INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR JAPÓN

GUÍA METODOLÓGICA DE ÁLGEBRA

COMPILADO POR:

ING. YECENIA CEVALLOS

ADMINISTRACIÓN 2019

AMOR AL CONOCIMIENTO

www.itsjapon.edu.ec

1. IDENTIFICACIÓN DE

Nombre de la Asignatura: **ALGEBRA**	**Componentes del Aprendizaje**	
Resultado del Aprendizaje: ▪ Identifica las diferentes proposiciones lógicas del algebra de Boole ▪ Resuelve ejercicios aplicando los diferentes tipos de matrices y los relaciona con la resolución de sistemas de ecuaciones. ▪ Resuelve ejercicios sobre áreas, distancias, y las diferentes formas de la ecuación de la recta. ▪ Resuelve ejercicios sobre los diferentes tipos de funciones.		
Docente de Implementación:		
Ing. Yecenia Cevallos	**Duración:** 16 horas	

Unidades	**Competencia**	**Resultados de Aprendizaje**	**Actividades**	**Tiempo de Ejecución**
Proposicional y Conjuntos	Analizar las propiedades del álgebra proposicional y operaciones de conjuntos para la solución de ejercicios	COGNITIVO: Identifica las diferentes proposiciones lógicas del algebra de Boole. PROCEDIMENTAL: Explica las propiedades que intervienen en la lógica matemática. ACTITUDINAL: Respeta los procedimientos para la resolución de ejercicios.	Aprendizaje basado en problemas	4

Sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes.	Identificar los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante las propiedades de matrices y determinantes.	COGNITIVO: Define las propiedades del álgebra lineal. PROCEDIMENTAL: Realiza ejercicios sobre los diferentes tipos de matrices y los relaciona con la resolución de sistemas de ecuaciones. ACTITUDINAL: Respeta los procesos que conllevan a la resolución de ejercicios.	Trabajo colaborativo	4
Geometría analítica de dos dimensiones	Analizar relaciones y funciones reales determinando su dominio, recorrido, y monotonía para graficarlas en el plano cartesiano.	COGNITIVO: Define los diferentes tipos de elementos que intervienen dentro del contexto de la geometría analítica. PROCEDIMENTAL: Resuelve ejercicios sobre áreas, distancias, y las diferentes formas de la ecuación de la recta. ACTITUDINAL: Respeta los procesos que conllevan a la resolución de ejercicios.	Clases prácticas: resolución de problemas	4

Relaciones y Funciones	Identificar las funciones con sus relaciones para la resolución de ejercicios.	COGNITIVO: Define las diferentes funciones y sus relaciones. PROCEDIMENTAL: Resuelve ejercicios sobre los diferentes tipos de funciones. ACTITUDINAL: Respeta los procesos que conllevan a la resolución de ejercicios	Clase expositiva. Estudio del caso. Preguntas guiadas.	4

2. CONOCIMIENTOS PREVIOS Y RELACIONAD

Co-requisitos

3. UNIDADES TEÓRICAS

A. Base Teórica

UNIDAD 1: LÓGICA MATEMÁTICA Y CONJUNTOS

La lógica estudia la forma del razonamiento, es una disciplina que por medio de reglas y técnicas determina si un argumento es válido. La lógica es ampliamente aplicada en la filosofía, matemáticas, computación, física. En la filosofía para determinar si un razonamiento es válido o no, ya que una frase puede tener diferentes interpretaciones, sin embargo la lógica permite saber el significado correcto. (monografias.com, n.d.)

Una proposición o enunciado es una oración que puede ser falso o verdadero pero no ambas a la vez. La proposición es un elemento fundamental de la lógica matemática.

A continuación se tienen algunos ejemplos de proposiciones válidas y no válidas, y se explica por qué algunos enunciados no son proposiciones. Las proposiciones se indican por medio de una letra minúscula, dos puntos y la proposición propiamente dicha. Ejemplo.

- **p:** La tierra es plana.
- **q:** -17 + 38 = 21
- **r:** x > y-9
- **s:** El Morelia será campeón en la presente temporada de Fut-Bol.
- **t:** Hola ¿cómo estás?
- **w:** Lava el coche por favor.

Elementos de lógica

- **Proposición**. Una proposición es una expresión de la cual se puede decir siempre si es verdadera o es falsa (V o F).

- Por tanto, se dice que las proposiciones son bivalentes, conviene observar que no compete a la lógica establecer el valor de verdad de las proposiciones, es decir, se considerarán las proposiciones simples con su valor ya asignado.

- **Notación.** Por costumbre a las proposiciones las denotaremos mediante las letras: p, q, r . .

- **Convención.** Si convenimos en considerar el conjunto U de todas las posibles proposiciones del lenguaje como conjunto universo, si p pertenece a U, se denotan por p ∈ U.

- **Conectivos o símbolos.** Ocuparemos los siguientes símbolos, llamados también conectivos lógicos.

$\sim$: Negación
$\wedge$: Conjunción
$\vee$: Disyunción
$\Rightarrow$: Implicación
$\Leftrightarrow$: Doble implicación
$\underline{\vee}$: Disyunción excluyente

Negación (Not, no)

Su función es negar la proposición. Esto significa que sí alguna proposición es verdadera y se le aplica el operador not se obtendrá su complemento o negación (falso). Este operador se indica por medio de los siguientes símbolos: {~, ¬}. Ejemplo.

p	p'
1	0
0	1

Conjunción (y):

Se utiliza para conectar dos proposiciones que se deben cumplir para que se pueda obtener un resultado verdadero. Si símbolo es: ^. Se le conoce como la multiplicación lógica:

q	r	p = q ∧ r
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Dónde: 1= Verdadero y 0 Falso

Ejemplo:

Sea el siguiente enunciado "El coche enciende cuando tiene gasolina en el tanque y tiene corriente la batería"

Sean:

p: El coche enciende.

q: Tiene gasolina el tanque.

r: Tiene corriente la batería.

De tal manera que la representación del enunciado anterior usando simbología lógica es como sigue: p = q ^ r

Disyunción Or (o):

Con este operador se obtiene un resultado verdadero cuando alguna de las proposiciones es verdadera. Su símbolo es V y se lo conoce como la suma lógica.

q	r	p =q v r
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Ejemplo.

Sea el siguiente enunciado "Una persona puede entrar al cine si compra su boleto u obtiene un pase". Dónde:

p: Entra al cine.

q: Compra su boleto.

r: Obtiene un pase.

Condicional

Una proposición condicional, es aquella que está formada por dos proposiciones simples (o compuesta) p y q. La cual se indica de la siguiente manera:

$p \rightarrow q$ Se lee "Si p entonces q"

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Ejemplo:

El candidato del PRI dice "Si salgo electo presidente de la República recibirán un 50% de aumento en su sueldo el próximo año". Una declaración como esta se conoce como condicional.

Sean

p: Salió electo Presidente de la República.

q: Recibirán un 50% de aumento en su sueldo el próximo año.

De tal manera que el enunciado se puede expresar de la siguiente manera: $p \rightarrow q$

La interpretación de los resultados es la siguiente:

Considere que se desea analizar si el candidato presidencial mintió con la afirmación del enunciado anterior. Cuando p=1; significa que salió electo, q=1 y recibieron un aumento de 50% en su sueldo, por lo tanto $p \rightarrow q = 1$; significa que el candidato dijo la verdad en su campaña. Cuando p=1 y q=0 significa que $p \rightarrow q = 0$; el candidato mintió, ya que salió electo y no se incrementaron los salarios. Cuando p=0 y q=1 significa que aunque no salió electo hubo un aumento del 50% en su salario, que posiblemente fue ajeno al candidato presidencial y por lo tanto; tampoco mintió de tal forma que $p \rightarrow q = 1$.

Bicondicional

Sean p y q dos proposiciones entonces se puede indicar la proposición bicondicional de la siguiente manera:

$p \leftrightarrow q$ Se lee "p si solo si q"

Esto significa que p es verdadera si y solo si q es también verdadera. O bien p es falsa si y solo si q también lo es. Ejemplo; el enunciado siguiente es una proposición bicondicional

"Es buen estudiante, si y solo sí; tiene promedio de diez"

Dónde:

p: Es buen estudiante.

q: Tiene promedio de diez.

Por lo tanto su tabla de verdad es.

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Proposiciones simples y compuestas.

Según la Enciclopedia de Ejemplos, 2019., n.d., las proposiciones simples son aquellas que expresan un estado de situación en su estado más sencillo, es decir uniendo a un sujeto con un objeto a partir del verbo ‘es’. Existe tanto en el ámbito de la matemática como en el de otras disciplinas, e incluso para cuestiones que no son relativas a ninguna de ellas. Se caracteriza por no tener ningún término que condicione la proposición de ninguna manera. Ejemplos:

1. Esa caja es de madera.
2. Nada es para siempre.
3. La música clásica es la más antigua del mundo.
4. Los números pares son divisibles por dos.
5. La capital de Rusia es Moscú.
6. Esa chica es mi amiga.
7. Son las tres de la tarde con veintiséis minutos.

"Las proposiciones en las que aparecen las partículas gramaticales como: No, o, y, si…entonces, si y solo sí. Se les llama Proposiciones Compuestas o Moleculares" (SOCIEDAD A MATEMÁTICAS, 2013).

Ejemplos:

1. La ballena no es roja
2. Gustavo no es alto
3. Teresa va a la escuela o María es inteligente
4. 4 es menor que 8 o 6 es mayor que 10
5. El 1 es el primer número primo y es mayor que cero
6. El 7 es mayor que 5 y 7 es menor que 10
7. Si Yolanda es estudiosa entonces pasará el examen
8. Si corro rápido entonces llegaré temprano
9. Terminaré rápido si y sólo si me doy prisa
10. Aprenderé Matemáticas si y sólo si estudio mucho.

Obtener el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \lor q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \lor q$	$\sim (p \lor q)$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim (p \lor q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V	V

b) ~ (p ∨ q) ↔ (~ p ^ ~ q)

p	q	~ p	~ q	p ∨ q	~ (p ∨ q)	~ p ^ ~ q	~ (p ∨ q) ↔ (~ p ^ ~ q)
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V	V

c) [(p ∨ q) → (~ r ^ q)] → (q ↔ r)

p	q	r	~ r	p ∨ q	~ r ^ q	q ↔ r	(p ∨ q) → (~ r ^ q)	[(p ∨ q) → (~ r ^ q)] → (q ↔ r)
V	V	V	F	V	F	V	F	V
V	V	F	V	V	V	F	V	F
V	F	V	F	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	V	F	V
F	V	F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	F	F	F	F	V	F
F	F	F	V	F	F	V	V	V

Calculo proposicional: Tautología Contradicción Contingencia

Anónimo, 2011**,** indica que:

Tautología:

Es una expresión lógica que resulta verdadera para cualquier interpretación; es decir, para cualquier asignación de valores de verdad. La construcción de una tabla de verdad es un método efectivo para determinar si una expresión cualquiera es una tautología o no.

Por ejemplo:

p	q	(p⇔q)	⇔	[(p⇒q)	∧	(q ⇒p)]
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V

Contradicción:

Una proposición es una contradicción, si es falsa para todos sus valores de verdad.

p	q	(p⇔ q)	⇔	-	[(p⇒ q)	∧	(q ⇒ p)]
V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	F	F	V	V	V

Contingencia:

Una proposición es una contingencia si no es ni verdadera ni falsa independientemente de los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.

p	q	$(p \Leftrightarrow q)$	v	$[(p \Rightarrow q)$	$\wedge$	$(q \Rightarrow p)]$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V
F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V

Equivalencia e implicaciones lógicas.

Dos fórmulas lógicas son equivalentes si tienen los mismos valores de verdad para todos los posibles valores de verdad de sus componentes.

Ejemplo 1: Las dos fórmulas siguientes son equivalentes:

$$(p \rightarrow \neg q) \vee (\neg p \vee r) \qquad \neg p \vee \neg q \vee r$$

Elaboramos la tabla.

p	q	r	$\neg q$	$\neg p$	$p \rightarrow \neg q$	$\neg p \vee r$	$(p \rightarrow \neg q) \vee (\neg p \vee r)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg p \vee \neg q \vee r$
V	V	V	F	F	F	V	V	F	V
V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V

Ejemplo 2:

Las dos sentencias siguientes son lógicamente equivalentes:

1. Si Lisa está en Francia, entonces ella está en Europa
2. Si Lisa no está en Europa, entonces ella no está en Francia.

Sintácticamente, (1) y (2) son derivables cada una de la otra a través de la regla de contraposición y doble negación. Semánticamente, (1) y (2) son verdaderas en exactamente los mismos modelos (interpretaciones, valuaciones); a saber, aquellos en que *Lisa está en Francia* es falso o bien *Lisa está en Europa* es verdadero.

Las equivalencias se relacionan con las tautologías de la siguiente forma.

Teorema: Si dos fórmulas lógicas son equivalentes entonces la fórmula que se obtiene al operarlas con la bicondiconal es una tautología.

Leyes de Lógica

EQUIVALENCIA	NOMBRE
P v F↔ P P ^ T ↔P	Leyes de la Identidad
P v T↔ T P ^ F ↔ F	Leyes de Dominación
P v P ↔P P ^ P↔ P	Leyes de la Idempotencia
~(~P) ↔ P	Ley de la Doble Negación
P v Q ↔ Q v P ; P ^ Q ´ ↔Q ^ P	Leyes Conmutativas
(P v Q) v R ↔P v (Q v R) (P ^ Q) ^ R ↔P ^ (Q ^ R)	Leyes Asociativas
(P v Q) ^ (P v R) ↔P v (Q ^ R) (P ^ Q) v (P ^ R) ↔P ^ (Q v R)	Leyes Distributivas
~(P ^ Q) ↔~P v ~Q ~(P v Q) ↔~P ^ ~Q	Leyes de de Morgan

Ilustración 1 Leyes de la Lógica

Fuente: Lógica proposicional, Anónimo, 2011

Inferencias lógicas

Inferencias

Es deducir, y deducir es obtener conclusiones a partir de unas premisas. Tiene como finalidad facilitar el análisis de argumentos mediante el lenguaje simbólico y las “Reglas de la Inferencia”.

Reglas de Inferencia

Son aquellas que demuestran las condiciones y premisas con casos reales

a) MODUS PONENDO PONENS (PP)

$$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$$

$P \rightarrow Q$ "Si llueve, entonces las calles se mojan"

P "Llueve"

El condicional o implicación es aquella operación que establece entre dos enunciados una relación de causa-efecto. La regla 'ponendo penens' significa, "afirmando afirmo" y en un condicional establece, que si el antecedente (primer término, en este caso p) se afirma, necesariamente se afirma el consecuente (segundo término, en este caso q).

b) MODUS TOLLENDO TELLENS (TT)

"Tollendo tellens" significa "negando, niego" y se refiere a una propiedad inversa de los condicionales, a los que nos referimos en primer lugar.

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$$

$p \rightarrow q$ "Si llueve, entonces las calles se mojan"

$\neg q$ "Las calles no se mojan"

$\neg p$ "luego, no llueve"

Si de un condicional, aparece como premisa el en consecuente negado (el efecto), eso nos conduce a negar el antecedente (la causa), puesto que si un efecto no se da, su causa no ha podido darse.

Esto nos permite formular una regla combinada de las ambas anteriores, consecuencia ambas de una misma propiedad de la implicación; la regla ponendo ponens sólo nos permite afirmar si está afirmado el antecedente (el primer término de la implicación), y la regla tollendo tolens solo nos permite negar a partir de consecuente (segundo término de la implicación), ambas consecuencias se derivan de que la implicación es una flecha que apunta en un único sentido, lo que hace que sólo se pueda afirmar a partir de antecedente y negar sólo a partir de consecuente.

c) DOBLE NEGACION (DN)

⌐p(⌐p)↔p

El esquema representa, "p doblemente negada equivale a p". Siguiendo el esquema de una inferencia por pasos; la representaríamos así:

⌐(⌐) "No ocurre que Ana no es una estudiante"

P "Ana es una estudiante"

La regla "doble negación" solo establece que si un enunciado está doblemente negado, equivaldría al enunciado afirmado.

d) ADJUNCION Y SIMPLIFICACION

Adjunción (A): Si disponemos de dos enunciados afirmamos como dos premisas separadas, mediante la adjunción, podemos unirlos en una sola premisa utilizando el operador ^ (conjunción).

$$p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Rightarrow (q \wedge r)$$

P "juan es cocinero"

Q "pedro es policía"

P ^ q "juan es cocinero y pedro es policía

Simplificación (S): obviamente, es la operación inversa. Si disponemos de un enunciado formado por dos miembros unidos por una conjunción, podemos hacer de los dos miembros dos enunciados afirmados por separado.

$$p \wedge q \Rightarrow p \quad \text{o} \quad p \wedge q \Rightarrow q$$

p^q "Tengo una manzana y tengo una pera"

---

p "tengo una manzana"

q "Tengo una pera"

e) MODUS TOLLENDO PONENS (TP)

La disyunción que se simboliza con el operador V, representa una elección entre dos enunciados. Ahora bien, en esa elección forma parte de las posibilidades escoger ambos enunciados, es decir, la verdad de ambos enunciados no es incompatible, si bien ambos no pueden ser falsos.

A partir de lo anterior, se deduce la siguiente regla, denominada tollendo ponens (negando afirmo): si uno de los miembros de una disyunción es negado, el otro miembro queda automáticamente afirmado, ya que uno de los términos de la elección ha sido descartado.

$$(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q \quad \text{o} \quad (p \vee q) \wedge \neg q \Rightarrow p$$

$p \vee q$ "He ido al cine o me he ido de compras"

$\neg q$ "No he ido de compras"

____

P "Por tanto, he ido al cine"

f) LEY DE LA ADICION (LA)

Dado un enunciado cualquiera, es posible expresarlo como una elección (disyunción) acompañado por cualquier otro enunciado.

$$p \wedge q \Rightarrow p \quad o \quad p \wedge q \Rightarrow q$$

"He comprado manzanas"

____

$a \vee b$ "He comprado manzanas o he comprado peras"

g) SILOGISMO HIPOTÈTICO (SH)

Dados dos implicaciones, de las cuales, el antecedente de una sea el consecuente de la otra (el mismo enunciado), podemos construir una nueva implicación cuyo antecedente sea otra (el mismo enunciado), podemos construir una nueva implicación cuyo antecedente se el de aquella implicación cuya consecuencia sea el antecedente de la otra implicación y cuyo consecuente sea el de ésta última, cuyo antecedente era consecuencia del primero.

Expresado de otro modo, si una causa se sigue una consecuencia y ésta consecuencia es a su vez causa de una segunda consecuencia, se puede decir que esta primera causa es causa de esa segunda consecuencia, del mismo modo que, si una bola de billar roja golpea a otra bola blanca que a su vez golpea a una negra, la bola roja es causa del movimiento de la bola negra. Expresado en forma de inferencia lógica.

