Ing. Jorge J. L. Ferrante
Colaboradora: Lic. Sandra Barrutia

SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE SERIES DE POTENCIAS

$$a_n(r) = -\frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k(r)\left[p_{n-k}(r+k) + q_{n-k}\right]}{F(r+n)}$$

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
UNIDAD DOCENTE BÁSICA MATEMÁTICA
FACULTAD REGIONAL GENERAL PACHECO
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

UTN UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL

SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE SERIES DE POTENCIAS

Universidad Tecnológica Nacional – República Argentina
Rector: Ing. Héctor C. Brotto
Vicerrector: Ing. Pablo Andrés Rosso

edUTecNe – Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional
Coordinador General: Ing. Ulises J. P. Cejas
Director de Ediciones: Ing. Eduardo Cosso
Coordinador del Comité Editorial: Dr. Jaime Moragues
Áreas Pre-prensa y Producción: Téc. Bernardo H. Banega, Ing. Carlos Busqued, Nicolás Mauro
Área Promoción y Comercialización: Fernando H. Cejas, Dr. Lázaro Brito Godoy

UTN UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL

SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE SERIES DE POTENCIAS

Ing. Jorge J. L. Ferrante

Colaboradora Lic. Sandra Barrutia

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
UNIDAD DOCENTE BÁSICA MATEMÁTICA
FACULTAD REGIONAL GENERAL PACHECO
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

edUTecNe
Buenos Aires, 2014

SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES
MEDIANTE SERIES DE POTENCIAS

Ing. Jorge J. L. Ferrante
Colaboradora Lic. Sandra Barrutia

Editado en Argentina - Published in Argentina

Sarmiento 440, Piso 6
(C 1041AAJ) Buenos Aires, República Argentina
http://www.edutecne.utn.edu.ar

CONTENIDO

PRÓLOGO

CAPITULO PRIMERO. A modo de informal introducción.

CAPITULO SEGUNDO. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de segundo orden. Puntos ordinarios. Solución mediante serie de potencias.

CAPITULO TERCERO. Ecuaciones diferenciales ordinarias en puntos singulares regulares.

CAPITULO CUARTO. Funciones especiales.

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

(página dejada intencionalmente en blanco)

PROLOGO

La Unidad Docente Básica Matemática desarrolla, en forma permanente, un taller sobre Ecuaciones Diferenciales. Tengo el privilegio de dirigirlo.

Cabe preguntarse por qué el tema elegido es ecuaciones diferenciales y también cabe preguntarse por qué tiene carácter permanente.

Las respuestas son fáciles.

El tema ha sido elegido porque la gran mayoría de los modelos matemáticos que usa la ingeniería, en todas sus especialidades y cada vez más otras profesiones, son ecuaciones diferenciales, totales o en derivadas parciales.

Estas ecuaciones diferenciales, salvo simplificaciones efectuadas para adecuarlas a formas conocidas, carecen de solución exacta, en el sentido de obtener una expresión explícita que represente el comportamiento del sistema físico en estudio mediante combinaciones de funciones conocidas.

El ejemplo más trivial de lo expuesto es el sistema físico péndulo. Si se plantea su estudio mediante la aplicación canónica de leyes físicas, su comportamiento queda modelado por una ecuación diferencial de segundo orden, no lineal. Si se formula la hipótesis accesoria de pequeños desplazamientos alrededor de la posición de equilibrio, el modelo resultante es una ecuación diferencial lineal de segundo orden de solución conocida.

Queda entonces planteado el interrogante ¿cómo se resuelven aquellas ecuaciones diferenciales que modelan sistemas que no admiten simplificaciones como la expresada? ¿Quiere esto decir que debemos renunciar al conocimiento del comportamiento del sistema cuando ocurre algo así?

De ninguna manera. Existe un método general para resolver analíticamente las ecuaciones diferenciales de segundo orden mediante desarrollos en series de potencias. Por supuesto, la solución también será una serie de potencias y los resultados serán tanto más cercanos al "verdadero valor" cuantos más términos sean considerados, una vez determinada la convergencia de la serie resultado.

Este método para resolver ecuaciones diferenciales es, tal vez, uno de los primeros utilizados para hacerlo. Según las constancias buscadas, correspondió a Isaac Newton hacerlo por primera vez.

Profundizando un poco en esta técnica pronto aparecen los casos patológicos que, en esta materia, se llaman los puntos singulares regulares. Fue el alemán Ferdinand Georg Frobenius quien dio la forma de buscar soluciones en entornos de dichos puntos.

Enhorabuena lo hizo porque una serie de problemas de la física matemática llevan de manera inexorable a ecuaciones diferenciales de segundo orden en puntos como los indicados.

Es más, muchas de ellas han dado origen a nuevas funciones identificadas con el nombre de aquellos que por primera vez las utilizaron.

Felizmente, ahora esas funciones se encuentran tabuladas y/o son recurso natural en los lenguajes algebraicos utilizados normalmente.

Por todo lo expuesto, parece lógico brindar a los interesados un resumen completo de solución de ecuaciones diferenciales mediante desarrollos en serie de potencias. Esta es la razón de este trabajo.

Además, el seminario es de carácter permanente porque ¿acaso alguien puede creer que se han estudiado todos los problemas y que se conocen todos los métodos de solución para los mismos?

Hacerlo sería, sencillamente, negar la ciencia que ha sido muy bien caracterizada como una burbuja de diámetro creciente, de tal forma que cuando aumenta su volumen –los conocimientos sobre un determinado tema- aumenta también la superficie de contacto con lo desconocido.

En esa línea, este documento está formado por cuatro capítulos.

El primero es una copia de la Guía de Estudio y Práctica (GEP) que la cátedra de Análisis Matemático I de la Facultad Regional General Pacheco facilita a sus alumnos para estudio y práctica sobre sucesiones y series. En algún sentido, constituye un auto plagio, seguramente no punible.

Se lo incluye para que, quien no tenga actualizados y/o seguros sus conocimientos sobre el tema, pueda leerlo rápidamente y de la misma forma –rápida- recuperar operatividad para el mismo.

El segundo capítulo trata el tema de la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden mediante desarrollos en serie de potencias, en puntos no singulares. Abundan ejemplos.

El tercer capítulo trata el tema de la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante desarrollos en serie de potencias en puntos singulares regulares. Es, de lejos, el más complejo de todos y, sobre el mismo cabe contar una anécdota que formaba parte de los mitos que circulaban en los pasillos de la Facultad de Ingeniería. Según el mismo, de lo cual no soy testigo, Don Julio Rey Pastor solía decir, con su inefable tono *"este es uno de los temas más oscuros que conozco"*. Si eso es cierto, imaginen, simplemente imaginen.

El cuarto está formado por la aplicación del contenido de los anteriores a algunas de las ecuaciones diferenciales con nombre propio.

Hace ya bastante tiempo que escribí los primeros borradores de los capítulos dos y tres, como material soporte para clases sobre el tema. Con estos en las manos, resultó fácil pensar que agregando al principio el capítulo sobre sucesiones y series escrito para los alumnos de primer año y, al final un capítulo dedicado a algunas funciones especiales quedaría un trabajo aceptable para el seminario sobre solución de ecuaciones diferenciales mediante desarrollos en serie de potencias.

En realidad creo que en esos momentos no tenía todavía muy claro las características del terreno en el que me metía. El Capítulo II es relativamente fácil aunque requiere mucha operatoria algebraica, soportable con una buena dosis de paciencia y, por supuesto, una computadora con algún lenguaje algebraico instalado.

No ocurre lo mismo con el Capítulo III. Si el mito de Don Julio Rey Pastor no es cierto, merecería serlo porque el trabajo que implica encontrar la segunda solución cuando las raíces de la ecuación indicial son iguales o difieren en un entero no es recomendable para temperamentos ansiosos. Sobre todo si se quiere hallarlas según lo propuso Frobenius, por la vía del Wronskiano y siguiendo los pasos de la teoría.

Sandra Barrutia, auxiliar docente y miembro permanente del Seminario tomó la responsabilidad de revisar los originales y, dando un paso más, logró con casi infinita paciencia y enorme capacidad de cálculo, llevar adelante los pasos necesarios para revisar y alcanzar soluciones

A ella, mi agradecimiento.

Ahora queda por ver la opinión de los participantes del Seminario y de los lectores interesados en general. Sus opiniones serán bienvenidas.

Jorge J. L. Ferrante
PROFESOR CONSULTO

(página dejada intencionalmente en blanco)

CAPITULO PRIMERO
A modo de informal introducción

Sucesiones Numéricas, Series Numéricas, Sucesiones de Funciones, Series de Funciones, Series de Potencias, Aproximación, Series de Potencias en el Campo Complejo.

I Sucesiones numéricas

1 Una sucesión de números reales es una aplicación del conjunto N (o, a veces, N_0) en R, de tal forma que, a cada número natural n le corresponde uno y sólo un número real denominado a_n en lugar de usar la notación a = f(n)

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...\}$$

2 Los números a_1, a_2, etc. son los términos de la sucesión. El término a_n es el término genérico de la sucesión. Obsérvese que los tres puntos finales colocados luego de a_n constituyen un símbolo matemático que debe ser entendido como "y así hasta infinito".

3 Se incluyen a continuación cuatro ejemplos arbitrarios de sucesiones.

La primera es la sucesión $\{a_n\} = \{1/n\}$

$$\{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10, ...\}$$

La segunda es la sucesión $\{a_n\} = \{(2^n-1)/n^2\}$

$$\{1, 3/4, 7/9, 15/16, 31/25, 7/4, 127/49, 255/64, 511/81, 1023/100, ...\}$$

La tercera es la sucesión $\{a_n\} = \{ n^{(1/n)}\}$

{1., 1.41421, 1.44225, 1.41421, 1.37973, 1.34801, 1.32047, 1.29684, ...}

La cuarta es la sucesión $\{a_n\} = \{(-1)^n n\}$

{-1; 2; - 3; 4; - 5; 6; - 7; 8; ...}

4 En los casos presentados se ha definido la sucesión mediante una expresión o fórmula que proporciona los términos de la misma. Otra forma de definirlas es dando alguna característica de sus términos, por ejemplo la sucesión formada por todos los números naturales cuyo dígito de unidades sea cuatro (4):

$\{a_n\}$ = {4, 14, 24, 34, 44, 54, 64, 74, ...}

5 Otra forma de definirlas es mediante una expresión de recurrencia (del latín *recurrire*, volver al origen), estableciendo una relación entre el término enésimo y anteriores a él.

6 En las sucesiones recurrentes se dan los primeros términos necesarios para la construcción de la misma. Por ejemplo la sucesión de Fibonacci está definida por la recurrencia:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} & n > 1 \end{cases}$$

En este caso puede demostrarse que

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

7 Por último se pueden definir de manera completamente arbitraria siempre y cuando medie una ley de formación, por ejemplo:

Término de la sucesión	**Ley de formación**
1	Uno
11	Un uno
21	Dos unos
1211	Un dos, un uno
111221	Un uno, un dos, dos unos
21112211	Dos unos, un uno, dos dos, un uno
1221112221	Un dos, dos unos, un uno, dos dos, un dos, un uno.
11222111221211	Dos unos, dos dos, un dos, dos unos, un uno, dos dos, un uno, un dos, dos unos.
……………………………………	…………………………………………………………

II Monotonía de una sucesión

8 Una sucesión $\{a_n\}$ es monótona creciente si

$$a_n \leq a_{n+1} \qquad \forall n$$

y es estrictamente creciente si

$$a_n < a_{n+1} \qquad \forall n$$

9 Obsérvese que la única diferencia entre sucesión creciente y estrictamente creciente es que en la segunda la desigualdad debe cumplirse necesariamente mientras que en las crecientes puede haber igualdad entre términos sucesivos

10 Una sucesión es monótona decreciente si

$$a_n \geq a_{n+1} \qquad \forall n$$

y es estrictamente decreciente si

$$a_n > a_{n+1} \qquad \forall n$$

Vale en este caso la misma observación anterior.

11 Demostrar el crecimiento o decrecimiento de una sucesión suele requerir el uso de inducción completa o de reducción al absurdo. Sin embargo, en ocasiones puede tomarse una función de variable real f tal que $f(n) = a_n$ y estudiar el signo de la derivada primera de esta función para determinar crecimiento o decrecimiento. Si f es monótona creciente (decreciente) la sucesión $\{a_n\}$ también lo será.

III Acotación

12 La sucesión $\{a_n\}$ está acotada superiormente si existe un número M tal que $a_n \leq M$ para todo n.

La sucesión $\{a_n\}$ está acotada inferiormente si existe un número M tal que $M \leq a_n$ para todo n.

La sucesión $\{a_n\}$ está acotada si está acotada superior e inferiormente es decir si

$$|a_n| \leq M \qquad \forall n$$

IV Subsucesiones

13 Una sucesión $\{a^*_n\}$ es una subsucesión de $\{a_n\}$ si existe una aplicación f(n) de N en N estrictamente creciente tal que $a^*_n = a_{f(n)}$

Por ejemplo, dada la sucesión

$$\{a_n\} = \{a_1, a_3, a_3, a_4, ..., a_n, ...\}$$

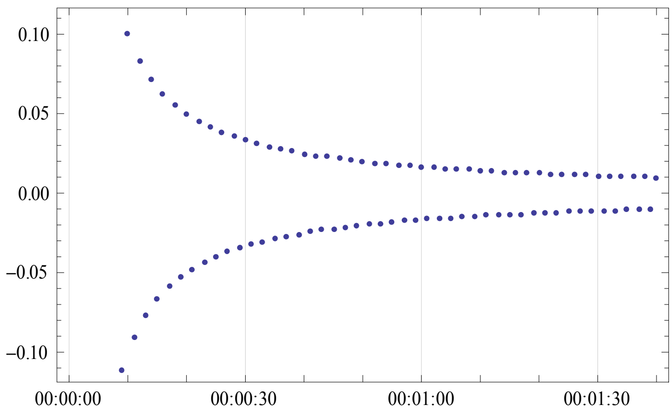
Las siguientes son subsucesiones posibles

$$\{a_{2n}\} = \{a_2, a_4, a_6, a_8, ..., a_{2n}, ...\}$$
$$\{a_{2n-1}\} = \{a_1, a_3, a_5, a_7, ..., a_{2n-1}, ...\}$$
$$..$$
$$\{a_{nprimo}\} = \{a_1, a_2, a_3, a_5, a_7, a_{11}, a_{13}, ...\}$$
$$..$$

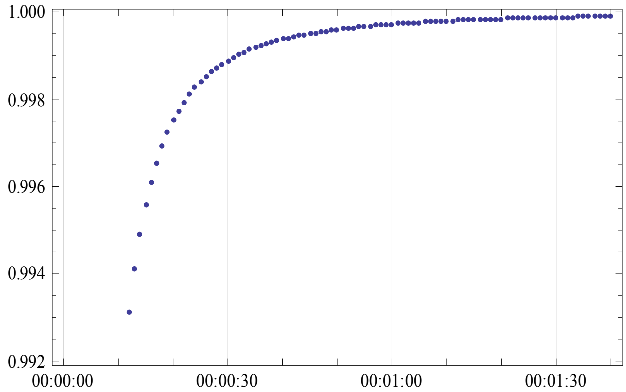
V Convergencia de una sucesión

14 A continuación se agregan gráficos (obviamente no continuos) en los que se representan los términos de distintas sucesiones

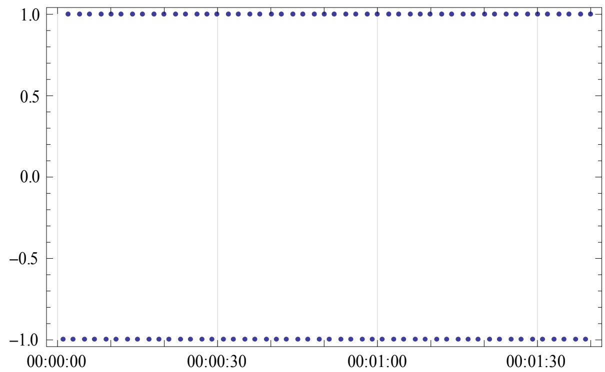
$\{a_n\} = (-1)^n /n$



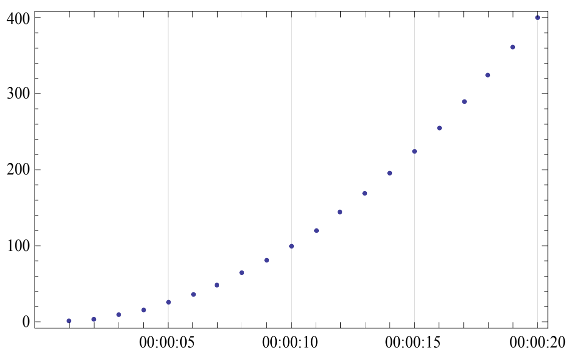
$\{a_n\} = n^2/(n^2+1)$



$\{a_n\} = (-1)^n$



$\{a_n\} = n^2$



15 En la primera y en forma absolutamente intuitiva puede inferirse que, al crecer n, los términos de la sucesión (los puntitos) tienden a 0; en la segunda,

tienden a uno (1); en la tercera tienden a +1 o a -1 y, en la cuarta parece que crecen más allá de todo límite.

