & \text{S} \end{array} \\
 &= (2x)(3x) + (y)(3x) + (2x)(-8y) + (y)(-8y^2) \\
 &= 6x^2 + 3xy - 16xy - 8y^2 \\
 &= 6x^2 - 13xy - 8y^2
 \end{aligned}$$



Si reescribiéramos  $13xy$  como  $-16xy + 3xy$ , y volviéramos a resolver el ejemplo 15, ¿qué respuesta obtendríamos? Inténtelo y observe.

Recuerde que en cualquier problema de factorización, el primer paso consiste en determinar si todos los términos del polinomio tienen un factor común distinto de 1. Si así fuera, utilizamos la propiedad distributiva para factorizar el MCD de cada término. Después proseguimos con la factorización del trinomio, si esto fuera posible.

**EJEMPLO 16** Factorizar  $6x^3 + 15x^2 - 36x$ .

**Solución** El factor  $3x$  es común a los tres términos. Factorizamos  $3x$  de cada término del polinomio.

$$6x^3 + 15x^2 - 36x = 3x(2x^2 + 5x - 12)$$

Ahora continuamos con la factorización de  $2x^2 + 5x - 12$ . Los dos números cuyo producto es  $2(-12)$ , o  $24$ , y cuya suma es  $5$ , son  $8$  y  $-3$ .

$$\begin{aligned}
 & 2x(2x^2 + 5x - 12) \\
 &= 2x(2x^2 + 8x - 3x - 12) \\
 &= 2x[2x(x + 4) - 3(x + 4)] \\
 &= 2x(x + 4)(2x - 3)
 \end{aligned}$$



AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 47

### SUGERENCIA

#### ¿Cuál método usar para factorizar un trinomio?

Si el instructor pide que utilice un método específico, debe hacerlo. Si no, debe usar el método con el que se sienta más cómodo. Quizá desee comenzar con el método de ensayo y error, si sólo hay unos cuantos factores por probar. Si estos no pudieran encontrarse por ensayo y error o existieran muchos factores posibles por considerar, tal vez quiera utilizar el procedimiento por agrupación. Con tiempo y práctica aprenderá con cuál método se siente más cómodo y con cuál resuelve mejor los problemas.

## Conjunto de ejercicios 5.4

### Ejercicios conceptuales

- ¿Cuál es la relación entre la factorización de trinomios y la multiplicación de binomios?
- Cuando factorizamos un trinomio de la forma  $ax^2 + bx + c$ , ¿a qué debe ser igual el producto de los primeros términos de los factores del binomio?
- Al factorizar un trinomio de la forma  $ax^2 + bx + c$ , ¿a qué debe ser igual el producto de las constantes del binomio?
- Explique en sus propias palabras el procedimiento que empleamos para factorizar un trinomio de la forma  $ax^2 + bx + c$ , con  $a \neq 1$ .

## Práctica de habilidades

Factorice por completo. Si el polinomio es primo, dígallo.

- |                              |                              |                          |
|------------------------------|------------------------------|--------------------------|
| 5. $2x^2 + 11x + 5$          | 6. $2x^2 + 9x + 4$           | 7. $3x^2 + 14x + 8$      |
| 8. $5x^2 + 13x + 6$          | 9. $5x^2 - 9x - 2$           | 10. $3y^2 + 17y + 10$    |
| 11. $3r^2 + 13r - 10$        | 12. $3x^2 - 2x - 8$          | 13. $4z^2 - 12z + 9$     |
| 14. $4n^2 - 9n + 5$          | 15. $5y^2 - y - 4$           | 16. $5m^2 - 17m + 6$     |
| 17. $5a^2 - 12a + 6$         | 18. $2x^2 - x - 1$           | 19. $6z^2 + z - 12$      |
| 20. $6y^2 - 11y + 4$         | 21. $3x^2 + 11x + 4$         | 22. $3a^2 + 7a - 20$     |
| 23. $5y^2 - 16y + 3$         | 24. $5x^2 + 2x + 9$          | 25. $7x^2 + 43x + 6$     |
| 26. $4x^2 + 4x - 15$         | 27. $7x^2 - 8x + 1$          | 28. $15x^2 - 19x + 6$    |
| 29. $5b^2 - 23b + 12$        | 30. $9y^2 - 12y + 4$         | 31. $5z^2 - 6z - 8$      |
| 32. $3z^2 - 11z - 6$         | 33. $4y^2 + 5y - 6$          | 34. $4y^2 - 2y - 1$      |
| 35. $10x^2 - 27x + 5$        | 36. $6a^2 + 7a - 10$         | 37. $10d^2 - 7d - 12$    |
| 38. $6x^2 + 13x + 3$         | 39. $6x^2 - 22x - 8$         | 40. $12x^2 - 13x - 35$   |
| 41. $10t + 3 + 7t^2$         | 42. $n - 30 + n^2$           | 43. $6x^2 + 16x + 10$    |
| 44. $12z^2 + 32z + 20$       | 45. $6x^3 - 5x^2 - 4x$       | 46. $8x^3 + 8x^2 - 6x$   |
| 47. $12x^3 + 28x^2 + 8x$     | 48. $18x^3 - 21x^2 - 9x$     | 49. $4x^3 - 2x^2 - 12x$  |
| 50. $300x^2 - 400x - 400$    | 51. $36z^2 + 6z - 6$         | 52. $28x^2 - 28x + 7$    |
| 53. $72 + 3r^2 - 30r$        | 54. $4p - 12 + 8p^2$         | 55. $2x^2 + 5xy + 2y^2$  |
| 56. $8x^2 - 8xy - 6y^2$      | 57. $2x^2 - 7xy + 3y^2$      | 58. $15x^2 - xy - 6y^2$  |
| 59. $12x^2 + 10xy - 8y^2$    | 60. $12a^2 - 34ab + 24b^2$   | 61. $6x^2 - 9xy - 27y^2$ |
| 62. $24x^2 - 92x + 80$       | 63. $6m^2 - mn - 2n^2$       | 64. $8m^2 + 4mn - 4n^2$  |
| 65. $8x^3 + 10x^2y + 3xy^2$  | 66. $8a^2b + 10ab^2 + 3b^3$  |                          |
| 67. $4x^4 + 8x^3y + 3x^2y^2$ | 68. $24r^2s + 30rs^2 + 9s^3$ |                          |

## Solución de problemas

Escriba el polinomio para los factores dados. Explique la manera en que determina cada respuesta.

- |  |  |
|--|--|
| 69. $3x + 1, x - 7$  | 70. $4x - 3, 5x - 7$   |
| 71. $5, x + 3, 2x + 1$   | 72. $3, 2x + 3, x - 4$   |
| 73. $x^2, x + 1, 2x - 3$   | 74. $5x^2, 3x - 7, 2x + 3$   |
| 75. a) Si conoce un binomio que es factor de un trinomio, explique cómo utilizaría la división para encontrar el segundo binomio factor del trinomio (vea la sección 4.6). | b) Un factor de $18x^2 + 93x + 110$ es $3x + 10$ . Utilice la división a fin de encontrar el segundo factor. |
|  | 76. Un factor de $30x^2 - 17x - 247$ es $6x - 19$ . Encuentre el otro factor.                                |

## Problemas de reto

Factorice cada trinomio.

- |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|
| 77. $18x^2 + 9x - 20$    | 78. $8x^2 - 99x + 36$    |
| 79. $15x^2 - 124x + 160$ | 80. $16x^2 - 62x - 45$   |
| 81. $72x^2 - 180x - 200$ | 82. $72x^2 + 417x - 420$ |

83. Dos factores de  $6x^3 + 235x^2 + 2250x$  son  $x$  y  $3x + 50$ ; determine el otro factor. Explique la forma en que determinó su respuesta.
84. Dos factores del polinomio  $2x^3 + 11x^2 + 3x - 36$  son  $x + 3$  y  $2x - 3$ . Determine el tercer factor. Explique la manera en que halló su respuesta.

## Ejercicios de repaso acumulativo

- [1.9] 85. Evalúe la expresión  $-x^2 - 4(y + 3) + 2y^2$ , cuando  $x = -3$  y  $y = -5$ .
- [3.5] 86. **Daytona 500** Ward Burton ganó la edición 2002 de la carrera Daytona 500, con un tiempo de 3.82 horas, incluidos los altos precautorios y las entradas a los pits. Si cubrió las 500 millas con 200 recorridos del circuito de 2.5 millas, calcule la velocidad promedio de la carrera.
- [5.1] 87. Factorice  $36x^4y^3 - 12xy^2 + 24x^5y^6$ .
- [5.3] 88. Factorice  $x^2 - 15x + 54$ .



Vea el ejercicio 86.

## 5.5 FÓRMULAS DE FACTORIZACIÓN ESPECIAL Y REPASO GENERAL DE LA FACTORIZACIÓN



- 1 Factorizar una diferencia de dos cuadrados.
- 2 Factorizar la suma y resta de dos cubos.
- 3 Aprender el procedimiento general para factorizar un polinomio.

Existen fórmulas especiales de uso frecuente para ciertos problemas de factorización. Las fórmulas especiales en que centramos esta sección, son la *diferencia de dos cuadrados*, la *suma de dos cubos* y la *diferencia de dos cubos*. No existe fórmula especial para la suma de dos cuadrados; esto se debe a que no es posible factorizar la suma de dos cuadrados por medio del conjunto de números reales. *Deberá memorizar las tres fórmulas que resaltamos en esta sección*, para usarlas siempre que las necesite.

### 1 Factorizar una diferencia de dos cuadrados

Comenzaremos con la diferencia de dos cuadrados. Considere el binomio  $x^2 - 9$ . Observe que cada término del binomio puede expresarse como el cuadrado de alguna expresión.

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2$$

Éste es un ejemplo de una **diferencia de dos cuadrados**. Para factorizar la diferencia de dos cuadrados, es conveniente usar la fórmula para la diferencia de dos cuadrados (que estudiamos en la sección 4.5).

#### Diferencia de dos cuadrados


$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

**EJEMPLO 1** Factorizar  $x^2 - 9$ .

#### Solución

Si escribimos  $x^2 - 9$  como la diferencia de dos cuadrados, tenemos  $x^2 - 3^2$ . Con el empleo de la fórmula de la diferencia de dos cuadrados, donde reemplazamos la  $a$  por  $x$  y la  $b$  por 3, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{c}
 a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3)
 \end{array}$$


Por tanto,  $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$ . 

**EJEMPLO 2** Factorizar con el empleo de la fórmula de la diferencia de dos cuadrados.

**a)**  $x^2 - 16$                       **b)**  $25x^2 - 4$                       **c)**  $36x^2 - 49y^2$

**Solución** **a)**  $x^2 - 16 = (x)^2 - (4)^2$   
 $= (x + 4)(x - 4)$

**b)**  $25x^2 - 4 = (5x^2) - (2)^2$   
 $= (5x + 2)(5x - 2)$

**c)**  $36x^2 - 49y^2 = (6x)^2 - (7y)^2$   
 $= (6x + 7y)(6x - 7y)$  

**EJEMPLO 3** Factorizar cada diferencia de dos cuadrados.

**a)**  $16x^4 - 9y^4$                       **b)**  $x^6 - y^4$

**Solución** **a)** Reescribimos  $16x^4$  como  $(4x^2)^2$ , y  $9y^4$  como  $(3y^2)^2$ , y después empleamos la fórmula de la diferencia de dos cuadrados.

$$\begin{aligned}
 16x^4 - 9y^4 &= (4x^2)^2 - (3y^2)^2 \\
 &= (4x^2 + 3y^2)(4x^2 - 3y^2)
 \end{aligned}$$

**b)** Se reescribe  $x^6$  como  $(x^3)^2$  y  $y^4$  como  $(y^2)^2$ , luego utilizamos la fórmula de la diferencia de dos cuadrados.

$$\begin{aligned}
 x^6 - y^4 &= (x^3)^2 - (y^2)^2 \\
 &= (x^3 + y^2)(x^3 - y^2)
 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 31

**EJEMPLO 4** Factorizar  $4x^2 - 16y^2$  con el uso de la fórmula de la diferencia de dos cuadrados.

**Solución** En primer lugar, se saca el factor común, 4.

$$4x^2 - 16y^2 = 4(x^2 - 4y^2)$$

Ahora se utiliza la fórmula para la diferencia de dos cuadrados.

$$\begin{aligned}
 4(x^2 - 4y^2) &= 4[(x)^2 - (2y)^2] \\
 &= 4(x + 2y)(x - 2y)
 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 85

En el ejemplo 4, observe que 4 y  $4x^2 - 16y^2$  es la diferencia de dos cuadrados,  $(2x)^2 - (4y)^2$ . Si ésta se factorizara sin sacar primero el factor común, 4, la factorización sería más difícil. Una vez que factorizamos esta diferencia de cuadrados, necesitamos sacar el factor común 2 de cada binomio, como mostramos a continuación.

$$\begin{aligned}
 4x^2 - 16y^2 &= (2x)^2 - (4y)^2 \\
 &= (2x + 4y)(2x - 4y) \\
 &= 2(x + 2y)2(x - 2y) \\
 &= 4(x + 2y)(x - 2y)
 \end{aligned}$$

Obtenemos la misma respuesta que en el ejemplo 4. Sin embargo, como no factorizamos primero el 4, tuvimos que trabajar un poco más para obtener la respuesta.

**EJEMPLO 5** Factorizar  $z^4 - 16$  con la fórmula de la diferencia de dos cuadrados.

**Solución** Reescribimos  $z^4$  como  $(z^2)^2$  y 16 como  $4^2$ , y después empleamos la fórmula de la diferencia de dos cuadrados.

$$\begin{aligned} z^4 - 16 &= (z^2)^2 - 4^2 \\ &= (z^2 + 4)(z^2 - 4) \end{aligned}$$

Observe que el segundo factor,  $z^2 - 4$ , también es la diferencia de dos cuadrados. Para completar la factorización, empleamos la fórmula de la diferencia de dos cuadrados otra vez para factorizar  $z^2 - 4$ .

$$\begin{aligned} &= (z^2 + 4)(z^2 - 4) \\ &= (z^2 + 4)(z + 2)(z - 2) \end{aligned}$$



### CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Es posible factorizar la diferencia de dos cuadrados. Sin embargo, una suma de dos cuadrados, donde no haya factor común de los dos términos, no puede factorizarse por medio de números reales.

CORRECTO

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

INCORRECTO

$$\cancel{a^2 + b^2} = \cancel{(a + b)}(\cancel{a + b})$$

## 2 Factorizar la suma y resta de dos cubos

Comenzaremos el estudio de la suma y resta de dos cubos con un problema de multiplicación de polinomios. Considere el producto de  $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ .

$$\begin{array}{r} a^2 - ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^2b - ab^2 + b^3 \quad \leftarrow b(a^2 - ab + b^2), \\ a^3 - a^2b + ab^2 \quad \leftarrow a(a^2 - ab + b^2), \\ \hline a^3 \quad \leftarrow \text{Suma de términos.} \end{array}$$

Así,  $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ . Como factorizar es lo opuesto de multiplicar, la expresión  $a^3 + b^3$  se factoriza como sigue:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Con el uso del mismo procedimiento vemos que  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ . La expresión  $a^3 + b^3$  es la suma de dos cubos, y la expresión  $a^3 - b^3$  es la resta de dos cubos. A continuación presentamos las fórmulas para factorizar **la suma y resta de dos cubos**.

### Suma de dos cubos

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

### Resta de dos cubos


$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Observe que no es posible factorizar más a los trinomios  $a^2 - ab + b^2$  y  $a^2 + ab + b^2$ . Ahora resolveremos algunos problemas de factorización por medio de la suma y resta de dos cubos.

**EJEMPLO 6** Factorizar  $x^3 + 8$ .

**Solución** Reescribimos  $x^3 + 8$  como la suma de dos cubos,  $x^3 + 8 = (x)^3 + (2)^3$ . Con la fórmula de la suma de dos cubos, si hacemos que  $a$  corresponda a  $x$  y que  $b$  corresponda a 2, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - a \cdot b + b^2) \\
 \downarrow \quad \downarrow & \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 x^3 + 2^3 &= x^3 + 2^3 = (x + 2)[x^2 - x \cdot 2 + 2^2] \\
 &= (x + 2)(x^2 - 2x + 4)
 \end{aligned}$$

Puede comprobar la factorización con la multiplicación de  $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ . Si factorizó en forma correcta, el producto de los factores será igual a la expresión original,  $x^3 + 8$ . Inténtelo y observe. 

### SUGERENCIA

Al factorizar la suma o resta de dos cubos, recuerde que el signo entre los términos en el *factor binomial* será el mismo que el signo entre los términos de la expresión que factorizamos. Además, el signo del término  $ab$  será el opuesto del signo entre los términos del factor binomial. El último término del factor trinomial siempre será positivo. Considere lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\
 \uparrow \quad \uparrow & \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 \text{Mismo signo.} & \quad \text{Signo opuesto.} \quad \text{Siempre positivo.} \\
 a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\
 \uparrow \quad \uparrow & \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 \text{Mismo signo.} & \quad \text{Signo opuesto.} \quad \text{Siempre positivo.}
 \end{aligned}$$

**EJEMPLO 7** Factorizar  $y^3 - 125$ .

**Solución** Reescribimos  $y^3 - 125$  como la diferencia de dos cubos:  $(y)^3 - (5)^3$ . Con la fórmula de la diferencia de dos cubos, si hacemos que la  $a$  corresponda a  $y$  y que la  $b$  corresponda a 5, obtenemos

$$\begin{aligned}
 a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + a \cdot b + b^2) \\
 \downarrow \quad \downarrow & \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 y^3 - 125 &= y^3 - 5^3 = (y - 5)[y^2 + y \cdot 5 + 5^2] \\
 &= (y - 5)(y^2 + 5y + 25)
 \end{aligned}$$



**EJEMPLO 8** Factorizar  $8p^3 - k^3$ .

**Solución** Reescribimos  $8p^3 - k^3$  como una diferencia de dos cubos. Como  $(2p)^3 = 8p^3$ , escribimos:

$$\begin{aligned}
 8p^3 - k^3 &= (2p)^3 - (k)^3 \\
 &= (2p - k)[(2p)^2 + (2p)(k) + k^2] \\
 &= (2p - k)(4p^2 + 2pk + k^2)
 \end{aligned}$$



**EJEMPLO 9** Factorizar  $8r^3 + 27s^3$ .

**Solución** Reescribimos  $8r^3 + 27s^3$  como la suma de dos cubos. Como  $8r^3 = (2r)^3$  y  $27s^3 = (3s)^3$ , escribimos:

$$\begin{aligned}
 8r^3 + 27s^3 &= (2r)^3 + (3s)^3 \\
 &= (2r + 3s)[(2r)^2 - (2r)(3s) + (3s)^2] \\
 &= (2r + 3s)(4r^2 - 6rs + 9s^2)
 \end{aligned}$$





**CÓMO EVITAR  
ERRORES COMUNES**

Recuerde que  $a^2 + b^2 \neq (a + b)^2$ , y que  $a^2 - b^2 \neq (a - b)^2$ . Aplicamos el mismo principio a la suma y diferencia de dos cubos.

**CORRECTO**

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

**INCORRECTO**

~~$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a + b)^3 \\ a^3 - b^3 &= (a - b)^3 \end{aligned}$$~~

Como  $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$ , no es posible igualar con  $a^3 + b^3$ . Asimismo, como  $(a - b)^3 = (a - b)(a - b)(a - b)$ , no es posible igualar con  $a^3 - b^3$ . En este punto, sugerimos que determine los productos de  $(a + b)(a + b)(a + b)$  y  $(a - b)(a - b)(a - b)$ .

Tal vez sea más fácil ver que, por ejemplo,  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$  y no  $(a + b)^3$ , con la sustitución de números para  $a$  y  $b$ . Suponga que  $a = 3$  y  $b = 4$ , entonces

$$\begin{aligned} 3^3 + 4^3 &= (3 + 4)[3^2 - 3(4) + 4^2] \\ 27 + 64 &= 7(13) \\ 91 &= 91 \\ \text{pero } 3^3 + 4^3 &\neq (3 + 4)^3 \\ 91 &\neq 343 \end{aligned}$$

**3 Aprender el procedimiento general para factorizar un polinomio**

En este capítulo hemos presentado diversos métodos de factorización. Ahora combinaremos las técnicas de esta sección y las anteriores para darle el panorama de un procedimiento general de la factorización; a continuación presentamos dicho procedimiento:

**Procedimiento general para factorizar un polinomio**

1. Si todos los términos del polinomio tienen un máximo común denominador distinto de 1, factorícelo.
2. Si el polinomio tiene dos términos (o es un binomio), determine si se trata de una diferencia de dos cuadrados o una suma o resta de dos cubos. En cada caso, factorícelo por medio de la fórmula apropiada.
3. Si el polinomio tiene tres términos, factorice el trinomio con los métodos que estudió en las secciones 5.3 y 5.4.
4. Si el polinomio tiene más de tres términos, intente factorizarlo por agrupamiento.
5. Como paso final, estudie el polinomio que factorizó para determinar si los términos de cualesquiera factores tienen algún factor común. Si encuentra alguno, factorícelo en este punto.

**EJEMPLO 10** Factorizar  $3x^4 - 27x^2$ .

**Solución**

En primer lugar, veamos si los términos tienen un máximo común divisor distinto de 1. Como  $3x^2$  es común a los dos términos, lo factorizamos.

$$\begin{aligned} 3x^4 - 27x^2 &= 3x^2(x^2 - 9) \\ &= 3x^2(x + 3)(x - 3) \end{aligned}$$

Observe que  $x^2 - 9$  es una diferencia de dos cuadrados. 

**EJEMPLO 11** Factorizar  $2m^2n^2 + 6m^2n - 36m^2$ .

**Solución** Comenzamos por factorizar el MCD,  $2m^2$ , de cada término. Después, el trinomio restante.

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 81

$$\begin{aligned} 2m^2n^2 + 6m^2n - 36m^2 &= 2m^2(n^2 + 3n - 18) \\ &= 2m^2(n + 6)(n - 3) \end{aligned}$$



**EJEMPLO 12** Factorizar  $10a^2b - 15ab + 20b$ .

**Solución**  $10a^2b - 15ab + 20b = 5b(2a^2 - 3a + 4)$

Como  $2a^2 - 3a + 4$  no puede factorizarse, el proceso se detiene en este punto.



**EJEMPLO 13** Factorizar  $3xy + 6x + 3y + 6$ .

**Solución** Siempre comenzamos por determinar si todos los términos del polinomio tienen un factor común. En este ejemplo, el MCD es 3. Factorizamos 3 de cada término.

$$3xy + 6x + 3y + 6 = 3(xy + 2x + y + 2)$$

Ahora, factorizamos por agrupación.

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 79

$$\begin{aligned} &= 3[x(y + 2) + 1(y + 2)] \\ &= 3(y + 2)(x + 1) \end{aligned}$$



En el ejemplo 13, qué pasaría si olvidáramos sacar el factor común de 3. Se volverá a resolver el problema sin factorizar el 3 al principio, y veremos lo que pasa. Factorizamos  $3x$  de los dos primeros términos, y el 3 de los dos últimos.

$$\begin{aligned} 3xy + 6x + 3y + 6 &= 3x(y + 2) + 3(y + 2) \\ &= (y + 2)(3x + 3) \end{aligned}$$

El paso 5 del procedimiento general de la factorización, que presentamos en la página 342, indica que hay que analizar el polinomio factorizado para ver si los términos tienen un factor común. Si estudiamos los factores, vemos que el factor  $3x + 3$  tiene el factor común de 3. Si factorizamos 3 de  $3x + 3$  obtendremos la misma respuesta que obtuvimos en el ejemplo 13.

$$(y + 2)(3x + 3) = 3(y + 2)(x + 1)$$

**EJEMPLO 14** Factorizar  $12x^2 + 12x - 9$ .

**Solución** Primero sacamos 3 como factor común. Después, factorizamos el trinomio que queda por medio de alguno de los métodos que estudiamos en la sección 5.4 (ya sea por agrupamiento o por ensayo y error).

$$\begin{aligned} 12x^2 + 12x - 9 &= 3(4x^2 + 4x - 3) \\ &= 3(2x + 3)(2x - 1) \end{aligned}$$



**EJEMPLO 15** Factorizar  $2x^4y + 54xy$ .

**Solución** En primer lugar, sacamos  $2xy$  como factor común.

$$\begin{aligned} 2x^4y + 54xy &= 2xy(x^3 + 27) \\ &= 2xy(x + 3)(x^2 - 3x + 9) \end{aligned}$$

Observe que  $x^3 + 27$  es la suma de dos cubos.



## Conjunto de ejercicios 5.5

### Ejercicios conceptuales

- |   |   |
|---|---|
| <p>1. a) Escriba la fórmula para factorizar la diferencia de dos cuadrados.</p> <p>b) Explique con sus propias palabras cómo se factoriza la diferencia de dos cuadrados.</p> <p>2. a) Escriba la fórmula para factorizar la suma de dos cubos.</p> <p>b) Explique con sus propias palabras cómo factorizar la suma de dos cubos.</p> <p>3. a) Escriba la fórmula para factorizar la diferencia de dos cubos.</p> | <p>b) En sus propias palabras, explique cómo factorizamos la diferencia de dos cubos.</p> <p>4. ¿Por qué es importante memorizar las fórmulas especiales de factorización?</p> <p>5. ¿Existe alguna fórmula especial para factorizar la suma de dos cuadrados?</p> <p>6. En sus propias palabras, describa el procedimiento general para factorizar un polinomio.</p> |
|---|---|

En los ejercicios 7 a 12, el binomio es una suma de cuadrados. No existe fórmula para factorizar la suma de cuadrados. Sin embargo, en ocasiones es posible sacar un factor común a partir de una suma de cuadrados. Factorice los polinomios que sean factorizables. Si el polinomio no es factorizable, escriba la palabra primo.

- |                     |                     |                    |
|---------------------|---------------------|--------------------|
| 7. $x^2 + 9$        | 8. $4y^2 + 1$       | 9. $4a^2 + 16$     |
| 10. $16s^2 + 64t^2$ | 11. $16m^2 + 36n^2$ | 12. $9y^2 + 16z^2$ |

### Práctica de habilidades

Factorice cada diferencia de dos cuadrados.

- |                     |                      |                      |
|---------------------|----------------------|----------------------|
| 13. $y^2 - 25$      | 14. $x^2 - 4$        | 15. $z^2 - 81$       |
| 16. $z^2 - 64$      | 17. $x^2 - 49$       | 18. $x^2 - a^2$      |
| 19. $x^2 - y^2$     | 20. $16x^2 - 9$      | 21. $9y^2 - 25z^2$   |
| 22. $36y^2 - 25$    | 23. $64a^2 - 36b^2$  | 24. $100x^2 - 81y^2$ |
| 25. $49x^2 - 36$    | 26. $y^4 - 100$      | 27. $z^4 - 81x^2$    |
| 28. $9x^4 - 16y^4$  | 29. $9x^4 - 81y^2$   | 30. $4x^4 - 25y^4$   |
| 31. $36m^4 - 49n^2$ | 32. $2x^4 - 50y^2$   | 33. $10x^2 - 160$    |
| 34. $4x^3 - xy^2$   | 35. $16x^2 - 100y^4$ | 36. $36x^4 - 4y^2$   |

Factorice cada suma o resta de dos cubos.

- |                    |                      |                      |
|--------------------|----------------------|----------------------|
| 37. $x^3 + y^3$    | 38. $x^3 - y^3$      | 39. $a^3 - b^3$      |
| 40. $a^3 + b^3$    | 41. $x^3 + 8$        | 42. $x^3 - 8$        |
| 43. $x^3 - 27$     | 44. $a^3 + 27$       | 45. $a^3 + 1$        |
| 46. $a^3 - 1$      | 47. $27x^3 - 1$      | 48. $27y^3 + 8$      |
| 49. $27a^3 - 125$  | 50. $125 + x^3$      | 51. $27 - 8y^3$      |
| 52. $8 + 27y^3$    | 53. $64m^3 + 27n^3$  | 54. $64x^3 - 125y^3$ |
| 55. $8a^3 - 27b^3$ | 56. $27c^3 + 125d^3$ |                      |

Factorice por completo.

- |                              |                       |                            |
|------------------------------|-----------------------|----------------------------|
| 57. $2x^2 + 8x + 8$          | 58. $3x^2 - 9x - 12$  | 59. $a^2b - 25b$           |
| 60. $3x^2 - 48$              | 61. $3c^2 - 18c + 27$ | 62. $3x^2 + 9x + 12x + 36$ |
| 63. $5x^2 - 10x - 15$        | 64. $5x^2 - 20$       | 65. $3xy - 6x + 9y - 18$   |
| 66. $x^2y + 2xy - 6xy - 12y$ | 67. $2x^2 - 50$       | 68. $4a^2y - 64y^3$        |
| 69. $2x^2y - 18y$            | 70. $2x^3 - 72x$      | 71. $3x^3y^2 + 3y^2$       |

- |                          |                            |                               |
|--------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| 72. $x^4 - 125x$         | 73. $2x^3 - 16$            | 74. $x^3 - 27y^3$             |
| 75. $18x^2 - 50$         | 76. $54a^3 - 16$           | 77. $12x^2 + 36x + 27$        |
| 78. $12n^2 + 4n - 16$    | 79. $6x^2 - 4x + 24x - 16$ | 80. $2ab^2 - 4ab - 8ab + 16a$ |
| 81. $2rs^2 - 10rs - 48r$ | 82. $4x^4 - 26x^3 + 30x^2$ | 83. $4x^2 + 5x - 6$           |
| 84. $12a^2 + 36a + 27$   | 85. $25b^2 - 100$          | 86. $3b^2 - 75c^2$            |
| 87. $a^5b^2 - 4a^3b^4$   | 88. $12x^2 + 36x - 3x - 9$ | 89. $3x^4 - 18x^3 + 27x^2$    |
| 90. $2a^6 + 4a^4b^2$     | 91. $x^3 + 25x$            | 92. $8y^2 - 23y - 3$          |
| 93. $y^4 - 16$           | 94. $16m^3 + 250$          | 95. $36a^2 - 15ab - 6b^2$     |
| 96. $ac + 2a + bc + 2b$  | 97. $2ab - 3b + 4a - 6$    | 98. $x^3 - 100x$              |
| 99. $9 - 9y^4$           |                            |                               |

## Resolución de problemas

100. Explique por qué la suma de dos cuadrados  $a^2 + b^2$ , no puede factorizarse con el empleo de números reales.
101. ¿Ha visto alguna vez la prueba de que 1 es igual a 2? A continuación se presenta.

Sea  $a = b$ , después, dividimos ambos lados de la ecuación:

$$\begin{aligned}
 a^2 &= b^2 \\
 a^2 &= b \cdot b \\
 a^2 &= ab && \text{Sustituir } a = b. \\
 a^2 - b^2 &= ab - b^2 && \text{Restar } b^2 \text{ en ambos lados de la ecuación.} \\
 (a + b)(a - b) &= b(a - b) && \text{Factorizar ambos lados de la ecuación.} \\
 \frac{(a + b)\cancel{(a - b)}}{\cancel{(a - b)}} &= \frac{b\cancel{(a - b)}}{\cancel{(a - b)}} && \text{Dividir ambos lados de la ecuación entre } (a - b) \text{ y eliminar los factores comunes.} \\
 a + b &= b \\
 b + b &= b && \text{Sustituir } a = b. \\
 2b &= b \\
 \frac{1}{b} \cdot 2b &= \frac{1}{b} \cdot b && \text{Dividir ambos lados de la ecuación entre } b. \\
 \frac{1}{\cancel{b}} \cdot 2\cancel{b} &= \frac{1}{\cancel{b}} \cdot \cancel{b} \\
 2 &= 1
 \end{aligned}$$

Es obvio que  $2 \neq 1$ . Por tanto, debe haberse cometido un error en alguna parte. ¿Es capaz de encontrarlo?

Factorice cada expresión. Considere los símbolos desconocidos como variables.

- |   |  |
|---|--|
| 102. $\blacklozenge\spadesuit + 2\blacklozenge + \heartsuit\spadesuit + 2\heartsuit$                    | 103. $2\blacklozenge^6 + 4\blacklozenge^4\spadesuit^2$ |
| 104. $4\blacklozenge^2\spadesuit - 6\blacklozenge\spadesuit - 20\spadesuit\blacklozenge + 30\spadesuit$ |  |

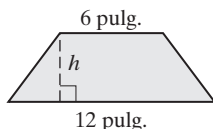
## Problemas de reto

- |   |  |
|---|--|
| 105. Factorice $x^6 + 1$ .  | 108. Factorice $x^2 + 10x + 25 - y^2 + 4y - 4$ . (Sugerencia: agrupe los tres primeros términos y los tres últimos.) |
| 106. Factorice $x^6 - 27y^9$ .  | 109. Factorice $x^6 - y^6$ . (Sugerencia: de inicio, factorícelo como una diferencia de dos cuadrados.)              |
| 107. Factorice $x^2 - 6x + 9 - 4y^2$ . (Sugerencia: escriba los tres primeros términos como el cuadrado de un binomio.) |  |

## Ejercicios de repaso acumulativo

[2.7] 110. Resuelva la desigualdad  $3x - 2(x + 4) \geq 2x - 9$  y grafique la solución en una recta numérica.

[3.1] 111. Utilice la fórmula  $A = \frac{1}{2}h(b + d)$  para encontrar  $h$  en el trapecio que sigue, si el área de éste es de 36 pulgadas cuadradas.



[3.2] 112. Exprese  $x + (5 - 2x) = 2$  como un enunciado.

[4.1] 113. Simplifique  $\left(\frac{4x^4y}{6xy^5}\right)^3$ .

[4.2] 114. Simplifique  $x^{-2}x^{-3}$ .

## 5.6 SOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS MEDIANTE FACTORIZACIÓN



- 1 Reconocer ecuaciones cuadráticas.
- 2 Resolver ecuaciones cuadráticas mediante factorización.

## 1 Reconocer ecuaciones cuadráticas

En esta sección introducimos las **ecuaciones cuadráticas**, que son aquellas que contienen un término de segundo grado y ninguno de un grado mayor.

## Ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones cuadráticas tienen la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales,  $a \neq 0$ .

## Ejemplos de ecuaciones cuadráticas

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$2x^2 - 5x = 0$$

$$3x^2 - 2 = 0$$

Las ecuaciones cuadráticas como éstas, en las que uno de los lados está escrito en orden descendiente de la variable y el otro es igual a 0, están en su **forma estándar**.

Ciertas ecuaciones cuadráticas se resuelven por factorización. En el capítulo 10 daremos dos métodos para resolver ecuaciones cuadráticas que no es posible resolver por factorización. Para resolverlas con este método empleamos la **propiedad del factor cero**.

Como sabe, si multiplicamos por 0, el producto es igual a 0. Es decir, si  $a = 0$  o  $b = 0$ , entonces  $ab = 0$ . Lo inverso también es cierto. Si un producto es igual a 0, al menos uno de sus factores debe ser igual a 0.

## Propiedad del factor cero

Si  $ab = 0$ , entonces  $a = 0$  o  $b = 0$ .

A continuación enseñamos la forma de utilizar la propiedad del factor cero para resolver ecuaciones.

**EJEMPLO 1** Resuelva la ecuación  $(x + 3)(x + 4) = 0$ .

**Solución**

Como el producto de los factores es igual a 0, de acuerdo con la propiedad del factor cero, uno de los factores o ambos, debe ser igual a 0. Igualamos con 0 cada factor y resolvemos la ecuación resultante.

$$\begin{array}{lcl} x + 3 = 0 & \text{o bien} & x + 4 = 0 \\ x + 3 - 3 = 0 - 3 & & x + 4 - 4 = 0 - 4 \\ x = -3 & & x = -4 \end{array}$$

Por tanto, si  $x$  vale ya sea  $-3$  o  $-4$ , el producto de los factores es igual a 0. Las soluciones de la ecuación son  $-3$  y  $-4$ .

**Comprobación**  $x = -3$

$$\begin{aligned} (x + 3)(x + 4) &= 0 \\ (-3 + 3)(-3 + 4) &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0(1) &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \text{ Verdadero.} \end{aligned}$$

$x = -4$

$$\begin{aligned} (x + 3)(x + 4) &= 0 \\ (-4 + 3)(-4 + 4) &\stackrel{?}{=} 0 \\ -1(0) &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \text{ Verdadero.} \end{aligned}$$



**EJEMPLO 2** Resuelva la ecuación  $(5x - 3)(2x + 4) = 0$ .

**Solución**

Igualamos cada factor a 0 y despejamos  $x$ .

$$\begin{array}{lcl} 5x - 3 = 0 & \text{o bien} & 2x + 4 = 0 \\ 5x = 3 & & 2x = -4 \\ x = \frac{3}{5} & & x = -2 \end{array}$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 11**

Las soluciones de la ecuación son  $\frac{3}{5}$  y  $-2$ .



## 2 Resolver ecuaciones cuadráticas mediante factorización

A continuación daremos un procedimiento general para resolver ecuaciones cuadráticas mediante factorización.

### Para resolver una ecuación cuadrática por factorización

1. Escribimos la ecuación en forma estándar con el término cuadrático con coeficiente positivo. Esto dará como resultado que un lado de la ecuación sea 0.
2. Factorizamos el lado de la ecuación que no es igual a 0.
3. Igualamos a 0 cada uno de los factores que *contiene la variable* y resolvemos cada ecuación.
4. Comprobamos cada solución encontrada en el paso 3 en la ecuación *original*.

**EJEMPLO 3** Resuelva la ecuación  $3x^2 = 12x$ .

**Solución**

Para que el lado derecho de la ecuación sea igual a 0, restamos  $12x$  de ambos lados de la ecuación. Después factorizamos  $3x$  de ambos términos. ¿Por qué hicimos el lado derecho de la ecuación igual a 0, en lugar del lado izquierdo?

$$\begin{aligned} 3x^2 &= 12x \\ 3x^2 - 12x &= 12x - 12x \\ 3x^2 - 12x &= 0 \\ 3x(x - 4) &= 0 \end{aligned}$$

Ahora igualamos a 0 cada factor.

$$\begin{aligned} 3x &= 0 & \text{o bien} & & x - 4 &= 0 \\ x &= \frac{0}{3} & & & x &= 4 \\ x &= 0 & & & & \end{aligned}$$

Las soluciones de la ecuación cuadrática son 0 y 4. Compruebe  $x = 0$  primero y  $x = 4$  después en  $3x^2 = 12x$ . 

**EJEMPLO 4** Resuelva la ecuación  $x^2 + 10x + 28 = 4$ .

**Solución** Para hacer el lado derecho de la ecuación igual a 0, restamos 4 de ambos lados de la ecuación. Después, factorizamos y resolvemos.

$$\begin{aligned} x^2 + 10x + 24 &= 0 \\ (x + 4)(x + 6) &= 0 \\ x + 4 &= 0 & \text{o bien} & & x + 6 &= 0 \\ x &= -4 & & & x &= -6 \end{aligned}$$

Las soluciones son  $-4$  y  $-6$ . Comprobará estos valores en la ecuación original.

**Comprobación  $x = -4$**

$$\begin{aligned} x^2 + 10x + 28 &= 4 \\ (-4)^2 + 10(-4) + 28 &\stackrel{?}{=} 4 \\ 16 - 40 + 28 &\stackrel{?}{=} 4 \\ -24 + 28 &\stackrel{?}{=} 4 \\ 4 &= 4 \text{ Verdadero.} \end{aligned}$$

**$x = -6$**

$$\begin{aligned} x^2 + 10x + 28 &= 4 \\ (-6)^2 + 10(-6) + 28 &\stackrel{?}{=} 4 \\ 36 - 60 + 28 &\stackrel{?}{=} 4 \\ -24 + 28 &\stackrel{?}{=} 4 \\ 4 &= 4 \text{ Verdadero.} \end{aligned}$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 23**

**EJEMPLO 5** Resuelva la ecuación  $4y^2 + 5y - 20 = -11y$ .

**Solución** Como no todos los términos están en el mismo lado de la ecuación, sumamos  $11y$  en ambos lados.

$$4y^2 + 16y - 20 = 0$$

Obtenemos el factor común.


$$4(y^2 + 4y - 5) = 0$$

Factorizamos el trinomio restante.

$$4(y + 5)(y - 1) = 0$$

Ahora despejamos  $y$ .

$$\begin{aligned} y + 5 &= 0 & \text{o bien} & & y - 1 &= 0 \\ y &= -5 & & & y &= 1 \end{aligned}$$

Como 4 es un factor que no contiene una variable, no lo igualamos con 0. Las soluciones de la ecuación cuadrática son  $-5$  y  $1$ . 

**EJEMPLO 6** Resuelva la ecuación  $-x^2 + 5x + 6 = 0$ .

**Solución** Cuando el término cuadrático es negativo, por lo general lo convertimos en positivo multiplicando ambos lados de la ecuación por  $-1$ .

$$\begin{aligned} -1(-x^2 + 5x + 6) &= -1 \cdot 0 \\ x^2 - 5x - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Obsérvese que el signo de cada término en el lado izquierdo de la ecuación cambió, y que el lado derecho de ésta sigue siendo igual a 0. ¿Por qué es así? Ahora procedemos igual que antes.

$$\begin{aligned} x^2 - 5x - 6 &= 0 \\ (x - 6)(x + 1) &= 0 \\ x - 6 = 0 &\quad \text{o bien} \quad x + 1 = 0 \\ x = 6 &\quad \quad \quad x = -1 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 33

La comprobación con la ecuación original demostrará que las soluciones son 6 y -1. 

### CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Hay que tener cuidado en no confundir la factorización de un polinomio con el empleo de la factorización como método para resolver una ecuación.

#### CORRECTO

Factor:  $x^2 + 3x + 2$   
 $(x + 2)(x + 1)$

#### INCORRECTO

Factor:  $x^2 + 3x + 2$   
 $(x + 2)(x + 1)$

~~$$\begin{aligned} x + 2 = 0 &\quad \text{o} \quad x + 1 = 0 \\ x = -2 &\quad \quad \quad x = -1 \end{aligned}$$~~

¿Sabe qué es lo que está mal en el ejemplo de la derecha? Es mucho. La expresión  $x^2 + 3x + 2$  es un polinomio (un trinomio), no una ecuación. Como no es una ecuación, no es posible resolverla. Al tener un polinomio, no puede incluirse “= 0” para convertirlo en ecuación.

#### Correcto

Resuelto:  $x^2 + 3x + 2 = 0$   
 $(x + 2)(x + 1) = 0$   
 $x + 2 = 0$       o bien       $x + 1 = 0$   
 $x = -2$                                        $x = -1$

**EJEMPLO 7** Resuelva la ecuación  $x^2 = 36$ .

**Solución** Restamos 36 de ambos lados de la ecuación; después, factorizamos con la fórmula de la diferencia de dos cuadrados.

$$\begin{aligned} x^2 - 36 &= 0 \\ (x + 6)(x - 6) &= 0 \\ x + 6 = 0 &\quad \text{o bien} \quad x - 6 = 0 \\ x = -6 &\quad \quad \quad x = 6 \end{aligned}$$

Las soluciones son -6 y 6. 

**EJEMPLO 8** Resuelva la ecuación  $(x - 3)(x + 1) = 5$ .

**Solución** Comenzamos por multiplicar los factores, después escribimos la ecuación cuadrática en forma estándar.

$$\begin{aligned} (x - 3)(x + 1) &= 5 \\ x^2 - 2x - 3 &= 5 && \text{Multiplicar los factores.} \\ x^2 - 2x - 8 &= 0 && \text{Escribir la ecuación en forma estándar.} \\ (x - 4)(x + 2) &= 0 && \text{Factorizar.} \\ x - 4 = 0 &\quad \text{o bien} \quad x + 2 = 0 && \text{Propiedad del factor cero.} \\ x = 4 &\quad \quad \quad x = -2 \end{aligned}$$



Las soluciones son 4 y  $-2$ . Comprobaremos estos valores en la ecuación original.

Comprobación  $x = 4$

$$\begin{aligned}(x - 3)(x + 1) &= 5 \\ (4 - 3)(4 + 1) &\stackrel{?}{=} 5 \\ 1(5) &\stackrel{?}{=} 5 \\ 5 &= 5 \text{ Verdadero.}\end{aligned}$$

$x = -2$

$$\begin{aligned}(x - 3)(x + 1) &= 5 \\ (-2 - 3)(-2 + 1) &\stackrel{?}{=} 5 \\ (-5)(-1) &\stackrel{?}{=} 5 \\ 5 &= 5 \text{ Verdadero.}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 51

### SUGERENCIA

En el ejemplo 8, quizás estuvo tentado a comenzar el problema con el planteamiento de

$$x - 3 = 5 \quad \text{o bien} \quad x + 1 = 5.$$

Esto hubiera llevado a una solución incorrecta. Recuerde que la propiedad del factor cero sólo se cumple cuando un lado de la ecuación es igual a 0. En el ejemplo 8, una vez que obtuvimos  $(x - 4)(x + 2) = 0$ , fue posible emplear dicha propiedad.

## Conjunto de ejercicios 5.6

### Ejercicios conceptuales

- En sus propias palabras, explique la propiedad del factor cero.
- ¿Qué es una función cuadrática?
- ¿Cuál es la forma estándar de una ecuación cuadrática?
- Explique con sus propias palabras el procedimiento que se usa para resolver una ecuación cuadrática.
- Al resolver la ecuación  $(x + 1)(x - 2) = 4$ , explique por qué **no se puede** resolver la ecuación si al principio se escribe  $x + 1 = 4$  o  $x - 2 = 4$ , y luego despejamos  $x$  de cada ecuación.
  - Resuelva la ecuación  $(x + 1)(x - 2) = 4$ .
- Al resolver la ecuación  $3(x - 4)(x + 5) = 0$ , se iguala a 0 los factores  $x - 4$  y  $x + 5$ , pero no el 3. ¿Puede explicar por qué?

### Práctica de habilidades

Resuelva las siguientes ecuaciones.

- $x(x + 2) = 0$
- $3x(x + 4) = 0$
- $7x(x - 8) = 0$
- $(x + 3)(x + 5) = 0$
- $(2x + 5)(x - 3) = 0$
- $(3x - 2)(x - 5) = 0$
- $x^2 - 9 = 0$
- $x^2 - 16 = 0$
- $x^2 - 12x = 0$
- $x^2 + 7x = 0$
- $9x^2 + 27x = 0$
- $a^2 - 4a - 12 = 0$
- $x^2 - 8x + 16 = 0$
- $x^2 + 6x + 9 = 0$
- $x^2 + 12x = -20$
- $3y^2 - 4 = -4y$
- $z^2 + 3z = 18$
- $3x^2 = -21x - 18$
- $4a^2 - 4a - 48 = 0$
- $x^2 = 4x + 21$
- $23p - 24 = -p^2$
- $3x^2 - 9x - 30 = 0$
- $33w + 90 = -3w^2$
- $w^2 + 45 + 18w = 0$
- $-2x - 15 = -x^2$
- $-9x + 20 = -x^2$
- $-x^2 + 29x + 30 = 0$
- $12y - 11 = y^2$
- $12 = 3n^2 + 16n$
- $z^2 + 8z = -16$
- $9p^2 = -21p - 6$
- $2x^2 - 5 = 3x$
- $3r^2 + 13r = 10$
- $3x^2 = 7x + 20$
- $4x^2 + 4x - 48 = 0$
- $6x^2 + 13x + 6 = 0$
- $8x^2 + 2x = 3$
- $2x^2 + 4x - 6 = 0$
- $2n^2 + 36 = -18n$
- $c^2 = 64$
- $2x^2 = 50x$
- $4x^2 - 25 = 0$
- $x^2 = 100$
- $2x^2 - 50 = 0$
- $(x - 2)(x - 1) = 12$

52.  $(x + 2)(x + 5) = -2$

53.  $(x - 1)(2x - 5) = 9$

54.  $(3x + 2)(x + 1) = 4$

55.  $x(x + 5) = 6$

56.  $2(a^2 + 9) = 15a$

## Solución de problemas

En los ejercicios 57 a 60, construya una ecuación cuadrática que tenga las soluciones dadas. Explique la manera en que determinaron las respuestas.

57. 4, -2

58. -3, -5

59. 6, 0

60. 0, -4

61. Las soluciones de una ecuación cuadrática son  $\frac{1}{2}y - \frac{1}{3}$ .

a) ¿Cuáles fueron los factores con coeficientes enteros que igualamos a 0 para obtener dichas soluciones?

b) Escriba una ecuación cuadrática cuyas soluciones sean  $\frac{1}{2}y - \frac{1}{3}$ .

62. Las soluciones de una ecuación cuadrática son  $\frac{2}{3}y - \frac{3}{4}$ .

a) ¿Cuáles factores con coeficientes enteros igualamos a 0 para obtener dichas soluciones?

b) Escriba una ecuación cuadrática cuyas soluciones sean  $\frac{2}{3}y - \frac{3}{4}$ .

## Problemas de reto

63. Resuelva la ecuación  $(x - 3)(x - 2) = (x + 5)(2x - 3) + 21$ .

64. Resuelva la ecuación  $(2x - 3)(x - 4) = (x - 5)(x + 3) + 7$ .

65. Resuelva la ecuación  $x(x - 3)(x + 2) = 0$ .

66. Resuelva la ecuación  $x^3 - 10x^2 + 24x = 0$ .

## Ejercicios de repaso acumulativo

[1.7] 67. Restar  $\frac{3}{5} - \frac{4}{7}$ .

[2.5] 68. a) ¿Cuál es el nombre que damos a una ecuación que tiene un número infinito de soluciones?

b) ¿Cuál es el nombre que recibe una ecuación que no tiene solución?

[2.6] 69. *Cyprus Gardens* En Cyprus Gardens hay una hilera larga de personas que esperan para entrar. Si en 13 minutos se admite a 160 de ellas, ¿a cuántas se admitirá en 60 minutos? Suponga que la tasa permanece sin cambio.

[4.1] 70. Simplifique la expresión  $\left(\frac{2x^4y^5}{x^5y^7}\right)^3$ .

[4.4] Identifique cada una de las expresiones siguientes como un monomio, binomio, trinomio o algo distinto de un polinomio. Si no se trata de un polinomio, explique por qué.

71.  $2x$

72.  $x - 3$

73.  $\frac{1}{x}$

74.  $x^2 - 6x + 9$



Cyprus Gardens. Consulte el ejercicio 69.

## 5.7 APLICACIONES DE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS



- 1 Resolver aplicaciones factorizando ecuaciones cuadráticas.
- 2 Aprender el teorema de Pitágoras.

## 1 Resolver aplicaciones factorizando ecuaciones cuadráticas

En la sección 5.6 aprendimos a resolver ecuaciones cuadráticas mediante la factorización. En esta sección estudiaremos y resolveremos problemas de aplicación en los que es necesario solucionar ecuaciones cuadráticas para obtener la respuesta. En el ejemplo 1 resolveremos un problema que involucra una relación entre dos números.

**EJEMPLO 1** **Problema numérico** El producto de dos números es 78. Encuentre los dos números si uno de ellos es 7 unidades mayor que el otro.

**Solución** **Entender y traducir** El objetivo es encontrar los dos números.

Sea  $x$  = número menor

$x + 7$  = número mayor

$$x(x + 7) = 78$$

**Calcular**

$$x^2 + 7x = 78$$

$$x^2 + 7x - 78 = 0$$

$$(x - 6)(x + 13) = 0$$

$$x - 6 = 0 \quad \text{o bien} \quad x + 13 = 0$$

$$x = 6$$

$$x = -13$$

Recuerde que  $x$  representa al más pequeño de los dos números. Este problema tiene dos soluciones posibles.

	Solución 1	Solución 2
Número menor	6	-13
Número mayor	$x + 7 = 6 + 7 = 13$	$x + 7 = -13 + 7 = -6$

Así, las dos soluciones posibles son 6 y 13, y -13 y -6.

**Comprobar**

**6 y 13**

**-13 y -6**

El producto de los dos números es 78.

$$6 \cdot 13 = 78$$

$$(-13)(-6) = 78$$

Un número es 7 unidades mayor que el otro.

13 es 7 más que 6.

-6 es 7 más que -13.

**Respuesta** Una solución es: el número más pequeño es 6, el más grande es 13. Una segunda solución es: el número más pequeño es -13, el número mayor es -6. Usted debe proporcionar ambas soluciones. Si la pregunta hubiera sido encontrar *dos números positivos cuyo producto es 78*, la única solución habría sido 6 y 13.

En el conjunto de ejercicios empleamos los términos enteros consecutivos, enteros pares consecutivos y enteros impares consecutivos. En la sección 3.2 vimos que los **enteros consecutivos** se representan con  $x$  y  $x + 1$ , y los **enteros pares consecutivos** o **impares consecutivos** con  $x$  y  $x + 2$ . A continuación resolveremos un problema de aplicación que involucra geometría.

### EJEMPLO 2

**Publicidad** El departamento de marketing de una compañía editorial importante planea elaborar un anuncio rectangular grande para anunciar un libro nuevo durante una convención. Quieren que el largo del anuncio sea 3 pies mayor que el ancho (figura 5.3). Los anuncios en la convención tienen un área máxima de 54 pies. Encuentre el largo y ancho del anuncio si el área ha de ser de 54 pies cuadrados.

### Solución

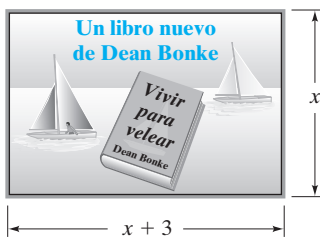


FIGURA 5.3

**Entender y traducir** Necesitamos encontrar el largo y ancho del anuncio. Emplearemos la fórmula para el área de un rectángulo.

$$\text{Sea } x = \text{ancho}$$

$$x + 3 = \text{largo}$$

$$\text{área} = \text{largo} \cdot \text{ancho}$$

$$54 = (x + 3)x$$

$$54 = x^2 + 3x$$

$$0 = x^2 + 3x - 54$$

$$\text{o bien } x^2 + 3x - 54 = 0$$

$$(x - 6)(x + 9) = 0$$

$$x - 6 = 0 \quad \text{o bien} \quad x + 9 = 0$$

$$x = 6 \quad \quad \quad x = -9$$

**Calcular**

**Comprobar y responder** Como el ancho del anuncio no puede ser un número negativo, la única solución es

$$\text{ancho} = x = 6 \text{ pies}, \quad \text{largo} = x + 3 = 6 + 3 = 9 \text{ pies}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 21

El área, largo  $\cdot$  ancho, es 54 pies cuadrados, y el largo mide 3 pies más que el ancho, por lo que la respuesta coincide.

### EJEMPLO 3

**Campo gravitacional de la Tierra** En el campo gravitacional de la Tierra, la distancia,  $d$ , en pies, que un objeto cae durante  $t$  segundos una vez que se libera, está dada por la fórmula  $d = 16t^2$ . Mientras está en la parte más alta de una montaña rusa, los anteojos de un usuario se zafan de su cabeza y caen fuera del carro. ¿Cuánto tiempo toma que lleguen al suelo, que está 64 pies más abajo?



**Solución** **Entender y traducir** Sustituimos 64 por  $d$  en la fórmula y luego despejamos  $t$ .

$$d = 16t^2$$

$$64 = 16t^2$$

$$\frac{64}{16} = t^2$$

$$4 = t^2$$

**Calcular**

A continuación restamos 4 de ambos lados de la ecuación y escribimos 0 en su lado derecho, para que quede en forma estándar.

$$4 - 4 = t^2 - 4$$

$$0 = t^2 - 4$$

$$\text{o bien } t^2 - 4 = 0$$

$$(t + 2)(t - 2) = 0$$

$$t + 2 = 0 \quad \text{o bien} \quad t - 2 = 0$$

$$t = -2$$

$$t = 2$$

**Comprobar y responder** Como  $t$  representa el número de segundos, debe ser un número positivo. Así, la única respuesta posible es 2 segundos. Tomaría 2 segundos que los anteojos (o cualquier otro objeto que cayera bajo la influencia de la gravedad) cayeran 64 pies. ✨

## Matemáticas en acción

### Crecimiento cuadrático



Acabamos de estudiar ecuaciones cuadráticas de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ . Parecen inofensivas, y los problemas que aprendió a resolver en este capítulo son interesantes.

Ahora, si va a la página [www.google.com](http://www.google.com) y busca la palabra “cuadrática” obtendrá aproximadamente 168,000 referencias. Entonces... ¿por qué se ha escrito tanto acerca de esta fórmula de apariencia tan sencilla?

La realidad es que empleamos las ecuaciones cuadráticas para describir o modelar patrones de cre-

cimiento o cambio, en una variedad asombrosa de situaciones. A continuación mencionamos sólo algunas de las preguntas cuya respuesta hemos explorado por medio de ecuaciones cuadráticas.

- ¿Cuál es la relación entre la edad avanzada y las enfermedades cardíacas?
- ¿Cuál es la tasa a la que se solidifica una gota de acero fundido?
- ¿Cómo afecta la adición de proteínas en la comida al crecimiento de las aves de corral?
- ¿Qué tan complejo será un sistema de cómputo si agregamos un módulo nuevo?
- ¿Cuál es el patrón de crecimiento de la población mundial?
- ¿Cómo es de esperarse que se disemine el SIDA en un país dado?

Conforme aumente su conocimiento de matemáticas, obtendrá una comprensión más profunda de la manera en que proporcionan modelos de fenómenos del mundo real, y cómo podemos utilizarlos para analizar, predecir e influir en dichos fenómenos. Las personas que tienen que ver en estas aplicaciones sofisticadas de las matemáticas ayudan a tomar decisiones que afectan de forma directa las vidas de cientos de millones de individuos. Y ésta no es una exageración matemática.

## 2 Aprender el teorema de Pitágoras

A continuación estudiaremos el teorema de Pitágoras, que describe una relación importante entre la longitud de los lados de un triángulo rectángulo. El teorema de Pitágoras recibe su nombre en honor de Pitágoras de Samos ( $\approx$  569 AC a 475 AC), quien nació en Samos, Jonia. Es frecuente que describamos a Pitágoras como el primer matemático puro. A diferencia de muchos matemáticos griegos pos-



Pitágoras de Samos

teriores, sabemos relativamente poco de su vida. La sociedad que dirigía, los Pitagóricos, era entre religiosa y científica. Se apegaban a un código de secreto y no publicaban ninguno de sus escritos. Hay concordancia en muchos de los sucesos de la vida de Pitágoras, pero los estudiosos aún discuten sobre muchas de las fechas de éstos. A continuación estudiaremos el teorema de Pitágoras.

Un **triángulo rectángulo** es el que contiene un ángulo recto, o de  $90^\circ$  (figura 5.4). Los dos lados más cortos de un triángulo rectángulo reciben el nombre de **catetos**, y el lado opuesto al ángulo recto (formado por los catetos) se denomina **hipotenusa**. El **teorema de Pitágoras** expresa la relación entre las longitudes de los catetos y la de su hipotenusa.

### Teorema de Pitágoras

El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma del cuadrado de sus catetos.

$$(\text{cateto})^2 + (\text{cateto})^2 = (\text{hipotenusa})^2$$

Si  $a$  y  $b$  representan los catetos, y  $c$  a la hipotenusa, entonces

$$a^2 + b^2 = c^2$$

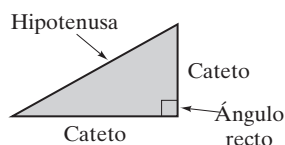
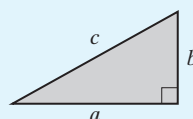


FIGURA 5.4



Cuando empleamos el teorema de Pitágoras, no hay ninguna diferencia entre cuál es el cateto  $a$  y cuál el  $b$ , pero la hipotenusa siempre será  $c$ .

**EJEMPLO 4 Comprobación de triángulos rectángulos** Determine si un triángulo rectángulo puede tener los siguientes lados.

- a)** 3 pulgadas, 4 pulgadas, 5 pulgadas    **b)** 2 pulgadas, 5 pulgadas, 7 pulgadas

### Solución

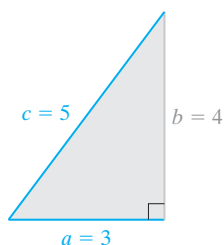


FIGURA 5.5

**a) Entender** Para determinar si un triángulo rectángulo tiene los lados que se dan, utilizaremos el teorema de Pitágoras. Si los resultados demuestran que se cumple el teorema, entonces el triángulo puede tener los lados indicados. Si los resultados fueran falsos, entonces los lados formarían un triángulo rectángulo.

**Traducir** Siempre debemos seleccionar el tamaño más grande como la hipotenusa,  $c$ . Denotaremos a la longitud de 3 pulgadas como cateto  $a$ , y a la de 4 pulgadas como cateto  $b$ . La longitud de la hipotenusa,  $c$ , es de 5 unidades. Consulte la figura 5.5.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$3^2 + 4^2 \stackrel{?}{=} 5^2$$

**Calcular**


$$9 + 16 \stackrel{?}{=} 25$$

$$25 = 25 \quad \text{Verdadero.}$$

**Comprobar y responder** Como el empleo del teorema de Pitágoras genera un enunciado verdadero, un triángulo rectángulo sí puede tener los lados indicados.

b) Resolveremos este inciso con el teorema de Pitágoras, como hicimos para el inciso a). Sea el cateto  $a$  igual a 2 pulgadas, el cateto  $b$  igual a 5 pulgadas, y la hipotenusa,  $c$  igual a 7 pulgadas.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ 2^2 + 5^2 &\stackrel{?}{=} 7^2 \\ 4 + 25 &\stackrel{?}{=} 49 \\ 29 &= 49 \quad \text{Falso.} \end{aligned}$$

Como 29 no es igual a 49, el teorema de Pitágoras no se cumple para esas longitudes. Por tanto, ningún triángulo rectángulo tendría lados con longitudes de 2, 5 y 7 pulgadas. 

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 27

**SUGERENCIA**

Al dibujar un triángulo rectángulo, la hipotenusa,  $c$ , siempre queda en el lado opuesto al ángulo recto. Ver las figuras 5.6 a) a d).

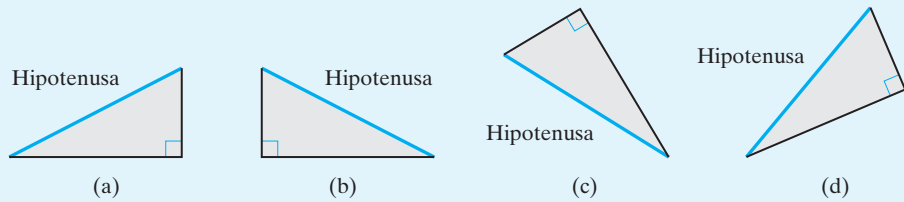


FIGURA 5.6

Observe que la hipotenusa siempre es el lado más largo de un triángulo rectángulo.

**EJEMPLO 5**

**Uso del teorema de Pitágoras** Un cateto del triángulo rectángulo mide 7 pies más que el otro. La hipotenusa mide 13 pies. Encuentre las dimensiones del triángulo.

**Solución**

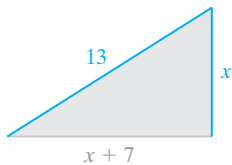


FIGURA 5.7


**Entender y traducir** En primer lugar dibujaremos un diagrama de la situación. Vea la figura 5.7.

A continuación se empleará el teorema de Pitágoras para determinar las dimensiones del triángulo rectángulo.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ x^2 + (x + 7)^2 &= 13^2 \end{aligned}$$

**Calcular**

$$\begin{aligned} x^2 + (x^2 + 14x + 49) &= 169 \\ 2x^2 + 14x - 120 &= 0 \\ 2(x^2 + 7x - 60) &= 0 \\ 2(x + 12)(x - 5) &= 0 \\ x + 12 = 0 & \quad \text{o bien} \quad x - 5 = 0 \\ x = -12 & \quad \quad \quad x = 5 \end{aligned}$$

**Comprobar y responder** Como una longitud no puede ser un número negativo, la única respuesta es 5. Las dimensiones del triángulo rectángulo son de 5 pies,  $x + 7$  o 12 pies, y 13 pies. Un cateto mide 5 pies, el otro 12 pies, y la hipotenusa 13 pies. 

**EJEMPLO 6**

**Tendido de fibra óptica** Dos equipos de una compañía telefónica tienden fibra óptica a partir de cierto punto específico de la ciudad de Stuckeyville. El equipo A lo hace directamente hacia el norte, y el equipo B la tiende hacia el este. Consulte la figura 5.8a. En cierto momento el equipo B ha tendido 1 milla más que el

equipo A. En ese momento la distancia entre los dos equipos es dos millas más que la distancia recorrida por el equipo A. Vea la figura 5.8b. Determine la distancia recorrida por el equipo A y la que hay entre los dos.

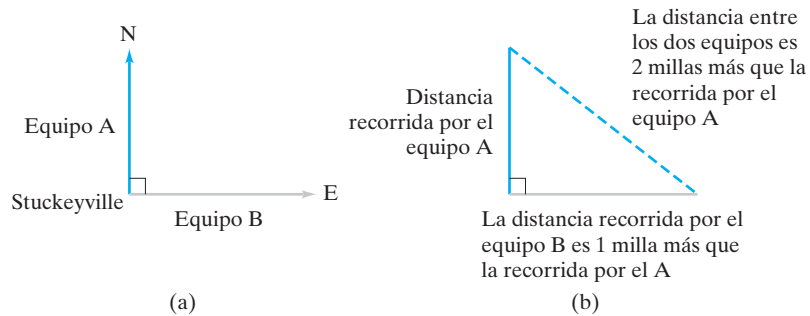


FIGURA 5.8

**Solución**

**Entender y traducir** Después de leer la pregunta con cuidado y observar las figuras, nos damos cuenta de que trabajamos con un triángulo rectángulo. Por tanto, emplearemos el teorema de Pitágoras para responder a la pregunta. Para ello, debemos expresar las distancias en términos matemáticos.

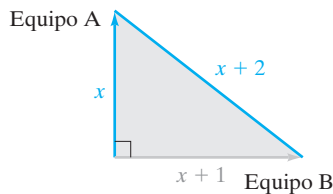


FIGURA 5.9

Sea  $x$  = distancia recorrida por el equipo A,  
 entonces,  $x + 1$  = distancia recorrida por el equipo B,  
 y  $x + 2$  = distancia entre los dos equipos.

La figura 5.9 ilustra esta relación. Ahora utilizaremos el teorema de Pitágoras. Haremos que  $x$  represente al cateto  $a$ ,  $x + 1$  será el cateto  $b$ , y  $x + 2$  será la hipotenusa,  $c$ .

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2$$

**Calcular** Como  $(x + 1)^2 = (x + 1)(x + 1) = x^2 + 2x + 1$  y como  $(x + 2)^2 = (x + 2)(x + 2) = x^2 + 4x + 4$ , escribimos la expresión anterior como

$$x^2 + (x^2 + 2x + 1) = x^2 + 4x + 4$$

$$2x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{o bien} \quad x + 1 = 0$$

$$x = 3 \quad \quad \quad x = -1$$

**AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 37**

**Comprobar y responder** Como una longitud no puede ser negativa, la única respuesta es 3. Así, la distancia que recorre el equipo A, hacia el norte, es de 3 millas. La distancia entre los dos equipos es  $x + 2$ , o  $3 + 2$ , que es igual a 5 millas. ✨

**Conjunto de ejercicios 5.7**

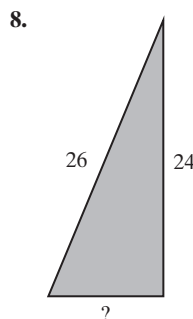
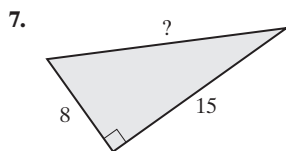
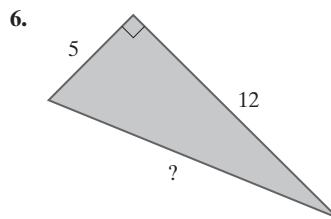
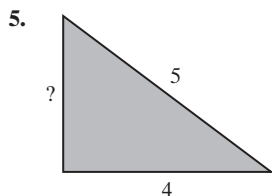
**Ejercicios conceptuales**

1. ¿Qué es un triángulo rectángulo?
2. **a)** ¿Cómo llamamos a los lados más pequeños de un triángulo rectángulo?  
**b)** ¿Cuál es el nombre del lado más largo de un triángulo rectángulo?
3. Enuncie el teorema de Pitágoras.
4. Al designar los catetos de un triángulo rectángulo como  $a$  y  $b$ , ¿hay alguna diferencia entre a cuál llamar  $a$  y a cuál  $b$ ?



## Práctica de habilidades

En los ejercicios 5 a 8, determine el valor del signo de interrogación (?).



En los ejercicios 9 a 12,  $a$  y  $b$  representan los catetos de un triángulo rectángulo, y  $c$  representa la hipotenusa. Determine el valor del signo de interrogación (?).

9.  $a = 3, c = 5, b = ?$

10.  $a = 12, b = 16, c = ?$

11.  $a = 15, b = 36, c = ?$

12.  $b = 20, c = 25, a = ?$

## Solución de problemas

Expresa cada problema como ecuación, y luego resuélvala.

13. **Producto de números** El producto de dos enteros positivos es 117. Determine cuáles son si uno de ellos es 4 unidades más grande que el otro.
14. **Enteros positivos** El producto de dos enteros positivos es 64. Determine los dos enteros si uno de ellos es 4 veces mayor que el otro.
15. **Enteros positivos** El producto de dos números positivos es 84. Encuentre cuáles son si uno de ellos es 2 unidades mayor que el doble del otro.
16. **Enteros consecutivos** El producto de dos enteros positivos consecutivos es igual a 56. Halle dichos enteros.
17. **Números consecutivos** El producto de dos enteros positivos impares consecutivos es 63. Calcule los dos enteros.
18. **Enteros consecutivos** El producto de dos enteros pares positivos y consecutivos es 48. Encuentre cuáles son.
19. **Área de un rectángulo** El área de un rectángulo es 36 pies cuadrados. Determine el largo y ancho si la longitud es el cuádruplo del ancho.
20. **Área de un rectángulo** El área de un rectángulo es 84 pulgadas cuadradas. Determine el largo y ancho si la longitud mide 2 pulgadas menos que el doble del ancho.
21. **Jardín rectangular** Maureen Woolhouse tiene un jardín rectangular cuyo ancho es  $\frac{2}{3}$  de su longitud. Si su área mide 150 pies cuadrados, determine el largo y ancho del jardín.
22. **Compra de papel tapiz** Alejandro Ibáñez quiere comprar un rollo de papel tapiz para colocarlo sobre una pared de su sala. El largo de la pared es de 7 pies más que su altura.
- Encuentre el largo y alto de la pared si su área es de 120 pies cuadrados.
  - ¿Cuál es el largo del rollo que necesitará?
  - Si el rollo cuesta \$4 por pie lineal, ¿cuánto costará el rollo?
23. **Cuadrado** Si cada lado de un cuadrado se incrementa en 4 metros, el área se convierte en 40 metros cuadrados. Determine la longitud de un lado del cuadrado original.

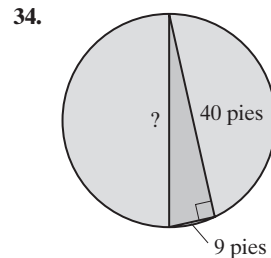
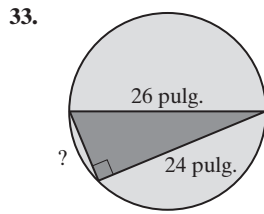
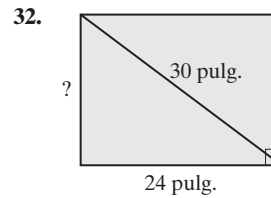
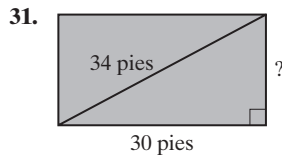
24. **Anuncio** Si el largo del anuncio del ejemplo 2 ha de ser 2 pies mayor que el ancho, y el área será de 35 pies cuadrados, determine las dimensiones del anuncio.
25. **Huevo que cae** ¿Cuánto tiempo se requerirá para que un huevo que se soltó desde un helicóptero caiga 256 pies y toque tierra? Consulte el ejemplo 3.

En los ejercicios 27 a 30, determine si un triángulo rectángulo puede tener los lados siguientes, donde  $a$  y  $b$  representan los catetos, y  $c$  representa la hipotenusa. Explique su respuesta.

27.  $a = 7, b = 24, c = 25$   
 29.  $a = 9, b = 40, c = 41$

28.  $a = 16, c = 20, b = 22$   
 30.  $a = 13, b = 18, c = 28$

En los ejercicios 31 a 34, encuentre el valor del signo de interrogación (?).



35. **Triángulo** Un cateto de un triángulo rectángulo es 2 pies más largo que el otro. La hipotenusa mide 10 pies. Encuentre las longitudes de los tres lados del triángulo.
36. **Triángulo** Un cateto de un triángulo rectángulo mide dos pulgadas más que el doble del otro cateto. La hipotenusa mide 13 pulgadas. Determine las longitudes de los tres lados del triángulo.
37. **Viaje en automóvil** Alice y Bob comienzan a viajar desde el mismo punto al mismo tiempo. Alice viaja hacia el norte y Bob hacia el oeste. Alice recorre 3 millas menos que el triple de distancia que Bob. En determinado momento la distancia entre ellos es tres millas más que el doble de la distancia que Bob ha recorrido. Calcule la distancia que hay entre Alice y Bob.
38. **Lanchas de motor** Gwen y Jennifer arrancan al mismo tiempo en lanchas de motor. Gwen viaja hacia el sur y Jennifer al oeste. Jennifer recorre una milla menos que el doble de distancia que recorre Gwen. En cierto momento la distancia entre ellos es de 1 milla más que el doble de la distancia que ha recorrido Gwen. Calcule la distancia que ha viajado Jennifer.
39. **Jardín rectangular** Mary Ann Tuerk construyó un jardín rectangular. El largo del jardín es 3 pies más que lo triple de su ancho. La diagonal del jardín mide 4 pies más que lo triple del ancho. Obtenga el largo y ancho del jardín.
40. **Altura de un árbol** Un árbol está detenido por medio de cuerdas. Una de ellas va de la punta del árbol a un punto en tierra. La altura del árbol es 4 pies mayor que el doble de la distancia que hay entre su base y la cuerda que está anclada en el suelo. La longitud de la cuerda es 6 pies mayor que el doble de la distancia entre la base del árbol y la cuerda en tierra. Calcule la altura del árbol.
41. **Tienda de videos** La propietaria de una tienda de videos descubre que su utilidad diaria,  $P$ , queda descrita por la fórmula  $P = x^2 - 15x - 50$ , donde  $x$  es el número de videos que vende. ¿Cuántos videos debe vender en un día a fin de que la utilidad sea de \$400?
42. **Aspersores de agua** El costo,  $C$ , de manufacturar  $x$  aspersores de agua está dado por la fórmula  $C = x^2 - 27x - 20$ . Determine el número de aspersores de agua que se manufacturó con un costo de \$70.



43. **Suma de números** La suma,  $s$ , de los primeros  $n$  números pares está dada por la fórmula  $s = n^2 + n$ . Determine el valor de  $n$  para las sumas que se dan a continuación:

- a)  $s = 20$       b)  $s = 90$

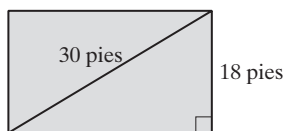
44. **Líneas telefónicas** Para un tablero de conmutación que maneja  $n$  líneas telefónicas, el número máximo de conexiones,  $C$ , que es posible realizar en forma simultánea, está dado por la fórmula

$$C = \frac{n(n-1)}{2}.$$

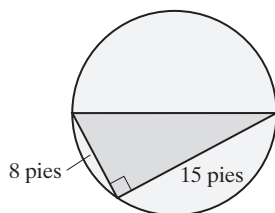
- a) ¿Cuántas conexiones puede hacer el tablero al mismo tiempo, si maneja 15 líneas?  
b) ¿Cuántas líneas tiene un tablero si puede realizar 55 conexiones de modo simultáneo?

## Problemas de reto

45. **Área** Determine el área del rectángulo que se ilustra en seguida.



46. **Área** Calcule el área del círculo.



47. Resuelva la ecuación  $x^3 + 3x^2 - 10x = 0$ .

48. Construya una ecuación cuyas soluciones sean 0, 3 y 5. Explique cómo determinó su respuesta.

49. **Números** El producto de dos números es  $-40$ . Determine cuáles son los números si su suma es 3.

50. **Números** La suma de dos números es igual a 9. La suma de los cuadrados de dos números es 45. Obtenga los dos números.

## Actividad en grupo

Como grupo, estudie y resuelva los ejercicios 51 y 52.

51. **Costo e ingresos** El punto de equilibrio para un fabricante ocurre cuando su costo de producción,  $C$ , es igual a su ingreso,  $R$ . La ecuación de costo de una compañía es  $C = 2x^2 - 20x + 600$  y la de su ingreso es  $R = x^2 + 50x - 400$ , donde  $x$  es el número de unidades que produce y vende. ¿Cuántas unidades hay que producir y vender para que el fabricante logre el equilibrio? Existen dos valores.

52. **Bala de cañón** Cuando cierto cañón dispara, la altura, en pies, que alcanza su bala en el tiempo  $t$ , se encuentra con la fórmula  $h = -16t^2 + 128t$ .

- a) Calcule la altura de la bala 3 segundos después de que se disparó.  
b) Determine el tiempo que se requiere para que la bala regrese al piso. (Sugerencia: ¿cuál es el valor de  $h$  en el momento del impacto?)



## Ejercicios de repaso acumulativo

[3.2] 53. Expresé el enunciado “cinco veces menos que el doble de un número”, como expresión matemática.

[4.4] 54. Reste  $x^2 - 4x + 6$  de  $3x + 2$ .

[4.5] 55. Multiplique  $(3x^2 + 2x - 4)(2x - 1)$ .

[4.6] 56. Divida  $\frac{6x^2 - 19x + 15}{3x - 5}$ .

[5.4] 57. Divida  $\frac{6x^2 - 19x + 15}{3x - 5}$  por medio de factorizar el numerador y eliminar por división los factores comunes.

## RESUMEN DEL CAPÍTULO

## Términos y frases importantes

## 5.1

Factores  
Factores primos  
Factorizar una expresión  
Máximo común divisor  
Número compuesto  
Número primo  
Unidad

## 5.2

Factorizar por agrupamiento

## 5.3

Calcular el factor común  
Método de ensayo y error  
Polinomio primo

## 5.4

Factorizar por agrupamiento  
Factorizar por ensayo y error

## 5.5

Diferencia de dos cuadrados  
Diferencia de dos cubos  
Suma de dos cubos

## 5.6

Ecuación cuadrática  
Forma estándar de una ecuación cuadrática  
Propiedad del factor cero

## 5.7

Cateto  
Hipotenusa  
Teorema de Pitágoras  
Triángulo rectángulo

## HECHOS IMPORTANTES

## Diferencia de dos cuadrados

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

*Observación:* La suma de dos cuadrados,  $a^2 + b^2$ , no puede factorizarse por medio de dos números reales.

## Suma de dos cubos

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

## Diferencia de dos cubos

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

## Propiedad del factor cero

Si  $a \cdot b = 0$ , entonces  $a = 0$  o  $b = 0$ .

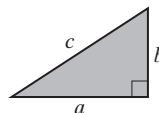
## Procedimiento general para factorizar un polinomio

1. Si todos los términos del polinomio tienen un máximo factor común distinto de 1, factorizar.
2. Si el polinomio tiene dos términos, determinar si se trata de una diferencia de dos cuadrados o una suma o resta de dos cubos. Si así fuera, factorizar por medio de la fórmula apropiada.
3. Si el polinomio tiene tres términos, factorizar el trinomio con los métodos que estudiamos en las secciones 5.3 y 5.4.
4. Si el polinomio tiene más de tres términos, intentar factorizarlo por agrupamiento.
5. Como paso final, estudiar el polinomio factorizado para determinar si los términos tienen factor común. Si encuentra alguno, factorizar en este punto.

## Teorema de Pitágoras

Si  $a$  y  $b$  representan los catetos de un triángulo rectángulo, y  $c$  representa la hipotenusa, entonces

$$a^2 + b^2 = c^2$$



## Ejercicios de repaso del capítulo

[5.1] Encuentre el máximo común divisor de cada conjunto de términos.

- |                                    |                           |                              |
|------------------------------------|---------------------------|------------------------------|
| 1. $3y^5, y^4, y^3$                | 2. $3p, 6p^2, 9p^3$       | 3. $20a^3, 15a^2, 35a^5$     |
| 4. $20x^2y^3, 25x^3y^4, 10x^5y^2z$ | 5. $9xyz, 12xz, 36, x^2y$ | 6. $8ab, 12a^2b, 16, a^2b^2$ |
| 7. $4(x - 5), x - 5$               | 8. $x(x + 5), x + 5$      |                              |

Factorice cada expresión; si alguna fuera prima, dígalo.

- |                                     |                            |                           |
|-------------------------------------|----------------------------|---------------------------|
| 9. $4x - 12$                        | 10. $35x - 5$              | 11. $24y^2 - 4y$          |
| 12. $55p^3 - 20p^2$                 | 13. $60a^2b - 36ab^2$      | 14. $6xy - 12x^2y$        |
| 15. $20x^3y^2 + 8x^9y^3 - 16x^5y^2$ | 16. $24x^2 - 13y^2 + 6xy$  | 17. $14a^2b - 7b - a^3$   |
| 18. $x(5x + 3) - 2(5x + 3)$         | 19. $5x(x + 2) - 2(x + 2)$ | 20. $2x(4x - 3) + 4x - 3$ |

[5.2] Factorice por agrupamiento.

- |                                |                               |                                 |
|--------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| 21. $x^2 + 6x + 2x + 12$       | 22. $x^2 - 5x + 4x - 20$      | 23. $y^2 - 9y - 9y + 81$        |
| 24. $4a^2 - 4ab - a + b$       | 25. $3xy + 3x + 2y + 2$       | 26. $x^2 + 3x - 2xy - 6y$       |
| 27. $2x^2 + 12x - x - 6$       | 28. $5x^2 - xy + 20xy - 4y^2$ | 29. $4x^2 + 12xy - 5xy - 15y^2$ |
| 30. $6a^2 - 10ab - 3ab + 5b^2$ | 31. $ab - a + b - 1$          | 32. $3x^2 - 9xy + 2xy - 6y^2$   |
| 33. $7a^2 + 14ab - ab - 2b^2$  | 34. $6x^2 + 9x - 2x - 3$      |                                 |

[5.3] Factorice por completo. Si no es posible hacerlo para alguna expresión, méncionelo.

- |                        |                         |                              |
|------------------------|-------------------------|------------------------------|
| 35. $x^2 - x - 6$      | 36. $x^2 + 4x - 15$     | 37. $x^2 - 13x + 42$         |
| 38. $b^2 + b - 20$     | 39. $n^2 + 3n - 40$     | 40. $x^2 - 15x + 56$         |
| 41. $c^2 - 10c - 20$   | 42. $x^2 + 11x - 24$    | 43. $x^3 - 17x^2 + 72x$      |
| 44. $x^3 - 3x^2 - 40x$ | 45. $x^2 - 2xy - 15y^2$ | 46. $4x^3 + 32x^2y + 60xy^2$ |

[5.4] Factorice por completo. Si una expresión es prima, méncionelo.

- |                           |                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 47. $2x^2 - x - 15$       | 48. $3x^2 - 13x + 4$      | 49. $4x^2 - 9x + 5$       |
| 50. $5m^2 - 14m + 8$      | 51. $9x^2 + 3x - 2$       | 52. $5x^2 - 32x + 12$     |
| 53. $2t^2 + 14t + 9$      | 54. $6s^2 + 13s + 5$      | 55. $5x^2 + 37x - 24$     |
| 56. $6x^2 + 11x - 10$     | 57. $12x^2 + 2x - 4$      | 58. $9x^2 - 6x + 1$       |
| 59. $9x^3 - 12x^2 + 4x$   | 60. $18x^3 + 12x^2 - 16x$ | 61. $16a^2 - 22ab - 3b^2$ |
| 62. $4a^2 - 16ab + 15b^2$ |                           |                           |

[5.5] Factorice por completo.

- |                     |                       |                     |
|---------------------|-----------------------|---------------------|
| 63. $x^2 - 36$      | 64. $x^2 - 100$       | 65. $4x^2 - 16$     |
| 66. $81x^2 - 9y^2$  | 67. $81 - a^2$        | 68. $64 - x^2$      |
| 69. $16x^4 - 49y^2$ | 70. $100x^4 - 121y^4$ | 71. $x^3 - y^3$     |
| 72. $x^3 + y^3$     | 73. $x^3 - 1$         | 74. $x^3 + 8$       |
| 75. $a^3 + 27$      | 76. $b^3 - 64$        | 77. $125a^3 + b^3$  |
| 78. $27 - 8y^3$     | 79. $27x^4 - 75y^2$   | 80. $3x^3 - 192y^3$ |

**[5.1–5.5]** Factorice por completo.

81.  $x^2 - 14x + 48$       82.  $3x^2 - 18x + 27$       83.  $4a^2 - 64$   
 84.  $4y^2 - 36$       85.  $8x^2 + 16x - 24$       86.  $x^2 - 6x - 27$   
 87.  $9x^2 - 6x + 1$       88.  $4x^2 + 7x - 2$       89.  $6b^3 - 6$   
 90.  $x^3y - 27y$       91.  $a^2b - 2ab - 15b$       92.  $6x^3 + 30x^2 + 9x^2 + 45x$   
 93.  $x^2 - 4xy + 3y^2$       94.  $3m^2 + 2mn - 8n^2$       95.  $4x^2 - 20xy + 25y^2$   
 96.  $25a^2 - 49b^2$       97.  $xy - 7x + 2y - 14$       98.  $16y^5 - 25y^7$   
 99.  $4x^3 + 18x^2y + 20xy^2$       100.  $6x^2 + 5xy - 21y^2$       101.  $16x^4 - 8x^3 - 3x^2$   
 102.  $a^4 - 1$

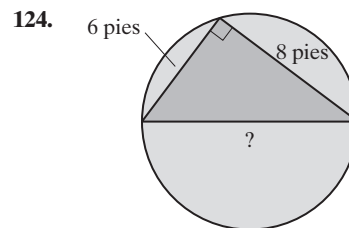
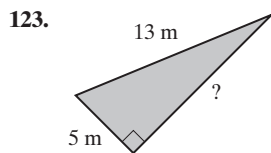
**[5.6]** Resuelva.

103.  $x(x - 5) = 0$       104.  $(a - 2)(a + 6) = 0$       105.  $(x + 5)(4x - 3) = 0$   
 106.  $x^2 - 3x = 0$       107.  $5x^2 + 20x = 0$       108.  $6x^2 + 18x = 0$   
 109.  $r^2 + 9r + 18 = 0$       110.  $x^2 - 12 = -x$       111.  $x^2 - 3x = -2$   
 112.  $15x + 12 = -3x^2$       113.  $x^2 - 6x + 8 = 0$       114.  $3p^2 + 6p = 45$   
 115.  $8x^2 - 3 = -10x$       116.  $2x^2 + 15x = 8$       117.  $4x^2 - 16 = 0$   
 118.  $49x^2 - 100 = 0$       119.  $8x^2 - 14x + 3 = 0$       120.  $-48x = -12x^2 - 45$

**[5.7]** 121. Diga el enunciado del teorema de Pitágoras.

122. ¿Cómo se llama el lado más largo de un triángulo rectángulo?

En los ejercicios 123 y 124, determine el valor del signo de interrogación (?).



Expresa cada problema como ecuación, y luego resuélvala.

125. **Producto de números** El producto de dos enteros positivos consecutivos es 48. Determine el valor de ellos.
126. **Producto de números** El producto de dos enteros positivos es 56. Obtenga los enteros si el mayor es 6 veces más que el doble del menor.
127. **Área de un rectángulo** El área de un rectángulo es de 63 pies cuadrados. Determine el largo y ancho del rectángulo si el largo es 2 pies más grande que el ancho.
128. **Cuadrado** La longitud de cada lado de un cuadrado se reduce en 4 pulgadas. Si el área del cuadrado resultante es 25 pulgadas cuadradas, determine la longitud de un lado del cuadrado original.
129. **Triángulo rectángulo** Un cateto de un triángulo rectángulo mide 7 pies más que el otro. La hipotenusa mide 9 pies más que el cateto más chico. Calcule las longitudes de los tres lados del triángulo.
130. **Alberca portátil** Jason tiene una alberca portátil rectangular. El largo de la alberca es 2 pies mayor que el ancho.
- Una diagonal de ella mide 4 pies más que el ancho. Calcule la longitud de la diagonal de la alberca.
131. **Manzana que cae** ¿Cuánto tiempo le llevará a una manzana que cae de un árbol de 16 pies, golpear el suelo?
132. **Hornear galletas** La Pine Hills Neighborhood Association determinó que el costo,  $C$ , de elaborar  $x$  docenas de galletas se estima por medio de la fórmula  $C = x^2 - 79x + 20$ . Si tienen \$100 para usarlos en la fabricación de las galletas, ¿cuántas docenas de ellas hará la asociación para venderlas en una campaña de recolección de fondos?



## Examen de práctica del capítulo

- Determine el máximo común divisor de  $9y^5$ ,  $15y^3$ , y  $27y^4$ .
- Determine el máximo común divisor de  $6x^2y^3$ ,  $9xy^2$  y  $12xy^5$ .

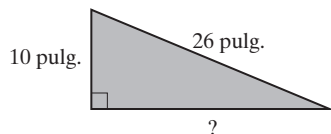
Factorice por completo.

- |                              |                                |                          |
|------------------------------|--------------------------------|--------------------------|
| 3. $5x^2y^3 - 15x^5y^2$      | 4. $8a^3b - 12a^2b^2 + 28a^2b$ | 5. $5x^2 - 15x + 2x - 6$ |
| 6. $a^2 - 4ab - 5ab + 20b^2$ | 7. $r^2 + 5r - 24$             | 8. $25a^2 - 5ab - 6b^2$  |
| 9. $4x^2 - 16x - 48$         | 10. $2x^3 - 3x^2 + x$          | 11. $12x^2 - xy - 6y^2$  |
| 12. $x^2 - 9y^2$             | 13. $x^3 + 27$                 |                          |

Resuelva.

- |                           |                     |                         |
|---------------------------|---------------------|-------------------------|
| 14. $(5x - 3)(x - 1) = 0$ | 15. $x^2 - 6x = 0$  | 16. $x^2 = 64$          |
| 17. $x^2 - 14x + 49 = 0$  | 18. $x^2 + 6 = -5x$ | 19. $x^2 - 7x + 12 = 0$ |

20. **Triángulo rectángulo** Calcule la longitud del lado indicado por medio de un signo de interrogación (?).



21. **Triángulo rectángulo** En un triángulo rectángulo, un cateto mide 2 pies menos que el doble de la longitud del cateto más pequeño. La hipotenusa mide 2 pies más que doble de la longitud del cateto más pequeño. Determine la longitud de la hipotenusa del triángulo.
22. **Producto de enteros** El producto de dos enteros positivos es 36. Calcule los dos enteros si el más grande es una unidad mayor que el doble del más pequeño.
23. **Enteros consecutivos** El producto de dos enteros impares positivos consecutivos es 99. Obtenga los enteros.
24. **Rectángulo** El área de un rectángulo es de 24 metros cuadrados. Determine el largo y ancho del rectángulo si su largo mide 2 metros más que su ancho.

25. **Objeto que cae** ¿Cuánto tiempo pasará antes de que un objeto que se suelta desde un globo de aire caliente, llegue al piso que está a 1600 pies?



Consulte el ejercicio 25.

## Examen de repaso acumulativo

Resuelva el siguiente examen y compruebe sus respuestas con las que aparecen al final. Revise cualesquiera preguntas que haya respondido en forma incorrecta. La sección y objetivo en que se cubrió el material están indicados después de la respuesta.

- |  |   |
|--|---|
| 1. Evalúe $4 - 5(2x + 4x^2 - 21)$ cuando $x = -3$ .  | Enliste los elementos que sean  |
| 2. Evalúe $5x^2 - 3y + 7(2 + y^2 - 4x)$ si $x = 3$ y $y = -2$ .  | a) números naturales.   |
| 3. <b>Habitación de hotel</b> El costo de una habitación de un hotel, incluido 12% de impuesto estatal y 3% de impuesto municipal, es de \$103.50. Calcule el costo de la habitación antes de impuestos. | b) números racionales.  |
| 4. Considere el conjunto de números que sigue.   | c) números irracionales.  |
| $\left\{-6, -0.2, \frac{3}{5}, \sqrt{7}, -\sqrt{2}, 7, 0, -\frac{5}{9}, 1.34\right\}$ .  | d) números reales.  |
|  | 5. ¿Cuál es mayor $ -4 $ o $- 2 $ ? Explique su respuesta.                                |
|  | 6. Despeje $x$ de la ecuación $4x - 2 = 4(x - 7) + 2x$ .                                  |
|  | 7. Resuelva para $x$ la proporción $\frac{5}{12} = \frac{8}{x}$ , por productos cruzados. |

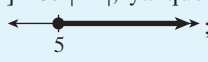
8. Resuelva la desigualdad  $3x - 5 \geq 10(6 - x)$ , y grafique la solución en una recta numérica.
9. Despeje  $y$  de la ecuación  $5x - 2y = 6$ .
10. **Esquí a campo traviesa** Dos esquiadores a campo traviesa siguen la misma ruta en un parque local. Brooke Stoner avanza a razón de 8 kilómetros por hora, y Bob Thoresen a 4 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo llevará para que Brooke alcance a Bob si salió 15 minutos después que él?
11. **Solución ácida** ¿Cuántos litros de solución ácida al 10% deben mezclarse con tres litros de solución ácida al 4%, para obtener una solución ácida al 8%?
12. **Enteros consecutivos** La suma de dos enteros impares consecutivos es 96. Encuentre los números.
13. Simplifique  $\left(\frac{3x}{5y^2}\right)^3$ .
14. Simplifique  $(2x^{-3})^{-2}(4x^{-3}y^2)^3$ .
15. Reste  $(4x^3 - 3x^2 + 7)$  de  $(x^3 - x^2 + 6x - 5)$ .



Realice las operaciones indicadas.

16.  $(3x - 2)(x^2 + 5x - 6)$
17.  $\frac{x^2 - 2x + 6}{x + 3}$
18. Factorice  $ab + 3b - 6a - 18$  por agrupación.
19. Factorice  $x^2 - 2x - 63$ .
20. Factorice  $5x^3 - 125x$ .

### Respuestas al examen de repaso acumulativo

1. -41; [Sec. 1.9, Obj. 6] 2. \$9; [Sec. 1.9, Obj. 6] 3. \$90; [Sec. 3.3, Obj. 4] 4. a) 7 b) -6, -0.2,  $\frac{3}{5}$ , 7, 0,  $-\frac{5}{9}$ , 1.34  
 c)  $\sqrt{7}$ ,  $-\sqrt{2}$  d) -6, -0.2,  $\frac{3}{5}$ ,  $\sqrt{7}$ ,  $-\sqrt{2}$ , 7, 0,  $-\frac{5}{9}$ , 1.34; [Sec. 1.4, Obj. 2] 5.  $|-4|$ , ya que  $|-4| = 4$  y  $-|2| = -2$ ; [Sec. 1.5, Obj. 2] 6. 13; [Sec. 2.5, Obj. 1] 7. 19.2; [Sec. 2.6, Obj. 2] 8.  $x \geq 5$ , ; [Sec. 2.7, Obj. 1]
9.  $y = \frac{5}{2}x - 3$ ; [Sec. 3.1, Obj. 3] 10.  $\frac{1}{4}$  hora; [Sec. 3.5, Obj. 2] 11. 6 litros; [Sec. 3.5, Obj. 4] 12. 47, 49; [Sec. 3.3, Obj. 2]
13.  $\frac{27x^3}{125y^6}$ ; [Sec. 4.1, Obj. 2] 14.  $\frac{16y^6}{x^3}$ ; [Sec. 4.2, Obj. 2] 15.  $-3x^3 + 2x^2 + 6x - 12$ ; [Sec. 4.4, Obj. 3]
16.  $3x^3 + 13x^2 - 28x + 12$ ; [Sec. 4.5, Obj. 6] 17.  $x - 5 + \frac{21}{x + 3}$ ; [Sec. 4.6, Obj. 2] 18.  $(a + 3)(b - 6)$ ; [Sec. 5.2, Obj. 1]
19.  $(x + 7)(x - 9)$ ; [Sec. 5.3, Obj. 1] 20.  $5x(x + 5)(x - 5)$ ; [Sec. 5.5, Obj. 3]



## Capítulo 6

# Expresiones racionales y ecuaciones



- 6.1** Simplificación de expresiones racionales
  - 6.2** Multiplicación y división de expresiones racionales
  - 6.3** Suma y resta de expresiones racionales con denominador común y determinación del mínimo común denominador
  - 6.4** Suma y resta de expresiones racionales
  - 6.5** Fracciones complejas
  - 6.6** Solución de ecuaciones racionales
  - 6.7** Ecuaciones racionales: aplicaciones y solución de problemas
  - 6.8** Variación
- Resumen del capítulo  
Ejercicios de repaso del capítulo  
Examen de práctica del capítulo  
Examen de repaso acumulativo

Los avances tecnológicos en la transportación durante los últimos 50 años han cambiado la forma de viajar de las personas, y han reducido de manera significativa la duración de los viajes. En Japón, los usuarios del tren se han beneficiado del comité para trenes de alta velocidad del país. En el ejercicio 24 de la página 424, utilizamos una ecuación racional para determinar la distancia entre dos ciudades comparando el tiempo que hace un viajero en los nuevos trenes bala de Japón, con el tiempo que habría hecho en uno de los viejos trenes.



## Avance de la lección

Cuando estudió las fracciones, en aritmética, trabajó con números racionales. Ahora ampliará sus conocimientos incluyendo las fracciones que contienen variables y que se conocen como expresiones racionales. En las secciones 6.1 a 6.5 empleará los mismos procedimientos básicos que utilizó para simplificar (o reducir), sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones aritméticas, esta vez para las expresiones racionales. Es conveniente que revise la sección 1.3, ya que el material presentado en este capítulo se examinará a partir de los procedimientos que se presentaron allí.

Muchos problemas de la vida real incluyen ecuaciones que tienen expresiones racionales, a las cuales se les denomina ecuaciones racionales. En la sección 6.6 resolveremos ecuaciones, y en las secciones 6.6 a 6.8 veremos aplicaciones reales de ecuaciones racionales, incluyendo el uso de algunas fórmulas comunes.

*Para tener éxito en este capítulo necesita comprender completamente la factorización, la cual se presentó en el capítulo 5. Las secciones 5.3 y 5.4 son especialmente importantes.*

## 6.1 SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES RACIONALES



- 1 Determinar los valores para los que está definida una expresión racional.
- 2 Entender los tres signos de una fracción.
- 3 Simplificar expresiones racionales.
- 4 Factorizar un 1 negativo en un polinomio.

## 1 Determinar los valores para los que está definida una expresión racional

Iniciamos este capítulo definiendo una *expresión racional*.

Una **expresión racional** es una expresión de la forma  $p/q$ , donde  $p$  y  $q$  son polinomios y  $q \neq 0$ .

## Ejemplos de expresiones racionales

$$\frac{4}{5}, \quad \frac{x-6}{x}, \quad \frac{x^2+2x}{x-3}, \quad \frac{a}{a^2-4}$$

El denominador de una expresión racional no puede ser igual a 0, ya que la división entre 0 no está definida. En la expresión  $\frac{x+3}{x}$ , el valor de  $x$  no puede ser 0, ya que el denominador tendría un valor 0. Decimos que la expresión  $\frac{x+3}{x}$  está *definida* para todos los números reales excepto 0. *No está definida* cuando  $x$  es 0. En  $\frac{x^2+4x}{x-3}$ , el valor de  $x$  no puede ser 3, ya que el denominador tendría un valor 0. ¿Qué valores de  $x$  no pueden utilizarse en la expresión  $\frac{x}{x^2-4}$ ? Si respondió 2

y  $-2$ , contestó correctamente. **Siempre que tengamos una expresión racional con una variable en el denominador, supondremos hemos excluido el valor o valores de la variable que hacen al denominador igual a cero.**

Un método para determinar el valor o los valores de la variable que se excluyen consiste en igualar el denominador y después despejar a la variable de la ecuación resultante.

## EJEMPLO 1

Determinemos el valor o los valores de la variable para los que está definida la expresión racional. a)  $\frac{1}{x-4}$       b)  $\frac{x+1}{2x-7}$       c)  $\frac{x+3}{x^2+6x-7}$



Al cambiar dos de los tres signos de una fracción no se cambia el valor de la fracción. Así,

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Por lo general, no escribimos una fracción con un denominador negativo. Por ejemplo, la expresión  $\frac{2}{-5}$  se escribiría como  $\frac{-2}{5}$  o como  $-\frac{2}{5}$ . La expresión  $\frac{x}{-(4-x)}$  puede escribirse  $\frac{x}{x-4}$  ya que  $-(4-x) = -4+x$  o  $x-4$ .

### 3 Simplificar expresiones racionales

Una expresión racional está **simplificada** o **reducida a su mínima expresión** cuando el numerador y el denominador no tienen factores comunes distintos de 1. La fracción  $\frac{9}{12}$  no está simplificada, ya que 9 y 12 tienen como factor común el número 3. Cuando se factoriza el número 3, la fracción simplificada es  $\frac{3}{4}$ .

$$\frac{9}{12} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot 3}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

La expresión racional  $\frac{ab-b^2}{2b}$  no está simplificada, ya que el numerador y el denominador tienen el factor común  $b$ . Para simplificar esta expresión, factorice  $b$  en cada término del numerador; luego divida entre  $b$ .

$$\frac{ab-b^2}{2b} = \frac{\cancel{b}(a-b)}{2\cancel{b}} = \frac{a-b}{2}$$

Así,  $\frac{ab-b^2}{2b}$  se convierte en  $\frac{a-b}{2}$  cuando se simplifica.

#### Para simplificar expresiones racionales

1. Factorice el numerador y el denominador tanto como sea posible.
2. Divida el denominador y el numerador entre los factores comunes.

**EJEMPLO 2** Simplifique  $\frac{5x^3 + 10x^2 - 25x}{10x^2}$ .

**Solución** Factorice el máximo factor común,  $5x$ , de cada término en el numerador. Como  $5x$  es un factor común tanto del numerador como del denominador, divida entre él.

$$\frac{5x^3 + 10x^2 - 25x}{10x^2} = \frac{\cancel{5x}(x^2 + 2x - 5)}{\cancel{5x} \cdot 2x} = \frac{x^2 + 2x - 5}{2x}$$



**SUGERENCIA**

En el ejemplo 2, estamos *simplificando* un polinomio dividido entre un monomio usando factorización. En la sección 4.6 *dividimos* polinomios entre monomios escribiendo cada término en el numerador entre la expresión en el denominador. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\frac{5x^3 + 10x^2 - 25x}{10x^2} &= \frac{5x^3}{10x^2} + \frac{10x^2}{10x^2} - \frac{25x}{10x^2} \\ &= \frac{x}{2} + 1 - \frac{5}{2x}\end{aligned}$$

La respuesta anterior,  $\frac{x}{2} + 1 - \frac{5}{2x}$ , es equivalente a la obtenida al factorizar en el ejemplo 2,  $\frac{x^2 + 2x - 5}{2x}$ , como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned}&\frac{x}{2} + 1 - \frac{5}{2x} \\ &= \frac{x}{x} \cdot \frac{x}{2} + \frac{2x}{2x} - \frac{5}{2x} \quad \text{Escriba cada término con el mcd } 2x. \\ &= \frac{x^2}{2x} + \frac{2x}{2x} - \frac{5}{2x} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 5}{2x}\end{aligned}$$

Cuando se pidió *simplificar* una expresión factorizamos los numeradores y los denominadores, tanto como sea posible, luego dividimos entre los factores comunes. Este proceso se ilustró en el ejemplo 2 y se mostrará en los ejemplos 3 a 5.

**EJEMPLO 3** Simplifique  $\frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3}$ .

**Solución** Factorice el numerador; luego divida entre el factor común.

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3} = \frac{(x + 3)(x - 1)}{x + 3} = x - 1$$



**EJEMPLO 4** Simplifique  $\frac{r^2 - 25}{r - 5}$ .

**Solución** Factorice el numerador; luego divida entre los factores comunes.

$$\frac{r^2 - 25}{r - 5} = \frac{(r + 5)(r - 5)}{r - 5} = r + 5$$



**EJEMPLO 5** Simplifique  $\frac{3x^2 - 10x - 8}{x^2 + 3x - 28}$ .

**Solución** Factorice el numerador; y el denominador; luego divida entre los factores comunes.

$$\frac{3x^2 - 10x - 8}{x^2 + 3x - 28} = \frac{(3x + 2)(x - 4)}{(x + 7)(x - 4)} = \frac{3x + 2}{x + 7}$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 41**

Observe que  $\frac{3x + 2}{x + 7}$  no puede simplificarse más.



**CÓMO EVITAR  
ERRORES COMUNES****Recuerde: al dividir expresiones sólo se pueden eliminar factores comunes.**

CORRECTO

$$\frac{\overset{5}{20} \overset{x}{x^2}}{\underset{1}{4} \underset{1}{x}} = 5x$$

INCORRECTO

$$\frac{\overset{5}{x^2} - \overset{5}{20}}{\underset{1}{x} - \underset{1}{4}}$$

En el denominador del ejemplo a la izquierda,  $4x$ , el 4 y la  $x$  son factores, ya que están *multiplicándose*. El 4 y la  $x$  también son factores del numerador  $20x^2$ , que puede escribirse como  $4 \cdot x \cdot 5x$ .

Algunos estudiantes dividen términos de manera incorrecta. En la expresión  $\frac{x^2 - 20}{x - 4}$ , la  $x$  y  $-4$  son *términos* del denominador, no son factores, y por tanto no pueden dividirse.

**4 Factorizar un 1 negativo en un polinomio****Recuerde que al factorizar  $-1$  de un polinomio, cambia el signo de cada término de éste.****Ejemplos**

$$-3x + 7 = -1(3x - 7) = -(3x - 7)$$

$$5 - 2x = -1(-5 + 2x) = -(2x - 5)$$

$$-2x^2 + 3x - 4 = -1(2x^2 - 3x + 4) = -(2x^2 - 3x + 4)$$

Siempre que los términos del numerador y del denominador difieran sólo por sus signos (uno es el opuesto o inverso aditivo del otro), podemos factorizar  $-1$  en el numerador o en el denominador (no en ambos) y luego dividir entre el factor común. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 6.

**EJEMPLO 6** Simplifique  $\frac{3x - 7}{7 - 3x}$ .**Solución** Como cada término en el numerador sólo difiere en el signo de su término semejante en el denominador, factorizaremos  $-1$  en cada término del denominador.

$$\begin{aligned} \frac{3x - 7}{7 - 3x} &= \frac{3x - 7}{-1(-7 + 3x)} \\ &= \frac{\overset{3x}{\cancel{3x}} - \overset{7}{\cancel{7}}}{-(\overset{3x}{\cancel{3x}} - \overset{7}{\cancel{7}})} \\ &= -1 \end{aligned}$$

**SUGERENCIA**

En el ejemplo 6 determinamos que  $\frac{3x - 7}{7 - 3x} = -1$ . Observe que el numerador,  $3x - 7$ , y el denominador,  $7 - 3x$ , son opuestos ya que sólo difieren en el signo. Esto es,

$$\frac{3x - 7}{7 - 3x} = \frac{3x - 7}{-(3x - 7)} = -1$$

Siempre que tengamos el cociente de dos expresiones que son opuestas, como  $\frac{a - b}{b - a}$ ,  $a \neq b$ , el cociente puede remplazarse por  $-1$ .

En el ejemplo 7 utilizaremos la Sugerencia dada en la página anterior.

**EJEMPLO 7** Simplifique  $\frac{4n^2 - 23n - 6}{6 - n}$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{4n^2 - 23n - 6}{6 - n} &= \frac{(4n + 1)(n - 6)}{6 - n} && \text{Los términos en } n - 6 \text{ sólo} \\ & && \text{difieren en el signo de los tér-} \\ & && \text{minos en } 6 - n. \\ &= (4n + 1)(-1) && \text{Reemplace } \frac{n - 6}{6 - n} \text{ con } -1. \\ &= -(4n + 1) \end{aligned}$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 49**

Observe que  $-4n - 1$  también es una respuesta aceptable.



## Conjunto de ejercicios 6.1

### Ejercicios conceptuales

1. **a)** Con sus propias palabras defina una expresión racional. **b)** Proporcione tres ejemplos de expresiones racionales.
2. Explique cómo determinar el valor o los valores de la variable que hacen que una expresión racional no esté definida.
3. En cualquier expresión racional con una variable en el denominador, ¿qué es lo que siempre suponemos acerca de la variable?
4. Con sus propias palabras, explique cómo simplificar una expresión racional.

Explique por qué las siguientes expresiones no pueden simplificarse.

5.  $\frac{2 + 3x}{4}$
6.  $\frac{5x + 4y}{12xy}$

Explique por qué  $x$  puede representar cualquier número real en las siguientes expresiones.

7.  $\frac{x - 6}{x^2 + 2}$
8.  $\frac{x + 3}{x^2 + 4}$

En los ejercicios 9 y 10, determine los valores (si los hay), que  $x$  no puede representar. Explique.

9.  $\frac{x + 3}{x - 2}$
10.  $\frac{x}{(x - 4)^2}$
11. ¿La expresión  $-\frac{x + 5}{5 - x}$  es igual a  $-1$ ? Explique.
12. ¿La expresión  $-\frac{3x + 2}{-3x - 2}$  es igual a  $1$ ? Explique.

### Práctica de habilidades

Determine el valor o valores de la variable en donde cada expresión está definida.

13.  $\frac{x - 3}{x}$
14.  $\frac{3}{r + 4}$
15.  $\frac{7}{4n - 12}$
16.  $\frac{5}{2x - 3}$
17.  $\frac{x + 4}{x^2 - 4}$
18.  $\frac{7}{x^2 + 4x - 5}$

19.  $\frac{x-3}{2x^2-9x+9}$

21.  $\frac{x}{x^2+16}$

23.  $\frac{p+4}{4p^2-25}$

20.  $\frac{x^2+3}{2x^2-13x+15}$

22.  $\frac{6}{9+x^2}$

24.  $\frac{3}{9r^2-16}$

Simplifique las expresiones racionales siguientes que tienen un monomio dividido entre otro monomio. Este material se estudió en las secciones 4.1 y 4.2, y le ayudarán a prepararse para la siguiente sección.

25.  $\frac{7x^3y}{21x^2y^5}$

26.  $\frac{24x^3y^2}{30x^4y^5}$

27.  $\frac{(2a^4b^5)^3}{2a^{12}b^{20}}$

28.  $\frac{(4r^2s^3)^2}{(3r^4s)^3}$

Simplifique

29.  $\frac{x}{x+xy}$

32.  $\frac{3x^2+6x}{3x^2+9x}$

35.  $\frac{r^2-r-2}{r+1}$

38.  $\frac{x^2+3x-18}{3x-9}$

41.  $\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6}$

44.  $\frac{8a-6}{3-4a}$

47.  $\frac{x^2+3x-18}{-2x^2+6x}$

50.  $\frac{x^2-25}{x^2-3x-10}$

53.  $\frac{x^2-25}{(x+5)^2}$

56.  $\frac{6t^2-7t-5}{2t+1}$

59.  $\frac{2x^2-8x+3x-12}{2x^2+8x+3x+12}$

62.  $\frac{x^3-125}{x^2-25}$

65.  $\frac{4x+6y}{2x^2+xy-3y^2}$

30.  $\frac{3x}{3x+9}$

33.  $\frac{x^3+6x^2+3x}{2x}$

36.  $\frac{b-2}{b^2-8b+12}$

39.  $\frac{k^2-6k+9}{k^2-9}$

42.  $\frac{4x^2-12x-40}{2x^2-16x+30}$

45.  $\frac{x^2-2x-8}{4-x}$

48.  $\frac{3p^2-13p-10}{p-5}$

51.  $\frac{m-2}{4m^2-13m+10}$

54.  $\frac{16x^2+24x+9}{4x+3}$

57.  $\frac{x^2-3x+4x-12}{x-3}$

60.  $\frac{x^3+1}{x^2-x+1}$

63.  $\frac{9s^2-16t^2}{3s-4t}$

66.  $\frac{3k^2+6kr-9r^2}{k^2+5kr+6r^2}$

31.  $\frac{5x+15}{x+3}$

34.  $\frac{x^2y^2-2xy+3y}{y}$

37.  $\frac{x^2+2x}{x^2+4x+4}$

40.  $\frac{z^2-10z+25}{z^2-25}$

43.  $\frac{2x-3}{3-2x}$

46.  $\frac{7-s}{s^2-12s+35}$

49.  $\frac{2x^2+5x-3}{1-2x}$

52.  $\frac{2x^2-11x+15}{(x-3)^2}$

55.  $\frac{6x^2-13x+6}{3x-2}$

58.  $\frac{x^2-2x+4x-8}{2x^2+3x+8x+12}$

61.  $\frac{a^3-8}{a-2}$

64.  $\frac{a+4b}{a^2-16b^2}$

## Solución de problemas

Simplifique, si es posible, las siguientes expresiones. Trate el símbolo desconocido como si fuese una variable.

67.  $\frac{3\odot}{12}$

70.  $\frac{\Delta^2+2\Delta}{\Delta^2+4\Delta+4}$

68.  $\frac{\odot}{\odot + 7\odot^2}$

71.  $\frac{3\Delta-2}{2-3\Delta}$

69.  $\frac{7\Delta}{14\Delta+21}$

72.  $\frac{(\Delta-3)^2}{\Delta^2-6\Delta+9}$



Determine el denominador que hace verdadera cada proposición. Explique cómo obtuvo su respuesta.

$$\backslash \quad 73. \quad \frac{x^2 - x - 6}{\square} = x - 3$$

$$\backslash \quad 74. \quad \frac{2x^2 + 11x + 12}{\square} = x + 4$$

Determine el numerador que hace verdadera cada proposición. Explique cómo obtuvo su respuesta.

$$\backslash \quad 75. \quad \frac{\square}{x + 4} = x + 3$$

$$\backslash \quad 76. \quad \frac{\square}{x - 5} = 2x - 1$$

## Problemas de reto

En los ejercicios 77 al 79, **a)** determine el valor o valores que  $x$  no puede representar. **b)** Simplifique la expresión.

$$77. \quad \frac{x + 3}{x^2 - 2x + 3x - 6}$$

$$78. \quad \frac{x - 4}{2x^2 - 5x - 8x + 20}$$

$$79. \quad \frac{x + 5}{2x^3 + 7x^2 - 15x}$$

Simplifique. Explique cómo determinó su respuesta.

$$\backslash \quad 80. \quad \frac{\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^4}{x^4}$$

$$\backslash \quad 81. \quad \frac{\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^4}{\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^4}$$

$$\backslash \quad 82. \quad \frac{\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^4}{\frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^5}$$

## Actividad en grupo

En grupo, analice y responda el ejercicio 83.

- $\backslash$  **83. a)** Como grupo, determinen los valores de la variable en donde la expresión  $\frac{x^2 - 25}{x^3 + 2x^2 - 15x}$  no está definida.
- b)** Como grupo, simplifiquen la expresión racional.
- c)** Miembro 1 del grupo: sustituya 6 en la *expresión original* y evalúe.
- d)** Miembro 2 del grupo: sustituya 6 en la *expresión simplificada* de la parte **b)** y compare su resultado con el del miembro 1 del grupo.

- e)** Miembro 3 del grupo: sustituya  $-2$  en la expresión original y en la expresión simplificada en la parte **b)**. Compare sus respuestas.
- f)** Como grupo, analicen los resultados del trabajo de las partes **c)** a **e)**.
- g)** Ahora, en grupo, sustituyan  $-5$  en la expresión original y en la expresión simplificada. Analicen sus resultados.
- h)** ¿La expresión  $\frac{x^2 - 25}{x^3 + 2x^2 - 15x}$  siempre es igual a su forma simplificada, para *cualquier* valor de  $x$ ? Explique su respuesta.

## Ejercicios de repaso acumulativo

[3.1] **84.** Despeje y de la fórmula  $z = \frac{x - y}{2}$ .

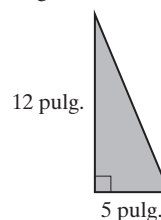
[3.4] **85. Triángulo** Determine las medidas de los tres lados de un triángulo, si un ángulo es  $30^\circ$  mayor que el ángulo más pequeño, y el tercer ángulo es  $10^\circ$  mayor que 3 veces el ángulo más pequeño.

[4.1] **86.** Simplifique  $\left(\frac{4x^2y^2}{9x^4y^3}\right)^2$ .

[4.4] **87.** Reste  $3x^2 - 4x - 8 - (-3x^2 + 6x + 9)$ .

[5.3] **88.** Factorice completamente  $3a^2 - 30a + 72$ .

[5.7] **89.** Determine la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo.



## 6.2 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE EXPRESIONES RACIONALES



- 1 Multiplicación de expresiones racionales.
- 2 División de expresiones racionales.

## 1 Multiplicación de expresiones racionales

En la sección 1.3 revisamos la multiplicación de fracciones numéricas. Recuerde que para multiplicar dos fracciones debemos multiplicar tanto sus numeradores como sus denominadores.

## Para multiplicar dos fracciones

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad b \neq 0 \quad \text{y} \quad d \neq 0$$

**EJEMPLO 1** Multiplique  $\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{-2}{9}\right)$ .

**Solución** Primero divida entre los factores comunes; luego multiplique.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{5} \cdot \frac{-2}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{1 \cdot (-2)}{5 \cdot 3} = -\frac{2}{15}$$



El mismo principio se aplica cuando multiplicamos expresiones racionales que tienen variables. Antes de multiplicar, primero debemos dividir entre los factores comunes del numerador y el denominador.

## Para multiplicar expresiones racionales

1. Factorice por completo todos los numeradores y los denominadores.
2. Divida entre los factores comunes.
3. Multiplique los numeradores por los numeradores y los denominadores por los denominadores.

**EJEMPLO 2** Multiplique  $\frac{3x^2}{2y} \cdot \frac{4y^3}{3x}$ .

**Solución** Este problema puede representarse como

$$\frac{3xx}{2y} \cdot \frac{4yyy}{3x}$$

$$\frac{\overset{1}{\cancel{3}}\overset{1}{\cancel{x}}}{2y} \cdot \frac{4yyy}{\overset{1}{\cancel{3}}\overset{1}{\cancel{x}}}$$

Divida entre los 3 y entre las x.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{3}}\overset{1}{\cancel{x}}}{\underset{1}{\cancel{2}}\underset{1}{\cancel{y}}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\overset{1}{\cancel{y}}yy}{\overset{1}{\cancel{3}}\overset{1}{\cancel{x}}}$$

Divida el 4 y el 2 entre 2 y divida las y.

Ahora multiplique entre sí los numeradores que quedan; haga lo mismo con los denominadores.

$$\frac{2xy^2}{1} \quad \text{o bien} \quad 2xy^2$$



En lugar de ilustrar completamente este proceso cuando se multiplican expresiones racionales, con frecuencia procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} & \frac{3x^2}{2y} \cdot \frac{4y^3}{3x} \\ &= \frac{\overset{1}{\cancel{3}}x^{\overset{2}{x}}}{\underset{1}{2}\cancel{y}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{4}}y^{\overset{3}{y^3}}}{\underset{1}{\cancel{3}}x} = 2xy^2 \end{aligned}$$

**EJEMPLO 3** Multiplique  $-\frac{3y^2}{2x^3} \cdot \frac{5x^2}{7y^2}$ .

**Solución**  
AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 43

$$-\frac{3y^2}{2x^3} \cdot \frac{5x^2}{7y^2} = -\frac{15}{14x}$$



En el ejemplo 3, cuando se dividió  $y^2$  en el numerador y el denominador no colocamos un 1 arriba y abajo de los factores de  $y^2$ . Cuando se factoriza en el denominador y en el numerador un factor, por lo común no se muestran los “unos”.

**EJEMPLO 4** Multiplique  $(x - 6) \cdot \frac{5}{x^3 - 6x^2}$ .

**Solución**

$$(x - 6) \cdot \frac{5}{x^3 - 6x^2} = \frac{\cancel{x-6}}{1} \cdot \frac{5}{x^2(\cancel{x-6})} = \frac{5}{x^2}$$



**EJEMPLO 5** Multiplique  $\frac{(x + 2)^2}{6x^2} \cdot \frac{3x}{x^2 - 4}$ .

**Solución**

$$\frac{(x + 2)^2}{6x^2} \cdot \frac{3x}{x^2 - 4} = \frac{(x + 2)(x + 2)}{6x^2} \cdot \frac{3x}{(x + 2)(x - 2)}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 15

$$= \frac{\cancel{(x+2)}(x+2)}{\underset{2}{\cancel{6}}x^{\underset{x}{x^2}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{3}}x}{\cancel{(x+2)}(x-2)} = \frac{x+2}{2x(x-2)}$$



En el ejemplo 5 podríamos haber multiplicado los factores en el denominador para obtener  $\frac{x+2}{2x^2-4x}$ . Ésta es también una respuesta correcta. En esta sección

dejaremos las respuestas racionales con el numerador como un polinomio (en forma no factorizada) y los denominadores en forma factorizada, como se dio en el ejemplo 5. Esto es consistente con la forma como dejaremos respuestas racionales cuando sumemos y restemos expresiones racionales en secciones posteriores.

**EJEMPLO 6** Multiplique  $\frac{a - 4}{3a} \cdot \frac{6a}{4 - a}$ .

**Solución**

$$\frac{a - 4}{\underset{1}{\cancel{3}}a} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{6}}a}{4 - a} = \frac{2(a - 4)}{4 - a}$$

Este problema aún no está completo. En la sección 6.1 mostramos que  $4 - a$  es  $-1(-4 + a)$  o bien  $-1(a - 4)$ . Por tanto,

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 13

$$\frac{2(a - 4)}{4 - a} = \frac{2(\cancel{a-4})}{-1(\cancel{a-4})} = -2$$



**SUGERENCIA**

Cuando en un problema de multiplicación, un numerador y un denominador sólo difieren en el signo, factorice  $-1$  de cualquiera de ellos, y luego divida entre el factor común.

$$\frac{a-b}{x} \cdot \frac{y}{b-a} = \frac{\cancel{a-b}}{x} \cdot \frac{y}{-1(\cancel{a-b})} = -\frac{y}{x}$$

**EJEMPLO 7** Multiplique  $\frac{3x+2}{2x-1} \cdot \frac{4-8x}{3x+2}$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{3x+2}{2x-1} \cdot \frac{4-8x}{3x+2} &= \frac{3x+2}{2x-1} \cdot \frac{4(1-2x)}{3x+2} && \text{Factorizar.} \\ &= \frac{\cancel{3x+2}}{2x-1} \cdot \frac{4(1-2x)}{\cancel{3x+2}} && \text{Dividir entre los factores comunes.} \end{aligned}$$

Observe que el factor  $(1-2x)$  en el numerador de la segunda fracción sólo difiere en signo de  $2x-1$ , el denominador de la primera fracción. Por tanto; factorizamos  $-1$  de cada término de  $(1-2x)$  en el numerador de la segunda fracción.

$$\begin{aligned} &= \frac{\cancel{3x+2}}{2x-1} \cdot \frac{4(-1)(2x-1)}{\cancel{3x+2}} && \text{Factorizar } -1 \text{ del segundo numerador.} \\ &= \frac{\cancel{3x+2}}{2x-1} \cdot \frac{-4(\cancel{2x-1})}{\cancel{3x+2}} && \text{Dividir entre los factores comunes.} \\ &= \frac{-4}{1} = -4 \end{aligned}$$



**EJEMPLO 8** Multiplique  $\frac{2x^2+5x-12}{6x^2-11x+3} \cdot \frac{3x^2+2x-1}{x^2+5x+4}$ .

**Solución**

Factorizamos completamente los numeradores y denominadores, y luego dividimos entre los factores comunes.

$$\begin{aligned} \frac{2x^2+5x-12}{6x^2-11x+3} \cdot \frac{3x^2+2x-1}{x^2+5x+4} &= \frac{(2x-3)(x+4)}{(2x-3)(3x-1)} \cdot \frac{(3x-1)(x+1)}{(x+1)(x+4)} \\ &= \frac{\cancel{(2x-3)} \cdot \cancel{(x+4)}}{\cancel{(2x-3)} \cdot \cancel{(3x-1)}} \cdot \frac{\cancel{(3x-1)} \cdot \cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)} \cdot \cancel{(x+4)}} = 1 \end{aligned}$$



**EJEMPLO 9** Multiplique  $\frac{2x^3-14x^2+12x}{6y^2} \cdot \frac{-2y}{3x^2-3x}$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{2x^3-14x^2+12x}{6y^2} \cdot \frac{-2y}{3x^2-3x} &= \frac{2x(x^2-7x+6)}{6y^2} \cdot \frac{-2y}{3x(x-1)} \\ &= \frac{2x(x-6)(x-1)}{6y^2} \cdot \frac{-2y}{3x(x-1)} \\ &= \frac{\cancel{2x} \cdot \cancel{(x-6)} \cdot \cancel{(x-1)}}{\underset{3}{\cancel{6}} y^2} \cdot \frac{-\cancel{2} y}{\cancel{3x} \cdot \cancel{(x-1)}} \\ &= \frac{-2(x-6)}{9y} = \frac{-2x+12}{9y} \end{aligned}$$



**EJEMPLO 10** Multiplique  $\frac{x^2 - y^2}{x + y} \cdot \frac{x + 2y}{2x^2 - xy - y^2}$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - y^2}{x + y} \cdot \frac{x + 2y}{2x^2 - xy - y^2} &= \frac{(x + y)(x - y)}{x + y} \cdot \frac{x + 2y}{(2x + y)(x - y)} \\ &= \frac{\cancel{(x + y)} \cancel{(x - y)}}{\cancel{x + y}} \cdot \frac{x + 2y}{(2x + y)\cancel{(x - y)}} \\ &= \frac{x + 2y}{2x + y} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 19



## 2 División de expresiones racionales

En el capítulo 1 aprendimos que para dividir una fracción entre otra, invertimos el divisor y multiplicamos.

### Para dividir dos fracciones

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \quad b \neq 0, \quad d \neq 0, \quad y \quad c \neq 0$$

**EJEMPLO 11** Divida **a)**  $\frac{2}{7} \div \frac{5}{7}$       **b)**  $\frac{3}{4} \div \frac{5}{6}$

**Solución** **a)**  $\frac{2}{7} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot \overset{1}{\cancel{7}}}{1 \cdot 5} = \frac{2}{5}$       **b)**  $\frac{3}{4} \div \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3 \cdot \overset{3}{\cancel{6}}}{2 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{9}{10}$



Para **dividir expresiones racionales** se utilizan los mismos principios.

### Para dividir expresiones racionales

Obtenga el inverso del divisor (la segunda fracción) y multiplique.

**EJEMPLO 12** Divida  $\frac{8x^3}{z} \div \frac{5z^3}{3}$ .

**Solución** Obtenemos el inverso del divisor (la segunda fracción), y luego multiplicamos.

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 25

$$\frac{8x^3}{z} \div \frac{5z^3}{3} = \frac{8x^3}{z} \cdot \frac{3}{5z^3} = \frac{24x^3}{5z^4}$$



**EJEMPLO 13** Divida  $\frac{x^2 - 9}{x + 4} \div \frac{x - 3}{x + 4}$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 9}{x + 4} \div \frac{x - 3}{x + 4} &= \frac{x^2 - 9}{x + 4} \cdot \frac{x + 4}{x - 3} \\ &= \frac{(x + 3)\cancel{(x - 3)}}{\cancel{x + 4}} \cdot \frac{\cancel{x + 4}}{\cancel{x - 3}} = x + 3 \end{aligned}$$

Obtener el inverso del divisor y multiplicar.

Factorizar y dividir entre los factores comunes.



**EJEMPLO 14** Divida  $\frac{-1}{2x-3} \div \frac{3}{3-2x}$ .

**Solución**

$$\begin{aligned}\frac{-1}{2x-3} \div \frac{3}{3-2x} &= \frac{-1}{2x-3} \cdot \frac{3-2x}{3} \\ &= \frac{-1}{2x-3} \cdot \frac{-1(2x-3)}{3} \\ &= \frac{(-1)(-1)}{(1)(3)} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Obtener el inverso del divisor y multiplicar.

Factorizar  $-1$ , luego dividir entre los factores comunes.



**EJEMPLO 15** Divida  $\frac{w^2 - 11w + 30}{w^2} \div (w - 5)^2$ .

**Solución**  $(w - 5)^2$  significa  $\frac{(w - 5)^2}{1}$ . Factorizamos el numerador de la primera fracción; luego obtenemos el inverso del divisor y multiplicamos.

$$\begin{aligned}\frac{w^2 - 11w + 30}{w^2} \div (w - 5)^2 &= \frac{w^2 - 11w + 30}{w^2} \cdot \frac{1}{(w - 5)^2} \\ &= \frac{(w - 6)(w - 5)}{w^2} \cdot \frac{1}{(w - 5)(w - 5)} \\ &= \frac{w - 6}{w^2(w - 5)}\end{aligned}$$



**EJEMPLO 16** Divida  $\frac{12x^2 - 22x + 8}{3x} \div \frac{3x^2 + 2x - 8}{2x^2 + 4x}$ .

**Solución**

$$\begin{aligned}\frac{12x^2 - 22x + 8}{3x} \div \frac{3x^2 + 2x - 8}{2x^2 + 4x} &= \frac{12x^2 - 22x + 8}{3x} \cdot \frac{2x^2 + 4x}{3x^2 + 2x - 8} \\ &= \frac{2(6x^2 - 11x + 4)}{3x} \cdot \frac{2x(x + 2)}{(3x - 4)(x + 2)} \\ &= \frac{2(3x - 4)(2x - 1)}{3x} \cdot \frac{2x(x + 2)}{(3x - 4)(x + 2)} \\ &= \frac{4(2x - 1)}{3} = \frac{8x - 4}{3}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 35



## Conjunto de ejercicios 6.2

### Ejercicios conceptuales

1. En sus palabras, explique cómo multiplicar expresiones racionales.
2. En sus palabras, explique cómo dividir expresiones racionales.

¿Qué polinomio debe colocarse en el área sombreada de la segunda fracción para hacer verdadera cada una de las proposiciones? Explique cómo determinó su respuesta.

$$3. \frac{x+3}{x-4} \cdot \frac{\square}{x+3} = x+2$$

$$4. \frac{x-5}{x+2} \cdot \frac{\square}{x-5} = 2x-3$$

$$5. \frac{x-5}{x+5} \cdot \frac{x+5}{\square} = \frac{1}{x+3}$$

$$6. \frac{2x-1}{x-3} \cdot \frac{x-3}{\square} = \frac{1}{x-6}$$

## Práctica de habilidades

Multiplique.

$$7. \frac{5x}{4y} \cdot \frac{y^2}{10}$$

$$8. \frac{15x^3y^2}{z} \cdot \frac{z}{5xy^3}$$

$$9. \frac{16x^2}{y^4} \cdot \frac{5x^2}{y^2}$$

$$10. \frac{7n^3}{32m} \cdot \frac{-4}{21m^2n^3}$$

$$11. \frac{6x^5y^3}{5z^3} \cdot \frac{6x^4}{5yz^4}$$

$$12. \frac{x^2-9}{x^2-16} \cdot \frac{x-4}{x-3}$$

$$13. \frac{3x-2}{3x+2} \cdot \frac{4x-1}{1-4x}$$

$$14. \frac{m-5}{2m+5} \cdot \frac{3m}{-m+5}$$

$$15. \frac{x^2+7x+12}{x+4} \cdot \frac{1}{x+3}$$

$$16. \frac{b^2+7b+12}{2b} \cdot \frac{b^2-4b}{b^2-b-12}$$

$$17. \frac{a}{a^2-b^2} \cdot \frac{a+b}{a^2+a}$$

$$18. \frac{t^2-36}{t^2+t-30} \cdot \frac{t-5}{3t}$$

$$19. \frac{6x^2-14x-12}{6x+4} \cdot \frac{x+3}{2x^2-2x-12}$$

$$20. \frac{2x^2-9x+9}{8x-12} \cdot \frac{2x}{x^2-3x}$$

$$21. \frac{3x^2-13x-10}{x^2-2x-15} \cdot \frac{x^2+x-2}{3x^2-x-2}$$

$$22. \frac{2t^2-t-6}{2t^2-3t-2} \cdot \frac{2t^2-5t-3}{2t^2+11t+12}$$

$$23. \frac{x+3}{x-3} \cdot \frac{x^3-27}{x^2+3x+9}$$

$$24. \frac{x^3+8}{x^2-x-6} \cdot \frac{x+3}{x^2-2x+4}$$

Divida.

$$25. \frac{9x^3}{y^2} \div \frac{3x}{y^3}$$

$$26. \frac{9x^3}{4} \div \frac{1}{16y^2}$$

$$27. \frac{15xy^2}{4z} \div \frac{5x^2y^2}{12z^2}$$

$$28. \frac{36y}{7z^2} \div \frac{3xy}{2z}$$

$$29. \frac{5xy}{7ab^2} \div \frac{6xy}{7}$$

$$30. 2xz \div \frac{4xy}{z}$$

$$31. \frac{10r+5}{r} \div \frac{2r+1}{r^2}$$

$$32. \frac{x-3}{4y^2} \div \frac{x^2-9}{2xy}$$

$$33. \frac{x^2+5x-14}{x} \div \frac{x-2}{x}$$

$$34. \frac{1}{x^2+7x-18} \div \frac{1}{x^2-17x+30}$$

$$35. \frac{x^2-12x+32}{x^2-6x-16} \div \frac{x^2-x-12}{x^2-5x-24}$$

$$36. \frac{a-b}{9a+9b} \div \frac{a^2-b^2}{a^2+2a+1}$$

$$37. \frac{2x^2+9x+4}{x^2+7x+12} \div \frac{2x^2-x-1}{(x+3)^2}$$

$$38. \frac{a^2-b^2}{9} \div \frac{3a-3b}{27x^2}$$

$$39. \frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2} \div \frac{x+y}{y-x}$$

$$40. \frac{9x^2-9y^2}{6x^2y^2} \div \frac{3x+3y}{12x^2y^5}$$

$$41. \frac{5x^2-4x-1}{5x^2+6x+1} \div \frac{x^2-5x+4}{x^2+2x+1}$$

$$42. \frac{7n^2-15n+2}{n^2+n-6} \div \frac{n^2-3n-10}{n^2-2n-15}$$

Realice cada una de las operaciones que se indican.

$$43. \frac{9x}{6y^2} \cdot \frac{24x^2y^4}{9x}$$

$$44. \frac{5z^3}{8} \cdot \frac{9x^2}{15z}$$

$$45. \frac{63a^2b^3}{16c^3} \cdot \frac{4c^4}{9a^3b^5}$$

$$46. \frac{-2xw}{y^5} \div \frac{6x^2}{y^6}$$

$$47. \frac{-xy}{a} \div \frac{-2ax}{6y}$$

$$48. \frac{27x}{5y^2} \div 3x^2y^2$$

$$49. \frac{100m^6}{21x^5y^7} \cdot \frac{14x^{12}y^5}{25m^5}$$

$$50. \frac{-18x^2y}{11z^2} \cdot \frac{22z^3}{x^2y^5}$$

$$51. (3x+5) \cdot \frac{1}{6x+10}$$

52.  $\frac{1}{4x-3} \cdot (20x-15)$

53.  $\frac{1}{4x^2y^2} \div \frac{1}{28x^3y}$

54.  $\frac{x^2y^5}{3z} \div \frac{3z}{2x}$

55.  $\frac{(4m)^2}{8n^3} \div \frac{m^6n^8}{4}$

56.  $\frac{3r^5s^2}{(r^2s^3)^3} \cdot \frac{6r^4}{4s}$

57.  $\frac{r^2+5r+6}{r^2+9r+18} \cdot \frac{r^2+4r-12}{r^2-5r+6}$

58.  $\frac{z^2-z-20}{z^2-3z-10} \cdot \frac{(z+2)^2}{(z+4)^2}$

59.  $\frac{x^2-10x+24}{x^2-8x+12} \div \frac{x^2-7x+12}{x^2-6x+8}$

60.  $\frac{p^2-5p+6}{p^2-10p+16} \div \frac{p^2+2p}{p^2-6p-16}$

61.  $\frac{3z^2-4z-4}{z^2-4} \cdot \frac{2z^2+5z+2}{2z^2-3z-2}$

62.  $\frac{2w^2+3w-35}{w^2-7w-8} \cdot \frac{w^2-5w-24}{w^2+8w+15}$

63.  $\frac{2x^2-19x+24}{x^2-12x+32} \div \frac{2x^2+x-6}{x^2+7x+10}$

64.  $\frac{q^2-11q+30}{2q^2-7q-15} \div \frac{q^2-2q-24}{q^2-q-20}$

65.  $\frac{4n^2-9}{9n^2-1} \cdot \frac{3n^2-2n-1}{2n^2-5n+3}$

66.  $\frac{2z^2+9z+9}{4z^2-9} \div \frac{(z+3)^2}{(2z-3)^2}$

## Solución de problemas

Realice cada operación que se indica. Trate a  $\Delta$  y  $\odot$  como si fuesen variables.

67.  $\frac{6\Delta^2}{12} \cdot \frac{12}{36\Delta^5}$

68.  $\frac{\Delta-6}{2\Delta+5} \cdot \frac{2\Delta}{-\Delta+6}$

69.  $\frac{\Delta - \odot}{9\Delta - 9\odot} \div \frac{\Delta^2 - \odot^2}{\Delta^2 + 2\Delta\odot + \odot^2}$

70.  $\frac{\Delta^2 - \odot^2}{\Delta^2 - 2\Delta\odot + \odot^2} \div \frac{\Delta + \odot}{\odot - \Delta}$

Para cada ecuación, escriba un binomio o trinomio en el área sombreada para hacer verdadera la proposición. Explique cómo determinó su respuesta.

71.  $\frac{\square}{x+2} = x+1$

72.  $\frac{x+3}{\square} = \frac{1}{x-3}$

73.  $\frac{\square}{x-5} = x+2$

74.  $\frac{\square}{x^2-7x+10} = \frac{1}{x-5}$

75.  $\frac{\square}{x^2-4} \cdot \frac{x+2}{x-1} = 1$

76.  $\frac{x+4}{x^2+9x+20} \cdot \frac{\square}{x-2} = 1$

## Problemas de reto

Simplifique.

77.  $\left( \frac{x+2}{x^2-4x-12} \cdot \frac{x^2-9x+18}{x-2} \right) \div \frac{x^2+5x+6}{x^2-4}$

78.  $\left( \frac{x^2-x-6}{2x^2-9x+9} \div \frac{x^2+x-12}{x^2+3x-4} \right) \cdot \frac{2x^2-5x+3}{x^2+x-2}$

79.  $\left( \frac{x^2+4x+3}{x^2-6x-16} \right) \div \left( \frac{x^2+5x+6}{x^2-9x+8} \cdot \frac{x^2-1}{x^2+4x+4} \right)$

80.  $\left( \frac{x^2+4x+3}{x^2-6x-16} \div \frac{x^2+5x+6}{x^2-9x+8} \right) \cdot \left( \frac{x^2-1}{x^2+4x+4} \right)$

Para los ejercicios 81 y 82, determine los polinomios que cuando son colocados en el área sombreada hacen verdadera la proposición. Explique cómo determinó su respuesta.

81.  $\frac{\square}{\square} \cdot \frac{x^2+3x-4}{x^2-4x+3} = \frac{x-2}{x-5}$

82.  $\frac{\square}{x^2+x-2} \cdot \frac{x^2+6x+8}{\square} = \frac{x+3}{x+5}$





## Actividad en grupo

83. Consideren los tres problemas siguientes:

$$(1) \left(\frac{x+2}{x-3}\right) \div \left(\frac{x^2-5x+6}{x-2} \cdot \frac{x+2}{x-3}\right)$$

$$(2) \left(\frac{x+2}{x-3} \div \frac{x^2-5x+6}{x-2}\right) \cdot \left(\frac{x+2}{x-3}\right)$$

$$(3) \left(\frac{x+2}{x-3}\right) \div \left(\frac{x^2-5x+6}{x-2}\right) \cdot \left(\frac{x+2}{x-3}\right)$$

- a) Sin resolverlo, en grupo decidan cuáles de ellos tendrán la misma respuesta.  
 b) De forma individual, simplifique cada uno de los tres problemas.  
 c) Compare sus respuestas de la parte **b)** con los otros miembros de su grupo. Si no obtuvo las mismas respuestas, explique por qué.

## Ejercicios de repaso acumulativo

[3.6] 84. **Remolcador** Un remolcador deja el puerto y viaja a un promedio de 15 millas por hora hacia un barco de fiestas para remolcarlo hacia el puerto. En el viaje de regreso, jalando el barco de fiestas, el remolcador promedia 5 millas por hora. Si el viaje de regreso al muelle le tomó 2 horas más que el viaje de ida, determine el tiempo que tardó el remolcador en llegar al barco de fiestas.



[4.5] 85. Multiplique  $(4x^3y^2z^4)(5xy^3z^7)$ .

[4.6] 86. Divida  $\frac{4x^3 - 5x}{2x - 1}$ .

[5.4] 87. Factorice  $3x^2 - 9x - 30$ .

[5.6] 88. Resuelva  $3x^2 - 9x - 30 = 0$ .

## 6.3 SUMA Y RESTA DE EXPRESIONES RACIONALES CON DENOMINADOR COMÚN Y DETERMINACIÓN DEL MÍNIMO COMÚN DENOMINADOR



- 1 Sumar y restar expresiones racionales con un denominador común.
- 2 Determinar el mínimo común denominador (mcd).


### 1 Sumar y restar expresiones racionales con un denominador común

Recuerde que cuando sumamos (o restamos) dos fracciones aritméticas con un denominador común, sumamos (o restamos) los numeradores y conservamos el denominador común.

#### Para sumar o restar dos fracciones

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, c \neq 0 \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}, c \neq 0$$

**EJEMPLO 1** a) Sume  $\frac{5}{16} + \frac{8}{16}$ .                      b) Reste  $\frac{5}{9} - \frac{1}{9}$ .

**Solución** a)  $\frac{5}{16} + \frac{8}{16} = \frac{5+8}{16} = \frac{13}{16}$                       b)  $\frac{5}{9} - \frac{1}{9} = \frac{5-1}{9} = \frac{4}{9}$  


En el ejemplo **1a**) observe que no simplificamos  $\frac{8}{16}$  a  $\frac{1}{2}$ . Las fracciones se dan con un denominador común, 16. Si  $\frac{8}{16}$  se simplificase a  $\frac{1}{2}$ , perderíamos el denominador común que se necesita para sumar o restar fracciones.

Cuando **sumamos o restamos expresiones racionales** que tienen variables, se aplican los mismos principios.

**Para sumar o restar expresiones racionales con un denominador común**

1. Sume o reste los denominadores.
2. Coloque la suma o diferencia de los numeradores que determinó en el paso 1 sobre el denominador común.
3. Si es posible, simplifique la fracción.

**EJEMPLO 2** Sume  $\frac{3}{x-4} + \frac{x+2}{x-4}$ .


**Solución**  $\frac{3}{x-4} + \frac{x+2}{x-4} = \frac{3+(x+2)}{x-4} = \frac{x+5}{x-4}$  

**EJEMPLO 3** Sume  $\frac{2x^2+5}{x+3} + \frac{6x-5}{x+3}$ .

**Solución**  $\frac{2x^2+5}{x+3} + \frac{6x-5}{x+3} = \frac{(2x^2+5)+(6x-5)}{x+3}$   
 $= \frac{2x^2+5+6x-5}{x+3}$   
 $= \frac{2x^2+6x}{x+3}$

Ahora, de cada término en el numerador, factorice 2x y simplifique.

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 21

$$= \frac{2x(x+3)}{x+3} = 2x$$


**EJEMPLO 4** Sume  $\frac{x^2+3x-2}{(x+5)(x-2)} + \frac{4x+12}{(x+5)(x-2)}$ .

Solución

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2 + 3x - 2}{(x + 5)(x - 2)} + \frac{4x + 12}{(x + 5)(x - 2)} &= \frac{(x^2 + 3x - 2) + (4x + 12)}{(x + 5)(x - 2)} \\
 &= \frac{x^2 + 3x - 2 + 4x + 12}{(x + 5)(x - 2)} \\
 &= \frac{x^2 + 7x + 10}{(x + 5)(x - 2)} \\
 &= \frac{\cancel{(x + 5)}(x + 2)}{\cancel{(x + 5)}(x - 2)} \\
 &= \frac{x + 2}{x - 2}
 \end{aligned}$$

Escribir como una sola fracción.

Quitar paréntesis en el numerador.

Reducir términos semejantes.

Factorizar, dividir entre el factor común.



**Cuando reste expresiones racionales, asegúrese de restar el numerador completo de la fracción que será restada.** Estudie detenidamente el siguiente recuadro de Cómo evitar errores comunes.

### CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Considere la sustracción

$$\frac{4x}{x - 2} - \frac{2x + 1}{x - 2}$$

Muchas personas resuelven de forma incorrecta problemas de este tipo. Aquí están las formas correcta e incorrecta de resolver este problema.

CORRECTA

$$\begin{aligned}
 \frac{4x}{x - 2} - \frac{2x + 1}{x - 2} &= \frac{4x - (2x + 1)}{x - 2} \\
 &= \frac{4x - 2x - 1}{x - 2} \\
 &= \frac{2x - 1}{x - 2}
 \end{aligned}$$

INCORRECTA

$$\frac{\cancel{4x}}{\cancel{x - 2}} - \frac{\cancel{2x + 1}}{\cancel{x - 2}} = \frac{\cancel{4x - 2x + 1}}{\cancel{x - 2}}$$

**Observe que todo el numerador de la segunda fracción** (y no sólo el primer término) **debe restarse**. También note que cambiará el signo de *cada* término del numerador que se restará cuando se eliminan los paréntesis.

### EJEMPLO 5

Reste  $\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 7x + 12} - \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 + 7x + 12}$ .

Solución

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 7x + 12} - \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 + 7x + 12} &= \frac{(x^2 - 2x + 3) - (x^2 - 4x - 5)}{x^2 + 7x + 12} \\
 &= \frac{x^2 - 2x + 3 - x^2 + 4x + 5}{x^2 + 7x + 12} \\
 &= \frac{2x + 8}{x^2 + 7x + 12} \\
 &= \frac{2\cancel{(x + 4)}}{(x + 3)\cancel{(x + 4)}} \\
 &= \frac{2}{x + 3}
 \end{aligned}$$

Escribir como una sola fracción.

Eliminar paréntesis.

Reducir términos semejantes.

Factorizar, dividir entre el factor común.



La variable que se utiliza cuando se trabaja con expresiones racionales es irrelevante. En el ejemplo 6, trabajamos con expresiones racionales con la variable  $r$ .

**EJEMPLO 6****Solución**

$$\text{Reste } \frac{6r}{r-5} - \frac{4r^2 - 17r + 15}{r-5}.$$

$$\frac{6r}{r-5} - \frac{4r^2 - 17r + 15}{r-5} = \frac{6r - (4r^2 - 17r + 15)}{r-5}$$

*Escribir como una sola fracción.*

$$= \frac{6r - 4r^2 + 17r - 15}{r-5}$$

*Eliminar paréntesis.*

$$= \frac{-4r^2 + 23r - 15}{r-5}$$

*Reducir términos semejantes.*

$$= \frac{-(4r^2 - 23r + 15)}{r-5}$$

*Factorizar un  $-1$ .*

$$= \frac{-(4r-3)(\cancel{r-5})}{\cancel{r-5}}$$

*Factorizar, dividir entre el factor común.*

$$= -(4r-3) \text{ o bien } -4r+3$$



**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 43**

## 2 Determinar el mínimo común denominador (mcd)

Para sumar dos fracciones con denominadores diferentes, primero debemos obtener un denominador común. Ahora explicamos cómo determinar el **mínimo común denominador (mcd)** para expresiones racionales. Utilizaremos esta información en la sección 6.4, cuando sumemos y restemos expresiones racionales.

**EJEMPLO 7****Solución**

$$\text{Sume } \frac{5}{7} + \frac{2}{3}.$$

El mínimo común denominador (mcd) de las fracciones  $\frac{5}{7}$  y  $\frac{2}{3}$  es 21. Veintiuno es el número más pequeño que es divisible entre ambos denominadores, 7 y 3. Escribamos nuevamente cada fracción de modo que su denominador sea 21.

$$\begin{aligned} \frac{5}{7} + \frac{2}{3} &= \frac{3}{3} \cdot \frac{5}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{7} \\ &= \frac{15}{21} + \frac{14}{21} = \frac{29}{21} \text{ o bien } 1\frac{8}{21} \end{aligned}$$




Para sumar o restar expresiones racionales, debemos escribir cada expresión con un denominador común.

### Para determinar el mínimo común denominador de expresiones racionales

1. Factorice completamente cada denominador. Cualesquiera factores que aparezcan más de una vez deben expresarse como potencias. Por ejemplo,  $(x-3)(x-3)$  debe expresarse como  $(x-3)^2$ .
2. Liste todos los factores diferentes (distintos de 1) que aparezcan en cada uno de los denominadores. Cuando aparezca el mismo factor en más de un denominador, escriba ese factor con la potencia más alta con que aparezca.
3. El mínimo común denominador es el producto de todos los factores que se listaron en el paso 2.

**EJEMPLO 8** Determine el mínimo común denominador.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{y}$$


**Solución** El único factor (distinto de 1) del primer denominador es 3. El único factor (distinto de 1) del segundo denominador es  $y$ . Por tanto el mcd es  $3 \cdot y = 3y$ . 

**EJEMPLO 9** Determine el mcd.

$$\frac{5}{x^2} - \frac{3}{7x}$$

**Solución** Los factores que aparecen en los denominadores son 7 y  $x$ . Liste cada factor con su exponente más grande. El mcd es el producto de estos factores

$$\text{mcd} = 7 \cdot x^2 = 7x^2$$

 Mayor potencia de  $x$ .



**EJEMPLO 10** Determine el mcd.

$$\frac{1}{18x^3y} + \frac{5}{27x^2y^3}$$

**Solución** Escriba 18 y 27 como productos de factores primos:  $18 = 2 \cdot 3^2$  y  $27 = 3^3$ . Si olvidó cómo escribir un número como un producto de factores primos, lea ahora la sección 5.1 o el apéndice B.

$$\frac{1}{18x^3y} + \frac{5}{27x^2y^3} = \frac{1}{2 \cdot 3^2 x^3 y} + \frac{5}{3^3 x^2 y^3}$$

Los factores que aparecen son 2, 3,  $x$  y  $y$ . Liste las potencias más grandes de estos factores.

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 61

$$\text{mcd} = 2 \cdot 3^3 \cdot x^3 \cdot y^3 = 54x^3y^3$$



**EJEMPLO 11** Determine el mcd.

$$\frac{5}{x} - \frac{7y}{x+3}$$

**Solución** Los factores en el denominador son  $x$  y  $x+3$ . Observe que  $x$  en el segundo denominador,  $x+3$ , es un término, no un factor.

$$\text{mcd} = x(x+3)$$



**EJEMPLO 12** Determine el mcd.

$$\frac{7}{3x^2 - 6x} + \frac{x^2}{x^2 - 4x + 4}$$

**Solución** Factorice ambos denominadores.

$$\begin{aligned} \frac{7}{3x^2 - 6x} + \frac{x^2}{x^2 - 4x + 4} &= \frac{7}{3x(x-2)} + \frac{x^2}{(x-2)(x-2)} \\ &= \frac{7}{3x(x-2)} + \frac{x^2}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

Los factores en los denominadores son 3,  $x$  y  $x - 2$ . Liste la potencia más grande de cada uno de estos factores.

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 85

$$\text{mcd} = 3 \cdot x \cdot (x - 2)^2 = 3x(x - 2)^2.$$



**EJEMPLO 13** Determine el mcd.

$$\frac{5x}{x^2 - x - 12} - \frac{6x^2}{x^2 - 7x + 12}$$

**Solución** Factorice ambos denominadores.

$$\frac{5x}{x^2 - x - 12} - \frac{6x^2}{x^2 - 7x + 12} = \frac{5x}{(x + 3)(x - 4)} - \frac{6x^2}{(x - 3)(x - 4)}$$

Los factores en los denominadores son  $x + 3$ ,  $x - 4$  y  $x - 3$ .

$$\text{mcd} = (x + 3)(x - 4)(x - 3)$$

*Aunque  $x - 4$  es un factor común de cada denominador, la potencia más grande con que aparece ese factor en cada denominador es 1.*



**EJEMPLO 14** Determine el mcd.

$$\frac{6w}{w^2 - 14w + 45} + w + 5$$

**Solución** Factorice el denominador del primer término.

$$\frac{6w}{w^2 - 14w + 45} + w + 5 = \frac{6w^2}{(w - 5)(w - 9)} + w + 5$$

Como el denominador de  $w + 5$  es 1, la expresión puede volverse a escribir como

$$\frac{6w}{(w - 5)(w - 9)} + \frac{w + 5}{1}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 89

Por tanto, el mcd es  $1(w - 5)(w - 9)$  o simplemente  $(w - 5)(w - 9)$ .



## Conjunto de ejercicios 6.3

### Ejercicios conceptuales

1. Con sus palabras, explique cómo sumar o restar expresiones racionales con un denominador común.
2. Cuando se restan expresiones racionales, ¿qué debe pasarse al signo de cada término del numerador que se restará?
3. Con sus palabras, explique cómo determinar el mínimo común denominador de dos expresiones racionales.
4. En la suma  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1}$ , ¿el mínimo común denominador es  $x$ ,  $x + 1$  o  $x(x + 1)$ ? Explique.

Determine el mcd que se utilizará para realizar cada operación que se indica. Explique cómo determinar el mcd. No realice las operaciones.

5.  $\frac{5}{x + 6} - \frac{2}{x}$

6.  $\frac{2}{x - 2} + \frac{3}{5}$

7.  $\frac{2}{x + 3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{3}$

8.  $\frac{6}{x - 3} + \frac{1}{x} - \frac{1}{3}$

En los ejercicios 9 a 12 a) explique por qué la expresión a la izquierda del signo  $\neq$  no es igual a la expresión del lado derecho; b) muestre qué debe hacerse a la expresión del lado derecho para que sea igual a la del lado izquierdo.

$$\begin{aligned} 9. \quad \frac{4x-3}{5x+4} - \frac{2x-7}{5x+4} &\neq \frac{4x-3-2x-7}{5x+4} & 10. \quad \frac{5x}{2x-3} - \frac{-3x-7}{2x-3} &\neq \frac{5x+3x-7}{2x-3} \\ 11. \quad \frac{6x-2}{x^2-4x+3} - \frac{3x^2-4x+5}{x^2-4x+3} &\neq \frac{6x-2-3x^2-4x+5}{x^2-4x+3} \\ 12. \quad \frac{4x+5}{x^2-6x} - \frac{-x^2+3x+6}{x^2-6x} &\neq \frac{4x+5+x^2+3x+6}{x^2-6x} \end{aligned}$$

## Práctica de habilidades

Sume o reste.

$$\begin{aligned} 13. \quad \frac{x-2}{7} + \frac{2x}{7} & & 14. \quad \frac{2x-7}{5} - \frac{6}{5} & & 15. \quad \frac{3r+2}{4} - \frac{3}{4} \\ 16. \quad \frac{3x+6}{2} - \frac{x}{2} & & 17. \quad \frac{2}{x} + \frac{x+4}{x} & & 18. \quad \frac{3x+4}{x+1} + \frac{6x+5}{x+1} \\ 19. \quad \frac{n-5}{n} - \frac{n+7}{n} & & 20. \quad \frac{x-6}{x} - \frac{x+4}{x} & & 21. \quad \frac{x}{x-1} + \frac{4x+7}{x-1} \\ 22. \quad \frac{4x-3}{x-7} - \frac{2x+8}{x-7} & & 23. \quad \frac{4t+7}{5t^2} - \frac{3t+4}{5t^2} & & 24. \quad \frac{3w+5}{w^2+2w+1} + \frac{-2w-4}{w^2+2w+1} \\ 25. \quad \frac{5x+4}{x^2-x-12} + \frac{-4x-1}{x^2-x-12} & & 26. \quad \frac{-x-4}{x^2-16} + \frac{2(x+4)}{x^2-16} & & 27. \quad \frac{x+4}{3x+2} - \frac{x+4}{3x+2} \\ 28. \quad \frac{2m+5}{(m+4)(m-3)} - \frac{m+1}{(m+4)(m-3)} & & 29. \quad \frac{2p-5}{p-5} - \frac{p+5}{p-5} & & 30. \quad \frac{x^2-6}{3x} - \frac{x^2+4x-5}{3x} \\ 31. \quad \frac{x^2+4x+3}{x+2} - \frac{5x+9}{x+2} & & 32. \quad \frac{-4x+2}{3x+6} + \frac{4(x-1)}{3x+6} & & 33. \quad \frac{3x+11}{2x+10} - \frac{2(x+3)}{2x+10} \\ 34. \quad \frac{x^2}{x+4} - \frac{16}{x+4} & & 35. \quad \frac{b^2-2b-3}{b^2-b-6} + \frac{b-3}{b^2-b-6} & & 36. \quad \frac{4x+12}{3-x} - \frac{3x+15}{3-x} \\ 37. \quad \frac{t-3}{t+3} - \frac{-3t-15}{t+3} & & 38. \quad \frac{x^2-2}{x^2+6x-7} - \frac{-4x+19}{x^2+6x-7} & & 39. \quad \frac{x^2+2x}{(x+6)(x-3)} - \frac{15}{(x+6)(x-3)} \\ 40. \quad \frac{x^2-13}{x+5} - \frac{12}{x+5} & & 41. \quad \frac{3x^2-7x}{4x^2-8x} + \frac{x}{4x^2-8x} & & 42. \quad \frac{x^3-10x^2+35x}{x(x-6)} - \frac{x^2+5x}{x(x-6)} \\ 43. \quad \frac{3x^2-4x+4}{3x^2+7x+2} - \frac{10x+9}{3x^2+7x+2} & & 44. \quad \frac{3x^2+15x}{x^3+2x^2-8x} + \frac{2x^2+5x}{x^3+2x^2-8x} & & 45. \quad \frac{x^2+3x-6}{x^2-5x+4} - \frac{-2x^2+4x-4}{x^2-5x+4} \\ 46. \quad \frac{4x^2+5}{9x^2-64} - \frac{x^2-x+29}{9x^2-64} & & 47. \quad \frac{5x^2+40x+8}{x^2-64} + \frac{x^2+9x}{x^2-64} & & 48. \quad \frac{20x^2+5x+1}{6x^2+x-2} - \frac{8x^2-12x-5}{6x^2+x-2} \end{aligned}$$

Determine el mínimo común denominador de cada expresión.

$$\begin{aligned} 49. \quad \frac{x}{5} + \frac{x+4}{5} & & 50. \quad \frac{2+r}{3} - \frac{12}{3} & & 51. \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{5n} \\ 52. \quad \frac{1}{x+1} - \frac{4}{7} & & 53. \quad \frac{3}{5x} + \frac{7}{4} & & 54. \quad \frac{5}{2x} + 1 \\ 55. \quad \frac{6}{p} + \frac{3}{p^3} & & 56. \quad \frac{2x}{x+3} + \frac{6}{x-4} & & 57. \quad \frac{m+3}{3m-4} + m \\ 58. \quad \frac{x+4}{2x} + \frac{3}{7x} & & 59. \quad \frac{x}{2x+3} + \frac{4}{x^2} & & 60. \quad \frac{x}{3x^2} + \frac{9}{7x^3} \\ 61. \quad \frac{x+1}{12x^2y} - \frac{7}{9x^3} & & 62. \quad \frac{-3}{8x^2y^2} + \frac{6}{5x^4y^5} & & 63. \quad \frac{4}{2r^4s^5} - \frac{5}{9r^3s^7} \end{aligned}$$

64.  $\frac{3}{4w^5z^4} + \frac{2}{9wz^2}$

67.  $\frac{5x-2}{x^2+x} - \frac{x^2}{x}$

70.  $\frac{3}{-2a+3b} - \frac{1}{2a-3b}$

72.  $\frac{p}{4p^2+2p} - \frac{3}{2p+1}$

74.  $\frac{10}{(x+4)(x+2)} - \frac{5-x}{x+2}$

76.  $\frac{p^2-4}{p^2-25} + \frac{3}{p-5}$

78.  $6x^2 + \frac{9x}{x-3}$

80.  $\frac{x+1}{x^2+11x+18} - \frac{x^2-4}{x^2-3x-10}$

82.  $\frac{4n}{n^2-4} - \frac{n-3}{n^2-5n-14}$

84.  $\frac{3x+5}{x^2-1} + \frac{x^2-8}{(x+1)^2}$

86.  $\frac{6x+5}{x+2} + \frac{4x}{(x+2)^2}$

88.  $\frac{7n+7}{(n+5)(n+2)} - \frac{3n-5}{(n-3)(n+5)}$

90.  $\frac{x-1}{x^2-25} + x-4$

92.  $\frac{-4x+7}{2x^2+5x+2} + \frac{x^2}{3x^2+4x-4}$

94.  $\frac{3x+1}{6x^2+5x-6} + \frac{x^2-5}{9x^2-12x+4}$

65.  $\frac{w^2-7}{12w} - \frac{w+3}{9(w+5)}$

68.  $\frac{4t}{t-5} + \frac{2}{5-t}$

66.  $\frac{x-3}{2x+5} - \frac{6}{x-5}$

69.  $\frac{n}{4n-1} + \frac{n-2}{1-4n}$

71.  $\frac{6}{4k-5r} - \frac{5}{-4k+5r}$

73.  $\frac{5}{2q^2+2q} - \frac{5}{3q}$

75.  $\frac{21}{24x^2y} + \frac{x+4}{15xy^3}$

77.  $\frac{3}{3x+12} + \frac{3x+6}{2x+4}$

79.  $\frac{9x+4}{x+6} - \frac{3x-6}{x+5}$

81.  $\frac{x-2}{x^2-5x-24} + \frac{3}{x^2+11x+24}$

83.  $\frac{7}{(a-4)^2} - \frac{a+2}{a^2-7a+12}$

85.  $\frac{2x}{x^2+6x+5} - \frac{5x^2}{x^2+4x+3}$

87.  $\frac{3x-5}{x^2-6x+9} + \frac{3}{x-3}$

89.  $\frac{8x^2}{x^2-7x+6} + x-3$

91.  $\frac{t-1}{3t^2+10t-8} - \frac{6}{3t^2+11t-4}$

93.  $\frac{2x-3}{4x^2+4x+1} + \frac{x^2-4}{8x^2+10x+3}$

## Solución de problemas

Liste los polinomios que deben colocarse en cada área sombreada para hacer que la proposición sea verdadera. Explique cómo determinó su respuesta.

95.  $\frac{x^2-6x+3}{x+3} + \frac{\text{■}}{x+3} = \frac{2x^2-5x-6}{x+3}$

96.  $\frac{4x^2-6x-7}{x^2-4} - \frac{\text{■}}{x^2-4} = \frac{2x^2+x-3}{x^2-4}$

97.  $\frac{-x^2-4x+3}{2x+5} + \frac{\text{■}}{2x+5} = \frac{5x-7}{2x+5}$

98.  $\frac{-3x^2-9}{(x+4)(x-2)} - \frac{\text{■}}{(x+4)(x-2)} = \frac{x^2+3x}{(x+4)(x-2)}$

Determine el mínimo común denominador de cada expresión.

99.  $\frac{3}{\text{☺}} + \frac{4}{5\text{☺}}$

100.  $\frac{5}{8\Delta^2\text{☺}^2} + \frac{6}{5\Delta^4\text{☺}^5}$

101.  $\frac{8}{\Delta^2-9} - \frac{2}{\Delta+3}$

102.  $\frac{6}{\Delta+3} - \frac{\Delta+5}{\Delta^2-4\Delta+3}$



## Problemas de reto

Realice cada operación que se indica.

$$103. \frac{4x-1}{x^2-25} - \frac{3x^2-8}{x^2-25} + \frac{8x-3}{x^2-25}$$

$$104. \frac{x^2-8x+2}{x+7} + \frac{2x^2-5x}{x+7} - \frac{3x^2+7x+6}{x+7}$$

Determine el mínimo común denominador de cada expresión.

$$105. \frac{7}{6x^5y^9} - \frac{9}{2x^3y} + \frac{4}{5x^{12}y^2}$$

$$106. \frac{12}{x-3} - \frac{5}{x^2-9} + \frac{7}{x+3}$$

$$107. \frac{4}{x^2-x-12} + \frac{3}{x^2-6x+8} + \frac{5}{x^2+x-6}$$

$$108. \frac{4}{x^2-4} - \frac{11}{3x^2+5x-2} + \frac{5}{3x^2-7x+2}$$

## Ejercicios de repaso acumulativo

[1.3] 109. Reste  $4\frac{3}{5} - 2\frac{5}{9}$ .

[2.5] 110. Resuelva  $6x + 4 = -(x + 2) - 3x + 4$ .

- [2.6] 111. **Alimento para colibrí** Las instrucciones en una botella de alimento concentrado para colibríes indica que deben mezclarse 6 onzas del concentrado con 1 galón (128 onzas) de agua. Si desea mezclar el concentrado con sólo 48 onzas de agua, ¿cuánto concentrado debe utilizar?



- [3.3] 112. **Gimnasio** El Gimnasio Norteño tiene dos planes de pago. Plan 1, es un pago de \$125 por membresía anual más \$2.50 por hora de uso de la cancha de tenis. Plan 2, es un pago de membresía anual de \$300 sin cobro por el uso de la cancha de tenis. ¿Cuántas horas en un año debe jugar Malcolm Wu para hacer que el costo del Plan 1 sea igual al costo del Plan 2?

- [4.3] 113. Utilice la notación científica para evaluar  $\frac{420,000,000}{0.0021}$ .  
Deje su respuesta en notación científica.

[5.6] 114. Resuelva  $2x^2 - 3 = x$ .

## 6.4 SUMA Y RESTA DE EXPRESIONES RACIONALES



### 1 Suma y resta de expresiones racionales.

En la sección 6.3 analizamos cómo sumar y restar expresiones racionales con un denominador común. Ahora estudiamos la suma y resta de expresiones racionales que no tienen un denominador común.

### 1 Suma y resta de expresiones racionales

El método utilizado para sumar y restar expresiones racionales con denominadores no comunes se bosqueja en el ejemplo 1.

**EJEMPLO 1** Sume  $\frac{7}{x} + \frac{3}{y}$ .

**Solución** Primero determinamos el mcd como se expuso en la sección 6.3.

$$\text{mcd} = xy$$

Escribimos cada fracción con el mcd. Hacemos esto, multiplicando **ambos**, numerador y denominador de cada fracción, por los factores necesarios para obtener el mcd.