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$$

$p \rightarrow q$ “si la bola roja golpea a la bola blanca, la bola blanca se mueve”

$q \rightarrow r$ “Si la bola blanca golpea a la bola negra, la bola negra se mueve”

$p \rightarrow r$ “Si la bola roja golpea ala bola blanca, la bola negra se mueve”

h) SILOGISMO DISYUNTIVO (DS)

Dadas tres premisas, dos de ella, implicaciones, y la tercera una disyunción cuyos miembros sean los antecedentes de los condicionales, podemos concluir en una nueva premisa en forma de disyunción, cuyos miembros serían los consecuentes de las os implicaciones lógicamente, si planteamos una elección entre dos causas, podemos plantear una elección igualmente entre sus dos posibles efectos, que es el sentido de esta regla.

$p \rightarrow q$ “Si llueve, entonces las calles se mojan”

$r \rightarrow s$ “Si la tierra tiempla, los edificios se caen”

$p \vee r$ “Llueve a la tierra tiembla”

$q \vee s$ “Las calles se mojan o los edificios se caen”

i) SIMPLIFICACION DISYUNTIVA (SD)

Si disponemos de dos premisas que corresponden a dos implicaciones con el mismo consecuente, y sus antecedentes se corresponden con los dos miembros de una disyunción, podemos concluir con el consecuente de ambas implicaciones.

$p \vee p \Rightarrow p$

$p \vee q$ "Helado de fresa o helado de vainilla"

$p \rightarrow r$ "Si tomas helado de fresa, entonces repites"

$q \rightarrow r$ "Si tomas helado de vainilla, entonces repites"

---

r Luego, repites

j) LEY CONMUTATIVA

Esta ley, no es válida para la implicación, pero si para conjunción y para disyunción. Una conjunción es afirmar que se dan dos cosas a la vez, de modo que el orden de sus elementos no cambia este hecho. Igualmente, con disyunción es presentar una elección entre dos cosas, sin importar en qué orden se presente esta elección. Así pues,

$$\frac{P \wedge q}{\neg(\neg p \vee \neg q)}$$

$$\frac{p \vee q}{\neg(\neg p \wedge \neg q}$$

Ejemplos 1:

concluya $\neg t$ de las premisas

1. $(q \vee r) \rightarrow p$ (P)
2. $\neg p$ (P)
3. $s \rightarrow (q \vee r)$ (P)
4. $\neg s \rightarrow \neg t$ (P)

De (1) y (2): $((q \vee r) \rightarrow p) \wedge \neg p \Rightarrow \neg(q \vee r)$ (5) MTT

De (3) y (5): $(s \rightarrow (q \vee r)) \wedge \neg(q \vee r) \Rightarrow \neg s$ (6) MTT

De (4) y (6): $(\neg s \rightarrow \neg t) \wedge \neg s \Rightarrow \neg t$ (7) MPP

Conclusión: **$\neg t$**

Ejemplo 2:

concluya r de las premisas

1. $q \rightarrow \neg p$ (P)
2. $\neg q \rightarrow r$ (P)
3. $(p \wedge \neg r) \vee s$ (P)
4. $(s \vee t) \rightarrow r$ (P)

De (2): $\neg r \rightarrow q$ (5)	Ley Contrarecíproco del condicional
De (5) y (1): $\neg r \rightarrow \neg p$ (6)	RSH
De (6): $p \rightarrow r$ (7)	Contrarecíproco
De (7): $\neg(p \wedge \neg r)$ (8)	Leyes: alternativa del condicional y doble negación y D'Morgan
De (3) y (8): s (9)	MTP
De (9): $s \vee t$ (10)	RA
De (4) y (10): r (11)	MPP
Conclusión: **r**	

Ejemplo 3:

Concluya "no relampaguea" del enunciado: "si no llueve de día entonces ni voy a misa ni voy a cine. Si tengo dinero entonces voy a misa o a cine. No llueve de día. Si relampaguea entonces tengo dinero". Las premisas son:

1. Si no llueve de día entonces ni voy a misa ni voy a cine

2. Si tengo dinero entonces voy a misa o a cine

3. No llueve de día

4. Si relampaguea entonces tengo dinero

Simbolicemos premisas:

p: "llover de día"

q:"ir a misa"

r: "ir a cine"

s: "tener dinero"

t: “relampaguear”

1. $\neg p \to \neg q \wedge \neg r$
2. $s \to q \vee r$
3. $\neg p$
4. $t \to s$

De (1) y (3): $\neg q \wedge \neg r$ (5)	MPP
De (5): $\neg(q \vee r)$ (6)	Ley de D'Morgan
De (2) y (6): $\neg s$ (7)	MTT
De (4) y (7): $\neg t$ (8)	MTT

Conclusión: “no relampaguea”

Validez de una inferencia

La validez de las inferencias de pende de que su conclusión se deriva lógicamente de las premisas. Una inferencia tiene como conectivo principal a término condicional. Cuando se hace una evaluación de la inferencia, solo será verdadera si su matriz principal es una tautología. En ningún caso si fuera contradictoria o consistente será verdadera una inferencia.

Taller:

Realice la tabla de corte de las siguientes expresiones, indicando si es una contradicción, tautología o contingencia.

1. $p \wedge q$
2. $(p \wedge q) \wedge r$
3. $\neg(p \rightarrow \neg q) \wedge (p \wedge \neg q)$
4. $(p \wedge q) \vee (p \vee \neg q)$
5. $p \wedge q \wedge r$
6. $\neg(p \wedge \neg q) \wedge (p \wedge \neg q)$
7. $\neg\neg(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)$
8. $p \vee q \wedge r$
9. $\neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$
10. $p \vee q \wedge \neg r$

Circuitos lógicos

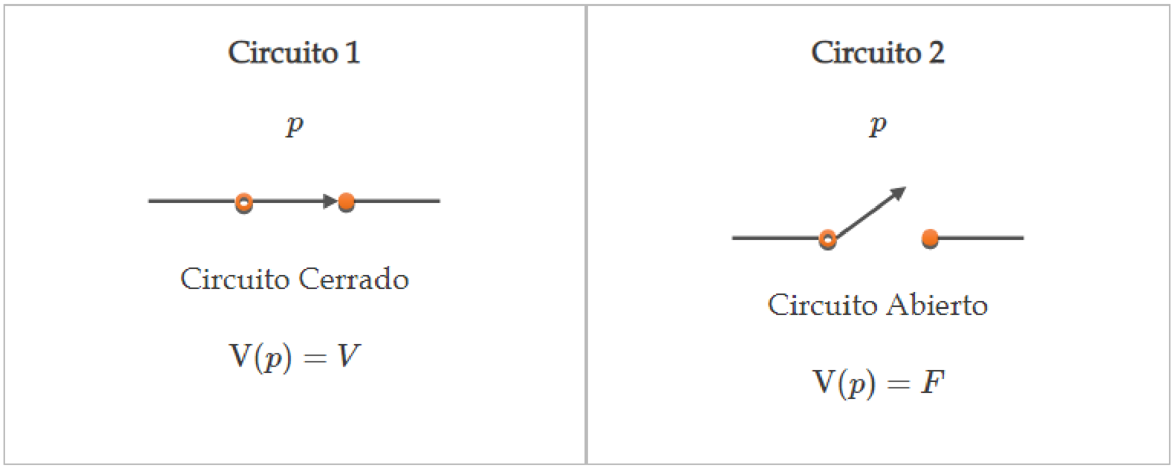
Los circuitos lógicos en matemáticas no son usados de manera formal porque no están representados ni definidos por caracteres matemáticos muy bien ordenados ya que no se aceptan los supuestos intuitivos.

Este tipo de representaciones gráficas son usados en informática y son llamados generalmente como circuitos digitales, este nombre radica del concepto de dígito, en especial con dos dígitos, esto son, los valores de “0” y “1”. Estos dos únicos valores se les conoce como forma binaria y significan:

- “0” voltaje bajo “low”, que significa falso con símbolo F
- “1” voltaje alto “high”, que significa verdadero V

Los valores de únicos 0 y 1 son los únicos dígitos binarios conocidos como bit, un bit es como una moneda con una cara y una cruz, verdadero o falso, arriba o abajo, etc.

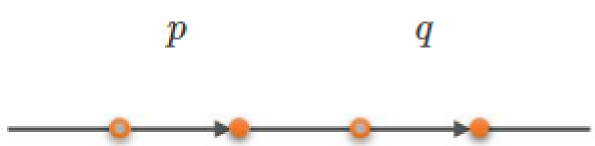
Pero para nuestro caso, su representación gráfica de los valores de verdad de una proposición pp, sería:



Con estas representaciones logramos una correspondencia entre circuito y proposiciones.

Circuitos en serie (la conjunción)

Un circuito en serie de dos proposiciones p y q se puede representar así:



$$V(p \wedge q) = V$$

Esto es, un circuito en serie donde las proposiciones representan los interruptores, para ser más exactos, representa tan solo a los valores de verdad de las proposiciones p y q.

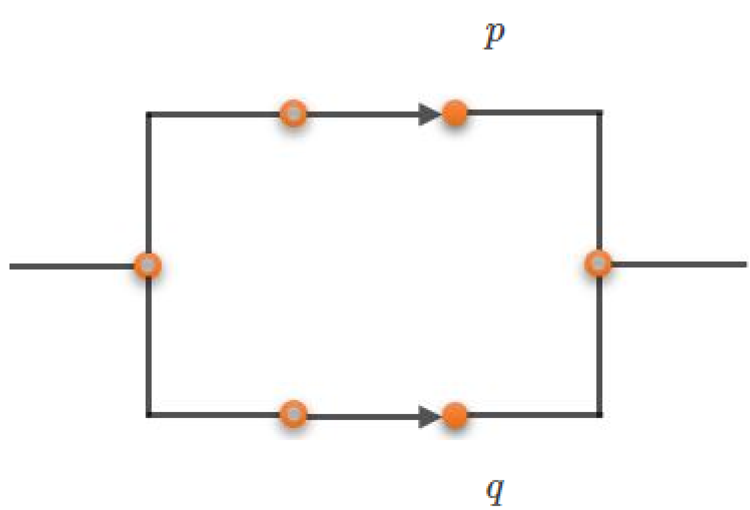
Este este circuito significa que la información pasa por el circuito a través de los interruptores, en este caso, se dice que los valores de verdad de p y q son verdaderas cuando la información pasa entre las dos.

Todas estas posibles combinaciones circuitos cerrados y abiertos en serie representan a la tabla de verdad de la conjunción, aquí un recuadro donde vemos todas sus combinaciones:

p	q	$p \wedge q$	Circuitos
V	V	F	
V	F	F	
F	V	F	
F	F	F	

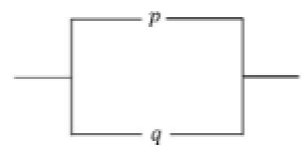
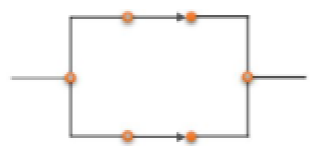
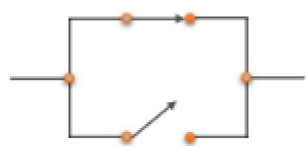
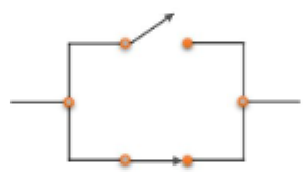
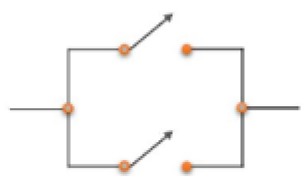
Circuitos en Paralelo (la disyunción)

Un circuito en paralelo de dos proposiciones p y q se puede representar así:

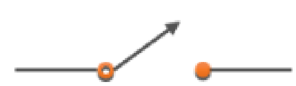


$$\mathrm{V}(p \vee q) = V$$

La tabla de verdad de todas estas posibilidades de la disyunción inclusiva es la siguiente.

p	q	$p \vee q$	
			
V	V	V	
V	F	V	
F	V	V	
F	F	F	

Para el caso de la negación, simplemente lo representamos así:

p	—— p ——	—— $\sim p$ ——
V		
F		

Algebra de Boole

Según Araya, 2006, el álgebra de Boole es un sistema matemático que utiliza variables y operadores lógicos. Las variables pueden valer 0 o 1. Y las operaciones básicas son OR (+) y AND (*). Luego se definen las expresiones de conmutación como un número finito de variables y constantes, relacionadas mediante los operadores (AND y OR). En la ausencia de paréntesis, se utilizan las mismas reglas de precedencia, que tienen los operadores suma (OR) y multiplicación (AND) en el álgebra normal.

Leyes

En el álgebra de Boole se cumplen las siguientes Leyes:

- **1) Conmutatividad**:

$$X + Y = Y + X$$
$$X \cdot Y = Y \cdot X$$

Leyes

- **2) Asociatividad**:

$$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$$
$$X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$$

- **3) Distributividad**:

$$X + (Y \cdot Z) = (X + Y) \cdot (X + Z)$$
$$X \cdot (Y + Z) = (X \cdot Y) + (X \cdot Z)$$

Identidades

- **4) Elementos Neutros (Identidad)**:

$$X + 0 = X$$
$$X \cdot 1 = X$$

- **5) Complemento**:

$$X + \overline{X} = 1$$
$$X \cdot \overline{X} = 0$$

Leyes

- **6) Dominación:**

$$X + 1 = 1 \quad X \cdot 0 = 0$$

Demostración:

$$X + 1 = (X + 1) \cdot 1 = (X + 1) \cdot (X + \overline{X})$$
$$(X + 1) \cdot (X + \overline{X}) = X + (1 \cdot \overline{X}) = 1$$

- **7) Idempotencia:**

$$X + X = X$$
$$X \cdot X = X$$

Leyes

- **8) Doble complemento:**

$$\overline{\overline{X}} = X$$

.

- **9) Absorción:**

$$X + X \cdot Y = X$$
$$X \cdot (Y + X) = X$$

Demostración:

$$X + X \cdot Y = (X \cdot 1) + (X \cdot Y) = X \cdot (1 + Y) = X$$

Leyes

- **10) DeMorgan:**

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$
$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Compuertas lógicas

Existen dispositivos electrónicos que son capaces de representar funciones de conmutación. Estos dispositivos denominan Compuertas Lógicas y están construidos a base de silicio.

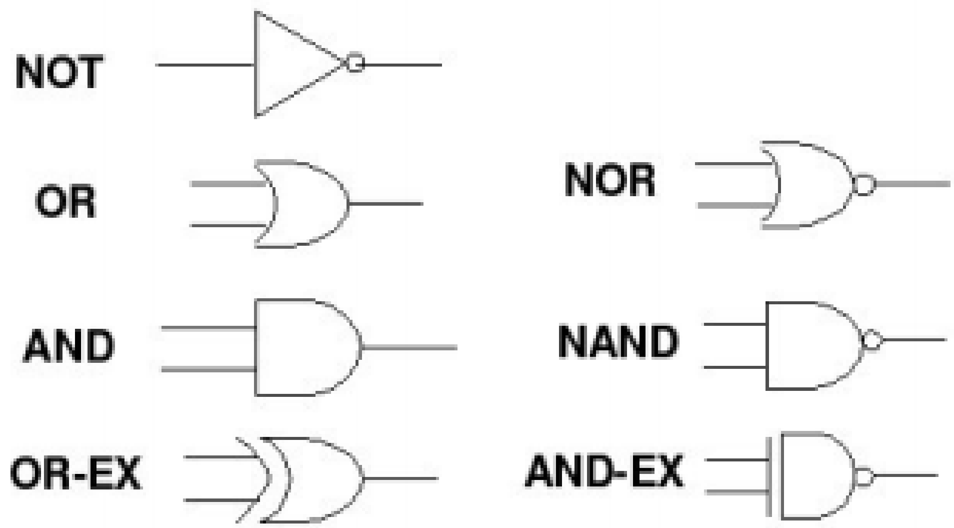


Ilustración 2 Compuertas lógicas

Fuente: Araya, 2006

Conjuntos

Un conjunto o colección lo forman unos elementos de la misma naturaleza, es decir, elementos diferenciados entre sí pero que poseen en común ciertas propiedades o características, y que pueden tener entre ellos, o con los elementos de otros conjuntos, ciertas relaciones.

Determinación de conjuntos

La determinación de un conjunto corresponde a la manera como éste puede expresarse. Para determinar un conjunto se utilizan dos formas: determinación por extensión y la determinación por comprensión.

- **Determinación de conjuntos por extensión**

Un conjunto se determina por extensión cuando se enumeran o se nombran los elementos del conjunto. Cuando el conjunto es finito se escriben entre llaves, separados por comas. Cuando el conjunto es infinito se escriben entre llaves algunos elementos y se ponen puntos suspensivos

A={amarillo, azul, rojo}

B={m, u, r, c, i, e, l, a, g, o}

C={3,4,5,9,2,8}, no se repiten elementos

D={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

E={1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}

Determinación de conjuntos por comprensión

Un conjunto se determina por comprensión enunciando la propiedad o cualidad que distingue a los elementos. Para tal fin se utiliza lo siguiente: {x/x cumple la propiedad}, que se lee: el conjunto de las x tal que x cumple la propiedad

A={x/ x es un color de la bandera de Colombia}

B={x/ x es una letra de la palabra “murciélago”}

C={ x/ x es un dígito del número 345923238}

D={ x/ x es un número natural menor que 10}

E={ x/ x es número primo entre 0 y 20}

Clases de conjuntos

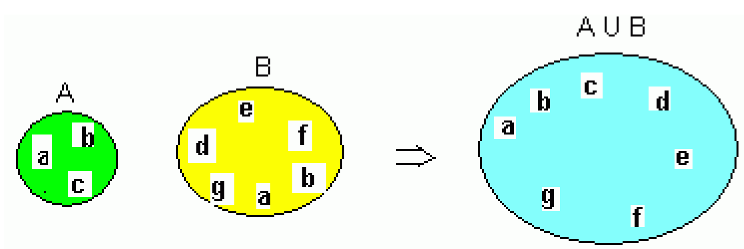
- **<u>Conjuntos finito</u>:** La característica de este conjunto es que sus elementos pueden ser contar o enumerar en su totalidad. Por ejemplo, los meses del año establecen un conjunto finito: enero, febrero, marzo, abril, mayo, junio, julio, agosto, septiembre, octubre, noviembre y diciembre.

- **Conjunto infinito:** Un conjunto será infinito cuando sus elementos sean imposibles de contar o enumerar en su totalidad, debido a que no tienen fin. Los números son un claro ejemplo de un conjunto infinito.
- **Conjunto unitario**: Aquel que está compuesto por un único elemento. La luna se encuentra dentro de este conjunto, pues es el único satélite natural del planeta tierra.
- **Conjunto vacío:** se trata de un conjunto el cual no presenta ni tiene elementos. **Conjunto homogéneo**: Conjuntos cuyos elementos presentan una misma clase o categoría.
- **Conjunto heterogéneo**: Los elementos de estos conjuntos difieren en clase y categoría.
- **Conjuntos equivalentes**: Serán equivalentes aquellos conjuntos cuya cantidad de elementos sea la misma.
- **Conjuntos iguales**: Podrá decirse que dos o más conjuntos son iguales, cuando estén compuestos por elementos idénticos.