16 Estudiar la convergencia de una sucesión consiste precisamente en investigar a qué valor tiende el término genérico de la misma cuando n $\to\infty$.

Si tiende a un número finito L la sucesión se dice convergente, si tiende a $\pm\infty$ o no existe el número L, la sucesión se dice divergente.

17 Los gráficos anteriores parecen indicar que las dos primeras son convergentes mientras que las restantes son divergentes.

18 Antes de definir límite de una sucesión (hecho que el lector debe estar sospechando hace un rato) se da un criterio general de convergencia llamado de Bolzano-Cauchy (cuando no ¡Cauchy!).

19 Condición necesaria y suficiente para que la sucesión

$$\{a_n\} = \{a_{1,}a_{2,}a_{3,}a_{4,}a_{5,}a_{6,}a_{7,}...,a_{n,}..a_{\upsilon,}...,a_{\upsilon+p,}...\}$$

de números reales sea convergente, es que para cada número positivo ε corresponda un valor υ de n, tal que todas las diferencias $a_n - a_{n+p}$, $n > \upsilon$, $p > 0$ entre términos posteriores a a_υ se conserva en valor absoluto menor que ε.

$$\left|a_n - a_{n+p}\right| < \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0, n > \upsilon, p > 0$$

20 Obsérvese que este criterio permite asegurar la convergencia de una sucesión sin conocer el valor del límite.

VI **Límite de una sucesión**

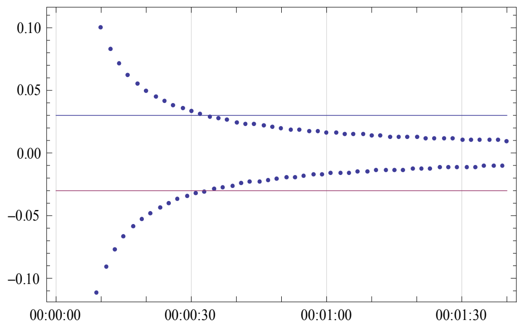
21 El número L es el límite de la sucesión $\{a_n\}$ si se cumple que

$$\left|a_n - L\right| < \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0$$
$$\forall n > N_\varepsilon$$

es decir, si desde un término en adelante la diferencia entre este y el límite se puede hacer tan chica como se quiera con tal de tomar n suficientemente grande (mayor que N_ε).

22 Por ejemplo, la sucesión $\{a_n\}=\{(-1)^n/n\}$ tiene límite cero (0) porque fijado un $\varepsilon > 0$ basta con tomar $N_\varepsilon > 1/\varepsilon$ para que la diferencia entre el término genérico y el límite sea menor que ε.

23 Obsérvese detenidamente que, en el intervalo $[L + \varepsilon, L - \varepsilon]$ después de N_ε hay infinitos elementos de la sucesión, mientras que, antes de $N\varepsilon$ solo hay un número finito de ellos.



VII **Monotonía y convergencia**

24 Se relacionan a continuación condiciones de monotonía y de convergencia:

- Toda sucesión convergente es acotada.
- Toda sucesión creciente y acotada superiormente es convergente.
- Toda sucesión decreciente y acotada inferiormente es convergente.
- Toda sucesión decreciente y no acotada inferiormente es divergente

IX **Teorema de compresión**

25 Este teorema es útil para estudiar la convergencia de algunas sucesiones.

Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ tres sucesiones. Se verifica que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$
$$a_n \le c_n \le b_n$$

Entonces la sucesión $\{c_n\}$ es convergente y su límite vale L.

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L$$

Por ejemplo, la sucesión

$$\{c_n\} = \left\{\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \frac{1}{n^2+3} + \ldots + \frac{1}{n^2+n}\right\}$$

Es convergente pues está "comprimida" entre las dos sucesiones convergentes

$$\{a_n\} = \{0,0,0,0,\ldots,0,\ldots\}$$
$$\{b_n\} = \left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}$$

Como ambas convergen a 0, $\{c_n\} \to 0$.

X **Criterio de Stöltz Césaro**

26 Sea $\{b_n\}$ una sucesión creciente y divergente y $\{a_n\}$ otra sucesión. Si el límite:

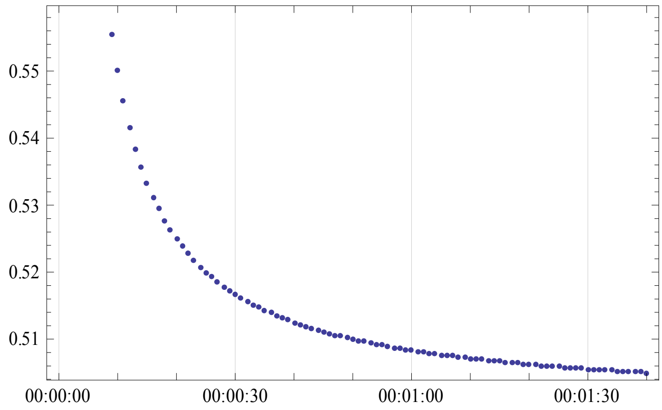
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

existe, entonces el $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ también existe y coincide con el anterior.

27 Por ejemplo la sucesión $\{c_n\}=\left\{\dfrac{1+2+3+4+...+n}{n^2}\right\}$ cuyo término genérico puede interpretarse como el cociente entre la suma de los primeros n números naturales y n^2. La sucesión n^2 es creciente y divergente, entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+1)^2-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

Entonces, la sucesión dada converge a 1/2. Por si queda alguna duda, se agrega el gráfico correspondiente a los cien primeros términos de $\{c_n\}$.



XI Subsucesiones y convergencia

28 Una sucesión $\{a_n\}$ converge a L si toda subsucesión $\{a^*_n\}$ converge a L.

Sean $\{a^*_n\}$ y $\{a^{**}_n\}$ dos subsucesiones de $\{a_n\}$. Si

$$\lim_{n\to\infty} a^*{}_n = L$$
$$\lim_{n\to\infty} a^{**}{}_n = L$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

29 Esta propiedad puede utilizarse para demostrar la divergencia de algunas sucesiones. En efecto, si de una dada sucesión, se consideran dos subsucesiones con distinto límite, la sucesión dada es divergente.

Por ejemplo, de la sucesión $\{a_n\} = \{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots\}$ se pueden tomar las subsucesiones de índice impar y de índice par. La primera tiene límite menos uno (-1); la segunda uno (1), en consecuencia la sucesión dada es divergente.

XII Series numéricas

30 Dada una sucesión numérica $\{a_n\}$ se plantea el siguiente algoritmo:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \ldots + a_k + \ldots$$

pero, como el algoritmo de la suma está definido para un número finito de términos, la expresión anterior carece de sentido. Obsérvese que nadie, ni aún la más poderosa computadora existente, puede sumar infinitos términos, pues por más rápida que sea, el tiempo requerido sería infinito y todavía le faltaría por lo menos, otro tanto y otro y...

Corresponde entonces aclarar el significado de la expresión planteada asociada a la sucesión $\{a_n\}$.

31 Para ello, yendo a cosas conocidas, se forma la denominada **Sucesión de Sumas Parciales** definida por:

$$\begin{aligned}
&S_1 = a_1 \\
&S_2 = a_1 + a_2 \\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\
&S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{k=n} a_k
\end{aligned}$$

La sucesión $\{S_n\}$ se denomina Serie Numérica asociada a la sucesión $\{a_n\}$

Si existe $\lim_{n\to\infty} S_n = L$ la serie numérica se dice convergente y entonces (y solo entonces) se escribe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y el número L se llama suma de la serie. En caso de tender a ∞ o no existir el límite la serie es divergente.

32 Obsérvese que, a través de las sumas parciales se han combinado los algoritmos de la suma y del paso al límite, permitiendo para las series convergentes extender a infinito el número de sumandos.

XIII **Casos notables**

33 Se presentan a continuación dos casos emblemáticos de series numéricas. El primero es el de la serie denominada armónica y el segundo es el de la serie geométrica.

Serie Armónica

La serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{k}+...$ se denomina serie armónica y es **divergente.** En efecto:

$$S_{2^n} = 1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+...+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+...+\frac{1}{2^n}\right)\geq$$

$$\geq 1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+...+\left(\frac{1}{2^n}+...+\frac{1}{2^n}\right)=$$

$$=1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)+...+\left(\frac{1}{2}\right)=1+n\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+n\frac{1}{2}\right)\to\infty$$

34 Todos los términos de la serie armónica son mayores o iguales a los de una serie divergente (minorante divergente), entonces la serie armónica diverge.

35 Según Sadosky (Sadosky - Guber, edición 1958, pág 523) Bernouilli y otros conocían esta característica de la serie armónica y agrega que, $S_{1000} < 8$; $S_{1.000.000} < 15$; $S_{1.000.000.000.000} < 30$ y $S_{10^{100}} < 232$. Sin embargo esta suma puede hacerse tan grande como se quiera, superando a cualquier número por grande que este sea, tomando un número suficientemente grande de términos.

Serie geométrica

36 Se denomina serie geométrica a una serie donde cada término se obtiene multiplicando al anterior por un factor constante q, llamado razón de la serie

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$$

Se forma la suma parcial de orden n y se le resta la misma multiplicada por la razón q

$$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + \ldots + aq^{n-1}$$
$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + aq^6 + \ldots + aq^n$$
$$qS_n - S_n = aq^n - a$$

$$S_n = \frac{a\left(q^n - 1\right)}{q - 1}$$

Si $|q| > 1$ la serie es divergente, si $|q| < 1$ la serie es convergente y su suma vale

$$S = \frac{a}{1 - q}$$

si q = 1 o q = -1 la serie es divergente.

37 No era tonto aquel que la historia nombra como el inventor del juego de ajedrez. El Sultán, agradecido le ofreció lo que quisiese. El inventor pidió un grano de trigo en la primera casilla del tablero, dos en la segunda, cuatro en la tercera y así sucesivamente. El Sultán, poco avispado con series divergentes, accedió de inmediato. La sorpresa fue enorme cuando los contables del reino dijeron "Majestad, debemos entregarle 18.446.744.073.709.551.615 granos de trigo. (Aprox. 1.019.180.000.000 tn) Tendremos hambre este año, el que viene y muchos otros más." Como a menudo ocurre, el inventor fue preso, a cultivar trigo, por haber osado intentar burlarse de la majestad del Sultán.

XIV Condición necesaria de convergencia

38 Si una serie numérica $\{S_n\}$ asociada a la sucesión $\{a_n\}$ es convergente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad .$$

En efecto, dada la sucesión $\{a_n\}$ es:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

la diferencia entre ambos elementos de $\{S_n\}$, $S_{n-1}-S_n = a_n$, es igual al término genérico de la serie. Pasando al límite cuando $n \to\infty$ se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

dado que S_{n-1} se puede considerar una subsucesión de $\{S_n\}$ teniendo entonces el mismo límite por ser convergente, por hipótesis, la serie numérica dada.

Un corolario importante es que si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ la serie es divergente.

39 Por ejemplo, la serie asociada a la sucesión $\left\{\frac{n^2}{n^2+1}\right\}$ es divergente porque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \neq 0 \quad .$$

Obsérvese que la propiedad es solamente necesaria, lo que quiere decir que hay series cuyo término genérico tiende a cero y divergen. La serie armónica, es ejemplo.

XV Criterio general de convergencia

40 Se establece aplicando el criterio de Bolzano Cauchy para sucesiones a la sucesión $\{S_n\}$

$$\left|S_n - S_{n+p}\right| < \varepsilon, \varepsilon > 0, n > \upsilon, p \in N$$

siendo

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$S_{n+p} = \sum_{k=1}^{n+p} a_k$$

resulta

$$\left|S_n - S_{n+p}\right| = \left|a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \ldots + a_{n+p}\right| < \varepsilon, \varepsilon > 0, n > \upsilon, p \in N$$

Que puede expresarse diciendo: la condición necesaria y suficiente para que una serie numérica sea convergente es que la suma de p términos a partir de uno dado pueda hacerse tan pequeña como se quiera.

Dejando n fijo y haciendo tender p a infinito se tiene:

$$\left|a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \ldots + a_{n+p} + \ldots\right| \le \varepsilon \, , \varepsilon > 0 \, , n > \upsilon$$

lo que indica que prescindiendo de los n primeros términos de una serie convergente, la serie resultante, llamada serie resto, se puede hacer tan chica como se quiera con tal de tomar $n > \upsilon$.

41 Esto es muy importante en las aplicaciones porque, en general, no se conoce la suma S de una serie convergente. Sólo se puede aproximar este valor mediante la suma de algunos (pocos, varios, bastantes, muchos, muchísimos, etc.) términos iniciales, cosa que se hace porque se sabe que el resto es "pequeño" y de poca influencia en los cálculos. Y que cuantos más términos iniciales se toman, más chico es el resto aunque no se lo conozca.

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S_n + T_n$$

42 También se puede plantear como condición de convergencia que:

$$\lim_{n \to \infty} T_n = 0$$

XVI Series de términos positivos

43 Son las más importantes porque el estudio de las demás se reduce fácilmente al estudio de las mismas y también son las más sencillas.

44 La condición necesaria y suficiente para que una serie de términos positivos sea convergente es que sus sumas parciales S_n se conserven acotadas, $S_n < M$. Entonces, la suma es $S \leq M$.

45 También se verifica que asociando o descomponiendo términos de una serie de términos positivos no varía su carácter convergente ni su suma. Lo mismo ocurre si se reordenan arbitrariamente sus términos.

XVII Criterios de comparación

46 Particularmente útiles son los denominados criterios de comparación para el estudio de la convergencia de series de términos positivos. Mediante ellos se comparan ordenadamente los términos de la serie en estudio con los de otras series cuyo comportamiento se conoce.

Mayorante convergente

47 Si los términos de una serie de términos positivos son menores o iguales que los correspondientes de otra serie convergente, la serie es convergente.

Sea $\sum a_k$ una serie cuyo carácter se desea establecer y sea $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ una serie convergente, con suma U, verificándose que $a_k \leq u_k$, entonces $\sum a_k$ converge y su suma S es menor o igual a la suma U. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ es una serie mayorante de la serie dada.

Minorante divergente

48 Análogamente puede decirse que, si los términos de una serie de términos positivos son mayores o iguales que los correspondientes de otra serie divergente, es divergente.

Sea $\sum a_k$ una serie cuyo carácter se desea establecer y sea $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ una serie divergente, verificándose que $a_k \geq u_k$, entonces $\sum a_k$ diverge. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ es una serie minorante de la serie dada.

49 Estos criterios tienen sendos corolarios.

- Sea $\sum a_k$ una serie cuyo carácter se desea establecer y sea $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ una serie convergente, con suma U, y la razón $\frac{a_n}{u_n} < \lambda, \lambda > 0$ entonces $\sum a_k$ converge y su suma S es menor o igual a la suma U.
- Sea $\sum a_k$ una serie cuyo carácter se desea establecer y sea $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ una serie divergente, y la razón $\frac{a_n}{u_n} > \lambda, \lambda > 0$ entonces $\sum a_k$ diverge.

XVIII Series "patrón"

50 Las series que suelen tomarse como mayorantes o minorantes son la serie geométrica y la serie armónica o la armónica generalizada, siendo esta última la serie $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$, convergente si $\alpha > 1$ y divergente si $\alpha \leq 1$.

Criterios de convergencia de series de términos positivos

51 Se presentan a continuación criterios de convergencia de series de términos positivos cuyas demostraciones se basan en los criterios de comparación ya vistos en general con series geométricas y/o armónicas y son mucho más operativos que los criterios expuestos hasta el momento.

Criterio de D'Alembert

52 Sea una serie de términos positivos $\sum a_n$, se calcula

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=L$$

Si L < 1 la serie es convergente, si L > 1 la serie es divergente y, si L = 1 el criterio no permite determinar convergencia o divergencia. En la demostración la serie de comparación es una serie geométrica.

Criterio de Cauchy

53 Sea una serie de términos positivos $\sum a_n$, se calcula

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$$

Si L < 1 la serie es convergente, si L > 1 la serie es divergente y, si L = 1 el criterio no permite determinar convergencia o divergencia. En la demostración la serie de comparación es nuevamente una serie geométrica.