En este problema, la fracción de la izquierda debe multiplicarse por  $y/y$  y la fracción de la derecha debe multiplicarse por  $x/x$ .

$$\frac{7}{x} + \frac{3}{y} = \frac{y}{y} \cdot \frac{7}{x} + \frac{3}{y} \cdot \frac{x}{x} = \frac{7y}{xy} + \frac{3x}{xy}$$

Al multiplicar el numerador y el denominador por el mismo factor, en realidad estamos multiplicando por 1, lo cual no cambia el valor de la fracción, sólo su apariencia. Así, la nueva fracción es equivalente a la fracción original.

Ahora sumamos los numeradores, y dejamos el mcd solo en el denominador.

$$\frac{7y}{xy} + \frac{3x}{xy} = \frac{7y + 3x}{xy} \quad \text{o bien} \quad \frac{3x + 7y}{xy}$$



### Para sumar o restar dos expresiones racionales con denominadores no comunes

1. Determine el mcd.
2. Reescriba cada fracción como una fracción equivalente con el mcd. Esto se hace multiplicando el numerador y el denominador por los factores necesarios para obtener el mcd.
3. Sume o reste los numeradores y conserve el mcd.
4. Cuando sea posible, factorice el numerador que queda y simplifique la fracción.

**EJEMPLO 2** Sume  $\frac{5}{4x^2y} + \frac{3}{14xy^3}$ .

**Solución** El mcd es  $28x^2y^3$ ; debemos escribir cada fracción con el denominador  $28x^2y^3$ . Para hacer esto, multiplicamos la fracción de la izquierda por  $7y^2/7y^2$  y la fracción de la derecha por  $2x/2x$ .

$$\begin{aligned} \frac{5}{4x^2y} + \frac{3}{14xy^3} &= \frac{7y^2}{7y^2} \cdot \frac{5}{4x^2y} + \frac{3}{14xy^3} \cdot \frac{2x}{2x} \\ &= \frac{35y^2}{28x^2y^3} + \frac{6x}{28x^2y^3} \\ &= \frac{35y^2 + 6x}{28x^2y^3} \quad \text{o bien} \quad \frac{6x + 35y^2}{28x^2y^3} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 15



### SUGERENCIA

En el ejemplo 2 multiplicamos la primera fracción por  $\frac{7y^2}{7y^2}$  y la segunda fracción por  $\frac{2x}{2x}$  para obtener dos fracciones con un denominador común. ¿Cómo sabemos por cuál fracción multiplicar? Muchos de ustedes pueden determinar esto observando el mcd y luego determinando por qué factor es necesario multiplicar cada denominador para obtener el mcd. Si esto no es obvio, puede dividir el mcd por el denominador dado para determinar el factor por el que debe multiplicarse el numerador y el denominador

(continúa en la página siguiente)

de cada fracción. En el ejemplo 2, el mcd es  $28x^2y^3$ . Si dividimos  $28x^2y^3$  entre cada denominador dado,  $4x^2y$  y  $14xy^3$ , podemos determinar cuál es el factor por el que debe multiplicarse el numerador y el denominador de cada fracción,

$$\frac{28x^2y^3}{4x^2y} = 7y^2 \quad \frac{28x^2y^3}{14xy^3} = 2x$$

Así,  $\frac{5}{4x^2y}$  debe multiplicarse por  $\frac{7y^2}{7y^2}$  y  $\frac{3}{14xy^3}$  debe multiplicarse por  $\frac{2x}{2x}$  para obtener el mcd,  $28x^2y^3$ .

**EJEMPLO 3** Sume  $\frac{3}{x+2} + \frac{5}{x}$ .

**Solución** Debemos escribir cada fracción con el mcd, que es  $x(x+2)$ . Para hacer esto, multiplicamos la fracción de la izquierda por  $x/x$  y la fracción de la derecha por  $(x+2)/(x+2)$ .

$$\begin{aligned} \frac{3}{x+2} + \frac{5}{x} &= \frac{x}{x} \cdot \frac{3}{x+2} + \frac{5}{x} \cdot \frac{x+2}{x+2} && \text{Reescribir cada fracción como una fracción equivalente con el mcd.} \\ &= \frac{3x}{x(x+2)} + \frac{5(x+2)}{x(x+2)} \\ &= \frac{3x}{x(x+2)} + \frac{5x+10}{x(x+2)} && \text{Propiedad distributiva.} \\ &= \frac{3x + (5x+10)}{x(x+2)} && \text{Escribir como una sola fracción.} \\ &= \frac{3x + 5x + 10}{x(x+2)} && \text{Eliminar paréntesis en el numerador.} \\ &= \frac{8x + 10}{x(x+2)} && \text{Reducir términos semejantes en el numerador.} \quad \star \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 25

### SUGERENCIA

Mire la respuesta al ejercicio 3,  $\frac{8x+10}{x(x+2)}$ . Observe que el numerador podría factorizarse para obtener  $\frac{2(4x+5)}{x(x+2)}$ . También note que el denominador podría multiplicarse para obtener  $\frac{8x+10}{x^2+2x}$ . Las tres respuestas son equivalentes y cada una de ellas es correcta.

En esta sección, cuando escribamos las respuestas, a menos que exista un factor común en el numerador y el denominador, dejaremos el numerador sin factorizar y el denominador en forma factorizada. Si tanto el numerador como el denominador tiene un factor común, factorizaremos el numerador y simplificaremos la fracción.

**EJEMPLO 4** Reste  $\frac{w}{w-7} - \frac{3}{w-4}$ .

**Solución** El mcd es  $(w-7)(w-4)$ . La fracción de la izquierda debe multiplicarse por  $(w-4)/(w-4)$  para obtener el mcd. La fracción de la derecha debe multiplicarse por  $(w-7)/(w-7)$  para obtener el mcd.

$$\begin{aligned}
 \frac{w}{w-7} - \frac{3}{w-4} &= \frac{w-4}{w-4} \cdot \frac{w}{w-7} - \frac{3}{w-4} \cdot \frac{w-7}{w-7} \\
 &= \frac{w(w-4)}{(w-4)(w-7)} - \frac{3(w-7)}{(w-4)(w-7)} \\
 &= \frac{w^2 - 4w}{(w-4)(w-7)} - \frac{3w - 21}{(w-4)(w-7)} \\
 &= \frac{(w^2 - 4w) - (3w - 21)}{(w-4)(w-7)} \\
 &= \frac{w^2 - 4w - 3w + 21}{(w-4)(w-7)} \\
 &= \frac{w^2 - 7w + 21}{(w-4)(w-7)}
 \end{aligned}$$

Reescribir cada fracción como una fracción equivalente con el mcd.

Propiedad distributiva.

Escribir como una sola fracción.

Eliminar paréntesis en el numerador.

Reducir términos semejantes en el numerador. ✨

**EJEMPLO 5** Reste  $\frac{x+2}{x-4} - \frac{x+3}{x+4}$ .

**Solución** El mcd es  $(x-4)(x+4)$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{x+2}{x-4} - \frac{x+3}{x+4} &= \frac{x+4}{x+4} \cdot \frac{x+2}{x-4} - \frac{x+3}{x+4} \cdot \frac{x-4}{x-4} \\
 &= \frac{(x+4)(x+2)}{(x+4)(x-4)} - \frac{(x+3)(x-4)}{(x+4)(x-4)}
 \end{aligned}$$

Reescribir cada fracción como una fracción equivalente con el mcd.

Utilice el método PIES para multiplicar cada numerador.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^2 + 6x + 8}{(x+4)(x-4)} - \frac{x^2 - x - 12}{(x+4)(x-4)} \\
 &= \frac{(x^2 + 6x + 8) - (x^2 - x - 12)}{(x+4)(x-4)} \\
 &= \frac{x^2 + 6x + 8 - x^2 + x + 12}{(x+4)(x-4)} \\
 &= \frac{7x + 20}{(x+4)(x-4)}
 \end{aligned}$$

Escribir como una sola fracción.

Eliminar paréntesis en el numerador.

Reducir términos semejantes en el numerador. ✨

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 37**

Considere el problema

$$\frac{6}{x-2} + \frac{x+3}{2-x}$$

¿Cómo sumamos estas expresiones racionales? Podríamos escribir cada fracción con el denominador  $(x-2)(2-x)$ . Sin embargo, hay una forma más sencilla. Estudie la siguiente Sugerencia.

### SUGERENCIA

Cuando sumamos o restamos fracciones cuyos denominadores son opuestos (y por tanto sólo difieren en signos), multiplique el numerador y el denominador de *cualquiera* de las fracciones por  $-1$ . De esta forma, ambas fracciones tendrán el mismo denominador.

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{a-b} + \frac{y}{b-a} &= \frac{x}{a-b} + \frac{y}{b-a} \cdot \frac{-1}{-1} \\
 &= \frac{x}{a-b} + \frac{-y}{a-b} \\
 &= \frac{x-y}{a-b}
 \end{aligned}$$

**EJEMPLO 6** Sume  $\frac{6}{x-2} + \frac{x+3}{2-x}$ .

**Solución** Como los denominadores sólo difieren en signo, podemos multiplicar por  $-1$  el numerador y el denominador de cualquiera de las fracciones. Aquí multiplicaremos el numerador y el denominador de la segunda fracción por  $-1$  para obtener el denominador común  $x-2$ .

$$\begin{aligned} \frac{6}{x-2} + \frac{x+3}{2-x} &= \frac{6}{x-2} + \frac{x+3}{2-x} \cdot \frac{-1}{-1} && \text{Multiplicar por } -1 \text{ el} \\ & && \text{numerador y el} \\ & && \text{denominador.} \\ &= \frac{6}{x-2} + \frac{(-x-3)}{x-2} \\ &= \frac{6 + (-x-3)}{x-2} && \text{Escribir como una} \\ & && \text{sola fracción.} \\ &= \frac{6-x-3}{x-2} && \text{Eliminar paréntesis} \\ & && \text{en el numerador.} \\ &= \frac{-x+3}{x-2} && \text{Reducir términos} \\ & && \text{semejantes en el} \\ & && \text{numerador.} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 31

Resolvamos otro ejemplo en donde los denominadores sólo difieren en el signo.

**EJEMPLO 7** Reste  $\frac{a-5}{3a-4} - \frac{2a-5}{4-3a}$ .

**Solución** Los denominadores de las dos fracciones sólo difieren en el signo. Resolveremos este problema de una manera análoga a como resolvimos el ejemplo 6. Multiplicaremos por  $-1$  el numerador y el denominador de la segunda fracción para obtener el denominador común  $3a-4$ .

$$\begin{aligned} \frac{a-5}{3a-4} - \frac{2a-5}{4-3a} &= \frac{a-5}{3a-4} - \frac{2a-5}{4-3a} \cdot \frac{-1}{-1} && \text{Multiplicar el numera-} \\ & && \text{dor y el denominador} \\ & && \text{por } -1. \\ &= \frac{a-5}{3a-4} - \frac{(-2a+5)}{3a-4} \\ &= \frac{(a-5) - (-2a+5)}{3a-4} && \text{Escribir como una} \\ & && \text{sola fracción.} \\ &= \frac{a-5+2a-5}{3a-4} && \text{Eliminar los paréntesis} \\ & && \text{en el numerador.} \\ &= \frac{3a-10}{3a-4} && \text{Reducir términos} \\ & && \text{semejantes en el} \\ & && \text{numerador.} \end{aligned}$$

**EJEMPLO 8** Sume  $\frac{3}{x^2+5x+6} + \frac{1}{3x^2+8x-3}$ .

**Solución**  $\frac{3}{x^2+5x+6} + \frac{1}{3x^2+8x-3} = \frac{3}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(3x-1)(x+3)}$

El mcd es  $(x+2)(x+3)(3x-1)$ .

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3x-1}{3x-1} \cdot \frac{3}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(3x-1)(x+3)} \cdot \frac{x+2}{x+2} \\
 &= \frac{9x-3}{(3x-1)(x+2)(x+3)} + \frac{x+2}{(3x-1)(x+2)(x+3)} \\
 &= \frac{(9x-3) + (x+2)}{(3x-1)(x+2)(x+3)} \\
 &= \frac{9x-3+x+2}{(3x-1)(x+2)(x+3)} \\
 &= \frac{10x-1}{(3x-1)(x+2)(x+3)}
 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 55



**EJEMPLO 9** Reste  $\frac{5}{x^2-5x} - \frac{x}{5x-25}$ .

**Solución**  $\frac{5}{x^2-5x} - \frac{x}{5x-25} = \frac{5}{x(x-5)} - \frac{x}{5(x-5)}$

El mcd es  $5x(x-5)$ .

$$\begin{aligned}
 &= \frac{5}{5} \cdot \frac{5}{x(x-5)} - \frac{x}{5(x-5)} \cdot \frac{x}{x} \\
 &= \frac{25}{5x(x-5)} - \frac{x^2}{5x(x-5)} \\
 &= \frac{25-x^2}{5x(x-5)} \\
 &= \frac{(5-x)(5+x)}{5x(x-5)} && \text{Factorizar el numerador.} \\
 &= \frac{-1(x-5)(x+5)}{5x(x-5)} && 5-x = -1(x-5) \\
 &= \frac{-1(\cancel{x-5})(x+5)}{5x(\cancel{x-5})} && \text{Simplificar.} \\
 &= \frac{-1(x+5)}{5x} \quad \text{o bien} \quad -\frac{x+5}{5x}
 \end{aligned}$$



### CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Un error común en un problema de suma o resta es sumar o restar los numeradores y los denominadores. Aquí está un ejemplo de ello.

CORRECTO	INCORRECTO
$  \begin{aligned}  \frac{1}{x} + \frac{x}{1} &= \frac{1}{x} + \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{x} \\  &= \frac{1}{x} + \frac{x^2}{x} \\  &= \frac{1+x^2}{x} \quad \text{o bien} \quad \frac{x^2+1}{x}  \end{aligned}  $	<del> <math display="block">  \begin{aligned}  \frac{1}{x} + \frac{x}{1} &amp;= \frac{1+x}{x+1} \\  \frac{1}{x} - \frac{x}{1} &amp;= \frac{1-x}{x-1}  \end{aligned}  </math> </del>

(continúa en la página siguiente)

Recuerde que para sumar o restar fracciones primero debe tener un denominador común. Después sume o reste los numeradores conservando el denominador común.

Otro error común es tratar un problema de suma o resta como un problema de multiplicación. Puede dividir entre los factores comunes cuando se *multipliquen* fracciones, no cuando se sumen o resten.

CORRECTO

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{1} = \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{x}}{1}$$

$$= 1 \cdot 1 = 1$$

INCORRECTO

~~$$\frac{1}{x} + \frac{x}{1} = \frac{1}{\cancel{x}} + \frac{\cancel{x}}{1}$$

$$= 1 + 1 = 2$$~~

## Conjunto de ejercicios 6.4

### Ejercicios conceptuales

1. Cuando suma o resta fracciones con denominadores no comunes, ¿cómo puede determinar por cuál factor debe multiplicar cada denominador para obtener el mcd?
2. Cuando multiplica tanto el numerador como el denominador de una fracción por los factores necesarios para obtener el mcd, ¿por qué no cambia el valor de la fracción?
3. a) Explique con sus propias palabras un procedimiento paso a paso para sumar o restar dos expresiones racionales que tienen denominadores diferentes.  
b) Utilice el procedimiento descrito en la parte a), para sumar
 
$$\frac{x}{x^2 - x - 6} + \frac{3}{x^2 - 4}$$
4. Explique cómo sumar o restar fracciones cuyos denominadores son opuestos. Proporcione un ejemplo.
5. Considere  $\frac{y}{4z} + \frac{5}{6z^2}$ 
  - a) ¿Cuál es el mcd?
  - b) Realice la operación que se indica.
  - c) Si al sumar, por error utiliza  $24z^2$  en lugar del mcd, ¿aun así podría obtener la respuesta correcta? Explique.
6. ¿Utilizaría el mcd para realizar las operaciones siguientes? Explique.
  - a)  $\frac{3}{x+3} - \frac{4}{x} + \frac{5}{3}$
  - b)  $\frac{1}{x+2} \cdot \frac{5}{x}$
  - c)  $x + \frac{2}{3}$
  - d)  $\frac{5}{x^2 - 9} \div \frac{2}{x - 3}$

### Práctica de habilidades

Sume o reste.

7.  $\frac{1}{4x} + \frac{3}{x}$

8.  $\frac{1}{4x} + \frac{1}{x}$

9.  $\frac{5}{x^2} + \frac{3}{2x}$

10.  $2 - \frac{1}{x^2}$

11.  $3 + \frac{5}{x}$

12.  $\frac{5}{6y} + \frac{3}{5y^2}$

13.  $\frac{2}{x^2} + \frac{3}{5x}$

14.  $\frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}$

15.  $\frac{7}{4x^2y} + \frac{3}{5xy^2}$

16.  $\frac{5}{12x^4y} - \frac{1}{5x^2y^3}$

17.  $3y + \frac{x}{y}$

18.  $x + \frac{x}{y}$

19.  $\frac{3a-1}{2a} + \frac{2}{3a}$

20.  $\frac{3}{n} + 5$

21.  $\frac{4x}{y} + \frac{2y}{xy}$

22.  $\frac{3}{5p} - \frac{5}{2p^2}$

23.  $\frac{4}{b} - \frac{4}{5a^2}$

24.  $\frac{x-3}{x} - \frac{1}{4x}$

25.  $\frac{4}{x} + \frac{7}{x-3}$

26.  $6 - \frac{3}{x-3}$

27.  $\frac{9}{p+3} + \frac{2}{p}$

28.  $\frac{a}{a+b} + \frac{a-b}{a}$

29.  $\frac{5}{6d} - \frac{d}{3d+5}$

$$30. \frac{2}{x-3} - \frac{4}{x-1}$$

$$33. \frac{9}{x+7} - \frac{5}{-x-7}$$

$$36. \frac{4}{y-1} + \frac{3}{y+1}$$

$$39. \frac{5}{6n+3} - \frac{4}{n}$$

$$42. \frac{5k}{4k-8} - \frac{k}{k+2}$$

$$45. \frac{x+2}{x^2-4} - \frac{2}{x+2}$$

$$47. \frac{3r+2}{r^2-10r+24} - \frac{2}{r-6}$$

$$49. \frac{x^2}{x^2+2x-8} - \frac{x-4}{x+4}$$

$$51. \frac{x-3}{x^2+10x+25} + \frac{x-3}{x+5}$$

$$53. \frac{5}{a^2-9a+8} - \frac{3}{a^2-6a-16}$$

$$55. \frac{2}{x^2+6x+9} + \frac{3}{x^2+x-6}$$

$$57. \frac{x}{2x^2+7x+3} - \frac{3}{3x^2+7x-6}$$

$$59. \frac{x}{4x^2+11x+6} - \frac{2}{8x^2+2x-3}$$

$$61. \frac{3w+12}{w^2+w-12} - \frac{2}{w-3}$$

$$63. \frac{3r}{2r^2-10r+12} + \frac{3}{r-2}$$

$$31. \frac{4}{p-3} + \frac{2}{3-p}$$

$$34. \frac{6}{7x-1} - \frac{5}{1-7x}$$

$$37. \frac{x+5}{x-5} - \frac{x-5}{x+5}$$

$$40. \frac{x}{4x-4} - \frac{1}{3x}$$

$$43. \frac{z}{z^2-16} + \frac{4}{z+4}$$

$$32. \frac{3}{n-5} - \frac{1}{5-n}$$

$$35. \frac{6}{a-2} + \frac{a}{2a-4}$$

$$38. \frac{x+7}{x+3} - \frac{x-3}{x+7}$$

$$41. \frac{3}{2w+10} + \frac{5}{w+2}$$

$$44. \frac{5}{(x+4)^2} + \frac{2}{x+4}$$

$$46. \frac{3}{(x-2)(x+3)} + \frac{5}{(x+2)(x+3)}$$

$$48. \frac{x+3}{x^2-3x-10} - \frac{2}{x-5}$$

$$50. \frac{x+1}{x^2-4x+4} - \frac{x+1}{x-2}$$

$$52. \frac{x}{x^2-xy} - \frac{y}{xy-x^2}$$

$$54. \frac{3}{a^2+2a-15} - \frac{1}{a^2-9}$$

$$56. \frac{x}{2x^2+7x-4} + \frac{2}{x^2-x-20}$$

$$58. \frac{x}{6x^2+7x+2} + \frac{5}{2x^2-3x-2}$$

$$60. \frac{x}{5x^2-9x-2} - \frac{2}{3x^2-7x+2}$$

$$62. \frac{5x+10}{x^2-5x-14} - \frac{4}{x-7}$$

$$64. \frac{6m}{3m^2-24m+48} - \frac{2}{m-4}$$

## Solución de problemas

¿Para qué valor(es) de  $x$  está definida cada expresión?

$$65. \frac{2}{x} + 6$$

$$67. \frac{5}{x-4} + \frac{7}{x+6}$$

$$66. \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x}$$

$$68. \frac{4}{x^2-9} - \frac{1}{x+3}$$

Sume o reste. Trate cada símbolo desconocido como si fuesen las variables.

$$69. \frac{3}{\Delta-2} - \frac{1}{2-\Delta}$$

$$70. \frac{\Delta}{2\Delta^2+7\Delta-4} + \frac{2}{\Delta^2-\Delta-20}$$



## Problemas de reto

¿Bajo qué condiciones está definida cada expresión? Explique sus respuestas.

$$71. \frac{5}{a+b} + \frac{3}{a}$$

$$72. \frac{x+2}{x+5y} - \frac{y-3}{2x}$$

Realice cada operación que se indica.

$$73. \frac{x}{x^2-9} + \frac{3x}{x+3} + \frac{3x^2-8x}{9-x^2}$$

$$74. \frac{5x}{x^2+x-6} + \frac{x}{x+3} - \frac{2}{x-2}$$

$$75. \frac{x+6}{4-x^2} - \frac{x+3}{x+2} + \frac{x-3}{2-x}$$

$$76. \frac{3x-1}{x+2} + \frac{x}{x-3} - \frac{4}{2x+3}$$

$$77. \frac{2}{x^2-x-6} + \frac{3}{x^2-2x-3} + \frac{1}{x^2+3x+2}$$

$$78. \frac{3x}{x^2-4} + \frac{4}{x^3+8}$$



## Actividad en grupo

En grupo, analicen y respondan el ejercicio 79.

79. a) Como grupo, determinen el mcd de

$$\frac{x+3y}{x^2+3xy+2y^2} + \frac{y-x}{2x^2+3xy+y^2}$$

- b) Como grupo, realicen la operación que se indica, pero no simplifiquen su respuesta.  
 c) Como grupo, simplifiquen su respuesta.  
 d) Miembro 1 del grupo: sustituya 2 por  $x$  y 1 por  $y$  en la fracción de la izquierda en la parte a) y evalúe.  
 e) Miembro 2 del grupo: sustituya 2 por  $x$  y 1 por  $y$  en la fracción de la derecha en la parte a) y evalúe.

- f) Miembro 3 del grupo: sume las fracciones numéricas que se encontraron en las partes d) y e).

- g) En forma individual, sustituya 2 por  $x$  y 1 por  $y$  en las expresiones obtenidas en la parte b) y evalúe.

- h) De forma individual, sustituya 2 por  $x$  y 1 por  $y$  en la expresión que obtuvo en la parte c), evalúe y compare sus respuestas.

- i) En grupo, analicen lo que descubrieron con base en esta actividad.

- j) ¿Cree que sus resultados habrían sido similares para cualesquiera números sustituidos por  $x$  y  $y$  (para los que el denominador no es 0)? ¿Por qué?

## Ejercicios de repaso acumulativo

- [2.6] 80. **White Pass Railroad** es una estrecha vía que atraviesa lentamente las montañas de Alaska. Si el tren viaja a 22 millas en 0.8 horas, ¿cuánto tardará en recorrer 42 millas? Suponga que el tren viaja con la misma rapidez durante todo el viaje.

- [2.7] 81. Resuelva la desigualdad  $3(x-2) + 2 < 4(x+1)$  y grafique la solución en una recta numérica.

- [4.6] 82. Divida  $(8x^2 + 6x - 13) \div (2x + 3)$ .

- [6.2] 83. Multiplique  $\frac{x^2 + xy - 6y^2}{x^2 - xy - 2y^2} \cdot \frac{y^2 - x^2}{x^2 + 2xy - 3y^2}$ .

## 6.5 FRACCIONES COMPLEJAS



- 1 Simplificar fracciones complejas por medio de reducción de términos.
- 2 Simplificar fracciones complejas, multiplicando primero para eliminar fracciones.

## 1 Simplificar fracciones complejas por medio de reducción de términos

Una **fracción compleja** es aquella que tiene una fracción en su numerador o en su denominador, o en ambos.

## Ejemplos de fracciones complejas

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{x+1}{2x}} \quad \frac{\frac{x}{y}}{x+1} \quad \frac{\frac{a+b}{a}}{\frac{a-b}{b}}$$

$$\text{Numerador de la fracción compleja} \left\{ \frac{a+b}{a} \right.$$

$$\text{Denominador de la fracción compleja} \left\{ \frac{a+b}{a} \right.$$

← Línea principal de la fracción.

La expresión sobre la línea principal de la fracción es el numerador, y la que está debajo es el denominador de la fracción compleja.

Existen dos métodos para simplificar fracciones complejas. El primero refuerza muchos de los conceptos utilizados en este capítulo, ya que en ocasiones hay que sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones más simples cuando simplificamos la fracción compleja. Muchos estudiantes prefieren utilizar el segundo método, ya que la respuesta puede obtenerse de manera más rápida. Daremos dos ejemplos utilizando el primer método y luego resolveremos tres ejemplos con el segundo método.

## Método 1—Para simplificar una fracción compleja reduciendo términos

1. Sume o reste las fracciones en el numerador y en el denominador de la fracción compleja para obtener fracciones sencillas, tanto en el numerador como en el denominador.
2. Obtenga el inverso del denominador de la fracción compleja y multiplíquelo por el numerador.
3. Si es posible, simplifique posteriormente.

**EJEMPLO 1** Simplifique  $\frac{\frac{ab^2}{c^3}}{\frac{a}{bc^2}}$ .

**Solución** Como tanto el numerador como el denominador ya son fracciones sencillas, omitimos el paso 1 e iniciamos con el paso 2. Cuando obtenemos el inverso del denominador de la fracción compleja y lo multiplicamos por el numerador, obtenemos lo siguiente.

$$\frac{\frac{ab^2}{c^3}}{\frac{a}{bc^2}} = \frac{ab^2}{c^3} \cdot \frac{bc^2}{a} = \frac{b^3}{c}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 11

Por tanto, la expresión se simplifica a  $\frac{b^3}{c}$ .



## EJEMPLO 2

Simplifique  $\frac{a + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{a}}$ .

### Solución

Expresar tanto el numerador como el denominador de la fracción compleja como fracciones sencillas. El mcd del numerador es  $x$  y el mcd del denominador es  $a$ .

$$\frac{a + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{a}} = \frac{\frac{x}{x} \cdot a + \frac{1}{x}}{\frac{a}{a} \cdot x + \frac{1}{a}} = \frac{\frac{ax}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{ax}{a} + \frac{1}{a}} = \frac{\frac{ax + 1}{x}}{\frac{ax + 1}{a}}$$

Ahora calcule el inverso del denominador y multiplique el numerador por él.

$$= \frac{ax + 1}{x} \cdot \frac{a}{ax + 1} = \frac{a}{x}$$



En el ejemplo 4 de la siguiente página volveremos a resolver el ejemplo 2. Sin embargo, se hará por medio del método 2. La mayoría de los estudiantes coincidirán en que el método 2 es más sencillo de usar en problemas de este tipo, en donde el numerador o el denominador consisten en una suma o diferencia de términos. Aquí ilustramos el ejemplo 2 para mostrarle que el método 1 funciona para problemas de este tipo, y le proporcionamos más práctica con el método 1.

## 2 Simplificar fracciones complejas, multiplicando primero para eliminar fracciones

Aquí está el segundo método para simplificar fracciones complejas.

### Método 2—Para simplificar una fracción compleja multiplicando primero

1. Determine el mínimo común denominador de *todos* los denominadores que aparecen en la fracción compleja.
2. Multiplique el numerador y el denominador de la fracción compleja por el mcd que se determinó en el paso 1.
3. Simplifique cuando sea posible.

## EJEMPLO 3

Simplifique  $\frac{\frac{1}{3} + \frac{4}{5}}{\frac{4}{5} - \frac{1}{3}}$ .

### Solución

Los denominadores en la fracción compleja son 3 y 5. El mcd de 3 y 5 es 15. Así que 15 es el mcd de la fracción compleja. Multiplique el numerador y el denominador de la fracción compleja por 15.

$$\frac{\frac{1}{3} + \frac{4}{5}}{\frac{4}{5} - \frac{1}{3}} = \frac{15 \left( \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \right)}{15 \left( \frac{4}{5} - \frac{1}{3} \right)} = \frac{15 \left( \frac{1}{3} \right) + 15 \left( \frac{4}{5} \right)}{15 \left( \frac{4}{5} \right) - 15 \left( \frac{1}{3} \right)}$$

Ahora simplifique.

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 9

$$= \frac{5 + 12}{12 - 5} = \frac{17}{7}$$



Ahora volveremos a resolver el ejemplo 2, por medio del método 2.

**EJEMPLO 4** Simplifique  $\frac{a + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{a}}$ .

**Solución** Los denominadores en la fracción compleja son  $x$  y  $a$ . Por tanto, el mcd de la fracción compleja es  $ax$ . Multiplique tanto el numerador como el denominador de la fracción compleja por  $ax$ .

$$\begin{aligned} \frac{a + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{a}} &= \frac{ax \left( a + \frac{1}{x} \right)}{ax \left( x + \frac{1}{a} \right)} = \frac{a^2x + a}{ax^2 + x} \\ &= \frac{a(ax + 1)}{x(ax + 1)} = \frac{a}{x} \end{aligned}$$



Observe que las respuestas a los ejemplos 2 y 4 son iguales.

**EJEMPLO 5** Simplifique  $\frac{x}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$ .

**Solución** Los denominadores en la fracción compleja son  $x$  y  $y$ . Por tanto, el mcd de la fracción compleja es  $xy$ . Multiplique el numerador y el denominador de la fracción compleja por  $xy$ .

$$\begin{aligned} \frac{x}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} &= \frac{xy}{xy} \cdot \frac{x}{\left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)} \\ &= \frac{x^2y}{xy \left( \frac{1}{x} \right) + xy \left( \frac{1}{y} \right)} \\ &= \frac{x^2y}{y + x} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 17



Cuando se le pida simplificar una fracción compleja, puede utilizar cualquiera de los métodos, a menos que su profesor le pida utilizar un método específico. Lea la siguiente Sugerencia.

**SUGERENCIA**

Hemos presentado dos métodos para la simplificación de fracciones complejas. ¿Cuál método debe utilizar? Aunque se puede utilizar cualquiera de ellos, la mayoría de los estudiantes prefieren usar el método 1 cuando el numerador y el denominador constan de un solo término, como en el ejemplo 1. Cuando la fracción compleja tiene una suma o diferencia de expresiones en el numerador o el denominador, como en los ejemplos 2, 3, 4 o 5, la mayoría prefieren utilizar el método 2.

**Conjunto de ejercicios 6.5****Ejercicios conceptuales**

1. ¿Qué es una fracción compleja?
2. ¿Cuál es el numerador y cuál el denominador de cada fracción compleja?
- a)  $\frac{5}{x^2 + 5x + 6}$       b)  $\frac{\frac{5}{3}}{x^2 + 5x + 6}$
3. ¿Cuál es el numerador y cuál el denominador de cada fracción compleja?
- a)  $\frac{\frac{x+3}{4}}{x^2 + 5x + 6}$       b)  $\frac{\frac{1}{2y} + x}{\frac{3}{y} + x}$
4. a) Seleccione el método que prefiera para simplificar fracciones complejas. Luego escriba con sus propias palabras un procedimiento paso a paso para la simplificación de fracciones complejas utilizando ese método.
- b) Por medio del procedimiento que escribió en la parte a), simplifique la fracción compleja siguiente.
- $$\frac{\frac{2}{x} - \frac{3}{y}}{x + \frac{1}{y}}$$

**Práctica de habilidades**

*Simplifique.*

5.  $\frac{4 + \frac{2}{3}}{2 + \frac{1}{3}}$       6.  $\frac{3 + \frac{4}{5}}{1 - \frac{9}{16}}$       7.  $\frac{2 + \frac{3}{8}}{1 + \frac{1}{3}}$       8.  $\frac{\frac{1}{4} + \frac{5}{6}}{\frac{2}{3} + \frac{3}{5}}$
9.  $\frac{\frac{2}{7} - \frac{1}{4}}{6 - \frac{2}{3}}$       10.  $\frac{1 - \frac{x}{y}}{x}$       11.  $\frac{\frac{xy^2}{9}}{\frac{3}{x^2}}$       12.  $\frac{\frac{12a}{b^3}}{\frac{b^2}{4}}$
13.  $\frac{\frac{6a^2b}{5}}{\frac{9ac^2}{b^2}}$       14.  $\frac{\frac{36x^4}{5y^4z^5}}{\frac{9xy^2}{15z^5}}$       15.  $\frac{a - \frac{a}{b}}{1 + a}$       16.  $\frac{a + \frac{1}{b}}{\frac{a}{b}}$

17. 
$$\frac{\frac{9}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 + \frac{1}{x}}$$

18. 
$$\frac{\frac{3}{a} + \frac{1}{2a}}{a + \frac{a}{2}}$$

19. 
$$\frac{5 - \frac{1}{x}}{4 - \frac{1}{x}}$$

20. 
$$\frac{\frac{x}{x-y}}{\frac{x^2}{y}}$$

21. 
$$\frac{\frac{m}{n} - \frac{n}{m}}{\frac{m+n}{n}}$$

22. 
$$\frac{1}{\frac{1}{x} + y}$$

23. 
$$\frac{\frac{a^2}{b} - b}{\frac{b^2}{a} - a}$$

24. 
$$\frac{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x}}{3 + \frac{1}{x^2}}$$

25. 
$$\frac{5 - \frac{a}{b}}{\frac{a}{b} - 5}$$

26. 
$$\frac{\frac{x}{y} - 2}{\frac{-x}{y} + 2}$$

27. 
$$\frac{\frac{a^2 - b^2}{a}}{\frac{a+b}{a^3}}$$

28. 
$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{ab}$$

29. 
$$\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{ab}}$$

30. 
$$\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

31. 
$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{1}{a}}{\frac{b}{a} + \frac{1}{a}}$$

32. 
$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a}}$$

33. 
$$\frac{\frac{1}{xy}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}$$

34. 
$$\frac{\frac{4}{x^2} + \frac{4}{x}}{\frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}$$

35. 
$$\frac{\frac{3}{a} + \frac{3}{a^2}}{\frac{3}{b} + \frac{3}{b^2}}$$

36. 
$$\frac{\frac{x}{y} - \frac{1}{x}}{\frac{y}{x} + \frac{1}{y}}$$

## Solución de problemas

Para las fracciones complejas en los ejercicios 37 al 40,

- Determine cuál de los dos métodos estudiados en esta sección utilizaría para simplificar la fracción. Explique por qué.
- Simplifique por medio del método que seleccionó en la parte a).
- Simplifique por medio del método que no seleccionó en la parte a). Si sus respuestas a las partes b) y c) no son las mismas, explique por qué.

37. 
$$\frac{5 + \frac{3}{5}}{\frac{1}{8} - 4}$$

38. 
$$\frac{\frac{x+y}{x^3} - \frac{1}{x}}{\frac{x-y}{x^5} + 5}$$

39. 
$$\frac{\frac{x-y}{x+y} + \frac{3}{x+y}}{2 - \frac{7}{x+y}}$$

40. 
$$\frac{\frac{25}{x-y} + \frac{4}{x+y}}{\frac{5}{x-y} - \frac{3}{x+y}}$$

En los ejercicios 41 y 42, **a)** escriba la fracción compleja, y **b)** simplifíquela.

- El numerador de la fracción compleja consta de un término: 5 se divide entre  $12x$ . El denominador de la fracción compleja consta de dos términos: 4 dividido entre  $3x$  que se resta de 8 dividido entre  $x^2$ .
- El numerador de la fracción compleja consta de dos términos: 3 dividido entre  $2x$  que se resta de 6 dividido entre  $x$ . El denominador de la fracción compleja consta de dos términos: la suma de  $x$  y la cantidad 1 dividida entre  $x$ .

Simplifique. (Sugerencia: consulte la sección 4.2, que analiza los exponentes negativos.)

43. 
$$\frac{x^{-1} + y^{-1}}{2}$$

44. 
$$\frac{x^{-1} + y^{-1}}{x^{-1}}$$

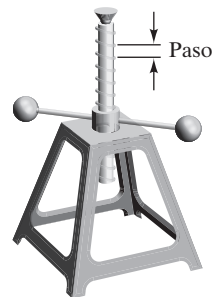
45. 
$$\frac{x^{-1} + y^{-1}}{x^{-1}y^{-1}}$$

46. 
$$\frac{x^{-2} - y^{-2}}{y^{-1} - x^{-1}}$$

## Problemas de reto

47. La eficiencia de un gato mecánico,  $E$ , se expresa por medio de la fórmula  $E = \frac{\frac{1}{2}h}{h + \frac{1}{2}}$ , donde  $h$  se determina por el paso de la rosca del gato. Determine la eficiencia de un gato, si  $h$  es

a)  $\frac{2}{3}$                       b)  $\frac{4}{5}$



Simplifique.

48. 
$$\frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{x}{y} + y}$$

49. 
$$\frac{\frac{a}{b} + b - \frac{1}{a}}{\frac{a}{b^2} - \frac{b}{a} + \frac{1}{a^2}}$$

50. 
$$\frac{x}{1 + \frac{x}{1 + x}}$$

## Ejercicios de repaso acumulativo

[2.5] 51. Resuelva la ecuación  $2x - 8(5 - x) = 9x - 3(x + 2)$ .

[4.4] 52. ¿Qué es un polinomio?

[5.3] 53. Factorice  $x^2 - 13x + 42$ .

[6.4] 54. Reste  $\frac{x}{3x^2 + 17x - 6} - \frac{2}{x^2 + 3x - 18}$ .

## 6.6 SOLUCIÓN DE ECUACIONES RACIONALES



- 1 Solucionar ecuaciones racionales con denominadores enteros.
- 2 Solucionar ecuaciones racionales en donde una variable aparece en el denominador.

### 1 Solucionar ecuaciones racionales con denominadores enteros

En las secciones 6.1 a 6.5 nos enfocamos a cómo sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones racionales; ahora estamos preparados para resolverlas. Una **ecuación racional** es aquella que tiene una o más expresiones racionales (o fraccionales). Una expresión racional puede ser una que tenga coeficientes racionales, como  $\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}x = 8$  o bien  $\frac{x}{2} + \frac{3x}{5} = 8$ , o una que tenga términos racionales con una variable en el denominador, como  $\frac{3}{x-2} = 5$ . En las secciones 4.4 y 4.5 resolvimos ecuaciones lineales con coeficientes racionales.

En esta sección haremos énfasis en la solución de ecuaciones racionales en donde aparece una variable en un denominador. El siguiente procedimiento que utilizaremos, en esta sección, para resolver ecuaciones racionales es muy similar al procedimiento que utilizamos en el capítulo 2.

### Para resolver ecuaciones racionales

1. Determine el mínimo común denominador (mcd) de todas las fracciones en la ecuación.
2. Multiplique **ambos** lados de la ecuación por el mcd. **Esto tendrá como resultado que todos los términos en la ecuación sean multiplicados por el mcd.**
3. Elimine todos los paréntesis, si los hay, y reduzca los términos semejantes en cada lado de la ecuación.
4. Resuelva la ecuación por medio de las propiedades analizadas en los capítulos anteriores.
5. Compruebe su solución en la ecuación *original*.

El propósito de multiplicar ambos lados de la ecuación por el mcd (paso 2) es eliminar todas las fracciones de la ecuación. Después de que ambos lados de la ecuación se multiplican por el mcd, la ecuación resultante no debe tener fracciones. Omitiremos algunas de las comprobaciones para ahorrar espacio.

Antes de resolver ecuaciones racionales en donde una variable aparece en un denominador, revisaremos cómo resolver ecuaciones con coeficientes racionales. Los ejemplos 1 y 2 ilustran el procedimiento.

**EJEMPLO 1** Despeje  $t$  de  $\frac{t}{4} - \frac{t}{5} = 1$ .

**Solución** El mcd de 4 y 5 es 20. Multiplique ambos lados de la ecuación por 20.

$$\begin{aligned}\frac{t}{4} - \frac{t}{5} &= 1 \\ 20\left(\frac{t}{4} - \frac{t}{5}\right) &= 20 \cdot 1 \quad \text{Multiplicar ambos lados por el mcd, 20.} \\ 20\left(\frac{t}{4}\right) - 20\left(\frac{t}{5}\right) &= 20 \quad \text{Propiedad distributiva.} \\ 5t - 4t &= 20 \\ t &= 20\end{aligned}$$

**Comprobación**

$$\begin{aligned}\frac{t}{4} - \frac{t}{5} &= 1 \\ \frac{20}{4} - \frac{20}{5} &\stackrel{?}{=} 1 \\ 5 - 4 &\stackrel{?}{=} 1 \\ 1 &= 1 \quad \text{Verdadero.}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 13



**EJEMPLO 2** Resuelva  $\frac{x-5}{30} = \frac{4}{5} - \frac{x-1}{10}$ .


**Solución** El mínimo común denominador es 30. Multiplique ambos lados de la ecuación por 30.

$$\begin{aligned}\frac{x-5}{30} &= \frac{4}{5} - \frac{x-1}{10} \\ 30\left(\frac{x-5}{30}\right) &= 30\left(\frac{4}{5} - \frac{x-1}{10}\right) \quad \text{Multiplicar ambos lados por el mcd, 30.} \\ x-5 &= 30\left(\frac{4}{5}\right) - 30\left(\frac{x-1}{10}\right) \quad \text{Propiedad distributiva.}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 x - 5 &= 24 - 3(x - 1) \\
 x - 5 &= 24 - 3x + 3 && \text{Propiedad distributiva.} \\
 x - 5 &= -3x + 27 && \text{Reducir términos semejantes.} \\
 4x - 5 &= 27 && \text{Se sumó } 3x \text{ a ambos lados.} \\
 4x &= 32 && \text{Se sumó } 5 \text{ a ambos lados.} \\
 x &= 8 && \text{Ambos lados se dividieron entre } 4.
 \end{aligned}$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 27**

Una comprobación mostrará que la respuesta es 8. Sugerimos que compruebe esta respuesta ahora, para ganar práctica en la verificación de respuestas. 

En el ejemplo 2, la ecuación también podría haber sido escrita como

$$\frac{1}{30}(x - 5) = \frac{4}{5} - \frac{1}{10}(x - 1).$$

Para ejemplos adicionales de resolución de ecuaciones racionales con enteros en los denominadores, revise las secciones 2.4 y 2.5.

## 2 Solucionar ecuaciones racionales en donde una variable aparece en el denominador

Ahora estamos preparados para resolver ecuaciones racionales en donde una variable aparece en el denominador. Al resolver este tipo de ecuaciones *debe* comprobar su respuesta. ¡Vea la siguiente advertencia!

**Advertencia** Siempre que una variable aparezca en algún denominador de una ecuación racional, es necesario comprobar su respuesta en la ecuación original. Si la respuesta obtenida hace que algún denominador sea igual a cero, ese valor no es una solución de la ecuación. Tales valores se denominan raíces extrañas o soluciones extrañas.

**EJEMPLO 3** Resuelva la ecuación  $3 - \frac{4}{x} = \frac{5}{2}$ .

**Solución** Multiplique ambos lados de la ecuación por el mcd,  $2x$ .

$$\begin{aligned}
 2x \left( 3 - \frac{4}{x} \right) &= \left( \frac{5}{2} \right) \cdot 2x && \text{Multiplicar ambos lados por el mcd, } 2x. \\
 2x(3) - 2x \left( \frac{4}{x} \right) &= \left( \frac{5}{2} \right) \cdot 2x && \text{Propiedad distributiva.} \\
 6x - 8 &= 5x && 5x \text{ se restó de ambos lados.} \\
 x - 8 &= 0 && \text{Se sumó } 8 \text{ a ambos lados.} \\
 x &= 8
 \end{aligned}$$

**Comprobación**  $3 - \frac{4}{x} = \frac{5}{2}$

$$3 - \frac{4}{8} \stackrel{?}{=} \frac{5}{2}$$

$$3 - \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} \frac{5}{2}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{Verdadero.}$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 51**

Como 8 cumple, es la solución de la ecuación. 

**EJEMPLO 4** Resuelva la ecuación  $\frac{p-5}{p+3} = \frac{1}{5}$ .

**Solución** El mcd es  $5(p+3)$ . Multiplique ambos lados de la ecuación por el mcd.

$$\begin{aligned} 5(p+3) \cdot \frac{(p-5)}{p+3} &= \frac{1}{5} \cdot 5(p+3) \\ 5(p-5) &= 1(p+3) \\ 5p-25 &= p+3 \\ 4p-25 &= 3 \\ 4p &= 28 \\ p &= 7 \end{aligned}$$

Una comprobación mostrará que 7 es la solución. 

En la sección 2.6 ilustramos que las proporciones de la forma

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

pueden multiplicarse en forma cruzada para obtener  $a \cdot d = b \cdot c$ . El ejemplo 4 es una proporción y también puede resolverse por medio de productos cruzados, como se hace en el ejemplo 5.

**EJEMPLO 5** Utilice productos cruzados para resolver la ecuación  $\frac{6}{x+3} = \frac{5}{x-2}$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{6}{x+3} &= \frac{5}{x-2} \\ 6(x-2) &= 5(x+3) && \text{Productos cruzados.} \\ 6x-12 &= 5x+15 && \text{Propiedad distributiva.} \\ x-12 &= 15 && \text{Se restó } 5x \text{ de ambos lados.} \\ x &= 27 && \text{Se sumó } 12 \text{ a ambos lados.} \end{aligned}$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 41**

Una comprobación mostrará que 27 es la solución de la ecuación. 

Ahora examinaremos algunos ejemplos que incluyen a ecuaciones cuadráticas. Recuerde que en la sección 5.6 vimos que las ecuaciones cuadráticas tienen la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , en donde  $a \neq 0$ .

**EJEMPLO 6** Resuelva la ecuación  $x + \frac{12}{x} = -7$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} x \cdot \left(x + \frac{12}{x}\right) &= -7 \cdot x && \text{Multiplicar ambos lados por } x. \\ x(x) + x\left(\frac{12}{x}\right) &= -7x && \text{Propiedad distributiva.} \\ x^2 + 12 &= -7x \\ x^2 + 7x + 12 &= 0 && \text{Se sumó } 7x \text{ a ambos lados.} \\ (x+3)(x+4) &= 0 && \text{Factorizar.} \\ x+3 = 0 &\quad \text{o bien} \quad x+4 = 0 && \text{Propiedad del factor cero.} \\ x = -3 &\quad \quad \quad x = -4 \end{aligned}$$

Comprobación  $x = -3$

$$x + \frac{12}{x} = -7$$

$$-3 + \frac{12}{-3} \stackrel{?}{=} -7$$

$$-3 + (-4) \stackrel{?}{=} -7$$

$$-7 = -7 \quad \text{Verdadero.}$$

$x = -4$

$$x + \frac{12}{x} = -7$$

$$-4 + \frac{12}{-4} \stackrel{?}{=} -7$$

$$-4 + (-3) \stackrel{?}{=} -7$$

$$-7 = -7 \quad \text{Verdadero.}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 73

Las soluciones son  $-3$  y  $-4$ .



### EJEMPLO 7

Resuelva la ecuación  $\frac{x^2 + x}{x - 6} = \frac{42}{x - 6}$ .

#### Solución

Si intentamos resolver la ecuación por medio de productos cruzados, obtendremos una ecuación cúbica; resolveremos esta ecuación multiplicando ambos lados por el mcd,  $x - 6$ .

$$\frac{x^2 + x}{x - 6} = \frac{42}{x - 6}$$

$$\cancel{x - 6} \cdot \frac{x^2 + x}{\cancel{x - 6}} = \frac{42}{\cancel{x - 6}} \cdot \cancel{x - 6} \quad \text{Multiplicar ambos lados por el mcd, } x - 6.$$

$$x^2 + x = 42$$

$$x^2 + x - 42 = 0$$

Se restó 42 de ambos lados.

$$(x + 7)(x - 6) = 0$$

Factorizar.

$$x + 7 = 0 \quad \text{o bien} \quad x - 6 = 0$$

Propiedad del factor cero.

$$x = -7$$

$$x = 6$$

Comprobación  $x = -7$

$$\frac{x^2 + x}{x - 6} = \frac{42}{x - 6}$$

$$\frac{(-7)^2 + (-7)}{-7 - 6} \stackrel{?}{=} \frac{42}{-7 - 6}$$

$$\frac{49 - 7}{-13} \stackrel{?}{=} \frac{42}{-13}$$

$$-\frac{42}{13} = -\frac{42}{13} \quad \text{Verdadero.}$$

$x = 6$

$$\frac{x^2 + x}{x - 6} = \frac{42}{x - 6}$$

$$\frac{6^2 + 6}{6 - 6} \stackrel{?}{=} \frac{42}{6 - 6}$$

$$\frac{42}{0} = \frac{42}{0}$$

Ya que el denominador es 0, y no podemos dividir entre 0, 6 no es una solución.

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 47

Puesto que  $\frac{42}{0}$  no es un número real, 6 es una solución extraña. Por tanto, esta ecuación sólo tiene una solución,  $-7$ .



### SUGERENCIA

Recuerde, al resolver una ecuación racional en la que una variable aparezca en un denominador, debe comprobar *todas* sus respuestas para asegurarse que ninguna es una raíz extraña. Por lo regular, las raíces extrañas se pueden descubrir con rapidez. Si alguna de sus respuestas hace que algún denominador sea cero, esa respuesta es una raíz extraña y no es una solución verdadera.

Hablando en general, si ninguna de sus respuestas hace algún denominador igual a 0, y no ha cometido un error al resolver la ecuación, las respuestas que obtuvo al resolver la ecuación serán soluciones de la ecuación.

**EJEMPLO 8** Resuelva la ecuación  $\frac{5w}{w^2 - 4} + \frac{1}{w - 2} = \frac{4}{w + 2}$ .


**Solución** Primero factorice  $w^2 - 4$ .

$$\frac{5w}{(w + 2)(w - 2)} + \frac{1}{w - 2} = \frac{4}{w + 2}$$

Multiplique ambos lados de la ecuación por el mcd,  $(w + 2)(w - 2)$ .

$$\begin{aligned} (w + 2)(w - 2) \left[ \frac{5w}{(w + 2)(w - 2)} + \frac{1}{w - 2} \right] &= \frac{4}{w + 2} \cdot (w + 2)(w - 2) \\ (w + 2)(w - 2) \cdot \frac{5w}{(w + 2)(w - 2)} + (w + 2)(w - 2) \cdot \frac{1}{w - 2} &= \frac{4}{w + 2} \cdot (w + 2)(w - 2) \\ (w + 2)(w - 2) \cdot \frac{5w}{(w + 2)(w - 2)} + (w + 2)(w - 2) \cdot \frac{1}{w - 2} &= \frac{4}{w + 2} \cdot (w + 2)(w - 2) \\ 5w + (w + 2) &= 4(w - 2) \\ 6w + 2 &= 4w - 8 \\ 2w + 2 &= -8 \\ 2w &= -10 \\ w &= -5 \end{aligned}$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 65**

Una comprobación mostrará que  $-5$  es la solución de la ecuación. 

### SUGERENCIA

Algunos estudiantes confunden la suma y la resta de expresiones racionales con la resolución de ecuaciones racionales. Al sumar o restar expresiones racionales, debemos reescribir cada expresión con un denominador común. Al resolver una ecuación racional, multiplicamos ambos lados de la ecuación por el mcd para eliminar las fracciones en la ecuación. Considere los siguientes dos problemas. Observe que el de la derecha es una ecuación, ya que tiene un signo de igual. Resolveremos ambos problemas. El mcd para ambos problemas es  $x(x + 4)$ .

#### Suma de expresiones racionales

$$\frac{x + 2}{x + 4} + \frac{3}{x}$$

Reescribimos cada fracción con el mcd,  $x(x + 4)$ .

$$\begin{aligned} &= \frac{x}{x} \cdot \frac{x + 2}{x + 4} + \frac{3}{x} \cdot \frac{x + 4}{x + 4} \\ &= \frac{x(x + 2)}{x(x + 4)} + \frac{3(x + 4)}{x(x + 4)} \\ &= \frac{x^2 + 2x}{x(x + 4)} + \frac{3x + 12}{x(x + 4)} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 3x + 12}{x(x + 4)} \\ &= \frac{x^2 + 5x + 12}{x(x + 4)} \end{aligned}$$

#### Solución de ecuaciones racionales

$$\frac{x + 2}{x + 4} = \frac{3}{x}$$

Eliminamos las fracciones al multiplicar ambos lados de la ecuación por el mcd,  $x(x + 4)$ .

$$\begin{aligned} (x)(x + 4) \left( \frac{x + 2}{x + 4} \right) &= \frac{3}{x} (x)(x + 4) \\ x(x + 2) &= 3(x + 4) \\ x^2 + 2x &= 3x + 12 \\ x^2 - x - 12 &= 0 \\ (x - 4)(x + 3) &= 0 \\ x - 4 = 0 \quad \text{o bien} \quad x + 3 = 0 \\ x = 4 \quad \quad \quad x = -3 \end{aligned}$$

(continúa en la página siguiente)

Los números 4 y  $-3$  a la derecha cumplen la ecuación y, por tanto, son soluciones de la misma.

Observe que cuando sumamos o restamos expresiones racionales por lo regular finalizamos con una expresión algebraica. Al resolver una ecuación racional, la solución será un valor o valores numéricos. La ecuación de la derecha también podría haberse resuelto por medio de productos cruzados.

## Conjunto de ejercicios 6.6

### Ejercicios conceptuales

1. a) Con sus propias palabras, explique los pasos para resolver ecuaciones racionales.  
 b) Con el procedimiento que escribió en la parte a), resuelva la ecuación  $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{3x}{x^2-1}$ .
2. a) Sin resolver las ecuaciones, determine si la respuesta a las dos ecuaciones siguientes serán iguales o diferentes. Explique su respuesta.  
 $\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+2} = \frac{4x}{x^2-4}$ ,  $\frac{4x}{x^2-4} - \frac{2}{x+2} = \frac{3}{x-2}$   
 b) Determine la respuesta para las dos ecuaciones.
3. Considere los siguientes problemas.  
**Simplifique:**  $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} + \frac{1}{x-1}$       **Resuelva:**  $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = \frac{1}{x-1}$   
 a) Explique las diferencias entre los dos tipos de problemas.  
 b) Explique cómo resolvería cada problema para obtener la respuesta correcta.  
 c) Determine la respuesta correcta para cada problema.
4. Considere los siguientes problemas.  
**Simplifique:**  $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{5}{2x+7}$       **Resuelva:**  $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{5}{2x+7}$   
 a) Explique las diferencias entre los dos tipos de problemas.  
 b) Explique cómo resolvería cada problema para obtener la respuesta correcta.  
 c) Determine la respuesta correcta para cada problema.
5. ¿Bajo qué condiciones debe verificar si aparecen soluciones extrañas en las ecuaciones racionales?
6. ¿Cuál de los siguientes números, 3, 1 o 0 no puede ser una solución de la ecuación  $3 - \frac{1}{x} = 4$ ? Explique.
7. ¿Cuál de los números siguientes, 0, 3 o 2, no puede ser una solución de la ecuación  $\frac{3}{x-2} + 5x = 6$ ? Explique.
8. ¿Cuál de los números siguientes, 0,  $-5$  o 2, no puede ser una solución de la ecuación  $4x - \frac{2}{x+5} = 3$ ? Explique.

En los ejercicios 9 al 12, indique si es necesario comprobar la solución obtenida para ver si es extraña. Explique su respuesta.

9.  $\frac{4}{7} + \frac{x-2}{5} = 5$       10.  $\frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} = 6$       11.  $\frac{2}{x+4} + 3 = 6$       12.  $\frac{z}{3} + \frac{1}{z} = 6$

### Práctica de habilidades

Resuelva cada ecuación y compruebe su solución. Vea los ejemplos 1 y 2.

13.  $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 1$       14.  $\frac{t}{5} - \frac{t}{6} = 4$       15.  $\frac{r}{3} = \frac{r}{4} + \frac{1}{6}$       16.  $\frac{n}{5} = \frac{n}{6} + \frac{1}{3}$   
 17.  $\frac{z}{2} + 3 = \frac{z}{5}$       18.  $\frac{3w}{5} - 6 = w$       19.  $\frac{z}{6} + \frac{1}{3} = \frac{z}{5} - \frac{2}{3}$       20.  $\frac{m-2}{3} = \frac{4}{3} + \frac{m}{6}$   
 21.  $d + 1 = \frac{3}{2}d - 1$       22.  $\frac{q}{5} + \frac{q}{2} = \frac{21}{10}$       23.  $k + \frac{1}{6} = 2k - 4$       24.  $\frac{p}{4} + \frac{1}{2} = \frac{p}{3} - \frac{1}{4}$

$$25. \frac{n+6}{3} = \frac{2(n-8)}{4}$$

$$28. \frac{z+4}{6} = \frac{3}{2} - \frac{2z+2}{12}$$

$$31. \frac{d-3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{2d+1}{3} - \frac{32}{15}$$

$$26. \frac{3(x-6)}{5} = \frac{3(x+2)}{6}$$

$$29. \frac{-p+1}{4} + \frac{13}{20} = \frac{p}{5} - \frac{p-1}{2}$$

$$32. \frac{t+4}{5} = \frac{3}{8} + \frac{t+17}{40}$$

$$27. \frac{x-5}{15} = \frac{3}{5} - \frac{x-4}{10}$$

$$30. \frac{1}{10} - \frac{n+1}{6} = \frac{1}{5} - \frac{n+10}{15}$$

Resuelva cada ecuación y compruebe su solución. Véanse los ejemplos 3 al 8.

$$33. 2 + \frac{3}{x} = \frac{11}{4}$$

$$37. \frac{4}{n} - \frac{3}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$41. \frac{5}{a+3} = \frac{4}{a+1}$$

$$45. \frac{2x-3}{x-4} = \frac{5}{x-4}$$

$$49. \frac{n+10}{n+2} = \frac{n+4}{n-3}$$

$$53. \frac{k}{k+2} = \frac{3}{k-2}$$

$$57. x + \frac{20}{x} = -9$$

$$61. \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3} = \frac{-5}{x^2-9}$$

$$64. \frac{3x}{x^2-9} + \frac{1}{x-3} = \frac{3}{x+3}$$

$$67. \frac{y}{2y+2} + \frac{2y-16}{4y+4} = \frac{y-3}{y+1}$$

$$70. \frac{2y}{y+2} = \frac{y}{y+3} - \frac{3}{y^2+5y+6}$$

$$34. 3 - \frac{1}{x} = \frac{14}{5}$$

$$38. \frac{5}{3x} + \frac{3}{x} = 1$$

$$42. \frac{5}{x+2} = \frac{1}{x-4}$$

$$46. \frac{3}{x} + 4 = \frac{3}{x}$$

$$50. \frac{x-3}{x+1} = \frac{x-6}{x+5}$$

$$54. \frac{3a-2}{2a+2} = \frac{3}{a-1}$$

$$58. x - \frac{21}{x} = 4$$

$$62. \frac{t-1}{t-5} - \frac{3}{4} = \frac{3}{t-5}$$

$$65. \frac{3}{x-5} - \frac{4}{x+5} = \frac{11}{x^2-25}$$

$$68. \frac{3}{x+3} + \frac{5}{x+4} = \frac{12x+19}{x^2+7x+12}$$

$$71. \frac{2t}{4t+4} + \frac{t}{2t+2} = \frac{2t-3}{t+1}$$

$$35. 6 - \frac{3}{x} = \frac{9}{2}$$

$$39. \frac{x-1}{x-5} = \frac{4}{x-5}$$

$$43. \frac{4}{y-3} = \frac{6}{y+3}$$

$$47. \frac{x^2}{x-4} = \frac{16}{x-4}$$

$$51. \frac{1}{3r} = \frac{r}{8r+3}$$

$$55. \frac{3}{r} + r = \frac{19}{r}$$

$$59. \frac{3y-2}{y+1} = 4 - \frac{y+2}{y-1}$$

$$63. \frac{x}{x-3} + \frac{3}{2} = \frac{3}{x-3}$$

$$66. \frac{2n^2-15}{n^2+n-6} = \frac{n+1}{n+3} + \frac{n-3}{n-2}$$

$$69. \frac{1}{y-1} + \frac{1}{2} = \frac{2}{y^2-1}$$

$$72. \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+1} = \frac{5}{x^2-x-2}$$

$$36. 5 + \frac{3}{z} = \frac{11}{2}$$

$$40. \frac{2x+3}{x+2} = \frac{3}{2}$$

$$44. \frac{5}{-x-6} = \frac{2}{x}$$

$$48. \frac{x^2}{x+5} = \frac{25}{x+5}$$

$$52. \frac{1}{2r} = \frac{r}{r+15}$$

$$56. a + \frac{3}{a} = \frac{12}{a}$$

$$60. \frac{2b}{b+1} = 2 - \frac{5}{2b}$$

## Solución de problemas

En los ejercicios 73 al 78, determine la solución por observación. Explique cómo determinó su respuesta.

$$73. \frac{3}{x-2} = \frac{x-2}{x-2}$$

$$74. \frac{1}{2} + \frac{x}{2} = \frac{5}{2}$$

$$75. \frac{x}{x-3} + \frac{x}{x-3} = 0$$

$$76. \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$$

$$77. \frac{x-2}{3} + \frac{x-2}{3} = \frac{2x-4}{3}$$

$$78. \frac{2}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

79. **Óptica** Una fórmula que se utiliza con frecuencia en óptica es

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

en donde  $p$  representa la distancia del objeto a un espejo (o lente),  $q$  representa la distancia de la imagen al espejo (o lente) y  $f$  representa la longitud focal del espejo (o lente). Si un espejo tiene una longitud focal de 10 centímetros, ¿qué tan lejos del espejo estará la imagen cuando el objeto está a 30 centímetros del espejo?



## Problemas de reto

80. a) Con base en el material presentado en el texto, explique por qué la ecuación  $\frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{x-3}$  no puede resolverse por medio de productos cruzados.

b) Resuelva la ecuación dada en la parte a).

81. Resuelva la ecuación  $\frac{x-4}{x^2-2x} = \frac{-4}{x^2-4}$ .

82. **Resistencia eléctrica** En electrónica, la resistencia total,  $R_T$ , de resistores conectados en un circuito en paralelo está determinada mediante la fórmula

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

donde  $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$  son las resistencias de cada uno de los resistores (medidas en ohms) en el circuito.

a) Determine la resistencia total, si se conectan dos resistores en paralelo, uno de 200 ohms y otro de 300 ohms.

b) Si se conectan tres resistores idénticos para formar un circuito en paralelo, ¿cuál debe ser la resistencia de cada resistor si la resistencia total del circuito será de 300 ohms?

83. Una ecuación de la forma  $\frac{a}{x} + 1 = \frac{a}{x}$ , ¿puede tener como solución un número real, para cualquier número real  $a$ ? Explique su respuesta.



## Actividad en grupo

En grupo, analicen y respondan el ejercicio 84.

84. a) Como grupo, analicen dos métodos diferentes que pueden utilizar para resolver la ecuación  $\frac{x+3}{5} = \frac{x}{4}$ .

b) Miembro 1 del grupo: resuelva la ecuación por medio de la obtención de un denominador común.

Miembro 2 del grupo: resuelva la ecuación mediante productos cruzados.

Miembro 3 del grupo: compruebe los resultados de los miembros 1 y 2 del grupo.

c) De forma individual, determine otra ecuación tomando el recíproco de cada término de la ecuación en la parte a). Compare sus resultados. ¿Cree que el recíproco de la respuesta que encontró en la parte b) será la solución de esta ecuación? Explique.

d) De forma individual, resuelva la ecuación que se determinó en la parte c) y compruebe su respuesta. Compare su trabajo con el de los otros miembros del grupo. ¿La conclusión que hizo en la parte c) fue correcta? Explique.

e) Como grupo, resuelvan la ecuación  $\frac{1}{x} + \frac{1}{3} = \frac{2}{x}$ . Comprueben su resultado.

f) Como grupo, determinen otra ecuación tomando los recíprocos de cada término de la ecuación en la parte e). ¿Piensan que el recíproco de la respuesta que encontraron en la parte e) será la solución de esta ecuación? Expliquen.

g) De forma individual, resuelva la ecuación que determinó en la parte f) y compruebe su respuesta. Compare su trabajo con el de los otros miembros del grupo. ¿La conclusión que hizo su grupo en la parte f) fue correcta? Explique.

h) Como grupo, analicen la relación entre la solución a la ecuación  $\frac{7}{x-9} = \frac{3}{x}$  y la solución a la ecuación  $\frac{x-9}{7} = \frac{x}{3}$ . Expliquen su respuesta.

## Ejercicios de repaso acumulativo

[3.3] 85. **Planes de internet** Un servicio de internet ofrece dos planes para sus clientes. Un plan incluye 5 horas de uso y cuesta \$7.95 al mes. Cada minuto adicional a partir de las 5 horas cuesta \$0.15. El segundo plan cuesta \$19.95 al mes y proporciona acceso ilimitado a internet. ¿Cuántas horas al mes tendría que utilizar internet Jake LaRue para hacer que el segundo plan sea menos caro?



[3.4] 86. **Ángulos suplementarios** Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es  $180^\circ$ . Determine los dos ángulos suplementarios si el ángulo más pequeño es  $30^\circ$  menor que la mitad del ángulo mayor.

87. **Llenado de un jacuzzi** ¿Cuánto tardará en llenarse un jacuzzi de 600 galones, si el agua entra al jacuzzi a una velocidad de 8 galones por minuto?

[4.6] 88. Multiplique  $(3.4 \times 10^{-5})(2 \times 10^7)$ .

## 6.7 ECUACIONES RACIONALES: APLICACIONES Y SOLUCIÓN DE PROBLEMAS



- 1 Plantear y resolver aplicaciones que tienen expresiones racionales.
- 2 Plantear y resolver problemas de movimiento.
- 3 Plantear y resolver problemas de trabajo.

## 1 Plantear y resolver aplicaciones que tienen expresiones racionales

Muchas aplicaciones de álgebra incluyen expresiones racionales. Después de representar la aplicación como una ecuación, resolvemos la ecuación racional como lo hicimos en la sección 6.6.

El primer tipo de aplicación que consideraremos es un **problema geométrico**.

**EJEMPLO 1** Una alfombra nueva Mary y Larry Armstrong están interesados en la compra de una alfombra cuya área es de 60 pies cuadrados. Determine la longitud y ancho, si el ancho es 5 pies menor que  $\frac{3}{5}$  de la longitud; vea la figura 6.1.

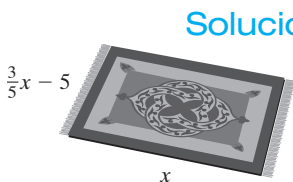


FIGURA 6.1

**Solución** Entender y traducir

Sea  $x =$  longitud

entonces  $\frac{3}{5}x - 5 =$  ancho

Área = longitud  $\cdot$  ancho

$$60 = x\left(\frac{3}{5}x - 5\right)$$

Realizar los cálculos

$$60 = \frac{3}{5}x^2 - 5x$$

$$5(60) = 5\left(\frac{3}{5}x^2 - 5x\right) \quad \text{Multiplicar ambos lados por 5.}$$

$$300 = 3x^2 - 25x \quad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$0 = 3x^2 - 25x - 300 \quad \text{Restar 300 a ambos lados.}$$

$$\text{o } 3x^2 - 25x - 300 = 0$$

$$(3x + 20)(x - 15) = 0 \quad \text{Factorizar.}$$

$$3x + 20 = 0 \quad \text{o bien } x - 15 = 0 \quad \text{Propiedad del factor cero.}$$

$$3x = -20 \quad x = 15$$

$$x = -\frac{20}{3}$$

**Comprobar y responder** Como la longitud de un rectángulo no puede ser negativa, podemos eliminar  $-\frac{20}{3}$  como una respuesta para nuestro problema.

$$\text{longitud} = x = 15 \text{ pies}$$

$$\text{ancho} = \frac{3}{5}(15) - 5 = 4 \text{ pies}$$

Comprobación

$$A = la$$

$$60 \stackrel{?}{=} 15(4)$$

$$60 = 60 \quad \text{Verdadero.}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 5

Por tanto, la longitud es 15 pies y el ancho es 4 pies.





Ahora resolveremos un problema que expresa la relación entre dos números. Problemas como éste en ocasiones se conocen como *problemas numéricos*.

**EJEMPLO 2 Recíprocos** Un número es el triple de otro, la suma de sus recíprocos es  $\frac{20}{9}$ . Determine los números.

**Solución** Entender y traducir

Sea  $x =$  primer número

entonces  $3x =$  segundo número

El recíproco del primer número es  $\frac{1}{x}$  y el recíproco del segundo número es  $\frac{1}{3x}$ . La suma de sus recíprocos es  $\frac{20}{9}$ ; por tanto:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{3x} = \frac{20}{9}$$

Realizar los cálculos

$$9x \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{3x} \right) = 9x \left( \frac{20}{9} \right) \quad \text{Multiplicar ambos lados por el mcd, } 9x.$$

$$9x \left( \frac{1}{x} \right) + 9x \left( \frac{1}{3x} \right) = 20x \quad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$9 + 3 = 20x$$

$$12 = 20x$$

$$\frac{12}{20} = x$$

$$\frac{3}{5} = x$$

**Comprobación** El primer número es  $\frac{3}{5}$ . Por tanto, el segundo número es  $3x = 3 \left( \frac{3}{5} \right) = \frac{9}{5}$ .

Ahora compruebe si la suma de los recíprocos es  $\frac{20}{9}$ . El recíproco de  $\frac{3}{5}$  es  $\frac{5}{3}$ . El recíproco de  $\frac{9}{5}$  es  $\frac{5}{9}$ . La suma de los recíprocos es

$$\frac{5}{3} + \frac{5}{9} = \frac{15}{9} + \frac{5}{9} = \frac{20}{9}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 11

**Respuesta** Como la suma de los recíprocos es  $\frac{20}{9}$ , los dos números son  $\frac{3}{5}$  y  $\frac{9}{5}$ . 

## 2 Plantear y resolver problemas de movimiento

En el capítulo 3 analizamos **problemas de movimiento**. Recuerde que

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \cdot \text{tiempo}$$

Si despejamos el tiempo de esta ecuación, obtenemos

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} \quad \text{o bien} \quad t = \frac{d}{r}$$

Esta ecuación es útil al resolver problemas de movimiento cuando se conoce el tiempo total del recorrido para dos objetos o el tiempo de recorrido entre dos puntos.

**EJEMPLO 3 Canotaje** Cindy Kilborn vive cerca del río Colorado y le gusta recorrer en canoa una sección del río en donde la corriente no es muy fuerte. Un sábado ella estaba practicando y por un amigo supo que la corriente en el río era de 2 millas por hora. Si a Cindy le tomó el mismo tiempo recorrer 10 millas a favor de la corriente que 2 millas en contra de la corriente, determine la velocidad a la que Cindy iría en la canoa en aguas tranquilas.

**Solución** Entender y traducir



Sea  $r$  = la velocidad de la canoa en aguas tranquilas  
 entonces  $r + 2$  = la velocidad de la canoa cuando se viaja con la corriente  
 y  $r - 2$  = la velocidad de la canoa cuando se viaja en contra de la corriente

Dirección	Distancia	Velocidad	Tiempo
A favor de la corriente	10	$r + 2$	$\frac{10}{r + 2}$
Contra la corriente	2	$r - 2$	$\frac{2}{r - 2}$

Como el tiempo que tarda en recorrer 10 millas a favor de la corriente es el mismo que el tiempo en recorrer 2 millas en contra de la corriente, igualamos los tiempos y resolvemos la ecuación resultante.

tiempo a favor de la corriente = tiempo en contra de la corriente

$$\frac{10}{r + 2} = \frac{2}{r - 2}$$

Realizar los cálculos

$$\begin{aligned} 10(r - 2) &= 2(r + 2) && \text{Productos cruzados.} \\ 10r - 20 &= 2r + 4 \\ 8r &= 24 \\ r &= 3 \end{aligned}$$

**Comprobar y responder** Como esta ecuación racional tiene una variable en el denominador, se debe verificar la solución. Una comprobación mostrará que 3 satisface la ecuación. Por tanto, la canoa viajaría a 3 millas por hora en aguas tranquilas.

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 15  
**EJEMPLO 4**

**Ruta de patrullaje** El oficial De Wolf conduce su bicicleta todos los sábados por la mañana en el Parque Estatal Kahana Valley en Oahu, Hawai, como parte de su trabajo de patrullaje. Durante la primera parte del recorrido él pedalea principalmente colina arriba y su velocidad promedio es de 6 millas por hora. Después de cierto punto, viaja principalmente colina abajo y promedia 9 millas por hora. Si la distancia total que él recorre es de 30 millas y el tiempo total que conduce es de 4 horas, ¿cuánto tiempo viajó a cada velocidad?

**Solución** Entender y traducir

Sea  $d$  = distancia recorrida a 6 millas por hora  
 entonces  $30 - d$  = distancia recorrida a 9 millas por hora

Dirección	Distancia	Velocidad	Tiempo
Colina arriba	$d$	6	$\frac{d}{6}$
Colina abajo	$30 - d$	9	$\frac{30 - d}{9}$



Como el tiempo total que condujo es de 4 horas, escribimos

tiempo que va colina arriba + tiempo que va colina abajo = 4 horas

$$\frac{d}{6} + \frac{30 - d}{9} = 4$$

Realizar los cálculos

$$18 \left( \frac{d}{6} + \frac{30 - d}{9} \right) = 18 \cdot 4 \quad \text{Multiplicar ambos lados por el mcd, 18.}$$

$$18 \left( \frac{d}{6} \right) + 18 \left( \frac{30 - d}{9} \right) = 72 \quad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$3d + 2(30 - d) = 72$$

$$3d + 60 - 2d = 72$$

$$d + 60 = 72$$

$$d = 12$$


**Respuesta** La respuesta al problema no es 12. Recuerde que la pregunta que nos hicieron es *determinar el tiempo empleado* en viajar a cada velocidad. La variable  $d$  no representa el tiempo, sino la distancia recorrida a 6 millas por hora. Para determinar el tiempo recorrido y responder la pregunta hecha, necesitamos evaluar  $\frac{d}{6}$  y  $\frac{30 - d}{9}$  para  $d = 12$ .

Tiempo a 6 mph

$$\frac{d}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

Tiempo a 9 mph

$$\frac{30 - d}{9} = \frac{30 - 12}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

Por tanto, 2 horas fueron destinadas a viajar a cada velocidad. Dejamos que usted haga la comprobación. 

**EJEMPLO 5 Distancia de una maratón** A los participantes de una maratón para reunir fondos se les permite ir en bicicleta, caminar, correr o ir en patines (o utilizar cualquier otro medio de transporte no motorizado). Kimberly Clark lo hizo en bicicleta y completó la distancia total de la maratón a una velocidad promedio de 16 kilómetros por hora (kph). Steve Schwartz, quien trotó, completó la distancia a un promedio de velocidad de 5 kph. Si Kimberly completó la carrera en 2.75 horas menos que el tiempo que hizo Steve, determine la distancia cubierta por la maratón.

**Solución** **Entender y traducir** Sea  $d$  = la distancia desde el inicio hasta la meta de la maratón. Entonces podemos construir la siguiente tabla. Para determinar el tiempo, dividimos la distancia entre la velocidad.

Persona	Distancia	Velocidad	Tiempo
Kimberly	$d$	16	$\frac{d}{16}$
Steve	$d$	5	$\frac{d}{5}$



Sabemos que Kimberly completó la maratón en 2.75 horas menos que el tiempo que hizo Steve. Por tanto, para hacer que los tiempos de Kimberly y de Steve sean iguales, necesitamos restar 2.75 horas del tiempo de Steve (o sumar 2.75 horas al tiempo de Kimberly; vea el párrafo después de este ejemplo). Restaremos 2.75 horas del tiempo de Steve y utilizamos la siguiente ecuación para resolver el problema.

$$\text{Tiempo de Kimberly} = \text{tiempo de Steve} - 2.75 \text{ horas}$$

$$\frac{d}{16} = \frac{d}{5} - 2.75$$

Realizar los cálculos

$$80\left(\frac{d}{16}\right) = 80\left(\frac{d}{5} - 2.75\right)$$

Multiplicar ambos lados por el mcd, 80.

$$5d = 80\left(\frac{d}{5}\right) - 80(2.75)$$

Propiedad distributiva.

$$5d = 16d - 220$$

$$-11d = -220$$

$$d = 20$$

**Comprobar y responder** La distancia desde el punto inicial al punto final de la maratón parece ser 20 kilómetros. Para comprobar esta respuesta determinaremos los tiempos que tardaron Kimberly y Steve para completar la maratón y veremos si la distancia entre los tiempos es 2.75 horas. Para determinar los tiempos, dividimos la distancia, 20 kilómetros, entre la velocidad.

$$\text{Tiempo de Kimberly} = \frac{20}{16} = 1.25 \text{ horas}$$

$$\text{Tiempo de Steve} = \frac{20}{5} = 4 \text{ horas}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 25

Como  $4 - 1.25 = 2.75$  horas, las respuestas satisfacen la condición. Por tanto, la distancia que cubre la maratón es de 20 kilómetros. 

En el ejemplo 5, restamos 2.75 horas del tiempo de Steve para obtener una ecuación. Podríamos haber sumado 2.75 horas al tiempo de Kimberly para obtener una ecuación equivalente. Resuelva nuevamente el ejemplo 5, pero ahora sumando 2.75 horas al tiempo de Kimberly.

### 3 Plantear y resolver problemas de trabajo

Los problemas donde dos o más máquinas o personas trabajan juntos para completar cierta tarea son los **problemas de trabajo**. Con frecuencia, este tipo de problemas incluyen ecuaciones con fracciones. Por lo general, utilizan el hecho de que la parte del trabajo realizado por la persona 1 (o máquina 1) más la parte del trabajo realizado por la persona 2 (o máquina 2) es igual a la cantidad de trabajo total realizado por ambas personas (o ambas máquinas). *Representamos la cantidad total del trabajo realizado por el número 1, que representa un trabajo completo terminado.*

Parte de la tarea hecha por la primera persona o máquina	+	Parte de la tarea hecha por la segunda persona o máquina	=	1 (tarea completa terminada)
--	---	--	---	------------------------------------

Para determinar la parte de la tarea realizada por cada persona o máquina, utilizamos la fórmula.

$$\text{parte de la tarea concluida} = \text{velocidad} \cdot \text{tiempo}$$

Esta fórmula es muy similar a la fórmula

$$\text{cantidad} = \text{velocidad} \cdot \text{tiempo}$$

que analizamos en la sección 3.5. Para determinar la parte de la tarea terminada, necesitamos determinar la velocidad. Suponga que Paul puede hacer una tarea particular en 6 horas. Entonces, él completaría  $1/6$  de la tarea por hora. Así, su velocidad es  $1/6$  de tarea por hora. Si Audrey puede hacer una tarea particular en 5 minutos, su velocidad es de  $1/5$  de la tarea por minuto. En general, si una persona o máquina puede completar una tarea en  $t$  unidades de tiempo, la velocidad es  $1/t$ .

**EJEMPLO 6 Construcción de un entarimado** Marty Agar puede construir un entarimado en su patio en 20 horas. Su esposa, Betty, puede hacer el mismo trabajo en 30 horas. ¿Cuánto tiempo tardarían en construirlo juntos?

**Solución Entender y traducir** Sea  $t =$  el tiempo, en horas, para el señor y la señora Agar trabajando juntos en la construcción del entarimado. Construiremos una tabla para ayudarnos a determinar la parte de la tarea completada por el señor Agar y la señora Agar en  $t$  horas.



Trabajador	Velocidad de trabajo (parte de la tarea completada por hora)	Tiempo trabajado	Parte de la tarea
Señor Agar	$\frac{1}{20}$	$t$	$\frac{t}{20}$
Señora Agar	$\frac{1}{30}$	$t$	$\frac{t}{30}$

$$\left( \begin{array}{l} \text{parte del entarimado hecho} \\ \text{por el señor Agar en } t \text{ horas} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{parte del entarimado hecho} \\ \text{por la señora Agar en } t \text{ horas} \end{array} \right) = 1 \text{ (entarimado completo)}$$

$$\frac{t}{20} + \frac{t}{30} = 1$$

**Realizar los cálculos** Ahora multiplicamos ambos lados de la ecuación por el mcd, 60.

$$60 \left( \frac{t}{20} + \frac{t}{30} \right) = 60 \cdot 1$$


$$60 \left( \frac{t}{20} \right) + 60 \left( \frac{t}{30} \right) = 60 \quad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$3t + 2t = 60$$

$$5t = 60$$

$$t = 12$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 27**

**Respuesta** Por tanto, el señor y la señora Agar, trabajando juntos, pueden construir el entarimado en 12 horas. Le dejamos la comprobación a usted. 

**SUGERENCIA**

En el ejemplo 6, el señor Agar podría construir el entarimado, él solo, en 20 horas, y la señora Agar podría hacerlo sola en 30 horas. Determinamos que juntos lo podrían hacer en 12 horas. ¿Tiene sentido esta respuesta? Como es de esperarse, el tiempo para construir juntos el entarimado es menor que el tiempo que cada uno emplearía en completar el trabajo. Al resolver un problema de trabajo, siempre examine su respuesta para ver si tiene sentido. Si no, vuelva a resolver el problema y encuentre su error.

**EJEMPLO 7**

**Almacenamiento de vino** En una bodega en el Valle de Napa, California, un tubo puede llenar un depósito con vino en 3 horas, y otro tubo puede vaciar el tanque en 5 horas. Si las válvulas de ambos tubos están abiertas, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse el depósito vacío?

**Solución**

**Entender y traducir** Sea  $t$  = cantidad de tiempo en llenar el tanque con ambas válvulas abiertas.



Tubo	Velocidad de trabajo	Tiempo	Parte de la tarea
Tubo para llenar el depósito	$\frac{1}{3}$	$t$	$\frac{t}{3}$
Tubo para vaciar el depósito	$\frac{1}{5}$	$t$	$\frac{t}{5}$

Cuando un tubo está llenando, el otro está vaciando el depósito. Esto es, los tubos están trabajando uno en contra del otro. Por tanto, en lugar de sumar las partes de la tarea, como se hizo en el ejemplo 6, en donde las personas trabajaban juntas, restaremos las partes de la tarea.

$$\left( \text{parte del depósito} \right) - \left( \text{parte del depósito} \right) = 1 \quad (\text{depósito lleno por completo})$$

llenado en  $t$  horas)      vaciado en  $t$  horas)

$$\frac{t}{3} - \frac{t}{5} = 1$$

Realizar los cálculos

$$15 \left( \frac{t}{3} - \frac{t}{5} \right) = 15 \cdot 1 \quad \text{Multiplicar ambos lados por el mcd, 15.}$$

$$15 \left( \frac{t}{3} \right) - 15 \left( \frac{t}{5} \right) = 15 \quad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$5t - 3t = 15$$

$$2t = 15$$

$$t = 7\frac{1}{2}$$

**Comprobar y responder** El depósito se llenará en  $7\frac{1}{2}$  horas. Esta respuesta es razonable, ya que esperamos que, cuando el tanque se está vaciando al mismo tiempo, tarde más de 3 horas.

**EJEMPLO 8**

**Servicio de limpieza de ventanas** Kathy y Courtney son propietarias de un pequeño servicio de limpieza de ventanas. Cuando Kathy limpia sola todas las ventanas en cierto edificio, tarda 8 horas. Cuando Kathy y Courtney trabajan juntas, pueden limpiar todas las ventanas de ese edificio en 5 horas. ¿Cuántas horas tardará Courtney en limpiar todas las ventanas si trabaja sola?

**Solución**



Sea  $t =$  tiempo que le toma a Courtney limpiar sola las ventanas. Entonces la velocidad de Courtney es  $\frac{1}{t}$ . Construyamos una tabla para ayudar a analizar el problema. Como Kathy puede limpiar todas las ventanas ella sola en 8 horas, su velocidad es  $\frac{1}{8}$  del trabajo por hora. En la tabla utilizamos el hecho de que juntas pueden limpiar todas las ventanas en 5 horas.

Trabajadora	Velocidad de trabajo	Tiempo	Parte de la tarea
Kathy	$\frac{1}{8}$	5	$\frac{5}{8}$
Courtney	$\frac{1}{t}$	5	$\frac{5}{t}$

$$\left( \begin{array}{l} \text{parte de las ventanas} \\ \text{limpiadas por Kathy} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{parte de las ventanas} \\ \text{limpiadas por Courtney} \end{array} \right) = 1$$

$$\frac{5}{8} + \frac{5}{t} = 1$$

Realizar los cálculos

$$8t \left( \frac{5}{8} + \frac{5}{t} \right) = 8t \cdot 1 \quad \text{Multiplicar ambos lados por el mcd, } 8t.$$

$$8t \left( \frac{5}{8} \right) + 8t \left( \frac{5}{t} \right) = 8t \quad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$5t + 40 = 8t$$

$$40 = 3t$$

$$\frac{40}{3} = t$$

$$13\frac{1}{3} = t$$

**Comprobar y responder** Por lo tanto, Courtney tarda  $13\frac{1}{3}$  o 13 horas 20 minutos en limpiar todas las ventanas, ella sola. Esta respuesta es razonable ya que esperamos que le tome más tiempo a Courtney limpiar las ventanas ella sola que lo que les tomaría a Kathy y a Courtney si trabajan juntas.

**AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 35**

**EJEMPLO 9**

**Notas de agradecimiento** Peter y Kaitlyn Kewin están escribiendo notas de agradecimiento para sus invitados que asistieron a la fiesta de su vigésimo aniversario de bodas. Kaitlyn sola, mientras que podría escribir todas las notas en 8 horas Peter, solo, podría escribir todas las notas en 7 horas. Después de que Kaitlyn había escrito notas durante 5 horas, ella debía dejar la ciudad por un asunto de trabajo. Entonces Peter continuó con la tarea de escribir las notas de agradecimiento. ¿Cuánto tardará Peter en terminar de escribir las notas que faltan?

**Solución**

**Entender y traducir** Sea  $t =$  tiempo que tardaría Peter en terminar de escribir las notas



Persona	Velocidad de trabajo	Tiempo	Parte de la tarea
Kaitlyn	$\frac{1}{8}$	5	$\frac{5}{8}$
Peter	$\frac{1}{7}$	$t$	$\frac{t}{7}$

$$\left( \begin{array}{l} \text{parte de las notas} \\ \text{escritas por Kaitlyn} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{parte de las notas} \\ \text{escritas por Peter} \end{array} \right) = 1$$

$$\frac{5}{8} + \frac{t}{7} = 1$$

Realizar los cálculos

$$56 \left( \frac{5}{8} + \frac{t}{7} \right) = 56 \cdot 1$$

*Multiplicar ambos lados por el mcd, 56.*


$$56 \left( \frac{5}{8} \right) + 56 \left( \frac{t}{7} \right) = 56$$

*Propiedad distributiva.*

$$35 + 8t = 56$$

$$8t = 21$$

$$t = \frac{21}{8} \quad \text{o bien} \quad 2\frac{5}{8}$$

**Responder** Por tanto, Peter tardará  $2\frac{5}{8}$  horas en terminar de escribir las notas. 

## Matemáticas en acción

### Pérdida de presión por altura en tuberías

Existen muchas aplicaciones de las ecuaciones racionales en la vida diaria. Algunas se ilustraron en este capítulo. Una de tales aplicaciones incluye lo que se conoce como pérdida de presión por altura. Ésta es la pérdida de energía de un líquido que se bombea desde un punto en una tubería a otro punto. Una pérdida de presión por altura de un pie es la misma pérdida de energía que ocurriría si la tubería fuese elevada un pie de la horizontal desde el punto de medición. La pérdida de presión por altura (HL, por sus siglas en inglés), expresada en pies, puede calcularse con la ecuación racional:

$$HL = k \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

en donde  $k$  = factor de fricción;  $L$  = longitud de la tubería, en pies;  $D$  = diámetro de la tubería, en pies;  $V$  = velocidad del flujo, en pies por segundo;  $g$  = constante de la gravedad = 32.17 pies por segundo al cuadrado.

Hacer un seguimiento y controlar la presión del agua que pasa por tuberías tiene aplicaciones dondequiera que el agua sea movida de un lugar a otro. En plantas de energía nuclear, inmensas cantidades de agua se bombean para enfriar diferentes partes del reactor. Un diseño que no prevenga este tipo de pérdida podría tener como consecuencia recibir menor presión que la esperada para el agua fría, que es críticamente necesaria. El resultado podría ser que la planta se apague o incluso una falla que amenace la vida.

Difícilmente uno podría imaginar un hogar moderno sin agua a presión que fluye por la cocina, los

baños, las máquinas de lavado y conexiones a mangueras exteriores. Los cálculos de la presión del agua son parte importante en el diseño de la plomería de sistemas sépticos. Un daño grave a la salud podría resultar de una velocidad de flujo que no sea suficiente para mover las aguas residuales a una ubicación de almacenamiento o de drenaje. De forma análoga, un mal diseño de la plomería en una alberca podría significar que el agua no circulara a través de los filtros a una velocidad apropiada, lo que podría tener como consecuencia una peligrosa concentración de bacterias.

La pérdida de presión por altura es un factor significativo en decenas de miles de ubicaciones agrícolas y de manufactura en donde los sistemas dependen de líquidos que fluyen a lo largo de tuberías, de una forma predecible. Los ingenieros en hidráulica utilizan la fórmula de pérdida de presión por altura como una herramienta importante para asegurar un adecuado flujo del agua.





## Conjunto de ejercicios 6.7

### Ejercicios conceptuales

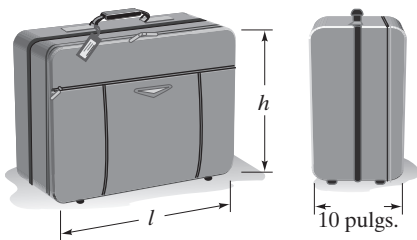
- Las fórmulas de geometría que se analizaron en la sección 3.1, con frecuencia son ecuaciones racionales. Proporcione tres fórmulas que sean ecuaciones racionales.
- Suponga que los automóviles 1 y 2 están viajando a la misma población a 60 millas y que el automóvil 1 viaja 10 millas por hora más rápido que el automóvil 2.
  - Sea  $r$  la velocidad del automóvil 2. Escriba una expresión, tiempo =  $\frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$ , para el tiempo que tarda el automóvil 1 en llegar a su destino.
  - Ahora sea  $r$  la velocidad del automóvil 1. Escriba una expresión, usando tiempo =  $\frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$ , para el tiempo que le toma al automóvil 2 llegar a su destino.
- En una ecuación para un problema de trabajo, un lado de la ecuación se hace igual a 1. ¿Qué representa este 1 en el problema?
- Suponga que Tracy Augustine puede terminar una tarea específica en 3 horas, mientras que la misma tarea puede terminarla John Bailey en 7 horas. ¿Cómo representaría la parte de la tarea terminada por Tracy en 1 hora?, ¿y cómo la de John en 1 hora?

### Práctica de habilidades

En los ejercicios 5 al 36, resuelva el problema y responda las preguntas.

#### Problemas de geometría, véase el ejemplo 1.

- Empaque de computadoras** La compañía Phillips Paper fabrica piezas rectangulares de cartón para empacar computadoras. Las hojas de cartón deben tener un área de 90 pulgadas cuadradas y la longitud de una hoja es 4 pulgadas mayor que  $\frac{2}{3}$  su ancho. Determine la longitud y el ancho de la hoja de cartón que se fabricará.
- Equipaje permitido** En la mayoría de las aerolíneas, el equipaje que se permite llevar con uno puede tener un ancho ( $a$ ) máximo de 10 pulgadas con un volumen máximo de 3840 pulgadas cúbicas; vea la siguiente figura. Si la altura ( $h$ ) del equipaje es  $\frac{2}{3}$  de longitud ( $l$ ), determine las dimensiones del equipaje más grande que puede uno llevar al abordar. Utilice  $V = lah$ .



- Triángulos de masa** Los roles Pillsbury se empaican en tubos que contienen triángulos perforados de masa. La ba-

se de la pieza triangular es 5 centímetros mayor que su altura. Determine la base y la altura de la pieza de pan, si el área es de 42 centímetros cuadrados.

- Señal de Ceda el paso** Las señales de “Ceda el paso” a la derecha utilizadas en Estados Unidos son triangulares. El área de la señal es de 558 pulgadas cuadradas. La altura es de 5 pulgadas menor que su base. Determine la longitud de la base de una señal de este tipo.



- Jardín triangular** Un área triangular es de 12 pulgadas cuadradas. Determine la base del área triangular, si la altura es 1 pie menor que  $\frac{1}{2}$  la base.
- Tablero de anuncios** Un tablero de anuncios tiene la forma de un trapecio. El área de éste es de 32 pies cuadrados. Si su altura es  $\frac{1}{4}$  de la longitud de la suma de las dos bases, determine la altura del tablero de anuncios.

## Problemas numéricos, vea el ejemplo 2.

11. **Diferencia de números** Un número es 10 veces mayor que otro. La diferencia de sus recíprocos es 3. Determine los dos números.
12. **Suma de números** Un número es 3 veces mayor que otro. La suma de sus recíprocos es  $\frac{4}{3}$ . Determine los dos números.

## Problemas de movimiento, vea los ejemplos 3 a 5.

15. **Viaje en barco de vapor** En el Río Mississippi, cerca de Nueva Orleans, el barco de vapor *Creole Queen* viaja 4 millas río arriba (en contra de la corriente) en la misma cantidad de tiempo que recorre 6 millas río abajo (a favor de la corriente). Si la corriente del río es de 2 millas por hora, determine la velocidad del *Creole Queen* en aguas tranquilas.



16. **Viaje en kayak** Kathy Boothby-Sestak puede remar en su kayak a 6 millas por hora en aguas tranquilas. Si en el río Wabash, cerca de Lafayette, Indiana, tarda en remar 3 millas río arriba 4 millas río abajo, determine la velocidad de la corriente del río.
17. **Viaje en tranvía** Un tranvía viaja en una dirección a un promedio de 15 millas por hora, luego da la vuelta y regresa por el mismo camino en dirección opuesta a 15 millas por hora. Si el tiempo total del viaje en el tranvía es de  $2\frac{1}{2}$  horas, ¿qué tan lejos viajó el tranvía en una dirección?
18. **Viaje en motocicleta** Brandy Dawson y Jason Dodge inician un viaje en motocicleta en el mismo punto, un poco al norte de Fort Worth, Texas. Ambos viajan a San Antonio, Texas, una distancia de 400 kilómetros. Brandy conduce
- 30 kilómetros por hora más rápido que Jason. Cuando Brandy llega a su destino, Jason sólo ha llegado a Austin, Texas, a una distancia de 250 kilómetros. Determine la velocidad aproximada de cada motocicleta.
19. **Vuelo en jet** Elenore Morales viajó 1600 millas en un avión comercial, desde Kansas City, Missouri, a Spokane, Washington. Luego viajó 500 millas más en un aeroplano (de hélice) privado desde Spokane a Billings, Montana. Si la velocidad del jet fue 4 veces la velocidad del aeroplano privado y el tiempo total en el aire fue de 6 horas, determine la velocidad de cada avión.
20. **Régimen de ejercicios** Como parte de su régimen de ejercicios, Chris Barker camina una distancia de 2 millas en una pista bajo techo y luego trota una milla adicional, al doble de velocidad de la que camina. Si el tiempo total que dedica en la pista fue  $\frac{3}{4}$  de hora, determine la velocidad a la que camina y a la que trota.
21. **De Dover a Calais** Para ir de Dover, Inglaterra, a París, Francia, Renee Estivez tomó el aereodeslizador sobre el canal inglés, de Dover a Calais, Francia. Luego tomó un tren bala a París. El aerodeslizador viajó a un promedio de 40 millas por hora, y el tren viajó a un promedio de 120 millas por hora. Si la distancia total recorrida fue de 200 millas, y el tiempo total, en conjunto, utilizado (en el barco y en el tren) fue de 2.2 horas, determine la distancia que ella viajó en barco y la distancia que viajó en tren.
22. **Correr y caminar** Kristen Taylor trota cierta distancia y luego camina otra. Cuando ella corre, promedia 5 millas por hora, y cuando camina 2 millas por hora. Si ella camina y trota un total de 3 millas en 0.9 hora, ¿cuánto recorre trotando y cuánto caminando?
23. **A favor y en contra del viento** Un Boeing 747 voló desde San Francisco a Honolulu, una distancia de 2,800 millas. Volando con el viento a favor, promedió 600 millas por hora. Cuando el viento cambió y estuvo en contra, la velocidad cayó a 500 millas por hora. Si el tiempo total del viaje fue de 5 horas, determine la duración del vuelo a cada velocidad.

24. **Tren bala** Se sabe que los trenes bala de Japón promedian 240 kilómetros por hora (kph). Antes de utilizar los trenes bala, los trenes en Japón viajaban a una velocidad promedio de 120 kph. Si un tren bala que viaja de Shin-Osake a Hakata puede completar su trayecto en 2.3 horas menos que un tren antiguo, determine la distancia de Shin-Osake a Hakata.
25. **Esquiadores acuáticos** En un espectáculo acuático un bote jala a un esquiador a una velocidad de 30 pies por segundo. Cuando llega al final del lago, se agregaron más esquiadores para ser jalados por el bote, por lo que la velocidad del bote disminuyó a 20 pies por segundo. Si el bote recorrió la misma distancia con los esquiadores que se sumaron que con el esquiador solo, y el viaje de regreso, con todos los esquiadores, tomó 15 segundos más que el recorrido con un solo esquiador, ¿cuánto recorrió el bote, en pies, en una dirección?



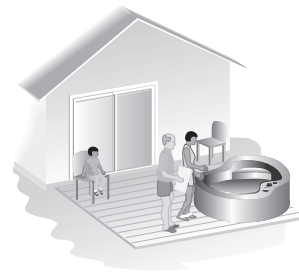
26. **Esquí a campo traviesa** Alana Bradley y su padre, Tim, comenzaron a esquiar al mismo tiempo la misma prueba a campo traviesa en Elmwood Park, en Sioux Falls, Dakota del Sur. Si Alana, quien promedia 9 millas por hora, termina la prueba 0.25 horas más pronto que su padre, quien promedia 6 millas por hora, determine la longitud de la prueba.

**Problemas de trabajo, vea los ejemplos 6 a 9.**

27. **Papel tapiz** Reynaldo y Felicia Fernández deciden tapizar la sala. Felicia, quien tiene experiencia en esta tarea, puede colocar el papel tapiz a toda la habitación en 6 horas. Reynaldo puede hacer el mismo trabajo en 8 horas. ¿Cuánto tardarán en colocar el papel tapiz en la sala si trabajan juntos?
28. **Banda transportadora** En una mina de sal, una banda transportadora requiere de 20 minutos para llenar un gran camión con mineral. Una segunda banda transportadora requiere 30 minutos para llenar el mismo camión con el mineral. ¿Cuánto tardarían en llenar el camión si trabajan juntas ambas bandas transportadoras?



29. **Jacuzzi** Pam y Loren Fornier saben que su jacuzzi puede llenarse en 2 horas y desagüarse por completo en 3 horas. Pam abrió la llave y regresó a la casa. Al cabo de 2 horas, fue al jacuzzi y vio, con desilusión, que sólo estaba parcialmente lleno, a consecuencia de que el desagüe se había quedado abierto. Si la llave de agua estaba abierta y el desagüe se dejó abierto, ¿cuánto tiempo tardaría en llenarse completamente el jacuzzi?



Vea el ejercicio 29.

30. **Llenado de un depósito** Durante una tormenta, la lluvia fluye a un gran depósito contenedor. A la velocidad que la lluvia está cayendo, el depósito vacío se llenaría en 8 horas. En la parte inferior del depósito se encuentra un grifo para extraer agua. Por lo común, toma 12 horas, con el grifo completamente abierto, vaciar el depósito lleno. Si el depósito está vacío y el grifo, accidentalmente, se quedó abierto, y la lluvia cae a tasa constante, ¿cuánto tiempo tomaría para que se llene por completo el depósito?
31. **Flujo de agua** Cuando se hace pasar agua a una manguera de media pulgada de diámetro, una pequeña piscina de jardín puede llenarse en 5 horas. Cuando se hace pasar agua a dos grifos y luego pasa por dos mangueras, la de media pulgada de diámetro y otra de tres cuartos de pulgada de diámetro, la piscina se llena en 2 horas. ¿Cuánto tiempo tardaría en llenarse la piscina si sólo se utiliza la manguera de tres cuartos de pulgada de diámetro?
32. **Cheques de nómina** En el banco de ahorro NCNB, le toma a una computadora 4 horas procesar e imprimir los cheques de la nómina. Cuando se utiliza una segunda

computadora y las dos trabajan juntas, los cheques se pueden procesar en 3 horas. ¿Cuánto tardaría la segunda computadora en procesar e imprimir, ella sola, los cheques de la nómina?

33. **Excavación de una zanja** Una compañía constructora con dos excavadoras ha sido contratada para cavar una larga zanja para tubería del drenaje. La excavadora más grande puede cavar toda la zanja en 12 días. La más pequeña puede cavar toda la zanja en 15 días. La excavadora grande inicia a trabajar en la zanja, pero después de 5 días se transfiere a un trabajo diferente, y la excavadora pequeña continúa con el trabajo de la zanja. ¿Cuánto tomará a la excavadora pequeña completar el trabajo?
34. **Envío de condimentos** Chadwick y Melissa Wicker entregan latas de tamaño institucional de condimentos a varios almacenes en Pennsylvania. Si Chadwick maneja todo el trayecto, el viaje tardaría alrededor de 10 horas. Melissa es una conductora más rápida. Si Melissa condujese todo el trayecto tardarían 8 horas. Después que Melissa ha manejado durante 4 horas, Chadwick toma el volante. Aproximadamente, ¿cuánto tiempo más conducirá Chadwick antes de llegar a su destino final?
35. **Tormenta de nieve** Después de una severa tormenta de nieve, Ken y Bettina Reeves deben limpiar su camino de entrada y su acera. Ken solo puede limpiar la nieve en 4 horas, y Bettina puede limpiar la nieve, ella sola, en 6 horas. Después de que Bettina ha estado trabajando durante 3 horas, Ken se le une. ¿Cuánto tiempo más trabajarán juntos para quitar el resto de la nieve?



36. **Granja cooperativa** Una gran granja cooperativa cerca de Hutchinson, Kansas, posee tres empacadoras de heno.

La más vieja puede recolectar y empacar un acre de heno en 3 horas, y cada una de las dos empacadoras más nuevas puede trabajar un acre en 2 horas.

- a) ¿Cuánto tardarían las tres empacadoras, trabajando juntas, en recolectar y empacar un acre?
- b) ¿Cuánto tardarían las tres empacadoras, trabajando juntas, en recolectar y empacar los 375 acres de heno de la granja?
37. **Recolección de petróleo** Un barco diseñado para recolectar el petróleo de la superficie del agua tiene dos recolectores. Uno puede llenar el depósito contenedor del barco en 60 horas, mientras que el segundo recolector puede llenar el mismo depósito en 50 horas. También hay una válvula en el depósito que se utiliza para transferir el petróleo a un depósito más grande. Si no está entrando más petróleo al depósito contenedor y éste está lleno, el petróleo puede transferirse a un depósito más grande en 30 horas. Si ambos recolectores empiezan a trabajar y la válvula en el depósito está abierta, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse el depósito del barco, si inicialmente está vacío?
38. **Jardín de flores** Bob puede plantar un jardín de flores en 8 horas, si trabaja solo. Mary puede hacer lo mismo en 10 horas, si trabaja sola, y Gloria sola lo puede hacer en 12 horas. ¿Cuánto tardarían en plantar el jardín si trabajan juntos?



## Problemas de reto

39. **Recíproco de un número** Si 5 veces un número se suma a 4 veces el recíproco del número, la respuesta es 12. Determine el número.
40. **Determine un número** El recíproco de la diferencia de cierto número y 3 es dos veces el recíproco de la diferencia del doble del número y 6. Determine el o los números.

**41. Recolección de arándanos** Ed y Samantha Weisman, cuyos padres son propietarios de una hacienda de frutas, deben recolectar el mismo número de pintas de arándanos diariamente durante la temporada. Ed recolecta un promedio de 8 pintas por hora, mientras que Samantha recolecta un promedio de 4 pintas por hora. Si Ed y Samantha empiezan la recolección de arándanos al mismo tiempo, y Samantha termina 1 hora después que Ed, ¿cuántas pintas de arándanos debe recolectar cada uno?

**42. Clasificación de correspondencia** Una máquina procesadora de correo puede clasificar una gran bandeja de correo en 1 hora. Un modelo más reciente puede clasificar la misma cantidad de correo en 40 minutos. Si se operan juntas, ¿cuánto tiempo tardarían en clasificar la bandeja de correo?

## Ejercicios de repaso acumulativo

[2.1] 43. Simplifique  $\frac{1}{2}(x + 3) - (2x + 6)$ .

[6.2] 45. Divida  $\frac{x^2 - 14x + 48}{x^2 - 5x - 24} \div \frac{2x^2 - 13x + 6}{2x^2 + 5x - 3}$ .

[5.2] 44. Mediante agrupación, factorice  $y^2 + 5y - y - 5$ .

[6.4] 46. Reste  $\frac{x}{6x^2 - x - 15} - \frac{5}{9x^2 - 12x - 5}$ .

## 6.8 VARIACIÓN



- 1 Plantear y resolver problemas de variación directa.
- 2 Plantear y resolver problemas de variación inversa.

Muchas fórmulas científicas se expresan como variaciones. Muchas de nuestras actividades diarias también incluyen variación. Una **variación** es una ecuación que relacione una variable con una o más variables usando las operaciones de multiplicación o división (o ambas). En este libro analizaremos dos tipos de variación: **variación directa** y **variación inversa**. Primero estudiaremos la variación directa.

### 1 Plantear y resolver problemas de variación directa

En la variación directa, las dos variables crecen al mismo tiempo o las dos decrecen al mismo tiempo; esto es, cuando una variable crece, también lo hace la otra, y cuando una variable disminuye, también lo hace la otra.

Suponga que durante un tiempo específico sale agua de una manguera de jardín y llena una cubeta. Entre mayor sea el flujo del agua que sale de la manguera mayor será el volumen del agua en la cubeta, y entre menor sea el flujo de agua que sale de la manguera, menor será el volumen de agua en la cubeta. Éste es un ejemplo de variación directa. El volumen del agua en la cubeta varía de forma directa con la tasa de flujo de la manguera.

Considere un automóvil que viaja a 50 millas por hora. El automóvil recorre 50 millas en 1 hora, 100 millas en 2 horas, 150 millas en 3 horas. Conforme aumenta el tiempo, también se incrementa la distancia recorrida. Éste también es un ejemplo de variación directa. Podemos ver que para una velocidad constante, cuando el tiempo aumenta, también lo hace la distancia recorrida, y si el tiempo disminuye también disminuye la distancia recorrida.

La fórmula usada para calcular la distancia es

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \cdot \text{tiempo}$$

Como la velocidad es constante, 50 millas por hora, la fórmula puede escribirse como

$$d = 50t$$

Decimos que la distancia,  $d$ , *varía directamente* con el tiempo,  $t$ , o que la distancia es *directamente proporcional* al tiempo  $t$ . En la ecuación, el 50 es una constante que se conoce como **constante de proporcionalidad**. Ahora definiremos la variación directa.

### Variación directa

Si una variable  $y$  varía de forma directa con una variable  $x$ , entonces

$$y = kx$$

en donde  $k$  es la *constante de proporcionalidad* (o la constante de variación).

Cuando nos dicen que una cantidad que varía de forma directa como otra, por lo general iniciamos con una ecuación en la forma  $y = kx$ ; sin embargo, para las variables, se pueden utilizar otras letras en lugar de  $x$  y  $y$ .

**EJEMPLO 1 Calentamiento de un jacuzzi** Cuando se enciende el calentador para calentar el agua en un jacuzzi, la temperatura del agua,  $w$ , aumenta de forma directa con el tiempo,  $t$ , que el calentador está encendido

- a) Escriba la variación como una ecuación.  
 b) Si la constante de proporcionalidad,  $k$ , es 0.5, determine el aumento en la temperatura del agua al cabo de 30 minutos.

### Solución



AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 35

- a) Nos dijeron que la temperatura del agua varía de forma directa con el tiempo. Por tanto, planteamos la proporción directa como sigue:

$$w = kt$$

- b) Para determinar el aumento en la temperatura del agua, sustituimos 0.5 por  $k$ , y 30 por  $t$ .

$$\begin{aligned} w &= kt \\ w &= 0.5(30) = 15 \end{aligned}$$

Así que, después de 30 minutos, la temperatura del agua ha aumentado  $15^\circ$ . 

En muchos problemas de variación primero tendrá que determinar la constante de proporcionalidad antes de poder determinar la variable que se le ha pedido encontrar. Para determinar la constante de proporcionalidad, sustituya los valores dados para las variables y despeje  $k$ . Ilustramos este procedimiento en el ejemplo 2.

**EJEMPLO 2 Problema de variación directa**  $s$  varía de forma directa con el cuadrado de  $m$ . Si  $s = 100$  cuando  $m = 5$ , determine  $s$  cuando  $m = 12$ .

### Solución

- a) **Entender y traducir** Iniciamos planteando la ecuación. Observe que se nos dijo que  $s$  varía de forma directa con el cuadrado de  $m$ . El cuadrado de  $m$  se escribe  $m^2$ . Por tanto, la ecuación es  $s = km^2$ . Como no se nos dio la constante de proporcionalidad, la determinamos sustituyendo los valores que nos dieron para las variables.

$$\begin{aligned} s &= km^2 \\ 100 &= k(5^2) \quad \text{Sustituir valores.} \\ 100 &= k(25) \\ 100 &= 25k \\ 4 &= k \end{aligned}$$



Ahora que hemos determinado  $k$ , podemos responder la pregunta sustituyendo 4 por  $k$ , y 12 por  $m$ .

$$\begin{aligned} \text{Realizar los cálculos} \quad s &= km^2 \\ s &= 4(12)^2 \\ s &= 4(144) \\ s &= 576 \end{aligned}$$

**Respuesta** Así, cuando  $m = 12$ ,  $s = 576$ . 

**EJEMPLO 3 Dosis de droga** La cantidad de la droga,  $d$ , dada a una persona es directamente proporcional al peso de la persona,  $w$ . Si una persona pesa 75 kilogramos se le suministran 150 miligramos (mg) de alopurinol; determine cuántos miligramos de alopurinol se le suministrarán a una persona que pesa 96 kg.

**Solución Entender y traducir** Nos dijeron que la cantidad de la droga es directamente proporcional al peso de la persona. Así que planteamos la ecuación


$$d = kw$$

Ahora determinamos  $k$ , sustituyendo los valores dados para  $d$  y  $w$ .

$$\begin{aligned} \text{Realizar los cálculos} \quad d &= kw \\ 150 &= k(75) \\ \frac{150}{75} &= k \\ 2 &= k \end{aligned}$$

Ahora determinaremos el número de miligramos de la droga que se suministrará, sustituyendo 2 por  $k$  y 96 por  $w$ .

$$\begin{aligned} d &= kw \\ d &= 2(96) = 192 \end{aligned}$$

**Comprobar y responder** Como esperamos, la cantidad de la droga será mayor que 150 miligramos, nuestra respuesta es razonable. A una persona de 96 kg se le debe administrar 192 miligramos de la droga. 

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 39**

El ejemplo 3 también podría resolverse mediante una proporción.

## 2 Plantear y resolver problemas de variación inversa

Ahora analizaremos la variación inversa. Cuando dos cantidades varían de forma inversa, significa que cuando una cantidad aumenta, la otra disminuye, y viceversa.

Suponga que está haciendo un guisado en la estufa. De forma general, entre más alta sea la temperatura del horno, menor será el tiempo que se necesita para cocinar el guisado. Esto es, cuando la temperatura aumenta, el tiempo disminuye, y viceversa. Así, el tiempo y la temperatura son inversamente proporcionales uno del otro, o varía inversamente con el otro.

Para explicar la variación inversa, nuevamente utilizamos la fórmula de la distancia,

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \cdot \text{tiempo}$$

Si despejamos el tiempo, obtenemos  $\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$ . Suponga que la distancia se fija en 100 millas, entonces

$$\text{tiempo} = \frac{100}{\text{velocidad}}$$

A una velocidad de 100 millas por hora, tomaría 1 hora en cubrir las 100 millas de distancia. A 50 millas por hora, tomaría 2 horas en cubrir la distancia. A 25 mph tomaría 4 horas. Observe que cuando la velocidad (o rapidez) disminuye, el tiempo aumenta, y viceversa. La ecuación anterior puede escribirse

$$t = \frac{100}{r}$$

Éste es un ejemplo de variación inversa en la que el tiempo y la velocidad son inversamente proporcionales y la constante de proporcionalidad es 100. Ahora definimos la variación inversa.

### Variación inversa

Si una variable  $y$  varía de forma inversa con una variable  $x$ , entonces

$$y = \frac{k}{x} \text{ (o } xy = k\text{)}$$

en donde  $k$  es la constante de proporcionalidad.

Ahora resolveremos dos ejemplos.

**EJEMPLO 4 Renta de un velero** Un grupo de amigos van a rentar un velero para un viaje de placer. El costo por persona de la renta del velero,  $c$ , es inversamente proporcional con el número de personas que rentan el velero,  $n$ . Si 8 amigos deciden rentar el velero, el costo por persona es \$40. Determine el costo por persona, si 14 amigos deciden rentar el velero.

**Solución** **Entender y traducir** Nos dicen que ésta es una variación inversa. Por tanto, plantearemos una ecuación para representar la proporción inversa.



$$c = \frac{k}{n}$$

Como no se nos da la constante de proporcionalidad, determinamos  $k$  mediante la sustitución de los valores dados para  $c$  y  $n$ .

$$40 = \frac{k}{8}$$

$$320 = k$$


Ahora podemos determinar la respuesta a la pregunta utilizando  $k = 320$  y  $n = 14$

**Realizar los cálculos**

$$c = \frac{k}{n}$$

$$c = \frac{320}{14}$$

$$c = 22.86$$

**Comprobar y responder** Si 14 amigos deciden rentar el velero, el costo para cada persona es de alrededor de \$22.86. Si usted multiplica  $22.86(14)$  obtiene 320.04, esto es un poco más que la constante de proporcionalidad. Se debe al redondeo de  $\frac{320}{14}$  a \$22.86. 



**EJEMPLO 5**

**Volumen de un altavoz** El volumen,  $l$ , de un altavoz de un estéreo, medido en decibeles (dB), varía de forma inversa con el cuadrado de la distancia,  $d$ , del oyente al altavoz. Suponiendo que para un altavoz particular la intensidad es de 20 dB, cuando el oyente se encuentra a 6 pies del altavoz.

- Determine una ecuación que exprese la relación entre el volumen y la distancia.
- Por medio de la ecuación que obtuvo en la parte **a)**, determine el volumen cuando una persona está a tres pies del altavoz.

**Solución**

Este problema se divide en dos partes. La primera nos pide determinar una fórmula general, mientras que la segunda parte nos pide utilizar la fórmula.

**a) Entender y traducir** Nos dicen que el volumen varía de forma inversa con el *cuadrado* de la distancia. Por tanto, escribimos la siguiente ecuación y despejamos  $k$ .

Realizar los cálculos

$$l = \frac{k}{d^2}$$

$$20 = \frac{k}{6^2}$$

$$20 = \frac{k}{36}$$

$$720 = k$$

**Comprobar y responder** La constante de proporcionalidad,  $k$ , es 720. Como para este altavoz  $k = 720$ , la ecuación que estamos buscando es

$$l = \frac{720}{d^2}$$

**b) Entender y traducir** En la parte **a)** determinamos la ecuación para encontrar el volumen. En la fórmula, sustituimos 3 por  $d$  y despejamos  $l$ .


$$l = \frac{720}{d^2}$$

$$l = \frac{720}{3^2}$$

Realizar los cálculos

$$l = \frac{720}{9}$$

$$l = 80$$

**Comprobar y responder** Por tanto, a 3 pies, el volumen es de 80 decibeles. Esto es razonable ya que a una distancia más corta (3 pies contra 6 pies) el sonido será más alto. 

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 49

**Conjunto de ejercicios 6.8****Ejercicios conceptuales**

- ¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad en la variación directa  $m = 40t$ ?
- ¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad en la variación inversa  $w = \frac{60}{r}$ ?
- Proporcione la forma general de la variación directa.
- Proporcione la forma general de la variación inversa.

## Práctica de habilidades

Determine si las siguientes son variaciones directas o inversas. Explique su respuesta.

- |   |   |
|---|---|
| <p>5. El diámetro de una manguera y la cantidad de agua que sale de ella.</p> <p>6. La abertura de la lente de una cámara y la cantidad de luz que llega a la película.</p> <p>7. La velocidad de una tortuga y el tiempo que tarda en cruzar una carretera.</p> <p>8. La edad de un automóvil, hasta de 10 años, y el valor del automóvil.</p> <p>9. La temperatura del agua y el tiempo que tarda en derretirse un cubo de hielo colocado en el agua.</p> | <p>10. El número de personas en una fila del teatro y el tiempo que tarda toda la gente en la fila en comprar los boletos.</p> <p>11. La longitud de un rollo de cinta adhesiva y el número de tiras de 2 pulgadas que pueden obtenerse del rollo.</p> <p>12. La velocidad de lectura de una persona y el tiempo que tarda en leer una novela.</p> <p>13. El desplazamiento de pulgadas cúbicas y los caballos de fuerza de un motor.</p> <p>14. La velocidad de una máquina podadora y el tiempo que se tarda en cortar el césped.</p> |
|---|---|

En los ejercicios 15 a 22, determine la cantidad indicada.

- |  |   |
|--|---|
| <p>15. <math>x</math> varía directamente con <math>z</math>. Determine <math>x</math> cuando <math>z = 11</math> y <math>k = 3</math>.</p> <p>16. <math>x</math> varía directamente con <math>y</math>. Determine <math>x</math> cuando <math>y = 12</math> y <math>k = 6</math>.</p> <p>17. <math>x</math> varía inversamente con <math>y</math>. Determine <math>x</math> cuando <math>y = 25</math> y <math>k = 5</math>.</p> <p>18. <math>R</math> varía inversamente con <math>W</math>. Determine <math>R</math> cuando <math>W = 160</math> y <math>k = 240</math>.</p> | <p>19. <math>C</math> varía directamente con el cuadrado de <math>Z</math>. Determine <math>C</math> cuando <math>Z = 5</math> y <math>k = 2</math>.</p> <p>20. <math>L</math> varía directamente con el cuadrado de <math>R</math>. Determine <math>L</math> cuando <math>R = 9</math> y <math>k = 4</math>.</p> <p>21. <math>y</math> varía inversamente con el cuadrado de <math>x</math>. Determine <math>y</math> cuando <math>x = 10</math> y <math>k = 320</math>.</p> <p>22. <math>y</math> varía inversamente con el cuadrado de <math>w</math>. Determine <math>y</math> cuando <math>w = 12</math> y <math>k = 288</math>.</p> |
|--|---|

Para los ejercicios 23 a 30, determine la cantidad indicada.

- |   |  |
|---|--|
| <p>23. <math>x</math> varía directamente con <math>y</math>. Si <math>x = 9</math> cuando <math>y = 18</math>, determine <math>x</math> cuando <math>y = 36</math>.</p> <p>24. <math>Z</math> varía directamente con <math>W</math>. Si <math>Z = 7</math> cuando <math>W = 28</math>, determine <math>Z</math> cuando <math>W = 140</math>.</p> <p>25. <math>C</math> varía inversamente con <math>J</math>. Si <math>C = 7</math> cuando <math>J = 1</math>, determine <math>C</math> cuando <math>J = 2</math>.</p> <p>26. <math>H</math> varía inversamente con <math>L</math>. Si <math>H = 15</math> cuando <math>L = 50</math>, determine <math>H</math> cuando <math>L = 10</math>.</p> | <p>27. <math>y</math> varía directamente con el cuadrado de <math>R</math>. Si <math>y = 4</math> cuando <math>R = 4</math>, determine <math>y</math> cuando <math>R = 8</math>.</p> <p>28. <math>A</math> varía directamente con el cuadrado de <math>B</math>. Si <math>A = 245</math> cuando <math>B = 7</math>, determine <math>A</math> cuando <math>B = 9</math>.</p> <p>29. <math>L</math> varía inversamente con el cuadrado de <math>P</math>. Si <math>L</math> es 270 cuando <math>P = 10</math>, determine <math>L</math> cuando <math>P = 30</math>.</p> <p>30. <math>x</math> varía inversamente con el cuadrado de <math>P</math>. Si <math>x = 10</math> cuando <math>P = 6</math>, determine <math>x</math> cuando <math>P = 20</math>.</p> |
|---|--|

## Solución de problemas

- |   |   |
|---|---|
| <p>31. Suponga que <math>a</math> varía directamente con <math>b</math>. Si <math>b</math> se duplica, ¿cómo se afectará <math>a</math>? Explique.</p> <p>32. Suponga que <math>a</math> varía directamente con <math>b^2</math>. Si <math>b</math> se duplica, ¿cómo se afectará <math>a</math>? Explique.</p> | <p>33. Suponga que <math>y</math> varía inversamente con <math>x</math>. Si <math>x</math> se duplica, ¿cómo se afectará <math>y</math>? Explique.</p> <p>34. Suponga que <math>y</math> varía inversamente con <math>a^2</math>. Si <math>a</math> se duplica, ¿cómo se afectará <math>y</math>? Explique.</p> |
|---|---|

En los ejercicios 35 a 54, determine la cantidad que se le pide.

- |   |   |
|---|---|
| <p>35. <b>Distancia y velocidad</b> La distancia, <math>d</math>, que un automóvil recorre es directamente proporcional a la velocidad, <math>s</math>, a la que el automóvil está viajando. Determine la distancia recorrida, si la constante de proporcionalidad, <math>k</math>, es 2 y la velocidad es de 40 millas por hora.</p> | <p>36. <b>Alberca</b> El tiempo, <math>t</math>, que tarda en llenarse una alberca es directamente proporcional a la cantidad de agua, <math>w</math>, que sale de la manguera. Determine el tiempo que tardará una manguera en llenar la alberca si la constante de proporcionalidad es 0.3 y la cantidad de agua que sale de la manguera es 100 galones por hora.</p> |
|---|---|

37. **Llegada a un destino** El tiempo,  $t$ , que toma llegar a cierto destino es inversamente proporcional a la velocidad,  $s$ , a la que un automóvil se desplaza. Determine el tiempo que tarda en llegar al destino si la constante de proporcionalidad es 100 y la velocidad,  $s$ , es 50 millas por hora.
38. **Luz a través del agua** El porcentaje de luz,  $l$ , que se filtra a través del agua es inversamente proporcional a la profundidad,  $d$ , del agua. Determine el porcentaje de luz que se filtra a una profundidad de 10 pies si la constante de proporcionalidad es 300.
39. **Velocidad de un automóvil** La distancia recorrida,  $d$ , en un automóvil es directamente proporcional a la velocidad,  $s$ , del automóvil. Si la distancia recorrida es 300 pies cuando la velocidad es 120 pies/minuto, determine la distancia recorrida cuando la velocidad es 150 pies/minuto.

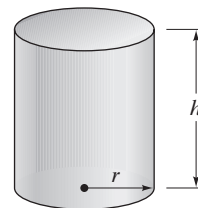


40. **Corte del césped** El tiempo,  $t$ , que tarda Don en cortar el césped, es directamente proporcional al área del césped,  $A$ . Si Don tarda 0.4 horas en cortar un área de 1200 pies cuadrados, ¿cuánto tardará en cortar un área de 2200 pies cuadrados?
41. **Colocación de una cerca** El tiempo,  $t$ , que toma cercar un gran campo es inversamente proporcional al número de personas,  $n$ , que trabajan en la cerca. Cuando 10 personas están trabajando en la cerca, toma 200 horas colocarla. ¿Cuánto tiempo les tomará a 15 personas colocar la cerca?
42. **Cocimiento de un pavo** El tiempo,  $t$ , que tarda en cocinarse un pavo es inversamente proporcional a la temperatura del horno,  $T$ . Si tarda 3 horas en cocinarse un pavo a 300 °F, ¿cuánto tiempo tardará en cocinarse un pavo a 250 °F?
43. **Juego de baloncesto** La recaudación,  $r$ , en un juego de baloncesto es directamente proporcional al número de personas,  $n$ , que asisten al juego. Si la recaudación para un juego es de \$12,000 cuando asisten 800 personas, determine cuántas personas asisten, si la recaudación para un juego es de \$15,000.
44. **Periódico** El tiempo,  $t$ , que tarda en imprimirse un número específico de copias de un periódico es inversamente proporcional al número de prensas,  $n$ , que está trabajando. Cuando están trabajando 6 prensas, los periódicos se imprimen en 8 horas. Determine el número de prensas que están trabajando, si los periódicos se imprimen en 3 horas.

45. **Costo de una boda** El costo,  $c$ , de cierta boda es directamente proporcional al número,  $n$ , de personas que asisten. Si el costo es de \$4,000 cuando asisten 80 personas, ¿cuántas personas asisten si el costo es de \$3,000?



46. **Limpieza de ventanas** El tiempo,  $t$ , que toma limpiar todas las ventanas de un gran edificio de oficinas es inversamente proporcional al número de equipos,  $n$ , de limpiaventanas que se emplean. Si 6 equipos pueden limpiar todas las ventanas en 16 días, ¿cuántos equipos se utilizarán si las ventanas se limpian en 12 días?
47. **Área de un círculo** El área de un círculo,  $A$ , es directamente proporcional al cuadrado del radio,  $r$ , del círculo. Si el área de un círculo es de alrededor de 78.5 pulgadas cuadradas cuando el radio es de 5 pulgadas, determine el área cuando el radio es de 12 pulgadas.
48. **Objeto que cae** La velocidad,  $v$ , de un objeto que cae es directamente proporcional al cuadrado del tiempo,  $t$ , que ha estado en caída libre. Un objeto que ha estado en caída libre durante 2 segundos tiene una velocidad de 64 pies por segundo. Determine la velocidad de un objeto que ha caído durante 8 segundos.
49. **Circuito eléctrico** En un circuito eléctrico la resistencia,  $r$ , de un aparato es inversamente proporcional al cuadrado de la corriente,  $c$ . Si la resistencia es de 100 ohms, cuando la corriente es de 0.4 amperes, determine la resistencia si la corriente es de 0.6 amperes.
50. **Volumen de un cilindro** Para un cilindro de un volumen específico, la altura,  $h$ , del cilindro es inversamente proporcional al cuadrado del radio del cilindro,  $r$ . Cuando el radio es de 6 pulgadas, la altura es de 10 pulgadas. Determine la altura cuando el radio es de 5 pulgadas.



- 51. Determinación del interés** La cantidad de interés generado en una inversión,  $I$ , varía directamente con la tasa de interés,  $r$ . Si el interés generado es \$40 cuando la tasa de interés es 4%, determine la cantidad de interés generada cuando la tasa de interés es 6%.
- 52. Pared de ladrillos** El tiempo,  $t$ , requerido para construir una pared de ladrillos varía de manera inversa al número de personas,  $n$ , que trabajan en la pared. Si toma 8 horas a 5 albañiles en construir una pared, ¿cuánto tardarán 8 albañiles en construir la misma pared?
- 53. Volumen de gas** El volumen de gas,  $V$ , varía inversamente con su presión,  $P$ . Si el volumen,  $V$ , es de 800 centímetros cúbicos cuando la presión es 200 milímetros (mm) de mercurio, determine el volumen cuando la presión es de 25 mm mercurio.
- 54. Ley de Hooke** La ley de Hooke establece que la longitud,  $S$ , que un resorte se estirará, varía directamente con la fuerza (o peso),  $F$ , sujeta al resorte. Si un resorte se estira 1.4 pulgadas cuando se sujeta a él un peso de 20 libras, ¿cuánto se estirará cuando se sujeten a él 10 libras?

## Problemas de reto

Además de la variación directa y la variación inversa, también existe la variación conjunta y la variación combinada. En la **variación conjunta** una cantidad puede variar directamente (con el producto de) dos o más cantidades. En la **variación combinada**, una cantidad puede variar directamente con algunas variables e inversamente con otras. El ejercicio 55 es un problema de variación conjunta, y el ejercicio 56 es un problema de variación combinada. Para los ejercicios 55 y 56, **a)** escriba la variación, y **b)** determine la cantidad que se indica.

- 55.**  $x$  varía conjuntamente con  $y$  y  $z$ . Si  $x$  es 72 cuando  $y = 18$  y  $z = 2$ , determine  $x$  cuando  $y = 36$  y  $z = 3$ .
- 56.**  $T$  varía directamente con el cuadrado de  $D$  e inversamente con  $F$ . Si  $T = 18$  cuando  $D = 6$  y  $F = 4$ , determine  $T$  cuando  $D = 8$  y  $F = 8$ .

## Ejercicios de repaso acumulativo

[4.6] **57.** Divida  $\frac{8x^2 + 6x - 25}{4x + 9}$ .

[5.1] **58.** Factorice  $y(z - 2) + 3(z - 2)$ .

[5.6] **59.** Resuelva  $3x^2 - 24 = -6x$ .

[6.2] **60.** Multiplique  $\frac{x + 3}{x - 3} \cdot \frac{x^3 - 27}{x^2 + 3x + 9}$ .

## RESUMEN DEL CAPÍTULO

### Términos y frases importantes

#### 6.1

Expresión racional  
Signos de una fracción  
Simplificar una expresión racional

#### 6.2

Dividir expresiones racionales  
Multiplicar expresiones racionales

#### 6.3

Mínimo común denominador (mcd)

Restar expresiones racionales con un denominador común  
Sumar expresiones racionales con un denominador común

#### 6.4

Restar expresiones racionales con denominadores no comunes

Sumar expresiones racionales con denominadores no comunes

#### 6.5

Fracción compleja

#### 6.6

Ecuación racional  
Raíces extrañas o soluciones extrañas para una ecuación racional

#### 6.7

Problemas de geometría  
Problemas de movimiento  
Problemas de trabajo

#### 6.8

Constante de proporcionalidad  
Variación  
Variación directa  
Variación inversa

(continúa en la página siguiente)

## HECHOS IMPORTANTES

<b>Para cualquier fracción:</b>	$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}, b \neq 0$
<b>Para sumar fracciones:</b>	$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, c \neq 0$
<b>Para restar fracciones:</b>	$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}, c \neq 0$
<b>Para multiplicar fracciones:</b>	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, b \neq 0, d \neq 0$
<b>Para dividir fracciones:</b>	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$
<b>Tiempo =</b>	$\frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$
<b>Variación directa:</b>	$y = kx$
<b>Variación inversa:</b>	$y = \frac{k}{x}$

## Ejercicios de repaso del capítulo

[6.1] Determine los valores de la variable para los cuales están definidas las expresiones siguientes.

1.  $\frac{5}{2x-12}$

2.  $\frac{2}{x^2-8x+15}$

3.  $\frac{2}{5x^2+4x-1}$

Simplifique.

4.  $\frac{y}{xy-3y}$

5.  $\frac{x^3+4x^2+12x}{x}$

6.  $\frac{9x^2+6xy}{3x}$

7.  $\frac{x^2+2x-8}{x-2}$

8.  $\frac{a^2-36}{a-6}$

9.  $\frac{-2x^2+7x+4}{x-4}$

10.  $\frac{b^2-8b+15}{b^2-3b-10}$

11.  $\frac{4x^2-11x-3}{4x^2-7x-2}$

12.  $\frac{2x^2-21x+40}{4x^2-4x-15}$

[6.2] Multiplique.

13.  $\frac{5a^2}{6b} \cdot \frac{2}{4a^2b}$

14.  $\frac{15x^2y^3}{3z} \cdot \frac{6z^3}{5xy^3}$

15.  $\frac{40a^3b^4}{7c^3} \cdot \frac{14c^5}{5a^5b}$

16.  $\frac{1}{x-4} \cdot \frac{4-x}{3}$

17.  $\frac{-m+4}{15m} \cdot \frac{10m}{m-4}$

18.  $\frac{a-2}{a+3} \cdot \frac{a^2+4a+3}{a^2-a-2}$

Divida.

19.  $\frac{16x^6}{y^2} \div \frac{x^4}{4y}$

20.  $\frac{8xy^2}{z} \div \frac{x^4y^2}{4z^2}$

21.  $\frac{5a+5b}{a^2} \div \frac{a^2-b^2}{a^2}$

22.  $\frac{1}{a^2+8a+15} \div \frac{3}{a+5}$

23.  $(t+8) \div \frac{t^2+5t-24}{t-3}$

24.  $\frac{x^2+xy-2y^2}{4y} \div \frac{x+2y}{12y^2}$

[6.3] *Sume o reste.*

25.  $\frac{n}{n+5} - \frac{5}{n+5}$

26.  $\frac{3x}{x+7} + \frac{21}{x+7}$

27.  $\frac{9x-4}{x+8} + \frac{76}{x+8}$

28.  $\frac{7x-3}{x^2+7x-30} - \frac{3x+9}{x^2+7x-30}$

29.  $\frac{5h^2+12h-1}{h+5} - \frac{h^2-5h+14}{h+5}$

30.  $\frac{6x^2-4x}{2x-3} - \frac{-3x+12}{2x-3}$

Determine el mínimo común denominador (mcd) de cada expresión.

31.  $\frac{a}{10} + \frac{4a}{3}$

32.  $\frac{8}{x+3} + \frac{4x}{x+3}$

33.  $\frac{5}{4xy^3} - \frac{7}{10x^2y}$

34.  $\frac{6}{x+1} - \frac{3x}{x}$

35.  $\frac{4}{n-5} + \frac{2n-3}{n-4}$

36.  $\frac{7x-12}{x^2+x} - \frac{4}{x+1}$

37.  $\frac{2r-9}{r-s} - \frac{6}{r^2-s^2}$

38.  $\frac{4x^2}{x-7} + 8x^2$

39.  $\frac{19x-5}{x^2+2x-35} + \frac{3x-2}{x^2+9x+14}$

[6.4] *Sume o reste.*

40.  $\frac{4}{3y^2} + \frac{y}{2y}$

41.  $\frac{2x}{xy} + \frac{1}{5x}$

42.  $\frac{5x}{3xy} - \frac{4}{x^2}$

43.  $6 - \frac{2}{x+2}$

44.  $\frac{x-y}{y} - \frac{x+y}{x}$

45.  $\frac{7}{x+4} + \frac{4}{x}$

46.  $\frac{2}{3x} - \frac{3}{3x-6}$

47.  $\frac{3}{(z+5)} + \frac{7}{(z+5)^2}$

48.  $\frac{x+2}{x^2-x-6} + \frac{x-3}{x^2-8x+15}$

[6.2–6.4] *Realice cada operación que se indica.*

49.  $\frac{x+4}{x+6} - \frac{x-5}{x+2}$

50.  $3 + \frac{x}{x-4}$

51.  $\frac{a+2}{b} \div \frac{a-2}{4b^2}$

52.  $\frac{x+3}{x^2-9} + \frac{2}{x+3}$

53.  $\frac{5p+10q}{p^2q} \cdot \frac{p^4}{p+2q}$

54.  $\frac{4}{(x+2)(x-3)} - \frac{4}{(x-2)(x+2)}$

55.  $\frac{x+7}{x^2+9x+14} - \frac{x-10}{x^2-49}$

56.  $\frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{xy+x^2}{x^2-y^2}$

57.  $\frac{3x^2-27y^2}{20} \div \frac{(x-3y)^2}{4}$

58.  $\frac{a^2-9a+20}{a-4} \cdot \frac{a^2-8a+15}{a^2-10a+25}$

59.  $\frac{a}{a^2-1} - \frac{2}{3a^2-2a-5}$

60.  $\frac{2x^2+6x-20}{x^2-2x} \div \frac{x^2+7x+10}{4x^2-16}$

[6.5] *Simplifique cada fracción compleja.*

61.  $\frac{3 + \frac{2}{3}}{\frac{3}{5}}$

62.  $\frac{1 + \frac{5}{8}}{4 - \frac{9}{16}}$

63.  $\frac{\frac{12ab}{9c}}{\frac{4a}{c^2}}$

64.  $\frac{36x^4y^2}{\frac{9xy^5}{4z^2}}$

65.  $\frac{a - \frac{a}{b}}{\frac{1+a}{b}}$

66.  $\frac{r^2 + \frac{1}{s}}{s^2}$

67.  $\frac{\frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}}{6 - \frac{1}{x}}$

68.  $\frac{\frac{x}{x+y}}{\frac{x^2}{2x+2y}}$

69.  $\frac{\frac{3}{x}}{\frac{3}{x^2}}$

70.  $\frac{\frac{1}{a} + 2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{a}}$

71.  $\frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}$

72.  $\frac{\frac{3x}{y} - x}{\frac{y}{y} - 1}$

## [6.6] Resuelva.

73.  $\frac{5}{9} = \frac{5}{x+3}$

74.  $\frac{x}{6} = \frac{x-4}{2}$

75.  $\frac{n}{5} + 12 = \frac{n}{2}$

76.  $\frac{3}{x} - \frac{1}{6} = \frac{1}{x}$

77.  $\frac{-4}{d} = \frac{3}{2} + \frac{4-d}{d}$

78.  $\frac{1}{x-7} + \frac{1}{x+7} = \frac{1}{x^2-49}$

79.  $\frac{x-3}{x-2} + \frac{x+1}{x+3} = \frac{2x^2+x+1}{x^2+x-6}$

80.  $\frac{a}{a^2-64} + \frac{4}{a+8} = \frac{3}{a-8}$

81.  $\frac{d}{d-2} - 2 = \frac{2}{d-2}$

## [6.7] Resuelva.

82. **Castillos de arena** John y Amy Brogan tardan 6 horas en construir un castillo de arena. Paul y Cindy Carter tardan 5 horas en construir el mismo castillo de arena. ¿Cuánto tiempo tardarán las cuatro personas, juntas, en construir el castillo de arena?



83. **Llenado de una piscina** Una manguera de  $\frac{3}{4}$  de pulgada de diámetro puede llenar una piscina en 7 horas. Una manguera de  $\frac{5}{16}$  de pulgada de diámetro puede sacar toda el agua de la piscina llena en 12 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse la piscina si mientras una manguera está llenando, la otra está sacando el agua de la piscina?

84. **Suma de números** Un número es cinco veces mayor que otro. La suma de sus recíprocos es 6. Determine los números.

85. **Patinaje y ciclismo** Robert Johnston puede recorrer 3 millas en sus patines en línea en el mismo tiempo en que Tran Lee puede recorrer 8 millas en su bicicleta de montaña. Si la velocidad de Tran es 3.5 millas por hora más rápido que la de Robert en sus patines, determine la velocidad de cada uno de ellos.

## [6.8]

86. **Dosis de droga** La dosis recomendada,  $d$ , del antibiótico vancomicina, es directamente proporcional al peso,  $w$ , de la persona. Si Carmen Brown, quien pesa 132 libras se le administra 2376 miligramos, determine la dosis recomendada para Bill Glenn, quien tiene un peso de 172 libras.

87. **Velocidad de un corredor** El tiempo,  $t$ , que tarda un corredor en cubrir una distancia específica es inversamente proporcional a la velocidad del corredor. Si Nhat Chung corre a un promedio de 6 millas por hora, terminará una carrera en 1.4 horas. ¿Cuánto tardará Leif Lundgren, en terminar la misma carrera, si corre a 5 millas por hora?

## Examen de práctica del capítulo

Simplifique.

1.  $\frac{-6+x}{x-6}$

2.  $\frac{x^3-1}{x^2-1}$

Realice cada una de las operaciones que se indican.

3.  $\frac{15x^2y^3}{4z^2} \cdot \frac{8xz^3}{5xy^4}$

4.  $\frac{a^2-9a+14}{a-2} \cdot \frac{a^2-4a-21}{(a-7)^2}$

5.  $\frac{x^2-x-6}{x^2-9} \cdot \frac{x^2-6x+9}{x^2+4x+4}$

6.  $\frac{x^2-1}{x+2} \cdot \frac{2x+4}{2-2x^2}$

7.  $\frac{x^2-4y^2}{3x+12y} \div \frac{x+2y}{x+4y}$

8.  $\frac{15}{y^2+2y-15} \div \frac{3}{y-3}$

9.  $\frac{m^2+3m-18}{m-3} \div \frac{m^2-8m+15}{3-m}$

10.  $\frac{4x+3}{2y} + \frac{2x-5}{2y}$

11.  $\frac{7x^2-4}{x+3} - \frac{6x+7}{x+3}$

12.  $\frac{4}{xy} - \frac{3}{xy^3}$

13.  $4 - \frac{5z}{z-5}$

14.  $\frac{x-5}{x^2-16} - \frac{x-2}{x^2+2x-8}$

Simplifique.

15. 
$$\frac{5 + \frac{1}{2}}{3 - \frac{1}{5}}$$

16. 
$$\frac{x + \frac{x}{y}}{\frac{1}{x}}$$

17. 
$$\frac{2 + \frac{3}{x}}{\frac{2}{x} - 5}$$

Resuelva.

18. 
$$6 + \frac{2}{x} = 7$$

19. 
$$\frac{2x}{3} - \frac{x}{4} = x + 1$$

20. 
$$\frac{x}{x-8} + \frac{6}{x-2} = \frac{x^2}{x^2 - 10x + 16}$$

Resuelva.

21. **Trabajo en conjunto** El señor Jackson, en su tractor, puede limpiar un acre de campo en 8 horas. El señor Hackett, en su tractor, puede limpiar un acre de campo en 5 horas. Si trabajan juntos, ¿cuánto tiempo tardarán en limpiar un acre de campo?
22. **Determinación de un número** La suma de un número positivo y su recíproco es 2. Determine el número.
23. **Área de un triángulo** El área de un triángulo es de 27 pulgadas cuadradas. Si la altura es 3 pulgadas menor que 2 veces la base, determine la altura y la base del triángulo.
24. **Ejercicio** La Conya Bertrell ejercita durante  $1\frac{1}{2}$  horas diariamente. Durante la primera parte de su rutina, ella conduce una bicicleta y promedia 10 millas por hora. Durante el resto del tiempo, ella patina y promedia 4 millas por hora. Si la distancia total que recorre es 12 millas, ¿qué distancia recorre en patines?

25. **Composición musical** La longitud de onda de las ondas de sonido,  $w$ , es inversamente proporcional a la frecuencia,  $f$  (o tono). Si una frecuencia de 263 ciclos por segundo (media C en un piano) produce una longitud de onda de alrededor de 4.3 pies, determine la longitud de onda de una frecuencia de 1000 ciclos por segundo.



## Examen de repaso acumulativo

Resuelva el siguiente examen y compare sus respuestas con las que aparecen al final del examen. Repase cualquier pregunta que haya respondido de manera incorrecta. La sección y el objetivo en donde se estudió el material se indica a continuación de la respuesta.

1. Evalúe  $3x^2 - 5xy + 3$  cuando  $x = -4$  y  $y = -2$ .
2. Resuelva la ecuación  $5z + 4 = -3(z - 7)$ .
3. Simplifique  $\left(\frac{8x^6y^3}{2x^5y^5}\right)^3$ .
4. Despeje  $R$  de la fórmula  $P = 2E + 3R$ .
5. Simplifique  $(6x^2 - 3x - 5) - (-2x^2 - 8x - 9)$ .
6. Multiplique  $(3n^2 - 4n + 3)(2n - 5)$ .
7. Factorice  $6a^2 - 6a - 5a + 5$ .
8. Factorice  $13x^2 + 26x - 39$ .
9. Evalúe  $[7 - [3(8 \div 4)]^2 + 9 \cdot 4]^2$ .
10. Resuelva  $2(x + 3) \leq -(x + 5) - 1$  y grafique la solución en una recta numérica.
11. Divida  $\frac{4x - 34}{8}$ .
12. Resuelva  $2x^2 = 11x - 12$ .
13. Multiplique  $\frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} \cdot \frac{x^2 - 2x - 8}{2x^2 - 7x - 4}$ .
14. Reste  $\frac{r}{r+2} - \frac{6}{r-5}$ .
15. Sume  $\frac{4}{x^2 - 3x - 10} + \frac{2}{x^2 + 5x + 6}$ .
16. Resuelva la ecuación  $\frac{x}{9} - \frac{x}{6} = \frac{1}{12}$ .
17. Resuelva la ecuación  $\frac{7}{x+3} + \frac{5}{x+2} = \frac{5}{x^2 + 5x + 6}$ .

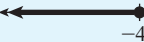


- 18. Planes médicos** Un distrito escolar permite a sus empleados elegir entre dos planes médicos. Con el plan 1, el empleado paga 10% de todas las facturas médicas (el distrito escolar paga el saldo). Con el plan 2, el empleado paga al distrito escolar \$100, y luego el empleado paga 5% de todas las facturas médicas. ¿Cuál es el total de facturas médicas que tendrían como resultado que el empleado pague la misma cantidad con los dos planes?
- 19. Alimento para aves** El propietario de una tienda de alimento para aves desea hacer su propia fórmula de alimento para aves, mediante la mezcla de semillas de girasol, que cuesta \$0.50 cada libra, con un alimento premezclado surtido que cuesta \$0.15 cada libra. ¿Cuántas libras de cada uno tendrá que utilizar para obtener 50 libras de la mezcla con un costo de \$14.50?
- 20. Veleo** Durante la primera etapa de una carrera, el velero *Thumper* navegó a una velocidad promedio de 6.5 millas por hora. Durante la segunda etapa de la carrera, el vien-

to aumentó y el *Thumper* navegó a una velocidad promedio de 9.5 millas por hora. Si la distancia total navegada por el *Thumper* fue de 12.75 millas, y el tiempo total que utilizó fue de 1.5 horas, determine la distancia recorrida por el *Thumper* en cada etapa de la carrera.



### Respuestas al examen de repaso acumulativo

1. 131; [Sec. 1.9, Obj. 6]   2.  $\frac{17}{8}$ ; [Sec. 2.5, Obj. 1]   3.  $\frac{64x^3}{y^6}$ ; [Sec. 4.1, Obj. 3]   4.  $R = \frac{P - 2E}{3}$ ; [Sec. 3.1, Obj. 3]
5.  $8x^2 + 5x + 4$ ; [Sec. 4.4, Obj. 3]   6.  $6n^3 - 23n^2 + 26n - 15$ ; [Sec. 4.5, Obj. 6]   7.  $(6a - 5)(a - 1)$ ; [Sec. 5.2, Obj. 1]
8.  $13(x + 3)(x - 1)$ ; [Sec. 5.3, Obj. 2]   9. 49; [Sec. 1.9, Obj. 5]   10.  $x \leq -4$ , ; [Sec. 2.7, Obj. 1]
11.  $\frac{1}{2}x - \frac{17}{4}$ ; [Sec. 4.6, Obj. 1]   12.  $4\frac{3}{2}$ ; [Sec. 5.6, Obj. 2]   13.  $\frac{x + 3}{2x + 1}$ ; [Sec. 6.2, Obj. 1]   14.  $\frac{r^2 - 11r - 12}{(r + 2)(r - 5)}$ ; [Sec. 6.4, Obj. 1]
15.  $\frac{6x + 2}{(x - 5)(x + 2)(x + 3)}$ ; [Sec. 6.4, Obj. 1]   16.  $-\frac{3}{2}$ ; [Sec. 6.6, Obj. 1]   17. No hay solución; [Sec. 6.6, Obj. 2]
18. \$2,000; [Sec. 3.3, Obj. 4]   19. 20 libras de semilla de girasol, 30 libras del alimento premezclado; [Sec. 3.5, Obj. 4]   20. Primera etapa: 3.25 millas, segunda etapa: 9.5 millas; [Sec. 3.5, Obj. 2].

## Capítulo 7

# Graficación de ecuaciones lineales



- 7.1** Sistema de coordenadas cartesianas y ecuaciones lineales con dos variables
- 7.2** Graficación de ecuaciones lineales
- 7.3** Pendiente de una recta
- 7.4** Formas pendiente-ordenada al origen y punto-pendiente de una ecuación lineal
- 7.5** Graficación de desigualdades lineales
- 7.6** Funciones

Resumen del capítulo  
Ejercicios de repaso del capítulo  
Examen de práctica del capítulo  
Examen de repaso acumulativo

Existen muchas situaciones en las que una cantidad se compone de una cantidad fija y una cantidad variable. En las páginas 477 y 478, ejemplo 5, analizamos a un alfarero que fabrica y vende jarrones de cerámica en mercados de arte. Ciertos costos incluidos con la fabricación de los jarrones son fijos y otros dependen de la cantidad de bienes hechos. También consideramos la renta de un camión cuando usted paga un monto fijo más un cobro por cada milla recorrida. Las gráficas de ecuaciones lineales pueden usarse para estimar cantidades como el costo total de la fabricación de jarrones o la renta de un camión. Las gráficas se utilizan para mostrar diferentes tipos de información y se utilizan mucho en la industria.



## Avance de la lección

En este capítulo explicaremos cómo graficar ecuaciones lineales. Las gráficas de ecuaciones lineales son rectas. La graficación es uno de los temas más importantes en matemáticas, y cada año su importancia aumenta. Las gráficas también se utilizan en muchas profesiones e industrias. Se utilizan para mostrar información y para hacer proyecciones acerca de tendencias futuras.

En la sección 7.1 presentamos el sistema de coordenadas cartesianas y explicamos cómo trazar puntos. En la sección 7.2 analizamos dos métodos para la graficación de ecuaciones lineales por medio del trazado de puntos y utilizando las intersecciones con los ejes  $x$  y  $y$ . En la sección 7.3, vemos la pendiente de una recta, que es una medida de su inclinación. En la sección 7.4 estudiamos un tercer procedimiento, usando la pendiente, para graficar una ecuación lineal.

En la sección 2.7 resolvimos desigualdades en una variable. En la sección 7.5 resolveremos y graficaremos desigualdades lineales con dos variables. La graficación de desigualdades lineales es una extensión de la graficación de ecuaciones lineales.

En la sección 7.6 daremos una breve introducción a las funciones, que son un concepto unificador en matemáticas. Las funciones se estudiarán con mucha mayor profundidad en cursos posteriores de matemáticas.

Éste es un capítulo importante. Si piensa tomar otros cursos de matemáticas, seguramente la graficación y las funciones serán una parte importante.

## 7.1 SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS Y ECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES



- 1 Trazar puntos en el sistema de coordenadas cartesianas.
- 2 Determinar si un par ordenado es una solución de una ecuación lineal.

### 1 Trazar puntos en el sistema de coordenadas cartesianas



René Descartes

Muchas relaciones algebraicas son más fáciles de entender, si podemos ver una ilustración de ellas. Una **gráfica** muestra la relación entre dos variables en una ecuación. En este capítulo analizamos varios procedimientos que pueden usarse para dibujar gráficas por medio del **sistema de coordenadas cartesianas (o rectangulares)**. Este sistema se llama así por su desarrollador, el matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650).

Así como las coordenadas en un mapa nos ayudan a encontrar ciudades y otras localidades, el sistema de coordenadas cartesianas proporciona un medio para localizar e identificar puntos. Considere el mapa de Great Smoky Mountains (figura 7.1). ¿Puede localizar Cades Cove en el mapa? Si le decimos que se encuentra en el cuadro A3, probablemente lo encontrará mucho más rápido y con mayor facilidad.

El sistema de coordenadas cartesianas es un sistema de cuadrícula, como el de un mapa, excepto que está formado por dos ejes (o rectas numéricas) dibujadas de forma perpendicular entre ellas. Los dos ejes que se intersecan forman cuatro **cuadrantes**, numerados I a IV en la figura 7.2.

El eje horizontal se denomina **eje  $x$**  y el vertical, **eje  $y$** . El punto de intersección de los dos ejes se denomina **origen**. En el origen tanto el valor de  $x$  como el de  $y$  es 0. Comenzando en el origen y moviéndose hacia la derecha, a lo largo del eje  $x$ , los números aumentan (figura 7.3). Iniciando en el origen y moviéndose hacia la izquierda, los números disminuyen. Iniciando en el origen y moviéndose hacia arriba en el eje  $y$ , los números aumentan. Comenzando en el origen y moviéndose hacia abajo, los números disminuyen.

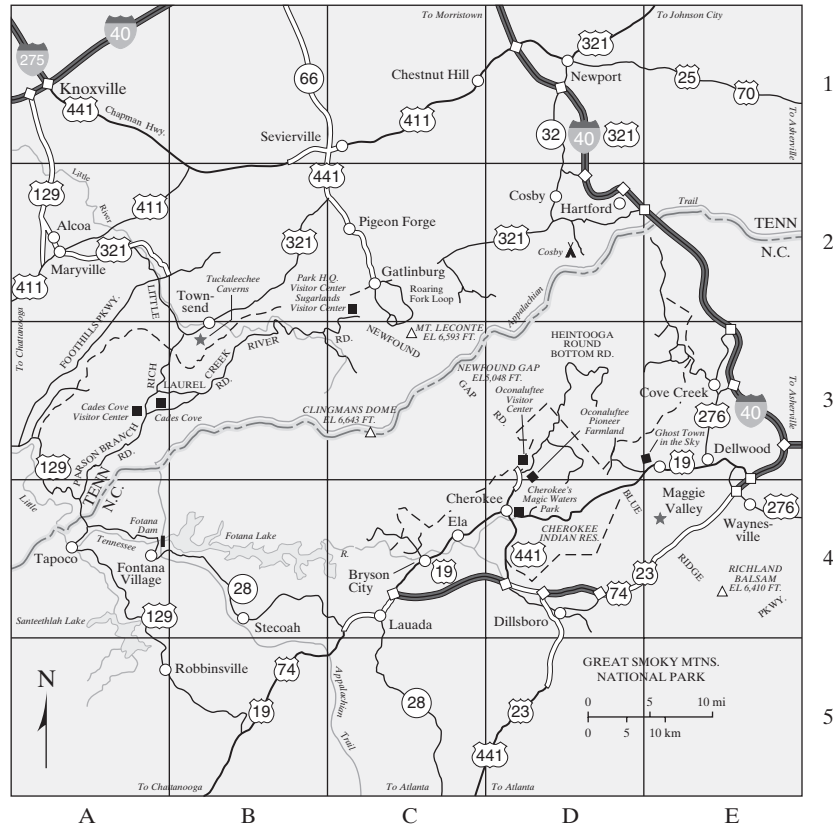


FIGURA 7.1

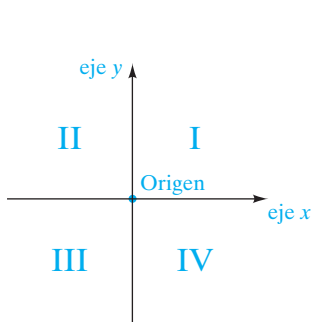


FIGURA 7.2

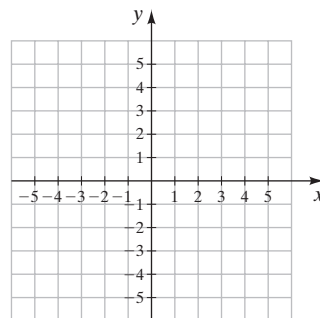


FIGURA 7.3

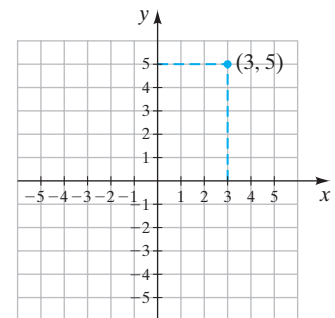


FIGURA 7.4

Para ubicar un punto, es necesario conocer el tanto el valor de  $x$  como el de  $y$ , o las **coordenadas**, del punto. Cuando las coordenadas  $x$  y  $y$  de un punto se colocan entre paréntesis, *con la coordenada  $x$  listada primero*, tenemos un **par ordenado**. En el par ordenado  $(3, 5)$ , la coordenada  $x$  es 3 y la coordenada  $y$  es 5. El punto correspondiente al par ordenado  $(3, 5)$  se trazó en la figura 7.4. La frase “el punto correspondiente al par ordenado  $(3, 5)$ ” con frecuencia se abrevia como “el punto  $(3, 5)$ ”. Por ejemplo, si escribimos “el punto  $(-1, 2)$ ”, significa “el punto correspondiente al par ordenado  $(-1, 2)$ ”.

**EJEMPLO 1** Trace (o marque) cada punto en los mismos ejes.

- a)**  $A(5, 3)$       **b)**  $B(2, 4)$       **c)**  $C(-3, 1)$   
**d)**  $D(4, 0)$       **e)**  $E(-2, -5)$       **f)**  $F(0, -3)$   
**g)**  $G(0, 2)$       **h)**  $H\left(6, -\frac{9}{2}\right)$       **i)**  $I\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

**Solución** El primer número de cada par ordenado es la coordenada  $x$  y el segundo es la coordenada  $y$ . Los puntos se trazaron en la figura 7.5.

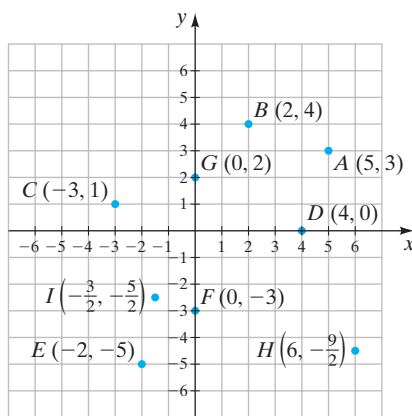


FIGURA 7.5



**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 29**

Observe que si la coordenada  $x$  es 0, como en los ejemplos 1 **f)** y 1 **g)**, el punto está en el eje  $y$ . Cuando la coordenada  $y$  es 0, como en el ejemplo 1 **d)**, el punto está en el eje  $x$ .

**EJEMPLO 2** Liste los pares ordenados para cada punto que se muestra en la figura 7.6.

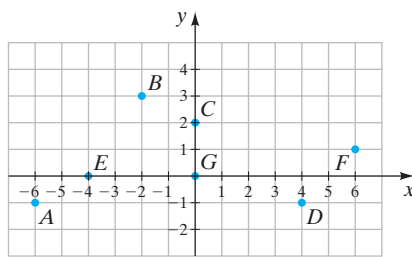


FIGURA 7.6

**Solución** Recuerde dar primero el valor de  $x$  en el par ordenado.

Punto	Par ordenado
$A$	$(-6, -1)$
$B$	$(-2, 3)$
$C$	$(0, 2)$
$D$	$(4, -1)$
$E$	$(-4, 0)$
$F$	$(6, 1)$
$G$	$(0, 0)$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 27**



## 2 Determinar si un par ordenado es una solución de una ecuación lineal

En la sección 7.2 aprenderemos a graficar ecuaciones lineales con dos variables. A continuación explicamos cómo identificar una ecuación lineal con dos variables.

Una **ecuación lineal con dos variables** es una ecuación que puede ponerse en la forma

$$ax + by = c$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales.

Las gráficas de las ecuaciones de la forma  $ax + by = c$  son líneas rectas. Por esta razón, tales ecuaciones se denominan **lineales**. Las ecuaciones lineales pueden escribirse de varias formas, como mostraremos más adelante. Una ecuación lineal en la forma  $ax + by = c$  se dice que está en la **forma estándar**.

### Ejemplos de ecuaciones lineales

$$4x - 3y = 12$$

$$y = 5x + 3$$

$$x - 3y + 4 = 0$$

En los ejemplos, observe que sólo la ecuación  $4x - 3y = 12$  está en forma estándar. Sin embargo, las dos últimas ecuaciones pueden escribirse en forma estándar, como sigue:

$$\begin{array}{ll} y = 5x + 3 & x - 3y + 4 = 0 \\ -5x + y = 3 & x - 3y = -4 \end{array}$$

La mayoría de las ecuaciones que hemos analizado hasta ahora sólo contenían una variable, con excepción de las fórmulas utilizadas en las secciones de aplicación. Considere la ecuación lineal con *una* variable,  $2x + 3 = 5$ . ¿Cuál es su solución?

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 5 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Esta ecuación sólo tiene una solución: 1.

**Comprobación**

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 5 \\ 2(1) + 3 &\stackrel{?}{=} 5 \\ 5 &= 5 \quad \text{Verdadero.} \end{aligned}$$

Ahora consideremos la ecuación lineal con *dos* variables,  $y = x + 1$ . ¿Cuál es la solución? Ya que la ecuación tiene dos variables, su solución debe tener dos números, uno para cada variable. Un par de números que satisface esta ecuación es  $x = 1$  y  $y = 2$ ; para confirmar que esto es verdadero, sustituimos ambos valores en la ecuación.

**Comprobación**

$$\begin{aligned} y &= x + 1 \\ 2 &\stackrel{?}{=} 1 + 1 \\ 2 &= 2 \quad \text{Verdadero.} \end{aligned}$$

Escribimos esta respuesta como un par ordenado con los valores de  $x$  y  $y$  dentro de un paréntesis y separados por una coma. Recuerde que el valor de  $x$  siempre se anota primero, ya que la forma de un par ordenado es  $(x, y)$ . Por tanto, una posible solución para esta ecuación es el par ordenado  $(1, 2)$ . La ecuación  $y = x + 1$  tiene otras posibles soluciones. A continuación mostramos otras tres soluciones y sus comprobaciones.

	Solución	Solución	Solución
	$x = 2, y = 3$	$x = -3, y = -2$	$x = -\frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$
Comprobación	$y = x + 1$ $3 \stackrel{?}{=} 2 + 1$ $3 = 3$ Verdadero.	$y = x + 1$ $-2 \stackrel{?}{=} -3 + 1$ $-2 = -2$ Verdadero.	$y = x + 1$ $\frac{2}{3} \stackrel{?}{=} -\frac{1}{3} + 1$ $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ Verdadero.

**Solución escrita como un par ordenado**

$(2, 3)$                        $(-3, -2)$                        $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

¿Cuántas soluciones posibles tiene la ecuación  $y = x + 1$ ? La ecuación  $y = x + 1$  tiene un número ilimitado o *infinito* de soluciones posibles. Como no es posible anotarlas todas, las ilustramos como una gráfica.

**DEFINICIÓN**

Una **gráfica** de una ecuación es una ilustración de un conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación.

La figura 7.7a muestra los puntos  $(2, 3)$ ,  $(-3, -2)$  y  $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$  trazados en un sistema de coordenadas cartesianas. La figura 7.7b muestra una recta dibujada que pasa por los tres puntos. Se colocaron puntas de flecha en los extremos de la recta para mostrar que la recta continúa en ambas direcciones. Todo punto en esta recta satisface la ecuación  $y = x + 1$ , así que esta gráfica ilustra todas las soluciones de  $y = x + 1$ . El par ordenado  $(1, 2)$ , que está en la recta, también satisface la ecuación.

¿Qué observó con respecto a los puntos  $(2, 3)$ ,  $(1, 2)$ ,  $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$  y  $(-3, -2)$  en la figura 7.7b? Quizá notó que están en una línea recta. Un conjunto de puntos que están en una recta se dice que son **colineales**. En la sección 7.2, cuando grafique ecuaciones lineales trazando puntos, los puntos que grafique deben ser colineales.

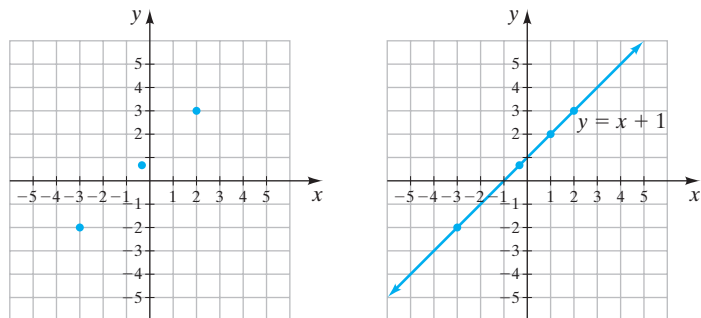


FIGURA 7.7

(a)

(b)

**EJEMPLO 3** Determine si los tres puntos dados son colineales.

- a)  $(2, 7)$ ,  $(0, 3)$  y  $(-2, -1)$
- b)  $(0, 5)$ ,  $(\frac{5}{2}, 0)$  y  $(5, -5)$
- c)  $(-2, -5)$ ,  $(0, 1)$  y  $(5, 8)$

**Solución** Trazamos los puntos para determinar si son colineales. La solución se muestra en la figura 7.8.

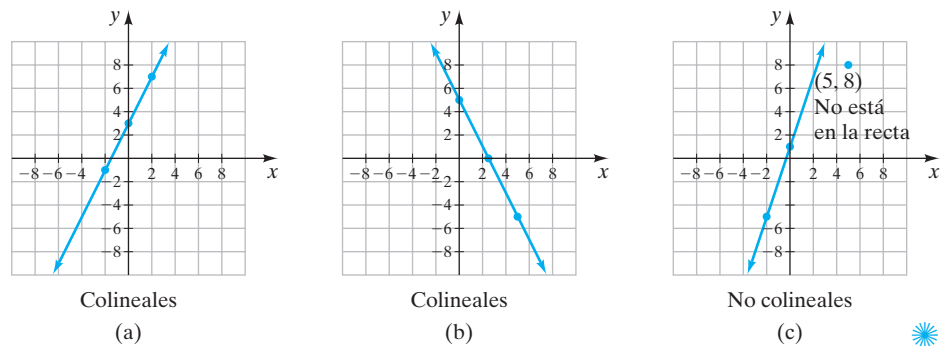


FIGURA 7.8

**AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 33**

Para graficar una ecuación, necesitará determinar pares ordenados que satisfacen la ecuación y luego trazar los puntos.

¿Cuántos puntos se necesitan para graficar una ecuación lineal? Como se mencionó antes, *la gráfica de toda ecuación lineal de la forma  $ax + by = c$  será una línea recta*. Como sólo se necesitan dos puntos para dibujar una recta, sólo dos puntos son necesarios para graficar una ecuación lineal. Sin embargo, siempre es buena idea trazar al menos tres puntos. Vea la siguiente Sugerencia.

**SUGERENCIA**

Sólo se necesitan dos puntos para graficar una ecuación lineal, ya que la gráfica de toda ecuación lineal es una línea recta. Sin embargo, si usted grafica una ecuación lineal utilizando sólo dos puntos y comete un error al determinar o trazar uno de esos puntos, su gráfica será errónea y no lo sabrá. En las figura 7.9a y b, sólo trazamos dos puntos para mostrar que si uno de los dos puntos trazados es incorrecto, la gráfica será incorrecta. En ambas figuras 7.9a y b, utilizamos el par ordenado  $(-2, -2)$ . Sin embargo, en la figura 7.9a el segundo punto es  $(1, 2)$ , mientras que en la figura 7.9b el segundo punto es  $(2, 1)$ . Observe cómo difieren las dos gráficas.

Si utiliza al menos tres puntos para trazar su gráfica, como en la figura 7.7b en la página 444 y son colineales, probablemente no haya cometido un error.