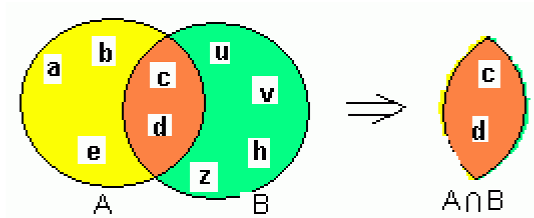
Operaciones con conjuntos

- **Unión e intersección de conjuntos.**

Dados dos conjuntos A y B, se define **unión** de los conjuntos A y B, $A \cup B$, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A ó a B.



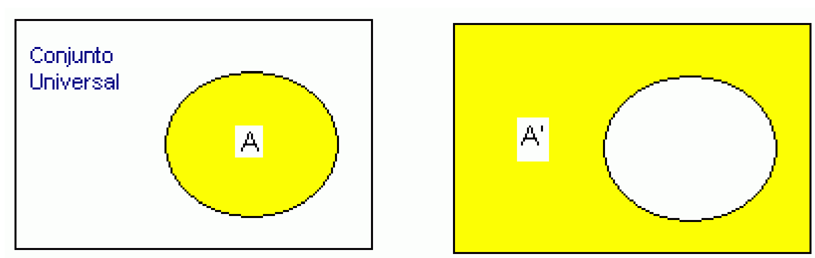
Dados dos conjuntos A y B, se define **intersección** de los conjuntos A y B, $A \cap B$ al conjunto formado por los elementos que pertenecen a la vez a A y a B.



Si la intersección de dos conjuntos es el conjunto vacío, entonces se dice que estos dos conjuntos son disjuntos (también llamados, quizás más apropiadamente, "disyuntos").

Conjunto complementario de un conjunto.

Dado un conjunto A, se llama conjunto complementario de A (representado por A') respecto a un conjunto universal U, a todo U excepto los elementos de A.



UNIDAD 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y MATRICES

Una ecuación es una igualdad algebraica en la que aparecen letras (incógnitas) con valor desconocido.

En cuanto a la vida real, aunque en un principio no se piense así, las ecuaciones son una herramienta de gran utilidad que nos permiten resolver numerosos problemas a los que nos enfrentamos diariamente.

Ecuaciones con una incógnita

Son ecuaciones con una incógnita cuando aparece una sola letra (incógnita, normalmente la x). Por ejemplo: x2 + 1 = x + 4

Se dice que son de primer grado cuando dicha letra no está elevada a ninguna potencia.

Ejemplos:

- 3x + 1 = x - 2
- 1 - 3x = 2x - 9.
- x - 3 = 2 + x.
- x/2 = 1 - x + 3x/2

a) $3(2x+5)-2(4+4x)=7$ lo primero que hacemos será las operaciones de los paréntesis
$6x+15-8-8x=7$ sumamos los términos en x y los términos independientes
$-2x+7=7$ transponemos los términos
$-2x=7-7 \Rightarrow -2x=0$ despejamos la incógnita $\Rightarrow \boxed{x=0}$
Comprobación:
Al sustituir en la ecuación $x=0$, transforma la ecuación en identidad:
$3(2\cdot 0+5)-2(4+4\cdot 0)=7 \Rightarrow 3\cdot 5-2\cdot 4=7$

Dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Según Patricia y Gallardo, 2012 afirman que:

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una expresión de la forma: ax + by = c donde a, b, y c son números (coeficientes) y las incógnitas son x e y. Gráficamente representa una recta en el plano. Veamos un ejemplo.

Representa la recta 2x + y = 1

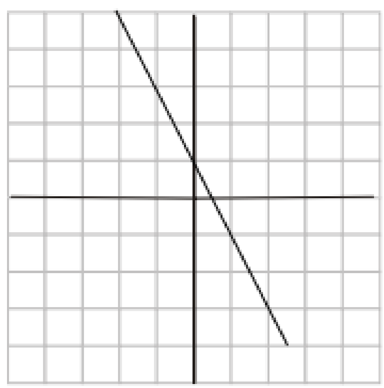
Para representar una recta en el plano

1º Despejamos y. y = -2x + 1

2º Hacemos una tabla de valores dando los valores que queramos a la x.

x	-2	-1	0	1	2
y	5	3	1	-1	-3

3º Representamos los puntos en el plano y los unimos.



Las soluciones de la ecuación anterior son los puntos por los que pasa la recta, por lo tanto tiene infinitas soluciones, que hemos ido encontrando dando valores a la x. Algunas de estas soluciones son: (-2, 5), (-1,3), (0, 1), (1,-1), (2,-3), (3,-5)

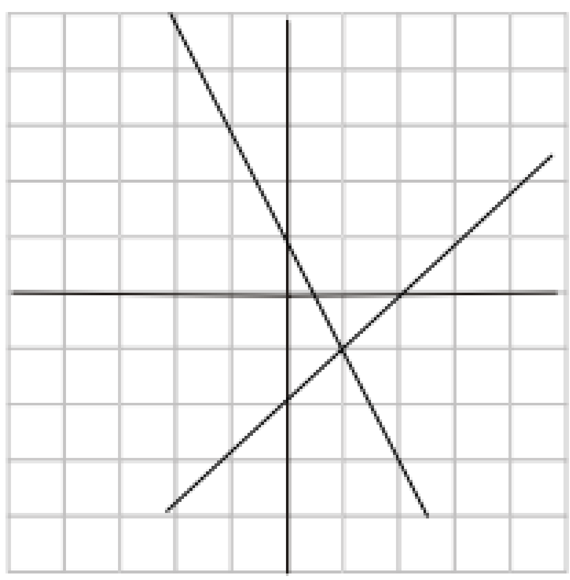
Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas será de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

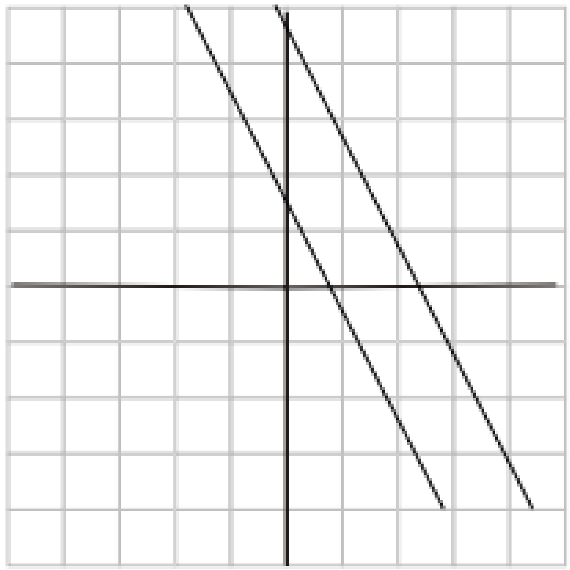
Nuestro objetivo es resolver dicho sistema, es decir, encontrar los valores de x e y que cumplen las dos ecuaciones a la vez. ¿Habrá siempre solución? ¿Habrá una única solución o infinitas?

Gráficamente lo que tenemos son dos rectas en el mismo plano y se pueden dar tres situaciones:

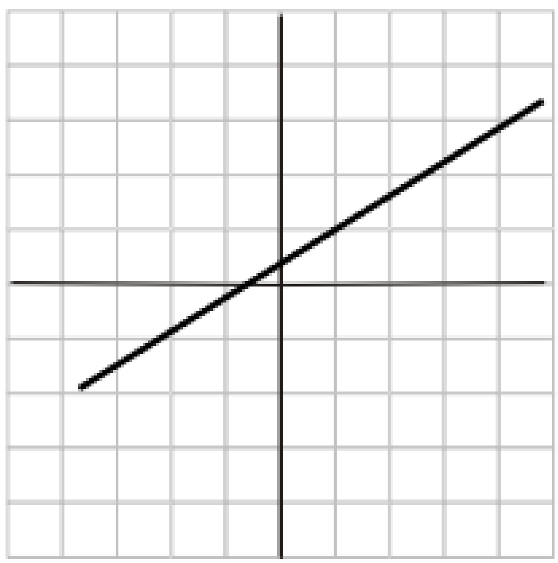
1º. Las rectas se cortan en un punto. Hay una solución, que es el punto de corte.



2º Las rectas son paralelas. No hay solución, pues las rectas no se cortan.



3º Las rectas son coincidentes. Hay infinitas soluciones, los puntos de una de las rectas.



Para resolver un sistema analíticamente se pueden seguir tres métodos.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN.

1. Se despeja una incógnita de una ecuación (la que te parezca más fácil de despejar)

2. Se sustituye en la otra ecuación, quedando una ecuación de primer grado.

3. Se resuelve la ecuación.

4. El valor obtenido para la incógnita lo sustituyes en una de las ecuaciones y operando sacas la otra.

En el paso 3 pueden suceder tres situaciones:

* Si llega a 0 = 0 entonces hay infinitas soluciones

* Si llega a 0 = k (k distinto de cero) no hay solución

* Si llega a un valor entonces hay una solución única y haces el paso 4.

Este método resulta fácil de aplicar cuando una de las incógnitas tiene coeficiente igual a uno o cuando una de las incógnitas te la dan ya despejada.

Ejemplo 1

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

1º Despejo por ejemplo la x de la primera ecuación:	x = 2 – y
2º Sustituyo	2(2 - y) + y = 5
3º Resuelvo la ecuación	4 - 2y + y = 5 -y = 5 – 4 y = -1
4º Sustituyo el valor obtenido en una ecuación	x + (-1) = 2 x -1 = 2 x = 3
O bien sustituyes en la ecuación del primer paso	x = 2 – (-1) x = 3

Solución (x = 3 , y = -1)

Si quieres comprobar que la solución es correcta la sustituyes en las ecuaciones iniciales:

3-1 = 2, 2 = 2 es correcto

2·3-1 = 5, 6-1 = 5, 5 = 5 es correcto.

Gráficamente las dos rectas se cortan en el punto (3,-1)

Ejemplo 2.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

1º Despejo	x = 4 + 2y
2º Sustituyo	2 (4 + 2y) + 4y = 0
3º Resuelvo	8 + 4y + 4y = 0
	8y = -8
	y = -8/8
	y = -1
4º Sustituyo	x = 4 + 2·(-1)
	x = 4- 2
	x = 2

Solución (x = 2 , y = -1)

Si quieres comprobar que la solución es correcta la sustituyes en las ecuaciones iniciales:

2·2 + 4· (-1) = 4 - 4 = 0 es correcto

2-2·(-1)1 = 2 +2 = 4 es correcto.

Gráficamente las dos rectas se cortan en el punto (2,-1)

Ejemplo 3

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$$

1º Despejo	x = 1 - 2y
2º Sustituyo	2 (1 - 2y) + 4y = 3
3º Resuelvo	2 - 4y + 4y = 3
	0y = 3 - 2
	0 = 1

Esto es imposible, luego el sistema no tiene solución (las rectas son paralelas).

Ejemplo 4

$$\begin{cases} 3x - 6y = 3 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

1º Despejo $x = 1 + 2y$

2º Sustituyo $3(1 + 2y) - 6y = 3$

3º Resuelvo $3 + 6y - 6y = 3$

0y = 3 – 3 0 = 0 hay infinitas soluciones (las rectas son coincidentes) Para encontrar soluciones da valores a una de las incógnitas y despeja la otra.

MÉTODO DE IGUALACIÓN

1. Se despeja la misma incógnita de las dos ecuaciones (la que te parezca más fácil de despejar)
2. Se igualan las expresiones quedando una ecuación con una incógnita
3. Se resuelve la ecuación.
4. El valor obtenido para la incógnita lo sustituyes en una de las ecuaciones y operando sacas la otra. También se puede sustituir en una de las dos ecuaciones obtenidas en el punto 1.

En el paso 3 pueden suceder las tres situaciones descritas anteriormente.

Este método es útil cuando la misma incógnita aparece ya despejada de las dos ecuaciones, en otro caso es más conveniente emplear cualquiera de los otros métodos pues son más cortos.

Ejemplo 1

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y=5 \end{cases}$$

1º Despejo por ejemplo la y de las dos ecuaciones: y = 2 – x
y = 5 – 2x

2º Igualo 2 - x = 5 – 2x

3º Resuelvo la ecuación - x + 2x = 5 - 2
x = 3

4º Sustituyo el valor obtenido en una ecuación 3 + y = 2
y = 2 - 3
y = -1

O bien sustituyes en la ecuación del primer paso y = 2 – 3
y = -1

Solución (x = 3 , y = -1)

Ejemplo **2**

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=3 \end{cases}$$

1º Despejo x = 1 - 2y

$$x=\frac{3-4y}{2}$$

2º Igualo $1 - 2y = \frac{3-4y}{2}$

3º Resuelvo $\frac{2-4y}{2}=\frac{3-4y}{2}$

2 - 4y = 3 - 4y
-4y +4y= 3-2
0y = 1
0 = 1

Esto es imposible, luego el sistema no tiene solución (las rectas son paralelas).

Ejemplo : 3

$$\begin{cases} 3x - 6y = 3 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

1º Despejo $\quad x = \dfrac{3+6y}{3}$

$x = 1 + 2y$

2º Igualo $\quad \dfrac{3+6y}{3} = 1 + 2y$

3º Resuelvo $\quad \dfrac{3+6y}{3} = \dfrac{3+6y}{3}$

$3 + 6y = 3 + 6y$

$0y = 0$ hay infinitas soluciones

MÉTODO DE REDUCCIÓN

Antes de desarrollar este método recuerda que dada una ecuación ax + by = c, otra equivalente (con las mismas soluciones) se puede obtener multiplicando toda la ecuación por un número distinto de cero. Así las siguientes ecuaciones tienen las mismas soluciones

$$2x + y = 1, \qquad 10x + 5y = 5, \qquad 4x + 2y = 2, \qquad x + \frac{y}{2} = \frac{1}{2}$$

Para aplicar el método de reducción se multiplicarán las dos ecuaciones o una de ellas por un número conveniente de manera que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente cambiado de signo en las dos ecuaciones.

1. Se elige la incógnita (la que te parezca más fácil)
2. Se hace que los coeficientes de dicha incógnita en las dos ecuaciones sean opuestos.
3. Se suman las dos ecuaciones quedando una ecuación con una incógnita que se resuelve.
4. Se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones.

Ejemplo 1

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Vamos a ver como se resuelve este sistema de dos formas: eligiendo primero la x y después la y.

1º Elijo la incógnita x.

2º Para que tengan coeficientes opuestos multiplico la primera ecuación por (-2)

$$\begin{cases} -2x - 2y = -4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

3º Sumando las dos ecuaciones

$$\begin{array}{rl} & -2x - 2y = -4 \\ + & \underline{2x + y = 5} \\ & -\ y = 1 \end{array} \qquad y = -1$$

4º Se sustituye en una ecuación

$x + (-1) = 2$
$x = 3$

$$\boxed{\text{Solución } (x = 3,\ y = -1)}$$

Sistemas homogéneos de ecuaciones

Si un sistema de **m** ecuaciones y **n** incógnitas tiene todos los términos independientes nulos se dice que es homogéneo.

Sólo admite la solución trivial: x1 = x2 =... = xn = 0.

La condición necesaria y suficiente para que un sistema homogéneo tenga soluciones distintas de la trivial es que el rango de la matriz de los coeficientes sea menor que el número de incógnitas, o dicho de otra forma, que el determinante de la matriz de los coeficientes sea nulo.

$r < n$

Ejemplos:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y \quad = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$r = 2 \qquad n = 3$ Sistema compatible indeterminado

$$\begin{cases} x + y = -\lambda \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad z = \lambda$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{\lambda}{2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{\lambda}{2}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

$r = 3 \qquad n = 3$

Sistema compatible determinado

Solución trivial: $x = y = z = 0$

Vectores y matrices

Escalar	*Vector*	*Matriz*	*Tensor*
3	$\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 9 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 7 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$

Escalar

Un escalar es únicamente un número, a diferencia de la mayoría de los otros elementos del álgebra lineal que son conjuntos de valores como los vectores y matrices. Generalmente, por convención a los escalares los escribimos en letra cursiva minúscula o usando el alfabeto griego.

Entre los principales conjuntos de escalares tenemos a:

Vector

Un vector es un arreglo de números. Un vector de *n* componentes se define como un conjunto ordenado de *n* números escrito de la siguiente forma:

$$\mathbf{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Vector fila

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Vector columna

Matrices

Una matriz es un arreglo bi-dimensional de números. Cada elemento de la misma está identificado por dos índices, en lugar de uno como en los vectores. Usualmente, a una matriz la denotamos por una letra mayúscula en negrita.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{ij} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriz de tamaño m x n

Tipos de matrices

Tipo	Descripción	
Matriz fila	Matriz que solo tiene una fila	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
Matriz columna	Matriz que solo tiene una columna	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$
Matriz nula	Todos sus elementos valen cero	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Matriz cuadrada	Igual número de filas que de columnas Los siguientes tipos de matrices sólo son aplicables para matrices cuadradas	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
Matriz simétrica	Los elementos de ambos de la diagonal principal son iguales	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
Matriz anti simétrica o hemi simétrica	Los elementos de ambos de la diagonal principal son opuestos	$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$
Matriz diagonal	Los elementos de la diagonal principal no son cero	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Matriz escalar	Matriz cuadrada donde los elementos que no están en la diagonal principal son cero y los elementos de la diagonal principal son iguales	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
Matriz identidad o unidad	Matriz donde los elementos de la diagonal principal son unos y el resto son ceros. Se representa por I_2 la matriz de identidad de orden 2, I_3 la identidad de orden 3, I_4 la de orden 4, etc.	$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Matriz triangular superior	Todos los elementos por debajo de la diagonal principal son cero.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
Matriz triangular inferior	Todos los elementos por encima de la diagonal principal son cero.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Operaciones con matrices

La suma y resta de matrices es una operación entre dos matrices de la misma dimensión y su resultado es otra matriz también de la misma dimensión, ya sean matrices cuadradas o rectangulares.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-1 & 0-0 & 1-1 \\ 3-1 & 0-2 & 0-1 \\ 5-1 & 1-1 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1

a) Suma de dos matrices cuadradas de dimensión 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

b) Suma de dos matrices rectangulares:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Suma de dos matrices columna:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Producto vectorial y matricial

El producto de una matriz $A = (a_{i,j})$ por un escalar α se define como

$$\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{i,j})$$

Es decir, se calcula multiplicando todos los elementos de la matriz por el escalar.

Ejemplo:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Esta operación también es **conmutativa**:

$$\alpha \cdot A = A \cdot \alpha$$

Ejercicio 2

a) Producto de una matriz rectangular por un escalar:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Producto por un escalar y suma de dos matrices cuadradas de dimensión 2:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

Una de las aplicaciones más importantes del álgebra matricial es la resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de mm ecuaciones lineales con n incógnitas x1x1, x2x2,...,xn con coeficientes en un cuerpo KK (como los reales o los complejos) es:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Siendo $a_{i,j} \in K$ el **coeficiente** de la incógnita x_j de la ecuación i y $b_i \in K$ el **término independiente** de la ecuación i.