Criterio de Kummer

54 Sea una serie de términos positivos $\sum a_n$ y $\sum \frac{1}{u_n}$ una serie divergente. Se calcula

$$\lim_{n\to\infty}\left(u_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-u_{n+1}\right)=L$$

Si L > 0 la serie $\sum a_n$ converge, si L < 0 la serie $\sum a_n$ diverge.

Criterio de Raabe

55 Consiste en tomar $u_n = n$ en el criterio de Kummer (serie armónica) con lo que resulta

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right]=L$$

Si L > 1 la serie $\sum a_n$ es convergente, si L < 1 la serie es divergente, si L = 1 hay que recurrir a otro criterio de convergencia.

Criterio de la integral

56 Sea $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+...+a_n+...$ una serie de términos positivos **decrecientes**. Se toma una función f(x) tal que f(n) = a_n. La serie converge o diverge según converja o diverja la integral

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$$

XIX **Serie de términos alternados**

57 Sean $a_k > 0, \forall k$. La expresión

$$a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+a_7-a_8+...+a_n-a_{n+1}+...$$

se denomina serie alternada.

58 El estudio de la convergencia de estas series es más sencillo que el correspondiente a las series de términos positivos. En efecto, en las series alternadas, si los términos son decrecientes y se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

la serie alternada es convergente.

59 Además y muy útil en la práctica, en las series alternadas, el error que se comete en la suma de la serie al considerar los n primeros términos es menor, en valor absoluto, que el primer término despreciado.

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$$

$$|S - S_n| \le |a_{n+1}|$$

XX Serie absolutamente convergente

60 Una serie se llama absolutamente convergente si es convergente la serie formada por los valores absolutos de los términos de la serie dada.

$$\sum_k a_k \quad converge \quad absolutamente \quad \Rightarrow \sum_k |a_k| \quad converge$$

Si la serie de valores absolutos, diverge, la serie dada le dice condicionalmente convergente.

XXI Sucesión de funciones

61 Una sucesión de funciones es una aplicación del conjunto N (o, a veces, N_0) en un conjunto U de funciones, de tal forma que, a cada número natural n le corresponde una y sólo una función denominada $u_n(x)$.

$$\{u_n(x)\} = \{u_1(x), u_2(x), u_3(x), \ldots, u_k(x), \ldots\}$$

Por ejemplo, la sucesión

$$\{x^n\} = \{x, x^2, x^3, x^4, x^5, \ldots, x^k, \ldots\}$$

Esta sucesión de funciones se transforma en sucesión numérica cuando se le asignan valores numéricos a x. Esa sucesión puede ser convergente o divergente.

62 Por ejemplo, la sucesión anterior en x = 1/2; en x = 1 y en x = 2 se transforma en las sucesiones numéricas:

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\right\}$$

$$\left\{1^n\right\} = \{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,\ldots\}$$

$$\left\{2^n\right\} = \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots\}$$

La primera es convergente a 0, la segunda es convergente a 1 y la tercera es divergente.

63 El conjunto de valores de x que hacen que las sucesiones numéricas resultantes sean convergentes, se denomina campo de convergencia de la sucesión de funciones.

64 Además, para todo x tomado en el campo de convergencia, la sucesión numérica resultante converge a un valor real. Queda así establecida una aplicación donde a cada x del campo de convergencia le corresponde un valor numérico, es decir **queda establecida una función.**

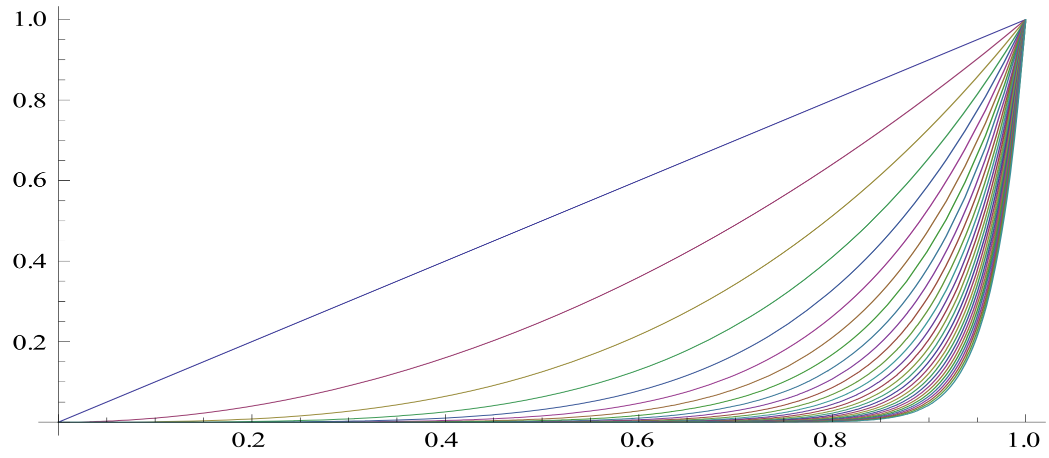
Se escribe

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$$

y debería estar claro que **una sucesión de funciones, cuando converge, converge a una función.**

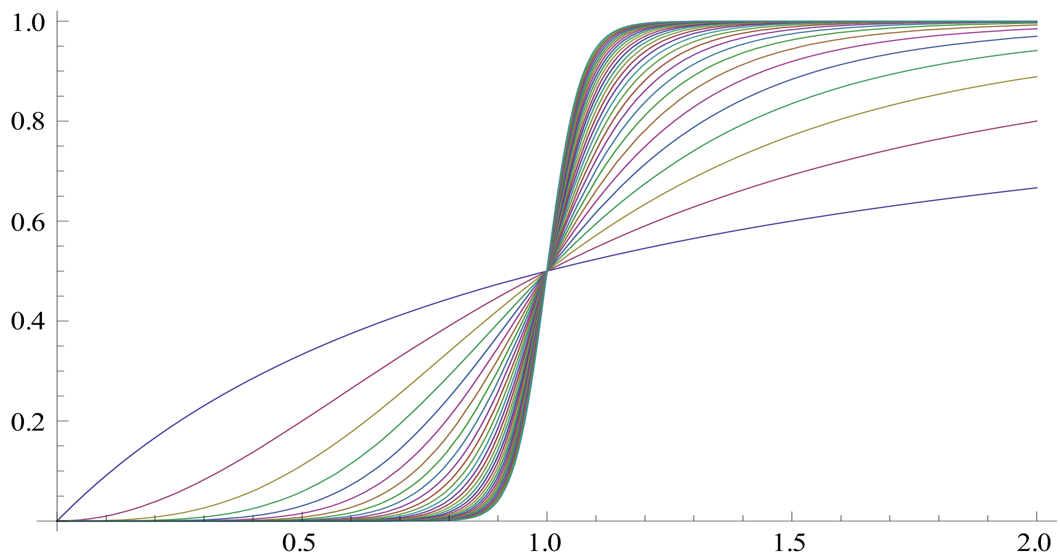
65 Por ejemplo, la sucesión $\{x^n\}$ converge en el intervalo [0,1] a la función

$$\{x^n\} \to u(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$



66 La sucesión $\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}$ converge en el intervalo $[0,\infty)$ a la función

$$\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\} \to u(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in [0,1) \\ \frac{1}{2} & x = 1 \\ 1 & \forall x \in (1,\infty) \end{cases}$$



67 Se observa que las sucesiones están formadas por funciones continuas pero que la función a la que convergen, en ciertos puntos, no son continuas.

68 Obsérvese que la influencia del intervalo en la que se realiza el estudio tiene un peso decisivo en esa materia. En efecto, si en el primer ejemplo se toma el intervalo [0,1) la sucesión converge a la función continua f(x) = 0 {ATENCIÓN: ¡la diferencia está en un paréntesis y en un corchete!}.

69 En el segundo ejemplo la convergencia es hacia la función continua f(x) = 0 en el intervalo [0,1) y hacia la función continua f(x) = 1 en el intervalo (1, ∞) {De nuevo, asunto de [y/o de)}

70 Este tipo de problemas requieren definir muy ajustadamente el significado del término "converge".

XXII Convergencia puntual

71 La sucesión de funciones $\{u_n(x)\}$ converge puntualmente a la función $u(x)$ si

$$|u_n(x) - u(x)| < \varepsilon,\ \ \varepsilon > 0 \qquad tomando \qquad n > N = N(\varepsilon, x)$$

Es decir, si la diferencia en valor absoluto entre el término genérico de la sucesión de funciones y la función límite se puede hacer tan pequeña como se quiera (ε) con tal de tomar el índice n mayor que un valor N que depende de ε **y del punto x** en el que se estudia la convergencia.

72 Por ejemplo, la sucesión de funciones $\{x^n\}$ en [0,1] converge a la función u(x) = 0 pero

$$|u_n(x) - u(x)| = \left|x^n - 0\right| < \varepsilon\,,\ \varepsilon > 0 \qquad \Rightarrow x^n < \varepsilon \qquad \Rightarrow n > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(x)} = N(\varepsilon, x)$$

Esto indica claramente que, cuanto más cerca se esté de 1, mayor será el valor del índice a partir del cual el término genérico satisfaga la desigualdad planteada.

En cambio, si el estudio se realiza en el intervalo [0,1) basta con tomar

$$n > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(1-\upsilon)} = N(\varepsilon), \qquad 0 < \upsilon < 1$$

para que, desde un **único** valor de n en adelante, e independientemente del punto considerado, simultáneamente en todos los puntos se satisfaga la desigualdad. Esto lleva, de manera natural al concepto de:

XXIII Convergencia Uniforme

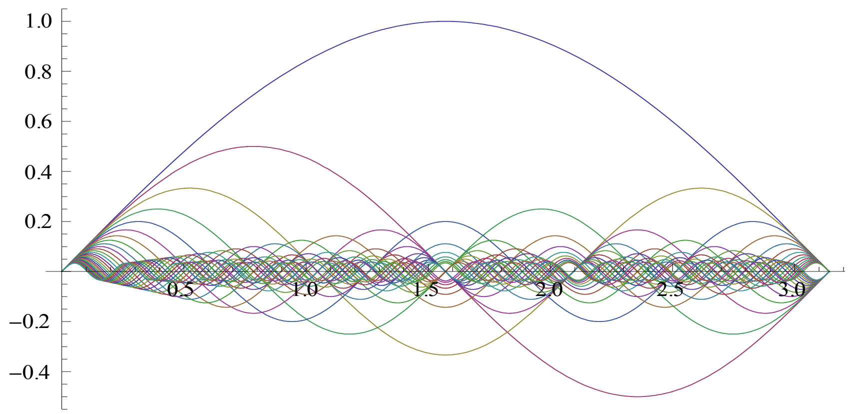
73 La sucesión de funciones $\{u_n(x)\}$ converge uniformemente a la función $u(x)$ si

$$|u_n(x)-u(x)|<\varepsilon,\varepsilon>0 \qquad tomando \qquad n>N=N(\varepsilon)$$

Es decir, si la diferencia en valor absoluto entre el término genérico de la sucesión de funciones y la función límite se puede hacer tan pequeña como se quiera (ε) con tal de tomar el índice n mayor que un valor N que depende solamente de ε **y no de x**. Y esto ocurre simultáneamente para todos los puntos del intervalo. Por lo tanto, la convergencia uniforme implica la convergencia puntual.

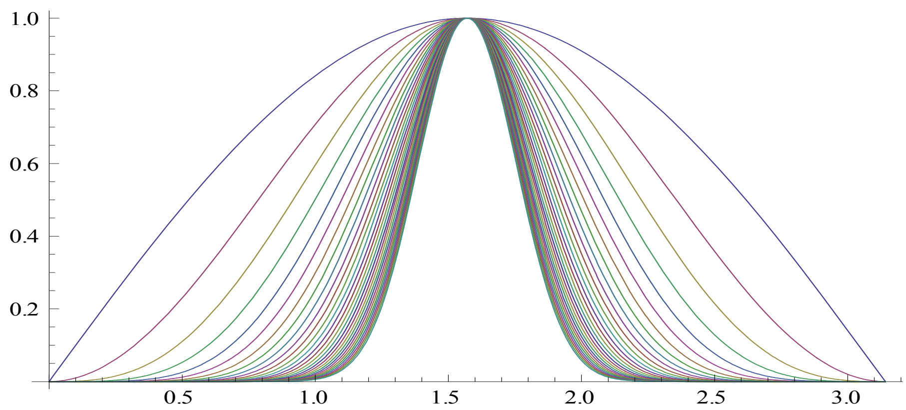
74 Por ejemplo, la sucesión $\left\{\frac{sen(nx)}{n}\right\}$ converge uniformemente a la función $f(x)\equiv 0$ en [0, π] como puede apreciarse en el gráfico siguiente.

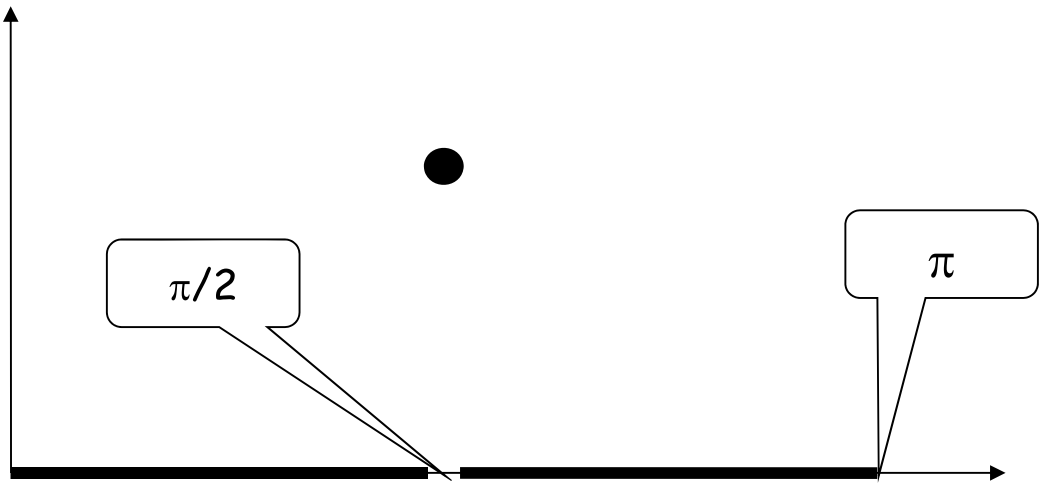
$$\left\{\frac{sen(nx)}{n}\right\}\underset{U}{\rightarrow}0$$



75 En cambio, la sucesión $\{sen^n(x)\}$ no converge uniformemente en ese intervalo, pero si lo hace en los intervalos [0, π/2); (π/2, π] y, en ellos converge

a la función $f(x) \equiv 0$. También en este caso, una representación gráfica ayuda a entender ese comportamiento.





76 Según el criterio de Cauchy, la convergencia es uniforme cuando

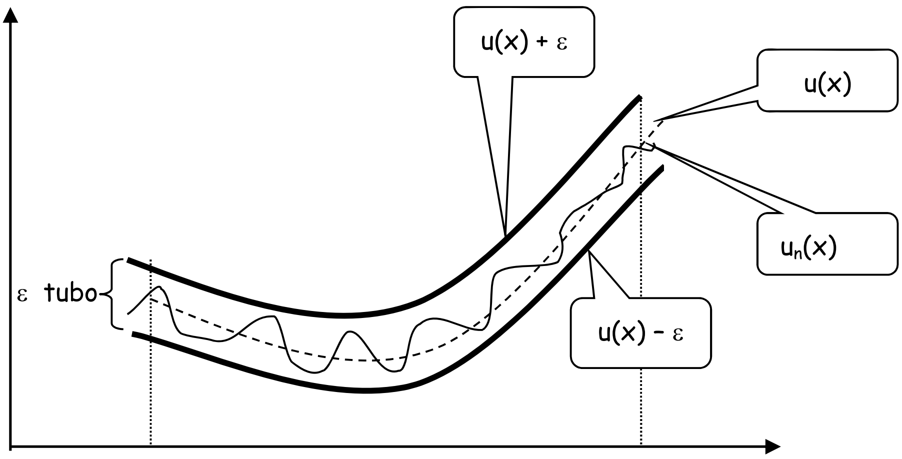
$$|u_n(x) - u_m(x)| < \varepsilon, \varepsilon > 0 \qquad n, m > N_0 = N(\varepsilon)$$

es decir, cuando la diferencia, en valor absoluto entre dos términos de la sucesión de funciones puede hacerse tan pequeña como se quiera con tal de tomarlos más allá de un valor de su índice que solo dependa de ε y no de x.
77 Según el criterio del supremo, la convergencia es uniforme cuando:

$$\lim_{n \to \infty} \{\sup \ [|u_n(x) - u(x)| \ ]\} = 0$$

es decir, si la más pequeña de las cotas superiores de la diferencia entre el término genérico de la sucesión y la función a la que esta converge tiende a cero.