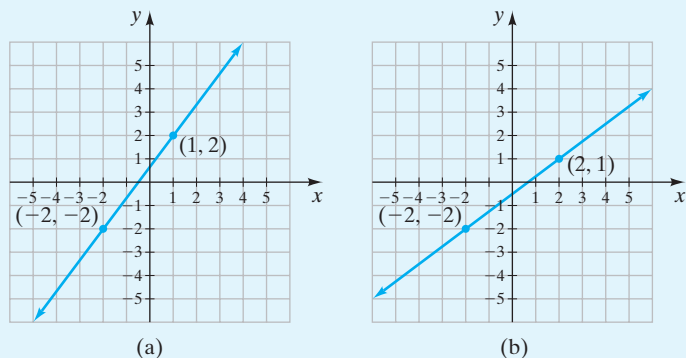


FIGURA 7.9



**EJEMPLO 4** a) Determine cuál de los siguientes pares ordenados satisfacen la ecuación  $2x + y = 4$ .

$$(2, 0), (0, 4), (3, 3), (-1, 6)$$

b) Trace todos los puntos que satisfacen la ecuación, en los mismos ejes, y dibuje una recta que pase por los puntos.

c) ¿Qué representa esta recta?

**Solución**


a) Sustituimos los valores para  $x$  y  $y$  en la ecuación  $2x + y = 4$  y determinamos si satisfacen la ecuación.

**Comprobación**

$(2, 0)$	$(0, 4)$
$2x + y = 4$	$2x + y = 4$
$2(2) + 0 \stackrel{?}{=} 4$	$2(0) + 4 \stackrel{?}{=} 4$
$4 = 4$ Verdadero.	$4 = 4$ Verdadero.
$(3, 3)$	$(-1, 6)$
$2x + y = 4$	$2x + y = 4$
$2(3) + 3 \stackrel{?}{=} 4$	$2(-1) + 6 \stackrel{?}{=} 4$
$9 = 4$ Falso.	$4 = 4$ Verdadero.

Los pares ordenados  $(2, 0)$ ,  $(0, 4)$  y  $(-1, 6)$  satisfacen la ecuación. El par ordenado  $(3, 3)$  no satisface la ecuación.

b) La figura 7.10 muestra los tres puntos que satisfacen la ecuación. Una recta dibujada por los tres puntos muestra que son colineales.

c) La recta representa todas las soluciones de  $2x + y = 4$ . Las coordenadas de todo punto en esta recta satisfacen la ecuación  $2x + y = 4$ . 

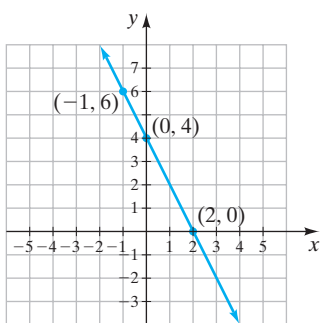


FIGURA 7.10

**Matemáticas en acción**

**René Descartes y el ratón de la computadora**

En estos días es difícil imaginarse una computadora sin un dispositivo para señalar, como un ratón o un trackball. A principios de la década de 1950, las computadoras eran consideradas como calculadoras maravillosamente rápidas; era posible darle problemas, un lote a la vez, y resolverlos, de la misma forma por lotes. Las computadoras eran gigantes, del tamaño de una habitación y estaban atendidas por técnicos ataviados con batas blancas. Los conceptos como “computadora personal” o “programas interactivos” tuvieron que esperar dos décadas.

Sin embargo, desde ese entonces Douglas C. Engelbart estaba concibiendo la idea de la computadora como una herramienta pensante para complementar la potencia de la mente humana, una herramienta que trabajaría junto con la mente. Trabajando en la Universidad de Stanford con otros, creó el NLS (sistema en línea, oN Line System), que resaltaba un ambiente visual para el usuario de la computadora. En una conferencia de cómputo en 1968, él mostró, por primera vez, tecnología como el ratón y el procesador de palabras.

El ratón ha evolucionado desde 1968, con sensores ópticos en lugar de las ruedecillas mecánicas en al-

gunos modelos, pero el concepto subyacente del ratón y de casi todos los dispositivos de señalamiento ha permanecido sin cambio. La posición de un cursor en la pantalla sigue la pista de las coordenadas cartesianas del dispositivo de señalamiento. No importa en qué dirección mueva el ratón, se procesa el movimiento como una combinación de tantas unidades a lo largo del eje  $x$  y tantas unidades a lo largo del eje  $y$ . Los circuitos del ratón, en combinación con los programas del propio ratón, “saben” en donde colocar el cursor en la pantalla en cada instante, aun si usted levanta el ratón y lo coloca en otro punto.

La historia cuenta que René Descartes (1596-1650) pensó en su sistema de coordenadas mientras observaba una mosca caminar en el techo. Él notó que la trayectoria de la mosca podría describirse por la distancia de la mosca a cada una de las paredes. Si es así, todos tenemos que agradecer a la mosca por la manera de organizar y hacer seguimiento de los números que están incorporados en el ratón de la computadora y por los incontables actos de creatividad que la herramienta ha hecho posible.



### Uso de la calculadora graficadora

Algunos de ustedes pueden tener calculadoras graficadoras. En este capítulo encontrará varios recuadros de *Uso de la calculadora graficadora* que le proporcionarán información para el uso de la calculadora. Puesto que las instrucciones serán generales, tal vez sea necesario consultar el manual de su calculadora para instrucciones más específicas. La secuencia de teclas que utilizará dependerá de la marca y modelo de su calculadora. En este libro mostramos la secuencia de teclas y las pantallas de graficación de la calculadora Texas Instruments TI-83 Plus.

Un de los principales usos de este tipo de calculadoras es graficar ecuaciones. La *ventana* de una calculadora graficadora es la pantalla rectangular en la que se despliega la gráfica. La figura 7.11 muestra la ventana de la calculadora, en la que se agregaron etiquetas; la figura 7.12 muestra el significado de la información dada en la figura 7.11. Estas son las *configuraciones estándar de la ventana* para una pantalla de graficación.

El eje  $x$  en la ventana estándar varía de  $-10$  (el valor mínimo de  $x$ ,  $X_{min}$ ) a  $10$  (el valor máximo de  $x$ ,  $X_{max}$ ) con una escala de  $1$ . Por tanto, cada marca representa una unidad ( $X_{scl} = 1$ ). El eje  $y$  va de  $-10$  (el valor mínimo de  $y$ ,  $Y_{min}$ ) a  $10$  (el valor máximo de  $y$ ,  $Y_{max}$ ) con una escala de  $1$  ( $Y_{scl} = 1$ ). Los números debajo de la gráfica en la figura 7.11 indican, en orden, la configuración de la ventana:  $X_{min}$ ,  $X_{max}$ ,  $X_{scl}$ ,  $Y_{min}$ ,  $Y_{max}$ ,  $Y_{scl}$ . *Cuando no se muestre la configuración debajo de una gráfica siempre suponga que se utiliza la configuración de la ventana estándar.* Como la ventana es rectangular, la distancia entre marcas en la ventana estándar es mayor en el eje  $x$  que en el eje  $y$ .

Con frecuencia, al graficar necesitará cambiar la configuración de la ventana. Lea el manual de su calculadora graficadora para aprender cómo cambiar la configuración de la ventana. En la TI-83 Plus, usted presiona la tecla **WINDOW** y luego cambia la configuración.

Ahora, encienda su calculadora y presione la tecla **WINDOW**. Si es necesario, ajuste la ventana de modo que luzca similar a la figura 7.12. Si es necesario, utilice la tecla **(-)** para escribir números negativos. (En la TI-83 Plus también puede obtener la configuración de la ventana estándar presionando la tecla **ZOOM** y luego presionando la opción 6, ZStandar). Ahora presione la tecla **GRAPH**. Su pantalla debe ser similar a la de la figura 7.11 (sin las etiquetas que se agregaron). Ahora presione nuevamente la tecla **WINDOW**; luego utilice las teclas adecuadas para cambiar la configuración de la ventana de modo que sea igual a la que se muestra en la figura 7.13.

Vuelva a presionar la tecla **GRAPH**. Debe obtener la pantalla que se muestra en la figura 7.14; observe que, en dicha figura, el eje  $x$  inicia en  $0$  y va hasta  $50$ , y cada marca representa  $5$  unidades (representadas por los primeros  $3$  números bajo la ventana). El eje  $y$  inicia en  $0$  y va hasta  $100$ , y cada marca representa  $10$  unidades (representadas por los últimos  $3$  números bajo la ventana).

### Ejercicios

Para los ejercicios 1 y 2, configure su ventana a los valores que se muestran. Luego utilice la tecla **GRAPH** para mostrar los ejes que se formaron.

1.  $X_{min} = -20$ ,  $X_{max} = 40$ ,  $X_{scl} = 5$ ,  
 $Y_{min} = -10$ ,  $Y_{max} = 60$ ,  $Y_{scl} = 10$
2.  $X_{min} = -200$ ,  $X_{max} = 400$ ,  $X_{scl} = 100$ ,  
 $Y_{min} = -500$ ,  $Y_{max} = 1000$ ,  $Y_{scl} = 200$

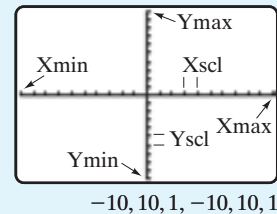


FIGURA 7.11

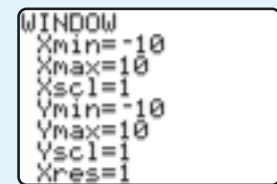


FIGURA 7.12

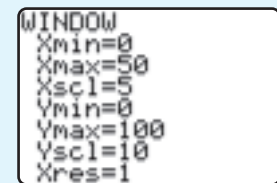


FIGURA 7.13

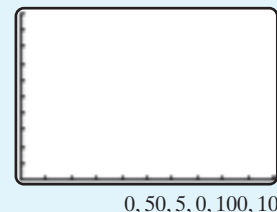


FIGURA 7.14

(continúa en la página siguiente)

- 3. Considere la pantalla en la figura 7.15. Los números bajo la ventana se han omitido. Si  $X_{\min} = -300$  y  $X_{\max} = 500$ , determine  $X_{\text{scl}}$ . Explique cómo determinó su respuesta.
- 4. En la figura 7.15, si  $Y_{\min} = -200$  y  $Y_{\max} = 100$ , determine  $Y_{\text{scl}}$ . Explique cómo determinó su respuesta.

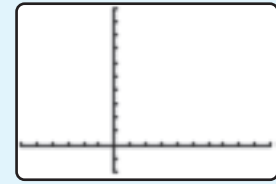


FIGURA 7.15

## Conjunto de ejercicios 7.1

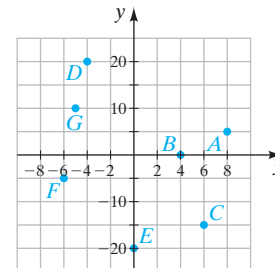
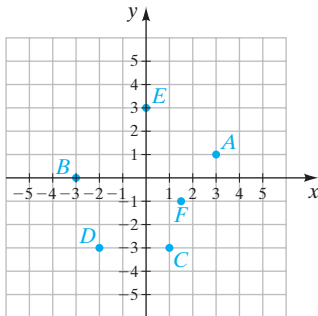
### Ejercicios conceptuales

- 1. En un par ordenado, ¿qué coordenada se lista primero siempre?
- 2. ¿Cuál es el otro nombre para el sistema de coordenadas cartesianas?
- 3. a) El eje horizontal, ¿es el eje  $x$  o el eje  $y$  en el sistema de coordenadas cartesianas?  
b) ¿El eje vertical es el eje  $x$  o el eje  $y$ ?
- 4. ¿Cuál es el origen en el sistema de coordenadas cartesianas?
- 5. Podemos hacer referencia al eje  $x$  y podemos hacer referencia al eje  $y$ . También podemos referirnos a los ejes  $x$  y  $y$ . Explique cuándo utilizamos la palabra *eje* y cuando la palabra *ejes*.
- 6. Explique cómo trazar el punto  $(-2, 4)$  en el sistema de coordenadas cartesianas.
- 7. ¿Qué ilustra la gráfica de una ecuación lineal?
- 8. ¿Por qué se agregan puntas de flecha a los extremos de las gráficas de ecuaciones lineales?
- 9. a) ¿Cuántos puntos se necesitan para graficar una ecuación lineal?  
b) ¿Por qué siempre es buena idea utilizar tres o más puntos al graficar una ecuación lineal?
- 10. ¿Cómo se ve la gráfica de una ecuación lineal?
- 11. ¿Cuál es la forma estándar de una ecuación lineal?
- 12. Al graficar ecuaciones lineales, todos los puntos que se grafican serán *colineales*. Explique lo que esto significa.
- 13. En el sistema de coordenadas cartesianas, hay cuatro cuadrantes. Dibuje los ejes  $x$  y  $y$ , y marque los cuatro cuadrantes, I a IV, en sus ejes.
- 14. ¿Cuántas soluciones tiene una ecuación lineal con dos variables?

### Práctica de habilidades

Indique el cuadrante al que pertenece cada uno de los puntos.

- |                    |                  |                  |                 |
|--------------------|------------------|------------------|-----------------|
| 15. $(-4, 2)$      | 16. $(-3, 6)$    | 17. $(5, -2)$    | 18. $(5, -3)$   |
| 19. $(-8, 5)$      | 20. $(5, 30)$    | 21. $(-16, -87)$ | 22. $(63, -47)$ |
| 23. $(-124, -132)$ | 24. $(75, -200)$ | 25. $(-8, 42)$   | 26. $(76, -92)$ |
27. Liste los pares ordenados que corresponden a cada punto.
28. Liste los pares ordenados que corresponden a cada punto.



Trace cada punto en los mismos ejes.

29.  $A(3, 2), B(-4, 1), C(0, -3), D(-2, 0), E(-3, -4), F\left(-4, -\frac{5}{2}\right)$
30.  $A(-3, -1), B(2, 0), C(3, 2), D\left(\frac{1}{2}, -4\right), E(-4, 2), F(0, 4)$

31.  $A(4, 0), B(-1, 3), C(2, 4), D(0, -2), E(-3, -3), F(2, -3)$

32.  $A(-3, 4), B(2, 3), C(0, 3), D(-1, 0), E(-2, -2), F(2, -4)$

Trace los siguientes puntos, luego determine si son colineales.

33.  $A(1, -1), B(5, 3), C(-3, -5), D(0, -2), E(2, 0)$

34.  $A(1, -2), B(0, -5), C(3, 1), D(-1, -8), E\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}\right)$

35.  $A(1, 5), B\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), C(0, 2), D(-5, -3), E(-2, -4)$

36.  $A(1, -1), B(3, 5), C(0, -3), D(-2, -7), E(2, 1)$

En los ejercicios del 37 al 42, **a)** determine cuál de los cuatro pares ordenados no satisface la ecuación dada. **b)** Trace todos los puntos que satisfacen la ecuación en los mismos ejes y dibuje una recta que pase por los puntos.

- |                              |            |                                  |                                   |                                   |
|------------------------------|------------|----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 37. $y = x + 2,$             | a) (2, 4)  | b) (-2, 0)                       | c) (2, 3)                         | d) (0, 2)                         |
| 38. $2x + y = -4,$           | a) (-2, 0) | b) (-2, 1)                       | c) (0, -4)                        | d) (-1, -2)                       |
| 39. $3x - 2y = 6,$           | a) (4, 0)  | b) (2, 0)                        | c) $\left(\frac{2}{3}, -2\right)$ | d) $\left(\frac{4}{3}, -1\right)$ |
| 40. $4x - 3y = 0,$           | a) (3, 4)  | b) (-3, -4)                      | c) (0, 0)                         | d) (3, -4)                        |
| 41. $\frac{1}{2}x + 4y = 4,$ | a) (2, -1) | b) $\left(2, \frac{3}{4}\right)$ | c) (0, 1)                         | d) $\left(-4, \frac{3}{2}\right)$ |
| 42. $y = \frac{1}{2}x + 2,$  | a) (0, 2)  | b) (2, 0)                        | c) (-2, 1)                        | d) (4, 4)                         |

## Solución de problemas

Considere la ecuación lineal  $y = 3x - 4$ . En los ejercicios 43 a 46, determine el valor de  $y$  que hace al par ordenado una solución para la ecuación.

43. (2,  $y$ )                      44. (-1,  $y$ )                      45. (0,  $y$ )                      46. (3,  $y$ )

Considere la ecuación lineal  $2x + 3y = 12$ . En los ejercicios 47 a 50, determine el valor de  $y$  que hace al par ordenado una solución para la ecuación.

47. (3,  $y$ )                      48. (0,  $y$ )                      49.  $\left(\frac{1}{2}, y\right)$                       50. (-5,  $y$ )

51. ¿Cuál es el valor de  $y$  en el punto en donde una recta corta al eje  $x$ ? Explique.
52. ¿Cuál es el valor de  $x$  en el punto en donde una recta corta al eje  $y$ ? Explique.

53. **Longitud y latitud** Otro tipo de sistema de coordenadas que se utiliza para identificar una posición en la superficie de la Tierra incluye la *latitud* y la *longitud*. En un globo terráqueo, las rectas longitudinales son rectas que van de arriba hacia abajo; en un mapa del mundo van alrededor del globo terráqueo, o de izquierda a derecha en un mapa del mundo. La localización del huracán George y de la tormenta tropical Hermine se indican en el mapa de la derecha.

- a) Estime la latitud y la longitud del huracán George.
- b) Determine la latitud y la longitud de la tormenta tropical Hermine.
- c) Calcule la latitud y la longitud de la ciudad de Miami.

d) Utilice un mapa o un globo terráqueo para estimar la latitud y longitud de su escuela.



Fuente: Servicio Meteorológico Nacional.



## Actividad en grupo

En la sección 7.2 analizaremos, al graficar ecuaciones lineales, cómo determinar pares ordenados para trazar. Veamos si ahora pueden dibujar algunas gráficas. De forma individual, en los ejercicios 54 a 56, trabajen los incisos a) a c).

- a) Seleccione cualesquiera tres valores para  $x$  y determine el correspondiente valor para  $y$ .
- b) Trace los puntos (deben parecer colineales).
- c) Dibuje la gráfica.
- d) Como grupo, comparen sus respuestas. Todos deben tener las mismas rectas.

54.  $y = x$

55.  $y = 2x$

56.  $y = x + 1$

## Ejercicios de repaso acumulativo

Conteste cada planteamiento.

[2.5] 57. Resuelva la ecuación  $\frac{1}{2}(x - 3) = \frac{1}{3}x + 2$ .

[3.1] 58. Despeje  $y$  de la ecuación  $2x - 5y = 6$ .

[4.1] 59. Simplifique  $(2x^4)^3$ .

[5.3] 60. Factorice  $x^2 - 6x - 27$ .

[5.6] 61. Resuelva  $y(y - 8) = 0$ .

[6.4] 62. Sume  $\frac{4}{x^2} + \frac{7}{3x}$ .

## 7.2 GRAFICACIÓN DE ECUACIONES LINEALES



- 1 Graficar ecuaciones lineales por medio del trazo de puntos.
- 2 Graficar ecuaciones lineales de la forma  $ax + by = 0$ .
- 3 Graficar ecuaciones lineales utilizando las intersecciones  $x$  y  $y$ .
- 4 Graficar rectas horizontales y verticales.
- 5 Estudiar aplicaciones de gráficas.

En la sección 7.1 explicamos el sistema de coordenadas cartesianas, cómo trazar puntos y cómo reconocer ecuaciones lineales con dos variables. Ahora estamos preparados para graficar ecuaciones lineales. En esta sección analizaremos dos métodos para graficar ecuaciones lineales: (1) graficación mediante el trazo de puntos, y (2) graficación por medio de las intersecciones con los ejes  $x$  y  $y$ . En la sección 7.4 analizamos la graficación por medio de la pendiente y la intersección con el eje  $y$ .

### 1 Graficar ecuaciones lineales por medio del trazo de puntos

La graficación por medio del trazo de puntos es el método más popular y versátil de graficación, ya que también podemos usarlo para graficar ecuaciones de segundo grado y de grados superiores. En el capítulo 10 graficaremos ecuaciones cuadráticas, que son ecuaciones de segundo grado, trazando puntos.

#### Para graficar ecuaciones lineales mediante el trazo de puntos

1. Despeje la variable  $y$  en la ecuación lineal. Esto es, deje sola la variable  $y$  en el lado izquierdo del signo de igual.
2. Seleccione un valor para la variable  $x$ . Sustituya este valor en la ecuación para  $x$  y determine el correspondiente valor de  $y$ . Registre el par ordenado  $(x, y)$ .
3. Repita el paso 2 con dos valores diferentes de  $x$ . Esto dará dos pares ordenados adicionales.

(continúa en la página siguiente)

- Trace los tres pares ordenados. Los tres puntos deben ser colineales. Si no, revise su trabajo en busca de errores.
- Con una regla, dibuje una recta que pase por los tres puntos. Dibuje puntas de flecha en cada extremo de la línea, para mostrar que la recta continúa de forma indefinida en ambas direcciones.

En el paso 1 debe despejar  $y$ . Aunque no es necesario hacer esto para graficar la ecuación, puede darse una idea de qué valores seleccionar para la variable en el paso 2. Si ha olvidado cómo despejar  $y$  en la ecuación, repase la sección 3.1. Al seleccionar los valores en el paso 2, debe seleccionar valores enteros de  $x$ , de forma que, si es posible, el resultado sean valores enteros para  $y$ . Además, debe seleccionar valores de  $x$  que sean pequeños, de forma que el par ordenado obtenido puede graficarse en los ejes. Ya que con frecuencia es fácil determinar  $y$  cuando  $x = 0$ , 0 siempre es un buen valor para  $x$ .

### EJEMPLO 1 Solución

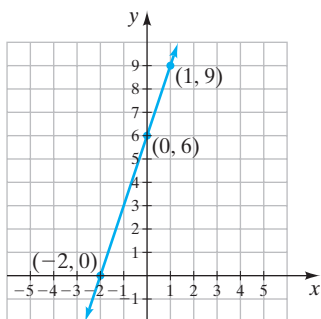


FIGURA 7.16

#### AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 25

Grafique la ecuación  $y = 3x + 6$ .

Primero determinamos que ésta es una ecuación lineal; por tanto, su gráfica debe ser una línea recta. La  $y$  ya está despejada. Seleccionamos tres valores para  $x$ , los sustituimos en la ecuación y determinamos los valores correspondientes para  $y$ . De forma arbitraria, seleccionamos para  $x$  los valores  $-2$ ,  $0$  y  $1$ . Los siguientes cálculos muestran que cuando  $x = -2$ ,  $y = 0$ , cuando  $x = 0$ ,  $y = 6$ , y cuando  $x = 1$ ,  $y = 9$ .

$x$	$y = 3x + 6$	Par ordenado
$-2$	$y = 3(-2) + 6 = 0$	$(-2, 0)$
$0$	$y = 3(0) + 6 = 6$	$(0, 6)$
$1$	$y = 3(1) + 6 = 9$	$(1, 9)$

$x$	$y$
$-2$	$0$
$0$	$6$
$1$	$9$

Es conveniente listar en una tabla los valores de  $x$  y de  $y$ . Luego trazamos los tres pares ordenados en los mismos ejes (figura 7.16).

Como los tres puntos son colineales, la gráfica es correcta. Conectamos los tres puntos con una recta y colocamos puntas de flecha en los extremos de la línea para mostrar que la línea continúa de forma infinita en ambas direcciones. ✨

Para graficar la ecuación  $y = 3x + 6$ , de manera arbitraria utilizamos los tres valores  $x = -2$ ,  $x = 0$  y  $x = 1$ . Podríamos haber seleccionado tres valores completamente diferentes y obtener exactamente la misma gráfica. Al seleccionar valores para sustituirlos por  $x$ , utilizamos valores que faciliten la evaluación de la ecuación.

La gráfica del ejemplo 1 representa a *todos* los pares ordenados que satisfacen la ecuación  $y = 3x + 6$ . Si seleccionamos cualquier punto en esta recta, el par ordenado representado por ese punto será una solución de la ecuación  $y = 3x + 6$ . De forma similar, cualquier solución de la ecuación será representada por un punto en la recta. Seleccionamos algunos puntos en la recta, digamos,  $(-1, 3)$  y  $(-3, -3)$ , y verificamos que son soluciones de la ecuación (figura 7.17).

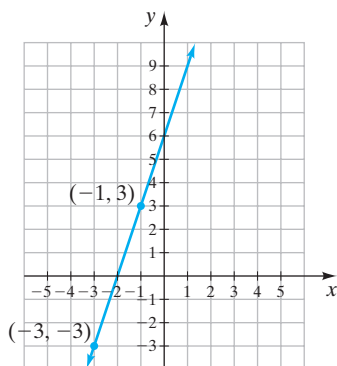


FIGURA 7.17

Comprobación  $(-1, 3)$

$$\begin{aligned}
 y &= 3x + 6 \\
 3 &\stackrel{?}{=} 3(-1) + 6 \\
 3 &\stackrel{?}{=} -3 + 6 \\
 3 &= 3 \quad \text{Verdadero.}
 \end{aligned}$$

Comprobación  $(-3, -3)$

$$\begin{aligned}
 y &= 3x + 6 \\
 -3 &\stackrel{?}{=} 3(-3) + 6 \\
 -3 &\stackrel{?}{=} -9 + 6 \\
 -3 &= -3 \quad \text{Verdadero.}
 \end{aligned}$$

**Recuerde, una gráfica de una ecuación ilustra el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación.**

**EJEMPLO 2** Grafique  $3y = 5x - 6$ .

**Solución** Comenzamos por despejar  $y$  en la ecuación. Esto nos ayudará a seleccionar valores para  $x$ . Para despejar  $y$ , dividimos ambos lados de la ecuación entre 3.

$$3y = 5x - 6$$

$$y = \frac{5x - 6}{3}$$

$$y = \frac{5x}{3} - \frac{6}{3}$$

$$y = \frac{5}{3}x - 2$$

Ahora podemos ver si seleccionamos valores para  $x$  que sean múltiplos de 3, los valores que se obtengan para  $y$  serán enteros. Seleccionemos los valores  $-3, 0$  y  $3$  para  $x$ ,

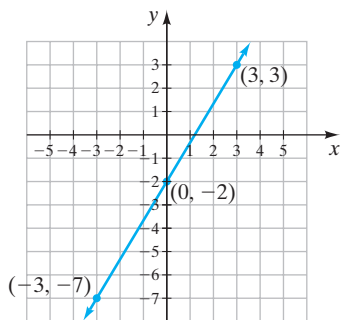


FIGURA 7.18

$$y = \frac{5}{3}x - 2$$

Sea  $x = -3$

$$y = \frac{5}{3}(-3) - 2 = -5 - 2 = -7$$

Sea  $x = 0$

$$y = \frac{5}{3}(0) - 2 = -2$$

Sea  $x = 3$

$$y = \frac{5}{3}(3) - 2 = 5 - 2 = 3$$

$x$	$y$
-3	-7
0	-2
3	3

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 31**

Por último, trazamos los puntos y dibujamos la línea recta (figura 7.18). ✱

## 2 Graficar ecuaciones lineales de la forma $ax + by = 0$

En el ejemplo 3 graficamos una ecuación de la forma  $ax + by = 0$ , que es una ecuación lineal cuya constante es 0.

**EJEMPLO 3** Grafique la ecuación  $2x + 5y = 0$ .

**Solución** Empezamos por despejar  $y$  en la ecuación.

$$2x + 5y = 0$$

$$5y = -2x$$

$$y = -\frac{2x}{5} \quad \text{o bien} \quad y = -\frac{2}{5}x$$

Ahora seleccionamos valores para  $x$  y determinamos los valores correspondientes de  $y$ . ¿Qué valores para  $x$  deberíamos seleccionar? Observe que el coeficiente del término en  $x$  es una fracción, con denominador 5. Si seleccionamos valores para  $x$  que sean múltiplos del denominador, como  $\dots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots$ , el 5 en el denominador se cancelará. Esto nos dará valores enteros para  $y$ . De forma arbitraria seleccionamos los valores  $x = -5, x = 0$  y  $x = 5$ .



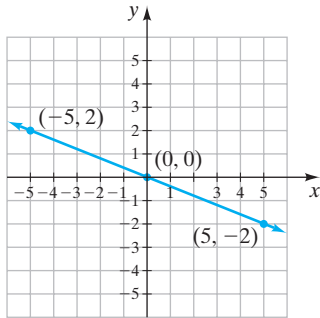


FIGURA 7.19

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 37

$$y = -\frac{2}{5}x$$

Sea  $x = -5$

$$y = \left(-\frac{2}{5}\right)(-5) = 2$$

Sea  $x = 0$

$$y = \left(-\frac{2}{5}\right)(0) = 0$$

Sea  $x = 5$

$$y = -\frac{2}{5}(5) = -2$$

x	y
-5	2
0	0
5	-2

Ahora trazamos los puntos y dibujamos la gráfica (figura 7.19). ★

La gráfica en el ejemplo 3 pasa por el origen. La gráfica de toda ecuación lineal con constante de 0 (ecuaciones de la forma  $ax + by = 0$ ) pasarán por el origen.

### 3 Graficar ecuaciones lineales utilizando las intersecciones x y y

Ahora analizamos la graficación de ecuaciones lineales por medio de las intersecciones con los ejes x y y. La **intersección x** es el punto en que la gráfica cruza al eje x, y la **intersección y**, es el punto en que la gráfica cruza al eje y. Considere la gráfica en la figura 7.20, que es la gráfica que dibujamos en el ejemplo 1. Observe que la gráfica cruza al eje x en  $-2$ . Por tanto,  $(-2, 0)$  es la intersección x. Como la gráfica cruza al eje y en  $6$ , podríamos decir que la intersección y está en  $6$  (en el eje y). En general, la intersección x es  $(x, 0)$ , y la intersección y está en  $y$  (en el eje y).

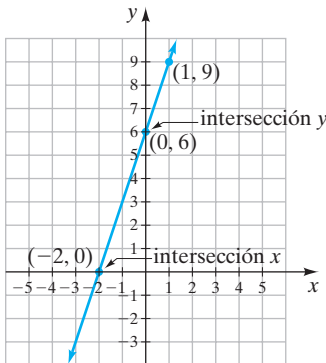


FIGURA 7.20

Observe que la gráfica en la figura 7.20 cruza al eje y en  $6$ . Por tanto,  $(0, 6)$  es la intersección y. Como la gráfica cruza al eje y en  $6$ , podríamos decir que la intersección y está en  $6$  (en el eje y). En general, la intersección y está en  $y$  (en el eje y).

Observe que la gráfica en la figura 7.19 cruza ambos ejes en el origen. Por tanto, lo mismo la intersección x como la intersección y son  $(0, 0)$ .

Con frecuencia es conveniente graficar ecuaciones lineales determinando sus intersecciones x y y. Para graficar una ecuación por medio de las intersecciones x y y utilice el siguiente procedimiento.

#### Para graficar ecuaciones lineales por medio de las intersecciones x y y

1. Determine la intersección y, haciendo  $x$  igual a cero en la ecuación dada y encontrando el valor correspondiente de  $y$ .
2. Determine la intersección x, haciendo  $y$  igual a cero en la ecuación dada y encontrando el valor correspondiente de  $x$ .
3. Determine un punto de prueba, seleccionando un valor diferente de cero para  $x$  y encontrando el valor correspondiente de  $y$ .
4. Trace la intersección y (en donde la gráfica cruza el eje y), la intersección x (en donde la gráfica cruza al eje x) y el punto de prueba. Los tres puntos deben ser colineales. Si no es así, compruebe su trabajo.
5. Con una regla, dibuje una línea recta que pase por los tres puntos. Dibuje puntas de flecha en ambos extremos de la línea para mostrar que la recta se prolonga de manera indefinida en ambas direcciones.



**SUGERENCIA**

Como sólo se necesitan dos puntos para determinar una recta, no es absolutamente necesario determinar y trazar el punto de prueba en el paso 3. Sin embargo, si sólo utiliza las intersecciones  $x$  y  $y$  para dibujar su gráfica y uno de esos puntos está equivocado, su gráfica será incorrecta y no se dará cuenta. Siempre es buena idea utilizar tres puntos al graficar una ecuación lineal.

**EJEMPLO 4** Grafique la ecuación  $3y = 6x + 12$  por medio del trazo de las intersecciones  $x$  y  $y$ .

**Solución** Para determinar la intersección  $y$  (en donde la gráfica cruza al eje  $y$ ), haga  $x = 0$  y determine el valor correspondiente de  $y$ .

$$3y = 6x + 12$$

$$3y = 6(0) + 12$$

$$3y = 0 + 12$$

$$3y = 12$$

$$y = \frac{12}{3} = 4$$

La gráfica cruza el eje  $y$  en 4. El par ordenado que representa la intersección  $y$  es  $(0, 4)$ . Para determinar la intersección  $x$  (donde la gráfica cruza al eje  $x$ ), haga  $y = 0$  y determine el valor correspondiente de  $x$ .

$$3y = 6x + 12$$

$$3(0) = 6x + 12$$

$$0 = 6x + 12$$

$$-12 = 6x$$

$$\frac{-12}{6} = x$$

$$-2 = x$$

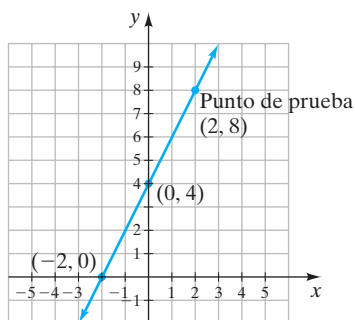


FIGURA 7.21

La gráfica cruza al eje  $x$  en  $-2$ . El par ordenado que representa la intersección  $x$  es  $(-2, 0)$ . Ahora trace las intersecciones (figura 7.21).

Antes de graficar la ecuación, seleccione un valor diferente de cero para  $x$ , determine el valor correspondiente de  $y$  y asegúrese que es colineal con las intersecciones  $x$  y  $y$ . Este tercer punto es el de prueba.

$$\text{Sea } x = 2$$


$$3y = 6x + 12$$

$$3y = 6(2) + 12$$

$$3y = 12 + 12$$

$$3y = 24$$

$$y = \frac{24}{3} = 8$$

Trace el punto de prueba  $(2, 8)$ . Como los tres puntos son colineales, dibuje la línea recta que pasa por los tres puntos. 

**EJEMPLO 5**

Grafique la ecuación  $2x + 5y = 12$  determinando las intersecciones  $x$  y  $y$ .

**Solución**

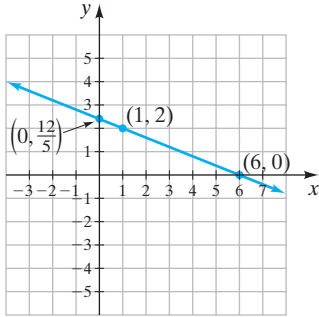


FIGURA 7.22

**AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 45**

**Determinación de la intersección  $y$**

$$\begin{aligned} \text{Sea } x &= 0 \\ 2x + 5y &= 12 \\ 2(0) + 5y &= 12 \\ 0 + 5y &= 12 \\ 5y &= 12 \\ y &= \frac{12}{5} \end{aligned}$$

**Determinación de la intersección  $x$**

$$\begin{aligned} \text{Sea } y &= 0 \\ 2x + 5y &= 12 \\ 2x + 5(0) &= 12 \\ 2x + 0 &= 12 \\ 2x &= 12 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

**Punto de prueba**

$$\begin{aligned} \text{Sea } x &= 1 \\ 2x + 5y &= 12 \\ 2(1) + 5y &= 12 \\ 2 + 5y &= 12 \\ 5y &= 10 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Los tres pares ordenados son  $(0, \frac{12}{5})$ ,  $(6, 0)$  y  $(1, 2)$ .

Los tres puntos son colineales. Dibuje una línea recta que pase por los tres puntos (figura 7.22).

**EJEMPLO 6**

Grafique la ecuación  $y = 20x + 60$ .

**Solución**

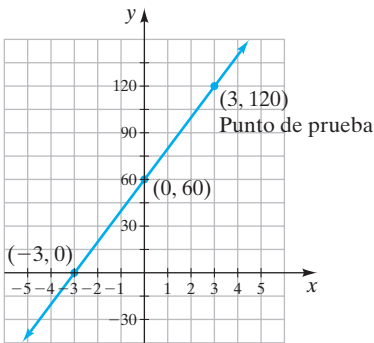


FIGURA 7.23

**Determinación de la intersección  $y$**

$$\begin{aligned} \text{Sea } x &= 0 \\ y &= 20x + 60 \\ y &= 20(0) + 60 \\ y &= 60 \end{aligned}$$

**Determinación de la intersección  $x$**

$$\begin{aligned} \text{Sea } y &= 0 \\ y &= 20x + 60 \\ 0 &= 20x + 60 \\ -60 &= 20x \\ -3 &= x \end{aligned}$$

**Punto de prueba**

$$\begin{aligned} \text{Sea } x &= 3 \\ y &= 20x + 60 \\ y &= 20(3) + 60 \\ y &= 60 + 60 \\ y &= 120 \end{aligned}$$

Los tres pares ordenados son  $(0, 60)$ ,  $(-3, 0)$  y  $(3, 120)$ . Como los valores de  $y$  son grandes, hacemos que cada intervalo en el eje  $y$  sea de 15 unidades en lugar de 1 (figura 7.23). En ocasiones tendrá que utilizar escalas diferentes en los ejes  $x$  y  $y$ , como se ilustró, para ajustar la gráfica. Ahora trazamos los puntos y dibujamos la gráfica.

Al seleccionar las escalas en sus ejes, debe darse cuenta que diferentes escalas tendrán como resultado que la misma ecuación tenga diferente apariencia. Considere las gráficas que se muestran en la figura 7.24; ambas representan la misma ecuación,  $y = x$ . En la figura 7.24a ambos ejes,  $x$  y  $y$ , tienen la misma escala. En la figura 7.24b, los ejes no tienen la misma escala. Ambas gráficas son correctas en el sentido que representan la gráfica  $y = x$ . La diferencia de apariencia es debida a las escalas diferentes en el eje  $x$ . Cuando sea posible, conserve la misma escala en ambos ejes, como en la figura 7.24a.

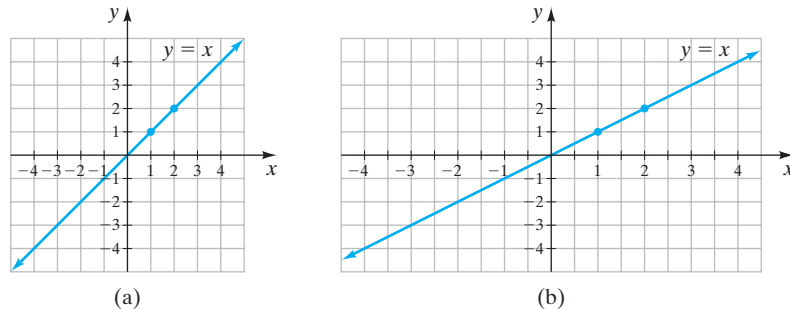
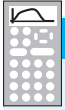


FIGURA 7.24



### Uso de la calculadora graficadora

Para graficar una ecuación en una calculadora graficadora, haga los pasos siguientes.

1. Si es necesario, en la ecuación despeje  $y$ .
2. Presione la tecla  $\boxed{Y=}$  e ingrese la ecuación.
3. Presione la tecla  $\boxed{\text{GRAPH}}$  (para ver la gráfica). Podría necesitar ajustar la ventana, como se explicó en el cuadro Uso de la calculadora graficadora en la página 447.

En el ejemplo 2, cuando despejamos  $y$  en la ecuación  $2y = 4x - 12$ , obtuvimos  $y = 2x - 6$ . Si presiona  $\boxed{Y=}$ , ingresa  $2x - 6$  como  $Y_1$  y luego presiona  $\boxed{\text{GRAPH}}$ , debe obtener la gráfica que se muestra en la figura 7.25.

Si no obtiene la gráfica de la figura 7.25, presione  $\boxed{\text{WINDOW}}$  y determine si tiene la ventana estándar  $-10, 10, 1, -10, 10, 1$ . Si no, entonces cambie a la ventana estándar y presione la tecla  $\boxed{\text{GRAPH}}$  nuevamente.

Es posible graficar dos o más ecuaciones en su calculadora graficadora. Por ejemplo, si quiere graficar  $y = 2x - 6$  y también  $y = -3x + 4$  en la misma pantalla, debe comenzar presionando la tecla  $\boxed{Y=}$ . Luego haría  $Y_1 = 2x - 6$  y  $Y_2 = -3x + 4$ . Después de ingresar ambas ecuaciones y presionar la tecla  $\boxed{\text{GRAPH}}$ , se graficarán ambas ecuaciones. Ahora intente graficar ambas ecuaciones en su calculadora graficadora.

### Ejercicios

Grafique cada ecuación en su calculadora graficadora.

1.  $y = 3x - 5$
2.  $y = -2x + 6$
3.  $2x - 3y = 6$
4.  $5x + 10y = 20$

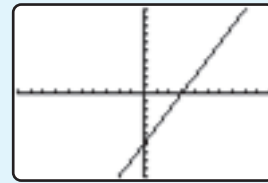


FIGURA 7.25

## 4 Graficar rectas horizontales y verticales

Cuando una ecuación lineal sólo tiene una variable, su gráfica será una recta horizontal o bien una vertical, como se explica en los ejemplos 7 y 8.

**EJEMPLO 7** Grafique la ecuación  $y = 3$ .

**Solución** Esta ecuación puede escribirse como  $y = 3 + 0x$ . Por tanto, para cualquier valor seleccionado de  $x$ ,  $y$  será igual a 3. La gráfica de  $y = 3$  se muestra en la figura 7.26.

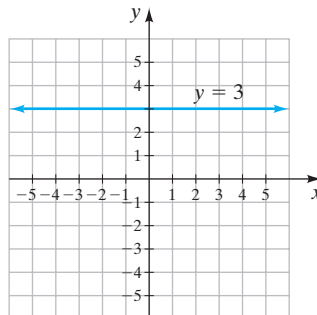


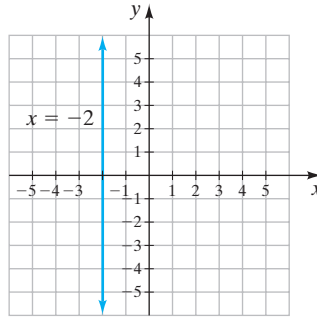
FIGURA 7.26



La gráfica de una ecuación de la forma  $y = b$  es una **recta horizontal** cuya intersección  $y$  es  $(0, b)$ .

**EJEMPLO 8** Grafique la ecuación  $x = -2$ .

**Solución** Esta ecuación puede escribirse como  $x = -2 + 0y$ . Así que, para cualquier valor seleccionado de  $y$ ,  $x$  tendrá un valor de  $-2$ . La gráfica de  $x = -2$  se ilustra en la figura 7.27.



AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 21

FIGURA 7.27



La gráfica de una ecuación de la forma  $x = a$  es una **recta vertical** cuya intersección  $x$  es  $(a, 0)$ .

## 5 Estudiar aplicaciones de gráficas

Antes de terminar esta sección, veamos una aplicación de la graficación. Veremos más aplicaciones de graficación de ecuaciones lineales en las secciones 7.4 y 7.5.

**EJEMPLO 9 Salario semanal** Carol Smith se graduó recientemente. Ella aceptó un puesto como gerente en formación del departamento de ventas en un almacén de muebles, en donde le pagan un salario semanal más una comisión por las ventas. Ella recibirá un salario de \$300 a la semana más una comisión de 7% sobre todas las ventas,  $s$ .



- Determine una ecuación para el salario,  $R$ , que recibirá Carol en términos de las ventas,  $s$ .
- Grafique el salario para ventas de \$0 hasta e incluyendo \$20,000.
- Con base en la gráfica, estime el salario de Carol si sus ventas de la semana son \$15,000.
- Con base en la gráfica, estime las ventas que necesita hacer Carol para ganar un salario semanal de \$900.

**Solución** a) Como  $s$  es el monto de las ventas, una comisión de 7% sobre  $s$  dólares en ventas es  $0.07s$ .

$$\text{salario recibido} = \$300 + \text{comisión}$$

$$R = 300 + 0.07s$$

b) Seleccionamos tres valores para  $s$  y determinamos los valores correspondientes de  $R$ .

	$R = 300 + 0.07s$
Sea $s = 0$	$R = 300 + 0.07(0) = 300$
Sea $s = 10,000$	$R = 300 + 0.07(10,000) = 1000$
Sea $s = 20,000$	$R = 300 + 0.07(20,000) = 1700$

$s$	$R$
0	300
10,000	1000
20,000	1700

La gráfica se ilustra en la figura 7.28. Observe que como sólo graficamos la ecuación para valores de  $s$  de 0 a 20,000, no colocamos puntas de flecha en los extremos de la gráfica.

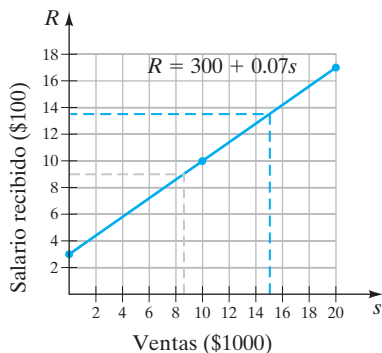
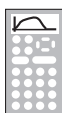


FIGURA 7.28

**c)** Para determinar el salario semanal de Carol sobre ventas de \$15,000, ubicamos \$15,000 en el eje de las ventas. Luego dibujamos una recta vertical hacia arriba hasta intersectar la gráfica, la línea roja discontinua en la figura 7.28. Ahora dibujamos una línea horizontal que corte el eje del salario. Como la línea horizontal corta al eje del salario en alrededor de \$1350, las ventas semanales de \$15,000 resultarían en un salario semanal de alrededor de \$1350. Podemos determinar el salario exacto sustituyendo 15,000 por  $s$  en la ecuación  $R = 300 + 0.07s$  y determinando el valor de  $R$ . Hágalo ahora.

**d)** Para determinar las ventas necesarias para que Carol gane un salario semanal de \$900, encontramos \$900 en el eje del salario. Luego dibujamos una línea horizontal desde el punto a la gráfica, como se muestra con la línea gris punteada en la figura 7.28. Luego dibujamos una línea vertical desde el punto de intersección de la gráfica hacia el eje de las ventas. Este valor en el eje de las ventas representa las ventas necesarias para que Carol gane \$900. Por tanto, las ventas de alrededor de \$8,600 a la semana resultarían en un salario de \$900. Podemos determinar una respuesta exacta sustituyendo 900 por  $R$  en la ecuación  $R = 300 + 0.07s$  y despejando  $s$  en la ecuación. Hágalo ahora. ✨

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 75**



### Uso de la calculadora graficadora

Antes de terminar la sección, destinaremos un poco más de tiempo a estudiar la calculadora graficadora. En el recuadro anterior de Uso de la calculadora graficadora, graficamos  $y = 2x - 6$ . La gráfica de  $y = 2x - 6$  se muestra nuevamente en la ventana estándar, en la figura 7.29. Después de obtener la gráfica, si usted presiona la tecla **TRACE**, puede (dependiendo de su calculadora) obtener la gráfica de la figura 7.30.

Observe que el cursor, el cuadro intermitente de la figura 7.30, está en la intersección  $y$ , esto es, en donde  $x = 0$  y  $y = -6$ . Al presionar las teclas de flecha a la derecha o flecha a la izquierda, usted puede mover el cursor. Los valores correspondientes de  $x$  y  $y$  cambian con la posición del cursor. Puede aumentar la parte de la gráfica utilizando la tecla **ZOOM**. Lea el manual de su calculadora para aprender cómo utilizar la característica ZOOM y las distintas opciones ZOOM disponibles.

Otra tecla importante en muchas calculadoras graficadoras es la característica TABLE. En la calculadora TI-83 Plus cuando presiona **2<sup>nd</sup>** **GRAPH** para obtener la característica TABLE, puede obtener el despliegue que se muestra en la figura 7.31.

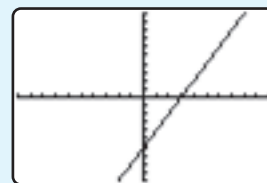


FIGURA 7.29

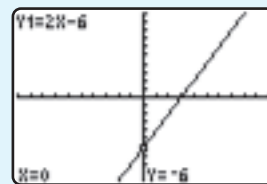


FIGURA 7.30

(continúa en la página siguiente)

Si su pantalla no se ve como la de la figura 7.31, utilice las flechas hacia arriba y hacia abajo hasta que obtenga la pantalla que se muestra. La tabla proporciona los valores  $x$  correspondientes a los valores  $y$  para la gráfica. De la tabla, observe que cuando  $x = 3, y = 0$  (la intersección  $x$ ) y cuando  $x = 0, y = -6$  (la intersección  $y$ ).

Puede cambiar las características de la tabla presionando **TBLSET**, (presione **2<sup>nd</sup>** **WINDOW** en la TI-83 Plus). Por ejemplo, si quiere la tabla para valores de  $x$  en décimos, podría cambiar  $\Delta Tbl$  a 0.1, en lugar del estándar de 1 unidad.

### Ejercicios

Utilice la característica **TABLE** de su calculadora para determinar las intersecciones  $x$  y  $y$  de las gráficas de las ecuaciones siguientes. En los ejercicios 3 y 4 necesitará establecer  $\Delta Tbl$  a décimos.

1.  $y = 4x - 8$
2.  $y = -2x - 6$
3.  $4x - 5y = 10$
4.  $2y = 6x - 9$

X	Y1
0	-6
1	-4
2	-2
3	0
4	2
5	4
6	6
7	8
8	10
9	12

FIGURA 7.31

## Conjunto de ejercicios 7.2

### Ejercicios conceptuales

1. Explique cómo determinar las intersecciones  $x$  y  $y$  de una recta.
2. ¿Cuántos puntos se necesitan para graficar una línea recta? ¿Cuántos puntos debería utilizar? ¿Por qué?
3. ¿Cómo será la gráfica de  $y = b$  para cualquier número real  $b$ ?
4. ¿Cómo será la gráfica de  $x = a$  para cualquier número real  $a$ ?
5. En el ejemplo 9c y 9d, hicimos una estimación. ¿Por qué en ocasiones, con base en la gráfica, no es posible obtener una respuesta exacta?
6. En el ejemplo 9, ¿el salario,  $R$ , depende de las ventas,  $s$ , o las ventas dependen del salario? Explique.
7. ¿La gráfica de la ecuación  $2x - 4y = 0$  pasa por el origen? Explique.
8. Escriba una ecuación, diferente de las dadas en esta sección, cuya gráfica pase por el origen. Explique cómo determinar su respuesta.

### Práctica de habilidades

Determine la coordenada que falta en las soluciones dadas para  $3x + y = 9$ .

9. (3, ?)
10. (-2, ?)
11. (?, -6)
12. (?, -3)
13. (?, 0)
14. ( $\frac{1}{2}$ , ?)

Determine la coordenada faltante en las soluciones dadas para  $3x - 2y = 8$ .

15. (4, ?)
16. (0, ?)
17. (?, 0)
18. ( $?, -\frac{1}{2}$ )
19. (-4, ?)
20. (?, -5)

Grafique cada ecuación.

21.  $x = -3$
22.  $x = \frac{3}{2}$
23.  $y = 4$
24.  $y = -\frac{5}{3}$

Grafique por medio del trazado de puntos. Trace al menos tres puntos para cada gráfica.

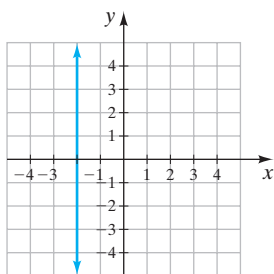
25.  $y = 3x - 1$
26.  $y = -x + 3$
27.  $y = 4x - 2$
28.  $y = x - 4$
29.  $y = -\frac{1}{2}x + 3$
30.  $2y = 2x + 4$
31.  $3x - 2y = 4$
32.  $3x - 2y = 6$
33.  $4x + 3y = -9$
34.  $3x + 2y = 0$
35.  $6x + 5y = 30$
36.  $-2x - 3y = 6$
37.  $-4x + 5y = 0$
38.  $12y - 24x = 36$
39.  $y = -20x + 60$
40.  $2y - 50 = 100x$
41.  $y = \frac{4}{3}x$
42.  $y = -\frac{3}{5}x$
43.  $y = \frac{1}{2}x + 4$
44.  $y = -\frac{2}{5}x + 2$

Grafique por medio de las intersecciones x y y.

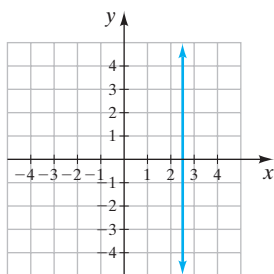
- |  |  |  |   |
|--|--|--|---|
| 45. $y = 3x + 3$                       | 46. $y = -2x + 6$                      | 47. $y = -4x + 2$                      | 48. $y = -3x + 8$                       |
| 49. $y = -5x + 4$                      | 50. $y = 4x + 16$                      | 51. $4y + 6x = 24$                     | 52. $4x = 3y - 9$                       |
| 53. $\frac{1}{2}x + 2y = 4$            | 54. $x + \frac{1}{2}y = 2$             | 55. $6x - 12y = 24$                    | 56. $25x + 50y = 100$                   |
| 57. $8y = 6x - 12$                     | 58. $-3y - 2x = -6$                    | 59. $-20y - 30x = 40$                  | 60. $20x - 240 = -60y$                  |
| 61. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 12$ | 62. $\frac{1}{4}x - \frac{2}{3}y = 60$ | 63. $\frac{1}{2}x = \frac{2}{5}y - 80$ | 64. $\frac{2}{3}y = \frac{5}{4}x + 120$ |

Escriba la ecuación representada por la gráfica dada.

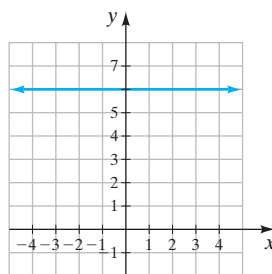
65.



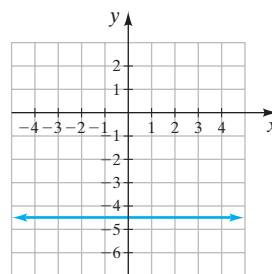
66.



67.



68.

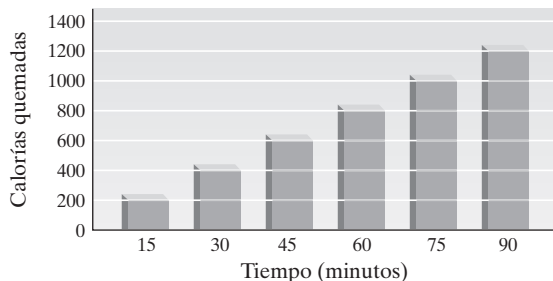


## Resolución de problemas

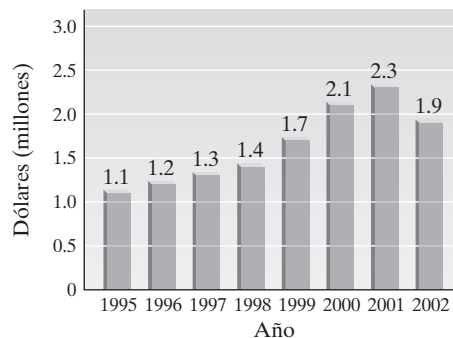
69. ¿Cuál es el valor de  $a$ , si la gráfica de  $ax + 4y = 8$  tiene una intersección  $x$  de  $(2, 0)$ ?
70. ¿Cuál es el valor de  $a$  si la gráfica de  $ax + 8y = 12$  tiene una intersección  $x$  de  $(3, 0)$ ?
71. ¿Cuál es el valor de  $b$  si la gráfica de  $3x + by = 10$  tiene una intersección  $y$  de  $(0, 5)$ ?
72. ¿Cuál es el valor de  $b$  si la gráfica de  $4x + by = 12$  tiene una intersección  $y$  de  $(0, -3)$ ?

Las gráficas de barra en los ejercicios 73 y 74 muestran información. Establezca si la gráfica muestra una relación lineal. Explique su respuesta.

73. **Calorías quemadas por una persona de 150 libras promedio que camina a 4.5 mph.**



74. **Precio de un anuncio de 30 segundos en el Súper Tazón.**



Fuente: Investigación de la NFL.

Antes de resolver los ejercicios 75 a 80, revise el ejemplo 9.

- 75. Compra de grava** Yolanda Torres necesita comprar una gran cantidad de bolsas de grava en Home Depot y renta un camión para transportar la grava. La renta del camión es una tarifa fija de \$30 y cada bolsa de grava cuesta \$2.
- Escriba una ecuación para el costo total,  $C$ , de la renta del camión y la compra de  $n$  bultos de grava.
  - Grafique la ecuación para  $e$  incluyendo 60 bultos de grava.
  - Estime el costo total que Yolanda debe pagar por la renta del camión y 30 bultos de grava.
  - Si el costo total de la renta del camión y la grava es de \$110, estime la cantidad de bolsas de grava que compró Yolanda.
- 76. Distancia recorrida** La distancia recorrida se calcula por medio de la fórmula distancia = velocidad  $\cdot$  tiempo, o  $d = vt$ . Suponga que la velocidad de un automóvil es constante de 60 millas por hora.
- Escriba una ecuación para la distancia,  $d$ , en términos del tiempo,  $t$ .
  - Grafique la ecuación para tiempos desde 0 hasta 10 horas, inclusive.
  - Estime la distancia recorrida en 6 horas.
  - Si la distancia recorrida es de 300 millas, estime el tiempo del recorrido.
- 77. Renta de un camión** Lynn Brown necesita un gran camión para transportar algunos muebles. Ella determinó que el costo,  $C$ , de renta de un camión es \$40 por día más \$1 por milla,  $m$ .
- Escriba una ecuación para el costo en términos de las millas conducidas.
  - Grafique la ecuación para valores hasta  $e$  incluyendo 100 millas.
  - Estime el costo de manejar 50 millas en un día.
  - Estime las millas manejadas en un día, si el costo de ese día fue de \$60.
- 78. Interés simple** El interés simple se calcula por medio de la fórmula de interés simple,
- $$\text{interés} = \text{capital} \cdot \text{tasa de interés} \cdot \text{tiempo}, \text{ o } I = prt.$$
- Suponga que el capital es de \$10,000 y la tasa de interés es de 5%.
- Escriba una ecuación para el interés simple en términos del tiempo.
  - Grafique la ecuación para tiempos de 0 a 20 años, inclusive.
  - ¿Cuál es el interés simple para 10 años?
  - Si el interés simple es \$500, determine el tiempo que se invirtió.
- 79. Utilidad en tienda de vídeo** La utilidad semanal,  $P$ , de una tienda de renta de vídeos puede aproximarse mediante la fórmula  $P = 1.5n - 200$ , donde  $n$  es el número de cintas que se rentan en una semana.
- Dibuje una gráfica de la utilidad en términos de las cintas rentadas para  $e$  incluyendo 1000 cintas.
  - Estime la utilidad semanal, si se rentaron 500 cintas.
  - Estime el número de cintas rentadas, si la utilidad de la semana es de \$1000.
- 80. Juego de tenis** El costo,  $C$ , de jugar tenis en el Club de Tenis Downtown incluye una cuota fija de \$200 por la membresía más \$10 por cada hora,  $h$ , de tiempo de uso de la cancha.
- Escriba una ecuación para el costo anual de jugar tenis en el Club de Tenis Downtown en términos de las horas jugadas.
  - Grafique la ecuación para  $e$  incluyendo 300 horas.
  - Estime el costo por jugar 200 horas en un año.
  - Si el costo anual por jugar tenis fue de \$1200, estime cuántas horas de tenis se jugaron.



Determine los coeficiente que deben colocarse en las áreas sombreadas, de modo que la gráfica de la ecuación sea una línea recta con las intersecciones  $x$  y  $y$  que se especifican. Explique cómo determinó su respuesta.

81.  $\square x + \square y = 20$ ; intersección  $x$  en 4, intersección  $y$  en 5.
82.  $\square x + \square y = 18$ ; intersección  $x$  en  $-3$ , intersección  $y$  en 6.
83.  $\square x - \square y = -12$ ; intersección  $x$  en  $-2$ , intersección  $y$  en 3.
84.  $\square x - \square y = 30$ ; intersección  $x$  en  $-5$ , intersección  $y$  en  $-15$ .



## Problemas de reto

85. Considere las ecuaciones siguientes:  $y = 2x - 1$ ,  $y = -x + 5$ .
- Con cuidado grafique ambas ecuaciones en los mismos ejes.
  - Determine el punto de intersección de las dos gráficas.
  - Sustituya los valores para  $x$  y  $y$  en el punto de intersección en cada una de las dos ecuaciones, y determine si el punto de intersección satisface cada ecuación.
  - ¿Cree que exista algún otro par ordenado que satisfaga ambas ecuaciones? Explique su respuesta. (En el

capítulo 8 estudiaremos ecuaciones como éstas, conocidas como sistemas de ecuaciones.)

86. En el capítulo 10 graficaremos ecuaciones cuadráticas. Las gráficas de ecuaciones cuadráticas *no* son rectas. Grafique la ecuación cuadrática  $y = x^2 - 4$  seleccionando valores para  $x$  y determinando los valores correspondientes de  $y$ , luego trace los puntos. Asegúrese de que grafique un número suficiente de puntos para obtener una gráfica precisa.



## Actividad en grupo

En grupo, analicen y respondan el ejercicio 87.

87. Estudie las gráficas de las ecuaciones  $y = 2x + 4$ ,  $y = 2x + 2$  y  $y = 2x - 2$ , para ver en qué son similares y en qué se diferencian. Cada elemento del grupo debe iniciar con los mismos ejes.
- Miembro 1 del grupo: Grafique  $y = 2x + 4$ .
  - Miembro 2 del grupo: Grafique  $y = 2x + 2$ .

- Miembro 3 del grupo: Grafique  $y = 2x - 2$ .
- Ahora transfiera las tres gráficas a los mismos ejes. (Puede utilizar las gráficas de los miembros del grupo o puede construir nuevos ejes.)
- Explique qué observa respecto a las tres gráficas.
- Explique lo que observa respecto a las intersecciones y.

## Ejercicios de repaso acumulativo

[1.9] 88. Evalúe  $2[6 - (4 - 5)] \div 2 - 5^2$ .

- [2.6] 89. **Limpieza del hogar** De acuerdo con las instrucciones en una botella de limpiador para el hogar, se deben mezclar 8 onzas del limpiador con 3 galones de agua. Si la cubeta sólo tiene 2.5 galones de agua, ¿cuánto limpiador debe utilizar?



- [3.3] 90. **Enteros** El mayor de dos enteros es 1 más que 3 veces el menor. Si la suma de los dos enteros es 37, determine los dos enteros.

[6.2] 91. Divida  $\frac{10xy^3}{z} \div \frac{x^2y^2}{5z^2}$ .

[6.4] 92. Sume  $\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-3} + 3$ .

[6.6] 93. Resuelva  $\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-3} = 3$ .

## 7.3 PENDIENTE DE UNA RECTA



- Determinar la pendiente de una recta.
- Reconocer pendientes positivas y negativas.
- Examinar las pendientes de rectas horizontales y verticales.
- Examinar las pendientes de rectas paralelas y perpendiculares.

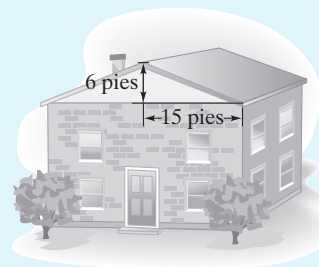
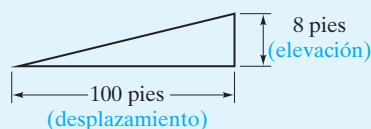
### 1 Determinar la pendiente de una recta

En esta sección analizamos la *pendiente* de una recta. En el siguiente recuadro de Sugerencia analizamos las similitudes entre pendiente como se utiliza comúnmente y la pendiente de una recta.

## SUGERENCIA

**Pendiente** Con frecuencia nos enfrentamos con pendientes en la vida diaria. Una autopista (o una rampa) puede tener una inclinación (o pendiente) de 8%. Un techo puede tener una inclinación (o pendiente) de  $\frac{6}{15}$ . La pendiente es una medida de la inclinación que puede determinarse dividiendo el cambio vertical, denominado *elevación*, entre el cambio horizontal, denominado *desplazamiento*.

Suponga que un camino tiene una inclinación de 8%. Como  $8\% = \frac{8}{100}$ , esto significa que el camino desciende (o asciende) 8 pies por cada 100 pies de longitud horizontal. Una inclinación de  $\frac{6}{15}$  de un techo significa que el techo desciende 6 pies por cada 15 pies de longitud horizontal.



Cuando determinamos la pendiente de una recta, también estamos calculando una razón del cambio vertical al cambio horizontal. La diferencia principal es que cuando determinamos la pendiente de una recta que no sea horizontal ni vertical, la pendiente puede ser un número positivo o un número negativo, como se explicará dentro de poco.

La *pendiente de una recta* es una medida de la *inclinación* de la recta. La pendiente de una recta es un concepto importante en muchas áreas de matemáticas. Un conocimiento de la pendiente es útil en la comprensión de ecuaciones lineales. Ahora definimos la pendiente de una recta.

## DEFINICIÓN

La **pendiente de una recta** es una razón del cambio vertical al cambio horizontal entre cualesquiera dos puntos seleccionados de la recta.

Como ejemplo, considere la recta que pasa por los puntos (3, 6) y (1, 2) (figura 7.32a).

Si dibujamos una recta paralela al eje  $x$  que pase por el punto (1, 2) y una recta paralela al eje  $y$  que pase por el punto (3, 6), las dos rectas se intersecan en (3, 2), figura 7.32b. Con base en la figura, podemos determinar la pendiente de la recta. El cambio vertical (a lo largo del eje  $y$ ) es  $6 - 2$  o 4 unidades. El cambio horizontal (a lo largo del eje  $x$ ) es  $3 - 1$  o 2 unidades.

$$\text{pendiente} = \frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} = \frac{4}{2} = 2$$

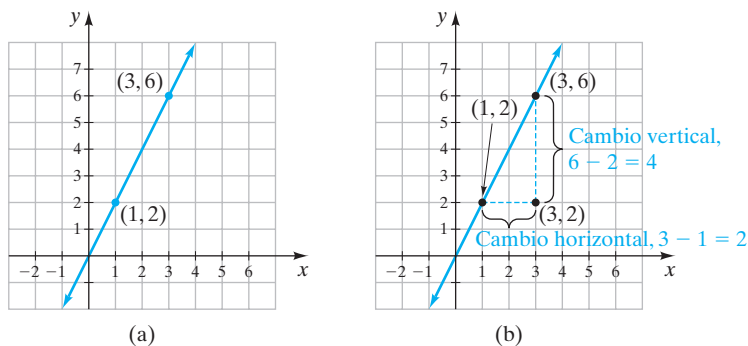


FIGURA 7.32

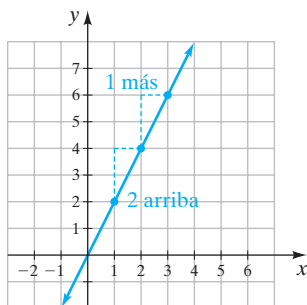


FIGURA 7.33

Por lo que la pendiente de la recta que pasa por estos dos puntos es 2. Al examinar la recta que conecta estos dos puntos, podemos ver que cuando la gráfica se mueve hacia arriba dos unidades en el eje  $y$ , se mueve 1 unidad a la derecha en el eje  $x$  (figura 7.33).

Ahora presentamos un procedimiento para determinar la pendiente de una recta entre cualesquiera dos puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ . Considere la figura 7.34.

El cambio vertical puede determinarse restando  $y_1$  de  $y_2$  y el cambio horizontal puede determinarse restando  $x_1$  de  $x_2$ .

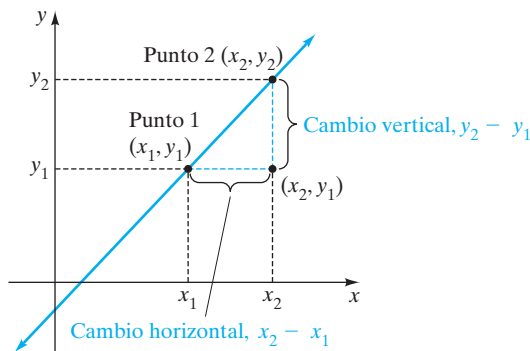


FIGURA 7.34

### Pendiente de una recta que pasa por los puntos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$

$$\text{pendiente} = \frac{\text{cambio en } y \text{ (cambio vertical)}}{\text{cambio en } x \text{ (cambio horizontal)}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

No importa cuáles dos puntos elija para determinar la pendiente de una recta. Tampoco importa cuál punto señale como  $(x_1, y_1)$  o  $(x_2, y_2)$ . Con frecuencia se utiliza la letra griega delta mayúscula,  $\Delta$ , para representar las palabras “el cambio en”. Así,  $\Delta y$  se lee, el cambio en  $y$ , y  $\Delta x$  se lee, el cambio en  $x$ . Por tanto, la pendiente, que se simboliza con la letra  $m$ , se indica como

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

**EJEMPLO 1** Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $(-6, -1)$  y  $(3, 5)$ .

**Solución** Designaremos a  $(-6, -1)$  como  $(x_1, y_1)$  y a  $(3, 5)$  como  $(x_2, y_2)$ .

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{5 - (-1)}{3 - (-6)} \\ &= \frac{5 + 1}{3 + 6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Por tanto, la pendiente es  $\frac{2}{3}$ .

Si designamos  $(3, 5)$  como  $(x_1, y_1)$  y a  $(-6, -1)$  como  $(x_2, y_2)$ , obtendríamos los mismos resultados,

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{-1 - 5}{-6 - 3} = \frac{-6}{-9} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$



## CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

En ocasiones los estudiantes restan las  $x$  y las  $y$  en la fórmula de la pendiente en un orden erróneo. Por ejemplo, con el problema del ejemplo 1:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = \frac{5 - (-1)}{-6 - 3} = \frac{5 + 1}{-6 - 3} = \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3}$$

Observe que al restar en este orden erróneo resulta una pendiente negativa, cuando la pendiente real de la recta es positiva. El mismo error del signo ocurrirá cada vez que la resta se haga de forma incorrecta.

## 2 Reconocer pendientes positivas y negativas

Una recta para la que el valor de  $y$  aumenta cuando  $x$  aumenta tiene una **pendiente positiva** (figura 7.35a). Una recta con pendiente positiva asciende cuando se mueve de izquierda a derecha. Una recta para la que el valor de  $y$  disminuye cuando  $x$  aumenta tiene una **pendiente negativa** (figura 7.35b). Una recta con pendiente negativa desciende cuando se mueve de izquierda a derecha.

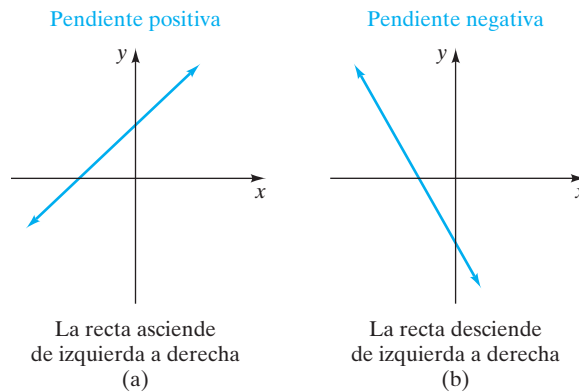


FIGURA 7.35

### EJEMPLO 2

Considere la recta en la figura 7.36.

- Determine la pendiente de la recta observando el cambio vertical y el cambio horizontal entre los puntos  $(1, 5)$  y  $(0, 2)$ .
- Calcule la pendiente de la recta utilizando los dos puntos dados.

### Solución

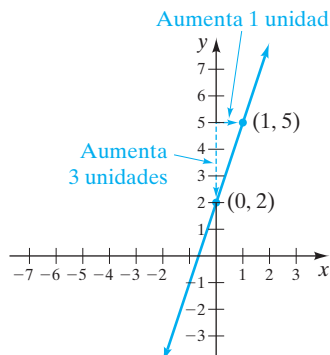


FIGURA 7.36

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 25

**a)** Lo primero que debe observar es que la pendiente es positiva, ya que la recta asciende de izquierda a derecha. Ahora determine el cambio vertical entre los dos puntos. El cambio vertical es de  $+3$  unidades. Ahora determine el cambio horizontal entre los dos puntos. El cambio horizontal es  $+1$  unidad. Como la pendiente es la razón del cambio vertical al cambio horizontal, entre cualesquiera dos puntos, y como la pendiente es positiva, la pendiente de la recta es  $\frac{3}{1}$  o  $3$ .

**b)** Podemos utilizar cualesquiera dos puntos de la recta para determinar su pendiente. Como nos dieron los pares ordenados  $(1, 5)$  y  $(0, 2)$ , los utilizaremos.

Sea  $(x_2, y_2)$  el punto  $(1, 5)$ . Sea  $(x_1, y_1)$  el punto  $(0, 2)$ .

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 2}{1 - 0} = \frac{3}{1} = 3$$

Observe que la pendiente obtenida en el inciso **b)** coincide con la pendiente obtenida en la parte **a)**. Si designamos  $(1, 5)$  como  $(x_1, y_1)$  y  $(0, 2)$  como  $(x_2, y_2)$ , la pendiente no deberá cambiar. Inténtelo y vea que aún obtendrá una pendiente de  $3$ .



**EJEMPLO 3** Determine la pendiente de la recta en la figura 7.37, observando el cambio vertical y horizontal entre los dos puntos mostrados.

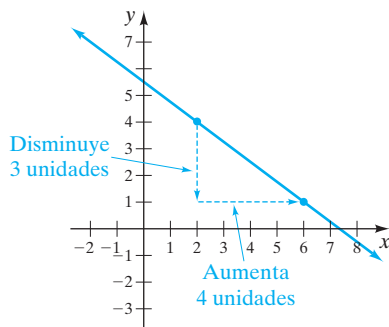


FIGURA 7.37

**Solución** Como la gráfica desciende de izquierda a derecha, debe tener en cuenta que la pendiente de la recta es negativa. El cambio vertical entre los dos puntos dados es  $-3$  unidades, ya que está disminuyendo. El cambio horizontal entre los dos puntos dados es 4 unidades, ya que está aumentando. Como la razón del cambio vertical al cambio horizontal es  $-3$  unidades a 4 unidades, la pendiente de la recta es  $-\frac{3}{4}$  o  $-\frac{3}{4}$ .

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 29**

Con los dos puntos que se muestran en la figura 7.37 y la definición de pendiente, calcule la pendiente de la recta del ejemplo 3. Debe obtener la misma respuesta.

**EJEMPLO 4 Pelotas de golf** Con los avances tecnológicos en la industria de equipo de golf, las pelotas de golf vuelan más lejos. La gráfica en la figura 7.38 muestra la distancia promedio (a la yarda más cercana) de los 10 drives más largos en los años seleccionados de los últimos diez años.

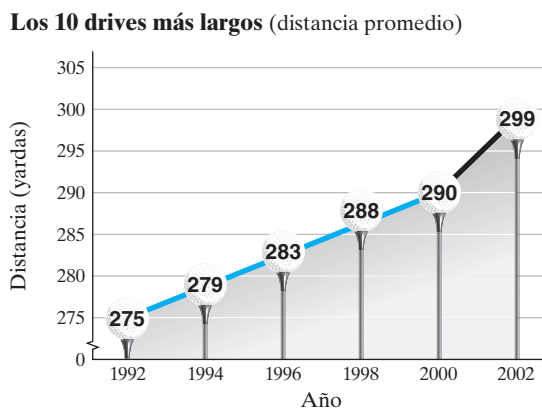


FIGURA 7.38 Fuente: Asociación de Golfistas Profesionales.

El aumento de 1992 a 2000 es casi lineal. La línea en rojo puede utilizarse para estimar la distancia promedio de los drives de 1992 a 2000.

- Utilice los puntos (1992, 275) y (2000, 290), que están en la línea roja, para determinar la pendiente de esta línea.
- Determine la pendiente de la línea negra que va de 2000 a 2002.

**Solución** **a)** Para determinar la pendiente, divida el cambio en la distancia, en el eje vertical, entre el cambio en años, en el eje horizontal. Utilizaremos (2000, 290) como  $(x_2, y_2)$  y (1992, 275) como  $(x_1, y_1)$ .

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{distancia en 2000} - \text{distancia en 1992}}{2000 - 1992} = \frac{290 - 275}{8} = \frac{15}{8}$$

Por tanto, la pendiente de la línea roja es  $\frac{15}{8}$ .

b) Dos puntos en la línea negra son (2002, 299) y (2000, 290).

$$m = \frac{\text{distancia en 2002} - \text{distancia en 2000}}{2002 - 2000} = \frac{299 - 290}{2} = \frac{9}{2}$$

Por tanto, la pendiente de la línea negra es  $\frac{9}{2}$ .



### 3 Examinar las pendientes de rectas horizontales y verticales

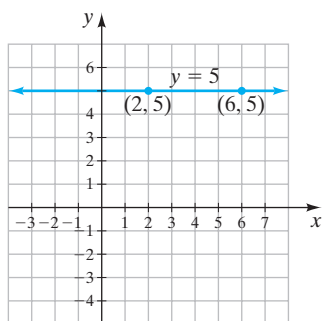


FIGURA 7.39

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 37

Ahora consideramos la pendiente de rectas horizontales y verticales. Considere la gráfica de  $y = 5$  (figura 7.39). ¿Cuál es su pendiente?

La gráfica es paralela al eje  $x$  y pasa por los puntos (2, 5) y (6, 5). De forma arbitraria seleccionamos (6, 5) como  $(x_2, y_2)$  y (2, 5) como  $(x_1, y_1)$ . Entonces la pendiente de la recta es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 5}{6 - 2} = \frac{0}{4} = 0$$

Como no hay cambio en  $y$ , la recta tiene pendiente de 0. Observe que *cualquiera* dos puntos de la recta darían la misma pendiente, 0.

Toda recta horizontal tiene pendiente de 0.

Ahora analizamos las rectas verticales. Considere la gráfica de  $x = 2$  (figura 7.40). ¿Cuál es su pendiente?

La gráfica es paralela al eje  $y$  y pasa por los puntos (2, 1) y (2, 4). De forma arbitraria seleccionamos (2, 4) como  $(x_2, y_2)$  y (2, 1) como  $(x_1, y_1)$ . Entonces la pendiente de la recta es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 1}{2 - 2} = \frac{3}{0}$$

En la sección 1.8 aprendimos que  $\frac{3}{0}$  está indefinido. Por tanto, decimos que la pendiente de esta recta está indefinida.

La pendiente de cualquier recta vertical está indefinida.

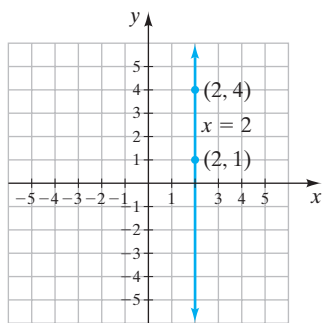


FIGURA 7.40

### 4 Examinar las pendientes de rectas paralelas y perpendiculares

Dos rectas son **paralelas** cuando no se intersecan, sin importar lo que se extiendan. La figura 7.41, en la página 468, ilustra dos rectas paralelas.

Si calculamos la pendiente de la recta 1 utilizando los puntos dados, obtenemos una pendiente de 3. Si calculamos la pendiente de la recta 2, obtenemos una pendiente de 3. (Para verificar esto, ahora debe calcular las pendientes de ambas rectas.) Observe que ambas rectas tienen la misma pendiente. Cualquiera dos rectas no verticales que tienen la misma pendiente son rectas paralelas.

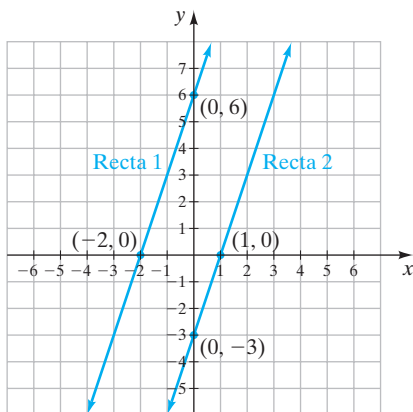


FIGURA 7.41

### Rectas paralelas

Dos rectas no verticales con la misma pendiente y diferentes intersecciones y son paralelas. Cualesquiera dos rectas verticales son paralelas entre ellas.

### EJEMPLO 5

- a) Dibuje una recta con pendiente  $\frac{1}{2}$  que pase por el punto  $(2, 3)$ .
- b) En el mismo sistema de ejes, dibuje una recta con pendiente de  $\frac{1}{2}$  que pase por el punto  $(-1, -3)$ .
- c) ¿Las rectas de los incisos a) y b) son paralelas? Explique.

### Solución

- a) Coloque un punto en  $(2, 3)$ . Como la pendiente es  $\frac{1}{2}$ , positivo, a partir del punto  $(2, 3)$  muévase *hacia arriba* 1 unidad y hacia la *derecha* 2 unidades para obtener un segundo punto. Dibuje una recta que pase por los dos puntos; vea la línea gris en la figura 7.42.

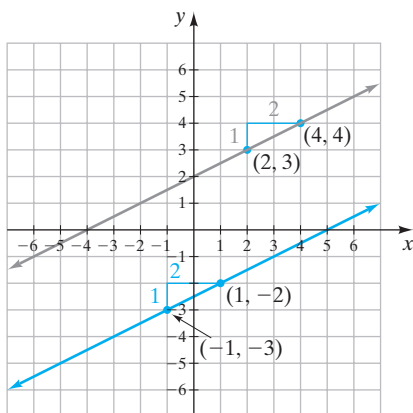


FIGURA 7.42

- b) Coloque un punto en  $(-1, -3)$ . A partir del punto  $(-1, -3)$  muévase 1 unidad hacia arriba y 2 unidades hacia la derecha para obtener un segundo punto. Dibuje una recta que pase por los dos puntos; vea la línea roja en la figura 7.42.
- c) Las rectas en la gráfica parecen paralelas. Como ambas rectas tienen la misma pendiente,  $\frac{1}{2}$ , son rectas paralelas.

Ahora consideraremos rectas perpendiculares. Dos rectas son **perpendiculares** cuando forman un ángulo recto ( $90^\circ$ ). La figura 7.43 de la página siguiente ilustra dos rectas perpendiculares.

Si calculamos la pendiente de la recta 1 utilizando el punto dado, obtenemos una pendiente de  $\frac{1}{2}$ . Si calculamos la pendiente de la recta 2 utilizando los puntos

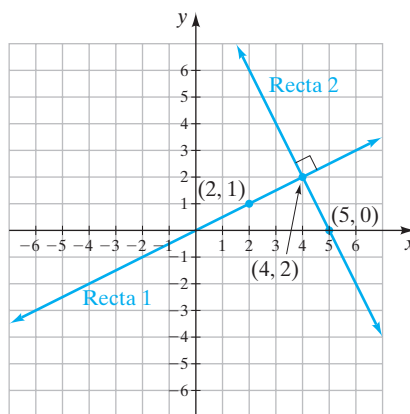


FIGURA 7.43

dados, obtenemos una pendiente de  $-2$ . (Para verificar esto, ahora debe calcular las pendientes de ambas rectas.) Observe el producto de sus pendientes,  $\frac{1}{2}(-2)$ , es  $-1$ . Cualesquiera dos números cuyo producto es  $-1$  se dice que son **recíprocos negativos** uno del otro. En general, si  $m$  representa un número, su recíproco negativo será  $-\frac{1}{m}$ , ya que  $m(-\frac{1}{m}) = -1$ . Cualesquiera dos rectas con pendientes que son recíprocas negativas una de la otra, son rectas perpendiculares.

### Rectas perpendiculares

Dos rectas cuyas pendientes son recíprocas negativas una de la otra, son rectas perpendiculares. Cualquier recta vertical es perpendicular a cualquier recta horizontal.

### EJEMPLO 6

- Dibuje una recta con pendiente de  $-3$  que pase por el punto  $(2, 3)$ .
- En el mismo sistema de ejes, dibuje una recta con pendiente de  $\frac{1}{3}$  que pase por el punto  $(-1, -3)$ .
- ¿Son perpendiculares las dos rectas de los incisos **a)** y **b)**? Explique.

### Solución

- Coloque un punto en  $(2, 3)$ . Una pendiente de  $-3$  significa  $\frac{-3}{1}$ . Ya que la pendiente es *negativa*, a partir del punto  $(2, 3)$  muévase hacia *abajo* 3 unidades y hacia la *derecha* 1 unidad para obtener un segundo punto. Dibuje una recta que pase por los dos puntos; vea la recta gris en la figura 7.44.

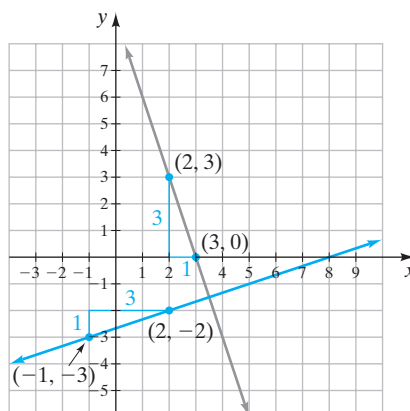


FIGURA 7.44

- Coloque un punto en  $(-1, -3)$ . Ya que la pendiente es  $\frac{1}{3}$  *positivo*, a partir de este punto muévase hacia *arriba* 1 unidad y hacia la *derecha* 3 unidades. Dibuje una recta que pase por los dos puntos; vea la recta en rojo de la figura 7.44.



c) Las rectas en la gráfica parecen ser perpendiculares. Para determinar si son perpendiculares, multiplique las pendientes de las dos rectas. Si su producto es  $-1$ , entonces las pendientes son recíprocas negativas y, por lo tanto, son perpendiculares.

$$\text{Pendiente de la recta 1 (o } m_1) = -3, \text{ pendiente de la recta 2 (o } m_2) = \frac{1}{3}$$

$$(m_1)(m_2) = (-3)\left(\frac{1}{3}\right) = -1$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 39

Como las pendientes son recíprocas negativas, las dos rectas son perpendiculares. ✨

### EJEMPLO 7

Si  $m_1$  representa la pendiente de la recta 1 y  $m_2$  representa la pendiente de la recta 2, determine si las rectas 1 y 2 son paralelas, perpendiculares o nada de esto.

a)  $m_1 = \frac{5}{6}, m_2 = \frac{5}{6}$       b)  $m_1 = \frac{2}{5}, m_2 = 4$       c)  $m_1 = \frac{3}{5}, m_2 = -\frac{5}{3}$

### Solución

a) Como las pendientes son iguales, ambas  $\frac{5}{6}$ , las rectas son paralelas.

b) Como las pendientes no son iguales, las rectas no son paralelas. Ya que  $m_1 \cdot m_2 = \left(\frac{2}{5}\right)(4) \neq -1$ , las pendientes no son recíprocas negativas y, por tanto no son perpendiculares. Así, la respuesta es ni paralelas, ni perpendiculares.

c) Como las pendientes no son iguales, las rectas no son paralelas. Como  $m_1 \cdot m_2 = \frac{3}{5}\left(-\frac{5}{3}\right) = -1$ , las pendientes son recíprocas negativas y las rectas son perpendiculares. ✨

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 53

## Conjunto de ejercicios 7.3

### Ejercicios conceptuales

1. Explique el significado de la pendiente de una recta.
2. Explique cómo determinar la pendiente de una recta.
3. Describa la apariencia de una recta que tiene pendiente positiva.
4. Describa la apariencia de una recta que tiene pendiente negativa.
5. Explique cómo decidir, mediante observación, si una recta tiene pendiente positiva o negativa.
6. ¿Cuál es la pendiente de cualquier recta horizontal? Explique su respuesta.
7. ¿Las rectas verticales tienen pendiente? Explique.
8. ¿Cuál es la letra que se utiliza para representar a la pendiente?
9. Si dos rectas no verticales son paralelas, ¿qué sabemos acerca de las pendientes de las rectas?
10. Si dos rectas no verticales son perpendiculares, ¿qué sabemos acerca de las pendientes de las dos rectas?

### Práctica de habilidades

Utilizando la fórmula de la pendiente, determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados.

11.  $(5, 1)$  y  $(7, 5)$

12.  $(8, -2)$  y  $(6, -4)$

13.  $(9, 0)$  y  $(5, -2)$

14.  $(5, -6)$  y  $(6, -5)$

15.  $\left(3, \frac{1}{2}\right)$  y  $\left(-3, \frac{1}{2}\right)$

16.  $(-4, 2)$  y  $(6, 5)$

17.  $(-7, 6)$  y  $(-2, 6)$

18.  $(9, 3)$  y  $(5, -6)$

19.  $(6, 4)$  y  $(6, -2)$

20.  $(-7, 5)$  y  $(3, -4)$

21.  $(6, 0)$  y  $(-2, 3)$

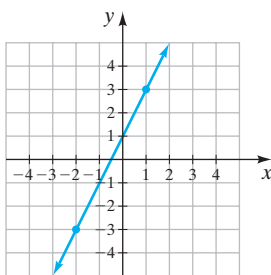
22.  $(-2, 3)$  y  $(-2, -1)$

23.  $\left(0, \frac{3}{2}\right)$  y  $\left(-\frac{3}{4}, 1\right)$

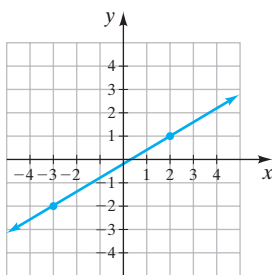
24.  $(-1, 7)$  y  $\left(\frac{1}{3}, -2\right)$

Por medio de la observación del cambio vertical y horizontal de la recta entre los dos puntos indicados, determine la pendiente de cada recta.

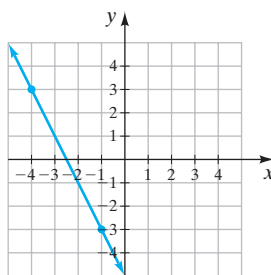
25.



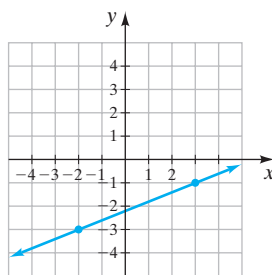
26.



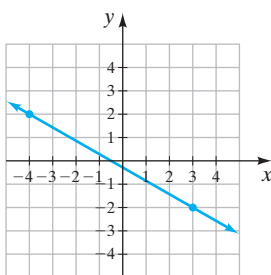
27.



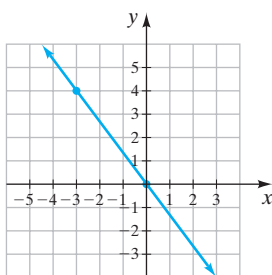
28.



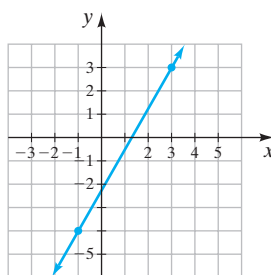
29.



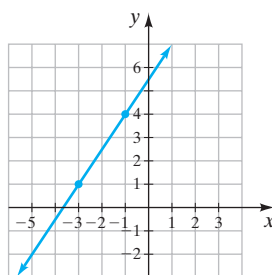
30.



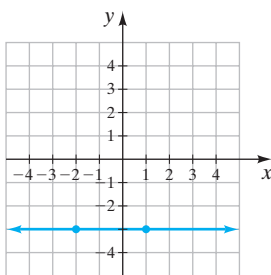
31.



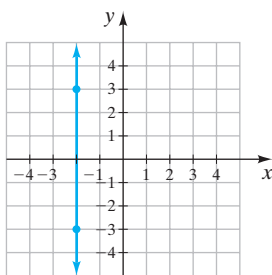
32.



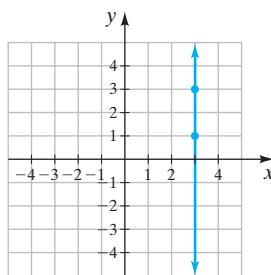
33.



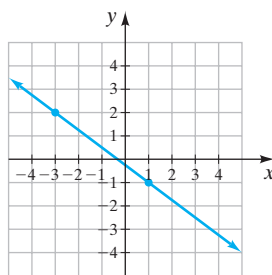
34.



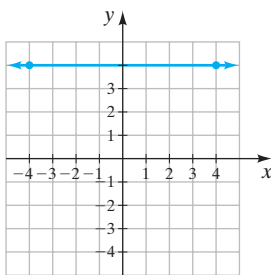
35.



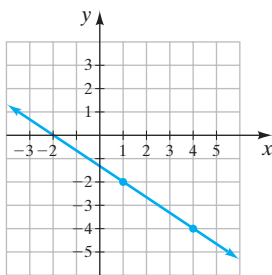
36.



37.



38.



En los ejercicios 39 a 48, grafique la recta con la pendiente dada que pasa por el punto dado.

39. Pasa por  $(3, -1)$  con  $m = 2$ .

41. Pasa por  $(0, 3)$  con  $m = 1$ .

43. Pasa por  $(0, 0)$  con  $m = -\frac{1}{3}$ .

45. Pasa por  $(-4, 2)$  con  $m = 0$ .

47. Pasa por  $(2, 3)$  con pendiente no definida.

40. Pasa por  $(0, -2)$  con  $m = \frac{1}{2}$ .

42. Pasa por  $(-1, -2)$  con  $m = -2$ .

44. Pasa por  $(-3, 4)$  con  $m = -\frac{2}{3}$ .

46. Pasa por  $(-2, 3)$  con  $m = 0$ .

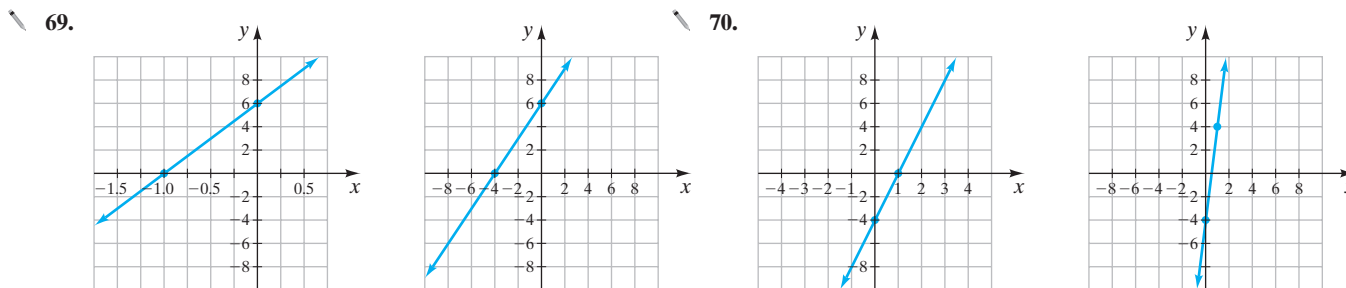
48. Pasa por  $(-1, -2)$  con pendiente indefinida.

En los ejercicios 49 a 64, indique si las rectas diferentes 1 y 2 son paralelas, perpendiculares o nada de esto.

49.  $m_1 = 3, m_2 = 3$       50.  $m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = -3$       51.  $m_1 = \frac{1}{4}, m_2 = -4$       52.  $m_1 = -2, m_2 = -2$
53.  $m_1 = \frac{2}{3}, m_2 = -\frac{3}{2}$       54.  $m_1 = 5, m_2 = -4$       55.  $m_1 = 6, m_2 = \frac{1}{3}$       56.  $m_1 = -\frac{1}{4}, m_2 = -4$
57.  $m_1 = \frac{1}{3}, m_2 = 3$       58.  $m_1 = 6, m_2 = -\frac{1}{6}$       59.  $m_1 = 0, m_2 = 0$       60.  $m_1 = 0, m_2 = -1$
61.  $m_1$  está indefinida,  $m_2$  está indefinida.      62.  $m_1 = 0, m_2$  está indefinida.
63.  $m_1$  está indefinida,  $m_2 = 0$ .      64.  $m_1 = 2, m_2 = -2$
65. La pendiente de una recta dada es 2. Si se dibuja una recta paralela a la recta dada, ¿cuál será su pendiente?      66. La pendiente de una recta dada es  $-4$ . Si se dibuja una recta paralela a la recta dada, ¿cuál será su pendiente?
67. La pendiente de una recta dada es  $-4$ . Si se dibuja una recta perpendicular a la recta dada, ¿cuál será su pendiente?      68. La pendiente de una recta dada es  $-5$ . Si se dibuja una recta perpendicular a la recta dada, ¿cuál será su pendiente?

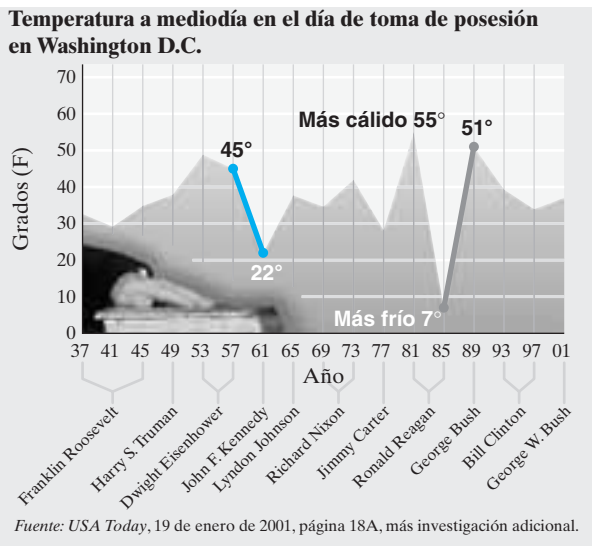
### Solución de problemas

En los ejercicios 69 y 70, determine cuál recta (la primera o la segunda) tiene mayor pendiente. Explique su respuesta. Observe que las escalas en los ejes  $x$  y  $y$  son diferentes.

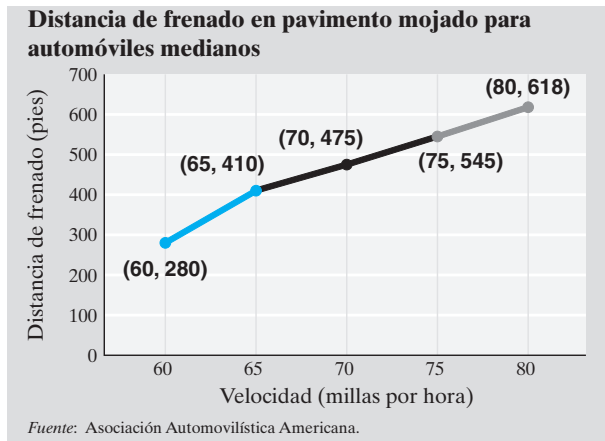


En los ejercicios 71 y 72, determine la pendiente de los segmentos de recta indicados en **a)** rojo **b)** gris.

71.



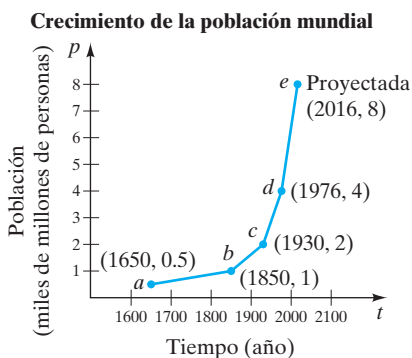
72.



73. Una recta dada pasa por los puntos  $(1, 6)$  y  $(3, -2)$ . Si se dibuja una recta paralela a la recta dada, ¿cuál será su pendiente?
74. Una recta dada pasa por los puntos  $(-2, 3)$  y  $(4, 5)$ . Si se dibuja una recta paralela a la recta dada, ¿cuál será su pendiente?
75. Una recta dada pasa por los puntos  $(1, -3)$  y  $(2, 5)$ . Si se dibuja una recta perpendicular a la recta dada, ¿cuál será su pendiente?
76. Una recta dada pasa por los puntos  $(-3, 0)$  y  $(-2, 3)$ . Si se dibuja una recta perpendicular a la recta dada, ¿cuál será su pendiente?

## Problemas de reto

77. Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{8})$  y  $(-\frac{4}{9}, -\frac{7}{2})$ .
78. Si un punto en la recta es  $(6, -4)$  y la pendiente de la misma es  $-\frac{5}{3}$ , identifique otro punto de la recta.
79. Un cuadrilátero (una figura de cuatro lados) tiene cuatro vértices (los puntos en donde coinciden los lados). El vértice  $A$  está en  $(0, 1)$ , el vértice  $B$  está en  $(6, 2)$ , el vértice  $C$  está en  $(5, 4)$  y el vértice  $D$  está en  $(1, -1)$ .
- Grafique el cuadrilátero en el sistema de coordenadas cartesianas.
  - Determine las pendientes de los lados  $AC$ ,  $CB$ ,  $DB$  y  $AD$ .
  - ¿Cree que esta figura sea un paralelogramo? Explique.
80. La gráfica siguiente muestra la población mundial estimada para el año 2016.



- a) Determine la pendiente del segmento de recta entre cada par de puntos, esto es  $ab$ ,  $bc$ , y así sucesivamente.

## Actividad en grupo

Analicen y respondan el ejercicio 82 en grupo, de acuerdo con las instrucciones.

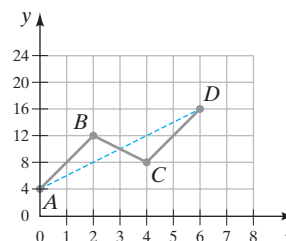
82. La pendiente de una colina y la pendiente de una recta, ambas miden la inclinación. Sin embargo, existen varias diferencias importantes.
- Como grupo, expliquen cómo creen que se determina la pendiente de una colina.
  - La pendiente de una recta, graficada en el sistema de coordenadas cartesianas, ¿se mide en alguna unidad específica?
  - ¿La pendiente de una colina se mide en alguna unidad específica?



Recuerde: la segunda coordenada está en miles de millones. Así que, por ejemplo, 0.5 miles de millones es en realidad 500,000,000.

- b) ¿Diría que esta gráfica representa una ecuación lineal? Explique.

81. Considere la siguiente gráfica.



- Determine la pendiente de cada uno de los tres segmentos de recta en color gris.
- Determine el promedio de las tres pendientes que encontró en el inciso a).
- Determine la pendiente de la recta discontinua en color rojo de  $A$  a  $D$ .
- Determine si la pendiente de la recta punteada en rojo de  $A$  a  $D$  es igual que el promedio (media) de las pendientes de las tres rectas en gris.
- Explique lo que ilustra este ejemplo.

## Ejercicios de repaso acumulativo

[1.9] 83. Evalúe  $4x^2 + 3x + \frac{x}{2}$  cuando  $x = 0$ .

[2.3] 84. a) Si  $-x = -\frac{3}{2}$ , ¿cuál es el valor de  $x$ ?

b) Si  $5x = 0$ , ¿cuál es el valor de  $x$ ?

[4.4] 85. Reste  $(2x - 8)$  de  $(4x + 7)$ .

[6.6] 86. Resuelva la ecuación  $\frac{2x}{x-3} = 2 + \frac{3}{x}$

[7.2] 87. Determine las intersecciones  $x$  y  $y$  para la recta cuya ecuación es  $5x - 3y = 15$ .

## 7.4 FORMAS PENDIENTE-ORDENADA AL ORIGEN Y PUNTO-PENDIENTE DE UNA ECUACIÓN LINEAL



- 1 Escribir una ecuación lineal en la forma pendiente-ordenada al origen.
- 2 Graficar una ecuación lineal por medio de la pendiente y la intersección  $y$ .
- 3 Utilizar la forma pendiente-ordenada al origen para determinar la ecuación de una recta.
- 4 Utilizar la forma punto-pendiente para determinar la ecuación de una recta.
- 5 Comparar los tres métodos para graficar ecuaciones lineales.

En la sección 7.1 introdujimos la *forma estándar* de una ecuación lineal,  $ax + by = c$ . En esta sección presentamos otras dos formas, la pendiente-ordenada al origen y la forma punto-pendiente. Iniciamos nuestro estudio con la forma pendiente-ordenada al origen.

## 1 Escribir una ecuación lineal en la forma pendiente-ordenada al origen

Una forma muy importante de una ecuación lineal es la **forma pendiente-ordenada al origen**  $y = mx + b$ . La gráfica de una ecuación de la forma  $y = mx + b$  siempre será una línea recta con una **pendiente de  $m$**  y una **intersección  $y$   $(0, b)$** . Por ejemplo, la gráfica de la ecuación  $y = 3x - 4$  será una línea recta con pendiente de 3 y una intersección  $y$   $(0, -4)$ . La gráfica de  $y = -2x + 5$  será una recta con pendiente de  $-2$  e intersección  $y$  en  $(0, 5)$ .

## Forma pendiente-ordenada al origen de una ecuación lineal

$$y = mx + b$$

donde  $m$  es la pendiente, y  $(0, b)$  es la intersección  $y$  (ordenada al origen) de la recta.

$$\begin{array}{ccc} \text{Pendiente} & & \text{Intersección } y \\ \swarrow & & \swarrow \\ y = mx + b \end{array}$$

Ecuaciones en la forma pendiente ordenada al origen      Pendiente      Intersección  $y$

$$y = 4x - 5 \qquad 4 \qquad (0, -5)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \qquad \frac{1}{2} \qquad \left(0, \frac{3}{2}\right)$$

$$y = -5x + 3 \qquad -5 \qquad (0, 3)$$

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{3}{5} \qquad -\frac{2}{3} \qquad \left(0, -\frac{3}{5}\right)$$

**Para escribir una ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen**, en la ecuación despeje  $y$ .

Una vez que en la ecuación se despeja  $y$ , el coeficiente numérico del término  $x$  será la pendiente y el término constante dará la intersección  $y$ .

**EJEMPLO 1** Escriba la ecuación  $-3x + 4y = 8$  en la forma pendiente-ordenada al origen. Indique la pendiente y la intersección  $y$ .

**Solución** Para escribir la ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen, en la ecuación despejamos  $y$ .

$$\begin{aligned} -3x + 4y &= 8 \\ 4y &= 3x + 8 \\ y &= \frac{3x + 8}{4} \\ y &= \frac{3}{4}x + \frac{8}{4} \\ y &= \frac{3}{4}x + 2 \end{aligned}$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 11**

La pendiente es  $\frac{3}{4}$ , y la intersección  $y$  es  $(0, 2)$ . 

**EJEMPLO 2** Determine si las dos ecuaciones representan rectas que son paralelas, perpendiculares o nada de esto.


**a.**  $2x + y = 10$  **b.**  $3x - 2y = 4$   
 $2y = -4x + 12$   $6y + 4x = -6$

**Solución** En la sección 7.3 aprendimos que dos rectas que tienen la misma pendiente son rectas paralelas, y dos rectas cuyas pendientes son recíprocas negativas son perpendiculares. Podemos determinar la pendiente de cada recta despejando  $y$  en cada ecuación. El coeficiente del término en  $x$  será la pendiente.

**a.**  $2x + y = 10$   $2y = -4x + 12$   
 $y = -2x + 10$   $y = \frac{-4x + 12}{2}$   
 $y = -2x + 6$

Como ambas ecuaciones tienen la misma pendiente,  $-2$ , las ecuaciones representan rectas que son paralelas. Observe que las ecuaciones representan dos rectas diferentes ya que sus intersecciones  $y$  son diferentes.

**b.**  $3x - 2y = 4$   $6y + 4x = -6$   
 $-2y = -3x + 4$   $6y = -4x - 6$   
 $y = \frac{-3x + 4}{-2}$   $y = \frac{-4x - 6}{6}$   
 $y = \frac{3}{2}x - 2$   $y = -\frac{2}{3}x - 1$

La pendiente de una recta es  $\frac{3}{2}$  y la pendiente de la otra recta es  $-\frac{2}{3}$ . Al multiplicar las pendientes obtenemos  $(\frac{3}{2})(-\frac{2}{3}) = -1$ . Como el producto es  $-1$ , las pendientes son recíprocas negativas. Por tanto, las ecuaciones representan rectas que son perpendiculares. 

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 39**

## 2 Graficar una ecuación lineal por medio de la pendiente y la intersección y

En la sección 7.2 analizamos dos métodos para graficar una ecuación lineal. Fueron (1) por medio del trazo de puntos, y (2) por medio de las intersecciones  $x$  y  $y$ . Ahora presentamos un tercer método. Éste hace uso de la pendiente y la intersección  $y$ . Recuerde que cuando despejamos y ponemos la ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen. Una vez en esta forma, podemos determinar la pendiente y la intersección  $y$  de la gráfica de la ecuación.

Graficamos ecuaciones por medio de la pendiente y la intersección  $y$  de una forma muy similar a la forma en que trabajamos los ejemplos 5 y 6 de la sección 7.3. Sin embargo, al graficar por medio de la forma pendiente-ordenada al origen, nuestro punto de inicio siempre es la intersección  $y$ . Después de determinar la intersección  $y$ , puede obtenerse un segundo punto moviéndose hacia arriba y a la derecha, si la pendiente es positiva, o bien hacia abajo y a la derecha, si la pendiente es negativa.

**EJEMPLO 3** Escriba la ecuación  $-3x + 4y = 8$  en la forma pendiente-ordenada al origen; luego utilice la pendiente y la intersección  $y$  para graficar  $-3x + 4y = 8$ .

**Solución** En el ejemplo 1 despejamos  $y$  en  $-3x + 4y = 8$ . Determinamos que

$$y = \frac{3}{4}x + 2$$

La pendiente de la recta es  $\frac{3}{4}$  y la intersección  $y$  es  $(0, 2)$ . Marcamos el primer punto, la intersección  $y$  en 2 en el eje  $y$  (figura 7.45). Ahora utilizamos la pendiente  $\frac{3}{4}$ , para

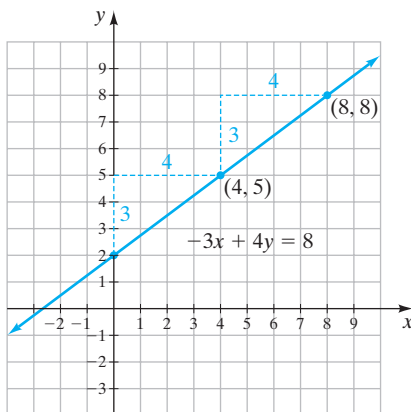


FIGURA 7.45

determinar un segundo punto. Como la pendiente es positiva, nos movemos 3 unidades hacia arriba y 4 unidades hacia la derecha para determinar el segundo punto. Un segundo punto estará en  $(4, 5)$ . Podemos continuar este proceso para obtener un tercer punto en  $(8, 8)$ . Ahora dibujamos una recta que pase por los tres puntos. Observe que la recta tiene pendiente positiva, que es lo que esperamos. ✨

**EJEMPLO 4** Grafique la ecuación  $5x + 3y = 12$  por medio de la pendiente y la intersección  $y$ .

**Solución** En la ecuación, despeje  $y$

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 12 \\ 3y &= -5x + 12 \\ y &= \frac{-5x + 12}{3} \\ &= -\frac{5}{3}x + 4 \end{aligned}$$

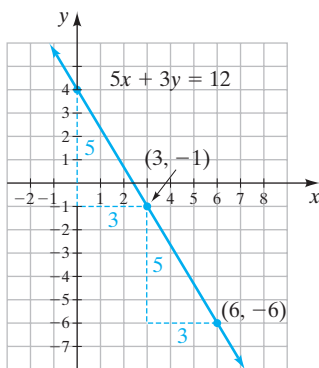


FIGURA 7.46

Por tanto, la pendiente es  $-\frac{5}{3}$  y la intersección  $y$  es  $(0, 4)$ . Comenzamos marcando un punto en 4 en el eje  $y$  (figura 7.46). Luego nos movemos 5 unidades hacia abajo y 3 hacia la derecha para determinar el siguiente punto. Nos movemos hacia abajo y a la derecha ya que la pendiente es negativa, y una recta con pendiente negativa debe descender de izquierda a derecha. Por último, dibujamos la recta entre los puntos trazados.

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 21

### 3 Utilizar la forma pendiente-ordenada al origen para determinar la ecuación de una recta

Ahora que sabemos cómo utilizar la forma pendiente-ordenada al origen de una recta, podemos utilizarla para escribir la ecuación de una recta dada. Para hacerlo, necesitamos determinar la pendiente,  $m$ , y la intersección  $y$  de la recta. Una vez hecho esto, podemos escribir la ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen,  $y = mx + b$ . Por ejemplo, si determinamos que la pendiente de una recta es  $-4$  y la intersección está en 6, la ecuación de la recta es  $y = -4x + 6$ .

#### EJEMPLO 5 Solución

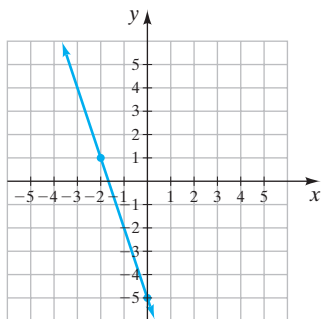


FIGURA 7.47

Determine la ecuación de la recta que se muestra en la figura 7.47.

La gráfica muestra que la intersección  $y$  está en  $-5$ . Ahora necesitamos determinar la pendiente de la recta. Como la gráfica desciende de izquierda a derecha, tiene pendiente negativa. Podemos ver que el cambio vertical es de 3 unidades por cada cambio horizontal de 1 unidad. Por tanto, la pendiente de la recta es  $-3$ . La pendiente también puede determinarse seleccionando cualesquiera dos puntos en la recta y calculando la pendiente. Utilizamos el punto  $(-2, 1)$  para representar a  $(x_2, y_2)$  y al punto  $(0, -5)$  para representar a  $(x_1, y_1)$ .

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{1 - (-5)}{-2 - 0} \\ &= \frac{1 + 5}{-2} = \frac{6}{-2} = -3 \end{aligned}$$

Nuevamente obtenemos una pendiente de  $-3$ . Al sustituir  $-3$  por  $m$  y  $-5$  por  $b$  en la forma pendiente-ordenada al origen de una recta obtenemos la ecuación de la recta en la figura 7.47, que es  $y = -3x - 5$ .

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 29

Ahora veamos una aplicación de la graficación.

#### EJEMPLO 6

**Jarrones artísticos** Kris, un artista alfarero, fabrica jarrones de cerámica que vende en ferias de arte. Su negocio tiene un costo fijo mensual (renta del stand, publicidad, teléfono celular, etcétera) y un costo variable por cada jarrón fabricado (costo de materiales, costo de mano de obra, costo por el uso del horno, etcétera). El costo mensual total por la fabricación de  $x$  se ilustra en la gráfica de la figura 7.48.



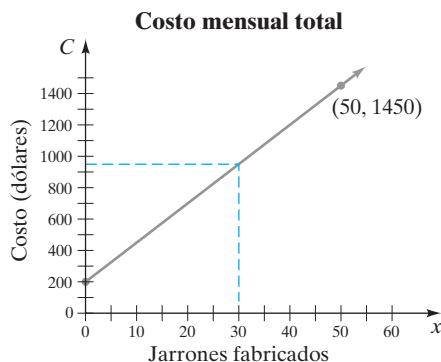


FIGURA 7.48

- a) Determine la ecuación del costo mensual total cuando se fabrican  $x$  jarrones.  
 b) Utilice la ecuación determinada en el inciso a) para encontrar el costo mensual total si se fabricaron 30 jarrones.  
 c) Utilice la gráfica de la figura 7.48 para ver si su respuesta en el inciso b) es correcta.

### Solución

**a) Entender y traducir** Observe que el eje vertical es el costo,  $C$ , y no  $y$ . Las letras o nombre utilizados en los ejes no cambian la forma en que resolvemos el problema. Utilizaremos la forma pendiente-ordenada al origen para escribir la ecuación de la recta. Sin embargo, como  $y$  es reemplazada por  $C$ , utilizaremos  $C = mx + b$ , en la que  $b$  es en donde la gráfica cruza el eje vertical o eje  $C$ . Primero observamos que la gráfica cruza al eje vertical en 200. Por tanto,  $b$  es 200. Ahora necesitamos determinar la pendiente de la recta. Utilizaremos el punto  $(0, 200)$  como  $(x_1, y_1)$  y  $(50, 1450)$  como  $(x_2, y_2)$ .

**Calcular**

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{1450 - 200}{50 - 0} = \frac{1250}{50} = 25 \end{aligned}$$


**Respuesta** La pendiente es 25. La ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen es

$$\begin{aligned} C &= mx + b \\ &= 25x + 200 \end{aligned}$$

**b)** Para determinar el costo mensual cuando se venden 30 jarrones, sustituimos 30 por  $x$ .

$$\begin{aligned} C &= 25x + 200 \\ &= 25(30) + 200 \\ &= 750 + 200 = 950 \end{aligned}$$

El costo mensual cuando se fabrican 30 jarrones es \$950.

**c)** Si dibujamos una recta vertical desde 30 en el eje  $x$  (la línea roja), vemos que el costo correspondiente es alrededor de \$950. Por tanto, nuestra respuesta en el inciso **b)** es correcta. 

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 65

## 4 Utilizar la forma punto-pendiente para determinar la ecuación de una recta

Hasta ahora hemos estudiado la forma estándar de una ecuación lineal,  $ax + by = c$ , y la forma pendiente-ordenada al origen de una ecuación lineal,  $y = mx + b$ . Ahora analizaremos otra forma, denominada *forma punto-pendiente*.

Cuando se conocen la pendiente de una recta y un punto de la recta, podemos utilizar la forma punto-pendiente para determinar la ecuación de la recta. La **forma punto-pendiente** puede obtenerse comenzando con la pendiente entre cualquier punto seleccionado  $(x, y)$  y un punto fijo  $(x_1, y_1)$  en la recta.

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad \text{o bien} \quad \frac{m}{1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Ahora multiplicamos en forma cruzada para obtener

$$m(x - x_1) = y - y_1 \quad \text{o bien} \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

### Forma punto-pendiente de una ecuación lineal

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

donde  $m$  es la pendiente de la recta y  $(x_1, y_1)$  es un punto de la recta.

**EJEMPLO 7** Escriba una ecuación, en la forma pendiente-ordenada al origen, de la recta que pasa por el punto  $(3, 2)$  y tiene pendiente de 5.

**Solución** Como se nos da un punto y la pendiente de la recta, empezamos escribiendo la ecuación en la forma punto-pendiente. La pendiente  $m$  es 5. El punto en la recta es  $(3, 2)$ ; lo utilizaremos para  $(x_1, y_1)$  en la fórmula. Sustituimos **5** por  $m$ , **3** por  $x_1$  y **2** por  $y_1$  en la forma punto-pendiente de una ecuación lineal

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = 5(x - 3) \quad \text{Ecuación en la forma punto-pendiente.}$$

$$y - 2 = 5x - 15 \quad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$y = 5x - 13 \quad \text{Ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen.}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 51

La gráfica de  $y = 5x - 13$  tiene pendiente 5 y pasa por el punto  $(3, 2)$ . 

La respuesta del ejemplo 7 se dio en la forma pendiente-ordenada al origen. Si nos hubiesen pedido dar la respuesta en la forma estándar, se tendrían dos respuestas aceptables:  $-5x + y = -13$  y  $5x - y = 13$ . Su profesor puede especificar la forma en que debe darse la ecuación.

En el ejemplo 8 resolveremos un ejemplo muy similar al ejemplo 7. Sin embargo, en la solución del ejemplo 8 la ecuación tendrá una fracción. En el capítulo 2 resolvimos algunas ecuaciones que tenían fracciones. Recuerde que para simplificar una ecuación que tiene una fracción, multiplicamos ambos lados de la ecuación por el denominador de la fracción.

**EJEMPLO 8** Escriba una ecuación, en la forma pendiente-ordenada al origen, de la recta que pase por el punto  $(6, -2)$  y tenga pendiente  $\frac{2}{3}$ .

**Solución** Comenzaremos con la forma punto-pendiente de la recta, donde  $m$  es  $\frac{2}{3}$ , 6 es  $x_1$  y  $-2$  es  $y_1$ .

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-2) = \frac{2}{3}(x - 6) \quad \text{Ecuación en la forma punto-pendiente.}$$

$$y + 2 = \frac{2}{3}(x - 6)$$

$$3(y + 2) = 3 \cdot \frac{2}{3}(x - 6) \quad \text{Multiplicar ambos lados por 3.}$$

$$3y + 6 = 2(x - 6) \quad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$3y + 6 = 2x - 12 \quad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$3y = 2x - 18 \quad \text{Resta 6 de ambos lados.}$$

$$y = \frac{2x - 18}{3} \quad \text{Dividir ambos lados entre 3.}$$

$$y = \frac{2}{3}x - 6 \quad \text{Ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen.} \quad \text{☀}$$

**SUGERENCIA**

Hemos analizado tres formas de una ecuación lineal. A continuación, resumimos las tres formas. Es importante que memorice estas formas.

**FORMA ESTÁNDAR**

$$ax + by = c$$

**EJEMPLOS**

$$2x - 3y = 8$$

$$-5x + y = -2$$

**FORMA PENDIENTE-ORDENADA AL ORIGEN**

$$y = mx + b$$

$m$  es la pendiente,  $(0, b)$  es la intersección y

**EJEMPLOS**

$$y = 2x - 5$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 2$$

**FORMA PUNTO-PENDIENTE**

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$m$  es la pendiente,  $(x_1, y_1)$  es un punto en la recta

**EJEMPLOS**

$$y - 3 = 2(x + 4)$$

$$y + 5 = -4(x - 1)$$

Ahora analizamos cómo utilizar la forma punto-pendiente para determinar la ecuación de una recta cuando se conocen dos puntos de la recta.

**EJEMPLO 9** Determine una ecuación de la recta que pasa por los puntos  $(-1, 3)$  y  $(-3, 2)$ . Escriba la ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen.

**Solución** Para utilizar la forma punto-pendiente, primero debemos determinar la pendiente de la recta que pasa por los dos puntos. Para esto, designamos a  $(-1, 3)$  como  $(x_1, y_1)$  y a  $(-3, 2)$  como  $(x_2, y_2)$ .

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 3}{-3 - (-1)} = \frac{2 - 3}{-3 + 1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

La pendiente es  $\frac{1}{2}$ . Podemos utilizar cualquiera de los puntos (uno a la vez) para determinar la ecuación de la recta. Este ejemplo se resolverá por medio de ambos puntos para mostrar que las soluciones obtenidas son idénticas.

Al utilizar el punto  $(-1, 3)$  como  $(x_1, y_1)$ ,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{1}{2}[x - (-1)]$$

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x + 1)$$

$$\boxed{2} \cdot (y - 3) = \boxed{2} \cdot \frac{1}{2}(x + 1) \quad \text{Multiplicar ambos lados por el mcd, 2.}$$

$$2y - 6 = x + 1$$

$$2y = x + 7$$

$$y = \frac{x + 7}{2} \quad \text{o bien} \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

Al utilizar el punto  $(-3, 2)$  como  $(x_1, y_1)$ ,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{1}{2}[x - (-3)]$$

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x + 3)$$

$$2 \cdot (y - 2) = 2 \cdot \frac{1}{2}(x + 3) \quad \text{Multiplicar ambos lados por el mcd, 2.}$$

$$2y - 4 = x + 3$$

$$2y = x + 7$$

$$y = \frac{x + 7}{2} \quad \text{o bien} \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 57

Observe que las ecuaciones para la recta son idénticas.



### SUGERENCIA

En el conjunto de ejercicios al final de esta sección, se le pedirá escribir una ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen. Aunque en algún momento escribirá la ecuación en esta forma, podría ser necesario primero trabajar con la forma punto-pendiente. A continuación indicamos la forma inicial que se sugiere utilizar para resolver el problema.

Inicie con la **forma pendiente-ordenada** al origen si conoce:

La pendiente de la recta y la intersección  $y$ .

Inicie con la **forma punto-pendiente** si conoce:

- a) La pendiente de la recta y un punto en la recta, o bien
- b) Dos puntos en la recta (primero determine la pendiente, luego utilice la forma punto-pendiente).

## 5 Comparar los tres métodos para graficar ecuaciones lineales

Hemos analizado tres métodos para graficar una ecuación lineal: (1) trazando puntos; (2) por medio de las intersecciones  $x$  y  $y$ , y (3) por medio de la pendiente y la intersección  $y$ . En el ejemplo 10 graficamos una ecuación utilizando los tres métodos. Un solo método no es siempre el más sencillo de utilizar. Si la ecuación está dada en la forma pendiente-ordenada al origen,  $y = mx + b$ , entonces podría ser más sencilla la graficación por medio del trazo de puntos o por medio de la pendiente y la intersección  $y$ . Si la ecuación está dada en la forma estándar,  $ax + by = c$ , entonces podría ser más fácil graficar por medio de las intersecciones. A menos que su maestro especifique qué método debe utilizar, podría utilizar el método con el que se sienta más cómodo. La graficación por medio del trazo de puntos es el más versátil, ya que también puede utilizarse para graficar ecuaciones que no son líneas rectas.

**EJEMPLO 10** Grafique  $3x - 2y = 8$  **a)** por medio del trazo de puntos; **b)** por medio de las intersecciones  $x$  y  $y$ , y **c)** utilizando la pendiente y la intersección  $y$ .

**Solución** Para los incisos **a)** y **c)** escribiremos la ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen.

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 8 \\ -2y &= -3x + 8 \\ y &= \frac{-3x + 8}{-2} = \frac{3}{2}x - 4 \end{aligned}$$

**a) Trazo de puntos** Para determinar los pares ordenados que se trazarán, sustituimos valores para  $x$  y encontramos los valores correspondientes de  $y$ . En la siguiente tabla se indican tres pares ordenados. Luego trazamos los pares ordenados y dibujamos la gráfica (figura 7.49).

$$y = \frac{3}{2}x - 4$$

$x$	$y$
0	-4
2	-1
4	2

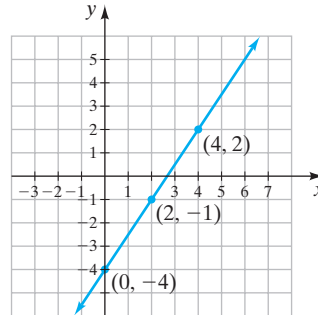


FIGURA 7.49

**b) Intersecciones** Determinamos las intersecciones  $x$  y  $y$ , además de un punto de prueba. Luego trazamos los puntos y dibujamos la gráfica (figura 7.50).

$$3x - 2y = 8$$

**Intersección  $x$**

$$\begin{aligned} \text{Sea } y &= 0 \\ 3x - 2y &= 8 \\ 3x - 2(0) &= 8 \\ 3x &= 8 \\ x &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

**Intersección  $y$**

$$\begin{aligned} \text{Sea } x &= 0 \\ 3x - 2y &= 8 \\ 3(0) - 2y &= 8 \\ -2y &= 8 \\ y &= -4 \end{aligned}$$

**Punto de prueba**

$$\begin{aligned} \text{Sea } x &= 2 \\ 3x - 2y &= 8 \\ 3(2) - 2y &= 8 \\ 6 - 2y &= 8 \\ -2y &= 2 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Los tres pares ordenados son  $(\frac{8}{3}, 0)$ ,  $(0, -4)$  y  $(2, -1)$ .

**c) Pendiente ordenada al origen** La intersección  $y$  es  $(0, -4)$ ; por tanto, colocamos un punto en  $-4$  en el eje  $y$ . Como la pendiente es  $\frac{3}{2}$ , obtenemos un segundo punto moviéndonos hacia arriba 3 unidades y 2 unidades hacia la derecha. La gráfica se ilustra en la figura 7.51.

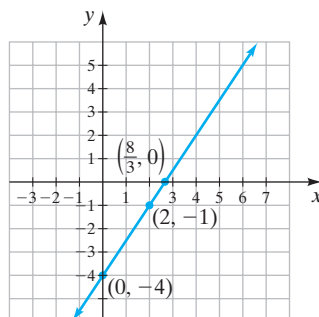


FIGURA 7.50

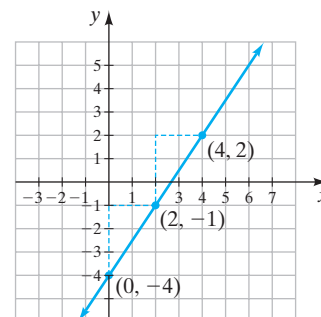
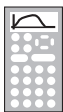


FIGURA 7.51

Observe que obtenemos la misma recta con los tres métodos.





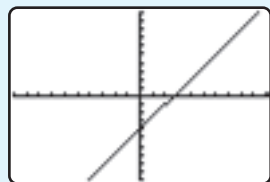
### Uso de la calculadora graficadora

En el ejemplo 10 graficamos la ecuación  $y = \frac{3}{2}x - 4$ . Veamos cómo se ve la gráfica de  $y = \frac{3}{2}x - 4$  en una calculadora graficadora utilizando tres configuraciones diferentes de la ventana. La figura 7.52 muestra la gráfica de  $y = \frac{3}{2}x - 4$  utilizando la *configuración estándar de la ventana*. Para obtener la ventana estándar, presione la tecla **ZOOM** y luego seleccione la opción 6, ZStandar. Observe que en la ventana estándar, las unidades en el eje  $y$  no son tan grandes como las unidades en el eje  $x$ .

En la figura 7.53, ilustramos la gráfica de  $y = \frac{3}{2}x - 4$  con la *configuración de ventana cuadrada*. Para obtenerla, presione la tecla **ZOOM** y luego seleccione la opción 5, ZSquare. Esta configuración hace que las unidades en ambos ejes sean iguales. Esto permite que la recta se muestre en la orientación correcta a los ejes.

En la figura 7.54 ilustramos la gráfica con la *configuración de la ventana decimal*. Para obtenerla, presione la tecla **ZOOM** y luego seleccione la opción 4, ZDecimal. La ventana decimal también hace que las unidades en ambos ejes sean iguales, pero establece el incremento de un pixel (punto) al siguiente en 0.1 en ambos ejes.

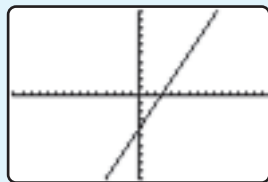
CONFIGURACIÓN VENTANA ESTÁNDAR  
(**ZOOM**: OPCIÓN 6)



-10, 10, 1, -10, 10, 1

FIGURA 7.52

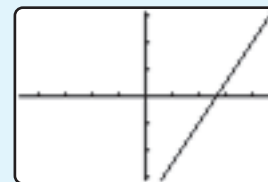
CONFIGURACIÓN VENTANA CUADRADA  
(**ZOOM**: OPCIÓN 5)



$\approx -15.2, \approx 15.2, 1, -10, 10, 1$

FIGURA 7.53

CONFIGURACIÓN VENTANA DECIMAL  
(**ZOOM**: OPCIÓN 4)



-4.7, 4.7, 1, -3.1, 3.1, 1

FIGURA 7.54

### Ejercicios

Grafique cada ecuación por medio de la configuración de **a)** la ventana estándar, **b)** la ventana cuadrada, y **c)** la ventana decimal.

- $y = 4x - 6$
- $y = -\frac{1}{5}x + 4$

## Conjunto de ejercicios 7.4

### Ejercicios conceptuales

- Proporcione la forma pendiente-ordenada al origen de una ecuación lineal.
- Cuando se le da una ecuación en una forma diferente a la forma pendiente-ordenada al origen, ¿cómo puede cambiarla a la forma pendiente-ordenada al origen?
- ¿Cuál es la ecuación de una recta, en la forma pendiente-ordenada al origen, si la pendiente es 3 y la intersección  $y$  está en  $-5$ ?
- ¿Cuál es la ecuación de una recta, en la forma pendiente-ordenada al origen, si la pendiente es  $-3$  y la intersección  $y$  está en  $5$ ?
- Explique cómo puede determinar si dos ecuaciones representan rectas paralelas sin graficarlas.
- Explique cómo puede determinar si dos ecuaciones representan a la misma recta sin graficar las ecuaciones.
- Proporcione la forma punto-pendiente de una ecuación lineal.
- Suponga que la pendiente de una recta es 2, y la recta pasa por el origen. Escriba la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente.

### Práctica de habilidades

Determine la pendiente y la intersección y de la recta representada por la ecuación dada.

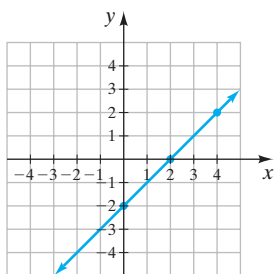
- $y = 4x - 6$
- $y = -3x + 25$
- $4x - 3y = 15$
- $7x = 5y + 20$

Determine la pendiente y la intersección y de la recta representada por cada ecuación. Grafique la recta por medio de la pendiente y la intersección y.

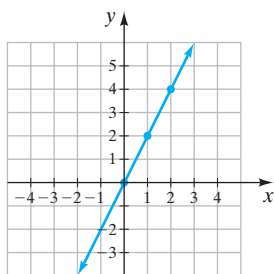
- |                        |                     |                     |                      |
|------------------------|---------------------|---------------------|----------------------|
| 13. $y = x - 3$        | 14. $y = -x + 5$    | 15. $y = 3x + 2$    | 16. $y = 2x$         |
| 17. $y = -4x$          | 18. $3x + y = 4$    | 19. $-2x + y = -3$  | 20. $3x + 3y = 9$    |
| 21. $5x - 2y = 10$     | 22. $-x + 2y = 8$   | 23. $6x + 12y = 18$ | 24. $4x = 6y + 9$    |
| 25. $-6x + 2y - 8 = 0$ | 26. $16y = 8x + 32$ | 27. $3x = 2y - 4$   | 28. $20x = 80y + 40$ |

Determine una ecuación para cada recta.

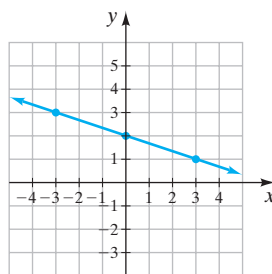
29.



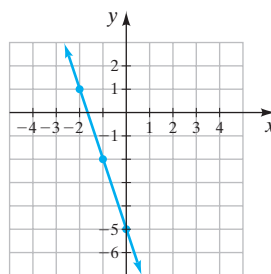
30.



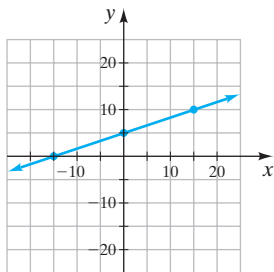
31.



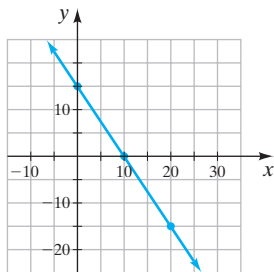
32.



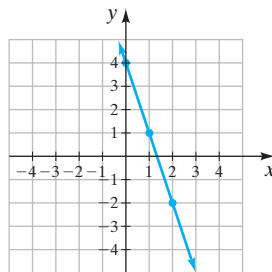
33.



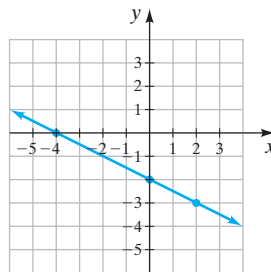
34.



35.



36.



Determine si cada par de rectas son paralelas, perpendiculares o nada de esto.

- |   |   |                                       |
|---|---|---------------------------------------|
| 37. $y = 4x + 2$<br>$y = 4x - 1$            | 38. $2x + 3y = 8$<br>$y = -\frac{2}{3}x + 5$  | 39. $4x + 2y = 9$<br>$4x = 8y + 4$    |
| 40. $3x - 5y = 7$<br>$5y + 3x = 2$          | 41. $3x + 5y = 9$<br>$6x = -10y + 9$          | 42. $8x + 2y = 8$<br>$x - 9 = 4y$     |
| 43. $y = \frac{1}{2}x - 4$<br>$2y = 6x + 9$ | 44. $2y - 6 = -5x$<br>$y = -\frac{5}{2}x - 2$ | 45. $5y = 2x + 3$<br>$-10x = 4y + 8$  |
| 46. $3x - 9y = 12$<br>$-3x + 9y = 18$       | 47. $3x + 7y = 8$<br>$7x + 3y = 8$            | 48. $5x - 6y = 10$<br>$-6x + 5y = 20$ |

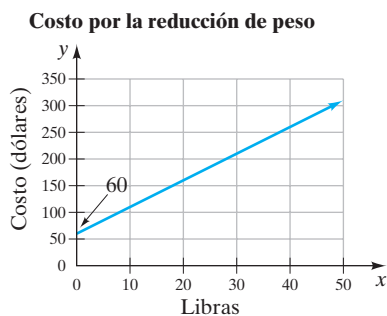
## Solución de problemas

Escriba la ecuación para cada recta, con las propiedades dadas, en la forma pendiente-ordenada al origen.

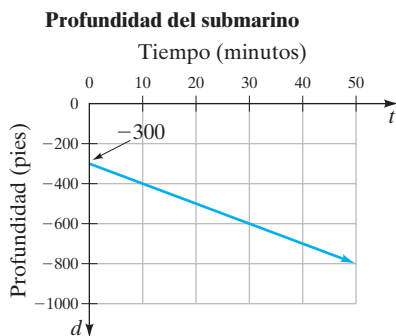
- |  |   |
|--|---|
| 49. Pendiente = 3, pasa por (0, 2).                | 50. Pendiente = 4, pasa por (2, 3).                 |
| 51. Pendiente = -3, pasa por (-4, 5).              | 52. Pendiente = -3, pasa por (4, 0).                |
| 53. Pendiente = $\frac{1}{2}$ , pasa por (-1, -5). | 54. Pendiente = $-\frac{2}{3}$ , pasa por (-1, -2). |

55. Pendiente =  $\frac{2}{5}$ , la intersección y es (0, 6).
57. Pasa por (-4, -2) y (-2, 4)
59. Pasa por (-6, 9) y (6, -9).
61. Pasa por (10, 3) y (0, -2).
63. Pendiente = 6.3, la intersección y es (0, -4.5).

65. **Clínica de reducción de peso** Stacy Best es propietaria de una clínica de reducción de peso. Ella cobra a sus clientes una cuota fija única por membresía. También cobra por cada libra de peso reducida. Por tanto, entre más éxito tenga en ayudar a sus clientes a perder peso mayor ingreso recibirá. La siguiente gráfica muestra el costo para un cliente por la reducción de peso.



- a) Determine la ecuación que representa el costo para el cliente que pierde  $x$  libras.
- b) Utilice la ecuación que encontró en el inciso a) para determinar el costo para el cliente que pierde 30 libras.
66. **Inmersión de un submarino** Un submarino se sumerge bajo el mar. Tom Johnson, el capitán, ordena que se sumerja la nave lentamente. La siguiente gráfica ilustra la profundidad del submarino en el instante  $t$  minutos después que el submarino inició la inmersión.



- a) Determine la ecuación que representa la profundidad en el instante  $t$ .
- b) Utilice la ecuación que determinó en el inciso a) para encontrar la profundidad del submarino después de 20 minutos.

56. Pendiente =  $\frac{4}{9}$ , la intersección y es  $\left(0, -\frac{2}{3}\right)$

58. Pasa por (6, 3) y (5, 2).

60. Pasa por (3, 0) y (-3, 5).

62. Pasa por (-6, -2) y (5, -3).

64. Pendiente =  $-\frac{5}{8}$ , la intersección y es  $\left(0, -\frac{7}{10}\right)$

67. Suponga que se le pidió escribir la ecuación de una recta con las siguientes propiedades. ¿Con cuál forma de la ecuación lineal iniciaría: forma estándar, forma pendiente-ordenada al origen o forma punto-pendiente? Explique su respuesta.

- a) La pendiente de la recta y la intersección y de la recta.
- b) La pendiente y un punto en la recta.
- c) Dos puntos en la recta.

68. Considere las ecuaciones  $40x - 60y = 100$  y  $-40x + 60y = 80$ .

- a) Cuando se grafiquen estas ecuaciones, ¿tendrán la misma pendiente? Explique cómo determinó su respuesta.
- b) Cuando estas ecuaciones se grafiquen, ¿serán paralelas?

69. Suponga que la pendiente de una recta es 2, y dos puntos en la recta son (-5, -4) y (2, 10).

- a) Si utiliza (-5, -4) como  $(x_1, y_1)$  y luego (2, 10) como  $(x_2, y_2)$ , ¿la apariencia de las dos ecuaciones será la misma en la forma punto-pendiente? Explique.
- b) Determine la ecuación, en la forma punto-pendiente, utilizando (-5, -4) como  $(x_1, y_1)$ .
- c) Determine la ecuación, en la forma punto-pendiente, con (2, 10) como  $(x_1, y_1)$ .
- d) Escriba la ecuación obtenida en el inciso b) en la forma pendiente-ordenada al origen.
- e) Escriba la ecuación obtenida en el inciso c) en la forma pendiente-ordenada al origen.
- f) Las ecuaciones obtenidas en los incisos d) y e), ¿son iguales? Si no es así, explique por qué.

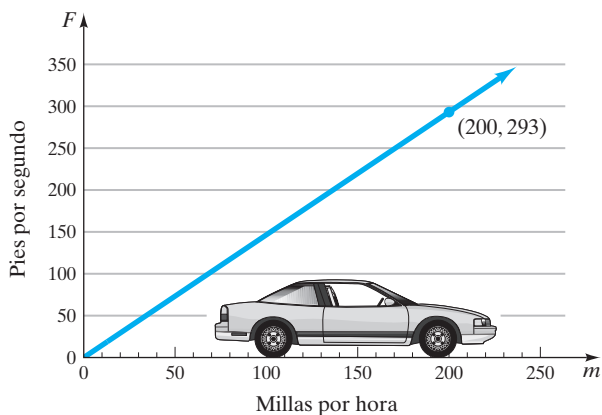
70. Suponga que la pendiente de una recta es -3 y dos puntos en la recta son (-1, 8) y (2, -1).

- a) Si utiliza (-1, 8) como  $(x_1, y_1)$  y (2, -1) como  $(x_2, y_2)$ , ¿la apariencia de las dos ecuaciones será la misma en la forma punto-pendiente? Explique.
- b) Determine la ecuación, en la forma punto-pendiente, utilizando (-1, 8) como  $(x_1, y_1)$ .
- c) Determine la ecuación, en la forma punto-pendiente, con (2, -1) como  $(x_1, y_1)$ .
- d) Escriba la ecuación obtenida en el inciso b) en la forma pendiente-ordenada al origen.
- e) Escriba la ecuación obtenida en el inciso c) en la forma pendiente-ordenada al origen.
- f) Las ecuaciones obtenidas en los incisos d) y e), ¿son iguales? Si no es así, explique por qué.



### Problemas de reto

**71. Conversión de unidades** La siguiente gráfica muestra la relación aproximada entre la velocidad en millas por hora y pies por segundo.

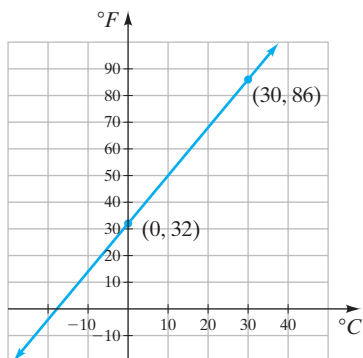


- a) Determine la pendiente de la recta.
- b) Determine la ecuación de la recta.
- c) En las 500 millas de Daytona de 2002, Ward Burton, el ganador, tuvo un promedio de velocidad de 130.81 millas por hora. (Vea la fotografía.) Utilice la ecuación que obtuvo en el inciso b) para determinar la velocidad en pies por segundo.



- d) Utilice la gráfica para estimar una velocidad de 100 millas por hora en pies por segundo.
- e) Utilice la gráfica para estimar una velocidad de 80 pies por segundo en millas por hora.

**72. Temperatura.** La siguiente gráfica muestra la relación entre las temperaturas Fahrenheit y Celsius.



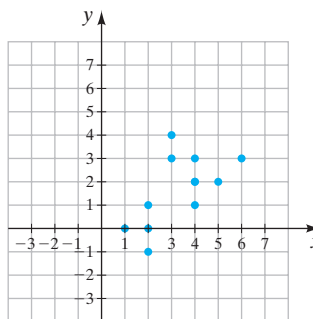
- a) Determine la pendiente de la recta.
- b) Determine la ecuación de la recta en la forma pendiente-ordenada al origen.
- c) Utilice la ecuación (o fórmula) que obtuvo en el inciso b) para determinar la temperatura Fahrenheit cuando la temperatura Celsius es 20°.
- d) Utilice la gráfica para estimar la temperatura Celsius cuando la temperatura Fahrenheit es 100°.
- e) Estime la temperatura Celsius que corresponde a una temperatura Fahrenheit de 0°.

73. Determine la ecuación de la recta con intersección  $y$  en 4 que es paralela a la recta cuya ecuación es  $2x + y = 6$ . Explique cómo determinó su respuesta.

74. ¿Una línea que pasa por los puntos (60, 30) y (20, 90) será paralela a la recta con intersección  $x$  en 2 e intersección  $y$  en 3? Explique cómo determinó su respuesta.

75. Escriba una ecuación de la recta paralela a la gráfica de  $3x - 4y = 6$  que pasa por el punto  $(-4, -1)$ .

76. Determine la ecuación de la recta que interseca al mayor número de puntos de la gráfica siguiente.





## Actividad en grupo

En grupo, analicen y respondan el ejercicio 77, de acuerdo con las instrucciones.

77. Considere la ecuación  $-3x + 2y = 4$ .

- a) Miembro 1 del grupo: explique cómo graficar esta ecuación por medio del trazo de puntos, y luego gráfiquela por medio del trazo de puntos.
- b) Miembro 2 del grupo: explique cómo graficar esta ecuación utilizando las intersecciones, luego gráfiquela utilizando las intersecciones.

c) Miembro 3 del grupo: Explique cómo graficar esta ecuación por medio de la pendiente y la intersección  $y$ . Luego grafique la ecuación por medio de la pendiente y la intersección  $y$ .

d) En grupo, comparen sus resultados. ¿Obtuvieron todos la misma gráfica? Si no es así, determinen por qué.

## Ejercicios de repaso acumulativo

[1.5] 78. Inserte  $>$ ,  $<$  o  $=$  en el área sombreada para hacer verdadero el enunciado:  $|-4| \blacksquare |-6|$ .

[2.7] 79. Resuelva  $2(x - 3) \geq 5x + 6$  y grafique la solución en una recta numérica.

[3.1] 80. Despeje  $r$  de  $i = prt$ .

[5.2] 81. Factorice por agrupación  $x^2 - 2xy + 3xy - 6y^2$ .

[6.6] 82. Resuelva  $\frac{x}{3} - \frac{3x + 2}{6} = \frac{1}{2}$ .

## 7.5 GRAFICACIÓN DE DESIGUALDADES LINEALES



## 1 Graficar desigualdades lineales con dos variables.

## 1 Graficar desigualdades lineales con dos variables

Una **desigualdad lineal** resulta cuando el signo de igual en una ecuación lineal se reemplaza con un signo de desigualdad.

## Ejemplos de desigualdades lineales con dos variables

$$\begin{array}{ll} 3x + 2y > 4 & -x + 3y < -2 \\ -x + 4y \geq 3 & 4x - y \leq 4 \end{array}$$

## Para graficar una desigualdad lineal con dos variables

1. Reemplace el símbolo de desigualdad con un signo de igualdad.
2. Dibuje la gráfica de la ecuación del paso 1. Si la desigualdad original tenía el símbolo  $\geq$  o  $\leq$ , dibuje la gráfica con una línea continua. Si la desigualdad original tenía el símbolo  $>$  o  $<$ , dibuje la gráfica por medio de una línea punteada.
3. Seleccione cualquier punto que no esté en la recta y determine si este punto es una solución para la desigualdad original. Si el punto seleccionado es una solución, sombree la región en el lado de la recta que contenga este punto. Si el punto seleccionado no satisface la desigualdad, sombree la región en el lado de la recta que no contiene a este punto.

**EJEMPLO 1** Grafique la desigualdad  $y < 2x - 4$ .

**Solución**

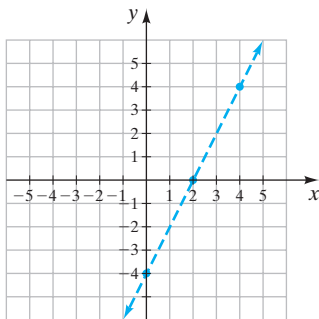


FIGURA 7.55

Primero graficamos la ecuación  $y = 2x - 4$  (figura 7.55). Como la desigualdad original tiene un signo de menor que,  $<$ , utilizamos una línea punteada al dibujar la gráfica. La línea punteada indica que los puntos en esta recta no son soluciones para la desigualdad  $y < 2x - 4$ .

Ahora seleccionamos un punto que no se encuentre en la recta y determinamos si este punto satisface la desigualdad. Con frecuencia el punto más sencillo de usar es el origen,  $(0, 0)$ . En la comprobación utilizaremos el símbolo  $<$  hasta que determinemos si la proposición es verdadera o falsa.

**Comprobación**

$$y < 2x - 4$$

$$0 \stackrel{?}{<} 2(0) - 4$$

$$0 \stackrel{?}{<} 0 - 4$$

$$0 < -4 \quad \text{Falsa.}$$

Como 0 no es menor que  $-4$ , el punto  $(0, 0)$  no satisface la desigualdad. Por tanto, la solución serán todos los puntos en el lado opuesto del punto  $(0, 0)$  con respecto de la recta (figura 7.56).

Todo punto en la región sombreada satisface la desigualdad dada. Comprobemos algunos puntos seleccionados,  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

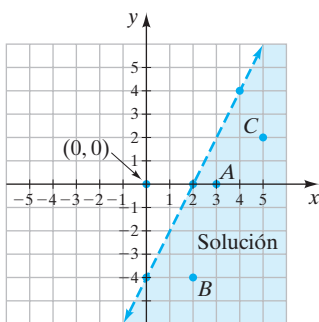


FIGURA 7.56

**Punto A**

$$(3, 0)$$

$$y < 2x - 4$$

$$0 \stackrel{?}{<} 2(3) - 4$$

$$0 < 2 \quad \text{Verdadero.}$$

**Punto B**

$$(2, -4)$$

$$y < 2x - 4$$

$$-4 \stackrel{?}{<} 2(2) - 4$$

$$-4 < 0 \quad \text{Verdadero.}$$

**Punto C**

$$(5, 2)$$

$$y < 2x - 4$$

$$2 \stackrel{?}{<} 2(5) - 4$$

$$2 < 6 \quad \text{Verdadero.}$$

**AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 11**

Todos los puntos en la región sombreada en la figura 7.56 satisfacen la desigualdad  $y < 2x - 4$ . Los puntos en la región sin sombread, a la izquierda de la línea discontinua, satisfarían la desigualdad  $y > 2x - 4$ .

**EJEMPLO 2** Grafique la desigualdad  $y \geq -\frac{1}{2}x$ .

**Solución**

Grafique la ecuación  $y = -\frac{1}{2}x$ . Como el símbolo de desigualdad es  $\geq$ , utilizamos una línea continua para indicar que los puntos en la recta son soluciones de la desigualdad (figura 7.57 en la página siguiente). Como el punto  $(0, 0)$  está en la recta, no podemos seleccionarlo como nuestro punto de prueba. Seleccionamos el punto  $(3, 1)$ .

$$y \geq -\frac{1}{2}x$$

$$1 \stackrel{?}{\geq} -\frac{1}{2}(3)$$

$$1 \geq -\frac{3}{2} \quad \text{Verdadero.}$$

Como el par ordenado  $(3, 1)$  satisface la desigualdad, todo punto en el mismo lado de la recta que  $(3, 1)$  también satisfará la desigualdad  $y \geq -\frac{1}{2}x$ . Sombreamos esta región (figura 7.58 en la página siguiente). Todo punto en la región sombreada, así como todo punto en la recta, satisface la desigualdad.

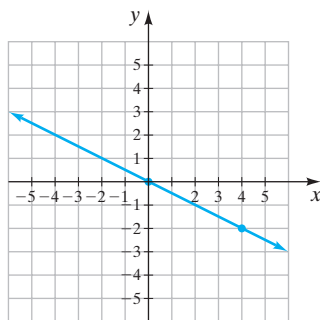


FIGURA 7.57

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 9**

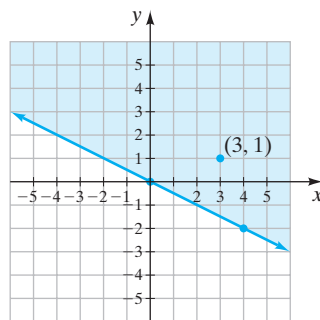


FIGURA 7.58



En algunos de los ejercicios podría necesitar despejar a  $y$  antes de graficar. Por ejemplo, para graficar  $-2x + y < -4$ , despejaría  $y$  para obtener  $y < 2x - 4$ . Luego graficaríamos la desigualdad  $y < 2x - 4$ . Observe que  $y < 2x - 4$  se graficó en la figura 7.56.

## Conjunto de ejercicios 7.5

### Ejercicios conceptuales

1. Al graficar desigualdades que tienen  $\leq$  o  $\geq$ , explique por qué los puntos en la recta serán soluciones de la desigualdad.
2. Al graficar desigualdades que tienen  $<$  o  $>$ , explique por qué los puntos en la recta no serán soluciones de la desigualdad.
3. ¿En qué difieren las gráficas de  $2x + 3y > 6$  y  $2x + 3y < 6$ ?
4. ¿En qué difieren las gráficas de  $4x - 3y < 6$  y  $4x - 3y \leq 6$ ?

### Práctica de habilidades

Grafique cada desigualdad.

- |                            |                            |                               |                            |
|----------------------------|----------------------------|-------------------------------|----------------------------|
| 5. $y > -3$                | 6. $x > 3$                 | 7. $x \geq \frac{3}{2}$       | 8. $y < x$                 |
| 9. $y \leq 3x$             | 10. $y > -2x$              | 11. $y < x - 4$               | 12. $y < 2x + 1$           |
| 13. $y < -3x + 4$          | 14. $y \geq 2x - 3$        | 15. $y \geq \frac{1}{2}x - 4$ | 16. $y > -\frac{x}{2} + 2$ |
| 17. $y > \frac{1}{3}x + 1$ | 18. $y > \frac{1}{2}x - 2$ | 19. $3x + y \leq 5$           | 20. $3x - 2 < y$           |
| 21. $2x + y \leq 3$        | 22. $3y > 2x - 3$          | 23. $y + 2 > -x$              | 24. $4x - 2y \leq 6$       |

### Resolución de problemas

25. Determine si  $(4, 2)$  es una solución para cada desigualdad.
 

a) $2x + 4y < 16$	b) $2x + 4y > 16$
c) $2x + 4y \geq 16$	d) $2x + 4y \leq 16$
26. Determine si  $(-3, 5)$  es una solución para cada desigualdad.
 

a) $-2x + 3y < 9$	b) $-2x + 3y > 9$
c) $-2x + 3y \geq 9$	d) $-2x + 3y \leq 9$

27. Si un par ordenado no es una solución para la desigualdad  $ax + by < c$ , ¿ese par ordenado debe ser una solución para  $ax + by > c$ ? Explique.
28. Si un par ordenado no es una solución para la desigualdad  $ax + by \leq c$ , ¿ese par ordenado debe ser una solución para  $ax + by > c$ ? Explique.
29. Si un par ordenado es una solución para la desigualdad  $ax + by > c$ , ¿es posible que el par ordenado deba ser una solución para  $ax + by \leq c$ ? Explique.
30. ¿Es posible para un par ordenado ser una solución tanto de  $ax + by < c$  como de  $ax + by > c$ ? Explique.
31. Determine si la frase dada significa: menor que, menor o igual que, mayor que o mayor o igual que.
- a) no más que                      b) no menos que  
c) a lo más                         d) al menos
32. Considere las desigualdades  $2x + 1 > 5$  y  $2x + y > 5$ .
- a) ¿Cuántas variables tiene la desigualdad  $2x + 1 > 5$ ?  
b) ¿Cuántas variables tiene la desigualdad  $2x + y > 5$ ?  
c) ¿Cuál es la solución de  $2x + 1 > 5$ ? Indique la solución en una recta numérica.  
d) Grafique  $2x + y > 5$ .
33. ¿Cuáles de las desigualdades siguientes tienen las mismas gráficas? Explique cómo determinó su respuesta.
- a)  $2x - y > 4$                       b)  $-2x + y < -4$   
c)  $y < 2x - 4$                       d)  $-2y + 4x < -8$

## Ejercicios de repaso acumulativo

[1.4] 34. Considere el conjunto de números

$$\left\{ 2, -5, 0, \sqrt{7}, \frac{2}{5}, -6.3, \sqrt{3}, -\frac{23}{34} \right\}.$$

Liste los que son **a)** números naturales; **b)** enteros no negativos; **c)** números racionales; **d)** números irracionales; **e)** números reales.

[2.5] 35. Resuelva la ecuación  $2(x + 3) + 2x = x + 4$ .

[4.6] 36. Divida  $\frac{10x^2 - 15x + 30}{5x}$ .

[6.1] 37. Simplifique  $\frac{2x}{2x^2 + 4xy}$ .

## 7.6 FUNCIONES



- 1 Determinar el dominio y rango de una relación.
- 2 Reconocer funciones.
- 3 Evaluar funciones.
- 4 Graficar funciones lineales.

En esta sección introducimos relaciones y funciones. Como lo aprenderá dentro de poco, una función es un tipo especial de relación. Las funciones son un tema común en cursos de matemáticas desde álgebra hasta cálculo. En esta sección damos una introducción informal a relaciones y funciones.

### 1 Determinar el dominio y rango de una relación

Primero analizaremos **relaciones**.

#### DEFINICIÓN

Una **relación** es cualquier conjunto de pares ordenados.

Como una relación es *cualquier* conjunto de puntos, *toda* gráfica representará una relación.

## Ejemplos de relaciones

$$\{(3, 5), (4, 6), (5, 9), (7, 12)\}$$

$$\{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2)\}$$

$$\{(3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$$

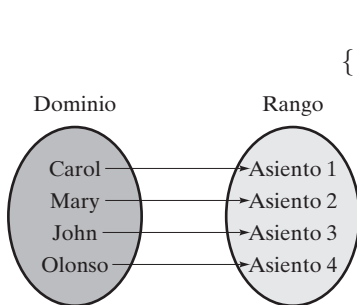
En el par ordenado  $(x, y)$ ,  $x$  y  $y$  se denominan **componentes del par ordenado**. El **dominio** de una relación es el conjunto de *primeros componentes* en el conjunto de pares ordenados. Por ejemplo,

Relación	Dominio
$\{(3, 5), (4, 6), (5, 9), (7, 12)\}$	$\{3, 4, 5, 7\}$
$\{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2)\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$
$\{(3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$	$\{3\}$

El **rango** de una relación es el conjunto de *segundos componentes* en el conjunto de pares ordenados. Por ejemplo,

Relación	Rango
$\{(3, 5), (4, 6), (5, 9), (7, 12)\}$	$\{5, 6, 9, 12\}$
$\{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2)\}$	$\{2\}$
$\{(3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$	$\{2, 3, 4, 5, 6\}$

En las relaciones, los conjuntos pueden tener elementos que no sean números. Por ejemplo,



Relación  
 $\{(Carol, Asiento 1), (Mary, Asiento 2), (John, Asiento 3), (Olonso, Asiento 4)\}$

Dominio  
 $\{Carol, Mary, John, Olonso\}$

Rango  
 $\{Asiento 1, Asiento 2, Asiento 3, Asiento 4\}$

La figura 7.59 ilustra la relación entre la persona y el número de asiento.

FIGURA 7.59

## 2 Reconocer funciones

Ahora estamos preparados para analizar funciones. Considere la relación que se muestra en la figura 7.59. Observe que cada elemento en el dominio corresponde con exactamente un elemento del rango. Esto es, cada persona es asignada con exactamente un asiento. Este es un ejemplo de una **función**.

### DEFINICIÓN

Una **función** es un conjunto de pares ordenados en los que cada primer componente corresponde con exactamente un segundo componente.

Como una función es un tipo especial de relación, nuestro análisis de dominio y rango se aplica a funciones. En la definición de una función, el conjunto de primeros componentes representa el dominio de la función y el conjunto de segundas componentes representa el rango de la función.

**EJEMPLO 1** Considere las relaciones en las figuras 7.60a) a d). ¿Cuáles relaciones son funciones?

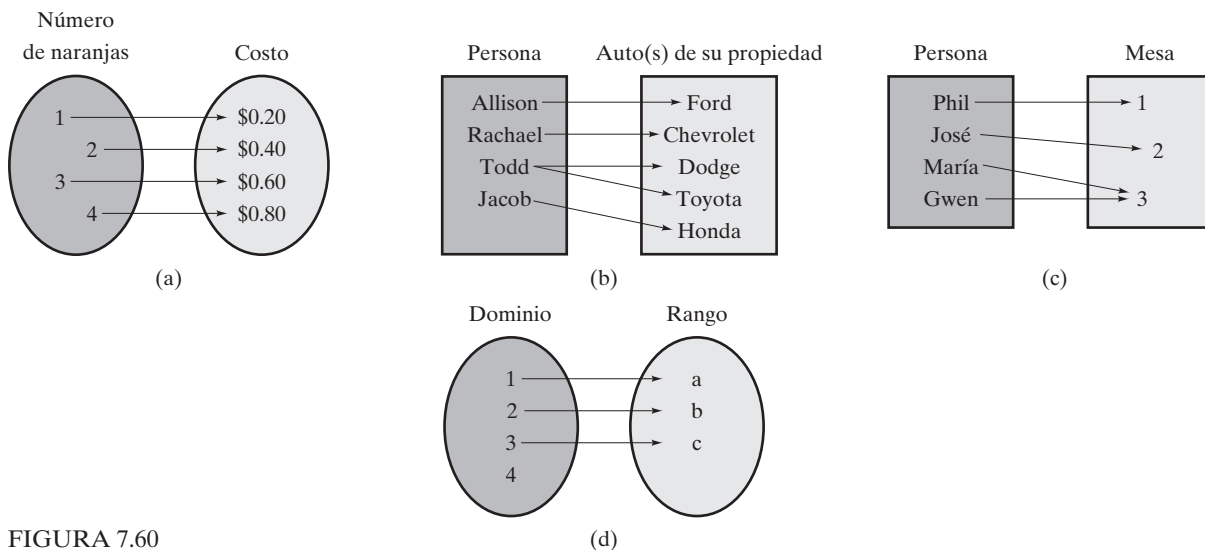


FIGURA 7.60

**Solución**

- a)** Si deseamos, podríamos representar la información dada en la figura como el siguiente conjunto de pares ordenados:  $\{(1, \$0.20), (2, \$0.40), (3, \$0.60), (4, \$0.80)\}$ . Observe que cada primer componente corresponde con exactamente un segundo componente. Por tanto, esta relación es una función.
- b)** Si vemos la figura 7.60b, podemos ver que Todd *no* corresponde a exactamente un automóvil. Si listásemos el conjunto de pares ordenados para representar esta relación, el conjunto tendría los pares ordenados  $(\text{Todd}, \text{Dodge})$  y  $(\text{Todd}, \text{Toyota})$ . Por tanto, a cada primer componente no corresponde exactamente un segundo componente y esta relación no es una función.
- c)** Aunque tanto María como Gwen comparten una mesa, cada persona corresponde a exactamente una mesa. Si listamos los pares ordenados tendríamos  $(\text{Phil}, 1)$ ,  $(\text{José}, 2)$ ,  $(\text{María}, 3)$ ,  $(\text{Gwen}, 3)$ . Observe que cada *primer* componente corresponde con exactamente un segundo componente. Por tanto, esta relación es una función.
- d)** Como el número 4 en el dominio no corresponde a ningún componente en el rango, esta relación no es una función. *Todo* componente en el dominio debe corresponder a exactamente un componente en el rango para que la relación sea una función.

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 19

Las funciones dadas en el ejemplo 1a) y 1c) se determinaron por inspección en correspondencia en las figuras. La mayor parte de las funciones tienen un número infinito de pares ordenados y por lo común son definidas con una ecuación (o regla) que dice cómo obtener el segundo componente cuando se le da el primer componente. En el ejemplo 2, determinamos una función de la información proporcionada.

**EJEMPLO 2**



**Costo de manzanas** Suponga que cada manzana cuesta \$0.30. Escriba una función para determinar el costo,  $c$ , cuando se compran  $n$  manzanas.

**Solución** Cuando se compra una manzana, el costo es \$0.30. Cuando se compran dos manzanas, el costo es  $2(\$0.30)$  y cuando se compran  $n$  manzanas, el costo es  $n(\$0.30)$  o  $\$0.30n$ . La función  $c = 0.30n$  dará el costo, en dólares, cuando se compran  $n$  manzanas. Observe que para cualquier valor de  $n$  hay exactamente un valor de  $c$ .


**EJEMPLO 3** Determine si los siguientes conjuntos de pares ordenados son funciones.

a)  $\{(4, 5), (3, 2), (-2, -3), (2, 5), (1, 6)\}$

b)  $\{(4, 5), (3, 2), (-2, -3), (4, 1), (5, -2)\}$

**Solución**

a) Como a cada primer componente le corresponde exactamente un segundo componente, este conjunto de pares ordenados es una función.

b) Los pares ordenados  $(4, 5)$  y  $(4, 1)$  tienen el mismo primer componente. Por tanto, cada primer componente no corresponde con exactamente un segundo componente, y este conjunto de pares ordenados no es una función. 

En las figuras 7.61a y 7.61b trazamos los pares ordenados del ejemplo 3a) y 3b), respectivamente.

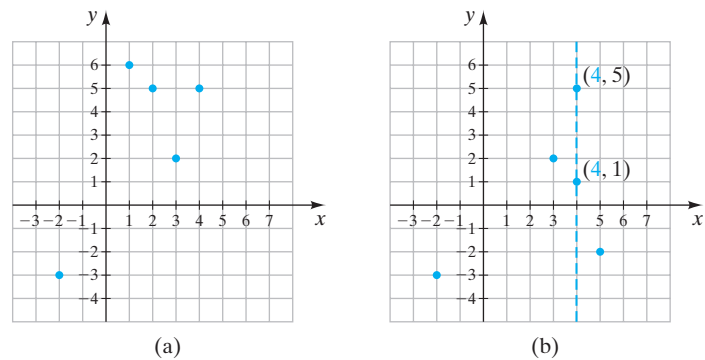


FIGURA 7.61 Primer conjunto de pares ordenados Función      Segundo conjunto de pares ordenados No es una función

Considere la figura 7.61a. Si se traza una recta vertical que pase por cada punto, ninguna recta vertical interseca a más de un punto. Esto indica que no existen dos pares ordenados que tengan la misma primer coordenada (o  $x$ ) y que cada valor de  $x$  en el dominio corresponde a exactamente a un valor de  $y$  en el rango. Por tanto, este conjunto de puntos representa una función.

Ahora vea la figura 7.61b. Si se traza una recta vertical por cada punto, una recta vertical pasa por dos puntos. La línea discontinua en rojo interseca a  $(4, 5)$  y  $(4, 1)$ . Cada elemento en el dominio *no* corresponde a exactamente un elemento en el rango. El número 4 en el dominio corresponde a dos números, 5 y 1, en el rango. Por tanto, este conjunto de pares ordenados *no* representa una función.

Para determinar si una gráfica representa una función, podemos utilizar la **prueba de la recta vertical** como se describió.