Se define la matriz de coeficientes del sistema anterior como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Y la matriz de incógnitas, x, y de términos independientes, b, como

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

La representación matricial **o** forma matricial **del SEL** es A·x=bA·x=b.

Además de las matrices anteriores, se define la matriz ampliada, completa o aumentada del Sistema de ecuaciones lineales como la matriz por bloques siguiente:

$$A^* = (A|b)$$

Es decir,

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Sea el sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 = 1 \\ 4x_1 + 8x_2 = 2 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

La matriz de términos independientes es

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Y la matriz ampliada es

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 9 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \end{array}\right)$$

Clasificación de los Sistemas de ecuaciones lineales según su forma

1. Según su dimensión:

   - Sistema **cuadrado**: mismo número de ecuaciones que de incógnitas.
   - Sistema **rectangular**: distinto número de ecuaciones que de incógnitas.

2. Según los términos independientes b_i de las ecuaciones:

   - Sistema **homogéneo**: los términos independientes son $b_i=0$.
   - Sistema **no homogéneo** o **completo**: al menos uno de los términos independientes es distinto de 0.

Según el número de soluciones, clasificamos un SEL en:

- Sistema **incompatible (SI)**: no tiene soluciones.

- Sistema **compatible determinado (SCD)**: tiene una única solución.
- Sistema **compatible indeterminado (SCI)**: tiene más de una solución (en este caso, tiene infinitas soluciones).

Métodos para resolver un Sistema de Ecuaciones Lineales.

Según matesfacil.com, n.d., destaca 3 métodos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales:

- **Eliminación de Gauss:** consiste en realizar operaciones elementales fila a la matriz ampliada del Sistema de Ecuaciones Lineales hasta obtener su forma escalonada reducida
- **Método de la matriz inversa**: si el Sistema de Ecuaciones Lineales es compatible determinado, se multiplica la matriz de términos independientes por la inversa de la matriz de coeficientes
- **Regla de Cramer:** si el Sistema de Ecuaciones Lineales es compatible determinado, se obtiene la solución calculando unos cuantos determinantes

Inversa de una matriz

Existen multitud de métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Los más utilizados en el álgebra matricial son la eliminación de Gauss y de Gauss-Jordan y la regla de Cramer. En los dos primeros, tenemos que realizar operaciones elementales fia. En el tercero, tenemos que calcular algunos determinantes.

Otro método para resolver un sistema de ecuaciones compatible determinado (con una única solución) es **multiplicar la matriz de coeficientes por su inversa**.

Método de Gauss para calcular la inversa

Supongamos que tenemos un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas. Podemos representar el sistema de forma matricial como:

$$Ax = b$$

Donde,

- La matriz AA es de dimensión *nxn* y contiene en cada fila los coeficientes de las incógnitas de cada ecuación.
- La matriz xx es de dimensión nx1nx1 (una columna) y contiene las n incógnitas del sistema.
- La matriz b es de dimensión nx1 y contiene los términos independientes de las ecuaciones.

Si el sistema tiene una única solución (es compatible determinado), entonces la matriz A es **regular** (determinante distinto de 0) y, por tanto, **existe** su matriz inversa A^{-1}.

Entonces, podemos multiplicar toda la ecuación por la inversa de A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot Ax = A^{-1} \cdot b$$
$$x = A^{-1} \cdot b$$

Es decir, si la matriz A es regular, entonces la matriz columna resultante del producto matricial $A^{-1}\cdot b$ contiene la **solución** del sistema Ax=b.

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ -3x + 2y = 7 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes del sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Es una matriz regular porque su determinante es 7. Su matriz inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz de términos independientes del sistema es

$$b = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Calculamos la solución del sistema multiplicando las matrices A^{-1} y b:

$$x = A^{-1} \cdot b =$$
$$= \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$$

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} -x \;+\; z = 1 \\ 2x + 2y = 0 \\ -x \;-\; z = 3 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es una matriz regular porque su determinante es 4. Su matriz inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz de términos independientes del sistema es

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos la solución del sistema multiplicando las matrices A^{-1}y b:

$$x = A^{-1} \cdot b =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Ejemplo 3:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Es una matriz regular porque su determinante es 14. Su matriz inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

La matriz de términos independientes del sistema es

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la solución del sistema multiplicando las matrices A^{-1} y b:

$$x = A^{-1} \cdot b =$$
$$= \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Transpuesta de una matriz

La matriz traspuesta de la matriz A se denota por A^T y es la matriz que tiene por filas a las columnas de A.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejemplos

a) Cambiamos filas por columnas:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Observad que la dimensión de las matrices es la misma porque son cuadradas.

b) Cambiamos filas por columnas:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Observard que los elementos de la diagonal mantienen su posición.

Matrices elementales e inversas.

Una matriz n × n se llama matriz **elemental** si puede obtenerse de la matriz identidad $I_{n\times n}$ por medio de solo una operación elemental de renglón, es decir:

- Intercambiando los renglones i y j,
- Multiplicando el renglón i por una constante c diferente de cero, o
- Sumando al renglón i el renglón j multiplicado por la constante c.

Ejemplo 1:

Son matrices elementales de intercambio:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Porque

- E_1 corresponde a $R_1 \leftrightarrow R_2$ sobre $\mathbf{I}_{2\times 2}$;
- E_2 corresponde a $R_1 \leftrightarrow R_2$ sobre $\mathbf{I}_{3\times 3}$; y
- E_3 corresponde a $R_2 \leftrightarrow R_3$ sobre $\mathbf{I}_{3\times 3}$.

Ejemplo 2:

Son matrices elementales de multiplicación:

$$E_4 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 \end{bmatrix}$$

- E_4 corresponde a $R_1 \leftarrow 5\,R_1$ sobre $\mathbf{I}_{2\times 2}$;
- E_5 corresponde a $R_2 \leftarrow -7\,R_2$; sobre $\mathbf{I}_{3\times 3}$ y
- E_6 corresponde a $R_3 \leftarrow \frac{2}{5}\,R_3$ sobre $\mathbf{I}_{3\times 3}$.

Ejemplo 3:

Son matrices elementales de eliminación:

$$E_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Porque

- E_7 corresponde a $R_1 \leftarrow R_1 + 1/3\, R_2$ sobre $\mathbf{I}_{2\times 2}$;
- E_8 corresponde a $R_2 \leftarrow R_2 - 5\, R_3$ sobre $\mathbf{I}_{3\times 3}$; y
- E_9 corresponde a $R_3 \leftarrow R_3 + 7\, R_2$ sobre $\mathbf{I}_{3\times 3}$.

Las operaciones elementales sobre los renglones de una matriz son reversibles, es decir es posible retornar a la matriz inicial haciendo otra operación elemental.

En general:

Operación Elemental	Operación inversa correspondiente
$R_i \leftrightarrow R_j$	$R_i \leftrightarrow R_j$
$R_i \leftarrow c\, R_i$	$R_i \leftarrow (1/c)\, R_i$
$R_i \leftarrow R_i + c\, R_j$	$R_i \leftarrow R_i - c\, R_j$

Las matrices elementales son invertibles

Según Matem, 2008 Toda matriz elemental es matriz invertible. Más aún, si E es una matriz elemental, E^{-1} se obtiene al invertir la operación elemental que produjo a E a partir de la identidad I.

operación elemental　　　　operación elemental

matriz elemental　　　　matriz elemental

Ejemplo:

Si,

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

UNIDAD 3: DETERMINANTES

Sea *A* una matriz cuadrada de orden N:

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Se llama **determinante de A** y se simboliza $|A|$

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}=a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2} \quad \text{(rango 2)}$$

Llamamos determinante de A, det A, al número obtenido al sumar todos los diferentes productos de n elementos que se pueden formar con los elementos de dicha matriz

Propiedades

1. El determinante de una matriz cuadrada es igual al determinante de su traspuesta:

$$\boxed{|A| = |A^t|}$$

Det (A) = Det (A^t)

$$\text{Det}(A) = \text{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - ceg - bdi - fha$$

$$\text{Det}(A^t) = \text{Det}\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - ceg - bdi - fha$$

2. Si intercambiamos dos filas o dos columnas de una matriz cuadrada, su determinante cambia de signo aunque son iguales en valor absoluto.

$$\mathrm{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\mathrm{Det}\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - ceg - bdi - fha$$

$$\mathrm{Det}\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = ceg + fha + bdi - aei - dhc - bfg$$

$$= -\,(aei + bfg + dhc - ceg - bdi - fha)$$

3. Si multiplicamos todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada por un número k, su determinante queda multiplicado por dicho número.

$$\mathrm{Det}\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k \cdot \mathrm{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$k \cdot \mathrm{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k \cdot (aei + bfg + dhc - ceg - bdi - fha)$$

$$\mathrm{Det}\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = kaei + kbfg + kdhc - kceg - kbdi - kfha$$

$$= k \cdot (aei + bfg + dhc - ceg - bdi - fha)$$

4. El determinante del producto de dos matrices cuadradas del mismo orden es igual al producto de los determinantes de dichas matrices: Det (A. B) = Det (A)* Det (B).

$$\operatorname{Det}\left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}\right) = \operatorname{Det}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \operatorname{Det}\begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Det}\begin{vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{vmatrix} = (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg) =$$

$$= (aecf + aedh + bgcf + bgdh) - (afce + afdg + bhce + bhdg) =$$

$$= aedh + bgcf - afdg - bhce$$

$$\operatorname{Det}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \operatorname{Det}\begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} = (ad-bc)(eh-fg) =$$

$$= adeh - adfg - bceh + bcfg$$

5. Si una matriz cuadrada tiene todos los elementos de una fila o columna nulos, su determinante es cero.

$$\operatorname{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

6. Si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas iguales su determinante es cero.

$$\operatorname{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = aec + bfa + dbc - aec - bfa - dbc = 0$$

7. Si una matriz cuadrada tiene dos filas o columnas proporcionales su determinante es cero.

$$\operatorname{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ka & kb & kc \end{vmatrix} \uparrow = k \cdot \operatorname{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} \uparrow = 0$$

8. Si los elementos de una fila o columna de una matriz, se pueden descomponer en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de los determinantes que tienen iguales todas las filas o columnas, excepto dicha fila o columna, cuyos sumandos pasan a cada uno de los determinantes.

$$\text{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+j & h+k & i+l \end{vmatrix} = \text{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \text{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ j & k & l \end{vmatrix}$$

$$\text{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+j & h+k & i+l \end{vmatrix} = ae(i+l) + bf(g+j) + cd(h+k) -$$

$$- ce(g+j) - bd(i+l) - af(h+k) = aei + ael + bfg + bfj + cdh +$$

$$+ cdk - ceg - cej - bdi - bdl - afh - afk = (aei + bfg + dhc -$$

$$- ceg - bdi - fha) + (ael + bfj + dkc - cej - bdl - fka) =$$

$$= \text{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \text{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ j & k & l \end{vmatrix}$$

9. Si a los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada se le suma una combinación lineal de otras filas o columnas, el determinante no varía. Por ejemplo, en el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

A la columna 1 le vamos a sumar cinco veces la columna 2 y dos veces la columna 3. Nos queda:

$$=\begin{vmatrix} 0+5.1+2.2 & 1 & 2 \\ 3+5.4+2.5 & 4 & 5 \\ 6+5.7+2.8 & 7 & 8 \end{vmatrix}=$$

Podemos separar ese determinante en tres determinantes, cuya primera columna corresponde a cada uno de los sumandos:

$$=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 5.1 & 1 & 2 \\ 5.4 & 4 & 5 \\ 5.7 & 7 & 8 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2.2 & 1 & 2 \\ 2.5 & 4 & 5 \\ 2.8 & 7 & 8 \end{vmatrix}=$$

Y ahora, vemos que en el segundo determinante, la primera columna es cinco veces la segunda, luego su valor es igual a cero por tener dos columnas proporcionales.

Con el tercer determinante pasa lo mismo: la primera columna es dos veces la tercera, luego su valor también es cero.

Por tanto, me vuelve a quedar de nuevo el determinante original, luego su valor no ha variado:

Determinantes e inversas

Si A es invertible, entonces det A ≠ 0, y

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\,adjA$$

En donde: adj A= Adjunto de la matriz A

Definición de adjunta

Sea A una matriz de nxn, y sea B, matriz de sus cofactores. Entonces la adjunta de A, escrito adj A, es la transpuesta de B de *nxn*.

Ejemplo 1:

Calcular la adjunta de la matriz *A*.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

En el ejemplo 1 se calculó *C*, que es la matriz de cofactores de *A*.

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 46 & -21 \\ -10 & -30 & 25 \\ 13 & 13 & -13 \end{pmatrix}$$

Entonces la transpuesta de *C* es la adjunta de *A*.

$$adj\ A = \begin{pmatrix} 11 & -10 & 13 \\ 46 & -30 & 13 \\ -21 & 25 & -13 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2:

Calcule la inversa de la matriz *A*, si es que existe

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para aplicar la fórmula (1) que nos da el teorema, necesitamos calcular det *A* y *adj A.*

En el ejemplo 2 ya calculamos *adj A*

$$adj\ A = \begin{pmatrix} 11 & -10 & 13 \\ 46 & -30 & 13 \\ -21 & 25 & -13 \end{pmatrix}$$

Se calcula el det *A*

$$\det A = 65$$

Como $\det A \neq 0$ la matriz a es invertible. Entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adjA = \frac{1}{65}\begin{pmatrix} 11 & -10 & 13 \\ 46 & -30 & 13 \\ -21 & 25 & -13 \end{pmatrix}$$

Para verificar que esta es la matriz inversa, sólo hay que hacer el producto AA^{1} que debe ser igual a la matriz identidad *I*.

$$AA^{-1} = \frac{1}{65}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & -10 & 13 \\ 46 & -30 & 13 \\ -21 & 25 & -13 \end{pmatrix} = \frac{1}{65}\begin{pmatrix} 65 & 0 & 0 \\ 0 & 65 & 0 \\ 0 & 0 & 65 \end{pmatrix} = I$$

Para matrices de 3×3 o mayores, generalmente será más fácil encontrar la inversa reduciendo por renglones que utilizando la matriz de cofactores. Sin embargo la fórmula (1) es importante pues es una fórmula general. Además es conveniente recordar la condición para que una matriz sea invertible: $\det A \neq 0$.

Regla de Cramer

La regla de Cramer nos permite resolver sistemas de ecuaciones lineales (SEL) compatibles determinados, es decir, con una única solución.

El sistema tiene que ser cuadrado (tantas ecuaciones como incógnitas) y la matriz de coeficientes debe ser regular (determinante distinto de 0).

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} 2x - y + 5z = 2 \\ 3x - 2y + z = -3 \\ -2x + 2y + 3z = 5 \end{cases} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

3 ecuaciones y 3 incógnitas

A

Y ahora, lo segundo que se tendrá que cumplir para aplicar directamente el método de Cramer, es que det(A) sea distinto de 0.

$$\begin{cases} 2x - y + 5z = 2 \\ 3x - 2y + z = -3 \\ -2x + 2y + 3z = 5 \end{cases} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

3 ecuaciones y 3 incógnitas

A

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 2 + 30 - 20 - 4 - (-9) = 5 \neq 0$$

Sistema compatible determinado

$$\begin{cases} 2x - y + 5z = 2 \\ 3x - 2y + z = -3 \\ -2x + 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

Sistema compatible determinado

La solución del sistema es $x = -2,\ y = -1,\ z = 1.$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-12 + (-5) + (-30) - (-50) - 4 - 9}{5} = \frac{-10}{5} = -2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-18 + (-4) + 75 - 30 - 10 - 18}{5} = \frac{-5}{5} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-20 + (-6) + 12 - 8 - (-12) - (-15)}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ -2x + y - 7z = 0 \\ 3x - y + 8z = 2 \end{cases}$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes del sistema por la rega de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -7 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= 3 \cdot 1 \cdot 8 \\ &\quad +2 \cdot (-7) \cdot 3 \\ &\quad +(-2) \cdot (-1) \cdot 1 \\ &\quad -1 \cdot 1 \cdot 3 \\ &\quad -2 \cdot (-2) \cdot 8 \\ &\quad -3 \cdot (-7) \cdot (-1) = \\ &= -8 \neq 0 \end{aligned}$$

Como el determinante es distinto de 0, la matriz es regular y el sistema tiene una única solución (sistema compatible determinado):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-28}{-8} = \frac{7}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -7 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{28}{-8} = -\frac{7}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{12}{-8} = -\frac{3}{2}$$

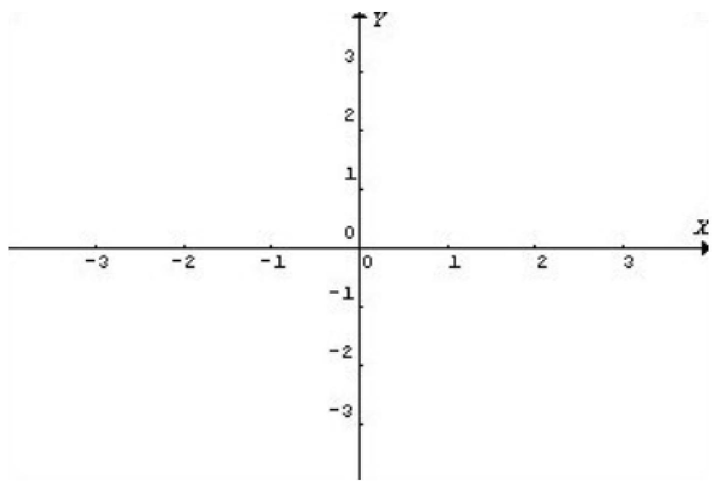
UNIDAD 4: GEOMETRÍA ANALÍTICA EN DOS DIMENSIONES

La Geometría Analítica tiene por objeto el estudio de las propiedades geométricas por medio del álgebra, e inversamente se ocupa del estudio de las ecuaciones mediante sus representaciones gráficas.

La geometría analítica, conocida también como geometría cartesiana, es aquella rama de la geometría que utiliza como herramienta de trabajo los sistemas de coordenadas.

Dentro de esta rama de la geometría es habitual usar un eje de coordenadas cartesiano para manipular ecuaciones, habitualmente en dos dimensiones pero también en tres de forma ocasional.