78 Desde el punto de vista geométrico, la convergencia uniforme significa que, desde un cierto valor de n en adelante, cada uno de los términos de la sucesión de funciones se mantiene dentro de un ε-tubo construido con la función límite u(x) como guía o "eje".



79 Esta característica puede ser utilizada para analizar el tipo de convergencia de una sucesión de funciones. Por ejemplo, la sucesión ya tratada $\{sen^n(x)\}$ converge a la función

$$\{sen^n(x)\} \to u(x) = \begin{cases} 0 & [0, \frac{\pi}{2}) \\ 1 & x = \frac{\pi}{2} \\ 0 & (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

80 Si en intervalo [0, π] se traza una horizontal con ordenada 0 < ε < 1, el valor de la función correspondiente a x = π/2 (1) queda fuera del ε tubo construido con eje coincidente con el eje x . La convergencia no es uniforme en ese intervalo.

81 La convergencia uniforme permite demostrar que si las funciones $u_n(x)$ son continuas en el intervalo en el que se hace el estudio y además

$$\{u_n(x)\} \underset{U}{\rightarrow} u(x)$$

entonces $u(x)$ es una función continua.

XXIV **Serie de funciones**

82 Dada una sucesión de funciones $\{u_n(x)\}$ se forma a partir de ella una nueva sucesión de funciones, definida de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&S_1(x) = u_1(x) \\
&S_2(x) = u_1(x) + u_2(x) \\
&S_3(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n} u_k(x)
\end{aligned}$$

La sucesión de funciones $\{S_n(x)\}$ se denomina serie de funciones.

83 Si la sucesión $\{S_n(x)\}$ es convergente puntualmente se escribe:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

84 Si la sucesión $\{S_n(x)\}$ es uniformemente convergente, la serie de funciones es uniformemente convergente a la función f(x). Entonces:

$$|f(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| < \varepsilon$$

Cuando n > N(ε) simultáneamente para todo x en el intervalo en que se hace el estudio. En otros términos, la convergencia es uniforme si:

$$\sup_{a\le x\le b} |f(x) - S_n(x)| = \sup_{a\le x\le b} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \to 0 \qquad si \qquad n \to \infty$$

Test de convergencia uniforme

85 Una serie numérica $\sum_{k=1}^{\infty} m_k$ es una **serie dominante** de una serie de funciones $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ si $|u_k(x)| \le m_k, \forall k, \forall x \in [a,b]$.

Criterio M de Weierstrass

86 Si para una serie de funciones definida en [a,b] existe una serie dominante convergente, la serie de funciones converge uniformemente en el intervalo dado.

87 Por ejemplo, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{sen(kx)}{k^2}$ converge uniformemente en todo el eje real porque está dominada por la serie numérica convergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

XXV Serie de potencias

88 Las funciones más "sencillas", sin duda, son las funciones potenciales del tipo $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$. Una expresión de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

se denomina **serie de potencias**. El número real a_n es el coeficiente n-esimo y el punto x_0 es el centro del desarrollo. Por comodidad, dado que un cambio de variable lo permite, casi siempre se trabaja con $x_0 = 0$ con lo cual las series de potencias tienen este aspecto.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_k x^k + \ldots$$

89 En cierto sentido, parecen un polinomio de infinitos términos, pero hay que ser muy cuidadoso con este tipo de generalización porque unos cuantos problemas delicados deben ser aclarados antes de afirmarlo.

Se enuncian algunos de ellos:

- ¿Convergen las series de potencias?
- ¿A qué convergen?
- ¿Cual es el campo de convergencia de las series de potencias?
- ¿Qué tipo de convergencia tienen, puntual o uniforme?
- ¿Se pueden derivar como se puede derivar un polinomio?
- ¿Se pueden integrar como se puede integrar un polinomio?

90 Se trata a continuación de ir respondiendo estos -y tal vez otros interrogantes- relacionados con las series de potencias.

La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge en el intervalo I=(-1,1) dado que, por simple división resulta:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^n + ...$$

Cualquier valor de x $\in$ I, la serie **representa** a la función, es decir, su suma coincide con el valor de la función en ese punto.

Para x = 0 esto es obvio, para x = 0,5 resulta:

$$\frac{1}{0.5} = 1 + 0.5 + 0.5^2 + 0.5^3 + 0.5^4 + 0.5^5 + ... = 2$$

por ser serie geométrica de primer término 1 y razón q = 0.5.

91 En los extremos del intervalo el análisis debe ser más fino. En efecto, en x = -1 resulta:

$$\frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ... = (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + ... = 0$$

$$\frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ... = 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + ... = 1$$

92 ¿Qué resulta? Nuevas preguntas, como, por ejemplo ¿se puede aplicar la propiedad asociativa? En alguna época de la larga historia del estudio de las series, algunos cuyo nombre es mejor olvidar optaron por el promedio entre ambos "valores" y dictaminaron la convergencia a 1/2 ¡Asombroso!

En x = 1 resulta

$$\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + ...$$

de un lado, una expresión carente de sentido, del otro una serie divergente.

93 Fuera del intervalo, en x = 2, por ejemplo, aparece un valor perfectamente definido para la función y una serie divergente. La serie no representa a la función.

$$\frac{1}{1-2} = -1$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + ...$$

94 Otros ejemplos que serán oportunamente estudiados son la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ convergente en I= (-∞, ∞) y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$ convergente en un solo punto, $x_0 = 0$.

95 Algunas preguntas quedan contestadas: cuando convergen, las series de potencias convergen a una función, la convergencia se da **en un intervalo, en todo el eje real o en punto.**

Si convergen, la convergencia es uniforme

96 Por lo siguiente: sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ una serie de potencias convergente. Si se toma r ≥ 0 y es $(x\text{-}x_0)$ < r y la sucesión $a_n r^n$ está acotada, la serie es absolutamente convergente. En efecto:

$$0 \leq \left| a_n (x-x_0)^n \right| = \left| a_n \right| r^n \left(\frac{(x-x_0)^n}{r^n} \right) \leq M \left(\frac{(x-x_0)^n}{r^n} \right)$$

donde M es la cota. La serie $M\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(x-x_0)^n}{r^n} \right)$ es geométrica con razón q < 1 que opera como dominante convergente. Por el criterio M de Weierstrass la serie de potencias converge uniformemente.

97 En base a esto, se denomina Radio de Convergencia a:

$$R = \sup\left\{ |x - x_0| \,/\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = S \right\}$$

Si R > 0 el intervalo I = (x_0 - R, x_0 + R) se denomina Intervalo de Convergencia.

98 Entonces, resumiendo:

Cuando convergen, las series de potencias convergen a una función.

Las series de potencias convergen en un punto, en un intervalo finito o en un intervalo infinito.

En el intervalo de convergencia, la convergencia es uniforme.

Cálculo del radio de convergencia

99 Para calcular el radio de convergencia de una serie de potencias puede utilizarse la fórmula de Cauchy - Hadamard. (¡Cauchy, si nuevamente Cauchy!).

Para cada x $\in$ I = (x_0 - R, x_0 + R) la serie de potencias es una serie numérica convergente. Por serlo, debe ser

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n (x - x_0)^n|} < 1 \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|(x - x_0)| < 1$$

llamando $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ resulta que la serie es convergente en

$$|(x - x_0)| < R$$

Si R = 0, la serie converge en un punto y su suma es a_0.

Si R $\to \infty$ la serie converge en todo el eje real.

Si R es un número real cualquiera, la serie converge en (x_0 - R, x_0 + R).

100 Debe notarse especialmente que el radio de convergencia depende exclusivamente de los coeficiente numéricos de la serie y no de la variable de la misma.

101 Por ejemplo, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^k}{k!}+...$ converge en todo el eje real. Por lo siguiente:

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n!|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[2n]{2\pi n}}{e}\to\infty$$

en consecuencia, la serie converge en todo el eje real (se ha utilizado la fórmula de Stirling para aproximar el factorial)

102 En cambio, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}n!\,x^n=1+x+2!\,x^2+3!\,x^3+4!\,x^4+...+k!\,x^k+...$ solo converge en x_0 = 0, por lo siguiente:

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n!}\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^n}{n^n\sqrt{2\pi n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e}{n\sqrt[2n]{2\pi n}}=0$$

Si, en lugar del criterio de Cauchy se aplica el criterio de D'Alembert para el análisis de convergencia, el radio de convergencia resulta:

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

Derivación e integración de series de potencias.

103 Se pueden demostrar dos propiedades fundamentales de las series de potencias dentro de su campo de convergencia.

<u>Derivación</u>

Las series de potencias pueden ser derivadas término a término.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

aplicando en forma reiterada se tiene:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)...(n-k+1)(x-x_0)^{n-k}$$

Integración

Las series de potencias pueden ser integradas término a término

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b (x-x_0)^n \, dx$$

Las respectivas demostraciones hacen uso de la convergencia uniforme dentro del campo de convergencia.

104 Esto es extremadamente útil para encontrar algunas series de potencias. Por ejemplo, por simple división se tiene que, para $-1 < x < 1$.

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + x^{12} - ...$$

Integrando término a término se tiene:

$$arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13} - ...$$

en el mismo intervalo anterior $-1 < x < 1$.

Serie de Taylor

105 Se ha llegado, por fin, al punto donde se puede hacer la pregunta clave en este tema. Aquí va.

Dada una función infinitamente derivable en un intervalo ¿existe una serie de potencias que la represente?

Corresponde aclarar, **CON MAYÚSCULAS**, qué quiere decir que una serie **REPRESENTA A UNA FUNCIÓN.**

UNA SERIE DE POTENCIAS REPRESENTA A UNA FUNCIÓN, SIMPLEMENTE, CUANDO, PARA CADA PUNTO DEL CAMPO DE CONVERGENCIA, LA SUMA DE LA SERIE ES IGUAL AL VALOR DE LA FUNCIÓN EN ESE PUNTO.

Supóngase que esa serie existe. Entonces será:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + a_4(x - x_0)^4 + ...$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + ...$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} = 2a_2 + 3 * 2a_3(x - x_0) + 4 * 3a_4(x - x_0)^2 + ...$$

....

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1) a_n (x - x_0)^{n-k} = k(k-1)...2 * 1a_k + (k+1)k...2 * 1a_{k+1}(x - x_0) + ...$$

....

de estas igualdades se deduce que:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

106 De inmediato se tiende a pensar, con injustificado optimismo, que se puede escribir, sin más

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

pero el entusiasmo cae en picada cuando se considera, por ejemplo, la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

que tiene derivadas de todos los órdenes en el origen y ivalen cero (0)! (verificarlo). Entonces, la fórmula:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

sólo se cumple en $x_0 = 0$ y no hay aproximación a la función.

107 ¿Cuál es entonces, el problema?

El problema queda en evidencia cuando se escribe la serie de la siguiente manera:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Para que la serie de potencias represente a la función es necesario que

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \to 0 \qquad n \to \infty$$

como ya ha sido dicho y, para demostrar eso es necesario hacer lo siguiente:

108 Suponer la existencia de una función q(x) tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{q(x)}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1}$$

lo que equivale a decir que

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \frac{q(x)}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1}$$

109 Se crea una nueva función de la siguiente manera

$$F(\xi) = f(x) - \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n - \frac{q(x)}{(m+1)!}(x-\xi)^n =$$
$$f(x) - f(\xi) - \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) - \frac{f''(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 - \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-\xi)^3 - \dots - \frac{q(x)}{(m+1)!}(x-\xi)^{m+1}$$

pero esta función en $\xi = x_0$ y en $\xi = x$ vale 0. Por lo siguiente

$$F(x_0) = f(x) - \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n - \frac{q(x)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1} = 0$$

por la definición hecha al principio y en ξ = x

$$F(x) = f(x) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(x-x) - \frac{f''(x)}{2!}(x-x)^2 - \frac{f'''(x)}{3!}(x-x)^3 - \dots - \frac{q(x)}{(m+1)!}(x-x)^{m+1} = 0$$

110 Como la función es continua y vale 0 en los extremos del intervalo [x_0,x] en por lo menos un punto intermedio se debe cumplir el teorema de Rolle F'(c) = 0. Derivando queda

$$F'(\xi) = -f'(\xi) - \frac{f''(\xi)}{1!}(x-\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!} - \frac{f'''(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 + \frac{f''(\xi)}{2!}2(x-\xi) -$$
$$-\frac{f^{iv}(\xi)}{3!}(x-\xi)^3 + \frac{f'''(\xi)}{3!}3(x-\xi)^2 - \dots - \frac{f^{m+1}(\xi)}{m!}(x-\xi)^m + \frac{f^{m}(\xi)m}{m!}(x-\xi)^{m-1} + \frac{q(x)(m+1)}{(m+1)!}(x-\xi)^m$$

Igualando a cero queda

$$-\frac{f^{m+1}(\xi)}{m!}(x-\xi)^m + \frac{q(x)(m+1)}{(m+1)!}(x-\xi)^m = 0$$

de donde, en un punto intermedio μ será

$$q(x) = f^{m+1}(\mu)$$

Finalmente

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{m+1}(\mu)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}$$

si la derivada de orden m+1 está acotada es inmediato que, para m$\to\infty$

el segundo término del segundo miembro tiende a cero y entonces, ahora si

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

es el desarrollo en serie de potencias de la función f(x), desarrollo que se conoce como **Serie de Taylor** mientras que

$$\frac{f^{m+1}(\mu)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}$$

se conoce como **término complementario de Lagrange**.

Distintas formas de la Serie de Taylor

111 Se presentan a continuación distintas formas en que puede presentarse la Serie de Taylor

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{m}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(m+1)}(\mu)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}$$

La segunda forma, de fundamental importancia en las aplicaciones, como se verá más adelante.

Haciendo $x = x_0 + h$ resulta

$$f(x_0+h)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$$

$$f(x_0+h)=\sum_{n=0}^{m}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+\frac{f^{(m+1)}(\mu)}{(m+1)!}h^{m+1}=\sum_{n=0}^{m}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+O(h^{n+1})$$

$O(h^{n+1})$ representa un infinitésimo de orden n+1

112 Esta forma resulta muy útil para analizar el comportamiento de la función en un entorno de x_0. De hecho, el análisis completo de máximos,

mínimos y puntos de inflexión puede hacerse, con ventajas, con esta expresión. También es muy usada en cálculo numérico para establecer aproximaciones numéricas a las derivadas.

113 Una variante se presenta también en este caso cuando el término complementario de Lagrange se escribe en la forma de Cauchy

$$\frac{f^{(m+1)}(\mu)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1} = \frac{f^{(m+1)}(x_0+\theta h)}{(m+1)!}h^{m+1} \qquad 0<\theta<1$$

Cuando se toma $x_0 = 0$, se tiene la llamada Serie de Mc Laurin

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+...+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+O(x^{k+1})$$

donde $O(x^{k+1})$ indica un infinitésimo de orden k+1

114 Por ejemplo, para calcular el desarrollo en serie de Mc Laurin de la función y = sen (x) se debe hacer

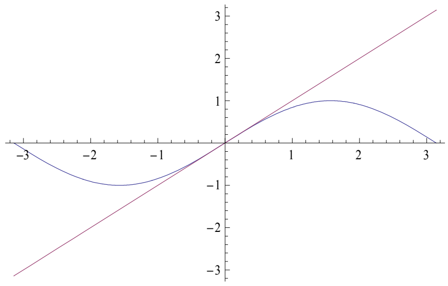
$$\begin{array}{ll}
f(x)=sen(x) & f(0)=0 \\
f'(x)=\cos(x) & f'(0)=1 \\
f''(x)=-sen(x) & f''(0)=0 \\
f'''(x)=-\cos(x) & f'''(0)=-1 \\
f''''(x)=sen(x) & f''''(0)=0 \\
f'''''(x)=\cos(x) & f'''''(0)=1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}$$

Entonces es (el término de séptimo grado ha sido afortunadamente estimado)

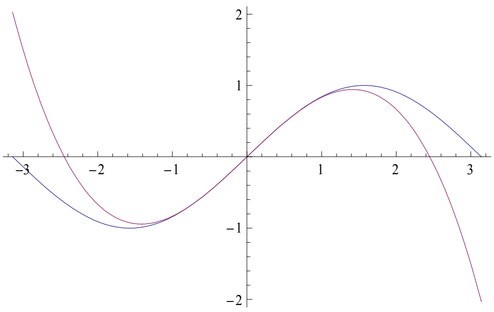
$$sen(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left.\dfrac{d^n sen(x)}{dx^n}\right|_{x=0}}{n!}x^n = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...$$

115 A continuación se representan gráficamente distintas aproximaciones a la función considerada mediante su desarrollo en serie de Mc Laurin a efectos de que se aprecie definitivamente el sentido conceptual de aproximación.