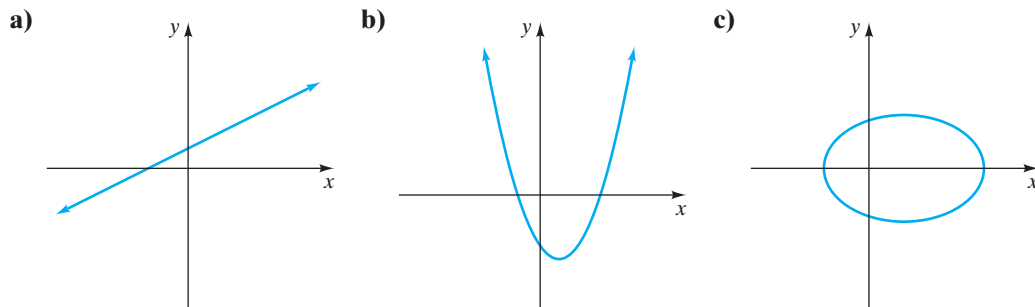
### Prueba de la recta vertical

Si se puede trazar una recta vertical en alguna parte de una gráfica y la recta vertical interseca otra parte de la gráfica, entonces a cada valor de  $x$  no corresponde exactamente un valor de  $y$  y la gráfica no representa una función.

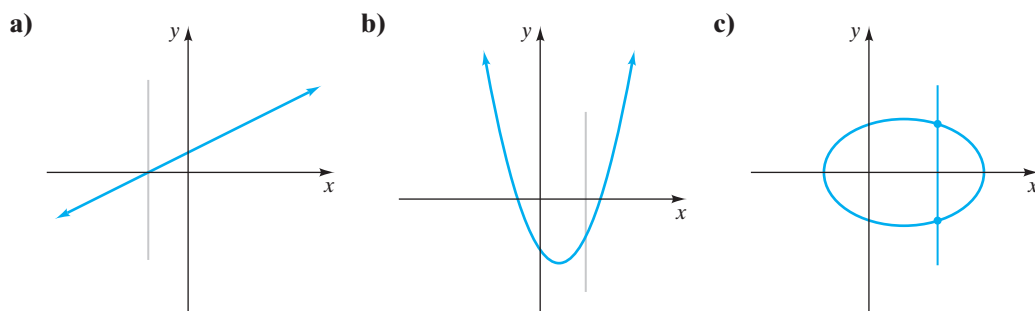
Si no se puede trazar una recta vertical que interseque a la gráfica en más de un punto, a cada valor de  $x$  le corresponde exactamente un valor de  $y$  y la gráfica representa una función.



**EJEMPLO 4** Por medio de la prueba de la recta vertical determine cuáles gráficas representan funciones.



**Solución**



**AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 31**

Las gráficas en los incisos **a)** y **b)** representan funciones, ya que no es posible dibujar una recta vertical que interseque a la gráfica en más de un punto. La gráfica en la parte **c)** no representa una función, ya que se puede trazar una recta vertical que interseque a la gráfica en más de un punto.

Vemos funciones en todo lo que nos rodea. Considere la información que se proporciona en la tabla 7.1, que podría aplicarse a algunos vendedores. Esta tabla de valores es una función, ya que cada monto de ventas corresponde exactamente un ingreso.

TABLA 7.1 Ingreso mensual	
Ventas (dólares)	Ingreso (dólares)
0	\$1,500
\$5,000	\$1,800
\$10,000	\$2,100
\$15,000	\$2,400
\$20,000	\$2,700
\$25,000	\$3,000

**AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 53**

Considere la gráfica que se muestra en la figura 7.62. Esta gráfica representa una función. Observe que a cada año le corresponde un único porcentaje de escuelas. Las dos gráficas en la figura 7.63 representan funciones. Cada gráfica pasa la prueba de la recta vertical.

**Escuelas públicas en los Estados Unidos que tienen conexión a Internet**

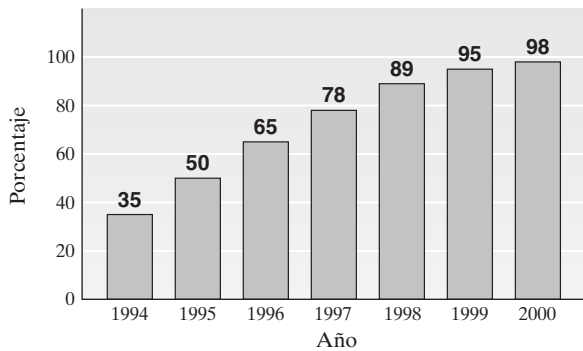


FIGURA 7.62

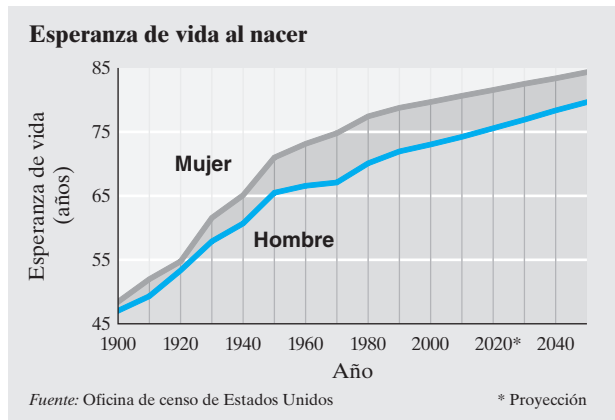


FIGURA 7.63

### 3 Evaluar funciones

Cuando una función está representada mediante una ecuación, con frecuencia es conveniente utilizar la **notación funcional**,  $f(x)$ . Si fuésemos a graficar  $y = x + 2$ , veríamos que es una función, ya que su gráfica pasa la prueba de la recta vertical. El valor de  $y$  en la ecuación o función depende del valor de  $x$ . Por tanto, decimos que  $y$  es una función de  $x$ , y podemos escribir  $y = f(x)$ . La notación  $y = f(x)$  se utiliza para mostrar que  $y$  es una función de la variable  $x$ . Si queremos, podemos escribir

$$y = f(x) = x + 2 \quad \text{o sólo} \quad f(x) = x + 2$$

La notación  $f(x)$  se lee “ $f$  de  $x$ ” y *no significa*  $f$  por  $x$ .

Para evaluar una función para un valor específico de  $x$ , sustituimos ese valor por  $x$  en donde aparezca  $x$  en la función. Por ejemplo, para evaluar la función  $f(x) = x + 2$ , en  $x = 1$ , hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 2 \\ f(1) &= 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

Así, cuando  $x$  es 1,  $f(x)$  o  $y$  es 3.

Cuando  $x = 4$ ,  $f(x)$  o  $y = 6$ , como se ilustra a continuación.

$$\begin{aligned} y &= f(x) = x + 2 \\ y &= f(4) = 4 + 2 = 6 \end{aligned}$$

La notación  $f(1)$  se lee “ $f$  de 1”, y  $f(4)$  se lee “ $f$  de 4”.

**EJEMPLO 5** Para la función  $f(x) = x^2 + 4x - 5$ , determine **a)**  $f(3)$  y **b)**  $f(-6)$ . **c)** Si  $x = -1$ , determine el valor de  $y$ .

**Solución** **a)** Sustituimos 3 por cada  $x$  en la función, y luego evaluamos.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 4x - 5 \\ f(3) &= 3^2 + 4(3) - 5 \\ &= 9 + 12 - 5 = 16 \end{aligned}$$

b) 
$$f(x) = x^2 + 4x - 5$$

$$f(-6) = (-6)^2 + 4(-6) - 5$$

$$= 36 - 24 - 5 = 7$$

c) Como  $y = f(x)$ , evaluamos  $f(x)$  en  $x = 1$ .

$$f(x) = x^2 + 4x - 5$$

$$f(-1) = (-1)^2 + 4(-1) - 5$$

$$= 1 - 4 - 5 = -8$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 39

Por tanto, cuando  $x = -1, y = -8$ .



## 4 Graficar funciones lineales

Las gráficas de todas las ecuaciones de la forma  $y = ax + b$  serán rectas que son funciones. Por tanto, podemos hacer referencia a ecuaciones de la forma  $y = ax + b$  como **funciones lineales**. Las ecuaciones de la forma  $f(x) = ax + b$ , también son funciones lineales, ya que  $f(x)$  es lo mismo que  $y$ . Podemos graficar funciones lineales como se muestra en el ejemplo 6.

### EJEMPLO 6

Grafique  $f(x) = 2x + 4$ .

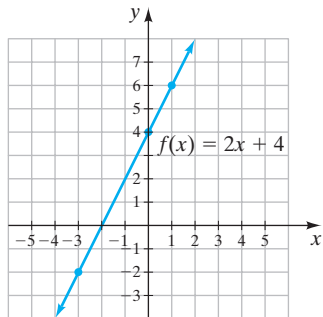


FIGURA 7.64

**Solución** Como  $f(x)$  es lo mismo que  $y$ , escribimos  $y = f(x) = 2x + 4$ . Seleccionamos valores para  $x$  y determinamos los valores correspondientes para  $y$  o  $f(x)$ .

$$y = f(x) = 2x + 4$$

Sea  $x = -3$        $y = f(-3) = 2(-3) + 4 = -2$   
 Sea  $x = 0$          $y = f(0) = 2(0) + 4 = 4$   
 Sea  $x = 1$          $y = f(1) = 2(1) + 4 = 6$

$x$	$y$
-3	-2
0	4
1	6

Ahora trace los puntos y dibuje la gráfica de la función (figura 7.64)



AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 45

### EJEMPLO 7

**Pista de patinaje sobre hielo** La utilidad semanal,  $p$ , de una pista de patinaje sobre hielo es una función del número de patinadores por semana,  $n$ . La función que aproxima la utilidad es  $p = f(n) = 8n - 600$ , en donde  $0 \leq n \leq 400$ .

- a) Elabore una gráfica que muestre la relación entre el número de patinadores y la utilidad semanal.
- b) Estime la utilidad, si en una semana dada hay 200 patinadores.



Rockefeller Plaza, New York

**Solución**

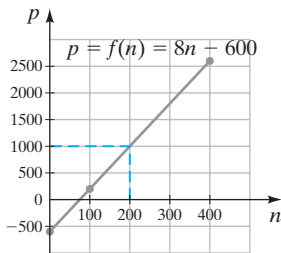


FIGURA 7.65

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 57

**a)** Seleccione valores para  $n$  y determine los valores correspondientes para  $p$ . Luego dibuje la gráfica (figura 7.65). Observe que no hay puntas de flecha en la línea, ya que la función sólo está definida para valores de  $n$  entre 0 y 400 inclusive.

$$p = f(n) = 8n - 600$$

Sea  $n = 0$

$$p = f(0) = 8(0) - 600 = -600$$

Sea  $n = 100$

$$p = f(100) = 8(100) - 600 = 200$$

Sea  $n = 400$

$$p = f(400) = 8(400) - 600 = 2600$$

$n$	$p$
0	-600
100	200
400	2600

**b)** Por medio de la línea roja punteada en la gráfica, podemos ver que si hay 200 patinadores la utilidad semanal es de \$1000.

## Conjunto de ejercicios 7.6

### Ejercicios conceptuales

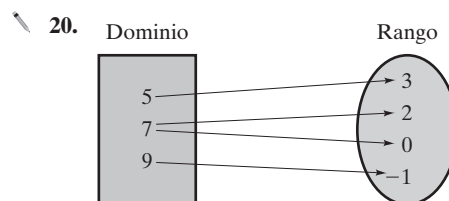
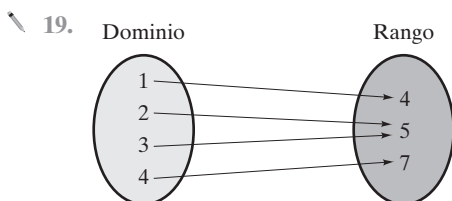
- ¿Qué es una relación?
- ¿Toda gráfica en el sistema de coordenadas cartesianas es una relación? Explique.
- ¿Qué es una función?
- ¿Toda gráfica en el sistema de coordenadas cartesianas es una función? Explique.
- a)** ¿Cuál es el dominio de una relación o función?  
**b)** ¿Cuál es el rango de una relación o función?
- a)** ¿Toda relación es una función?  
**b)** ¿Toda función es una relación? Explique su respuesta.
- Si dos pares ordenados distintos en una relación tienen la misma primera coordenada, ¿puede la relación ser una función? Explique.
- En una función, ¿es necesario que para cada valor de  $y$  en el rango corresponda a exactamente un valor de  $x$  en el dominio? Explique.

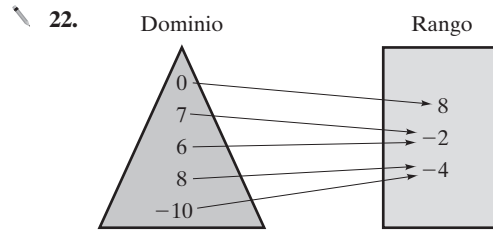
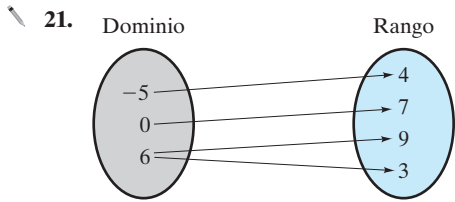
### Práctica de habilidades

Determine cuál de las relaciones son funciones también. Proporcione el dominio y el rango de cada relación o función.

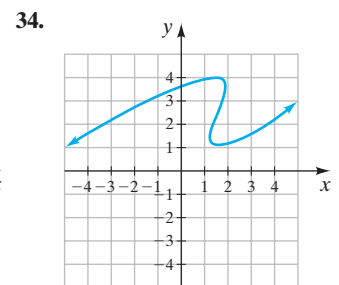
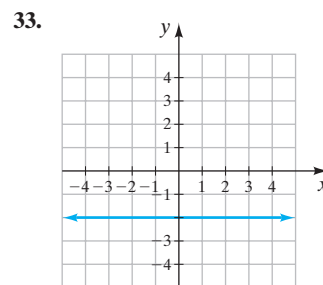
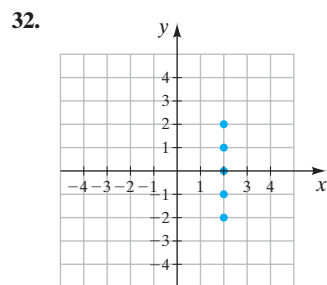
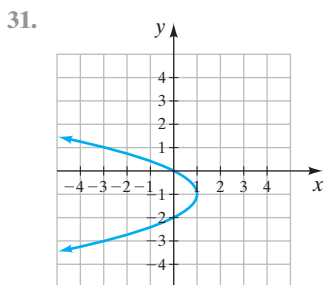
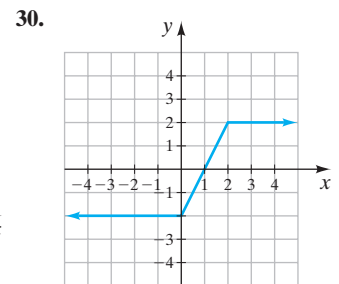
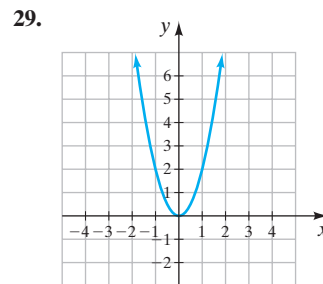
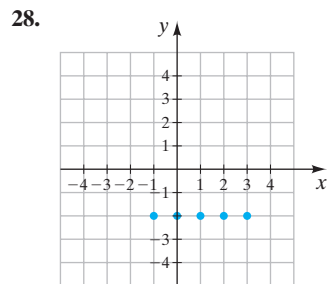
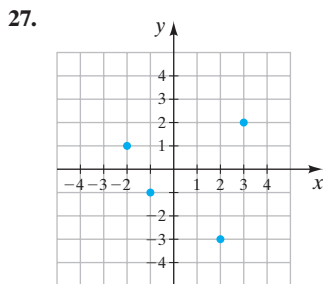
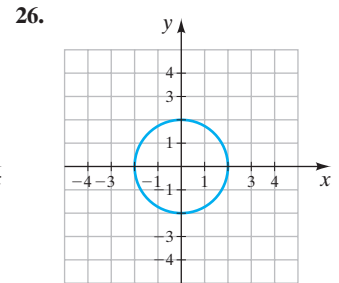
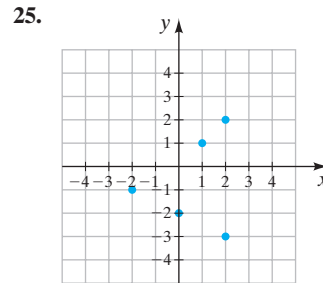
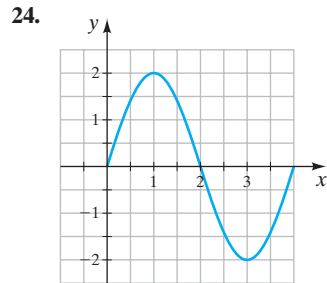
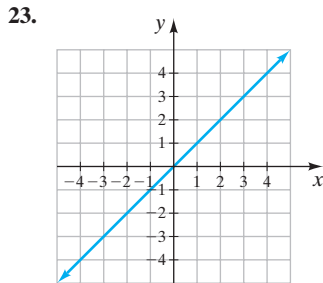
- $\{(5, 4), (2, 2), (3, 5), (1, 3), (4, 1)\}$
- $\{(2, 1), (4, 0), (3, 5), (2, 2), (5, 1)\}$
- $\{(5, -2), (3, 0), (3, 2), (1, 4), (2, 4), (7, 5)\}$
- $\{(-2, 1), (1, -3), (3, 4), (4, 5), (-2, 0)\}$
- $\{(5, 0), (4, -4), (0, -1), (3, 2), (1, 1)\}$
- $\{(-6, 3), (-3, 4), (0, 3), (5, 2), (3, 5), (2, 5)\}$
- $\{(3, 0), (0, -3), (1, 5), (1, 0), (1, 2)\}$
- $\{(4, -3), (3, -7), (4, -9), (3, 5)\}$
- $\{(0, 3), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3)\}$
- $\{(3, 5), (2, 4), (1, 0), (0, 1), (-1, 5)\}$

En las figuras de los ejercicios 19 a 22, se ilustran el dominio y el rango de una relación. **a)** Construya un conjunto de pares ordenados que representen la relación. **b)** Determine si la relación es una función. Explique su respuesta.





Utilice la prueba de la recta vertical para determinar si cada relación también es una función.



Evalúe cada función en los valores indicados.

35.  $f(x) = 4x + 2$ ; determine **a)**  $f(3)$ , **b)**  $f(-1)$

37.  $f(x) = x^2 - 5$ ; determine **a)**  $f(6)$ , **b)**  $f(-2)$

39.  $f(x) = 3x^2 - x + 4$ ; determine **a)**  $f(0)$ , **b)**  $f(2)$

41.  $f(x) = \frac{x+4}{2}$ ; determine **a)**  $f(2)$ , **b)**  $f(6)$

36.  $f(x) = -4x + 7$ ; determine **a)**  $f(0)$ , **b)**  $f(1)$

38.  $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$ ; determine **a)**  $f(1)$ , **b)**  $f(-3)$

40.  $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$ ; determine **a)**  $f(10)$ , **b)**  $f(-4)$

42.  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6$ ; determine **a)**  $f(2)$ , **b)**  $f(-2)$

Grafique cada función.

43.  $f(x) = x + 3$

44.  $f(x) = -x + 4$

45.  $f(x) = 2x - 1$

46.  $f(x) = 4x + 2$

47.  $f(x) = -2x + 4$

48.  $f(x) = -x + 5$

49.  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

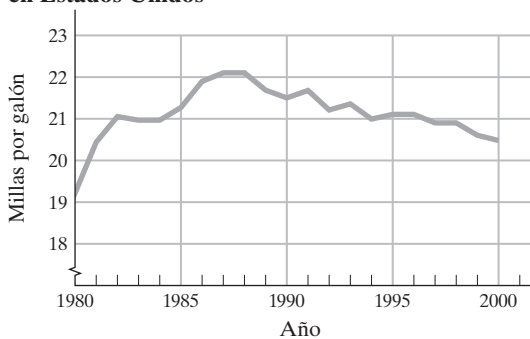
50.  $f(x) = -4x$

### Solución de problemas

51. Si una relación consiste de seis pares ordenados y el dominio de la relación consiste de cinco valores de  $x$ ; ¿la relación puede ser una función? Explique.
52. Si una relación consiste en seis pares ordenados y el rango de la relación consiste de cinco valores de  $y$ ; ¿la relación puede ser una función? Explique.

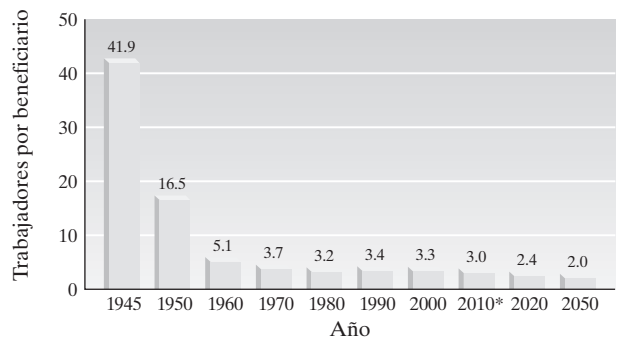
En los ejercicios 53 y 54, ¿las gráficas son funciones? Explique.

53. **Promedio Nacional de millaje en automóviles nuevos en Estados Unidos**



- 54.

### Seguridad social



Fuente: Administración de la Seguridad Social  
\* Proyecciones para 2010 y años posteriores

55. **Niñera** Jaci Cavanaugh obtiene \$8 por hora por trabajar de niñera. Su ingreso semanal,  $I$ , de este trabajo puede representarse por medio de la función  $I = 8h$ , en donde  $h$  es el número de horas que cuida niños.
- Dibuje una gráfica de la función para tiempos hasta e incluyendo 60 horas.
  - Estime su ingreso semanal por cuidar niños, si ella lo hizo durante 40 horas por semana.
56. **Paseo en bicicleta** Rachel Falk y Tony Mathias pasean juntos en bicicleta. Si ellos conducen a una velocidad constante de 8 millas por hora, la distancia que recorren,  $d$ , puede determinarse por medio de la función  $d = 8t$ , en donde  $t$  es el tiempo en horas.
- Dibuje una gráfica de la función para tiempos hasta e incluyendo 6 horas.
  - Estime la distancia que recorrerán si conducen durante 2 horas.
57. **Reparación de autopista** El costo,  $c$ , en pesos por la reparación de una autopista puede estimarse mediante la función  $c = 2000 + 6000m$ , donde  $m$  es el número de millas reparadas.
- Dibuje una gráfica de la función hasta e incluyendo 6 millas.
  - Estime el costo de la reparación de 2 millas de camino.
58. **Vacaciones** Frank Duomo planea tomar unas vacaciones en el área de San Diego/Los Ángeles. Él determina que el

costo,  $C$ , de las vacaciones puede estimarse por medio de la función  $C = 350n + 400$ , donde  $n$  es el número de días pasados en el área.

- Dibuje una gráfica de la función hasta e incluyendo 10 días
- Estime el costo de unas vacaciones de 7 días en el área.



Hotel del Coronado, San Diego

59. **Comisión** La comisión de un corredor de bolsa,  $c$ , es \$25 más 2% del valor de las ventas,  $s$ . Por tanto, la comisión del corredor de bolsa es una función de las ventas,  $c = 25 + 0.02s$ .
- Dibuje una gráfica que ilustre la comisión del corredor en ventas hasta e incluyendo \$10,000.
  - Si el valor de las ventas de una transacción es \$8,000, estime la comisión del corredor.

**60. Registro de automóviles** El pago,  $f$ , por el registro estatal de un automóvil es de \$20 más \$15 por cada 1,000 libras del peso bruto del vehículo. El pago por registro es una función del peso del vehículo,  $f = 20 + 0.015w$ , donde  $w$  es el peso del vehículo en libras.

- a) Dibuje una gráfica de la función para pesos de vehículo hasta e incluyendo 10,000 libras.
- b) Estime el pago por registro de un vehículo cuyo peso bruto es de 4,000 libras.

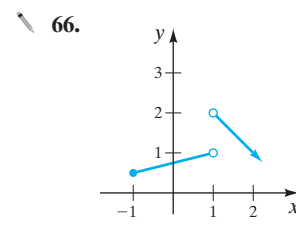
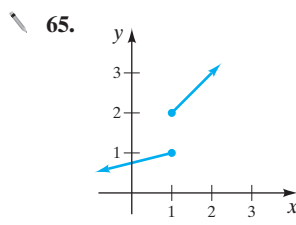
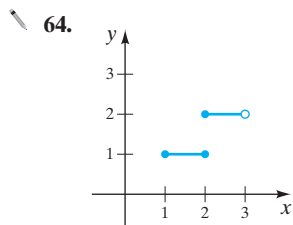
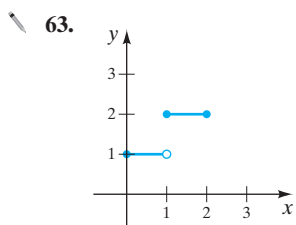
**61. Éxito musical** Un nuevo grupo de canto, Three Forks and a Spoon, firman un contrato de grabación con la marca Discos Smash. Su contrato les proporciona un bono de \$10,000, más un 8% de regalías sobre las ventas,  $s$ , de su nuevo disco, *There's Mud in Your Eye!* Su ingreso,  $i$ , es una función de sus ventas,  $i = 10,000 + 0.08s$ .

- a) Dibuje una gráfica de la función para ventas hasta e incluyendo \$100,000.
- b) Estime su ingreso si sus ventas son \$20,000.

**62. Factura de la luz** Una factura mensual de la luz,  $m$ , en pesos, consiste en un pago fijo de \$20 más \$0.07 por kilowatt-hora,  $k$ , de electricidad utilizado. La cantidad de la factura es una función de los kilowatts-hora consumidos,  $m = 20 + 0.07k$ .

- a) Dibuje una gráfica hasta e incluyendo 3,000 kilowatts-hora de electricidad consumidos en un mes.
- b) Estime la factura si se utilizaron 1,500 kilowatts-hora de electricidad.

Considere las gráficas siguientes. Recuerde, de la sección 2.7, que un círculo vacío en el extremo de un segmento de línea significa que el extremo no está incluido en la respuesta. Un círculo lleno al final de un segmento de línea, indica que el extremo está incluido en la respuesta. Determine si las gráficas siguientes son funciones. Explique su respuesta.



### Problemas de reto

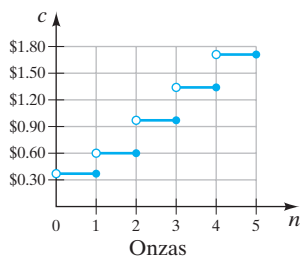
**67.**  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$ ; determine **a)**  $f(\frac{1}{2})$ , **b)**  $f(\frac{2}{3})$ , **c)**  $f(0.2)$

**68.**  $f(x) = x^2 + 2x - 3$ ; determine **a)**  $f(1)$ , **b)**  $f(2)$ , **c)**  $f(a)$ . Explique cómo determinó su respuesta al inciso **c)**.

### Actividad en grupo

En grupo, analicen y respondan los ejercicios 69 y 70.

- 69.** Presenten tres ejemplos de la vida cotidiana (diferentes de los que ya se han dado) de una cantidad que sea una función de otra. Escriban cada una como una función e indiquen lo que cada variable representa.
- 70.** En diciembre de 2002, el costo de envío de correspondencia en primera clase fue de 37 centavos por la primera onza y 23 centavos por cada onza adicional (o fracción de onza). Una gráfica que muestra el costo del envío por correo de una carta por primera clase se ilustra a continuación.



- a) ¿Esta gráfica representa una función? Expliquen su respuesta.
- b) Con base en la gráfica, estimen el costo de enviar por correo de primera clase un paquete de 4 onzas.
- c) Determinen el costo exacto de enviar por correo de primera clase un paquete de 4 onzas.
- d) Con base en la gráfica, estimen el costo de enviar por correo de primera clase un paquete de 3.6 onzas.
- e) Determinen el costo exacto de enviar por correo de primera clase un paquete de 3.6 onzas.

## Ejercicios de repaso acumulativo

[1.3] 71. Evalúe  $\frac{5}{9} - \frac{3}{7}$ .

[2.5] 72. Resuelva la ecuación  $2x - 3(x + 2) = 8$ .

[3.3] 73. **Viaje en taxi** El costo de un viaje en taxi es \$2.00 por la primera milla y \$1.50 por cada milla o fracción de milla adicional. Determine la distancia máxima que Andrew Collins puede viajar en el taxi si sólo tiene \$20.

[5.5] 74. Factorice  $25x^2 - 121y^2$ .

[6.5] 75. Simplifique  $\frac{21x}{\frac{y^2}{7xy}}$ .

[7.1] 76. ¿Qué es una gráfica?

## RESUMEN DEL CAPÍTULO

## Términos y frases importantes

## 7.1

Colineal  
 Coordenadas  
 Cuadrantes  
 Ecuación lineal con dos variables  
 Eje x  
 Eje y  
 Forma estándar de una ecuación lineal  
 Gráfica  
 Origen  
 Pares ordenados

Sistema de coordenadas cartesianas

## 7.2

Intersección x  
 Intersección y  
 Recta horizontal  
 Recta vertical

## 7.3

Pendiente de una recta  
 Pendiente negativa  
 Pendiente positiva  
 Recíproco negativo

Rectas paralelas  
 Rectas perpendiculares

## 7.4

Forma pendiente-ordenada al origen  
 Forma punto-pendiente

## 7.5

Desigualdad lineal

## 7.6

Componentes de un par ordenado  
 Dominio

Función  
 Función lineal  
 Notación funcional  
 Prueba de la recta vertical  
 Rango  
 Relación

## HECHOS IMPORTANTES

Para determinar la intersección x: Haga  $y = 0$  y determine el valor correspondiente de  $x$ .

Para determinar la intersección y: Haga  $x = 0$  y determine el valor correspondiente de  $y$ .

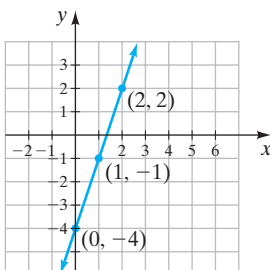
Pendiente de una recta,  $m$ , que pasa por los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

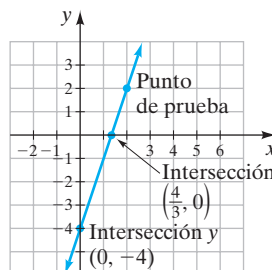
## Métodos de graficación

$$y = 3x - 4$$

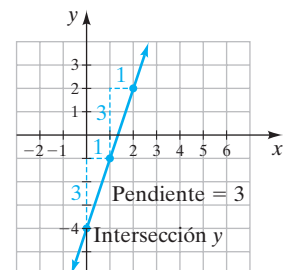
## Mediante el trazo de puntos



## Por medio de intersecciones



## Mediante la pendiente y la intersección



(continúa en la página siguiente)

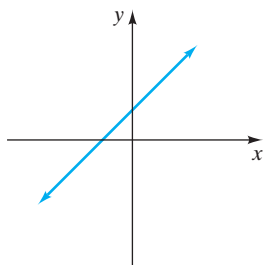


Forma estándar de una ecuación lineal:  $ax + by = c$ .

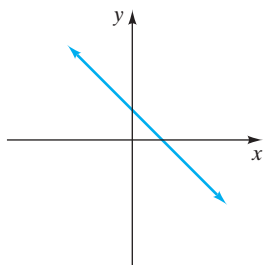
Forma pendiente-ordenada al origen de una ecuación lineal:  $y = mx + b$ .

Forma punto-pendiente de una ecuación lineal:  $y - y_1 = m(x - x_1)$ .

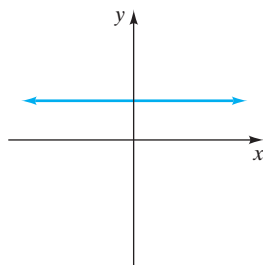
Repaso de pendiente



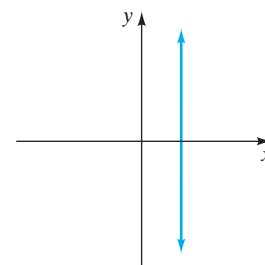
Pendiente positiva  
(asciende hacia la derecha)



Pendiente negativa  
(desciende hacia la derecha)



La pendiente es 0  
(recta horizontal)



La pendiente no está definida.  
(recta vertical)

**Prueba de la recta vertical:** Si por cualquier parte de una gráfica se puede trazar una recta vertical y ésta interseca otra parte de la gráfica, la gráfica no es una función.

Ejercicios de repaso del capítulo

- [7.1] 1. Trace cada par ordenado en los mismos ejes.  
 a)  $A(5, 3)$     b)  $B(0, 6)$     c)  $C\left(5, \frac{1}{2}\right)$   
 d)  $D(-4, 3)$     e)  $E(-6, -1)$     f)  $F(-2, 0)$
2. Determine si los siguientes puntos son colineales.  
 $(0, -4), (6, 8), (-2, 0), (4, 4)$
3. ¿Cuáles de los siguientes pares ordenados satisfacen la ecuación  $2x + 3y = 9$ ?  
 a)  $\left(5, -\frac{1}{3}\right)$     b)  $(0, 3)$   
 c)  $(-1, 4)$     d)  $\left(2, \frac{5}{3}\right)$

- [7.2] 4. Determine la coordenada que falta en las siguientes soluciones de  $3x - 2y = 8$ .  
 a)  $(4, ?)$     b)  $(0, ?)$     c)  $(?, 4)$     d)  $(?, 0)$

Grafique cada ecuación por medio del método que usted elija.

- |                       |  |                    |                     |
|-----------------------|--|--------------------|---------------------|
| 5. $y = 4$            | 6. $x = 2$                             | 7. $y = 3x$        | 8. $y = 2x - 1$     |
| 9. $y = -2x + 5$      | 10. $y = -\frac{1}{2}x + 4$            | 11. $-2x + 3y = 6$ | 12. $-5x - 2y = 10$ |
| 13. $25x + 50y = 100$ | 14. $\frac{2}{3}x = \frac{1}{4}y + 20$ |                    |                     |

[7.3] Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados.

15.  $(3, -4)$  y  $(-2, 5)$     16.  $(-4, -2)$  y  $(8, -3)$     17.  $(-2, -1)$  y  $(-4, 3)$

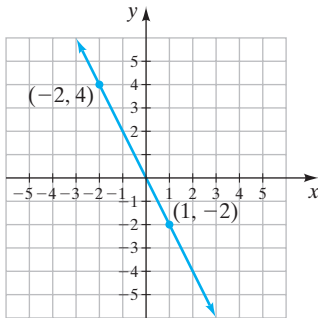
18. ¿Cuál es la pendiente de una recta horizontal?

19. ¿Cuál es la pendiente de una recta vertical?

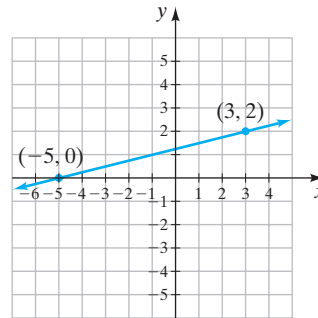
20. Defina la pendiente de una línea recta.

Determine la pendiente de cada recta.

21.



22.

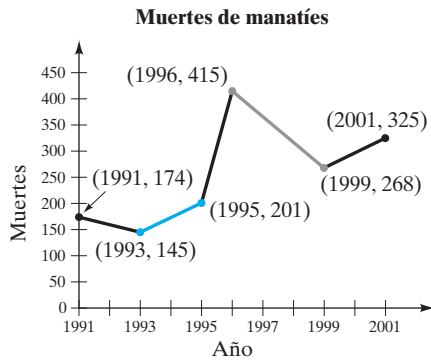


Suponga que las rectas 1 y 2 son distintas. Si  $m_1$  representa la pendiente de la recta 1 y  $m_2$  representa la pendiente de la recta 2, determine si las rectas 1 y 2 son paralelas, perpendiculares o nada de esto.

23.  $m_1 = \frac{5}{8}, m_2 = -\frac{5}{8}$

24.  $m_1 = -4, m_2 = \frac{1}{4}$

25. La gráfica siguiente muestra el número de muertes de manatíes en Florida. Determine la pendiente del segmento de recta en a) rojo y b) en gris



Fuente: St. Petersburg Times, 1 de mayo de 2002, página 46

[7.4] Determine la pendiente y la intersección y de la gráfica de cada ecuación.

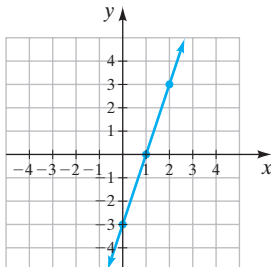
26.  $6x + 7y = 14$

27.  $2x + 5 = 0$

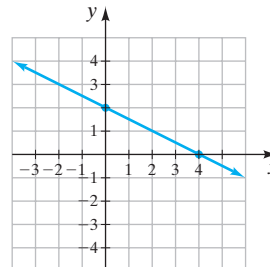
28.  $3y + 9 = 0$

Escriba la ecuación de cada recta.

29.



30.



Determine si cada par de rectas son paralelas, perpendiculares o nada de esto.

31.  $y = 2x - 6$   
 $6y = 12x + 6$

32.  $2x - 3y = 9$   
 $3x + 2y = 6$

Con las propiedades que se dan, determine la ecuación de cada recta.

33. Pendiente = 3, pasa por (2, 4).

34. Pendiente =  $-\frac{2}{3}$ , pasa por (3, 2).

35. Pendiente = 0, pasa por (4, 2).

36. Pendiente no definida, pasa por (4, 2).

37. Pasa por (-2, 3) y (0, -4).

38. Pasa por (-4, -2) y (-4, 3).

[7.5] Grafique cada desigualdad.

39.  $y \geq 1$

40.  $x < 4$

41.  $y < 3x$

42.  $y > 2x + 1$

43.  $-6x + y \geq 5$

44.  $3y + 6 \leq x$

[7.6] Determine cuáles de las relaciones siguientes también son funciones. Proporcione el dominio y el rango de cada una.

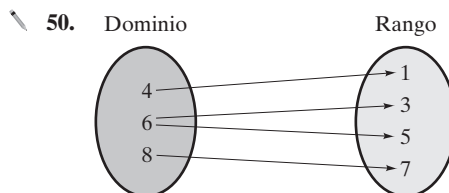
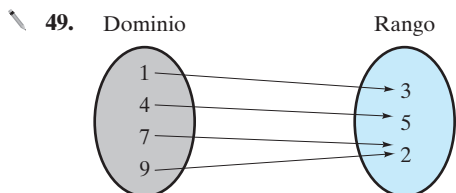
45.  $\{(3, 2), (4, -3), (1, 5), (2, -1), (6, 4)\}$

46.  $\{(3, 1), (4, 2), (4, 5), (6, 1), (7, 0)\}$

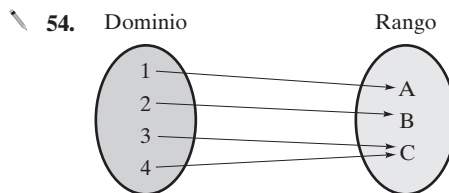
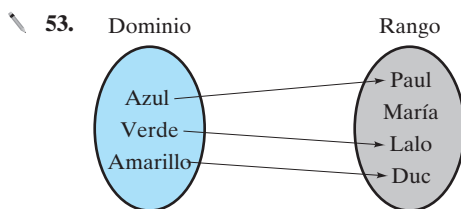
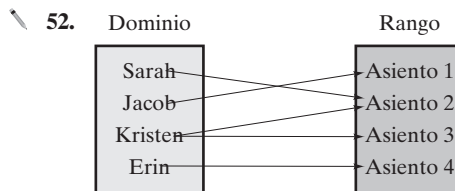
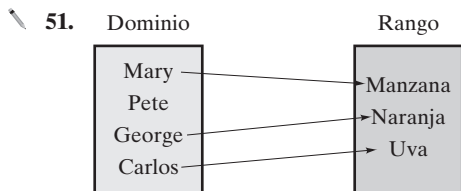
47.  $\{(3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 2), (3, -3)\}$

48.  $\{(5, -2), (3, -2), (4, -2), (9, -2), (-2, -2)\}$

En los ejercicios 49 y 50, se ilustran el dominio y el rango de una relación. **a)** Elabore un conjunto de pares ordenados que represente la relación. **b)** Determine si la relación es una función. Explique su respuesta.

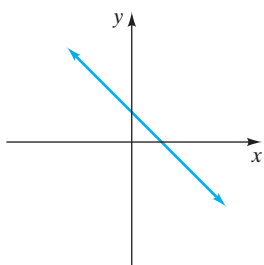


En los ejercicios 51 a 54, **a)** indique el dominio y el rango de la relación, y **b)** indique si la relación es una función. Si no es función, explique por qué.

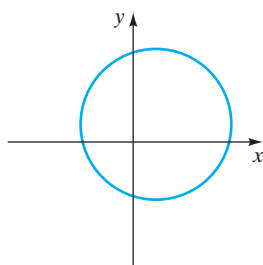


Utilice la prueba de la recta vertical para determinar si la relación también es una función.

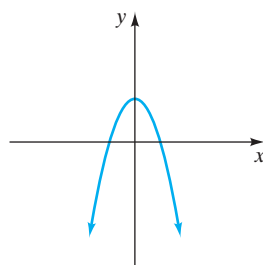
55.



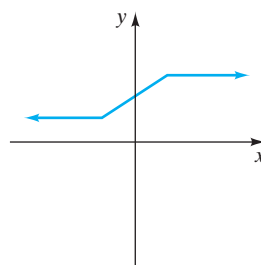
56.



57.



58.



Evalúe cada función en los valores que se indican.

59.  $f(x) = 6x - 4$ ; determine **a)**  $f(1)$ , **b)**  $f(-5)$

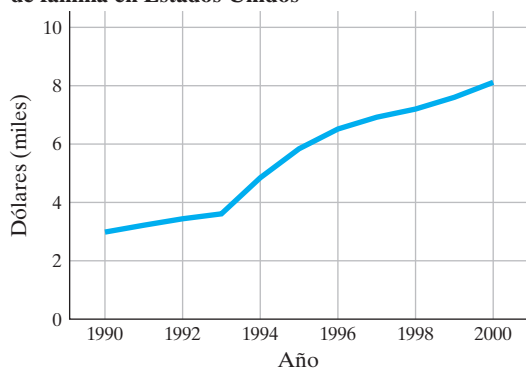
60.  $f(x) = -4x - 5$ ; determine **a)**  $f(-4)$ , **b)**  $f(8)$

61.  $f(x) = \frac{1}{3}x - 5$ ; determine **a)**  $f(3)$ , **b)**  $f(-9)$

62.  $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$ ; determine **a)**  $f(3)$ , **b)**  $f(-5)$

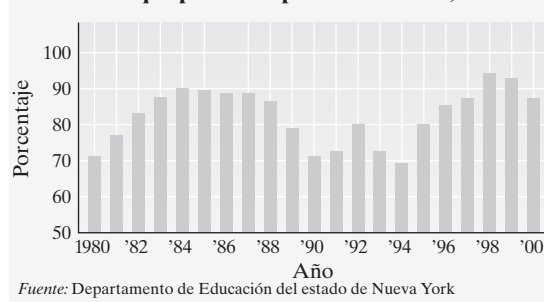
Determine si las gráficas siguientes son funciones. Explique su respuesta.

63. Promedio de deuda en tarjeta de crédito por jefe de familia en Estados Unidos



Fuente: Fortune Magazine, 2 de abril de 2001

64. Porcentaje de Presupuesto Escolar en el estado de Nueva York que pasa en la primera votación, 1980-2000



Fuente: Departamento de Educación del estado de Nueva York

Grafique las funciones siguientes.

65.  $f(x) = 3x - 5$

66.  $f(x) = -2x + 3$

67. **Compra de acciones** Un corredor de bolsa independiente cobra \$25 más 3 centavos por acción que compre o venda. El costo para un cliente,  $c$ , en pesos, es una función del número de acciones,  $n$ , que compre o venda,  $c = 25 + 0.03n$ .

68. **Tienda** La utilidad mensual,  $p$ , de una tienda Todo por un peso puede estimarse por medio de la función  $p = 4x - 1,600$ , donde  $x$  representa el número de artículos vendidos.

- a) Dibuje una gráfica que ilustre el costo para un cliente hasta e incluyendo 10,000 acciones.
- b) Estime el costo si se compran 1,000 acciones.

- a) Dibuje una gráfica de la función hasta e incluyendo 1,000 artículos vendidos.
- b) Estime la utilidad si se vendieron 400 artículos.

## Examen de práctica del capítulo

1. ¿Qué es una gráfica?

3. a) ¿Cuál es la forma estándar de una ecuación lineal?

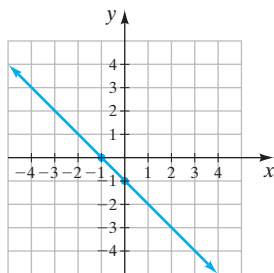
2. ¿En cuál cuadrante están los puntos siguientes?

b) ¿Cuál es la forma pendiente-ordenada al origen de una ecuación lineal?

- a)  $(3, -5)$
- b)  $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$

c) ¿Cuál es la forma punto-pendiente de una ecuación lineal?

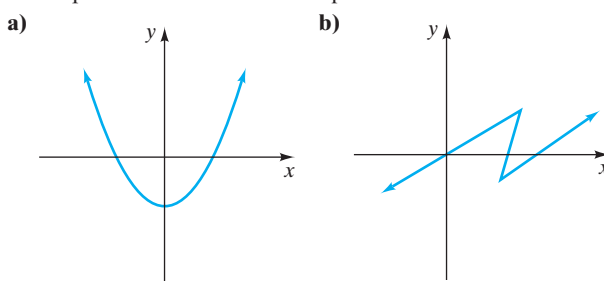
4. ¿Cuáles de los siguientes pares ordenados satisfacen la ecuación  $3y = 5x - 9$ ?
- a)  $(4, 2)$                       b)  $\left(\frac{9}{5}, 0\right)$
- c)  $(-2, -6)$                   d)  $(0, -3)$
5. Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $(-4, 3)$  y  $(2, -5)$ .
6. Determine la pendiente y la intersección y de  $4x - 9y = 15$ .
7. Escriba una ecuación de la siguiente gráfica.



8. Grafique  $x = -3$ .
9. Grafique  $y = 2$ .
10. Grafique  $y = 3x - 2$  por medio del trazo de puntos.
11. a) De la ecuación  $2x - 4y = 8$ , despeje  $y$ .  
b) Grafique la ecuación por medio del trazo de puntos.
12. Grafique  $3x + 5y = 15$  por medio de las intersecciones con los ejes.
13. Escriba, en la forma pendiente-ordenada al origen, una ecuación de la recta con pendiente de 4 y que pasa por el punto  $(2, -5)$ .
14. Escriba, en la forma pendiente-ordenada al origen, una ecuación de la recta que pasa por los puntos  $(3, -1)$  y  $(-4, 2)$ .
15. Determine si las ecuaciones siguientes representan rectas paralelas. Explique cómo determinó su respuesta.

$$2y = 3x - 6 \quad \text{y} \quad y - \frac{3}{2}x = -5$$

16. Grafique  $y = 3x - 4$  por medio de la pendiente y la intersección y.
17. Grafique  $4x - 2y = 6$  utilizando la pendiente y la intersección y.
18. Defina qué es una función.
19. a) Determine si la siguiente relación es una función. Explique su respuesta.  
 $\{(1, 2), (3, -4), (5, 3), (1, 0), (6, 5)\}$   
b) Proporcione el dominio y el rango de la relación o función.
20. Determine si las gráficas siguientes son funciones. Explique cómo determinó su respuesta.



21. Si  $f(x) = 2x^2 + 3x$ , determine a)  $f(2)$  y b)  $f(-3)$ .
22. Grafique la función  $f(x) = 2x - 4$ .
23. Grafique  $y \geq -3x + 5$ .
24. Grafique  $y < 4x - 2$ .
25. **Ingreso semanal** Kate Moore, una vendedora, tiene un ingreso semanal,  $i$ , que puede determinarse mediante la función  $i = 200 + 0.05s$ , donde  $s$  es el monto de sus ventas semanales.  
a) Dibuje una gráfica de su ingreso semanal para ventas de \$0 a \$10,000.  
b) Estime su ingreso semanal si sus ventas son de \$3,000.

### Examen de repaso acumulativo

Resuelva el examen siguiente y confronte sus respuestas con las que aparecen al final del examen. Repase cualquier pregunta que haya respondido de manera incorrecta. La sección y el objetivo en donde se estudió el material se indica a continuación de la respuesta.

1. Escriba el conjunto de  
a) números naturales.  
b) enteros no negativos.
2. Enuncie cada propiedad que se indica.  
a)  $3(x + 2) = 3x + 3 \cdot 2$   
b)  $a + b = b + a$
3. Resuelva la ecuación  $2x + 5 = 3(x - 5)$ .
4. Resuelva la ecuación  $3(x - 2) - (x + 4) = 2x - 10$ .
5. Resuelva la desigualdad  $2x - 14 > 5x + 1$ . Grafique la solución en una recta numérica.
6. **Sopa de pollo** En el almacén de Tsong Hsu, 3 latas de sopa de pollo cuestan \$1.50. Determine el costo de 8 latas.
7. **Rectángulo** La longitud de un rectángulo es 4 unidades mayor que el doble del ancho. Determine la longitud y el ancho del rectángulo si su perímetro es de 26 pies.

8. **Carrera** Dos corredores inician en el mismo punto y corren en direcciones opuestas. Un corredor corre a 6 mph y el otro a 8 mph. ¿En cuántas horas ellos estarán alejados 28 millas?

9. Simplifique  $\frac{x^{-4}}{x^{11}}$ .

10. Exprese 652.3 en notación científica.

11. Factorice  $2x^2 - 12x + 10$ .

12. Factorice  $4a^2 + 4a - 35$ .

13. Resuelva  $3x^2 = 18x$ .

14. Simplifique  $\frac{2r - 7}{14 - 4r}$ .

15. Multiplique  $\frac{x - 2}{3x + 7} \cdot \frac{3x}{x - 2}$ .

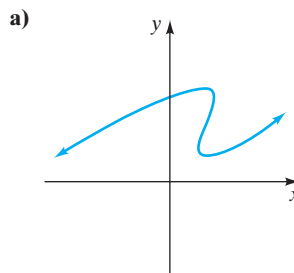
16. Resuelva  $\frac{y^2}{y - 5} = \frac{25}{y - 5}$ .

17. Utilizando las intersecciones con los ejes, grafique  $6x - 3y = -12$ .

18. Grafique  $y = \frac{2}{3}x - 3$  por medio de la pendiente y la intersección y.


19. Escriba la ecuación, en la forma punto-pendiente, de la recta con pendiente 3 y que pasa por el punto (5, 2).

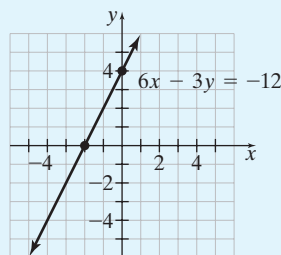
20. Determine si las relaciones siguientes son funciones. Explique su respuesta.

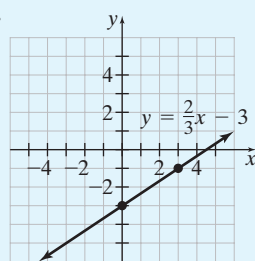


b)  $\{(1, 2), (5, 3), (7, 3), (-2, 0)\}$

### Respuestas al examen de repaso acumulativo

1. a)  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$  b)  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ; [Sec. 1.4, Obj. 1] 2. a) Propiedad distributiva; [Sec. 1.10, Obj. 3]  
 b) Propiedad conmutativa de la suma; [Sec. 1.10, Obj. 1] 3. 20; [Sec. 2.5, Obj. 1] 4. Todos los números reales; [Sec. 2.5, Obj. 3] 5.  $x < -5$ , ; [Sec. 2.7, Obj. 1] 6. \$4.00; [Sec. 2.6, Obj. 3] 7. ancho: 3 pies, longitud: 10 pies; [Sec. 3.4, Obj. 1] 8. 2 horas; [Sec. 3.5, Obj. 2] 9.  $\frac{1}{x^{15}}$ ; [Sec. 4.2, Obj. 2] 10.  $6.523 \times 10^2$ ; [Sec. 4.3, Obj. 1] 11.  $2(x - 5)(x - 1)$ ; [Sec. 5.3, Obj. 2] 12.  $(2a - 5)(2a + 7)$ ; [Sec. 5.4, Obj. 1] 13. 0, 6; [Sec. 5.6, Obj. 2] 14.  $-\frac{1}{2}$ ; [Sec. 6.1, Obj. 4] 15.  $\frac{3x}{3x + 7}$ ; [Sec. 6.2, Obj. 1] 16. -5; [Sec. 6.6, Obj. 2] 17. ; [Sec. 7.2, Obj. 3]



18. ; [Sec. 7.4, Obj. 2] 19.  $y - 2 = 3(x - 5)$ ; [Sec. 7.4, Obj. 4] 20. a) no b) sí; [Sec. 7.6, Obj. 2]

# Capítulo 8

## Sistemas de ecuaciones lineales



- 8.1** Solución gráfica de sistemas de ecuaciones
- 8.2** Solución de sistemas de ecuaciones por el método de sustitución
- 8.3** Solución de sistemas de ecuaciones por el método de suma y resta
- 8.4** Sistemas de ecuaciones: aplicación y solución de problemas
- 8.5** Solución de sistemas de desigualdades lineales

Resumen del capítulo  
Ejercicios de repaso del capítulo  
Examen de práctica del capítulo  
Examen de repaso acumulativo

**E**n la actualidad, las decisiones financieras se tienen que tomar todos los días. Con frecuencia el conocimiento de sistemas de ecuaciones es útil en la toma de tales decisiones. Como en el caso del ejemplo 6 de la página 515, explicamos cómo utilizar un sistema de ecuaciones para seleccionar un sistema de seguridad de una compañía, y en el ejercicio 35, en la página 525, utilizamos un sistema de ecuaciones para decidir si es adecuado refinanciar una casa. En este capítulo verá muchos ejemplos de cómo aplicar el sistema de ecuaciones a la vida real.



## Avance de la lección

**E**n este capítulo aprenderemos a expresar problemas de aplicación como sistemas de ecuaciones lineales, así como la forma de resolverlos. La solución para un sistema de ecuaciones es el valor o los valores que satisfacen todas las ecuaciones del sistema.

También explicaremos tres procedimientos para resolver sistemas de ecuaciones. En la sección 8.1 resolveremos sistemas por medio de gráficas; en la sección 8.2, por el método de sustitución, y en la sección 8.3, por el método de suma y resta (reducción o eliminación). En la sección 8.4 explicamos cómo expresar algunos problemas de aplicación de la vida real como sistemas de ecuaciones lineales. Finalmente, en la sección 8.5, con base en la solución gráfica, presentada en la sección 8.1, resolveremos sistemas de *desigualdades* lineales de forma gráfica.

Para tener un buen desempeño en la sección 8.1, Solución gráfica de sistemas de ecuaciones, necesita comprender el procedimiento de graficación de rectas, presentado en las secciones 7.2 a 7.4. Para tener éxito en la sección 8.5, Solución de sistemas de desigualdades lineales, necesita comprender cómo graficar desigualdades lineales, tema presentado en la sección 7.5.

## 8.1 SOLUCIÓN GRÁFICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES



- 1 Determinar si un par ordenado es una solución de un sistema de ecuaciones.
- 2 Determinar si un sistema de ecuaciones es consistente, inconsistente o dependiente.
- 3 Resolver gráficamente un sistema de ecuaciones.

## 1 Determinar si un par ordenado es una solución de un sistema de ecuaciones

Cuando buscamos una solución común para dos o más ecuaciones lineales, éstas se denominan **sistema de ecuaciones lineales**. Un ejemplo de un sistema de ecuaciones lineales es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} (1) y = x + 5 \\ (2) y = 2x + 4 \end{array} \right\} \text{ Sistema de ecuaciones lineales.}$$

La **solución de un sistema de ecuaciones** es el par o pares ordenados que satisfacen todas las ecuaciones en el sistema. La solución para el sistema anterior es (1, 6).

**Comprobación** En la ecuación (1)      En la ecuación (2)

(1, 6)	(1, 6)
$y = x + 5$	$y = 2x + 4$
$6 \stackrel{?}{=} 1 + 5$	$6 \stackrel{?}{=} 2(1) + 4$
$6 = 6$ Verdadero.	$6 = 6$ Verdadero.

Puesto que el par ordenado (1, 6) satisface *ambas* ecuaciones, es una solución para el sistema de ecuaciones. Observe que el par ordenado (2, 7) satisface la primera ecuación pero no la segunda.

**Comprobación** En la ecuación (1)      En la ecuación (2)

(2, 7)	(2, 7)
$y = x + 5$	$y = 2x + 4$
$7 \stackrel{?}{=} 2 + 5$	$7 \stackrel{?}{=} 2(2) + 4$
$7 = 7$ Verdadero.	$7 = 8$ Falso.

Como el par ordenado (2, 7) no satisface *ambas* ecuaciones, *no* es una solución para el sistema de ecuaciones.



**EJEMPLO 1** Determine cuáles de los siguientes pares ordenados satisfacen el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}y &= 2x - 8 \\ 2x + y &= 4\end{aligned}$$

- a)**  $(1, -6)$       **b)**  $(3, -2)$

**Solución** **a)** En cada ecuación, sustituya 1 por  $x$  y  $-6$  por  $y$ .


$$\begin{array}{ll}y = 2x - 8 & 2x + y = 4 \\ -6 \stackrel{?}{=} 2(1) - 8 & 2(1) + (-6) \stackrel{?}{=} 4 \\ -6 \stackrel{?}{=} 2 - 8 & 2 - 6 \stackrel{?}{=} 4 \\ -6 = -6 & -4 = 4 \\ \text{Verdadero.} & \text{Falso.}\end{array}$$

Como  $(1, -6)$  no satisface ambas ecuaciones, no es una solución para el sistema de ecuaciones.

**b)** En cada ecuación, sustituya 3 por  $x$  y  $-2$  por  $y$ .

$$\begin{array}{ll}y = 2x - 8 & 2x + y = 4 \\ -2 \stackrel{?}{=} 2(3) - 8 & 2(3) + (-2) \stackrel{?}{=} 4 \\ -2 \stackrel{?}{=} 6 - 8 & 6 - 2 \stackrel{?}{=} 4 \\ -2 = -2 & 4 = 4 \\ \text{Verdadero.} & \text{Verdadero.}\end{array}$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 13**

Como  $(3, -2)$  satisface ambas ecuaciones, es una solución para el sistema de ecuaciones lineales. 

En este capítulo analizamos tres métodos para determinar la solución para un sistema de ecuaciones; el *método gráfico*, el *método por sustitución* y el *método de suma y resta (reducción o por eliminación)*. En esta sección analizamos el método gráfico.

## 2 Determinar si un sistema de ecuaciones es consistente, inconsistente o dependiente

La **solución para un sistema de ecuaciones lineales** es el par (o pares) ordenados comunes a todas las rectas del sistema cuando las graficamos. Al graficar dos rectas, son posibles tres situaciones, como se ilustra en la figura 8.1.

En la figura 8.1a, las rectas 1 y 2 no son paralelas; se intersecan en un punto. Este sistema de ecuaciones tiene *exactamente una solución*, y es un ejemplo de un **sistema consistente de ecuaciones**, que es el que tiene una solución.

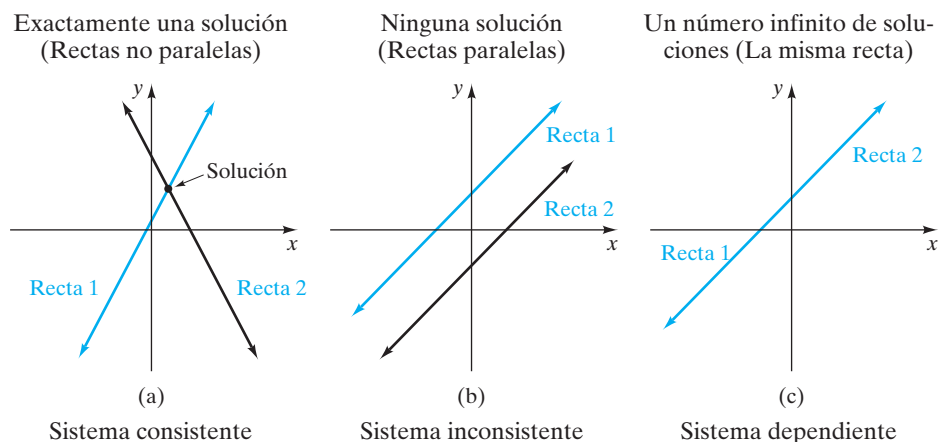


FIGURA 8.1

En la figura 8.1b, las rectas 1 y 2 son dos paralelas diferentes. Las rectas no se intersecan, y este sistema de ecuaciones *no tiene solución*; éste es un ejemplo de un **sistema inconsistente de ecuaciones**, un sistema que no tiene soluciones.

En la figura 8.1c, las rectas 1 y 2 en realidad son la misma recta. En este caso, todo punto en la recta satisface ambas ecuaciones y es una solución para el sistema de ecuaciones. Este sistema tiene *un número infinito de soluciones* y es un ejemplo de un **sistema dependiente de ecuaciones**, que tiene un número infinito de soluciones. Si un sistema de dos ecuaciones lineales es dependiente, entonces ambas ecuaciones representan la misma recta. *Observe que un sistema dependiente también es consistente, ya que tiene una solución.*

Podemos determinar si un sistema de ecuaciones lineales es consistente, inconsistente o dependiente, escribiendo cada ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen y comparando las pendientes y las intersecciones con  $y$ . Si las pendientes de las rectas son diferentes (figura 8.1a), el sistema es consistente. Si las pendientes son iguales pero las intersecciones con  $y$  son diferentes (figura 8.1b), el sistema es inconsistente. Si tanto las pendientes como las intersecciones con  $y$  son iguales (figura 8.1c), el sistema es dependiente.


**EJEMPLO 2** Determine si el sistema siguiente tiene exactamente una solución, ninguna o un número infinito de soluciones.

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= -16 \\ -8y &= 4x - 12 \end{aligned}$$

**Solución** Escriba cada ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen y luego compare las pendientes y las intersecciones con  $y$ .

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= -16 & -8y &= 4x - 12 \\ 4y &= -2x - 16 & y &= \frac{4x - 12}{-8} \\ y &= \frac{-2x - 16}{4} & y &= -\frac{4}{8}x + \frac{12}{8} \\ y &= -\frac{2}{4}x - \frac{16}{4} & y &= -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ y &= -\frac{1}{2}x - 4 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 29

Como las rectas tienen la misma pendiente,  $-\frac{1}{2}$ , y diferentes intersecciones con  $y$ , son paralelas. Por tanto, este sistema de ecuaciones es inconsistente y no tiene solución. 

### 3 Resolver gráficamente un sistema de ecuaciones

Ahora veremos cómo resolver gráficamente sistemas de ecuaciones.

**Para obtener la solución para un sistema de ecuaciones**

Grafique cada ecuación y determine el punto o puntos de intersección.

**EJEMPLO 3** Resolver gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 11 \\ x + 3y &= 18 \end{aligned}$$

**Solución** Determine las intersecciones con  $x$  y con  $y$  de cada gráfica; luego dibuje las rectas.

$2x + y = 11$	Par ordenado	$x + 3y = 18$	Par ordenado
Sea $x = 0$ ; entonces $y = 11$	$(0, 11)$	Sea $x = 0$ ; entonces $y = 6$	$(0, 6)$
Sea $y = 0$ ; entonces $x = \frac{11}{2}$	$(\frac{11}{2}, 0)$	Sea $y = 0$ ; entonces $x = 18$	$(18, 0)$

Las dos rectas (figura 8.2) parecen intersectarse en el punto  $(3, 5)$ . Este punto podría ser la solución para el sistema de ecuaciones. Sin embargo, para estar seguros, debemos comprobar que satisface *ambas* ecuaciones.

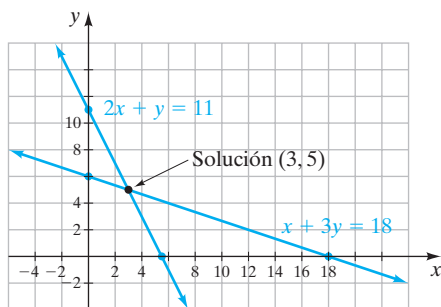


FIGURA 8.2

<b>Comprobación</b>	$2x + y = 11$	$x + 3y = 18$
	$2(3) + 5 \stackrel{?}{=} 11$	$3 + 3(5) \stackrel{?}{=} 18$
	$11 = 11$ Verdadero.	$18 = 18$ Verdadero.

Como el par ordenado  $(3, 5)$  satisface ambas ecuaciones, es la solución para el sistema de ecuaciones. Este sistema es consistente.

**EJEMPLO 4** Resuelva en forma gráfica el siguiente sistema de ecuaciones.

$$2x + y = 3 \quad 4x + 2y = 12$$

**Solución** Determine las intersecciones  $x$  y  $y$  de cada gráfica; luego dibuje las rectas.

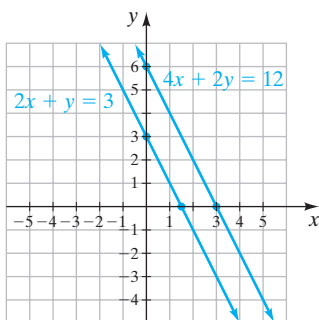


FIGURA 8.3

$2x + y = 3$	Par ordenado	$4x + 2y = 12$	Par ordenado
Sea $x = 0$ ; entonces $y = 3$	$(0, 3)$	Sea $x = 0$ ; entonces $y = 6$	$(0, 6)$
Sea $y = 0$ ; entonces $x = \frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2}, 0)$	Sea $y = 0$ ; entonces $x = 3$	$(3, 0)$

Las dos rectas (figura 8.3) parecen paralelas.

Para mostrar que las dos rectas en realidad son paralelas, escriba cada ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen.

$2x + y = 3$	$4x + 2y = 12$
$y = -2x + 3$	$2y = -4x + 12$
	$y = -2x + 6$

Ambas ecuaciones tienen la misma pendiente,  $-2$ , y diferentes intersecciones con  $y$ ; por tanto, las rectas deben ser paralelas. Como las rectas paralelas no se intersectan, este sistema de ecuaciones no tiene solución. Este sistema es inconsistente.

**EJEMPLO 5** Resuelva de forma gráfica el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}x - \frac{1}{2}y &= 2 \\ y &= 2x - 4\end{aligned}$$

**Solución** Determine las intersecciones con  $x$  y con  $y$  de cada gráfica; luego dibuje las rectas.

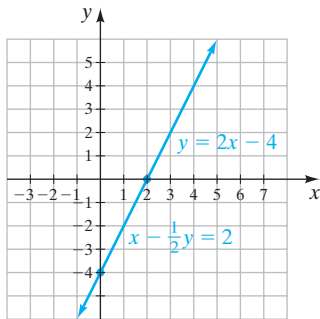


FIGURA 8.4

$x - \frac{1}{2}y = 2$	Par ordenado	$y = 2x - 4$	Par ordenado
------------------------	-----------------	--------------	-----------------

Sea  $x = 0$ ; entonces  $y = -4$  (0, -4)    Sea  $x = 0$ ; entonces  $y = -4$  (0, -4)  
 Sea  $y = 0$ ; entonces  $x = 2$  (2, 0)    Sea  $y = 0$ ; entonces  $x = 2$  (2, 0)

Puesto que las rectas tienen las mismas intersecciones con  $x$  y con  $y$ , ambas ecuaciones representan a la misma recta (figura 8.4). Cuando escribimos las ecuaciones en la forma pendiente-ordenada al origen, vemos claramente que son idénticas y el sistema es dependiente.

$$\begin{aligned}x - \frac{1}{2}y &= 2 & y &= 2x - 4 \\ 2\left(x - \frac{1}{2}y\right) &= 2(2) \\ 2x - y &= 4 \\ -y &= -2x + 4 \\ y &= 2x - 4\end{aligned}$$

La solución para este sistema de ecuaciones es el conjunto de todos los puntos en la recta.

**AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 53**

Cuando graficamos un sistema de ecuaciones, no siempre es fácil leer de la gráfica la intersección de las rectas. Por ejemplo, ¿podría estimar la solución del sistema de ecuaciones mostrado en la figura 8.5? Podría estimar que fuera  $(\frac{7}{10}, \frac{3}{2})$  cuando en realidad es  $(\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$ . La precisión de la respuesta dependerá de qué tan cuidadosamente trace las gráficas y de la escala utilizada. En la sección 8.2 presentamos un método algebraico que proporciona las soluciones exactas para sistemas de ecuaciones.

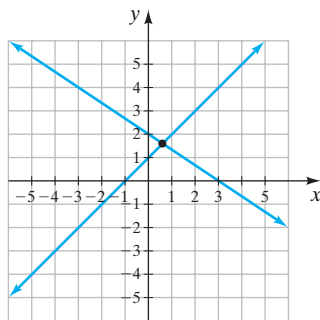


FIGURA 8.5



**Uso de la calculadora graficadora**

Una calculadora graficadora puede utilizarse para resolver o comprobar sistemas de ecuaciones. Para resolver de forma gráfica un sistema, grafique ambas ecuaciones, como explicamos en el capítulo 7. El punto o puntos de intersección de las gráficas es la solución para el sistema de ecuaciones.

El primer paso al resolver el sistema en una calculadora graficadora es despejar  $y$  en cada ecuación. Por ejemplo, considere el sistema de ecuaciones dado en el ejemplo 3.

Sistema de ecuaciones	$y$ despejada en la ecuación
$2x + y = 11$	$y = -2x + 11$
$x + 3y = 18$	$y = -\frac{1}{3}x + 6$

(continúa en la página siguiente)

$$\text{Sea } Y_1 = -2x + 11$$

$$Y_2 = -\frac{1}{3}x + 6$$

La figura 8.6 muestra la pantalla de una TI-83 Plus con estas dos ecuaciones graficadas.

Para determinar la intersección de las dos rectas, puede utilizar las teclas **TRACE** o **ZOOM** o la característica TABLE como explicamos anteriormente. La figura 8.7 muestra una tabla de valores para las ecuaciones  $y_1$  y  $y_2$ . Observe que cuando  $x = 3$ , tanto  $Y_1$  como  $Y_2$  tienen el mismo valor, 5. Por tanto, las gráficas se intersecan en  $(3, 5)$  y ésta es la solución.

Algunas calculadoras graficadoras tienen una característica que muestra la intersección de rectas presionando una secuencia de teclas. Por ejemplo, en la TI-83 Plus, si va a CALC (que utilizamos para calcular) presionando **2<sup>nd</sup>** **TRACE**, obtiene la pantalla mostrada en la figura 8.8. Ahora presione **5**, *intersecar*. Una vez que se ha seleccionado esta característica, la calculadora muestra la gráfica y la pregunta

FIRST CURVE? [¿Primera curva?]

En este momento, mueva el cursor a lo largo de la primera curva hasta que esté cerca del punto de intersección. Luego presione **ENTER**. Ahora la calculadora muestra

SECOND CURVE? [¿Segunda curva?]

y tiene el cursor en la segunda curva. Si el cursor no está cerca del punto de intersección, muévelo a lo largo de esta curva hasta que lo esté. Luego presione **ENTER**. Ahora la calculadora muestra

GUESS? [¿Estimación?]

Ahora presione **ENTER** y aparecerá el punto de intersección (vea la figura 8.9). El punto de intersección es  $(3, 5)$ .

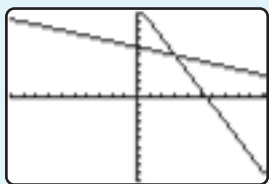


FIGURA 8.6

X	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>
0	11	6
1	9	5.3333
2	7	5
3	5	5
4	3	4.6667
5	1	4.3333
6	-1	4

FIGURA 8.7

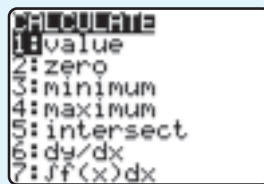


FIGURA 8.8

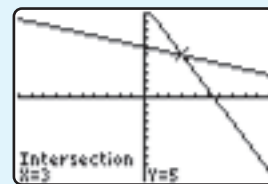


FIGURA 8.9

## Ejercicios

Utilice su calculadora graficadora para determinar la solución para cada sistema de ecuaciones. Las respuestas no enteras redondéelas al décimo más cercano.

- $x + 2y = -11$   
 $2x - y = -2$
- $x - 3y = -13$   
 $-2x - 2y = 2$
- $2x - y = 7.7$   
 $-x - 3y = 1.4$
- $3x + 2y = 7.8$   
 $-x + 3y = 15.0$

En el ejemplo 5 de la sección 3.3, resolvimos un problema que incluía sistemas de seguridad con una sola variable. En el siguiente ejemplo resolveremos ese mismo problema utilizando dos variables e ilustrando la solución en forma gráfica. Aunque en ocasiones podemos obtener una respuesta con mayor facilidad usando una sola variable, una gráfica de la situación puede ayudarle a visualizar mejor el panorama completo.

**EJEMPLO 6**

**Sistemas de seguridad** Meghan O'Donnell planea instalar un sistema de seguridad en su casa. Ella ha reducido sus opciones a dos vendedores: Moneywell y Doile. El sistema de Moneywell cuesta \$3,580 la instalación y el costo de monitoreo es de \$20 mensuales. El sistema equivalente de Doile sólo cuesta \$2,620, pero el costo de monitoreo es de \$32 mensuales.

- a) Suponiendo que los costos de monitoreo no cambian, ¿en cuántos meses el costo total de los sistemas Moneywell y Doile serán iguales?
- b) Si ambos vendedores garantizan que no subirán su costo mensual durante 10 años, y si Meghan planea utilizar el sistema durante 10 años, ¿cuál sistema sería menos costoso?

**Solución**



a) **Entender y traducir** Necesitamos determinar el número de meses después de los cuales ambos sistemas tendrán el mismo costo total.

Sea  $n$  = número de meses  
 $c$  = costo total del sistema de seguridad durante  $n$  meses.

Ahora, por medio de las variables  $c$  y  $n$ , podemos plantear una ecuación para representar el costo de cada sistema.

**Moneywell**

**Doile**

$$\text{Costo total} = \left( \begin{matrix} \text{costo} \\ \text{inicial} \end{matrix} \right) + \left( \begin{matrix} \text{gasto durante} \\ n \text{ meses} \end{matrix} \right) \quad \text{Costo total} = \left( \begin{matrix} \text{costo} \\ \text{inicial} \end{matrix} \right) + \left( \begin{matrix} \text{gasto durante} \\ n \text{ meses} \end{matrix} \right)$$

$$c = 3,580 + 20n \qquad c = 2,620 + 32n$$

Por tanto, nuestro sistema de ecuaciones es

$$c = 3,580 + 20n$$

$$c = 2,620 + 32n$$

**Calcular** Ahora grafique cada ecuación. Las siguientes son tablas de valores. La figura 8.10 muestra las gráficas de las ecuaciones

	$c = 3,580 + 20n$
Sea $n = 0$	$c = 3,580 + 20(0) = 3,580$
Sea $n = 100$	$c = 3,580 + 20(100) = 5,580$
Sea $n = 160$	$c = 3,580 + 20(160) = 6,780$

$n$	$c$
0	3,580
100	5,580
160	6,780

	$c = 2,620 + 32n$
Sea $n = 0$	$c = 2,620 + 32(0) = 2,620$
Sea $n = 100$	$c = 2,620 + 32(100) = 5,820$
Sea $n = 160$	$c = 2,620 + 32(160) = 7,740$

$n$	$c$
0	2,620
100	5,820
160	7,740

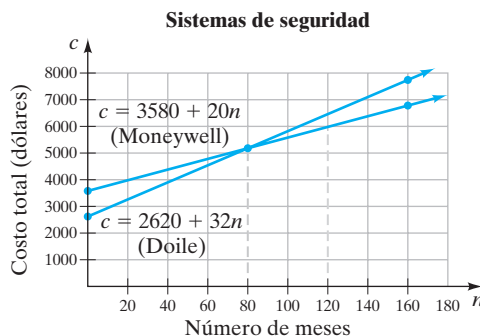



FIGURA 8.10

**Revisar y responder** La gráfica (figura 8.10) muestra que el costo total de los dos sistemas de seguridad sería el mismo en 80 meses. Ésta es la misma respuesta que obtuvimos en el ejemplo 5 de la sección 3.3.

**b)** Como 10 años son 120 meses, dibujamos una recta vertical punteada en  $n = 120$  meses, y vemos en dónde interseca a las dos rectas. Como en 120 meses la recta Doile está más arriba que la recta Moneywell, el costo para el sistema Doile durante 120 meses es mayor que el costo del sistema Moneywell. Por tanto, el costo del sistema Moneywell es menos costoso para 10 años. 

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 71**

En la sección 8.4 analizaremos más aplicaciones de sistemas de ecuaciones.

## SUGERENCIA

Podemos resolver una ecuación con una variable por medio de un sistema de ecuaciones lineales. Considere la ecuación  $3x - 1 = x + 1$ . Su solución es 1, como ilustramos a continuación.

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= x + 1 \\ 2x - 1 &= 1 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Igualemos  $y$  en cada lado de la ecuación  $3x - 1 = x + 1$ , para obtener el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} y &= 3x - 1 \\ y &= x + 1 \end{aligned}$$

Ilustramos la solución gráfica de este sistema de ecuaciones en la figura 8.11.

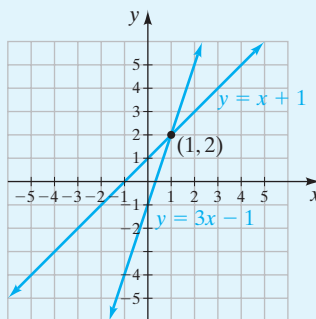


FIGURA 8.11

La solución para el sistema es  $(1, 2)$ . Observe que la coordenada  $x$  de la solución del sistema, 1, es la solución para el sistema lineal con una variable,  $3x - 1 = x + 1$ . Si tiene una ecuación difícil de resolver y tiene una calculadora graficadora, puede resolver la ecuación con ella. La coordenada  $x$  de la solución para el sistema será la solución de la ecuación lineal con una variable.

## Conjunto de ejercicios 8.1

### Ejercicios conceptuales

- ¿Qué representa la solución de un sistema de ecuaciones?
- ¿Qué es un sistema consistente de ecuaciones?
  - ¿Qué es un sistema inconsistente de ecuaciones?
- ¿Qué es un sistema dependiente de ecuaciones?
- Explique, sin graficar, cómo determinar si un sistema de ecuaciones lineales tiene exactamente una solución, ninguna o un número infinito de soluciones.

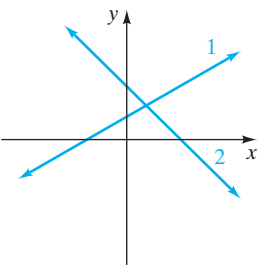
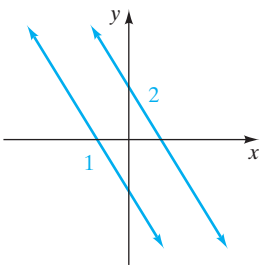
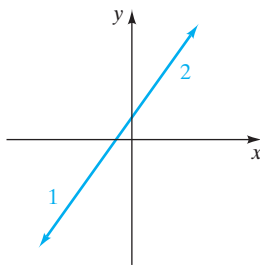
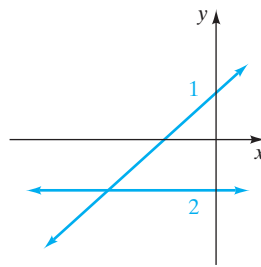
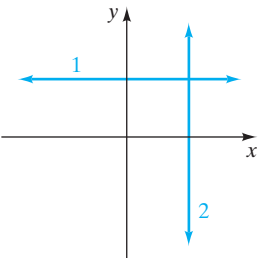
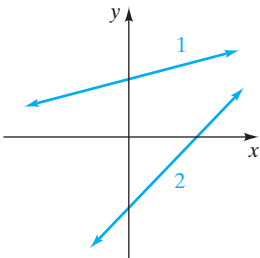
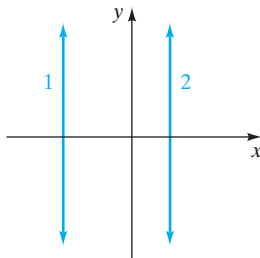
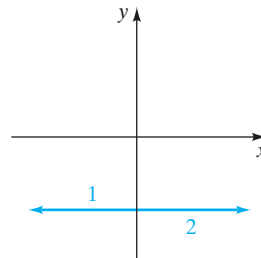
4. Cuando graficamos un sistema dependiente de dos ecuaciones lineales, ¿cuál será el resultado?
5. Explique por qué podría ser difícil obtener gráficamente una respuesta exacta para un sistema de ecuaciones.
6. Un sistema dependiente de ecuaciones, ¿es un sistema consistente o inconsistente? Explique.

### Práctica de habilidades

Determine cuál de los siguientes pares ordenados, si lo hay, satisface cada sistema de ecuaciones lineales.

- |  |  |
|--|--|
| <p>7. <math>y = 4x - 6</math><br/><math>y = -2x</math></p> <p>a) <math>(-1, -10)</math>    b) <math>(3, 0)</math>    c) <math>(1, -2)</math></p>                                     | <p>8. <math>y = -4x</math><br/><math>y = -2x + 8</math></p> <p>a) <math>(0, 0)</math>    b) <math>(-4, 16)</math>    c) <math>(2, -8)</math></p>   |
| <p>9. <math>y = 2x - 3</math><br/><math>y = x + 5</math></p> <p>a) <math>(8, 13)</math>    b) <math>(4, 5)</math>    c) <math>(4, 9)</math></p>                                      | <p>10. <math>x + 2y = 4</math><br/><math>y = 3x + 3</math></p> <p>a) <math>(0, 2)</math>    b) <math>(-2, 3)</math>    c) <math>(4, 15)</math></p>   |
| <p>11. <math>2x + y = 9</math><br/><math>5x + y = 10</math></p> <p>a) <math>(3, 3)</math>    b) <math>(2, 0)</math>    c) <math>(4, 1)</math></p>                                    | <p>12. <math>y = 2x + 4</math><br/><math>y = 2x - 1</math></p> <p>a) <math>(0, 4)</math>    b) <math>(3, 10)</math>    c) <math>(-2, 0)</math></p>   |
| <p>13. <math>2x - 3y = 6</math><br/><math>y = \frac{2}{3}x - 2</math></p> <p>a) <math>(3, 0)</math>    b) <math>(3, -2)</math>    c) <math>(6, 2)</math></p>                         | <p>14. <math>y = -x + 5</math><br/><math>2y = -2x + 10</math></p> <p>a) <math>(6, -1)</math>    b) <math>(0, 5)</math>    c) <math>(5, -1)</math></p>  |
| <p>15. <math>3x - 4y = 8</math><br/><math>2y = \frac{2}{3}x - 4</math></p> <p>a) <math>(0, -2)</math>    b) <math>(1, -6)</math>    c) <math>(-\frac{1}{3}, -\frac{9}{4})</math></p> | <p>16. <math>2x + 3y = 6</math><br/><math>-x + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}y</math></p> <p>a) <math>(\frac{1}{2}, \frac{5}{3})</math>    b) <math>(2, 1)</math>    c) <math>(\frac{9}{4}, \frac{1}{2})</math></p> |

Identifique cada sistema de ecuaciones lineales (las rectas se marcaron como 1 y 2) como consistente, inconsistente o dependiente. Establezca si el sistema tiene exactamente una solución, ninguna o un número infinito de soluciones.

- |  |  |   |  |
|--|--|---|--|
| <p>17. </p> | <p>18. </p> | <p>19. </p> | <p>20. </p> |
| <p>21. </p> | <p>22. </p> | <p>23. </p> | <p>24. </p> |



Expresa cada ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen. Sin graficar las ecuaciones, establezca si el sistema de ecuaciones tiene exactamente una solución, ninguna o un número infinito de soluciones.

25.  $y = 3x - 1$   
 $3y = 4x - 6$

26.  $x + y = 6$   
 $x - y = 6$

27.  $2y = 3x + 3$   
 $y = \frac{3}{2}x - 2$

28.  $y = \frac{1}{2}x + 4$   
 $2y = x + 8$

29.  $2x = y - 6$   
 $4x = 4y + 5$

30.  $x + 2y = 6$   
 $2x + y = 4$

31.  $3x + 5y = -7$   
 $-3x - 5y = -7$

32.  $x - y = 2$   
 $2x - 2y = -2$

33.  $x = 3y + 4$   
 $2x - 6y = 8$

34.  $x - y = 3$   
 $\frac{1}{2}x - 2y = -6$

35.  $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$   
 $3x - 2y = -\frac{1}{2}$

36.  $2y = \frac{7}{3}x - 9$   
 $4y = 6x + 9$

Determine, de forma gráfica, la solución para cada sistema de ecuaciones. Si el sistema es dependiente o inconsistente, indíquelo.

37.  $y = x + 3$   
 $y = -x + 3$

38.  $y = 2x + 4$   
 $y = -3x - 6$

39.  $y = 3x - 6$   
 $y = -x + 6$

40.  $y = 2x - 1$   
 $2y = 4x + 6$

41.  $2x = 4$   
 $y = -3$

42.  $x + 2y = 6$   
 $2y = 2x - 6$

43.  $y = -x + 5$   
 $-x + y = 1$

44.  $2x + y = 6$   
 $2x - y = -2$

45.  $y = -\frac{1}{2}x + 4$   
 $x + 2y = 6$

46.  $x + 2y = -4$   
 $2x - y = -3$

47.  $x + 2y = 8$   
 $5x + 2y = 0$

48.  $4x - y = 5$   
 $2y = 8x - 10$

49.  $2x + 3y = 6$   
 $4x = -6y + 12$

50.  $2x + 3y - 6 = 0$   
 $2x - 2y = 6$

51.  $y = 3$   
 $y = 2x - 3$

52.  $x = 4$   
 $y = 2x - 6$

53.  $x - 2y = 4$   
 $2x - 4y = 8$

54.  $3x + y = -6$   
 $2x = 1 + y$

55.  $2x + y = -2$   
 $6x + 3y = 6$

56.  $y = 2x - 3$   
 $y = -x$

57.  $4x - 3y = 6$   
 $2x + 4y = 14$

58.  $2x + 6y = 6$   
 $y = -\frac{1}{3}x + 1$

59.  $2x - 3y = 0$   
 $x + 2y = 0$

60.  $4x = 4y - 12$   
 $-8x + 8y = 8$

## Solución de problemas

61. Dado el sistema de ecuaciones  $6x - 4y = 12$  y  $12y = 18x - 24$ , determine, sin graficar, si las gráficas de las dos ecuaciones serán rectas paralelas. Explique cómo determinó su respuesta.
62. Dado el sistema de ecuaciones  $4x - 8y = 12$  y  $2x - 8 = 4y$ , determine, sin graficar, si las gráficas de las dos ecuaciones serán rectas paralelas. Explique cómo determinó su respuesta.
63. Si un sistema de ecuaciones lineales tiene soluciones  $(4, 3)$  y  $(6, 5)$ , ¿cuántas soluciones tendrá el sistema? Explique.
64. Si la pendiente de una recta en un sistema de ecuaciones lineales es 2 y la pendiente de la segunda recta en el sistema es 3, ¿cuántas soluciones tiene el sistema? Explique.
65. Si dos rectas distintas son paralelas, ¿cuántas soluciones tiene el sistema? Explique.

66. Si dos rectas diferentes en un sistema lineal de ecuaciones pasan por el origen, ¿el punto  $(0, 0)$  es la solución del sistema? Explique.
67. Considere el sistema  $x = 5$  y  $y = 3$ . ¿Cuántas soluciones tiene el sistema?, ¿cuál es la solución?
68. Un sistema de ecuaciones lineales tiene a  $(2, 1)$  como su solución. Si una recta en el sistema es vertical y la otra horizontal, determine las ecuaciones del sistema.

En los ejercicios 69 a 72, determine la solución graficando el sistema de ecuaciones.

69. **Reparación de un horno** El horno de Edith Hall tiene 10 años y tiene un problema. La persona que lo reparará le indica a Edith que la reparación le costará \$600. Ella puede comprar un horno nuevo y más eficiente por \$1,800. Su horno actual promedia alrededor de \$650 anuales en costo de energía y el horno nuevo promediaría alrededor de \$450 al año.

Podemos representar el costo total,  $c$ , de reparación o reemplazo, más el costo en energía durante  $n$  años por medio del sistema de ecuaciones siguiente.

$$\begin{array}{ll} \text{(reparación)} & c = 600 + 650n \\ \text{(reemplazo)} & c = 1800 + 450n \end{array}$$

Determine el número de años, a partir de ahora, para que el costo de reparación sea igual al costo total de reemplazo.

70. **Sistemas de seguridad** Juan Vargas está considerando los dos sistemas de seguridad analizados en el ejemplo 6. Si el sistema Moneywell cuesta \$4,400 más \$15 al mes y el sistema Doile cuesta \$3,400 más \$25 al mes, ¿al cabo de cuántos meses el costo total de ambos sistemas será el mismo?
71. **Paseo en bote** Rudy tiene visitantes en su casa y quiere llevarlos a un paseo en embarcación por un día. Hay dos agencias de renta de embarcaciones en el lago. El alquiler de botes de Bob cobra \$25 por hora, lo cual incluye toda la gasolina que se utilice. La renta de Hopper cobra \$22 por hora más una tarifa fija de \$18 por la gasolina utilizada. Las ecuaciones que representan el costo total,  $c$ , son

las siguientes. En las ecuaciones,  $h$  representa el número de horas que las embarcaciones son alquiladas.

$$\begin{array}{l} c = 25h \\ c = 22h + 18 \end{array}$$

Determine el número de horas que las embarcaciones deben rentarse para que el costo total sea el mismo.



72. **Diseño de jardines** El servicio de jardinería Evergreen cobra una cuota por consulta de \$200 más \$60 por hora de mano de obra. El servicio de jardinería Out of Sight cobra una cuota por consulta de \$300 más \$40 por hora de mano de obra. Podemos representar esta situación con el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{l} c = 200 + 60h \\ c = 300 + 40h \end{array}$$

donde  $c$  es el costo total y  $h$  el número de horas de mano de obra. Determine el número de horas de mano de obra para que los dos servicios tengan el mismo costo total.

## Actividad en grupo

En grupo, analicen y respondan los ejercicios 73 a 78. Supongan que graficamos, en los mismos ejes, un sistema de tres ecuaciones lineales con dos variables. Determinen el número máximo de puntos donde dos o más de las rectas pueden intersectarse, si:

73. las tres rectas tienen la misma pendiente, pero diferentes intersecciones con  $y$ .
74. las tres rectas tienen la misma pendiente y la misma intersección con  $y$ .
75. dos rectas tienen la misma pendiente pero diferentes intersecciones con  $y$ , y la tercera recta tiene una pendiente diferente.
76. las tres rectas tienen pendientes diferentes pero la misma intersección con  $y$ .
77. las tres rectas tienen diferentes pendientes pero dos tienen la misma intersección con  $y$ .
78. las tres rectas tienen diferentes pendientes y diferentes intersecciones con  $y$ .

## Ejercicios de repaso acumulativo

[2.1] 79. Simplifique  $3x - (x - 6) + 4(3 - x)$ .

[2.5] 80. Resuelva la ecuación  $2(x + 3) - x = 5x + 2$ .

[6.1] 81. Simplifique  $\frac{x^2 - 9x + 14}{2 - x}$ .

[6.6] 82. Resuelva la ecuación  $\frac{4}{b} + 2b = \frac{38}{3}$ .

[7.2] 83. a) Determine las intersecciones con  $x$  y con  $y$  de  $2x + 3y = 12$ .

b) Utilice las intersecciones para graficar la ecuación.

## 8.2 SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES POR EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN



## 1 Resolver sistemas de ecuaciones por sustitución.

Como expusimos en la sección 8.1, una solución gráfica para un sistema de ecuaciones puede ser imprecisa ya que debemos estimar las coordenadas del punto de intersección. Cuando es necesaria una solución exacta, el sistema debe resolverse de forma algebraica, ya sea por sustitución o por suma y resta de ecuaciones.

## 1 Resolver sistemas de ecuaciones por sustitución

Ilustramos el procedimiento para resolver un sistema de ecuaciones por **sustitución** en el ejemplo 1 y el procedimiento por suma y resta en la sección 8.3. Sin importar cuál de las dos técnicas algebraicas utilicemos para resolver un sistema de ecuaciones, nuestro objetivo inmediato es el mismo, esto es, *obtener una ecuación que tenga una sola incógnita*.

**EJEMPLO 1** Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones por sustitución.

$$x + 3y = 18$$

$$2x + y = 11$$

**Solución**

Inicie despejando una de las variables de cualquiera de las ecuaciones. Puede despejar cualquiera de las variables; sin embargo, si despejamos una variable con coeficiente numérico de 1 o  $-1$ , podríamos evitar trabajar con fracciones. En este sistema el término  $x$  en  $x + 3y = 18$  y el término  $y$  en  $2x + y = 11$ , tienen coeficientes numéricos de 1.

Despejemos  $x$  en  $x + 3y = 18$ .

$$x + 3y = 18$$

$$x = -3y + 18$$

Ahora, sustituya  $-3y + 18$  por  $x$  en la *otra ecuación*,  $2x + y = 11$ , y despeje la otra variable,  $y$ .

$$2x + y = 11$$

$$2(-3y + 18) + y = 11$$

$$-6y + 36 + y = 11$$

$$-5y + 36 = 11$$

$$-5y = -25$$

$$y = 5$$

*Sustitución, ahora ésta es una ecuación con una sola variable.*


Por último, sustituya  $y = 5$  en la ecuación en que está despejada  $x$  y determine el valor de  $x$ .

$$x = -3y + 18$$

$$x = -3(5) + 18$$

$$x = -15 + 18$$

$$x = 3$$

Una comprobación utilizando  $x = 3$  y  $y = 5$  en ambas ecuaciones mostrará que la solución es el par ordenado  $(3, 5)$ . 

El sistema de ecuaciones en el ejemplo 1 también podría resolverse por sustitución, despejando  $y$  en la ecuación  $2x + y = 11$ . Hágalo ahora. Debe obtener la misma respuesta.

Observe que la solución en el ejemplo 1 es idéntica a la solución gráfica que obtuvimos en el ejemplo 3 de la sección 8.1. Ahora resumimos el procedimiento para resolver un sistema de ecuaciones por sustitución.

### Para resolver un sistema de ecuaciones por sustitución

1. Despeje una variable en cualquier ecuación. (Si es posible, despeje una variable con un coeficiente numérico de 1 o  $-1$  para evitar trabajar con fracciones.)
2. Sustituya en la otra ecuación la expresión que encontró para la primera variable en el paso 1.
3. Resuelva la ecuación determinada en el paso 2 para encontrar el valor de la segunda variable.
4. Sustituya el valor de la segunda variable encontrado en el paso 3 en la ecuación que obtuvo en el paso 1 para determinar el valor de la primera variable.
5. Por sustitución, compruebe ambos valores en las ecuaciones originales.

**EJEMPLO 2** Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones por sustitución.


$$\begin{aligned}2x + y &= 3 \\4x + 2y &= 12\end{aligned}$$

**Solución** Despeje  $y$  en  $2x + y = 3$ .

$$\begin{aligned}2x + y &= 3 \\y &= -2x + 3\end{aligned}$$

Ahora sustituya la expresión  $-2x + 3$  por  $y$  en la *otra ecuación*,  $4x + 2y = 12$ , y despeje  $x$ .

$$\begin{aligned}4x + 2y &= 12 \\4x + 2(\overbrace{-2x + 3}) &= 12 && \text{Sustitución, ahora ésta es} \\4x - 4x + 6 &= 12 && \text{una ecuación con una sola} \\6 &= 12 && \text{variable, } x. \\ &&& \text{Falso.}\end{aligned}$$

Como el enunciado  $6 = 12$  es falso, el sistema no tiene solución. Por tanto, las rectas de las ecuaciones serán paralelas y el sistema es inconsistente ya que no tiene solución. 

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 21**

Observe que la solución en el ejemplo 2 es idéntica a la solución gráfica que obtuvimos en el ejemplo 4 de la sección 8.1. La figura 8.3 en la página 512 muestra las rectas paralelas.


**EJEMPLO 3** Resuelva, por sustitución, el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}x - \frac{1}{2}y &= 2 \\y &= 2x - 4\end{aligned}$$

**Solución** La ecuación  $y = 2x - 4$  ya tiene despejada a  $y$ . Sustituamos  $2x - 4$  por  $y$  en la otra ecuación  $x - \frac{1}{2}y = 2$ , y despejemos  $x$ .

$$\begin{aligned}x - \frac{1}{2}y &= 2 \\x - \frac{1}{2}(\overbrace{2x - 4}) &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x - x + 2 &= 2 \\2 &= 2 \quad \text{Verdadero.}\end{aligned}$$

Observe que la suma de términos con  $x$  es 0, y cuando se simplifican,  $x$  ya no es parte de la ecuación. Como el enunciado  $2 = 2$  es verdadero, este sistema tiene un número infinito de soluciones. Por tanto, las gráficas de las ecuaciones representan la misma recta y el sistema es dependiente. 

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 13**

Observe que la solución en el ejemplo 3 es idéntica a la solución que obtuvimos de forma gráfica en el ejemplo 5 de la sección 8.1. La figura 8.4 en la página 513 muestra que las gráficas de ambas ecuaciones son la misma recta.

**EJEMPLO 4** Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones por sustitución.

$$\begin{aligned}3x + 6y &= 9 \\2x - 3y &= 6\end{aligned}$$

**Solución** Ninguna de las variables en las ecuaciones tiene coeficiente numérico de 1. Sin embargo, como los números 3, 6 y 9 son divisibles entre 3, si despejamos  $x$  en la primera ecuación, evitaremos trabajar con fracciones.

$$\begin{aligned}3x + 6y &= 9 \\3x &= -6y + 9 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{-6y + 9}{3} \\ x &= -\frac{6}{3}y + \frac{9}{3} \\ x &= -2y + 3\end{aligned}$$

Ahora sustituyamos  $-2y + 3$  por  $x$  en la otra ecuación,  $2x - 3y = 6$ , y despejemos la variable restante,  $y$ .

$$\begin{aligned}2x - 3y &= 6 \\2(-2y + 3) - 3y &= 6 \\-4y + 6 - 3y &= 6 \\-7y + 6 &= 6 \\-7y &= 0 \\y &= 0\end{aligned}$$

Por último, sustituyendo  $y = 0$  en la ecuación en que despejamos  $x$ , resolvamos para  $x$ .

$$\begin{aligned}x &= -2y + 3 \\x &= -2(0) + 3 = 0 + 3 = 3\end{aligned}$$

La solución es  $(3, 0)$ . 

**SUGERENCIA**

Recuerde que una solución para un sistema de ecuaciones lineales debe tener los valores para  $x$  y para  $y$ . No resuelva el sistema para una de las variables y olvide resolver para la otra. Escriba la solución como un par ordenado.

**EJEMPLO 5** Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones por sustitución.

$$\begin{aligned}4x + 4y &= 3 \\2x &= 2y + 5\end{aligned}$$

**Solución** Elegiremos despejar  $x$  en la segunda ecuación.

$$2x = 2y + 5$$

$$x = \frac{2y + 5}{2}$$

$$x = y + \frac{5}{2}$$

Ahora sustituimos  $y + \frac{5}{2}$  por  $x$  en la otra ecuación.

$$4x + 4y = 3$$

$$4\left(y + \frac{5}{2}\right) + 4y = 3$$

$$4y + 10 + 4y = 3$$

$$8y + 10 = 3$$

$$8y = -7$$

$$y = -\frac{7}{8}$$

Por último, determinemos el valor de  $x$ .

$$x = y + \frac{5}{2}$$

$$x = -\frac{7}{8} + \frac{5}{2} = -\frac{7}{8} + \frac{20}{8} = \frac{13}{8}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 19

La solución es el par ordenado  $\left(\frac{13}{8}, -\frac{7}{8}\right)$ .



### EJEMPLO 6

**Viaje en mula** En 2002 y 2003 un total de 2,462 personas hicieron un recorrido en mula al fondo del Gran Cañón. Si en el viaje de 2003 hubo 372 personas más que en 2002, determine el número de personas que hizo el recorrido en mula en 2002 y en 2003.

### Solución

**Entender y traducir** Nos han proporcionado información suficiente para obtener dos ecuaciones para nuestro sistema de ecuaciones. Sea  $x =$  al número de personas que hicieron el recorrido en mula en 2002 y  $y =$  al número de personas que lo hicieron en 2003. Ya que el total de estos dos años fue 2,462, una ecuación es  $x + y = 2462$ . Como el número que hizo el recorrido en 2003 fue 372 más que el número que lo hizo en 2002, podemos sumar 372 al número que hizo el recorrido en 2002 para obtener la segunda ecuación,  $y = x + 372$ .

$$\text{sistema de ecuaciones } \begin{cases} x + y = 2462 \\ y = x + 372 \end{cases}$$

**Calcular** Como la segunda ecuación,  $y = x + 372$ , ya tiene  $y$  despejada, sustituiremos  $x + 372$  por  $y$  en la primera ecuación.

$$x + y = 2462$$

$$x + \overbrace{x + 372} = 2462$$

$$2x + 372 = 2462$$

$$2x = 2090$$

$$x = 1045$$

**Revisar y responder** El número de personas que hicieron el viaje en 2002 fue 1045. Por tanto, el número de personas que hicieron el viaje en 2003 es  $x + 372 = 1045 + 372 = 1417$ . Observe que  $1045 + 1417 = 2462$ .



## Conjunto de ejercicios 8.2

### Ejercicios conceptuales

1. Al resolver por sustitución el sistema de ecuaciones

$$3x + 6y = 12$$

$$4x + 3y = 8$$

¿qué variable de qué ecuación elegiría para despejar, a fin de hacer más fácil la resolución? Explique su respuesta.

2. Al resolver por sustitución el sistema de ecuaciones

$$4x + 2y = 8$$

$$3x - 9y = 8$$

¿qué variable de qué ecuación elegiría para despejar, a fin de hacer más fácil la resolución? Explique su respuesta.

3. Al resolver un sistema de ecuaciones lineales por sustitución, ¿cómo sabe si el sistema es inconsistente?

4. Al resolver un sistema de ecuaciones lineales por sustitución, ¿cómo sabe si el sistema es dependiente?

### Práctica de habilidades

Determine por sustitución la solución para cada sistema de ecuaciones.

5.  $x + 2y = 6$   
 $2x - 3y = 5$

6.  $y = x + 3$   
 $y = -x - 5$

7.  $x + y = -2$   
 $x - y = 0$

8.  $x + 2y = 6$   
 $4y = 12 - 2x$

9.  $3x + y = 3$   
 $3x + y + 5 = 0$

10.  $y = 2x + 4$   
 $y = -2$

11.  $x = 3$   
 $x + y + 5 = 0$

12.  $y = 2x - 13$   
 $-4x - 7 = 9y$

13.  $x - \frac{1}{2}y = 6$   
 $y = 2x - 12$

14.  $2x + 3y = 7$   
 $6x - y = 1$

15.  $2x + y = 11$   
 $y = 4x - 7$

16.  $y = -2x + 5$   
 $x + 3y = 0$

17.  $y = \frac{1}{3}x - 2$   
 $x - 3y = 6$

18.  $x = y + 1$   
 $4x + 2y = -14$

19.  $2x + 3y = 7$   
 $6x - 2y = 10$

20.  $3x - 3y = 4$   
 $2x + 3y = 5$

21.  $3x - y = 14$   
 $6x - 2y = 10$

22.  $5x - 2y = -7$   
 $5 = y - 3x$

23.  $4x - 5y = -4$   
 $3x = 2y - 3$

24.  $3x + 4y = 10$   
 $4x + 5y = 14$

25.  $4x + 5y = -6$   
 $x - \frac{5}{3}y = -2$

26.  $\frac{1}{2}x + y = 4$   
 $3x + \frac{1}{4}y = 6$

### Solución de problemas

27. **Enteros positivos** La suma de dos enteros positivos es 79. Determine los enteros si un número es 7 unidades mayor que el otro.

28. **Enteros positivos** La diferencia de dos enteros positivos es 44. Determine los enteros si el número mayor es el doble que el número menor.

29. **Rectángulo** El perímetro de un rectángulo es 40 pies. Determine las dimensiones del rectángulo si el largo es 4 pies mayor que el ancho.

30. **Rectángulo** El perímetro de un rectángulo es 50 pies. Determine las dimensiones del rectángulo si el largo es cuatro veces su ancho.

31. **Caballo de madera** Para comprar una estatua de un caballo de madera, Billy y Jean reunieron su dinero. Juntos tienen \$726. Si Jean tiene \$134 más que Bill, ¿cuánto dinero tenía cada uno?
32. **Asistencia a un rodeo** En un rodeo el total de asistentes que pagó su boleto fue 2,500. Si el número de personas que recibieron un descuento en el pago de la entrada fue 622 menos que el número que no recibió descuento, determine el número de asistentes que pagaron el costo completo de la entrada.
33. **Resolución legal** Después de una resolución legal, la parte de la indemnización del cliente fue el triple de la parte del abogado. Si la indemnización total fue de \$20,000, ¿cuánto obtuvo el cliente?
34. **Mezcla de nueces** Un tendero elaboró un barril conteniendo una mezcla de nueces, que consiste en anacardos y almendras. El barril contenía 62 libras de nueces. Hay el doble de libras de anacardos que de almendras. Determine el número total de libras de anacardos y de almendras en el barril.
35. **Refinanciamiento** Dona Boccio está considerando refinanciar el pago de su casa. El costo de refinanciamiento es un pago único de \$1,280. Con la reducción de la tasa de la hipoteca, su pago del interés mensual y del capital sería \$794. El costo total,  $c$ , durante  $n$  meses podría representarse por  $c = 1280 + 794n$ . Con la tasa actual los pagos mensuales de su hipoteca son \$874 y el costo total durante  $n$  meses puede representarse por  $c = 874n$ .
- Determine el número de meses para los que ambos planes tendrían el mismo costo total.
  - Si Dona planea permanecer en su casa durante 12 años, ¿debe refinanciar?
36. **Temperaturas** En Seattle la temperatura es  $82^\circ\text{F}$ , pero está descendiendo  $2$  grados por hora. La temperatura,  $T$ , en el tiempo  $t$ , en horas, está representada por  $T = 82 - 2t$ . En Spokane la temperatura es  $64^\circ\text{F}$ , pero sube  $2.5$  grados por hora. La temperatura,  $T$ , puede representarse por  $T = 64 + 2.5t$ .

- Si la temperatura continúa descendiendo y subiendo a la misma tasa en estas ciudades, ¿cuánto tiempo pasará antes de que ambas ciudades tengan la misma temperatura?
- Cuando ambas ciudades tengan la misma temperatura, ¿cuál será dicha temperatura?



Seattle, Washington

37. **Recorrido en automóvil** El automóvil de Jean Woody tiene un registro de 80 millas en una autopista, 15 millas atrás está el automóvil de Roberta Kieronksi. El automóvil de Jean viaja a 60 millas por hora. El registro de millas que tendrá en  $t$  horas puede determinarse por medio de la ecuación  $m = 80 + 60t$ . El automóvil de Roberta viaja a 72 millas por hora. El registro de millas que tendrá al cabo de  $t$  horas puede encontrarse por medio de la ecuación  $m = 65 + 72t$ .
- Determine el tiempo que tardará Roberta en alcanzar al automóvil de Jean.
  - Cuando se alcancen, ¿cuál será el registro en el odómetro?
38. **Almacén de computadoras** El salario actual de Bill Jordan consiste en un pago fijo semanal de \$300 más un bono de \$20 por cada sistema de cómputo que venda. Su salario semanal puede representarse por  $s = 300 + 20n$ , donde  $n$  es el número de sistemas de cómputo que vende. Él está considerando otro puesto donde el salario semanal sería de \$400 más un bono de \$10 por cada sistema de cómputo que venda. El salario semanal del otro puesto puede representarse por  $s = 400 + 10n$ . ¿Cuántos sistemas de cómputo necesitaría vender Bill en una semana para que su salario fuese igual en ambas empresas?

## Problemas de reto

Responda los incisos a) a d) como prefiera.

39. **Transferencia de calor** En un laboratorio, durante un experimento sobre transferencia de calor, una gran bola metálica se calentó a una temperatura de  $180^\circ\text{F}$ . Luego, esta bola metálica se colocó en un galón de aceite a una temperatura de  $20^\circ\text{F}$ . Suponga que cuando la bola se colocó en el aceite pierde temperatura a la tasa de  $10^\circ$  por minuto, mientras que la temperatura del aceite se eleva a una tasa de  $6^\circ\text{F}$  por minuto.
- Plantee una ecuación que pueda utilizarse para determinar la temperatura de la bola  $t$  minutos después que se coloca en el aceite.
  - Plantee una ecuación que pueda utilizarse para determinar la temperatura del aceite  $t$  minutos después que la bola es colocada en él.
  - Determine cuánto tardarán la bola y el aceite en alcanzar la misma temperatura.
  - Cuando estén a la misma temperatura el aceite y la bola, ¿cuál será la temperatura?



## Actividad en grupo

En grupo, analicen y resuelvan el ejercicio 40.

40. En álgebra intermedia podrán resolver sistemas que tienen tres ecuaciones con tres variables. En grupo, resuelvan el sistema de ecuaciones de la derecha; sus respuestas serán en forma de una **terna ordenada**  $(x, y, z)$ .

$$\begin{aligned}x &= 4 \\2x - y &= 6 \\-x + y + z &= -3\end{aligned}$$

## Ejercicios de repaso acumulativo

- [3.1] 41. **Sauce** El diámetro de un sauce crece casi 3.5 pulgadas por año. ¿Cuál será la edad aproximada de un sauce cuyo diámetro es de 25 pulgadas?

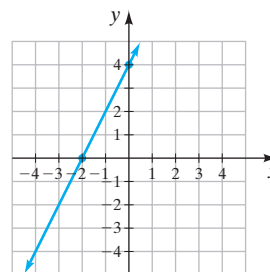


- [4.5] 42. Multiplique  $(6x + 7)(3x - 2)$ .

- [7.2] 43. Por medio de las intersecciones con los ejes  $x$  y  $y$ , grafique  $4x - 8y = 16$ .

- [7.4] 44. Determine la pendiente y la intersección con  $y$  de la gráfica de la ecuación  $3x - 5y = 8$ .

45. Determine la ecuación de la siguiente recta.



## 8.3 SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES POR EL MÉTODO DE SUMA Y RESTA (REDUCCIÓN O ELIMINACIÓN)



- 1 Solución de sistemas de ecuaciones por suma y resta (reducción o eliminación).

### 1 Solución de sistemas de ecuaciones por suma y resta (reducción o eliminación)

Un tercer método, y con frecuencia el más sencillo, para resolver un sistema de ecuaciones es el **método de suma o resta (reducción o eliminación)**. *El objetivo de este proceso es obtener dos ecuaciones cuya suma sea una ecuación con una sola variable.* Siempre tenga en mente que nuestro objetivo inmediato es obtener una ecuación con una sola incógnita.

Utilizamos el hecho de que si  $a = b$  y  $c = d$ , entonces  $a + c = b + d$ . Suponga que tenemos las dos ecuaciones siguientes.

$$\begin{aligned}x - 2y &= 6 \\3x + 2y &= 2\end{aligned}$$

Si sumamos el lado izquierdo de las dos ecuaciones obtenemos  $4x$ , ya que  $-2y + 2y = 0$ . Si sumamos el lado derecho de las ecuaciones obtenemos  $6 + 2 = 8$ . Por tanto, la suma de las ecuaciones es  $4x = 8$ , que es una ecuación con una sola variable.

$$\begin{array}{r} x - 2y = 6 \\ 3x + 2y = 2 \\ \hline 4x \quad = 8 \end{array}$$

De la ecuación  $4x = 8$ , determinamos que  $x = 2$ .

$$\begin{aligned} 4x &= 8 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Ahora podemos sustituir 2 por  $x$  en cualquiera de las ecuaciones originales para determinar  $y$ . Sustituiremos 2 por  $x$  en  $x - 2y = 6$ .

$$\begin{aligned} x - 2y &= 6 \\ 2 - 2y &= 6 \\ -2y &= 4 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

La solución para el sistema es  $(2, -2)$ . Este par ordenado satisfará ambas ecuaciones. Ahora compruebe esta solución. Resolvamos algunos ejemplos.

**EJEMPLO 1** Resuelva, por medio del método de suma, el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x + y &= 6 \\ 2x - y &= 3 \end{aligned}$$

**Solución** Observe que una ecuación tiene  $+y$  y la otra  $-y$ . Sumando las ecuaciones, podemos eliminar la variable  $y$  y obtener una ecuación con sólo una variable,  $x$ . Al sumar,  $+y$  y  $-y$  la suma da 0, y se elimina la variable  $y$ .

$$\begin{array}{r} x + y = 6 \\ 2x - y = 3 \\ \hline 3x \quad = 9 \end{array}$$

Ahora resolvemos  $x$  para la variable que queda.

$$\begin{aligned} \frac{3x}{3} &= \frac{9}{3} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Por último, resolvemos para  $y$ , sustituyendo  $x = 3$  en cualquiera de las ecuaciones originales.

$$\begin{aligned} x + y &= 6 \\ 3 + y &= 6 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

La solución es  $(3, 3)$ .

Comprobamos la respuesta en *ambas* ecuaciones.

<b>Comprobación</b>	$x + y = 6$	$2x - y = 3$
	$3 + 3 \stackrel{?}{=} 6$	$2(3) - 3 \stackrel{?}{=} 3$
	$6 = 6$ Verdadero.	$6 - 3 \stackrel{?}{=} 3$
		$3 = 3$ Verdadero.

A continuación resumimos el procedimiento.

**Para resolver por el método de suma o resta (reducción o eliminación) un sistema de ecuaciones**

1. Si es necesario, reescriba cada ecuación de modo que los términos que tengan variables aparezcan en el lado izquierdo del signo de igual (primer miembro de la ecuación) y las constantes, lado derecho del signo de igual (segundo miembro de la ecuación).
2. Si es necesario, multiplique una o ambas ecuaciones por una constante(s) de modo que cuando se sumen obtenga sólo una variable.
3. Sume las ecuaciones. Esto resultará en una sola ecuación con sólo una variable.
4. Resuelva para la variable en la ecuación del paso 3.
5. a) Sustituya el valor encontrado en el paso 4 en cualquiera de las ecuaciones originales. Resuelva esa ecuación para determinar el valor de la variable restante.  
O bien  
b) Repita los pasos 2 a 4 para eliminar la otra variable.
6. Compruebe, en todas las ecuaciones originales, los valores obtenidos.

En el paso 5 damos dos métodos para determinar la segunda variable, después de que hemos encontrado la primera. Por lo general utilizamos el método a) si el valor obtenido para la primera variable es un entero. Con frecuencia, se prefiere el método b) si el valor obtenido para la primera variable es una fracción.

En el paso 2 podría ser necesario multiplicar una o ambas ecuaciones por una constante. Por ejemplo, suponga que tenemos el sistema de ecuaciones, marcado (ec. 1) y (ec. 2) como mostramos a continuación.

$$3x + 2y = 6 \quad (\text{ec. 1})$$

$$x - y = 8 \quad (\text{ec. 2})$$

Si queremos multiplicar la ecuación 2 por  $-3$ , lo indicaremos como sigue.

$$\begin{array}{r} 3x + 2y = 6 \\ -3(x - y) = -3(8) \quad (\text{ec. 2}) \text{ Multiplicada por } -3 \end{array} \quad \text{o bien} \quad \begin{array}{r} 3x + 2y = 6 \\ -3x + 3y = 24 \end{array}$$

Después de realizar la multiplicación por lo común trabajaremos con el sistema de ecuaciones revisado, como el sistema dado a la derecha.

**EJEMPLO 2** Resuelva por el método de suma y resta el sistema de ecuaciones siguiente.

$$x + 3y = 13 \quad (\text{ec. 1})$$

$$x + 4y = 18 \quad (\text{ec. 2})$$

**Solución** El objetivo del proceso de suma es obtener dos ecuaciones cuya suma sea una ecuación con una sola variable. No eliminamos ninguna de las variables si sumamos estas dos ecuaciones. Sin embargo, si multiplicamos cualquiera de ellas por  $-1$  y luego sumamos, los términos con  $x$  sumarán 0, y habremos alcanzado nuestro objetivo. Multiplicaremos (ec. 1) por  $-1$ .

$$\begin{array}{r} -1(x + 3y) = -1 \cdot 13 \quad (\text{ec. 1}) \text{ Multiplicada por } -1 \\ x + 4y = 18 \quad (\text{ec. 2}) \end{array} \quad \text{o bien} \quad \begin{array}{r} -x - 3y = -13 \\ x + 4y = 18 \end{array}$$

Recuerde que ambos lados de la ecuación deben multiplicarse por  $-1$ . Este proceso cambia el signo de cada término en la ecuación que es multiplicada sin cambiar la solución para el sistema de ecuaciones. Ahora sumamos las dos ecuaciones de la derecha.

$$\begin{array}{r} -x - 3y = -13 \\ x + 4y = 18 \\ \hline y = 5 \end{array}$$

Resolvemos para  $x$  en cualquiera de las ecuaciones originales.

$$\begin{array}{r} x + 3y = 13 \\ x + 3(5) = 13 \\ x + 15 = 13 \\ x = -2. \end{array}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 13

Una comprobación mostrará que la solución es  $(-2, 5)$ . 

### EJEMPLO 3

Resuelva, mediante el método de suma y resta, el siguientes sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{r} 2x + y = 11 \quad (\text{ec. 1}) \\ x + 3y = 18 \quad (\text{ec. 2}) \end{array}$$

### Solución

Para eliminar la variable  $x$ , multiplique (ec. 2) por  $-2$  y sume las dos ecuaciones

$$\begin{array}{r} 2x + y = 11 \quad (\text{ec. 1}) \\ -2(x + 3y) = -2 \cdot 18 \quad (\text{ec. 2}) \text{ Multiplicada por } -2 \text{ o bien } -2x - 6y = -36 \end{array}$$

Ahora sume:

$$\begin{array}{r} 2x + y = 11 \\ -2x - 6y = -36 \\ \hline -5y = -25 \\ y = 5 \end{array}$$

Resuelva para  $x$ .

$$\begin{array}{r} 2x + y = 11 \\ 2x + 5 = 11 \\ 2x = 6 \\ x = 3 \end{array}$$

La solución es  $(3, 5)$ . 

Observe que la solución en el ejemplo 3 es la misma que las soluciones obtenidas de manera gráfica en el ejemplo 3 de la sección 8.1 y por sustitución en el ejemplo 1 de la sección 8.2.

En el ejemplo 3, podríamos haber multiplicado la (ec. 1) por  $-3$  para eliminar la variable  $y$ . En este momento, vuelva a resolver el ejemplo 3 eliminando la variable  $y$  para ver que obtiene la misma respuesta.

### EJEMPLO 4

Resuelva, por medio del método de suma y resta, el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{r} 4x = -2y - 18 \\ -5y = 2x + 10 \end{array}$$

**Solución** El paso 1 del procedimiento indica que debemos reescribir cada ecuación de modo que los términos con variables aparezcan en el lado izquierdo del signo de igual y las constantes en el lado derecho. Sumando  $2y$  en ambos lados de la primera ecuación y restando  $2x$  en ambos lados de la segunda ecuación, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$4x + 2y = -18 \quad (\text{ec. 1})$$

$$-2x - 5y = 10 \quad (\text{ec. 2})$$

Ahora continuamos para resolver el sistema. Para eliminar la variable,  $x$ , podemos multiplicar la (ec. 2) por 2 y luego sumar.

$$4x + 2y = -18 \quad (\text{ec. 1})$$

$$4x + 2y = -18$$

$$2(-2x - 5y) = 2 \cdot 10 \quad (\text{ec. 2}) \text{ Multiplicada por 2} \quad \text{o bien} \quad -4x - 10y = 20$$

$$\begin{array}{r} 4x + 2y = -18 \\ -4x - 10y = 20 \\ \hline -8y = 2 \\ y = -\frac{1}{4} \end{array}$$

Resuelva para  $x$ .

$$\begin{array}{r} 4x + 2y = -18 \\ 4x + 2\left(-\frac{1}{4}\right) = -18 \\ 4x - \frac{1}{2} = -18 \\ 2\left(4x - \frac{1}{2}\right) = 2(-18) \quad \text{Multiplique ambos lados por} \\ \quad \text{2 para eliminar las fracciones.} \\ 8x - 1 = -36 \\ 8x = -35 \\ x = -\frac{35}{8} \end{array}$$

La solución es  $\left(-\frac{35}{8}, -\frac{1}{4}\right)$ .

Compruebe la solución  $\left(-\frac{35}{8}, -\frac{1}{4}\right)$  en ambas ecuaciones.

<p><b>Comprobación</b></p> $4\left(-\frac{35}{8}\right) + 2\left(-\frac{1}{4}\right) \stackrel{?}{=} -18$ $-\frac{35}{2} - \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} -18$ $-\frac{36}{2} \stackrel{?}{=} -18$ $-18 = -18 \quad \text{Verdadero.}$	$-2x - 5y = 10$ $-2\left(-\frac{35}{8}\right) - 5\left(-\frac{1}{4}\right) \stackrel{?}{=} 10$ $\frac{35}{4} + \frac{5}{4} \stackrel{?}{=} 10$ $\frac{40}{4} \stackrel{?}{=} 10$ $10 = 10 \quad \text{Verdadero.} \quad \star$
---	--

Observe que la solución del ejemplo 4 tiene fracciones. No debe esperar obtener siempre enteros en las respuestas.

**EJEMPLO 5** Resuelva, por medio del método de suma y resta, el siguiente sistema de ecuaciones.

$$2x + 3y = 6 \quad (\text{ec. 1})$$

$$5x - 4y = -8 \quad (\text{ec. 2})$$

**Solución** La variable  $x$  puede eliminarse multiplicando la (ec. 1) por  $-5$  y la (ec. 2) por  $2$ , y luego sumando las ecuaciones.

$$-5(2x + 3y) = -5 \cdot 6 \quad (\text{ec. 1 multiplicada por } -5) \text{ o bien } -10x - 15y = -30$$

$$2(5x - 4y) = 2 \cdot (-8) \quad (\text{ec. 2 multiplicada por } 2) \text{ o bien } 10x - 8y = -16$$

$$-10x - 15y = -30$$

$$\underline{10x - 8y = -16}$$

$$-23y = -46$$

$$y = 2$$

Resuelva para  $x$ .

$$2x + 3y = 6$$

$$2x + 3(2) = 6$$

$$2x + 6 = 6$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

La solución es  $(0, 2)$ . 

En el ejemplo 5, el mismo valor podría haberse obtenido para  $y$  multiplicando la (ec. 1) por  $5$  y la (ec. 2) por  $-2$ , y luego sumando. Ahora hágalo y vea el resultado. También podríamos haber iniciado eliminando la variable  $y$  multiplicando la (ec. 1) por  $4$  y la (ec. 2) por  $3$ .

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 19

**EJEMPLO 6** Resuelva, por medio del método de suma y resta, el siguiente sistema de ecuaciones.

$$2x + y = 3 \quad (\text{ec. 1})$$

$$4x + 2y = 12 \quad (\text{ec. 2})$$

**Solución** Podemos eliminar la variable  $y$  multiplicando la (ec. 1) por  $-2$  y luego sumando las dos ecuaciones.


$$-2(2x + y) = -2 \cdot 3 \quad (\text{ec. 1 multiplicada por } -2) \text{ o bien } -4x - 2y = -6$$

$$4x + 2y = 12 \quad (\text{ec. 2}) \qquad 4x + 2y = 12$$

$$-4x - 2y = -6$$

$$\underline{4x + 2y = 12}$$

$$0 = 6 \quad \text{Falso.}$$

¡Que no cunda el pánico cuando ambas variables desaparecen y se encuentra con una expresión como  $0 = 6$ ! No todos los sistemas de ecuaciones tienen solución. **Como  $0 = 6$  es un enunciado falso, este sistema no tiene solución.** El sistema es inconsistente. Las gráficas de las ecuaciones serán rectas paralelas. 

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 25

Observe que la solución en el ejemplo 6 es idéntica a las soluciones obtenidas por graficación en el ejemplo 4 de la sección 8.1 y por sustitución en el ejemplo 2 de la sección 8.2.

**EJEMPLO 7** Resuelva, por medio del método de suma y resta, el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}x - \frac{1}{2}y &= 2 \\ y &= 2x - 4\end{aligned}$$

**Solución** Primero alinee los términos con  $x$  y  $y$  al lado izquierdo del signo de igual (primer miembro), mediante la resta de  $2x$  en ambos lados de la segunda ecuación.

$$x - \frac{1}{2}y = 2 \quad (\text{ec. 1})$$

$$-2x + y = -4 \quad (\text{ec. 2})$$


Ahora proceda como en los ejemplos anteriores. Comience multiplicando la (ec. 1) por 2 para eliminar las fracciones de la ecuación.

$$2\left(x - \frac{1}{2}y\right) = 2 \cdot 2 \quad (\text{ec. 1}) \text{ multiplicada por } 2 \quad \text{o bien} \quad 2x - y = 4$$

$$-2x + y = -4 \quad (\text{ec. 2}) \qquad \qquad \qquad -2x + y = -4$$

$$\begin{array}{r}2x - y = 4 \\ -2x + y = -4 \\ \hline 0 = 0 \quad \text{Verdadero.}\end{array}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 21

Nuevamente, ambas variables desaparecieron. Aquí nos queda  $0 = 0$ . **Como  $0 = 0$  es un enunciado verdadero, el sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones.** Al graficar, ambas ecuaciones serán la misma recta. 

La solución en el ejemplo 7 es la misma que las soluciones obtenidas por graficación en el ejemplo 5 de la sección 8.1 y por sustitución en el ejemplo 3 de la sección 8.2.

**EJEMPLO 8** Resuelva, por medio del método de suma y resta, el siguiente sistema de ecuaciones.

$$2x + 3y = 7 \quad (\text{ec. 1})$$

$$5x - 7y = -3 \quad (\text{ec. 2})$$

**Solución** Podemos eliminar la variable  $x$  multiplicando la (ec. 1) por  $-5$  y la (ec. 2) por 2.

$$-5(2x + 3y) = -5 \cdot 7 \quad (\text{ec. 1}) \text{ multiplicada por } -5 \quad \text{o bien} \quad -10x - 15y = -35$$

$$2(5x - 7y) = 2(-3) \quad (\text{ec. 2}) \text{ multiplicada por } 2 \quad \text{o bien} \quad 10x - 14y = -6$$

$$\begin{array}{r}-10x - 15y = -35 \\ 10x - 14y = -6 \\ \hline -29y = -41 \\ y = \frac{41}{29}\end{array}$$

Ahora podemos determinar  $x$  sustituyendo  $y = \frac{41}{29}$  en una de las ecuaciones originales y despejando  $x$ . Si usted intenta esto, verá que aunque puede hacerlo, los cálculos son complicados. Un método más sencillo para encontrar el valor de  $x$  es regresar a las ecuaciones originales y eliminar la variable  $y$ . Podemos hacer esto multiplicando la (ec. 1) por 7 y la (ec. 2) por 3.

$$\begin{aligned} 7(2x + 3y) &= 7 \cdot 7 && \text{(ec. 1) multiplicada por 7} && \text{o bien} && 14x + 21y = 49 \\ 3(5x - 7y) &= 3(-3) && \text{(ec. 2) multiplicada por 3} && \text{o bien} && 15x - 21y = -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14x + 21y &= 49 \\ 15x - 21y &= -9 \\ \hline 29x &= 40 \\ x &= \frac{40}{29} \end{aligned}$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 35**

La solución es  $(\frac{40}{29}, \frac{41}{29})$ .



### SUGERENCIA

Hemos ilustrado tres métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales: graficación, sustitución y suma o resta. Cuando tenga un sistema de ecuaciones, ¿cuál método debe utilizar para resolverlo? No debemos utilizar la graficación cuando necesite una solución exacta. De los dos métodos algebraicos, si no hay coeficientes numéricos iguales a 1 en el sistema, el método de suma y resta podría ser el más sencillo de utilizar. Si una o más variables tienen un coeficiente igual a 1, podría utilizar la sustitución o la suma y resta.

## Conjunto de ejercicios 8.3

### Ejercicios conceptuales

1. Al resolver, por suma y resta, el siguiente sistema de ecuaciones, ¿cuál será su primer paso para resolver el sistema? Explique su respuesta. No resuelva el sistema.
- $$\begin{aligned} -x + 3y &= 4 \\ 2x + 5y &= 2 \end{aligned}$$
2. Al resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de suma y resta, ¿cuál será su primer paso para resolver el sistema? Explique su respuesta. No resuelva el sistema.
- $$\begin{aligned} 2x + 4y &= -8 \\ 3x - 2y &= 10 \end{aligned}$$
3. Al resolver un sistema de ecuaciones lineales por suma y resta, ¿cómo sabe si el sistema es inconsistente?
4. Al resolver un sistema de ecuaciones lineales por suma y resta, ¿cómo sabe si el sistema es dependiente?

### Práctica de habilidades

Resuelva cada sistema de ecuaciones por medio del método de suma y resta.

- |                                     |                                      |  |
|-------------------------------------|--------------------------------------|--|
| 5. $x + y = 6$<br>$x - y = 4$       | 6. $x - y = 6$<br>$x + y = 8$        | 7. $x + y = 5$<br>$-x + y = 1$         |
| 8. $x - y = 2$<br>$x + y = -2$      | 9. $x + 2y = 15$<br>$x - 2y = -7$    | 10. $3x + y = 10$<br>$4x - y = 4$      |
| 11. $4x + y = 6$<br>$-8x - 2y = 20$ | 12. $6x + 3y = 30$<br>$4x + 3y = 18$ | 13. $-5x + y = 14$<br>$-3x + y = -2$   |
| 14. $x - y = 2$<br>$3x - 3y = 0$    | 15. $2x + y = -6$<br>$2x - 2y = 3$   | 16. $-4x + 3y = 0$<br>$5x - 6y = 9$    |
| 17. $2y = 6x + 16$<br>$y = -3x - 4$ | 18. $2x - 3y = 4$<br>$2x + y = -4$   | 19. $5x + 3y = 12$<br>$2x - 4y = 10$   |
| 20. $6x - 4y = 9$<br>$2x - 8y = 3$  | 21. $-2y = -4x + 8$<br>$y = 2x - 4$  | 22. $4x - 2y = -4$<br>$-3x - 4y = -30$ |



23.  $5x - 4y = -3$   
 $5y = 2x + 8$

24.  $5x + 4y = 10$   
 $-3x - 5y = 7$

25.  $5x - 4y = 1$   
 $-10x + 8y = -4$

26.  $2x - 3y = 11$   
 $-3x = -5y - 17$

27.  $5x - 5y = 0$   
 $3x + 2y = 0$

28.  $4x - 2y = 8$   
 $4y = 8x - 16$

29.  $-5x + 4y = -20$   
 $3x - 2y = 15$

30.  $5x = 2y - 4$   
 $3x - 5y = 6$

31.  $6x = 4y + 12$   
 $-3y = -5x + 6$

32.  $4x - 3y = -4$   
 $3x - 5y = 10$

33.  $4x + 5y = 0$   
 $3x = 6y + 4$

34.  $4x - 3y = 8$   
 $-3x + 4y = 9$

35.  $x - \frac{1}{2}y = 4$   
 $3x + y = 6$

36.  $2x - \frac{1}{3}y = 6$   
 $5x - y = 4$

37.  $3x - y = 4$   
 $2x - \frac{2}{3}y = 6$

38.  $-5x + 6y = -12$   
 $\frac{5}{3}x - 4 = 2y$

## Resolución de problemas

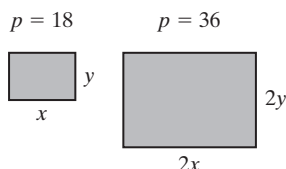
39. **Suma de números** La suma de dos números es 16. Cuando el segundo número se resta del primero, la diferencia es 8. Determine los dos números.

40. **Suma de números** La suma de dos números es 42. Cuando el primer número se resta del segundo, la diferencia es 6. Determine los dos números.

41. **Suma de números** La suma de un número y el doble de un segundo número es 14. Cuando el segundo número se resta del primero la diferencia es 2. Determine los dos números.

42. **Suma de números** La suma de dos números es 9. El doble del primer número restado del triple del segundo número es 7. Determine los dos números.

43. **Rectángulos** Cuando el largo de un rectángulo es  $x$  pulgadas y el ancho es  $y$  pulgadas, el perímetro es 18 pulgadas. Si tanto el largo como el ancho se duplican, el perímetro se convierte en 36 pulgadas. Determine el largo y el ancho del rectángulo. El largo es el doble del ancho.



44. **Perímetro de un rectángulo** Cuando el largo de un rectángulo es  $x$  pulgadas y el ancho es  $y$  pulgadas, el perímetro es de 28 pulgadas. Si el largo se duplica y el ancho se triplica, el nuevo perímetro es 66 pulgadas. Determine el largo y ancho del rectángulo original.

45. **Fotografía** Una fotografía tiene un perímetro de 36 pulgadas. La diferencia entre el largo y el ancho de la fotogra-

fía es de 2 pulgadas. Determine el largo y el ancho de la fotografía.

46. **Jardín rectangular** John tiene un gran jardín rectangular con un perímetro de 122 pies. La diferencia entre el largo y el ancho del jardín es 11 pies. Determine las dimensiones del jardín.

47. Construya un sistema de dos ecuaciones que no tenga solución. Explique cómo sabe que el sistema no tiene solución.

48. Construya un sistema de dos ecuaciones que tenga un número infinito de soluciones. Explique cómo sabe que el sistema tiene un número infinito de soluciones.

49. a) Resuelva el sistema de ecuaciones

$$4x + 2y = 1000$$

$$2x + 4y = 800$$

b) Si dividimos entre 2 todos los términos de la primera ecuación, obtenemos el siguiente sistema:

$$2x + y = 500$$

$$2x + 4y = 800.$$

¿Cómo será la solución para este sistema en comparación con la solución del inciso a)? Explique y luego compruebe su explicación resolviendo este sistema.

50. Suponga que divide entre 2 todos los términos en las dos ecuaciones dadas en el ejercicio 49 a), y luego resuelve el sistema. ¿Cómo será la solución para este sistema en comparación con la solución del inciso a)? Explique y luego compruebe su explicación resolviendo cada sistema.

## Problemas de reto

En los ejercicios 51 y 52, resuelva cada sistema de ecuaciones por suma y resta. (Sugerencia: primero elimine todas las fracciones, multiplicando ambos lados de la ecuación por el mcd.)

$$51. \begin{aligned} \frac{x+2}{2} - \frac{y+4}{3} &= 4 \\ \frac{x+y}{2} &= \frac{1}{2} + \frac{x-y}{3} \end{aligned}$$

$$52. \begin{aligned} \frac{5}{2}x + 3y &= \frac{9}{2} + y \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y &= 6x + 12 \end{aligned}$$

En álgebra intermedia podrá resolver sistemas de tres ecuaciones con tres variables. Resuelva el siguiente sistema.

$$53. \begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 2x + y + z &= 7 \end{aligned}$$

Sugerencia: trabaje un par de ecuaciones para obtener una ecuación con dos incógnitas. Luego trabaje con un par di-

ferente de las ecuaciones originales para obtener otra ecuación con las mismas dos incógnitas. Luego resuelva el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Escriba su respuesta como una terna ordenada de la forma  $(x, y, z)$ .



## Actividad en grupo

Resuelvan individualmente los incisos a) y b) del ejercicio 54. Luego, en grupo, analicen y resuelvan los incisos c) y d).

54. ¿Qué tan difícil es construir un sistema de ecuaciones lineales que tenga una solución específica? Realmente no es tan difícil hacerlo. Considere:

$$\begin{aligned} 2(3) + 4(5) &= 26 \\ 4(3) - 7(5) &= -23 \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 26 \\ 4x - 7y &= -23 \end{aligned}$$

tiene solución  $(3, 5)$ .

- a) Con la información dada, determine otro sistema de ecuaciones que tenga  $(3, 5)$  como una solución.  
 b) Determine un sistema de ecuaciones lineales que tenga  $(2, 3)$  como una solución.  
 c) Compare su respuesta con la de los otros miembros de su grupo.  
 d) En grupo, determinen el número de sistemas de ecuaciones que tienen  $(2, 3)$  como una solución.

## Ejercicios de repaso acumulativo

[1.9] 55. Evalúe  $5^3$ .

[2.5] 56. Resuelva la ecuación  $2(2x - 3) = 2x + 8$ .

[4.4] 57. Simplifique  $(4x^2y - 3xy + y) - (2x^2y + 6xy - 3y)$ .

[4.5] 58. Multiplique  $(8a^4b^2c)(4a^2b^7c^4)$ .

[5.2] 59. Factorice por agrupamiento  $xy + xc - ay - ac$ .

[7.6] 60. Si  $f(x) = 2x^2 - 4$ , determine  $f(-3)$ .

## 8.4 SISTEMAS DE ECUACIONES: APLICACIÓN Y SOLUCIÓN DE PROBLEMAS



- 1 Utilizar sistemas de ecuaciones para resolver problemas de aplicación.

### 1 Utilizar sistemas de ecuaciones para resolver problemas de aplicación

El método elegido para resolver un sistema de ecuaciones depende de si uno quiere tener “el panorama completo” o si está interesado en determinar la solución exacta. Si está interesado en ver la tendencia cuando la variable cambia, tal vez de-

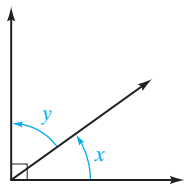


FIGURA 8.12

cida graficar las ecuaciones. Si sólo quiere la solución —es decir, el par ordenado común a ambas ecuaciones— podría utilizar uno de los dos métodos algebraicos para determinar la solución común.

Muchos de los problemas de aplicación resueltos en los capítulos anteriores que sólo utilizan una variable, también pueden resolverse utilizando dos variables. En el ejemplo 1 utilizamos **ángulos complementarios**, que son dos ángulos cuya suma mide  $90^\circ$ . La figura 8.12 muestra los ángulos complementarios  $x$  y  $y$ .

### EJEMPLO 1

**Construcción de un patio** Phil Mahler está construyendo un patio exterior rectangular de cemento (figura 8.13). Cuando él mide los dos ángulos formados por una diagonal encuentra que el ángulo  $x$  es  $16^\circ$  mayor que el ángulo  $y$ . Determine los dos ángulos.

#### Solución

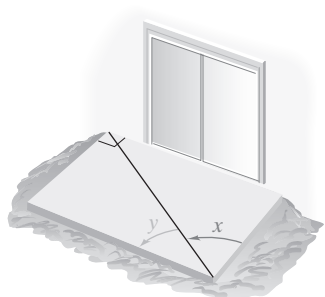


FIGURA 8.13

**Entender y traducir** Un rectángulo tiene 4 ángulos rectos (o de  $90^\circ$ ). Por tanto, los ángulos  $x$  y  $y$  son complementarios y la suma de ellos es  $90^\circ$ . Así que una ecuación en el sistema de ecuaciones es  $x + y = 90$ . Como el ángulo  $x$  es  $16^\circ$  mayor que el ángulo  $y$ , la segunda ecuación es  $x = y + 16$ .

$$\text{Sistema de ecuaciones} \quad \begin{cases} x + y = 90 \\ x = y + 16 \end{cases}$$

**Calcular** Reste  $y$  de cada lado de la segunda ecuación. Luego utilice el método de suma para resolver.

$$\begin{array}{r} x + y = 90 \\ x - y = 16 \\ \hline 2x = 106 \\ x = 53 \end{array}$$

Ahora sustituya 53 por  $x$  en la primera ecuación y resuelva para  $y$ .

$$\begin{array}{r} x + y = 90 \\ 53 + y = 90 \\ y = 37 \end{array}$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 3**

**Revisar y responder** El ángulo  $x$  es  $53^\circ$  y el ángulo  $y$  es  $37^\circ$ . Observe que su suma es  $90^\circ$  y el ángulo  $x$  es  $16^\circ$  mayor que el ángulo  $y$ .

El ejemplo 1 también podría haberse resuelto por medio del método de sustitución. Ahora resuélvalo por este método.

### EJEMPLO 2

**Cercar un área de comida** Marcella Laddon abrió un nuevo restaurante que tiene un área rectangular, al aire libre, para comida. Ella quiere rodear el área con una cerca pero olvidó las dimensiones; sin embargo, recuerda que el perímetro del área rectangular es 152 pies y el largo es 3 veces el ancho. Determine las dimensiones del área rectangular.

#### Solución

**Entender y traducir** La fórmula para el perímetro de un rectángulo es  $P = 2l + 2a$ . Utilizaremos esta fórmula para determinar una ecuación en el sistema. La otra ecuación proviene del hecho de que el largo es tres veces el ancho. Sea  $a$  = ancho del área rectangular y  $l$  = largo del área rectangular. Como el perímetro es 152 pies, una ecuación es  $152 = 2l + 2a$ . Como el largo es 3 veces el ancho, la otra ecuación es  $l = 3a$ .

$$\text{Sistema de ecuaciones} \quad \begin{cases} 152 = 2l + 2a \\ l = 3a \end{cases}$$

**Calcular** Resolveremos este sistema por sustitución. Ya que  $l = 3a$ , sustituimos  $3a$  por  $l$  en la ecuación  $152 = 2l + 2a$  para obtener

$$\begin{aligned} 152 &= 2l + 2a \\ 152 &= 2(3a) + 2a \\ 152 &= 6a + 2a \\ 152 &= 8a \\ 19 &= a \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 7

**Revisar y responder** El ancho es 19 pies. Como el largo es 3 veces el ancho, el largo es  $3(19)$  o 57 pies. Observe que el perímetro es  $2(19) + 2(57) = 152$  pies. ✨

### EJEMPLO 3

**Puente de peaje** En un puente que conduce al parque estatal de la isla Honeymoon, sólo permiten el paso de vehículos de dos ejes. El peaje para motocicletas es de 50 centavos y para automóviles y camiones es de \$1.00. El sábado, el encargado de la caseta de cobro recolectó un total de \$150 y el contador de vehículos registró 170 vehículos que cruzaron el puente. ¿Cuántas motocicletas y cuántos automóviles y camiones cruzaron el puente ese día?

### Solución

**Entender y traducir** Nos proporcionan suficiente información en el ejemplo para obtener dos ecuaciones para nuestro sistema de ecuaciones.

Sea  $x$  = número de motocicletas

$y$  = número de automóviles y camiones

Como un total de 170 vehículos cruzaron el puente, una ecuación es  $x + y = 170$ . La segunda ecuación proviene del peaje recolectado.

$$\begin{array}{rcl} \text{monto de las motocicletas} & + & \text{monto de los automóviles y camiones} & = & 150 \\ 0.50x & + & 1.00y & = & 150 \end{array}$$

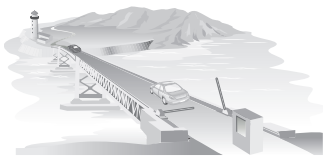
$$\text{Sistema de ecuaciones} \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y = 170 \\ 0.50x + 1.00y = 150 \end{array} \right.$$

**Calcular** Como de la primera ecuación se puede despejar  $y$  con facilidad, resolveremos este sistema por sustitución. Al despejar  $y$  en  $x + y = 170$ , se obtiene  $y = 170 - x$ . Al sustituir  $170 - x$  por  $y$  en la segunda ecuación y resolver para  $x$ .

$$\begin{aligned} 0.50x + 1.00y &= 150 \\ 0.50x + 1.00(170 - x) &= 150 \\ 0.50x + 170 - 1.00x &= 150 \\ 170 - 0.5x &= 150 \\ -0.5x &= -20 \\ \frac{-0.5x}{-0.5} &= \frac{-20}{-0.5} \\ x &= 40 \end{aligned}$$

**Respuesta** El puente lo cruzaron 40 motocicletas. El número total de vehículos que cruzaron el puente es 170. Por tanto,  $170 - 40$  o 130 automóviles y camiones cruzaron el puente ese sábado. Una comprobación mostrará que el total recolectado de estos 170 vehículos es \$150. ✨

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 9



**EJEMPLO 4**

**Caballos en todas partes** Muchas ciudades muestran estatuas de animales o de más temas por razones artísticas, de caridad u otras. Por ejemplo, las ciudades de Chicago; Beaufort, SC; Houston; Kansas City; Nueva York; Stanford, CT; y West Orange, NJ, han exhibido vacas. El área de Tampa ha exhibido tortugas, y Boston, bacalao. Lexington, KY, y Rochester, NY, han exhibido caballos (vea la fotografía).

Las joyerías de Mann están patrocinando dos caballos en una ciudad y considera dos artistas para diseñar y pintar los caballos. Una artista, Pam, ha indicado que los materiales necesarios para modificar el caballo estándar costarán \$2,200 y ella cobra \$80 por hora por pintar los caballos de acuerdo con las especificaciones. El otro artista, Mike, ha manifestado que los materiales que necesita para modificar el caballo costarán \$1,825 y él cobrará \$95 por hora para pintar los caballos.

- a)** ¿Cuántas horas se llevaría pintar los caballos para que el costo total de ambos artistas fuese el mismo?  
**b)** Si ambos artistas estiman que el tiempo requerido para la pintura del caballo será de 20 horas, ¿cuál artista cobra menos?

**Solución**

- a) Entender y traducir** Escribiremos ecuaciones para el costo total para Pam y para Mike.

Sea  $n$  = número de horas de pintura

$c$  = costo total del caballo

**Pam**

**Mike**

costo total = materiales + mano de obra      costo total = materiales + mano de obra

$$c = 2200 + 80n$$

$$c = 1825 + 95n$$

Ahora tenemos nuestro sistema de ecuaciones.

$$\text{Sistema de ecuaciones} \quad \begin{cases} c = 2200 + 80n \\ c = 1825 + 95n \end{cases}$$

**Calcular**

Costo total para Pam = costo total para Mike

$$2200 + 80n = 1825 + 95n$$

$$375 + 80n = 95n$$

$$375 = 15n$$

$$25 = n$$

**Respuesta** Si se requieren 25 horas de pintura, el costo sería el mismo.

- b)** Si la pintura toma 25 horas. Lo que cobra Mike sería menos costoso, como se muestra a continuación.

**Pam**

**Mike**

$$c = 2200 + 80n$$

$$c = 1825 + 95n$$

$$c = 2200 + 80(20)$$

$$c = 1825 + 95(20)$$

$$c = 3800$$

$$c = 3725$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 17**

**Problemas de movimiento con dos velocidades**

En la sección 3.5 introdujimos la fórmula de distancia, distancia = velocidad · tiempo o  $d = vt$ . Ahora introducimos un método que utiliza dos variables y un sistema de ecuaciones para resolver problemas de movimiento que incluyan dos ve-

locidades. Con frecuencia, cuando resolvemos problemas de movimiento con dos velocidades diferentes, es útil construir una tabla que resuma la información dada. Haremos esto en el ejemplo 5.

**EJEMPLO 5 Reunión para comer** Bob y Jim son dos buenos amigos que viven a 420 millas de distancia. Algunas veces se reúnen para comer en un restaurante en algún punto entre las ciudades donde viven. En una ocasión salieron de sus casas al mismo tiempo. Ambos tardaron 4 horas en llegar al restaurante. Determine la velocidad de Bob y la de Jim, si Bob conduce a un promedio de 5 millas por hora más rápido que Jim.

**Solución** a) **Entender y traducir** Nos piden determinar la velocidad de Bob y la de Jim. En el ejemplo nos dan información suficiente para obtener dos ecuaciones para nuestro sistema de ecuaciones.



FIGURA 8.14

Sea  $x$  = velocidad de Bob  
 Sea  $y$  = velocidad de Jim

Haremos un bosquejo para ayudar a entender el problema. Véase la figura 8.14. Utilizaremos la fórmula, distancia = velocidad  $\cdot$  tiempo. Ambos viajaron durante 4 horas.

Viajero	Velocidad	Tiempo	Distancia
Bob	$x$	4	$4x$
Jim	$y$	4	$4y$

Como la distancia total recorrida es 420 millas, nuestra primera ecuación es

$$4x + 4y = 420$$

La segunda ecuación proviene del hecho que la velocidad de Bob fue 5 millas por hora mayor que la velocidad de Jim. Por tanto, podemos sumar 5 millas por hora a la velocidad de Jim para obtener la velocidad de Bob.

$$x = y + 5$$

Nuestro sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned} 4x + 4y &= 420 \\ x &= y + 5 \end{aligned}$$

**Calcular** La ecuación  $x = y + 5$  ya tiene despejada  $x$ . Al sustituir  $y + 5$  por  $x$  en la primera ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} 4x + 4y &= 420 \\ 4(y + 5) + 4y &= 420 \\ 4y + 20 + 4y &= 420 \\ 8y + 20 &= 420 \\ 8y &= 400 \\ y &= 50 \end{aligned}$$

La velocidad de Jim es de 50 millas por hora. La velocidad de Bob es

$$\begin{aligned} x &= y + 5 \\ x &= 50 + 5 \\ x &= 55 \end{aligned}$$

**Revisar y responder** La respuesta parece razonable. Podemos comprobar para ver si la ecuación  $4x + 4y = 420$  es verdadera para  $x = 55$  y  $y = 50$ .

$$\begin{aligned} 4x + 4y &= 420 \\ 4(55) + 4(50) &\stackrel{?}{=} 420 \\ 220 + 200 &\stackrel{?}{=} 420 \\ 420 &= 420 \quad \text{Verdadero.} \end{aligned}$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 23**

Por tanto, la velocidad de Bob es 55 millas por hora y la velocidad de Jim es 50 millas por hora. 

### Problemas de mezcla

En la sección 3.5 resolvimos problemas de mezcla con una variable. Ahora veremos problemas de mezcla utilizando dos variables y sistemas de ecuaciones. Recuerde que cualquier problema en que dos o más cantidades se combinan para producir una cantidad diferente, o una sola cantidad se separa en dos o más cantidades, puede considerarse un problema de mezcla. Nuevamente utilizaremos una tabla para resumir la información dada.

### EJEMPLO 6

**Tienda de dulces** Hui Choe tiene una tienda de dulces y nueces. En la tienda hay dulce y nueces tanto a granel como en paquetes. Un cliente llega a la tienda y explica que necesita una gran cantidad de una mezcla de cerezas cubiertas con chocolate y de chocolates rellenos con amaretto. El cliente explica que él planea hacer paquetes individuales de la mezcla y dar un paquete a cada invitado a una cena. Las cerezas cubiertas con chocolate se venden en \$7.50 por libra y el chocolate relleno con amaretto se venden a \$6.00 por libra.

**a)** ¿Cuántas libras de chocolate relleno con amaretto deben mezclarse con 12 libras de cerezas cubiertas con chocolate para obtener una mezcla que se venda en \$6.50 por libra?

**b)** ¿Cuántas libras habrá de la mezcla?

### Solución

**a) Entender y traducir** Nos piden determinar el número de libras de chocolate relleno con amaretto que se mezclará con 12 libras de cerezas cubiertas con chocolate. En el ejemplo nos dan información suficiente para obtener dos ecuaciones para nuestro sistema.

Sea  $x$  = número de libras de chocolate relleno con amaretto

$y$  = número de libras de la mezcla.

Con frecuencia es útil hacer un bosquejo de la situación. Después de hacer un bosquejo, elaboraremos una tabla. En nuestro bosquejo utilizaremos cajas para mezclar los dulces (figura 8.15).

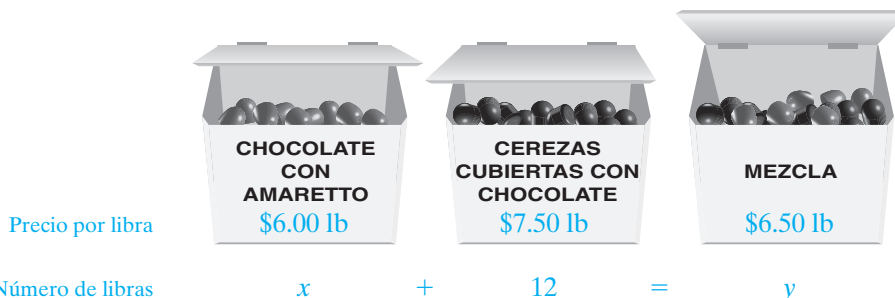


FIGURA 8.15

El valor de los dulces se determina multiplicando el número de libras por el precio por libra.

Dulce	Precio	Número de libras	Valor del dulce
Con amaretto	6	$x$	$6x$
Cerezas	7.50	12	$7.50(12)$
Mezcla	6.50	$y$	$6.50y$

Nuestras dos ecuaciones provienen de la información siguiente:

$$\left( \begin{array}{l} \text{número de libras de} \\ \text{chocolate con amaretto} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{número de libras de} \\ \text{cereza con chocolate} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{número de libras} \\ \text{de la mezcla} \end{array} \right)$$

$$x + 12 = y$$

$$\text{valor de chocolate con amaretto} + \text{valor de cerezas con chocolate} = \text{valor de la mezcla}$$

$$6x + 7.50(12) = 6.50y$$

$$\text{Sistema de ecuaciones} \quad \begin{cases} x + 12 = y \\ 6x + 7.50(12) = 6.50y \end{cases}$$

**Calcular** Como  $y = x + 12$ , sustituimos  $x + 12$  por  $y$  en la segunda ecuación y resolvemos para  $x$ .

$$\begin{aligned} 6x + 7.50(12) &= 6.50y \\ 6x + 7.50(12) &= 6.50(x + 12) \\ 6x + 90 &= 6.50x + 78 \\ 90 &= 0.50x + 78 \\ 12 &= 0.50x \\ 24 &= x \end{aligned}$$

**Respuesta** Por tanto, deben mezclarse 24 libras de chocolate relleno con amaretto con 12 libras de cerezas cubiertas con chocolate.

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 33**

**b)** La mezcla total pesará  $24 + 12$  o 36 libras. 

Ahora resolveremos un ejemplo similar al ejemplo 8 de la sección 3.5, pero esta vez utilizaremos un sistema de ecuaciones para resolverlo.

**EJEMPLO 7 Laboratorio de química** Eilish Main es una profesora de química, cuenta con diversas prácticas de laboratorio en las que sus estudiantes necesitarán utilizar una solución al 15% de ácido sulfúrico. Sus asistentes le informan que no hay solución al 15%. Eilish revisa en la bodega y encuentra que tiene una gran cantidad de soluciones al 5% y al 30%. Decide utilizar las soluciones al 5% y al 30% para elaborar 60 litros de una solución al 15%. ¿Cuántos litros de la solución al 5% y cuántos de la solución al 30% debe mezclar?

**Solución Entender y traducir** Eilish combinará las soluciones al 5% y al 30% para obtener 60 litros de una solución al 15% de ácido sulfúrico. Necesitamos determinar cuánto de cada una debe mezclarse.

$$\begin{aligned} \text{Sea } x &= \text{número de litros de solución al 5\%} \\ y &= \text{número de litros de solución al 30\%} \end{aligned}$$



El problema se muestra en la figura 8.16 y la información se resume en la siguiente tabla.

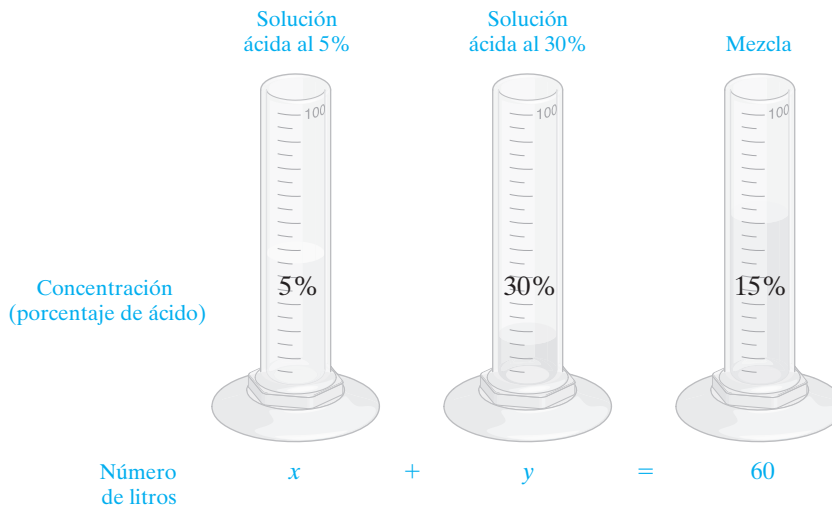


FIGURA 8.16

Solución	Número de litros	Concentración	Contenido de ácido
5% Solución	$x$	0.05	$0.05x$
30% Solución	$y$	0.30	$0.30y$
Mezcla	60	0.15	$0.15(60)$

Como el volumen total de la combinación es 60 litros, tenemos

$$x + y = 60$$

Con base en la tabla vemos que

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{l} \text{contenido de ácido} \\ \text{en la solución al 5\%} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{contenido de ácido} \\ \text{en la solución al 30\%} \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{l} \text{contenido de ácido} \\ \text{en la mezcla} \end{array} \right) \\ 0.05x + 0.30y &= 0.15(60) \end{aligned}$$

$$\text{Sistema de ecuaciones} \begin{cases} x + y = 60 \\ 0.05x + 0.30y = 0.15(60) \end{cases}$$

**Calcular** Resolveremos este sistema por sustitución. Primero despejamos a  $y$  en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} x + y &= 60 \\ y &= 60 - x \end{aligned}$$

Luego sustituimos  $60 - x$  por  $y$  en la segunda ecuación.

$$\begin{aligned} 0.05x + 0.30y &= 0.15(60) \\ 0.05x + 0.30(60 - x) &= 9 \\ 0.05x + 18 - 0.30x &= 9 \\ -0.25x + 18 &= 9 \\ -0.25x &= -9 \\ x &= \frac{-9}{-0.25} = 36 \end{aligned}$$


Ahora resolvemos para  $y$ .

$$y = 60 - x$$

$$y = 60 - 36$$

$$y = 24$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 31**

**Respuesta** Por tanto, deben mezclarse 36 litros de la solución de ácido al 5% con 24 litros de la solución de ácido al 30% para obtener 60 litros de una solución de ácido al 15%. 

## Matemáticas en acción

### ¡Quién sabe lo complicado que son los helados!

El helado es una mezcla estructuralmente complicada de líquido, que contiene disueltas sales, azúcares y proteínas lácteas; pequeños cristales de hielo, y gotas de grasa de leche. Además, se inyecta aire en la mezcla cuando se congela y aumenta el volumen. La cantidad de aire está limitada, por un requisito gubernamental, a que un galón de helado debe pesar al menos 4.5 libras. También los helados deben contener 10% de grasa de leche. Los helados premium superan esos mínimos y pueden enviarse con 17% de grasa láctea y con un peso de 7.5 libras por galón.



Cuando los productores de helados formulan sus mezclas de ingredientes tienen que adoptar un enfoque de sistemas, balancear numerosos factores conforme ellos decidan cuánto usar de cada uno. ¿Perderían a los clientes conscientes de la dieta si las calorías son muchas? ¿Cuánto depende el control de las calorías de la cantidad de grasa y cuánto del azúcar? ¿Deben utilizar los mejores ingredientes naturales y agregar más aire para compensar el costo?

Al final, todas estas decisiones son incorporadas en una receta final para un producto hacia un mercado específico que podría ser de adultos no dietistas en hogares con un ingreso anual superior a una cantidad específica, o familias de bajos ingresos con muchos hijos. Puede ser muy complicado.

Todos en la organización de los fabricantes de helado, desde los catadores oficiales, los encargados del mercadeo, los ingenieros en alimentos hasta los contadores, tendrán una opinión. En esencia, la decisión de cuáles ingredientes utilizar está basada en un conjunto de ecuaciones interrelacionadas y otros criterios menos formales. La decisión final está determinada por una combinación de muchos intereses que afecta al sistema de ecuaciones utilizado en el proceso de la toma de decisiones. Pero finalmente alguien termina una receta y el producto sale al mercado.

## Conjunto de ejercicios 8.4

### Práctica de habilidades resolución de problemas

En los ejercicios 1 a 38, utilice un sistema de ecuaciones lineales para determinar la solución. Utilice una calculadora en donde sea apropiado.

- Suma de enteros** La suma de dos enteros es 41. Determine la suma si un número es 7 unidades mayor que el otro.
- Diferencia de enteros** La diferencia de dos enteros es 25. Determine los dos números si el mayor es 1 unidad menor que el triple del menor.
- Ángulos complementarios** Los ángulos  $A$  y  $B$  son ángulos complementarios. Si el ángulo  $B$  es  $18^\circ$  mayor que el ángulo  $A$ , determine la medida de cada ángulo. (Vea el ejemplo 1.)
- Ángulos suplementarios** Dos ángulos son **ángulos suplementarios** cuando la suma de sus medidas es  $180^\circ$ . Si los ángulos  $A$  y  $B$  son suplementarios, y el ángulo  $A$  es cuatro veces mayor que el ángulo  $B$ , determine la medida de cada ángulo.

5. **Ángulos suplementarios** Si los ángulos  $A$  y  $B$  son suplementarios (vea el ejercicio 4) y el ángulo  $A$  es  $24^\circ$  mayor que el ángulo  $B$ , determine la medida de cada ángulo.
6. **Marco de una fotografía** El marco rectangular de una fotografía se fabricará de una moldura de 60 pulgadas de largo. ¿Cuáles son las dimensiones que tendrá el marco si la longitud es 6 pulgadas mayor que el ancho?
7. **Bandera de Estados Unidos** La siguiente fotografía es de una bandera floral que cubre 6.65 acres en Lompoc, California. La bandera conserva las dimensiones apropiadas de la bandera de Estados Unidos. El perímetro de la bandera es de 2,260 pies. Determine el largo y el ancho de la bandera si el largo es 350 pies mayor que el ancho.



8. **Cartas** Peter Collins, un agente de seguros, envió un total de 260 cartas por correo de primera clase. Algunas pesaban menos de 1 onza y necesitaron una estampilla de 37 centavos. El resto pesaba 1 onza o más pero menos de 2 onzas y necesitaron un franqueo de 60 centavos. Si el costo total del envío postal fue \$133.00, determine cuántas cartas se enviaron de cada uno de los costos de envío.
9. **Agricultura** Celeste Nossiter planta maíz y trigo en su granja de 100 acres, cerca de Albuquerque, Nuevo México. Ella estima que su ingreso, después de deducir los gastos, es de \$450 por acre de maíz y \$430 por acre de trigo. Determine el número de acres de maíz y de trigo sembrados si su ingreso total, después de gastos, es \$44,400.



10. **Lavado de automóviles** El lavado de automóviles Countryside Hand vende en \$21 un libro que contiene 20 cupones. Cada cupón permite al cliente tener un lavado de su automóvil en \$8.00, en lugar del precio regular de \$11.50. ¿Después de cuántos lavados de automóvil, utilizando los cupones en cada uno, la cantidad que el cliente se ahorra es igual al costo del libro de cupones?
11. **Kayak** Shane Stagg está navegando en un kayak en el río St. Lawrence. Él puede remar a 4.7 millas por hora con la corriente a favor y 3.4 millas por hora en contra de la corriente. Determine la velocidad del kayak en aguas tranquilas y la velocidad de la corriente.



12. **Vuelos en aerolíneas** Dos aviones comerciales vuelan en la misma área pero en direcciones opuestas. El avión de American Airlines vuela con el viento a favor a 560 millas por hora. El avión de U.S. Airway vuela en contra del viento a 510 millas por hora. Si no fuera por el viento, los dos aviones estarían volando con velocidades iguales. Determine la velocidad de cada avión con viento en calma y la velocidad del viento.
13. **Población** La población de Green Mountain es 40,000 y está creciendo 800 por año. La población de Pleasant View Valley es 66,000 y decrece 500 habitantes por año. ¿Cuánto tiempo pasará para que ambas áreas tengan la misma población?
14. **Almacén de descuento** El almacén de descuento Club Sol tiene dos planes de membresía. Con el plan A, el cliente paga una cuota anual de \$50 y 85% del precio de lista recomendado del fabricante. Con el plan B, la cuota anual es \$100 y el cliente paga 80% del precio de lista recomendado del fabricante. ¿Cuánto debería comprarse en mercancía, en pesos, para pagar la misma cantidad con los dos planes?
15. **Six flags** La familia Meyer tuvo una reunión familiar en Texas. Compraron boletos para visitar el parque de diversiones Six Flags. Los boletos de adulto cuestan \$40 y los de los niños \$30. Si se compraron 27 boletos y el costo total fue \$930, ¿cuántos boletos de adulto y cuántos de niño se compraron?
16. **Trabajo en ventas** Susan Summerlin, una vendedora, está considerando dos ofertas de trabajo. En la compañía Medtec el salario de Susan sería de \$300 semanales más una comisión de 5% de las ventas. En la compañía Genzone, su salario sería de \$200 a la semana más una comisión de 8% de las ventas.

- a) ¿Cuál es la cantidad en ventas que Susan necesitaría hacer para que el ingreso total en ambas compañías fuese el mismo?
- b) Si ella espera tener ventas de \$4,000, ¿cuál compañía daría un mayor salario?

17. **Contrato de copiadora** Carol Juncker acaba de comprar una copiadora de alta velocidad para su oficina y necesita un contrato de servicio para la copiadora. Ella está considerando dos contratos. La compañía Kate Spence Copier cobra \$18 al mes más 2 centavos por copia. Office Copier Depot cobra \$25 al mes y sólo 1.5 centavos por copia.

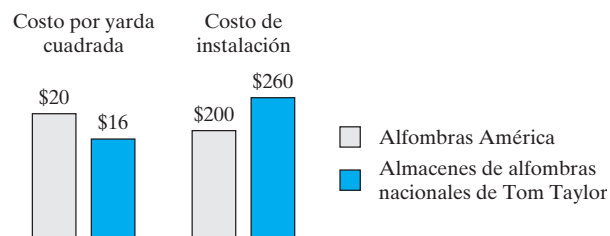
- a) Suponiendo que los precios no cambian, ¿cuántas copias necesitaría Carol hacer al mes para que el costo mensual sea el mismo en ambos planes?
- b) Si Carol planea hacer 2,500 copias al mes, ¿cuál plan sería el menos caro?

18. **Asesor financiero** Chris Suit es un asesor financiero para Walsh y asociados. Su salario es 40% fijo de comisiones por las ventas. Como empleado él no tiene gastos generales. Él está considerando iniciar su propia compañía. Entonces el 100% de las ventas serían un ingreso para él. Sin embargo, estima que sus gastos generales mensuales por renta de oficina, secretaria, servicios, etcétera, serían de alrededor de \$1,500 al mes. ¿Cuánto necesitaría Chris vender al mes en su propia compañía para hacer que el ingreso sea el mismo que como empleado de Walsh y asociados?

19. **Cuenta de ahorro** El señor y la señora Vinny McAdams invierten un total de \$8,000 en dos cuentas de ahorro. Una de ellas produce 10% de interés simple y la otra 8%. Determine la cantidad que invirtieron en cada cuenta si reciben un total de \$750 en interés al cabo de 1 año. Utilice la fórmula  $\text{interés} = \text{capital} \cdot \text{tasa} \cdot \text{tiempo}$ .