Plano cartesiano

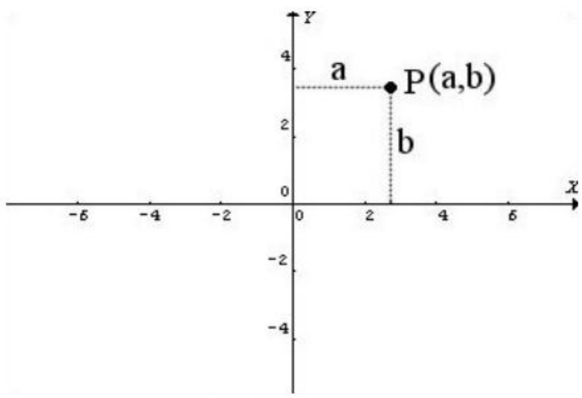


Plano cartesiano

Talca, n.d., afirma que: para representar puntos en un plano, definidos por un par ordenado de números reales, se utiliza generalmente el sistema de coordenadas rectangulares, que se caracteriza por:

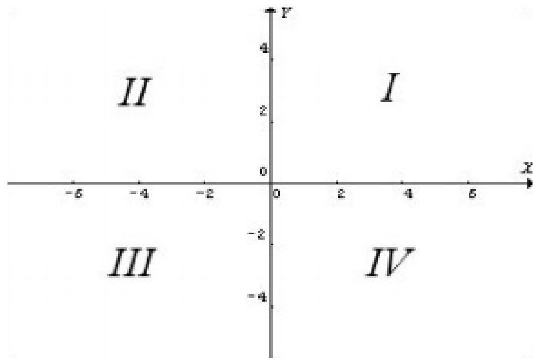
- Estar formado por dos rectas reales dirigidas, mutuamente perpendiculares, llamadas ejes coordenados: eje X (eje de las abscisas), normalmente horizontal y eje Y (eje de las ordenadas), normalmente vertical.

- El punto de intersección de los dos ejes es el origen del sistema, y se denota por O.
- El eje X está orientado (crece) de izquierda a derecha y el eje Y de abajo hacia arriba. El número 0 de ambos ejes se ubica en el origen del sistema.
- La posición de un punto P en el plano cartesiano queda determinado por un par de números reales (a, b), donde Los números a y b reciben el nombre de coordenadas del punto P.
- La primera coordenada, a, recibe el nombre de abscisa de P. La segunda coordenada, b, recibe el nombre de ordenada de P.
- La abscisa de P corresponde a la distancia dirigida de P al eje Y . La ordenada de P corresponde a la distancia dirigida de P al eje X.



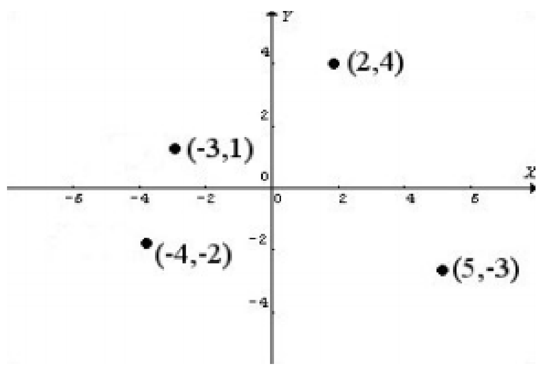
Posición de un punto

Es claro que los ejes coordenados dividen al plano en 4 sectores. Estos sectores reciben el nombre de cuadrantes. Los cuadrantes se designan por I, II, III y IV, tal como se muestra en la siguiente figura:



Cuadrantes

En la siguiente figura se muestran las posiciones de 4 puntos con sus respectivas coordenadas:

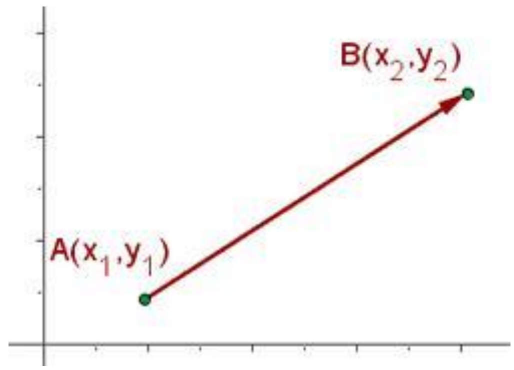


Coordenadas de puntos

Distancia entre dos puntos.

La distancia entre dos puntos equivale a la longitud del segmento de recta que los une, expresado numéricamente.

Dados dos puntos cualquiera A(x1, y1), B(x2, y2), definimos la distancia entre ellos, d(A, B), como la longitud del segmento que los separa.



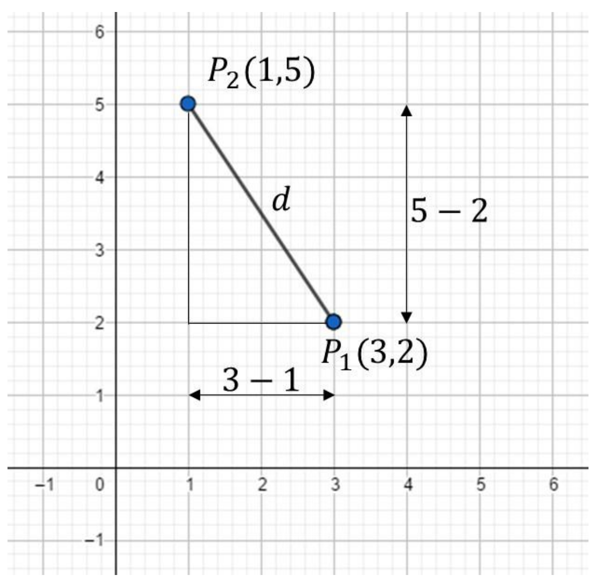
Fórmula

Sean dos puntos sobre el plano cartesiano, P_1(x_1,y_1)*P*1(*x*1,*y*1) y P_2(x_2,y_2)*P*2(*x*2,*y*2). La distancia que hay entre ellos viene dada por la siguiente expresión:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo 1

Halla la distancia en el plano entre dos puntos cuyas coordenadas cartesianas son P1(3,2) y P2(5,1)



Simplemente tenemos que introducir de forma adecuada los datos del enunciado, operar y listo:

- $P_1(x_1, y_1)$ viene dado por $P_1(3, 1)$
- $P_2(x_2, y_2)$ es $P_2(5, 6)$

Entonces:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5-3)^2 + (6-1)^2}$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(2)^2 + (5)^2} = \sqrt{4 + 25}$$

$$d(P_1, P_2) = 5.38$$

Ejemplo 2:

Tenemos dos puntos sobre un plano cuyas coordenadas son las siguientes:

$$P_1(\frac{1}{2}, -3);\ P_2(0, \frac{-2}{5}).$$

Calcula la distancia entre ellos.

- $P_1(x_1, y_1) = P_1\left(\frac{1}{2}, -3\right)$
- $P_2(x_2, y_2) = P_2\left(0, \frac{-2}{5}\right)$
- $x_2 - x_1 = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$
- $y_2 - y_1 = \frac{-2}{5} - (-3) = \frac{-2}{5} + 3 = \frac{13}{5}$

Entonces,

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{13}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{16}{4}} = \sqrt{\frac{701}{100}}$$

$d(P_1, P_2) = 2.64$

Fórmula del punto medio

Suponga que se le dan dos puntos en el plano (x_1, y_1) y (x_2, y_2), y se le pide encontrar el punto a la mitad entre ellos. Las coordenadas de este punto medio serán:

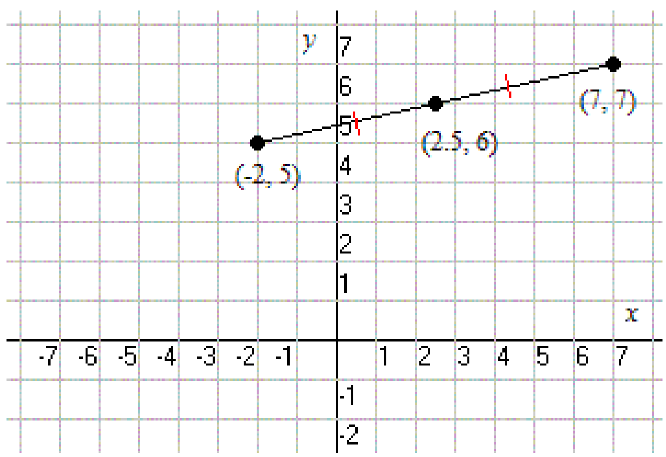
$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Ejemplo 1:

Encuentre el punto medio entre (–2, 5) y (7, 7).

$$\left(\frac{-2+7}{2}, \frac{5+7}{2}\right)$$

$$(2.5, 6)$$



Ejemplo 2:

Si Q (2, -2) es el punto medio de $\overline{PR}$ y P tiene las coordenadas (-6, -6), encuentre las coordenadas de R

Use la fórmula para escribir y resolver las dos ecuaciones para las coordenadas de R

$$Q(2,-2)=\left(\frac{-6+x_2}{2},\frac{-6+y_2}{2}\right)$$

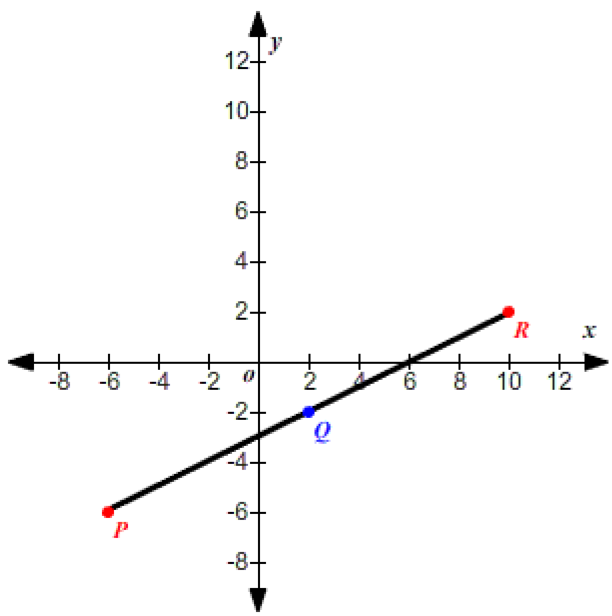
Primero, encuentre la coordenada en x

$$2=\frac{-6+x_2}{2}$$
$$4=-6+x_2$$
$$10=x_2$$

Luego, encuentre la coordenada en y .

$$-2=\frac{-6+y_2}{2}$$
$$-4=-6+y_2$$
$$2=y_2$$

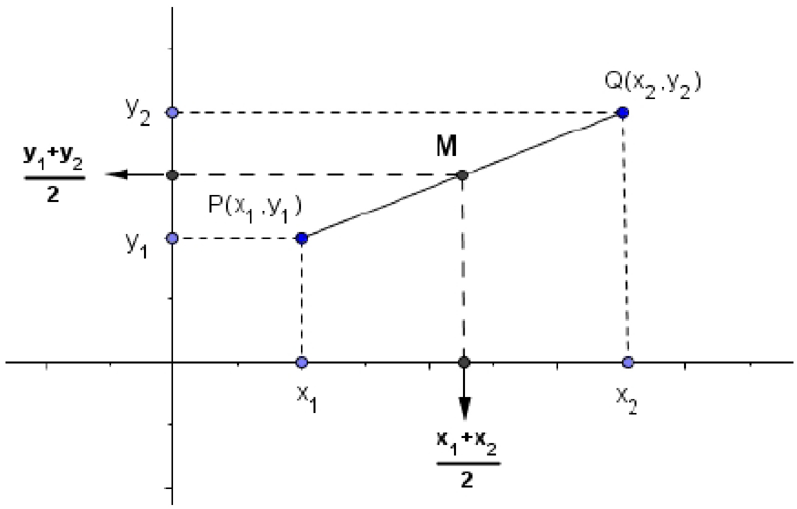
Así, las coordenadas de R son (10, 2).



Punto medio de un segmento

El punto medio de un segmento cuyos puntos extremos son P = (x1; y1) y Q = (x2; y2), que se denota por M (P;Q), viene dada por la fórmula:

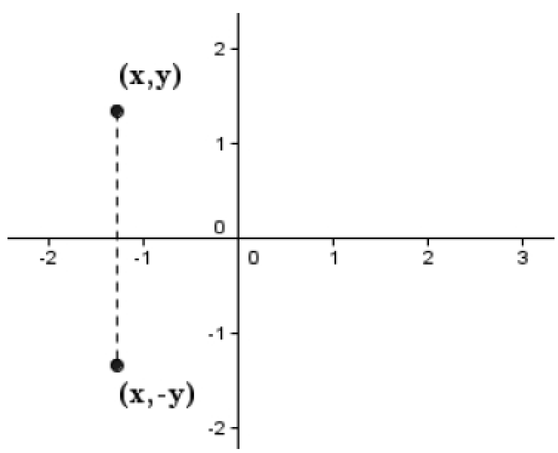
$$M(P,Q)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$



Simetría respecto al eje X

El gráfico de una ecuación es simétrica respecto al eje X, cuando al cambiar en la ecuación la variable y por -y, la ecuación no cambia. Es decir,

$$(x, y) \in \text{gráfico} \qquad \Longrightarrow \qquad (x, -y) \in \text{gráfico}$$

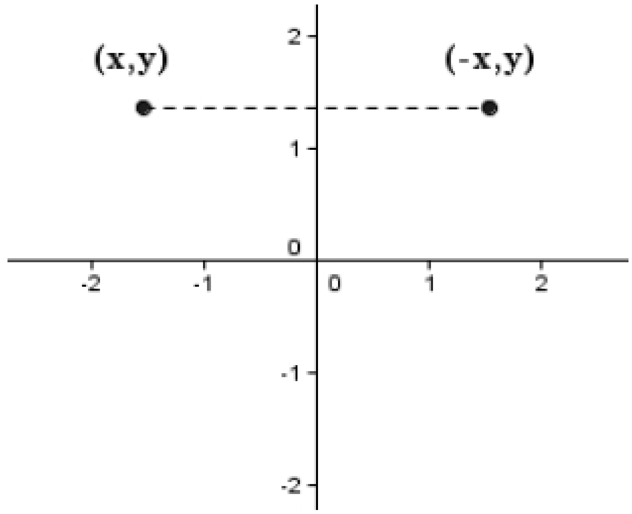


Puntos simétricos respecto eje X

Simetría respecto al eje Y

El grafico de una ecuación es simétrica respecto al eje Y , cuando al cambiar en la ecuación la variable x por -x, la ecuación no cambia. Es decir,

$$(x, y) \in \text{gráfico} \qquad \Longrightarrow \qquad (-x, y) \in \text{gráfico}$$

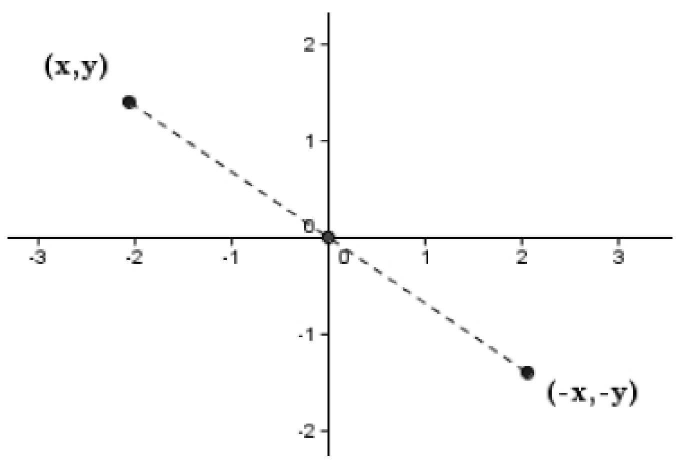


Puntos simétricos respecto eje Y

Simetría respecto al origen

El gráfico de una ecuación es simétrica respecto al origen, cuando al cambiar simultáneamente en la ecuación la variable x por -x y la variable y por -y, la ecuación no cambia. Es decir:

$$(x, y) \in \text{gráfico} \qquad \Longrightarrow \qquad (-x, -y) \in \text{gráfico}$$

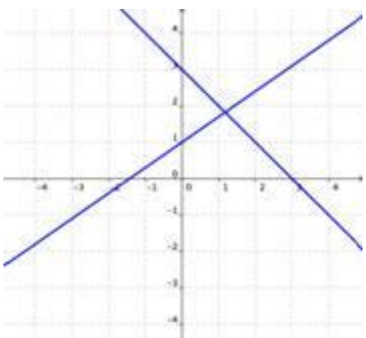
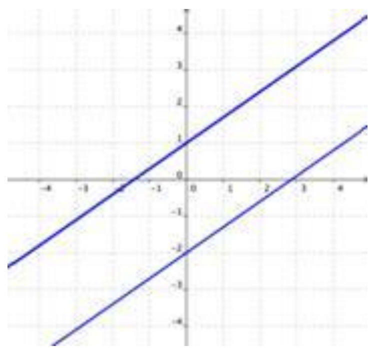
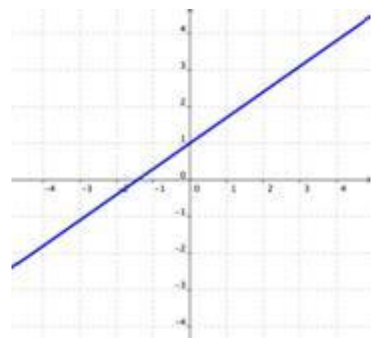


Puntos simétricos respecto al origen

Ecuaciones y su representación

Un sistema de ecuaciones contiene dos o más ecuaciones lineales que comparten dos o más incógnitas. Para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones, debemos encontrar un valor (o rango de valores) que satisfagan todas las ecuaciones en el sistema.

Las gráficas de ecuaciones del sistema nos pueden decir cuántas soluciones existen en ese sistema.

		
Si las gráficas de las ecuaciones se intersectan, entonces existe sólo una solución para las ecuaciones.	Si las gráficas de las ecuaciones no se intersectan, (son paralelas), entonces no existe ninguna solución para las ecuaciones.	Si las gráficas de las ecuaciones son la misma, entonces hay un número infinito de soluciones para las ecuaciones.

Una ecuación lineal puede escribirse de la forma: $ax + by = c$.

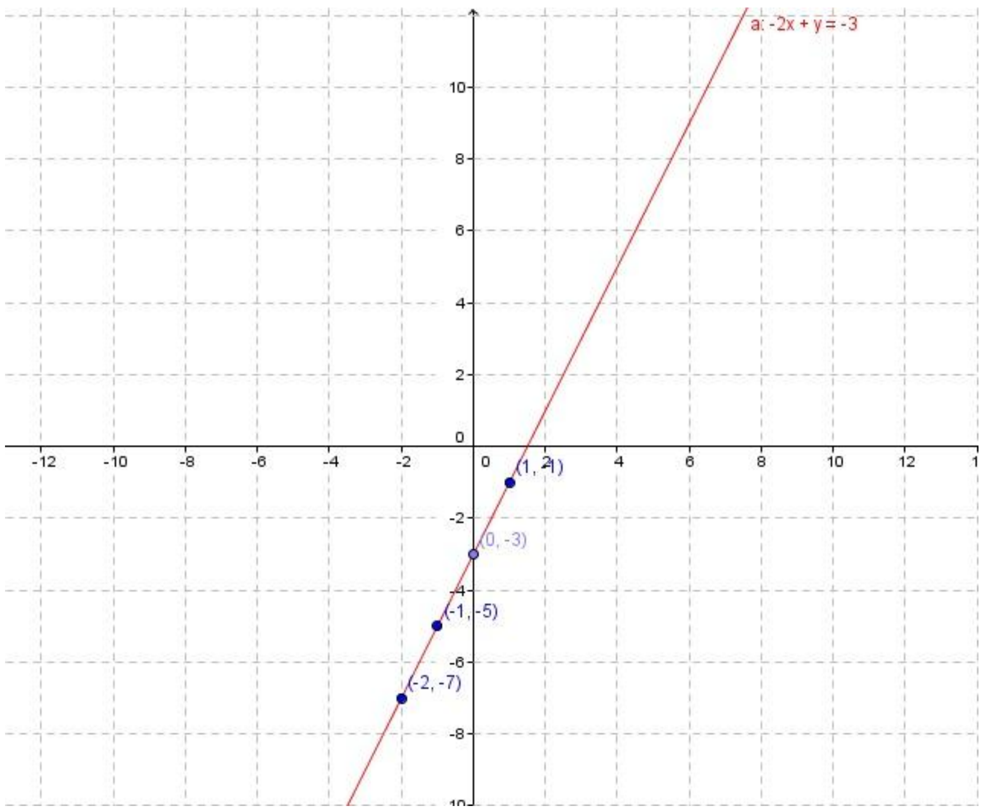
Para obtener la representación gráfica de una ecuación lineal, se suele despejar una de las incógnitas y dar valores a la otra. De esta forma podemos formar una tabla de valores.