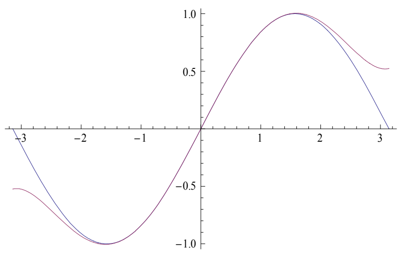
116 Aproximación de primer grado $\text{sen}(x) \cong x$. Se observa la coincidencia de valores en el entorno del origen. Recordar que, en ese punto ambas funciones son infinitésimos equivalentes.



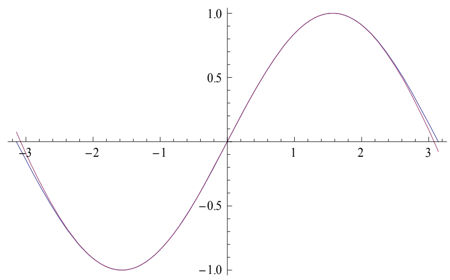
Aproximación de tercer grado $\text{sen}(x) \cong x - x^3/3!$. Se aprecia como el polinomio se adapta a la forma de la función senoidal. Más allá de $x = 1.2$ las diferencias son notorias y crecientes.



Aproximación de quinto grado $\text{sen}(x) \cong x - x^3/3! + x^5/5!$. La adecuación del polinomio a la función senoidal es cada vez mejor, notándose ahora discrepancias desde $x = 2$ en adelante.



Aproximación mediante el polinomio de séptimo grado $\text{sen}(x) \cong x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7!$. Las discrepancias son apreciables en los entornos de π y $-\pi$, pero "pequeñas"



117 Con el mismo procedimiento se pueden encontrar los siguientes desarrollos en serie de Mc Laurin

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = 1+\alpha x+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots |x|<1$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots \qquad |x|<1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots \qquad x\in R$$

$$sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots \qquad x\in R$$

$$\cos(x) = \sum\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots \qquad x\in R$$

$$arcsen(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1*3*5*\ldots*(2n-1)}{2*4*6*\ldots*2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\ldots |x|\le 1$$

$$arctg(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots |x|\le 1$$

(ya hallada por integración)

Análisis del error

118 En las aplicaciones es necesario estimar el error que se comete cuando, en lugar de la serie representativa de la función, se utiliza la suma de sus primeros m términos - conocida en ocasiones como polinomio de Taylor- más un resto.

El error es, en estos casos, una estimación de la cota del término complementario de Lagrange o de Cauchy.

119 Por ejemplo, la serie de Mc Laurin para e^x es

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in R$$

Siendo operativamente imposible trabajar con infinitos términos, se hace

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + T_5 = \sum_{n=0}^{4} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{4} \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\mu}}{5!} x^5 = \sum_{n=0}^{4} \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{5!} x^5$$

donde se ha escrito el término complementario según Lagrange y según Cauchy. Si se desea calcular el valor de e mediante el polinomio de cuarto grado escrito se toma x = 1 y resulta como cota del error

$$\left| \frac{e^{\mu}}{5!} 1^5 \right| < \frac{3}{120} = 0.025$$

Habiéndose estimado que, en todos los casos es e < 3

$$e \cong 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{67}{24} = 2,7916666...$$

con un decimal exacto.

Con un término más en la aproximación, la cota del error T_6 es 0.0041666... y, el valor aproximado es 2,7166666...

Operaciones con Series de Taylor y Mc Laurin

120 Dadas dos funciones cuyas respectivas series de potencias se conocen, las siguientes proposiciones son válidas

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \qquad f(kx)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n k^n x^n \qquad f(x^m)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{mn}$$

$$f(x)\pm g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$$

$$f(x)g(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n\right)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k \qquad c_k=\sum_{n+m=k}a_n b_m=\sum_{n=0}^{k}a_n b_{k-n}$$

Sólo han sido expuestas las propiedades para desarrollos de Mc Laurin porque mediante un adecuado cambio de variables los desarrollos de Taylor pueden llevarse a esa forma.

121 Esas propiedades habilitan, por ejemplo a calcular el desarrollo en serie de potencias de la función y = $sen^2(x)$ elevando al cuadrado la serie

$$sen^2(x)=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\dots\right)^2=x^2-\frac{2}{3!}x^4+\left[\frac{2}{5!}+\frac{1}{(3!)^2}\right]x^6-\dots$$

Las operaciones a realizar son pesadas, el término general es de difícil expresión y, por último, corresponde señalar que el campo de convergencia no necesariamente coincide con el de la o las funciones originales.

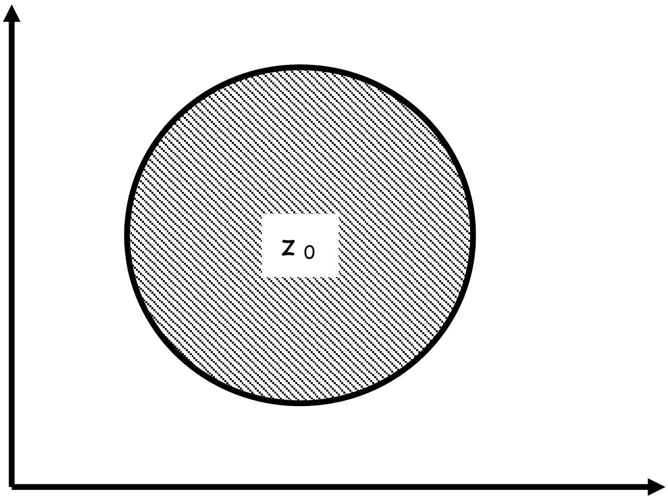
Series en el campo complejo

122 Si w = f(z) es una función de variable compleja, analítica en z_0, se verifica que

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\frac{f'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3+\dots$$

que se corresponde "mutatis mutandi" con el desarrollo en Serie de Taylor en variable real.

En este caso, la convergencia se da en un disco de centro z_0 y radio ρ, calculable mediante alguno de los criterios vistos para variable real

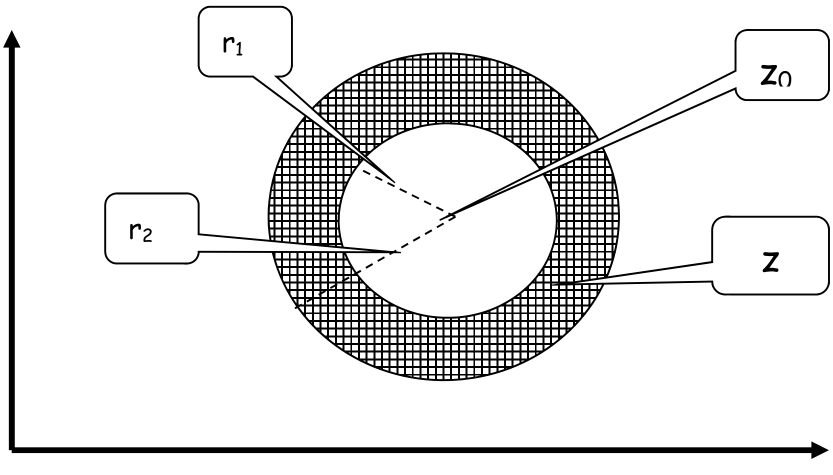


Se debe recordar que, en teoría de variable compleja es

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz$$

123 Si la función es analítica en la corona circular

$$r_1 \le |z - z_0| \le r_2$$



La serie, denominada Serie de Laurent toma la forma

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{(z-z_0)^k}$$

Donde los coeficientes valen

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\varepsilon)}{(\varepsilon-z_0)^{n+1}}d\varepsilon$$

$$b_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\varepsilon)}{(\varepsilon-z_0)^{-n+1}}d\varepsilon$$

$$n\in N$$

124 No se puede utilizar la fórmula de la integral de Cauchy para su cálculo porque z_0 está fuera de la zona de analiticidad de f(z), (al anillo circular del párrafo anterior) razón por la cual parecería que el cálculo de los coeficientes debe llevarse a cabo calculando las integrales consignadas.

Obviamente si bien es posible realizar ese cálculo, el trabajo puede llegar a ser ímprobo.

Felizmente un teorema de sencilla demostración permite establecer la unicidad del desarrollo de Laurent (Taylor), lo que significa que, cualquiera sea el procedimiento –válido naturalmente- para obtener un desarrollo en potencias positivas y negativas de $(z - z_0)$, lo obtenido será el desarrollo de Laurent (Taylor).

125 Por ejemplo, si se busca el desarrollo de Mc Laurin (Taylor en $z_0 = 0$) de $f(z) = e^{sen(z)}$ en lugar de plantear el cálculo de

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{e^{sen(z)}}{(z-z_0)^{k+1}}dz$$

de muy dudoso éxito, puede hacerse, suponiendo

$$u = sen(z)$$

$$e^{sen(z)} = e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \ldots + \frac{u^k}{k!} + \ldots$$

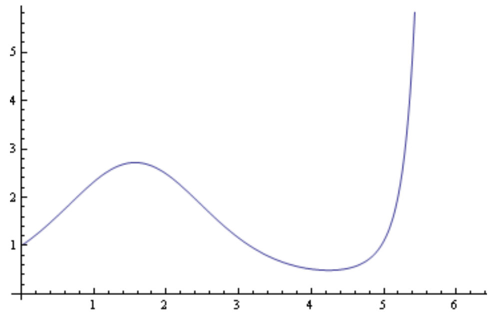
$$u = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots$$

$$e^{sen(z)} = 1 + \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots}{1!} + \frac{\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots\right)^2}{2!} + \frac{\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots\right)^3}{3!} + \ldots$$

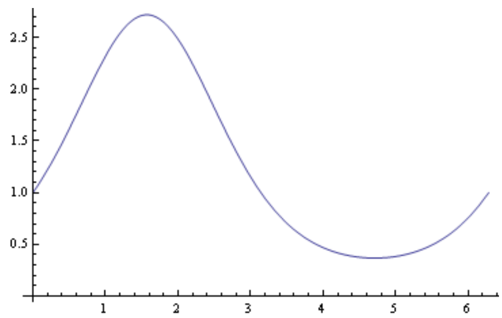
Se agregan a continuación gráficas correspondientes a la aproximación dada por la serie anterior; la de la función desarrollada y una superposición de las mismas.

La última de ellas permite una apreciación del grado de ajuste alcanzado entre la función y su correspondiente desarrollo en serie de potencias en un entorno del origen.

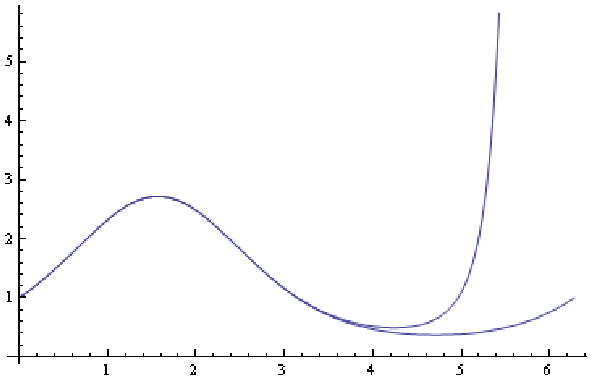
La representación gráfica de la serie de potencias.



La representación de la función



La superposición de ambas.



CAPITULO SEGUNDO

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de segundo orden. Puntos ordinarios. Solución mediante serie de potencias.

I INTRODUCCIÓN.

126 Sea la EDO de segundo orden

$$\frac{d^2w}{dz}+p(z)\frac{dw}{dz}+q(z)w=0$$

$$w(z_0)=w_0$$

$$w'(z_0)=w'_0$$

y z_0 un punto donde las funciones p(z) y q(z) son analíticas, es decir un punto donde existen y son convergentes las series de potencias:

$$p(z)=p_0+\frac{p_0'}{1!}(z-z_0)+\frac{p_0''}{2!}(z-z_0)^2+\frac{p_0'''}{3!}(z-z_0)^3+\frac{p_0''''}{4!}(z-z_0)^4+...+\frac{p^{(k)}{}_0}{k!}(z-z_0)^k+...$$

$$q(z)=q_0+\frac{q_0'}{1!}(z-z_0)+\frac{q_0''}{2!}(z-z_0)^2+\frac{q_0'''}{3!}(z-z_0)^3+\frac{q_0}{4!}(z-z_0)^4+...+\frac{q^{(k)}{}_0}{k!}(z-z_0)^k+..$$

127 Entonces, si la solución también es analítica en z_0, se puede plantear la solución de la EDO dada como una serie de potencias en $z-z_0$ escribiendo

$$w(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+a_3(z-z_0)^3+...+a_k(z-z_0)^k+...$$

Por ser las series de potencias uniformemente convergentes, esta se puede derivar término a término, obteniéndose

$$w'(z) = a_1 + 2a_2(z-z_0) + 3a_3(z-z_0)^2 + \ldots + ka_k(z-z_0)^{k-1} + \ldots$$

$$w''(z) = 2a_2 + 3.2a_3(z-z_0) + \ldots + k(k-1)a_k(z-z_0)^{k-2} + \ldots$$

128 Reemplazando en la EDO dada se tiene

$$2a_2 + 3.2a_3(z-z_0) + \ldots + k(k-1)a_k(z-z_0)^{k-2} + \ldots +$$
$$\left[p_0 + \frac{p_0'}{1!}(z-z_0) + \frac{p_0''}{2!}(z-z_0)^2 + \frac{p_0'''}{3!}(z-z_0)^3 + \frac{p_0''''}{4!}(z-z_0)^4 + \ldots + \frac{p^{(k)}{}_0}{k!}(z-z_0)^k + \ldots\right]$$
$$\left[a_1 + 2a_2(z-z_0) + 3a_3(z-z_0)^2 + \ldots + ka_k(z-z_0)^{k-1} + ..\right] +$$
$$\left[q_0 + \frac{q_0'}{1!}(z-z_0) + \frac{q_0''}{2!}(z-z_0)^2 + \frac{q_0'''}{3!}(z-z_0)^3 + \frac{q_0}{4!}(z-z_0)^4 + \ldots + \frac{q^{(k)}{}_0}{k!}(z-z_0)^k + ..\right]$$
$$\left[a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \ldots + a_k(z-z_0)^k + ..\right] = 0$$

Desarrollando los productos y agrupando se tiene, por ser nulo el segundo término

$$2a_2 + a_1p_0 + a_0q_0 = 0$$

$$3.2a_3 + a_1p_0' + 2a_2p_0 + a_1q_0 + a_0q_0' = 0$$

$$12a_4 + 3a_3p_0 + a_2q_0 + 2a_2p_0' + a_1q_0' + \frac{1}{2}a_1p_0'' + \frac{1}{2}a_0q_0'' = 0$$

$$20a_5 + 4a_4p_0 + a_3q_0 + 3a_3p_0' + a_2q_0' + a_2p_0'' + \frac{1}{2}a_1q_0'' + \frac{1}{6}a_1p_0''' + \frac{1}{6}a_0q_0''' = 0$$

$$5a_5p_0 + a_4q_0 + 4a_4p_0' + a_3q_0' + \frac{3}{2}a_3p_0'' + \frac{1}{2}a_2q_0'' + \frac{1}{3}a_2p_0''' + \frac{1}{6}a_1q_0''' + \frac{1}{24}a_1p_0'''' + \frac{1}{24}a_0q_0'''' = 0$$

$$a_5q_0 + 5a_5p_0' + a_4q_0' + 2a_4p_0'' + \frac{1}{2}a_3q_0'' + \frac{1}{2}a_3p_0''' + \frac{1}{6}a_2q_0''' + \frac{1}{12}a_2p_0'''' + \frac{1}{24}a_1q_0'''' + \frac{1}{120}a_1p_0''''' +$$
$$+ \frac{1}{120}a_0q_0''''' = 0$$

---

128 Siendo conocidas las p's y las q's corresponde despejar del sistema anterior los coeficientes a de la serie de potencias propuesta como solución de la ecuación diferencial dada. Debe tenerse especialmente en cuenta que, por tratarse de una EDO de segundo orden, el problema de valores iniciales requiere dos valores $w(z_0)=w_0 \quad w'(z_0)=w'_0$ como valores iniciales que llevados a la forma en que ha sido planteada la serie solución se corresponden con los valores $a_0 \quad y \quad a_1$ respectivamente.

129 Conocidos entonces estos valores, de la primera ecuación puede despejarse a_2

$$a_2 = \frac{-(a_0 q_0 + a_1 p_0)}{2}$$

Con a_2 conocido, de la segunda ecuación puede despejarse a_3, resultando

$$a_3 = \frac{-(a_1 p'_0 + 2a_2 p_0 + a_1 q_0 + a_0 q'_0)}{2*3} = \frac{-\left(a_1 p'_0 + 2\frac{-(a_0 q_0 + a_1 p_0)}{2} p_0 + a_1 q_0 + a_0 q'_0\right)}{6}$$

Apreciándose que este coeficiente sólo depende de a_0 y a_1.