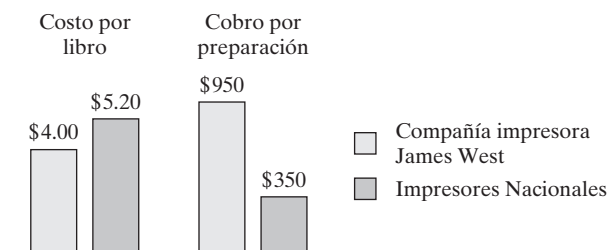
20. **Inversiones** Carol Horton invirtió un total de \$10,000. Parte del dinero se colocó en una cuenta de ahorros que paga 5% de interés simple. El resto se colocó en una anualidad que paga 6%. Si el total de interés recibido durante el año fue \$540, ¿cuánto se ha invertido en cada cuenta?

21. **Alfombrado** La siguiente gráfica de barras muestra el costo por yarda cuadrada de la misma alfombra en dos diferentes tiendas, junto con el costo de instalación (incluyendo el material) en cada tienda.



- a) Determine el número de yardas cuadradas de alfombra que Dorothy Rosen debe comprar para que el costo total de la alfombra más la instalación sea la misma en ambas tiendas.
- b) Si ella necesita comprar y tener instaladas 25 yardas cuadradas de alfombra, ¿en cuál tienda será más barato?

22. **Autoedición** Jorge Pérez escribió un libro que planea publicar. Consultó a dos impresores para determinar el costo de impresión de su libro. Cada compañía tiene una cuota por la preparación y una cuota por cada libro impreso. La información del costo se muestra en la siguiente gráfica de barras.



- a) ¿Cuántos libros necesitaría imprimir Jorge para que el costo total de sus libros sea el mismo con ambos impresores?
- b) Si él planea imprimir 1,000 libros, ¿cuál impresor le cobraría menos?

Revise el ejemplo 5 antes de resolver los ejercicios 23 a 30.

23. **Viaje redondo** Dave Visser comenzó a manejar desde Columbus, Ohio hacia Lincoln, Nebraska —una distancia de 903 millas—. Al mismo tiempo, Alice Harra empezó a conducir hacia Columbus, Ohio, desde Lincoln, Nebraska. Si los dos se encuentran al cabo de 7 horas y la velocidad promedio de Alice es 15 millas por hora más que la velocidad de Dave, determine la velocidad de cada automóvil.

24. **Colocación de un cable** Dos equipos de cableado de Lucent Technology están cavando una zanja para colocar un cable de fibra óptica. Un equipo de trabajo al mando de John Mayleben y un segundo equipo al mando de Leigh Sumeral inician en extremos opuestos de una extensión de tierra de 30 millas. El equipo de John excava a una velocidad promedio de 0.1 millas por hora más rápido que el equipo de Leigh. Si los dos equipos se encuentran después de 50 horas, determine la velocidad promedio de cada equipo.

25. **Lancha rápida** Durante una carrera, la lancha rápida de Elizabeth Kell viajó 4 millas por hora más rápido que la lancha de Melissa Suárez. Si la de Elizabeth termina la carrera en 3 horas y la de Melissa en 3.2 horas, determine la velocidad de cada lancha.
26. **Trenes** Dos trenes están separados 560 millas en un conjunto de vías paralelas viajando uno hacia el otro. Un tren viaja 6 millas por hora más rápido que el otro. Los trenes pasaron uno junto al otro en 4 horas. Determine la velocidad de los trenes.
27. **Salida a correr** Amanda Rodríguez y Delores Meléndez trotan juntas en River Walk Trail en San Antonio, Texas. Comienzan en el mismo punto, pero Amanda inicia 0.3 horas antes que Delores. Si Amanda corre a una velocidad de 5 millas por hora y Delores lo hace a 8 millas por hora, ¿cuánto tardará Delores en alcanzar a Amanda?
28. **Equitación** Bill Leonard trota, montado en su caballo Trixie, hacia el este a 8 millas por hora. Media hora después, Mary Mullaley inicia en el mismo punto y cabalga a medio galope en su caballo Pegarno, hacia el oeste a 16 millas por hora. ¿Cuánto tiempo después la distancia entre ambos será de 10 millas?



29. **Paseo en un camino** Terri Teegarden ha estado patinando a 5 millas por hora durante 0.75 horas a lo largo de un camino cerca de Pebble Beach, California. Ella recibe una llamada telefónica de su amigo Randy Taylor. Randy le dice que él se encuentra en donde ella empezó el camino. Él le dice que siga patinando y que el conducirá su bicicleta para alcanzarla. Randy planea viajar a 10.5 millas por hora. A partir de que Randy comienza, ¿cuánto tiempo tardarán en encontrarse?
30. **Rancho para vacaciones** Kate y Ernie Danforth están en un rancho de descanso. Kate ha estado montando a caballo durante 0.5 horas en el camino a 6 millas por hora cuando Ernie empieza a montar en su caballo por el camino. Si Ernie viaja a 10 millas por hora, ¿cuánto tiempo pasará antes de que él alcance a Kate?

Revise los ejemplos 6 y 7 antes de resolver los ejercicios 31 a 38.

31. **Químico** Karl Schmidt, un químico, tiene una solución de ácido clorhídrico al 15% y una al 40%. ¿Cuántos litros de cada una debe mezclar para obtener 10 litros de una so-

lución de ácido clorhídrico con una concentración de 30% de ácido?

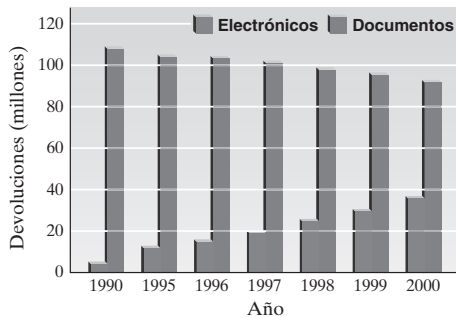
32. **Farmacéutica** Tamuka Williams, una farmacéutica, necesita 1,000 mililitros de una solución de fenobarbital al 10%. Ella sólo dispone de soluciones de fenobarbital al 5% y al 25%. ¿Cuántos mililitros de cada solución debe mezclar para obtener la solución deseada?
33. **Colocación de mosaicos** Julie Hildebrand está seleccionando mosaico para su recibidor y su sala. Ella quiere hacer un patrón utilizando dos colores y tipos diferentes de mosaico. Un tipo cuesta \$3 por pie cuadrado y el otro \$5 por pie cuadrado. Ella necesita un total de 380 mosaicos pero no quiere gastar más de \$1,500 en ellos. ¿Cuál es el número máximo de mosaico de \$5 que ella puede comprar?
34. **Hielo derretido** Una bebida de fruta es 8% de jugo por volumen. Se añade hielo a ella. Después de que se derrite el hielo, el jugo contenido en la mezcla de 8 onzas es 6%. Determine el volumen de la bebida de fruta y el volumen del hielo que se añadió.
35. **Granja lechera** Wayne Froelich, un granjero, tiene leche que contiene 5% de grasa de leche y leche sin grasa. ¿Cuánta leche con 5% de grasa y cuánta leche sin grasa debe mezclar para hacer 100 galones de leche que tenga 3.5% de grasa?



36. **Mezcla de soya** Lynn Hicks desea mezclar comida de soya que tiene 16% de proteína y comida de maíz que tiene 7% de proteína para obtener una mezcla de 300 libras con 10% de proteínas. ¿Cuánto debe utilizarse de cada una?
37. **Jugo** La compañía Jugo Natural vende jugo de manzana a 12 centavos por onza y bebida de manzana a 6 centavos por onza. Desean comercializar y vender en 10 centavos una onza de una bebida que tenga parte de jugo y parte de la bebida de manzana. ¿Cuántas onzas de cada una se utilizarán si la bebida se venderá en botes de 8 onzas?
38. **Quiche** La receta de Pierre LaRue para quiche de tocino requiere 16 onzas (o 2 tazas) de crema de leche, que tiene 20% de nata. Con frecuencia es difícil encontrar en el supermercado crema de leche con 20% de nata. La que es común encontrar es crema con 36% de nata, y leche con nata con 10.5% de nata. ¿Cuántas onzas de crema de leche y cuántas de leche de nata debe mezclarse para obtener 16 onzas de crema de leche que tenga 20% de nata?



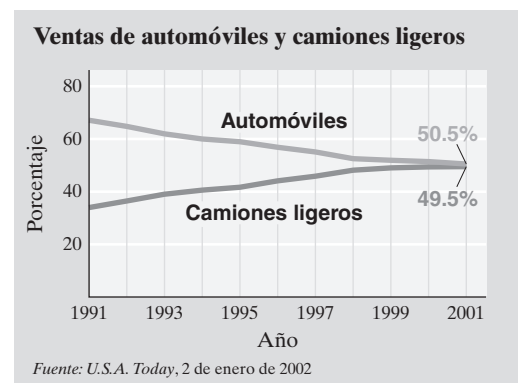
**39. Impuestos federales** Como lo muestra la siguiente gráfica, cada vez más personas están solicitando su devolución de impuestos federales por medios electrónicos. Observe las barras grises, que representan las devoluciones en documentos, está disminuyendo a una tasa casi lineal, y las barras rojas, que representan devoluciones electrónicas, se incrementan a una tasa casi lineal. Podemos representar el número de devoluciones por medio de documentos,  $p$ , en millones, con la ecuación  $p = -1.6x + 108$ . Podemos representar el número de devoluciones por medios electrónicos,  $e$ , en millones, con la ecuación  $e = 3.6x + 5$ . Para cada ecuación,  $x$  representa el número de años a partir de 1990. Así, 1991 sería 1, 1992 sería 2, y así sucesivamente. Suponiendo que la tendencia continúe, utilice las ecuaciones dadas para estimar cuándo el número de devoluciones de impuestos por medios electrónicos serán iguales al número de devoluciones por medio de documentos.



Fuente: Money Magazine, marzo de 2001, página 98

**40. Automóviles y camiones** La siguiente gráfica muestra que camiones ligeros (pickup, camionetas y minivan) superaron en ventas a los automóviles en Estados Unidos por primera vez en la historia en 2001. La ecuación que representa el porcentaje de automóviles,  $c$ , puede estimarse con la ecuación  $c = -1.8x + 68$ . La ecuación que representa el porcentaje de camiones ligeros,  $t$ , puede estimarse con la ecuación  $t = 1.6x + 34$ . Para ambas ecuaciones,  $x$  representa el número de años a partir de 1991. Así, 1992 sería 1, 1993, 2, y así sucesivamente.

- Utilizando las ecuaciones dadas, determine el año en que el porcentaje de ventas de camiones ligeros será igual al porcentaje de ventas de automóviles.
- ¿La gráfica respalda su respuesta?

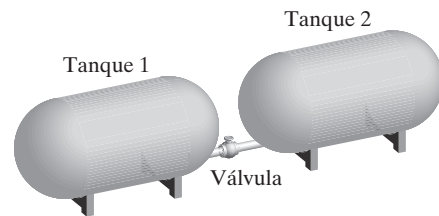


Fuente: U.S.A. Today, 2 de enero de 2002

## Problemas de reto

- Trotar** Los hermanos Sean y Moira O'Donnell trotan todos los días hacia la escuela. Sean, que es el mayor, corre a 9 millas por hora, y Moira, a 5 millas por hora. Cuando Sean llega a la escuela, Moira está a  $1/2$  milla de distancia. ¿A qué distancia está la escuela de su casa?
- Aleaciones** En peso, una aleación de latón es 70% de cobre y 30% de zinc. Otra aleación de latón tiene 40% de cobre y 60% de zinc. ¿Cuántos gramos de cada una de estas aleaciones deben fundirse y combinarse para obtener 300 gramos de una aleación de latón que tenga 60% de cobre y 40% de zinc?
- Tanques presurizados** Dos tanques presurizados están conectados por medio de una válvula que controla la presión, como se muestra en la figura. Al inicio, la presión interna en el tanque 1 es 200 libras por pulgada cuadrada,

y la presión interna en el tanque 2 es de 20 libras por pulgada cuadrada. Abrimos un poco la válvula de presión para reducir la presión en el tanque 1, en 2 libras por pulgada cuadrada por minuto. Esto aumenta la presión en el tanque 2 en 2 libras por pulgada cuadrada por minuto. A esta tasa, ¿en cuánto tiempo la presión en ambos tanques será la misma?



## Actividad en grupo

En grupo, analicen y resuelvan el ejercicio 44.

- Compra de un automóvil** Debby Patterson está considerando 2 automóviles para comprar. El automóvil A tiene un precio de lista de \$16,500 y da un promedio de 40 millas por galón. El automóvil B tiene un precio de lista de \$15,500 y da un promedio de 20 millas por galón. Siendo ecologista, Debby desea comprar el automóvil A, pero es

tá preocupada por su mayor costo inicial. Ella planea conservar el automóvil durante muchos años. Si compra el automóvil A, ¿cuántas millas necesitaría manejar para que el costo total del automóvil A sea igual al costo total del automóvil B? Suponga que el costo de la gasolina es de \$1.25 por galón.

## Ejercicios de repaso acumulativo

[1.10] 45. Nombre las propiedades ilustradas.

a)  $x + 4 = 4 + x$

b)  $(3x)y = 3(xy)$

c)  $4(x + 2) = 4x + 8$

[3.4] 46. **Perímetro** El perímetro de un rectángulo es 22 pies. Determine el largo y el ancho del rectángulo, si el largo es dos unidades mayor que el doble del ancho.[6.6] 47. Resuelva la ecuación  $x + \frac{2}{x} = \frac{6}{x}$ .

[7.1] 48. ¿Qué es una gráfica?

## 8.5 SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE DESIGUALDADES LINEALES



## 1 Resolver de forma gráfica sistemas de desigualdades lineales.

## 1 Resolver de forma gráfica sistemas de desigualdades lineales

En la sección 7.5 aprendimos cómo graficar desigualdades lineales con dos variables. En la sección 8.1 aprendimos a resolver, en forma gráfica, sistemas de ecuaciones lineales. En esta sección analizamos la forma de resolver, en forma gráfica, sistemas de desigualdades lineales. La **solución para un sistema de desigualdades lineales** es el conjunto de puntos que satisfacen todas las desigualdades en el sistema. Aunque un sistema de desigualdades lineales puede tener más de dos desigualdades, en este libro, excepto en los ejercicios de actividad en grupo, consideraremos sistemas con sólo dos desigualdades.

## Para resolver un sistema de desigualdades lineales de forma gráfica

Grafique cada desigualdad en los mismos ejes. La solución es el conjunto de puntos que satisfacen todas las desigualdades en el sistema.

**EJEMPLO 1** Determine la solución para el siguiente sistema de desigualdades.

$$x + 2y \leq 6$$

$$y > 2x - 4$$

**Solución** Primero grafique la desigualdad  $x + 2y \leq 6$  (figura 8.17) como se explicó en la sección 7.5. Ahora, en los mismos ejes, grafique la desigualdad  $y > 2x - 4$  (figura 8.18). Observe que la recta es punteada. ¿Por qué?

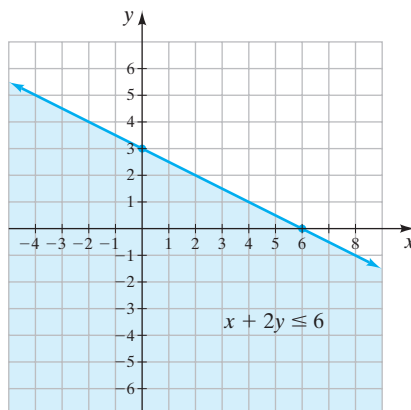


FIGURA 8.17

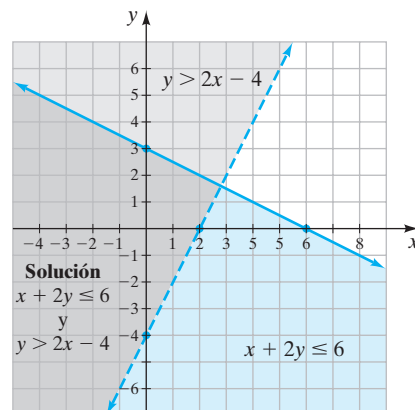



FIGURA 8.18

La solución es el conjunto de puntos comunes a ambas desigualdades —la parte de la gráfica que tiene ambos tipos de sombreado—. La recta punteada no es parte de la solución. Sin embargo, la parte de la recta continua que satisface ambas desigualdades es parte de la solución. 

En el ejemplo 1, los pares ordenados de cada uno de los puntos en la solución (el área en gris oscuro) satisfacen ambas desigualdades en el sistema. Debemos ser capaces de seleccionar cualquier punto en la región sombreada, sustituir sus valores de  $x$  y  $y$  en *ambas* desigualdades y obtener enunciados verdaderos. Suponga que elegimos el origen, que está en el área sombreada. Sea  $(x, y)$  igual a  $(0, 0)$ .

$$\begin{array}{rcl} x + 2y \leq 6 & & y > 2x - 4 \\ 0 + 2(0) \leq 6 & & 0 > 2(0) - 4 \\ 0 \leq 6 & \text{Verdadero.} & 0 > -4 & \text{Verdadero.} \end{array}$$

Como esperábamos, el par ordenado  $(0, 0)$  satisface ambas desigualdades.

**EJEMPLO 2** Determine la solución del sistema de desigualdades.

$$\begin{array}{l} 2x + 3y > 4 \\ 2x - y \geq -6 \end{array}$$

**Solución** Grafique  $2x + 3y > 4$  (figura 8.19). Grafique  $2x - y \geq -6$  en los mismos ejes (figura 8.20). La solución es la parte en la gráfica que está sombreada y la parte de la recta continua que satisface ambas desigualdades.

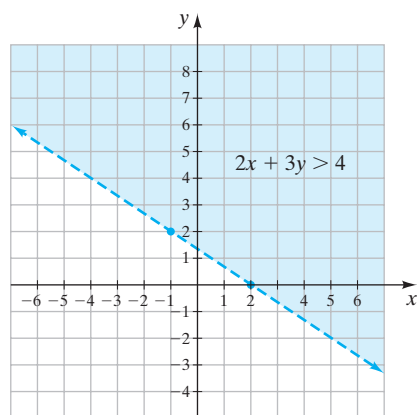


FIGURA 8.19

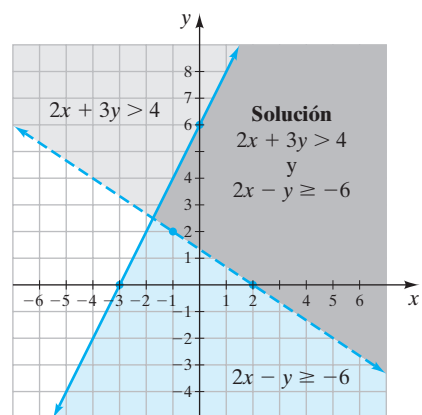


FIGURA 8.20

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 11

**EJEMPLO 3** Determine la solución para el siguiente sistema de desigualdades.

$$\begin{array}{l} y < 2 \\ x > -3 \end{array}$$

**Solución** Grafique ambas desigualdades en los mismos ejes (figura 8.21). La solución es la parte de la gráfica que está sombreada.

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 15 

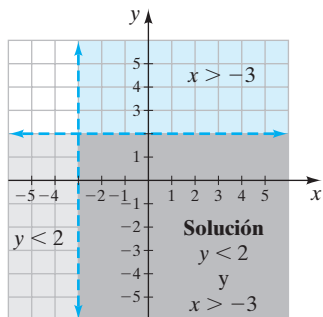


FIGURA 8.21

Es posible que un sistema de desigualdades lineales no tenga solución. Esto puede suceder si las gráficas de las desigualdades son rectas que tienen la misma pendiente y son paralelas entre ellas. Por ejemplo, el sistema de desigualdades  $x + y \leq 2$  y  $x + y \geq 4$  no tiene solución.



## Conjunto de ejercicios 8.5

### Ejercicios conceptuales

1. Si un par ordenado satisface ambas desigualdades de un sistema de desigualdades lineales, ¿ese par debe estar en la solución del sistema? Explique.
2. Si un par ordenado satisface sólo una desigualdad en un sistema de desigualdades lineales, ¿es posible que ese par ordenado esté en la solución del sistema? Explique.
3. ¿Un sistema de desigualdades lineales puede no tener solución? Explique su respuesta mediante un ejemplo propio.
4. ¿Es posible construir un sistema de dos desigualdades no paralelas que no tenga solución? Explique.

### Práctica de habilidades

Determine la solución de cada sistema de desigualdades.

5.  $x + y > 2$   
 $x - y < 2$

6.  $y \leq 3x - 2$   
 $y > -4x$

7.  $y \leq x$   
 $y < -2x + 2$

8.  $2x + 3y < 6$   
 $4x - 2y \geq 8$

9.  $y < -2x - 3$   
 $y \geq 3x + 2$

10.  $x + 3y \geq 6$   
 $2x - y > 4$

11.  $x - 2y < 6$   
 $y \leq -x + 4$

12.  $y \leq 3x + 4$   
 $y < 2$

13.  $4x + 5y < 20$   
 $x \geq -3$

14.  $3x - 4y \leq 12$   
 $y > -x + 4$

15.  $x \leq 4$   
 $y \geq -2$

16.  $x \leq 0$   
 $y \leq 0$

17.  $x > -3$   
 $y > 1$

18.  $4x + 2y > 8$   
 $y \leq 2$

19.  $-2x + 3y \geq 6$   
 $x + 4y \geq 4$

20.  $2x - y \leq 3$   
 $4x + 2y > 8$

21.  $x - 3y > 3$   
 $2x - 6y < 6$

22.  $2x - y < 4$   
 $4x - 2y \geq -10$

23.  $2x + 4y > 6$   
 $4x + 8y < 6$

24.  $x - 3y \leq 6$   
 $x + 3y \leq 6$

### Solución de problemas

25. ¿Es posible que un sistema de dos desigualdades lineales tenga sólo una solución? Explique.
26. Construya un sistema de dos desigualdades lineales que no tenga solución. Explique cómo determinó su respuesta.



### Actividad en grupo

En cursos de matemáticas más avanzadas y al trabajar en muchas industrias, podría necesitar graficar más de dos desigualdades lineales. Cuando un sistema tiene más de dos desigualdades, la solución es el punto o puntos que satisfacen todas las desigualdades en el sistema. En grupo, determinen las soluciones para los sistemas de desigualdades en los ejercicios 27 y 28.

27.  $x + 2y \leq 6$   
 $2x - y < 2$   
 $y > 2$

28.  $x \geq 0$   
 $y \geq 0$   
 $y \leq 2x + 4$   
 $y \leq -x + 6$

### Ejercicios de repaso acumulativo

[2.7] 29. Resuelva la desigualdad y grafique la solución en una recta numérica:  $6(x - 2) < 4x - 3 + 2x$ .

[3.1] 30. Despeje  $y$  en la ecuación  $2x - 5y = 6$ .

[5.6] 31. Resuelva la ecuación  $4x^2 - 11x - 3 = 0$ .

[6.2] 32. Simplifique  $\frac{x^{-6}y^2}{x^3y^{-4}}$ .

## RESUMEN DEL CAPÍTULO

## Términos y frases importantes

## 8.1

Método gráfico para resolver un sistema de ecuaciones lineales

Sistema consistente de ecuaciones

Sistema de ecuaciones lineales

Sistema dependiente de ecuaciones

Sistema inconsistente de ecuaciones

Solución para un sistema de ecuaciones lineales

## 8.2

Método por sustitución para resolver un sistema de ecuaciones lineales

## 8.3

Método de suma y resta (reducción o eliminación) para resolver un sistema de ecuaciones lineales

## 8.4

Ángulos complementarios  
Ángulos suplementarios

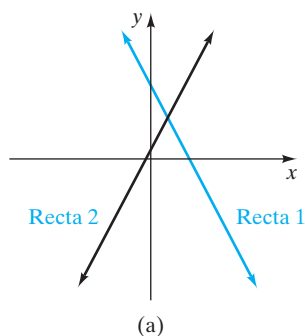
## 8.5

Sistema de desigualdades lineales

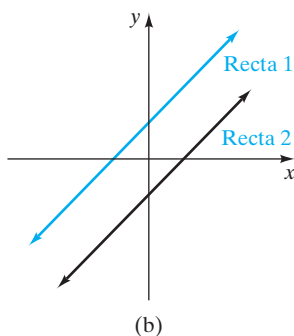
Solución para un sistema de desigualdades lineales

## HECHOS IMPORTANTES

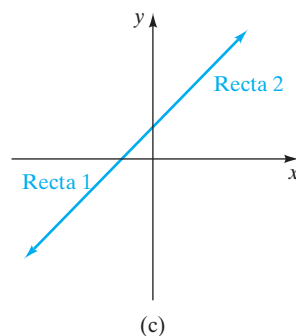
Consistente,  
exactamente 1 solución



Inconsistente,  
ninguna solución



Dependiente,  
un número infinito de soluciones



Los tres métodos utilizados para resolver un sistema de ecuaciones lineales son (1) el método gráfico, (2) el método por sustitución, y (3) el método de suma y resta (reducción o eliminación). Al resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de sus-

titución o el de suma, si obtiene un enunciado falso, como  $6 = 0$ , el sistema es inconsistente y no tiene solución. Si obtiene un enunciado verdadero, como  $0 = 0$ , el sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones.

## Ejercicios de repaso del capítulo

[8.1] Determine cuál, si hay uno, de los pares ordenados satisfacen cada sistema de ecuaciones.

1.  $y = 4x - 2$   
 $2x + 3y = 8$

a)  $(0, -2)$

b)  $(-2, 4)$

c)  $(1, 2)$

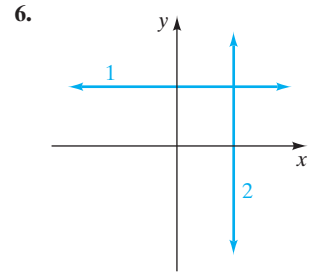
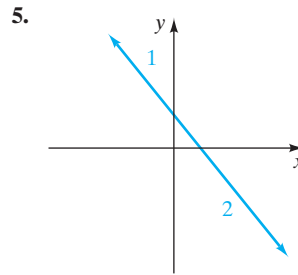
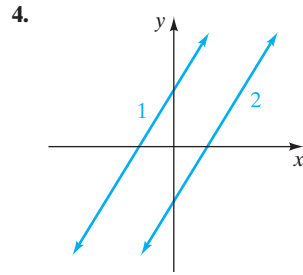
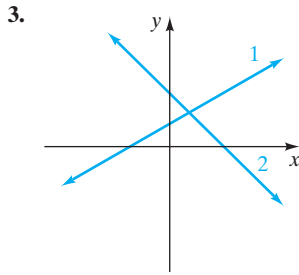
2.  $y = -x + 4$   
 $3x + 5y = 15$

a)  $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$

b)  $(0, 4)$

c)  $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)$

Identifique cada sistema de ecuaciones lineales como consistente, inconsistente o dependiente. Indique si el sistema tiene exactamente una solución, ninguna o un número infinito de soluciones.



Escriba cada ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen. Sin graficar o resolver el sistema de ecuaciones, indique si el sistema de ecuaciones lineales tiene exactamente una solución, ninguna o un número infinito de soluciones.

7.  $x + 2y = 10$   
 $3x = -6y + 12$

8.  $y = -3x - 4$   
 $2x + 5y = 8$

9.  $y = \frac{1}{2}x - 4$   
 $x - 2y = 8$

10.  $6x = 4y - 8$   
 $4x = 6y + 8$

Determine, de forma gráfica, la solución para cada sistema de ecuaciones.

11.  $y = x - 4$   
 $y = 2x - 7$

12.  $x = -2$   
 $y = 3$

13.  $y = 3$   
 $y = -2x + 5$

14.  $x + 3y = 6$   
 $y = 2$

15.  $x + 2y = 8$   
 $2x - y = -4$

16.  $y = x - 3$   
 $2x - 2y = 6$

17.  $3x + y = 0$   
 $3x - 3y = 12$

18.  $x + 2y = 4$   
 $\frac{1}{2}x + y = -2$

[8.2] Determine, por sustitución, la solución para cada sistema de ecuaciones.

19.  $y = 3x - 13$   
 $2x - 5y = 0$

20.  $x = 3y - 9$   
 $x + 2y = 1$

21.  $2x - y = 6$   
 $x + 2y = 13$

22.  $x = -3y$   
 $x + 4y = 6$

23.  $4x - 2y = 10$   
 $y = 2x + 3$

24.  $2x + 4y = 8$   
 $4x + 8y = 16$

25.  $2x - 3y = 8$   
 $6x + 5y = 10$

26.  $3x - y = -5$   
 $x + 2y = 8$

[8.3] Mediante el método de suma y resta, determine la solución para cada sistema de ecuaciones.

27.  $-x - y = 6$   
 $-x + y = 10$

28.  $x + 2y = -3$   
 $2x - 2y = 6$

29.  $x + y = 12$   
 $2x + y = 5$

30.  $4x - 3y = 8$   
 $2x + 5y = 8$

31.  $-2x + 3y = 15$   
 $3x + 3y = 10$

32.  $2x + y = 9$   
 $-4x - 2y = 4$

33.  $3x = -4y + 10$   
 $8y = -6x + 20$

34.  $2x - 5y = 12$   
 $3x - 4y = -6$

[8.4] Utilice un sistema de ecuaciones lineales para determinar la solución.

35. **Suma de enteros** La suma de dos enteros es 49. Determine los dos números, si el mayor es 8 unidades menos que el doble del menor.

36. **Vuelo en avión** Un avión vuela a 600 millas por hora con el viento a favor, y 530 millas por hora en contra del viento. Determine la velocidad del viento y la velocidad del avión con viento en calma.

37. **Renta de un camión** La compañía de renta de camiones de Katz cobra \$30 por día, más 50 centavos por milla, mientras que la renta de camiones de Willie cobra \$40 diarios, más 40 centavos por milla. ¿Cuánto debe recorrer en un

día para que el costo total en ambas compañías de renta sea el mismo?

38. **Cuenta de ahorros** Moura Hokal invirtió un total de \$16,000. Parte del dinero se colocó en una cuenta de ahorros que paga 4% de interés simple. El resto se colocó en una que paga 6%. Si el interés total recibido en un año fue \$760, ¿cuánto invirtió Moura en cada cuenta?

39. **Viaje** Liz Wood conduce desde Charleston, Carolina del Sur, hasta Louisville, Kentucky —una distancia de 600 millas—. Al mismo tiempo, Mary Mayer inicia a conducir desde Louisville a Charleston en la misma ruta. Si ellas se

encuentran después de conducir durante 5 horas y el promedio de velocidad de Mary fue de 6 millas por hora mayor que el de Liz, determine la velocidad promedio de cada automóvil.



- 40. Siembra de pasto** La semilla de pasto Green Turf cuesta 60 centavos por libra y la de Agway cuesta 45 centavos por libra. ¿Cuántas libras de cada una se utilizaron para hacer una mezcla de 40 libras que cuesta \$20.25?
- 41. Químico** Un químico tiene una solución de ácido al 30% y una al 50%. ¿Cuánto de cada una debe mezclarse para obtener 6 litros de una solución de ácido al 40%?

[8.5] Determine la solución de cada sistema de ecuaciones.

**42.**  $2x + y > 2$   
 $2x - y \leq 4$

**43.**  $2x - 3y \leq 6$   
 $x + 4y > 4$

**44.**  $2x - 6y > 6$   
 $x > -2$

**45.**  $x < 2$   
 $y \geq -3$

## Examen de práctica del capítulo

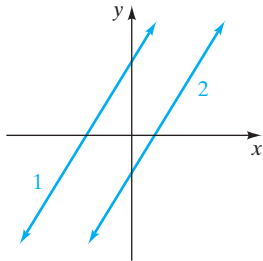
- 1.** Determine cuáles, si hay, de los pares ordenados satisfacen el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x + 2y &= -6 \\ 3x + 2y &= -12 \end{aligned}$$

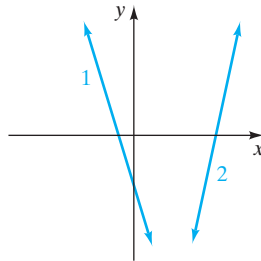
- a)  $(0, -6)$       b)  $\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$       c)  $(2, -4)$

Identifique cada sistema como consistente, inconsistente o dependiente. Indique si el sistema tiene exactamente una solución, ninguna o un número infinito de soluciones.

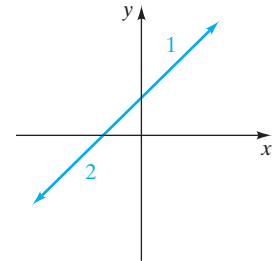
**2.**



**3.**



**4.**



Escriba cada ecuación en la forma pendiente ordenada al origen. Luego determine, sin graficar ni resolver el sistema, si el sistema de ecuaciones tiene exactamente una solución, ninguna o un número infinito de soluciones.

**5.**  $-3y = 6x - 9$   
 $2x + y = 6$

**6.**  $3x + 2y = 10$   
 $3x - 2y = 10$

**7.**  $4x = 6y - 12$   
 $2x - 3y = -6$

- 8.** Al resolver un sistema de ecuaciones lineales, por sustitución o por suma y resta, ¿cómo sabrá si el sistema es a) inconsistente, b) dependiente?

Resuelva, en forma gráfica, cada sistema de ecuaciones.

**9.**  $y = 2x - 4$   
 $y = -2x + 8$

**10.**  $3x - 2y = -3$   
 $3x + y = 6$

**11.**  $y = 2x + 4$   
 $4x - 2y = 6$

Resuelva por sustitución cada sistema de ecuaciones.

**12.**  $3x + y = 8$   
 $x - y = 6$

**13.**  $3x - 4y = 8$   
 $4x + 2y = 18$

**14.**  $y = 5x - 7$   
 $y = 3x + 5$

Resuelva por suma y resta cada sistema de ecuaciones.

15.  $4x + y = -6$   
 $x + 3y = 4$

16.  $3x + 2y = 12$   
 $-2x + 5y = 8$

17.  $5x - 10y = 20$   
 $x = 2y + 4$

Resuelva cada sistema de ecuaciones utilizando el método que usted prefiera.

18.  $y = 3x - 7$   
 $y = -2x + 8$

19.  $3x + 5y = 20$   
 $6x + 3y = -12$

20.  $4x - 6y = 8$   
 $3x + 5y = 10$

Utilice un sistema de ecuaciones lineales para determinar la solución.

21. **Renta de un camión** La agencia de renta de camiones de Charley cobra \$54 diarios, más 8 centavos por milla por la renta de cierto camión. La compañía de Hugh cobra \$40 por día, más 15 centavos por milla por la renta del mismo camión. ¿Cuántas millas tendrá que conducir en un día para que el costo del camión de Charly sea igual al costo del camión de Hugh?

22. **Dulces** El almacén de Albert vende dulces de limón envueltos de forma individual en \$6.00 por libra y dulces de

mantequilla envueltos en forma individual en \$4.50 por libra. ¿Cuánto de cada uno debe mezclar Albert para obtener 20 libras de una mezcla que pueda vender en \$5.00 por libra?

23. **Carrera en lancha** Durante una carrera, la lancha rápida de Dante Hull viaja 4 millas por hora más rápido que la lancha rápida de Deja Rocket. Si la lancha de Dante termina la carrera en 3 horas y la de Deja en 3.2 horas, determine la velocidad de cada lancha.

Determine la solución para cada sistema de desigualdades. 4., 25.

24.  $2x + 4y < 8$   
 $x - 3y \geq 6$

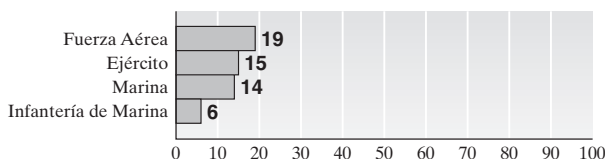
25.  $x + 3y \geq 6$   
 $y < 3$

## Examen de repaso acumulativo

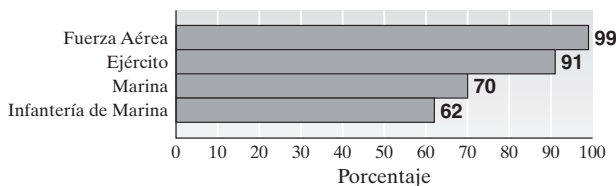
Resuelva el siguiente examen y compare sus respuestas con las que aparecen al final. Repase cualquier pregunta que haya respondido de manera incorrecta. La sección y el objetivo en donde se estudió el material se indica a continuación de la respuesta.

1. **Mujeres en la milicia** Las mujeres están desempeñando un papel cada vez más importante en la milicia de Estados Unidos. Las mujeres han servido en las fuerzas armadas de Estados Unidos desde 1901, cuando quedó establecido el Cuerpo de enfermeras de la armada. El número de mujeres en la milicia ha crecido de forma radical desde 1967, cuando los militares abolieron el tope de 2% sobre las mujeres que servían en las fuerzas armadas. Las siguientes gráficas proporcionan información sobre las mujeres y los militares.

Porcentaje de mujeres en ramas de la milicia



Porcentaje de puestos militares abiertos a mujeres



Fuente: Departamento de Defensa; Investigación e Instituto de la Mujer

- a) ¿Qué rama de la milicia está compuesta por al menos 15% de mujeres?
- b) ¿Qué ramas de la milicia están compuestas por al menos 10% de mujeres y tienen al menos 70% de los puestos militares abiertos a mujeres?
2. Considere el conjunto de números  $\{-5, -0.6, \frac{3}{5}, \sqrt{7}, -\sqrt{2}, 7, 0, -\frac{5}{9}, 1.34\}$ .

Liste los elementos que son

- a) números naturales.
- b) números racionales.
- c) números irracionales.
- d) números reales.
3. Simplifique  $-237 + 63 + (-192)$ .
4. Simplifique  $8 - (3a - 2) + 4(a + 3)$ .
5. Resuelva la ecuación  $2(x - 4) + 2 = 3x - 4$ .
6. Resuelva la desigualdad  $3x - 4 \leq x + 6$ . Grafique la solución en una recta numérica.
7. Despeje  $a$  en la fórmula  $P = 2l + 2a$ .
8. **Selección de un plan salarial** María Gentle se acaba de graduar y ha aceptado un puesto en venta de software. Le dan dos opciones de planes de salario. El plan A es una comisión directa de 12% sobre las ventas. El plan B es

\$350 semanales más 6% de comisión sobre las ventas. ¿Cuánto debe vender María a la semana para que ambos planes tengan el mismo salario semanal?

9. **Ángulos de un triángulo** Un ángulo de un triángulo mide  $20^\circ$  más que el ángulo menor. El tercer ángulo mide 6 veces el ángulo más pequeño. Determine la medida de cada uno de los tres ángulos.
10. Simplifique  $(5x^3y^2)^3(x^2y)^2$ .
11. Multiplique  $(x - 2y)^2$ .
12. Factorice  $2n^2 - 5n - 12$ .
13. Resuelva  $x^2 - 3x - 40 = 0$ .
14. Multiplique  $\frac{x^2 - 4x - 12}{3x} \cdot \frac{x^2 - x}{x^2 - 7x + 6}$ .
15. Resuelva  $\frac{2x + 3}{3} = \frac{x - 2}{2}$ .
16. Grafique  $2x - 4y = 8$ .

17. Grafique  $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 12$ .

18. Determine si el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x - y &= 6 \\ \frac{3}{2}x - 3 &= \frac{1}{2}y \end{aligned}$$

tiene una solución, ninguna o un número infinito de soluciones. Explique cómo determinó su respuesta.


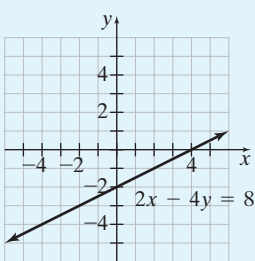
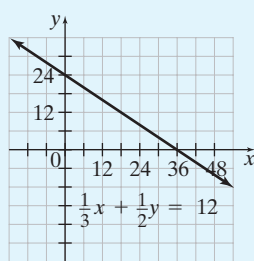
19. Resuelva, de forma gráfica, el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

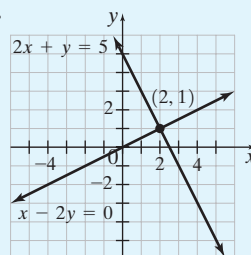
20. Por el método de suma y resta, resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 8 \\ -6x + 3y &= 2 \end{aligned}$$

Respuestas al examen de repaso acumulativo

1. a) Fuerza Aérea, Ejército b) Fuerza Aérea, Ejército, Marina; [Sec. 1.2, Obj. 2] 2. a) 7 b)  $-5, -0.6, \frac{3}{5}, 7, 0, -\frac{5}{9}, 1.34$
- c)  $\sqrt{7}, -\sqrt{2}$  d)  $-5, -0.6, \frac{3}{5}, \sqrt{7}, -\sqrt{2}, 7, 0, -\frac{5}{9}, 1.34$ ; [Sec. 1.4, Obj. 2] 3.  $-366$ ; [Sec. 1.7, Obj. 3] 4.  $a + 22$ ;
- [Sec. 2.1, Obj. 6] 5.  $-2$ ; [Sec. 2.5, Obj. 1] 6.  $x \leq 5$ ; ; [Sec. 2.7, Obj. 1] 7.  $a = \frac{P - 2I}{2}$ ; [Sec. 3.1, Obj. 3]
8. 5833.33 [Sec. 3.3, Obj. 4] 9.  $20^\circ, 40^\circ, 120^\circ$ ; [Sec. 3.4, Obj. 1] 10.  $125x^{11}y^7$ ; [Sec. 4.1, Obj. 3] 11.  $x^2 - 4xy + 4y^2$ ;
- [Sec. 4.5, Obj. 5] 12.  $(2n + 3)(n - 4)$ ; [Sec. 5.4, Obj. 1] 13.  $-5, 8$ ; [Sec. 5.6, Obj. 2] 14.  $\frac{x + 2}{3}$ ; [Sec. 6.2, Obj. 1]
15.  $-12$ ; [Sec. 6.6, Obj. 1] 16. ; [Sec. 7.2, Obj. 3] 17. ; [Sec. 7.2, Obj. 3]

18. Un número infinito de soluciones; [Sec. 8.1, Obj. 2].



20.  $(-\frac{28}{3}, -18)$ ; [Sec. 8.3, Obj. 1]

# Capítulo 9

## Raíces y radicales



- 9.1** Evaluación de raíces cuadradas
  - 9.2** Simplificación de raíces cuadradas
  - 9.3** Suma, resta y multiplicación de raíces cuadradas
  - 9.4** División de raíces cuadradas
  - 9.5** Solución de ecuaciones con radicales
  - 9.6** Radicales: Aplicaciones y solución de problemas
  - 9.7** Raíces de orden superior y exponentes racionales
- Resumen del capítulo  
Ejercicios de repaso del capítulo  
Examen de práctica del capítulo  
Examen de repaso acumulativo

Quando determinamos una distancia u otras cosas que se miden, con frecuencia la respuesta que se obtiene es un número irracional, que incluye (por ejemplo, una raíz cuadrada). Cuando obtenemos una respuesta con radicales, en ocasiones la redondeamos a un número decimal. Muchas fórmulas científicas y matemáticas implican raíces cuadradas, incluyendo la fórmula para determinar la velocidad con que choca con el suelo un objeto que se dejó caer desde cierta altura. De acuerdo con la leyenda, Galileo Galilei experimentó con la caída de objetos utilizando la torre inclinada de Pisa. En el ejemplo 5, en la página 596, determinamos que un coco que cae desde 20 pies de altura golpeará el suelo a una velocidad aproximada de 35.78 pies por segundo.





## Avance de la lección

**E**n este capítulo estudiaremos raíces, expresiones con radicales y ecuaciones con radicales, resaltando las raíces cuadradas. Éstas son un tipo de expresiones radicales. En las secciones 9.1 a 9.4 aprenderemos a evaluar una raíz cuadrada, a simplificar expresiones con radicales y a sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones que incluyen raíces cuadradas. En la sección 9.5 analizaremos la solución de ecuaciones que tienen raíces cuadradas. La sección 9.6, Radicales: Aplicaciones y solución de problemas, es una ampliación de la sección 9.5 y presenta algunos usos de las raíces cuadradas en la vida real. En la sección 9.7 analizaremos raíces cúbicas y raíces de orden superior. Sugerimos de manera muy enfática que utilice una calculadora científica o graficadora para éste y el capítulo siguiente.

Las expresiones y ecuaciones con radicales desempeñan un papel importante en las matemáticas y en las ciencias. Muchas fórmulas matemáticas y científicas incluyen radicales. Como veremos en el capítulo 10, una de las fórmulas más importantes en matemáticas, la fórmula cuadrática, incluye una raíz cuadrada.

## 9.1 EVALUACIÓN DE RAÍCES CUADRADAS



- 1 Evaluar raíces cuadradas de números reales.
- 2 Reconocer que no todas las raíces cuadradas representan números reales.
- 3 Determinar si la raíz cuadrada de un número real es racional o irracional.
- 4 Escribir raíces cuadradas como expresiones exponenciales.

## 1 Evaluar raíces cuadradas de números reales

Anteriormente analizamos cómo determinar el cuadrado de un número. Recuerde que cuando elevamos al cuadrado un número, lo multiplicamos por él mismo. Por ejemplo,

$$\text{Si } a = 5, \text{ entonces } a^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

$$\text{Si } a = -5, \text{ entonces } a^2 = (-5)(-5) = 25$$

En este capítulo consideramos el problema inverso. Es decir, si conocemos el cuadrado de un número, ¿cuál es ese número? Por ejemplo,

$$\text{Si } a^2 = 25, \text{ entonces } \zeta \text{cuáles son los valores } a?$$

En la proposición anterior, para determinar  $a$  debemos encontrar los valores que al multiplicarse por sí mismos, su producto sea 25. Como  $5 \cdot 5 = 25$  y  $(-5)(-5) = 25$ ,  $a$  tiene dos valores,  $-5$  y  $5$ .

La determinación de la **raíz cuadrada** de un número dado es el proceso inverso de elevar al cuadrado un número. Cuando encontramos la raíz cuadrada de un número dado, estamos determinando qué números, cuando se multiplican por ellos mismos, tienen como resultado el número dado. Todo número real mayor que 0 tiene dos raíces cuadradas, una raíz cuadrada positiva y una negativa. Por ejemplo, el número 25 tiene dos raíces cuadradas,  $-5$  y  $5$ . Utilizamos el símbolo  $\sqrt{\quad}$  para indicar la **raíz cuadrada positiva** o **principal** de un número. Por ejemplo,

$$\sqrt{25} = 5 \quad (\text{La raíz cuadrada principal de 25 es 5.})$$

Utilizamos el símbolo  $-\sqrt{\quad}$  para denotar a la raíz cuadrada negativa de un número. Por ejemplo,

$$-\sqrt{25} = -5 \quad (\text{La raíz cuadrada negativa de 25 es } -5.)$$

La raíz cuadrada negativa es el inverso aditivo u opuesto de la raíz cuadrada principal. El material del siguiente recuadro resume esta información y proporciona información acerca de las raíces cuadradas.



## RAÍCES CUADRADAS

La **raíz cuadrada positiva** o **principal** de un número positivo,  $a$ , se escribe como  $\sqrt{a}$ . La raíz cuadrada negativa se escribe como  $-\sqrt{a}$ .

$$\sqrt{a} = b \text{ si } b^2 = a$$

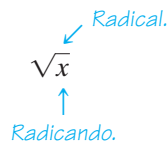
Además, la raíz cuadrada de 0 es 0, se escribe  $\sqrt{0} = 0$ .

Observe que **la raíz cuadrada principal de un número positivo,  $a$ , es el número positivo cuyo cuadrado es igual a  $a$ . En este libro, siempre que utilicemos el término raíz cuadrada, nos referiremos a la raíz cuadrada positiva o principal.**

Las raíces cuadradas son un tipo de expresiones radicales que utilizará tanto en matemáticas como en ciencias.

$\sqrt{x}$  se lee “la raíz cuadrada de  $x$ ”.

El símbolo  $\sqrt{\quad}$  se denomina **radical**. El número o expresión dentro del radical se denomina **radicando**.



Denominamos **expresión radical** (o expresión con radical) a toda la expresión, incluyendo el radical y el radicando.

Otra parte de una expresión radical es su **índice**. El índice indica la “raíz” de la expresión. Las raíces cuadradas tienen un índice de 2. Por lo común, el índice de una raíz cuadrada no se escribe.



Otro tipo de expresiones con radical tienen índices diferentes. Por ejemplo,  $\sqrt[3]{x}$ , que se lee “raíz cúbica de  $x$ ”, tiene un índice de 3. Las raíces cúbicas se analizan en la sección 9.7.

Ahora determinemos algunas raíces cuadradas.

## Ejemplos

$$\sqrt{25} = 5$$

$$\text{ya que } 5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

$$\sqrt{64} = 8$$

$$\text{ya que } 8^2 = 8 \cdot 8 = 64$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ya que } \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{ya que } \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

**EJEMPLO 1** Evalúe. **a)**  $\sqrt{81}$       **b)**  $\sqrt{100}$

**Solución** **a)**  $\sqrt{81} = 9$  ya que  $9^2 = (9)(9) = 81$

**b)**  $\sqrt{100} = 10$  ya que  $(10)^2 = (10)(10) = 100$



**EJEMPLO 2** Evalúe. **a)**  $-\sqrt{81}$       **b)**  $-\sqrt{100}$

**Solución** **a)**  $\sqrt{81} = 9$ . Ahora tomamos el opuesto de ambos lados para obtener

$$-\sqrt{81} = -9$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 21

**b)** De forma análoga,  $-\sqrt{100} = -10$ .



## 2 Reconocer que no todas las raíces cuadradas representan números reales

Debe entender que las **raíces cuadradas de números negativos no son números reales**. Considere  $\sqrt{-4}$ ; ¿a qué es igual  $\sqrt{-4}$ ? Para evaluar  $\sqrt{-4}$ , debemos encontrar algún número cuyo cuadrado sea igual a  $-4$ . Pero sabemos que el cuadrado de cualquier número real distinto de cero debe ser un número positivo. Por tanto, ningún número real elevado al cuadrado es igual a  $-4$ , por lo que  $\sqrt{-4}$  no es un número real. Los números como  $\sqrt{-4}$ , o raíces cuadradas de cualquier número negativo, se denominan **números imaginarios**. Estudiaremos los números imaginarios en la sección 10.5.

**EJEMPLO 3** Indique si la expresión radical es un número real o un número imaginario.

**a)**  $-\sqrt{16}$       **b)**  $\sqrt{-16}$       **c)**  $\sqrt{-37}$       **d)**  $-\sqrt{37}$

**Solución** **a)** Real (igual a  $-4$ )      **b)** Imaginario      **c)** Imaginario      **d)** Real.



### SUGERENCIA

La raíz cuadrada de cualquier número no negativo será un número real. La raíz cuadrada de cualquier número negativo será un número imaginario.

#### Ejemplos de números reales

$$-\sqrt{9}, \quad -\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad -\sqrt{6.74}, \quad -\sqrt{16}$$

↑                    ↑                    ↑                    ↑  
Los radicandos son números positivos

#### Ejemplos de números imaginarios

$$\sqrt{-9}, \quad \sqrt{-\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{-6.74}, \quad \sqrt{-16}$$

↑                    ↑                    ↑                    ↑  
Los radicandos son números negativos

Suponga que tenemos una expresión como  $\sqrt{x}$ , en donde  $x$  representa algún número. Para que el radical  $\sqrt{x}$  sea un número real, y no imaginario, debemos suponer que  $x$  es un número no negativo.

**En este capítulo, a menos que se diga otra cosa, supondremos que todas las expresiones que son radicandos representan números no negativos.**

## 3 Determinar si la raíz cuadrada de un número real es racional o irracional

Para ayudar en nuestro estudio de números racionales e irracionales, definiremos los cuadrados perfectos. Los números 1, 4, 9, 16, 36, 49, ... se denominan **cuadrados perfectos** ya que cada número es *el cuadrado de un número natural*. Cuando un cuadrado perfecto es un factor de un radicando, podemos hacer referencia a él como un **factor cuadrado perfecto**.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...      *Números naturales.*

$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, \dots$       *Los cuadrados de los números naturales.*

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...      *Cuadrados perfectos.*

¿Cuáles son los dos siguientes cuadrados perfectos? Observe que la raíz cuadrada de un cuadrado perfecto es un entero. Esto es,  $\sqrt{1} = 1$ ,  $\sqrt{4} = 2$ ,  $\sqrt{9} = 3$ ,  $\sqrt{16} = 4$ , y así sucesivamente.

La tabla 9.1 ilustra los primeros 20 cuadrados perfectos. Cuando simplifique expresiones radicales puede consultar esta tabla.

TABLA 9.1							
Cuadrado perfecto	Raíz cuadrada de un cuadrado perfecto	=	Valor	Cuadrado perfecto	Raíz cuadrada de un cuadrado perfecto	=	Valor
1	$\sqrt{1}$	=	1	121	$\sqrt{121}$	=	11
4	$\sqrt{4}$	=	2	144	$\sqrt{144}$	=	12
9	$\sqrt{9}$	=	3	169	$\sqrt{169}$	=	13
16	$\sqrt{16}$	=	4	196	$\sqrt{196}$	=	14
25	$\sqrt{25}$	=	5	225	$\sqrt{225}$	=	15
36	$\sqrt{36}$	=	6	256	$\sqrt{256}$	=	16
49	$\sqrt{49}$	=	7	289	$\sqrt{289}$	=	17
64	$\sqrt{64}$	=	8	324	$\sqrt{324}$	=	18
81	$\sqrt{81}$	=	9	361	$\sqrt{361}$	=	19
100	$\sqrt{100}$	=	10	400	$\sqrt{400}$	=	20

Un **número racional** es aquel que puede escribirse en la forma  $\frac{a}{b}$ , en donde  $a$  y  $b$  son enteros y  $b \neq 0$ . Ejemplos de números racionales son  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{5}$ ,  $-\frac{9}{2}$ , 4, y 0. Todos los enteros son números racionales, ya que pueden expresarse con un denominador de 1. Por ejemplo,  $4 = \frac{4}{1}$  y  $0 = \frac{0}{1}$ . Las raíces cuadradas de cuadrados perfectos también son números racionales, ya que cada uno es un entero. Cuando un número racional se escribe en forma decimal, será un decimal exacto o un decimal que se repite.

#### Decimales exactos

$$\frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{5}{8} = 0.625$$

$$\sqrt{4} = 2.0$$

#### Decimales que se repiten

$$\frac{1}{3} = 0.333 \dots$$

$$\frac{4}{9} = 0.444 \dots$$

$$\frac{1}{6} = 0.1666 \dots$$

Los números reales que no son números racionales se denominan **números irracionales**. Cuando éstos se escriben como decimales, no terminan ni se repiten. La raíz cuadrada de todo entero positivo que no sea cuadrado perfecto es un número irracional. Por ejemplo,  $\sqrt{2}$  y  $\sqrt{3}$  son números irracionales. Las 20 raíces cuadradas listadas en la tabla 9.1 son números racionales. Cualquier otra raíz cuadrada de un entero entre 1 y 400 es un número irracional. Por ejemplo, como  $\sqrt{50}$  es menor que  $\sqrt{400}$  y no está en la tabla 9.1, es un número irracional. Además, como  $\sqrt{50}$  está entre  $\sqrt{49}$  y  $\sqrt{64}$  en la tabla 9.1, el valor de  $\sqrt{50}$  está entre 7 y 8. Si evalúa  $\sqrt{50}$  con una calculadora, como explicaremos en el recuadro de la página siguiente, encontrará que  $\sqrt{50} \approx 7.07$ , redondeado al centésimo más cercano. Observe que como  $\sqrt{50}$  es un poco mayor que  $\sqrt{49}$ , el valor de  $\sqrt{50}$  es un poco mayor que 7.



## Uso de la calculadora

### Cómo evaluar raíces cuadradas con una calculadora

Podemos utilizar la tecla de raíz cuadrada en las calculadoras para determinar raíces cuadradas de números no negativos.

En algunas calculadoras científicas, para determinar la raíz cuadrada de 4, presionamos

$$4 \sqrt{x} 2$$

*Respuesta mostrada.*

En la calculadora graficadora TI-83 Plus, para determinar la raíz cuadrada de 4, presionamos

$$2^{\text{nd}} x^2 ( 4 ) \text{ ENTER } 2$$

*Para obtener  $\sqrt{\quad}$*

*Mostrado por la TI-83 Plus.*

Ambas calculadoras muestran la respuesta 2. Como 2 es un entero,  $\sqrt{4}$  es un número racional.

Si evaluamos  $\sqrt{7}$ , ¿qué mostraría la calculadora? La pantalla mostraría 2.6457513. Observe que  $\sqrt{7}$  es un número irracional, o un decimal que no es exacto ni se repite. El valor decimal de  $\sqrt{7}$ , o de cualquier otro número irracional, nunca puede darse de forma exacta. Las respuestas dadas en la pantalla de una calculadora sólo son aproximaciones cercanas de su valor.

Suponga que tratamos de evaluar  $\sqrt{-4}$  en una calculadora. ¿Cuál sería la respuesta que daría la calculadora? En una calculadora científica, presionamos:

$$4 \text{ +/- } \sqrt{x} \text{ Error}$$

*Respuesta mostrada.*

En una calculadora graficadora TI-83 Plus, presionamos

$$2^{\text{nd}} x^2 ( ( - ) 4 ) \text{ ENTER } \text{ERR: NONREAL ANS}$$

*Respuesta mostrada.*

Ambas calculadoras darían un mensaje de error, ya que la raíz cuadrada de  $-4$ , o la raíz cuadrada de cualquier otro número negativo, no es un número real.

### Ejercicios

Utilice su calculadora para evaluar cada raíz cuadrada.

1.  $\sqrt{15}$
2.  $\sqrt{151}$
3.  $\sqrt{-16}$
4.  $\sqrt{27}$

La figura 9.1 muestra la relación entre los diferentes tipos de números que estudiamos. Observe que los números racionales junto con los números irracionales forman los números reales, y los números imaginarios no son números reales, y viceversa.

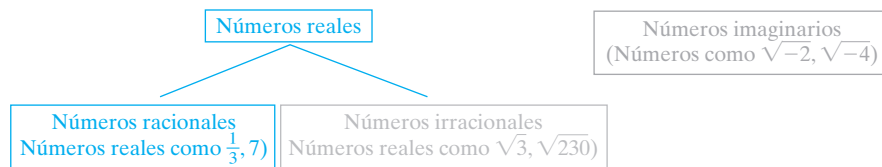


FIGURA 9.1

Al evaluar los radicales, podríamos utilizar el símbolo *es aproximadamente igual a*,  $\approx$ . Por ejemplo, podríamos escribir  $\sqrt{2} \approx 1.414$ . Eso se lee “la raíz cuadrada de 2 es aproximadamente igual a 1.414”. Recuerde que 2 no es un cuadrado perfecto, así que su raíz cuadrada no puede evaluarse de manera exacta.

**EJEMPLO 4** Utilice su calculadora o la tabla 9.1 para determinar si las raíces cuadradas siguientes son números racionales o irracionales.

a)  $\sqrt{123}$       b)  $\sqrt{196}$       c)  $\sqrt{326}$       d)  $\sqrt{289}$

**Solución**  
AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 61

- a) Irracional      b) Racional, igual a 14  
c) Irracional      d) Racional, igual a 17



#### 4 Escribir raíces cuadradas como expresiones exponenciales

Las expresiones radicales pueden escribirse en forma exponencial. Ya que hemos estudiado las raíces cuadradas, mostraremos cómo escribir raíces cuadradas en forma exponencial. Analizaremos la escritura de otros radicales en forma exponencial en la sección 9.7. Introducimos esta información aquí ya que podríamos utilizar la forma exponencial como una ayuda para explicar ciertos conceptos.

Recuerde que el índice de una raíz cuadrada es 2. Por ejemplo,

$$\sqrt{x} \text{ significa } \sqrt[2]{x}$$

Utilizamos el índice, 2, al escribir raíces cuadradas en forma exponencial. Para cambiar una expresión en la forma de raíz cuadrada a una expresión en la forma exponencial, simplemente escriba el radicando de la raíz cuadrada elevado a la potencia  $1/2$ , como sigue:

#### Cómo escribir una raíz cuadrada en forma exponencial

$$\sqrt{\square} = \square^{1/2} \leftarrow \text{Índice de la raíz cuadrada.}$$

↑  
Radicando.

Por ejemplo,  $\sqrt{8}$  en forma exponencial es  $8^{1/2}$ , y  $\sqrt{5ab} = (5ab)^{1/2}$ . Otros ejemplos son

Forma de raíz cuadrada		Forma exponencial
$\sqrt{25}$	=	$(25)^{1/2}$
$\sqrt{2x}$	=	$(2x)^{1/2}$
$\sqrt{15x^2y}$	=	$(15x^2y)^{1/2}$

**EJEMPLO 5** Escriba cada expresión radical en forma exponencial.

a)  $\sqrt{3}$       b)  $\sqrt{10x}$

**Solución** a)  $3^{1/2}$       b)  $(10x)^{1/2}$



AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 69

También podemos convertir una expresión de la forma exponencial a la forma radical. Para hacerlo, invertimos el proceso. Por ejemplo,  $(6x)^{1/2}$  puede escribirse como  $\sqrt{6x}$ , y  $(20x^4)^{1/2}$  puede escribirse como  $\sqrt{20x^4}$ .

Podemos aplicar las leyes o reglas de los exponentes presentadas en las secciones 4.1 y 4.2 a los exponentes racionales (o fraccionarios). Por ejemplo,

$$\begin{aligned} (x^2)^{1/2} &= x^{2(1/2)} = x^1 = x \\ (xy)^{1/2} &= x^{1/2}y^{1/2} \\ \text{y } x^{1/2} \cdot x^{3/2} &= x^{(1/2)+(3/2)} = x^{4/2} = x^2 \end{aligned}$$

## Conjunto de ejercicios 9.1

### Ejercicios conceptuales

1. ¿Cuál es la raíz cuadrada principal de un número real positivo  $a$ ?
2. a) ¿Qué indica el índice en una expresión radical?  
b) ¿Cómo se denomina la expresión dentro del radical?
3. Explique la diferencia entre un número racional y un número irracional.
4. Siempre que veamos una expresión dentro de una raíz cuadrada, ¿qué suposición haremos acerca de la expresión? ¿Por qué hacemos esta suposición?
5. Explique cómo determinaríamos si la raíz cuadrada de un entero positivo menor que 400 es un número racional o irracional a) por medio de una calculadora, y b) sin el uso de una calculadora.
6. Explique por qué la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real.
7. ¿Es correcta la expresión  $\sqrt{25} = 5$ ? Explique.
8. ¿Es correcta la expresión  $\sqrt{25} = -5$ ? Explique.
9. ¿Es correcta la expresión  $\sqrt{-25} = -5$ ? Explique.
10. ¿Es correcta la expresión  $-\sqrt{25} = -5$ ? Explique.
11. ¿ $\sqrt{\frac{16}{25}}$  es un número racional? Explique.
12. ¿ $\sqrt{\frac{13}{15}}$  es un número racional? Explique.

### Práctica de habilidades

Evalúe cada raíz cuadrada.

- |                             |                               |                            |                              |
|-----------------------------|-------------------------------|----------------------------|------------------------------|
| 13. $\sqrt{0}$              | 14. $\sqrt{16}$               | 15. $\sqrt{1}$             | 16. $\sqrt{64}$              |
| 17. $-\sqrt{49}$            | 18. $\sqrt{4}$                | 19. $\sqrt{400}$           | 20. $\sqrt{100}$             |
| 21. $-\sqrt{16}$            | 22. $-\sqrt{36}$              | 23. $\sqrt{144}$           | 24. $\sqrt{49}$              |
| 25. $\sqrt{169}$            | 26. $\sqrt{225}$              | 27. $-\sqrt{1}$            | 28. $-\sqrt{100}$            |
| 29. $\sqrt{81}$             | 30. $-\sqrt{49}$              | 31. $-\sqrt{121}$          | 32. $-\sqrt{196}$            |
| 33. $\sqrt{\frac{1}{4}}$    | 34. $\sqrt{\frac{25}{4}}$     | 35. $\sqrt{\frac{36}{49}}$ | 36. $\sqrt{\frac{25}{64}}$   |
| 37. $-\sqrt{\frac{25}{36}}$ | 38. $-\sqrt{\frac{100}{144}}$ | 39. $\sqrt{\frac{81}{49}}$ | 40. $\sqrt{\frac{121}{169}}$ |

Utilice su calculadora para evaluar cada raíz cuadrada. Escriba su respuesta con siete decimales.

- |                 |                 |                  |                  |
|-----------------|-----------------|------------------|------------------|
| 41. $\sqrt{12}$ | 42. $\sqrt{2}$  | 43. $\sqrt{15}$  | 44. $\sqrt{30}$  |
| 45. $\sqrt{80}$ | 46. $\sqrt{79}$ | 47. $\sqrt{324}$ | 48. $\sqrt{121}$ |
| 49. $\sqrt{97}$ | 50. $\sqrt{43}$ | 51. $\sqrt{3}$   | 52. $\sqrt{40}$  |

Indique si cada proposición es verdadera o falsa.

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 53. $\sqrt{18}$ es un número racional.           | 54. $\sqrt{-25}$ es un número real.      | 55. $\sqrt{25}$ es un número racional.          |
| 56. $\sqrt{5}$ es un número irracional.          | 57. $\sqrt{4}$ es un número irracional.  | 58. $\sqrt{\frac{1}{4}}$ es un número racional. |
| 59. $\sqrt{\frac{9}{16}}$ es un número racional. | 60. $\sqrt{231}$ es un número racional.  | 61. $\sqrt{125}$ es un número irracional.       |
| 62. $\sqrt{27}$ es un número irracional.         | 63. $\sqrt{(15)^2}$ es un número entero. | 64. $\sqrt{(12)^2}$ es un número entero.        |

Escriba en forma exponencial.

65.  $\sqrt{7}$

66.  $\sqrt{31}$

67.  $\sqrt{17}$

68.  $\sqrt{36}$

69.  $\sqrt{8x}$

70.  $\sqrt{5x}$

71.  $\sqrt{12x^2}$

72.  $\sqrt{25x^2y}$

73.  $\sqrt{15ab^2}$

74.  $\sqrt{34x^3y}$

75.  $\sqrt{62n^3}$

76.  $\sqrt{36x^3y^3}$

## Solución de problemas

77. Clasifique cada número como racional, irracional o imaginario.

$$9.83, \sqrt{-4}, \frac{3}{5}, 0.333\dots, 5, \sqrt{\frac{4}{49}}, \frac{3}{7}, \sqrt{\frac{5}{16}}, -\sqrt{9}, -\sqrt{-16}$$

78. Clasifique cada número como racional, irracional o imaginario.

$$\sqrt{5}, 8.23, \sqrt{-7}, 10, \frac{1}{3}, 0.33, \sqrt{\frac{25}{64}}, -\sqrt{90}$$

79. ¿Entre cuáles enteros consecutivos se encuentra la raíz cuadrada de 47? No utilice su calculadora ni la tabla 9.1. Explique cómo determinó su respuesta.

80. ¿Entre cuáles enteros consecutivos se encuentra la raíz cuadrada de 88? No utilice su calculadora ni la tabla 9.1. Explique cómo determinó su respuesta.

81. a) Explique cómo puede determinar, sin el uso de una calculadora, cuál es mayor: 4.6 o  $\sqrt{20}$ .

b) Sin usar una calculadora, determine cuál es mayor.

82. a) Explique cómo puede determinar, sin el uso de una calculadora, cuál es mayor: 7.2 o  $\sqrt{58}$ .

b) Sin usar una calculadora, determine cuál es mayor.

83. Ordene la siguiente lista de menor a mayor. No utilice una calculadora ni la tabla 9.1.

$$5, -\sqrt{9}, -\sqrt{7}, 12, 2.5, -\frac{1}{2}, 4.01, \sqrt{16}$$

84. Ordene la siguiente lista de menor a mayor. No utilice una calculadora ni la tabla 9.1.

$$-\frac{1}{3}, -\sqrt{9}, 5, 0, \sqrt{9}, 8, -2, 3.25$$

85. Relacione cada número en la columna de la izquierda con la respuesta correspondiente en la columna de la derecha.

$$\sqrt{4} \quad \text{número imaginario}$$

$$6^{1/2} \quad 2$$

$$-\sqrt{9} \quad \approx 2.45$$

$$-(25)^{1/2} \quad -5$$

$$(30)^{1/2} \quad -3$$

$$(-4)^{1/2} \quad \approx 5.48$$

86. Relacione cada número en la columna de la izquierda con la respuesta correspondiente en la columna de la derecha.

$$-\sqrt{36} \quad 10$$

$$(40)^{1/2} \quad -7$$

$$\sqrt{100} \quad \text{número imaginario}$$

$$(10)^{1/2} \quad \approx 6.32$$

$$-(49)^{1/2} \quad \approx 3.16$$

$$(-16)^{1/2} \quad -6$$

87. ¿Es  $\sqrt{0}$

a) un número real?

b) un número positivo?

c) un número negativo?

d) un número racional?

e) un número irracional? Explique su respuesta.

## Problemas de reto

Veremos los siguientes conceptos en las secciones 9.2 y 9.3.

88. a) ¿Es  $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$  igual a  $\sqrt{4 \cdot 9}$ ?

b) ¿Es  $\sqrt{9} \cdot \sqrt{25}$  igual a  $\sqrt{9 \cdot 25}$ ?

c) Utilizando estos dos ejemplos, ¿puede concluir a qué es igual  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$  (siempre que  $a \geq 0, b \geq 0$ )?

d) Cree su propio problema como los dados en los incisos a) y b) para ver si la respuesta que dio en el inciso c) funciona con sus números.

89. a) ¿Es  $\sqrt{2^2}$  igual a 2?

b) ¿Es  $\sqrt{5^2}$  igual a 5?

c) Utilizando estos dos ejemplos, ¿puede concluir a qué es igual  $\sqrt{a^2}, a \geq 0$ ?

d) Cree su propio problema como los dados en los incisos a) y b) para ver si la respuesta que dio en el inciso c) funciona con sus números.

90. a) ¿Es  $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}}$  igual a  $\sqrt{\frac{16}{4}}$ ?

b) ¿Es  $\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}}$  igual a  $\sqrt{\frac{36}{9}}$ ?

- c) Utilizando estos dos ejemplos, ¿puede concluir a qué es igual  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$  (siempre que  $a \geq 0, b > 0$ )?
- d) Cree su propio problema como los dados en los incisos a) y b) para ver si la respuesta que dio en el inciso c) funciona con sus números.

Las reglas de los exponentes estudiadas en el capítulo 4, también son válidas con exponentes racionales. Utilice las reglas de los exponentes para simplificar las siguientes expresiones. En la sección 9.7 analizaremos problemas como éstos.

91.  $(x^3)^{1/2}$

92.  $(x^4)^{1/2}$

93.  $x^{1/2} \cdot x^{5/2}$

94.  $x^{3/2} \cdot x^{1/2}$

## Ejercicios de repaso acumulativo

- [3.3] 95. **Salto en un trampolín** Allison saltó durante un minuto en un trampolín, y luego su mamá Elizabeth saltó en el trampolín durante un minuto. Si Allison dio el doble de saltos que su madre, y el número total de saltos fue 78, determine el número de saltos que dio Allison.



- [6.6] Resuelva

96.  $\frac{2x}{x^2 - 4} + \frac{1}{x - 2} = \frac{2}{x + 2}$

97.  $\frac{4x}{x^2 + 6x + 9} - \frac{2x}{x + 3} = \frac{x + 1}{x + 3}$

- [7.3] 98. Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $(-5, 3)$  y  $(6, 7)$ .

- [7.6] 99. Si  $f(x) = x^2 - 4x - 5$ , determine  $f(-3)$ .

## 9.2 SIMPLIFICACIÓN DE RAÍCES CUADRADAS



- 1 Utilizar la regla del producto para simplificar raíces cuadradas que tienen constantes.
- 2 Utilizar la regla del producto para simplificar raíces cuadradas que tienen variables.

### 1 Utilizar la regla del producto para simplificar raíces cuadradas que tienen constantes

En esta sección, para simplificar raíces cuadradas utilizaremos la **regla del producto para raíces cuadradas**.

#### Regla del producto para raíces cuadradas

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}, \text{ siempre que } a \geq 0, b \geq 0 \quad \text{Regla 1}$$

La regla del producto indica que el producto de dos raíces cuadradas es igual a la raíz cuadrada del producto de los radicandos. La regla del producto sólo se aplica cuando tanto  $a$  como  $b$  son no negativos, ya que las raíces cuadradas de números negativos no son números reales.



## Ejemplos de la regla del producto

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{1} \cdot \sqrt{60} &= \sqrt{1 \cdot 60} \\ \sqrt{2} \cdot \sqrt{30} &= \sqrt{2 \cdot 30} \\ \sqrt{3} \cdot \sqrt{20} &= \sqrt{3 \cdot 20} \\ \sqrt{4} \cdot \sqrt{15} &= \sqrt{4 \cdot 15} \\ \sqrt{6} \cdot \sqrt{10} &= \sqrt{6 \cdot 10} \end{aligned} \right\} = \sqrt{60}$$

Observe que  $\sqrt{60}$  puede factorizarse en cualquiera de estas formas.

Cuando dos raíces cuadradas se colocan una junto a la otra, las raíces cuadradas se están multiplicando. Por tanto,  $\sqrt{a} \sqrt{b}$  significa  $\sqrt{a \cdot b}$ .


## Para simplificar la raíz cuadrada de una constante

1. Escriba la constante como un producto del factor más grande que sea cuadrado perfecto y otro factor.
2. Utilice la regla del producto para escribir la expresión como un producto de raíces cuadradas; cada raíz cuadrada tendrá como radicando uno de los factores.
3. Determine la raíz cuadrada del factor que es cuadrado perfecto.

**EJEMPLO 1** Simplifique  $\sqrt{60}$ .

**Solución** El único factor cuadrado perfecto de 60 es 4.

$$\begin{aligned} \sqrt{60} &= \sqrt{4 \cdot 15} \\ &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{15} \\ &= 2\sqrt{15} \end{aligned}$$

Como 15 no es un cuadrado perfecto y no tiene factores que sean cuadrados perfectos, esta expresión no puede simplificarse más. La expresión  $2\sqrt{15}$  se lee “dos veces la raíz cuadrada de quince”. 

**EJEMPLO 2** Simplifique  $\sqrt{12}$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} \sqrt{12} &= \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$



**EJEMPLO 3** Simplifique  $\sqrt{80}$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} \sqrt{80} &= \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} \\ &= 4\sqrt{5} \end{aligned}$$



**EJEMPLO 4** Simplifique  $\sqrt{245}$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} \sqrt{245} &= \sqrt{49 \cdot 5} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{5} \\ &= 7\sqrt{5} \end{aligned}$$



## SUGERENCIA

Al simplificar una raíz cuadrada, no es raro utilizar un factor que sea cuadrado perfecto pero que no sea el factor cuadrado perfecto *más grande* del radicando. Nuevamente, consideremos el ejemplo 3. Cuatro también es un factor de 80 que es cuadrado perfecto.

$$\sqrt{80} = \sqrt{4 \cdot 20} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{20} = 2\sqrt{20}$$

(continúa en la página siguiente)

Como 20 también tiene un factor 4, que es cuadrado perfecto, el problema aún no termina. En lugar de iniciar, otra vez, con el problema completo, puede continuar el proceso de simplificación como sigue

$$\sqrt{80} = 2\sqrt{20} = 2\sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$


Ahora el resultado coincide con la respuesta en el ejemplo 3.

**EJEMPLO 5**  
Solución

Simplifique  $\sqrt{140}$ .

$$\begin{aligned}\sqrt{140} &= \sqrt{4 \cdot 35} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{35} \\ &= 2\sqrt{35}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 21

Aunque 35 se puede factorizar como  $5 \cdot 7$ , ninguno de estos factores es un cuadrado perfecto. Así, la respuesta no puede simplificarse más. 

**2 Utilizar la regla del producto para simplificar raíces cuadradas que tienen variables**

Ahora simplificaremos raíces cuadradas que tienen variables en el radicando.

En la sección 9.1 notamos que ciertos números eran **cuadrados perfectos**. También nos referiremos a ciertas expresiones que tienen una variable como cuadrados perfectos. Cuando un radical tiene una variable (o número) elevado a un **exponente par**, esa variable (o número) junto con el exponente forma un cuadrado perfecto. Por ejemplo, en la expresión  $\sqrt{x^4}$ , el término  $x^4$  es un cuadrado perfecto ya que el exponente 4 es par. En la expresión  $\sqrt{x^5}$ ,  $x^5$  no es un cuadrado perfecto ya que el exponente es impar. Sin embargo,  $x^4$  es un **factor cuadrado perfecto** de  $x^5$  porque  $x^4$  es un cuadrado perfecto y  $x^4$  es un factor de  $x^5$ . Observe que  $x^5 = x^4 \cdot x$ .

Para evaluar raíces cuadradas cuando el radicando es un cuadrado perfecto, utilizamos la siguiente regla.

$$\sqrt{a^{2n}} = a^n, \quad a \geq 0 \quad \text{Regla 2}$$

Esta regla indica que **la raíz cuadrada de una variable elevada a una potencia par es igual a la variable elevada a la mitad de esa potencia**. Para explicar esta regla, podemos escribir la expresión con raíz cuadrada  $\sqrt{a^{2n}}$  en forma exponencial y luego simplificar como sigue.

$$\sqrt{a^{2n}} = (a^{2n})^{1/2} = a^{2n(1/2)} = a^n$$

A continuación se dan ejemplos de la regla 2. Recuerde que estamos asumiendo que las variables representan números reales no negativos.

**Ejemplos**

$$\sqrt{x^2} = x$$

$$\sqrt{a^4} = a^2$$

$$\sqrt{y^{16}} = y^8$$

$$\sqrt{z^{28}} = z^{14}$$

Un caso especial de la regla 2 (cuando  $n = 1$ ) es

$$\sqrt{a^2} = a, \quad a \geq 0$$

**EJEMPLO 6**  
Solución

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 35

Simplifique **a)**  $\sqrt{x^{30}}$

$$\mathbf{a)} \quad \sqrt{x^{30}} = x^{15}$$

**b)**  $\sqrt{x^4 y^6}$

$$\mathbf{b)} \quad \sqrt{x^4 y^6} = \sqrt{x^4} \sqrt{y^6} = x^2 y^3$$

**c)**  $\sqrt{a^{10} b^2}$

$$\mathbf{c)} \quad \sqrt{a^{10} b^2} = \sqrt{a^{10}} \sqrt{b^2} = a^5 b$$

**d)**  $\sqrt{y^{12} z^{18}}$

$$\mathbf{d)} \quad \sqrt{y^{12} z^{18}} = \sqrt{y^{12}} \sqrt{z^{18}} = y^6 z^9$$



**Para simplificar la raíz cuadrada de un radicando que tiene una variable elevada a una potencia impar**

1. Exprese la variable como el producto de dos factores, uno de los cuales tiene un exponente de 1 (por tanto, el otro será un cuadrado perfecto).
2. Utilice la regla del producto para simplificar.

**El radicando de su respuesta simplificada no debe tener ningún factor que sea cuadrado perfecto o alguna variable con un exponente mayor a 1.**


Los ejemplos 7 y 8 ilustran el procedimiento anterior

**EJEMPLO 7** Simplifique **a)**  $\sqrt{x^3}$     **b)**  $\sqrt{y^7}$     **c)**  $\sqrt{a^{79}}$

**Solución**

**a)**  $\sqrt{x^3} = \sqrt{x^2 \cdot x} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x}$     *(Recuerde que  $x$  significa  $x^1$ ).*  
 $= x \cdot \sqrt{x}$  o bien  $x\sqrt{x}$

**b)**  $\sqrt{y^7} = \sqrt{y^6 \cdot y^1} = \sqrt{y^6} \cdot \sqrt{y}$   
 $= y^3 \sqrt{y}$

**c)**  $\sqrt{a^{79}} = \sqrt{a^{78} \cdot a} = \sqrt{a^{78}} \cdot \sqrt{a}$   
 $= a^{39} \sqrt{a}$  


Radicales más complejos pueden simplificarse por medio de la regla del producto para radicales y los principios analizados en esta sección.

**EJEMPLO 8** Simplifique. **a)**  $\sqrt{25x^3}$     **b)**  $\sqrt{50x^2}$     **c)**  $\sqrt{50x^3}$

**Solución** Escriba cada expresión como el producto de raíces cuadradas, una de las cuales tiene un radicando que es un cuadrado perfecto.

**a)**  $\sqrt{25x^3} = \sqrt{25x^2} \cdot \sqrt{x} = 5x\sqrt{x}$

**b)**  $\sqrt{50x^2} = \sqrt{25x^2} \cdot \sqrt{2} = 5x\sqrt{2}$


**c)**  $\sqrt{50x^3} = \sqrt{25x^2} \cdot \sqrt{2x} = 5x\sqrt{2x}$  

**EJEMPLO 9** Simplifique. **a)**  $\sqrt{50x^2y}$     **b)**  $\sqrt{45x^3y^4}$     **c)**  $\sqrt{98a^9b^7}$

**Solución**

**a)**  $\sqrt{50x^2y} = \sqrt{25x^2} \cdot \sqrt{2y}$     *Escriba  $\sqrt{50x^2y}$  como producto de un factor cuadrado perfecto y otro factor.*  
 $= 5x\sqrt{2y}$     *Simplifique el factor cuadrado perfecto.*

**b)**  $\sqrt{45x^3y^4} = \sqrt{9x^2y^4} \cdot \sqrt{5x}$     *Escriba  $\sqrt{45x^3y^4}$  como producto de un factor cuadrado perfecto y otro factor.*  
 $= 3xy^2\sqrt{5x}$     *Simplifique el factor cuadrado perfecto.*

**c)**  $\sqrt{98a^9b^7} = \sqrt{49a^8b^6} \cdot \sqrt{2ab}$     *Escriba  $\sqrt{98a^9b^7}$  como producto de un factor cuadrado perfecto y otro factor.*  
 $= 7a^4b^3\sqrt{2ab}$     *Simplifique el factor cuadrado perfecto.* 

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 45**

Ahora veamos un ejemplo en donde utilizamos la regla del producto para multiplicar dos radicales antes de simplificar.

**EJEMPLO 10** Multiplique y luego simplifique.

**a)**  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$     **b)**  $\sqrt{2x} \cdot \sqrt{8}$     **c)**  $(\sqrt{3x})^2$

**Solución**

a)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$   
 b)  $\sqrt{2x} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16x} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{x} = 4\sqrt{x}$   
 c)  $(\sqrt{3x})^2 = \sqrt{3x} \cdot \sqrt{3x} = \sqrt{9x^2} = 3x$



**EJEMPLO 11** Multiplique y luego simplifique.

a)  $\sqrt{8x^3y} \sqrt{4xy^5}$     b)  $\sqrt{5ab^8} \sqrt{6a^5b}$

**Solución**

a)  $\sqrt{8x^3y} \sqrt{4xy^5} = \sqrt{32x^4y^6} = \sqrt{16x^4y^6} \cdot \sqrt{2}$   
 $= 4x^2y^3\sqrt{2}$   
 b)  $\sqrt{5ab^8} \sqrt{6a^5b} = \sqrt{30a^6b^9} = \sqrt{a^6b^8} \cdot \sqrt{30b}$   
 $= a^3b^4\sqrt{30b}$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 63**

En el inciso **b)**, se puede factorizar 30 de varias maneras. Sin embargo, ninguno de los factores es cuadrado perfecto, así que dejamos la respuesta como está dada.



## Conjunto de ejercicios 9.2

### Ejercicios conceptuales

1. Establezca la regla del producto para raíces cuadradas y explique lo que significa.
2. a) Explique cómo simplificar una raíz cuadrada que sólo tiene una constante.  
b) Simplifique  $\sqrt{20}$  utilizando el procedimiento que dio en el inciso a).
3. Explique por qué la regla del producto no puede utilizarse para simplificar el problema  $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9}$ .
4. Aprendimos que para  $a \geq 0$ ,  $\sqrt{a^{2n}} = a^n$ . Explique lo que significa.
5. a) Explique cómo simplificar la raíz cuadrada de un radical que tiene una variable elevada a una potencia impar.  
b) Con el procedimiento que dio en el inciso a), simplifique  $\sqrt{x^{13}}$ .
6. a) Explique por qué  $\sqrt{32x^3}$  no es una expresión simplificada.  
b) Simplifique  $\sqrt{32x^3}$ .
7. a) Explique por qué  $\sqrt{75x^5}$  no es una expresión simplificada.  
b) Simplifique  $\sqrt{75x^5}$ .
8. Utilice la regla del producto para escribir  $\sqrt{40}$  como un producto con cuatro factores diferentes.

Determine si la raíz cuadrada del lado derecho del signo igual es la forma simplificada de la raíz cuadrada del lado izquierdo del signo igual. Si no es así, simplifíquela de manera adecuada.

9.  $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

10.  $\sqrt{x^5} = x^2\sqrt{x}$

11.  $\sqrt{32} = 2\sqrt{8}$

12.  $\sqrt{x^9} = x\sqrt{x^7}$

### Práctica de habilidades

Simplifique.

13.  $\sqrt{12}$

14.  $\sqrt{18}$

15.  $\sqrt{8}$

16.  $\sqrt{45}$

17.  $\sqrt{96}$

18.  $\sqrt{75}$

19.  $\sqrt{32}$

20.  $\sqrt{52}$

21.  $\sqrt{160}$

22.  $\sqrt{44}$

23.  $\sqrt{80}$

24.  $\sqrt{27}$

25.  $\sqrt{72}$

26.  $\sqrt{147}$

27.  $\sqrt{140}$

28.  $\sqrt{180}$

29.  $\sqrt{243}$

30.  $\sqrt{135}$

31.  $\sqrt{150}$

32.  $\sqrt{x^4}$

33.  $\sqrt{x^6}$

34.  $\sqrt{y^{13}}$

35.  $\sqrt{x^2y^4}$

36.  $\sqrt{xy^2}$

37.  $\sqrt{a^{12}b^9}$

38.  $\sqrt{x^4y^5z^6}$

39.  $\sqrt{a^2b^4c}$

40.  $\sqrt{a^3b^9c^{11}}$

41.  $\sqrt{3n^3}$

42.  $\sqrt{12x^4y^2}$

43.  $\sqrt{75a^3b^2}$

44.  $\sqrt{150m^4n^3}$

45.  $\sqrt{300a^5b^{11}}$

46.  $\sqrt{64xyz^5}$

47.  $\sqrt{243x^3y^4}$

48.  $\sqrt{500ab^4c^3}$

49.  $\sqrt{108a^2b^7c}$

50.  $\sqrt{112x^6y^8}$

51.  $\sqrt{180r^3s^4t^5}$

52.  $\sqrt{98x^4y^4z}$

Simplifique.

53.  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$

56.  $\sqrt{60} \cdot \sqrt{5}$

59.  $\sqrt{3x} \sqrt{7x}$

62.  $\sqrt{30b^2} \sqrt{6b^5}$

65.  $\sqrt{3r^4s^7} \sqrt{21r^6s^5}$

68.  $\sqrt{14xyz^5} \sqrt{3xy^2z^6}$

71.  $(\sqrt{2x})^2$

74.  $\sqrt{36x^2y^7} \sqrt{2x^4y}$

54.  $\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}$

57.  $\sqrt{48} \cdot \sqrt{15}$

60.  $\sqrt{3x^3} \sqrt{3x}$

63.  $\sqrt{6xy^3} \sqrt{12x^2y}$

66.  $\sqrt{20x^3y} \sqrt{6x^3y^5}$

69.  $\sqrt{6a^2b^4} \sqrt{9a^4b^6}$

72.  $(\sqrt{6x^2})^2$

75.  $(\sqrt{5a})^2(\sqrt{3a})^2$

55.  $\sqrt{24} \cdot \sqrt{5}$

58.  $\sqrt{30} \cdot \sqrt{5}$

61.  $\sqrt{4a^2} \sqrt{12ab^2}$

64.  $\sqrt{20xy^4} \sqrt{6x^5}$

67.  $\sqrt{15xy^6} \sqrt{6xyz}$

70.  $\sqrt{6a^4b^5c^6} \sqrt{3a^3bc^6}$

73.  $(\sqrt{13x^4y^6})^2$

76.  $(\sqrt{4ab})^2(\sqrt{3ab})^2$

## Solución de problemas

Para que las proposiciones sean verdaderas, ¿qué coeficientes y qué exponentes deben colocarse en las áreas sombreadas? Explique cómo obtuvo su respuesta.

77.  $\sqrt{25x^{\square}y^6} = 5x^2y^3$

79.  $\sqrt{4x^{\square}y^{\square}} = 2x^3y^2\sqrt{y}$

81.  $\sqrt{2x^{\square}y^5} \cdot \sqrt{\square x^3y^{\square}} = 4x^7y^6\sqrt{x}$

78.  $\sqrt{\square x^4y^{\square}} = 4x^2y^4$

80.  $\sqrt{3x^4y^{\square}} \cdot \sqrt{3x^{\square}y^5} = 3x^5y^7\sqrt{xy}$

82.  $\sqrt{32x^4z^{\square}} \cdot \sqrt{\square x^{\square}z^{12}} = 8x^5z^9\sqrt{z}$

83. a) Muestre todos los pasos, simplifique  $(\sqrt{13x^3})^2$ .

b) Muestre todos los pasos, simplifique  $\sqrt{(13x^3)^2}$ .

c) Compare sus resultados de los incisos a) y b). ¿Son iguales?

84. a) Muestre todos los pasos, simplifique  $(\sqrt{7x^4})^2$ .

b) Muestre todos los pasos, simplifique  $\sqrt{(7x^4)^2}$ .

c) Compare sus resultados de los incisos a) y b). ¿Son iguales?

Simplifique. Trate a  $\odot$  y  $\otimes$  como si fuesen variables.

85.  $\sqrt{200\odot^{11}}$

86.  $\sqrt{180\odot^7\otimes^{16}}$

87.  $\sqrt{5\odot^{100}} \cdot \sqrt{5\otimes^{36}}$

88.  $\sqrt{7\odot^{10}} \cdot \sqrt{343\otimes^{10}}$

## Problemas de reto

A continuación ilustramos dos simplificaciones que incluyen raíces cuadradas.

$$\sqrt{x^4} = (x^4)^{1/2} = x^{4(1/2)} = x^2$$

$$\sqrt{x^{2/4}} = (x^{2/4})^{1/2} = x^{(2/4)(1/2)} = x^{1/4}$$

En la sección 9.1 indicamos que la raíz cuadrada de una expresión puede escribirse como la expresión a la potencia  $\frac{1}{2}$ . Las reglas de los exponentes que estudiamos en la sección 4.1 también son válidas cuando los exponentes son números racionales. Utilice los dos ejemplos ilustrados y las reglas de los exponentes para simplificar los ejercicios 89 a 92. En la sección 9.7 analizaremos los exponentes racionales.

89.  $\sqrt{x^{2/6}}$

90.  $\sqrt{y^{10/12}}$

91.  $\sqrt{4x^{4/5}}$

92.  $\sqrt{25y^{8/3}}$

93. ¿ $\sqrt{6.25}$  es un número racional o irracional? Explique cómo determinó su respuesta.

94. a) En la sección 9.4 multiplicaremos expresiones como  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ , por medio del método PIES. ¿Puede determinar este producto ahora?

b) Multiplique  $(\sqrt{6} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{3})$ .

95. El área de un cuadrado se determinó por medio de la fórmula  $A = l^2$ . Posteriormente aprenderemos que podemos reescribir esta fórmula como  $l = \sqrt{A}$ .

a) Si el área es de 16 pies cuadrados, ¿cuál es la longitud de un lado?

b) Si se duplica el área, ¿la longitud el lado se duplica? Explique.

c) Para duplicar la longitud de un lado de un cuadrado, ¿cuánto debe aumentarse el área? Explique.

96. Sabemos que  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ , si  $a \geq 0$  y  $b \geq 0$ .

Si  $a \geq 0$  y  $b \geq 0$ , ¿ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ? Pruebe con varios pares de valores para  $a$  y  $b$ , y vea lo que sucede.

97. a) El producto de dos números racionales, ¿será siempre un número racional? Explique y proporcione un ejemplo que apoye su respuesta.

b) El producto de dos números irracionales, ¿será siempre un número irracional? Explique y proporcione un ejemplo que apoye su respuesta.



## Actividad en grupo

Aprendimos que  $\sqrt{\square} = \square^{1/2}$ . Por ejemplo,  $\sqrt{x^6} = (x^6)^{1/2} = x^3$ . Podemos simplificar  $\sqrt{x^{2n}}$  escribiendo la expresión en forma exponencial,  $\sqrt{x^{2n}} = (x^{2n})^{1/2} = x^{(2n)(1/2)} = x^n$ . En grupo, simplifiquen las siguientes raíces cuadradas escribiendo la expresión en forma exponencial. Muestren todos los pasos en el proceso de simplificación.

98.  $\sqrt{x^{10a}}$

99.  $\sqrt{x^{8b}}$

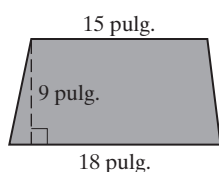
100.  $\sqrt{x^{4a}y^{12b}}$

101.  $\sqrt{x^{8b}y^{6c}}$

## Ejercicios de repaso acumulativo

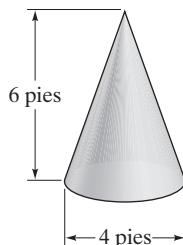
[3.1] 102. **Área** Determine el área del trapecio.

Utilice  $A = \frac{1}{2}h(b + B)$ .



103. **Volumen** Determine el volumen del cono.

Utilice  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ .



[6.2] 104. Divida  $\frac{3x^2 - 16x - 12}{3x^2 - 10x - 8} \div \frac{x^2 - 7x + 6}{3x^2 - 11x - 4}$ .

[7.4] 105. Escriba la ecuación  $3x + 6y = 9$  en la forma pendiente-ordenada al origen e indique la pendiente y la intersección con y.

[7.5] 106. Grafique  $6x - 5y \geq 30$ .

[8.3] 107. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$3x - 4y = 6$$

$$5x - 3y = 5$$

## 9.3 SUMA, RESTA Y MULTIPLICACIÓN DE RAÍCES CUADRADAS



- 1 Sumar y restar raíces cuadradas.
- 2 Multiplicar raíces cuadradas.

### 1 Sumar y restar raíces cuadradas

**Raíces cuadradas semejantes** son raíces cuadradas que tienen los mismos radicandos. Las raíces cuadradas semejantes se suman de forma muy parecida como se suman los términos semejantes; a continuación ilustramos cómo.

#### Ejemplos de sumas de términos semejantes

$$2x + 3x = (2 + 3)x = 5x$$

$$4x + x = 4x + 1x = (4 + 1)x = 5x$$

#### Ejemplos de sumas de raíces cuadradas semejantes

$$2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = (2 + 3)\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$$

$$6\sqrt{x} + \sqrt{x} = 6\sqrt{x} + 1\sqrt{x} = (6 + 1)\sqrt{x} = 7\sqrt{x}$$

Observe que la suma de raíces cuadradas semejantes es una aplicación de la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned} 2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} &= (2 + 3)\sqrt{7} \\ &= 5\sqrt{7} \end{aligned}$$

### Otros ejemplos de suma y resta de raíces cuadradas semejantes

$$\begin{aligned} 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} &= (2 - 3)\sqrt{5} = -1\sqrt{5} = -\sqrt{5} \\ \sqrt{x} + \sqrt{x} &= 1\sqrt{x} + 1\sqrt{x} = (1 + 1)\sqrt{x} = 2\sqrt{x} \\ 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} &= (6 + 3 - 1)\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \\ \frac{2\sqrt{3}}{5} + \frac{1\sqrt{3}}{5} &= \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right)\sqrt{3} = \frac{3}{5}\sqrt{3} \text{ o bien } \frac{3\sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$


### EJEMPLO 1 Simplifique, si es posible.

- a)  $4\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 6$                       b)  $\sqrt{6} - 4\sqrt{6} + 4$   
 c)  $5\sqrt{3} + 4\sqrt{y} - 2\sqrt{3} - 6\sqrt{y}$       d)  $2\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$

**Solución** a)  $4\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 6 = (4 + 3)\sqrt{5} - 6 = 7\sqrt{5} - 6$  *Sólo  $4\sqrt{5}$  y  $3\sqrt{5}$  pueden reducirse. Simplificar.*

b)  $\sqrt{6} - 4\sqrt{6} + 4 = (1 - 4)\sqrt{6} + 4 = -3\sqrt{6} + 4$

c)  $5\sqrt{3} + 4\sqrt{y} - 2\sqrt{3} - 6\sqrt{y} = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{y} - 6\sqrt{y} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{y}$  *Reunir los radicales semejantes. Simplificar.*

d) No pueden simplificarse ya que los radicandos son diferentes. 

Las respuestas en el ejemplo 1 podrían escribirse de forma diferente. Por ejemplo, la respuesta del inciso a) podría escribirse como  $-6 + 7\sqrt{5}$  por la propiedad conmutativa de la suma.

### EJEMPLO 2 Simplifique.


- a)  $3\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + 5\sqrt{x}$                       b)  $2\sqrt{a} + a + 4\sqrt{a}$   
 c)  $x + \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 3$                       d)  $x\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + x$   
 e)  $\sqrt{xy} + 2\sqrt{xy} - \sqrt{x}$

**Solución** a)  $3\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + 5\sqrt{x} = (3 - 4 + 5)\sqrt{x} = 4\sqrt{x}$  *Los tres términos son radicales semejantes.*

b)  $2\sqrt{a} + a + 4\sqrt{a} = a + 2\sqrt{a} + 4\sqrt{a} = a + 6\sqrt{a}$  *Reunir los radicales semejantes. Simplificar.*

c)  $x + \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 3 = x + 1\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 3 = x + 3\sqrt{x} + 3$   *$\sqrt{x}$  significa  $1\sqrt{x}$ . Sumar  $1\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$  para obtener  $3\sqrt{x}$ .*

d)  $x\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + x = (x + 3)\sqrt{x} + x$  *Sólo  $x\sqrt{x}$  y  $3\sqrt{x}$  pueden reducirse.*

e)  $\sqrt{xy} + 2\sqrt{xy} - \sqrt{x} = 3\sqrt{xy} - \sqrt{x}$  *Sólo  $\sqrt{xy}$  y  $2\sqrt{xy}$  pueden reducirse. *

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 19

**Raíces cuadradas no semejantes** son aquellas que tienen radicandos diferentes. En ocasiones es posible cambiar raíces cuadradas no semejantes en raíces cuadradas semejantes, por medio de la simplificación de radicales en la expresión. Después de simplificar, si los términos tienen el mismo radicando pueden reducirse. De otra forma, no pueden reducirse. Los ejemplos 3, 4 y 5 ilustran esto.

**EJEMPLO 3** Simplifique  $\sqrt{3} + \sqrt{12}$ .

**Solución** Como 12 tiene un cuadrado perfecto, 4, escribimos 12 como un producto del cuadrado perfecto y otro factor.

$$\begin{aligned}\sqrt{3} + \sqrt{12} &= \sqrt{3} + \sqrt{4 \cdot 3} \\ &= \sqrt{3} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} && \text{Regla del producto.} \\ &= \sqrt{3} + 2\sqrt{3} && \text{Ahora los términos son semejantes.} \\ &= 3\sqrt{3} && \text{Sumar las raíces cuadradas. } \star\end{aligned}$$

**EJEMPLO 4** Simplifique  $\sqrt{63} - \sqrt{28}$ .

**Solución** Escriba cada radicando como el producto de un factor cuadrado perfecto y otro factor.

$$\begin{aligned}\sqrt{63} - \sqrt{28} &= \sqrt{9 \cdot 7} - \sqrt{4 \cdot 7} \\ &= \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{4} \cdot \sqrt{7} && \text{Regla del producto.} \\ &= 3\sqrt{7} - 2\sqrt{7} && \text{Ahora los términos son semejantes.} \\ &= \sqrt{7} && \text{Restar las raíces cuadradas.}\end{aligned}$$

**EJEMPLO 5** Simplifique. **a)**  $2\sqrt{8} - \sqrt{32}$     **b)**  $3\sqrt{12} + 5\sqrt{27} + 2$     **c)**  $\sqrt{120} - \sqrt{75}$

**Solución** En cada inciso empezamos escribiendo cada raíz cuadrada como un producto de su mayor factor cuadrado perfecto, y otro factor. Luego simplificamos el factor cuadrado perfecto.

$$\begin{aligned}\mathbf{a)} \quad 2\sqrt{8} - \sqrt{32} &= 2\sqrt{4 \cdot 2} - \sqrt{16 \cdot 2} \\ &= 2\sqrt{4} \sqrt{2} - \sqrt{16} \sqrt{2} && \text{Regla del producto.} \\ &= 2 \cdot 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} && \text{Simplificar los factores cuadrados perfectos.} \\ &= 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} && \text{Simplificar.} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b)} \quad 3\sqrt{12} + 5\sqrt{27} + 2 &= 3\sqrt{4 \cdot 3} + 5\sqrt{9 \cdot 3} + 2 \\ &= 3\sqrt{4} \sqrt{3} + 5\sqrt{9} \sqrt{3} + 2 && \text{Regla del producto.} \\ &= 3 \cdot 2\sqrt{3} + 5 \cdot 3\sqrt{3} + 2 && \text{Simplif. los fact. cuad. perfec.} \\ &= 6\sqrt{3} + 15\sqrt{3} + 2 && \text{Simplificar.} \\ &= 21\sqrt{3} + 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{c)} \quad \sqrt{120} - \sqrt{75} &= \sqrt{4 \cdot 30} - \sqrt{25 \cdot 3} \\ &= \sqrt{4} \sqrt{30} - \sqrt{25} \sqrt{3} && \text{Regla del producto.} \\ &= 2\sqrt{30} - 5\sqrt{3} && \text{Simplificar los factores cuadrados perfectos.}\end{aligned}$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 27**

Como 30 no tiene factores que sean cuadrados perfectos y ya que los radicandos son diferentes, la expresión  $2\sqrt{30} - 5\sqrt{3}$  no puede simplificarse más.  $\star$

### CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

La regla del producto que presentamos en la sección 9.2 fue  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ . El mismo principio **no aplica a** la suma.

**INCORRECTO**

~~$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b}$$~~

Por ejemplo, para evaluar  $\sqrt{9} + \sqrt{16}$ ,

**CORRECTO**

$$\begin{aligned}\sqrt{9} + \sqrt{16} &= 3 + 4 \\ &= 7\end{aligned}$$

**INCORRECTO**

~~$$\begin{aligned}\sqrt{9} + \sqrt{16} &= \sqrt{9 + 16} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5\end{aligned}$$~~



## 2 Multiplicar raíces cuadradas

Ahora analicemos la multiplicación de raíces cuadradas. Anteriormente introdujimos la regla del producto para radicales. Ahora la extenderemos a la multiplicación de expresiones radicales.

Se puede utilizar la propiedad distributiva para multiplicar expresiones radicales. Cuando la utilizamos, cada término dentro del paréntesis se multiplica por el término que precede al paréntesis. A continuación mostramos algunos ejemplos.

$$\sqrt{6}(\sqrt{6} + 3) = (\sqrt{6})(\sqrt{6}) + (\sqrt{6})(3) = 6 + 3\sqrt{6}$$

$$\sqrt{5}(\sqrt{x} + y) = (\sqrt{5})(\sqrt{x}) + (\sqrt{5})(y) = \sqrt{5x} + y\sqrt{5}$$

Ahora resolveremos un ejemplo.

**EJEMPLO 6** Multiplique **a)**  $\sqrt{3}(\sqrt{6} - 2)$       **b)**  $\sqrt{2x}(\sqrt{x} + \sqrt{2y})$

**Solución**

**a)** Utilice la propiedad distributiva. Esto da

$$\begin{aligned}\sqrt{3}(\sqrt{6} - 2) &= (\sqrt{3})(\sqrt{6}) - (\sqrt{3})(2) \\ &= \sqrt{18} - 2\sqrt{3} && \text{Regla del producto.} \\ &= \sqrt{9 \cdot 2} - 2\sqrt{3} \\ &= \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{3} && \text{Regla del producto.} \\ &= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b)} \quad \sqrt{2x}(\sqrt{x} + \sqrt{2y}) &= (\sqrt{2x})(\sqrt{x}) + (\sqrt{2x})(\sqrt{2y}) \\ &= \sqrt{2x^2} + \sqrt{4xy} && \text{Regla del producto.} \\ &= \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{xy} && \text{Regla del producto.} \\ &= x\sqrt{2} + 2\sqrt{xy} \quad \star\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 41

Para multiplicar dos binomios con términos con raíces cuadradas, cada término en el primer binomio debe multiplicarse por cada término del segundo binomio, utilizando el método PIES.

**EJEMPLO 7** Multiplique  $(3 + \sqrt{5})(4 - 2\sqrt{5})$  por medio del método PIES.

**Solución**

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c} \text{P} \quad \text{S} \\ \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \\ \text{I} \\ \text{E} \end{array} \\ (3 + \sqrt{5})(4 - 2\sqrt{5}) = 3(4) + 4\sqrt{5} + 3(-2\sqrt{5}) + \sqrt{5}(-2\sqrt{5}) \\ = 12 + 4\sqrt{5} - 6\sqrt{5} - 2\sqrt{25} \\ = 12 - 2\sqrt{5} - 2(5) \\ = 12 - 2\sqrt{5} - 10 \\ = 2 - 2\sqrt{5} \quad \star\end{array}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 55

**EJEMPLO 8** Multiplique por medio del método PIES.

**a)**  $(\sqrt{2} - \sqrt{7})(\sqrt{2} + \sqrt{7})$       **b)**  $(x - \sqrt{y})(x + \sqrt{y})$

**Solución**

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c} \text{P} \quad \text{S} \\ \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \\ \text{I} \\ \text{E} \end{array} \\ (\sqrt{2} - \sqrt{7})(\sqrt{2} + \sqrt{7}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + (-\sqrt{7})(\sqrt{2}) + \sqrt{2} \cdot \sqrt{7} + (-\sqrt{7})(\sqrt{7}) \\ = \sqrt{4} - \sqrt{14} + \sqrt{14} - \sqrt{49} \\ = \sqrt{4} - \sqrt{49} \\ = 2 - 7 = -5\end{array}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 73

$$\begin{aligned} \mathbf{b)} \quad (x - \sqrt{y})(x + \sqrt{y}) &= (x)(x) + (-\sqrt{y})(x) + x(\sqrt{y}) + (-\sqrt{y})(\sqrt{y}) \\ &= x^2 - x\sqrt{y} + x\sqrt{y} - \sqrt{y^2} \\ &= x^2 - \sqrt{y^2} \\ &= x^2 - y \end{aligned}$$



Observe que ambas partes del ejemplo 8 pueden considerarse como el producto de la suma y diferencia de los mismos dos términos. En la sección 4.5 aprendimos que  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ . En el inciso **a)** si hacemos  $a = \sqrt{2}$  y  $b = \sqrt{7}$ , entonces

$$a^2 - b^2 = (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{7})^2 = 2 - 7 = -5.$$

En el inciso **b)**, si hacemos  $a = x$  y  $b = \sqrt{y}$ , entonces

$$a^2 - b^2 = (x)^2 - (\sqrt{y})^2 = x^2 - y.$$

Ambas respuestas coinciden con las que se obtuvieron en el ejemplo 8.

## Conjunto de ejercicios 9.3

### Ejercicios conceptuales

- ¿Qué son raíces cuadradas semejantes? Proporcione un ejemplo.
- ¿Qué son raíces cuadradas no semejantes? Proporcione un ejemplo.
- ¿En qué condiciones dos raíces cuadradas pueden sumarse o restarse?
- Explique cómo sumar raíces cuadradas semejantes.

### Práctica de habilidades

Simplifique cada expresión.

- |  |   |   |
|--|---|---|
| 5. $6\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$                   | 6. $8\sqrt{3} + \sqrt{3}$                           | 7. $7\sqrt{5} - 11\sqrt{5}$                         |
| 8. $3\sqrt{7} - 4\sqrt{7} - \sqrt{7} + 4$    | 9. $\sqrt{7} + 4\sqrt{7} - 3\sqrt{7} + 6$           | 10. $10\sqrt{13} - 6\sqrt{13} + 5\sqrt{13}$         |
| 11. $5\sqrt{x} + \sqrt{x}$                   | 12. $4\sqrt{x} - 8\sqrt{x}$                         | 13. $-\sqrt{y} + 3\sqrt{y} - 5\sqrt{y}$             |
| 14. $3\sqrt{y} - 6\sqrt{y} + 2$              | 15. $-6\sqrt{t} + 2\sqrt{t} - 6$                    | 16. $3\sqrt{5} - \sqrt{x} + 4\sqrt{5} + 3\sqrt{x}$  |
| 17. $\sqrt{x} + \sqrt{y} + x + 3\sqrt{y}$    | 18. $3 + 4\sqrt{x} - 6\sqrt{x}$                     | 19. $4 + 4\sqrt{m} - 6\sqrt{m} + 5m - 2$            |
| 20. $2\sqrt{p} - 3p - 5\sqrt{p} + 2\sqrt{p}$ | 21. $-3\sqrt{7} + \sqrt{7} - 2\sqrt{x} - 7\sqrt{x}$ | 22. $4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{y} - 5\sqrt{y}$ |

Simplifique cada expresión.

- |   |   |                                 |
|---|---|---------------------------------|
| 23. $\sqrt{20} + \sqrt{18}$             | 24. $\sqrt{8} - \sqrt{12}$                  | 25. $\sqrt{300} - \sqrt{27}$    |
| 26. $\sqrt{125} + \sqrt{20}$            | 27. $\sqrt{75} + \sqrt{108}$                | 28. $\sqrt{15} - \sqrt{135}$    |
| 29. $4\sqrt{50} - \sqrt{72} + \sqrt{8}$ | 30. $-4\sqrt{99} + 3\sqrt{44} + 2\sqrt{11}$ | 31. $-3\sqrt{125} + 7\sqrt{75}$ |
| 32. $5\sqrt{40} - \sqrt{50}$            | 33. $2\sqrt{360} + 4\sqrt{160}$             | 34. $6\sqrt{180} - 7\sqrt{108}$ |
| 35. $4\sqrt{16} - \sqrt{48}$            | 36. $3\sqrt{250} + 5\sqrt{160}$             |                                 |

Multiplique.

- |                                     |                                     |                               |                               |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 37. $\sqrt{3}(4 + \sqrt{3})$        | 38. $\sqrt{2}(6 + \sqrt{2})$        | 39. $4(\sqrt{x} - \sqrt{2})$  | 40. $3(\sqrt{5} - \sqrt{x})$  |
| 41. $y(\sqrt{y} + y)$               | 42. $z(z - \sqrt{z})$               | 43. $\sqrt{5}(\sqrt{8} - 2)$  | 44. $\sqrt{6}(4 + \sqrt{8})$  |
| 45. $\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{3})$ | 46. $\sqrt{y}(\sqrt{y} - \sqrt{2})$ | 47. $\sqrt{a}(6 - \sqrt{2a})$ | 48. $\sqrt{d}(5 + \sqrt{2d})$ |
| 49. $x(x + 4\sqrt{y})$              | 50. $x(2x - 3\sqrt{y})$             | 51. $3x(4x - 3\sqrt{x})$      | 52. $5y(y + \sqrt{y})$        |

Multiplique.

53.  $(6 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{2})$

55.  $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{6} + 3)$

57.  $(6 - 2\sqrt{7})(8 - 2\sqrt{7})$

59.  $(4 - \sqrt{x})(4 - \sqrt{x})$

61.  $(\sqrt{3z} - 4)(\sqrt{5z} + 2)$

63.  $(r + 2\sqrt{s})(2r - 3\sqrt{s})$

65.  $(x - \sqrt{2y})(2x - 2\sqrt{2y})$

67.  $(4p - 2\sqrt{3q})(p + 2\sqrt{3q})$

54.  $(8 + \sqrt{5})(6 - \sqrt{2})$

56.  $(\sqrt{10} + 5)(\sqrt{10} - 2)$

58.  $(9 + 3\sqrt{6})(9 + 3\sqrt{6})$

60.  $(5 - 3\sqrt{y})(2 + \sqrt{y})$

62.  $(x - \sqrt{z})(2x - 3\sqrt{z})$

64.  $(\sqrt{5} - 3\sqrt{z})(\sqrt{10} - 5\sqrt{z})$

66.  $(n - 6\sqrt{w})(2n + 5\sqrt{w})$

68.  $(8n - \sqrt{6x})(2n - 5\sqrt{6x})$

Multiplique.

69.  $(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})$

71.  $(4 - \sqrt{2})(4 + \sqrt{2})$

73.  $(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)$

75.  $(\sqrt{7} + r)(\sqrt{7} - r)$

77.  $(\sqrt{5x} + \sqrt{y})(\sqrt{5x} - \sqrt{y})$

79.  $(2\sqrt{x} + 3\sqrt{y})(2\sqrt{x} - 3\sqrt{y})$

70.  $(\sqrt{3} + 6)(\sqrt{3} - 6)$

72.  $(\sqrt{11} - 4)(\sqrt{11} + 4)$

74.  $(\sqrt{a} + 4)(\sqrt{a} - 4)$

76.  $(\sqrt{3} - y)(\sqrt{3} + y)$

78.  $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$

80.  $(3\sqrt{2c} + \sqrt{3d})(3\sqrt{2c} - \sqrt{3d})$

81. a) ¿Es  $\sqrt{10}$  el doble de  $\sqrt{5}$ ?

b) ¿Qué número es el doble de  $\sqrt{5}$ ? Explique cómo determinó su respuesta.

82. a) ¿Es  $\sqrt{21}$  el triple de  $\sqrt{7}$ ?

b) ¿Qué número es el triple de  $\sqrt{7}$ ? Explique cómo determinó su respuesta.

## Solución de problemas

83. Si  $x > -2$ , ¿a qué es igual  $\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x+2}$ ?

84. Si  $x > -5$ , ¿a qué es igual  $\sqrt{x+5} \cdot \sqrt{x+5}$ ?

85. ¿La suma o diferencia de dos expresiones racionales, es siempre una expresión racional? Explique y proporcione un ejemplo.


86. ¿La suma o diferencia de dos expresiones irracionales, es siempre una expresión irracional? Explique y proporcione un ejemplo.

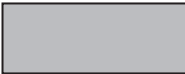
Complete en el área sombreada para hacer cada enunciado verdadero. Explique cómo determinó su respuesta.

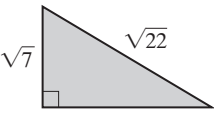
87.  $\sqrt{\square} - \sqrt{63} = 4\sqrt{7}$

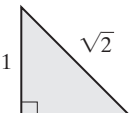
88.  $\sqrt{180} + \sqrt{\square} = 9\sqrt{5}$

Determine el perímetro y el área de las siguientes figuras.

89.   $\sqrt{2} + \sqrt{3}$   
 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

90.   $\sqrt{5} - 1$   
 $\sqrt{5} + 1$

91.   $\sqrt{22}$   
 $\sqrt{7}$   $\sqrt{15}$

92.   $\sqrt{2}$   
1 1

En la sección 5.6, por medio de factorización, resolvimos ecuaciones cuadráticas de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ . No todas las ecuaciones cuadráticas pueden resolverse por medio de factorización. En el capítulo 10 introduciremos otra forma de resolver ecuaciones cuadráticas, denominada **fórmula cuadrática**. La expresión  $\sqrt{b^2 - 4ac}$  es parte de la fórmula cuadrática. Evalúe esta expresión para las siguientes ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo, observe en la ecuación cuadrática  $2x^2 - 4x - 5 = 0$  que  $a = 2$ ,  $b = -4$  y  $c = -5$  ( $a$  y  $b$  son los coeficientes del término cuadrático y del término lineal, respectivamente, y  $c$  es el término constante).

93.  $x^2 + 3x + 2 = 0$

94.  $x^2 + 9x + 20 = 0$

95.  $x^2 - 14x - 5 = 0$

96.  $x^2 + 4x - 1 = 0$

97.  $-2x^2 + 4x + 7 = 0$

98.  $-6x^2 - 2x + 1 = 0$

## Problemas de reto

En los ejercicios 99 y 100, llene el área sombreada para hacer que cada enunciado sea verdadero. Explique cómo determinó su respuesta.

$$\backslash \quad 99. \quad -5\sqrt{\square} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{27} = -9\sqrt{3}$$

$$\backslash \quad 100. \quad 20\sqrt{2} - 4\sqrt{\square} + 4\sqrt{18} = 12\sqrt{2}$$

## Ejercicios de repaso acumulativo

[3.5] 101. **Paseo en trineo** Al deslizarse colina abajo, Jason promedia 10 millas por hora. Subiendo la misma colina hacia donde comenzó, él promedia 2 millas por hora. Si le toma 0.2 horas más subir la colina que descender por ella, ¿cuánto tiempo estuvo descendiendo?



[5.4] 102. Factorice  $3x^2 - 12x - 96$ .

[6.1] 103. Simplifique  $\frac{x-1}{x^2-1}$ .

[6.6] 104. Resuelva la ecuación  $x + \frac{24}{x} = 10$ .

[8.1] 105. Mediante el método gráfico, resuelva el siguientes sistema de ecuaciones.

$$y = 2x - 2$$

$$2x + 3y = 10$$

## 9.4 DIVISIÓN DE RAÍCES CUADRADAS



- 1 Entender lo que significa que una raíz cuadrada esté simplificada.
- 2 Usar la regla del cociente para simplificar raíces cuadradas.
- 3 Racionalizar denominadores.
- 4 Racionalizar un denominador que tiene un binomio.

### 1 Entender lo que significa que una raíz cuadrada esté simplificada

En esta sección utilizaremos una regla nueva, la del cociente, para simplificar raíces cuadradas que tengan fracciones. Antes de hacerlo, analicemos lo que significa que una raíz cuadrada esté simplificada.

#### Una raíz cuadrada está simplificada cuando

1. Ningún radicando tiene un factor que sea cuadrado perfecto.
2. Ningún radicando tiene una fracción.
3. Ningún denominador tiene una raíz cuadrada.

Los tres criterios deben cumplirse para que una expresión esté simplificada. Veamos algunas expresiones que *no están simplificadas*.

### Radical Razón por la que no está simplificada

$\sqrt{8}$	Tiene un factor cuadrado perfecto, 4. ( $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$ )	} (Criterio 1)
$\sqrt{x^3}$	Tiene un factor cuadrado perfecto, $x^2$ . ( $\sqrt{x^3} = \sqrt{x^2 \cdot x} = x\sqrt{x}$ )	
$\sqrt{\frac{1}{2}}$	El radicando tiene una fracción.	(Criterio 2)
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	La raíz cuadrada en el denominador.	(Criterio 3)

Antes de estudiar el procedimiento para dividir y simplificar raíces cuadradas que tienen fracciones, necesitamos entender cuándo se pueden dividir los factores comunes y cuándo no.

Los factores comunes en el numerador y en el denominador de una fracción dentro del signo de radical *pueden* dividirse. Por ejemplo, lo que se muestra a continuación es correcto.

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 1}} = \sqrt{\frac{2}{1}} = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad \sqrt{\frac{x \cdot x^3}{x^2 \cdot 1}} = \sqrt{\frac{x}{1}} = \sqrt{x}$$

Sin embargo, no podemos dividir los factores comunes, si una expresión que tiene el factor común está dentro de un radical y la otra expresión no. Véase el siguiente error común.

### CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Una expresión dentro de la raíz cuadrada *no puede* dividirse entre una expresión que no esté dentro de la raíz cuadrada.

#### CORRECTO

$$\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ no puede simplificarse más.}$$

$$\frac{\sqrt{x^3}}{x} = \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{x}}{x} = \frac{x \sqrt{x}}{x} = \sqrt{x}$$

#### INCORRECTO

~~$$\frac{\sqrt{2 \cdot 6}}{3 \cdot 1} = \sqrt{2}$$~~

~~$$\frac{\sqrt{x^3}}{x \cdot 1} = \sqrt{x^2} = x$$~~

Cada una de las siguientes simplificaciones es correcta, ya que la constante o variable que dividimos no está dentro de las raíces cuadradas.

#### CORRECTO

$$\frac{2 \cdot 6 \sqrt{2}}{3 \cdot 1} = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{4 \sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

#### CORRECTO

$$\frac{x \sqrt{2}}{x} = \sqrt{2}$$

$$\frac{3x^2 \sqrt{5}}{x} = 3x\sqrt{5}$$

Ahora analizaremos la regla del cociente.

## 2 Usar la regla del cociente para simplificar raíces cuadradas

La regla del cociente para raíces cuadradas establece que el cociente de dos raíces cuadradas es igual a la raíz cuadrada del cociente de los radicandos.

### Regla del cociente para raíces cuadradas

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \text{ siempre que } a \geq 0, b > 0 \quad \text{Regla 3}$$

Los ejemplos 1 a 4 ilustran cómo utilizamos la regla del cociente para simplificar raíces cuadradas.

**EJEMPLO 1** Simplifique. a)  $\sqrt{\frac{25}{5}}$  b)  $\sqrt{\frac{64}{4}}$  c)  $\sqrt{\frac{4}{9}}$

**Solución** Cuando la raíz cuadrada tenga una fracción, divida tanto el numerador como el denominador entre los factores comunes. Si la raíz cuadrada aún tiene una fracción, utilice la regla del cociente para simplificar.

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 13

$$\text{a) } \sqrt{\frac{25}{5}} = \sqrt{5} \quad \text{b) } \sqrt{\frac{64}{4}} = \sqrt{16} = 4 \quad \text{c) } \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$



**EJEMPLO 2** Simplifique. a)  $\sqrt{\frac{8x^2}{4}}$  b)  $\sqrt{\frac{160a^2b}{4b}}$  c)  $\sqrt{\frac{3x^2y^4}{27x^4}}$  d)  $\sqrt{\frac{15ab^5c^2}{3a^5bc}}$

**Solución** Primero divida entre los factores comunes tanto el numerador como el denominador; luego simplifique.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{\frac{8x^2}{4}} &= \sqrt{2x^2} && \text{Simplificar el radicando.} \\ &= \sqrt{x^2} \sqrt{2} && \text{Regla del producto.} \\ &= x\sqrt{2} && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{\frac{160a^2b}{4b}} &= \sqrt{40a^2} && \text{Simplificar el radical.} \\ &= \sqrt{4a^2} \sqrt{10} && \text{Regla del producto.} \\ &= 2a\sqrt{10} && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \sqrt{\frac{3x^2y^4}{27x^4}} &= \sqrt{\frac{y^4}{9x^2}} && \text{Simplificar el radicando.} \\ &= \frac{\sqrt{y^4}}{\sqrt{9x^2}} && \text{Regla del cociente.} \\ &= \frac{y^2}{3x} && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 27


$$\text{d) } \sqrt{\frac{15ab^5c^2}{3a^5bc}} = \sqrt{\frac{5b^4c}{a^4}} = \frac{\sqrt{5b^4c}}{\sqrt{a^4}} = \frac{\sqrt{b^4} \sqrt{5c}}{\sqrt{a^4}} = \frac{b^2\sqrt{5c}}{a^2}$$



Cuando le den una fracción que tenga una expresión radical tanto en el numerador como en el denominador, utilice la regla del cociente para simplificar, como en los ejemplos 3 y 4.

**EJEMPLO 3** Simplifique.    a)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$                       b)  $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$


**Solución** a)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{2}{8}}$     *Regla del cociente.*  
 $= \sqrt{\frac{1}{4}}$     *Simplificar el radicando.*  
 $= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}$     *Regla del cociente.*  
 $= \frac{1}{2}$     *Simplificar.*

b)  $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{16} = 4$  

Ahora resolveremos otro ejemplo.

**EJEMPLO 4** Simplifique.    a)  $\frac{\sqrt{32x^4y^3}}{\sqrt{8xy}}$     b)  $\frac{\sqrt{75x^8y^4}}{\sqrt{3x^5y^8}}$

**Solución** a)  $\frac{\sqrt{32x^4y^3}}{\sqrt{8xy}} = \sqrt{\frac{32x^4y^3}{8xy}}$     *Regla del cociente.*  
 $= \sqrt{4x^3y^2}$     *Simplificar el radical.*  
 $= \sqrt{4x^2y^2} \sqrt{x}$     *Regla del producto.*  
 $= 2xy\sqrt{x}$     *Simplificar.*

**AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 31**    b)  $\frac{\sqrt{75x^8y^4}}{\sqrt{3x^5y^8}} = \sqrt{\frac{75x^8y^4}{3x^5y^8}} = \sqrt{\frac{25x^3}{y^4}} = \frac{\sqrt{25x^3}}{\sqrt{y^4}} = \frac{\sqrt{25x^2} \sqrt{x}}{\sqrt{y^4}} = \frac{5x\sqrt{x}}{y^2}$  

Si observa todas las respuestas de los ejemplos 1 a 4, notará que todas cumplen con los tres criterios necesarios para que una raíz cuadrada sea simplificada.

### 3 Racionalizar denominadores

Suponga que le piden simplificar expresiones como  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  o  $\sqrt{\frac{1}{2}}$ . ¿Cómo lo haría?

Para simplificar expresiones utilizamos un proceso llamado **racionalización del denominador**. **Racionalizar un denominador significa eliminar todos los radicales de él.** Racionalizamos el denominador porque es más sencillo (sin una calculadora) obtener un valor aproximado de un número como  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  que un número como

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Además, en ocasiones podría ser necesario racionalizar los denominadores para sumar o restar expresiones con radicales. Cuando el denominador de una fracción tiene la raíz cuadrada de un número que no es un cuadrado perfecto, por lo general simplificamos la expresión por medio de la **racionalización del denominador**.

**Para racionalizar un denominador que tiene una raíz cuadrada,** multiplicamos *tanto* el numerador *como* el denominador de la fracción por la raíz cuadrada que aparece en el denominador o por la raíz cuadrada del número que haga al denominador un cuadrado perfecto.

**EJEMPLO 5** Simplifique  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**Solución** Como  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$ , multiplicamos el numerador y el denominador por  $\sqrt{3}$ .

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

La respuesta  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  está simplificada porque satisface los tres requisitos establecidos con anterioridad. 

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 39

En el ejemplo 5, multiplicar el numerador y el denominador por  $\sqrt{3}$  es equivalente a multiplicar la fracción por 1, lo cual no cambia su valor.

**EJEMPLO 6** Simplifique. a)  $\sqrt{\frac{2}{3}}$       b)  $\sqrt{\frac{z^2}{18}}$

**Solución** a)  $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$  *Regla del cociente.*  
 $= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$  *Multiplicar numerador y denominador por  $\sqrt{3}$ .*  
 $= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}}$  *Regla del producto.*  
 $= \frac{\sqrt{6}}{3}$  *Simplificar.*


$$\text{b) } \sqrt{\frac{z^2}{18}} = \frac{\sqrt{z^2}}{\sqrt{18}} = \frac{z}{\sqrt{9}\sqrt{2}} = \frac{z}{3\sqrt{2}}$$

Ahora racionalice el denominador.

$$\frac{z}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{z\sqrt{2}}{3\sqrt{4}} = \frac{z\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{z\sqrt{2}}{6}$$

El inciso **b)** también puede racionalizarse como sigue:

$$\sqrt{\frac{z^2}{18}} = \frac{\sqrt{z^2}}{\sqrt{18}} = \frac{z}{\sqrt{18}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{z\sqrt{2}}{\sqrt{36}} = \frac{z\sqrt{2}}{6}$$

Observe que  $\frac{z}{\sqrt{18}} \cdot \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{18}}$  también nos daría el mismo resultado, después de simplificar. 

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 63

Ahora analizaremos la racionalización de un denominador en donde éste es un binomio que tiene una o más expresiones con radicales.



#### 4 Racionalizar un denominador que tiene un binomio

Cuando el denominador de una expresión racional es un binomio con un término con raíz cuadrada, nuevamente **racionalizamos el denominador**. Hacemos esto multiplicando el numerador y el denominador de la fracción por el conjugado del denominador. El **conjugado de un binomio** es un binomio que tiene los mismos dos términos con el signo del segundo término cambiado.

Binomio	Su conjugado
$5 + \sqrt{2}$	$5 - \sqrt{2}$
$\sqrt{3} - 4$	$\sqrt{3} + 4$
$2\sqrt{3} - \sqrt{5}$	$2\sqrt{3} + \sqrt{5}$
$-x + \sqrt{3}$	$-x - \sqrt{3}$

Cuando un binomio se multiplica por su conjugado utilizando el método PIES, la suma de los términos externos e internos será cero.

Ahora resolveremos algunos ejemplos en donde racionalizamos el denominador, cuando éste es un binomio con uno o más términos con radicales.

**EJEMPLO 7** Simplifique  $\frac{5}{2 + \sqrt{3}}$ .

**Solución** Para racionalizar el denominador, multiplique el numerador y el denominador de la fracción por  $2 - \sqrt{3}$ , que es el conjugado de  $2 + \sqrt{3}$ .

$$\begin{aligned} \frac{5}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} &= \frac{5(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} && \text{Multiplicar el numerador y el} \\ &&& \text{denominador por } 2 - \sqrt{3}. \\ &= \frac{5(2 - \sqrt{3})}{4 - 3} && \text{Multiplicar los factores en el} \\ &&& \text{denominador, como se estudió} \\ &&& \text{en la sección 9.3.} \\ &= \frac{5(2 - \sqrt{3})}{1} && \text{Simplificar.} \\ &= 5(2 - \sqrt{3}) = 10 - 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

Observe que  $-5\sqrt{3} + 10$  también es una respuesta aceptable. 

**EJEMPLO 8** Simplifique  $\frac{6}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$ .

**Solución** Multiplique el numerador y el denominador de la fracción por  $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ , el conjugado de  $\sqrt{2} - \sqrt{5}$ .

$$\begin{aligned} \frac{6}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} &= \frac{6(\sqrt{2} + \sqrt{5})}{(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{5})} && \text{Multiplicar numerador y de-} \\ &&& \text{nominador por } \sqrt{2} + \sqrt{5}. \\ &= \frac{6(\sqrt{2} + \sqrt{5})}{2 - 5} && \text{Multiplicar los factores en el} \\ &&& \text{denominador.} \\ &= \frac{6(\sqrt{2} + \sqrt{5})}{-3} && \text{Simplificar.} \\ &= \frac{-2(\sqrt{2} + \sqrt{5})}{1} \\ &= -2(\sqrt{2} + \sqrt{5}) = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{5} \end{aligned}$$



**EJEMPLO 9** Simplifique  $\frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{6}}$ .

**Solución** Multiplique numerador y denominador de la fracción por  $2 + \sqrt{6}$ , el conjugado de  $2 - \sqrt{6}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{6}} \cdot \frac{2 + \sqrt{6}}{2 + \sqrt{6}} &= \frac{\sqrt{3}(2 + \sqrt{6})}{4 - 6} \\ &= \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{6}}{-2} && \text{Propiedad distributiva.} \\ &= \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{18}}{-2} && \text{Regla del producto.} \\ &= \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{9}\sqrt{2}}{-2} && \text{Regla del producto.} \\ &= \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{-2} && \text{Simplificar.} \\ &= \frac{-2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{2} && \text{Multiplicar numerador y denominador por } -1. \star \end{aligned}$$

**EJEMPLO 10** Simplifique  $\frac{x}{x - \sqrt{y}}$ .

**Solución** Multiplique numerador y denominador de la fracción por  $x + \sqrt{y}$ , el conjugado del denominador.

$$\frac{x}{x - \sqrt{y}} \cdot \frac{x + \sqrt{y}}{x + \sqrt{y}} = \frac{x(x + \sqrt{y})}{x^2 - y} = \frac{x^2 + x\sqrt{y}}{x^2 - y}$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 93**

Recuerde: no puede dividir los términos  $x^2$ , ya que no son factores.  $\star$

## Conjunto de ejercicios 9.4

### Ejercicios conceptuales

En los ejercicios 1 a 6, indique si se puede dividir el numerador y el denominador de la fracción entre un factor común. Si se puede hacer, hágalo y muestre la respuesta simplificada. Vea el recuadro de *Cómo evitar errores comunes*, en la página 578.

1.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$

2.  $\frac{4\sqrt{3}}{2}$

3.  $\frac{x^2\sqrt{2}}{x}$

4.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$

5.  $\frac{\sqrt{x}}{x}$

6.  $\frac{\sqrt{10}}{5}$

7. ¿Cuáles son los tres requisitos que deben considerarse para que una raíz cuadrada esté simplificada?

9. Explique por qué cada expresión no está simplificada.

8. Establezca la regla del cociente para las raíces cuadradas y explique lo que esto significa.

a)  $\sqrt{27}$       b)  $\sqrt{\frac{1}{2}}$       c)  $\frac{3}{\sqrt{5}}$

10. ¿Qué significa racionalizar un denominador?

## Práctica de habilidades

Simplifique cada expresión.

11.  $\sqrt{\frac{27}{3}}$

15.  $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$

19.  $\sqrt{\frac{81}{144}}$

23.  $\sqrt{\frac{48x^3}{2x}}$

27.  $\sqrt{\frac{16x^5y^3}{100x^7y}}$

31.  $\frac{\sqrt{32n^5}}{\sqrt{8n}}$

35.  $\frac{\sqrt{45ab^6}}{\sqrt{9ab^4c^2}}$

12.  $\sqrt{\frac{24}{6}}$

16.  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$

20.  $\sqrt{\frac{9}{121}}$

24.  $\sqrt{\frac{9ab^4}{3b^3}}$

28.  $\sqrt{\frac{14xyz^5}{56x^3y^3z^4}}$

32.  $\frac{\sqrt{24x^2y^2}}{\sqrt{6x^2y^4}}$

36.  $\frac{\sqrt{24x^2y^6}}{\sqrt{8x^4z^4}}$

13.  $\sqrt{\frac{63}{7}}$

17.  $\sqrt{\frac{1}{49}}$

21.  $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{1000}}$

25.  $\sqrt{\frac{45x^2}{16x^2y^4}}$

29.  $\sqrt{\frac{24ab}{24a^5b^3}}$

33.  $\frac{\sqrt{81w^5z}}{\sqrt{144wz^3}}$

37.  $\frac{\sqrt{125a^6b^8}}{\sqrt{5a^2b^2}}$

14.  $\sqrt{\frac{20}{5}}$

18.  $\sqrt{\frac{16}{25}}$

22.  $\sqrt{\frac{20}{80}}$

26.  $\sqrt{\frac{50a^3b^6}{10a^3b^8}}$

30.  $\sqrt{\frac{32x^3y}{32x^7y^3}}$

34.  $\frac{\sqrt{108}}{\sqrt{36m^4n^6}}$

38.  $\frac{\sqrt{144x^{60}y^{32}}}{\sqrt{12x^{40}y^{18}}}$

Simplifique cada expresión.

39.  $\frac{1}{\sqrt{5}}$

43.  $\frac{6}{\sqrt{12}}$

47.  $\sqrt{\frac{2}{3}}$

51.  $\sqrt{\frac{3}{8}}$

55.  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

59.  $\sqrt{\frac{3x}{5}}$

63.  $\sqrt{\frac{a^2}{8}}$

67.  $\sqrt{\frac{a^8}{14b}}$

71.  $\sqrt{\frac{50yz}{24x^4y^5z^3}}$

40.  $\frac{1}{\sqrt{7}}$

44.  $\frac{9}{\sqrt{50}}$

48.  $\sqrt{\frac{7}{12}}$

52.  $\sqrt{\frac{5}{18}}$

56.  $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$

60.  $\sqrt{\frac{5w}{18}}$

64.  $\sqrt{\frac{a^3}{18}}$

68.  $\sqrt{\frac{a^7b}{24b^2}}$

72.  $\frac{\sqrt{25x^5}}{\sqrt{100xy^5}}$

41.  $\frac{4}{\sqrt{8}}$

45.  $\sqrt{\frac{1}{5}}$

49.  $\sqrt{\frac{5}{15}}$

53.  $\sqrt{\frac{3}{x}}$

57.  $\sqrt{\frac{c}{d}}$

61.  $\sqrt{\frac{x^2}{2}}$

65.  $\sqrt{\frac{t^5}{5}}$

69.  $\sqrt{\frac{6c^2d^4}{30c^2d^5}}$

73.  $\frac{\sqrt{90x^4y}}{\sqrt{2x^5y^5}}$

42.  $\frac{3}{\sqrt{3}}$

46.  $\sqrt{\frac{2}{5}}$

50.  $\sqrt{\frac{5}{7}}$

54.  $\sqrt{\frac{5}{a}}$

58.  $\sqrt{\frac{r}{6}}$

62.  $\sqrt{\frac{x^2}{3}}$

66.  $\sqrt{\frac{x^3}{11}}$

70.  $\sqrt{\frac{27xz^4}{6y^4}}$

74.  $\frac{\sqrt{120xyz^2}}{\sqrt{9xy^2}}$

Determine el producto del binomio dado con su conjugado.

75.  $5 + \sqrt{3}$

79.  $\sqrt{x} - y$

76.  $\sqrt{6} - 2$

80.  $\sqrt{x} + y$

77.  $\sqrt{3} - \sqrt{6}$

81.  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

78.  $\sqrt{7} + \sqrt{5}$

82.  $\sqrt{x} - \sqrt{y}$

Simplifique cada expresión.

83.  $\frac{2}{\sqrt{5} + 2}$

84.  $\frac{2}{4 - \sqrt{3}}$

85.  $\frac{2}{\sqrt{6} - 1}$

86.  $\frac{4}{\sqrt{2} - 7}$       87.  $\frac{6}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$       88.  $\frac{5}{\sqrt{6} + \sqrt{3}}$
89.  $\frac{8}{\sqrt{5} - \sqrt{8}}$       90.  $\frac{1}{\sqrt{17} - \sqrt{8}}$       91.  $\frac{2}{\sqrt{y} + 3}$
92.  $\frac{5}{6 - \sqrt{x}}$       93.  $\frac{6}{4 - \sqrt{y}}$       94.  $\frac{5}{3 + \sqrt{x}}$
95.  $\frac{16}{\sqrt{y} + x}$       96.  $\frac{7}{r + \sqrt{t}}$       97.  $\frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$
98.  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$       99.  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{n}}$       100.  $\frac{x}{\sqrt{x} - y}$
101.  $\frac{5\sqrt{x}}{6 - \sqrt{x}}$       102.  $\frac{3\sqrt{r}}{2 + \sqrt{r}}$

### Solución de problemas

103. El cociente de dos números racionales (con denominador diferente de cero) ¿es siempre un número racional? Explique y proporcione un ejemplo que apoye su respuesta.
104. El cociente de dos números irracionales (con denominador diferente de cero) ¿es siempre un número irracional? Explique y proporcione un ejemplo que apoye su respuesta.

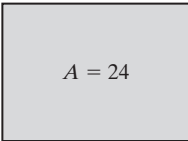
En los ejercicios 105 a 108, si  $\sqrt{5} \approx 2.236$  y  $\sqrt{10} \approx 3.162$ , determine al centésimo más cercano.

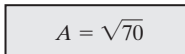
105.  $\sqrt{5} + \sqrt{10}$       106.  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$       107.  $\sqrt{5}/\sqrt{10}$       108.  $\sqrt{10}/\sqrt{5}$

En los ejercicios 109 a 112, si  $\sqrt{7} \approx 2.646$  y  $\sqrt{21} \approx 4.583$ , determine al centésimo más cercano.

109.  $\sqrt{7} + \sqrt{21}$       110.  $\sqrt{7} \cdot \sqrt{21}$       111.  $\sqrt{7}/\sqrt{21}$       112.  $\sqrt{21}/\sqrt{7}$

En los ejercicios 113 y 114, determine el ancho de cada rectángulo si damos el área y el largo. Proporcione la respuesta en forma simplificada con denominador entero.

113.   
 $A = 24$   
 $l = 4 + \sqrt{3}$

114.   
 $A = \sqrt{70}$   
 $l = 7 - \sqrt{2}$

### Problemas de reto

Llene el área sombreada para hacer que la expresión sea verdadera. Explique cómo determinó su respuesta.

115.  $\sqrt{\frac{\square}{4x^2}} = 4x^4$       116.  $\frac{\sqrt{32x^5}}{\sqrt{\square}} = 2x^2$       117.  $\frac{1}{\sqrt{\square}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$       118.  $\frac{3x}{\sqrt{\square}} = \frac{3\sqrt{2x}}{2}$

119. Simplifique  $\frac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt{3}}$  por medio de la racionalización del denominador.
120. Simplifique  $\frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt{2}}$  mediante la racionalización del denominador.



## Actividad en grupo

121. Consideren  $\frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$ , donde  $x > 0$ .

- a) En forma individual, simplifique  $\frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$  mediante la racionalización del denominador. Compare y corrija su respuesta, si es necesario.
- b) Miembro 1 del grupo: sustituya  $x = 4$  en la expresión original y en los resultados encontrados en la parte a). Evalúe cada expresión.

- c) Miembro 2 del grupo: Repita el inciso b) para  $x = 6$ .
- d) Miembro 3 del grupo: Repita el inciso b) para  $x = 9$ .
- e) En grupo, determinen qué relación existe entre las expresiones dadas y las expresiones racionalizadas que obtuvieron en el inciso b).

## Ejercicios de repaso acumulativo

[4.6] 122. Divida  $\frac{3x^2 + 4x - 25}{x + 4}$ .

[5.6] 123. Resuelva la ecuación  $2x^2 - x - 36 = 0$ .

[6.4] 124. Reste  $\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{2}{x - 2}$ .

[6.7] 125. **Madera apilada** Mark DeGroat puede apilar un conjunto de madera en 20 minutos. Cuando su esposa le ayuda, ellos pueden apilar la madera en 12 minutos. ¿Cuánto tardaría su esposa en apilar la madera ella sola?



Vea el ejercicio 125.

## 9.5 SOLUCIÓN DE ECUACIONES CON RADICALES



- 1 Resolver ecuaciones con radicales que sólo tienen un término con raíz cuadrada.
- 2 Resolver ecuaciones radicales que tienen dos términos con raíz cuadrada.

### 1 Resolver ecuaciones con radicales que sólo tienen un término con raíz cuadrada

Una **ecuación radical** es una ecuación que tiene una variable en un radicando. Algunos ejemplos de ecuaciones radicales son

$$\sqrt{x} = 3 \quad \sqrt{x + 4} = 6 \quad \sqrt{x - 2} = x - 6$$

**En esta sección supondremos que todos los radicandos representan números no negativos.** Esto nos permitirá escribir enunciados como  $(\sqrt{x})^2 = x$  y  $(\sqrt{z - 3})^2 = z - 3$ .

En el proceso para resolver ecuaciones con radicales necesitaremos **eleva al cuadrado ambos lados de la ecuación**. A continuación daremos un ejemplo para elevar al cuadrado ambos lados de una ecuación.

$$\begin{aligned} \sqrt{y} &= 5 \\ (\sqrt{y})^2 &= 5^2 && \text{Eleva al cuadrado ambos lados de la ecuación.} \\ y &= 25 \end{aligned}$$

Ahora daremos un procedimiento general para resolver ecuaciones radicales que sólo tienen un término con raíz cuadrada.

### Para resolver una ecuación radical con un solo término con raíz cuadrada

1. Utilice las propiedades adecuadas para reescribir la ecuación con el término con la raíz cuadrada solo, en un lado de la ecuación. A esto le llamamos **aislar la raíz cuadrada**.
2. Reduzca los términos semejantes.
3. Eleve al cuadrado ambos lados de la ecuación para eliminar la raíz cuadrada.
4. Despeje la variable.
5. Compruebe la solución en la ecuación *original*, para descartar las raíces extrañas.

El paso 3 del procedimiento, elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación, tiene el efecto de eliminar el signo radical de la expresión, de modo que la variable pueda aislarse. Por ejemplo, considere la siguiente ecuación radical.

$$\begin{aligned}\sqrt{y-3} &= 8 && \text{Ecuación dada.} \\ (\sqrt{y-3})^2 &= 8^2 && \text{Elevar al cuadrado ambos lados.} \\ y-3 &= 64 && \text{Se ha eliminado la raíz cuadrada.} \\ y &= 67 && \text{Despejar } y.\end{aligned}$$

Ahora resolveremos otros ejemplos.

**EJEMPLO 1** Resuelva la ecuación  $\sqrt{x} = 7$ .

**Solución** La raíz cuadrada que tiene a la variable ya está sola en un lado de la ecuación. Eleve al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= 7 \\ (\sqrt{x})^2 &= 7^2 && \text{Elevar al cuadrado ambos lados.} \\ x &= 49\end{aligned}$$

**Compruebe**

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= 7 \\ \sqrt{49} &\stackrel{?}{=} 7 \\ 7 &= 7 && \text{Verdadero.}\end{aligned}$$



**EJEMPLO 2** Resuelva la ecuación  $\sqrt{x-5} = 4$ .

**Solución** La raíz cuadrada que tiene a la variable ya está sola en un lado de la ecuación. Eleve al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$\begin{aligned}\sqrt{x-5} &= 4 \\ (\sqrt{x-5})^2 &= 4^2 && \text{Elevar al cuadrado ambos lados.} \\ x-5 &= 16 && \text{Simplificar.} \\ x &= 21\end{aligned}$$

**Compruebe**

$$\begin{aligned}\sqrt{x-5} &= 4 \\ \sqrt{21-5} &\stackrel{?}{=} 4 \\ \sqrt{16} &\stackrel{?}{=} 4 \\ 4 &= 4 && \text{Verdadero.}\end{aligned}$$



En el siguiente ejemplo, el término raíz cuadrada que tiene a la variable no está solo en un lado de la ecuación.

**EJEMPLO 3** Resuelva la ecuación  $\sqrt{a} + 6 = 9$ .

**Solución** En esta ecuación despejamos la variable  $a$ . Como el 6 está fuera del signo de raíz cuadrada, primero restamos 6 de ambos lados de la ecuación, para aislar al término con la raíz cuadrada.

$$\begin{aligned}\sqrt{a} + 6 &= 9 \\ \sqrt{a} + 6 - 6 &= 9 - 6 \\ \sqrt{a} &= 3\end{aligned}$$

Ahora elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$\begin{aligned}(\sqrt{a})^2 &= 3^2 \\ a &= 9\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 21

Una verificación mostrará que 9 es la solución. 

### SUGERENCIA

Cuando eleva al cuadrado ambos lados de una ecuación, puede introducir raíces extrañas. Una **raíz extraña** es un número obtenido al resolver una ecuación, pero que no es solución de la ecuación original. Siempre debe verificar las ecuaciones en donde ambos lados se elevan al cuadrado en el proceso de determinar sus soluciones, para determinar si tiene raíces extrañas; esto se hace sustituyendo los números determinados, en la ecuación **original**.

Considere la ecuación

$$x = 6$$

Ahora eleve al cuadrado ambos lados.

$$x^2 = 36$$

Observe que la ecuación original  $x = 6$  es verdadera sólo cuando  $x$  es 6. Sin embargo, la ecuación  $x^2 = 36$  es verdadera para 6 y  $-6$ . Cuando elevamos al cuadrado  $x = 6$ , introducimos la raíz extraña  $-6$ .

**EJEMPLO 4** Resuelva la ecuación  $\sqrt{x} = -6$ .

**Solución** Comience elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación


$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= -6 \\ (\sqrt{x})^2 &= (-6)^2 \\ x &= 36\end{aligned}$$

**Compruebe**  $\sqrt{x} = -6$

$$\sqrt{36} \stackrel{?}{=} -6$$

$$6 = -6 \quad \text{Falso.}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 19

Como el resultado es un enunciado falso, el número 36 es una raíz extraña y no es una solución para la ecuación dada. Así, la ecuación  $\sqrt{x} = -6$  **no tiene una solución real**. 

En el ejemplo 4, sin trabajar demasiado, podríamos habernos dado cuenta que no existe solución. En la ecuación original, el lado izquierdo es no negativo y el lado derecho es negativo; por tanto, no hay posibilidad de que sean iguales.

**EJEMPLO 5** Resuelva la ecuación  $\sqrt{2x - 3} = x - 3$ .

**Solución** Eleve al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$\begin{aligned}(\sqrt{2x - 3})^2 &= (x - 3)^2 \\ 2x - 3 &= x^2 - 6x + 9\end{aligned}$$

*Simplificar el lado izquierdo. Escribir  $(x - 3)^2$  como  $x^2 - 6x + 9$ .*

Ahora resuelva la ecuación cuadrática como se explicó en la sección 5.6. Haga igual a cero un lado de la ecuación restando  $2x$  y sumando 3 en ambos lados de la ecuación. Esto da la siguiente ecuación cuadrática.

$$0 = x^2 - 8x + 12 \quad \text{o bien} \quad x^2 - 8x + 12 = 0$$

Resuelva para  $x$  por medio de factorización.

$$\begin{aligned}x^2 - 8x + 12 &= 0 \\ (x - 6)(x - 2) &= 0 && \text{Factorizar.} \\ x - 6 = 0 & \quad \text{o bien} \quad x - 2 = 0 && \text{Propiedad del factor cero.} \\ x = 6 & && x = 2 \quad \text{Despeje } x.\end{aligned}$$

**Comprobación**  $x = 6$

$$\begin{aligned}\sqrt{2x - 3} &= x - 3 \\ \sqrt{2(6) - 3} &\stackrel{?}{=} 6 - 3 \\ \sqrt{9} &\stackrel{?}{=} 3 \\ 3 &= 3 \quad \text{Verdadero.}\end{aligned}$$

$x = 2$

$$\begin{aligned}\sqrt{2x - 3} &= x - 3 \\ \sqrt{2(2) - 3} &\stackrel{?}{=} 2 - 3 \\ \sqrt{1} &\stackrel{?}{=} -1 \\ 1 &= -1 \quad \text{Falso.}\end{aligned}$$

La solución es 6. Dos no es una solución para la ecuación. ✱

Recuerde: al resolver una ecuación con radicales, empiece aislando el radical, como se muestra en el ejemplo 6.

**EJEMPLO 6** Resuelva la ecuación  $2x - 5\sqrt{x} - 3 = 0$ .

**Solución** Primero reescriba la ecuación de modo que la raíz cuadrada que tiene la variable esté sola en un lado de la ecuación.

$$\begin{aligned}2x - 5\sqrt{x} - 3 &= 0 \\ -5\sqrt{x} &= -2x + 3 \\ \text{o bien} \quad 5\sqrt{x} &= 2x - 3\end{aligned}$$

*Multiplicando ambos lados por  $-1$ .*

Ahora eleve al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$\begin{aligned}(5\sqrt{x})^2 &= (2x - 3)^2 \\ 5^2(\sqrt{x})^2 &= (2x - 3)^2 \\ 25x &= 4x^2 - 12x + 9\end{aligned}$$

*Simplificar el lado izquierdo. Escribir  $(2x - 3)^2$  como  $4x^2 - 12x + 9$ .*

$$\begin{aligned}0 &= 4x^2 - 37x + 9 \\ \text{o} \quad 4x^2 - 37x + 9 &= 0\end{aligned}$$

*Haga un lado de la ecuación igual a cero.*

$$(4x - 1)(x - 9) = 0$$

*Factorizar.*

$$4x - 1 = 0 \quad \text{o bien} \quad x - 9 = 0$$

*Propiedad del factor cero.*

$$4x = 1 \quad \quad \quad x = 9$$

*Despejar } x.*

$$x = \frac{1}{4}$$



Comprobación  $x = \frac{1}{4}$

$$2x - 5\sqrt{x} - 3 = 0$$

$$2\left(\frac{1}{4}\right) - 5\sqrt{\frac{1}{4}} - 3 \stackrel{?}{=} 0$$

$$\frac{1}{2} - 5\left(\frac{1}{2}\right) - 3 \stackrel{?}{=} 0$$

$$\frac{1}{2} - \frac{5}{2} - 3 \stackrel{?}{=} 0$$

$$-\frac{4}{2} - 3 \stackrel{?}{=} 0$$

$$-2 - 3 \stackrel{?}{=} 0$$

$$-5 = 0 \quad \text{Falso.}$$

$x = 9$

$$2x - 5\sqrt{x} - 3 = 0$$

$$2(9) - 5\sqrt{9} - 3 \stackrel{?}{=} 0$$

$$18 - 5(3) - 3 \stackrel{?}{=} 0$$

$$18 - 15 - 3 \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0 \quad \text{Verdadero.}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 39

La solución es  $9; \frac{1}{4}$  no es una solución.



## 2 Resolver ecuaciones radicales que tienen dos términos con raíz cuadrada

Considere las ecuaciones radicales

$$\sqrt{x-2} = \sqrt{x+7} \quad \text{y} \quad \sqrt{2x+6} - \sqrt{3x+5} = 0$$

Estas ecuaciones son diferentes de las que hemos estudiado antes, ya que tienen dos términos con raíz cuadrada que tienen la variable  $x$ . Para resolver ecuaciones de este tipo, reescribimos la ecuación, cuando sea necesario, de modo que en cada miembro de la ecuación aparezca una sola raíz cuadrada. Luego se elevan al cuadrado ambos lados de la ecuación. Los ejemplos 7 y 8 ilustran este procedimiento.

**EJEMPLO 7** Resuelva la ecuación  $\sqrt{4x-4} = \sqrt{3x+6}$ .

**Solución**

Como cada lado de la ecuación ya tiene una sola raíz cuadrada, no es necesario reescribir la ecuación. Eleve al cuadrado ambos lados de la ecuación y luego despeje  $x$ .

$$(\sqrt{4x-4})^2 = (\sqrt{3x+6})^2$$

$$4x - 4 = 3x + 6$$

$$x - 4 = 6$$

$$x = 10$$

Comprobación

$$\sqrt{4x-4} = \sqrt{3x+6}$$

$$\sqrt{4(10)-4} \stackrel{?}{=} \sqrt{3(10)+6}$$

$$\sqrt{36} \stackrel{?}{=} \sqrt{36}$$

$$6 = 6 \quad \text{Verdadero.}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 29

La solución es 10.



**EJEMPLO 8**

Resuelva la ecuación  $4\sqrt{r-4} - \sqrt{10r+14} = 0$ .

**Solución**

Suma  $\sqrt{10r+14}$  en ambos lados de la ecuación para obtener una raíz cuadrada en cada lado de la ecuación. Luego eleve al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$4\sqrt{r-4} - \sqrt{10r+14} + \sqrt{10r+14} = 0 + \sqrt{10r+14}$$

$$4\sqrt{r-4} = \sqrt{10r+14}$$

$$(4\sqrt{r-4})^2 = (\sqrt{10r+14})^2$$

*Elevar al cuadrado ambos lados.*

$$16(r-4) = 10r + 14$$

*Simplificar.*

$$16r - 64 = 10r + 14$$

*Propiedad distributiva.*

$$6r - 64 = 14$$

*Resta 10r de ambos lados.*

$$6r = 78$$

*Sumar 64 a ambos lados.*

$$r = 13$$

**Comprobación**

$$4\sqrt{r-4} - \sqrt{10r+14} = 0$$

$$4\sqrt{13-4} - \sqrt{10(13)+14} \stackrel{?}{=} 0$$

$$4\sqrt{9} - \sqrt{130+14} \stackrel{?}{=} 0$$

$$4(3) - \sqrt{144} \stackrel{?}{=} 0$$

$$12 - 12 = 0 \quad \text{Verdadero.}$$

La solución es 13. ✪

### SUGERENCIA

En el ejemplo 6 cuando simplificamos  $(5\sqrt{x})^2$ , obtuvimos  $25x$ , y en el ejemplo 8 cuando simplificamos  $(4\sqrt{r-4})^2$  obtuvimos  $16(r-4)$ . Recuerde que en la sección 6.1 analizamos que cuando un producto de factores se eleva a una potencia, por la regla de la potencia para exponentes, cada uno de los factores se eleva a esa potencia. Por tanto, vemos que

$$(5\sqrt{x})^2 = 5^2(\sqrt{x})^2 = 25x \quad \text{y} \quad (4\sqrt{r-4})^2 = 4^2(\sqrt{r-4})^2 = 16(r-4)$$

## Conjunto de ejercicios 9.5

### Ejercicios conceptuales

1. ¿Qué es una ecuación radical?
2. ¿Qué es una raíz extraña?
3. ¿Por qué es necesario verificar las soluciones de ecuaciones radicales?
4. a) Escriba un procedimiento, paso a paso, para resolver ecuaciones que tengan un solo término con raíz cuadrada.  
b) Resuelva la ecuación  $\sqrt{x+1} - 1 = 1$ , utilizando el procedimiento que dio en el inciso a).

Determine si el valor dado es la solución para la ecuación. Si no es una solución, indique por qué.

- |                              |                              |                              |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 5. $\sqrt{x} = 7, x = 49$    | 6. $\sqrt{x} = -7, x = 49$   | 7. $-\sqrt{p} = 8, p = 64$   |
| 8. $-\sqrt{x} = -8, x = 64$  | 9. $\sqrt{x+4} = 3, x = 5$   | 10. $\sqrt{-y-5} = 3, y = 4$ |
| 11. $-2 = \sqrt{t-4}, t = 0$ | 12. $\sqrt{x+4} = 0, x = -4$ |                              |

### Práctica de habilidades

Resuelva cada ecuación. Si la ecuación no tiene solución real, indíquelo.

- |                          |                                |                         |
|--------------------------|--------------------------------|-------------------------|
| 13. $\sqrt{x} = 4$       | 14. $\sqrt{x} = 9$             | 15. $\sqrt{x} = -5$     |
| 16. $\sqrt{m} = -1$      | 17. $\sqrt{x+5} = 3$           | 18. $\sqrt{2x-4} = 2$   |
| 19. $\sqrt{x} + 5 = -7$  | 20. $\sqrt{x} - 4 = 8$         | 21. $\sqrt{z} - 3 = 7$  |
| 22. $6 + \sqrt{w} = 9$   | 23. $11 = 6 + \sqrt{x}$        | 24. $5 = 7 - \sqrt{x}$  |
| 25. $7 + \sqrt{n} = 3$   | 26. $\sqrt{3x+4} = x-2$        | 27. $\sqrt{2x-5} = x-4$ |
| 28. $\sqrt{x^2+8} = x+2$ | 29. $\sqrt{3r-9} = \sqrt{r+3}$ | 30. $5\sqrt{x-4} = 30$  |

31.  $\sqrt{4x+4} = \sqrt{6x-2}$

34.  $\sqrt{4t+8} = 2\sqrt{t}$

37.  $3\sqrt{x} = \sqrt{x+8}$

40.  $5 + \sqrt{x-5} = x$

43.  $\sqrt{x^2-4} = x+2$

46.  $\sqrt{4x+5} + 5 = 2x$

49.  $2\sqrt{3b-5} = \sqrt{2b+10}$

52.  $4\sqrt{4c-7} = 2c+4$

32.  $\sqrt{2x-5} = \sqrt{x+2}$

35.  $\sqrt{4x-5} = \sqrt{x+9}$

38.  $x-5 = \sqrt{x^2-35}$

41.  $\sqrt{3f-4} = 2\sqrt{3f-2}$

44.  $6\sqrt{3x-2} = 24$

47.  $\sqrt{8-7x} = x-2$

50.  $3\sqrt{s+4} = s+6$

33.  $\sqrt{x^2+3} = x+1$

36.  $\sqrt{3k+5} = 2\sqrt{k}$

39.  $4\sqrt{x} = x+3$

42.  $12 - 3\sqrt{2x} = 0$

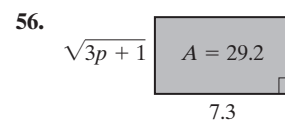
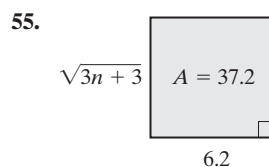
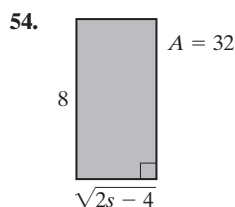
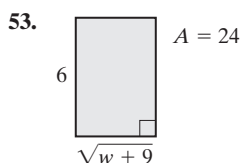
45.  $3 + \sqrt{3x-5} = x$

48.  $1 + \sqrt{x+1} = x$

51.  $3\sqrt{2w+3} = 3w$

## Solución de problemas

Los ejercicios 53 a 56 muestran rectángulos con áreas. Determine el valor de la variable que se indica.



En la sección 9.1 indicamos que podríamos escribir una expresión con raíz cuadrada en forma exponencial. Por ejemplo  $\sqrt{25}$  puede escribirse como  $(25)^{1/2}$ . De forma similar podemos escribir ciertas expresiones exponenciales como raíces cuadradas. Por ejemplo  $(25)^{1/2}$  puede escribirse como  $\sqrt{25}$  y  $(x-5)^{1/2}$  puede escribirse como  $\sqrt{x-5}$ . Reescriba lo siguiente como ecuaciones que tengan raíces cuadradas. Luego resuelva cada ecuación.

57.  $(x+3)^{1/2} = 7$

58.  $(x-6)^{1/2} = 5$

59.  $(x-2)^{1/2} = (2x-9)^{1/2}$

60.  $3(x-9)^{1/2} = 21$

En los ejercicios 61 a 64, **a)** utilice el método PIES para multiplicar los factores del lado izquierdo de la ecuación, **b)** resuelva la ecuación. Recuerde comprobar su respuesta en la ecuación original.

61.  $(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3) = 40$

62.  $(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4) = 20$

63.  $(7-\sqrt{x})(5+\sqrt{x}) = 35$

64.  $(6-\sqrt{x})(2+\sqrt{x}) = 15$

65. La suma de un número natural y su raíz cuadrada es 2. Determine el número.

66. El producto de 3 y la raíz cuadrada de un número es 18. Determine el número.

## Problemas de reto

Resuelva cada ecuación. (Sugerencia: necesitará elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación; luego, aislar la raíz cuadrada que tenga la variable; después, elevar nuevamente al cuadrado ambos lados de la ecuación).

67.  $\sqrt{x} + 2 = \sqrt{x+16}$

68.  $\sqrt{x+1} = 2 - \sqrt{x}$

69.  $\sqrt{x+7} = 5 - \sqrt{x-8}$



## Actividad en grupo

En grupo, analicen y respondan los ejercicios 70 a 72.

70. Las ecuaciones radicales con dos variables pueden graficarse seleccionando valores para  $x$  y determinando los valores correspondientes de  $y$ , como se hizo en la sección 7.2, cuando graficamos ecuaciones lineales.

- a) En grupo, analicen qué valores sería adecuado seleccionar para  $x$ , si necesitan graficar  $y = \sqrt{x}$ . Expliquen su respuesta.

- b) Seleccionen cuatro valores para  $x$  que den como resultado un número completo (entero no negativo) para  $y$ . Listen en una tabla sus valores para  $x$  y  $y$ .
- c) En forma individual, localice los puntos y trace la gráfica. Compare sus gráficas.
- d) ¿La gráfica es lineal? Explique.
- e) ¿Es la gráfica una función? (Vea la sección 7.6.) Explique.
- f) Con base en la gráfica, ¿puede determinar si  $y = \sqrt{x}$  tiene una intersección con  $x$  y una intersección con  $y$ ? Si es así, proporcione las intersecciones.

En grupo, repitan los incisos a) a f) del ejercicio 70 para cada una de las ecuaciones siguientes.

71.  $y = \sqrt{x - 2}$

72.  $y = \sqrt{x + 4}$

## Ejercicios de repaso acumulativo

- [8.1] 73. Resuelva, por el método gráfico, el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 6 \\ y &= 2x - 4 \end{aligned}$$

- [8.2] 74. Resuelva, por sustitución, el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 6 \\ y &= 2x - 4 \end{aligned}$$

- [8.3] 75. Resuelva, por suma y resta, el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 6 \\ y &= 2x - 4 \end{aligned}$$

- [8.4] 76. **Paseo en yate** Un yate en el río Hudson puede viajar, con la corriente a favor, a una velocidad de

18 millas por hora y en contra de la corriente a 14 millas por hora. Determine la velocidad del yate en aguas tranquilas y la velocidad de la corriente.



## 9.6 RADICALES: APLICACIONES Y SOLUCIÓN DE PROBLEMAS



- 1 Utilizar el teorema de Pitágoras.
- 2 Utilizar la fórmula de la distancia.
- 3 Utilizar radicales para resolver problemas de aplicación.

En esta sección nos centraremos en algunas de las aplicaciones interesantes de los radicales. Utilizaremos el teorema de Pitágoras e introduciremos la fórmula de la distancia y daremos algunas aplicaciones adicionales de radicales.

### 1 Utilizar el teorema de Pitágoras

En la sección 5.7 introdujimos el teorema de Pitágoras. Para su conveniencia, nuevamente lo enunciamos aquí.

#### Teorema de Pitágoras

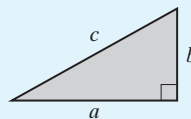
El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$(\text{cateto})^2 + (\text{cateto})^2 = (\text{hipotenusa})^2$$

(continúa en la página siguiente)

Si  $a$  y  $b$  representan los catetos y  $c$  representa la hipotenusa, entonces

$$a^2 + b^2 = c^2$$



En la sección 9.5, cuando resolvimos ecuaciones con raíces cuadradas, elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación para eliminarlas. Cuando resolvamos problemas por medio del teorema de Pitágoras, elevaremos ambos lados de la ecuación a la potencia  $\frac{1}{2}$  para eliminar el cuadrado en una de las variables. Podemos hacer esto porque las leyes de los exponentes presentadas en las secciones 4.1 y 4.2 también aplican a exponentes fraccionarios. Como las longitudes son positivas, los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ , en el teorema de Pitágoras, deben representar valores positivos.

**EJEMPLO 1 Problema de un triángulo rectángulo** Determine la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden  $\sqrt{3}$  y 4 pies.

**Solución**

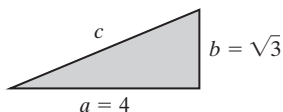


FIGURA 9.2

Dibuje una figura del problema (figura 9.2). No hay diferencia de cuál cateto se denomine  $a$  y cuál se llame  $b$ .

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 &= c^2 \\
 4^2 + (\sqrt{3})^2 &= c^2 && \text{Sustituir los valores para } a \text{ y } b. \\
 16 + 3 &= c^2 \\
 19 &= c^2 \\
 \sqrt{19} &= \sqrt{c^2} && \text{Sacar la raíz cuadrada de ambos lados.} \\
 \sqrt{19} &= c && \text{Ya que } c > 0, \sqrt{c^2} = c
 \end{aligned}$$

Por tanto, la hipotenusa es  $\sqrt{19}$  pies o alrededor de 4.36 pies.

**Comprobación**

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 &= c^2 \\
 4^2 + (\sqrt{3})^2 &\stackrel{?}{=} (\sqrt{19})^2 \\
 16 + 3 &\stackrel{?}{=} 19 \\
 19 &= 19 && \text{Verdadero.}
 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 15



**EJEMPLO 2 Cancha de baloncesto** Una cancha profesional de baloncesto es un rectángulo cuyas dimensiones globales son de 94 pies por 50 pies. Determine la longitud de la diagonal de la cancha.