Por ejemplo: Si queremos representar gráficamente la ecuación: $2x - y = 3$

1. Despejamos la y: => $y = 2x - 3$
2. Damos valores a la x, formando una tabla de valores:

x	-2	-1	0	1
y	-7	-5	-3	-1

3. Representamos los puntos obtenidos en el sistema de coordenadas y los unimos:

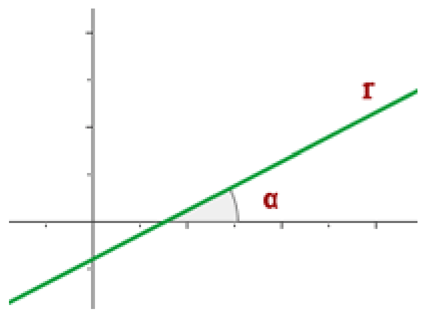


UNIDAD 5: RELACIONES Y FUNCIONES

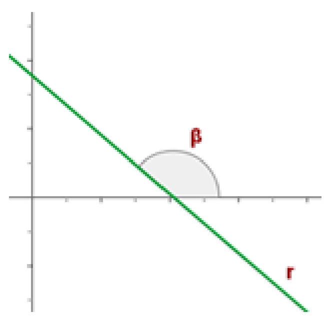
Pendiente de una recta

La pendiente es la inclinación de la recta con respecto al eje de abscisas, siempre es constante y se denota con la letra m.

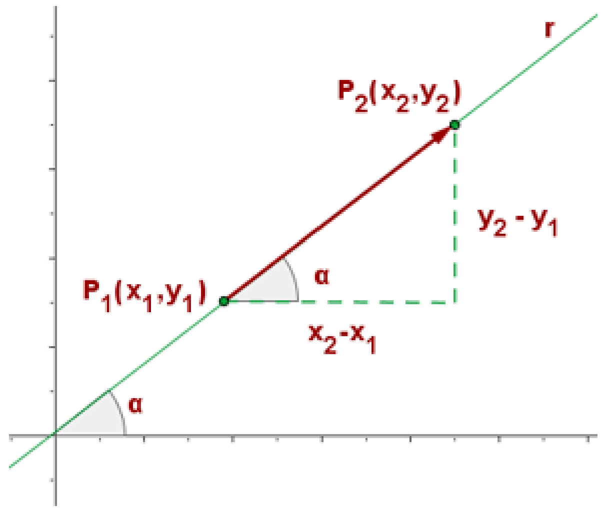
- Si m > 0 la función es creciente y ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es agudo.



- Si m < 0 la función es decreciente **y** ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es obtuso**.**



- La pendiente de una recta es la tangente del ángulo que forma la recta con la dirección positiva del eje de abscisas.



Pendiente dado el ángulo

$$m = tg\ \alpha$$

Pendiente dado el vector director de la recta

$$m = \frac{v_2}{v_1}$$

Pendiente dados dos puntos

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Pendiente dada la ecuación de la recta.

$$m = -\frac{A}{B}$$

Ejemplo 1:

La pendiente de la recta que pasa por los puntos A (2, 1), B (4, 7) es:

$$m = \frac{7-1}{4-2} = 3$$

La recta que pasa por los puntos A (1, 2), B (1, 7) no tiene pendiente, ya que la división por 0 no está definida.

$$m = \frac{7-2}{1-1} = \frac{5}{0}$$

Ejemplo 2:

Calcula la pendiente de las rectas determinadas por los puntos dados y halla el ángulo que forma con el semieje X positivo.

P1 (1; 3), P2 (6; 7)

Resolución Calculemos la pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= M = \frac{7-3}{6-1} = \frac{4}{5}$$

$$= \frac{4}{5}$$

Para calcular el ángulo B que forma la recta con la dirección positiva del eje X, tenemos:

Tan B = m = 4/5 = 0.8, luego B = 38.7.

Inv tangente (4/5)

Ejemplo 3:

Encuentre la pendiente de la recta que pasa a través de los puntos (–3, 17) y (4, 3).

Sustituyendo $x_1 = -3$, $y_1 = 17$, $x_2 = 4$, e $y_2 = 3$, obtenemos:

$$m = \frac{3-17}{4-(-3)} = \frac{-14}{7} = -2$$

Así la pendiente es –2.

Ecuación de la recta

Una recta puede ser expresada mediante una ecuación del tipo y = m x + b, donde x, y son variables en un plano. En dicha expresión m es denominada pendiente de la recta y está relacionada con la inclinación que toma la recta respecto a un par de ejes que definen el Plano.

Mientras que b es el término independiente y es el valor del punto en el cual la recta corta al eje vertical en el plano.

De acuerdo a uno de los postulados de la Geometría Euclidiana, para determinar una línea recta sólo es necesario conocer dos puntos (A y B) de un plano (en un Plano cartesiano), con Abscisas (x) y Ordenadas (y).

Formas de la ecuación de una línea recta

- Ecuación de la recta que pasa por el origen: y = mx
- Ecuación de la recta conocida su pendiente e intercepto con el eje y: y = mx + b (pendiente m y su intercepto b con el eje y).
- Ecuación de la recta que pasa por un punto y pendiente conocida: y = mx + (y1 – mx1). Lo que indica que el intercepto b con el eje y viene dado por: b = y1 – mx1.
- Ecuación de la recta que pasa por dos puntos:
- Ecuación segmentaria de la recta: (Los números a y b son las medidas de los segmentos que la recta intercepta con cada eje, con su signo correspondiente).

- Ecuación general de la recta: Ax + By + C = 0

Ejemplo 1:

a) Escribe la ecuación general de la recta r, que pasa por los puntos (1, 0) y (3, 6).

b) Halla la ecuación de la recta, s, paralela a y=1/2(x) que pasa por el punto (4,4)

c) Obtén el punto de corte de las dos rectas anteriores

Solución:

a) Pendiente $= \frac{6-0}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$

Ecuación: $y = 0 + 3(x-1) \rightarrow y = 3x - 3 \rightarrow 3x - y - 3 = 0$

b) Si son paralelas, tienen la misma pendiente: $m = \frac{1}{2}$.

Ecuación: $y = 4 + \frac{1}{2}(x-4) \rightarrow 2y = 8 + x - 4 \rightarrow x - 2y + 4 = 0$

c) Es la solución del sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y - 3 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 3x - 3 \\ x - 2(3x-3) + 4 = 0 \rightarrow x - 6x + 6 + 4 = 0 \rightarrow -5x = -10 \rightarrow x = 2 \rightarrow \end{array}$$

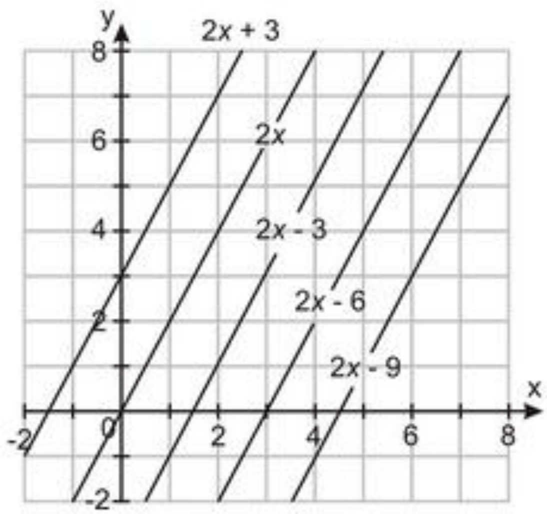
$\rightarrow y = 3$ Punto: $(2, 3)$

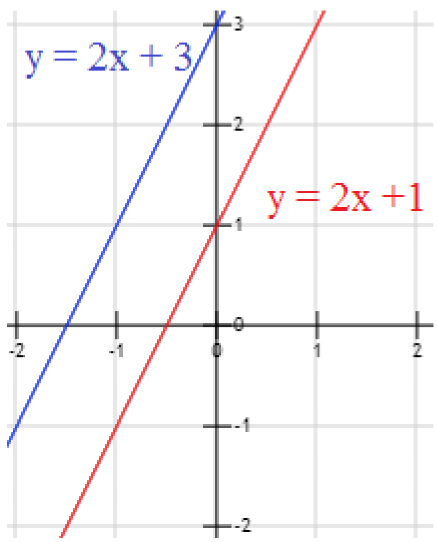
Rectas paralelas

Las rectas paralelas son dos o más rectas en un plano que nunca se intersectan. Hay muchos ejemplos de rectas paralelas como los lados opuestos del marco rectangular de una pintura y los estantes de un librero.

Las rectas paralelas tienen la misma pendiente.

Cada uno de los gráficos a continuación tiene la misma pendiente, la cual es 2. De acuerdo con la definición, todas estas rectas son paralelas.





Ejemplo 1:

¿Son $y=\frac{1}{3}x-4$ y $-3x+9y=18$ paralelas?

La pendiente de la primera recta es $1/3$. Cualquier recta paralela a ésta también debe tener una pendiente de $1/3$.

Encuentra la pendiente de la segunda ecuación: $A=-3$ y $B=9$.

$$= \frac{-A}{B} = \frac{3}{9} \to \frac{1}{3}$$

Estas dos rectas tiene la misma pendiente por lo tanto son paralelas.

Ejemplo 2:

Encuentra la ecuación paralela a la recta $y=6x-9$ que pasa por *(–1, 4)*

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 4 = 6(x + 1)$$

$$y = 6x + 6 + 4$$
$$y = 6x + 10$$

Encuentra la ecuación de la recta paralela a la recta $y-5=2(x+3)$ que pasa por el punto *(1, 1).*

Primero, notamos que esta ecuación está en forma punto-pendiente, por lo tanto usamos la forma punto-pendiente para escribir esta ecuación.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 1 &= 2(x - 1) \\ y - 1 &= 2x - 2 \\ y - 1 + 1 &= 2x - 2 + 1, \\ y &= 2x - 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 3:

Una recta pasa por el punto A (7, 8) y es paralela a la recta que pasa por los puntos C (-2, 2) y D (3, -4). Hallar su ecuación

Como la recta debe ser paralela a la que pasa por los dos puntos dados, entonces deben tener igual pendiente.

$$m_{CD} = \frac{-4-2}{3+2} = \frac{-6}{5}$$

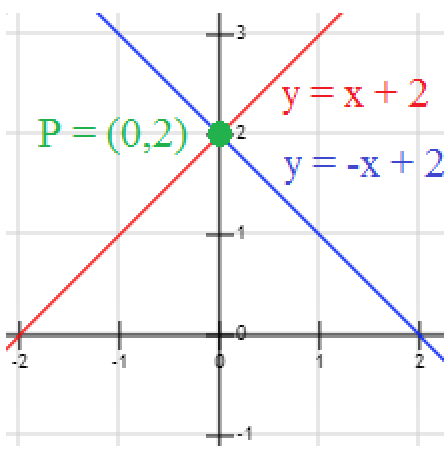
Usando la pendiente, el punto A y la ecuación punto pendiente, se tiene:

$$y - 8 = -\frac{6}{5}(x-7)$$
$$5y - 40 = -6x + 42$$
$$6x + 5y - 82 = 0$$

Rectas perpendiculares

Las rectas perpendiculares son dos o más rectas que se intersectan formando un ángulo de 90 grados, como las dos rectas dibujadas en la gráfica. Los ángulos de 90 grados también se llaman ángulos rectos.

Ejemplo: las rectas y=x+2 e y=−x+2 son perpendiculares:



Las rectas paralelas a la recta y = ax+b son las que tiene la pendiente -1/a, es decir, son las rectas.

$$y = -\frac{1}{a}x + k$$

Según el valor de k, las rectas se cortan en uno u otro punto.

Ejemplo 1:

Hallar la recta que pasa por el punto P(−2,0) y que es perpendicular a la recta y = x/2 -1/2.

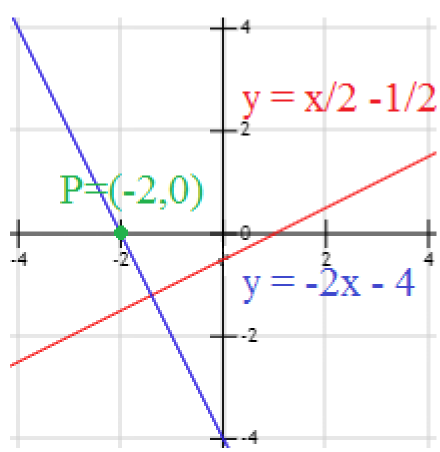
Como la ecuación está en su forma general, su pendiente es m = 1/2. La recta perpendicular a ésta debe tener la pendiente -1/m = -2. Por tanto, su ecuación será de la forma $y = -2x + b$

Falta calcular la ordenada b.

Como el punto P= (-2,0) es un punto de ambas rectas, sus coordenadas deben cumplir las ecuaciones. Sustituimos las coordenadas de P en la ecuación de la recta perpendicular y resolvemos la ecuación:

$$y = -2x + b$$
$$0 = -2 \cdot (-2) + b$$
$$0 = 4 + b$$
$$b = -4$$

Luego la recta perpendicular es y = -2x -4.



Ejemplo 2:

Encontrar la pendiente de la recta perpendicular a la recta y = 2x – 6.

	La recta dada se escribe como $y = mx + b$, con $m = 2$ y $b = -6$. La pendiente es 2.	Identifica la pendiente de la recta dada.
Respuesta	La pendiente de la recta perpendicular es $-\frac{1}{2}$.	Para encontrar la pendiente de la recta perpendicular, encuentra el reciproco, $\frac{1}{2}$, y luego encuentra el opuesto del reciproco $-\frac{1}{2}$.

Relaciones Binarias

Se llama relación binaria del conjunto A al conjunto B a todo subconjunto de A×B.

Si **R** es una relación binaria para dos conjuntos A y B, simbólicamente se representa así a secas:

$$R \subseteq A \times B$$

¿Qué diferencia hay entre una relación binaria y un producto cartesiano si los dos están formados por pares ordenados? Simple, una relación binaria no siempre se puede expresar como un producto cartesiano, no es más que una colección de pares ordenados cualesquiera. Por ejemplo, sea la siguiente relación binaria:

$$R = \{(1,2),(3,5),(6,4)\}$$

A los conjuntos A y B se les conoce como conjunto de partida y conjunto de llegada. Al conjunto de elementos de A que aparecen en la relación se llama dominio y se representa Dom(R). Al conjunto de elementos de B que aparecen en la relación se llama imagen y se representa Im(R). Características

A= {0, 1, 2, 3},

B= {0, 1, 2, 3, 4, 5},

RA, B= {<0,1>, <0,2>, <0,3>, <0,4>}

A= {0, 1, 2, 3}, RA 2=A2={<0, 0>, <1, 1>, <2, 2>, <3,3>}.

Ejemplos

Para representar las relaciones binarias podemos utilizar dos tipos de gráficos:

a) El diagrama cartesiano: donde representaremos los ejes cartesianos, y en cada eje los elementos de cada conjunto. Representaremos las relaciones por medio de puntos (si el eje es similar al eje de coordenadas) o por medio de cruces si lo representamos mediante cuadrículas.

b) Diagrama sagital o flechas (mediante diagramas de Venn): representaremos los elementos del conjunto dentro del círculo y representaremos las relaciones mediante flechas.

Funciones: Representación Dominio y recorrido

Primero, definamos que es "función". Al hablar de función tenemos que pensar en "funcionamiento" algo que funciona. Conjunto de elementos, procesos que permiten que algo funcione (Plancha, lavarropas, etc.)

Es decir, al hablar de función vemos que hay unos elementos de entrada, hay una función (proceso) y una salida o resultado.

Resumiendo diremos que una función es una relación entre dos o más variables.

Las funciones constituyen una herramienta útil para describir, analizar e interpretar diferentes situaciones provenientes de la Matemática y otras ciencias.

Segundo: definamos que es "variable", al hablar de variables, nos referimos a los diferentes elementos, factores, características que definen un objeto, una situación o un fenómeno. Ejemplo: el peso, la cantidad, la velocidad, el tiempo, el color, la altura, etc.

En matemática (lógica, estadística, economía y otras ciencias) una variable es un símbolo (generalmente una letra) que representa un valor o elemento desconocido.

Ejemplo: Para representar "cualquier" número se puede representar por X, o cualquier letra. y en una ecuación como 2x-7, la X representa la variable.

Tercero: Los tipos de variables, en una función tenemos dos tipos de variables: Independiente y Dependiente.

La variable **Independiente**, como su nombre lo indica, no depende de nadie, es la que incide en el valor o desempeño de la otra con la que se relaciona. Generalmente se denota con la letra X, y en el plano cartesiano corresponde al eje horizontal

La variable **Dependiente**, es la que depende de la independiente, es decir, su valor o comportamiento está determinado por los valores que tome X. Generalmente se denota con la letra Y, y en el plano cartesiano corresponde al eje vertical.

Ejemplo:

1. En la relación entre el precio que se paga por un producto y la cantidad comprada; la cantidad (variable x) determina el precio a pagar (variable y)
2. En la relación, velocidad y tiempo, la velocidad (variable x) determina el tiempo gastado en recorrer una distancia cualquiera (variable y) .

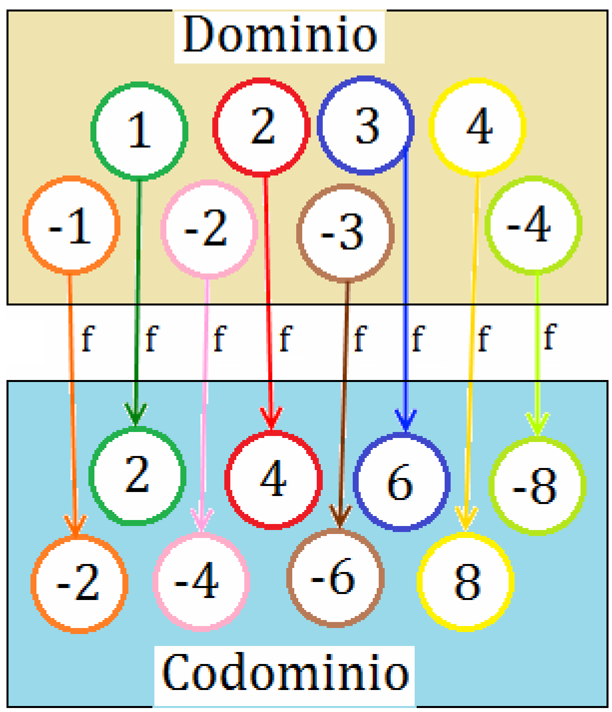
Cuarto: El tipo de relación entre las variables en una función es proporcional, es decir, que aumentan o disminuyen en la misma proporción. De acuerdo a esto, la relación entre las variables puede ser "directamente proporcional" o "inversamente proporcional".