130 De la siguiente ecuación puede despejarse a_4, obteniéndose

$$a_4 = -\frac{3a_3 p_0 + a_2 q_0 + 2a_2 p'_0 + a_1 q'_0 + \frac{1}{2} a_1 p''_0 + \frac{1}{2} a_0 q''_0}{12}$$

Reemplazando en esta última a_2 y a_3 por su expresión en función de a_0 y a_1 se tiene

$$a_4 = -\frac{3\left[\frac{-\left(a_1 p_0' + 2\frac{-(a_0 q_0 + a_1 p_0)}{2} p_0 + a_1 q_0 + a_0 q_0'\right)}{6}\right] p_0}{12} -$$

$$\frac{\left[\frac{-(a_0 q_0 + a_1 p_0)}{2}\right] q_0 + 2\left[\frac{-(a_0 q_0 + a_1 p_0)}{2}\right] p_0' + a_1 q_0' + \frac{1}{2} a_1 p_0'' + \frac{1}{2} a_0 q_0''}{12}$$

No se han efectuado simplificaciones. Simplemente se ha utilizado la posibilidad de intercalar expresiones ya calculadas al sólo fin de permitir la visualización de los coeficientes a_2, a_3, a_4, etc. en función de los dos valores iniciales a_0 y a_1.

Fácilmente se comprende lo laborioso de la tarea y cómo esta crece a medida que se calculan coeficientes de términos de mayor grado de la solución propuesta.

Asimismo y para facilitar los cálculos casi siempre se toma $z_0 = 0$ lo que no quita generalidad al tema puesto que un oportuno cambio de variables siempre puede llevar el origen a z_0.

131 En realidad corresponde encontrar, para cada caso particular las relaciones de recurrencia (del latín *recurrire*, volver al origen) que permiten el cálculo de los coeficientes del desarrollo en serie de la solución buscada en función de los ya calculados o de los dos primeros.

132 Por ejemplo, antes de generalizar el tema, se resuelve por este método, la EDO de variable real

$$y''(x) + y(x) = 0$$

Se toma $x_0 = 0$ y se plantea una solución del tipo

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^4 + a_4 x^5 + \ldots$$

Supuesta la convergencia de esta serie, la misma será uniforme dentro de su radio de convergencia, razón por la cual es posible calcular las siguientes derivadas

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \dots$$

$$y''(x) = \qquad 2a_2 + 3.2a_3x + 4.3a_4x^2 + 5.4a_5x^3 + \dots$$

133 Además, en este caso $p(x) = 0$ y $q(x) = 1$ ambas analíticas en un entorno del origen (ellas mismas son sus desarrollos en serie de potencias) con lo cual puede plantearse

$$2a_2 + 3.2a_3x + 4.3a_4x^2 + 5.4a_5x^3 + \dots a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^4 + a_4x^5 + \dots = 0$$

De donde

$$a_0 + 2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{2}$$

$$a_1 + 3.2a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = -\frac{a_1}{3.2}$$

$$a_2 + 4.3a_4 = 0 \Rightarrow a_4 = -\frac{a_2}{4.3} = \frac{a_0}{4.3.2}$$

$$a_3 + 5.4a_5 = 0 \Rightarrow a_5 = -\frac{a_3}{5.4} = \frac{a_1}{5.4.3.2}$$

Con lo cual puede escribirse

$$y(x) = a_0 + a_1x - \frac{a_0}{2}x^2 - \frac{a_1}{3.2}x^3 + \frac{a_0}{4.3.2}x^4 + \frac{a_1}{5.4.3.2}x^5 - \dots$$

Sacando factores comunes queda

$$y(x) = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots\right) + a_1\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots\right)$$

Obsérvese que las series entre paréntesis se corresponden con los desarrollos en serie de Mc Laurin de cos(x) y sen(x) respectivamente, lo que permitiría escribir

$$y(x) = a_0 \cos(x) + a_1 sen(x)$$

que evidentemente satisface a la ecuación diferencial propuesta dado que

$$y'(x) = -a_0 sen(x) + a_1 \cos(x)$$

$$y''(x) = -a_0 \cos(x) - a_1 sen(x)$$

y, en consecuencia

$$y''(x) + y(x) = -a_0 \cos(x) - a_1 sen(x) + a_0 \cos(x) + a_1 sen(x) = 0$$

134 Se generaliza ahora el tema enunciando el teorema de existencia correspondiente. El interesado en su demostración puede consultarla en el texto de INCE, DIFFERENTIAL EQUATIONS, Heliópolis, 1926

II TEOREMA FUNDAMENTAL

135 Sea la ecuación diferencial

$$w^{(n)} + p_1(z)w^{(n-1)} + p_2(z)w^{(n-2)} + p_3(z)w^{(n-3)} + \ldots + p_n(z)w = f(z)$$

lineal, de orden "n", no homogénea y $p_i(z), \quad i = 1, n$ y $f(z)$ analíticas en un intervalo I. Sea z_0 un punto de I. Entonces, la solución de la ecuación diferencial es analítica en I alrededor de z_0 y converge en I.

136 Este teorema establece que si

$$p_1(z) = p_{10} + p_{11}(z - z_0) + p_{12}(z - z_0)^2 + p_{13}(z - z_0)^3 + \ldots \qquad |z - z_0| < R$$

$$p_2(z) = p_{20} + p_{21}(z - z_0) + p_{22}(z - z_0)^2 + p_{23}(z - z_0)^3 + \ldots \qquad |z - z_0| < R$$

$$p_3(z) = p_{30} + p_{31}(z - z_0) + p_{32}(z - z_0)^2 + p_{33}(z - z_0)^3 + \ldots \qquad |z - z_0| < R$$

$$p_n(z) = p_{n0} + p_{n1}(z - z_0) + p_{n2}(z - z_0)^2 + p_{n3}(z - z_0)^3 + \ldots \qquad |z - z_0| < R$$

$$f(z) = f_0 + f_1(z - z_0) + f_2(z - z_0)^2 + f_3(z - z_0)^3 + \ldots \qquad |z - z_0| < R$$

Entonces la solución $w(z)$ es analítica en z_0 y se expresa $w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$

137 Lo dicho permite suponer que la solución de la ecuación diferencial propuesta es una serie de potencias y hallar sus coeficientes mediante el procedimiento propuesto en el ejemplo desarrollado.

138 Se trata ahora otro ejemplo: resolver la EDO

$$y'' + xy' + y = 0 \qquad x_0 = 0$$

En este caso las variables son reales y

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x \\ p_2(x) &= 1 \\ f(x) &= 0 \end{aligned}$$

Son funciones analíticas en $x_0 = 0$ ¿por qué?.
entonces se supone que la solución es de la forma

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Entonces, dentro del intervalo de convergencia será

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}$$

139 Reemplazando en la ecuación diferencial propuesta queda

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} + x\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

A continuación es necesario un trabajo de homogenización de los índices de las sumatorias. Obsérvese que la primera de ellas comienza desde k=2, la segunda desde k=1 y la tercera desde k=0.

140 Para ello se hace, en la primera $k = i + 2$ con lo que resulta

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1)a_{i+2} x^i$$

En la segunda se hace $k = i + 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)a_{i+1} x^{i+1}$$

mientras que, en la tercera sólo se cambia el índice.

141 Reemplazando, factoreando y agrupando queda

$$\sum_{i=o}^{\infty} \left\{ \left[(i+2)(i+1)a_{i+2} + a_i \right] x^i + (i+1)a_{i+1} x^{i+1} \right\} = 0$$

Por estar igualado a cero, los coeficientes de las distintas potencias de x deben ser nulos. Entonces

Coeficiente de x^0

$$2.1a_2 + a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{2}$$

Coeficiente de x

$$3.2a_3 + a_1 + a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = -\frac{a_1}{3}$$

Coeficiente de x^2

$$4.3a_4 + a_2 + 2a_2 = 0 \Rightarrow a_4 = -\frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{2.4}$$

Coeficiente de x^3

$$5.4a_5 + a_3 + 3a_3 = 0 \Rightarrow a_5 = -\frac{a_3}{5} = \frac{a_1}{3.5}$$

Coeficiente de x^4

$$6.5a_6 + a_4 + 4a_4 = 0 \Rightarrow a_6 = -\frac{a_4}{6} = -\frac{a_0}{2.4.6}$$

Coeficiente de x^5

$$7.6a_7 + a_5 + 5a_5 = 0 \Rightarrow a_7 = -\frac{a_5}{7} = -\frac{a_1}{3.5.7}$$

Este tedioso procedimiento puede continuarse para las siguientes potencias, pero lo hecho hasta este punto permite escribir, como solución de la ecuación diferencial propuesta

$$y(x)=a_0\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.4}-\frac{x^6}{2.4.6}+\ldots\right)+a_1\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{3.5}-\frac{x^7}{3.5.7}+\ldots\right)$$

$$y(x)=a_0y_0(x)+a_1y_1(x)$$

$$y_0(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.4}-\frac{x^6}{2.4.6}+\ldots$$

$$y_1(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{3.5}-\frac{x^7}{3.5.7}+\ldots$$

142 Corresponde ahora analizar la convergencia de las dos series obtenidas como solución a la ecuación diferencial propuesta. Para ello se aplica el criterio de D'Alembert para series de potencias de párrafo 105

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Esto a su vez requiere sea determinado el término general de las series en estudio.

En la primera de las mismas este término es de la forma (excluyendo el 1 inicial cuya presencia –o ausencia- no altera el carácter de la serie)

$$|a_n|=\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}2k}$$

De lo que resulta

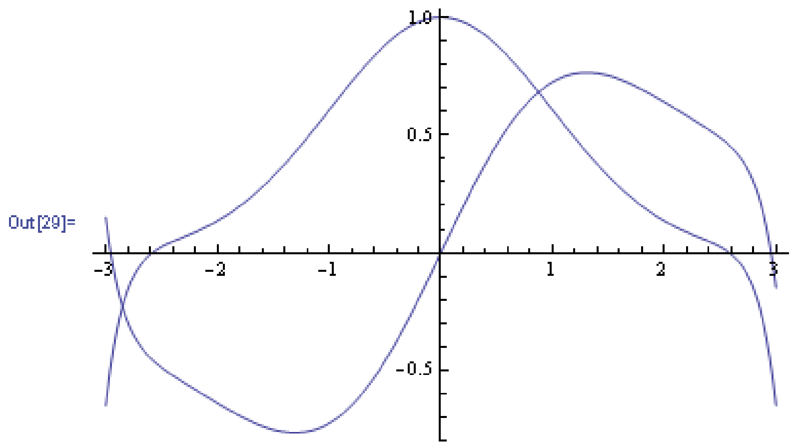
$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}2k}}{\frac{1}{\prod_{k=1}^{n+1}2k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n+1}2k}{\prod_{k=1}^{n}2k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n}2k}{\prod_{k=1}^{n}2k}2(n+1)=\lim_{n\to\infty}2(n+1)\to\infty$$

Lo que prueba que la primera serie hallada como parte de la solución es convergente en todo el eje real.

Algo completamente similar ocurre con la segunda de tal forma que puede decirse que se ha encontrado una solución a la ecuación diferencial propuesta, formada por dos funciones linealmente independientes $y_0(x)$ e $y_1(x)$ cuya combinación lineal constituye la solución general del problema planteado.

La solución particular se tendrá cuando, a partir de las condiciones iniciales sean determinadas a_0 y a_1

143 El siguiente gráfico representa las funciones $y_0(x)$ e $y_1(x)$

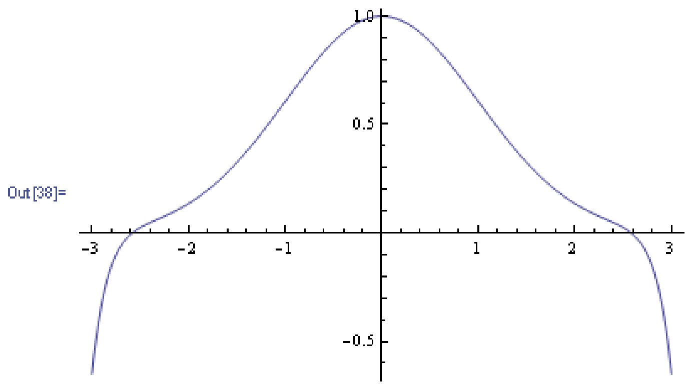


Donde resulta sencillo identificar la función par $y_0(x)$ y la impar $y_1(x)$.

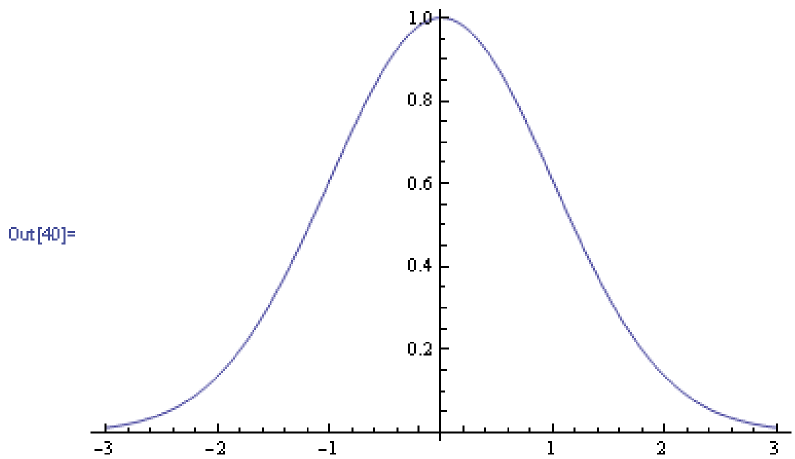
144 Para finalizar este ejemplo se eligen en forma arbitraria condiciones iniciales $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$ con lo que se obtiene la solución particular

$$y(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{384} - \frac{x^{10}}{3840} + \frac{x^{12}}{46080} - \frac{x^{14}}{645120} + \frac{x^{16}}{10321920} - \cdots$$

Cuya representación gráfica es la siguiente

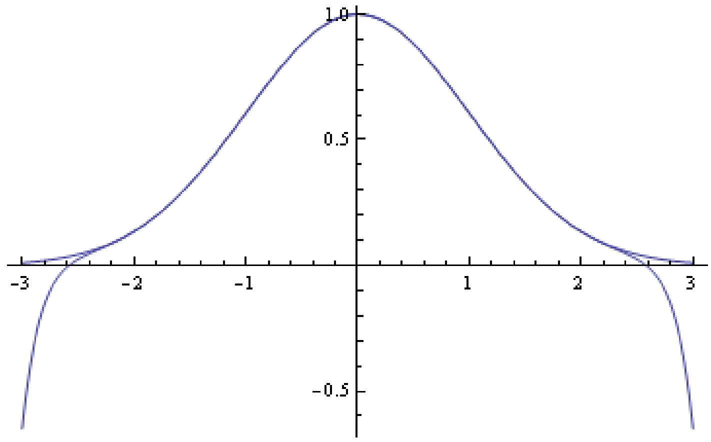


Para mejor apreciar la aproximación alcanzada, se resuelve el problema planteado mediante un método numérico y se obtiene



La superposición de ambos gráficos permite la mencionada apreciación, debiéndose tener en cuenta que los desarrollos adoptados como solución han sido hechos alrededor de $x = 0$ lo que asegura una buena aproximación en un cierto entorno de dicho punto, aproximación que se deteriora a medida que se produce un alejamiento del mismo.

Este hecho es perfectamente visible en el gráfico siguiente donde, fuera del intervalo (-2,2) se producen alejamientos entre ambas curvas.



III MATHEMATICA

145 Los recursos que pone a disposición MATHEMATICA evitan el muy pesado trabajo que implica resolver ecuaciones diferenciales mediante desarrollos en serie de potencias calculadas manualmente.

146 Una "receta" al efecto puede ser la siguiente:

1° Definir la serie que se supone es la solución de la EDO dada. Esto puede hacerse mediante el comando

```
Y[x_]:=Sum[a[i] x^i, {i, 0, n}]+O[x]^(n+1)
```

2° Definir la EDO por su expresión

```
e = y''[x] + x y'[x] + y[x] == 0
```

3° Mediante el comando LogicalExpand establecer las condiciones que deben cumplir los coeficientes de la EDO

```
c = LogicalExpand[ e ]
```

4° Resolver el sistema formado por el resultado del comando anterior, tomando como incógnitas todos los coeficientes a hallar en función de a_0 y a_1. Esto puede hacerse con el comando

```
coe = Solve[ c, Table[ a[i], {i, 2, n}]
```

5° Armar la solución y[x] colocando en la serie supuesta como solución los coeficientes recién calculados en función de a_0 y a_1

sol = y[x] /. coe

6° Quitar de la lista resultante, la solución de la EDO mediante el comando

sol = sol [[1]]

7° Hallar las dos series cuya combinación lineal constituye la solución general de la EDO.