**Solución Entender y traducir** Primero, dibujamos la cancha (figura 9.3). Nos piden determinar la longitud de la diagonal. Esta longitud es la hipotenusa,  $c$ , del triángulo que se muestra en la figura 9.4.

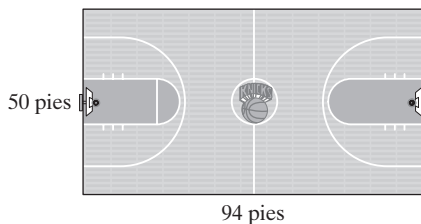


FIGURA 9.3

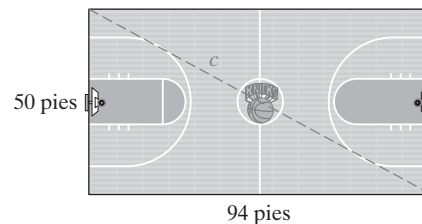



FIGURA 9.4

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 &= c^2 \\
 \text{Calcular } (50)^2 + (94)^2 &= c^2 \\
 2500 + 8836 &= c^2 \\
 11,336 &= c^2 \\
 c &= \sqrt{11,336}, \text{ o aproximadamente } 106.47
 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 25

**Respuesta** La longitud de la diagonal de la cancha es aproximadamente 106.47 pies. 

## 2 Utilizar la fórmula de la distancia

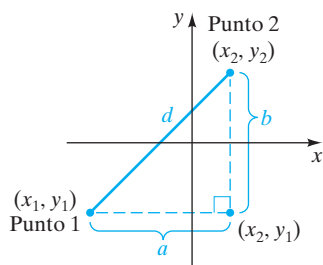


FIGURA 9.5

La **fórmula de la distancia** puede utilizarse para determinar la distancia entre dos puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ , en el sistema de coordenadas cartesianas.

Puede deducirse por medio del teorema de Pitágoras. En la figura 9.5 mostramos tres puntos. La longitud del lado  $a$  es  $x_2 - x_1$  y la longitud del lado  $b$  es  $y_2 - y_1$ . La distancia entre los puntos 1 y 2 puede determinarse por medio del teorema de Pitágoras. En este caso, la hipotenusa, representada por la letra  $d$ , será la distancia.

$$\begin{aligned}
 d^2 &= a^2 + b^2 \\
 d^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\
 d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}
 \end{aligned}$$

### Fórmula de la distancia

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

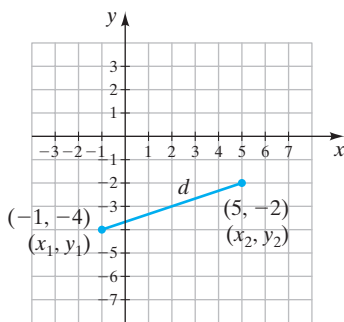



FIGURA 9.6

**EJEMPLO 3** Determine la longitud del segmento de recta entre los puntos  $(-1, -4)$  y  $(5, -2)$ .

**Solución** Mostramos los dos puntos en la figura 9.6. No hay diferencia de cuál punto sea etiquetado como  $(x_1, y_1)$  y cuál sea marcado como  $(x_2, y_2)$ . Sea  $(5, -2)$  el punto  $(x_2, y_2)$  y  $(-1, -4)$  el punto  $(x_1, y_1)$ . Por consiguiente,  $x_2 = 5, y_2 = -2$ , y  $x_1 = -1, y_1 = -4$ .

$$\begin{aligned}
 d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
 &= \sqrt{[5 - (-1)]^2 + [-2 - (-4)]^2} \\
 &= \sqrt{(5 + 1)^2 + (-2 + 4)^2} \\
 &= \sqrt{6^2 + 2^2} \\
 &= \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}, \text{ o aproximadamente } 6.32
 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 21

Por tanto, la distancia entre  $(-1, -4)$  y  $(5, -2)$  es aproximadamente 6.32 unidades. 

## 3 Utilizar radicales para resolver problemas de aplicación

Con frecuencia utilizamos los radicales en cursos de ciencias y de matemáticas. Los ejemplos 4 a 6 ilustran algunas aplicaciones científicas en las que utilizamos radicales.

**EJEMPLO 4 Investigación de un accidente** Los investigadores de accidentes de tráfico son entrenados en la reconstrucción de accidentes. En su trabajo utilizan, entre otras cosas, fórmulas deducidas de las leyes de la física. Una tarea a la que se enfrentan es tratar de determinar la velocidad a la que un vehículo viajaba antes de golpear un objeto. Los investigadores utilizan la fórmula

$$S = 5.5\sqrt{cl}$$




para estimar la velocidad original del vehículo,  $S$ , en millas por hora; en donde  $c$  representa el coeficiente de fricción entre la superficie de la carretera y el neumático, y  $l$  representa la longitud de la marca de derrape más larga medida en pies. En caminos secos, el valor del coeficiente de fricción está entre 0.69 y 0.75 para la mayoría de los automóviles. Determine la velocidad de un automóvil que, antes de detenerse, deja una marca de derrape de 40 pies de longitud. Utilice  $c = 0.72$ .

**Solución** Entender y traducir Comience sustituyendo, en la fórmula dada, 0.72 por  $c$  y 40 por la longitud

$$\begin{aligned} S &= 5.5\sqrt{cl} \\ &= 5.5\sqrt{0.72 \times 40} \\ &= 5.5\sqrt{28.8} \\ &\approx 29.5 \end{aligned}$$

**Calcular**

**Respuesta** Un automóvil que deja una marca de derrape de 40 pies, antes de detenerse, en una superficie seca estaba viajando originalmente a 29.5 millas por hora aproximadamente. 

### EJEMPLO 5



AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 43

**Gravedad** Una fórmula para la velocidad de un objeto, en pies por segundo (despreciando la resistencia al aire), después de que ha caído cierta distancia es

$$v = \sqrt{2gh}$$


donde  $g$  es la aceleración debida a la gravedad y  $h$  es la altura, en pies, que ha caído el objeto. En la Tierra la aceleración debida a la gravedad,  $g$ , es aproximadamente 32 pies por segundo al cuadrado. Determine la velocidad de un coco después de que ha caído 20 pies.

**Solución** Entender y traducir Comience sustituyendo, en la ecuación dada, 32 por  $g$ .

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(32)(h)} = \sqrt{64h}$$

**Calcular** Si  $h = 20$  pies,

$$v = \sqrt{64(20)} = \sqrt{1280} \approx 35.78$$

**Respuesta** Después de que el coco ha caído 20 pies, su velocidad es aproximadamente 35.78 pies por segundo. 

### EJEMPLO 6



**Un péndulo** Desde el año 1600, la gente ha estado experimentando con formas para construir relojes más precisos. Al astrónomo holandés, Christiaan Huygens, se le atribuye ser el primero en sugerir el uso de un mecanismo de péndulo. El *periodo de un péndulo* (el tiempo requerido para que el péndulo dé una oscilación completa, de ida y de regreso) depende de la longitud del péndulo. La determinación de la longitud para un péndulo que haría que oscilase 60 veces en un minuto, fue el primer paso en la creación de relojes más precisos. Por supuesto, no los utilizamos sólo en los relojes. Los péndulos se encuentran en los cables aéreos de electricidad para reducir los movimientos violentos de los conductores (causados por el viento). Incluso, un péndulo puede encontrarse en el parque —un simple columpio, ¡oscila libremente hacia adelante y hacia atrás!

La fórmula para el periodo,  $T$  (en segundos), de un péndulo es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$$

donde  $L$  es la longitud del péndulo, en pies (figura 9.7 en la página 597). Determine el periodo del péndulo si su longitud es de 8 pies. Utilice 3.14 como una aproximación para  $\pi$ .

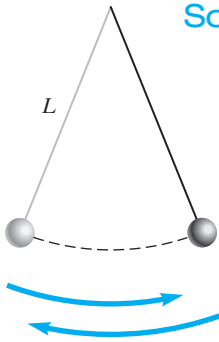


FIGURA 9.7

**Solución** Entender y traducir En la fórmula, sustituya 3.14 por  $\pi$  y 8 por  $L$ .

Calcular

$$\begin{aligned} T &\approx 2(3.14) \sqrt{\frac{8}{32}} \\ &\approx 6.28 \sqrt{\frac{1}{4}} \\ &\approx 6.28 \left(\frac{1}{2}\right) = 3.14 \text{ seconds} \end{aligned}$$

**Respuesta** Un péndulo de 8 pies de longitud tarda alrededor de 3.14 segundos en dar una oscilación completa.

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 37



## Matemáticas en acción

### Área de superficie corporal



Cuando pensamos en órganos del cuerpo, de inmediato vienen a la mente estructuras como corazón, pulmones y riñones. La piel también es un órgano y, de hecho, es el órgano más grande de su cuerpo. La medida de su extensión se denomina *área de superficie corporal* (ASC). Una de las diferentes fórmulas utilizadas para calcular el ASC, en metros cuadrados, es la fórmula de Mosteller:

$$\text{ASC} = \sqrt{\frac{H \cdot W}{3600}}$$

en donde  $H$  es la altura, en centímetros, y  $W$  es el peso, en kilogramos. Una fórmula alternativa es

$$\text{ASC} = \sqrt{\frac{H \cdot W}{3131}}$$

donde  $H$  es la altura, en pulgadas, y  $W$  es el peso en libras.

El ASC representa una medida importante en varias áreas de la medicina. Con frecuencia, los doctores prefieren utilizar el ASC para determinar la dosis de ciertas drogas. También, en ocasiones, los farmacólogos utilizan el ASC en lugar del peso cuando realizan investigación de ciertas drogas.

El ASC desempeña un papel central en la determinación de la gravedad de quemaduras. Una quemadura se considera “crítica” si ha afectado las capas más profundas de la piel y cubre más del 10% del área de la superficie corporal, o ha penetrado menos profundamente y cubre más del 30% del ASC.

El área de superficie corporal, pero no el peso, influye en la velocidad metabólica basal (VMB), velocidad a la que la gente consume energía. Dos personas con formas diferentes, y por tanto ASC diferentes, y que pesan lo mismo, tienen diferentes VMB. Incluso si sus pesos son idénticos, una persona baja y más gruesa por lo común tendrá una VMB más lenta que una persona alta y delgada. En este ejemplo, la persona alta tiene una mayor superficie de piel, pierde más calor por radiación y, así, debe tener un metabolismo más rápido para generar el calor perdido. En Internet puede encontrar diversas calculadoras de ASC, si introduce los términos “calculadora Área superficie corporal”, en la zona de búsqueda en [www.google.com](http://www.google.com).

## Conjunto de ejercicios 9.6

### Ejercicios conceptuales

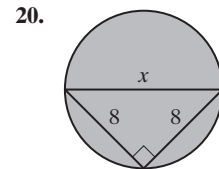
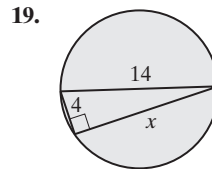
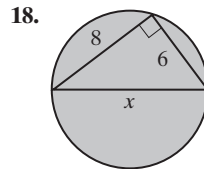
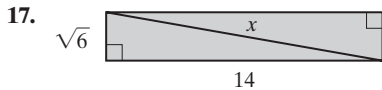
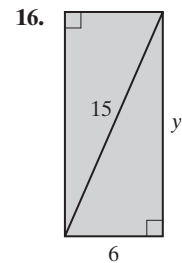
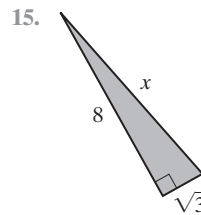
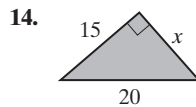
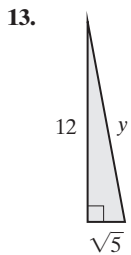
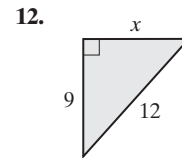
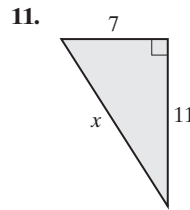
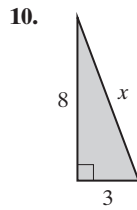
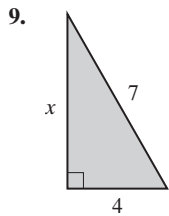
1. ¿Qué es un triángulo rectángulo?
2. Enuncie el teorema de Pitágoras y describa qué relación expresa con respecto a un triángulo rectángulo.
3. El teorema de Pitágoras, ¿se puede utilizar con cualquier triángulo? Explique.
4. a) Escriba la fórmula de la distancia.  
b) ¿Cuándo utilizamos la fórmula de la distancia?



5. Los siguientes pares ordenados:  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ , ¿qué representan en la fórmula de la distancia?
6. Determine la distancia entre los puntos  $(4, 0)$  y  $(-3, 0)$ .
7. Determine la distancia entre los puntos  $(0, -4)$  y  $(0, -10)$ .
8. ¿Qué se entiende por el periodo de un péndulo?

## Práctica de habilidades

Utilice el teorema de Pitágoras para determinar el valor de cada incógnita. Proporcione el valor exacto; luego redondee su respuesta al centésimo más próximo.



Utilice la fórmula de la distancia para determinar la longitud de los segmentos de recta entre cada par de puntos.

21.  $(7, 6)$  y  $(2, 9)$ .
22.  $(4, -3)$  y  $(-5, 6)$ .
23.  $(-8, 4)$  y  $(4, 11)$ .
24.  $(0, 5)$  y  $(-6, -4)$ .

## Solución de problemas

25. **Dimensiones de un campo de fútbol americano** El estadio Pro Player en Miami, Florida, es casa de los Marlins de Florida y de los Delfines de Miami. El campo de fútbol es de 120 yardas de largo de una zona de anotación a la otra. Determine la longitud de la diagonal, al centésimo más cercano, de una esquina de una zona de anotación a la esquina opuesta, si el ancho del campo es de 53.3 yardas.
26. **Campo de rugby** De acuerdo con la información proporcionada por el sitio Web del Austin Rugby Football Club, las dimensiones de un campo de rugby son 69 por 100 metros. ¿Cuál es la longitud de la diagonal, al centésimo más cercano, de una esquina del campo a la esquina opuesta?




27. **Escalera sobre una casa** Pedro y Vanessa planean pintar su casa. Las instrucciones en una escalera extensible de 8 metros indican que, cuando se utilice, la base de la escalera debe colocarse a dos metros de la casa. Si siguen las instrucciones, ¿a qué altura de la casa estará la parte superior de la escalera?

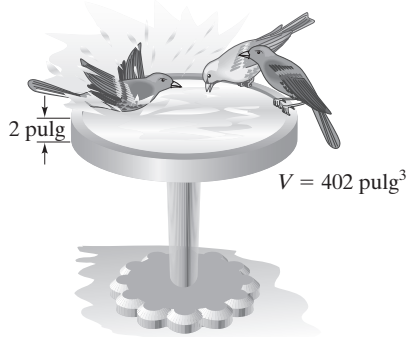
28. **Cable tensor para un poste** Un equipo de una compañía de cable local debe colocar un cable para sujetar un poste. El cable irá de la parte superior de un poste de 14 metros a un punto 6 metros alejado de la base. ¿Cuál será la longitud del cable tensor?

29. **Lado de un cuadrado** La longitud del lado de un cuadrado,  $l$ , puede determinarse por medio de la fórmula  $l = \sqrt{A}$ , donde  $A$  es el área del cuadrado. Determine la longitud del lado de un cuadrilátero de boxeo cuya área es de 256 pies cuadrados.

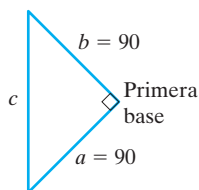
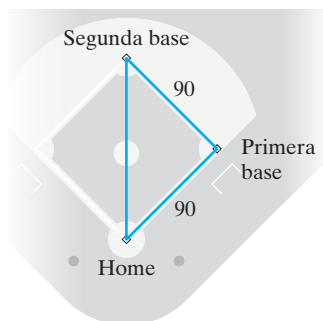
30. **Área de un círculo** La fórmula para el área de un círculo es  $A = \pi r^2$ , en donde  $\pi$  es aproximadamente 3.14 y  $r$  es el radio del círculo. Determine el radio de un círculo cuya área es 45 pulgadas cuadradas.

31. **Radio de un círculo** Determine el radio de un círculo cuya área es 80 pies cuadrados.

 32. **Pila para aves** Una pila para aves puede contener 2 pulgadas de profundidad de agua, como se muestra en la figura. Si el volumen del agua que puede contener la pila es 402 pulgadas cúbicas, determine el radio de la pila. El volumen del agua se calcula determinando el área de la base circular de la pila y luego se multiplica por la profundidad del agua. Utilice la fórmula  $V = \pi r^2 h$ .



33. **Béisbol** Un diamante reglamentario de béisbol es un cuadrado con 90 pies de base a base. ¿A qué distancia del home está la segunda base?



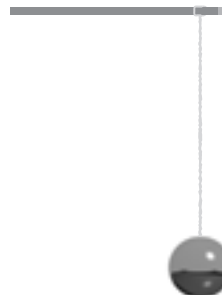
34. **Caja de zapatos** La tapa de una caja de zapatos es un pedazo rectangular de cartón con un largo de 12 pulgadas y ancho de 5 pulgadas. Determine la longitud de la diagonal que cruza la tapa de la caja de zapatos.

35. **Equipaje de mano** Las dimensiones máximas de la valija de mano, en la mayoría de las líneas aéreas es: longitud 24 pulgadas, altura 16 pulgadas y profundidad 10 pulgadas. Si la valija cumple justamente las medidas, determine la longitud de la diagonal que cruza la superficie de la valija.

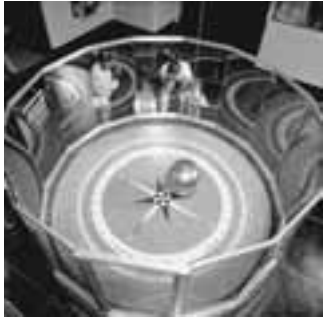
36. **Caída libre** Si un par de lentes que se dejaron caer desde la torre Sears, a una altura de 1,431 pies (el piso habitado más alto), determine la velocidad de los lentes cuando chocan con el piso. Desprecie la resistencia del aire. (Utilice  $v = \sqrt{2gh}$ ; consulte el ejemplo 5.)



37. **Péndulo** El periodo de un péndulo simple se determina por la longitud de la cuerda, no por el material del que está compuesto el peso (o bola). Mikel Finn construyó un péndulo con una cuerda que mide 43 pulgadas. ¿Cuál es el periodo de este péndulo? (Utilice  $T = 2\pi\sqrt{L/32}$ ; consulte el ejemplo 6.)



38. **Péndulo de Foucault** Un ejemplo de un péndulo de Foucault está en exhibición en el Instituto Smithsonian en Washington, D.C. Se utiliza para demostrar la rotación de la Tierra. Tiene un cable de 52 pies de largo y una bola hueca y simétrica de latón, que pesa aproximadamente 240 libras. Determine el periodo del péndulo.

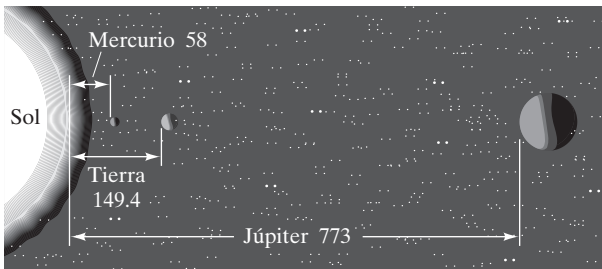


39. **Otro péndulo** El Museo de Ciencias Naturales de Houston también tiene un péndulo de Foucault en exhibición. Tiene un cable de 61.6 pies de largo y una bola que pesa 180 libras. Determine el periodo del péndulo.

**Días terrestres** Para cualquier planeta, su “año” es el tiempo que tarda el planeta en dar una vuelta alrededor del Sol. El número de “días terrestres”,  $N$ , en el año de un planeta dado, se aproxima por medio de la fórmula

$$N = 0.2(\sqrt{R})^3$$

donde  $R$  es la distancia media del Sol, en millones de kilómetros. La distancia media del Sol, en millones de kilómetros, para tres planetas se ilustra a continuación.



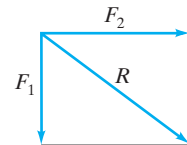
40. Determine el número de días terrestres en el año de Mercurio.  
 41. Determine el número de días terrestres en el año de la Tierra.  
 42. Determine el número de días terrestres en el año de Júpiter.

## Problemas de reto

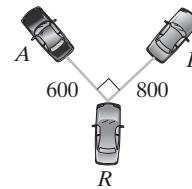
46. **Rectángulo** El largo de un rectángulo es 3 pulgadas mayor que su ancho. Si la longitud de la diagonal es 15 pulgadas, determine las dimensiones del rectángulo.

La velocidad de escape,  $v_e$ , es la velocidad que necesita una nave espacial para escapar del campo gravitacional de un planeta. Ésta se determina por medio de la fórmula  $v_e = \sqrt{2gR}$ , donde  $g$  es la aceleración debida a la gravedad del planeta y  $R$  es el radio del planeta, en metros.

43. **Velocidad de escape de la Tierra** Determine la velocidad de escape para la Tierra, en donde  $g = 9.81$  metros por segundo al cuadrado, y  $R = 6,370,000$  metros.  
 44. **Velocidad de escape de Marte** Futuras exploraciones de Marte podrían incluir enviar naves espaciales que aterrizarán en la superficie del planeta y lo dejarán después de que se haya concluido el trabajo científico. ¿Cuál es la velocidad aproximada que se necesita para que una nave espacial escape del campo gravitacional de Marte? La aceleración debida a la gravedad en Marte, es alrededor de 3.6835 metros por segundo al cuadrado. El radio de Marte es casi 3,393,500 metros.  
 45. **Fuerza resultante** Cuando dos fuerzas,  $F_1$  y  $F_2$ , tiran en ángulos rectos entre ellas, como se ilustra, la fuerza resultante o fuerza efectiva,  $R$ , puede determinarse por medio de la fórmula  $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ .



Dos automóviles en un ángulo de  $90^\circ$  entre ellos, están tratando de sacar del barro un tercer automóvil, como muestra en la figura. Si el automóvil A ejerce 600 libras de fuerza y el B ejerce 800 libras de fuerza, determine la fuerza resultante sobre el automóvil atascado en el barro.



47. **Gravedad en la luna** La aceleración debida a la gravedad en la luna es  $1/6$  de la Tierra. Si cae una cámara de un cohete, 100 pies por encima de la superficie lunar, ¿a

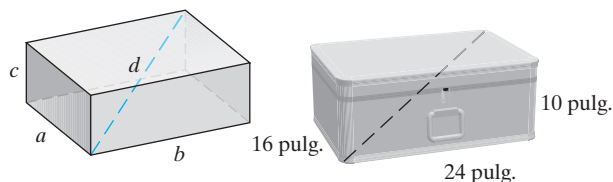
qué velocidad golpeará la Luna? (Utilice  $v = \sqrt{2gh}$ ; vea el ejemplo 5.)

**48. Longitud de un péndulo** Determine la longitud de un péndulo, si el periodo es 2 segundos. (Utilice  $T = 2\pi\sqrt{L/32}$ ; consulte el ejemplo 6.)

**49. Diagonal de un prisma rectangular** La longitud de la diagonal de un prisma rectangular (vea la figura a la derecha) está dada por

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Determine la longitud de la diagonal de la valija que se muestra abajo a la derecha.



## Ejercicios de repaso acumulativo

[2.7] 50. Resuelva la desigualdad  $2(x + 3) < 4x - 6$ .

[4.2] 51. Simplifique  $(4x^{-4}y^3)^{-1}$ .

[8.3] 52. Por medio del método de suma, resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$3x + 4y = 12$$

$$\frac{1}{2}x - 2y = 8$$

[6.6] 53. Resuelva la ecuación  $5 + \frac{6}{x} = \frac{2}{3x}$ .

## 9.7 RAÍCES DE ORDEN SUPERIOR Y EXPONENTES RACIONALES



- 1 Evaluar raíces cúbicas y cuartas.
- 2 Simplificar raíces cúbicas y cuartas.
- 3 Escribir expresiones radicales en forma exponencial.

### 1 Evaluar raíces cúbicas y cuartas

En esta sección utilizaremos los mismos conceptos básicos empleados en las secciones 9.1 a 9.4 para trabajar con radicales con índices 3 y 4. Ahora introducimos las **raíces cúbicas y cuartas**.

$\sqrt[3]{a}$  se lee “raíz cúbica de  $a$ ”.

$\sqrt[4]{a}$  se lee “raíz cuarta de  $a$ ”.

Observe que

$$\sqrt[3]{a} = b \quad \text{si} \quad b^3 = a$$

y

$$\sqrt[4]{a} = b \quad \text{si} \quad b^4 = a, \quad b > 0$$

#### Ejemplos

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

ya que  $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

ya que  $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

ya que  $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

ya que  $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

$$\sqrt[4]{81} = 3$$

ya que  $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

**EJEMPLO 1** Evalúe. **a)**  $\sqrt[3]{-64}$       **b)**  $\sqrt[3]{125}$

**Solución** **a)** Para determinar  $\sqrt[3]{-64}$ , debemos encontrar el número que elevado al cubo es  $-64$ .

$$\sqrt[3]{-64} = -4 \quad \text{ya que } (-4)^3 = -64$$

**b)** Para determinar  $\sqrt[3]{125}$ , debemos encontrar el número que elevado al cubo es 125.

$$\sqrt[3]{125} = 5 \quad \text{ya que } 5^3 = 125$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 11



**Observe que la raíz cúbica de un número positivo es un número positivo y la raíz cúbica de un número negativo es un número negativo. El radicando de una raíz cuarta (o cualquier raíz par) debe ser un número no negativo, para que la expresión sea un número real.** Por ejemplo,  $\sqrt[4]{-16}$  no es un número real, ya que ningún número real elevado a la cuarta potencia puede ser un número negativo.

En las siguientes explicaciones, será útil que definamos cubos perfectos. Un **cubo perfecto** es un número que es el cubo de un número natural.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ... *Números naturales.*

$1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3, 10^3, \dots$  *Cubos de números naturales.*

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, ... *Cubos perfectos.*

Observe que  $\sqrt[3]{1} = 1$ ,  $\sqrt[3]{8} = 2$ ,  $\sqrt[3]{27} = 3$ ,  $\sqrt[3]{64} = 4$ , y así sucesivamente.

**Las potencias cuartas perfectas** pueden expresarse de manera análoga.

1, 2, 3, 4, 5, 6, ... *Números naturales.*

$1^4, 2^4, 3^4, 4^4, 5^4, 6^4, \dots$  *Cuartas potencias de números naturales.*

1, 16, 81, 256, 625, 1296, ... *Potencias cuartas perfectas.*

Observe que  $\sqrt[4]{1} = 1$ ,  $\sqrt[4]{16} = 2$ ,  $\sqrt[4]{81} = 3$ ,  $\sqrt[4]{256} = 4$ , y así sucesivamente.

La tabla 9.2 ilustra algunos números cubos perfectos y cuartas potencias perfectas. Esta tabla puede ser útil cuando se simplifican raíces cúbicas y cuartas.

La tabla 9.2 podría serle útil al evaluar raíces cúbicas y raíces cuartas.

**TABLA 9.2**

Cubos perfectos	Raíz cúbica	Valor	Potencias cuartas perfectas	Raíz cuarta	Valor
1	$\sqrt[3]{1}$	= 1	1	$\sqrt[4]{1}$	= 1
8	$\sqrt[3]{8}$	= 2	16	$\sqrt[4]{16}$	= 2
27	$\sqrt[3]{27}$	= 3	81	$\sqrt[4]{81}$	= 3
64	$\sqrt[3]{64}$	= 4	256	$\sqrt[4]{256}$	= 4
125	$\sqrt[3]{125}$	= 5	625	$\sqrt[4]{625}$	= 5
216	$\sqrt[3]{216}$	= 6	1296	$\sqrt[4]{1296}$	= 6
343	$\sqrt[3]{343}$	= 7			
512	$\sqrt[3]{512}$	= 8			



## Uso de la calculadora

### Evaluación de raíces cúbicas y superiores en una calculadora científica

Si su calculadora científica tiene una tecla  $y^x$  o  $x^y$ , entonces puede determinar raíces cúbicas y superiores. Para determinar raíces cúbicas y superiores, necesita utilizar la tecla de función secundaria,  $2^{\text{nd}}$ , y la tecla  $y^x$  o  $x^y$ . Algunas calculadoras utilizan la tecla *inversa*  $\text{INV}$ , en lugar de la tecla  $2^{\text{nd}}$ . Para evaluar  $\sqrt[3]{216}$  presione las teclas siguientes:

$$216 \quad 2^{\text{nd}} \quad y^x \quad 3 \quad = \quad 6$$

↑ *Radicando.*     
 ↑ *Índice.*     
 ↑ *Respuesta mostrada.*

Por tanto,  $\sqrt[3]{216} = 6$ . Para evaluar  $\sqrt[4]{158}$ , presione las teclas siguientes:

$$158 \quad 2^{\text{nd}} \quad y^x \quad 4 \quad = \quad 3.54539$$

↑ *Radicando.*     
 ↑ *Índice.*     
 ↑ *Respuesta mostrada.*

Así que  $\sqrt[4]{158} \approx 3.54539$ .

Para determinar la raíz impar de un número negativo, determine la raíz impar de ese número positivo y luego coloque un signo negativo antes del valor. Por ejemplo, para determinar  $\sqrt[3]{-64}$ , encuentre  $\sqrt[3]{64}$ , que es 4; luego coloque un signo negativo antes del valor para obtener  $-4$ . Así que  $\sqrt[3]{-64} = -4$ .

### Ejercicios

Evalúe cada una de las raíces siguientes.

- |                     |                     |                      |
|---------------------|---------------------|----------------------|
| 1. $\sqrt[3]{729}$  | 2. $\sqrt[4]{16}$   | 3. $\sqrt[4]{200}$   |
| 4. $\sqrt[3]{1000}$ | 5. $\sqrt[3]{-216}$ | 6. $\sqrt[5]{-1200}$ |



## Uso de la calculadora graficadora

### Evaluación de raíces cúbicas y raíces de orden superior en una calculadora graficadora

El procedimiento para determinar raíces cúbicas y superiores depende de su calculadora graficadora. Para las instrucciones, lea el manual adjunto.

En la TI-83 Plus usted utiliza el menú  $\text{MATH}$  para determinar raíces cúbicas y superiores. Para determinar una raíz cúbica utilice, del menú  $\text{MATH}$ , la opción 4:  $\sqrt[3]{}$ .

Para evaluar  $\sqrt[3]{216}$  presione las siguientes teclas:

$$\text{MATH} \quad 4 \quad 216 \quad ) \quad \text{ENTER} \quad 6$$

↑ *Menú*     
 ↑ *Entonces*     
 ↑ *Ingrese el*     
 ↑ *Respuesta*  
*MATH.*     
 *la TI-83 Plus*     
 *radicando.*     
 *mostrada.*  
*muestra*  
 *$\sqrt[3]{}$  (.*

Para evaluar  $\sqrt[3]{-216}$ , presione las siguientes teclas:

$$\text{MATH} \quad 4 \quad (-) \quad 216 \quad ) \quad \text{ENTER} \quad -6$$

(continúa en la página siguiente)

Por lo que  $\sqrt[3]{-216} = -6$ .

Para evaluar raíces de orden superior a 3, del menú **MATH** utilice la opción 5:  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$ . Introduzca el índice antes de presionar la tecla **MATH**. Para evaluar  $\sqrt[4]{158}$ , presione las siguientes teclas.



## Ejercicios

Evalúe cada una de las siguientes raíces.

- |                     |                     |                      |
|---------------------|---------------------|----------------------|
| 1. $\sqrt[3]{343}$  | 2. $\sqrt[4]{1296}$ | 3. $\sqrt[4]{76}$    |
| 4. $\sqrt[3]{2744}$ | 5. $\sqrt[3]{-512}$ | 6. $\sqrt[5]{-1000}$ |

## 2 Simplificar raíces cúbicas y cuartas

La regla del producto utilizada en la simplificación de raíces cuadradas puede extenderse para índices mayores que 2.

### Regla del producto para radicales

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab}, & \text{para } a \geq 0, b \geq 0 \text{ y } n \text{ es par} \\ \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab}, & \text{cuando } n \text{ es impar}\end{aligned}$$

Para simplificar una raíz cúbica cuyo radicando es una constante, escriba el radicando como el producto de un cubo perfecto y otro número. Luego simplifique, utilizando la regla del producto.

**EJEMPLO 2** Simplifique a)  $\sqrt[3]{32}$     b)  $\sqrt[3]{54}$     c)  $\sqrt[4]{48}$

### Solución

a) Ocho es un cubo perfecto que es un factor del radicando, 32. Por tanto, simplificamos como sigue:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{32} &= \sqrt[3]{8 \cdot 4} \\ &= \sqrt[3]{8} \sqrt[3]{4} && \text{Regla del producto.} \\ &= 2 \sqrt[3]{4} && \text{Simplificar.}\end{aligned}$$

b) Veintisiete es un factor cubo perfecto de 54. Por tanto, simplificamos como sigue.

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27} \sqrt[3]{2} = 3 \sqrt[3]{2}$$

c) Escriba  $\sqrt[4]{48}$  como un producto de una cuarta potencia perfecta y otro número; luego simplifique. Con base en la lista anterior, vemos que 16 es una potencia cuarta perfecta. Como 16 es un factor de 48, simplificamos como sigue:

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{48} &= \sqrt[4]{16 \cdot 3} \\ &= \sqrt[4]{16} \sqrt[4]{3} && \text{Regla del producto.} \\ &= 2 \sqrt[4]{3} && \text{Simplificar.}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 27



## 3 Escribir expresiones radicales en forma exponencial

Una expresión radical puede escribirse en **forma exponencial** por medio de la siguiente regla.

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a} &= a^{1/n}, & a \geq 0 \text{ y } n \text{ es par} && \text{Regla 4} \\ \sqrt[n]{a} &= a^{1/n}, & \text{cuando } n \text{ es impar}\end{aligned}$$

## Ejemplos

$$\begin{aligned}\sqrt{8} &= 8^{1/2} & \sqrt{x} &= x^{1/2} \\ \sqrt[3]{4} &= 4^{1/3} & \sqrt[4]{5} &= 5^{1/4} \\ \sqrt[3]{x} &= x^{1/3} & \sqrt[4]{y} &= y^{1/4} \\ \sqrt[3]{5z^2} &= (5z^2)^{1/3} & \sqrt[4]{3y^2} &= (3y^2)^{1/4}\end{aligned}$$

Observe que  $\sqrt{8} = 8^{1/2}$  y  $\sqrt{x} = x^{1/2}$ , es consistente con lo que aprendimos en la sección 9.1. Este concepto puede extenderse como sigue.

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{m/n}, \text{ para } a \geq 0 \text{ y } m \text{ y } n \text{ enteros} \quad \text{Regla 5}$$

Mientras el radicando sea no negativo, podemos cambiar de una forma a otra.

## Ejemplos

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{27^4} &= (\sqrt[3]{27})^4 = 3^4 = 81 & \sqrt[3]{x^3} &= x^{3/3} = x^1 = x \\ 8^{2/3} &= (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4 & \sqrt[4]{y^8} &= y^{8/4} = y^2\end{aligned}$$

**EJEMPLO 3** Escriba cada radical en forma exponencial.

**a)**  $\sqrt[3]{a^5}$    **b)**  $\sqrt[4]{y^7}$    **c)**  $\sqrt[4]{x^{13}}$

**Solución**

**a)**  $\sqrt[3]{a^5} = a^{5/3}$    **b)**  $\sqrt[4]{y^7} = y^{7/4}$    **c)**  $\sqrt[4]{x^{13}} = x^{13/4}$  ✧

**EJEMPLO 4** Simplifique **a)**  $\sqrt[4]{x^{12}}$    **b)**  $\sqrt[3]{y^{21}}$

**Solución**

Escriba cada expresión radical en forma exponencial, luego simplifique.

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 41

**a)**  $\sqrt[4]{x^{12}} = x^{12/4} = x^3$    **b)**  $\sqrt[3]{y^{21}} = y^{21/3} = y^7$  ✧

Las leyes de los exponentes estudiadas en las secciones 4.1 y 4.2 también se aplican cuando los exponentes son fracciones. En el ejemplo 5 **c)** utilizamos la regla del exponente negativo y en el ejemplo 8 utilizamos las reglas del producto y de la potencia con exponentes fraccionarios.

**EJEMPLO 5** Evalúe. **a)**  $8^{4/3}$    **b)**  $16^{5/4}$    **c)**  $8^{-2/3}$

**Solución**

Para evaluar, escribimos cada expresión exponencial en forma radical.

**a)**  $8^{4/3} = (\sqrt[3]{8})^4 = 2^4 = 16$    **b)**  $16^{5/4} = (\sqrt[4]{16})^5 = 2^5 = 32$

**c)** De la sección 4.2, recuerde que  $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ . Por tanto,

$$8^{-2/3} = \frac{1}{8^{2/3}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8})^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 67


**CÓMO EVITAR  
ERRORES COMUNES**

Los estudiantes pueden cometer errores al simplificar expresiones que tienen exponentes negativos. Tenga cuidado al resolver tales problemas. El siguiente es un error común.

**CORRECTO**

$$27^{-2/3} = \frac{1}{27^{2/3}}$$

**INCORRECTO**

~~$$27^{-2/3} = -27^{2/3}$$~~

La expresión  $27^{-2/3}$  se reduce a  $\frac{1}{9}$ . ¿Puede mostrar cómo?



**EJEMPLO 6** Simplifique. a)  $\sqrt[4]{16^2}$  b)  $\sqrt[6]{27^2}$

**Solución** Escriba cada expresión en forma exponencial, luego simplifique.

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 79

$$\text{a) } \sqrt[4]{16^2} = 16^{2/4} = 16^{1/2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{b) } \sqrt[6]{27^2} = 27^{2/6} = 27^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3$$



**EJEMPLO 7** Simplifique y escriba la respuesta en forma radical.

$$\text{a) } \sqrt[6]{y^3} \quad \text{b) } \sqrt[9]{z^3}$$

**Solución** Escriba la expresión en forma exponencial, luego simplifique.

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 51

$$\text{a) } \sqrt[6]{y^3} = y^{3/6} = y^{1/2} = \sqrt{y}$$

$$\text{b) } \sqrt[9]{z^3} = z^{3/9} = z^{1/3} = \sqrt[3]{z}$$



**EJEMPLO 8** Simplifique. a)  $\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x}$  b)  $(\sqrt[4]{a^2})^8$

**Solución** Para simplificar, cambiamos cada expresión radical a una forma exponencial, luego aplicamos las leyes de los exponentes.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x} &= x^{1/2} \cdot x^{1/4} \\ &= x^{(1/2)+(1/4)} \\ &= x^{(2/4)+(1/4)} \\ &= x^{3/4} \quad (\text{o bien } \sqrt[4]{x^3} \text{ en forma radical}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (\sqrt[4]{a^2})^8 &= (a^{2/4})^8 \\ &= (a^{1/2})^8 \\ &= a^4 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 89



### Uso de la calculadora

En el capítulo 1, página 73, aprendimos cómo utilizar la tecla  $y^x$  o la tecla  $\wedge$  para elevar un valor a un exponente entero mayor a 2. También puede utilizar estas teclas si el exponente es una fracción. En los ejemplos siguientes demostramos cómo.

**EJEMPLO 1** Evalúe  $27^{2/3}$ .

**Solución** Calculadora científica:

$$27 \text{ } y^x \text{ } ( \text{ } 2 \text{ } \div \text{ } 3 \text{ } ) \text{ } = \text{ } 9 \quad \leftarrow \text{ Respuesta mostrada.}$$

Calculadora graficadora:

$$27 \text{ } \wedge \text{ } ( \text{ } 2 \text{ } \div \text{ } 3 \text{ } ) \text{ } \text{ENTER} \text{ } 9 \quad \leftarrow \text{ Respuesta mostrada.}$$

La respuesta es 9. Por tanto,  $27^{2/3} = 9$ .

**EJEMPLO 2** Evalúe  $16^{-3/4}$ .

**Solución** Calculadora científica:

$$16 \text{ } y^x \text{ } ( \text{ } 3 \text{ } +/\text{-} \text{ } \div \text{ } 4 \text{ } ) \text{ } = \text{ } .125 \quad \leftarrow \text{ Respuesta mostrada.}$$

Calculadora graficadora:

$$16 \text{ } \wedge \text{ } ( \text{ } (-) \text{ } 3 \text{ } \div \text{ } 4 \text{ } ) \text{ } \text{ENTER} \text{ } .125 \quad \leftarrow \text{ Respuesta mostrada.}$$

La respuesta es 0.125. Por tanto,  $16^{-3/4} = 0.125$ .

### Ejercicios

Utilice su calculadora para evaluar cada expresión.

1.  $4^{3/2}$

2.  $64^{4/3}$

3.  $125^{-2/3}$

4.  $81^{-3/4}$

Esta sección tuvo la intención de darle una introducción breve a raíces, distintas a las raíces cuadradas. Si toma un curso de álgebra intermedia, podrá estudiar estos conceptos con mayor profundidad.

## Conjunto de ejercicios 9.7

En este conjunto de ejercicios, suponga que todas las variables representan números reales no negativos.

### Ejercicios conceptuales

1. Escriba cómo deberían leerse los siguientes radicales.
  - a)  $\sqrt{8}$
  - b)  $\sqrt[3]{8}$
  - c)  $\sqrt[4]{8}$
2. Describa un cubo perfecto y una potencia cuarta perfecta.
3. ¿Cómo simplifica una raíz cúbica cuyo radicando sea una constante?
4. ¿Cómo simplifica una raíz cuarta cuyo radicando sea una constante?
5. a) Explique cómo cambiar una expresión escrita en forma radical a forma exponencial.  
b) Por medio del procedimiento que escribió en el inciso a), escriba  $\sqrt[3]{y^7}$  en forma exponencial.
6. a) Explique cómo cambiar una expresión escrita en forma exponencial a forma radical.  
b) Por medio del procedimiento que escribió en el inciso a), escriba  $x^{5/4}$  en forma radical.
7. ¿La raíz impar de un número positivo siempre será un número positivo? Explique.
8. La raíz impar de un número negativo, ¿puede ser un número positivo? Explique.

### Práctica de habilidades

Evalúe.

- |                    |                     |                       |                      |
|--------------------|---------------------|-----------------------|----------------------|
| 9. $\sqrt[3]{8}$   | 10. $\sqrt[3]{27}$  | 11. $\sqrt[3]{-27}$   | 12. $\sqrt[3]{-125}$ |
| 13. $\sqrt[4]{16}$ | 14. $\sqrt[3]{216}$ | 15. $\sqrt[4]{81}$    | 16. $\sqrt[4]{1}$    |
| 17. $\sqrt[3]{-1}$ | 18. $\sqrt[4]{1}$   | 19. $\sqrt[3]{-1000}$ | 20. $\sqrt[4]{625}$  |

Simplifique.

- |                      |                     |                    |                      |
|----------------------|---------------------|--------------------|----------------------|
| 21. $\sqrt[3]{40}$   | 22. $\sqrt[3]{48}$  | 23. $\sqrt[3]{16}$ | 24. $\sqrt[3]{24}$   |
| 25. $\sqrt[3]{108}$  | 26. $\sqrt[3]{128}$ | 27. $\sqrt[4]{32}$ | 28. $\sqrt[3]{3000}$ |
| 29. $\sqrt[4]{1250}$ | 30. $\sqrt[3]{250}$ |                    |                      |

Escriba cada radical en forma exponencial.

- |                        |                        |                     |                        |
|------------------------|------------------------|---------------------|------------------------|
| 31. $\sqrt[3]{x^7}$    | 32. $\sqrt[4]{x^3}$    | 33. $\sqrt[5]{a^2}$ | 34. $\sqrt[5]{x^{11}}$ |
| 35. $\sqrt[4]{y^{15}}$ | 36. $\sqrt[4]{w^{13}}$ | 37. $\sqrt[3]{y^8}$ | 38. $\sqrt[4]{x^5}$    |

Escriba cada radical en forma exponencial y simplifique.

- |                        |                        |                        |                        |
|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 39. $\sqrt[4]{x^4}$    | 40. $\sqrt[3]{y^6}$    | 41. $\sqrt[3]{y^{21}}$ | 42. $\sqrt[4]{y^{20}}$ |
| 43. $\sqrt[3]{m^{18}}$ | 44. $\sqrt[3]{z^{21}}$ | 45. $\sqrt[4]{a^{60}}$ | 46. $\sqrt[3]{x^3}$    |
| 47. $\sqrt[3]{x^{15}}$ | 48. $\sqrt[3]{r^{30}}$ |                        |                        |

Escriba cada radical en forma exponencial y luego simplifique. Escriba su respuesta en forma radical simplificada.

- |                     |                     |                     |                     |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 49. $\sqrt[4]{m^2}$ | 50. $\sqrt[4]{y^2}$ | 51. $\sqrt[6]{t^3}$ | 52. $\sqrt[6]{p^3}$ |
| 53. $\sqrt[9]{x^3}$ | 54. $\sqrt[9]{r^3}$ | 55. $\sqrt[8]{w^4}$ | 56. $\sqrt[8]{z^4}$ |
| 57. $\sqrt[6]{x^4}$ | 58. $\sqrt[6]{y^4}$ | 59. $\sqrt[8]{z^6}$ | 60. $\sqrt[8]{n^6}$ |

Escriba cada expresión en forma radical y luego evalúe.

- |                |                 |                 |                 |
|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 61. $27^{2/3}$ | 62. $8^{4/3}$   | 63. $216^{2/3}$ | 64. $64^{3/2}$  |
| 65. $1^{2/3}$  | 66. $49^{3/2}$  | 67. $9^{3/2}$   | 68. $64^{2/3}$  |
| 69. $27^{4/3}$ | 70. $25^{5/2}$  | 71. $256^{5/4}$ | 72. $256^{2/4}$ |
| 73. $8^{-1/3}$ | 74. $16^{-3/4}$ | 75. $27^{-2/3}$ | 76. $64^{-2/3}$ |

Escriba cada radical en forma exponencial y luego simplifique.

- |                        |                        |                        |                        |
|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 77. $\sqrt[4]{4^2}$    | 78. $\sqrt[4]{25^2}$   | 79. $\sqrt[6]{9^3}$    | 80. $\sqrt[6]{16^3}$   |
| 81. $\sqrt[8]{36^4}$   | 82. $\sqrt[8]{49^4}$   | 83. $\sqrt[4]{5^8}$    | 84. $\sqrt[4]{3^8}$    |
| 85. $\sqrt[4]{2^{12}}$ | 86. $\sqrt[6]{3^{18}}$ | 87. $\sqrt[5]{4^{10}}$ | 88. $\sqrt[5]{6^{15}}$ |

Escriba cada radical en forma exponencial y luego simplifique. Escriba la respuesta en forma exponencial.

- |                                       |                                     |   |   |
|---------------------------------------|-------------------------------------|---|---|
| 89. $\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}$ | 90. $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x}$ | 91. $\sqrt[4]{t^2} \cdot \sqrt[4]{t^2}$ | 92. $\sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[3]{x^5}$ |
| 93. $(\sqrt[3]{t^4})^6$               | 94. $(\sqrt[4]{x^3})^4$             | 95. $(\sqrt[4]{a^2})^4$                 | 96. $(\sqrt[3]{x^6})^2$                 |
97. Muestre que  $(\sqrt[3]{x})^2 = \sqrt[3]{x^2}$  para  $x = 8$ .  
 98. Muestre que  $(\sqrt[4]{x})^3 = \sqrt[4]{x^3}$  para  $x = 16$ .

## Solución de problemas

El producto  $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}$  no es un entero, pero  $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{2^3} = 2^{3/3} = 2$ . Utilice esta información para determinar por cuál expresión radical puede multiplicar cada radical de modo que el resultado sea un entero.

- |                      |                      |                      |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| 99. $\sqrt[3]{4}$    | 100. $\sqrt[3]{7^2}$ | 101. $\sqrt[3]{6}$   |
| 102. $\sqrt[4]{2^3}$ | 103. $\sqrt[4]{5}$   | 104. $\sqrt[4]{6^2}$ |

Llene el (o las) área(s) sombreada(s) en cada ecuación para hacer un enunciado verdadero.

- |                                      |  |  |  |
|--------------------------------------|--|--|--|
| 105. $\sqrt{5^2} \cdot \sqrt{5} = 5$ | 106. $\sqrt[4]{7^2} \cdot \sqrt[4]{7^2} = 7$ | 107. $\sqrt[3]{6^2} \cdot \sqrt[3]{6^2} = 6$ | 108. $\sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[5]{2^2} = 2$ |
|--------------------------------------|--|--|--|

## Problemas de reto

Simplifique.

- |  |   |                                   |   |
|--|---|-----------------------------------|---|
| 109. $\sqrt[3]{xy} \cdot \sqrt[3]{x^2y^2}$ | 110. $\sqrt[4]{3x^2y} \cdot \sqrt[4]{27x^6y^3}$ | 111. $\sqrt[4]{32} - \sqrt[4]{2}$ | 112. $\sqrt[3]{3x^3y} + \sqrt[3]{24x^3y}$ |
|--|---|-----------------------------------|---|
113. a) Explique por qué obtendremos un entero en el denominador al multiplicar tanto el numerador como el denominador de  $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$  por  $\sqrt[3]{2^2}$ .  
 b) Racionalice el denominador de  $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$  multiplicando tanto el numerador como el denominador por  $\sqrt[3]{2^2}$ .

## Ejercicios de repaso acumulativo

- |  |  |
|--|--|
| [1.9] 114. Evalúe $-x^2 + 4xy - 6$ , cuando $x = 2$ y $y = -4$ . | [7.2] 116. Determine la pendiente y la intersección con y de la gráfica de la ecuación $2x - 3y = 4$ . |
| [5.4] 115. Factorice $3x^2 - 28x + 32$ .                         | [9.4] 117. Simplifique $\sqrt{\frac{64x^3y^7}{2x^4}}$ .  |

## RESUMEN DEL CAPÍTULO

## Términos y frases importantes

## 9.1

Cuadrado perfecto  
Escritura de una expresión en forma exponencial en forma radical  
Escritura de una expresión radical en forma exponencial  
Expresión radical  
Factor cuadrado perfecto  
Índice de un radical  
Número imaginario  
Número irracional  
Número racional

Radicando  
Raíz cuadrada negativa  
Raíz cuadrada positiva o principal  
Signo radical

## 9.2

Cuadrado perfecto  
Factor cuadrado perfecto  
Regla del producto para raíces cuadradas  
Simplificación de una raíz cuadrada

## 9.3

Raíces cuadradas no semejantes  
Raíces cuadradas semejantes

## 9.4

Binomio conjugado  
Racionalización de un denominador  
Regla del cociente para radicales  
Simplificación de una raíz cuadrada

## 9.5

Aislar la raíz cuadrada  
Ecuación radical  
Raíces extrañas

## 9.6

Fórmula de la distancia

## 9.7

Cubo perfecto  
Forma exponencial  
Potencia cuarta perfecta  
Raíz cuarta  
Raíz cúbica

## HECHOS IMPORTANTES

Números que son cuadrados perfectos: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ...

Números que son cubos perfectos: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, ...

Regla del producto para raíces cuadradas:  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ,  $a \geq 0, b \geq 0$

$$\sqrt{a^{2n}} = a^n, a \geq 0$$

$$\sqrt{a^2} = a, a \geq 0$$

Regla del cociente para raíces cuadradas:  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ ,  $a \geq 0, b > 0$

$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ ,  $a \geq 0$  cuando  $n$  es par;  $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ , cuando  $n$  es impar

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{m/n}, a \geq 0$$

Teorema de Pitágoras:  $a^2 + b^2 = c^2$

Fórmula de la distancia:  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Regla del producto para radicales:  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ , para  $a \geq 0, b \geq 0$ , y  $n$  es par  
 $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ , cuando  $n$  es impar

## Ejercicios de repaso del capítulo

[9.1] Evalúe.

1.  $\sqrt{81}$

2.  $\sqrt{49}$

3.  $-\sqrt{64}$

Escriba en forma exponencial.

4.  $\sqrt{5}$

5.  $\sqrt{26x}$

6.  $\sqrt{13x^2y}$

[9.2] Simplifique.

7.  $\sqrt{32}$   
 10.  $\sqrt{125x^4y^6}$

8.  $\sqrt{44}$   
 11.  $\sqrt{60ab^5c^4}$

9.  $\sqrt{27x^7y^4}$   
 12.  $\sqrt{72a^2b^2c^7}$

Simplifique.

13.  $\sqrt{72} \sqrt{20}$   
 16.  $\sqrt{25x^2y} \sqrt{3y}$

14.  $\sqrt{7y} \sqrt{7y}$   
 17.  $\sqrt{12a^3b^4} \sqrt{3b^4}$

15.  $\sqrt{18x} \sqrt{2xy}$   
 18.  $\sqrt{5ab^3} \sqrt{20ab^4}$

[9.3] Simplifique.

19.  $5\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$   
 22.  $\sqrt{k} + 3\sqrt{k} - 4\sqrt{k}$   
 25.  $2\sqrt{98} - 4\sqrt{72}$

20.  $4\sqrt{5} - 7\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$   
 23.  $\sqrt{18} - \sqrt{27}$   
 26.  $7\sqrt{50} + 2\sqrt{18} - 4\sqrt{32}$

21.  $3\sqrt{x} - 5\sqrt{x}$   
 24.  $7\sqrt{40} - 2\sqrt{10}$

Multiplique.

27.  $\sqrt{5}(2 + \sqrt{5})$   
 30.  $5a(3a + \sqrt{2a})$   
 33.  $(x - 2\sqrt{y})(x + 2\sqrt{y})$   
 36.  $(\sqrt{t} + 2s)(3\sqrt{t} - s)$

28.  $\sqrt{2}(\sqrt{2} + 3)$   
 31.  $(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2)$   
 34.  $(\sqrt{c} - 2\sqrt{d})(\sqrt{c} + 2\sqrt{d})$   
 37.  $(\sqrt{5m} + 2\sqrt{n})(3\sqrt{5m} - \sqrt{n})$

29.  $\sqrt{y}(x - 2\sqrt{y})$   
 32.  $(9 - \sqrt{3})(9 + \sqrt{3})$   
 35.  $(m + 2\sqrt{r})(m - 5\sqrt{r})$   
 38.  $(\sqrt{7} - 3\sqrt{p})(2\sqrt{7} - 3\sqrt{p})$

[9.4] Simplifique.

39.  $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$

40.  $\sqrt{\frac{10}{490}}$

41.  $\sqrt{\frac{7}{28}}$

42.  $\frac{3}{\sqrt{5}}$

43.  $\sqrt{\frac{n}{7}}$

44.  $\sqrt{\frac{5a}{12}}$

45.  $\sqrt{\frac{x^2}{3}}$

46.  $\sqrt{\frac{z^4}{8}}$

47.  $\sqrt{\frac{21x^3y^7}{3x^3y^3}}$

48.  $\sqrt{\frac{30x^4y}{15x^2y^4}}$

49.  $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{27a^3b^2}}$

50.  $\frac{\sqrt{2a^4bc^4}}{\sqrt{7a^5bc^2}}$

Simplifique.

51.  $\frac{3}{1 - \sqrt{6}}$

52.  $\frac{5}{3 - \sqrt{6}}$

53.  $\frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{y}}$

54.  $\frac{2}{\sqrt{x} - 5}$

55.  $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x} + \sqrt{3}}$

56.  $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5} - x}$

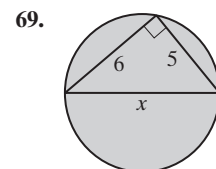
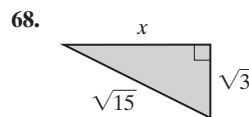
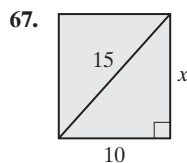
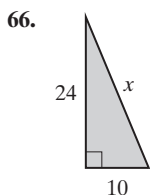
[9.5] Resuelva.

57.  $\sqrt{x} = 6$   
 60.  $\sqrt{3x + 1} = 5$   
 63.  $\sqrt{x^2 - 3} = x - 1$

58.  $\sqrt{g} = -5$   
 61.  $\sqrt{5x + 6} = \sqrt{4x + 8}$   
 64.  $\sqrt{4x + 8} - \sqrt{7x - 13} = 0$

59.  $\sqrt{h - 5} = 3$   
 62.  $4\sqrt{x} - x = 4$   
 65.  $\sqrt{4p + 1} = 2p - 1$

[9.6] Determine cada longitud indicada por  $x$ . Redondee sus respuestas al centésimo más cercano.



70. **Escalera recargada en una casa de campo** Adam Kurtz apoya una escalera de 12 pies contra la casa de campo de su abuelo. Si la base de la escalera está a 3 pies de la casa de campo, ¿a qué altura de la casa toca la escalera?
71. **Diagonal de un rectángulo** Determine la diagonal de un rectángulo de largo de 15 pulgadas y ancho de 6 pulgadas.
72. Determine la distancia en línea recta entre los puntos (4, -3) y (1, 7).
73. Determine la longitud del segmento de recta entre los puntos (6, 5) y (-6, 8).
74. **Señal de Ceda el paso** Un **triángulo equilátero** es aquel con tres lados de la misma longitud. Una señal de Ceda el paso en los Estados Unidos es un triángulo equilátero, en el que cada lado,  $l$ , mide 36 pulgadas. Utilice la fórmula para el área de un triángulo equilátero

$$\text{Área} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

para determinar una aproximación del área de la señal. Redondee el área al centésimo más cercano.

75. **Alcance visual** Ken Jameston, quien es propietario de una granja en las afueras de Osceola, Iowa, disfruta al subir en una escalera en su silo y observar el horizonte. Después de hacer algunas investigaciones, encontró que la distancia más lejana, en millas, a la que él podría ver puede aproximarse mediante la fórmula  $\text{distancia} = \sqrt{(3/2)h}$ , donde  $h$  representa la altura de su atalaya, medida en pies. Si sube 40 pies, ¿qué tan lejos puede ver Ken, aproximado al centésimo de milla más cercano?



Vea el ejercicio 75.

76. **Hotel Luxor** El Hotel Luxor en Las Vegas, Nevada, es el segundo hotel más grande del mundo. Es una pirámide con base cuadrada y una altura de 350 pies. La longitud,  $l$ , de cada lado de la base de cualquier pirámide cuadrangular puede determinarse por medio de la fórmula  $l = \sqrt{(3V)/h}$ , donde  $V$  representa el volumen, en pies cúbicos, de la pirámide y  $h$  representa la altura, en pies. El volumen del Luxor es aproximadamente 48,686,866.67 pies cúbicos. Determine la longitud de cada lado de la base.



**[9.7] Evalúe.**

77.  $\sqrt[3]{64}$

78.  $\sqrt[3]{-64}$

79.  $\sqrt[4]{16}$

80.  $\sqrt[4]{81}$

**Simplifique.**

81.  $\sqrt[3]{64}$

82.  $\sqrt[3]{-8}$

83.  $\sqrt[4]{32}$

84.  $\sqrt[3]{48}$

85.  $\sqrt[3]{54}$

86.  $\sqrt[4]{80}$

87.  $\sqrt[3]{x^{21}}$

88.  $\sqrt[3]{s^{30}}$

**Evalúe.**

89.  $1^{2/3}$

90.  $25^{1/2}$

91.  $27^{-2/3}$

92.  $64^{2/3}$

93.  $125^{-4/3}$

94.  $49^{3/2}$

**Escriba en forma exponencial.**

95.  $\sqrt[3]{z^{11}}$

96.  $\sqrt[3]{x^8}$

97.  $\sqrt[4]{y^9}$

98.  $\sqrt{x^5}$

99.  $\sqrt{y^3}$

100.  $\sqrt[4]{m^6}$

**Simplifique.**

101.  $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}$

102.  $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x}$

103.  $\sqrt[3]{a^5} \cdot \sqrt[3]{a^7}$

104.  $\sqrt[4]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^6}$

105.  $(\sqrt[3]{q^3})^3$

106.  $(\sqrt[4]{d})^4$

107.  $(\sqrt[4]{x^8})^3$

108.  $(\sqrt[4]{x^3})^8$

## Examen de práctica del capítulo

1. Escriba  $\sqrt{3x}$  en forma exponencial.2. Escriba  $x^{2/3}$  en forma radical.

Simplifique.

3.  $\sqrt{(y-4)^2}$

4.  $\sqrt{90}$

5.  $\sqrt{12x^2}$

6.  $\sqrt{50x^7y^3}$

7.  $\sqrt{8x^2y}\sqrt{10xy}$

8.  $\sqrt{15xy^2}\sqrt{5x^3y^3}$

9.  $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{125}}$

10.  $\frac{\sqrt{7c^4d}}{\sqrt{7d^3}}$

11.  $\frac{1}{\sqrt{6}}$

12.  $\frac{\sqrt{9r}}{\sqrt{5}}$

13.  $\sqrt{\frac{40x^2y^5}{6x^3y^7}}$

14.  $\frac{3}{2-\sqrt{7}}$

15.  $\frac{6}{\sqrt{x}-3}$

16.  $\sqrt{48} + \sqrt{75} + 2\sqrt{3}$

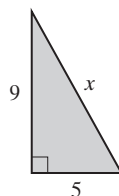
17.  $7\sqrt{y} - 3\sqrt{y} - \sqrt{y}$

Resuelva.

18.  $\sqrt{x-8} = 4$

19.  $2\sqrt{x-4} + 4 = x$

Resuelva.

20. Determine el valor de  $x$  en el triángulo rectángulo.21. Determine la longitud del segmento de recta entre los puntos  $(3, -2)$  y  $(-4, -5)$ .22. Evalúe  $27^{-4/3}$ .23. Simplifique  $\sqrt[4]{x^5} \cdot \sqrt[4]{x^7}$ .24. **Lado de un cuadrado** Determine el lado de un cuadrado cuya área es de 121 metros cuadrados.25. **Huevos cayendo** Mary Ellen Baker y su hermano, Michael, estaban dejando caer huevos crudos (demasiados para consternación de su madre) desde su casa del árbol

en su jardín, desde una saliente a 10 pies del piso. ¿A qué velocidad se estrellan los huevos con el suelo? Utilice la fórmula  $v = \sqrt{2gh}$  con  $g = 32$  pies por segundo al cuadrado. La velocidad será en pies por segundo.



## Examen de repaso acumulativo

Resuelva el siguiente examen y compare sus respuestas con las que aparecen al final del examen. Repase cualquier pregunta que haya respondido de manera incorrecta. La sección y el objetivo en donde se estudió el material se indica a continuación de la respuesta.

1. Considere el conjunto de números

$$\left\{-5, \sqrt{12}, 735, 0.5, 4, \frac{1}{2}\right\}.$$

Liste los que son **a)** enteros; **b)** enteros no negativos; **c)** números racionales; **d)** números irracionales; **e)** números reales.

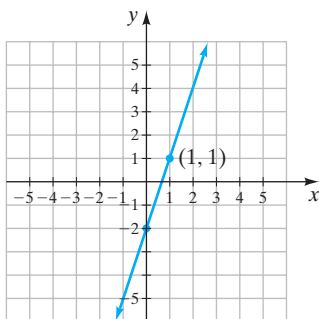
2. Evalúe  $7a^2 - 4b^2 + 2ab$ , cuando  $a = -3$  y  $b = 2$ .3. Resuelva  $-7(3-x) = 4(x+2) - 3x$ .4. Resuelva la desigualdad  $3(x+2) > 5 - 4(2x-7)$  y grafique la solución en una recta numérica.5. Factorice  $3x^3 + x^2 + 6x + 2$ .6. Factorice  $2x^2 - 17x + 21$ .

7. Utilice la factorización para resolver  $r^2 - 12r = 0$ .

8. Simplifique  $\frac{4a^3b^{-5}}{28a^8b}$ .

9. Grafique  $4x - 6y = 24$ .

10. Escriba la ecuación de la gráfica en la siguiente figura.



11. Determine la ecuación de la recta, en la forma pendiente-ordenada al origen, que tiene una pendiente de  $\frac{2}{3}$  y pasa por el punto  $(-5, 2)$ .

12. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} -2x + 3y &= 6 \\ 4x - 2y &= -4 \end{aligned}$$

13. Simplifique  $\frac{y + 5}{8} + \frac{2y - 7}{8}$ .

14. Resuelva  $\frac{1}{2} + \frac{1}{z} = 3$ .

15. Simplifique  $3\sqrt{11} - 4\sqrt{11}$ .

16. Simplifique  $\sqrt{\frac{3z}{28y}}$ .

17. Resuelva  $\sqrt{x + 5} = 6$ .

18. **Preparación de un pastel de frutas** Susan Effing está planeando su primer comida de vacaciones. Ella decidió preparar el famoso pastel de frutas de su abuela. La receta indica que para 10 tazas de harina se hará un pastel de frutas de 11 libras. A ella le gustaría preparar un pastel de frutas de 3 libras. ¿Cuántas tazas de harina debe utilizar Susan?


19. **Promoción especial** Durante una promoción especial, las habitaciones en el hotel Hyatt en la ciudad de Oklahoma cuesta \$69. Si éste es un 40% de descuento de su precio regular por habitación, determine el precio regular por habitación en el Hyatt.

20. **Distancia entre ciudades** Alan Heard está en proceso de obtener su licencia de piloto. Como parte de su entrenamiento, él voló desde un pequeño aeropuerto cerca de Pasadena, California, a otro aeropuerto pequeño cerca de San Diego, a una velocidad promedio de 100 millas por hora. En el viaje de regreso la velocidad promedio fue 125 millas por hora. Si el tiempo total de vuelo de Alan fue de 2 horas, ¿qué distancia hay entre los dos aeropuertos?

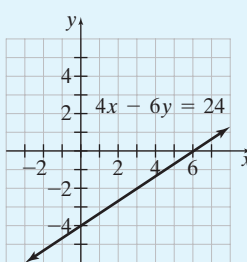


### Respuestas al examen de repaso acumulativo

1. a)  $-5, 735, 4$  b)  $735, 4$  c)  $-5, 735, 0.5, 4, \frac{1}{2}$  d)  $\sqrt{12}$  e)  $-5, \sqrt{12}, 735, 0.5, 4, \frac{1}{2}$ ; [Sec. 1.4, Obj. 2]

2. 35; [Sec. 1.9, Obj. 6] 3.  $\frac{29}{6}$ ; [Sec. 2.5, Obj. 1] 4.  $x > \frac{27}{11}$ , ; [Sec. 2.7, Obj. 1] 5.  $(3x + 1)(x^2 + 2)$ ;

[Sec. 5.2, Obj. 1] 6.  $(2x - 3)(x - 7)$ ; [Sec. 5.4, Obj. 1] 7. 0, 12; [Sec. 5.6, Obj. 2] 8.  $\frac{1}{7a^5b^6}$ ; [Sec. 4.2, Obj. 2]

9. ; [Sec. 7.2, Obj. 3] 10.  $y = 3x - 2$ ; [Sec. 7.4, Obj. 3] 11.  $y = \frac{2}{5}x + 4$ ; [Sec. 7.4, Obj. 4]

12.  $(0, 2)$ ; [Sec. 8.3, Obj. 1] 13.  $\frac{3y - 2}{8}$ ; [Sec. 6.3, Obj. 1] 14.  $\frac{2}{5}$ ; [Sec. 6.6, Obj. 2]

15.  $-\sqrt{11}$ ; [Sec. 9.3, Obj. 1] 16.  $\frac{\sqrt{21yz}}{14y}$ ; [Sec. 9.4, Obj. 3] 17. 31; [Sec. 9.5, Obj. 1]

18.  $2\frac{8}{11}$  tazas; [Sec. 2.6, Obj. 3] 19. \$115; [Sec. 3.3, Obj. 4] 20.  $\approx 111.1$  millas; [Sec. 6.7, Obj. 2]



# Capítulo 10

## Ecuaciones cuadráticas



- 10.1** La propiedad de la raíz cuadrada
  - 10.2** Solución de ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado
  - 10.3** Solución de ecuaciones cuadráticas por medio de la fórmula cuadrática (fórmula general)
  - 10.4** Graficación de ecuaciones cuadráticas
  - 10.5** Números complejos
- Resumen del capítulo  
Ejercicios de repaso del capítulo  
Examen de práctica del capítulo  
Examen de repaso acumulativo

Con frecuencia vemos objetos que se lanzan hacia arriba, pero casi nunca pensamos en la matemática que describe el movimiento del objeto. Por ejemplo, cuando una pelota choca con un bat, o un niño patea un balón de fútbol, éste es lanzado hacia arriba. Cuando disparamos una bala de cañón, lanzamos un cohete o golpeamos una pelota, el objeto se lanza hacia arriba. En el ejercicio 69 de la página 637 y en el ejercicio 63 de la página 648 describimos la distancia a la que se encuentra un objeto, respecto al suelo, en tiempos específicos después de que el objeto es lanzado hacia arriba.



## Avance de la lección

Gran parte de este libro estudia la resolución de ecuaciones lineales. Las ecuaciones cuadráticas son otra importante categoría de ecuaciones. Éstas se introdujeron en la sección 5.6 y se resolvieron por medio de factorización. Ahora podría revisar esa sección. Recuerde que las ecuaciones cuadráticas tienen la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , en donde  $a \neq 0$ . No toda ecuación cuadrática puede resolverse por medio de factorización. En este capítulo presentaremos dos métodos adicionales para resolver ecuaciones cuadráticas: completar el cuadrado y la fórmula cuadrática (o fórmula general).

En la sección 10.1 presentaremos la propiedad de la raíz cuadrada. En la sección 10.2 resolveremos ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado, por medio de la propiedad de la raíz cuadrada. La fórmula cuadrática o general, que analizaremos en la sección 10.3, se utiliza con mayor frecuencia cuando resolvemos ecuaciones cuadráticas que no pueden factorizarse. En el capítulo 7 graficamos ecuaciones lineales. En la sección 10.4 graficaremos ecuaciones cuadráticas. La sección 10.4 es una sección muy importante, ya que sienta las bases para la graficación de ecuaciones cúbicas y de grado mayor en otros cursos de matemáticas. En la sección 10.5 introduciremos el sistema de los números complejos. Si toma un curso de álgebra intermedia u otros cursos de matemáticas, usted podrá analizar este tema con mayor detalle.

## 10.1 LA PROPIEDAD DE LA RAÍZ CUADRADA



- 1 Todo número real positivo tiene dos raíces cuadradas.
- 2 Resolver ecuaciones cuadráticas mediante la propiedad de la raíz cuadrada.

En la sección 5.6, resolvimos ecuaciones cuadráticas por factorización. Recuerde que las **ecuaciones cuadráticas** son ecuaciones de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde  $a, b$  y  $c$  son números reales,  $a \neq 0$ . Decimos que una ecuación cuadrática en esta forma, se encuentra en **forma estándar**. La técnica preferida para resolver ecuaciones cuadráticas es la factorización cuando los factores se pueden encontrar con rapidez. Para recordar un poco, a continuación resolveremos la ecuación  $x^2 - 3x - 10 = 0$  por factorización. Si necesita más ejemplos, revise la sección 5.6.

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x - 5)(x + 2) = 0$$

$$x - 5 = 0 \quad \text{o bien} \quad x + 2 = 0$$

$$x = 5 \qquad \qquad \qquad x = -2$$

Las soluciones para esta ecuación son 5 y  $-2$ .

No toda ecuación cuadrática puede factorizarse con facilidad, y muchas no pueden factorizarse con números reales. En este capítulo damos dos técnicas, completando el cuadrado y la fórmula cuadrática o general, para resolver ecuaciones cuadráticas que no pueden resolverse por factorización.

## 1 Todo número real positivo tiene dos raíces cuadradas

En la sección 9.1 establecimos que todo número positivo tiene dos raíces cuadradas. Hasta aquí, sólo hemos utilizado la raíz cuadrada positiva o principal. En esta sección utilizamos las dos raíces de un número, la positiva y la negativa. Por ejemplo, la raíz cuadrada positiva de 49 es 7.

$$\sqrt{49} = 7$$

La raíz cuadrada negativa de 49 es  $-7$ .

$$-\sqrt{49} = -7$$

Observe que  $7 \cdot 7 = 49$  y  $(-7)(-7) = 49$ . Las dos raíces cuadradas de 49 son  $+7$  y  $-7$ . Una forma conveniente de indicar las dos raíces cuadradas es utilizar el símbolo de más o menos,  $\pm$ . Por ejemplo, las raíces cuadradas de 49 pueden indicarse  $\pm 7$ , que se lee “más o menos 7”.

Número	Ambas raíces cuadradas
64	$\pm 8$
100	$\pm 10$
3	$\pm \sqrt{3}$

El valor de un número como  $-\sqrt{5}$  puede determinarse encontrando el valor de  $\sqrt{5}$  en su calculadora y luego tomando su valor opuesto o negativo.

$$\begin{aligned}\sqrt{5} &= 2.24 && (\text{redondeado al centésimo más cercano}). \\ -\sqrt{5} &= -2.24\end{aligned}$$

Ahora considere la ecuación.

$$x^2 = 49$$

Por sustitución, podemos ver que esta ecuación tiene dos soluciones: 7 y  $-7$ .

Comprobación	$x = 7$	$x = -7$
	$x^2 = 49$	$x^2 = 49$
	$7^2 \stackrel{?}{=} 49$	$(-7)^2 \stackrel{?}{=} 49$
	$49 = 49$ Verdadero.	$49 = 49$ Verdadero.

Por tanto, las soluciones para la ecuación  $x^2 = 49$  son 7 y  $-7$  (o  $\pm 7$ ).

## 2 Resolver ecuaciones cuadráticas mediante la propiedad de la raíz cuadrada

En general, para cualquier ecuación cuadrática de la forma  $x^2 = a$ , podemos utilizar la **propiedad de la raíz cuadrada** para obtener la solución.

### Propiedad de la raíz cuadrada

Si  $x^2 = a$ , entonces  $x = \sqrt{a}$  o  $x = -\sqrt{a}$  (abreviado  $x = \pm\sqrt{a}$ ).

Por ejemplo, si  $x^2 = 7$ , entonces por la propiedad de la raíz cuadrada,  $x = \sqrt{7}$  o  $x = -\sqrt{7}$ . También podemos escribir  $x = \pm\sqrt{7}$ .

**EJEMPLO 1** Resuelva la ecuación  $x^2 - 25 = 0$ .

### Solución

Antes de utilizar la propiedad de la raíz cuadrada, debemos aislar la variable que está al cuadrado. Sume 25 en ambos lados de la ecuación para dejar sola la variable en un lado de la ecuación.

$$x^2 = 25$$

Ahora utilice la propiedad de la raíz cuadrada para aislar la variable.

$$\begin{aligned}x &= \pm\sqrt{25} \\ x &= \pm 5\end{aligned}$$

Compruebe en la ecuación original.

Comprobación

$$x = 5$$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$5^2 - 25 \stackrel{?}{=} 0$$

$$25 - 25 \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0 \quad \text{Verdadero.}$$

$$x = -5$$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$(-5)^2 - 25 \stackrel{?}{=} 0$$

$$25 - 25 \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0 \quad \text{Verdadero.}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 7

### EJEMPLO 2 Solución

Resuelva la ecuación  $x^2 + 8 = 89$ .

Inicie restando 8 en ambos lados de la ecuación.

$$x^2 + 8 = 89$$

$$x^2 = 81$$

$$x = \pm\sqrt{81}$$

$$x = \pm 9$$

Despejar  $x^2$ .

Propiedad de la raíz cuadrada.

### EJEMPLO 3 Solución

Resuelva la ecuación  $a^2 - 7 = 0$ .

$$a^2 - 7 = 0$$

$$a^2 = 7$$

$$a = \pm\sqrt{7}$$

Despejar  $a^2$ .

Propiedad de la raíz cuadrada.

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 15

### EJEMPLO 4 Solución

Resuelva la ecuación  $(x - 3)^2 = 4$ .

Inicie empleando la propiedad de la raíz cuadrada.

$$(x - 3)^2 = 4$$

$$x - 3 = \pm\sqrt{4}$$

$$x - 3 = \pm 2$$

$$x - 3 + 3 = \pm 2 + 3$$

$$x = 3 \pm 2$$

$$x = 3 + 2 \quad \text{o bien} \quad x = 3 - 2$$

$$x = 5$$

$$x = 1$$

Las soluciones son 1 y 5.

### EJEMPLO 5 Solución

Resuelva la ecuación  $(5x + 1)^2 - 2 = 16$ .

Primero debemos aislar el término cuadrático. Para hacerlo sumamos 2 en ambos lados de la ecuación.

$$(5x + 1)^2 - 2 = 16$$

$$(5x + 1)^2 = 18$$

$$5x + 1 = \pm\sqrt{18}$$

$$5x + 1 = \pm\sqrt{9} \sqrt{2}$$

$$5x + 1 = \pm 3\sqrt{2}$$

$$5x + 1 - 1 = \pm 3\sqrt{2} - 1$$

$$5x = -1 \pm 3\sqrt{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm 3\sqrt{2}}{5}$$

Sumar 2 en ambos lados para  
aislar el término cuadrático.

Propiedad de la raíz cuadrada.

Simplificar  $\sqrt{18}$ .

Restar 1 en ambos lados.

Dividir ambos lados entre 5.

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 43

Las soluciones son  $\frac{-1 + 3\sqrt{2}}{5}$  y  $\frac{-1 - 3\sqrt{2}}{5}$ .

Ahora veamos una de las muchas aplicaciones de las ecuaciones cuadráticas.

**EJEMPLO 6 Creación de anuncios** Al crear anuncios, deben considerarse la forma de éste, así como su colorido y estilo de impresión. Cuando Antoinette LeMans visitó una compañía de publicidad para diseñar un anuncio de revista para su compañía, ella aprendió que una de las formas más atractivas es un rectángulo cuya longitud es alrededor de 1.62 veces su ancho. Cualquier rectángulo con estas proporciones se denomina *rectángulo dorado* (*áureo*). Ella decidió que el anuncio tendría las dimensiones de un rectángulo dorado. Determine las dimensiones del anuncio si tiene un área de 20 pulgadas cuadradas; vea la figura 10.1.



FIGURA 10.1

**Solución** Entender y traducir

Sea  $x$  = ancho del rectángulo,  
y  $1.62x$  = largo del rectángulo

$$\text{área} = \text{largo} \cdot \text{ancho}$$

$$20 = (1.62x)x$$

Calcular

$$20 = 1.62x^2$$

$$\text{o bien } 1.62x^2 = 20$$

$$x^2 = \frac{20}{1.62} \approx 12.3$$

$$x \approx \pm\sqrt{12.3} \approx \pm 3.51 \text{ pulgadas}$$

**Revisar y responder** Como el ancho no puede ser negativo, el ancho,  $x$ , es aproximadamente 3.51 pulgadas. La longitud es de alrededor de  $1.62(3.51) = 5.69$  pulgadas.

Comprobación

$$\text{área} = \text{largo} \cdot \text{ancho}$$

$$20 \stackrel{?}{=} (5.69)(3.51)$$

$$20 \approx 19.97$$

*Verdadero.* (Hay un pequeño error de redondeo debido a que las respuestas en decimales son redondeadas.) ✨

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 57**

Observe que la respuesta no es un número entero. Éste es el caso en muchas situaciones de la vida real. No debe sentirse incómodo cuando esto ocurra.

## Conjunto de ejercicios 10.1

### Ejercicios conceptuales

1. Enuncie la propiedad de la raíz cuadrada.
2. Explique cómo resolver, mediante la propiedad de la raíz cuadrada, la ecuación cuadrática  $x^2 = 13$ .
3. ¿Cuál es la relación entre el largo y el ancho de cualquier rectángulo dorado?
4. Si un rectángulo dorado tiene un ancho de 7 centímetros, ¿cuánto mide su largo?
5. ¿Cuántas soluciones reales y diferentes esperaría para cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas? Explique.
  - a)  $x^2 = 9$
  - b)  $x^2 = 0$
  - c)  $(x - 2)^2 = 2$
  - d)  $(x - 3)^2 = -2$
6. Escriba la forma estándar de una ecuación cuadrática.

### Práctica de habilidades

Resuelva.

7.  $x^2 = 64$

8.  $x^2 = 25$

9.  $x^2 = 81$

10.  $x^2 = 1$

11.  $y^2 = 169$

12.  $z^2 = 9$

13.  $x^2 = 100$

16.  $w^2 - 24 = 0$

19.  $2w^2 = 34$

22.  $3x^2 - 4 = 8$

25.  $16x^2 - 17 = 56$

14.  $a^2 = 15$

17.  $3x^2 = 12$

20.  $6n^2 = 96$

23.  $9w^2 + 5 = 20$

26.  $2x^2 + 3 = 51$

15.  $x^2 - 20 = 0$

18.  $7x^2 = 7$

21.  $3z^2 + 1 = 28$

24.  $3y^2 + 8 = 36$

Resuelva.

27.  $(x - 4)^2 = 25$

30.  $(x + 5)^2 = 25$

33.  $(r + 6)^2 = 32$

36.  $(k - 5)^2 = 40$

39.  $(x - 9)^2 = 100$

42.  $(3a - 2)^2 = 30$

45.  $(2p - 7)^2 + 4 = 22$

28.  $(y - 2)^2 = 9$

31.  $(x + 4)^2 = 64$

34.  $(x + 3)^2 = 18$

37.  $(n - 3)^2 = 49$

40.  $(x - 3)^2 = 15$

43.  $(4x + 1)^2 - 2 = 18$

46.  $(5x + 9)^2 + 9 = 49$

29.  $(a + 3)^2 = 81$

32.  $(x - 4)^2 = 100$

35.  $(d + 6)^2 = 20$

38.  $(x - 11)^2 = 28$

41.  $(2x + 3)^2 = 18$

44.  $(5s - 6)^2 - 20 = 80$

## Solución de problemas

47. Escriba una ecuación que tenga las soluciones 6 y  $-6$ .

48. Escriba una ecuación que tenga las soluciones  $\sqrt{7}$  y  $-\sqrt{7}$ .

49. Llene el área sombreada para obtener un enunciado verdadero. Explique cómo determinó su respuesta. La ecuación  $x^2 - \blacksquare = 27$  tiene las soluciones 6 y  $-6$ .

50. Llene el área sombreada para obtener un enunciado verdadero. Explique cómo determinó su respuesta. La ecuación  $x^2 + \blacksquare = 45$  tiene las soluciones 8 y  $-8$ .

51. a) Reescriba  $-3x^2 + 9x - 6 = 0$  de modo que el coeficiente de  $x^2$  sea positivo.

b) Reescriba  $-3x^2 + 9x - 6 = 0$  de modo que el coeficiente de  $x^2$  sea 1.

52. a) Reescriba  $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4 = 0$  de modo que el coeficiente de  $x^2$  sea positivo.

b) Reescriba  $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4 = 0$  de modo que el coeficiente de  $x^2$  sea 1.

53. **Producto de números** El producto de dos números positivos es 68. Determine los números si uno de ellos es 4.25 veces mayor que el otro.

54. **Producto de números** El producto de dos números positivos es 140. Determine los números si uno de ellos es 5.6 veces mayor que el otro.

55. **Página de un periódico** El área de una página de periódico (abierta hacia arriba) es alrededor de 631.92 pulgadas cuadradas. Determine el largo y el ancho de la página, si su largo es alrededor de 1.21 veces su ancho.

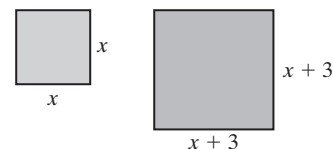
56. **Mesa de la cocina** El área de una mesa rectangular para la cocina es de 2,478 pulgadas cuadradas. Determine el largo y el ancho de la mesa, si su ancho es 0.71 veces su largo.

57. **Ampliación de un jardín** Georges Marten decidió sembrar un jardín rectangular de modo que tenga la razón de el largo y el ancho igual a la razón que se encuentra en el rectángulo de oro. Determine el largo y el ancho del jardín si tiene un área de 2,000 pies cuadrados.



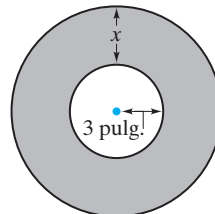
58. **Sobre de correo** La longitud de un sobre de correo con prioridad es de alrededor de 1.33 veces su ancho. Determine el largo y el ancho del sobre, si el área es aproximadamente 112 pulgadas cuadradas.

59. **Comparación de áreas** Considere los dos cuadrados con lados  $x$  y  $x + 3$  que se muestran a continuación.



- a) Escriba una expresión cuadrática para el área de cada cuadrado.
- b) Si el área del cuadrado de la izquierda es 36 pulgadas cuadradas, ¿cuál es la longitud de cada lado del cuadrado?
- c) Si el área del cuadrado de la izquierda es 50 pulgadas cuadradas, ¿cuál es la longitud de cada lado del cuadrado?
- d) Si el área del cuadrado de la derecha es 81 pulgadas cuadradas, ¿cuál es la longitud de cada lado del cuadrado?
- e) Si el área del cuadrado de la derecha es 92 pulgadas cuadradas, ¿cuál es la longitud de cada lado del cuadrado?

60. **Determinar el área** Considere la siguiente figura. Si el área sombreada es aproximadamente 153.94 pulgadas cuadradas, determine  $x$  (aproximada al centésimo más cercano).



## Problemas de reto

Utilice la propiedad de la raíz cuadrada para despejar la variable indicada. Suponga que todas las variables representan números positivos. Podría revisar la sección 3.1, antes de trabajar con estos problemas. Haga una lista de las raíces cuadradas positivas.

61.  $A = s^2$ , despeje  $s$

62.  $I = p^2r$ , despeje  $p$

63.  $A = \pi r^2$ , despeje  $r$

64.  $a^2 + b^2 = c^2$ , despeje  $b$

65.  $I = \frac{k}{d^2}$ , despeje  $d$

66.  $A = p(1 + r)^2$ , despeje  $r$

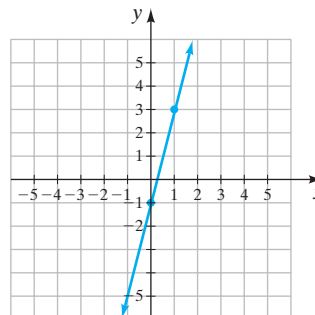
## Ejercicios de repaso acumulativo

[5.4] 67. Factorice  $4x^2 - 10x - 24$ .

[6.5] 68. Simplifique  $\frac{3 - \frac{1}{y}}{6 - \frac{1}{y}}$ .

[7.4] 69. Determine la ecuación de la recta que se ilustra a la derecha.

[9.3] 70. Simplifique  $\frac{\sqrt{135a^4b}}{\sqrt{3a^5b^5}}$ .



## 10.2 SOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS COMPLETANDO EL CUADRADO



- 1 Escribir trinomios cuadrados perfectos.
- 2 Resolver ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado.

Las ecuaciones cuadráticas que no pueden resolverse por factorización, pueden resolverse completando el cuadrado o con la fórmula cuadrática. En esta sección nos enfocaremos en el método de completar el cuadrado.

### 1 Escribir trinomios cuadrados perfectos

Un **trinomio cuadrado perfecto** es un trinomio que puede expresarse como el cuadrado de un binomio. A continuación algunos ejemplos.

**Trinomio cuadrado perfecto**
**Factores**
**Cuadrado de un binomio**

$$\begin{array}{rclcl}
 x^2 + 6x + 9 & = & (x + 3)(x + 3) & = & (x + 3)^2 \\
 x^2 - 6x + 9 & = & (x - 3)(x - 3) & = & (x - 3)^2 \\
 x^2 + 10x + 25 & = & (x + 5)(x + 5) & = & (x + 5)^2 \\
 x^2 - 10x + 25 & = & (x - 5)(x - 5) & = & (x - 5)^2
 \end{array}$$

Observe que cada uno de los términos elevados al cuadrado en los anteriores trinomios cuadrados perfectos tiene un coeficiente numérico de 1. Cuando el coeficiente de los términos cuadráticos es 1, existe una relación importante entre el coeficiente del término en  $x$  (término lineal) y la constante. En todo trinomio cuadrado perfecto de este tipo, *el término constante es el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal*.

Considere el trinomio cuadrado perfecto  $x^2 + 6x + 9$ . El coeficiente del término de  $x$  es 6 y la constante es 9. Observe que la constante, 9, es el cuadrado de un medio del coeficiente del término de  $x$ .

$$\begin{array}{c}
 x^2 + 6x + 9 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \left[ \frac{1}{2}(6) \right]^2 = 3^2 = 9
 \end{array}$$

Considere el trinomio cuadrado perfecto  $x^2 - 10x + 25$ . El coeficiente del término de  $x$  es  $-10$  y la constante es 25. Observe que

$$\begin{array}{c}
 x^2 - 10x + 25 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \left[ \frac{1}{2}(-10) \right]^2 = (-5)^2 = 25
 \end{array}$$

Considere la expresión  $x^2 + 8x + \square$ . ¿Puede determinar qué número debe colocar en el área sombreada para hacer que el trinomio sea un trinomio cuadrado perfecto? Si respondió 16, lo hizo de forma correcta.

$$\begin{array}{c}
 x^2 + 8x + \square \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \left[ \frac{1}{2}(8) \right]^2 = 4^2 = 16
 \end{array}$$

El trinomio cuadrado perfecto es  $x^2 + 8x + 16$ . Observe que  $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$ .

Examinemos los trinomios cuadrados perfectos con mayor detalle.

**Trinomio cuadrado perfecto**
**Cuadrado de un binomio**

$$\begin{array}{rclcl}
 x^2 + 6x + 9 & = & (x + 3)^2 \\
 \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \\
 \frac{1}{2}(6) & = & 3 \\
 \\
 x^2 - 10x + 25 & = & (x - 5)^2 \\
 \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \\
 \frac{1}{2}(-10) & = & -5
 \end{array}$$



Observe que cuando un trinomio cuadrado perfecto se escribe como el cuadrado de un binomio, *la constante en el binomio es un medio del valor del coeficiente del término con  $x$  en el trinomio cuadrado perfecto.*

## 2 Resolver ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

El procedimiento para resolver una ecuación cuadrática por el método de **completar el cuadrado** se ilustra en el siguiente ejemplo. Algunas de las ecuaciones que resolverá en los ejemplos podrían resolverse con facilidad por medio de la factorización, pero se resolverán completando el cuadrado como un medio para ilustrar el procedimiento en problemas fáciles antes de pasar a problemas más difíciles.

**EJEMPLO 1** Resuelva la ecuación  $x^2 + 6x - 7 = 0$  completando el cuadrado.

**Solución** Primero nos aseguramos que el término cuadrático tenga un coeficiente de 1. (En el ejemplo 5 explicaremos qué hacer si el coeficiente no es 1.) Ahora necesitamos dejar los términos que tienen una variable en un lado de la ecuación. Por tanto, sumamos 7 en ambos lados de la ecuación.

$$\begin{aligned}x^2 + 6x - 7 &= 0 \\x^2 + 6x &= 7\end{aligned}$$

Ahora determinamos el valor de la mitad del coeficiente numérico del término con  $x$ . En este ejemplo, el término en  $x$  es  $6x$ .

$$\frac{1}{2}(6) = 3$$

Elevamos al cuadrado este número,

$$(3)^2 = (3)(3) = 9$$

y luego sumamos este producto en ambos lados de la ecuación.

$$x^2 + 6x + 9 = 7 + 9$$

o bien

$$x^2 + 6x + 9 = 16$$

*Al seguir este procedimiento, producimos un trinomio cuadrado perfecto en el lado izquierdo de la ecuación.* La expresión  $x^2 + 6x + 9$  es un trinomio cuadrado perfecto que puede expresarse como  $(x + 3)^2$ . Por tanto,

$$x^2 + 6x + 9 = 16$$

puede escribirse como  $(x + 3)^2 = 16$

Ahora utilizamos la propiedad de la raíz cuadrada,

$$\begin{aligned}x + 3 &= \pm\sqrt{16} \\x + 3 &= \pm 4\end{aligned}$$

Por último, despejamos  $x$ , restando 3 en ambos lados de la ecuación.

$$\begin{aligned}x + 3 - 3 &= -3 \pm 4 \\x &= -3 \pm 4 \\x &= -3 + 4 \quad \text{o bien} \quad x = -3 - 4 \\x &= 1 \quad \quad \quad x = -7\end{aligned}$$

Por tanto, las soluciones son 1 y  $-7$ . Comprobamos ambas soluciones en la ecuación original.

Comprobación	$x = 1$ $x^2 + 6x - 7 = 0$ $(1)^2 + 6(1) - 7 \stackrel{?}{=} 0$ $1 + 6 - 7 \stackrel{?}{=} 0$ $0 = 0$ Verdadero.	$x = -7$ $x^2 + 6x - 7 = 0$ $(-7)^2 + 6(-7) - 7 \stackrel{?}{=} 0$ $49 - 42 - 7 \stackrel{?}{=} 0$ $0 = 0$ Verdadero. ✨
--------------	--	---

Ahora resumimos el procedimiento.

### Para resolver una ecuación cuadrática completando el cuadrado

1. Si es necesario, utilice la propiedad de igualdad de la multiplicación (o división) a fin de hacer que el coeficiente numérico del término cuadrático sea igual a 1.
2. Reescriba la ecuación con la constante sola en el lado derecho de la ecuación.
3. Tome un medio del coeficiente numérico del término de primer grado, elévelo al cuadrado, y sume esta cantidad en ambos lados de la ecuación.
4. Reemplace el trinomio con su binomio elevado al cuadrado equivalente.
5. Utilice la propiedad de la raíz cuadrada.
6. Despeje la variable.
7. Compruebe sus respuestas en la ecuación *original*.

**EJEMPLO 2** Resuelva la ecuación  $x^2 - 10x + 21 = 0$  completando el cuadrado.

**Solución**

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

$$x^2 - 10x = -21 \quad \text{Paso 2.}$$

Tome un medio del coeficiente numérico del término de  $x$ , elévelo al cuadrado, y sume este producto en ambos lados de la ecuación.

$$\frac{1}{2}(-10) = -5, \quad (-5)^2 = 25$$

Ahora sume 25 en ambos lados de la ecuación.

$$x^2 - 10x + 25 = -21 + 25 \quad \text{Paso 3.}$$

$$x^2 - 10x + 25 = 4$$

o bien  $(x - 5)^2 = 4 \quad \text{Paso 4.}$

$$x - 5 = \pm\sqrt{4} \quad \text{Paso 5.}$$

$$x - 5 = \pm 2$$

$$x = 5 \pm 2 \quad \text{Paso 6.}$$

$$x = 5 + 2 \quad \text{o bien} \quad x = 5 - 2$$

$$x = 7 \qquad \qquad \qquad x = 3$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 13

Una comprobación demostrará que las soluciones son 7 y 3. ✨

**EJEMPLO 3** Resuelva la ecuación  $x^2 = 3x + 18$  completando el cuadrado.

**Solución**

Coloque todos los términos, excepto el constante, en el lado izquierdo de la ecuación.

$$x^2 = 3x + 18$$

$$x^2 - 3x = 18 \quad \text{Paso 2.}$$

Tome un medio del coeficiente numérico del término con  $x$ , elévelo al cuadrado y sume este producto en ambos lados de la ecuación.

$$\frac{1}{2}(-3) = -\frac{3}{2}, \quad \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 18 + \frac{9}{4} \quad \text{Paso 3.}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 18 + \frac{9}{4} \quad \text{Paso 4.}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{72}{4} + \frac{9}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{81}{4}} \quad \text{Paso 5.}$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm\frac{9}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \frac{9}{2} \quad \text{Paso 6.}$$

$$x = \frac{3}{2} + \frac{9}{2} \quad \text{o bien} \quad x = \frac{3}{2} - \frac{9}{2}$$

$$x = \frac{12}{2} = 6 \quad x = -\frac{6}{2} = -3$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 21

Las soluciones son 6 y  $-3$ . 

En los siguientes ejemplos no mostraremos algunos de los pasos intermedios.

#### EJEMPLO 4 Solución

Resuelva la ecuación  $x^2 - 16x + 4 = 0$  completando el cuadrado.

$$x^2 - 16x + 4 = 0$$

$$x^2 - 16x = -4 \quad \text{Paso 2.}$$

$$x^2 - 16x + 64 = -4 + 64 \quad \text{Paso 3.}$$


$$(x - 8)^2 = 60 \quad \text{Paso 4.}$$

$$x - 8 = \pm\sqrt{60} \quad \text{Paso 5.}$$

$$x - 8 = \pm\sqrt{4} \sqrt{15}$$

$$x - 8 = \pm 2\sqrt{15}$$

$$x = 8 \pm 2\sqrt{15} \quad \text{Paso 6.}$$

Las soluciones son  $8 + 2\sqrt{15}$  y  $8 - 2\sqrt{15}$ . 

#### EJEMPLO 5 Solución

Resuelva la ecuación  $5z^2 - 25z + 10 = 0$  completando el cuadrado.

Para resolver una ecuación completando el cuadrado, el coeficiente numérico del término cuadrático debe ser 1. Como el coeficiente de éste es 5, multiplicamos ambos lados de la ecuación por  $\frac{1}{5}$  (o dividimos todos los términos entre 5) para hacer que el coeficiente sea igual a 1.

$$5z^2 - 25z + 10 = 0$$

$$\frac{1}{5}(5z^2 - 25z + 10) = \frac{1}{5}(0) \quad \text{Paso 1.}$$

$$z^2 - 5z + 2 = 0$$

Ahora procedemos como en los ejemplos anteriores.

$$z^2 - 5z = -2 \quad \text{Paso 2.}$$

$$z^2 - 5z + \frac{25}{4} = -2 + \frac{25}{4} \quad \text{Paso 3.}$$

$$\left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{8}{4} + \frac{25}{4} \quad \text{Paso 4.}$$

$$\left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$$

$$z - \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{17}{4}} \quad \text{Paso 5.}$$

$$z - \frac{5}{2} = \pm\frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$z = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2} \quad \text{Paso 6.}$$

$$z = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} \quad \text{o bien} \quad z = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$z = \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \quad z = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 33**

Las soluciones son  $\frac{5 + \sqrt{17}}{2}$  y  $\frac{5 - \sqrt{17}}{2}$ .



## Conjunto de ejercicios 10.2

### Ejercicios conceptuales

1. a) ¿Qué es un trinomio cuadrado perfecto?  
b) Llene el área sombreada para obtener un trinomio cuadrado perfecto y explique cómo determinó su respuesta.  
$$x^2 + 8x \quad \square$$
2. Llene el área sombreada para obtener un trinomio cuadrado perfecto, y explique cómo determinó su respuesta.  
$$x^2 - 10x \quad \square$$
3. En un trinomio cuadrado perfecto, ¿qué relación existe entre la constante y el coeficiente del término con  $x$ ?
4. En un trinomio cuadrado perfecto, si el coeficiente del término con  $x$  es 4, ¿cuál es la constante?
5. En un trinomio cuadrado perfecto, si el coeficiente del término con  $x$  es  $-12$ , ¿cuál es la constante?
6. a) Explique cómo resolver una ecuación cuadrática completando el cuadrado.  
b) Compare su respuesta en el inciso a) con el procedimiento dado en la página 623. ¿Omitió algún paso en su explicación?

### Práctica de habilidades

Resuelva completando el cuadrado.

- |                          |                         |                          |
|--------------------------|-------------------------|--------------------------|
| 7. $x^2 - 7x + 10 = 0$   | 8. $x^2 + 5x + 6 = 0$   | 9. $x^2 - 8x + 7 = 0$    |
| 10. $r^2 + r - 30 = 0$   | 11. $x^2 + 3x + 2 = 0$  | 12. $x^2 + 4x - 32 = 0$  |
| 13. $z^2 - 2z - 8 = 0$   | 14. $m^2 - 9m + 14 = 0$ | 15. $n^2 = -6n - 9$      |
| 16. $k^2 = -9k - 18$     | 17. $x^2 = 2x + 15$     | 18. $x^2 = -5x - 6$      |
| 19. $x^2 + 10x + 24 = 0$ | 20. $-35 = n^2 - 12n$   | 21. $x^2 = 15x - 56$     |
| 22. $x^2 = 3x + 28$      | 23. $-32 = -p^2 + 4p$   | 24. $-x^2 - 3x + 40 = 0$ |

25.  $z^2 - 4z = -2$

28.  $g^2 - 2g = 4$

31.  $2x^2 + 4x - 6 = 0$

34.  $2x^2 = 8x + 90$

37.  $3x^2 - 11x - 4 = 0$

40.  $2x^2 - x = 5$

43.  $2x^2 = 12x$

26.  $z^2 + 2z = 6$

29.  $m^2 + 7m + 2 = 0$

32.  $2x^2 + 2x - 24 = 0$

35.  $3h^2 - 15h = 18$

38.  $3x^2 - 8x + 4 = 0$

41.  $x^2 - 5x = 0$

44.  $3x^2 = 9x$

27.  $6w + 4 = -w^2$

30.  $x^2 + 3x - 6 = 0$

33.  $2x^2 + 18x + 4 = 0$

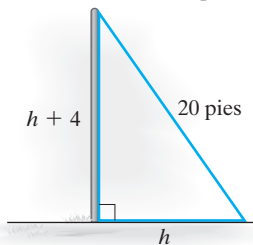
36.  $4x^2 = -28x + 32$

39.  $9t^2 + 6t = 6$

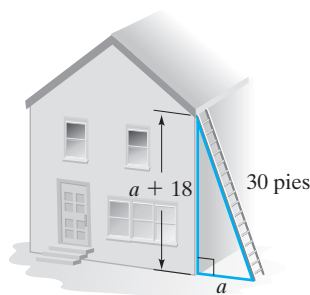
42.  $2x^2 - 6x = 0$

## Resolución de problemas

45. a) Escriba un trinomio cuadrado perfecto que tenga un término de  $20x$ .  
b) Explique cómo construyó su trinomio cuadrado perfecto.
46. a) Escriba un trinomio cuadrado perfecto que tenga un término de  $-14x$ .  
b) Explique cómo construyó su trinomio cuadrado perfecto.
47. **Números** Cuando el triple de un número se suma a su cuadrado, la suma es 4. Determine el o los números.
48. **Números** Cuando el quintuplo de un número se resta del doble de su cuadrado, la diferencia es 12. Determine el o los números.
49. **Números** Si el cuadrado de la suma de un número más 3 es 9, determine el o los números.
50. **Números** Si el cuadrado de la diferencia de un entero menos 2 es 16, determine el o los números.
51. **Números** El producto de dos números positivos es 21. Determine los dos números, si uno es 4 unidades mayor que el otro.
52. **Sujeción de un poste** Un alambre de tensión de 20 pies de longitud está sujetando un poste, como se muestra en la figura. Determine la altura del poste.



53. **Escalera apoyada sobre una casa** Una escalera de 30 pies descansa contra una casa, como se muestra. Determine la distancia vertical desde el piso a donde la escalera descansa en la casa.



54. **Suma de enteros** La suma  $s$ , de los primeros  $n$  enteros, puede determinarse por medio de la fórmula  $s = \frac{n^2 + n}{2}$ . Determine el valor de  $n$  si la suma es 28.
55. **Altura de un objeto** Cuando se lanza un objeto directamente hacia arriba desde la Tierra con velocidad inicial de 128 pies por segundo, su altura del suelo,  $s$ , en pies al cabo de  $t$  segundos está dada por medio de la fórmula  $s = -16t^2 + 128t$ . ¿Cuánto tiempo tardará el objeto en alcanzar una altura de 192 pies? (Por tanto,  $s = 192$ ).
56. **Altura de un objeto** Repita el ejercicio 55 para una altura de 112 pies.

## Problemas de reto

57. Llene el área sombreada para obtener un trinomio cuadrado perfecto y explique cómo determinó su respuesta.  
 $x^2$     $+ 196$
58. Llene el área sombreada para obtener un trinomio cuadrado perfecto y explique cómo determinó su respuesta.  
 $x^2$     $+ \frac{9}{100}$
59. a) Resuelva la ecuación  $x^2 - 14x - 1 = 0$  completando el cuadrado.  
b) Compruebe su solución (no será un número racional) sustituyendo el valor o valores que obtuvo en el inciso a) por cada  $x$  en la ecuación en el inciso a).
60. a) Resuelva la ecuación  $x^2 + 3x - 7 = 0$  completando el cuadrado.  
b) Compruebe su solución (no será un número racional) sustituyendo el valor o valores que obtuvo en inciso a) por  $x$  en la ecuación del inciso a).

Resuelva completando el cuadrado.

61.  $x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{2} = 0.$

62.  $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{5} = 0.$

63.  $3x^2 + \frac{1}{2}x = 4.$

64.  $0.1x^2 + 0.2x - 0.54 = 0$

65.  $-5.26x^2 + 7.89x + 15.78 = 0$

### Ejercicios de repaso acumulativo

[6.4] 66. Simplifique  $\frac{x^2}{x^2 - x - 6} - \frac{x - 2}{x - 3}.$

[8.2, 8.3] 68. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 6 \\ 2x + y &= 8 \end{aligned}$$

[7.4] 67. Explique cómo determinar si dos ecuaciones representan rectas paralelas sin graficar las ecuaciones.

[9.5] 69. Resuelva la ecuación  $\sqrt{2x + 3} = 2x - 3.$

## 10.3 SOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS POR MEDIO DE LA FÓRMULA CUADRÁTICA (FÓRMULA GENERAL)



- 1 Resolver ecuaciones cuadráticas por la fórmula cuadrática.
- 2 Determinar el número de soluciones para una ecuación cuadrática utilizando el discriminante.

### 1 Resolver ecuaciones cuadráticas por la fórmula cuadrática

Otro método que puede usarse para resolver cualquier ecuación cuadrática es la **fórmula cuadrática (o fórmula general)**. Es el método más útil y versátil para resolver ecuaciones cuadráticas.

La forma estándar de una ecuación cuadrática es  $ax^2 + bx + c = 0$ , donde  $a$  es el coeficiente del término cuadrático,  $b$  es el coeficiente del término de primer grado y  $c$  es la constante.

**Ecuación cuadrática en forma estándar**

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$5x^2 + 3x = 0$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 5 = 0$$

**Valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$**

$$a = 1, \quad b = -5, \quad c = 6$$

$$a = 5, \quad b = 3, \quad c = 0$$

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = 0, \quad c = 5$$

Podemos deducir la fórmula cuadrática iniciando con una ecuación cuadrática en forma estándar y completando el cuadrado, como se estudió en la sección precedente.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

*Forma estándar de la ecuación cuadrática.*

*Dividir ambos lados entre  $a$ .*

*Restar  $c/a$  en ambos lados.*

*Tomar  $1/2$  de  $b/a$ ; esto es,  $b/(2a)$  y elevarlo al cuadrado para obtener  $b^2/(4a^2)$ . Luego sumar esta expresión en ambos lados.*

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Reescribir el lado izquierdo de la ecuación como el cuadrado de un binomio.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Escribir el lado derecho con un denominador común.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Propiedad de la raíz cuadrada.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Regla del cociente para radicales,  $\sqrt{4a^2} = 2a$ .

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Restar  $b/(2a)$  en ambos lados.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Escribir con un denominador común para obtener la fórmula cuadrática.

### Para resolver una ecuación cuadrática por medio de la fórmula cuadrática

1. Escriba la ecuación en la forma estándar,  $ax^2 + bx + c = 0$ , y determine los valores numéricos para  $a$ ,  $b$  y  $c$ .
2. Sustituya los valores para  $a$ ,  $b$  y  $c$  del paso 1 en la fórmula cuadrática y luego evalúe para obtener la solución.

#### Fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**EJEMPLO 1** Utilice la fórmula cuadrática para resolver la ecuación  $x^2 + 4x + 3 = 0$ .

**Solución** En esta ecuación  $a = 1$ ,  $b = 4$  y  $c = 3$ . Sustituya estos valores en la fórmula cuadrática y luego evalúe.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm 2}{2} \\ x &= \frac{-4 + 2}{2} \quad \text{o bien} \quad x = \frac{-4 - 2}{2} \\ &= \frac{-2}{2} = -1 \qquad \qquad \qquad = \frac{-6}{2} = -3 \end{aligned}$$

Comprobación

$x = -1$

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 3 &= 0 \\ (-1)^2 + 4(-1) + 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 1 - 4 + 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \quad \text{Verdadero} \end{aligned}$$

$x = -3$

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 3 &= 0 \\ (-3)^2 + 4(-3) + 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 9 - 12 + 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \quad \text{Verdadero} \quad \star \end{aligned}$$

 AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 29

**CÓMO EVITAR  
ERRORES COMUNES**
**Todo el numerador** de la fórmula cuadrática debe dividirse entre  $2a$ .

CORRECTO

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

INCORRECTO

~~$$x = -b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$~~

**EJEMPLO 2** Utilice la fórmula cuadrática para resolver la ecuación  $8x^2 + 2x + 1 = 0$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} 8x^2 + 2x - 1 &= 0 \\ a &= 8, \quad b = 2, \quad c = -1 \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(8)(-1)}}{2(8)} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{16} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{16} \\ &= \frac{-2 \pm 6}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 + 6}{16} & \text{o bien} & \quad x = \frac{-2 - 6}{16} \\ &= \frac{4}{16} = \frac{1}{4} & & \quad = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Comprobación

$x = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} 8x^2 + 2x - 1 &= 0 \\ 8\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4}\right) - 1 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 8\left(\frac{1}{16}\right) + \frac{1}{2} - 1 &\stackrel{?}{=} 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \quad \text{Verdadero.} \end{aligned}$$

$x = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} 8x^2 + 2x - 1 &= 0 \\ 8\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 8\left(\frac{1}{4}\right) - 1 - 1 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 2 - 1 - 1 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \quad \text{Verdadero.} \quad \star \end{aligned}$$




**EJEMPLO 3** Utilice la fórmula cuadrática para resolver la ecuación  $2w^2 + 6w - 5 = 0$ .

**Solución** La variable en esta ecuación es  $w$ . El procedimiento para resolver la ecuación es el mismo.

$$\begin{aligned} a &= 2, \quad b = 6, \quad c = -5 \\ w &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(2)(-5)}}{2(2)} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 40}}{4} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{76}}{4} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{4} \sqrt{19}}{4} \\ &= \frac{-6 \pm 2\sqrt{19}}{4} \end{aligned}$$

Ahora factorice 2 de ambos términos en el numerador; luego divida entre los factores comunes, como se explicó en la sección 9.4.

$$\begin{aligned} w &= \frac{\overset{1}{\cancel{2}}(-3 \pm \sqrt{19})}{\underset{2}{\cancel{4}}} \\ w &= \frac{-3 \pm \sqrt{19}}{2} \end{aligned}$$

Por tanto, las soluciones son  $w = \frac{-3 + \sqrt{19}}{2}$  y  $w = \frac{-3 - \sqrt{19}}{2}$ . 

Ahora resolveremos dos ejemplos en donde la ecuación no está en forma estándar.

**EJEMPLO 4** Utilice la fórmula cuadrática para resolver la ecuación  $x^2 = 6x - 4$ .

**Solución** Primero escriba la ecuación en forma estándar.

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 4 &= 0 && \text{Hacer que uno de los lados de la ecuación sea igual a cero.} \\ a &= 1, \quad b = -6, \quad c = 4 \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} && \text{Sustituir.} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 16}}{2} && \text{Simplificar.} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{4} \sqrt{5}}{2} && \text{Regla del producto.} \end{aligned}$$

$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{\overset{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})}{\underset{1}{2}}$$

Factorizar y cancelar el 2.

$$= 3 \pm \sqrt{5}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 41

Las soluciones son  $x = 3 + \sqrt{5}$  y  $x = 3 - \sqrt{5}$ .



### CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Muchos estudiantes resuelven las ecuaciones cuadráticas de forma correcta hasta el último paso, cuando cometen un error. No cometa el error de tratar de simplificar una respuesta que no puede simplificarse más. Las siguientes son respuestas que no pueden simplificarse, y algunos errores comunes.

Respuestas que no  
pueden simplificarse

$$\frac{3 + 2\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{4 + 3\sqrt{5}}{2}$$

INCORRECTO

~~$$\frac{3 + 2\sqrt{5}}{2} = \frac{3 + \overset{1}{2}\sqrt{5}}{\underset{1}{2}} = 3 + \sqrt{5}$$~~

~~$$\frac{\overset{2}{4} + 3\sqrt{5}}{\underset{1}{2}} = 2 + 3\sqrt{5}$$~~

**EJEMPLO 5** Utilice la fórmula cuadrática para resolver la ecuación  $t^2 = 25$ .

**Solución** Primero escriba la ecuación en la forma estándar.

$$t^2 - 25 = 0$$

Hacer que uno de los lados  
de la ecuación sea igual a 0.

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -25$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(-25)}}{2(1)}$$

Sustituir.

$$= \frac{\pm\sqrt{100}}{2} = \frac{\pm 10}{2} = \pm 5$$

Simplificar y despejar  $t$ .

Por tanto, las soluciones son 5 y  $-5$ .



Pudimos obtener la solución del ejemplo 5 con mayor rapidez empleando la propiedad de la raíz cuadrada analizada en la sección 10.1. Resolvimos el ejemplo 5 mediante la fórmula cuadrática para darle más práctica utilizando la fórmula.

El siguiente ejemplo ilustra una ecuación cuadrática que no tiene solución en los números reales.

**EJEMPLO 6** Resuelva la ecuación cuadrática  $3x^2 = x - 1$ .


**Solución**

$$3x^2 - x + 1 = 0$$

$$a = 3, \quad b = -1, \quad c = 1$$

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} \\
 &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 12}}{6} \\
 &= \frac{1 \pm \sqrt{-11}}{6}
 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 47

Como  $\sqrt{-11}$  no es un número real, nos detenemos aquí. Esta ecuación no tiene solución en los números reales. *Cuando le dan un problema de este tipo, su respuesta debe ser “no hay solución en los números reales”. No deje la respuesta en blanco, y no escriba 0 como respuesta.* Estudiaremos números como  $\sqrt{-11}$  y  $(1 \pm \sqrt{-11})/6$  en la sección 10.5, cuando estudiemos un sistema de números que incluye números de este tipo. 

## 2 Determinar el número de soluciones para una ecuación cuadrática utilizando el discriminante

La expresión dentro del signo de raíz cuadrada, en la fórmula cuadrática, se denomina **discriminante**.

$$\underbrace{b^2 - 4ac}_{\text{Discriminante.}}$$

El discriminante puede utilizarse para determinar el número de soluciones reales para una ecuación cuadrática.

### Cuando el discriminante es:

1. **Mayor que cero**,  $b^2 - 4ac > 0$ , la ecuación cuadrática tiene **dos soluciones reales y distintas**.
2. **Igual a cero**,  $b^2 - 4ac = 0$ , la ecuación cuadrática tiene **una solución real**.
3. **Menor que cero**,  $b^2 - 4ac < 0$ , la ecuación cuadrática **no tiene soluciones reales**.

Mostramos esta información en forma condensada en el siguiente cuadro.

$b^2 - 4ac$	Número de soluciones
Positivo	Dos raíces reales y distintas
0	Una solución real
Negativo	Ninguna solución real

### EJEMPLO 7

- a) Determine el discriminante de la ecuación  $x^2 - 12x + 36 = 0$ .
- b) Utilice el discriminante para determinar el número de soluciones de la ecuación.
- c) Utilice la fórmula cuadrática para determinar las soluciones, si éstas existen.

**Solución** a)  $a = 1, \quad b = -12, \quad c = 36$   
 $b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(1)(36) = 144 - 144 = 0$

b) Como el discriminante es igual a cero, hay una solución real.

c) 
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-12) \pm \sqrt{0}}{2(1)}$$

$$= \frac{12 \pm 0}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 9

La única solución es 6. ✧

**EJEMPLO 8** Sin encontrar las raíces, determine si las ecuaciones siguientes tienen dos soluciones reales y distintas, una solución real o ninguna solución real.

a)  $4x^2 - 4x + 1 = 0$       b)  $2x^2 + 13x = -15$       c)  $6p^2 = -5p - 2$

**Solución** Utilizamos el discriminante de la fórmula cuadrática para responder estas preguntas.

a)  $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(4)(1) = 16 - 16 = 0$

Como el discriminante es igual a cero, esta ecuación tiene una solución real.

b) Primero, reescriba  $2x^2 + 13x = -15$  como  $2x^2 + 13x + 15 = 0$ .

$$b^2 - 4ac = (13)^2 - 4(2)(15) = 169 - 120 = 49$$

Como el discriminante es positivo, esta ecuación tiene dos soluciones reales y distintas.

c) Primero reescriba  $6p^2 = -5p - 2$  como  $6p^2 + 5p + 2 = 0$

$$b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(6)(2) = 25 - 48 = -23$$

Como el discriminante es negativo, esta ecuación no tiene soluciones reales. ✧

Ahora veamos una de las muchas aplicaciones que pueden resolverse mediante la fórmula cuadrática.

**EJEMPLO 9** **Construcción de una barda** Los Johnsons tienen una alberca rectangular que mide 30 pies por 16 pies. Quieren agregar una barda de cemento de ancho uniforme alrededor de la piscina. ¿De cuánto puede ser el ancho del borde si quieren que el área de éste sea de 200 pies cuadrados?

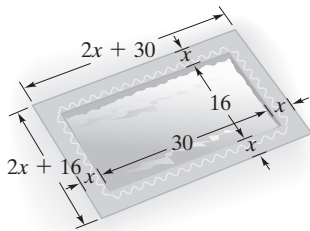


FIGURA 10.2

**Solución** Hagamos un diagrama de la alberca; vea la figura 10.2. Sea  $x =$  ancho uniforme del borde. Entonces el largo total de la alberca y el borde es  $2x + 30$ . El ancho total de la alberca y el borde es  $2x + 16$ . El área del borde puede determinarse restando el área de la alberca (el área del rectángulo más pequeño) del área de la alberca y el borde (el área del rectángulo mayor).

$$\text{área de la alberca} = l \cdot a = (30)(16) = 480$$

$$\begin{aligned} \text{área de la alberca y el borde} &= l \cdot a = (2x + 30)(2x + 16) \\ &= 4x^2 + 92x + 480 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{área del borde} &= \text{área de la alberca y el borde} - \text{área de la alberca} \\ &= (4x^2 + 92x + 480) - 480 \\ &= 4x^2 + 92x\end{aligned}$$

El área total del borde es 200 pies cuadrados. Por tanto,

$$\begin{aligned}\text{área del borde} &= 4x^2 + 92x \\ 200 &= 4x^2 + 92x\end{aligned}$$

$$\text{o bien } 4x^2 + 92x - 200 = 0 \quad \text{Escribir la ecuación en la forma estándar.}$$

$$4(x^2 + 23x - 50) = 0 \quad \text{Factorizar el 4.}$$

$$\frac{1}{4} \cdot 4(x^2 + 23x - 50) = \frac{1}{4} \cdot 0 \quad \text{Multiplicar ambos lados por } \frac{1}{4} \text{ para eliminar el 4.}$$

$$x^2 + 23x - 50 = 0$$

Ahora utilizamos la fórmula cuadrática.

$$a = 1 \quad b = 23 \quad c = -50$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-23 \pm \sqrt{(23)^2 - 4(1)(-50)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-23 \pm \sqrt{529 + 200}}{2}$$

$$= \frac{-23 \pm \sqrt{729}}{2}$$

$$= \frac{-23 \pm 27}{2}$$

$$x = \frac{-23 - 27}{2} \quad \text{o bien} \quad x = \frac{-23 + 27}{2}$$

$$= \frac{-50}{2} \quad = \frac{4}{2}$$

$$= -25 \quad = 2$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 63**

Como las longitudes son positivas, la única solución posible es  $x = 2$ . Por tanto, el ancho uniforme de cemento será de 2 pies alrededor de la alberca. 

En el ejemplo 9, la respuesta fue un valor entero. Sin embargo, muchas veces al trabajar con problemas de aplicación la respuesta será un número irracional. Cuando esto ocurra en el conjunto de ejercicios redondearemos los valores de los radicales a dos decimales para determinar la respuesta.

**SUGERENCIA**

Observe en el ejemplo 9 que cuando teníamos la ecuación cuadrática  $4x^2 + 92x - 200 = 0$ , factorizamos el factor común, 4, para obtener

$$4x^2 + 92x - 200 = 0$$

$$4(x^2 + 23x - 50) = 0$$

Luego multiplicamos ambos lados de la ecuación por  $\frac{1}{4}$  y utilizamos la ecuación cuadrática,  $x^2 + 23x - 50 = 0$ , donde  $a = 1$ ,  $b = 23$  y  $c = -50$ , en la fórmula cuadrática. Si todos los términos en una ecuación cuadrática tienen un factor común, será más sencillo factorizarlo primero, para que tenga coeficientes más pequeños cuando utilizemos la fórmula cuadrática. Consideremos la ecuación cuadrática  $4x^2 + 8x - 12 = 0$ .

En esta ecuación  $a = 4$ ,  $b = 8$  y  $c = -12$ . Si resuelve esta ecuación con la fórmula cuadrática, después de simplificar obtendrá las soluciones  $-3$  y  $1$ . Intente esto y véalo. Si factoriza el 4 para obtener

$$4x^2 + 8x - 12 = 0$$

$$4(x^2 + 2x - 3) = 0$$

y luego utiliza la fórmula cuadrática con la ecuación  $x^2 + 2x - 3 = 0$ , donde  $a = 1$ ,  $b = 2$  y  $c = -3$ , obtiene la misma solución. Hágalo y vea.

**Matemáticas en acción****Diseño de jardines (Antes y ahora)**

Hacer los cálculos para un jardín o el borde de una alberca, caen dentro del campo de un diseñador de jardines. En el mismo terreno residencial, el diseñador también planeará senderos, distribución de espacios para árboles y arbustos y, si aún no se construye una casa, consultará con los arquitectos y el constructor.



En días pasados, el trabajo de diseño era realizado con lápiz y papel (o los equivalentes antes de que existiesen el lápiz y el papel) y con la construcción de modelos físicos. Además de extensivos bosquejos y dibujos, el diseñador tenía que estar preparado para calcular en forma manual todos los gastos, los mate-

riales necesarios y las horas de mano de obra para volver una imagen en cosas reales, flores, césped, árboles, paredes, etcétera. Uno escucha de complejas fórmulas matemáticas para determinar si un diseño está “balanceado” o no.

Ahora las matemáticas del diseño han sido capturadas en programas de cómputo que permiten al diseñador, profesional y otros, trabajar con modelos visuales en 2 y 3 dimensiones. Utilizando estos modelos, el diseñador puede elegir de entre cientos de plantas y árboles y colocarlos en un espacio y seleccionar materiales como mármol, piedra y madera para ver su apariencia. Estos programas también permiten al diseñador cambiar el tamaño, forma, bordes y ubicación de cualquier elemento y, por último, estimar el costo de los materiales necesarios para un diseño dado.

Además de las fórmulas geométricas necesarias, utilizan muchas ecuaciones más para escribir programas de cómputo que proporcionan la flexibilidad para el diseñador, a fin de mover cosas en la pantalla de la computadora para ver diferentes diseños. Aunque con frecuencia no nos damos tiempo para considerar qué hace una función de un programa de cómputo, siempre es lo mismo, las ecuaciones matemáticas; y le toca a la gente que entiende las matemáticas subyacentes escribir esos programas de cómputo.

## Conjunto de ejercicios 10.3

### Ejercicios conceptuales

1. a) ¿Qué es el discriminante?  
b) Explique cómo puede utilizarse el discriminante para determinar el número de soluciones reales que tiene una ecuación cuadrática.
2. ¿Cuántas soluciones reales tienen si el discriminante es igual a  
a)  $-4$ ?    b)  $0$ ?    c)  $\frac{1}{2}$ ?
3. Sin ver sus apuntes, escriba la fórmula cuadrática. Debe memorizar esta fórmula.
4. Explique por qué una ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales cuando el discriminante es mayor que 0, una solución real cuando el discriminante es igual a 0, y ninguna solución real cuando el discriminante es menor que cero. Utilice la fórmula cuadrática en la explicación de su respuesta.
5. ¿Cuál es el primer paso al resolver una ecuación cuadrática mediante la fórmula cuadrática?
6. Un estudiante que utiliza la fórmula cuadrática para resolver  $2x^2 + 5x + 1 = 0$  escribió los siguientes pasos. ¿Cuál es el error en el trabajo del estudiante?

$$\begin{aligned} x &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(2)(1)}}{2(2)} \\ &= -5 \pm \frac{\sqrt{25 - 8}}{4} \\ &= -5 \pm \frac{\sqrt{17}}{4} \end{aligned}$$

7. Un estudiante que utiliza la fórmula cuadrática para resolver  $x^2 = 4x + 7$  escribió los siguientes pasos. ¿Cuál es el error en el trabajo del estudiante?

$$\begin{aligned} x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(7)}}{2(1)} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 28}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{-12}}{2} \end{aligned}$$

8. Un estudiante que utiliza la fórmula cuadrática para resolver  $x^2 + 4 = 0$  escribió los siguientes pasos. ¿Cuál es el error en el trabajo del estudiante?

$$\begin{aligned} x &= \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} \\ &= \frac{\pm\sqrt{-16}}{2} \\ &= \frac{\pm 4}{2} \\ &= \pm 2 \end{aligned}$$

### Práctica de habilidades

Determine si cada ecuación tiene dos raíces reales y distintas, una solución real o bien no tiene solución real.

- |                         |                         |                        |                       |
|-------------------------|-------------------------|------------------------|-----------------------|
| 9. $x^2 + 5x - 9 = 0$   | 10. $x^2 + 2x - 5 = 0$  | 11. $2x^2 + x + 1 = 0$ | 12. $r^2 + r + 3 = 0$ |
| 13. $6n^2 + 3n - 7 = 0$ | 14. $4x^2 - 24x = -36$  | 15. $2x^2 = 16x - 32$  | 16. $5x^2 - 4x = 7$   |
| 17. $2x^2 - 7x + 8 = 0$ | 18. $z^2 = 5z + 9$      | 19. $4x = 8 + x^2$     | 20. $5x - 8 = 3x^2$   |
| 21. $x^2 + 7x - 3 = 0$  | 22. $2x^2 - 6x + 9 = 0$ | 23. $3k^2 - 9 = 0$     | 24. $6x^2 - 5x = 0$   |
| 25. $9 = -t^2 + 6t$     | 26. $-25 = w^2 + 10w$   |                        |                       |

Utilice la fórmula cuadrática para resolver cada ecuación. Si la ecuación no tiene solución real, indíquelo.

- |                         |                          |                          |
|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 27. $x^2 - 2x - 8 = 0$  | 28. $x^2 + 11x + 10 = 0$ | 29. $x^2 + 9x + 18 = 0$  |
| 30. $x^2 - 3x - 10 = 0$ | 31. $x^2 - 6x = -5$      | 32. $x^2 + 5x - 24 = 0$  |
| 33. $30 = -z^2 - 11z$   | 34. $x^2 - 49 = 0$       | 35. $m^2 = 81$           |
| 36. $x^2 - 6x = 0$      | 37. $t^2 - 5t = 0$       | 38. $z^2 - 17z + 72 = 0$ |
| 39. $2x^2 - 3x + 2 = 0$ | 40. $n^2 - 7n + 10 = 0$  | 41. $2y^2 - 7y + 4 = 0$  |

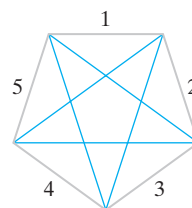
- |                        |                          |                            |
|------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 42. $15x^2 - 7x = 2$   | 43. $6x^2 = -x + 1$      | 44. $4r^2 + r - 3 = 0$     |
| 45. $2x^2 = 5x + 7$    | 46. $3w^2 - 4w + 5 = 0$  | 47. $2s^2 - 4s + 3 = 0$    |
| 48. $x^2 - 7x + 3 = 0$ | 49. $4x^2 = x + 5$       | 50. $x^2 - 3x - 1 = 0$     |
| 51. $2x^2 - 7x = 9$    | 52. $-x^2 + 2x + 15 = 0$ | 53. $-2x^2 + 11x - 15 = 0$ |
| 54. $6y^2 + 9 = -5y$   | 55. $2t^2 + 4t - 30 = 0$ | 56. $3r^2 - 27r + 54 = 0$  |
| 57. $36 = -4s^2 + 40s$ | 58. $20 = -5p^2 - 5p$    |                            |

## Solución de problemas

59. **Producto de números** El producto de dos enteros positivos consecutivos es 42. Determine los dos números.
60. **Dimensiones de un rectángulo** El largo de un rectángulo es 3 pies más grande que su ancho. Determine las dimensiones del rectángulo, si su área es 28 pies cuadrados.
61. **Dimensiones de un rectángulo** El largo de un rectángulo es 3 pies más pequeño que el doble de su ancho. Si su área es de 20 pies cuadrados, determine el largo y el ancho del rectángulo.
62. **Jardín rectangular** El jardín rectangular de Sean McDonald mide 20 pies por 30 pies. Él desea construir un pasillo de ancho uniforme con ladrillos alrededor del jardín y que cubra un área de 336 pies cuadrados. ¿Cuál será el ancho del pasillo?
63. **Alberca** Harold Goldstein y su esposa Elaine, hace poco instalaron una alberca rectangular que mide 30 pies por 40 pies. Quieren agregar un borde de ancho uniforme con mosaico decorativo alrededor de todos los lados de la alberca. Si compran suficientes mosaicos para cubrir 296 pies cuadrados, ¿cuál será el ancho del borde con mosaicos?



64. **Estudio de cerámica** Julie Bonds está planeando sembrar pasto alrededor de su estudio rectangular de cerámica; éste mide 48 pies por 36 pies. Si ella sólo tiene suficientes semillas para sembrar 4000 pies cuadrados de pasto, ¿de qué ancho uniforme debe sembrar el borde de pasto?
65. **Diagonales en un polígono** El número de diagonales,  $d$ , en un polígono con  $n$  lados está dado mediante la fórmula  $d = \frac{n^2 - 3n}{2}$ . Por ejemplo, un pentágono, un polígono con 5 lados, tiene  $d = \frac{5^2 - 15}{2} = 5$  diagonales; vea la figura.



Si un polígono tiene 27 diagonales, ¿cuántos lados tiene?

66. **Diagonales de un polígono** Si un polígono tiene 35 diagonales, ¿cuántos lados tiene? Vea el ejercicio 65.
67. **Mecedoras** El costo,  $c$ , por fabricar  $x$  mecedoras está dado por  $c = x^2 - 16x + 40$ . Determine el número de mecedoras, si el costo es \$1,000.
68. **Costo de fabricación** Repita el ejercicio 67 para un costo de \$2,680.
69. **Cohetes a escala** Phil Chefetz lanza un cohete a escala desde el suelo. La altura,  $s$ , del cohete por arriba del piso  $t$  segundos después de que se lanza puede determinarse mediante la fórmula  $s = -16t^2 + 90t$ . Determine el tiempo que tardará el cohete en alcanzar una altura de 80 pies.



70. **Cohete a escala** Repita el ejercicio 69 para una altura de 100 pies.



## Problemas de reto

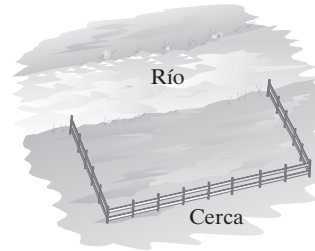
Determine todos los valores de  $c$  que hagan que en cada ecuación tenga **a)** dos soluciones reales, **b)** una solución real, y **c)** ninguna solución real.

71.  $x^2 + 6x + c = 0$

72.  $2x^2 + 3x + c = 0$

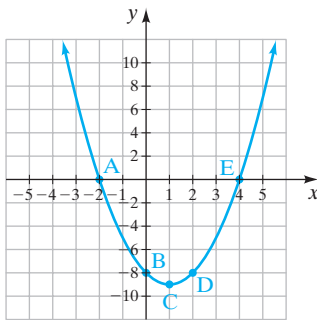
73.  $-3x^2 + 6x + c = 0$

74. **Cercado de un área** La granjera Justina Wells desea formar una región rectangular junto a la ribera de un río, construyendo una cerca de tres lados, como ilustramos en el diagrama. Si ella sólo tiene 400 pies de cerca y desea encerrar un área de 15,000 pies cuadrados, determine las dimensiones de la región rectangular.



 Actividad en grupo

75. En la sección 10.4 graficaremos ecuaciones cuadráticas. Aprenderemos que las gráficas de ecuaciones cuadráticas son *parábolas*. A continuación mostramos la gráfica de la ecuación cuadrática  $y = x^2 - 2x - 8$ .



- a)** Cada integrante del grupo, copie la gráfica en su libreta.
- b)** Miembro 1 del grupo: localice los pares ordenados que corresponden a los puntos A y B. Verifique que cada par ordenado es una solución para la ecuación  $y = x^2 - 2x - 8$ .
- c)** Miembro 2 del grupo: localice los pares ordenados que corresponden a los puntos C y D. Verifique que cada par ordenado es una solución de la ecuación  $y = x^2 - 2x - 8$ .

- d)** Miembro 3 del grupo: localice la pareja ordenada que corresponde al punto E. Verifique que el par ordenado es una solución de la ecuación  $y = x^2 - 2x - 8$ .
- e)** En forma individual, grafique la ecuación  $y = 2x - 3$  en los mismos ejes que utilizó en el inciso **a)**. Compare sus gráficas con los otros miembros de su grupo.

- f)** Las dos gráficas representan el sistema de ecuaciones

$$y = x^2 - 2x - 8$$

$$y = 2x - 3$$

En grupo, estimen los puntos de intersección de las gráficas.

- g)** Si igualamos las dos ecuaciones, obtenemos la ecuación cuadrática siguiente, con solo la variable  $x$ .

$$x^2 - 2x - 8 = 2x - 3$$

En grupo, resuelvan esta ecuación cuadrática. ¿Su respuesta coincide con las coordenadas  $x$  de los puntos de intersección del inciso **f)**?

- h)** En grupo, utilicen los valores de  $x$  que encontraron en el inciso **g)** para determinar los valores de  $y$  en  $y = x^2 - 2x - 8$  y  $y = 2x - 3$ . ¿Su respuesta coincide con las coordenadas  $y$  de los puntos de intersección del inciso **f)**?

## Ejercicios de repaso acumulativo

[5.6, 10.2, 10.3] Resuelva las ecuaciones cuadráticas siguientes mediante **a)** factorización, **b)** completando el cuadrado, y **c)** la fórmula cuadrática. Si la ecuación no puede resolverse mediante factorización, indíquelo.

76.  $x^2 - 13x + 42 = 0$

77.  $6x^2 + 11x - 35 = 0$

78.  $2x^2 + 3x - 4 = 0$

79.  $6x^2 = 54$

[6.4] 80. Reste  $\frac{x}{2x^2 + 7x - 4} - \frac{2}{x^2 - x - 20}$

## 10.4 GRAFICACIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS



- 1 Graficar ecuaciones cuadráticas con dos variables.
- 2 Determinar las coordenadas del vértice de una parábola.
- 3 Usar simetría para graficar ecuaciones cuadráticas.
- 4 Determinar las intersecciones con  $x$  de la gráfica de una ecuación cuadrática.

## 1 Graficar ecuaciones cuadráticas con dos variables

## SUGERENCIA

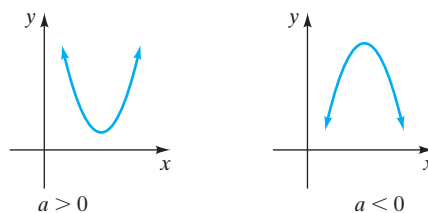
SUGERENCIA  
DE ESTUDIO

En esta sección graficaremos ecuaciones cuadráticas. Éstas pueden graficarse con sólo trazar puntos, como hicimos en el capítulo 7, cuando graficamos ecuaciones lineales. Sin embargo, existen ciertas instrucciones para graficarlas con mayor facilidad. Éstas incluyen la determinación del vértice de la gráfica, la determinación de las intersecciones con el eje  $x$  de la gráfica, y el uso de simetría para dibujar la gráfica. En breve analizaremos cada uno de estos temas.

En la sección 7.2 aprendimos cómo graficar ecuaciones lineales. En esta sección graficaremos ecuaciones cuadráticas de la forma

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

La gráfica de toda ecuación cuadrática de esta forma es una parábola. La gráfica de  $y = ax^2 + bx + c$  tendrá una de las formas que se indican en la figura 10.3. Cuando una ecuación cuadrática está en la forma  $y = ax^2 + bx + c$ , el signo de  $a$ , que es el coeficiente numérico del término cuadrático, determinará si la parábola abre hacia arriba (figura 10.3a) o hacia abajo (10.3b). Cuando  $a$  es positiva, la parábola abrirá hacia arriba, y cuando  $a$  es negativa, la parábola abrirá hacia abajo.



La parábola abre hacia arriba

La parábola abre hacia abajo

(a)

(b)

FIGURA 10.3

El **vértice** es el punto más bajo en una parábola que abre hacia arriba o el punto más alto en una parábola que abre hacia abajo (figura 10.4). Las gráficas de ecuaciones cuadráticas de la forma  $y = ax^2 + bx + c$  tienen **simetría** respecto a la recta vertical que pasa por el vértice. Esto significa que si doblamos el papel a lo largo de esta recta imaginaria, denominada **eje de simetría**, los lados derecho e izquierdo de la gráfica coincidirán.

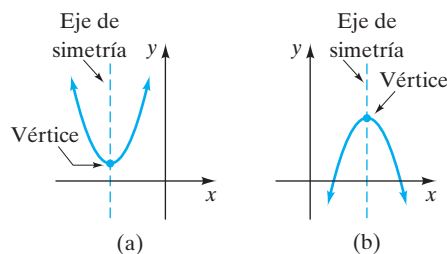


FIGURA 10.4

(a)

(b)

Un método que puede utilizar para graficar una ecuación cuadrática es trazar punto por punto. Cuando se determinan los puntos a trazar, seleccione valores para  $x$  y determine los valores correspondientes para  $y$ .

**EJEMPLO 1**

Grafique la ecuación  $y = x^2$ .

**Solución**

Como  $a = 1$ , que es positivo, esta parábola abre hacia arriba.

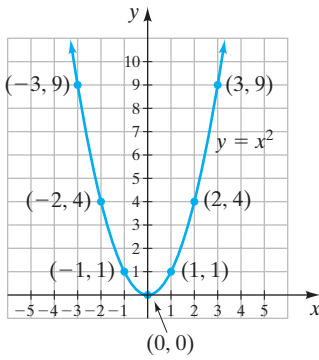


FIGURA 10.5

$$y = x^2$$

- Sea  $x = 3$ ,  $y = (3)^2 = 9$
- Sea  $x = 2$ ,  $y = (2)^2 = 4$
- Sea  $x = 1$ ,  $y = (1)^2 = 1$
- Sea  $x = 0$ ,  $y = (0)^2 = 0$
- Sea  $x = -1$ ,  $y = (-1)^2 = 1$
- Sea  $x = -2$ ,  $y = (-2)^2 = 4$
- Sea  $x = -3$ ,  $y = (-3)^2 = 9$

$x$	$y$
3	9
2	4
1	1
0	0
-1	1
-2	4
-3	9

Una los puntos mediante una curva suave (figura 10.5). Observe cómo la gráfica es simétrica respecto a la recta  $x = 0$  (el eje  $y$ ).

**EJEMPLO 2**

Grafique la ecuación  $y = -2x^2 + 4x + 6$ .

**Solución**

Como  $a = -2$ , que es negativa, esta parábola abre hacia abajo.

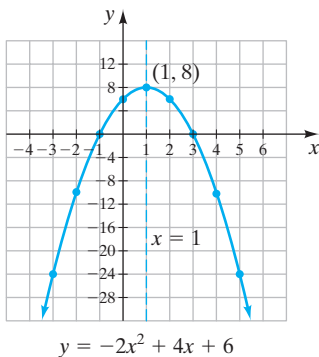


FIGURA 10.6

$$y = -2x^2 + 4x + 6$$

- Sea  $x = 5$ ,  $y = -2(5)^2 + 4(5) + 6 = -24$
- Sea  $x = 4$ ,  $y = -2(4)^2 + 4(4) + 6 = -10$
- Sea  $x = 3$ ,  $y = -2(3)^2 + 4(3) + 6 = 0$
- Sea  $x = 2$ ,  $y = -2(2)^2 + 4(2) + 6 = 6$
- Sea  $x = 1$ ,  $y = -2(1)^2 + 4(1) + 6 = 8$
- Sea  $x = 0$ ,  $y = -2(0)^2 + 4(0) + 6 = 6$
- Sea  $x = -1$ ,  $y = -2(-1)^2 + 4(-1) + 6 = 0$
- Sea  $x = -2$ ,  $y = -2(-2)^2 + 4(-2) + 6 = -10$
- Sea  $x = -3$ ,  $y = -2(-3)^2 + 4(-3) + 6 = -24$

$x$	$y$
5	-24
4	-10
3	0
2	6
1	8
0	6
-1	0
-2	-10
-3	-24

Observe cómo la gráfica (figura 10.6) es simétrica respecto a la recta  $x = 1$ , que aparece en forma punteada, ya que no es parte de la gráfica. El vértice de esta parábola es el punto  $(1, 8)$ . Como los valores de  $y$  son grandes, el eje  $y$  se ha marcado con intervalos de 4 unidades para permitirnos graficar los puntos  $(-3, -24)$  y  $(5, -24)$ . Las flechas en los extremos de la gráfica indican que la parábola continúa indefinidamente.

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 23**

**2 Determinar las coordenadas del vértice de una parábola**

Al graficar ecuaciones cuadráticas, ¿cómo decidimos qué valores utilizar para  $x$ ? Cuando la ubicación del vértice no se conoce, ésta es una pregunta difícil de responder. Cuando se conoce, se hace más obvio qué valores utilizar.

En el ejemplo 2, el eje de simetría es  $x = 1$ , y la coordenada  $x$  del vértice también es 1. Para una ecuación cuadrática en la forma  $y = ax^2 + bx + c$ , tanto el eje de simetría como la coordenada  $x$  del vértice pueden encontrarse por medio de la siguiente fórmula.

**Eje de simetría y coordenada x del vértice**

$$x = -\frac{b}{2a}$$

En la ecuación cuadrática del ejemplo 2,  $a = -2$ ,  $b = 4$  y  $c = 6$ . Al sustituir estos valores en la fórmula para el eje de simetrías se obtiene

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-2)} = -\frac{4}{-4} = 1$$

Por tanto, la gráfica es simétrica respecto a la recta  $x = 1$ , y la coordenada  $x$  del vértice es 1.

La coordenada  $y$  del vértice puede determinarse sustituyendo el valor de la coordenada  $x$  del vértice en la ecuación cuadrática y resolver para  $y$ .

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 4x + 6 \\ &= -2(1)^2 + 4(1) + 6 \\ &= -2(1) + 4 + 6 \\ &= -2 + 4 + 6 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Por lo que el vértice está en el punto  $(1, 8)$ .

Para una ecuación cuadrática de la forma  $y = ax^2 + bx + c$ , la coordenada  $y$  del vértice también puede determinarse mediante la fórmula siguiente.

**Coordenada y del vértice**

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Para el ejemplo 2,

$$\begin{aligned} y &= \frac{4ac - b^2}{4a} \\ &= \frac{4(-2)(6) - 4^2}{4(-2)} \\ &= \frac{-48 - 16}{-8} = \frac{-64}{-8} = 8 \end{aligned}$$

Puede utilizar el método de su elección para determinar la coordenada  $y$  del vértice. Ambos métodos dan lugar al mismo valor de  $y$ .

**3 Usar simetría para graficar ecuaciones cuadráticas**

Un método para elegir los puntos para graficar parábolas es determinar el eje de simetría y el vértice de la gráfica. Luego seleccionar valores de  $x$  cercanos a cada lado del eje de simetría. Al graficar la ecuación hacemos uso de la simetría de la gráfica.

- EJEMPLO 3**
- Determine el eje de simetría de la gráfica de la ecuación  $y = x^2 + 6x + 5$ .
  - Determine el vértice de la gráfica.
  - Grafique la ecuación.

**Solución** a)  $a = 1$ ,  $b = 6$ ,  $c = 5$ .

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(1)} = -3$$

La parábola es simétrica respecto a la recta  $x = -3$ . La coordenada del vértice es  $-3$ .

**b)** Ahora determinamos la coordenada  $y$  del vértice. Sustituya  $-3$  por  $x$  en la ecuación cuadrática.

$$y = x^2 + 6x + 5$$

$$y = (-3)^2 + 6(-3) + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$$

El vértice está en el punto  $(-3, -4)$ .

**c)** Como el eje de simetría es  $x = -3$ , seleccionaremos valores para  $x$  que sean mayores o iguales a  $-3$ . Con frecuencia es útil trazar cada punto conforme se determina. Si un punto parece que no está en la parábola, verifíquelo.

$$y = x^2 + 6x + 5$$

Sea  $x = -2$ ,  $y = (-2)^2 + 6(-2) + 5 = -3$

Sea  $x = -1$ ,  $y = (-1)^2 + 6(-1) + 5 = 0$

Sea  $x = 0$ ,  $y = (0)^2 + 6(0) + 5 = 5$

$x$	$y$
$-2$	$-3$
$-1$	$0$
$0$	$5$

Graficamos estos puntos en la figura 10.7a. La gráfica completa de la ecuación se ilustra en la figura 10.7b. Observe cómo utilizamos la simetría para completar la gráfica. Los puntos  $(-2, -3)$  y  $(-4, -3)$  se encuentran a una unidad horizontal del eje de simetría,  $x = -3$ . Los puntos  $(-1, 0)$  y  $(-5, 0)$ , cada uno, están a 2 unidades horizontales del eje de simetría, y los puntos  $(0, 5)$  y  $(-6, 5)$  están a 3 unidades horizontales del eje de simetría.

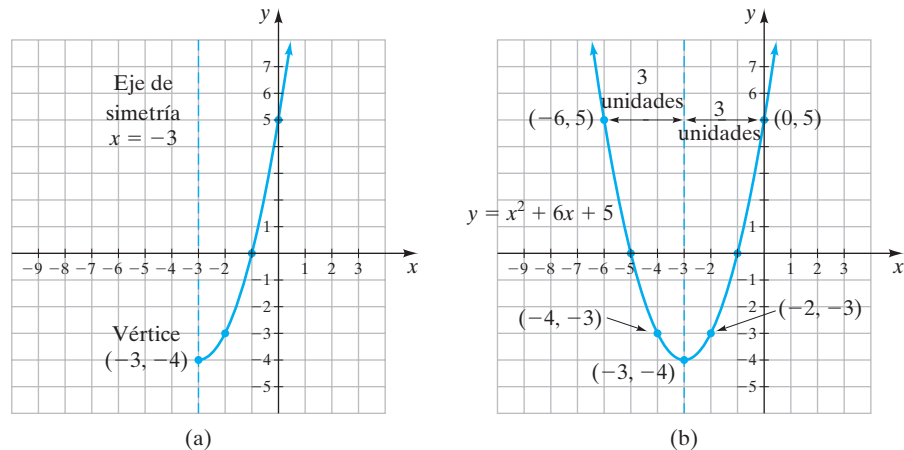


FIGURA 10.7

**EJEMPLO 4** Grafique la ecuación  $y = -2x^2 + 5x - 4$ .

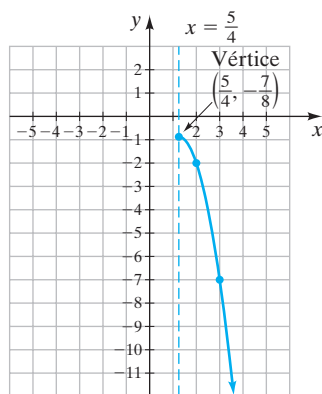
**Solución**  $a = -2$ ,  $b = 5$ ,  $c = -4$ .

Como  $a < 0$ , esta parábola abrirá hacia abajo.

$$\begin{aligned} \text{Eje de simetría: } x &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{5}{2(-2)} = -\frac{5}{-4} = \frac{5}{4} \quad \left(\text{o } 1\frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

Como el valor  $x$  del vértice es una fracción, necesitaríamos sumar fracciones si deseamos determinar  $y$  sustituyendo  $\frac{5}{4}$  por  $x$  en la ecuación dada. Por tanto, utilizaremos la fórmula para determinar la coordenada  $y$  del vértice.

$$\begin{aligned} y &= \frac{4ac - b^2}{4a} \\ &= \frac{4(-2)(-4) - 5^2}{4(-2)} = \frac{32 - 25}{-8} = \frac{7}{-8} = -\frac{7}{8} \end{aligned}$$



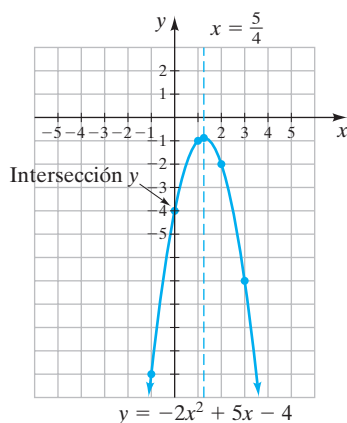
(a)

El vértice de esta gráfica está en el punto  $(\frac{5}{4}, -\frac{7}{8})$ . Como el eje de simetría es  $x = \frac{5}{4}$ , iniciaremos por seleccionar valores de  $x$  que sean mayores que  $\frac{5}{4}$ , o  $1\frac{1}{4}$ .

$$y = -2x^2 + 5x - 4$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } x &= 2, & y &= -2(2)^2 + 5(2) - 4 = -2 \\ \text{Sea } x &= 3, & y &= -2(3)^2 + 5(3) - 4 = -7 \\ \text{Sea } x &= 4, & y &= -2(4)^2 + 5(4) - 4 = -16 \end{aligned}$$

$x$	$y$
2	-2
3	-7
4	-16



(b)

Cuando el eje de simetría es un valor fraccionario, sea muy cuidadoso al elaborar la gráfica. Debe trazar tantos puntos adicionales como sean necesarios. A continuación determinamos algunos valores de  $y$  cuando  $x$  es menor que  $\frac{5}{4}$ .

$$\begin{aligned} \text{Sea } x &= 1 & y &= -2(1)^2 + 5(1) - 4 = -1 \\ \text{Sea } x &= 0 & y &= -2(0)^2 + 5(0) - 4 = -4 \\ \text{Sea } x &= -1 & y &= -2(-1)^2 + 5(-1) - 4 = -11 \end{aligned}$$

$x$	$y$
1	-1
0	-4
-1	-11

La figura 10.8a muestra los puntos trazados a la derecha del eje de simetría. La figura 10.8b muestra la gráfica terminada. El punto  $(4, -16)$  no se muestra en las gráficas. ✨

FIGURA 10.8

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 19**

Al graficar, con frecuencia tendremos que evaluar expresiones cuadráticas para obtener valores para  $y$ . Podría revisar *Evaluación de expresiones* como se explica en el recuadro Uso de la calculadora en la sección 1.9 de la página 79.

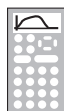


(a)



(b)

FIGURA 10.9 No toda forma que parece parábola es una parábola. Por ejemplo, el Arco de San Luis, figura 10.9a parece una parábola, pero no lo es. Sin embargo, el puente sobre el Mississippi, cerca de Jefferson Barracks, Missouri, que conecta a Missouri e Illinois, figura 10.9b, es una parábola.



### Uso de la calculadora graficadora

Ahora analizamos cómo determinar el vértice de una parábola. En el ejemplo 3 graficamos  $y = x^2 + 6x + 5$ . Esta gráfica se muestra en la ventana de una TI-83 Plus en la figura 10.10, utilizando la configuración de la ventana estándar.

Podemos utilizar el menú CALC (calcular) para determinar el vértice. El vértice de una parábola también se denomina punto mínimo (si la parábola abre hacia arriba) o el punto máximo (si la parábola abre hacia abajo).

Para obtener el menú CALC presione  $\boxed{2^{\text{nd}}}$   $\boxed{\text{TRACE}}$ . El menú CALC se muestra en la figura 10.11.

Como esta gráfica abre hacia arriba, tiene un punto mínimo. Recorrer el menú CALC a la opción 3: minimum y presione  $\boxed{\text{ENTER}}$ , que le proporciona la gráfica que se muestra en la figura 10.12. Observe que el cursor está en la intersección y, (0, 5). Utilice la tecla de flecha hacia la izquierda para mover el curso hacia la izquierda. Observe los valores de X y Y conforme mueve el cursor. El valor de Y disminuirá hasta que el cursor llegue al vértice. Cuando se mueva el cursor pasando el vértice, el valor de Y empezará a aumentar. Mueva el cursor justo a la izquierda del vértice y presione  $\boxed{\text{ENTER}}$ . Observe las palabras *Left Bound?* cambian a *Right Bound?*

Ahora mueva el curso justo a la derecha del vértice y presione  $\boxed{\text{ENTER}}$ .

La pantalla ahora muestra *Guess?* Nuevamente presione  $\boxed{\text{ENTER}}$  y obtiene la pantalla que se muestra en la figura 10.13.

La figura 10.13 muestra que el punto mínimo de la gráfica tiene lugar cuando  $x = -3$  y  $y = -4$ . Por tanto, el vértice está en  $(-3, -4)$ .

Si la parábola abre hacia abajo, la gráfica tendría un punto máximo. En este caso, para obtener el vértice utilizaríamos el menú CALC, opción 4: maximum, para obtener el vértice. Luego seguiríamos el mismo procedimiento básico para determinar el punto máximo.

### Ejercicios

Utilice su calculadora graficadora para determinar el vértice de la gráfica de cada ecuación. Podría ser necesario que ajuste la configuración de su ventana para mostrar el vértice.

1.  $y = x^2 - 2x - 3$

2.  $y = x^2 - 7x + 10$

3.  $y = -2x^2 - 2x + 12$

4.  $y = 2x^2 - 7x - 15$

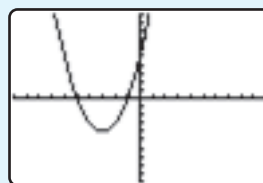


FIGURA 10.10

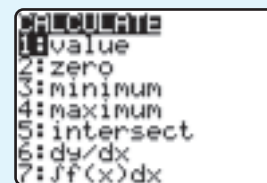


FIGURA 10.11

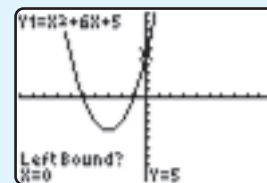


FIGURA 10.12

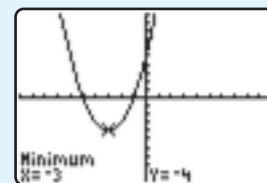


FIGURA 10.13

#### 4 Determinar las intersecciones con $x$ de la gráfica de una ecuación cuadrática

En el ejemplo 4 la gráfica cruza el eje  $y$  en  $y = -4$ . Recuerde que en las secciones anteriores vimos que para determinar la intersección con  $y$  hacemos  $x = 0$  y despejamos  $y$  en la ecuación resultante. Las ubicaciones de las intersecciones con  $x$  y con  $y$  con frecuencia son útiles cuando se grafican ecuaciones cuadráticas.

Para determinar la intersección con  $x$  cuando graficamos líneas rectas en la sección 7.2, hicimos  $y = 0$  y determinamos el valor correspondiente de  $x$ . Hicimos esto porque el valor de  $y$  en donde una gráfica cruza el eje  $x$  es 0. Aquí utilizamos el mismo procedimiento cuando determinamos las intersecciones con  $x$  de una ecuación cuadrática de la forma  $y = ax^2 + bx + c$ . Para determinar las intersecciones con  $x$  de la gráfica de  $y = ax^2 + bx + c$ , hacemos  $y$  igual a 0 y resolvemos la ecuación resultante,  $ax^2 + bx + c = 0$ . Las soluciones reales de la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$  se denominan los *ceros* (o *raíces*) de la ecuación, porque cuando se sustituyen por  $x$  en  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $y$  tiene un valor de cero. Los ceros pueden utilizarse para determinar las intersecciones  $x$  de la gráfica de  $y = ax^2 + bx + c$  ya que los ceros son las coordenadas  $x$  de las intersecciones con el eje  $x$ . Para resolver ecuaciones de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , podemos utilizar la factorización, como se explicó en la sección 10.2, o la fórmula cuadrática, como explicamos en la sección 10.3.

En la sección 10.3 mencionamos que al resolver ecuaciones cuadráticas de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , cuando el discriminante,  $b^2 - 4ac$ , es mayor que cero, existen dos soluciones reales y distintas; cuando es igual a cero, sólo existe una solución real, y cuando es menor que cero, no existen soluciones reales.

Una ecuación cuadrática de la forma  $y = ax^2 + bx + c$  tendrá dos intersecciones con  $x$  distintas (figura 10.14a), una intersección con  $x$  (figura 10.14b) o ninguna intersección con  $x$  (figura 10.14c). El número de intersecciones con  $x$  puede determinarse por medio del discriminante.

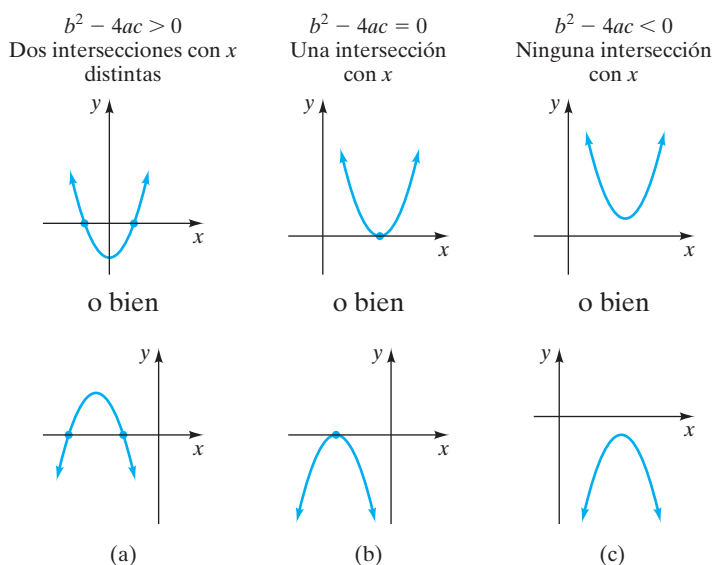


FIGURA 10.14

Las intersecciones con  $x$  pueden determinarse en forma gráfica. También pueden encontrarse en forma algebraica, haciendo  $y$  igual a 0 y resolviendo la ecuación resultante, como en el ejemplo 5.

#### EJEMPLO 5

- a)** Determine las intersecciones con  $x$  de la gráfica con ecuación  $y = x^2 - 6x - 7$ , por medio de factorización, completando el cuadrado y mediante la fórmula cuadrática.
- b)** Grafique la ecuación.



**Solución** a) Para determinar en forma algebraica las intersecciones con  $x$ , hacemos y igual a 0 y resolvemos la ecuación,  $x^2 - 6x - 7 = 0$ . Resolveremos esta ecuación por los tres métodos algebraicos.

**Método 1:** Por factorización.

$$\begin{aligned}x^2 - 6x - 7 &= 0 \\(x - 7)(x + 1) &= 0 \\x - 7 = 0 &\quad \text{o bien} \quad x + 1 = 0 \\x = 7 &\quad \quad \quad x = -1\end{aligned}$$

**Método 2:** Completando el cuadrado.

$$\begin{aligned}x^2 - 6x - 7 &= 0 \\x^2 - 6x &= 7 \\x^2 - 6x + 9 &= 7 + 9 \\(x - 3)^2 &= 16 \\x - 3 &= \pm 4 \\x &= 3 \pm 4 \\x = 3 + 4 &\quad \text{o bien} \quad x = 3 - 4 \\x = 7 &\quad \quad \quad x = -1\end{aligned}$$

**Método 3:** Fórmula cuadrática

$$\begin{aligned}x^2 - 6x - 7 &= 0 \\a = 1, \quad b = -6, \quad c &= -7 \\x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\&= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(-7)}}{2(1)} \\&= \frac{6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} \\&= \frac{6 \pm \sqrt{64}}{2} \\&= \frac{6 \pm 8}{2} \\x = \frac{6 + 8}{2} &\quad \text{o bien} \quad x = \frac{6 - 8}{2} \\&= \frac{14}{2} = 7 &\quad \quad \quad &= \frac{-2}{2} = -1\end{aligned}$$

Observe que obtuvimos las mismas soluciones, 7 y  $-1$ , con los tres métodos. La gráfica de la ecuación  $y = x^2 - 6x - 7$  tendrá dos intersecciones distintas con  $x$ . La gráfica cruzará el eje  $x$  en 7 y en  $-1$ . Las intersecciones son  $(7, 0)$  y  $(-1, 0)$ .

**b)** Como  $a > 0$ , esta parábola abre hacia arriba.

$$\text{eje de simetría: } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(1)} = \frac{6}{2} = 3$$

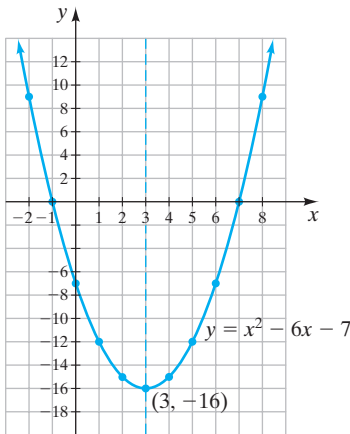


FIGURA 10.15

$$y = x^2 - 6x - 7$$

Sea $x = 3$ ,	$y = 3^2 - 6(3) - 7 = -16$
Sea $x = 4$ ,	$y = 4^2 - 6(4) - 7 = -15$
Sea $x = 5$ ,	$y = 5^2 - 6(5) - 7 = -12$
Sea $x = 6$ ,	$y = 6^2 - 6(6) - 7 = -7$
Sea $x = 7$ ,	$y = 7^2 - 6(7) - 7 = 0$
Sea $x = 8$ ,	$y = 8^2 - 6(8) - 7 = 9$

$x$	$y$
3	-16
4	-15
5	-12
6	-7
7	0
8	9

El vértice está en  $(3, -16)$ . Nuevamente utilizamos la simetría para completar la gráfica (figura 10.15). Las intersecciones  $x(7, 0)$  y  $(-1, 0)$  coinciden con la respuesta obtenida en el inciso a).

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 31



### Uso de la calculadora graficadora

Las intersecciones con  $x$  de una parábola pueden determinarse por medio de una calculadora graficadora. Lea el manual que acompaña a su calculadora graficadora para enterarse cómo determinar las intersecciones  $x$  de una parábola. En la TI-83 Plus, puede utilizar el menú CALC (calcular) con la opción 2: zero (vea la figura 10.11).

## Conjunto de ejercicios 10.4

### Ejercicios conceptuales

- ¿Cómo llamamos a la gráfica de una ecuación cuadrática de la forma  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ ?
- ¿Qué es el vértice de una parábola?
- Explique cómo determinar las coordenadas de los vértices de una parábola.
- ¿Qué determina si la gráfica de una ecuación cuadrática de la forma  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , es una parábola que abre hacia arriba o hacia abajo? Explique su respuesta.
- ¿Qué son las intersecciones con  $x$  de una gráfica?
  - ¿Cómo puede determinar, de forma algebraica, las intersecciones con  $x$  de una gráfica?
- ¿Qué significa cuando decimos que las gráficas de ecuaciones cuadráticas de la forma  $y = ax^2 + bx + c$  tienen simetría alrededor de una recta vertical imaginaria que pasa por el vértice?
- Cuando se grafica una ecuación cuadrática de la forma  $y = ax^2 + bx + c$ , ¿cuál es la ecuación de la recta vertical alrededor de la cual la parábola será simétrica?
  - ¿Cómo se llama esta recta vertical?
- ¿Cuántas intersecciones con  $x$  tendrá la gráfica de una ecuación cuadrática, si el discriminante tiene un valor de
  - 25?
  - 2?
  - 0?

### Práctica de habilidades

Indique el eje de simetría, las coordenadas del vértice, y si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.

- $y = x^2 + 4x - 3$
- $y = -x^2 + 3x - 4$
- $y = -3x^2 + 2x + 8$
- $y = 4x^2 + 8x + 3$
- $y = 2x^2 + 3x + 5$
- $y = -5x^2 + 6x - 1$
- $y = x^2 + 2x - 8$
- $y = 3x^2 + 6x - 9$
- $y = x^2 + 3x - 6$
- $y = 3x^2 - 2x + 2$
- $y = -x^2 + x + 8$
- $y = -2x^2 - 6x - 5$

Grafique cada ecuación cuadrática y determine las intersecciones con el eje  $x$ , si las hay.

- |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 21. $y = x^2 - 1$        | 22. $y = x^2 + 3$        | 23. $y = -x^2 + 5$       | 24. $y = -x^2 - 1$       |
| 25. $y = x^2 + 4x + 3$   | 26. $y = 2x^2 + 2$       | 27. $y = x^2 + 4x + 4$   | 28. $y = x^2 + 2x - 15$  |
| 29. $y = -x^2 - 5x - 4$  | 30. $y = x^2 - 4x - 5$   | 31. $y = x^2 + 5x - 6$   | 32. $y = -x^2 - 5x + 6$  |
| 33. $y = x^2 + 5x - 14$  | 34. $y = 2x^2 + 4x + 2$  | 35. $y = x^2 - 6x + 9$   | 36. $y = x^2 - 4x + 4$   |
| 37. $y = x^2 - 6x$       | 38. $y = -x^2 + 5x$      | 39. $y = 4x^2 + 12x + 9$ | 40. $y = x^2 - 2x + 1$   |
| 41. $y = -x^2 + 7x - 10$ | 42. $y = x^2 + x + 1$    | 43. $y = x^2 - 2x - 16$  | 44. $y = 2x^2 + 3x - 2$  |
| 45. $y = -2x^2 + 3x - 2$ | 46. $y = -4x^2 - 6x + 4$ | 47. $y = 2x^2 - x - 15$  | 48. $y = 6x^2 + 10x - 4$ |

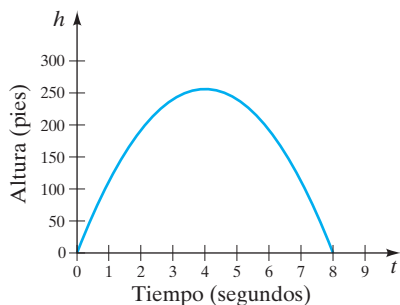
Utilizando el discriminante, determine el número de intersecciones con  $x$  que tendrá la gráfica de cada ecuación. No grafique la ecuación.

- |                           |                          |                             |                              |
|---------------------------|--------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| 49. $y = 4x^2 - 2x - 16$  | 50. $y = -x^2 - 5$       | 51. $y = 4x^2 - 6x - 7$     | 52. $y = x^2 - 6x + 9$       |
| 53. $y = x^2 - 20x + 100$ | 54. $y = -4.3x^2 + 5.7x$ | 55. $y = 5.7x^2 + 2x - 3.9$ | 56. $y = 5x^2 - 13.2x + 9.3$ |

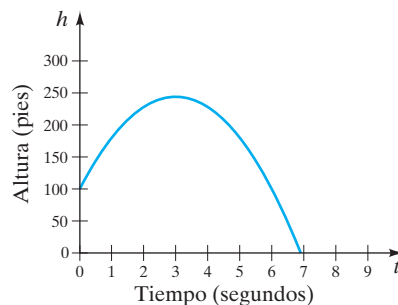
## Solución de problemas

La gráfica de una ecuación cuadrática de la forma  $y = ax^2 + bx + c$  es una parábola. Se dan valor de  $a$  (el coeficiente del término cuadrático) y el vértice de la parábola. Determine el número de intersecciones  $x$  que tendrá la parábola. Explique cómo determinó su respuesta.