Directamente proporcional: cuando una variable aumenta o disminuye, la otra también aumenta o disminuye en la misma proporción. Ejemplo: la cantidad de pan (en kilos) y su precio. A mayor cantidad, mayor precio pagado y viceversa.

Inversamente Proporcional: cuando una variable aumenta la otra disminuye y viceversa, en la misma proporción. Ejemplo: la velocidad a la que va un auto y el tiempo que tarda en recorrer una distancia. A mayor velocidad, menor tiempo y viceversa.

Dominio: Es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente (x). Una función, f, es una ley entre dos conjuntos de números: el dominio y el codominio. A cada número del dominio le hace corresponder un único número del codominio. Esta ley es una correspondencia unívoca.

Ejemplo:



Recorrido: Llamado también imagen, codominio o rango es el conjunto de valores que toma la variable dependiente (y).

Sea *x* un elemento del **dominio**, llamamos **imagen** de *x* mediante la función *f* a *f(x)*, es decir, al elemento del **codominio** que le asigna la función *f*.

En la función del ejemplo:

- La imagen de 1 es: $f(1)=2\cdot 1=2$
- La imagen de -1 es: $f(-1)=2\cdot(-1)=-2$
- La imagen de 2 es: $f(2)=2\cdot 2=4$
- La imagen de -2 es: $f(2)=2\cdot(-2)=-4$
- Es análogo para los restantes elementos del dominio.

Llamamos conjunto imagen (o simplemente imagen) o recorrido de la función *f* al conjunto de elementos del **codominio** que son la imagen de algún (o más) elemento del dominio.

Es decir, si *y* es un elemento de la **imagen** de *f*, entonces existe al menos un elemento, *x*, del **dominio** de *f* tal que $f(x) = y$

Nota 1: la notación empleada para representar intervalos de la recta real en la resolución de los ejercicios es:

- El intervalo de extremos *a* y *b*, incluyendo los extremos es: [a, b]
- El intervalo de extremos *a* y *b*, sin incluir los extremos es: (a, b)
- El intervalo de extremos *a* y *b*, incluyendo al extremo *a* [a, b)
- El intervalo de extremos *a* y *b*, incluyendo al extremo *b* (a, b]
- Es decir, los corchetes se utilizan para incluir al extremo y los paréntesis para excluirlos.
- Puesto que más infinito y menos infinito no son propiamente números, nunca se incluyen en los extremos.

Nota 2: recordamos al lector el dominio de las funciones:

- **Polinómicas:** el dominio es todos los reales (si no se indica lo contrario).
- **Racionales:** el dominio es todos los reales excepto los puntos para los que el denominador se anula (no se puede dividir por 0).
- **Irracionales:** si el orden de la raíz es par (2, 4, 6...) hay que exigir que el radicando sea no negativo.
- **Logarítmicas:** el dominio es todos los reales excepto los puntos para los cuales el argumento es no positivo. Si el argumento del logaritmo es un valor absoluto sólo debemos exigir que no sea nulo.

Ejemplo:

$$f(x) = 2x - 1$$

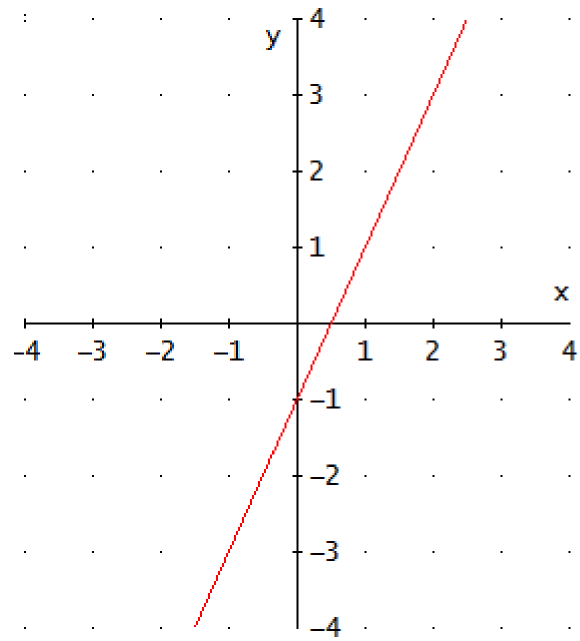
Dominio

Puesto que se trata de una función polinómica (no hay ningún punto problemático en la definición de la función, como dividir por 0), el dominio es todos los reales: Dom(f)=R

Recorrido

Al ser un polinomio de primer grado, el recorrido es todos los reales: Im(f)=R

Gráfica



$$f(x) = \frac{2}{x}$$

Dominio

Como es una función racional, tenemos que excluir del dominio los puntos que hacen que el denominador sea 0 (no podemos dividir por 0).

Por tanto, el dominio es:

$$\mathbb{R} - \{0\}$$

Recorrido

El recorrido es todos los reales excepto 0 ya que si suponemos que

$$\frac{2}{x} = 0$$

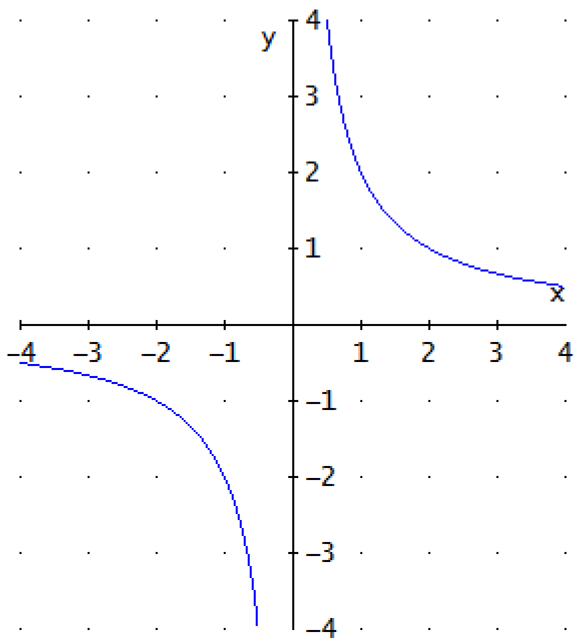
Entonces

$$2 = x \cdot 0 \rightarrow$$
$$2 = 0$$

Lo cual es falso. Esto quiere decir que la ecuación no tiene solución y, por tanto, el 0 no tiene **antimagen** (elemento del dominio cuya imagen es 0).

Por tanto, la imagen de *f* es

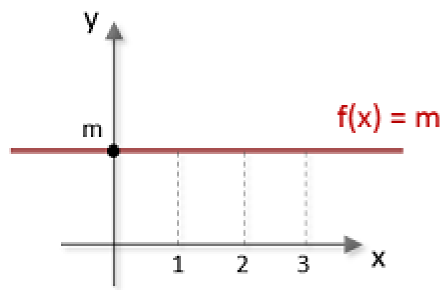
$$Im(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$



Función constante

La Función Constante es una función que toma siempre el mismo valor. Matemáticamente, la función constante se representa como:

f(x) = m donde **m** es un número constante.



En el ejemplo anterior vemos como para cada valor de x (1, 2, 3...) el valor de la función es siempre constante e igual a m.

Las funciones constantes tienen por lo tanto las siguientes características:

- Son horizontales respecto al eje de coordenadas (tienen pendiente 0)
- Se cortan al eje vertical (de ordenadas) en el punto y = m

Ejemplos de Función Constante:

Son ejemplos de funciones constantes las siguientes:

- f(x) = 1
- f(x) = 0
- f(x) = 5
- f(x) = 2,7
- f(x) = √2
- f(x) = -3
- f(x) = -1,4

Por otra parte, son ejemplos de funciones no constantes las siguientes

- f(x) = x
- f(x) = 2x + 1

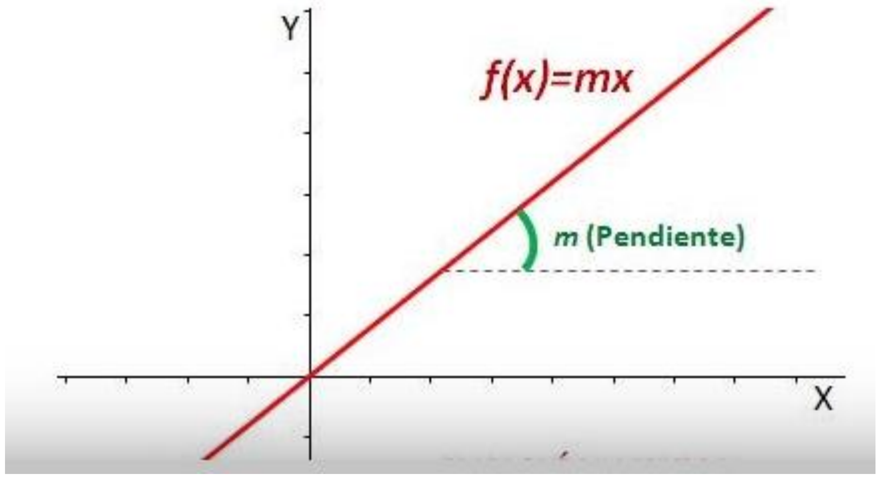
- f(x) = x2

Función lineal

Una función lineal es una función polinómica de grado 1 que pasa por el origen de coordenadas, es decir, por el punto (0,0). Son funciones **rectas** de la forma: 4

$$f(x) = mx$$

siendo m la pendiente y diferente de 0



La función lineal se define por la ecuación ***f(x) = mx + b*** ó ***y = mx + b*** llamada **ecuación canónica**, en donde *m* es la pendiente de la recta y *b* es el intercepto con el eje Y.

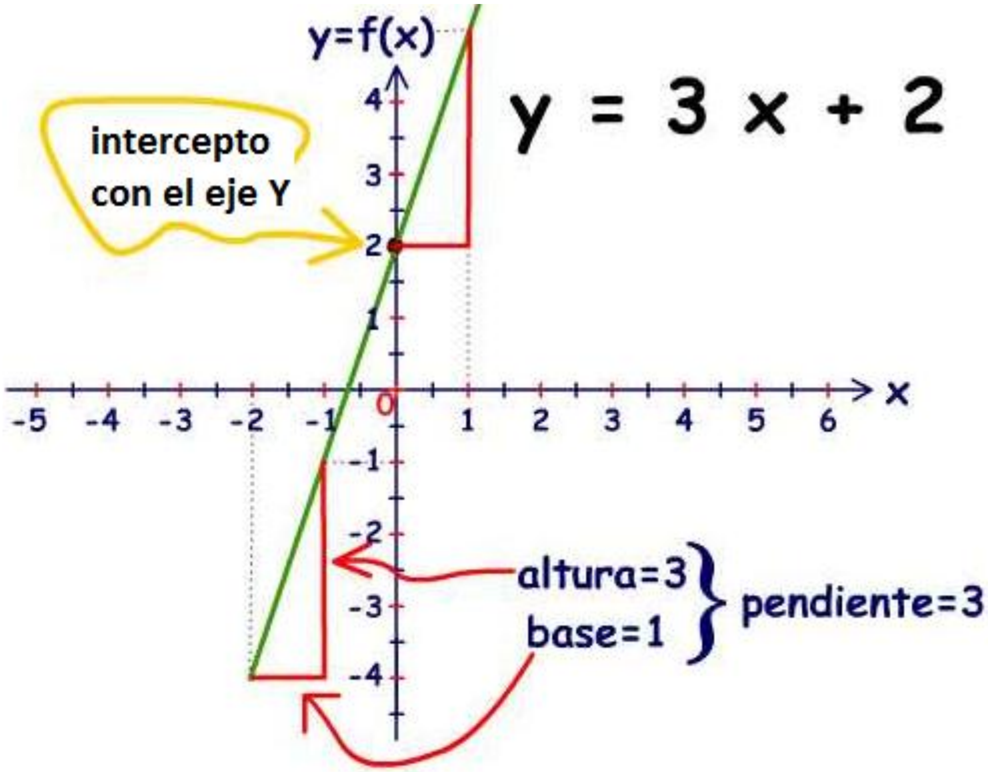
Por ejemplo, son funciones lineales:

f(x) = 3x + 2

g(x) = - x + 7

h(x) = 4 (en esta m = 0 por lo que 0x no se pone en la ecuación).

Esta es la gráfica de la función lineal *y = 3x + 2*



Vemos que m = 3 y b = 2 (de la forma y = mx + b)

Este número m se llama pendiente de la recta y es la relación entre la altura y la base, aquí vemos que por cada unidad recorrida en x la recta sube 3 unidades en y por lo que la pendiente es m = 3. & b es el intercepto de la recta con el eje Y (donde la recta se cruza con el eje Y)

Volvamos al ejemplo de las funciones lineales

f(x) = 3x+2

Si x es 3, entonces f (3) = 3*3+2 = 11

Si x es 4, entonces f (4) = 3*4+2 = 14

Si x es 5, entonces f (5) = 3*5+2 = 17

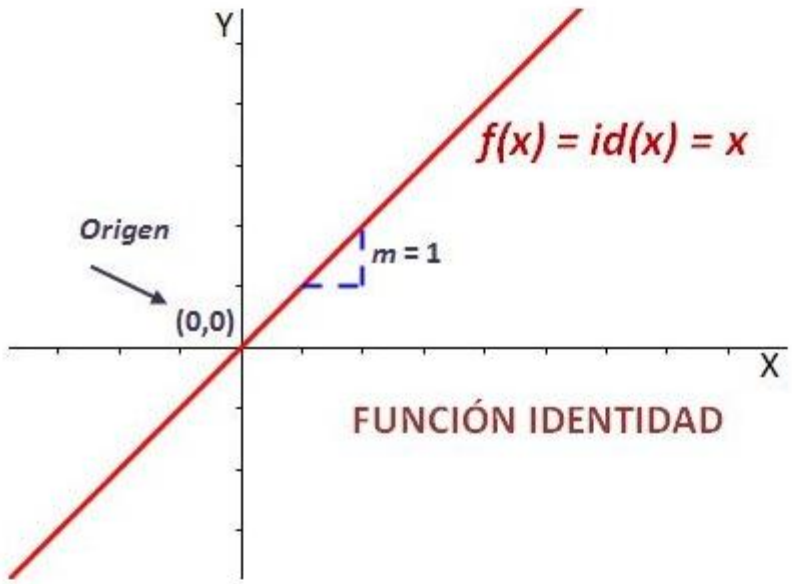
Función identidad

Una función identidad es una función tal que la imagen de cualquier elemento es éste mismo:

$$f(x) = x$$

La función identidad también suele denotarse por ***id***.

Su gráfica es la bisectriz del primer y tercer cuadrante.



Función cuadrática

La Función Cuadrática (o Función Polinómica de Segundo grado) es aquella que tiene la siguiente fórmula: $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a es una constante diferente de cero.

Nota: recordemos que una función polinómica (o función polinomial) es aquella que se puede representar como:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Como nos estamos refiriendo a la de segundo grado (o cuadrática), esta se corresponde con el exponente de la variable (x) más alta, si es de grado 2 → $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ (o $f(x) = ax_2 + bx + c$ con $a \neq 0$ como hemos expresado arriba).

Función raíz cuadrada

Es la función donde un número multiplicado por sí mismo te da el valor dado. La representación de "Raíz Cuadrada de x" es: $f(x)=\sqrt{x}$

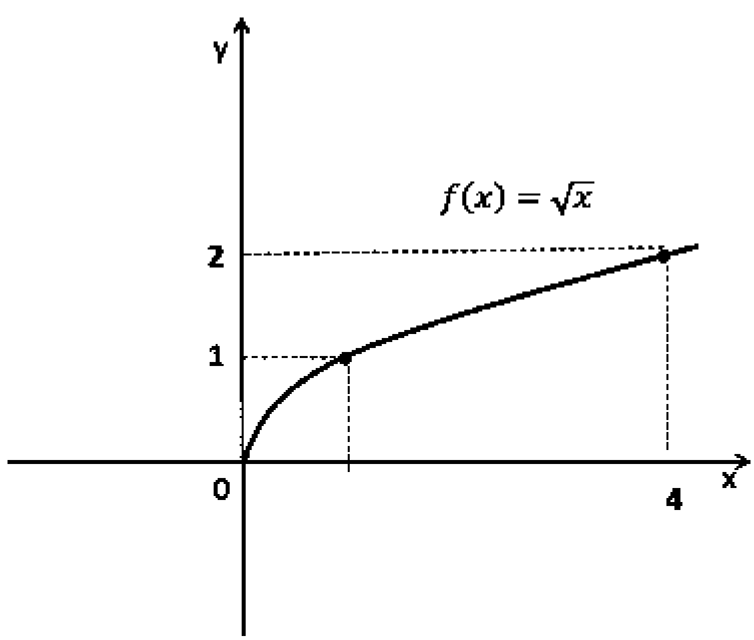
Su dominio son todos los números reales positivos = $[0, \infty) = \boldsymbol{R}$.

El número del radical nunca puede ser negativo porque no sería una función de raíz cuadrada.

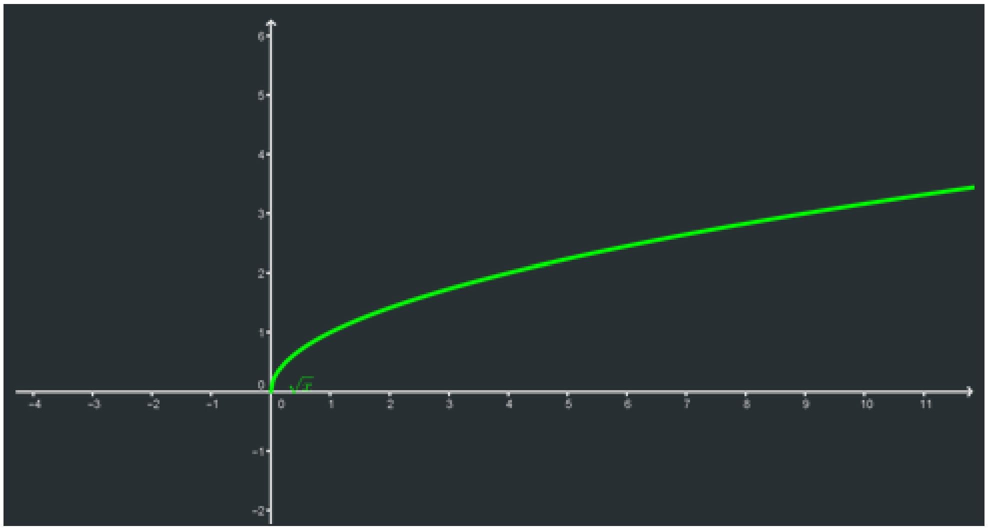
En el siguiente ejemplo se muestra que el número dentro del radical no debe ser negativo:

$$\sqrt{-25} = 5i$$

Esto es debido a que un número negativo da por resultado un número imaginario.