Collect[sol, {a[0], a[1] }]

Estudiar la convergencia de cada una de ellas (en un papel, naturalmente)

8° Calcular la solución particular, e decir asignar valores a a_0 y a_1

solp = sol /. {a[0] -> a_0 , a[1] -> a_1 }

9° "Normalizar" La serie, eliminando el infinitésimo de orden n+1

solpn = Normal [solp]

A partir de ese momento del procesamiento se dispone de una serie de potencias (cuya convergencia habrá que estudiar) que, si es convergente en I podrá utilizarse como solución de la EDO en ese intervalo.

147 Para constatar la eficacia de la "receta" se resuelve nuevamente la ecuación diferencial anterior.

1°

```
In[1]:= y[x_] := Sum[a[i] x^i, {i, 0, 19}] + O[x]^20
```

2°

In[2]:= `e = y''[x] + x y'[x] + y[x] == 0`

Out[2]= $(a[0]+2a[2])+(2a[1]+6a[3])x+(3a[2]+12a[4])x^2+(4a[3]+20a[5])x^3+(5a[4]+30a[6])x^4+(6a[5]+42a[7])x^5+(7a[6]+56a[8])x^6+(8a[7]+72a[9])x^7+(9a[8]+90a[10])x^8+(10a[9]+110a[11])x^9+(11a[10]+132a[12])x^{10}+(12a[11]+156a[13])x^{11}+(13a[12]+182a[14])x^{12}+(14a[13]+210a[15])x^{13}+(15a[14]+240a[16])x^{14}+(16a[15]+272a[17])x^{15}+(17a[16]+306a[18])x^{16}+(18a[17]+342a[19])x^{17}+O[x]^{18}==0$

3°

In[3]:= `c = LogicalExpand[e]`

Out[3]= $a[0]+2a[2]==0\ \&\&\ 2a[1]+6a[3]==0\ \&\&\ 3a[2]+12a[4]==0\ \&\&\ 4a[3]+20a[5]==0\ \&\&\ 5a[4]+30a[6]==0\ \&\&\ 6a[5]+42a[7]==0\ \&\&\ 7a[6]+56a[8]==0\ \&\&\ 8a[7]+72a[9]==0\ \&\&\ 9a[8]+90a[10]==0\ \&\&\ 10a[9]+110a[11]==0\ \&\&\ 11a[10]+132a[12]==0\ \&\&\ 12a[11]+156a[13]==0\ \&\&\ 13a[12]+182a[14]==0\ \&\&\ 14a[13]+210a[15]==0\ \&\&\ 15a[14]+240a[16]==0\ \&\&\ 16a[15]+272a[17]==0\ \&\&\ 17a[16]+306a[18]==0\ \&\&\ 18a[17]+342a[19]==0$

4°

In[4]:= `coe = Solve[c, Table[a[i], {i, 2, 19}]]`

Out[4]= $\left\{\left\{a[2]\to-\frac{a[0]}{2},\ a[3]\to-\frac{a[1]}{3},\ a[4]\to\frac{a[0]}{8},\ a[5]\to\frac{a[1]}{15},\ a[6]\to-\frac{a[0]}{48},\ a[7]\to-\frac{a[1]}{105},\ a[8]\to\frac{a[0]}{384},\ a[9]\to\frac{a[1]}{945},\ a[10]\to-\frac{a[0]}{3840},\ a[11]\to-\frac{a[1]}{10395},\ a[12]\to\frac{a[0]}{46080},\ a[13]\to\frac{a[1]}{135135},\ a[14]\to-\frac{a[0]}{645120},\ a[15]\to-\frac{a[1]}{2027025},\ a[16]\to\frac{a[0]}{10321920},\ a[17]\to\frac{a[1]}{34459425},\ a[18]\to-\frac{a[0]}{185794560},\ a[19]\to-\frac{a[1]}{654729075}\right\}\right\}$

5°

In[5]:= `sol = y[x] /. coe`

Out[5]= $\left\{a[0]+a[1]x-\frac{1}{2}a[0]x^2-\frac{1}{3}a[1]x^3+\frac{1}{8}a[0]x^4+\frac{1}{15}a[1]x^5-\frac{1}{48}a[0]x^6-\frac{1}{105}a[1]x^7+\frac{1}{384}a[0]x^8+\frac{1}{945}a[1]x^9-\frac{a[0]x^{10}}{3840}-\frac{a[1]x^{11}}{10395}+\frac{a[0]x^{12}}{46080}+\frac{a[1]x^{13}}{135135}-\frac{a[0]x^{14}}{645120}-\frac{a[1]x^{15}}{2027025}+\frac{a[0]x^{16}}{10321920}+\frac{a[1]x^{17}}{34459425}-\frac{a[0]x^{18}}{185794560}-\frac{a[1]x^{19}}{654729075}+O[x]^{20}\right\}$

6°

In[6]:= `sol = sol[[1]]`

Out[6]= $a[0]+a[1]x-\frac{1}{2}a[0]x^2-\frac{1}{3}a[1]x^3+\frac{1}{8}a[0]x^4+\frac{1}{15}a[1]x^5-\frac{1}{48}a[0]x^6-\frac{1}{105}a[1]x^7+\frac{1}{384}a[0]x^8+\frac{1}{945}a[1]x^9-\frac{a[0]x^{10}}{3840}-\frac{a[1]x^{11}}{10395}+\frac{a[0]x^{12}}{46080}+\frac{a[1]x^{13}}{135135}-\frac{a[0]x^{14}}{645120}-\frac{a[1]x^{15}}{2027025}+\frac{a[0]x^{16}}{10321920}+\frac{a[1]x^{17}}{34459425}-\frac{a[0]x^{18}}{185794560}-\frac{a[1]x^{19}}{654729075}+O[x]^{20}$

7°

In[7]:= `Collect[sol, {a[0], a[1]}]`

$$\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{48}+\frac{x^8}{384}-\frac{x^{10}}{3840}+\frac{x^{12}}{46080}-\frac{x^{14}}{645120}+\frac{x^{16}}{10321920}-\frac{x^{18}}{185794560}\right)a[0]+$$
$$\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{15}-\frac{x^7}{105}+\frac{x^9}{945}-\frac{x^{11}}{10395}+\frac{x^{13}}{135135}-\frac{x^{15}}{2027025}+\frac{x^{17}}{34459425}-\frac{x^{19}}{654729075}\right)a[1]$$

8°

In[8]:= `solp = sol /. {a[0] → 1, a[1] → 0}`

Out[8]= $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{48}+\frac{x^8}{384}-\frac{x^{10}}{3840}+\frac{x^{12}}{46080}-\frac{x^{14}}{645120}+\frac{x^{16}}{10321920}-\frac{x^{18}}{185794560}+O[x]^{20}$

9°

`solpn = Normal[solp]`

$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{48}+\frac{x^8}{384}-\frac{x^{10}}{3840}+\frac{x^{12}}{46080}-\frac{x^{14}}{645120}+\frac{x^{16}}{10321920}-\frac{x^{18}}{185794560}$$

El resultado final es exitoso.

148 Se resuelve ahora la EDO $y''(t)+e^t y(t)=0$, con la complicación accesoria de tener que utilizar un desarrollo en serie de potencias para la exponencial e^t

Se supone una solución en serie de potencias con lo que, dentro del campo de convergencia, se tendrá $y(t)=\sum_{k=0}^{\infty} a_n t^n$

$$y'(t)=\sum_{k=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$

$$y''(t)=\sum_{k=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

y, además, se debe considerar la función exponencial mediante su desarrollo en serie de potencias $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ con lo cual la EDO propuesta queda

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) = 0$$

que puede escribirse

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} t^k + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right) = 0$$

Desarrollando según potencias crecientes de t el segundo término se tiene

Coeficiente de t^0	a_0
Coeficiente de t	$(a_0 + a_1)$
Coeficiente de t^2	$\left(\frac{a_0}{2!} + a_1 + a_2\right)$
Coeficiente de t^3	$\left(\frac{a_0}{3!} + \frac{a_1}{2!} + a_2 + a_3\right)$
…………………………….	……………………………….
Coeficiente de t^k	$\sum_{i=0}^{k} \frac{a_k}{(k-i)!}$

Con lo cual la EDO propuesta puede escribirse

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)(k+1)a_{k+2} + \sum_{i=0}^{k} \frac{a_k}{(k-i)!}\right] t^k = 0$$

De donde la relación de recurrencia será

$$a_{k+2} = -\frac{\sum_{i=0}^{k} \frac{a_k}{(k-i)!}}{(k+2)(k+1)}$$

149 Considerando algunos primeros términos, puede escribirse

$$a_2 = -\frac{\sum_{i=0}^{0} \frac{a_k}{(k-i)!}}{(0+2)(0+1)} = -\frac{a_0}{2}$$

$$a_3 = -\frac{\sum_{i=0}^{1} \frac{a_k}{(k-i)!}}{(1+2)(1+1)} = -\frac{a_0 + a_1}{3.2}$$

$$a_4 = -\frac{\sum_{i=0}^{2} \frac{a_k}{(k-i)!}}{(2+2)(2+1)} = -\frac{\frac{a_0}{2!} + \frac{a_1}{1!} + \frac{a_2}{0!}}{4.3} = -\frac{a_1}{4.3}$$

$$a_5 = \frac{1}{120}(3a_0 - 2a_1)$$

Con estos primeros coeficientes de la serie supuesta como solución puede escribirse

$$y(t) = a_0 + a_1 t - \frac{a_0}{2}t^2 - \frac{1}{6}(a_0 + a_1)t^3 - \frac{a_1}{12}t^4 + \frac{1}{120}(3a_0 - 2a_1)t^5 + \ldots$$

Agrupando se escribe

$$y(t) = a_0\left(1 - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{40} + \ldots\right) + a_1\left(t - \frac{t^3}{6} - \frac{t^4}{12} - \frac{t^5}{60} + \ldots\right)$$

Faltaría demostrar la convergencia de los dos series linealmente independientes que forman la solución general de la EDO planteada.

150 Siguiendo la "receta" anterior, se tiene

```
y[t_] := Sum[a[i] t^i, {i, 0, 9}] + O[t]^10

e = y''[t] + Series[Exp[t], {t, 0, 10}] y[t] == 0;

s = LogicalExpand[e]
```

$$a[0] + 2\,a[2] == 0 \,\&\&\, a[0] + a[1] + 6\,a[3] == 0 \,\&\&$$
$$\frac{a[0]}{2} + a[1] + a[2] + 12\,a[4] == 0 \,\&\&\, \frac{a[0]}{6} + \frac{a[1]}{2} + a[2] + a[3] + 20\,a[5] == 0 \,\&\&$$
$$\frac{a[0]}{24} + \frac{a[1]}{6} + \frac{a[2]}{2} + a[3] + a[4] + 30\,a[6] == 0 \,\&\&$$
$$\frac{a[0]}{120} + \frac{a[1]}{24} + \frac{a[2]}{6} + \frac{a[3]}{2} + a[4] + a[5] + 42\,a[7] == 0 \,\&\&$$
$$\frac{a[0]}{720} + \frac{a[1]}{120} + \frac{a[2]}{24} + \frac{a[3]}{6} + \frac{a[4]}{2} + a[5] + a[6] + 56\,a[8] == 0 \,\&\&$$
$$\frac{a[0]}{5040} + \frac{a[1]}{720} + \frac{a[2]}{120} + \frac{a[3]}{24} + \frac{a[4]}{6} + \frac{a[5]}{2} + a[6] + a[7] + 72\,a[9] == 0$$

```
c = Solve[s, Table[a[i], {i, 2, 9}]]
```

$$\Big\{\Big\{a[2] \to -\frac{a[0]}{2},\ a[3] \to \frac{1}{6}\,(-a[0] - a[1]),$$
$$a[4] \to -\frac{a[1]}{12},\ a[5] \to \frac{1}{120}\,(3\,a[0] - 2\,a[1]),$$
$$a[6] \to \frac{1}{720}\,(9\,a[0] + 2\,a[1]),\ a[7] \to \frac{16\,a[0] + 17\,a[1]}{5040},$$
$$a[8] \to \frac{7\,a[0] + 54\,a[1]}{40320},\ a[9] \to \frac{-87\,a[0] + 109\,a[1]}{362880}\Big\}\Big\}$$

```
y = y[t] /. c;

sg = y[[1]];

dos = Collect[sg, {a[0], a[1]}]
```

$$\left(1-\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{40}+\frac{t^6}{80}+\frac{t^7}{315}+\frac{t^8}{5760}-\frac{29\,t^9}{120\,960}\right)a[0]+\left(t-\frac{t^3}{6}-\frac{t^4}{12}-\frac{t^5}{60}+\frac{t^6}{360}+\frac{17\,t^7}{5040}+\frac{3\,t^8}{2240}+\frac{109\,t^9}{362\,880}\right)a[1]$$

```
sgn = Normal[sg]
```

$$a[0]-\frac{1}{2}t^2\,a[0]+\frac{1}{120}t^5\,(3\,a[0]-2\,a[1])+\frac{1}{6}t^3\,(-a[0]-a[1])+t\,a[1]-\frac{1}{12}t^4\,a[1]+\frac{1}{720}t^6\,(9\,a[0]+2\,a[1])+\frac{t^7\,(16\,a[0]+17\,a[1])}{5040}+\frac{t^8\,(7\,a[0]+54\,a[1])}{40\,320}+\frac{t^9\,(-87\,a[0]+109\,a[1])}{362\,880}$$

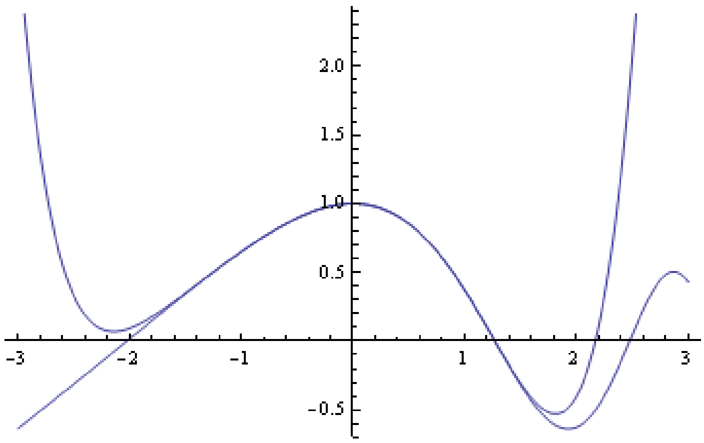
```
sgnp = sgn /. {a[0] → 1, a[1] → 0}
```

$$1-\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{40}+\frac{t^6}{80}+\frac{t^7}{315}+\frac{t^8}{5760}-\frac{29\,t^9}{120\,960}$$

Los valores de los coeficientes permiten suponer que la serie es convergente. Naturalmente una suposición NO DEMUESTRA NADA y tampoco NADA se sabe sobre el radio de convergencia, pero…

151 El siguiente gráfico representa la solución particular encontrada en el párrafo anterior y la correspondiente solución hallada por un método numérico. La coincidencia de valores en un intervalo centrado en el origen es significativa.

Out[14]=



CAPITULO TERCERO

Ecuaciones diferenciales ordinarias en puntos singulares regulares

152 Se estudia ahora la EDO homogénea $P(z)w'' + Q(z)w' + R(z)w = 0$.
Se definen:

z_0 es un punto ordinario si $P(z_0) \neq 0$

z_0 es un punto singular si $P(z_0) = 0$

z_0 es un punto singular regular si $P(z_0) = 0$ y $(z - z_0)\dfrac{Q(z)}{P(z)}$ y $(z - z_0)^2 \dfrac{R(z)}{P(z)}$ son analíticas en z_0

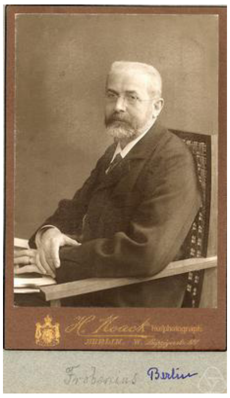
z_0 es un punto singular irregular sin las funciones mencionadas en el punto anterior no son analíticas en dicho punto.

Obsérvese que la analiticidad postulada requiere la existencia de

$$\lim_{x \to x_0} (z - z_0)\frac{Q(z)}{P(z)} = p_0 \qquad y \qquad \lim_{x \to x_0} (z - z_0)^2 \frac{R(z)}{P(z)} = q_0$$

153 En base a estas definiciones es claro que todas las ecuaciones consideradas en el capítulo segundo han sido solucionadas en puntos ordinarios.