57.  $a = -2$ , vértice en  $(0, -3)$ .
58.  $a = 5$ , vértice en  $(4, -3)$ .
59.  $a = -3$ , vértice en  $(-4, 0)$ .
60.  $a = -1$ , vértice en  $(2, -4)$ .
61. ¿Las siguientes ecuaciones tendrán las mismas intersecciones  $x$  cuando se grafican? Explique cómo determinó su respuesta.  
 $y = x^2 - 2x - 15$  y  $y = -x^2 + 2x + 15$
62. a) ¿Cómo se compararán las gráficas de las ecuaciones siguientes? Explique cómo determinó su respuesta.  
 $y = x^2 - 2x - 8$  y  $y = -x^2 + 2x + 8$   
 b) En los mismos ejes, grafique  $y = x^2 - 2x - 8$  y  $y = -x^2 + 2x + 8$ .
63. **Altura sobre el piso** Un objeto se lanza hacia arriba desde el piso. La altura del objeto por encima del suelo, en pies, en el instante  $t$  en segundos, se ilustra en la gráfica siguiente.
64. **Altura sobre el piso** Un objeto es lanzado hacia arriba desde una plataforma que se encuentra a 100 pies del piso. La altura del objeto por encima del suelo, en pies, en el instante  $t$  en segundos, se ilustra en la gráfica siguiente.

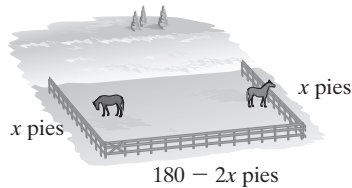


- Estime la altura máxima que el objeto alcanzará.
- ¿Cuánto tiempo tardará el objeto en llegar a su altura máxima?
- Estime cuánto tardará el objeto en chocar con el suelo.
- Estime la altura del objeto a los 2 segundos y a los 5 segundos.



- Estime la altura máxima que el objeto alcanzará.
- ¿Cuánto tiempo tardará el objeto en llegar a su altura máxima?
- Aproximadamente, ¿cuánto tardará el objeto en chocar con el suelo?
- Estime la altura del objeto a los 2 segundos y a los 5 segundos.

65. **Área máxima** Un área está cercada a lo largo de un río, como se muestra en la figura. Sólo están disponibles 180 pies de cerca. El área cercada es  $A = \text{largo} \cdot \text{ancho}$ , o  $A = x(180 - 2x) = -2x^2 + 180x$ .



- a) Grafique  $A = -2x^2 + 180x$ .

- b) Utilizando la gráfica estime, el valor de  $x$  que dará el área máxima.  
c) Estime el área máxima.

66. **Área máxima** Lea el ejercicio 65. Si están disponibles 260 pies de cerca, el área cercada es  $A = x(260 - 2x) = -2x^2 + 260x$ .

- a) Grafique  $A = -2x^2 + 260x$ .  
b) Utilizando la gráfica, estime el valor de  $x$  que dará el área máxima.  
c) Estime el área máxima.

## Problemas de reto

67. a) Grafique la ecuación cuadrática  $y = -x^2 + 6x$ .  
b) En los mismos ejes, grafique la ecuación cuadrática  $y = x^2 - 2x$ .  
c) Estime los puntos de intersección de las gráficas. Los puntos representan la solución del sistema de ecuaciones.
68. a) Grafique la ecuación cuadrática  $y = x^2 + 2x - 3$ .  
b) En los mismos ejes, grafique la ecuación cuadrática  $y = -x^2 + 1$ .  
c) Estime los puntos de intersección de las gráficas. Los puntos representan la solución para el sistema de ecuaciones.

## Ejercicios de repaso acumulativo

[6.4] 69. Reste  $\frac{3}{x+3} - \frac{x-2}{x-4}$ .

- [6.6] 70. Resuelva la ecuación

$$\frac{1}{3}(x+6) = 3 - \frac{1}{4}(x-5).$$

- [8.3] 71. Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$5x + 4y = 10$$

$$3x + 5y = -7$$

- [9.5] 72. Resuelva la ecuación  $3\sqrt{2x} - 12 = 0$ .

## 10.5 NÚMEROS COMPLEJOS



- 1 Escribir números complejos utilizando  $i$ .
- 2 Sumar y restar números complejos.
- 3 Resolver ecuaciones cuadráticas con soluciones en los números complejos.

### 1 Escribir números complejos utilizando $i$

En la sección 10.3 establecimos que las raíces cuadradas de números negativos, como  $\sqrt{-11}$ , no son números reales. Números como  $\sqrt{-11}$  se denominan **números imaginarios**. Se denominan así porque cuando se introdujeron, muchos matemáticos rechazaron creer que existían. Aunque no pertenecen al conjunto de los números reales, los números imaginarios existen y son muy útiles en matemáticas y ciencias.

Todo número imaginario tiene como factor a  $\sqrt{-1}$ . La  $\sqrt{-1}$  se denomina **unidad imaginaria**; con frecuencia se denota por medio de la letra  $i$ .

$$i = \sqrt{-1}$$

Por tanto, podemos escribir

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \sqrt{-1} = 2\sqrt{-1} = 2i$$

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9} \sqrt{-1} = 3\sqrt{-1} = 3i$$

$$\sqrt{-11} = \sqrt{11} \sqrt{-1} = \sqrt{11}i \quad \text{o bien} \quad i\sqrt{11}$$

Por lo general escribiremos  $i\sqrt{11}$  en lugar de  $\sqrt{11}i$  para evitar la confusión con  $\sqrt{11}i$ .

Para auxiliar en la escritura de raíces cuadradas de números negativos donde se utiliza  $i$ , se proporciona la regla siguiente.

Para cualquier número real positivo  $n$ ,

$$\sqrt{-n} = i\sqrt{n}$$

### Ejemplos

$$\sqrt{-4} = i\sqrt{4} = 2i \quad \sqrt{-3} = i\sqrt{3}$$

$$\sqrt{-25} = i\sqrt{25} = 5i \quad \sqrt{-10} = i\sqrt{10}$$

El sistema de los números reales es parte de un sistema más grande de números, denominado *sistema de números complejos*. Ahora estudiaremos los **números complejos**.

### DEFINICIÓN

Todo número de la forma

$$a + bi$$

donde  $a$  y  $b$  son números reales, es un **número complejo**.

Todo número real y todo número imaginario también son números complejos. Un número complejo tiene dos partes: una parte real,  $a$ , y una parte imaginaria,  $b$ .

$$\begin{array}{ccc} \text{Parte real.} & \longrightarrow & \text{Parte imaginaria.} \\ & \searrow & \swarrow \\ & a + bi & \end{array}$$

Si  $b = 0$ , el número complejo es un número real. Si  $a = 0$ , el número complejo es un *número imaginario puro*.

### Ejemplos de números complejos

$$3 + 4i \quad a = 3, \quad b = 4$$

$$5 - i\sqrt{3} \quad a = 5, \quad b = -\sqrt{3}$$

$$5 \quad a = 5, \quad b = 0 \quad (\text{número real, } b = 0)$$

$$2i \quad a = 0, \quad b = 2 \quad (\text{número imaginario, } a = 0)$$

$$-i\sqrt{7} \quad a = 0, \quad b = -\sqrt{7} \quad (\text{número imaginario, } a = 0)$$

Ya indicamos que todos los números reales y todos los imaginarios también son números complejos. La relación entre los diferentes conjuntos de números se ilustra en la figura 10.16. Como ilustra la figura, los números reales incluyen tanto a los números racionales como a los números irracionales, y los números complejos incluyen a los números reales y a los números no reales.

Números complejos		
Números reales		Números no reales
Números racionales $\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, \frac{9}{4}$	Números irracionales $\sqrt{2}, \sqrt{3}$	$\sqrt{-4}$
Enteros $-4, -9,$	$-\sqrt{7}, \pi$	$2 + 3i$
Enteros no negativos $0, 4, 12$		$6 - 4i$
		$\sqrt{2} + i\sqrt{3}$
		$i\sqrt{5}$
		$6i$

FIGURA 10.16

**EJEMPLO 1** Escriba cada uno de los siguientes números complejos en la forma  $a + bi$ .

**a)**  $5 + \sqrt{-4}$       **b)**  $3 - \sqrt{-12}$

**Solución** **a)**  $5 + \sqrt{-4} = 5 + \sqrt{4} \sqrt{-1}$   
 $= 5 + 2i$

**b)**  $3 - \sqrt{-12} = 3 - \sqrt{12} \sqrt{-1}$   
 $= 3 - \sqrt{4} \sqrt{3} \sqrt{-1}$   
 $= 3 - 2\sqrt{3}i$  o bien  $3 - 2i\sqrt{3}$

AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 21



En el ejemplo 6 de la sección 10.3, obtuvimos la respuesta  $\frac{1 + \sqrt{-11}}{6}$  y  $\frac{1 - \sqrt{-11}}{6}$ . Indicamos que como  $\sqrt{-11}$  no es un número real allí nos detendríamos. Ahora podemos reescribir estas respuestas como  $\frac{1 + i\sqrt{11}}{6}$  y  $\frac{1 - i\sqrt{11}}{6}$ , o bien  $\frac{1 \pm i\sqrt{11}}{6}$ .

## 2 Sumar y restar números complejos

Los números complejos pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse. Para sumar (o restar) números complejos, sume (o reste) sus partes reales y sume (o reste) sus partes imaginarias.

**EJEMPLO 2** Sume cada uno de los siguiente números complejos.

**a)**  $3 + 6i$  y  $-2 - 3i$       **b)**  $-4 - 5i$  y  $-3 - 2i$

**Solución** **a)**  $(3 + 6i) + (-2 - 3i) = (3 - 2) + (6i - 3i)$   
 $= 1 + 3i$

**b)**  $(-4 - 5i) + (-3 - 2i) = (-4 - 3) + (-5i - 2i)$   
 $= -7 - 7i$



Los números complejos también pueden multiplicarse y dividirse, pero en este texto no multiplicaremos ni dividiremos números complejos.

### 3 Resolver ecuaciones cuadráticas con soluciones en los números complejos

Antes de terminar esta sección resolvemos una ecuación cuadrática que no tiene soluciones reales. Escribiremos las respuestas como números complejos.

**EJEMPLO 3** Resuelva la ecuación  $2x^2 - 4x + 7 = 0$ .

**Solución** Utilizaremos la fórmula cuadrática.

$$\begin{aligned}
 a &= 2, \quad b = -4, \quad c = 7 \\
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} && \text{Fórmula cuadrática.} \\
 &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(7)}}{2(2)} \\
 &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 56}}{4} \\
 &= \frac{4 \pm \sqrt{-40}}{4} && \text{Éstos son números complejos.} \\
 &= \frac{4 \pm \sqrt{4} \sqrt{10} \sqrt{-1}}{4} \\
 &= \frac{4 \pm 2i\sqrt{10}}{4} && \text{Escribir los números complejos} \\
 &= \frac{2(2 \pm i\sqrt{10})}{4} && \text{Factorizar el numerador, dividir} \\
 &= \frac{2 \pm i\sqrt{10}}{2} && \text{entre los factores comunes.}
 \end{aligned}$$

**AHORA RESUELVA  
EL EJERCICIO 51**

Las soluciones,  $\frac{2 + i\sqrt{10}}{2}$  y  $\frac{2 - i\sqrt{10}}{2}$ , son números complejos.



## Conjunto de ejercicios 10.5

### Ejercicios conceptuales

1. ¿Todo número real es un número complejo? Explique.
2. ¿Hay números complejos que son números reales? Si es así, ¿cuántos números complejos son números reales? Explique.
3. ¿Cuál es el valor de  $i$ ?
4. a) ¿Es  $\sqrt{-11}$  un elemento del sistema de los números reales? Explique.  
b) ¿Es  $\sqrt{-11}$  un número del sistema de números complejos? Explique.
5. ¿Cuál es la forma general de un número complejo?
6. Explique cómo sumar o restar números complejos.

### Práctica de habilidades

Escriba cada número imaginario en términos de  $i$ .

- |                  |                  |                  |                  |
|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 7. $\sqrt{-4}$   | 8. $\sqrt{-9}$   | 9. $\sqrt{-100}$ | 10. $\sqrt{-64}$ |
| 11. $\sqrt{-15}$ | 12. $\sqrt{-10}$ | 13. $\sqrt{-23}$ | 14. $\sqrt{-13}$ |
| 15. $\sqrt{-8}$  | 16. $\sqrt{-18}$ | 17. $\sqrt{-20}$ | 18. $\sqrt{-98}$ |

Escriba cada número complejo en la forma  $a + bi$ .

19.  $5 + \sqrt{-4}$

20.  $7 + \sqrt{-16}$

21.  $-3 + \sqrt{-25}$

22.  $-6 + \sqrt{-64}$

23.  $-1 - \sqrt{-9}$

24.  $-4 - \sqrt{-81}$

25.  $-3 - \sqrt{-15}$

26.  $-5 - \sqrt{-6}$

27.  $5.2 + \sqrt{-50}$

28.  $6.3 - \sqrt{-32}$

29.  $\frac{1}{2} + \sqrt{-75}$

30.  $-\frac{3}{5} + \sqrt{-80}$

Sume o reste los siguientes números complejos.

31.  $(2 + 3i) + 5$

32.  $(3 - 5i) + 6$

33.  $(4 - 3i) - 8i$

34.  $(12 - 5i) - 7i$

35.  $(5 + 3i) + (6 + 2i)$

36.  $(8 - 5i) + (3 - 2i)$

37.  $(4 - 3i) - (6 + 4i)$

38.  $(9 - 13i) - (9 - 4i)$

39.  $(8 - 6i) - (8 - 6i)$

40.  $(16 - 4i) - (4 - 4i)$

41.  $(45 - 3i) - (36 + i)$

42.  $(7 - 5i) - (12 + 8i)$

Resuelva la ecuación cuadrática y escriba las soluciones en términos de  $i$ .

43.  $x^2 = -16$

44.  $x^2 = -25$

45.  $2x^2 = -20$

46.  $3a^2 = -36$

47.  $x^2 - 4x + 5 = 0$

48.  $x^2 + 6x + 11 = 0$

49.  $2r^2 + 3r + 5 = 0$

50.  $3w^2 - 5w + 8 = 0$

51.  $2p^2 + 4p + 9 = 0$

52.  $4m^2 - 6m + 9 = 0$

53.  $-4w^2 + 5w - 9 = 0$

54.  $-3z^2 - 2w - 10 = 0$

## Solución de problemas

55. ¿Bajo qué condiciones una ecuación de la forma  $x^2 = c$  tendrá soluciones imaginarias?

57. ¿Bajo qué condiciones una ecuación de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$  tendrá soluciones que no sean números reales?

56. Una ecuación de la forma  $x^2 = c$ , ¿puede tener sólo una solución imaginaria? Explique.

58. ¿Es posible, para una ecuación cuadrática, tener sólo una solución que sea un número no real? Explique.

## Ejercicios de repaso acumulativo

[1.9] 59. Evalúe  $- \{ [3(x - 4)^2 - 5] - 3x \}$  cuando  $x = 6$

[2.5] 60. Resuelva la ecuación  $\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}x = \frac{1}{2}(x - 2)$

[6.7] 61. Resuelva la ecuación  $\frac{w - 1}{w - 5} = \frac{3}{w - 5} + \frac{3}{4}$

[9.5] 62. Resuelva la ecuación  $2\sqrt{r - 4} + 3 = 9$

## RESUMEN DEL CAPÍTULO

### Términos y frases importantes

#### 10.1

Ecuación cuadrática  
Forma estándar de una ecuación cuadrática  
Propiedad de la raíz cuadrada

#### 10.2

Completar el cuadrado  
Trinomio cuadrado perfecto

#### 10.3

Discriminante  
Fórmula cuadrática

#### 10.4

Eje de simetría  
Parábola  
Simetría  
Vértice de una parábola

#### 10.5

Número complejo  
Número imaginario  
Unidad imaginaria

(continúa en la página siguiente)



## HECHOS IMPORTANTES

**Propiedad de la raíz cuadrada:** Si  $x^2 = a$ , entonces  $x = \sqrt{a}$  o  $x = -\sqrt{a}$  (o bien  $x = \pm\sqrt{a}$ ).

**Fórmula cuadrática:**  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

**Discriminante:**  $b^2 - 4ac$

Si  $b^2 - 4ac > 0$  la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales y distintas.

Si  $b^2 - 4ac = 0$  la ecuación cuadrática tiene una solución real.

Si  $b^2 - 4ac < 0$  la ecuación cuadrática no tiene solución real.

**Coordenadas del vértice de una parábola:**

$$\left( -\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right).$$

**Unidad imaginaria:**  $i = \sqrt{-1}$

**Números complejos** son números de la forma  $a + bi$ , en donde  $a$  y  $b$  son números reales.

## Ejercicios de repaso del capítulo

[10.1] Resuelva mediante la propiedad de la raíz cuadrada.

1.  $x^2 = 64$

2.  $x^2 = 12$

3.  $2x^2 = 12$

4.  $x^2 + 4 = 9$

5.  $x^2 - 4 = 16$

6.  $2x^2 - 4 = 10$

7.  $4a^2 - 30 = 2$

8.  $(r - 3)^2 = 20$

9.  $(4t - 3)^2 = 50$

10.  $(2x + 4)^2 = 30$

[10.2] Resuelva completando el cuadrado.

11.  $x^2 - 7x + 10 = 0$

12.  $x^2 - 11x + 28 = 0$

13.  $x^2 - 18x + 17 = 0$

14.  $x^2 + x - 6 = 0$

15.  $t^2 - 3t - 54 = 0$

16.  $x^2 = -5x + 6$

17.  $y^2 - 5y - 7 = 0$

18.  $x^2 + 2x - 5 = 0$

19.  $2x^2 - 8x = 64$

20.  $30 = 2n^2 - 4n$

21.  $3p^2 = -2p + 8$

22.  $6x^2 - 19x + 15 = 0$

[10.3] Determine si cada ecuación tiene dos soluciones reales y distintas, una solución real, o ninguna solución real.

23.  $-4x^2 + 4x - 6 = 0$

24.  $-3x^2 + 4x = 9$

25.  $x^2 - 10x + 25 = 0$

26.  $y^2 + 2y - 8 = 0$

27.  $4z^2 - 3z = 6$

28.  $3x^2 - 4x + 5 = 0$

29.  $-3x^2 - 4x + 8 = 0$

30.  $x^2 - 9x + 6 = 0$

Utilice la fórmula cuadrática para resolver. Si una ecuación no tiene soluciones reales, indíquelo.

31.  $x^2 - 10x + 16 = 0$

32.  $x^2 - 7x - 44 = 0$

33.  $x^2 = 10x - 9$

34.  $5x^2 - 7x = 6$

35.  $21 = r^2 + 4r$

36.  $x^2 - x + 12 = 0$

37.  $6x^2 + x - 15 = 0$

38.  $-2x^2 + 3x + 6 = 0$

39.  $2x^2 + 4x - 3 = 0$

40.  $y^2 - 6y + 3 = 0$

41.  $3x^2 - 4x + 6 = 0$

42.  $3x^2 - 6x - 8 = 0$

43.  $7x^2 - 3x = 0$

44.  $2z^2 = 5z$

[10.1-10.3] Resuelva cada ecuación cuadrática utilizando el método de su elección.

45.  $x^2 - 10x + 24 = 0$

46.  $x^2 + 15x + 56 = 0$

47.  $r^2 - 3r - 70 = 0$

48.  $x^2 + 6x = 27$

49.  $x^2 - 4x - 60 = 0$

50.  $x^2 - x - 42 = 0$

51.  $y^2 + 9y - 22 = 0$

52.  $t^2 = 5t$

53.  $x^2 = 81$

54.  $2x^2 + 5x = 3$

55.  $2x^2 = 9x - 10$

56.  $6x^2 + 5x = 6$

57.  $6n = 2n^2 - 9$

58.  $3x^2 - 11x + 10 = 0$

59.  $-5w = 3w^2 - 8$

60.  $x^2 + 3x = 6$

61.  $4x^2 - 9x = 0$

62.  $3x^2 + 5x = 0$

[10.4] Indique el eje de simetría, las coordenadas del vértice y si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.

63.  $y = x^2 - 6x - 5$

64.  $y = x^2 - 12x + 6$

65.  $y = x^2 - 3x + 7$

66.  $y = -x^2 - 2x + 15$

67.  $y = 3x^2 + 7x + 3$

68.  $y = -x^2 - 5x$

69.  $y = -x^2 - 8$

70.  $y = -2x^2 - x + 20$

71.  $y = -4x^2 + 8x + 5$

72.  $y = 3x^2 + 5x - 8$

Grafique cada ecuación cuadrática y determine las intersecciones con  $x$ , si existen. Si no existen, indíquelo.

73.  $y = x^2 - 2x$

74.  $y = -3x^2 + 6$

75.  $y = x^2 - 2x - 15$

76.  $y = -x^2 + 5x - 6$

77.  $y = x^2 - x + 1$

78.  $y = x^2 + 5x + 4$

79.  $y = -x^2 - 6x$

80.  $y = x^2 + 4x + 3$

81.  $y = -x^2 + 2x - 3$

82.  $y = 3x^2 - 4x - 8$

83.  $y = -2x^2 + 7x - 3$

84.  $y = x^2 - 5x + 4$

[10.1-10.4] Resuelva.

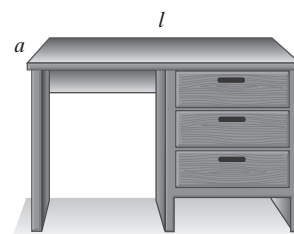
85. **Producto de enteros** El producto de dos enteros pares consecutivos es 48. Determine los enteros.

86. **Producto de enteros** El producto de dos enteros positivos es 88. Determine los dos enteros, si uno es 3 unidades mayor que el otro.

87. **Mesa rectangular** Samuel Jones está fabricando una mesa con cubierta rectangular para la cocina. Él determina que el largo de la cubierta de la mesa debe ser 6 pulgadas mayor que el doble del ancho. ¿Cuáles son las dimensiones de la cubierta de la mesa, si su área será de 920 pulgadas cuadradas?

88. **Escritorio de madera** Hace poco, Jordan y Patricia Wells compraron un escritorio de roble para el cuarto de su hijo. Para proteger la superficie de escritura del escritorio,

decidieron cubrir la superficie con un vidrio. El largo del escritorio es 20 pulgadas mayor que su ancho. Determine las dimensiones del vidrio que Jordan y Patricia deben comprar, si el área del escritorio es 1,344 pulgadas cuadradas.



[10.5] Escriba cada número imaginario o complejo en términos de  $i$

89.  $\sqrt{-4}$

90.  $\sqrt{-30}$

91.  $4 - \sqrt{-25}$

92.  $5 - \sqrt{-60}$

Sume o reste los números complejos.

93.  $(4 - 6i) + (5 - 3i)$

94.  $(9 + 5i) - (6 - 3i)$

Resuelva las ecuaciones cuadráticas y escriba las soluciones complejas en términos de  $i$ .

95.  $3x^2 = -27$

96.  $4p^2 = -20$

97.  $2r^2 - 5r + 8 = 0$

98.  $4w^2 - 8w + 9 = 0$

## Examen de práctica del capítulo

- Resuelva  $x^2 - 4 = 28$ , usando la propiedad de la raíz cuadrada.
- Resuelva  $(2p - 4)^2 = 17$ , usando la propiedad de la raíz cuadrada.
- Resuelva  $x^2 - 6x = 40$ , completando el cuadrado.
- Resuelva  $r^2 + 7r = 44$ , completando el cuadrado.
- Resuelva  $k^2 = 13k - 42$ , por la fórmula cuadrática.
- Resuelva  $2x^2 + 5 = -8x$ , por la fórmula cuadrática.
- Resuelva  $16x^2 = 49$ , con el método que usted prefiera.
- Escriba la fórmula cuadrática.
- Proporcione un ejemplo de un trinomio cuadrado perfecto.
- Determine si  $-2x^2 - 4x + 2 = 0$  tiene dos soluciones reales y distintas, una sola solución real o ninguna solución real. Explique su respuesta.
- Determine si  $x^2 + 8x + 16 = 0$  tiene dos soluciones reales y distintas, una sola solución real o ninguna solución real. Explique su respuesta.
- Determine la ecuación del eje de simetría de la gráfica de  $y = -x^2 - 6x + 7$ .
- Determine la ecuación del eje de simetría de la gráfica de  $y = 4x^2 - 16x + 9$ .
- Determine si la gráfica de  $y = -x^2 - 6x + 7$  abre hacia arriba o hacia abajo. Explique su respuesta.
- Determine si la gráfica de  $y = 4x^2 - 8x + 9$  abre hacia arriba o hacia abajo. Explique su respuesta.
- ¿Qué es el vértice de la gráfica de una parábola?
- Determine el vértice de la gráfica de  $y = -x^2 - 8x - 12$ .
- Determine el vértice de la gráfica de  $y = 3x^2 - 8x + 9$ .
- Grafique la ecuación  $y = x^2 + 2x - 8$  y determine las intersecciones con  $x$ , si las hay.
- Grafique la ecuación  $y = -x^2 + 6x - 9$  y determine las intersecciones con  $x$ , si las hay.
- Grafique la ecuación  $y = 2x^2 - 6x$  y determine las intersecciones con  $x$ , si existen.
- Mural** El largo de un mural rectangular es 1 pie mayor que el triple de su ancho. Determine el largo y el ancho del mural si su área es 30 pies cuadrados.



- Enteros impares consecutivos** El producto de dos enteros impares consecutivos es 99. Determine el mayor de los dos enteros.
- Edad de Shawn** Shawn Goodwin es 4 años mayor que su primo, Aarón. El producto de sus edades es 45. ¿Cuál es la edad de Shawn?
- Resuelva la ecuación cuadrática  $3p^2 - 2p + 6 = 0$  y escriba su respuesta en términos de  $i$ .

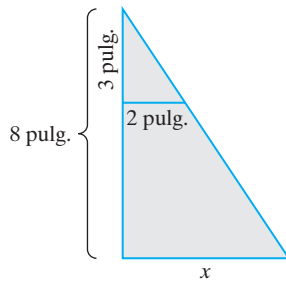
## Examen de repaso acumulativo

Resuelva el siguiente examen y compare sus respuestas con las que aparecen al final del examen. Repase cualquier pregunta que haya respondido de manera incorrecta. La sección y el objetivo en donde se estudió el material se indica a continuación de la respuesta.

1. Evalúe  $-5x^2y + 3y^2 - xy$  cuando  $x = 4$  y  $y = -3$ .

2. Resuelva la ecuación  $\frac{1}{2}z - \frac{2}{7}z = \frac{1}{5}(3z - 1)$ .

3. Determine la longitud del lado  $x$ .



4. Resuelva la desigualdad  $2(x - 3) \leq 6x - 5$  y grafique la solución en una recta numérica.

5. Despeje  $P$  de la fórmula  $A = \frac{m + n + P}{3}$ .

6. Simplifique  $(6a^4b^5)^3(3a^2b^5)^2$ .

7. Divida  $\frac{x^2 + 6x + 5}{x + 2}$ .

8. Factorice por agrupamiento,  $2x^2 - 3xy - 4xy + 6y^2$ .

9. Factorice  $6x^2 - 27x - 54$ .

10. Sume  $\frac{4}{a^2 - 16} + \frac{2}{(a - 4)^2}$ .

11. Resuelva la ecuación  $x + \frac{48}{x} = 14$ .

12. Grafique la ecuación  $4x - y = 8$ .

13. Mediante el método de suma y resta, resuelva el sistema de ecuaciones.

$$5x - 3y = 12$$

$$4x - 2y = 6$$

14. Simplifique  $\sqrt{\frac{2x^2y^3}{12x}}$ .

15. Sume  $2\sqrt{28} - 3\sqrt{7} + \sqrt{63}$ .

16. Resuelva la ecuación  $x - 2 = \sqrt{x^2 - 12}$ .

17. Resuelva la ecuación  $2x^2 + x - 8 = 0$ , mediante la fórmula cuadrática.

18. **Fertilizante** Si 4 libras de fertilizante pueden fertilizar 500 pies cuadrados de pasto, ¿cuántas libras de fertilizante se necesitan para fertilizar 3,200 pies cuadrados de pasto?

19. **Hortaliza** La longitud de una hortaliza rectangular es 3 pies menor que el triple de su ancho. Determine el ancho y el largo de la hortaliza, si su perímetro es 74 pies.

20. **Carrera** Robert McCloud corre 3 millas por hora más rápido de lo que camina. Él corre 2 millas y luego camina 2 millas. Si el tiempo total de su recorrido es de 1 hora, determine la velocidad a la que camina y a la que corre.

### Respuestas al examen de repaso acumulativo

1. 279; [Sec. 1.9, Obj. 6] 2.  $\frac{14}{27}$ ; [Sec. 2.5, Obj. 2] 3.  $5\frac{1}{3}$  pulgadas; [Sec. 2.6, Obj. 5] 4.  $x \geq -\frac{1}{4}$ ;

[Sec. 2.7, Obj. 1] 5.  $P = 3A - m - n$ ; [Sec. 3.1, Obj. 3] 6.  $1944a^{16}b^{25}$ ; [Sec. 4.1, Obj. 3] 7.  $x + 4 - \frac{3}{x + 2}$ ;

[Sec. 4.6, Obj. 2] 8.  $(2x - 3y)(x - 2y)$ ; [Sec. 5.2, Obj. 1] 9.  $3(2x + 3)(x - 6)$ ; [Sec. 5.4, Obj. 1] 10.  $\frac{6a - 8}{(a + 4)(a - 4)^2}$ ;

[Sec. 6.4, Obj. 1] 11. 6, 8; [Sec. 6.6, Obj. 2] 12. ; [Sec. 7.2, Obj. 3] 13.  $(-3, -9)$ ; [Sec. 8.3, Obj. 1]

14.  $\frac{y\sqrt{6xy}}{6}$ ; [Sec. 9.4, Obj. 3] 15.  $4\sqrt{7}$ ; [Sec. 9.3, Obj. 1] 16. 4; [Sec. 9.5, Obj. 1] 17.  $\frac{-1 + \sqrt{65}}{4}, \frac{-1 - \sqrt{65}}{4}$ ;

[Sec. 10.3, Obj. 1] 18. 25.6 libras; [Sec. 2.6, Obj. 3] 19. Ancho = 10 pies, largo = 27 pies; [Sec. 3.4, Obj. 1]

20. Camina: 3 millas por hora, corre: 6 millas por hora; [Sec. 6.7, Obj. 2]

# Apéndices

- A Repaso de decimales y porcentajes
- B Determinación del máximo común divisor (MCD) y del mínimo común denominador (mcd)
- C Geometría

## APÉNDICE A: REPASO DE DECIMALES Y PORCENTAJES

### Decimales

#### Para sumar o restar números con punto decimal

1. Alinee los números por los puntos decimales.
2. Sume o reste los números como si fueran enteros.
3. Coloque el punto decimal en la suma o resta directamente bajo los puntos decimales de los números sumados o restados.

**EJEMPLO 1** Sume  $4.6 + 13.813 + 9.02$ .

**Solución**

$$\begin{array}{r} 4.600 \\ 13.813 \\ + 9.020 \\ \hline 27.433 \end{array}$$



**EJEMPLO 2** Reste 3.062 de 34.9.

**Solución**

$$\begin{array}{r} 34.900 \\ - 3.062 \\ \hline 31.838 \end{array}$$



#### Para multiplicar números con punto decimal

1. Multiplique como si los factores fueran enteros.
2. Determine el número total de dígitos a la derecha del punto decimal en los factores.
3. Coloque el punto decimal en el producto de modo que éste tenga el mismo número de dígitos a la derecha del decimal que el total determinado en el paso 2; por ejemplo, si hay un total de tres dígitos a la derecha de los puntos decimales en los factores, debe haber tres dígitos a la derecha del punto decimal en el producto.

**EJEMPLO 3** Multiplique  $2.34 \times 1.9$ .

**Solución**


$$\begin{array}{r} 2.34 \leftarrow \text{Dos dígitos a la derecha del punto decimal.} \\ \times 1.9 \leftarrow \text{Un dígito a la derecha del punto decimal.} \\ \hline 2106 \\ 234 \\ \hline 4.446 \leftarrow \text{Tres dígitos a la derecha del punto decimal en el producto.} \end{array}$$



**EJEMPLO 4** Multiplique  $2.13 \times 0.02$ .

**Solución**

$$\begin{array}{r} 2.13 \leftarrow \text{Dos dígitos a la derecha del punto decimal.} \\ \times 0.02 \leftarrow \text{Dos dígitos a la derecha del punto decimal.} \\ \hline 0.0426 \leftarrow \text{Cuatro dígitos a la derecha del punto decimal en el producto.} \end{array}$$

Observe que agregamos un cero antes del dígito 4 en la respuesta a fin de tener cuatro dígitos a la derecha del punto decimal. 

**Para dividir números con puntos decimales**

1. Multiplique el dividendo y el divisor por una potencia de 10 para que el divisor sea un número entero.
2. Divida como en el caso de números enteros.
3. Coloque el punto decimal en el cociente directamente sobre el punto decimal en el dividendo.

Para hacer del divisor un número entero, multiplique *tanto* el dividendo *como* el divisor por 10 si el divisor está dado en décimos, por 100 si está en centésimos, por 1000 si está en milésimos, etcétera. Multiplicar el numerador y el denominador por el mismo número distinto de cero, es lo mismo que multiplicar la fracción por 1; por tanto, el valor de la fracción no cambia.

**EJEMPLO 5** Divida  $\frac{1.956}{0.12}$ .


**Solución**

Como el divisor, 0.12, es 12 centésimas, multipliquemos el divisor y el dividendo por 100.

$$\frac{1.956}{0.12} \times \frac{100}{100} = \frac{195.6}{12}$$

Ahora divida.

$$\begin{array}{r} 16.3 \\ 12 \overline{)195.6} \\ \underline{12} \phantom{.6} \\ 75 \\ \underline{72} \\ 36 \\ \underline{36} \\ 0 \end{array}$$

Colocamos el punto decimal de la respuesta directamente sobre el punto decimal del dividendo. De ese modo,  $1.956/0.12 = 16.3$ . 

**EJEMPLO 6** Divida 0.26 entre 10.4.

**Solución**

Primero, multiplique el dividendo y el divisor por 10.

$$\frac{0.26}{10.4} \times \frac{10}{10} = \frac{2.6}{104}$$

Ahora divida.

$$\begin{array}{r} 0.025 \\ 104 \overline{)2.600} \\ \underline{208} \\ 520 \\ \underline{520} \\ 0 \end{array}$$

Observe que colocamos un cero antes del dígito 2 en el cociente.

$$\frac{0.26}{10.4} = 0.025$$



## Porcentaje

La palabra *porcentaje* significa “por cien”. El símbolo % se lee “por ciento”. “1 %” significa “uno por cien”, o

$$1\% = \frac{1}{100} \quad \text{o bien} \quad 1\% = 0.01$$

**EJEMPLO 7** Convierta 16% a una forma decimal.

**Solución** Como  $1\% = 0.01$ ,

$$16\% = 16(0.01) = 0.16$$



**EJEMPLO 8** Convierta 4.7% en un decimal.

**Solución**  $4.7\% = 4.7(0.01) = 0.047$ .



**EJEMPLO 9** Convierta 1.14 en un porcentaje.

**Solución** Para expresar un número decimal en porcentaje, lo multiplicamos por 100%.

$$1.14 = 1.14 \times 100\% = 114\%$$



Con frecuencia será necesario determinar una cantidad que sea cierto porcentaje de un número. Por ejemplo, cuando adquiere un artículo en un estado o localidad que tiene un impuesto sobre las ventas, con frecuencia debe pagar un porcentaje del precio del artículo como impuesto. Los ejemplos 10 y 11 muestran cómo determinar el porcentaje de un número.

**EJEMPLO 10** Determine el 32% de 300.

**Solución** Para calcular el porcentaje, utilizamos la multiplicación. Cambiamos 32% por su expresión decimal y después multiplicamos por 300.

$$(0.32)(300) = 96.$$

De ese modo, 32% de 300 es 96.



**EJEMPLO 11** El condado Johnson cobra un impuesto a las ventas de 8%.

- a) Determine el impuesto de venta de un equipo de sonido, si su precio es de \$580.
- b) Determine el costo total del sistema, incluyendo el impuesto.

**Solución** a) El impuesto de venta es 8% de 580.

$$(0.08)(580) = 46.40$$

El impuesto de venta es de \$46.40.

- b) El costo total es el precio de venta más el impuesto:

$$\text{Costo total} = \$580 + \$46.40 = \$626.40$$



**APÉNDICE B: DETERMINACIÓN DEL MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y DEL MÍNIMO COMÚN DENOMINADOR**

**Factorización en primos**

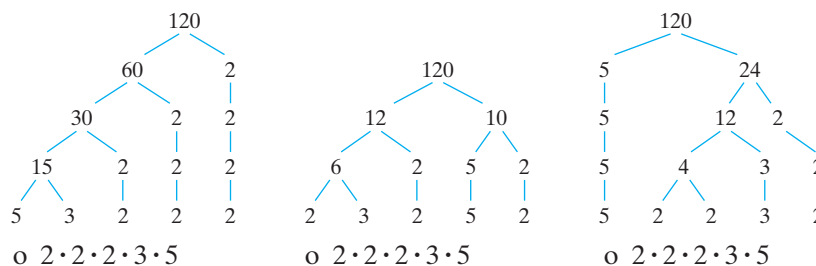
En la sección 1.3 mencionamos que para reducir fracciones a su mínima expresión podemos dividir el numerador y el denominador entre el *máximo común divisor* (MCD). Un método para determinar el MCD consiste en la *factorización en primos*. La factorización en primos es el proceso de escribir un número dado como producto de números primos. Los *números primos* son los números naturales, excluyendo el 1, que sólo pueden dividirse de manera exacta entre sí mismos y 1. Los primeros 10 números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 y 29. ¿Puede determinar el siguiente número primo? Si respondió 31, su respuesta es correcta.

Para escribir un número como producto de primos, empleamos un *diagrama de árbol*. Primero elegimos cualesquiera dos números cuyo producto sea el número dado. Después, continuamos factorizando cada uno en números primos, como muestra el ejemplo 1.

**EJEMPLO 1 Solución**

Determine la factorización en primos del número 120.

Utilizaremos tres diagramas de árbol diferentes para ilustrar la factorización en primos de 120.



Observe que no importa cómo comencemos, si no hay errores, hallaremos que la factorización en primos de 120 es  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ . Existen otras formas para factorizar 120, y cualquiera lleva a la factorización en primos  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ .

**Máximo común divisor**

El máximo común divisor (MCD) de dos números naturales es el máximo entero que es divisor (o factor) de ambos números. Utilizaremos el MCD al reducir fracciones a su mínima expresión.

**Para determinar el máximo común divisor de un numerador y denominador dados**

1. Escriba el numerador y el denominador como producto de primos.
2. Determine todos los factores primos que son comunes a ambas factorizaciones en primos.
3. Multiplique los factores primos determinados en el paso 2 para obtener el MCD.

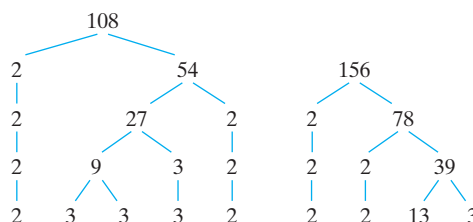
**EJEMPLO 2**

Considere la fracción  $\frac{108}{156}$ .

**Solución**

a) Determine el MCD de 108 y 156.    b) Simplifique  $\frac{108}{156}$ .

a) Primero determine las factorizaciones en primos de 108 y 156.



Existen dos 2 y un 3 comunes a ambas factorizaciones en primos; de este modo,

$$\text{MCD} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$



El máximo común divisor de 108 y 156 es 12. Doce es el máximo entero que divide a 108 y a 156.

b) Para simplificar  $\frac{108}{156}$ , dividimos el numerador y el denominador entre el MCD, 12.

$$\frac{108 \div 12}{156 \div 12} = \frac{9}{13}$$

Así,  $\frac{108}{156}$  se reduce a  $\frac{9}{13}$ . 

## Mínimo común denominador

Para sumar dos o más fracciones, hay que escribir cada fracción con un denominador común. El mejor denominador es el *mínimo común denominador* (mcd). El mcd es el número menor divisible entre ambos denominadores, también conocido como el *mínimo común múltiplo* de los denominadores.

### Para determinar el mínimo común denominador de dos o más fracciones

1. Escriba cada denominador como producto de números primos.
2. Para cada número primo, determine la cantidad máxima de veces que el número primo aparece en cualquiera de las factorizaciones en primos.
3. Multiplique todos los números primos determinados en el paso 2. Incluya en cada número primo el número máximo de veces que aparece en cualquiera de las factorizaciones en primos. El producto de todos será el mcd.

El ejemplo 3 ilustra el procedimiento para determinar el mcd.

**EJEMPLO 3** Considere  $\frac{7}{108} + \frac{5}{156}$ .

- a) Determine el mínimo común denominador.
- b) Sume las fracciones.

**Solución** a) En el ejemplo 2 determinamos que:

$$108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \quad \text{y} \quad 156 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$$


Podemos ver que el número máximo de veces que el 2 aparece en cada factorización en primos es dos (existen dos 2 en ambas factorizaciones), el número máximo de veces que aparece el 3 es tres, y el número máximo de veces que aparece el 13 es uno. Multiplique como sigue:

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13 = 1404$$

De este modo, el mínimo común denominador es 1,404. Éste es el menor número divisible entre 108 y 156.

b) Para sumar las fracciones, debe escribirlas con un común denominador. El más apropiado es el mínimo común denominador. Como  $1404 \div 108 = 13$ , multiplicaremos  $\frac{7}{108}$  por  $\frac{13}{13}$ . Como  $1404 \div 156 = 9$ , multiplicaremos  $\frac{5}{156}$  por  $\frac{9}{9}$ .

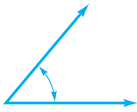
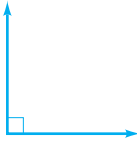
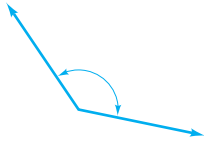

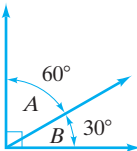
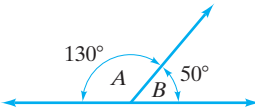
$$\frac{7}{108} \cdot \frac{13}{13} + \frac{5}{156} \cdot \frac{9}{9} = \frac{91}{1404} + \frac{45}{1404} = \frac{136}{1404} = \frac{34}{351}$$

Así,  $\frac{7}{108} + \frac{5}{156} = \frac{34}{351}$ . 

**APÉNDICE C: GEOMETRÍA**

Este apéndice presenta o repasa algunos conceptos geométricos importantes. La tabla C.1 proporciona los nombres y descripciones de varios ángulos.

Ángulos

TABLA C.1	
Ángulo	Bosquejo del ángulo
El <b>ángulo agudo</b> es un ángulo cuya medida está entre $0^\circ$ y $90^\circ$ .	
El <b>ángulo recto</b> es el que mide $90^\circ$ .	
El <b>ángulo obtuso</b> es aquél cuya medida está entre $90^\circ$ y $180^\circ$ .	
El <b>ángulo llano</b> tiene una medida de $180^\circ$ .	
Dos ángulos son <b>complementarios</b> cuando la suma de sus medidas es $90^\circ$ . Cada ángulo es el complemento del otro. Los ángulos <i>A</i> y <i>B</i> son ángulos complementarios.	
Dos ángulos son <b>suplementarios</b> cuando la suma de sus medidas es $180^\circ$ . Cada ángulo es el suplemento del otro. Los ángulos <i>A</i> y <i>B</i> son ángulos suplementarios.	

Cuando intersecamos dos rectas, formamos cuatro ángulos, como en la figura C.1. El par de ángulos opuestos formados por las rectas que se intersecan son **ángulos opuestos por el vértice**.

Los ángulos 1 y 3 son ángulos opuestos por el vértice; los ángulos 2 y 4 también. *Los ángulos opuestos por el vértice miden lo mismo*; así, el ángulo 1, simbolizado  $\angle 1$ , es igual al ángulo 3, simbolizado  $\angle 3$ . Podemos escribir  $\angle 1 = \angle 3$ . De manera análoga,  $\angle 2 = \angle 4$ .

Las **rectas paralelas** son dos rectas en el mismo plano que no se intersecan y se mantienen a la misma distancia una de otra (figura C.2). Las **rectas perpendiculares** son rectas que se intersecan formando ángulos rectos (figura C.3).

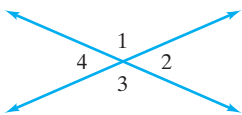


FIGURA C.1

**Rectas paralelas y perpendiculares**

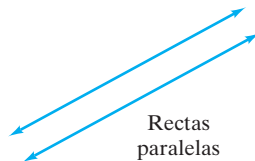


FIGURA C.2

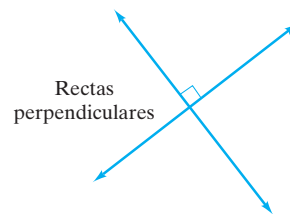


FIGURA C.3

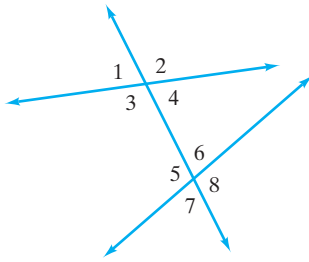


FIGURA C.4

Una **transversal o secante** es la recta que intersecciona dos o más rectas en puntos diferentes. Cuando intersecamos con una recta transversal otras dos rectas, formamos ocho ángulos, como muestra la figura C.4. Algunos de estos ángulos reciben nombres especiales.

**Ángulos internos:** 3, 4, 5, 6

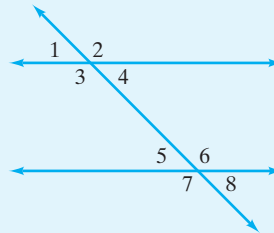
**Ángulos externos:** 1, 2, 7, 8

**Pares de ángulos correspondientes:** 1 y 5; 2 y 6; 3 y 7; 4 y 8

**Pares de ángulos alternos internos:** 3 y 6; 4 y 5

**Pares de ángulos alternos externos:** 1 y 8; 2 y 7

**Dos rectas paralelas cortadas por una transversal o secante**

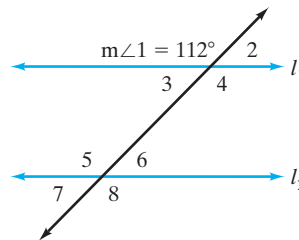


Cuando dos rectas paralelas son cortadas por una transversal o secante:

1. Los ángulos correspondientes son iguales ( $\angle 1 = \angle 5$ ,  $\angle 2 = \angle 6$ ,  $\angle 3 = \angle 7$ ,  $\angle 4 = \angle 8$ ).
2. Los ángulos alternos internos son iguales ( $\angle 3 = \angle 6$ ,  $\angle 4 = \angle 5$ ).
3. Los ángulos alternos externos son iguales ( $\angle 1 = \angle 8$ ,  $\angle 2 = \angle 7$ ).

**EJEMPLO 1**

Si las rectas 1 y 2 son paralelas y  $m\angle 1 = 112^\circ$ , se lee “medida del ángulo 1”), determine las medidas de los ángulos 2 a 8.



**Solución**

Los ángulos 1 y 2 son suplementarios. Así,  $m\angle 2$  es igual a  $180^\circ - 112^\circ = 68^\circ$ . Las medidas de los ángulos 1 y 4 son iguales, pues son opuestos por el vértice. Así,  $m\angle 4 = 112^\circ$ . Los ángulos 1 y 5 son correspondientes. Así,  $m\angle 5 = 112^\circ$ . Este ángulo es igual a su ángulo opuesto por el vértice,  $\angle 8$ , de modo que  $m\angle 8 = 112^\circ$ . Los ángulos 2, 3, 6 y 7 son iguales y miden  $68^\circ$ .

**Polígonos**

Un **polígono** es una figura cerrada en un plano, determinada por tres o más segmentos de recta. La figura C5 muestra algunos polígonos.

Un **polígono regular** tiene todos sus lados de la misma longitud y todos sus ángulos interiores tienen la misma medida. Las figuras C.5(b) y (d) son polígonos regulares.

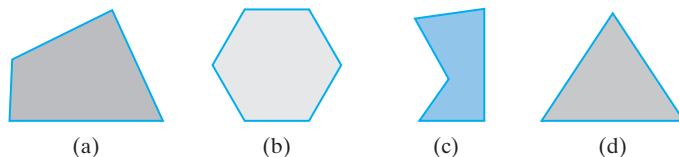


FIGURA C.5

**Suma de los ángulos interiores de un polígono**

La suma de los ángulos interiores de un polígono se determina mediante la fórmula:

$$\text{Suma} = (n - 2)180^\circ$$

donde  $n$  es el número de lados del polígono.

**EJEMPLO 2** Determine la suma de las medidas de los ángulos interiores de **a)** un triángulo, **b)** un cuadrilátero (4 lados), **c)** un octágono (8 lados).

**Solución**

**a)** Como  $n = 3$ , escribimos

$$\begin{aligned} \text{Suma} &= (n - 2)180^\circ \\ &= (3 - 2)180^\circ = 1(180^\circ) = 180^\circ \end{aligned}$$

La suma de las medidas de los ángulos interiores del triángulo es igual a  $180^\circ$ .

**b)**

$$\begin{aligned} \text{Suma} &= (n - 2)180^\circ \\ &= (4 - 2)180^\circ = 2(180^\circ) = 360^\circ \end{aligned}$$

La suma de las medidas de los ángulos interiores del cuadrilátero es igual a  $360^\circ$ .

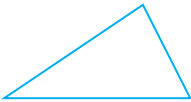
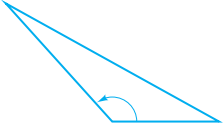

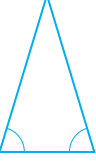
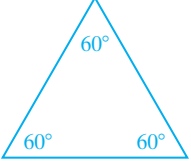
**c)**

$$\text{Suma} = (n - 2)(180^\circ) = (8 - 2)180^\circ = 6(180^\circ) = 1080^\circ$$

La suma de las medidas de los ángulos interiores del octágono es igual a  $1,080^\circ$ . ✨

Ahora, en la tabla C.2, definimos de manera breve varios tipos de triángulos.

Triángulos

TABLA C.2	
Triángulo	Bosquejo del triángulo
Un <b>triángulo acutángulo</b> tiene tres ángulos agudos (ángulos menores de $90^\circ$ ).	
Un <b>triángulo obtusángulo</b> tiene un ángulo obtuso (un ángulo mayor de $90^\circ$ ).	
Un <b>triángulo rectángulo</b> tiene un ángulo recto (un ángulo igual a $90^\circ$ ). El lado mayor del triángulo rectángulo está opuesto al ángulo recto y se llama <b>hipotenusa</b> . Los otros lados se llaman <b>catetos</b> .	
Un <b>triángulo isósceles</b> tiene dos lados de la misma longitud. Los ángulos opuestos a los lados iguales tienen la misma medida.	
Un <b>triángulo equilátero</b> tiene tres lados de la misma longitud y tres ángulos iguales, cada uno de $60^\circ$ .	

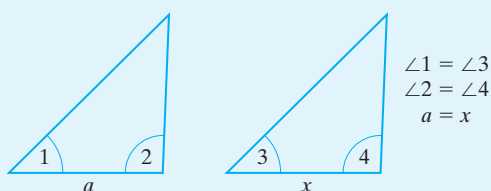
## Figuras congruentes y figuras semejantes

Cuando se conocen dos lados de un *triángulo rectángulo*, podemos determinar el tercer lado mediante el **teorema de Pitágoras**,  $a^2 + b^2 = c^2$ , en el que  $a$  y  $b$  son los catetos y  $c$  la hipotenusa. (Vea algunos ejemplos en la sección 5.7.)

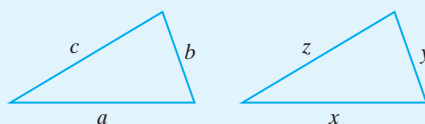
Si dos triángulos son **congruentes**, esto significa que tienen el mismo tamaño y la misma forma. Dos triángulos congruentes se pueden colocar uno encima de otro, si podemos moverlos y reordenarlos.

### Dos triángulos son congruentes si se cumple cualquiera de los siguientes enunciados

1. Dos ángulos de uno de los triángulos son iguales a los dos ángulos correspondientes del otro, y las longitudes de los lados entre cada par de ángulos son iguales. Este método para mostrar que los triángulos son congruentes se llama criterio *ángulo, lado, ángulo (ALA)*.



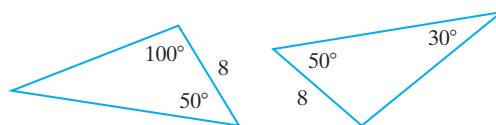
2. Los lados correspondientes de ambos triángulos son iguales. Éste es el criterio *lado, lado, lado (LLL)*.




3. Dos pares correspondientes de lados son iguales, y el ángulo entre ellos es igual. Éste es el criterio *lado, ángulo, lado (LAL)*.



**EJEMPLO 3** Determine si los dos triángulos siguientes son congruentes.

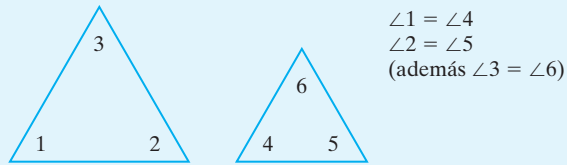


**Solución** El ángulo desconocido en la figura de la derecha mide  $100^\circ$ , pues la suma de los ángulos de un triángulo es  $180^\circ$ . Ambos triángulos tienen los mismos ángulos ( $100^\circ$  y  $50^\circ$ ) y el lado entre ellos mide lo mismo, 8 unidades. Así, los dos triángulos son congruentes por el criterio *ángulo, lado, ángulo (ALA)*. 

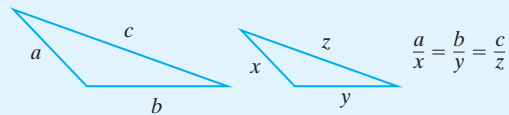
Dos triángulos son **semejantes** si los tres pares de ángulos correspondientes son iguales y los lados correspondientes son proporcionales. Las figuras semejantes no necesariamente tienen el mismo tamaño, pero deben tener la misma forma general (es decir, conservan la misma medida en sus ángulos correspondientes).

**Dos triángulos son semejantes si se cumple cualquiera de los siguientes enunciados.**

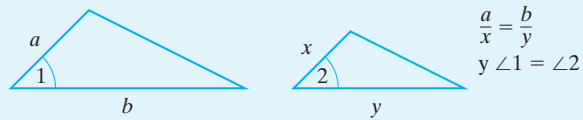
1. Dos ángulos de uno de los triángulos son iguales a dos ángulos del otro.



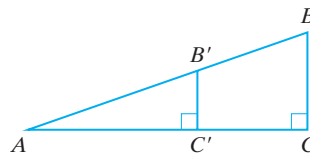
2. Los lados correspondientes de los dos triángulos son proporcionales.



3. Dos pares de lados correspondientes son proporcionales y los ángulos entre ellos son iguales.



**EJEMPLO 4** ¿Son semejantes los triángulos  $ABC$  y  $AB'C'$ ?



**Solución** El ángulo  $A$  es común a ambos triángulos. Como los ángulos  $C$  y  $C'$  son iguales (ambos miden  $90^\circ$ ), entonces los ángulos  $\angle B$  y  $\angle B'$  también deben ser iguales. Como los tres ángulos del triángulo  $ABC$  son iguales a los tres ángulos del triángulo  $AB'C'$ , los dos triángulos son semejantes.

# Respuestas

## CAPÍTULO 1

**Conjunto de ejercicios 1.1** 11. Hacer toda la tarea con cuidado y por completo, y revisar el material nuevo que se va a cubrir en clase. 13. Se recomienda a los estudiantes que dediquen al menos dos horas para estudiar y hacer la tarea por cada hora de clase. 15. **a)** Necesita hacer la tarea en orden para practicar lo que se presentó en clase. **b)** Cada vez que falte, perderá información importante; por tanto, es importante asistir a clase en forma regular. 17. Las respuestas varían.

**Conjunto de ejercicios 1.2** 1. Entender, traducir, calcular, comprobar, asegurarse de responder correctamente. 3. Sustituir los números muy pequeños o muy grandes. 5. Al ordenar los datos. La mediana es el valor que queda en medio. 7. La media. 9. En realidad le faltan 10 puntos para obtener la B. 11. **a)** 76.4 **b)** 74 13. **a)** \$163.37 **b)** \$153.85 15. **a)** 11.593 **b)** 11.68 17. \$470 19. **a)** \$1,169 **b)** \$17,869 21. **a)** \$992 **b)** \$42 23.  $\approx 19,236$  mujeres 25.  $\approx 18.49$  millas por galón 27. \$153 29. **a)** \$5,191.80 **b)** \$9,120.25 31. **a)** 4,106.25 galones **b)**  $\approx \$21.35$  33. \$6.20 35. **a)** \$7,420 **b)** 22 horas 37. En el 3 de la derecha 39. \$183.84 41. **a)** 48 **b)** No puede obtener una C. 43. Las respuestas varían.

**Conjunto de ejercicios 1.3** 1. **a)** Las variables son letras que representan números. **b)**  $x, y$  y  $z$  3.  $5(x), (5)x, (5)(x), 5x, 5 \cdot x$  5. Eliminar por división los factores comunes. 7 **a)** El número más pequeño que sea divisible entre los dos denominadores **b)** Las respuestas varían. 9. El inciso **b)** muestra simplificación 11. El inciso **a)** es incorrecto. 13. **c)** 15. Eliminar por división los factores comunes, después se multiplica los numeradores y también los denominadores 17. Escribir las fracciones con un denominador común, después sumar o restar los numeradores mientras se mantiene el común denominador. 19. Sí, el numerador y el denominador no tienen factores comunes (distintos de 1).

21.  $\frac{1}{4}$  23.  $\frac{2}{3}$  25. 1 27.  $\frac{9}{19}$  29.  $\frac{5}{33}$  31. Simplificado 33.  $\frac{13}{5}$  35.  $\frac{43}{15}$  37.  $\frac{19}{4}$  39.  $\frac{89}{19}$  41.  $1\frac{3}{4}$  43.  $3\frac{3}{4}$  45.  $5\frac{1}{2}$  47.  $4\frac{4}{7}$

49.  $\frac{8}{15}$  51.  $\frac{1}{9}$  53.  $\frac{3}{2}$  o  $1\frac{1}{2}$  55.  $\frac{1}{2}$  57.  $\frac{5}{16}$  59. 6 61.  $\frac{77}{40}$  o  $1\frac{37}{40}$  63.  $\frac{43}{10}$  o  $4\frac{3}{10}$  65. 1 67.  $\frac{1}{3}$  69.  $\frac{9}{17}$  71.  $\frac{6}{5}$  o  $1\frac{1}{5}$  73.  $\frac{1}{9}$

75.  $\frac{7}{24}$  77.  $\frac{13}{36}$  79.  $\frac{13}{45}$  81.  $\frac{47}{15}$  o  $3\frac{2}{15}$  83.  $\frac{65}{12}$  o  $5\frac{5}{12}$  85.  $8\frac{15}{16}$  pulgadas 87.  $\frac{11}{36}$  89.  $\frac{11}{50}$  91.  $7\frac{5}{12}$  toneladas 93. 11 pies,

$11\frac{1}{4}$  pulgadas o  $143\frac{1}{4}$  pulgadas o  $\approx 11.94$  pies 95.  $1\frac{9}{16}$  pulgadas 97.  $1\frac{3}{8}$  tazas 99. 40 veces 101.  $1\frac{1}{2}$  pulgadas 103. 6 tiras

105. **a)** Sí **b)**  $\frac{5}{8}$  pulgadas **c)**  $52\frac{3}{4}$  pulgadas 107. **a)**  $\frac{* + ?}{a}$  **b)**  $\frac{\ominus - \square}{?}$  **c)**  $\frac{\triangle + 4}{\square}$  **d)**  $\frac{x - 2}{3}$  **e)**  $\frac{8}{x}$  109. 270 píldoras

111. Las respuestas varían. 112. 16 113. 15 114. Las variables son letras que se usan para representar números.

**Conjunto de ejercicios 1.4** 1. Un conjunto es una colección de elementos. 3. Las respuestas varían 5. El conjunto de números naturales no contiene al número 0. El conjunto de enteros positivos o 0 sí contienen al número 0. 7

**a)** Un número que puede escribirse como el cociente de dos enteros, con el denominador distinto de 0. **b)** Todo entero puede escribirse con un denominador de 1. **9 a)** Sí **b)** No **c)** No **d)** Sí 11.  $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  13.  $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

15.  $\{\dots, -3, -2, -1\}$  17. Verdadero 19. Verdadero 21. Falso 23. Falso 25. Verdadero 27. Verdadero 29. Falso 31. Falso 33. Verdadero 35. Falso 37. Verdadero 39. Verdadero 41. Verdadero 43. Verdadero 45. Falso 47. Verdadero

49. **a)** 0 **b)**  $0, 2\frac{1}{2}$  **c)**  $0, 2\frac{1}{2}$  51. **a)** 3, 77 **b)** 0, 3, 77 **c)** 0, -2, 3, 77 **d)**  $-\frac{5}{7}, 0, -2, 3, 6\frac{1}{4}, 1.63, 77$  **e)**  $\sqrt{7}, -\sqrt{3}$  **f)**  $-\frac{5}{7},$

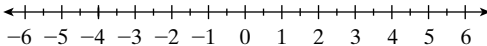
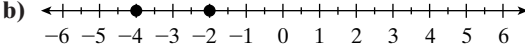
$0, -2, 3, 6\frac{1}{4}, \sqrt{7}, -\sqrt{3}, 1.63, 77$  53. Las respuestas varían; tres ejemplos son 0, 1 y 2 55. Las respuestas varían; tres ejemplos son  $\sqrt{2}, \sqrt{3}$  y  $\sqrt{5}$  57. Las respuestas varían; tres ejemplos son  $-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$  y 6.3 59. Las respuestas varían; tres ejemplos son -13, -5

y -1. 61. Las respuestas varían; tres ejemplos son  $\sqrt{2}, \sqrt{3}$  y  $-\sqrt{5}$ . 63. Las respuestas varían; tres ejemplos son -7, 1 y 5.

65. 87 67. **a)**  $\{1, 3, 4, 5, 8\}$  **b)**  $\{2, 5, 6, 7, 8\}$  **c)**  $\{5, 8\}$  **d)**  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  69. **a)** El conjunto B continúa más allá de 4. **b)** 4 **c)** Un número infinito de elementos **d)** Un conjunto infinito 71. **a)** Un número infinito **b)** Un número infinito

73.  $\frac{27}{5}$  74.  $5\frac{1}{3}$  75.  $\frac{49}{40}$  o  $1\frac{9}{40}$  76.  $\frac{70}{27}$  o  $2\frac{16}{27}$

**Conjunto de ejercicios 1.5**

1. a)  b)  c) Mayor que d)  $-4 < -2$  e)  $-2 > -4$  3. a) Porque el 4 está a 4 unidades a partir del 0, sobre la recta numérica. b) Porque el  $-4$  está a 4 unidades a partir de 0, sobre la recta numérica. c) Porque el 0 está a 0 unidades de 0, sobre la recta numérica. 5. Sí 7. No,  $-3 > -4$  pero  $|-3| < |-4|$ . 9. No,  $|-4| > |-3|$  pero  $-4 < -3$ . 11. 7 13. 15 15. 0 17.  $-5$  19.  $-21$  21.  $>$  23.  $<$  25.  $>$  27.  $<$  29.  $>$  31.  $>$  33.  $<$  35.  $>$  37.  $<$  39.  $>$  41.  $>$  43.  $>$  45.  $>$  47.  $<$  49.  $>$  51.  $<$  53.  $<$  55.  $>$  57.  $>$  59.  $>$  61.  $<$  63.  $<$  65.  $<$  67. = 69. = 71.  $<$  73.  $<$  75.  $-|-8|$ ,  $0.38$ ,  $\frac{4}{9}$ ,  $\frac{3}{5}$ ,  $|-6|$  77.  $\frac{5}{12}$ ,  $0.6$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{19}{25}$ ,  $|-2.6|$  79. 4,  $-4$  81. Las respuestas varían; un ejemplo es  $4\frac{1}{2}$ , 5 y 5.5. 83. Las respuestas varían; un ejemplo es  $-3$ ,  $-4$  y  $-5$ . 85. Las respuestas varían; un ejemplo es 4, 5 y 6. 87. Las respuestas varían; un ejemplo es 3, 4 y 5. 89. a) No incluye los puntos extremos b) Las respuestas varían; un ejemplo es 4.1, 5 y  $5\frac{1}{2}$ . c) No d) Sí e) Verdadero 91. a) Todo el tiempo b) Marzo, 2000 c) Enero-marzo, 1999 d) Marzo de 2000 a mayo de 2001, excepto junio de 2000 93. Mayor que 95. Sí, 0 98.  $\frac{31}{24}$  o  $1\frac{7}{24}$  99.  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$  100.  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$  101. a) 5 b) 5, 0 c) 5,  $-2$ , 0 d) 5,  $-2$ , 0,  $\frac{1}{3}$ ,  $-\frac{5}{9}$ , 2.3 e)  $\sqrt{3}$  f) 5,  $-2$ , 0,  $\frac{1}{3}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $-\frac{5}{9}$ , 2.3

**Conjunto de ejercicios 1.6**

1. Suma, resta, multiplicación y división 3. a) No b)  $\frac{2}{3}$  5. Cualquiera 7. Las respuestas varían. 9 a) Las respuestas varían. b)  $-82$  c) Las respuestas varían. 11. Correcto 13.  $-9$  15. 28 17. 0 19.  $-\frac{5}{3}$  21.  $-2\frac{3}{5}$  23.  $-3.72$  25. 11 27. 1 29.  $-6$  31. 0 33. 0 35.  $-10$  37. 0 39.  $-13$  41. 0 43.  $-6$  45. 9 47.  $-64$  49.  $-51$  51.  $-21$  53. 5 55. 2.3 57.  $-15.1$  59.  $-20$  61.  $-39$  63. 91 65.  $-140$  67.  $-105$  69.  $-38.5$  71.  $-4.6$  73.  $\frac{26}{35}$  75.  $\frac{107}{84}$  77.  $\frac{4}{55}$  79.  $-\frac{26}{45}$  81.  $\frac{3}{10}$  83.  $-\frac{16}{15}$  85.  $-\frac{13}{15}$  87.  $-\frac{5}{72}$  89.  $-\frac{43}{60}$  91.  $-\frac{23}{21}$  93. a) Positivo b) 390 c) Sí 95. a) Negativo b)  $-373$  c) Sí 97. a) Negativo b)  $-452$  c) Sí 99. a) Negativo b)  $-1300$  c) Sí 101. a) Negativo b)  $-112$  c) Sí 103. a) Negativo b)  $-3,880$  c) Sí 105. a) Positivo b) 1111 c) Sí 107. a) Negativo b)  $-2050$  c) Sí 109. Verdadero 111. Verdadero 113. Falso 115. \$277 117. 21 yardas 119. 61 pies 121. 13,796 pies 123. a)  $-\$3,000$  millones b) 1999: \$0.4 mil millones; 2000:  $-\$0.3$  mil millones; 2001:  $-\$3,000$  millones, pérdida neta:  $-2,900$  millones 125.  $-22$  127. 20 129. 0 131.  $\frac{11}{30}$  133. 55 135. 1 136.  $\frac{43}{16}$  o  $2\frac{11}{16}$  137.  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$  138.  $>$  139.  $>$

**Conjunto de ejercicios 1.7**

- 1.2  $-7$  3.  $\square - *$  5. a) Las respuestas varían. b)  $5 + (-14)$  c)  $-9$  7. a)  $a - b$  b)  $7 - 9$  c)  $-2$  9. a)  $3 + 6 - 5$  b) 4 11. Correcto 13. 7 15.  $-1$  17.  $-6$  19.  $-1$  21.  $-8$  23.  $-7$  25. 0 27.  $-4$  29. 2 31. 9 33. 5 35.  $-20$  37. 0 39. 4 41.  $-4$  43.  $-11$  45.  $-27$  47.  $-150$  49.  $-82$  51. 140 53.  $-7.4$  55.  $-3.93$  57.  $-29$  59.  $-16$  61.  $-2$  63. 13 65.  $-11$  67. 6.1 69.  $-\frac{1}{30}$  71.  $\frac{17}{45}$  73.  $-\frac{11}{12}$  75.  $-\frac{5}{12}$  77.  $\frac{1}{4}$  79.  $-\frac{17}{24}$  81.  $\frac{13}{16}$  83.  $-\frac{1}{24}$  85.  $-\frac{13}{63}$  87.  $-\frac{7}{60}$  89. a) Positivo b) 99 c) Sí 91. a) Negativo b)  $-619$  c) Sí 93. a) Positivo b) 1588 c) Sí 95. a) Positivo b) 196 c) Sí 97. a) Negativo b)  $-448$  c) Sí 99. a) Positivo b) 116.1 c) Sí 101. a) Negativo b)  $-69$  c) Sí 103. a) Negativo b)  $-1,670$  c) Sí 105. a) cero b) 0 c) Sí 107. 4 109.  $-6$  111.  $-15$  113.  $-2$  115. 13 117.  $-5$  119.  $-32$  121.  $-4$  123. 9 125.  $-12$  127. 12 129.  $-18$  131. a) 43 b) 143 133. 16 pies por debajo del nivel del mar 135. Cae  $100^\circ\text{F}$  137. a) 276 b) 8 etapas menos c)  $\approx 273.33$  139.  $-5$  141. a) 7 unidades b)  $5 - (-2)$  143. a) 9 pies b)  $-3$  pies 144.  $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  145. El conjunto de números racionales junto con el conjunto de los irracionales forman el conjunto de los números reales. 146.  $>$  147.  $<$  148.  $\frac{17}{40}$

**Conjunto de ejercicios 1.8**

1. Signos iguales: el producto es positivo. Signos distintos: el producto es negativo. 3. Número par de negativos, el producto es positivo, número impar de negativos, el producto es negativo 5.  $-\frac{a}{b}$  o  $\frac{-a}{b}$  7. a) Con  $3 - 5$  se resta, pero con  $3(-5)$  se multiplica. b)  $-2$ ,  $-15$  9. a) Con  $x - y$  se resta, pero con  $x(-y)$  se multiplica. b) 7 c) 10 d)  $-3$  11. Negativo 13. Positivo 15. Negativo 17. 20 19.  $-18$  21.  $-8$  23. 0 25. 42 27.  $-56$  29. 30 31. 0



**R3 • Respuestas**

33. -84 35. -72 37. 140 39. 0 41.  $-\frac{3}{10}$  43.  $\frac{7}{27}$  45. 4 47.  $-\frac{5}{16}$  49. 2 51. 4 53. 4 55. -18 57. 19 59. -10  
 61. -6 63. -9 65. 8 67. 0 69. -3 71. -4 73.  $-\frac{2}{5}$  75.  $\frac{5}{36}$  77. 1 79.  $-\frac{144}{5}$  81. -32 83. -20 85. -14 87. -9  
 89. -20 91. -1 93. 0 95. Indefinido 97. 0 99. Indefinido 101. a) Negativo b) -3496 c) Sí 103. a) Negativo  
 b) -16 c) Sí 105. a) Negativo b) -9 c) Sí 107. a) Positivo b) 6174 c) Sí 109. a) Cero b) 0 c) Sí  
 111. a) Indefinido b) Indefinido c) Sí 113. a) Positivo b) 3.2 c) Sí 115. a) Positivo b) 226.8 c) Sí 117. Falso  
 119. Falso 121. Verdadero 123. Falso 125. Falso 127. Verdadero 129. 60 yardas perdidas, o -60 yardas 131. a) \$150  
 b) -\$300 133. La pérdida total es  $4\frac{1}{2}$  puntos. 135. a)  $\approx 2.075$  b)  $\approx 8.3$  137. a) 102 a 128 latidos por minuto b) Las  
 respuestas varían. 139. -8 141. 1 143. Positivo 146.  $\frac{25}{7}$  o  $3\frac{4}{7}$  147. -2 148. -3 149. 3 150. 5

**Conjunto de ejercicios 1.9**

1. Base; exponente 3. a) 1 b) 1, 3, 2, 1 5. a)  $5x$  b)  $x^5$  7. Paréntesis, exponentes, multiplicación o división, después suma o resta 9. No 11. a) 1 b) 10 c) b 13. a) Las respuestas varían. b) -180 15. a) Las respuestas varían. b) -91 17. 25 19. 1 21. -25 23. 9 25. -1 27. 64 29. 36 31. 4 33. 256  
 35. -16 37.  $\frac{9}{16}$  39.  $-\frac{1}{32}$  41. 225 43. 576 45. a) Positivo b) 343 c) Sí 47. a) Positivo b) 1,296 c) Sí  
 49. a) Negativo b) -243 c) Sí 51. a) Positivo b) 625 c) Sí 53. a) Positivo b) 447.7456 c) Sí 55. a) Negativo  
 b) -0.765625 c) Sí 57. 15 59. 8 61. 13 63. 0 65. 16 67. 29 69. -19 71. -77 73.  $\frac{83}{100}$  75. -2 77. 10 79. 576  
 81.  $\frac{1}{2}$  83. 169 85. 90.74 87. 36.75 89.  $\frac{5}{8}$  91.  $\frac{1}{4}$  93.  $\frac{49}{30}$  95.  $\frac{1}{17}$  97.  $\frac{32}{53}$  99. 9 101. -4 103. a) 9 b) -9 c) 9 105. a) 16  
 b) -16 c) 16 107. a) 36 b) -36 c) 36 109. a)  $\frac{1}{9}$  b)  $-\frac{1}{9}$  c)  $\frac{1}{9}$  111. 4 113. 18 115. 3 117. -1 119. -4  
 121.  $\frac{15}{4}$  123. 994 125. -1 127. -5 129. 9 131. -3 133.  $[(6 \cdot 3) - 4] - 2$ ; 12 135.  $9\{[18 \div 3] + 9\} - 8$ ; 63  
 137.  $(\frac{4}{5} + \frac{3}{7}) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{86}{105}$  139. Todos los números reales 141. \$1.12 143. \$16,050 145. a) .08 b) .16 147. 1.71 pulgadas  
 149.  $12 - (4 - 6) + 10$  155. a) 4 b)

Ocupantes	Número de casas
1	3
2	5
3	4
4	6
5	2

- c) 59 d) 2.95 personas por vivienda 156. \$6.40 157. 144 158.  $\frac{10}{3}$  o  $3\frac{1}{3}$

**Conjunto de ejercicios 1.10**

1. La propiedad conmutativa de la suma dice que la suma de dos números es la misma sin importar el orden en que se sumen;  $3 + 4 = 4 + 3$ . 3. La propiedad asociativa de la suma afirma que la suma de tres números es la misma sin importar la forma en que se agrupe a éstos;  $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$  5. a) Las respuestas varían b) 15 c) 44 7. La propiedad asociativa involucra el cambio de paréntesis y utiliza sólo una operación, mientras que la propiedad distributiva emplea dos operaciones, la multiplicación y suma. 9. 0 11. a) -6 b)  $\frac{1}{6}$   
 13. a) 3 b)  $-\frac{1}{3}$  15. a)  $-x$  b)  $\frac{1}{x}$  17. a) -1.6 b)  $\frac{1}{1.6}$  o 0.625 19. a)  $-\frac{1}{5}$  b) 5 21. a)  $\frac{3}{5}$  b)  $-\frac{5}{3}$  23. Propiedad asociativa de la adición 25. Propiedad distributiva 27. Propiedad conmutativa de la multiplicación 29. Propiedad asociativa de la multiplicación 31. Propiedad distributiva 33. Propiedad identidad de la suma 35. Propiedad inversa de la multiplicación  
 37.  $6 + x$  39.  $(-6 \cdot 4) \cdot 2$  41.  $1 \cdot x + 1 \cdot y$  o  $x + y$  43.  $y \cdot x$  45.  $3y + 4x$  47.  $a + (b + 3)$  49.  $3x + (4 + 6)$   
 51.  $(m + n)3$  53.  $4x + 4y + 12$  55. 0 57.  $\frac{5}{2}n$  59. Sí 61. No 63. No 65. Sí 67. No 69. No 71. El  $(3 + 4)$  se trata como un solo valor. 73. Propiedad conmutativa de la suma 75. No: propiedad asociativa de la suma 77.  $\frac{49}{15}$  o  $3\frac{4}{15}$   
 78.  $\frac{23}{16}$  o  $1\frac{7}{16}$  79. 45 80. -25

**Ejercicios de repaso del capítulo** 1. 80 2. \$551.25 3. Menor que 4. \$30 5. a) 78.4 b) 79  
 6. a) 80 °F b) 79 °F 7. a) \$8.33 b) \$73.20 8. a) 17.1 mil millones de barriles b)  $\approx 12.5$  c) 1,028.8 mil millones de  
 barriles 9.  $\frac{1}{2}$  10.  $\frac{9}{25}$  11.  $\frac{25}{36}$  12.  $\frac{7}{6}$  o  $1\frac{1}{6}$  13.  $\frac{19}{72}$  14.  $\frac{17}{15}$  o  $1\frac{2}{15}$  15.  $\{1, 2, 3, \dots\}$  16.  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$  17.  $\{\dots, -3, -2, -1,$   
 $0, 1, 2, 3, \dots\}$  18. El conjunto de todos los números que se expresan como el cociente de dos enteros, con el denominador  
 distinto de cero 19. a) 3, 426 b) 3, 0, 426 c) 3, -5, -12, 0, 426 d) 3, -5, -12, 0,  $\frac{1}{2}$ , -0.62, 426,  $-3\frac{1}{4}$   
 e)  $\sqrt{7}$  f) 3, -5, -12, 0,  $\frac{1}{2}$ , -0.62,  $\sqrt{7}$ , 426,  $-3\frac{1}{4}$  20. a) 1 b) 1 c) -8, -9 d) -8, -9, 1 e) -2.3, -8, -9,  $1\frac{1}{2}$ , 1,  
 $-\frac{3}{17}$  f) -2.3, -8, -9,  $1\frac{1}{2}$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $-\sqrt{2}$ , 1,  $-\frac{3}{17}$  21. < 22. > 23. < 24. > 25. < 26. > 27. < 28. = 29. -14  
 30. 0 31. -3 32. -6 33. -6 34. 2 35. 8 36. 0 37. 14 38. -5 39. 4 40. -12 41.  $\frac{7}{12}$  42.  $\frac{11}{10}$  43.  $-\frac{7}{36}$  44.  $-\frac{19}{56}$   
 45.  $-\frac{5}{4}$  46.  $-\frac{37}{84}$  47.  $-\frac{7}{90}$  48.  $\frac{7}{12}$  49. 8 50. -4 51. -12 52. -7 53. 6 54. 11 55. -27 56. 40 57. -120 58.  $-\frac{6}{35}$   
 59.  $-\frac{6}{11}$  60.  $\frac{15}{56}$  61. 0 62. 144 63. -5 64. -6 65. -4 66. 0 67. -10 68. 9 69.  $\frac{56}{27}$  70.  $-\frac{35}{9}$  71. 0 72. 0  
 73. Indefinido 74. Indefinido 75. Indefinido 76. 0 77. 25 78. -8 79. 1 80. 3 81. -6 82. 18 83. 6 84. -4 85.  
 10 86. 1 87. 15 88. -4 89. 49 90. 729 91. 81 92. -27 93. -1 94. -32 95.  $\frac{16}{25}$  96.  $\frac{8}{125}$  97. 500 98. 4 99. 12  
 100. 512 101. 23 102. 32 103. 22 104. -17 105. -39 106. -4 107.  $\frac{9}{7}$  108. 0 109. -60 110. 10 111. 20 112. 20  
 113. 14 114. 9 115. -4 116. 50 117. 24 118. 26 119. 45 120. 0 121. -3 122. -11 123. -3 124. 39 125. -215  
 126. 353.6 127. -2.88 128. 117.8 129. 729 130. -74.088 131. Propiedad asociativa de la adición 132. Propiedad  
 conmutativa de la multiplicación 133. Propiedad distributiva 134. Propiedad conmutativa de la multiplicación  
 135. Propiedad conmutativa de la adición 136. Propiedad asociativa de la adición 137. Propiedad identidad de la adición  
 138. Propiedad inversa de la multiplicación

**Examen de práctica del capítulo** 1. a) \$10.65 b) \$0.23 c) \$10.88 d) \$39.12 2. a)  $\approx \$4,400$   
 b)  $\approx \$1,400$  3. a)  $\approx 108.5$  millones b) La mitad estaban por arriba de esta edad y la mitad por debajo 4. a) 42 b) 42, 0  
 c) -6, 42, 0, -7, -1 d) -6, 42,  $-3\frac{1}{2}$ , 0, 6.52,  $\frac{5}{9}$ , -7, -1 e)  $\sqrt{5}$  f) -6, 42,  $-3\frac{1}{2}$ , 0, 6.52,  $\sqrt{5}$ ,  $\frac{5}{9}$ , -7, -1 5. > 6. >  
 7. -15 8. -11 9. -14 10. 8 11. -24 12.  $\frac{16}{63}$  13. -3 14.  $-\frac{53}{56}$  15. 12 16.  $\frac{27}{125}$  17.  $2^2 5^2 y^2 z^3$  18.  $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 x x x y y$   
 19. 72 20. 10 21. 11 22. 1 23. Propiedad conmutativa de la suma 24. Propiedad distributiva 25. Propiedad asociativa  
 de la suma

## CAPÍTULO 2

**Conjunto de ejercicios 2.1** 1. a) Los términos son las partes que se suman. b)  $3x, -4y$  y  $-5$  c)  $6xy,$   
 $3x, -y$  y  $-9$  3. a) Las partes que se multiplican b) Se multiplican juntas. c) Se multiplican juntas. 5. a) Coeficiente  
 numérico, o coeficiente b) 4 c) 1 d) -1 d)  $\frac{3}{5}$  e)  $\frac{4}{7}$  7. a) Los signos de todos los términos dentro de los paréntesis  
 cambian cuando se elimina éstos. b)  $-x + 8$  9.  $8x$  11.  $-x$  13.  $5y + 3$  15.  $3x$  17.  $-6x + 7$  19.  $-5w + 5$  21.  $-2x$   
 23. 0 25.  $-2x + 11$  27.  $-2r - 8$  29.  $-5x + y + 2$  31.  $2x - 3$  33.  $b + \frac{23}{5}$  35.  $0.8n + 6.42$  37.  $\frac{1}{2}a + 3b + 1$   
 39.  $2x^2 + 4x + 8y^2$  41.  $x^2 + y$  43.  $-3x - 5y$  45.  $-3n^2 - 2n + 13$  47.  $21.72x - 7.11$  49.  $-\frac{23}{20}x - 5$   
 51.  $5w^3 + 2w^2 + w + 3$  53.  $-7z^3 - z^2 + 2z$  55.  $6x^2 - 6xy + 3y^2$  57.  $4a^2 + 3ab + b^2$  59.  $5x + 10$  61.  $5x + 20$   
 63.  $-2x + 8$  65.  $-x + 2$  67.  $x - 4$  69.  $\frac{4}{5}s - 4$  71.  $-0.9x - 1.5$  73.  $r - 4$  75.  $1.4x + 0.35$  77.  $x - y$   
 79.  $-2x - 4y + 8$  81.  $3.41x - 5.72y + 3.08$  83.  $6x - 4y + \frac{1}{2}$  85.  $x + 3y - 9$  87.  $3x - 6y - 12$  89.  $2x - 15$   
 91.  $2x + 1$  93.  $14x + 18$  95.  $4x - 2y + 3$  97.  $5c$  99.  $7x + 3$  101.  $x - 9$  103.  $2x - 2$  105.  $-4s - 6$  107.  $2x + 3$

**R5 • Respuestas**

109. 0   111.  $y + 4$    113.  $3x - 5$    115.  $x + 15$    117.  $0.2x - 4y - 2.8$    119.  $-6x + 7y$    121.  $\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$    123.  $2\Box + 3\ominus$   
 125.  $2x + 3y + 2\Delta$    127. 1, 2, 3, 4, 6, 12   129.  $2\Delta + 2\Box$    131.  $22x^2 - 25y^2 - 4x + 3$    133.  $6x^2 + 5y^2 + 3x + 7y$    135. 7  
 136. -16   137. -1   138. Las respuestas varían.   139. -12

**Conjunto de ejercicios 2.2** 1. Una ecuación es un enunciado que plantea que dos expresiones algebraicas son iguales. 3. Se sustituye el valor en la ecuación y luego se determina si resulta un enunciado verdadero. 5. Ecuaciones equivalentes son dos o más ecuaciones que tienen la misma solución. 7. Se suma 4 en ambos lados de la ecuación para obtener la variable. 9. Un ejemplo es  $x + 2 = 1$ . 11. La resta se define en términos de la suma. 13. Sí 15. No 17. Sí 19. Sí 21. No 23. Sí 25. 4 27. -7 29. -9 31. 43 33. 15 35. 11 37. -4 39. -5 41. -13 43. -30 45. 0 47. -1 49. -4 51. -20 53. 0 55. 17 57. -26 59. 28 61. -46.1 63. 46.5 65. -8.23 67. 5.57 69. No, la ecuación es equivalente a  $1 = 2$ , enunciado que es falso. 71.  $x = \Box + \Delta$  73.  $\Box = \ominus - \Delta$  76. 18 77. -8 78.  $2x - 13$  79.  $7t - 19$

**Conjunto de ejercicios 2.3** 1. Las respuestas varían. 3. a)  $x = -a$  b)  $x = -5$  c)  $x = 5$  5. Dividir entre -2 para despejar la variable. 7. Multiplicar ambos lados por 3. 9. 3 11. 8 13. -3 15. -8 17. 5 19. -3 21.  $-\frac{7}{3}$   
 23. 11 25. -10 27. 39 29.  $-\frac{1}{3}$  31. 6 33.  $\frac{26}{43}$  35. 2 37. -1 39.  $-\frac{3}{40}$  41. -60 43. 240 45. -35 47. 20 49. -50  
 51. 0 53. 0 55. 22.5 57. 6 59. -20.2 61.  $-\frac{7}{48}$  63. 9 65. En  $5 + x = 10$  se suma 5 a la variable, mientras que en  $5x = 10$ , el 5 está multiplicado por la variable. b)  $x = 5$  c)  $x = 2$  67. Multiplicar por  $\frac{3}{2}$ ; 6 69. Multiplicar por  $\frac{7}{3}$ ;  $\frac{28}{15}$  71. a)  $\Box$   
 b) Dividir ambos lados de la ecuación entre  $\Delta$ . c)  $\Box = \frac{\ominus}{\Delta}$  73. -4 74. 0 75. 6 76.  $-11x + 38$  77. -57

**Conjunto de ejercicios 2.4** 1. No, hay una  $x$  en ambos lados de la ecuación. 3.  $x = \frac{1}{3}$  5.  $x = -\frac{1}{2}$  7.  $x = \frac{3}{5}$   
 9. Resuelva 11. a) Las respuestas varían. b) Las respuestas varían 13. a) Las respuestas varían b)  $x = -2$  15. 2 17. -4  
 19. 5 21.  $\frac{12}{5}$  23. -6 25. 3 27.  $\frac{11}{3}$  29.  $-\frac{19}{16}$  31. -10 33. 2 35.  $-\frac{51}{5}$  37. 3 39. 6.8 41. 15 43. 12 45. 58 47. 60  
 49. -13 51. -11 53. 0 55.  $\frac{19}{8}$  57. 0 59. 0 61. -1 63. 6 65. -6 67. 3 69. -4 71. 4 73. 5 75. 0.8 77. -1 79.  $\frac{2}{7}$   
 81. -2.6 83.  $-\frac{14}{5}$  85. 23 87.  $-\frac{1}{15}$  89. -2 91.  $-\frac{16}{21}$  93. 10 95.  $-\frac{1}{5}$  97.  $-\frac{23}{3}$  99. 2 101.  $\frac{25}{3}$  103.  $\frac{88}{135}$  105. a) No  
 tendrá que trabajar con fracciones b)  $x = 3$  107.  $\frac{35}{6}$  109. -4 113. 64 114. -47 115. Despejar la variable en un lado de la ecuación. 116. Dividir ambos lados de la ecuación entre -4 para despejar la variable.


**Conjunto de ejercicios 2.5** 1. Las respuestas varían. 3. a) Una identidad es una ecuación que es verdad para un infinito de valores de la variable. b) Todos los números reales 5. Ambos lados de la ecuación son idénticos. 7. Se obtendrá un enunciado falso. 9. a) Las respuestas varían. b)  $x = 21$  11. 3 13. 1 15.  $\frac{3}{5}$  17. 3 19. 2 21. No hay solución 23. 0.1 25. 3.2 27. 3 29.  $-\frac{17}{7}$  31. No hay solución 33.  $\frac{34}{5}$  35.  $\frac{7}{9}$  37. 5 39. 16 41.  $\frac{3}{4}$  43.  $\frac{5}{2}$  45. 25  
 47. Todos los números reales 49. 23 51. 0 53. Todos los números reales 55.  $\frac{21}{20}$  57. 14 59.  $\frac{5}{2}$  61. 2 63.  $-\frac{5}{3}$  65. 0  
 67. 16 69.  $-\frac{12}{5}$  71. 10 73.  $\frac{10}{3}$  75. 30 77. 4 79. a) Un ejemplo es  $x + x + 1 = x + 2$  b) Tiene sólo una solución  
 c)  $x = 1$  81. a) Un ejemplo es  $x + x + 1 = 2x + 1$  b) Ambos lados se simplifican a la misma expresión. c) Todos los números reales 83. a) Un ejemplo es  $x + x + 1 = 2x + 2$  b) Se simplifica a un enunciado falso. c) No hay solución  
 85.  $*$  = 6 87. Todos los números reales 89.  $x = -4$  91. a) 4 b) 7 c) 0 92.  $\approx 0.131687243$  93. Los factores son expresiones que se multiplican; los términos son expresiones que se suman. 94.  $7x - 10$  95.  $\frac{10}{7}$  96. -3


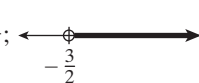

**Conjunto de ejercicios 2.6** 1. Una razón es un cociente de dos cantidades. 3.  $c$  a  $d$ ,  $c : d$ ,  $\frac{c}{d}$  5. Se necesita una razón dada y una de las dos partes de una segunda razón 7. No, sus ángulos correspondientes deben ser iguales pero sus



lados correspondientes sólo necesitan estar en proporción. **9.** Sí **11.** No **13.** 2:3 **15.** 1:2 **17.** 8:1 **19.** 7:4 **21.** 1:3  
**23.** 6:1 **25.** 13:32 **27.** 8:1 **29. a)** 199:140 **b)**  $\approx 1.42:1$  **31. a)** 1.13:0.38 **b)**  $\approx 2.97:1$  **33. a)** 434:174 o 217:87  
**b)** 374:434 o 187:217 **35. a)** 40:32 o 5:4 **b)** 15:11 **37.** 12 **39.** 45 **41.** -100 **43.** -2 **45.** -54 **47.** 6 **49.** 32 pulgadas  
**51.** 15.75 pulgadas **53.** 19.5 pulgadas **55.** 25 cargas **57.** 361.1 millas **59.** 1.5 pies **61.** 24 cucharadas **63.**  $\approx 0.43$  pies  
**65.** 1.25 pulgadas **67.**  $\approx 9.49$  pies **69.** 0.55 milímetros **71.** 23 minutos **73.**  $\approx 339$  niños **75.** 6.5 pies **77.** 2.9 yardas cuadradas  
**79.** 20 pulgadas **81.**  $\approx 23$  **83.** \$0.85 **85.** 4 puntos **87.** Sí, su razón es de 2.12:1. **89.** Debe incrementarse **91.**  $\approx 41.667$  millas  
**93.** 0.625 centímetros cúbicos **97.** Propiedad conmutativa de la suma **98.** Propiedad asociativa de la multiplicación **99.** Propiedad distributiva **100.**  $x = \frac{3}{4}$  **101.** Todos los números reales.

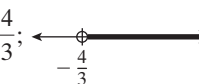
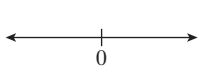

**Conjunto de ejercicios 2.7**

**1.**  $>$ : es mayor que;  $\geq$ : es mayor o igual que;  $<$ : es menor que;  $\leq$ : es menor o igual que **3. a)** Falso **b)** Verdadero **5.** Cuando se multiplica o divide por un número negativo **7.** Todos los números reales **9.** No hay solución

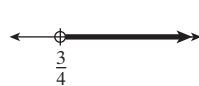
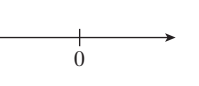
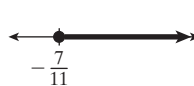
**11.**  $x > 4$ ;  **13.**  $x \geq -3$ ;  **15.**  $x > -5$ ; 


**17.**  $r \leq -6$ ;  **19.**  $x > -\frac{3}{2}$ ;  **21.**  $x \leq 1$ ; 

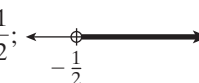
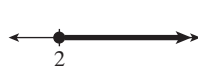

**23.**  $n < 0$ ;  **25.**  $x < \frac{3}{2}$ ;  **27.**  $x > \frac{35}{9}$ ; 

**29.**  $x > -\frac{4}{3}$ ;  **31.** No hay solución  **33.**  $x \geq -6$ ; 

**35.**  $x < 1$ ;  **37.** Todos los números reales  **39.** Todos los números reales 



**41.**  $x > \frac{3}{4}$ ;  **43.** No hay solución  **45.**  $x \geq -\frac{7}{11}$ ; 


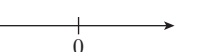
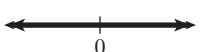
**47.**  $x > 3$ ;  **49.**  $m \geq 2.5$ ;  **51.**  $x \leq 48$ ; 

**53.**  $t > -\frac{1}{2}$ ;  **55.**  $r \geq 2$ ;  **57.**  $t \leq -17$ ; 

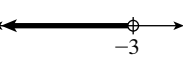
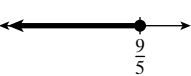
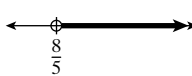
**59. a)** Mayo, septiembre, junio, agosto y julio **b)** Enero, febrero, diciembre, marzo, noviembre y abril **c)** Enero, febrero y diciembre **d)** Junio, agosto y julio **61.**  $\neq$  **63.** No se sabe que  $y$  es positiva. Si  $y$  es negativa, debe cambiarse el signo de la desigualdad. **65.**  $x > 4$  **66.** -9 **67.** -25 **68.**  $\frac{14}{5}$  **69.** 500 kilowatt-hora

**Ejercicios de repaso del capítulo**

- 1.**  $3x + 12$  **2.**  $3x - 6$  **3.**  $-2x - 8$  **4.**  $-x - 2$  **5.**  $-m - 3$   
**6.**  $-16 + 4x$  **7.**  $25 - 5p$  **8.**  $24x - 30$  **9.**  $-25x + 25$  **10.**  $-4x + 12$  **11.**  $x + 2$  **12.**  $-3 - 2y$  **13.**  $-x - 2y + z$   
**14.**  $-6a + 15b - 21$  **15.**  $4x$  **16.**  $-3y + 8$  **17.**  $5x + 1$  **18.**  $-3x + 3y$  **19.**  $8m + 8n$  **20.**  $9x + 3y + 2$   
**21.**  $4x + 3y + 6$  **22.** 3 **23.**  $-12x^2 + 3$  **24.** 0 **25.**  $5x + 7$  **26.**  $-10b + 12$  **27.** 0 **28.**  $4x - 4$  **29.**  $22x - 42$   
**30.**  $6x^2 - 3x + y$  **31.**  $-\frac{7}{20}d + 7$  **32.** 3 **33.**  $\frac{1}{6}x + 2$  **34.**  $-\frac{7}{12}n$  **35.** 1 **36.** -13 **37.** 11 **38.** -27 **39.** 2 **40.**  $\frac{11}{2}$   
**41.** -6 **42.** -3 **43.** 12 **44.** 4 **45.** 2 **46.** -3 **47.**  $\frac{3}{2}$  **48.** -3 **49.**  $-\frac{1}{2}$  **50.** -1 **51.** 0 **52.**  $\frac{1}{5}$  **53.** 2 **54.** -5 **55.** -35.5  
**56.** 0.6 **57.**  $-\frac{21}{4}$  **58.**  $\frac{78}{7}$  **59.**  $-\frac{3}{2}$  **60.**  $-\frac{6}{11}$  **61.** 3 **62.**  $\frac{10}{7}$  **63.** 0 **64.** -1 **65.** No hay solución **66.** 10 **67.** Todos los números reales **68.** -4 **69.** No hay solución **70.** Todos los números reales **71.**  $\frac{17}{3}$  **72.**  $-\frac{20}{7}$  **73.** No hay solución  
**74.** 6 **75.** 52 **76.** 32 **77.** 7 **78.** -18 **79.** 3:5 **80.** 5:12 **81.** 1:1 **82.** 2 **83.** 20 **84.** 9 **85.**  $\frac{135}{4}$  **86.** -10 **87.** -16  
**88.** 36 **89.** 90 **90.** 40 pulgadas **91.** 1 pie **92.**  $x \geq 2$ ;  **93.**  $a < 1$ ; 

**94.**  $r \geq -2$ ;  **95.** No hay solución  **96.** Todos los números reales 

**R7 • Respuestas**



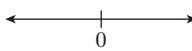
97.  $x < -3$ ;  98.  $x \leq \frac{9}{5}$ ;  99.  $x > \frac{8}{5}$ ; 

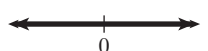
100.  $x > -12$ ;  101.  $t \geq -3$ ;  102. 6.3 horas 103. 240 calorías 104. 440 páginas

105.  $6\frac{1}{3}$  pulgadas 106. 15.75 pies 107.  $\approx \$0.109$  108. 192 botellas

**Examen de práctica del capítulo** 1.  $6x - 12$  2.  $-x - 3y + 4$  3.  $-3x + 4$  4.  $-x + 10$

5.  $-5x - y - 6$  6.  $7a - 8b - 3$  7.  $2x^2 + 6x - 1$  8.  $x = 3$  9.  $x = 8$  10.  $x = \frac{1}{2}$  11.  $x = 0$  12.  $x = -\frac{1}{7}$  13. No hay solución 14. Todos los números reales 15.  $x = -45$  16.  $x = 0$  17. a) Ecuación condicional b) Contradicción

c) Identidad 18.  $x > -7$ ;  19.  $x \leq 12$ ;  20. No hay solución 

21. Todos los números reales  22.  $x = \frac{32}{3}$  pies o  $10\frac{2}{3}$  pies 23. 150 galones 24. 50,000 galones

25. 175 minutos o 2 horas 55 minutos

**CAPÍTULO 3**

**Conjunto de ejercicios 3.1**

1. Una fórmula es una ecuación que expresa una relación en forma matemática

3.  $i = prt$ ;  $i$  es la cantidad de interés que se gana o paga,  $p$  es la cantidad que se invierte o presta,  $r$  es la tasa en forma decimal, y  $t$  es el lapso durante el que se invierte. 5. El diámetro de un círculo es 2 veces su radio. 7. Cuando se multiplica una unidad por la misma unidad, se obtiene una unidad cuadrada. 9. 24 11. 49 13. 26 15. 78.54 17. 2 19. 15 21. 56 23. 59

25. 6.00 27. 127.03 29. 179.2 31. 12 pulgadas cuadradas 33.  $\approx 452.39$  centímetros cúbicos 35. 16.5 pies cuadrados

37.  $s = \frac{P}{4}$  39.  $t = \frac{d}{r}$  41.  $l = \frac{V}{ah}$  43.  $b = \frac{2A}{h}$  45.  $a = \frac{P - 2l}{2}$  47.  $t = \frac{-m + 5}{2}$  49.  $b = y - mx$  51.  $x = \frac{y - b}{m}$

53.  $y = \frac{-ax + c}{b}$  55.  $h = \frac{V}{\pi r^2}$  57.  $m = 2A - d$  59.  $a = \frac{2R - I}{3}$  61. a)  $y = -3x + 5$  b)  $-1$  63. a)  $y = \frac{2x + 4}{3}$

b) 8 65. a)  $y = \frac{3x - 12}{5}$  b) 0 67. a)  $y = \frac{3x - 10}{5}$  b)  $\frac{2}{5}$  69. a)  $y = \frac{x - 5}{2}$  b)  $-\frac{5}{2}$  71. a)  $y = \frac{-x + 8}{2}$

b) 6 73. a)  $y = \frac{-x - 5}{3}$  b)  $-\frac{11}{3}$  75. a)  $y = \frac{30x + 13}{15}$  b)  $\frac{133}{15}$  77. 35 79.  $C = 10^\circ$  81.  $F = 77^\circ$  83.  $P = 40$

85.  $K = 4$  87. El área es 4 veces el largo. 89. 42 91. \$1440 93. \$5000 95. 25 pies 97. 558 pulgadas cuadradas 99.  $\approx 7.07$  pies cuadrados 101. 3 pies cuadrados 103.  $\approx 150.80$  pies cúbicos 105. 14,000 pies cuadrados 107.  $\approx 11.78$  pulgadas cúbicas

109. a)  $B = \frac{703a}{h^2}$  b)  $\approx 23.91$  111. a)  $V = 18x^3 - 3x^2$  b) 6,027 centímetros cúbicos c)  $S = 54x^2 - 8x$  d) 2,590

centímetros cúbicos 113. 0 114. 3:2 115.  $\frac{3}{25} = \frac{x}{13,500}$ ; 1620 minutos o 27 horas 116.  $x \leq -17$

**Conjunto de ejercicios 3.2**

1. Sumado a, más de, incrementado en, y sumar, indican adición. 3. Multiplicado por; producto de; y tres veces, indican multiplicación. 5. El costo se incrementa en 25% del costo, por lo que la expresión debe ser  $c + 0.25c$ . 7.  $n + 7$  9.  $4x$  11.  $\frac{x}{2}$  13.  $h + 0.8$  15.  $p - 0.08p$  17.  $\frac{1}{10}n - 5$  19.  $\frac{8}{9}m + 16,000$

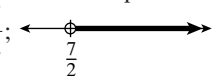
21.  $45 + 0.40x$  23.  $25x$  25.  $16x + y$  27.  $n + 0.04n$  29.  $p - 0.02p$  31.  $220 + 80x$  33.  $275x + 25y$  35. Tres unidades menos que un número 37. Una unidad más que el cuádruplo de un número 39. Siete menos que 6 veces el número

41. Cuatro veces un número; disminuido en 2 43. Tres veces un número, restado de 2 45. Dos veces la diferencia entre un número y 1 47.  $s + 5$  49.  $b - 6$  51.  $600 - a$  53.  $100 - m$  55.  $\frac{2}{3}m - 6$  57.  $2r - 673$  59.  $2p - 2.7$  61.  $3n - 15$

63.  $2n - 67,109$  65.  $s + 0.20s$  67.  $s + 0.15s$  69.  $f - 0.12f$  71.  $c + 0.07c$  73.  $p - 0.50p$  75.  $x + 4x = 20$

77.  $x + (x + 1) = 41$  79.  $2x - 8 = 12$  81.  $\frac{1}{5}(x + 10) = 150$  83.  $s + (2s - 4) = 890$  85.  $c + 0.07c = 32,600$

87.  $c + 0.15c = 42.50$  89.  $1.28f - f = 16,762$  91.  $s + (s + 0.55) = 2.45$  93. Dos más que un número es 5. 95. Tres veces un número, disminuido en 1, es 4 más que el doble del número. 97. Cuatro veces la diferencia entre un número y 1 es 6. 99. Seis más que 5 veces un número es la diferencia entre 6 veces el número y 1. 101. La suma de un número y el número incrementado en 4 es 8. 103. La suma del doble de un número y el número incrementado en 3 es 5. 105. Las respuestas

varían. 107. a)  $86,400d + 3600h + 60m + s$  b) 368,125 segundos 111. 4 112. 2.52 113.  $x > \frac{7}{2}$ ; 

114. 15 115.  $y = \frac{3x - 6}{2}$  o  $y = \frac{3}{2}x - 3$ ; 6

### Conjunto de ejercicios 3.3

1. Entender, traducir, calcular, comprobar, responder 3. 42, 43 5. 51, 53 7. 8, 19 9. 25, 42 11. 73.6 años 13. 2, 180 15. 65 17. 22.2 horas 19.  $\approx 62.7$  semanas 21. 11.75 años 23.  $\approx 13.3$  semanas 25. 140 millas 27. 18,100 copias 29. 90 minutos por arriba de los 500 minutos 31. 2 años 33. 6 años 35. 5,000 páginas 37.  $\approx 28.6$  meses 39. \$62,000 41. \$261.68 43. \$23,230.77 45.  $\approx 2,682.93$  pies cuadrados 47. \$25,000 49. \$39,387.76 51. \$6,000 53. \$7,500 55. \$50,000 57. \$300 59. \$77,777.78 61. a)  $\frac{74 + 88 + 76 + x}{4} = 80$  b) 82 63. a) 0.75 años, o 9 meses b) \$375 65.  $\frac{17}{12}$  66. Propiedad asociativa de la adición 67. Propiedad conmutativa de la multiplicación 68. Propiedad distributiva 69. 56 libras 70.  $b = \frac{2A}{h}$

### Conjunto de ejercicios 3.4

1. El área permanece sin cambio. 3. El volumen es ocho veces mayor. 5. El área es nueve veces mayor. 7. Un triángulo isósceles es un triángulo con dos lados iguales 9.  $180^\circ$  11.  $46^\circ, 46^\circ, 88^\circ$  13. 9.5 pulgadas 15.  $A = 67^\circ, B = 23^\circ$  17.  $A = 47^\circ, B = 133^\circ$  19.  $88^\circ$  21.  $50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$  23. El largo es de 16 pies, el ancho es de 8 pies. 25. El largo es de 78 pies, el ancho es de 36 pies. 27. Los ángulos pequeños miden  $50^\circ$ ; los ángulos mayores miden  $130^\circ$  29.  $63^\circ, 73^\circ, 140^\circ, 84^\circ$  31. El ancho es de 4 pies; la altura es de 7 pies 33. El ancho es de 2.5 pies; la altura es de 5 pies 35. El ancho es de 10 pies; el largo es de 14 pies 37.  $ac + ad + bc + bd$  39.  $<$  40.  $>$  41.  $-8$  42.  $-2x - 4y + 6$  43.  $y = \frac{-2x + 9}{3}$  o  $y = -\frac{2}{3}x + 3$ ; 1

### Conjunto de ejercicios 3.5

1. 50 mph 3. 2.4 centímetros 5. 14 horas 7. 250 centímetros cúbicos por hora 9. 1,320 segundos o 22 minutos 11.  $\approx 189.75$  mph 13. 2.4 horas 15. 70 mph 17. 5 minutos 19. 35 mph, 40 mph 21. a) 2.4 millas b) 112.0 millas c) 26.2 millas d) 140.6 millas e) 9.45 horas 23. *Apollo*: 5 mph; *Pitágoras*: 9 mph 25. a) 1.25 horas b) 43.75 millas 27. a) 2 segundos b) 100 pies 29. 1.5 horas 31. 570 mph; 600 mph 33. Puente: 1.25 pies por día; carretera: 2.45 pies por día 35. \$2,400 a 5%; \$7,000 a 7% 37. \$2,400 a 6%; \$3,600 a 4% 39. \$2,000 a 4%; \$8,000 a 5% 41. Noviembre 43. 8 horas en Home Depot; 10 horas en una clínica veterinaria 45. 80 de los sistemas de \$1,550 47. a) 32 acciones de GE; 160 acciones de PepsiCo b) \$32 49. 2.86 libras de Family, 7.14 libras de Spot Filler 51. 300 galones de regular, 200 galones de premium plus 53. \$2.74 por libra 55.  $\approx 11.1\%$  57.  $1\frac{2}{3}$  litros 59. 4 onzas 61. 3.25% 63. 6,250 galones 65. 0.5 galones 67.  $\approx 5.74$  horas 71. a)  $\frac{22}{13}$  o  $1\frac{9}{13}$  b)  $\frac{35}{8}$  o  $4\frac{3}{8}$  72. Todos los números reales 73.  $\frac{3}{4}$  o 0.75 74.  $x \leq \frac{1}{4}$

### Ejercicios de repaso

1. 37.70 2. 18 3. 48 4. 25 5. 21 6. 5000 7. a)  $y = x - 2$  b) 8 8. a)  $y = -2x - 3$  b)  $-27$  9. a)  $y = \frac{5}{2}x - 8$  b)  $-3$  10. a)  $y = \frac{2}{3}x - 4$  b)  $-8$  11.  $a = \frac{A}{l}$  12.  $h = \frac{2A}{b}$  13.  $t = \frac{i}{pr}$  14.  $a = \frac{P - 2l}{2}$  15.  $h = \frac{V}{\pi r^2}$  16.  $h = \frac{3V}{B}$  17. \$108 18. 6 pulgadas 19. La suma de un número y el número incrementado en 5 es 9. 20. La suma de un número y el doble del número disminuido en 1 es 10. 21. 33 y 41 22. 118 y 119 23. 38 y 7 24. \$21,738.32 25. 19 meses 26. \$2,000 27. \$650 28.  $\approx 4.76$  meses 29.  $45^\circ, 55^\circ, 80^\circ$  30.  $30^\circ, 40^\circ, 150^\circ, 140^\circ$  31. Ancho: 15.5 pies; largo: 19.5 pies 32. Ancho: 50 pies; largo: 80 pies 33. 30 galones por hora 34. 6.5 mph 35. 2 horas 36. 4 horas 37.  $\approx 8.8$  pies por segundo 38. \$4,000 a 8%; \$8,000 a  $7\frac{1}{4}\%$  39. \$700 a 3%; \$3300 a 3.5% 40.  $\approx 0.67$  galones 41. 9 campanas pequeñas y 21 grandes 42. 1.2 litros de 10%; 0.8 litros de 5% 43. 103 y 105 44. \$450 45. \$12,000 46.  $42^\circ, 50^\circ, 88^\circ$  47. 8 años 48.  $70^\circ, 70^\circ, 110^\circ, 110^\circ$  49. 500 copias 50. a) 10 minutos b) 600 pies 51. 60 libras de \$3.50; 20 libras de \$4.10 52. Hermano mayor: 55 mph; hermano menor: 60 mph 53. 0.4 litros

**Examen de práctica** 1. 9% 2. 18 pies 3. 145 4. 85 5.  $\approx 7.96$  6. a)  $y = \frac{4}{3}x - 3$  b) 13 7.  $R = \frac{P}{I}$

8.  $a = 3A - b$  9. 28 pies cuadrados 10.  $\approx 3,106.86$  pies cuadrados 11.  $500 - n$  12.  $2f + 6000$  13. La suma de un número y el número incrementado en 4 es igual a 9. 14. 56 y 102 15. 21 y 22 16. \$2,500 17. \$32.79 18. Peter: \$40,000; Julie \$80,000 19. 6 veces 20.  $\approx 33.3$  meses 21. 15 pulgadas, 30 pulgadas y 30 pulgadas 22. El ancho es de 6 pies, el largo es de 8 pies 23. Harlene 0.3 pies por minuto; Ellis 0.5 pies por minuto 24. Jelly Belly:  $\approx 1.91$  libras; Kits:  $\approx 1.09$  libras 25. 20 litros

## CAPÍTULO 4

**Conjunto de ejercicios 4.1** 1. En la expresión  $c^r$ ,  $c$  es la base,  $r$  es el exponente. 3. a)  $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ ,  $x \neq 0$

b) Las respuestas varían. 5. a)  $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$  b) Las respuestas varían. 7.  $x^0 \neq 1$  cuando  $x = 0$  9.  $x^9$  11.  $z^5$

13.  $3^5 = 243$  15.  $y^5$  17.  $z^8$  19.  $y^7$  21. 6 23.  $x^7$  25.  $3^3 = 27$  27.  $\frac{1}{y^2}$  29. 1 31.  $\frac{1}{a^4}$  33. 1 35. 3 37. 4 39. -3

41.  $5x^3y$  43.  $-5r$  45.  $x^8$  47.  $x^{25}$  49.  $x^3$  51.  $x^{12}$  53.  $n^{18}$  55.  $1.69x^2$  57.  $-27x^9$  59.  $27a^6b^{12}$  61.  $\frac{x^2}{9}$  63.  $\frac{y^4}{x^4}$  65.  $\frac{216}{x^3}$

67.  $\frac{27x^3}{y^3}$  69.  $\frac{16p^2}{25}$  71.  $\frac{16y^{12}}{x^4}$  73.  $\frac{x^5}{y^2}$  75.  $\frac{5x^2}{y^2}$  77.  $\frac{1}{9a^2b^3}$  79.  $\frac{7}{3x^5y^3}$  81.  $-\frac{3y^2}{x^3}$  83.  $-\frac{2}{x^3y^2z^5}$  85.  $\frac{8}{x^6}$  87.  $27y^9$  89. 1

91.  $\frac{x^4}{y^4}$  93.  $\frac{z^{24}}{16y^{28}}$  95.  $64x^3y^{12}$  97.  $25x^2y^8$  99.  $3ab^4$  101.  $-6x^2y^2$  103.  $15x^3y^6$  105.  $-9p^6q^3$  107.  $25r^6s^4$  109.  $x^2$  111.  $x^{12}$

113.  $6.25x^6$  115.  $\frac{x^6}{y^4}$  117.  $-\frac{m^{12}}{n^9}$  119.  $-216x^9y^6$  121.  $-8x^{12}y^6z^3$  123.  $729r^{12}s^{15}$  125.  $108x^5y^7$  127.  $53.29x^4y^8$  129.  $x^{11}y^{13}$

131.  $x^8z^8$  133. No se puede simplificar 135. No es posible simplificarla 137.  $6z^2$  139. No puede simplificarse 141. 32

143. 1 145. El signo será negativo porque un número negativo elevado a un exponente impar será negativo. Esto debido a

que  $(-1)^m = -1$  cuando  $m$  es impar. 147.  $7x^2$  149.  $3x^2 + 4xy$  151.  $\frac{9x^2}{8y^3}$  154. 13 155.  $x + 10$  156. Todos los números

reales 157. 4 pulgadas, 4 pulgadas, 9 pulgadas, 9 pulgadas b)  $a = \frac{P - 2I}{2}$

**Conjunto de ejercicios 4.2** 1. Las respuestas varían. 3. No, no se simplifica debido al exponente negativo;  $\frac{x^5}{y^3}$

5. La simplificación dada no es correcta porque  $(y^4)^{-3} = \frac{1}{y^{12}}$ . 7. a) El numerador tiene un término,  $x^5y^2$ . b) Los factores

del numerador son  $x^5$  y  $y^2$ . 9. El signo del exponente cambia cuando un factor del numerador pasa al denominador de una

fracción. 11.  $\frac{1}{x^6}$  13.  $\frac{1}{5}$  15.  $x^3$  17.  $x$  19. 36 21.  $\frac{1}{x^6}$  23.  $\frac{1}{y^{20}}$  25.  $\frac{1}{x^8}$  27. 64 29.  $y^2$  31.  $x^2$  33. 9

35.  $\frac{1}{r}$  37.  $p^3$  39.  $\frac{1}{x^4}$  41. 27 43.  $\frac{1}{27}$  45.  $z^9$  47.  $p^{24}$  49.  $y^6$  51.  $\frac{1}{x^4}$  53.  $\frac{1}{x^{15}}$  55.  $-\frac{1}{16}$  57.  $-\frac{1}{16}$  59.  $-\frac{1}{64}$  61.  $\frac{1}{36}$

63.  $\frac{1}{x^{10}}$  65.  $n^2$  67. 1 69. 1 71. 64 73.  $x^8$  75. 1 77.  $\frac{1}{4}$  79.  $\frac{1}{36}$  81.  $x^3$  83.  $\frac{1}{16}$  85. 125 87.  $\frac{1}{9}$  89. 1 91.  $\frac{1}{36x^4}$

93.  $\frac{3y^2}{x^2}$  95. 4 97.  $\frac{64}{125}$  99.  $\frac{y^2}{x^4}$  101.  $-\frac{s^4}{r^{16}}$  103.  $\frac{7}{a^3b^4}$  105.  $\frac{y^9}{x^{15}}$  107.  $\frac{20}{y^5}$  109. -8 111.  $12x^5$  113.  $\frac{20z^5}{y}$  115.  $3c^5$

117.  $\frac{4}{x^2}$  119.  $\frac{x^4}{2y^5}$  121.  $\frac{8x^6}{y^2}$  123.  $\frac{y^{12}z^4}{16x^8}$  125.  $\frac{r^{20}t^{48}}{16s^{36}}$  127.  $\frac{y^{12}}{x^{18}z^6}$  129.  $\frac{1}{27a^6b^6}$  131. a) Sí b) No 133.  $16\frac{1}{16}$  135.  $4\frac{1}{4}$

137.  $\frac{2}{3}$  139.  $\frac{11}{6}$  141.  $\frac{1}{6}$  143.  $\frac{22}{9}$  145. -2 147. -2 149. -2 151. -3 153. La regla del producto es  $(xy)^m = x^m y^m$ ,

no  $(x + y)^m = x^m + y^m$  155. 5 millas 156.  $\approx 942.48$  pulgadas cúbicas 157. 9, 28 158. \$125 159. 37, 38

**Conjunto de ejercicios 4.3** 1. Un número en notación científica se escribe como un número mayor o igual a 1 y menor que 10, multiplicado por alguna potencia de 10. 3. a) Las respuestas varían. b)  $5.68 \times 10^{-3}$  5. 5 lugares a la izquierda 7. El exponente es negativo cuando el número es menor que 1. 9. Negativo porque  $0.00734 < 1$ .

11.  $1.0 \times 10^{-6}$  13.  $3.5 \times 10^5$  15.  $4.5 \times 10^2$  17.  $5.3 \times 10^{-2}$  19.  $1.9 \times 10^4$  21.  $1.86 \times 10^{-6}$  23.  $9.14 \times 10^{-6}$



25.  $2.203 \times 10^5$  27.  $5.104 \times 10^{-3}$  29. 43,000 31. 0.00543 33. 0.0000213 35. 625,000 37. 9,000,000 39. 535  
 41. 0.0006201 43. 10,000 45. 0.000008 metros 47. 125,000,000,000 watts 49. 15,300 metros 51. 0.000015 gramos  
 53. 60,000,000 55. 0.243 57. 0.02262 59. 4,200 61. 2,500 63. 0.0005 65.  $4.2 \times 10^{12}$  67.  $1.28 \times 10^{-1}$  69.  $3.0 \times 10^2$   
 71.  $1.75 \times 10^2$  73.  $8.3 \times 10^{-4}$ ,  $3.2 \times 10^{-1}$ , 4.6,  $4.8 \times 10^5$  75. a)  $\approx 5,919,000,000$  b)  $\approx 22.1$  77. 8,640,000,000 pies cúbicos  
 79.  $1.6 \times 10^7$  segundos 81. a)  $1.8 \times 10^{10}$  b)  $3.332 \times 10^6$  o 3,332,000 millas 83. a) \$82,700 b)  $\approx 4.71$  85. 500 segundos  
 o  $\approx 8.33$  minutos 87.  $1.232 \times 10^{10}$  89. a)  $2.7 \times 10^7$  b) 2,275,240 91. a) 24 b)  $\approx 5.017 \times 10^{22}$  93. Las respuestas  
 varían 95. 1,000,000 98. 0 99. a)  $\frac{3}{2}$  b) 0 100. 2 101.  $-\frac{y^{12}}{64x^9}$

**Conjunto de ejercicios 4.4** 1. Un polinomio es una expresión que contiene la suma de un número finito de términos de la forma  $ax^n$ , donde  $a$  es un número real y  $n$  es un número entero. 3. a) El exponente de una variable es el grado del término. b) El grado del polinomio es el mismo que el grado del término de mayor grado del polinomio. 5. Sumar los exponentes de las variables 7.  $(3x + 2) - (4x - 6) = 3x + 2 - 4x + 6$  9. Debido a que el exponente de la variable en un término constante es igual a 0. 11. a) Las respuestas varían. b)  $4x^3 + 0x^2 + 5x - 7$  13. No, contiene un exponente fraccionario. 15. Quinto 17. Cuarto 19. Séptimo 21. Tercero 23. Décimo 25. Duodécimo 27. Binomio 29. Monomio 31. Binomio 33. Monomio 35. No es un polinomio 37. Polinomio 39. Trinomio 41. Polinomio 43.  $5x + 4$ , primero 45.  $x^2 - 2x - 4$ , segundo 47.  $3x^2 + x - 8$ , segundo 49. Ya está en orden descendente, primero 51. Ya está en orden descendente, segundo 53.  $4x^3 - 3x^2 + x - 4$ , tercero 55.  $-2x^4 + 3x^2 + 5x - 6$ , cuarto 57.  $6x - 1$   
 59.  $-2x + 11$  61.  $-2t - 1$  63.  $x^2 + 6.6x + 0.8$  65.  $5m^2 + 4$  67.  $x^2 + 3x - 3$  69.  $-3x^2 + x + \frac{17}{2}$   
 71.  $5.4x^2 - 5x + 1.7$  73.  $-2x^3 - 3x^2 + 4x - 3$  75.  $7x^2 - xy - 4$  77.  $5x^2y - 3x + 2$  79.  $7x - 1$  81.  $7y^2 - 2y + 5$   
 83.  $4x^2 + 2x - 4$  85.  $2x^3 - x^2 + 6x - 2$  87.  $3n^3 - 11n^2 - n + 2$  89.  $2x - 6$  91.  $3x + 4$  93.  $-3r$   
 95.  $6x^2 + 7x - 8.5$  97.  $8x^2 + x + 4$  99.  $-9m^2 + 5m - 6$  101.  $8x^3 - 7x^2 - 4x - 3$  103.  $2x^3 - \frac{23}{5}x^2 + 2x - 2$   
 105.  $x - 2$  107.  $2x^2 - 9x + 14$  109.  $-x^3 + 11x^2 + 9x - 7$  111.  $3x + 8$  113.  $-3d + 12$  115.  $x^2 - 3x - 3$   
 117.  $5m^2 - 5m - 6$  119.  $4x^3 - 7x^2 + x - 2$  121. Las respuestas varían. 123. Las respuestas varían. 125. A veces  
 127. En ocasiones 129. Las respuestas varían, un ejemplo es  $x^5 + x^4 + x$  131. No, los tres términos tendrían que ser de grado 5 o 0. Por tanto, al menos dos de los términos podrían combinarse. 133.  $a^2 + 2ab + b^2$  135.  $x^2 + xz + yz$   
 137.  $-12x + 18$  139.  $8x^2 + 28x - 24$  141.  $>$  142. Verdadero 143. Verdadero 144. Falso 145. Falso 146.  $\frac{y^3}{27x^{12}}$

**Conjunto de ejercicios 4.5** 1. La propiedad distributiva se utiliza para multiplicar un monomio por un polinomio. 3. Primero, Exterior, Interior, Último 5. Sí 7.  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ;  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  9. No,  $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$  11. Las respuestas varían 13. Las respuestas varían. 15.  $2x^4y$  17.  $20x^5y^6$  19.  $-28x^6y^{15}$   
 21.  $54x^6y^{14}$  23.  $3x^6y$  25.  $5.94x^8y^3$  27.  $5x + 20$  29.  $-6x^2 + 6x$  31.  $-16y - 10$  33.  $-2x^3 + 4x^2 - 10x$   
 35.  $-20x^3 + 30x^2 - 20x$  37.  $0.5x^5 - 3x^4 - 0.5x^2$  39.  $0.6x^2y + 1.5x^2 - 1.8xy$  41.  $x^2y^4 - 4y^7 - 3y^4$  43.  $x^2 + 7x + 12$   
 45.  $6x^2 + 3x - 30$  47.  $4x^2 - 16$  49.  $-6x^2 - 8x + 30$  51.  $-12x^2 + 32x - 5$  53.  $4x^2 - 10x + 4$  55.  $12k^2 - 30k + 12$   
 57.  $x^2 - 4$  59.  $4x^2 - 12x + 9$  61.  $-6z^2 + 46z - 28$  63.  $-4x^2 + 2x + 12$  65.  $x^2 - y^2$  67.  $6x^2 - 5xy - 6y^2$   
 69.  $6x^2 + 2xy + 6x + 2y$  71.  $x^2 + 0.9x + 0.18$  73.  $xy - 2x - 2y + 4$  75.  $x^2 - 36$  77.  $9x^2 - 9$  79.  $x^2 + 2xy + y^2$   
 81.  $x^2 - 0.4x + 0.04$  83.  $16x^2 + 40x + 25$  85.  $0.16x^2 + 0.8xy + y^2$  87.  $25a^2 - 49b^2$  89.  $4x^2 - 36$   
 91.  $49a^2 + 28a + 4$  93.  $3x^3 + 16x^2 + 15x - 4$  95.  $12x^3 + 5x^2 + 13x + 10$  97.  $-14x^3 - 22x^2 + 19x - 3$   
 99.  $-6a^3 - 2a^2 + 29a - 15$  101.  $6x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 10x + 4$  103.  $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 6x$  105.  $a^3 + b^3$   
 107.  $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$  109.  $27a^3 - 135a^2 + 225a - 125$  111. No, siempre será un binomio. 113. No 115. 6, 3, 1  
 117. a)  $(x + 2)(2x + 1)$  o  $2x^2 + 5x + 2$  b) 54 pies cuadrados c) 1 pie 119. a)  $a + b$  b)  $a + b$  c) Sí d)  $(a + b)^2$   
 e)  $a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$  f)  $a^2 + 2ab + b^2$  121.  $6x^6 - 18x^5 + 3x^4 + 35x^3 - 54x^2 + 38x - 12$   
 123. Todos los números reales 124. 13 millas 125.  $\frac{x^4}{16y^8}$  126. a)  $-216$  b)  $\frac{1}{216}$  127.  $-5x^2 - 2x + 8$

**Conjunto de ejercicios 4.6** 1. Para dividir un polinomio entre un monomio, se divide cada término del polinomio entre el monomio. 3.  $1 + \frac{5}{y}$  5. Los términos deben enlistarse en orden descendente. 7.  $\frac{x^3 + 0x^2 - 14x + 15}{x - 3}$   
 9.  $(x + 5)(x - 3) - 2 = x^2 + 2x - 17$  11.  $\frac{x^2 + x - 20}{x - 4} = x + 5$  o  $\frac{x^2 + x - 20}{x + 5} = x - 4$  13.  $\frac{2x^2 + 5x + 3}{2x + 3} = x + 1$   
 o  $\frac{2x^2 + 5x + 3}{x + 1} = 2x + 3$  15.  $\frac{4x^2 - 9}{2x + 3} = 2x - 3$  o  $\frac{4x^2 - 9}{2x - 3} = 2x + 3$  17.  $x + 2$  19.  $2n + 5$  21.  $\frac{3}{2}x + 4$



**R11 • Respuestas**

23.  $-3x + 2$  25.  $3x + 1$  27.  $\frac{1}{2}x + 4$  29.  $-1 + \frac{5}{2}w$  31.  $1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}$  33.  $-2x^3 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}$  35.  $x^2 + 3x - \frac{3}{x^3}$   
 37.  $3x^2 - 2x + 6 - \frac{5}{2x}$  39.  $-2k^2 - \frac{3}{2}k + \frac{2}{k}$  41.  $-4x^3 - x^2 + \frac{10}{3} + \frac{3}{x^2}$  43.  $x + 3$  45.  $2x + 3$  47.  $2x + 4$  49.  $x + 4$   
 51.  $x + 5 - \frac{3}{2x - 3}$  53.  $2a + 5$  55.  $2x - 3 + \frac{2}{4x + 9}$  57.  $4x - 3 - \frac{3}{2x + 3}$  59.  $3x^2 - 5$  61.  $2x^2 + \frac{12}{x - 2}$   
 63.  $w^2 + 3w + 9 + \frac{19}{w - 3}$  65.  $x^2 + 3x + 9$  67.  $2x^2 + x - 2 - \frac{2}{2x - 1}$  69.  $-m^2 - 7m - 5 - \frac{8}{m - 1}$   
 71.  $3n^2 + 3n + 1 + \frac{7}{3n - 3}$  73. No; por ejemplo  $\frac{x + 2}{x} = 1 + \frac{2}{x}$  que no es un binomio. 75.  $2x^2 + 11x + 16$   
 77. Primer grado 79.  $4x$  81. Como las áreas sombreadas menos 2 deben ser igual a 3, 1, 0 y  $-1$ , respectivamente, las áreas sombreadas son 5, 3, 2, y 1, respectivamente. 83.  $2x^2 - 3x + \frac{5}{2} - \frac{3}{2(2x + 3)}$  85.  $-3x + 3 + \frac{1}{x + 3}$  88. a) 2  
 b) 2, 0 c) 2,  $-5, 0, \frac{2}{5}, -6.3, -\frac{23}{34}$  d)  $\sqrt{7}, \sqrt{3}$  e) 2,  $-5, 0, \sqrt{7}, \frac{2}{5}, -6.3, \sqrt{3}, -\frac{23}{34}$  89. a) 0 b) Indefinido  
 90. Paréntesis, exponentes, multiplicación o división, de izquierda a derecha, suma o resta de izquierda a derecha 91.  $-\frac{2}{3}$   
 92.  $\approx 904.78$  93.  $x^{10}$

**Ejercicios de repaso del capítulo** 1.  $x^7$  2.  $x^6$  3. 243 4. 32 5.  $x^3$  6. 1 7. 25 8. 16 9.  $\frac{1}{x^2}$  10.  $y^3$

11. 1 12. 4 13. 1 14. 1 15.  $25x^2$  16.  $27a^3$  17.  $216s^3$  18.  $-27x^3$  19.  $16x^8$  20.  $x^{24}$  21.  $-m^{20}$  22.  $\frac{4x^6}{y^2}$  23.  $\frac{25y^4}{4b^2}$   
 24.  $24x^5$  25.  $\frac{4x}{y}$  26.  $18x^3y^6$  27.  $9x^2$  28.  $24x^7y^7$  29.  $16x^8y^{11}$  30.  $6c^6d^3$  31.  $\frac{16x^6}{y^4}$  32.  $27x^{12}y^3$  33.  $\frac{1}{x^4}$  34.  $\frac{1}{27}$  35.  $\frac{1}{25}$   
 36.  $z^2$  37.  $x^7$  38. 9 39.  $\frac{1}{y^3}$  40.  $\frac{1}{x^5}$  41.  $\frac{1}{p^2}$  42.  $\frac{1}{a^5}$  43.  $x^6$  44.  $x^7$  45.  $\frac{1}{x^6}$  46.  $\frac{1}{9x^8}$  47.  $\frac{x^9}{64y^3}$  48.  $\frac{4n^2}{m^6}$  49.  $12y^2$  50.  $\frac{125z^3}{y^9}$   
 51.  $\frac{x^4}{16y^6}$  52.  $\frac{6}{x}$  53.  $10x^2y^2$  54.  $\frac{24y^2}{x^2}$  55.  $\frac{12x^2}{y}$  56.  $3y^5$  57.  $\frac{4y}{x^3}$  58.  $\frac{7x^5}{y^4}$  59.  $\frac{4y^{10}}{x}$  60.  $\frac{x}{2y^5}$  61.  $1.72 \times 10^6$   
 62.  $1.53 \times 10^{-1}$  63.  $7.63 \times 10^{-3}$  64.  $4.7 \times 10^4$  65.  $4.82 \times 10^3$  66.  $3.14 \times 10^{-4}$  67. 0.0084 68. 0.000652 69. 970,000  
 70. 0.00000438 71. 0.0000314 72. 11,030,000 73. 6,000,000,000 metros 74. 0.092 litros 75. 19,200 gramos 76. 0.0000128  
 gramos 77. 0.085 78. 1260 79. 245 80. 379,000,000 81. 0.0325 82. 0.00003 83.  $3.64 \times 10^9$  84.  $5.0 \times 10^9$   
 85.  $2.12 \times 10^1$  86.  $5.0 \times 10^{-4}$  87.  $3.4 \times 10^{-3}$  88.  $3.4 \times 10^7$  89. 50,000 galones 90. a)  $\approx \$5,260,000,000$  b)  $\approx 1.62$   
 91. No es un polinomio 92. Monomio, cero 93.  $x^2 + 3x - 4$ , trinomio, segundo 94.  $4x^2 - x - 3$ , trinomio, segundo  
 95. Binomio, tercero 96. No es un polinomio 97.  $-4x^2 + x$ , binomio, segundo 98. No es un polinomio  
 99.  $2x^3 + 4x^2 - 3x - 7$ , polinomio, tercero 100.  $3x - 1$  101.  $7d + 4$  102.  $-3x - 5$  103.  $-3x^2 + 10x - 15$   
 104.  $5m^2 - 10$  105.  $8.1p + 2.8$  106.  $-2x + 2$  107.  $4x^2 - 12x - 15$  108.  $3a^2 - 5a - 21$  109.  $-5x^2 + 8x - 19$   
 110.  $4x + 2$  111.  $3x^2 + 3x$  112.  $-15x^2 - 12x$  113.  $6x^3 - 12x^2 + 21x$  114.  $-2c^3 + 3c^2 - 5c$  115.  $12z^3 + 8z^2 + 32z$   
 116.  $x^2 + 9x + 20$  117.  $-12x^2 - 21x + 6$  118.  $4x^2 - 24x + 36$  119.  $-6x^2 + 14x + 12$  120.  $r^2 - 25$   
 121.  $3x^3 + 7x^2 + 14x + 4$  122.  $3x^3 + x^2 - 10x + 6$  123.  $-12x^3 + 10x^2 - 30x + 14$  124.  $x + 2$  125.  $5x + 6$   
 126.  $8x + 4$  127.  $2x^2 + 3x - \frac{4}{3}$  128.  $2w - \frac{5}{3} + \frac{1}{w}$  129.  $4x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{x}$  130.  $-4m + 2$  131.  $\frac{5}{3}x - 2 + \frac{5}{x}$   
 132.  $\frac{5}{2}x + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}$  133.  $x + 4$  134.  $n + 3$  135.  $5x - 2 + \frac{2}{x + 6}$  136.  $2x^2 + 3x - 4$  137.  $2x - 3$

**Examen de práctica del capítulo** 1.  $15x^6$  2.  $27x^3y^6$  3.  $3d^4$  4.  $\frac{x^3}{8y^6}$  5.  $\frac{y^4}{4x^6}$  6.  $\frac{2x^7y}{3}$  7. 4 8.  $5.25 \times 10^9$

9.  $2.0 \times 10^{-7}$  10. Monomio 11. Binomio 12. No es un polinomio 13.  $6x^3 - 2x^2 + 5x - 5$ , tercer grado  
 14.  $2x^2 + x - 7$  15.  $-2x^2 + 4x$  16.  $3x^2 - x + 3$  17.  $15d^2 - 40d$  18.  $8x^2 + 2x - 21$  19.  $-12c^2 + 7c + 45$   
 20.  $6x^3 + 2x^2 - 35x + 25$  21.  $4x^2 + 2x - 1$  22.  $4x + 2 - \frac{5}{3x}$  23.  $4x + 5$  24.  $3x - 2 - \frac{2}{4x + 5}$  25. a)  $5.73 \times 10^3$   
 b)  $\approx 7.78 \times 10^5$

## CAPÍTULO 5

**Conjunto de ejercicios 5.1** 1. Un número primo es un entero mayor que 1 que tiene exactamente dos factores, el mismo número y 1. 3. Factorizar una expresión significa escribirla como el producto de sus factores. 5. El máximo común divisor es el número más grande que divide a todos los números. 7. Un problema de factorización se comprueba con la multiplicación de los factores. 9.  $2^3 \cdot 7$  11.  $2 \cdot 3^2 \cdot 5$  13.  $2^2 \cdot 7^2$  15. 4 17. 14 19. 2 21.  $x$  23.  $3x$  25. 1 27.  $mn$  29.  $x^3y^5$  31. 5 33.  $x^2y^2$  35.  $x$  37.  $x + 3$  39.  $2x - 3$  41.  $3w + 5$  43.  $x - 4$  45.  $x - 1$  47.  $x + 3$  49.  $4(x - 2)$  51.  $5(3x - 1)$  53.  $6(p + 2)$  55.  $3x(3x - 4)$  57.  $2p(13p - 4)$  59.  $3x^2(x^3 - 4)$  61.  $12x^8(3x^4 + 2)$  63.  $9y^3(3y^{12} - 1)$  65.  $x(1 + 3y^2)$  67.  $a^2(7a^2 + 3)$  69.  $4xy(4yz + x^2)$  71.  $16mn^2(3m^3 - 1)$  73.  $25x^2yz(z^2 + x)$  75.  $y^2z^3(13y^3 - 11xz^2)$  77.  $4(2c^2 - c - 8)$  79.  $3(3x^2 + 6x + 1)$  81.  $4x(x^2 - 2x + 3)$  83.  $5(7x^2 - 3y + 2)$  85.  $3(5p^2 - 2p + 3)$  87.  $3a(3a^3 - 2a^2 + b)$  89.  $xy(8x + 12y + 5)$  91.  $(x + 4)(x + 3)$  93.  $(a - 2)(3b - 4)$  95.  $(2x + 1)(4x + 1)$  97.  $(2x + 1)(5x + 1)$  99.  $(2z + 3)(4z - 3)$  101.  $3(\star + 2)$  103.  $7\Delta(5\Delta^2 - \Delta + 2)$  105.  $2(x - 3)[2x^2(x - 3)^2 - 3x(x - 3) + 2]$  107.  $x^{1/3}(x^2 + 5x + 2)$  109.  $(x + 2)(x + 3)$  110.  $-3x + 17$  111. 2 112.  $y = \frac{4x - 20}{5}$  o  $y = \frac{4}{5}x - 4$  113.  $\approx 201.06$  pulgadas cúbicas 114. 14, 27 115.  $\frac{9y^2}{4x^6}$

**Conjunto de ejercicios 5.2** 1. El primer paso es sacar un factor común, si lo hubiera. 3.  $x^2 + 4x - 2x - 8$ ; se encontró con la multiplicación de los factores. 5. Las respuestas varían. 7.  $(x + 3)(x + 2)$  9.  $(x + 5)(x + 4)$  11.  $(x + 2)(x + 5)$  13.  $(x + 3)(x - 5)$  15.  $(2b - 5)(2b + 5)$  17.  $(x + 3)(3x + 1)$  19.  $(2x + 1)(3x - 1)$  21.  $(x + 4)(8x + 1)$  23.  $(3t - 2)(4t - 1)$  25.  $(x - 2)(2x - 3)$  27.  $(2p + 5)(3p - 2)$  29.  $(x + 2y)(x - 3y)$  31.  $(3x + 2y)(x - 3y)$  33.  $(5x - 6y)(2x - 5y)$  35.  $(x + b)(x + a)$  37.  $(y + 5)(x - 3)$  39.  $(a + 3)(a + b)$  41.  $(y - 1)(x + 5)$  43.  $(3 + 2y)(4 - x)$  45.  $(z + 5)(z^2 + 1)$  47.  $(x + 4)(x^2 - 3)$  49.  $2(x - 6)(x + 4)$  51.  $4(x + 2)(x + 2) = 4(x + 2)^2$  53.  $x(2x + 3)(3x - 1)$  55.  $x(x + 3y)(x - 2y)$  57.  $(y + 5)(x + 3)$  59.  $(x + 5)(y + 6)$  61.  $(a + b)(x + y)$  63.  $(d + 3)(c - 4)$  65.  $(a + b)(c - d)$  67. No;  $xy + 2x + 5y + 10$  es factorizable;  $xy + 10 + 2x + 5y$  no es factorizable con este acomodo. 69.  $(\odot + 3)(\odot - 5)$  71. a)  $3x^2 + 6x + 4x + 8$  b)  $(x + 2)(3x + 4)$  73. a)  $2x^2 - 6x - 5x + 15$  b)  $(x - 3)(2x - 5)$  75. a)  $4x^2 - 20x + 3x - 15$  b)  $(x - 5)(4x + 3)$  77.  $(\odot + 3)(\star + 2)$  79.  $\frac{6}{5}$  80. 30 libras de obleas de chocolate, 20 libras de mentas. 81.  $5x^2 - 2x - 3 + \frac{5}{3x}$  82.  $x + 3$

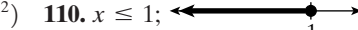
**Conjunto de ejercicios 5.3** 1. Como 8000 es positivo, ambos signos también lo serán. Como 180 es positivo, ambos signos serán positivos. 3. Como  $-8000$  es negativo, un signo será positivo, el otro negativo. 5. Como 8000 es positivo, los dos signos también lo serán. Como  $-240$  es negativo, los dos signos serán negativos. 7. El trinomio  $x^2 + 4xy - 12y^2$  se obtuvo con la multiplicación de los factores por medio del método PIES. 9. El trinomio  $4a^2 - 4b^2$  se obtuvo con la multiplicación de todos los factores y la reducción de términos semejantes. 11. No está factorizado por completo. Factoriza a  $2(x - 2)(x - 1)$ . 13. Encontrar dos números cuyo producto sea  $c$ , y cuya suma sea  $b$ . Los factores son  $(x + \text{primer número})$  y  $(x + \text{segundo número})$ . 15.  $(x - 5)(x - 2)$  17.  $(x + 2)(x + 4)$  19.  $(x + 4)(x + 3)$  21. Primo 23.  $(y - 12)(y - 1)$  25.  $(a - 4)(a + 2)$  27.  $(r - 5)(r + 3)$  29.  $(b - 9)(b - 2)$  31. Primo 33.  $(a + 11)(a + 1)$  35.  $(x - 10)(x + 3)$  37.  $(x + 2)^2$  39.  $(p + 3)^2$  41.  $(p - 6)^2$  43.  $(w - 15)(w - 3)$  45.  $(x + 13)(x - 3)$  47.  $(x - 5)(x + 4)$  49.  $(y + 7)(y + 2)$  51.  $(x + 16)(x - 4)$  53. Primo 55.  $(x - 16)(x - 4)$  57.  $(b - 5)(b - 13)$  59.  $(x + 2)(x + 1)$  61.  $(w + 9)(w - 2)$  63.  $(x - 3y)(x - 5y)$  65.  $(m - 3n)^2$  67.  $(x + 5y)(x + 3y)$  69.  $(m + 3n)(m - 8n)$  71.  $6(x - 4)(x - 1)$  73.  $5(x + 3)(x + 1)$  75.  $2(x - 4)(x - 3)$  77.  $b(b - 5)(b - 2)$  79.  $3z(z - 9)(z + 2)$  81.  $x(x + 4)^2$  83.  $4(a - 4b)(a - 2b)$  85.  $s(r + 3s)(r + 4s)$  87.  $x^2(x - 7)(x + 3)$  89. Ambos negativos; uno positivo y uno negativo; uno positivo y uno negativo; los dos positivos 91.  $x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4)$  93.  $x^2 + 12x + 32 = (x + 8)(x + 4)$  95.  $(x + 0.4)(x + 0.2)$  97.  $\left(x + \frac{1}{5}\right)\left(x + \frac{1}{5}\right) = \left(x + \frac{1}{5}\right)^2$  99.  $(x + 20)(x - 15)$  101. 9 102. 19.6% 103.  $2x^3 + x^2 - 16x + 12$  104.  $3x + 2 - \frac{2}{x - 4}$  105.  $(3x + 5)(x - 2)$

**Conjunto de ejercicios 5.4** 1. Factorizar trinomios es el proceso inverso de multiplicar binomios. 3. La constante,  $c$ , del trinomio 5.  $(2x + 1)(x + 5)$  7.  $(3x + 2)(x + 4)$  9.  $(5x + 1)(x - 2)$  11.  $(3r - 2)(r + 5)$  13.  $(2z - 3)^2$  15.  $(5y + 4)(y - 1)$  17. Primo 19.  $(2z + 3)(3z - 4)$  21. Primo 23.  $(5y - 1)(y - 3)$  25.  $(7x + 1)(x + 6)$  27.  $(7x - 1)(x - 1)$  29.  $(5b - 3)(b - 4)$  31.  $(5z + 4)(z - 2)$  33.  $(4y - 3)(y + 2)$  35.  $(5x - 1)(2x - 5)$  37.  $(5d + 4)(2d - 3)$  39.  $2(3x + 1)(x - 4)$  41.  $(7t + 3)(t + 1)$  43.  $2(3x + 5)(x + 1)$  45.  $x(2x + 1)(3x - 4)$  47.  $4x(3x + 1)(x + 2)$  49.  $2x(2x + 3)(x - 2)$  51.  $6(3z - 1)(2z + 1)$  53.  $3(r - 4)(r - 6)$

**R13 • Respuestas**

55.  $(2x + y)(x + 2y)$  57.  $(2x - y)(x - 3y)$  59.  $2(2x - y)(3x + 4y)$  61.  $3(x - 3y)(2x + 3y)$   
 63.  $(3m - 2n)(2m + n)$  65.  $x(4x + 3y)(2x + y)$  67.  $x^2(2x + y)(2x + 3y)$  69.  $3x^2 - 20x - 7$ ; obtenida con la multiplicación de los factores; 71.  $10x^2 + 35x + 15$ ; obtenida con la multiplicación de los factores; 73.  $2x^4 - x^3 - 3x^2$ ; obtenida con la multiplicación de los factores; 75. **a)** Dividir el trinomio entre el binomio da el segundo factor. **b)**  $6x + 11$   
 77.  $(6x - 5)(3x + 4)$  79.  $(5x - 8)(3x - 20)$  81.  $4(6x + 5)(3x - 10)$  83.  $2x + 45$ , el producto de los tres primeros términos debe ser igual a  $6x^3$ , y el producto de las constantes debe ser igual a 2250. 85. 49 86.  $\approx 130.89$  mph  
 87.  $12xy^2(3x^3y - 1 + 2x^4y^4)$  88.  $(x - 9)(x - 6)$

**Conjunto de ejercicios 5.5** 1. **a)**  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$  **b)** Las respuestas varían.

3. **a)**  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$  **b)** Las respuestas varían. 5. No 7. Primo 9.  $4(a^2 + 4)$  11.  $4(4m^2 + 9n^2)$   
 13.  $(y + 5)(y - 5)$  15.  $(z + 9)(z - 9)$  17.  $(x + 7)(x - 7)$  19.  $(x + y)(x - y)$  21.  $(3y + 5z)(3y - 5z)$   
 23.  $4(4a + 3b)(4a - 3b)$  25.  $(7x + 6)(7x - 6)$  27.  $(z^2 + 9x)(z^2 - 9x)$  29.  $9(x^2 + 3y)(x^2 - 3y)$   
 31.  $(6m^2 + 7n)(6m^2 - 7n)$  33.  $10(x + 4)(x - 4)$  35.  $4(2x + 5y^2)(2x - 5y^2)$  37.  $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$   
 39.  $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$  41.  $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$  43.  $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$  45.  $(a + 1)(a^2 - a + 1)$   
 47.  $(3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)$  49.  $(3a - 5)(9a^2 + 15a + 25)$  51.  $(3 - 2y)(9 + 6y + 4y^2)$   
 53.  $(4m + 3n)(16m^2 - 12mn + 9n^2)$  55.  $(2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2)$  57.  $2(x + 2)^2$  59.  $b(a + 5)(a - 5)$   
 61.  $3(c - 3)^2$  63.  $5(x - 3)(x + 1)$  65.  $3(x + 3)(y - 2)$  67.  $2(x + 5)(x - 5)$  69.  $2y(x + 3)(x - 3)$   
 71.  $3y^2(x + 1)(x^2 - x + 1)$  73.  $2(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$  75.  $2(3x + 5)(3x - 5)$  77.  $3(2x + 3)^2$   
 79.  $2(3x - 2)(x + 4)$  81.  $2r(s + 3)(s - 8)$  83.  $(x + 2)(4x - 3)$  85.  $25(b + 2)(b - 2)$  87.  $a^3b^2(a + 2b)(a - 2b)$   
 89.  $3x^2(x - 3)^2$  91.  $x(x^2 + 25)$  93.  $(y^2 + 4)(y + 2)(y - 2)$  95.  $3(3a - 2b)(4a + b)$  97.  $(2a - 3)(b + 2)$   
 99.  $9(1 + y^2)(1 + y)(1 - y)$  101. No se pueden dividir los dos lados de la ecuación entre  $a - b$  porque es igual a 0.  
 103.  $2\blacklozenge^4(\blacklozenge^2 + 2\blackstar^2)$  105.  $(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$  107.  $(x - 3 + 2y)(x - 3 - 2y)$   
 109.  $(x + y)(x - y)(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)$  110.  $x \leq 1$ ;  111. 4 pulgadas 112. La suma de

un número, y 5 disminuido del doble del número es 2. 113.  $\frac{8x^9}{27y^{12}}$  114.  $\frac{1}{x^5}$

**Conjunto de ejercicios 5.6** 1. Las respuestas varían. 3.  $ax^2 + bx + c = 0$  5. **a)** La propiedad del factor

- cero sólo se utiliza cuando un lado de la ecuación es igual a 0. **b)**  $-2, 3$  7. 0,  $-2$  9. 0, 8 11.  $-\frac{5}{2}, 3$  13. 3,  $-3$  15. 0, 12  
 17. 0,  $-3$  19. 4 21.  $-2, -10$  23. 3,  $-6$  25. 4,  $-3$  27. 1,  $-24$  29.  $-5, -6$  31. 5,  $-3$  33. 30,  $-1$  35.  $-6, \frac{2}{3}$   
 37.  $-\frac{1}{3}, -2$  39.  $\frac{2}{3}, -5$  41.  $-4, 3$  43.  $-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$  45.  $-3, -6$  47. 0, 25 49. 10,  $-10$  51.  $-2, 5$  53.  $-\frac{1}{2}, 4$  55.  $-6, 1$   
 57.  $x^2 - 2x - 8 = 0$  (otras respuestas son posibles) 59.  $x^2 - 6x = 0$  (otras respuestas son posibles) 61. **a)**  $(2x - 1)y$   
 $(3x + 1)$  **b)**  $6x^2 - x - 1 = 0$  63. 0,  $-12$  65. 0, 3,  $-2$  67.  $\frac{1}{35}$  68. **a)** Identidad **b)** Contradicción 69.  $\approx 738$  70.  $\frac{8}{x^3y^6}$   
 71. Monomio 72. Binomio 73. No es un polinomio 74. Trinomio

**Conjunto de ejercicios 5.7** 1. Un triángulo con un ángulo de  $90^\circ$  3.  $(\log)^2 + (\log)^2 =$  (hipotenusa)<sup>2</sup>

- o  $a^2 + b^2 = c^2$  5. 3 7. 17 9. 4 11. 39 13. 9, 13 15. 6, 14 17. 9, 7 19. Ancho: 3 pies; largo: 12 pies 21. Ancho: 10 pies; largo: 15 pies 23. 3 metros 25. 4 segundos 27. Sí 29. Sí 31. 16 pies 33. 10 pulgadas 35. 6 pies, 8 pies, 10 pies 37. 13 millas  
 39. Ancho: 7 pies; largo: 24 pies 41. 30 videos 43. **a)** 4 **b)** 9 45. 432 pies cuadrados 47. 0, 2,  $-5$  49.  $-5$  y 8 53.  $2x - 5$   
 54.  $-x^2 + 7x - 4$  55.  $6x^3 + x^2 - 10x + 4$  56.  $2x - 3$  57.  $2x - 3$

**Ejercicios de repaso del capítulo** 1.  $y^3$  2.  $3p$  3.  $5a^2$  4.  $5x^2y^2$  5. 1 6. 1 7.  $x - 5$  8.  $x + 5$

9.  $4(x - 3)$  10.  $5(7x - 1)$  11.  $4y(6y - 1)$  12.  $5p^2(11p - 4)$  13.  $12ab(5a - 3b)$  14.  $6xy(1 - 2x)$   
 15.  $4x^3y^2(5 + 2x^6y - 4x^2)$  16. Primo 17. Primo 18.  $(5x + 3)(x - 2)$  19.  $(x + 2)(5x - 2)$  20.  $(4x - 3)(2x + 1)$   
 21.  $(x + 6)(x + 2)$  22.  $(x - 5)(x + 4)$  23.  $(y - 9)(y - 9) = (y - 9)^2$  24.  $(a - b)(4a - 1)$  25.  $(y + 1)(3x + 2)$   
 26.  $(x + 3)(x - 2y)$  27.  $(x + 6)(2x - 1)$  28.  $(5x - y)(x + 4y)$  29.  $(x + 3y)(4x - 5y)$  30.  $(3a - 5b)(2a - b)$   
 31.  $(b - 1)(a + 1)$  32.  $(x - 3y)(3x + 2y)$  33.  $(a + 2b)(7a - b)$  34.  $(2x + 3)(3x - 1)$  35.  $(x - 3)(x + 2)$   
 36. Primo 37.  $(x - 6)(x - 7)$  38.  $(b + 5)(b - 4)$  39.  $(n + 8)(n - 5)$  40.  $(x - 8)(x - 7)$  41. Primo 42. Primo  
 43.  $x(x - 9)(x - 8)$  44.  $x(x - 8)(x + 5)$  45.  $(x + 3y)(x - 5y)$  46.  $4x(x + 5y)(x + 3y)$  47.  $(2x + 5)(x - 3)$   
 48.  $(3x - 1)(x - 4)$  49.  $(4x - 5)(x - 1)$  50.  $(5m - 4)(m - 2)$  51.  $(3x - 1)(3x + 2)$  52.  $(5x - 2)(x - 6)$   
 53. Primo 54.  $(2s + 1)(3s + 5)$  55.  $(5x - 3)(x + 8)$  56.  $(3x - 2)(2x + 5)$  57.  $2(3x + 2)(2x - 1)$  58.  $(3x - 1)^2$   
 59.  $x(3x - 2)^2$  60.  $2x(3x + 4)(3x - 2)$  61.  $(8a + b)(2a - 3b)$  62.  $(2a - 3b)(2a - 5b)$  63.  $(x + 6)(x - 6)$

64.  $(x + 10)(x - 10)$  65.  $4(x + 2)(x - 2)$  66.  $9(3x + y)(3x - y)$  67.  $(9 + a)(9 - a)$  68.  $(8 + x)(8 - x)$   
 69.  $(4x^2 + 7y)(4x^2 - 7y)$  70.  $(10x^2 + 11y^2)(10x^2 - 11y^2)$  71.  $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$  72.  $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$   
 73.  $(x - 1)(x^2 + x + 1)$  74.  $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$  75.  $(a + 3)(a^2 - 3a + 9)$  76.  $(b - 4)(b^2 + 4b + 16)$   
 77.  $(5a + b)(25a^2 - 5ab + b^2)$  78.  $(3 - 2y)(9 + 6y + 4y^2)$  79.  $3(3x^2 + 5y)(3x^2 - 5y)$   
 80.  $3(x - 4y)(x^2 + 4xy + 16y^2)$  81.  $(x - 6)(x - 8)$  82.  $3(x - 3)^2$  83.  $4(a + 4)(a - 4)$  84.  $4(y + 3)(y - 3)$   
 85.  $8(x + 3)(x - 1)$  86.  $(x - 9)(x + 3)$  87.  $(3x - 1)^2$  88.  $(4x - 1)(x + 2)$  89.  $6(b - 1)(b^2 + b + 1)$   
 90.  $y(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$  91.  $b(a + 3)(a - 5)$  92.  $3x(2x + 3)(x + 5)$  93.  $(x - 3y)(x - y)$   
 94.  $(3m - 4n)(m + 2n)$  95.  $(2x - 5y)^2$  96.  $(5a + 7b)(5a - 7b)$  97.  $(x + 2)(y - 7)$  98.  $y^5(4 + 5y)(4 - 5y)$   
 99.  $2x(2x + 5y)(x + 2y)$  100.  $(2x - 3y)(3x + 7y)$  101.  $x^2(4x + 1)(4x - 3)$  102.  $(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1)$  103. 0, 5  
 104. 2, -6 105.  $-5, \frac{3}{4}$  106. 0, 3 107. 0, -4 108. 0, -3 109. -3, -6 110. -4, 3 111. 1, 2 112. -1, -4 113. 2, 4  
 114. 3, -5 115.  $\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}$  116.  $\frac{1}{2}, -8$  117. 2, -2 118.  $\frac{10}{7}, -\frac{10}{7}$  119.  $\frac{3}{2}, \frac{1}{4}$  120.  $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$  121.  $a^2 + b^2 = c^2$  122. Hipotenusa  
 123. 12 metros 124. 10 pies 125. 6, 8 126. 4, 14 127. Ancho: 7 pies; largo: 9 pies 128. 9 pulgadas 129. 8 pies, 15 pies, 17  
 pies 130. 10 pies 131. 1 segundo 132. 80 docenas

### Examen de práctica del capítulo

1.  $3y^3$  2.  $3xy^2$  3.  $5x^2y^2(y - 3x^3)$  4.  $4a^2b(2a - 3b + 7)$   
 5.  $(5x + 2)(x - 3)$  6.  $(a - 4b)(a - 5b)$  7.  $(r + 8)(r - 3)$  8.  $(5a - 3b)(5a + 2b)$  9.  $4(x + 2)(x - 6)$   
 10.  $x(2x - 1)(x - 1)$  11.  $(3x + 2y)(4x - 3y)$  12.  $(x + 3y)(x - 3y)$  13.  $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$  14.  $\frac{3}{5}, 1$  15. 0, 6  
 16. -8, 8 17. 7 18. -2, -3 19. 3, 4 20. 24 pulgadas 21. 34 pies 22. 4, 9 23. 9, 11 24. Largo: 6 metros; ancho: 4 me-  
 tros 25. 10 segundos

## CAPÍTULO 6

### Conjunto de ejercicios 6.1 1. a-b)

- Las respuestas varían. 3. Suponemos que el valor de la variable no hace que el denominador sea igual a 0. 5. No hay factor común para el numerador y el denominador. 7. El denominador no puede ser 0. 9.  $x \neq 2$  11. No 13. Todos los números reales, excepto  $x = 0$ . 15. Todos los números reales, excepto  $n = 3$ . 17. Todos los números reales, excepto  $x = 2$  y  $x = -2$ . 19. Todos los números reales, excepto  $x = \frac{3}{2}$  y  $x = 3$ . 21. Todos los números reales.  
 23. Todos los números reales, excepto  $p = \frac{5}{2}$  y  $p = -\frac{5}{2}$  25.  $\frac{x}{3y^4}$  27.  $\frac{4}{b^5}$  29.  $\frac{1}{1 + y}$  31. 5 33.  $\frac{x^2 + 6x + 3}{2}$  35.  $r - 2$   
 37.  $\frac{x}{x + 2}$  39.  $\frac{k - 3}{k + 3}$  41.  $\frac{x + 1}{x + 2}$  43. -1 45.  $-(x + 2)$  47.  $-\frac{x + 6}{2x}$  49.  $-(x + 3)$  51.  $\frac{1}{4m - 5}$  53.  $\frac{x - 5}{x + 5}$   
 55.  $2x - 3$  57.  $x + 4$  59.  $\frac{x - 4}{x + 4}$  61.  $a^2 + 2a + 4$  63.  $3s + 4t$  65.  $\frac{2}{x - y}$  67.  $\frac{\odot}{4}$  69.  $\frac{\Delta}{2\Delta + 3}$  71. -1 73.  $x + 2$ ;  
 $(x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$  75.  $x^2 + 7x + 12$ ;  $(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$  77. a)  $x \neq -3, x \neq 2$  b)  $\frac{1}{x - 2}$   
 79. a)  $x \neq 0, x \neq -5, x \neq \frac{3}{2}$  b)  $\frac{1}{x(2x - 3)}$  81. 1, el numerador y el denominador son iguales 84.  $y = x - 2z$  85.  $28^\circ$ ,  
 $58^\circ$ , y  $94^\circ$  86.  $\frac{16}{81x^4y^2}$  87.  $6x^2 - 10x - 17$  88.  $3(a - 4)(a - 6)$  89. 13 pulgadas

### Conjunto de ejercicios 6.2

1. Las respuestas varían. 3.  $x^2 - 2x - 8$ ; el numerador debe ser  $(x - 4)(x + 2)$   
 5.  $x^2 - 2x - 15$ ; el denominador debe ser  $(x - 5)(x + 3)$ . 7.  $\frac{xy}{8}$  9.  $\frac{80x^4}{y^6}$  11.  $\frac{36x^9y^2}{25z^7}$  13.  $\frac{-3x + 2}{3x + 2}$  15. 1 17.  $\frac{1}{a^2 - b^2}$   
 19.  $\frac{x + 3}{2(x + 2)}$  21.  $\frac{x + 2}{x + 3}$  23.  $x + 3$  25.  $3x^2y$  27.  $\frac{9z}{x}$  29.  $\frac{5}{6ab^2}$  31.  $5r$  33.  $x + 7$  35.  $\frac{x - 8}{x + 2}$  37.  $\frac{x + 3}{x - 1}$  39. -1  
 41.  $\frac{x + 1}{x - 4}$  43.  $4x^2y^2$  45.  $\frac{7c}{4ab^2}$  47.  $\frac{3y^2}{a^2}$  49.  $\frac{8mx^7}{3y^2}$  51.  $\frac{1}{2}$  53.  $\frac{7x}{y}$  55.  $\frac{8}{m^4n^{11}}$  57.  $\frac{r + 2}{r - 3}$  59.  $\frac{x - 4}{x - 3}$  61.  $\frac{3z + 2}{z - 2}$   
 63.  $\frac{x + 5}{x - 4}$  65.  $\frac{2n + 3}{3n - 1}$  67.  $\frac{1}{6\Delta^3}$  69.  $\frac{\Delta + \odot}{9(\Delta - \odot)}$  71.  $x^2 + 3x + 2$  73.  $x^2 - 3x - 10$  75.  $x^2 - 3x + 2$  77.  $\frac{x - 3}{x + 3}$  79. 1  
 81.  $x^2 - 5x + 6, x^2 - x - 20$  84. 1 hora 85.  $20x^4y^5z^{11}$  86.  $2x^2 + x - 2 - \frac{2}{2x - 1}$  87.  $3(x - 5)(x + 2)$  88. 5, -2



**Conjunto de ejercicios 6.6** 1. a) Las respuestas varían. b)  $\frac{2}{3}$  3. a) El problema de la izquierda es una expresión que se simplificará, mientras que del lado derecho aparece una ecuación que se resolverá. b) Izquierda: escriba las fracciones con el mcd,  $12(x - 1)$  y luego reduzca los numeradores; Derecha: multiplique ambos lados de la ecuación por el mcd  $12(x - 1)$ , luego resuelva. c) Izquierda:  $\frac{x^2 - x + 12}{12(x - 1)}$ ; Derecha: 4, -3 5. Necesita verificar si hay soluciones extrañas cuando hay una variable en el denominador. 7. 2 9. No 11. Sí 13. 12 15. 2 17. -10 19. 30 21. 4 23.  $\frac{25}{6}$  25. 36  
 27. 8 29. -8 31. 3 33. 4 35. 2 37. 5 39. No hay solución. 41. 7 43. 15 45. No hay solución. 47. -4 49. 38 51.  $-\frac{1}{3}$ , 3  
 53. 6, -1 55. 4, -4 57. -4, -5 59. 4 61.  $-\frac{5}{2}$  63. No hay solución. 65. 24 67. No hay solución. 69. -3 71. 3 73. 5 75. 0  
 77.  $x$  puede ser cualquier número real, ya que la suma del lado izquierdo también es  $\frac{2x - 4}{3}$ . 79. 15 centímetros 81. -4  
 83. No, es imposible que ambos lados de la ecuación sean iguales. 85. Más de  $6\frac{1}{3}$  horas 86.  $40^\circ$ ,  $140^\circ$  87. 75 minutos  
 88.  $6.8 \times 10^2$

**Conjunto de ejercicios 6.7** 1. Algunos ejemplos son  $A = \frac{1}{2}bh$ ,  $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ ,  $V = \frac{1}{3}\pi r^2h$ , y  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$   
 3. Representa 1 tarea completa. 5. largo = 10 pulgadas, ancho = 9 pulgadas 7. base = 12 centímetros, altura = 7 centímetros  
 9. Base: 8 pies 11.  $\frac{3}{10}$ , 3 13. 7 15. 10 millas por hora. 17. 18.75 millas 19. 150 millas por hora, 600 millas por hora.  
 21. bote: 32 millas; tren: 168 millas 23. 3 horas a 600 millas por hora, y 2 horas a 500 millas por hora. 25. 900 pies  
 27.  $3\frac{3}{7}$  horas 29. 6 horas 31.  $3\frac{1}{3}$  horas 33.  $8\frac{3}{4}$  días 35.  $\frac{3}{5}$  hora o 36 minutos 37. 300 horas 39. 2 o  $\frac{2}{5}$  41. 8 pintas  
 43.  $-\frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$  44.  $(y - 1)(y + 5)$  45. 1 46.  $\frac{3x^2 - 9x - 15}{(2x + 3)(3x - 5)(3x + 1)}$

**Conjunto de ejercicios 6.8** 1. 40 3.  $y = kx$  5. Directa 7. Inversa 9. Inversa 11. Directa  
 13. Directa 15. 33 17.  $\frac{1}{5}$  19. 50 21. 3.2 23. 18 25. 3.5 27. 16 29. 30 31. Se duplicará 33. Se reduce a la mitad  
 35. 80 millas 37. 2 horas 39. 375 pies 41.  $\approx 133.33$  horas 43. 1,000 personas 45. 60 personas 47.  $\approx 452.16$  pulgadas cuadradas  
 49.  $\approx 44.44$  ohms 51. \$60 53. 6,400 centímetros cúbicos. 55. a)  $x = kyz$  b) 216 57.  $2x - 3 + \frac{2}{4x + 9}$   
 58.  $(z - 2)(y + 3)$  59. -4, 2 60.  $x + 3$

**Ejercicios de repaso del capítulo** 1. Todos los números reales, excepto  $x = 6$  2. Todos los números reales, excepto  $x = 3$  y  $x = 5$ . 3. Todos los números reales, excepto  $x = \frac{1}{5}y$  y  $x = -1$ . 4.  $\frac{1}{x - 3}$  5.  $x^2 + 4x + 12$   
 6.  $3x + 2y$  7.  $x + 4$  8.  $a + 6$  9.  $-(2x + 1)$  10.  $\frac{b - 3}{b + 2}$  11.  $\frac{x - 3}{x - 2}$  12.  $\frac{x - 8}{2x + 3}$  13.  $\frac{5}{12b^2}$  14.  $6xz^2$  15.  $\frac{16b^3c^2}{a^2}$   
 16.  $-\frac{1}{3}$  17.  $-\frac{2}{3}$  18. 1 19.  $\frac{64x^2}{y}$  20.  $\frac{32z}{x^3}$  21.  $\frac{5}{a - b}$  22.  $\frac{1}{3(a + 3)}$  23. 1 24.  $3y(x - y)$  25.  $\frac{n - 5}{n + 5}$  26. 3 27. 9  
 28.  $\frac{4}{x + 10}$  29.  $4h - 3$  30.  $3x + 4$  31. 30 32.  $x + 3$  33.  $20x^2y^3$  34.  $x(x + 1)$  35.  $(n - 5)(n - 4)$  36.  $x(x + 1)$   
 37.  $(r + s)(r - s)$  38.  $x - 7$  39.  $(x + 7)(x - 5)(x + 2)$  40.  $\frac{3y^2 + 8}{6y^2}$  41.  $\frac{10x + y}{5xy}$  42.  $\frac{5x^2 - 12y}{3x^2y}$  43.  $\frac{6x + 10}{x + 2}$   
 44.  $\frac{x^2 - 2xy - y^2}{xy}$  45.  $\frac{11x + 16}{x(x + 4)}$  46.  $\frac{-x - 4}{3x(x - 2)}$  47.  $\frac{3z + 22}{(z + 5)^2}$  48.  $\frac{2x - 8}{(x - 3)(x - 5)}$  49.  $\frac{5x + 38}{(x + 6)(x + 2)}$  50.  $\frac{4x - 12}{x - 4}$   
 51.  $\frac{4ab + 8b}{a - 2}$  52.  $\frac{3x - 3}{(x + 3)(x - 3)}$  53.  $\frac{5p^2}{q}$  54.  $\frac{4}{(x + 2)(x - 3)(x - 2)}$  55.  $\frac{8x - 29}{(x + 2)(x - 7)(x + 7)}$  56.  $\frac{x}{x + y}$

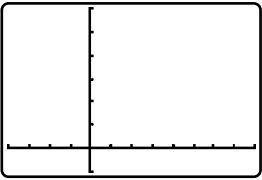

**R17 • Respuestas**

57.  $\frac{3(x+3y)}{5(x-3y)}$  58.  $a-3$  59.  $\frac{3a^2-7a+2}{(a+1)(a-1)(3a-5)}$  60.  $\frac{8x-16}{x}$  61.  $\frac{55}{9}$  62.  $\frac{26}{55}$  63.  $\frac{bc}{3}$  64.  $\frac{16x^3z^2}{y^3}$  65.  $\frac{ab-a}{a+1}$   
 66.  $\frac{r^2s+1}{s^3}$  67.  $\frac{4x+2}{x(6x-1)}$  68.  $\frac{2}{x}$  69.  $x$  70.  $\frac{2a+1}{2}$  71.  $\frac{-x+1}{x+1}$  72.  $\frac{3x^2-x^2y}{y(y-x)}$  73. 6 74. 6 75. 40 76. 12 77. -16  
 78.  $\frac{1}{2}$  79. -6 80. 28 81. No hay solución 82.  $2\frac{8}{11}$  horas 83.  $16\frac{4}{5}$  horas 84.  $\frac{1}{5}, 1$  85. Robert: 2.1 millas por horas;  
 Tran: 5.6 millas por hora 86. 3096 miligramos 87. 1.68 horas

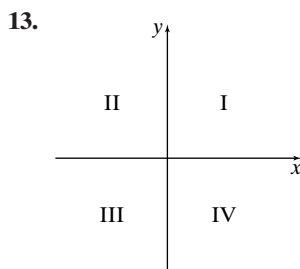
- Examen de práctica del capítulo** 1. 1 2.  $\frac{x^2+x+1}{x+1}$  3.  $\frac{6x^2z}{y}$  4.  $a+3$  5.  $\frac{x^2-6x+9}{(x+3)(x+2)}$   
 6. -1 7.  $\frac{x-2y}{3}$  8.  $\frac{5}{y+5}$  9.  $-\frac{m+6}{m-5}$  10.  $\frac{3x-1}{y}$  11.  $\frac{7x^2-6x-11}{x+3}$  12.  $\frac{4y^2-3}{xy^3}$  13.  $-\frac{z+20}{z-5}$  14.  $\frac{-1}{(x+4)(x-4)}$   
 15.  $\frac{55}{28}$  16.  $\frac{x^2+x^2y}{y}$  17.  $\frac{2x+3}{2-5x}$  18. 2 19.  $-\frac{12}{7}$  20. 12 21.  $3\frac{1}{13}$  horas 22. 1 23. Base: 6 pulgadas; altura: 9 pulgadas  
 24. 2 millas 25.  $\approx 1.13$  pies

**CAPÍTULO 7**

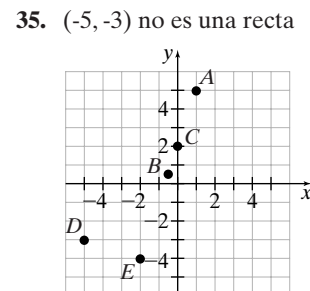
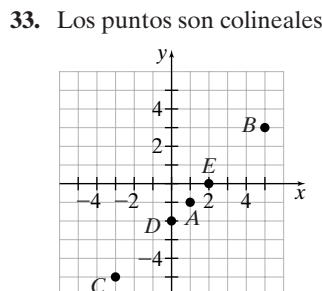
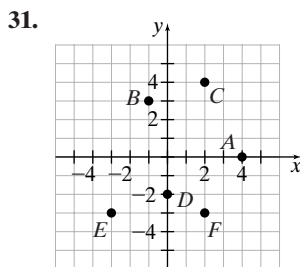
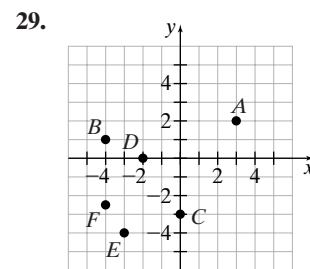
**Cómo utilizar su calculadora graficadora 7.1**

1.  2.  3. 50 4. 100

**Conjunto de ejercicios 7.1** 1. La coordenada  $x$  3. a) eje  $x$  b) eje  $y$  5. Eje es singular, y ejes es plural  
 7. Una ilustración del conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación. 9. a) Dos b) Para detectar errores.  
 11.  $ax + by = c$

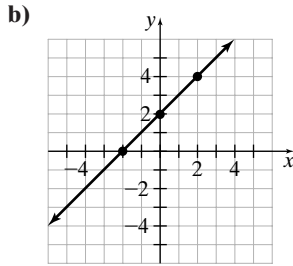


15. II 17. IV 19. II  
 21. III 23. III 25. II  
 27.  $A(3, 1); B(-3, 0); C(1, -3);$   
 $D(-2, -3); E(0, 3); F\left(\frac{3}{2}, -1\right)$

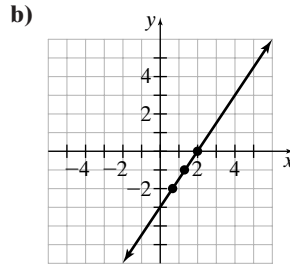




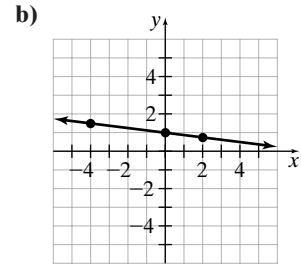
37. a) El punto c) no satisface la ecuación



39. a) El punto a) no satisface la ecuación.