Ejemplo:



x	√x
0	0
1	1
2	1.41
3	1.73
4	2

Dominio: [0, ∞)

Imagen: [0, ∞)

Creciente en todo su dominio

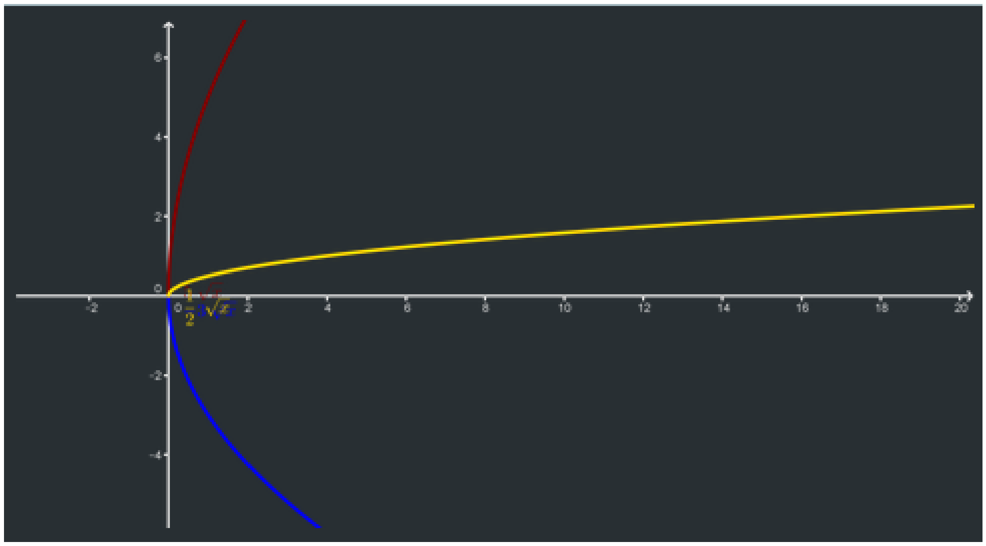
Siempre positiva

Punto mínimo en cero

Ejemplo 2:

Tabula y grafica las siguientes funciones en un mismos bosquejo

y= 5√x		**y= -3√x**		**y= ½√x**	
x	y	x	y	x	y
0	0	0	0	0	0
1	5	1	-3	1	½
2	7.07	2	-4.24	2	0.70
3	8.66	3	-5.19	3	0.86



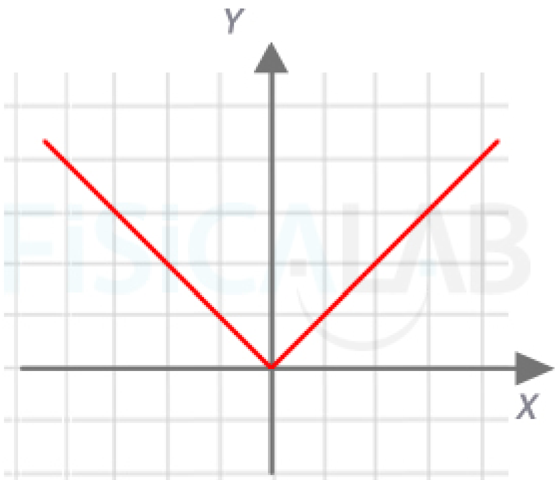
- Si se pone un número mayor a uno que multiplique a la raíz hace más grande la línea
- Si se pone un número menor a uno que multiplique a la raíz hace más chica la línea
- Si se pone un número negativo que multiplique a la raíz hace que la línea se invierta

Función valor absoluto

El valor absoluto de un número n es ese mismo número, cuando el número es positivo, o su opuesto cuando el número es negativo.

$$|n| = \begin{cases} n & \text{si} \quad n \geq 0 \\ -n & \text{si} \quad n < 0 \end{cases}$$

Análogamente, el valor absoluto de una función se obtiene dejando la función igual, para aquellos tramos de la función que sean positivos, y cambiando su signo para aquellos tramos negativos. El ejemplo más sencillo es:



Función $y = |x|$

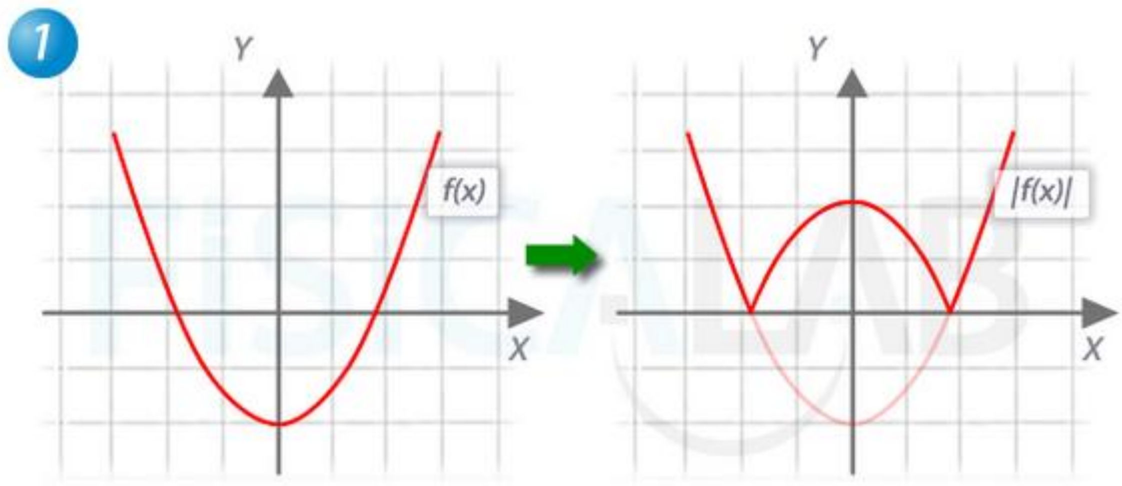
Función ***f(x)=|x|***

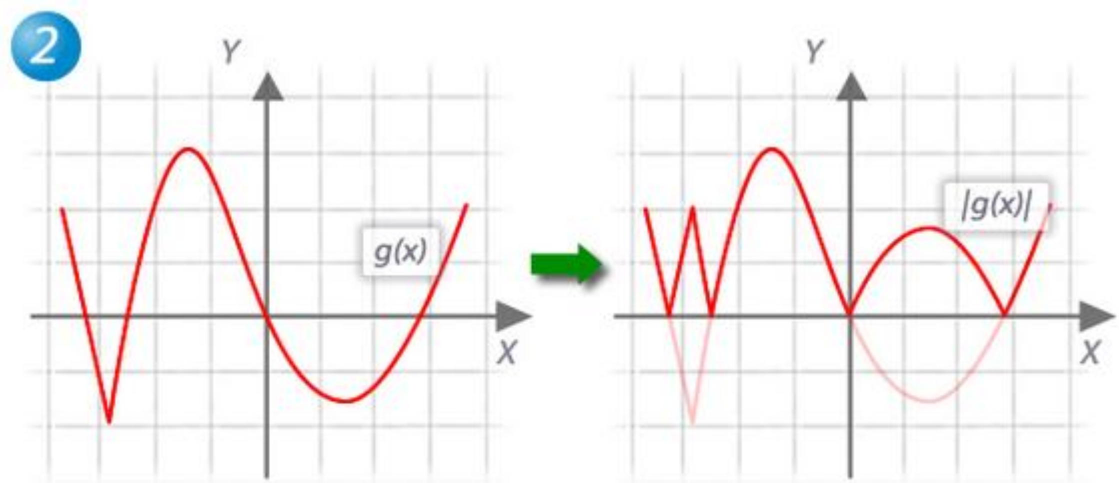
$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

De manera general, el valor absoluto de una función f(x), o función en valor absoluto, se define según:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

En una función afectada por el valor absoluto todos los valores de y deben ser positivos, por lo que su gráfica siempre quedará en la parte del semieje y positivo. De esta manera, conocida la gráfica de una función cualquiera, puedes obtener fácilmente su valor absoluto "reflejando" los tramos negativos en el eje x. Observa:





En la ilustración, en 1 y 2 y a la izquierda, dos funciones de gráficas conocidas, f(x) y g(x). Aplicado el valor absoluto obtenemos las gráficas a la derecha. Las partes que quedaban bajo el eje x, que es la parte negativa del eje y, se "reflejan" cuando se aplica el valor absoluto, y quedan en la zona positiva de este último.

Las funciones en valor absoluto se transforman en funciones a trozos, siguiendo los siguientes pasos:

1. Se iguala a cero la función, sin el valor absoluto, y se calculan sus raíces
2. Se forman intervalos con las raíces y se evalúa el signo de cada intervalo

3. Definimos la función a trozos, teniendo en cuenta que en los intervalos donde la x es negativa se cambia el signo de la función
4. Representamos la función resultante

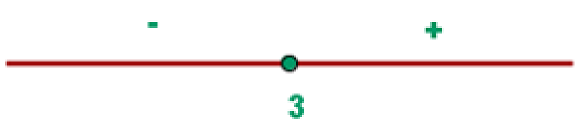
Ejemplos

$$f(x) = |x - 3|$$

Igualamos a cero la función, sin el valor absoluto, y se calculan sus raíces

$x - 3 = 0$ $\qquad\qquad\qquad$ $x = 3$

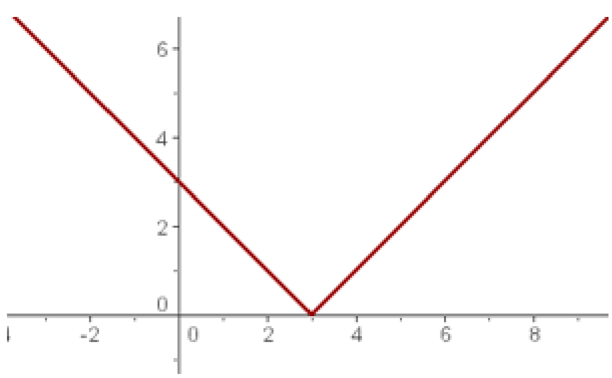
Se forman intervalos con la raíz y se evalúa el signo de cada intervalo



Definimos la función a trozos, teniendo en cuenta que en los intervalos donde la x es negativa se cambia el signo de la función

$$f(x) = \begin{cases} -(x-3) & \text{si} \quad x<3 \\ x-3 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Representamos la función



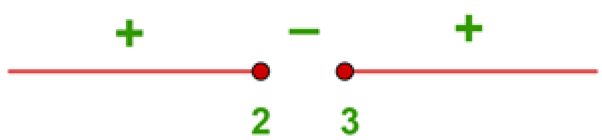
D = $\mathcal{R}$

$$f(x) = \left|x^2 - 5x + 6\right|$$

Igualamos a cero la función, sin el valor absoluto, y se calculan sus raíces

$x^2 - 5x + 6 = 0$ $\quad\quad x = 2 \quad\quad x = 3$

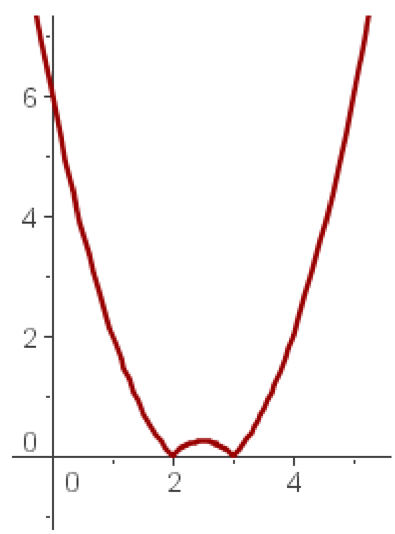
Se forman intervalos con la raíces y se evalúa el signo de cada intervalo



Definimos la función a trozos, teniendo en cuenta que en los intervalos donde la x es negativa se cambia el signo de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & \text{si} \quad x < 2 \\ -\left(x^2 - 5x + 6\right) & \text{si} \quad 2 \le x < 3 \\ x^2 - 5x + 6 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$$

Representamos la función



D = $\mathcal{R}$

Función signo

La función signo es la función que asigna a los números positivos, 1 ; a los números negativos, - 1 ; y al cero, el 0.

Las Función Signo es una función definida a trozos de la que se obtiene el signo del número que se introduce. Esto es:

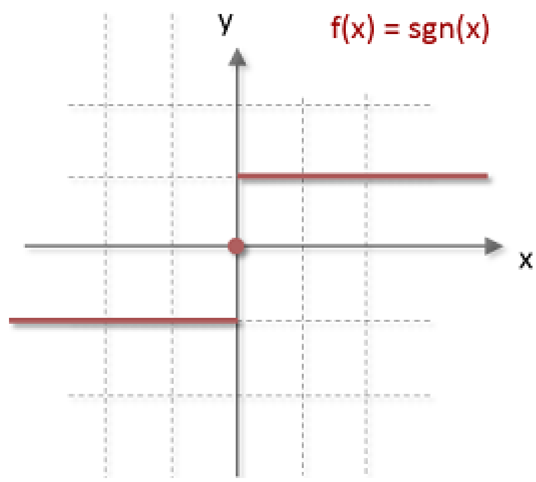
Sea f(x) la función signo definida como:

1 si $x>0$

0 si $x = 0$

-1 si $x<0$

La función signo puede expresarse como: sgn(x)



Propiedades de la Función Signo

Veamos algunas de las propiedades de la función signo:

- Es una función impar ya que:
- sgn (-x) = - sgn (x)
- La función signo es la derivada de la función valor absoluto

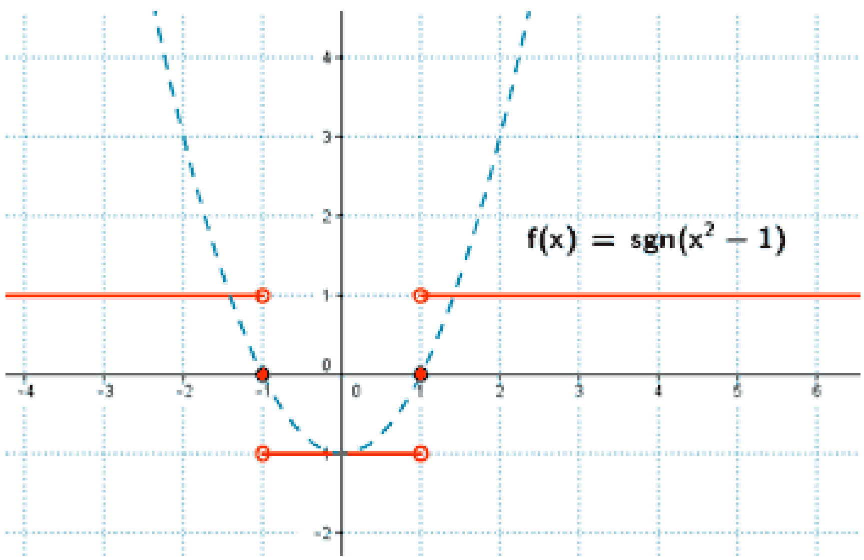
- Todo número real x puede expresarse como:
- x = sgn (x) · |x|

Ejemplo:

$$f(x) = sig\left(x^2 - 1\right)$$

$$f(x) = sig\left(x^2 - 1\right) = \begin{cases} 1 & si\ x^2 - 1 > 0 \\ 0 & si\ x^2 - 1 = 0 \\ -1 & si\ x^2 - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & si\ \ x < -1\ \ ó\ \ x > 1 \\ 0 & si\ \ x = 1\ \ ó\ \ x = -1 \\ -1 & si\ \ -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = sig\left(x^2 - 1\right) = \begin{cases} 1 & si\ \ x < -1 \\ 0 & si\ \ x = -1 \\ -1 & si\ \ -1 < x < 1 \\ 0 & si\ \ x = 1 \\ 1 & si\ \ x > 1 \end{cases}$$



B. Base de Consulta

TÍTULO	AUTOR	EDICIÓN	AÑO	IDIOMA	EDITORIAL
Proposiciones simples y compuestas	Sociedad a matemáticas		2013	Español	http://pilosmatematicos2015.blogspot.com/2015/09/proposiciones-simples-y-compuestas.html
Proposiciones Simples y Compuestas.	Enciclopedia de Ejemplos		2019	Español	www.ejemplos.co/40-ejemplos-de-proposiciones-simples-y-compuestas/
Matemáticas discretas	Atilano Carrillo		2011	Español	https://sites.google.com/site/matediscretasatilanocarrillo/unidad-2-logica-matematica/2-2-4-leyes-y-reglas-de-la-inferencia
Contenido Introducción Expresiones de Conmutación Compuertas Lógicas Minimización de Funcione Algebra de Boole	Prof. Rodrigo Araya E.		2006	Español	Universidad Técnica Federico Santa María Departamento de Informática: https://users.dcc.uchile.cl/~clgutier/Capitulo_3.pdf
Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.	Patricia y Gallardo		2012	Español	
Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales	I, Ingeniería Civil. Matemáticas		2012	Español	https://www.ugr.es/~jagalvez/pdfs/M1_T5.pdf

Sistemas de ecuaciones lineales y matrices (representación matricial de un SEl y el teorema de Rouché-Frobenius	Matesfacil.com			Español	https://www.matesfacil.com/matrices/matrices-sistemas.html
Matrices elementales	Departamento de matemáticas		2008	Español	http://cb.mty.itesm.mx/ma1010/materiales/ma1010-25.pdf
Puntos en el Plano Cartesiano	Universidad de Talva			Español	

C. Base práctica con ilustraciones

4. ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE

ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE 1: Análisis y Planeación
Descripción: Discusión sobre las lecturas, artículos y videos. Observación atenta y detallada de las éticas que emiten los niños y las personas que están en su contexto para lograr la respuesta de los demás.
Ambiente(s) requerido: Aula amplia con buena iluminación.
Material (es) requerido: Infocus.
Docente: Con conocimiento de la materia.

5. ACTIVIDADES

- Controles de lectura
- Taller en clase
- Evaluación final

Se presenta evidencia física y digital con el fin de evidenciar en el portafolio de cada aprendiz su resultado de aprendizaje. Este será evaluable y socializable

6. EVIDENCIAS Y EVALUACIÓN

Tipo de Evidencia	**Descripción (de la evidencia)**
De conocimiento:	Prueba escrita cerrada

Elaborado por: **(Docente)**	**Revisado Por:** **(Coordinador)**	**Reportado Por:** **(Vicerrector)**

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR JAPÓN

AMOR AL CONOCIMIENTO

POMASQUI-
c/Marieta Veintimilla E5-471 y Sta. Teresa 4ta transversal

Tlfs: 022356-368 - 0986915506

www.itsjapon.edu.ec