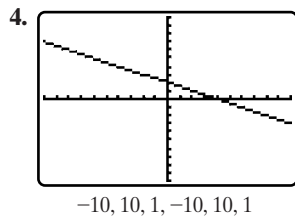
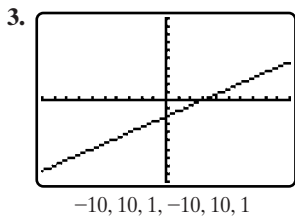
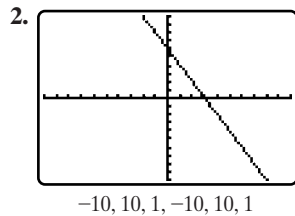
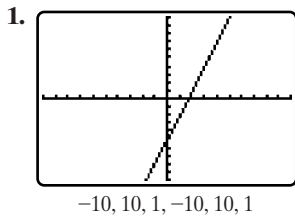


41. a) El punto a) no satisface la ecuación.



43. 2   45. -4   47. 2   49.  $\frac{11}{3}$    51. 0   53. a) Latitud, 16° N; Longitud, 56° O   b) Latitud, 29° N; Longitud, 90.5° O   c) Latitud, 26° N; Longitud, 80.5° O   d) Las respuestas varían.   57. 21   58.  $y = \frac{2x - 6}{5} = \frac{2}{5}x - \frac{6}{5}$    59.  $8x^{12}$    60.  $(x + 3)(x - 9)$   
 61. 0, 8   62.  $\frac{7x + 12}{3x^2}$

### Cómo utilizar su calculadora graficadora, 7.2

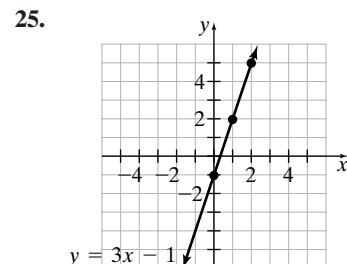
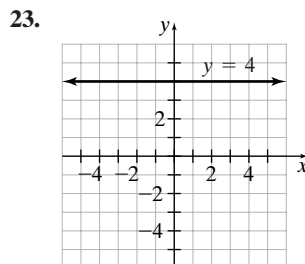
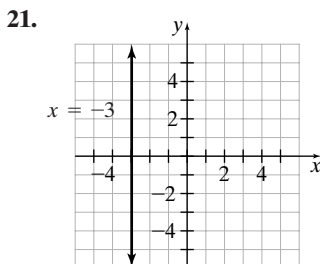


### Cómo utilizar su calculadora graficadora 7.2

1. (2, 0), (0, -8)   2. (-3, 0), (0, -6)  
 3. (2.5, 0), (0, -2)   4. (1.5, 0), (0, -4.5)

### Conjunto de ejercicios 7.2

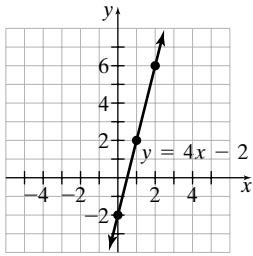
1. Intersección  $x$ : sustituya 0 por  $y$  y determine el valor correspondiente de  $x$ ; intersección  $y$ : sustituya 0 por  $x$  y determine el valor correspondiente de  $y$ .   3. Una recta horizontal  
 5. Podría no ser capaz de leer las respuestas exactas a partir de una gráfica.   7. Sí   9. 0   11. 5   13. 3   15. 2   17.  $\frac{8}{3}$    19. -10



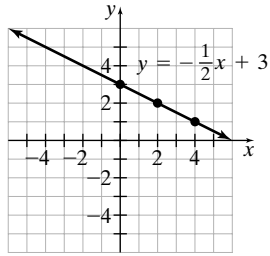


R19 • Respuestas

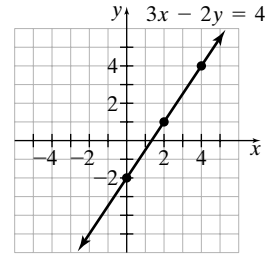
27.



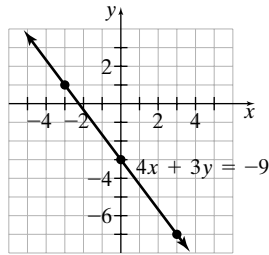
29.



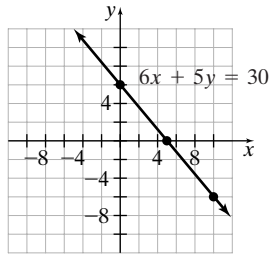
31.



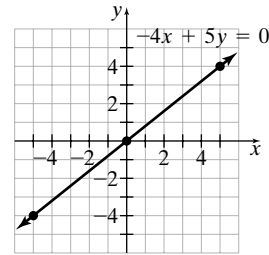
33.



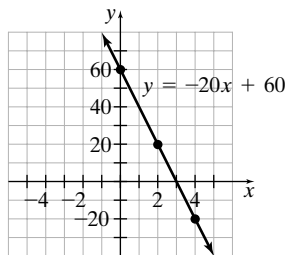
35.



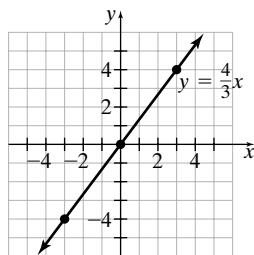
37.



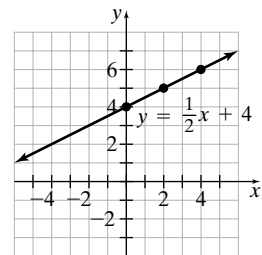
39.



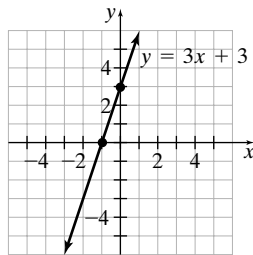
41.



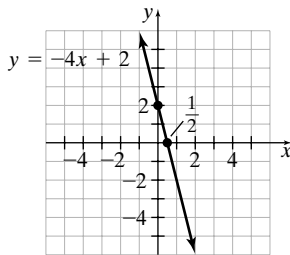
43.



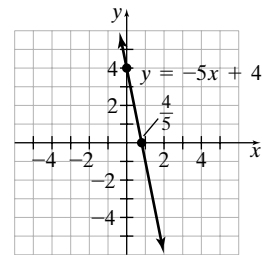
45.



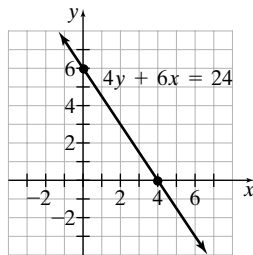
47.



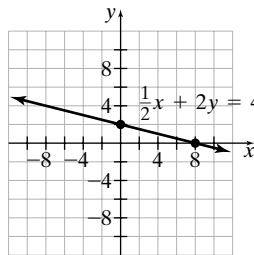
49.



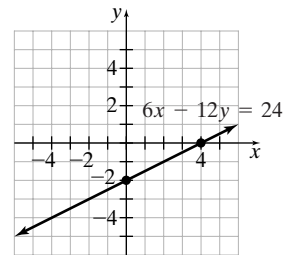
51.



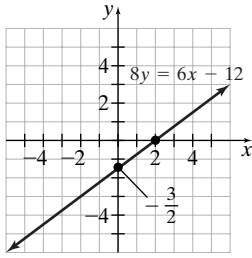
53.



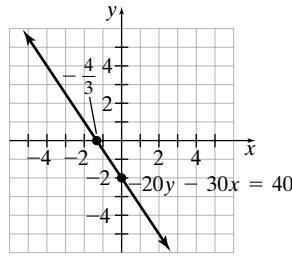
55.



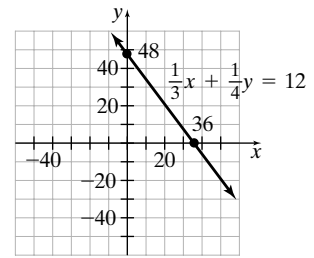
57.



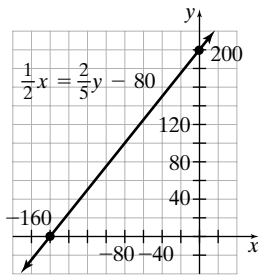
59.



61.



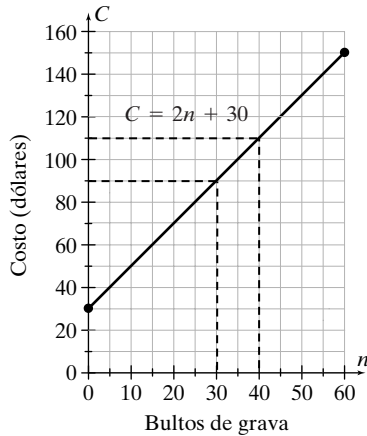
63.



65.  $x = -2$  67.  $y = 6$  69. 4 71. 2 73. Sí

75. a)  $C = 2n + 30$

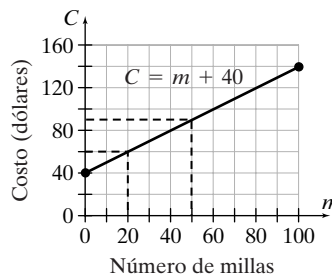
b)



75. c) \$90 d) 40 bultos

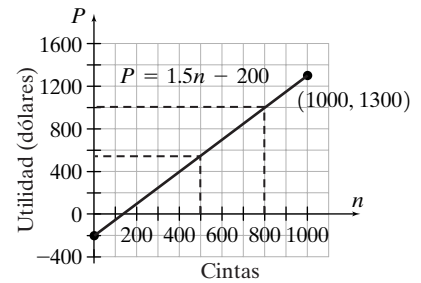
77. a)  $C = m + 40$

b)



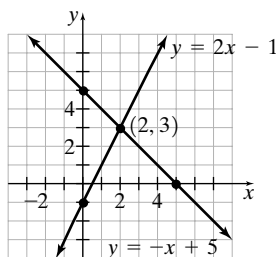
77. c) \$90 d) 20 millas

79. a)



79. b) \$550 c) 800 cintas

81. 5; 4 83. 6; 4 85. a)



85. b) (2, 3) c) Sí d) No 88. -18 89. 6.67 onzas 90. 9, 28

91.  $\frac{50yz}{x}$  92.  $\frac{3x^2 - 8x + 1}{(x-2)(x-3)}$  93.  $5, \frac{7}{3}$

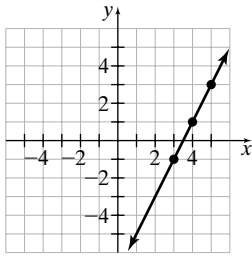
### Conjunto de ejercicios 7.3

1. La pendiente de una recta es la razón del cambio vertical al cambio horizontal entre cualesquiera dos puntos de la recta. 3. Sube de izquierda a derecha. 5. Rectas que suben de izquierda a derecha tienen pendiente positiva; rectas que descienden de izquierda a derecha tienen pendiente negativa. 7. No, ya que no podemos dividir entre 0, la pendiente está indefinida. 9. Las pendientes son iguales.

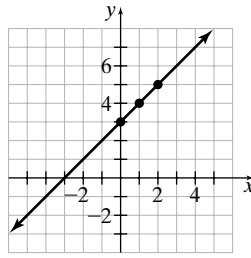
11. 2 13.  $\frac{1}{2}$  15. 0 17. 0 19. Indefinida 21.  $-\frac{3}{8}$  23.  $\frac{2}{3}$  25.  $m = 2$  27.  $m = -2$  29.  $m = -\frac{4}{7}$  31.  $m = \frac{7}{4}$  33.  $m = 0$   
35. Indefinida 37.  $m = 0$

**R21 • Respuestas**

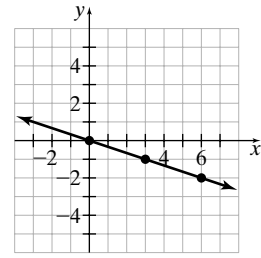
39.



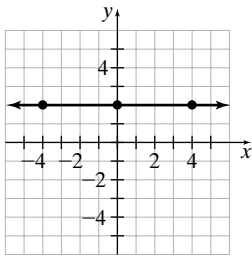
41.



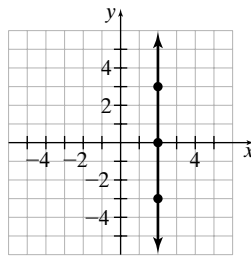
43.



45.

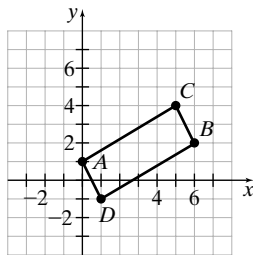


47.



49. Paralela 51. Perpendicular 53. Perpendicular 55. Ninguna 57. Ninguna 59. Paralela 61. Paralela 63. Perpendicular 65. 2 67.  $\frac{1}{4}$  69. Primera 71. a)  $-\frac{23}{4}$  b) 11 73. -4 75.  $-\frac{1}{8}$  77.  $\frac{225}{68}$

79. a)



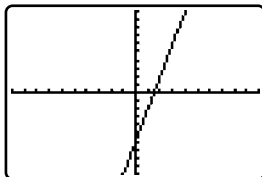
b)  $AC, m = \frac{3}{5}$ ;  $CB, m = -2$ ;  $DB, m = \frac{3}{5}$ ;  $AD, m = -2$  c) Sí, sus lados opuestos son paralelos

81. a)  $AB, m = 4$ ;  $BC, m = -2$ ;  $CD, m = 4$  b)  $[4 + (-2) + 4]/3 = 2$  c)  $AD, m = 2$  d) Sí

e) Las respuestas varían. 83. 0 84. a)  $\frac{3}{2}$  b) 0 85.  $2x + 15$  86. -3 87. Intersección x: (3, 0); intersección y: (0, -5).

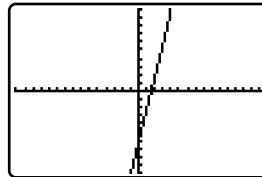
**Cómo utilizar su calculadora graficadora, 7.4**

1. a)



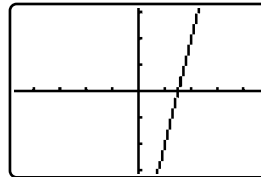
-10, 10, 1, -10, 10, 1

b)



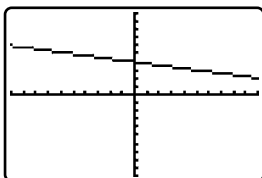
-15.2, 15.2, 1, -10, 10, 1

c)



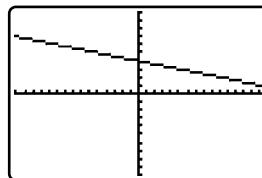
-4.7, 4.7, 1, -3.1, 3.1, 1

2. a)



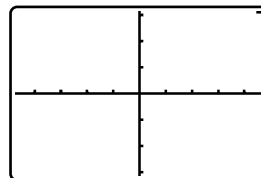
-10, 10, 1, -10, 10, 1

b)



-15.2, 15.2, 1, -10, 10, 1

c)

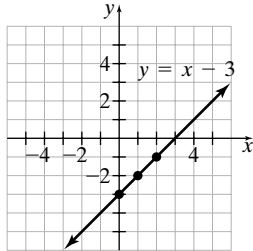


-4.7, 4.7, 1, -3.1, 3.1, 1

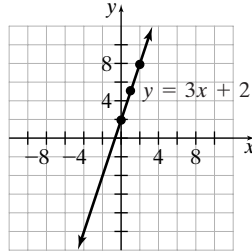
**Conjunto de ejercicios 7.4** 1.  $y = mx + b$  3.  $y = 3x - 5$  5. Escriba las ecuaciones en la forma pendiente-ordenada al origen. Si las pendientes son iguales y las intersecciones  $y$  son diferentes, las rectas son paralelas.

7.  $y - y_1 = m(x - x_1)$  9. 4; (0, -6) 11.  $\frac{4}{3}$ ; (0, -5)

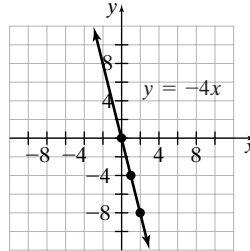
13. 1; (0, -3)



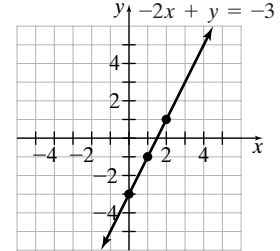
15. 3; (0, 2)



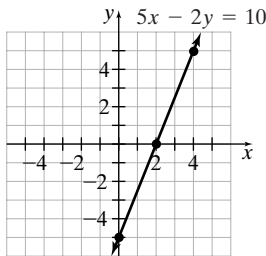
17. -4; (0, 0)



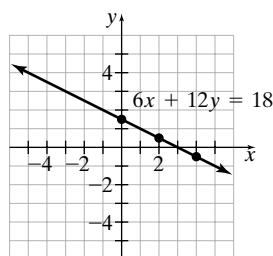
19. 2; (0, -3)



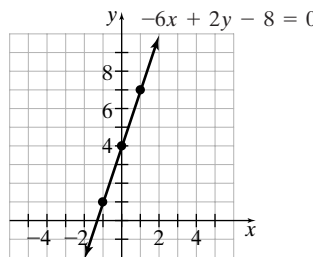
21.  $\frac{5}{2}$ ; (0, -5)



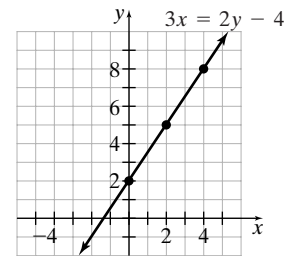
23.  $-\frac{1}{2}$ ;  $(0, \frac{3}{2})$



25. 3; (0, 4)



27.  $\frac{3}{2}$ ; (0, 2)



29.  $y = x - 2$  31.  $y = -\frac{1}{3}x + 2$  33.  $y = \frac{1}{3}x + 5$  35.  $y = -3x + 4$  37. Paralela 39. Perpendicular 41. Paralela


43. Ninguna 45. Perpendicular 47. Ninguna 49.  $y = 3x + 2$  51.  $y = -3x - 7$  53.  $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$  55.  $y = \frac{2}{5}x + 6$

57.  $y = 3x + 10$  59.  $y = -\frac{3}{2}x$  61.  $y = \frac{1}{2}x - 2$  63.  $y = 6.3x - 4.5$  65. a)  $y = 5x + 60$  b) \$210

67. a) Forma pendiente-ordenada al origen b) Forma punto pendiente c) Forma punto pendiente

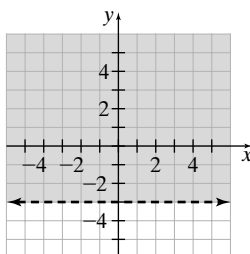
69. a) No b)  $y + 4 = 2(x + 5)$  c)  $y - 10 = 2(x - 2)$  d)  $y = 2x + 6$  e)  $y = 2x + 6$  f) Sí

71. a) 1.465 b)  $f = 1.465m$  c)  $\approx 191.64$  pies por segundo d) 150 pies por segundo e) 55 millas por hora

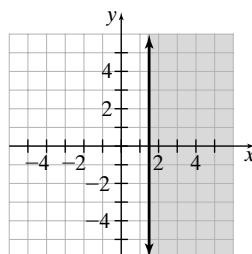
73.  $y = -2x + 4$  75.  $y = \frac{3}{4}x + 2$  78.  $<$  79.  $x \leq -4$ ;  80.  $r = \frac{i}{pt}$  81.  $(x - 2y)(x + 3y)$  82. -5

**Conjunto de ejercicios 7.5** 1. Puntos en la recta que satisface la parte de igualdad de la desigualdad 3. El sombreado está en lados opuestos de la recta.

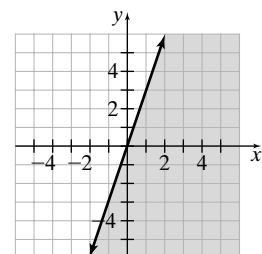
5.

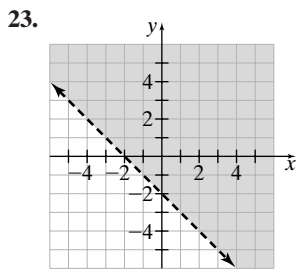
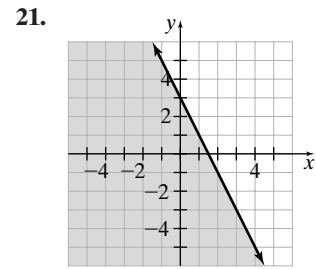
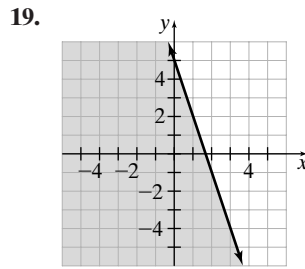
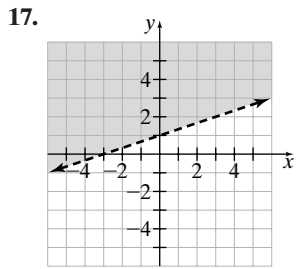
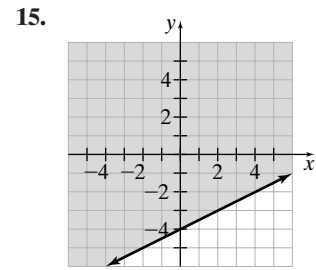
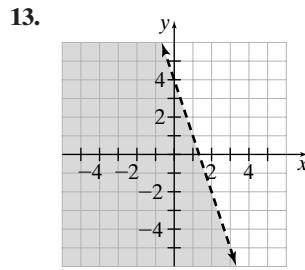
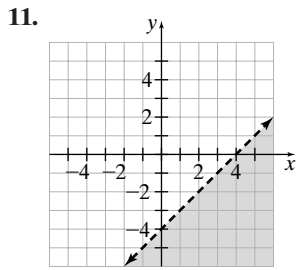


7.



9.





25. a) No b) No c) Sí d) Sí 27. No, podría ser solución de  $ax + by = c$ .  
 29. No, la ubicación de un par ordenado que satisface la primera desigualdad está en un lado de la recta, mientras que un par ordenado que satisface la otra desigualdad está en la recta o bien del otro lado de la recta.

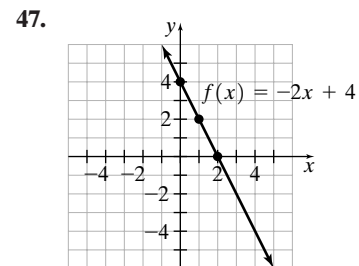
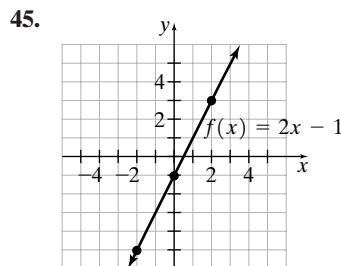
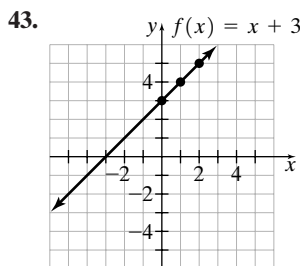
31. a) Menor o igual a b) Mayor o igual a c) Menor o igual a  
 d) Mayor o igual a

33. a), b), y c) 34. a) 2 b) 2, 0 c) 2, -5, 0,  $\frac{2}{5}$ , -6.3,  $-\frac{23}{34}$  d)  $\sqrt{7}$ ,  $\sqrt{3}$   
 e) 2, -5, 0,  $\sqrt{7}$ ,  $\frac{2}{5}$ , -6.3,  $\sqrt{3}$ ,  $-\frac{23}{34}$

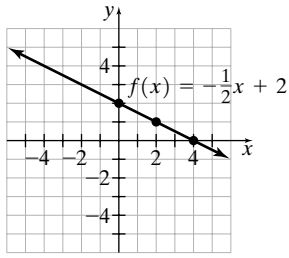
35.  $-\frac{2}{3}$  36.  $2x - 3 + \frac{6}{x}$  37.  $\frac{1}{x + 2y}$

**Conjunto de ejercicios 7.6**

1. Una relación es cualquier conjunto de pares ordenados. 3. Una función es un conjunto de pares ordenados en los que el primer componente corresponde con exactamente un segundo componente.  
 5.a) El dominio es el conjunto de primeros componentes en el conjunto de pares ordenados. b) El rango es el conjunto de segundos componentes en el conjunto de pares ordenados. 7. No, cada  $x$  debe tener una única  $y$  para que sea función.  
 9. Función; Dominio:  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ; Rango:  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  11. Relación; Dominio:  $\{1, 2, 3, 5, 7\}$ ; Rango:  $\{-2, 0, 2, 4, 5\}$  13. Función; Dominio:  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ; Rango:  $\{-4, -1, 0, 1, 2\}$  15. Relación; Dominio:  $\{0, 1, 3\}$ ; Rango:  $\{-3, 0, 2, 5\}$  17. Función; Dominio:  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ; Rango:  $\{3\}$  19.a)  $\{(1, 4), (2, 5), (3, 5), (4, 7)\}$  b) Función. 21.a)  $\{(-5, 4), (0, 7), (6, 9), (6, 3)\}$  b) No es función 23. Función 25. No es función 27. Función 29. Función 31. No es función 33. Función 35.a) 14 b) -2 37.a) 31 b) -1 39.a) 4 b) 14 41.a) 3 b) 5



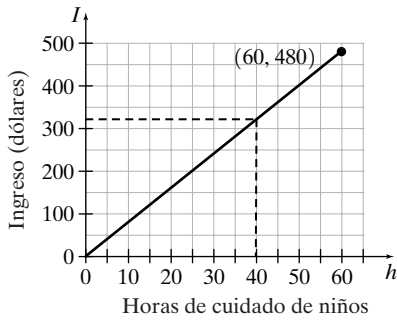
49.



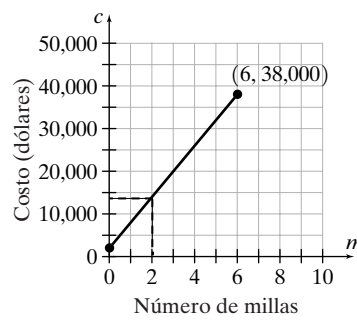
51. No, algún valor de  $x$  debe corresponder a dos valores de  $y$ .

53. Sí, pasa la prueba de la recta vertical.

55. a)

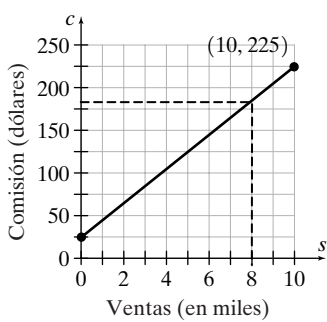


b) \$320 57. a)

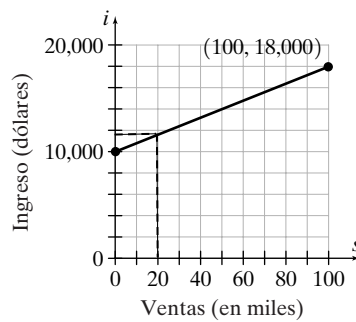


b) \$14,000

59. a)



b) \$185 61. a)



b) \$11,600

63. Sí, pasa la prueba de la recta vertical. 65. No, la recta vertical  $x = 1$  interseca a la gráfica en más de un punto.

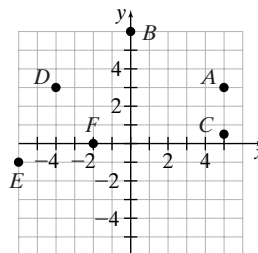
67. a)  $\frac{29}{8}$  b)  $\frac{29}{9}$  c) 4.42 71.  $\frac{8}{63}$  72. -14 73. 13 millas 74.  $(5x + 11y)(5x - 11y)$  75.  $\frac{3x^2}{y}$

76. Una gráfica es una ilustración de un conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación.

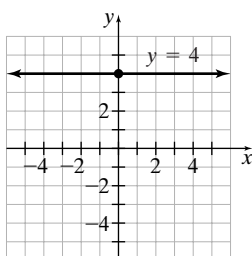
**Ejercicios de repaso del capítulo 1.**

2. No son colineales 3. a), b) y d)

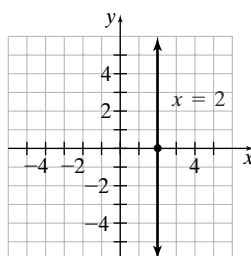
4. a) 2 b) -4 c)  $\frac{16}{3}$  d)  $\frac{8}{3}$



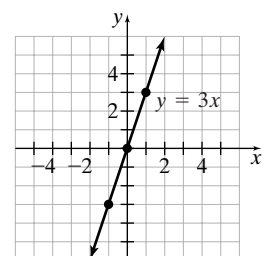
5.



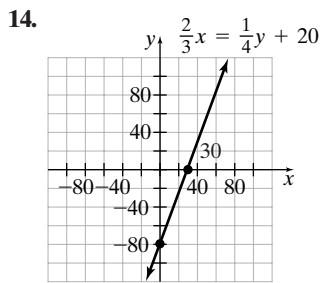
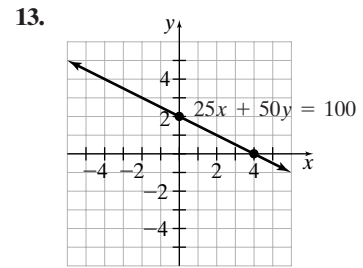
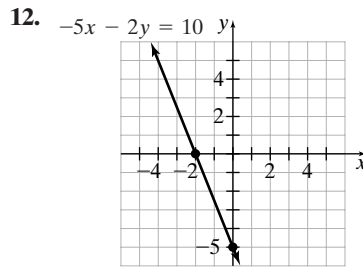
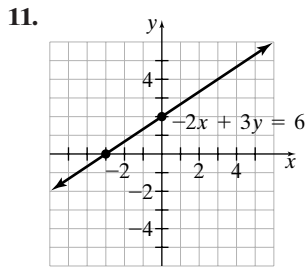
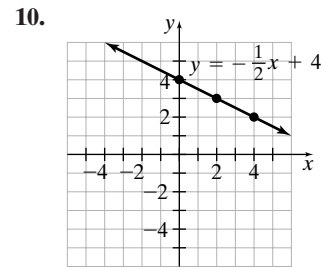
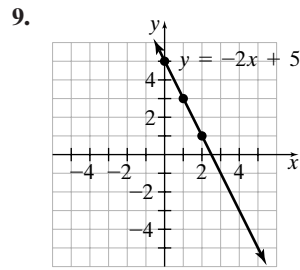
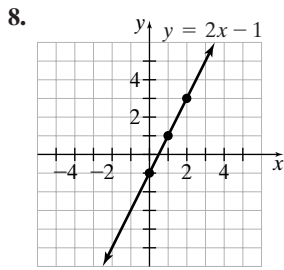
6.



7.



R25 • Respuestas



15.  $-\frac{9}{5}$  16.  $-\frac{1}{12}$  17.  $-2$  18.  $0$  19. Indefinida

20. La pendiente de una recta es la razón del cambio vertical al cambio horizontal entre cualesquiera dos puntos de la recta.

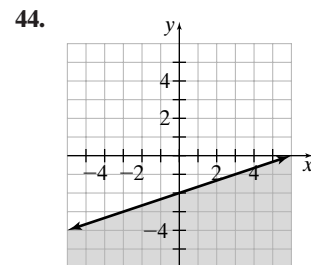
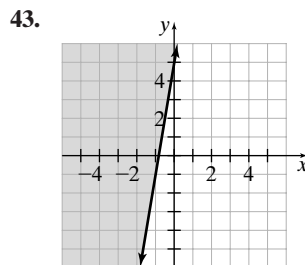
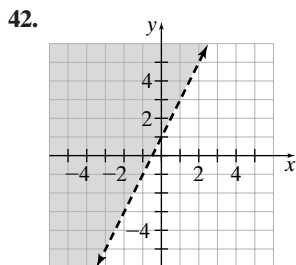
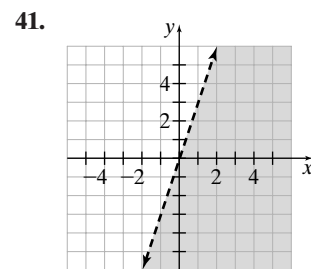
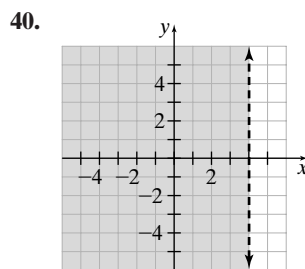
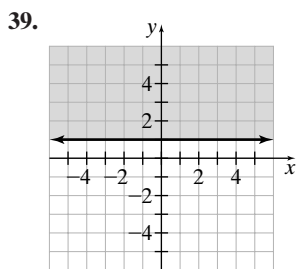
21.  $-2$  22.  $\frac{1}{4}$  23. Ninguna 24. Perpendicular

25. a)  $28$  b)  $-49$  26.  $m = -\frac{6}{7}; (0, 2)$

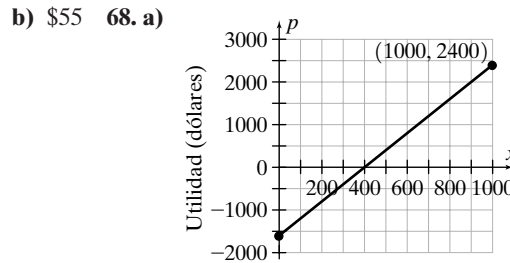
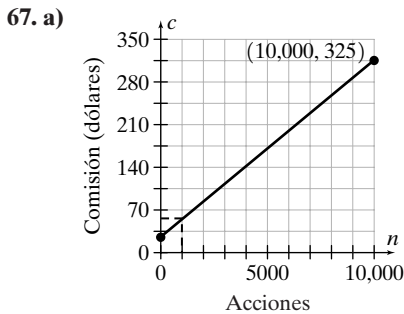
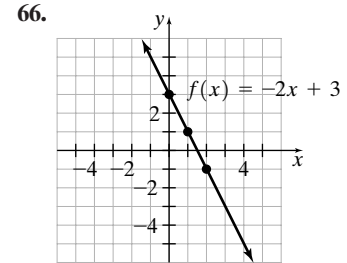
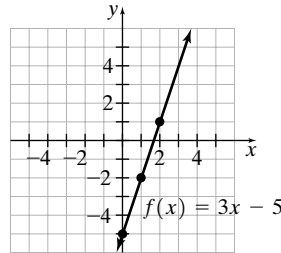
27. La pendiente está indefinida; no existe intersección con el eje  $y$  28.  $m = 0; (0, -3)$

29.  $y = 3x - 3$  30.  $y = -\frac{1}{2}x + 2$  31. Paralela

32. Perpendicular 33.  $y = 3x - 2$  34.  $y = -\frac{2}{3}x + 4$  35.  $y = 2$  36.  $x = 4$  37.  $y = -\frac{7}{2}x - 4$  38.  $x = -4$



45. Función; Dominio:  $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ ; Rango:  $\{-3, -1, 2, 4, 5\}$  46. No es una función; Dominio:  $\{3, 4, 6, 7\}$ ; Rango:  $\{0, 1, 2, 5\}$   
 47. No es función; Dominio:  $\{3, 4, 5, 6\}$ ; Rango:  $\{-3, 1, 2\}$  48. Función; Dominio:  $\{-2, 3, 4, 5, 9\}$ ; Rango:  $\{-2\}$  49.a)  $\{(1, 3), (4, 5), (7, 2), (9, 2)\}$  b) Función 50.a)  $\{(4, 1), (6, 3), (6, 5), (8, 7)\}$  b) No es función 51.a) Dominio:  $\{\text{Mary, Pete, George, Carlos}\}$ ; Rango:  $\{\text{Manzana, Naranja, Uva}\}$  b) No es función 52.a) Dominio:  $\{\text{Sarah, Jacob, Kristen, Erin}\}$ ; Rango:  $\{\text{Asiento 1, Asiento 2, Asiento 3, Asiento 4}\}$  b) No es función 53.a) Dominio:  $\{\text{Azul, Verde, Amarillo}\}$ ; Rango:  $\{\text{Paul, María, Lalo, Due}\}$  b) Función 54.a) Dominio:  $\{1, 2, 3, 4\}$ ; Rango:  $\{A, B, C\}$  b) Función 55. Función 56. No es función 57. Función 58. Función 59.a) 2 b)  $-34$  60.a) 11 b)  $-37$  61.a)  $-4$  b)  $-8$  62.a) 12 b) 76 63. Sí, pasa la prueba de la recta vertical. 64. Sí, cada año tiene un porcentaje único. 65.



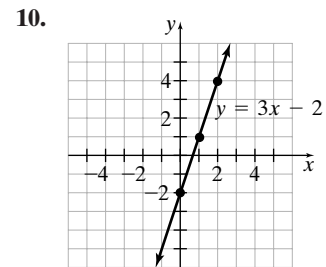
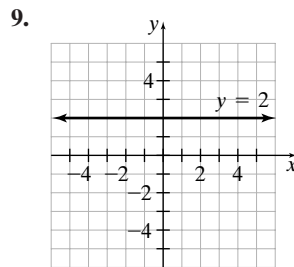
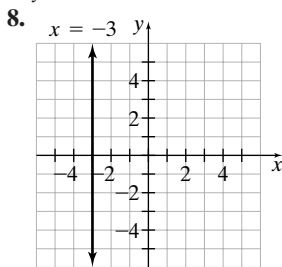
b) \$0

**Examen de práctica del capítulo**

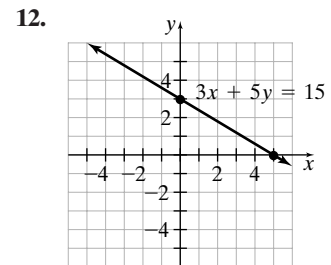
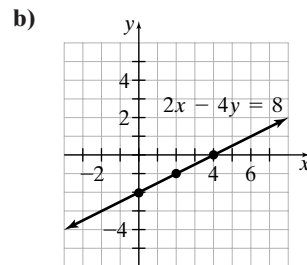
1. Una gráfica es una ilustración del conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación.

2. a) IV b) III 3. a)  $ax + by = c$  b)  $y = mx + b$  c)  $y - y_1 = m(x - x_1)$  4. b) y d) 5.  $-\frac{4}{3}$  6.  $\frac{4}{9}; (0, -\frac{5}{3})$

7.  $y = -x - 1$



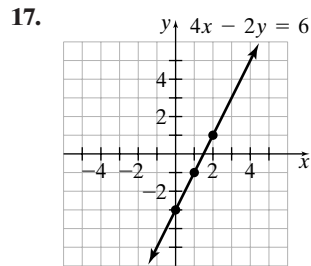
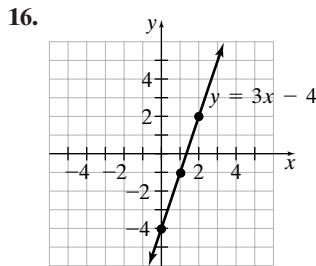
11. a)  $y = \frac{1}{2}x - 2$



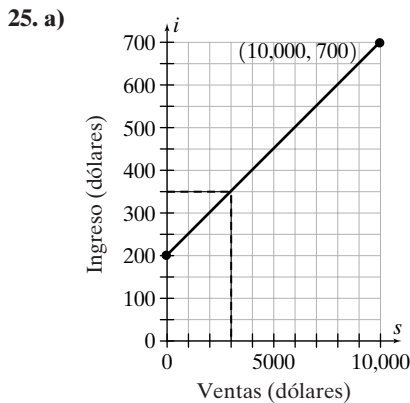
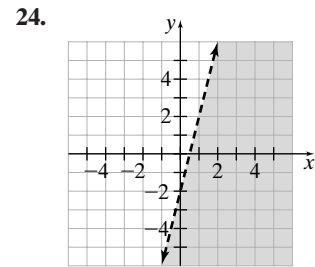
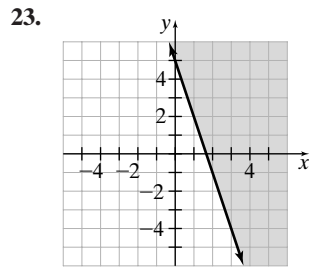
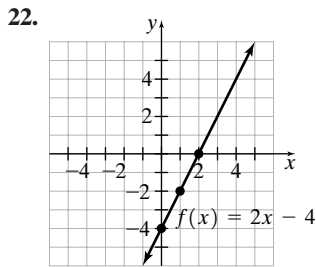


**R27 • Respuestas**

13.  $y = 4x - 13$  14.  $y = -\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}$  15. Las rectas son paralelas, ya que tienen la misma pendiente pero diferente intersección  $y$ .



18. Un conjunto de pares ordenados en los que cada primer componente corresponde con exactamente un segundo componente. 19. a) No es función; 1, un primer componente, está relacionado con más de un valor b) Dominio:  $\{1, 3, 5, 6\}$ ; Rango:  $\{-4, 0, 2, 3, 5\}$  20. a) Función; pasa la prueba de la recta vertical b) No es función; se puede dibujar una recta que interseque a la gráfica en más de un punto 21. a) 14 b) 9

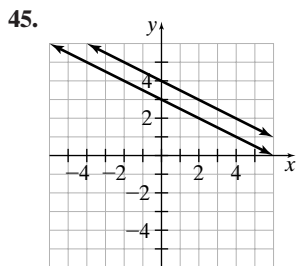
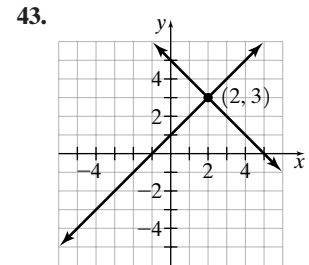
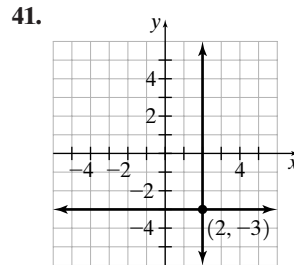
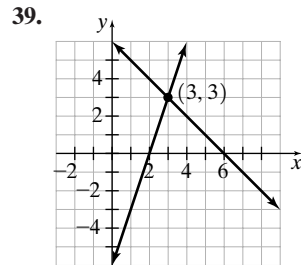
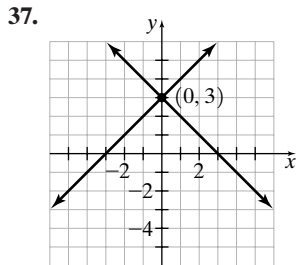


**CAPÍTULO 8**

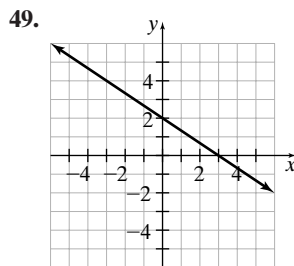
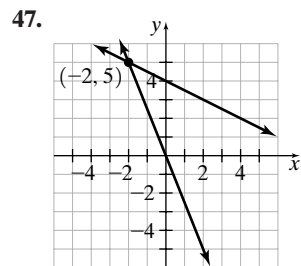
- Cómo utilizar su calculadora graficadora, 8.1** 1.  $(-3, -4)$  2.  $(-4, 3)$  3.  $(3.1, -1.5)$   
4.  $(-0.6, 4.8)$

- Conjunto de ejercicios 8.1** 1. La solución para un sistema de ecuaciones representa los pares ordenados que satisfacen todas las ecuaciones en el sistema. 3. Escriba las ecuaciones en la forma pendiente-ordenada al origen y

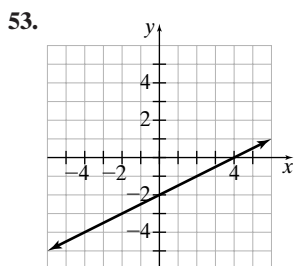
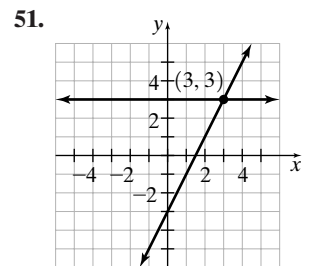
compare sus pendientes e intersecciones  $y$ . Si las pendientes son diferentes, el sistema tiene exactamente una solución. Si las pendientes son iguales y las intersecciones  $y$  son diferentes, el sistema no tiene solución. Si las pendientes y las intersecciones  $y$  son iguales, el sistema tiene un número infinito de soluciones. **5.** El punto de intersección sólo puede estimarse **7. c)** **9. a)** **11.** Ninguno **13. a), c)** **15. a)** **17.** Consistente; una solución **19.** Dependiente; un número infinito de soluciones **21.** Consistente; una solución **23.** Inconsistente; no hay solución **25.** Una solución **27.** No hay solución **29.** Una solución **31.** No hay solución **33.** Número infinito de soluciones **35.** No hay solución



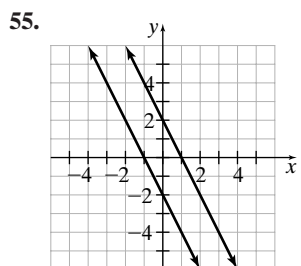
Inconsistente



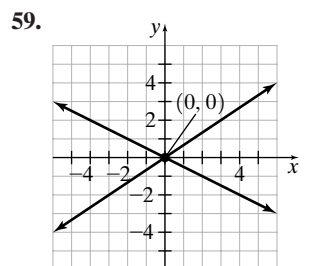
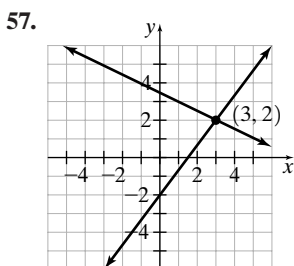
Dependiente



Dependiente

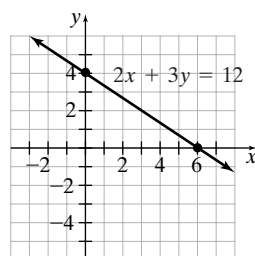


Inconsistente



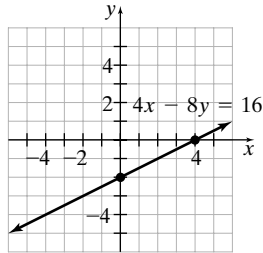
**61.** Las rectas son paralelas; tienen la misma pendiente pero diferentes intersecciones  $y$ . **63.** El sistema tiene un número infinito de soluciones. Si las dos rectas tienen dos puntos en común entonces deben ser la misma recta. **65.** El sistema no tiene solución. Las rectas paralelas no se intersectan **67.** Una;  $(5, 3)$  **69.** 6 años **71.** 6 horas **79.**  $-2x + 18$  **80.** 1 **81.**  $-(x - 7)$

**82.**  $\frac{1}{3}, 6$  **83. a)**  $(6, 0), (0, 4)$  **b)**



**Conjunto de ejercicios 8.2**

1. La  $x$  en la primera ecuación, ya que 6 y 12 son divisibles entre 3. 3. Obtendrá un enunciado falso, como  $3 = 0$  5. (4, 1) 7. (-1, -1) 9. No hay solución 11. (3, -8) 13. Un número infinito de soluciones 15. (3, 5) 17. Un número infinito de soluciones 19. (2, 1) 21. No hay solución 23. (-1, 0) 25.  $\left(-\frac{12}{7}, \frac{6}{35}\right)$  27. 36, 43 29. Ancho: 8 pies, largo: 12 pies 31. Billy: \$296, Jean: \$430 33. \$15,000 35.a) 16 meses b) Sí 37.a) 1.25 horas b) Registro en el odómetro 155 millas 39. a)  $T = 180 - 10t$  b)  $T = 20 + 6t$  c) 10 minutos d) 80 °F 41. 7.14 años 42.  $18x^2 + 9x - 14$  43.



44. Pendiente:  $\frac{3}{5}$ ; intersección  $y$ :  $\left(0, -\frac{8}{5}\right)$  45.  $y = 2x + 4$

**Conjunto de ejercicios 8.3**

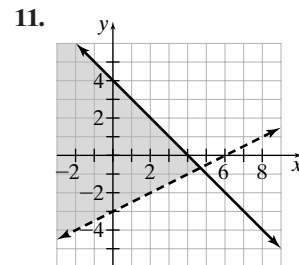
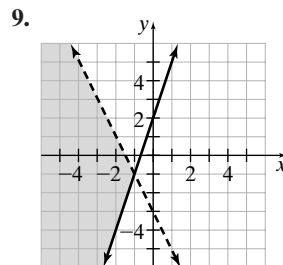
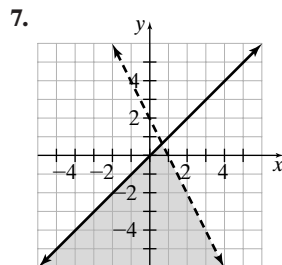
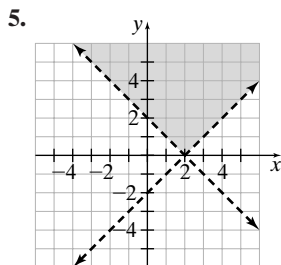
1. Multiplique la ecuación de arriba por 2. 3. Obtendrá un enunciado falso, como  $0 = 6$ . 5. (5, 1) 7. (2, 3) 9.  $\left(4, \frac{11}{2}\right)$  11. No hay solución 13. (-8, -26) 15.  $\left(-\frac{3}{2}, -3\right)$  17. (-2, 2) 19. (3, -1) 21. Un número infinito de soluciones. 23. (1, 2) 25. No hay solución 27. (0, 0) 29.  $\left(10, \frac{15}{2}\right)$  31. (-6, -12) 33.  $\left(\frac{20}{39}, -\frac{16}{39}\right)$  35.  $\left(\frac{14}{5}, -\frac{12}{5}\right)$  37. No hay solución 39. Primer número: 12, segundo número: 4 41. Primer número: 6, segundo número: 4 43. Ancho: 3 pulgadas, largo: 6 pulgadas 45. Ancho: 8 pulgadas, largo: 10 pulgadas 47. Las respuestas varían. 49. a) (200, 100) b) La misma solución; al dividir ambos lados de una ecuación entre un número distinto de cero no cambia la solución. 51. (8, -1) 53. (1, 2, 3) 55. 125 56. 7 57.  $2x^2y - 9xy + 4y$  58.  $32a^6b^9c^5$  59.  $(y + c)(x - a)$  60. 14

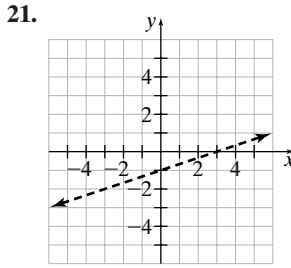
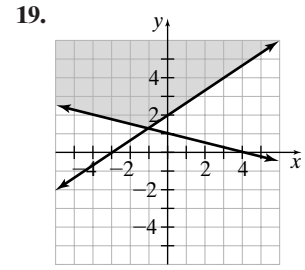
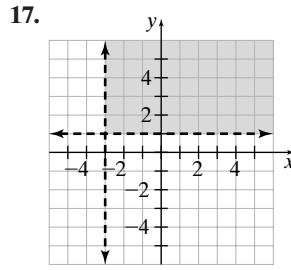
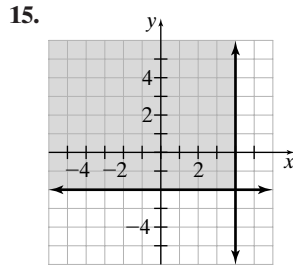
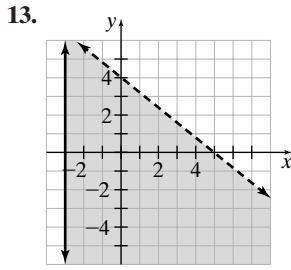
**Conjunto de ejercicios 8.4**

1. 17.24 3.  $A = 36^\circ, B = 54^\circ$  5.  $A = 102^\circ, B = 78^\circ$  7. Ancho = 390 pies, largo = 740 pies 9. 70 acres de maíz, 30 acres de trigo 11. Kayak, 4.05 millas por hora; corriente, 0.65 millas por hora 13. 20 años 15. Adultos: 12; niños: 15 17. a) 1,400 copias b) Office Copier Depot 19. \$2,500 al 8%; \$5,500 al 10% 21. a) 15 yardas cuadradas b) Tom Taylor 23. Dave: 57 millas por hora, Alice: 72 millas por hora 25. Melissa, 60 millas por hora; Elizabeth, 64 millas por hora 27. 0.5 hora 29.  $\approx 0.68$  hora 31. 4 litros de 15%; 6 litros de 40% 33. 180 mosaicos 35. 70 galones del 5%; 30 galones sin grasa 37.  $2\frac{2}{3}$  onzas de bebida,  $5\frac{1}{3}$  onzas de jugo 39. 19.8 años 41. 1.125 millas 43. 45 minutos 45. a) Propiedad conmutativa de la suma b) Propiedad asociativa de la multiplicación c) Propiedad distributiva 46. ancho = 3 pies, largo = 8 pies 47. -2, 2 48. Una gráfica es una ilustración del conjunto de puntos que satisface una ecuación.

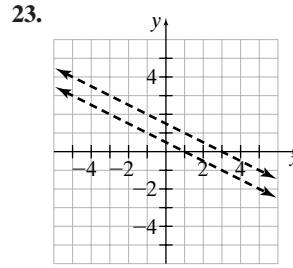
**Conjunto de ejercicios 8.5**

1. Sí, la solución de un sistema de desigualdades lineales contiene todas las parejas ordenadas que satisfacen ambas desigualdades 3. Sí, cuando las rectas son paralelas. Un posible sistema es  $x + y > 2, x + y < 1$ .



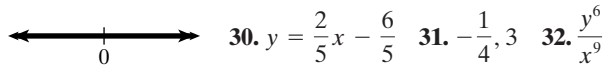


No hay solución



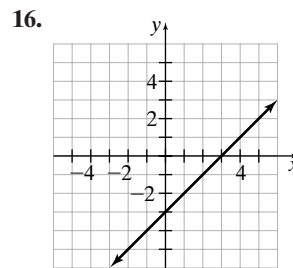
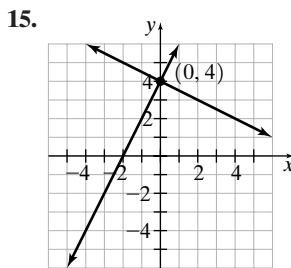
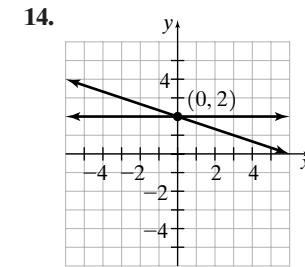
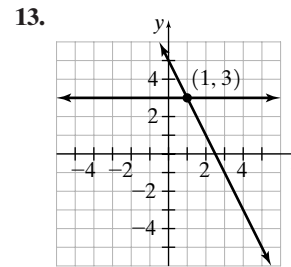
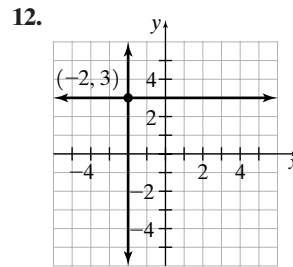
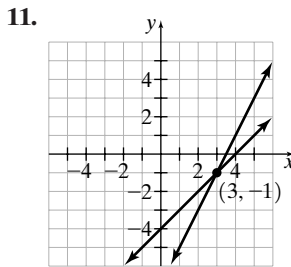
No hay solución

25. No, el sistema puede tener un número infinito de soluciones o bien no tener solución. 29. Todos los números reales;

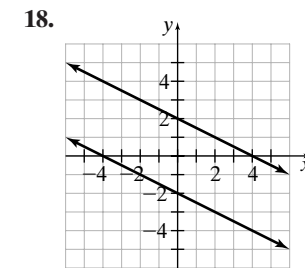
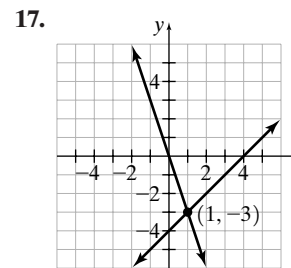


**Ejercicios de repaso del capítulo**

1. c) 2. a) 3. Consistente, una solución 4. Inconsistente, no hay solución 5. Dependiente, un número infinito de soluciones 6. Consistente, una solución 7. No hay solución 8. Una solución 9. Un número infinito de soluciones 10. Una solución



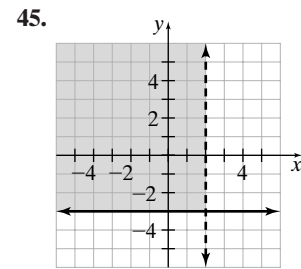
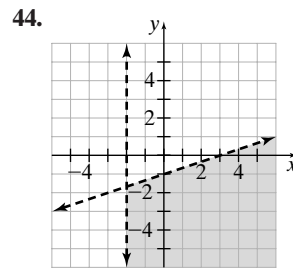
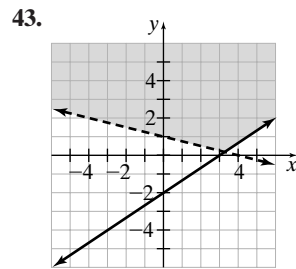
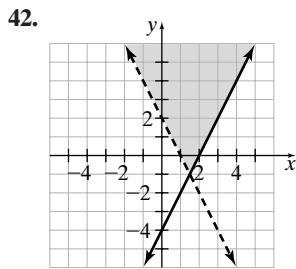
Un número infinito de soluciones



No hay solución

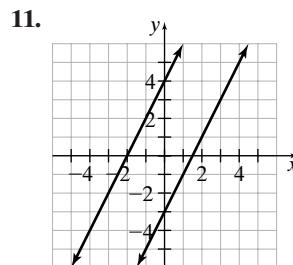
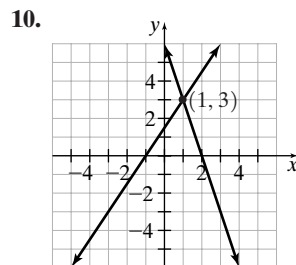
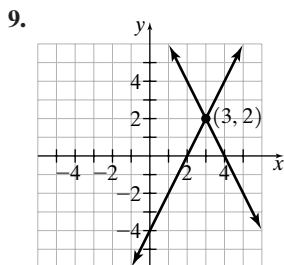
**R31 • Respuestas**

19. (5, 2) 20. (-3, 2) 21. (5, 4) 22. (-18, 6) 23. No hay solución 24. Un número infinito de soluciones 25.  $\left(\frac{5}{2}, -1\right)$   
 26.  $\left(-\frac{2}{7}, \frac{29}{7}\right)$  27. (-8, 2) 28. (1, -2) 29. (-7, 19) 30.  $\left(\frac{32}{13}, \frac{8}{13}\right)$  31.  $\left(-1, \frac{13}{3}\right)$  32. No hay solución 33. Un número  
 infinito de soluciones 34.  $\left(-\frac{78}{7}, -\frac{48}{7}\right)$  35. 19 y 30 36. Aeroplano: 565 millas por hora; viento: 35 millas por hora  
 37. 100 millas 38. \$10,000 a 4%, \$6,000 a 6% 39. Liz: 57 millas por hora; Mary: 63 millas por hora 40. 15 libras de  
 Green Turf, 25 libras de Agway 41. 3 litros de cada uno



**Examen de práctica del capítulo**

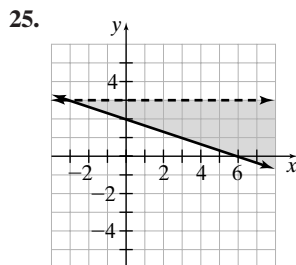
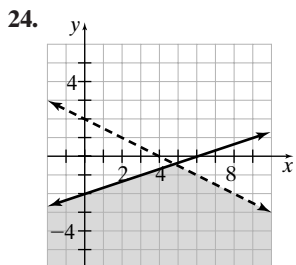
1. b) 2. Inconsistente, no hay solución 3. Consistente, una solu-  
 ción. 4. Dependiente, un número infinito de soluciones 5. No hay solución 6. Una solución 7. Un número infinito de  
 soluciones 8. a) Obtendrá un enunciado falso, como  $6 = 0$ . b) Obtendrá un enunciado verdadero, como  $0 = 0$ .



No hay solución

12.  $\left(\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$  13. (4, 1) 14. (6, 23) 15. (-2, 2) 16.  $\left(\frac{44}{19}, \frac{48}{19}\right)$  17. Un número infinito de soluciones 18. (3, 2)  
 19.  $\left(-\frac{40}{7}, \frac{52}{7}\right)$  20.  $\left(\frac{50}{19}, \frac{8}{19}\right)$  21. 200 millas 22. Dulces de mantequilla:  $13\frac{1}{3}$  libras; dulces de limón:  $6\frac{2}{3}$  libras

23. Lancha rápida de Deja, 60 millas por hora; lancha rápida de Dante, 64 millas por hora

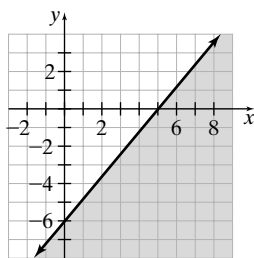


**CAPÍTULO 9**

**Cómo usar su calculadora, 9.1** 1. 3.872983346 2. 12.28820573 3. Error 4. 5.196152423

**Conjunto de ejercicios 9.1** 1. La raíz cuadrada principal de un número real positivo,  $a$ , es el número positivo cuyo cuadrado es igual  $a$ . 3. Las respuestas varían. 5.a) Las respuestas varían. b) Inspeccione la tabla 9.1 7. Sí, ya que  $5^2 = 25$ . 9. No, ya que la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real. 11. Sí, ya que  $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$  es un número racional. 13. 0 15. 1 17.  $-7$  19. 20 21.  $-4$  23. 12 25. 13 27.  $-1$  29. 9 31.  $-11$  33.  $\frac{1}{2}$  35.  $\frac{6}{7}$  37.  $-\frac{5}{6}$  39.  $\frac{9}{7}$  41. 3.4641016 43. 3.8729833 45. 8.9442719 47. 18 49. 9.8488578 51. 1.7320508 53. Falsa 55. Verdadera 57. Falsa 59. Verdadera 61. Verdadera 63. Verdadera 65.  $7^{1/2}$  67.  $(17)^{1/2}$  69.  $(8x)^{1/2}$  71.  $(12x^2)^{1/2}$  73.  $(15ab^2)^{1/2}$  75.  $(62n^3)^{1/2}$  77. Racional:  $9.83, \frac{3}{5}, 0.333\dots, 5, \sqrt{\frac{4}{49}}, \frac{3}{7}, -\sqrt{9}$ ; Irracional:  $\sqrt{\frac{5}{16}}$ ; Imaginario:  $\sqrt{-4}, -\sqrt{-16}$  79. 6 y 7 81. a) Eleve al cuadrado 4.6 y compare el resultado con 20. b) 4.6 83.  $-\sqrt{9}, -\sqrt{7}, -\frac{1}{2}, 2.5, \sqrt{16}, 4.01, 5, 12$  85.  $\sqrt{4} = 2; 6^{1/2} \approx 2.45; -\sqrt{9} = -3; -(25)^{1/2} = -5; (30)^{1/2} \approx 5.48; (-4)^{1/2}$ , número imaginario 87. a) Sí b) No c) No d) Sí e) No 89. a) Sí b) Sí c)  $a$  d) Las respuestas varían. 91.  $x^{3/2}$  93.  $x^3$  95. 52 saltos 96.  $-6$  97.  $-1$  98.  $\frac{4}{11}$  99. 16

**Conjunto de ejercicios 9.2** 1. Las respuestas varían 3. La regla del producto no puede utilizarse cuando los radicandos son negativos. 5.a) Exprese la variable como el producto de dos factores, uno de los cuales tenga un exponente de 1. Utilice la regla del producto para simplificar b)  $x^6\sqrt{x}$  7. a) En una raíz cuadrada simplificada no puede haber factores cuadrados perfectos ni exponentes mayores que 1 en el radicando. b)  $5x^2\sqrt{3x}$  9. Sí 11. No;  $4\sqrt{2}$  13.  $2\sqrt{3}$  15.  $2\sqrt{2}$  17.  $4\sqrt{6}$  19.  $4\sqrt{2}$  21.  $4\sqrt{10}$  23.  $4\sqrt{5}$  25.  $6\sqrt{2}$  27.  $2\sqrt{35}$  29.  $9\sqrt{3}$  31.  $5\sqrt{6}$  33.  $x^3$  35.  $xy^2$  37.  $a^6b^4\sqrt{b}$  39.  $ab^2\sqrt{c}$  41.  $n\sqrt{3n}$  43.  $5ab\sqrt{3a}$  45.  $10a^2b^5\sqrt{3ab}$  47.  $9xy^2\sqrt{3x}$  49.  $6ab^3\sqrt{3bc}$  51.  $6rs^2t^5\sqrt{5rt}$  53. 5 55.  $2\sqrt{30}$  57.  $12\sqrt{5}$  59.  $x\sqrt{21}$  61.  $4ab\sqrt{3a}$  63.  $6xy^2\sqrt{2x}$  65.  $3r^5s^6\sqrt{7}$  67.  $3xy^3\sqrt{10yz}$  69.  $3a^3b^5\sqrt{6}$  71.  $2x$  73.  $13x^4y^6$  75.  $15a^2$  77. 4 79. El exponente de  $x$ , 6; el de  $y$ , 5. 81. Coeficiente, 8; exponente de  $x$ , 12; exponente de  $y$ , 7 83. a)  $13x^3$  b)  $13x^3$  c) Sí 85.  $10\sqrt{2}$  87.  $5\sqrt{50}$  89.  $x^{1/6}$  91.  $2x^{2/5}$  93. Racional, ya que  $\sqrt{6.25} = 2.5$  y 2.5 es un número con decimales que terminan 95. a) 4 pies b) No; el área aumentó  $\sqrt{2}$  o  $\approx 1.414$  veces c) 4 veces 97. a) Sí b) No, por ejemplo  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ . 102. 148.5 pulgadas cuadradas 103.  $\approx 25.13$  pies cúbicos 104.  $\frac{3x+1}{x-1}$  105.  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ ;  $m = -\frac{1}{2}; (0, \frac{3}{2})$  106.  $(\frac{2}{11}, -\frac{15}{11})$



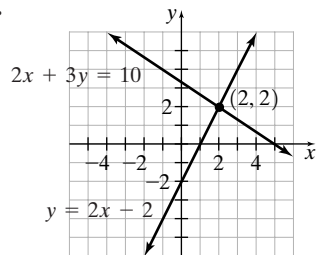
**Conjunto de ejercicios 9.3** 1. Raíces cuadradas semejantes son raíces cuadradas que tienen el mismo radicando. Un ejemplo es  $\sqrt{3}$  y  $5\sqrt{3}$  3. Sólo se pueden sumar o restar raíces cuadradas semejantes. 5.  $2\sqrt{5}$  7.  $-4\sqrt{5}$  9.  $2\sqrt{7} + 6$  11.  $6\sqrt{x}$  13.  $-3\sqrt{y}$  15.  $-4\sqrt{t} - 6$  17.  $\sqrt{x} + 4\sqrt{y} + x$  19.  $5m - 2\sqrt{m} + 2$  21.  $-2\sqrt{7} - 9\sqrt{x}$  23.  $2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$  25.  $7\sqrt{3}$  27.  $11\sqrt{3}$  29.  $16\sqrt{2}$  31.  $-15\sqrt{5} + 35\sqrt{3}$  33.  $28\sqrt{10}$  35.  $16 - 4\sqrt{3}$  37.  $4\sqrt{3} + 3$  39.  $4\sqrt{x} - 4\sqrt{2}$  41.  $y\sqrt{y} + y^2$  43.  $2\sqrt{10} - 2\sqrt{5}$  45.  $x + \sqrt{3x}$  47.  $6\sqrt{a} - a\sqrt{2}$  49.  $x^2 + 4x\sqrt{y}$  51.  $12x^2 - 9x\sqrt{x}$  53.  $24 - 6\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - \sqrt{6}$  55.  $\sqrt{30} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{6} - 6$  57.  $76 - 28\sqrt{7}$  59.  $16 - 8\sqrt{x} + x$  61.  $z\sqrt{15} + 2\sqrt{3z} - 4\sqrt{5z} - 8$  63.  $2r^2 + r\sqrt{s} - 6s$  65.  $2x^2 - 4x\sqrt{2y} + 4y$  67.  $4p^2 + 6p\sqrt{3q} - 12q$  69.  $-2$  71. 14 73.  $x - 9$  75.  $7 - r^2$  77.  $5x - y$  79.  $4x - 9y$  81. a) No b)  $2\sqrt{5}$  83.  $x + 2$  85. Sí 87. 343 89. Perímetro  $4(\sqrt{2} + \sqrt{3})$  unidades; área:  $5 + 2\sqrt{6}$  unidades cuadradas 91. Perímetro:  $\sqrt{7} + \sqrt{15} + \sqrt{22}$  unidades; área:  $\frac{1}{2}\sqrt{105}$

**R33 • Respuestas**

unidades cuadradas **93.** 1 **95.**  $\sqrt{216} = 6\sqrt{6}$  **97.**  $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$  **99.** 48 **101.** 0.05 hora o 3 minutos

**102.**  $3(x + 4)(x - 8)$  **103.**  $\frac{1}{x + 1}$  **104.** 4, 6

**105.**



**Conjunto de ejercicios 9.4** **1.** No puede simplificarse **3.** Se simplifica a  $x\sqrt{2}$  **5.** No puede simplificarse

**7.** En los radicandos no debe existir algún factor que sea cuadrado perfecto, ningún radicando debe tener fracciones, no debe haber raíces cuadradas en los denominadores **9. a)**  $\sqrt{27}$  tiene un cuadrado perfecto, **9. b)** El radicando tiene una fracción **c)** Hay una raíz cuadrada en el denominador. **11.** 3. **13.** 3 **15.** 3

**17.**  $\frac{1}{7}$  **19.**  $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$  **21.**  $\frac{1}{10}$  **23.**  $2x\sqrt{6}$  **25.**  $\frac{3\sqrt{5}}{4y^2}$  **27.**  $\frac{2y}{5x}$  **29.**  $\frac{1}{a^2b}$  **31.**  $2n^2$  **33.**  $\frac{3w^2}{4z}$  **35.**  $\frac{b\sqrt{5}}{c}$  **37.**  $5a^2b^3$  **39.**  $\frac{\sqrt{5}}{5}$

**41.**  $\sqrt{2}$  **43.**  $\sqrt{3}$  **45.**  $\frac{\sqrt{5}}{5}$  **47.**  $\frac{\sqrt{6}}{3}$  **49.**  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  **51.**  $\frac{\sqrt{6}}{4}$  **53.**  $\frac{\sqrt{3x}}{x}$  **55.**  $\frac{\sqrt{ab}}{b}$  **57.**  $\frac{\sqrt{cd}}{d}$  **59.**  $\frac{\sqrt{15x}}{5}$  **61.**  $\frac{x\sqrt{2}}{2}$  **63.**  $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

**65.**  $\frac{t^2\sqrt{5t}}{5}$  **67.**  $\frac{a^4\sqrt{14b}}{14b}$  **69.**  $\frac{\sqrt{5d}}{5d}$  **71.**  $\frac{5\sqrt{3}}{6x^2y^2z}$  **73.**  $\frac{3\sqrt{5x}}{xy^2}$  **75.** 22 **77.** -3 **79.**  $x - y^2$  **81.**  $a - b$  **83.**  $2\sqrt{5} - 4$

**85.**  $\frac{2\sqrt{6} + 2}{5}$  **87.**  $-3\sqrt{3} + 3\sqrt{5}$  **89.**  $\frac{-8\sqrt{5} - 16\sqrt{2}}{3}$  **91.**  $\frac{2\sqrt{y} - 6}{y - 9}$  **93.**  $\frac{24 + 6\sqrt{y}}{16 - y}$  **95.**  $\frac{16\sqrt{y} - 16x}{y - x^2}$

**97.**  $\frac{x\sqrt{x} - x\sqrt{y}}{x - y}$  **99.**  $\frac{3 + \sqrt{3n}}{3 - n}$  **101.**  $\frac{30\sqrt{x} + 5x}{36 - x}$  **103.** Sí **105.** 5.40 **107.** 0.71 **109.** 7.23 **111.** 0.58

**113.**  $\frac{24(4 - \sqrt{3})}{13}$  **115.**  $64x^{10}$  **117.** 2 **119.**  $\frac{-\sqrt{x} - \sqrt{3x}}{2}$  **122.**  $3x - 8 + \frac{7}{x + 4}$  **123.**  $\frac{9}{2}, -4$  **124.**  $\frac{-2x - 3}{(x + 2)(x - 2)}$

**125.** 30 minutos

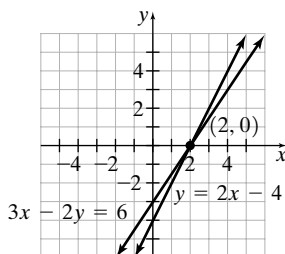
**Conjunto de ejercicios 9.5** **1.** Una ecuación radical es una ecuación que tiene una variable en un radicando. **3.** Es necesario verificar las soluciones, ya que pueden ser extrañas. **5.** Sí **7.** No;  $-\sqrt{64} = -8$  **9.** Sí **11.** No,

$\sqrt{-4} \neq -2$  **13.** 16 **15.** No hay solución **17.** 4 **19.** No hay solución **21.** 100 **23.** 25 **25.** No hay solución **27.** 7 **29.** 6

**31.** 3 **33.** 1 **35.**  $\frac{14}{3}$  **37.** 1 **39.** 1, 9 **41.** No hay solución **43.** -2 **45.** 7 **47.** No hay solución **49.** 3 **51.** 3 **53.** 7

**55.** 11 **57.**  $\sqrt{x + 3} = 7; 46$  **59.**  $\sqrt{x - 2} = \sqrt{2x - 9}; 7$  **61. a)**  $x - 9 = 40$  **b)** 49 **63. a)**  $35 + 2\sqrt{x} - x = 35$

**b)** 0, 4 **65.** 1 **67.** 9 **69.** 9 **73.** **74.** (2, 0) **75.** (2, 0) **76.** Yate: 16 mph; corriente: 2 mph



**Conjunto de ejercicios 9.6** **1.** Un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo de  $90^\circ$  **3.** No; sólo con triángulos rectángulos. **5.** Representan los dos puntos en el plano coordenado en que se está tratando de determinar la distancia entre ellos. **7.** 6 **9.**  $\sqrt{33} \approx 5.74$  **11.**  $\sqrt{170} \approx 13.04$  **13.**  $\sqrt{149} \approx 12.21$  **15.**  $\sqrt{67} \approx 8.19$  **17.**  $\sqrt{202} \approx 14.21$

**19.**  $\sqrt{180} \approx 13.42$  **21.**  $\sqrt{34} \approx 5.83$  **23.**  $\sqrt{193} \approx 13.89$  **25.**  $\sqrt{17,240.89} \approx 131.30$  yardas **27.**  $\sqrt{60} \approx 7.75$  metros

29. 16 pies 31.  $\approx \sqrt{25.48} \approx 5.05$  pies 33.  $\sqrt{16,200} \approx 127.28$  pies 35.  $\sqrt{832} \approx 28.84$  pulgadas  
 37.  $6.28\sqrt{0.11} \approx 2.08$  segundos 39.  $6.28\sqrt{1.925} \approx 8.71$  segundos 41. Casi 365 días terrestres  
 43.  $\sqrt{19.62(6,370,000)} \approx 11,179.42$  metros por segundo 45.  $\sqrt{1,000,000} = 1000$  libras 47.  $\approx 32.66$  pies por segundo  
 49.  $\sqrt{932} \approx 30.53$  pulgadas 50.  $x > 6$  51.  $\frac{x^4}{4y^3}$  52.  $\left(7, -\frac{9}{4}\right)$  53.  $-\frac{16}{15}$

**Cómo utilizar su calculadora, 9.7 (página 603)** 1. 9 2. 2 3.  $\approx 3.76060$  4. 10 5.  $-6$   
 6.  $\approx -4.12891$

**Cómo utilizar su calculadora graficadora, 9.7 (página 604)** 1. 7 2. 6  
 3.  $\approx 2.952591724$  4. 14 5.  $-8$  6.  $\approx -3.981071706$

**Cómo utilizar su calculadora, 9.7 (página 606)** 1. 8 2. 256 3. .04 4.  $\overline{.037}$

- Conjunto de ejercicios 9.7** 1. a) La raíz cuadrada de 8. b) La raíz cúbica de 8. c) La raíz cuarta de 8.  
 3. Escriba el radicando como un producto de un cubo perfecto y otro número. 5. a) Las respuestas varían b)  $y^{7/3}$  7. Sí  
 9. 2 11.  $-3$  13. 2 15. 3 17.  $-1$  19.  $-10$  21.  $2\sqrt[3]{5}$  23.  $2\sqrt[3]{2}$  25.  $3\sqrt[3]{4}$  27.  $2\sqrt[4]{2}$  29.  $5\sqrt[4]{2}$  31.  $x^{7/3}$  33.  $a^{2/5}$  35.  $y^{15/4}$   
 37.  $y^{8/3}$  39.  $x$  41.  $y^7$  43.  $m^6$  45.  $a^{15}$  47.  $x^5$  49.  $\sqrt{m}$  51.  $\sqrt{t}$  53.  $\sqrt[3]{x}$  55.  $\sqrt{w}$  57.  $\sqrt[3]{x^2}$  59.  $\sqrt[4]{z^3}$  61. 9 63. 36 65. 1  
 67. 27 69. 81 71. 1024 73.  $\frac{1}{2}$  75.  $\frac{1}{9}$  77. 2 79. 3 81. 6 83. 25 85. 8 87. 16 89.  $x$  91.  $t$  93.  $r^8$  95.  $a^2$   
 97. Ambos son iguales a 4 99.  $\sqrt[3]{4^2}$  101.  $\sqrt[3]{6^2}$  103.  $\sqrt[4]{5^3}$  105. 3 107. 1 109.  $xy$  111.  $\sqrt[4]{2}$  113. a)  $\sqrt[3]{2^3} = 2$  b)  $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$   
 114.  $-42$  115.  $(3x - 4)(x - 8)$  116. Pendiente:  $\frac{2}{3}$ , intersección  $y$ :  $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$  117.  $\frac{4y^3\sqrt{2xy}}{x}$

- Ejercicios de repaso del capítulo** 1. 9 2. 7 3.  $-8$  4.  $5^{1/2}$  5.  $(26x)^{1/2}$  6.  $(13x^2y)^{1/2}$  7.  $4\sqrt{2}$  8.  $2\sqrt{11}$   
 9.  $3x^3y^2\sqrt{3x}$  10.  $5x^2y^3\sqrt{5}$  11.  $2b^2c^2\sqrt{15ab}$  12.  $6abc^3\sqrt{2c}$  13.  $12\sqrt{10}$  14.  $7y$  15.  $6x\sqrt{y}$  16.  $5xy\sqrt{3}$  17.  $6ab^4\sqrt{a}$   
 18.  $10ab^3\sqrt{b}$  19.  $\sqrt{3}$  20.  $-6\sqrt{5}$  21.  $-2\sqrt{x}$  22. 0 23.  $3\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$  24.  $12\sqrt{10}$  25.  $-10\sqrt{2}$  26.  $25\sqrt{2}$   
 27.  $2\sqrt{5} + 5$  28.  $2 + 3\sqrt{2}$  29.  $x\sqrt{y} - 2y$  30.  $15a^2 + 5a\sqrt{2a}$  31.  $-1$  32. 78 33.  $x^2 - 4y$  34.  $c - 4d$   
 35.  $m^2 - 3m\sqrt{r} - 10r$  36.  $3t + 5s\sqrt{t} - 2s^2$  37.  $15m + 5\sqrt{5mn} - 2n$  38.  $14 - 9\sqrt{7p} + 9p$  39. 4 40.  $\frac{1}{7}$  41.  $\frac{1}{2}$   
 42.  $\frac{3\sqrt{5}}{5}$  43.  $\frac{\sqrt{7n}}{7}$  44.  $\frac{\sqrt{15a}}{6}$  45.  $\frac{x\sqrt{3}}{3}$  46.  $\frac{z^2\sqrt{2}}{4}$  47.  $y^2\sqrt{7}$  48.  $\frac{x\sqrt{2y}}{y^2}$  49.  $\frac{2\sqrt{5a}}{3a^2b}$  50.  $\frac{c\sqrt{14a}}{7a}$  51.  $\frac{-3 - 3\sqrt{6}}{5}$   
 52.  $\frac{15 + 5\sqrt{6}}{3}$  53.  $\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2y}}{4 - y}$  54.  $\frac{2\sqrt{x} + 10}{x - 25}$  55.  $\frac{\sqrt{5x} - \sqrt{15}}{x - 3}$  56.  $\frac{\sqrt{35} + x\sqrt{7}}{5 - x^2}$  57. 36 58. No hay solución. 59. 14  
 60. 8 61. 2 62. 4 63. 2 64. 7 65. 2 66. 26 67.  $\sqrt{125} \approx 11.18$  68.  $\sqrt{12} \approx 3.46$  69.  $\sqrt{61} \approx 7.81$  70.  $\sqrt{135} \approx 11.62$   
 pies 71.  $\sqrt{261} \approx 16.16$  pulgadas 72.  $\sqrt{109} \approx 10.44$  73.  $\sqrt{153} \approx 12.37$  74. 561.18 pulgadas cuadradas  
 75.  $\sqrt{60} \approx 7.75$  millas 76.  $\approx 646$  pies 77. 4 78.  $-4$  79. 2 80. 3 81. 4 82.  $-2$  83.  $2\sqrt[4]{2}$  84.  $2\sqrt[3]{6}$  85.  $3\sqrt[3]{2}$  86.  $2\sqrt[4]{5}$   
 87.  $x^7$  88.  $s^{10}$  89. 1 90. 5 91.  $\frac{1}{9}$  92. 16 93.  $\frac{1}{625}$  94. 343 95.  $z^{11/3}$  96.  $x^{8/3}$  97.  $y^{9/4}$  98.  $x^{5/2}$  99.  $y^{3/2}$  100.  $m^{6/4} = m^{3/2}$   
 101.  $x$  102.  $\sqrt[3]{x^2}$  103.  $a^4$  104.  $x^2$  105.  $q^3$  106.  $d$  107.  $x^6$  108.  $x^6$

- Examen de práctica del capítulo** 1.  $(3x)^{1/2}$  2.  $\sqrt[3]{x^2}$  3.  $y - 4$  4.  $3\sqrt{10}$  5.  $2x\sqrt{3}$  6.  $5x^3y\sqrt{2xy}$   
 7.  $4xy\sqrt{5x}$  8.  $5x^2y^2\sqrt{3y}$  9.  $\frac{1}{5}$  10.  $\frac{c^2}{d}$  11.  $\frac{\sqrt{6}}{6}$  12.  $\frac{3\sqrt{5r}}{5}$  13.  $\frac{2\sqrt{15x}}{3xy}$  14.  $-2 - \sqrt{7}$  15.  $\frac{6\sqrt{x} + 18}{x - 9}$  16.  $11\sqrt{3}$   
 17.  $3\sqrt{y}$  18. 24 19. 4.8 20.  $\sqrt{106} \approx 10.30$  21.  $\sqrt{58} \approx 7.62$  22.  $\frac{1}{81}$  23.  $x^3$  24. 11 metros 25.  $\sqrt{640} \approx 25.30$  pies  
 por segundo.

## CAPÍTULO 10

- Conjunto de ejercicios 10.1** 1. Si  $x^2 = a$ , entonces  $x = \sqrt{a}$  o  $x = -\sqrt{a}$  3. En cualquier rectángulo do-  
 rado, el largo es alrededor de 1.62 veces su ancho. 5. a) 2 b) 1 c) 2 d) No hay una solución real 7. 8,  $-8$  9. 9,  $-9$



**R35 • Respuestas**

11. 13, -13    13. 10, -10    15.  $2\sqrt{5}$ ,  $-2\sqrt{5}$     17. 2, -2    19.  $\sqrt{17}$ ,  $-\sqrt{17}$     21. 3, -3    23.  $\frac{\sqrt{15}}{3}$ ,  $-\frac{\sqrt{15}}{3}$     25.  $\frac{\sqrt{73}}{4}$ ,  $-\frac{\sqrt{73}}{4}$   
 27. 9, -1    29. 6, -12    31. 4, -12    33.  $-6 + 4\sqrt{2}$ ,  $-6 - 4\sqrt{2}$     35.  $-6 + 2\sqrt{5}$ ,  $-6 - 2\sqrt{5}$     37. 10, -4    39. 19, -1  
 41.  $\frac{-3 + 3\sqrt{2}}{2}$ ,  $\frac{-3 - 3\sqrt{2}}{2}$     43.  $\frac{-1 + 2\sqrt{5}}{4}$ ,  $\frac{-1 - 2\sqrt{5}}{4}$     45.  $\frac{7 + 3\sqrt{2}}{2}$ ,  $\frac{7 - 3\sqrt{2}}{2}$     47.  $x^2 = 36$     49. 9  
 51. a)  $3x^2 - 9x + 6 = 0$     b)  $x^2 - 3x + 2 = 0$     53. 4, 17    55. Ancho  $\approx \sqrt{522.25}$  o  $\approx 22.85$  pulgadas, largo  
 $\approx 1.21\sqrt{522.25}$  o  $\approx 27.65$  pulgadas    57. Ancho  $\approx 35.14$  pies, largo  $\approx 56.93$  pies    59. a) Izquierdo,  $x^2$ ; derecho,  $(x + 3)^2$   
 b) 6 pulgadas    c)  $\sqrt{50} \approx 7.07$  pulgadas    d) 9 pulgadas    e)  $\sqrt{92} \approx 9.59$  pulgadas    61.  $s = \sqrt{A}$     63.  $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$   
 65.  $d = \sqrt{\frac{k}{I}}$     67.  $2(2x + 3)(x - 4)$     68.  $\frac{3y - 1}{6y - 1}$     69.  $y = 4x - 1$     70.  $\frac{3\sqrt{5a}}{ab^2}$

**Conjunto de ejercicios 10.2** 1. a) Un trinomio cuadrado perfecto es un trinomio que puede expresarse como el cuadrado de un binomio. b)  $+16$ ; el término constante es el cuadrado de la mitad del coeficiente del término  $x$ .

3. La constante es el cuadrado de la mitad del coeficiente del término  $x$ .    5. 36    7. 2, 5    9. 7, 1    11. -2, -1    13. 4, -2

15. -3    17. 5, -3    19. -4, -6    21. 8, 7    23. 8, -4    25.  $2 + \sqrt{2}$ ,  $2 - \sqrt{2}$     27.  $-3 + \sqrt{5}$ ,  $-3 - \sqrt{5}$     29.  $\frac{-7 + \sqrt{41}}{2}$ ,  
 $\frac{-7 - \sqrt{41}}{2}$     31. 1, -3    33.  $\frac{-9 + \sqrt{73}}{2}$ ,  $\frac{-9 - \sqrt{73}}{2}$     35. 6, -1    37. 4,  $-\frac{1}{3}$     39.  $\frac{-1 + \sqrt{7}}{3}$ ,  $\frac{-1 - \sqrt{7}}{3}$     41. 5, 0    43. 6, 0

45. a)  $x^2 + 20x + 100$     b) Las respuestas varían.    47. 1, -4    49. 0, -6    51. 3, 7    53.  $9 + \sqrt{369}$  o  $\approx 28.21$  pies

55. 2 segundos y 6 segundos    57.  $+28x$  o  $-28x$     59.  $7 + 5\sqrt{2}$ ,  $7 - 5\sqrt{2}$     61.  $\frac{-3 + \sqrt{59}}{10}$ ,  $\frac{-3 - \sqrt{59}}{10}$     63.  $\frac{-1 + \sqrt{193}}{12}$ ,  
 $\frac{-1 - \sqrt{193}}{12}$     65.  $0.75 + \sqrt{3.5625}$ ,  $0.75 - \sqrt{3.5625}$     66.  $\frac{4}{(x + 2)(x - 3)}$     67. Si las pendientes son iguales y las

intersecciones y son diferentes, las ecuaciones representan rectas paralelas.    68.  $\left(\frac{38}{11}, \frac{12}{11}\right)$     69. 3

**Conjunto de ejercicios 10.3** 1. a)  $b^2 - 4ac$     b) Discriminante: mayor que 0, dos soluciones; igual a 0,

una solución; menor que 0, no hay solución real.    3.  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$     5. El primer paso es escribir la ecuación en la forma estándar.    7. Los valores utilizados para  $b$  y  $c$  son incorrectos, ya que la ecuación no se escribió primero en la forma estándar.    9. Dos soluciones reales distintas    11. No hay solución real.    13. Dos soluciones reales distintas    15. Una solución real    17. No hay solución real    19. No hay solución real    21. Dos soluciones reales distintas.    23. Dos soluciones reales distintas    25. Una solución real    27. 4, -2    29. -3, -6    31. 5, 1    33. -5, -6    35. 9, -9    37. 5, 0

39. No hay solución real.    41.  $\frac{7 + \sqrt{17}}{4}$ ,  $\frac{7 - \sqrt{17}}{4}$     43.  $\frac{1}{3}$ ,  $-\frac{1}{2}$     45.  $\frac{7}{2}$ , -1    47. No hay solución real.    49.  $\frac{5}{4}$ , -1

51.  $\frac{9}{2}$ , -1    53.  $\frac{5}{2}$ , 3    55. 3, -5    57. 1, 9    59. 6, 7    61. Ancho = 4 pies; largo = 5 pies    63. 2 pies    65. 9 lados    67. 40 sillas

69.  $\approx 1.11$  segundos y  $\approx 4.52$  segundos    71. a)  $c < 9$     b)  $c = 9$     c)  $c > 9$     73. a)  $c > -3$     b)  $c = -3$     c)  $c < -3$

76. 7, 6    77.  $\frac{5}{3}$ ,  $-\frac{7}{2}$     78. No puede resolverse por factorización;  $\frac{-3 + \sqrt{41}}{4}$ ,  $\frac{-3 - \sqrt{41}}{4}$     79. 3, -3

80.  $\frac{x^2 - 9x + 2}{(2x - 1)(x + 4)(x - 5)}$

**Cómo utilizar su calculadora graficadora, 10.4** 1. (1, -4)    2. (3.5, -2.25)

3. (-0.5, 12.5)    4. (1.75, -21.125)

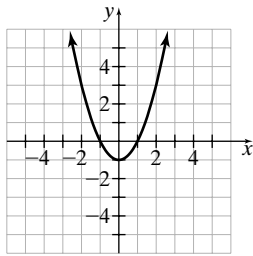
**Conjunto de ejercicios 10.4** 1. Una parábola    3. Las respuestas varían    5. a) Las intersecciones  $x$  son

en donde la gráfica cruza al eje  $x$ .    b) Las intersecciones  $x$  se determinan haciendo  $y = 0$  y despejando  $x$     7. a)  $x = -\frac{b}{2a}$

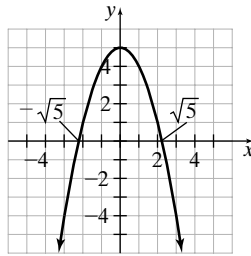
- b) Esta recta se denomina eje de simetría    9.  $x = -2$  (-2, -7), hacia arriba    11.  $x = \frac{3}{2}$ ,  $\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}\right)$ , hacia abajo

13.  $x = \frac{1}{3}, \left(\frac{1}{3}, \frac{25}{3}\right)$ , hacia abajo    15.  $x = -1, (-1, -1)$ , hacia arriba    17.  $x = -\frac{3}{4}, \left(-\frac{3}{4}, \frac{31}{8}\right)$ , hacia arriba    19.  $x = \frac{3}{5}, \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ , hacia abajo

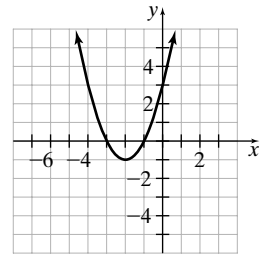
21.



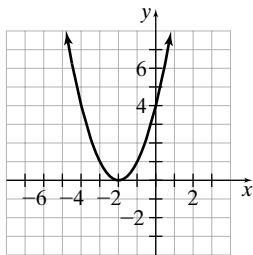
23.



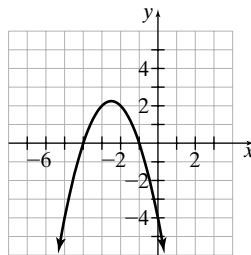
25.



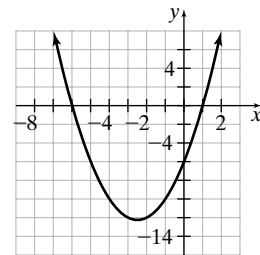
27.



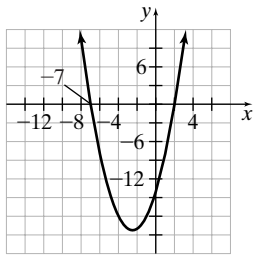
29.



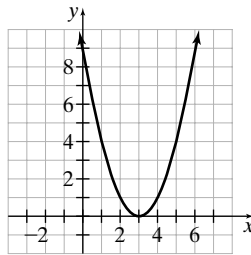
31.



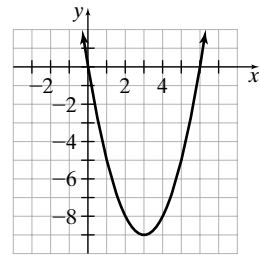
33.



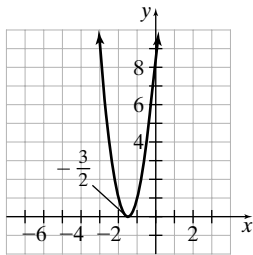
35.



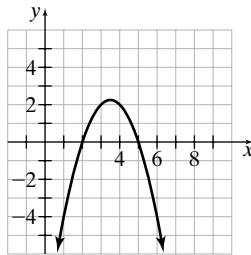
37.



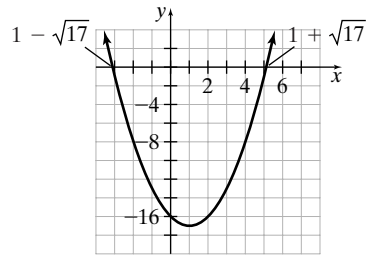
39.



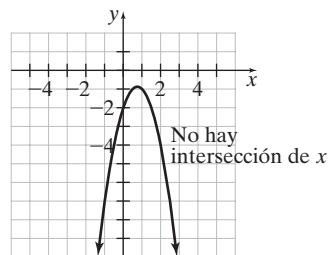
41.



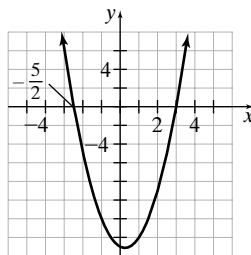
43.



45.

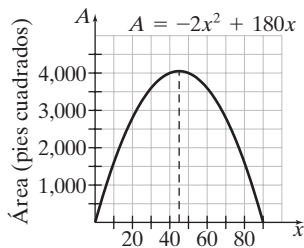


47.



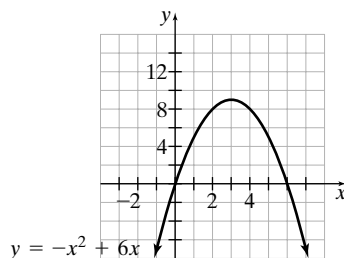
49. Dos    51. Dos    53. Uno    55. Dos    57. Ninguna; el vértice está abajo del eje  $x$  y la parábola abre hacia abajo.    59. Una; el vértice de la parábola está en el eje  $x$ .    61. Sí; si  $y$  se hace igual a 0, ambas ecuaciones tienen las mismas soluciones, 5 y  $-3$ .  
 63. a)  $\approx 255$  pies    b) 4 segundos    c) 8 segundos    d)  $\approx 190$  pies,  $\approx 240$  pies.

65. a)

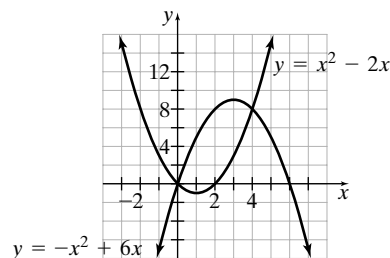


b) 45 pies c) 4050 pies cuadrados

67. a)



b)



c) (0, 0), (4, 8)

69.  $\frac{-x^2 + 2x - 6}{(x + 3)(x - 4)}$  70.  $\frac{27}{7}$  71. (6, -5) 73. 8

**Conjunto de ejercicios 10.5**

1. Sí, todo número real es un número complejo. 3.  $\sqrt{-1}$  5.  $a + bi$   
 7.  $2i$  9.  $10i$  11.  $i\sqrt{15}$  13.  $i\sqrt{23}$  15.  $2i\sqrt{2}$  17.  $2i\sqrt{5}$  19.  $5 + 2i$  21.  $-3 + 5i$  23.  $-1 - 3i$  25.  $-3 - i\sqrt{15}$

27.  $5.2 + 5i\sqrt{2}$  29.  $\frac{1}{2} + 5i\sqrt{3}$  31.  $7 + 3i$  33.  $4 - 11i$  35.  $11 + 5i$  37.  $-2 - 7i$  39. 0 41.  $9 - 4i$  43.  $4i, -4i$

45.  $i\sqrt{10}, -i\sqrt{10}$  47.  $2 + i, 2 - i$  49.  $\frac{-3 + i\sqrt{31}}{4}, \frac{-3 - i\sqrt{31}}{4}$  51.  $\frac{-2 + i\sqrt{14}}{2}, \frac{-2 - i\sqrt{14}}{2}$  53.  $\frac{5 + i\sqrt{119}}{8}, \frac{5 - i\sqrt{119}}{8}$   
 55. Cuando  $c < 0$  57. Cuando  $b^2 - 4ac < 0$  59. 11 60.  $-\frac{5}{3}$  61. 1 62. 13

**Ejercicios de repaso del capítulo**

1. 8, -8 2.  $2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}$  3.  $\sqrt{6} - \sqrt{6}$  4.  $\sqrt{5} - \sqrt{5}$  5.  $2\sqrt{5}, -2\sqrt{5}$

6.  $\sqrt{7}, -\sqrt{7}$  7.  $2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}$  8.  $3 + 2\sqrt{5}, 3 - 2\sqrt{5}$  9.  $\frac{3 + 5\sqrt{2}}{4}, \frac{3 - 5\sqrt{2}}{4}$  10.  $\frac{-4 + \sqrt{30}}{2}, \frac{-4 - \sqrt{30}}{2}$

11. 5, 2 12. 7, 4 13. 17, 1 14. 2, -3 15. 9, -6 16. 1, -6 17.  $\frac{5 + \sqrt{53}}{2}, \frac{5 - \sqrt{53}}{2}$  18.  $-1 + \sqrt{6}, -1 - \sqrt{6}$

19. 8, -4 20. 5, -3 21.  $\frac{4}{3}, -2$  22.  $\frac{5}{3}, \frac{3}{2}$  23. No hay solución real 24. No hay solución real 25. Una solución 26. Dos soluciones

27. Dos soluciones 28. No hay solución real 29. Dos soluciones 30. Dos soluciones 31. 8, 2 32. 11, -4  
 33. 9, 1 34. 2,  $-\frac{3}{5}$  35. 3, -7 36. No hay solución real 37.  $\frac{3}{2}, -\frac{5}{3}$  38.  $\frac{3 + \sqrt{57}}{4}, \frac{3 - \sqrt{57}}{4}$  39.  $\frac{-2 + \sqrt{10}}{2}, \frac{-2 - \sqrt{10}}{2}$

40.  $3 + \sqrt{6}, 3 - \sqrt{6}$  41. No hay solución real 42.  $\frac{3 + \sqrt{33}}{3}, \frac{3 - \sqrt{33}}{3}$  43. 0,  $\frac{3}{7}$  44. 0,  $\frac{5}{2}$  45. 4, 6 46. -7, -8 47. 10, -7

48. -9, 3 49. -6, 10 50. 7, -6 51. 2, -11 52. 0, 5 53. 9, -9 54.  $\frac{1}{2}, -3$  55.  $\frac{5}{2}, 2$  56.  $\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}$  57.  $\frac{3 + 3\sqrt{3}}{2}, \frac{3 - 3\sqrt{3}}{2}$

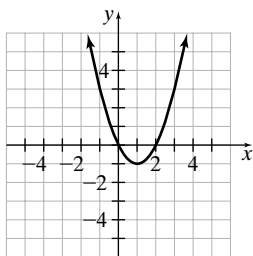
58.  $2, \frac{5}{3}$  59.  $1, -\frac{8}{3}$  60.  $\frac{-3 + \sqrt{33}}{2}, \frac{-3 - \sqrt{33}}{2}$  61. 0,  $\frac{9}{4}$  62. 0,  $-\frac{5}{3}$  63.  $x = 3, (3, -14)$ , hacia arriba

64.  $x = 6, (6, -30)$ , hacia arriba 65.  $x = \frac{3}{2}, (\frac{3}{2}, \frac{19}{4})$ , hacia arriba 66.  $x = -1, (-1, 16)$ , hacia abajo 67.  $x = -\frac{7}{6}, (-\frac{7}{6}, -\frac{13}{12})$ , hacia arriba

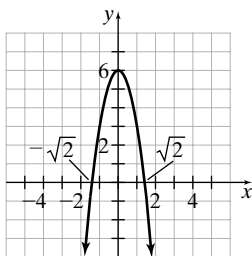
68.  $x = -\frac{5}{2}, (-\frac{5}{2}, \frac{25}{4})$ , hacia abajo 69.  $x = 0, (0, -8)$ , hacia abajo 70.  $x = -\frac{1}{4}, (-\frac{1}{4}, \frac{161}{8})$ , hacia abajo

71.  $x = 1, (1, 9)$ , hacia abajo 72.  $x = -\frac{5}{6}, (-\frac{5}{6}, -\frac{121}{12})$ , hacia arriba

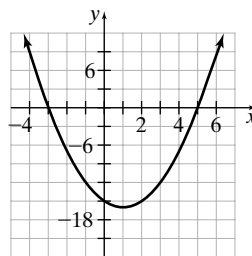
73.

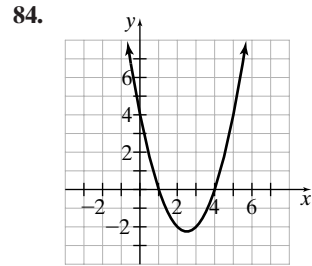
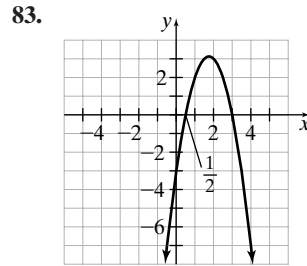
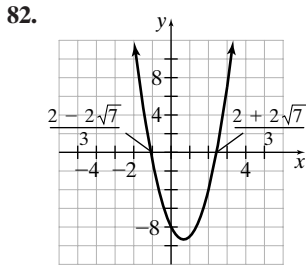
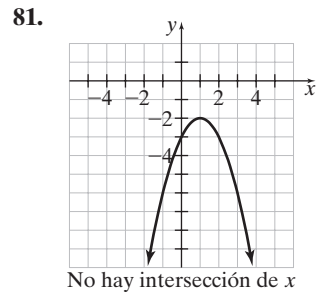
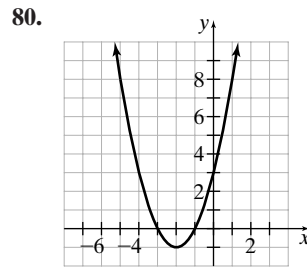
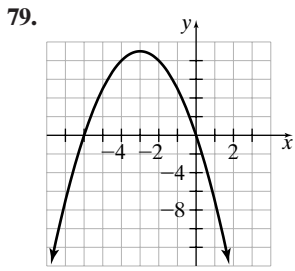
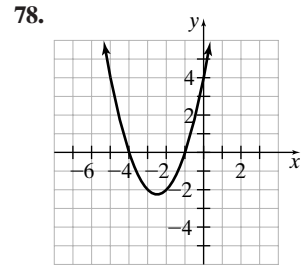
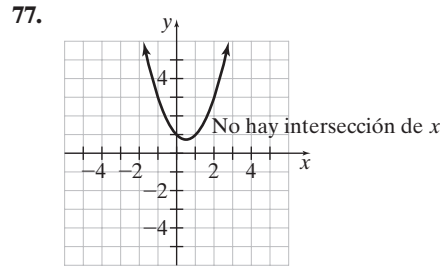
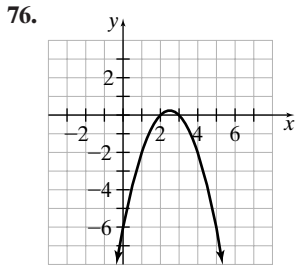


74.



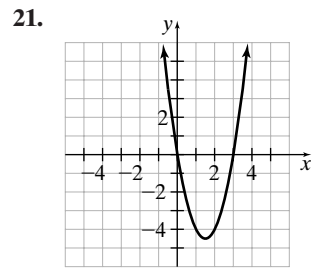
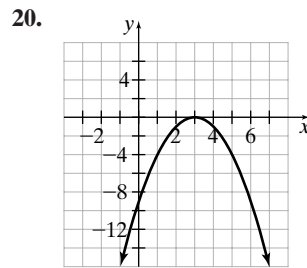
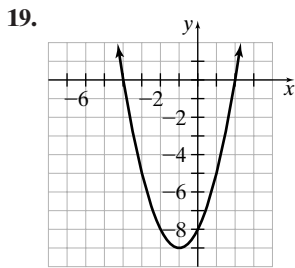
75.





85. 6, 8   86. 8, 11   87. Ancho = 20 pulgadas; largo = 46 pulgadas   88. Ancho = 28 pulgadas, largo = 48 pulgadas   89.  $2i$   
 90.  $i\sqrt{30}$    91.  $4 - 5i$    92.  $5 - 2i\sqrt{15}$    93.  $9 - 9i$    94.  $3 + 8i$    95.  $3i, -3i$    96.  $i\sqrt{5}, -i\sqrt{5}$    97.  $\frac{5 + i\sqrt{39}}{4}, \frac{5 - i\sqrt{39}}{4}$   
 98.  $\frac{2 + i\sqrt{5}}{2}, \frac{2 - i\sqrt{5}}{2}$

**Examen de práctica del capítulo**   1.  $4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}$    2.  $\frac{4 + \sqrt{17}}{2}, \frac{4 - \sqrt{17}}{2}$    3. 10, -4   4. 4, -11   5. 6, 7  
 6.  $\frac{-4 + \sqrt{6}}{2}, \frac{-4 - \sqrt{6}}{2}$    7.  $\frac{7}{4}, -\frac{7}{4}$    8.  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$    9. Las respuestas varían.   10. Dos soluciones.   11. Una solución real.   12.  $x = -3$    13.  $x = 2$    14. Hacia abajo;  $a < 0$    15. Hacia arriba;  $a > 0$    16. En una parábola que abre hacia arriba, el vértice es el punto más bajo; y en una que abre hacia abajo es el punto más alto.   17.  $(-4, 4)$    18.  $(\frac{4}{3}, \frac{11}{3})$



22. Ancho = 3 pies, largo = 10 pies   23. 11   24. 9   25.  $\frac{1 + i\sqrt{17}}{3}, \frac{1 - i\sqrt{17}}{3}$

# Índice de aplicaciones

- Agricultura/jardinería casera
  - Ampliación de un jardín, 619
  - Aplicación
    - de fertilizante, 147-148, 155, 657
    - de insecticida, 155, 169
  - Área máxima, 648
  - Cercado de un área, 638
  - Crecimiento del pasto, 82
  - Estudio de cerámica, 637
  - Granja
    - de una cooperativa, 425
    - lechera, 546
  - Hortaliza, 657
  - Jardín
    - de flores, 425
    - dimensiones, 236, 358, 359, 422
    - rectangular, 637
  - Jardinería, 217
  - Maíz y trigo, 544
  - Motor de una podadora, 23
  - Número de granjas, 153
  - Recolección de arándanos, 426
  - Recorrido de una podadora, 210
  - Semilla de césped, 232, 553
  - Tamaño promedio de las granjas, 153
  - Tierra, 156
  - Trabajo en conjunto, tractores, 437
- Alimentos
  - Almuerzo de caridad, 148
  - Barbacoa de pollo, 212
  - Bebida Holiday, 237
  - Big Macs, 269
  - Bistec Wellington, 233
  - Caja de cereal, 184
  - Carnicero, 237
  - Cebollas cortadas, 30
  - Cocimiento de un pavo, 432
  - Colesterol, 157, 195
  - Costo de la comida, 197
  - Dona favorita, 154
  - Dulces, 554
    - a granel, 232, 238
  - Galletas de la fortuna, 269
  - Harina necesaria para una receta, 20
  - Helado, 183
  - Hielo derretido, 546
  - Hornear
    - el pavo, 30
    - galletas, 363
  - Jugo, 546
    - de naranja, 233
  - Leche, 233
  - Lectura de etiquetas de alimentos, 195
  - Mezcla
    - de café, 227-228, 232-233
    - de nueces, 525
    - de soya, 546
    - especial, 316
  - Papas, 31
  - Pay de manzana, 157
  - Pie de crema, 30
  - Ponche hawaiano, 233
  - Preparación de un pastel de frutas, 613
  - Prueba de degustación, 144
  - Quiche, 546
- Refresco, 30
- Sopa
  - de cebolla, 155
  - de pollo, 301
- Tienda de dulces, 232, 540-541
- Triángulos de masa, 422
- Animales/mascotas
  - Alimento
    - de colibrí, mezcla, 390
    - para aves, 232, 438
  - Bebederos, 214
  - Caballos, razas, 184
  - Carrera de caballos, velocidad, 234
  - Cerca interior, granja de avestruces, 214
  - Concentración salina, en un acuario, 233
  - Crecimiento del pitón, 30
  - Garza azul, tamaño, 155
  - Jirafa en crecimiento, 194
  - Manatíes, pérdida de peso, 195
- Anuncios publicitarios
  - Creación de anuncios, 618
  - Precio de un anuncio de 30 segundos en el Súper Tazón, 460
  - Publicidad, 353, 359
  - Tablero de anuncios, 422
- Aplicaciones a la marina
  - Comparación de barcos grandes, 265-266
  - Embarcación averiada, 229
  - Inmersión de un submarino, 485
- Aplicaciones militares
  - Cinco estrellas, 208
  - Descenso de un submarino, 70
  - Fuerzas armadas, 153
  - Gordo Alberto, 234
  - Los ángeles azules, 229
  - Militares, 17
  - Mujeres en la milicia, 554
  - Profundidad de un submarino, 44
- Astronomía
  - Año luz, 271
  - Astronomía, 269-270
  - Días terrestres, 600
  - Gravedad en la luna, 600-601
  - Luz del sol, 270
  - Velocidad de escape de la Tierra, 600
  - de Marte, 600
- Automóviles/otros vehículos con motor
  - Anticongelante, 233
  - Automóviles y camiones, 547
  - Compra
    - de llantas, 18
    - de un automóvil, 547
  - Costo de un carro, 82, 92, 196, 197, 210, 235
  - Distancia de frenado en pavimento mojado, 472
  - Gasolina por distancia, 17, 155
  - Llantas usadas, 157
  - Llenar el radiador, 234
- Motocicleta, 194
- Peso de camiones, 29
- Promedio nacional de millaje en automóviles nuevos en Estados Unidos, 499
- Registro de automóviles, 500
- Renta de un camión, 194, 202-203, 209, 461, 552, 554
- Seguros, 18
- Tierra, 195
- Venta de camiones, 29
- Aviación/espacio
  - A favor y en contra del viento, 423-424, 552
  - Distancia entre ciudades, 613
  - Helipuerto, 175
  - Velocidad de vuelo, 231
- Bienes raíces
  - Casas en venta, 17
  - Compra de un edificio, 209
- Compra de mercancía
  - Barras de chocolate, 143
  - Cintas de video, 197
  - Compra de televisión, 196
  - Compra de una computadora, 17
  - Costo de un artículo, 260
  - Chamarra deportiva, 197
  - Dulces, 132
  - Fiesta de cumpleaños, 132
  - Lavadoras, 209
  - Mobiliario de jardín, 238
  - Obsequios, 132
  - Televisión, 237
  - Venta, 210
    - de camisetas, 196
  - Zapatos, 194
- Construcción/mejoras reparaciones caseras
  - Alberca, 637
  - Alfombrado, 545
  - Caja de arena, 216
  - Cerca, 30, 182
  - Cerca interior, 217
  - Cercar un área de comida, 536-537
  - Colocación de mosaicos, 546
  - Compra
    - de grava, 461
    - de papel tapiz, 358
  - Construcción
    - de un área para ejercicio, 173
    - de un borde, 633-635
    - de un entarimado, 418-419
    - de un librero, 216
    - de un patio, 212-213, 536
  - Costos de remodelación, 212
  - Diseño de una casa, 236
  - Entrepisos, 217
  - Escritorio de madera, 655
  - Librero, 217
  - Madera cortada, 30
  - Papel tapiz, 424
  - Perforación, 61
    - en busca de agua, 51
  - Pintura, 233
  - Plomería, 26
  - Reparación de un horno, 519
- Sistemas de seguridad, 515-516, 519
- Ventanas, 30
- Construcción de datos
  - Datos de construcción, 19
- Conversión de unidades
  - Cambio de moneda, 150
  - Conversión de unidades, 486
  - Distancia, 156
  - Pies a millas, 149-150
  - Recién nacido, 156
  - Tipo de cambio, 156-157, 168
- Demografía
  - Crecimiento de la población, 270
  - Crecimiento de Las Vegas, 195
  - Encarcelamiento, 269
  - Esperanza de vida, 19
    - Botswana vs. Japón, 196
    - en hombres, 197
    - en mujeres, 197
  - Incremento de la población, 194
  - Información demográfica, 96
  - Mediana del ingreso mediano, 196
  - Ocupación de una vivienda, 83
  - Población, 194, 208, 544
  - Población en Estados Unidos, 156
    - de 1790-2000, 41
    - de 1990 vs. 2000, 153
    - vs. población mundial, 269
  - Salarios, 197
- Deportes/entrenamiento físico
  - Alberca, 182, 236
  - Autógrafos, 210
  - Básquetbol, 211
  - Béisbol, 599
  - Caminata en nieve, 229
  - Campo de rugby, 598
  - Cancha
    - de baloncesto, 594-595
    - de tenis, 216
  - Carrera de automóviles, 229
  - Carrera, 657
  - Club de squash, 209
  - Daytona, 338
  - Dimensiones de un campo de fútbol americano, 598
  - El Súper Tazón, 14
  - Escalada, 230
  - Esquí a campo traviesa, 365, 424
  - Esquiadores acuáticos, 424
  - Fútbol en ambos, 51, 70
  - Gimnasio, 390
  - Golf, 61
  - Jonrones, 196
  - Juego
    - de baloncesto, 432
    - de tenis, 461
  - Llenado de una piscina, 436
  - Maratonista, 236
  - Olimpiadas de verano, 153
  - Pase largo, 230
  - Paseo
    - en bicicleta, 499
    - en kayak, 544
    - en un camino, 546
  - Patinaje y ciclismo, 436

- Pista de patinaje sobre hielo, 496-497
- Puntuación de boliche, 16
- Récord de jonrones, 156
- Régimen de ejercicios, 423, 437
- Renta de un velero, 429
- Salarios en el béisbol, 19
- Salida a correr, 546
- Salón de la fama, 232
- Señal trapezoidal, 183
- Tramos de natación, 156
- Triatlón Ironman, 229-230
- Trotar, 547
- Trote, 197, 236
- Umpires *versus* árbitros, 269
- Vaciar una alberca, 184
- Veleo, 438
- Velocidad de un corredor, 436
- Viaje en kayak, 423
- Wilson, 176-177
- Diversos**
- Alcance visual, 611
- Aleaciones, 547
- Altura de un recipiente para gasolina, 177
- Árbol del tule, 183
- Arte animal, 208
- Aumento de estatura, 29
- Bandera de Estados Unidos, 544
- Caballos en todas partes, 538
- Cable tensor para un poste, 599
- Calentamiento de un jacuzzi, 427
- Carrera docente, 195
- Colección de ranas, 208
- Computadora más rápida, 266-267
- Correo basura, 154
- Correspondencia, 153
- Cortar tiras, 27
- Creer más, 26-27
- Cuotas por membresía, 211
- Champú, 30
- Diseño de jardines, 519
- Edad, 193, 194, 195, 197
- Edificio Empire State, 17
- Enjuague bucal, 233
- Equipaje permitido, 422, 599
- Escalera  
de una casa, 599  
recargada en una casa de campo, 611, 626
- Estadística, 156
- Estatura, 194
- Éxito musical, 500
- Exposición artística, 211
- Fotos panorámicas, 173-174
- Gabinete para computadora, 30
- Impresoras, 209
- Investigación de un accidente, 595
- Jacuzzi, 183
- Largo de pantalones, 30
- Lavado de ropa, 155
- Lectura veloz, 194
- Limpieza del hogar, 462
- Líneas telefónicas, 360
- Longitud y distancia, 449
- Máquina copiadora, 209
- Membresía en un gimnasio, 209
- Museo saturado, 196
- Páginas opuestas, 207
- Pañales, 269
- Parques populares, 164
- Peso, 194
- Plumas, 193
- Portero automático, 234
- Precio de acciones, 194, 195, 238
- Presidentes de Estados Unidos, 208
- Proveedor de Internet, 209
- Prueba de productos, 229
- Puente de peaje, 537
- Radios portátiles, 229
- Reactores nucleares, 194
- Regalos de abuelita, 208
- Reservas mundiales de petróleo, 93
- Rockefeller Center, 183
- Sauce, 526
- Sistemas de seguridad, 203
- Sujeción de un poste, 626
- Tabla triangular, 182
- Tambo de aceite, 183
- Tanques presurizados, 547
- Tornillos sujetadores, 30
- Toro del Wall Street, 155
- Trabajadores de seguridad social por beneficiario, 499
- Un millón *versus* mil millones, 271
- Ventas de almacén, 210
- Viaje al trabajo, 196
- Volumen de un altavoz, 430
- Educación**
- Calificación  
de exámenes, 19  
media, 15-16
- Calificaciones, 197  
de exámenes, 19, 93
- Escuela de manejo, 211
- Maestros, 210
- Porcentaje de Presupuesto  
Escolar en el estado de Nueva York que pasa en la primera votación, 1980-2000, 505
- Sala de lectura, 208
- Electrónica**
- Circuito eléctrico, 432
- Resistencia eléctrica, 412
- Finanzas personales**
- Acciones, 62
- Ascenso, 194
- Aumento salarial, 210
- Bienes raíces, 211
- Comida fuera, 238
- Costo de una boda, 432
- Crédito para automóvil, 182
- Cuenta  
de ahorro, 545, 552  
de ahorros, 172  
de cheques, 17
- Cuidado de los niños, 18-19
- Determinación del interés, 433
- Dinero que se adeuda, 70
- Estacionamiento, 17
- Factura  
de la luz, 500  
de tiendas, 16
- Goteo de un grifo, 18
- Hipotecas, 203-204, 209-210, 236, 239
- Incremento salarial, 205
- Ingresos en el retiro, 210
- Interés  
por ahorro, 156  
simple, 231, 235, 237, 461
- Inversiones, 223-224, 545
- Lavado de automóviles, 544
- Mesa del comedor, 182
- Mobiliario de jardín, 238, 461
- Niñera, 499
- Obra de caridad, 211
- Planes médicos, 438
- Préstamo  
con interés simple, 182  
para auto, 171-172
- Promedio de deuda en tarjetas de crédito en Estados Unidos, 505
- Refinanciamiento, 525
- Salario semanal, 457
- Salarios, 209, 232
- Saldo del libro contable, 56
- Seguridad social, 239
- Seguros médicos, 11-12
- Selección del plan salarial, 555
- Sin comer, 211
- Tarjeta de crédito, 50, 51, 70
- Vacaciones, 499
- Valor promedio, 211
- Física/Ciencia/Tecnología**
- Altura  
de un objeto, 626  
sobre el piso, 648
- Bala de cañón, 360
- Caída libre, 228, 599
- Campo gravitacional de la Tierra, 353
- Cohetes a escala, 637
- Composición musical, 437
- Equilibrio, 19
- Estructura de la materia, 271
- Fuerza resultante, 600
- Gravedad, 596
- Huevo que cae, 359
- Huevos cayendo, 612
- Ley de Hooke, 433
- Longitud de un péndulo, 601
- Luz a través del agua, 432
- Objetos que caen/se lanzan, 359, 364, 432
- Óptica, 411
- Pelota que rueda, 62
- Péndulo, 596-597, 599  
de Foucault, 600
- Razón de engranes, 145
- Transferencia de calor, 525
- Velocidad  
de un procesador, 11  
de una computadora, 269
- Volumen de gas, 433
- Geometría**
- Alberca portátil, 363
- Alfombra nueva, 413
- Altura de un árbol, 359
- Ángulo(s), 215, 216  
complementarios, 215, 543  
del triángulo, 555  
desconocido, 216  
en un paralelogramo, 216  
suplementarios, 215, 543-544  
verticales, 215-216
- Área de un triángulo, 437
- Bandera estadounidense, 239
- Caja de zapatos, 599
- Cara de un cubo, 184
- Círculo  
área, 432, 599, 620  
radio, 599
- Comparación de áreas, 619-620
- Comprobación de triángulos  
rectángulos, 364
- Cuadrilátero  
ángulos, 216  
diagonales, 177
- Cuadrado, 363  
lado de un, 599, 612
- Diagonal de un prisma  
rectangular, 601
- Diagonales de un polígono, 637
- Esquina de un terreno, 213-214
- Hotel Luxor, 611
- Marco de una fotografía, 544
- Mesa  
de la cocina, 619  
rectangular, 655
- Mural, 656
- Página de un periódico, 619
- Paralelogramo, 216
- Rectángulo  
área, 358, 363  
diagonal, 611  
dimensiones, 216, 301, 364, 524, 600, 637  
perímetro, 235
- Sobre de correo, 619
- Triángulo, 359  
ángulos, 237  
equilátero, 215  
isósceles, 215  
perímetro, 239
- Triángulo rectángulo, 363, 364, 594  
dimensiones, 356  
verificación, 355-356
- Volumen, 571  
de un cilindro, 432
- Impuestos, 195**
- A la propiedad, 155
- Al ingreso, 18, 51
- Federales, 547
- Llenado electrónico, 239
- Sobre ventas, 17, 82
- Tiendas, 95
- Medicina. Vea también Salud y nutrición**
- Casos de gripa, 196
- Cirugía con láser, 197
- Dosis de medicamento, 30
- Dosis de medicina, 31, 148-149, 156  
por superficie corporal, 156  
proporciones, 428, 436
- Farmacéutica, 546
- Farmacia, 233
- IVs, 228
- Síndrome Prader-Willi, 156
- Medio ambiente/ciencias de la Tierra**
- Calentamiento global, 29
- Cataratas del Niágara, 269
- Contaminación, 197
- Niveles de dióxido de carbono, 240
- Reciclar llantas, 194
- Superficie del territorio, 196
- Terremotos, 229
- Uso del agua, 198, 228
- Valle de la Muerte, 51, 61
- Negocio/finanzas**
- Almacén de descuento, 544
- Asesor financiero, 545
- Aspersores de agua, 359
- Aumento de tarifa, 231
- Autoedición, 545
- Baja de salario, 210
- Barra de café, 51-52
- Bombeo de gas, 232
- Cámaras digitales, 270
- Campanas de viento, 237
- Cartas, 544
- Centros de copiado, 237
- Cheques nómina, 425
- Comisión, 499
- Componentes del precio de la gasolina, 41
- Compra de acciones, 232, 505
- Computadoras, 208
- Contrato de copiadora, 545



## 13 • Índice de aplicaciones

- Costo
    - de un hotel, 19
    - e ingresos, 360
  - Desglose estimado de comercio electrónico global, 12-13
  - Disminución, 210
    - de las ventas, 61-62
  - DVDs, 208
  - El fin de la Tierra, 61
  - Empaque de computadoras, 422
  - Empleados en línea, 29
  - Empleo, 70
  - Equipo
    - de ventas, 194
    - en crecimiento, 237
  - Feria estatal, 92
  - Fuentes de petróleo, 270
  - Ganancias y pérdidas netas, 48
  - Incremento de las ventas, 196
  - Inflación, 92
  - Ingresos, 19, 169
  - Interés simple, 17, 237
  - Inventario perdido, 270
  - Jarrones artísticos, 477-478
  - Máquina de fax, 92
  - Mecedoras, 637
  - Miembros de sindicatos, 29
  - Moneda en circulación, 299
  - Nanotecnología, 270-271
  - Negocio
    - conjunto, 238
    - de bicicletas, 82
  - Oficinas centrales nuevas, 210
  - Oro, 156
  - Pastelillos, 235
  - Película, 229
  - Planeación financiera, 211
  - Planeador financiero, 210
  - Planes
    - de Internet, 412
    - de salario, 198, 205-206,
    - salariales, 210, 211
  - Precio
    - de acciones, 194, 196
    - de venta, 236
  - Promoción especial, 613
  - Quitanieves, 238
  - Restaurantes, 238
  - Semana laboral, 208
  - Sistemas de cómputo, 232
  - Taller de velas, 208
  - Tarjetas de circuitos, 208
  - Tenis, 202
  - Tienda, 505
    - de pizzas, 196
    - de videos, 359
  - Utilidad en tienda de video, 461
  - Utilidades, 196
  - Venta de arte, 224-225
  - Volumen de ventas, 210
- Problemas numéricos, 197, 201, 207, 236, 352
- Denominador decreciente, 423
  - Determine un número, 425, 437
  - Diferencia
    - de enteros, 543
    - de números, 423
  - Dos números, 197
  - Edad de Shawn, 656
  - Enteros, 238, 260, 462
    - consecutivos, 197, 207, 236, 238,
    - 365
  - impares, 207, 237
  - impares consecutivos, 658
  - pares, 197, 207
  - positivos, 358, 524
  - Numerador creciente, 423
  - Números consecutivos, 358, 364, 207
  - Producto
    - de enteros, 364, 655
    - de números, 358, 363, 619, 637
  - Recíproco de número, 425
  - Refinanciamiento, 525
  - Resolución legal, 525
  - Suma
    - de enteros, 543, 552, 626
    - de números, 207, 360, 423, 436
- ### Química
- Clorox, 233
  - Laboratorio de química, 541-543
  - Químico, 546, 553
  - Solución
    - ácida, 237, 365
    - salina, 238
  - Soluciones de mezclas ácidas, 226-227
  - Un número grande, 271
  - Vida media, 300
- ### Razones
- Aplicación de fertilizante, 147-148
  - Caballos, 184
  - Colesterol, 157
  - Correo basura, 154
  - Correspondencia, 153
  - Distribuir fertilizante, 155
  - Donas favoritas, 154
  - Fuerzas armadas, 153
  - Insecticida, 155, 169
  - Mezcla de aceite y gasolina, 144
  - Modelo
    - de carro, 168
    - de tren, 155
  - Nivel de colesterol, 144
  - Número de granjas, 34
  - Olimpiadas de verano, 153
  - Población, 153
  - Prueba de degustación, 144
  - Razón de engranes, 145
  - Tamaño de granjas, 33
- ### Recreación/entretenimiento
- Anfiteatro, 183
  - Asistencia a un rodeo, 525
  - Boleto para el cine, 196
  - Cyprus garden, 351
  - Espectáculos en Broadway, 196
  - Jet ski, 17
  - Modelo
    - de carro, 168
    - de tren, 155
  - Montaña rusa, 194
  - Papalote, 182
  - Paseo en bote, 519
  - Rancho para vacaciones, 546
  - Recolección de petróleo, 425
  - Reemplazo de una vela, 174
  - Renta de bicicletas acuáticas, 204-205
  - Salto en un trampolín, 565
  - Six Flags, 544
  - Venta de boletos, 232-269
  - Viaje
    - en carreta, 197
    - en mula, 523
- ### Salud y nutrición
- Calorías
    - en una mezcla de nueces, 196
    - nivel de colesterol, 144, 157
  - pastel, 168
  - quemadura de, al caminar, 460
  - Clínica de reducción de peso, 485
  - Cuidado de la salud, 96
  - Frecuencia cardiaca, 70
  - Índice de masa corporal, 183
  - Recetas, 93
  - Requerimientos de calcio, 233
  - Valores de energía, 17
  - Vitaminas, 194
- ### Servicios
- Costo de la electricidad, 18
  - Cuentas de electricidad, 16, 165
  - Medidores, 19-20
  - Plan de llamadas, 209, 240
  - Televisión por cable, 232
- ### Temperatura y clima
- Gráfica de temperatura en ciudades diferentes
    - cambio de temperatura, 61, 93
    - diferencia de temperatura, 56
    - medición de la precipitación pluvial, 56-57
    - temperatura a mediodía en el día de toma de posesión en Washington, D.C., 472
    - temperaturas, 525
    - temperaturas de Chicago, 164
    - veranos secos, 16
  - Temperatura, 486
- ### Tiempo y distancia
- Alta montaña, 51
  - Caminata en nieve, 229
  - Campamento, 220-221
  - Canotaje, 415
  - Carrera en lancha, 554
  - Distancia
    - de manejo, 231
    - de una maratón, 416-417
    - recorrida, 461
    - y velocidad, 431
  - Dover a Calais, 423
  - Ejercicios, 230
  - El oleoducto de Alaska, 219
  - Embotellamiento, 230
  - Envío de condimentos, 425
  - Escala de un mapa, 168
  - Ferrocarril, 197
  - Gasolina necesaria, 239
  - Lancha rápida, 546
  - Lanchas de motor, 359
  - Leadville, Co., 61
  - Llegada a un destino, 432
  - Mapas, 155
  - Navegación en el aeropuerto O'Hare, 229
  - Paseo en yate, 593
  - Pittsburgh Incline, 236
  - Recorrido en automóvil, 525
  - Reunión para comer, 539-540
  - Ruta de patrullaje, 415-416
  - Salida de trenes, 236
  - Trenes, 61, 546
  - Trotando en el parque Griffith, 221-222
- ### Tubo de desagüe, 221
- Uso del agua, 198
  - Veleo, 230, 260
  - Velocidad promedio, 228, 301
  - Viaje, 552-553
    - en barco de vapor, 423
    - en bote, 168
    - en canoa, 228
    - en motocicleta, 423
    - en tranvía, 423
    - por carretera, 82
  - Vuelo en jet, 423
  - White Pass Railroad, 398
- ### Trabajo y movimiento
- Almacenamiento de vino, 419
  - Asaltabancos, 230
  - Banda transportadora, 424
  - Camino pavimentado, 230
  - Castillos de arena, 436
  - Cemento, 228
  - Clasificación de correspondencia, 426
  - Colocación
    - de mosaicos, 228
    - de un cable, 545
    - de una cerca, 432
  - Corte del césped, 432
  - Distribución del correo, 231
  - Elaboración de copias, 228
  - Escalada, 230
  - Flujo de agua, 424-425
  - Inundación, 156
  - Láser, 228
  - Lectura de una novela, 156
  - Limpieza
    - de la playa, 230
    - de ventanas, 432
  - Llenado de un depósito, 424
  - Madera apilada, 586
  - Máquina copiadora, 168
  - Mina de sal, 231
  - Notas de agradecimiento, 420-421
  - Pared de ladrillos, 433
  - Pavimentación de un camino, 29
  - Periódico, 432
  - Pintar la casa, 155
  - Reparación
    - de una autopista, 499
    - del camino, 231
  - Servicio de limpieza de ventanas, 419-420
  - Soldadoras robóticas, 218
  - Tendido de cable, 155, 239
  - Tendido de fibra óptica, 356-357
  - Tormenta de nieve, 425
  - Velocidad de escritura, 229
- ### Transporte
- Cuota en un puente, 209
  - Cuotas, 198
  - Ferrocarril, 197
  - Señal de ceda el paso, 422, 611
  - viaje en taxi, 18
  - Señalamiento, 182
  - Transporte, 9-10
- ### Volumen
- Cono, 310
  - Pila para aves, 599
  - Tanque de leche, 299

# Índice

## A

Aislar la raíz cuadrada, 587  
Ángulo(s)  
  agudo, 663  
  alternos  
    externos, 664  
    internos, 664  
  complementarios, 215  
  correspondientes, 664  
  llano, 663  
  obtusos, 663  
  recto, 663  
  suplementarios, 215, 543-544, 663  
  tipos de, 663-664  
  vertical, 215, 663  
Área de un cuadrilátero, 172-174

## B

Base, 71, 242  
Binomio(s)  
  conjugado, 582-583  
  división de un polinomio entre, 291-293  
  multiplicación  
    con el uso de productos notables, 284-285  
    uso de la propiedad distributiva, 281-282  
    uso del método PIES, 282-283, 284

## C

Calculadora  
  compra, 7  
  comprobación de las respuestas de las ecuaciones, 110  
  evaluación de expresiones, 79  
  evaluación de raíces cúbicas y raíces cuartas, 602  
  exponentes que son fracciones, 606-607  
  expresión con paréntesis, 77  
  expresiones que incluyen a  $\pi$ , 175  
  graficadora  
    configuración de la ventana estándar, cuadrada y decimal, 483  
    ecuaciones lineales, 447-448, 458-459  
    evaluación de raíces cúbicas y de grado cuatro, 603  
    intersección con  $x$  de una parábola, 647  
    pasos para la graficación de una ecuación, 456  
    sistemas de ecuaciones, 513-514  
    vértice de una parábola, 644  
  multiplicación y división, 67  
  notación científica y, 264-265  
  números negativos, 49  
  orden de las operaciones, 74  
  recíprocos, 70  
  resta, 59  
  suma, 48  
Catetos de un triángulo rectángulo, 665  
Cero  
  división que incluye, 66-67  
  regla del exponente, 245

## Círculo

  área y circunferencia, 175  
  gráficas, 12-13  
Circunferencia  
  definición, 174  
  fórmula, 175  
Coeficiente numérico, 99  
Completar el cuadrado, 622-625  
Conjunto vacío, 32  
Conjuntos, 32-33  
  diagramas de Venn, 36-37  
Constante de proporcionalidad, 427  
Contradicciones, 140-141  
Coordenadas, 441  
Cuadrado(s) perfecto(s), 559, 567  
  tabla de los 20 más pequeños, 560  
Cuadrantes, 440  
Cubos perfectos, 602  
  tabla, 604

## D

Datos clasificados, 15  
Decimales  
  división de números que tienen punto decimal, 659-660  
  multiplicación de números que tienen punto decimal, 658-659  
  suma o resta de números con punto decimal, 658  
Definición de desigualdades, 158.  
Vea Desigualdades lineales  
Denominador, 21  
  mínimo común, 24  
  racionalización del, 580-583  
Descartes, René, 440-446  
Desigualdades lineales  
  con dos variables, 487-489  
  con todos los números reales como solución, 162  
  definición, 487  
  graficación en una recta numérica, 161  
  sin solución, 162  
  solución, 158-162  
  solución de sistemas en forma gráfica, 548-549  
Diagonales de un cuadrilátero, 177  
Diagramas de Venn, 36-37  
Diámetro, 175  
Diferencia  
  de dos cuadrados, 338-340  
  de dos cubos, 340-342  
Discriminante, 632-635  
División  
  con calculadora, 67  
  de expresiones racionales, 378-379  
  de fracciones, 65  
  de números con punto decimal, 659-660  
  de polinomio(s)  
    comprobación, problemas, 293  
  escritura de, en orden descendente cuando se dividen, 293-294  
  por un binomio, 291-293  
  por un monomio, 290-291  
  que involucra a cero, 66-67  
Dominio de una relación, 491

## E

Ecuación (ecuaciones)  
  con la variable en un lado, 123-126  
  con números decimales o fracciones, 126-129, 137-140  
  con variables en ambos lados, 133-137  
  condicional, 140-141  
  contradicciones, 140-141  
  cuadrática. Vea Ecuaciones cuadráticas  
  de la forma  
     $ax = b$ , 121  
     $x + a = b$ , 121  
     $x = a$ , 120  
  definición, 108  
  equivalente, 110-111  
  identidades, 140-141  
  lineal. Vea Ecuaciones lineales racionales. Vea Ecuaciones racionales  
  radicales  
    definición, 586  
  que sólo tienen un término con raíz cuadrada, 586-590  
  que tiene dos términos con raíz cuadrada, 590-591  
  solución para, 108-110  
  realizando los pasos de forma manual, 114, 121  
  traducción de frases a, 190-193  
  traducción de frases verbales a, 185-187  
Ecuaciones cuadráticas  
  con dos variables, 639-644  
  con soluciones complejas, 652  
  determinación de las intersecciones  $x$  de la gráfica, 645-647  
  determinar el número de soluciones para, utilizando el discriminante, 632-635  
  factorización empleando la propiedad del factor cero, 346-347  
  reconocer, 346-347  
  resolver aplicaciones factorizando, 352-354  
  solución  
    cómo evitar errores comunes, 631-632  
    completando el cuadrado, 622-625  
    empleando la propiedad de la raíz cuadrada, 616-618  
    forma estándar, 346, 615  
    mediante factorización, 347-350  
    por medio de la fórmula cuadrática, 627-632  
    utilidad, 354  
Ecuaciones lineales, 108-110  
  de la forma  
     $ax + by = 0$ , 452-453  
     $y = mx + b$ , 474-478  
  graficación  
    comparación de tres métodos, 481-483  
  de la forma  $ax + by = 0$ , 452-453  
  forma punto pendiente, 478-481  
  intersecciones  $x$  y  $y$ , 453-455  
  pendiente-ordenada al origen, 476-477  
  trazado de puntos, 450-452  
gráficas  
  forma  $ax + by = c$ , 443-446  
  forma estándar, 443-446  
  forma pendiente-ordenada al origen, 474-478  
  forma punto-pendiente, 478-481  
sistemas  
  determinación si un par ordenado es una solución para, 509-510  
  determinación si un sistema de ecuaciones es consistente, inconsistente o dependiente, 510-511  
  solución por el método de suma, 526-533  
  solución por el método de sustitución, 520-523  
  solución por graficación, 511-513  
  utilizadas para resolver problemas de aplicación, 535-543  
Ecuaciones racionales  
  aplicaciones que incluyen problemas de movimiento, 414-417  
  problemas de trabajo, 417-421  
  con denominadores enteros, 404-406  
  con variable en el denominador, 406-410  
  definición, 404  
Eje  
  de simetría, 639  
   $x$ , 440  
   $y$ , 440  
Elementos, 32  
Engelbart, Douglas C., 446  
Entero(s), 190  
  consecutivos, 190  
  impares, 190, 353  
  pares, 190, 353  
  positivo, 32  
Estadísticas, problemas que incluyen, 14-16  
Evaluación de expresiones, 23-24  
  con más de dos números, 58-59  
  orden de las operaciones y, 74  
Exponente(s), 242  
  definición, 71-72  
  evaluación de expresiones que tienen, 72-73  
  negativo, 253-257  
  par, 567  
  reglas de los, 243-246, 252-257  
Expresión algebraica, 9  
Expresiones, 98  
  comprobación, 130  
  con exponentes, 72-73  
  definición, 9  
  evaluación, 23-24, 130  
  orden de las operaciones, 74  
  que contengan variables, 77-78  
  que involucran dos cantidades relacionadas, 187-189  
  que involucran porcentajes, 187  
  radicales, 558



- escritura en la forma  
   exponencial, 604-605  
 simplificación, 104-105, 130  
 simplificadas, 104-105  
   antes de utilizar la regla  
   extendida de potencias para  
   exponentes, 246-248  
 traducción de frases verbales,  
 185-187
- E**
- Expresiones racionales  
 aplicaciones que incluyen, 413-414  
 cómo evitar errores comunes al  
 simplificar, 371  
 definición, 367  
 división, 378-379  
 mínimo común denominador,  
 385-387  
 multiplicación, 375-378  
 reducida a su mínima expresión,  
 369-371  
 simplificada, 369-371  
 suma y resta  
   cómo evitar errores comunes,  
   384-385, 395-396  
   con denominadores no  
   semejantes, 385-387, 390-396  
   con un denominador común,  
   382-385
- Extremos, 145
- F**
- Factor(es), 21  
 cuadrado perfecto, 559, 567  
 identificación de, 303-304  
 máximo común, 21, 304-305
- Factorización  
 comprobación de problemas, 308  
 de un 1 negativo en un polinomio,  
 371-372  
 diferencia de dos cuadrados,  
 338-340  
 expresiones, 303  
 método de ensayo y error,  
 317-320, 326-332  
 por agrupación, 310-314, 332-336  
 primos, 304-305, 661  
 procedimiento general para  
 polinomios, 342  
 resolver ecuaciones cuadráticas,  
 347-350, 352-354  
 suma y diferencia de dos cubos,  
 340-342  
 trinomios  
   de la forma  $ax^2 + bx + c$ , donde  
    $a = 1$ , 316-323  
   de la forma  $ax^2 + bx + c$ , donde  
    $a \neq 1$ , 325-336
- Figuras semejantes, 151
- Forma  
 estándar de una ecuación  
 cuadrática, 615  
 exponencial, expresiones radicales  
 escritos en, 604-605  
 pendiente ordenada al origen  
 escritura de una ecuación  
 lineal, 474-475  
 uso para determinar la  
 ecuación de una recta,  
 477-478  
 punto pendiente, 478-481
- Fórmula(s)  
 área de triángulos y cuadriláteros,  
 172-174  
 circunferencia, 175  
 cuadrática, 627-632  
 de distancia, 219, 595  
 de interés simple, 171-172, 178, 222  
 de la razón de velocidades, 145
- de mezclas, 225-228, 540  
 de perímetro de triángulos y  
 cuadriláteros, 172-174, 178  
 del cuadrado de un binomio,  
 284-285  
 despejar una variable, 177-179  
 diagonales de un cuadrilátero,  
 177  
 diferencia de dos cuadrados,  
 284-285  
 geométricas, 172, 175, 176  
 para problemas de movimiento,  
 218-222, 414-417, 538-539  
 para productos especiales, 284-285  
 volumen, 175-176
- Fracción (fracciones)  
 complejas, 399-402  
 convertir números mixtos a, 25-27  
 definición, 21  
   división, 23-24  
   eliminación de signo negativo  
   de denominadores, 65  
   elevadas a un exponente negativo,  
   256-257  
   eliminación de ecuaciones, 123  
   multiplicación, 22-23  
   simplificación, 21-22  
   suma y resta, 24-25, 44-45  
   tres signos de, 368-369
- Fracciones complejas  
 definición, 399  
 simplificación  
   multiplicando primero para  
   eliminar fracciones, 400-402  
   por medio de reducción de  
   términos, 399-400
- Función (funciones)  
 definición, 491  
 dominio y rango, 491  
 evaluación, 495-496  
 notación, 495  
 reconocer, 491-495
- G**
- Geometría  
 figuras semejantes, 151  
 fórmulas, *Vea* Fórmula  
 problemas, 413
- Grado  
 de un polinomio, 273  
 de un término, 272-273
- Gráfica de barras, 12-13
- Gráfica(s)  
 de una ecuación, 444  
 definición, 440  
 de líneas, 14
- Graficación  
 aplicación de, 457-458  
 de rectas horizontales y verticales,  
 456-457  
 ecuaciones lineales  
   de la forma  $ax + by = 0$ , 452-453  
   funciones lineales, 496-497  
   por medio de las intersecciones  
    $x$  y  $y$ , 453-455
- H**
- Habilidades de estudio, 2, 3-5  
 administrar el tiempo, 6-7  
 exámenes, 5-6
- Hipotenusa, 665
- I**
- Identidad(es), 140-141  
 propiedades, 86-87
- Índice de un radical, 558
- Interés simple, 171-172, 178, 222
- Intersección, 36  
 $x$ , 453-455  
 $y$ , 453-455
- Inversos  
 aditivos, 45-48  
 multiplicativos, 87, 116
- M**
- Máximo común divisor, 21, 304-306,  
 661-662
- Media(s), 14  
 de proporciones, 145
- Mediana, 15
- Medidas de tendencia central, 14
- Método de eliminación (suma o  
 resta), para la solución de  
 sistemas de ecuaciones,  
 526-533
- Método PIES, 282-283, 284  
 para comprobar la factorización  
 por agrupación, 312, 320  
 para la multiplicación de  
 binomios con términos con raíz  
 cuadrada, 574-575
- Mínimo común denominador, 385,  
 662  
 de expresiones racionales, 385-387
- Modelos matemáticos, 47-48
- Monomio(s)  
 definición, 272  
 factorización de polinomios,  
 306-308  
 multiplicación de un polinomio  
 por, 280-281  
 multiplicación por un monomio,  
 280  
 polinomios divididos entre,  
 290-291
- Multiplicación, 63-64  
 binomios  
   por medio de fórmulas para  
   productos especiales, 284-285  
   por medio del método PIES,  
   282-283, 284  
   uso de la propiedad  
   distributiva, 281-282  
 dos polinomios, 285-287  
 elemento de identidad de la, 86-87  
 en una calculadora, 67  
 expresiones racionales, 375-378  
 fracciones, 22-23  
 números con punto decimal,  
 658-659  
 propiedad asociativa de la,  
 84-85  
 propiedad conmutativa de, 84  
 raíces cuadradas, 574-575  
 símbolos para la, 21  
 traducción de frases verbales que  
 incluyen, 189-190  
 un monomio por un monomio,  
 280  
 un polinomio por un monomio,  
 280-281
- N**
- Notación científica  
 cálculos mediante, 267  
 conversión a forma decimal, 262  
 definición, 261  
 en calculadoras, 264-265  
 escritura de números, 261-262  
 números en, con coeficiente 1,  
 262-264
- Numerador, 21
- Número(s)  
 complejos  
   definición, 650
- escritura por medio de  $i$ , 649-651  
 solución de ecuaciones  
   cuadráticas que tienen como  
   solución, 652  
   suma y resta, 651  
 compuestos, 304  
 conjuntos de, 32-33  
 enteros no negativos, 32  
 imaginarios, 559, 649  
 irracionales, 33  
   raíces cuadradas como, 560  
 mixtos  
   cambio a fracciones, 25-27  
   definición, 25  
 natural, 32  
 primo, 304  
 racionales, 32-33  
   raíces cuadradas como, 560  
 reales, 33-34  
   división, 64-65  
   indefinido, 66  
   multiplicación, 63-64  
   propiedades, 83-87  
   signo del cociente de dos  
   números, 64-65  
   signo del producto de dos  
   números, 63-64  
   suma mediante la recta  
   numérica, 42-44  
   valor absoluto, 38
- O**
- Operaciones  
 aritméticas, 42  
 definición, 9  
 resumen, 66
- Opuestos, 45-48
- Orden  
 de la desigualdad, 158  
 de las operaciones, 74
- Origen, 440
- P**
- Parábola, 639
- Paréntesis, 75-77  
 anidados, 75  
 precedidos de un signo más o  
 menos, 103-104  
 uso de la propiedad distributiva  
 para eliminar, 101-103
- Pares ordenados  
 como funciones, 491  
 como posibles soluciones de  
 ecuaciones lineales, 443-446  
 como relaciones, 490  
 como soluciones de sistemas de  
 ecuaciones lineales, 509-510  
 componentes de, 491  
 definición, 441
- Pendiente  
 de una recta  
   definición, 462-463  
   que pasa por los puntos  $(a^1, y^1)$   
   y  $(x^2, y^2)$ , 464-465  
   reconocimiento de, positiva y  
   negativa, 465-466  
   revisión de, horizontal y vertical,  
   467  
   revisión de, paralela y  
   perpendicular, 467-470  
   negativa, 465-467  
   positiva, 465-467
- Péndulo, 596-597
- Perímetro  
 de un cuadrilátero, 172-174  
 de un rectángulo, 178
- Pi ( $\pi$ ), 175
- Pitágoras de Samos, 354-355

- Polígono, 664-665  
regular, 664
- Polinomio(s)  
binomios, 272  
comprobación de problemas de división, 293  
definición, 272  
división  
entre un binomio, 291-293  
entre un monomio, 290-291  
factorización  
de  $-1$ , 371-372  
procedimiento general, 342  
un monomio, 303-308  
grado de un término, 272-273  
monomios, 272. *Vea* Monomio  
multiplicación de, 280-287  
orden descendente de potencias de la variable, 272  
primo, 322  
resta, 274-276  
suma, 273-274  
trinomio, 272. *Vea* Trinomio
- Polya, George, 8
- Porcentaje  
escritura de expresiones que involucran, 187  
solución de aplicaciones que implican, 204-206
- Potencias de cuarto grado, 603  
tabla, 604
- Problema monetario, 222-225
- Problemas  
de mezclado, 225-228, 540  
de movimiento, 414-417  
con dos velocidades, 538-539  
que incluyen dos tasas, 219-222  
que incluyen una tasa, 218-219  
de trabajo, 417-421  
de variación  
definición, 426  
directa, 426-428  
inversa, 428-430  
numéricos, 352-354, 413
- Problemas de aplicación  
problemas numéricos, 200-201  
procedimiento para resolver, 199-200  
que involucran porcentaje, 204-206  
solución  
por medio de radicales, 595-597  
por medio de sistemas de ecuaciones, 535-543  
por medio del teorema de Pitágoras, 594-595
- Productos cruzados, 146
- Propiedad  
asociativa, 84-85  
conmutativa, 84  
de igualdad de la multiplicación, 116-120  
de igualdad de la suma, 111-113  
de la raíz cuadrada, 616-618  
del factor cero, 346-347  
distributiva, 85-86, 101-103  
para multiplicar binomios, 281-282
- Propiedades del inverso, 87
- Proporciones, 145-146  
conversión de una cantidad a otra mediante, 149-151  
solución de problemas mediante, 147-149  
solucionar problemas que involucran figuras semejantes, 151
- Puntos  
colineales, 444-445  
trazo de, 450-452
- R**
- Racionalización del denominador, 580-581  
con raíz cuadrada, 581  
que tiene un binomio, 582-583
- Radicales  
regla del producto, 604  
solución de problemas de aplicación mediante, 595-597
- Radicando, 558
- Radio, 174
- Raíces cuartas  
evaluación, 601-602  
simplificación, 604  
cómo evitar errores comunes en, 605
- Raíces cúbicas  
evaluación, 601-602  
simplificación de, 604  
cómo evitar errores comunes, 605
- Raíces extrañas, 588
- Raíz (raíces) cuadrada(s), 615  
aislar, 587  
como expresiones exponenciales, 562-563  
de números negativos, 559  
de números reales  
como números irracionales, 560  
evaluación, 557-559  
números racionales, 560  
de un radicando que tiene una variable elevada a una potencia impar, 568  
definición, 557-558  
en una calculadora, 561-562  
multiplicación, 574-575  
no semejantes, 572-573  
positivas, 557-558, 615  
principal, 557-558  
que tienen variables, 567-569  
regla del cociente para simplificar, 579-580  
regla del producto para, 565-567  
semejantes, 571-572  
simplificación, 577-578  
cómo evitar errores comunes, 578  
raíz cuadrada de una constante, 566  
suma y resta, 571-573  
tabla de los 20 cuadrados perfectos más pequeños, 560
- Rango de una relación, 491
- Razones, 143-145
- Recíprocos, 67, 116, 413  
en calculadoras, 70  
negativos, 469
- Recta (s)  
horizontal, 457  
numérica, 37  
suma utilizando, 42-44  
paralelas, 467-470, 663  
pendiente, paralelas y perpendiculares, 467-470  
pendientes, horizontales y verticales, 467  
perpendiculares, 468-470, 663  
transversal, 664  
vertical, 457  
prueba de la, 493-494
- Reducción a su mínima expresión, 21-22
- Regla  
de la potencia para exponentes, 245-246  
simplificar expresiones antes de utilizar la, 246
- de los exponentes negativos, 252-257  
del cociente  
para exponentes, 243-244  
para simplificar raíces cuadradas, 579-580
- Regla del producto  
para exponentes, 243  
para radicales, 604  
para raíces cuadradas, 565-567  
que tienen variables, 567-569
- Relación  
definición, 490  
dominio, 491  
rango, 491
- Resta  
de expresiones que contienen más de dos números, 58-59  
de fracciones, 24-25  
de números  
complejos, 651  
con punto decimal, 658  
reales, 52-57  
de polinomios, 274-276  
de raíces cuadradas, 571-573  
en calculadoras, 59  
en forma mental, 57-58
- S**
- Signo  
de radical, 557, 558  
del producto de dos números reales, 63-64  
de una fracción, 368-369
- Símbolos  
 $\pi$  ( $\pi$ ), 175  
aproximadamente igual a, 13  
mayor o igual, 158  
mayor que, 37  
menor o igual, 158  
menor que, 37  
multiplicación, 21  
paréntesis, 75-77  
signo de radical, 557, 558
- Simetría, 639  
uso de la, para graficar ecuaciones cuadráticas, 641-644
- Simplificación de fracciones, 253-257
- Sistema  
consistente de ecuaciones, 510  
de coordenadas cartesianas o rectangulares, 440  
dependiente de ecuaciones, 511  
inconsistente de ecuaciones, 511  
de desigualdades lineales. *Vea* Desigualdades lineales  
de ecuaciones lineales. *Vea* Ecuaciones lineales
- Solución de problemas  
con expresiones que implican dos cantidades relacionadas, 187-189  
con expresiones que implican porcentajes, 187  
con expresiones que involucran multiplicación, 189-190  
de distancia, 219, 595  
de mezclado, 225-228, 540  
de movimiento, 218-222, 414-417, 538-539  
de un sistema de ecuaciones, 509. *Vea* Ecuaciones lineales  
geométricos, 212-215  
procedimiento para aplicaciones, 199-207  
enfoque general, 8-12  
que implican estadísticas, 14-16  
que incluyen gráficas de barras, de líneas, y circulares, 12-14
- traducción de aplicaciones a ecuaciones, 190-193  
traducción de frases a expresiones matemáticas, 185-187  
uso de proporciones, 147-149
- Suma  
complejos, 651  
con calculadoras, 48  
con punto decimal, 658  
de dos cubos, 340-342  
de fracciones, 24-25, 44-45  
de números reales, 42-44  
con el mismo signo, 46  
con signos diferentes, 46-47  
de polinomios, 273-274  
de raíces cuadradas, 571-573  
elemento identidad, 86-87  
método de, para resolver sistemas de ecuaciones, 526-533  
propiedad asociativa, 84-85  
propiedad conmutativa, 84
- Sustitución para resolver el de sistemas de ecuaciones, 520-523
- T**
- Teorema de Pitágoras, 354-355, 593, 666  
en problemas con raíces cuadradas, 594-595
- Término constante, 99
- Términos, 98  
de la razón, 143  
semejantes, 99-101  
reducción, 100-101
- Ternas ordenadas, 526
- Transversal, 664
- Triángulo(s)  
acutángulo, 665  
área, 172-174  
congruentes, 666  
equilátero, 215, 611, 665  
isósceles, 213, 665  
obtusángulo, 665  
perímetro, 172-174  
rectángulo, 665  
semejantes, 666-667  
tipos de, 665
- Trinomio(s)  
cuadrado perfecto, 620-622  
de la forma  $ax^2 + bx + c$ , en donde  $a \neq 1$ , 325-336  
de la forma  $ax^2 + bx + c$ , en donde  $a = 1$ , 316-323  
quitando factores comunes, 323
- Trinomios cuadrados perfectos, 620-622
- U**
- Unidad imaginaria, 649-650
- Unidades, 304
- Unión, 36
- V**
- Valor absoluto, 38
- Valuación dinámica, 206
- Variable(s), 20, 98  
orden descendente, 272
- Variación  
directa, 426  
inversa, 426
- Vértice de una parábola, 639  
determinación de las coordenadas del, 640-641
- Volumen  
de un cilindro recto, 176  
de un cono circular recto, 176  
de un sólido rectangular, 176  
de una esfera, 176

# Créditos de fotografías

---

1. Myrleen Ferguson/PhotoEdit. 3. Gary Conner/PhotoEdit. 8. AP/Wide World Photos. 10. Allen R. Angel. 17. Pictor/ImageState/International Stock Photography, Ltd. 35. Allen R. Angel. 48 (**izquierda**). Tom Pantages. 48 (**derecha**). Texas Instruments, Inc. 61. James Blank/Stock Boston. 82. Allen R. Angel. 88. Allen R. Angel/NACME, Inc. 97. Allen Fredrickson/Reuters/TimePix. 148. Allen R. Angel. 152. James Leynse/Corbis/SABA Press Photos, Inc. 156. Allen R. Angel/New York Stock Exchange, Inc. 156. Allen R. Angel. 157. Philip Rostron/Masterfile Corp. 168. Allen R. Angel. 170. David Young-Wolff/PhotoEdit. 173. Allen R. Angel. 176. Picture Desk, Inc./Kobal Collection. 183. SuperStock, Inc. 184. Allen R. Angel. 188. Allen R. Angel. 194. Allen R. Angel (ambas fotografías). 195. Pictor/ImageState/International Stock Photography, Ltd. 196. Allen R. Angel/National Baseball Hall of Fame & Museum (ambas fotografías). 197. Allen R. Angel (ambas fotografías). 198. Allen R. Angel. 203. Allen R. Angel. 204. Allen R. Angel. 207. Michael Newman/PhotoEdit. 208. Allen R. Angel. 208. Corbis. 209. Corbis. 210. Jeff Robbins/AP/Wide World Photos. 211. Corbis. 215. Allen R. Angel. 218. D. Martin/Photo Researchers, Inc. 219. Allen R. Angel. 222. David Young-Wolff/PhotoEdit. 228. Allen R. Angel. 229. Allen R. Angel (ambas fotografías). 230. Eric Perlman/Corbis. 231. Allen R. Angel. 232. Allen R. Angel/National Baseball Hall of Fame & Museum. 233. Allen R. Angel. 236. Allen R. Angel. 237. Peter Hvizdak/The Image Works. 241. Allen R. Angel. 260. Allen R. Angel. 265. Allen R. Angel/Walt Disney Company. 266. Newsmakers/Getty Images, Inc.—Liaison. 267. Ambient Engineering, Inc. 269. Allen R. Angel. 271. Picture Desk, Inc./Kobal Collection. 299. Allen R. Angel. 300. Roger Ressemeyer/Corbis. 302. Allen R. Angel. 316. Eric Futran/Getty Images, Inc.—Liaison. 325. Keith Wood/Getty Images, Inc.—Stone. 338. Joe Skipper/Corbis. 351. Allen R. Angel. 353. Allen R. Angel. 354. William Traufic/Corbis. 360. Gary Cralle/Getty Images, Inc.—Image Bank. 364. Allen R. Angel. 366. SuperStock, Inc. 382. Allen R. Angel. 390. SuperStock, Inc. 411. Jeremy Homer/Getty Images, Inc.—Stone. 415. Kerrick James/Getty Images, Inc.—Stone. 415. Tami Dawson/Photo Resource Hawaii Stock Photography. 417. David Young-Wolff/PhotoEdit. 421. Gables/Dorling Kindersley Media Library. 423. Allen R. Angel. 424. Allen R. Angel (ambas fotografías). 425. Allen R. Angel. 425. Tom Stewart/Corbis/Stock Market. 427. Allen R. Angel. 429. Allen R. Angel. 432. Allen R. Angel (ambas fotografías). 436. Allen R. Angel. 437. Allen R. Angel. 438. Allen R. Angel. 439. Allen R. Angel. 440. Sheila Terry/Science Photo Library/Photo Researchers, Inc. 457. Jon Feingersh/Corbis/Stock Market. 461. Allen R. Angel. 473. Sylvie Chappaz/Photo Researchers, Inc. 478. Allen R. Angel. 486. Reuters/Craig Litten/TimePix. 496. Allen R. Angel. 499. Allen R. Angel. 503. Allen R. Angel. 508. Steve Chenn/Corbis. 519. Allen R. Angel. 525. Allen R. Angel. 538. Allen R. Angel. 543. SuperStock, Inc. 544. Peter Skinner/Photo Researchers, Inc. 544. Reuters/Space Imaging/Handout/TimePix. 546. Tom Prettyman/PhotoEdit. 556. Allen R. Angel. 565. Allen R. Angel. 577. Allen R. Angel. 586. SuperStock, Inc. 593. Allen R. Angel. 596. Allen R. Angel. 596. David R. Frazier/David R. Frazier Photolibrary, Inc. (superior). 597. Allen R. Angel. 599. Allen R. Angel. 600. Museum of Science and Industry. 600. Julian Baum/Dorling Kindersley Media Library. 611. J. Marshall/The Image Works (superior). 611. Allen R. Angel (inferior). 614. Carl Schneider/Getty Images, Inc.—Taxi. 619. Michael Boys/Corbis. 635. Rachel Epstein/PhotoEdit. 637. Richard Nowitz Photography. 644 (**izquierda**). Robert Srenco Photography. 644 (**derecha**). Allen R. Angel.