154 **Ferdinand Georg Frobenius** (Charlottemburg 26 de octubre de 1849 Berlín 3 de agosto 1917) Matemático alemán reconocido por sus aportes a la teoría de las ecuaciones diferenciales y a la teoría de grupos; también por su profundización en el teorema de Cayley-Hamilton y su aporte al teorema planteado por Eugène Rouché llamado entonces teorema de Rouché-Frobenius.



Demostró que este tipo de EDO tiene una solución de la forma

$$w(z) = (z - z_0)^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad a_0 \neq 0$$

en un entorno de un punto singular regular, siendo r un valor a determinar.

155 Se advierte al lector que lo que sigue es decididamente pesado. Requiere una dosis muy grande de atención y paciencia para seguir los pasos algebraicos necesarios para el desarrollo del tema. Por ese motivo se recomienda respirar profundamente, retener el aire, animarse y ¡adelante!

156 Por supuesto, por simplicidad se toma $z_0 = 0$, entonces se puede escribir

$$P(z)w'' + Q(z)w' + R(z)w = 0$$

$$w'' + \frac{Q(z)}{P(z)}w' + \frac{R(z)}{P(z)}w = 0$$

Multiplicando por z^2 se tiene

$$z^2 w'' + z\left[\frac{zQ(z)}{P(z)}\right]w' + \left[\frac{z^2 R(z)}{P(z)}\right]w = 0$$

y se hace

$$p(z) = \frac{zQ(z)}{P(z)} \qquad q(z) = \frac{z^2 R(z)}{P(z)}$$

Siendo $p(z)$ y $q(z)$ analíticas en z_0 , por definición, puede escribirse

$$p(z)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \qquad q(z)=\sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n$$

con lo cual la EDO queda

$$z^2 w'' + z\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n\right)w' + \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n\right)w = 0$$

157 Siendo la solución propuesta de la forma $w = z^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r}$

con $a_0 \neq 0$.

Se calculan

$$w' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) z^{n+r-1} \qquad w'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) z^{n+r-2}$$

y, reemplazando en la EDO dada queda

$$z^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) z^{n+r-2} + z\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) z^{n+r-1}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r}\right) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) z^{n+r} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) z^{n+r}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r}\right) = 0$$

158 Como primer paso se escriben algunos primeros términos de cada una de las series involucradas en la segunda de las expresiones anteriores. Se tiene entonces

$$\begin{aligned}
&\left[a_0 r(r-1)z^r + a_1(r+1)rz^{r+1} + a_2(r+2)(r+1)z^{r+2} + \ldots + a_n(n+r)(n+r-1)z^{n+r} + \ldots\right] + \\
&\left(p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_n z^n + \ldots\right)\left[a_0 r z^r + a_1(r+1)z^{r+1} + a_2(r+2)z^{r+2} + \ldots + a_n(r+n)z^{r+n} + \ldots\right] + \\
&\left(q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \ldots + q_n z^n + \ldots\right)\left(a_0 z^r + a_1 z^{r+1} + a_2 z^{r+2} + \ldots + a_n z^{r+n} + \ldots\right) = 0
\end{aligned}$$

159 Multiplicando entre si las series y agrupando según potencias de z se tiene

$$[a_0 r(r-1) + a_0 p_0 r + a_0 q_0]z^r +$$
$$[a_1(r+1)r + a_1 p_0(r+1) + a_1 q_0 + a_0 q_1 + a_0 p_1 r]z^{r+1} +$$
$$[a_2(r+2)(r+1) + a_2 p_0(r+2) + a_1 p_1(r+1) + a_1 q_1 + a_0 p_2 r + q_2 a_0 + q_0 a_2 + a_1 p_1 + r a_1 p_1]z^{r+2} + ...$$
$$... + [a_n(n+r)(n+r-1) + a_0 p_n r + a_n p_0(r+n) + a_0 q_n + a_n q_0 + ...]z^{r+n} + ...$$

Esta última expresión puede ser escrita

$$a_0[r(r-1) + p_0 r + q_0]z^r +$$
$$\{a_1[r(r+1) + p_0(r+1) + q_0] + a_0(p_1 r + q_1)\}z^{r+1} +$$
$$\{a_2[(r+2)(r+1) + p_0(r+2) + q_0] + a_1[p_1(r+1) + q_1] + a_0(p_2 r + q_2)\}z^{r+2} + ...$$
$$\{a_n[(r+n)(r+n-1) + p_0(n+r) + q_0] + a_{n-1}[p_0(r+n) + q_0] + ... + a_1[p_{n-1}(r+1) + q_{n-1}] + a_0(p_n r + q_n)\}z^{r+n} +$$
$$... = 0$$

160 Se define ahora la función cuadrática

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0$$

con ella, la EDO se escribe

$$a_0 F(r) z^r + \left\{a_1 F(r+1) + \sum_{k=0}^{0} a_k [p_{1-k}(r+k) + q_{1-k}]\right\} z^{r+1} +$$
$$+ \left\{a_2 F(r+2) + \sum_{k=0}^{1} a_k [p_{2-k}(r+k) + q_{2-k}]\right\} z^{r+2} + ...$$
$$... + \left\{a_n F(r+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [p_{n-k}(r+k) + q_{n-k}]\right\} z^{r+n} + ... = 0$$

Esta última expresión puede ser escrita nuevamente con doble sumatoria, de la siguiente forma:

$$a_0 F(r) z^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{a_n F(r+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [p_{n-k}(r+k) + q_{n-k}]\right\} z^{r+n} = 0$$

LA ECUACION INDICIAL

Habiendo asumido que $a_0 \neq 0$ debe ser $F(r) = 0$, es decir

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

Esta ecuación se denomina ecuación indicial de la EDO propuesta. Como toda ecuación de segundo grado, esta tiene dos raíces que, en general, se suponen reales y distintas r_1 y r_2 tomando los subíndices de tal forma que $r_1 > r_2$ (o Re(r1)>Re(r2) si las raíces son complejas)

161 Siendo $F(r)=0$ necesariamente los coeficientes de las distintas potencias de z también deben serlo. Por lo tanto, debe cumplirse

$$a_n F(r+n)+\sum_{k=0}^{n-1} a_k \left[p_{n-k}(r+k)+q_{n-k}\right]=0$$

De donde, la relación de recurrencia es:

$$a_n(r)=-\frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k(r)\left[p_{n-k}(r+k)+q_{n-k}\right]}{F(r+n)}$$

donde se ha colocado explícitamente a la variable r como argumento de los coeficientes de los desarrollos en serie de potencias.

162 Como ha sido expresado la ecuación indicial, como toda ecuación de segundo grado, tiene dos raíces. En el problema en estudio los siguientes tres casos dan origen a distintas soluciones de la EDO propuesta.

- Raíces distintas que no difieren en un entero
- Raíces iguales
- Raíces distintas con $r_1 - r_2 = n$ siendo n un entero.

Se analizan a continuación cada uno de estos tres casos.

RAICES DISTINTAS QUE NO DIFIEREN EN UN ENTERO.

163 En este caso, el más sencillo de los tres, la solución general de la EDO propuesta será de la forma

$$w(z)=C_1\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1) z^{r_1+n}+C_2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2) z^{r_2+n}$$

Donde $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1)z^{r_1+n}$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2)z^{r_2+n}$ son funciones linealmente independientes soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden propuesta y C_1 y C_2 son las constantes de integración cuyos valores pueden ser hallados a través de las condiciones iniciales del problema.

164 Como ejemplo, a continuación se resuelve la EDO de segundo orden

$$2z^2 w'' + 3zw' - \left(z^2+1\right)w = 0$$

En ella

$$\begin{aligned} P(z) &= 2z^2 \\ Q(z) &= 3z \\ R(z) &= -\left(z^2+1\right) \end{aligned}$$

Verificándose que

$$\begin{aligned} & P(0) = 0 \\ & \lim_{z\to 0} \frac{zQ(z)}{P(z)} = \lim_{x\to 0} \frac{z.3z}{2z^2} = p_0 = \frac{3}{2} \\ & \lim_{z\to 0} -\frac{z^2\left(z^2+1\right)}{2z^2} = q_0 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Lo que indica que z=0 es un punto singular regular.

165 La ecuación indicial correspondiente es

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = r(r-1) + \frac{3}{2}r - \frac{1}{2} = r^2 + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$$

Las raíces son

$$r_{1,2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{4}{2}}}{2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}}}{2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}}{2} = \begin{cases} r_1 = \dfrac{1}{2} \\ r_2 = -1 \end{cases}$$

resultan distintas y no difieren en un entero.

En consecuencia, la solución general será de la forma

$$w(z)=C_1\sqrt{z}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r_1)z^n+C_2\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r_2)z^n$$

166 Corresponde determinar los coeficientes $a_n(r_1)$ y $a_n(r_2)$ Para ello se aplica la relación de recurrencia

$$a_n(r)=-\frac{\sum_{k=0}^{n-1}a_k(r)[p_{n-k}(r+k)+q_{n-k}]}{F(r+n)}$$

pero, para hacerlo es necesario desarrollar en serie de potencias en el entorno del origen a las funciones p(z) y q(z).

Teniendo en cuenta que su desarrollo en serie es

$$p(z)=p_0+p_1z+p_2z^2+p_3z^3+...=\frac{3}{2}+0z+0z^2+0z^3+...$$

y que

$$q(z)=-\frac{1}{2}-\frac{z^2}{2}$$

Resulta

$$q(z)=q_0+q_1z+q_2z^2+q_3z^3+...=-\frac{1}{2}+0z-\frac{z^2}{2}+0x+0z^3+0z^4+...$$

167 Se calculan a continuación los coeficientes de la serie correspondientes a la raíz $r_1=\frac{1}{2}$

$$a_1(r_1)=-\frac{a_0(r_1)\left[p_1\left(\frac{1}{2}+0\right)+q_1\right]}{\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+1-1\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)-\frac{1}{2}}=-\frac{a_0(r_1)\left[0\left(\frac{1}{2}+0\right)+0\right]}{\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+1-1\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)-\frac{1}{2}}=0$$

$$a_2(r) = -\frac{\sum_{k=0}^{1} a_k(r)\left[p_{n-k}(r+k)+q_{n-k}\right]}{F(r+n)} = -\frac{a_0(r_1)\left[p_2(r_1+0)+q_2\right]+a_1(r_1)\left[p_1(r_1+1)+q_1\right]}{(r_1+2)(r_1+2-1)+p_0(r_1+2)_1+q_0} =$$

$$= -\frac{a_0(r_1)\left[0\left(\frac{1}{2}+0\right)-\frac{1}{2}\right]+a_1(r_1)\left[0\left(\frac{1}{2}+1\right)+0\right]}{\left(\frac{1}{2}+2\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+2\right)-\frac{1}{2}} = -\frac{-\frac{1}{2}a_0(r_1)}{7} = \frac{a_0(r_1)}{14}$$

$$a_3(r_1) = -\frac{a_0(r_1)\left[p_3(r_1+0)+q_3\right]+a_1(r_1)\left[p_2(r_1+1)+q_2\right]+a_2(r_1)\left[p_1(r_1+2)+q_1\right]}{(r_1+3)(r_1+3-1)+\frac{3}{2}(r_1+3)-\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{a_0(r_1)\left[0\left(\frac{1}{2}+0\right)+0\right]+a_1(r_1)\left[0\left(\frac{1}{2}+1\right)-\frac{1}{2}\right]+a_2(r_1)\left[0\left(\frac{1}{2}+2\right)+0\right]}{\left(\frac{1}{2}+3\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+3\right)-\frac{1}{2}} = 0$$

$$a_4(r_1) = -\frac{a_0(r_1)\left[p_4\left(0+\frac{1}{2}\right)+q_4\right]+a_1(r_1)\left[p_3\left(1+\frac{1}{2}\right)+q_3\right]+a_2(r_1)\left[p_2\left(2+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\right]+a_3(r_1)\left[p_1\left(3+\frac{1}{2}\right)+q_1\right]}{\left(\frac{1}{2}+4\right)\left(\frac{1}{2}+4-1\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+4\right)-\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{-\frac{a_2(r_1)}{2}}{\frac{88}{4}} = \frac{a_0(r_1)}{616}$$

Con lo cual la primera solución puede comenzar a escribirse

$$w_1(z) = a_0(r_1)\sqrt{z}\left(1+\frac{z^2}{14}+\frac{z^4}{616}+\ldots\right)$$

168 Se hace lo propio para la raíz $r_2 = -1$

$$a_1(r_2) = -\frac{a_0(r_2)[p_1(0-1)+q_1]}{(-1)(-1-1)+\frac{3}{2}(-1)-\frac{1}{2}} = 0$$

$$a_2(r_2) = -\frac{a_0(r_2)[p_2(0-1)+q_2]+a_1(r_2)[p_1(1-1)+q_1]}{(2-1)(2-1-1)+\frac{3}{2}(2-1)-\frac{1}{2}} = -\frac{a_0(r_2)\left[p_2(0-1)+\left(-\frac{1}{2}\right)\right]+a_1(r_2)[p_1(1-1)+q_1]}{1} =$$

$$= \frac{a_0(r_2)}{2}$$

$$a_3(r_2) = -\frac{a_0(r_2)[p_3(r_2+0)+q_3]+a_1(r_2)[p_2(r_2+1)+q_2]+a_2(r_2)[p_1(r_2+2)+q_1]}{(r_2+3)(r_2+3-1)+\frac{3}{2}(r_2+3)-\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{a_0(r_2)[0(r_2+0)+0]+0[p_2(r_2+1)+q_2]+\frac{a_0(r_2)}{2}[0(r_2+2)+0]}{(-1+3)(-1+3-1)+\frac{3}{2}(-1+3)-\frac{1}{2}} = 0$$

$$a_4(r_2) = -\frac{a_0(r_2)[p_4(0-1)+q_4]+a_1(r_2)[p_3(1-1)+q_3]+a_2(r_2)\left[p_2(2-1)+\left(-\frac{1}{2}\right)\right]+a_3(r_1)[p_1(3-1)+q_1]}{(-1+4)(-1+4-1)+\frac{3}{2}(-1+4)-\frac{1}{2}} =$$

$$-\frac{a_0(r_2)[0(0-1)+0]+0[p_3(1-1)+q_3]+\frac{a_0(r_2)}{2}\left[0(2-1)+\left(-\frac{1}{2}\right)\right]+0[p_1(3-1)+q_1]}{3.2+\frac{3}{2}.3-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{a_0(r_2)}{40}$$

Con lo cual la segunda solución puede comenzar a escribirse

$$w_2(z) = a_0(r_2)\frac{1}{z}\left(1+\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{40}+\ldots\right)$$

169 Se han desarrollado los cálculos anteriores con todo detalle para evitar el cómodo y a la vez odioso "operando se llega a" y demostrar lo pesado que resulta aplicar la expresión de recurrencia oportunamente encontrada.

Obviamente el cálculo anterior es fácilmente programable mediante algún lenguaje algebraico hecho que, fuera de toda duda, simplifica en forma notable el procedimiento y, sobre todo, evita los casi siempre presentes errores del cálculo manual con expresiones tan complejas.

170 Asimismo se hace notar que en las expresiones resultantes aparecen dos $a_0(r)$ uno para cada una de las raíces de la ecuación indicial. Estas quedan incorporadas a las constantes arbitrarias de la solución general.

$$w(z) = C_1 w_1(z) + C_2 w_2(z) = C_1 \sqrt{z}\left(1 + \frac{z^2}{14} + \frac{z^4}{616} + \ldots\right) + C_2 \frac{1}{z}\left(1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{40} + \ldots\right)$$

Procedimiento alternativo

171 Existe una forma menos "pesada" de resolver este tipo de problemas (si es que ello es posible) consistente en aplicar al caso particular en estudio el procedimiento que fuera seguido al establecer la teoría correspondiente. Resulta así más fácil establecer relaciones de recurrencia.

172 Por ejemplo, siendo la EDO a resolver $2z^2 w'' + 3zw' - (1 + z^2)w = 0$ se hace

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r} \qquad w'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r) a_n z^{n+r-1} \qquad w''(z) = \sum (n + r)(n + r - 1) z^{n+r-2}$$

Y se reemplaza en la EDO dada, resultando

$$2z^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1) z^{n+r-2} + 3z \sum_{n=0}^{\infty} (n + r) a_n z^{n+r-1} - (1 + z^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r} = 0$$

$$2\sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1) z^{n+r} + 3\sum_{n=0}^{\infty} (n + r) a_n z^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r+2} = 0$$

A efectos de tener en todos los términos la misma potencia de z, se modifica el último término de la sumatoria anterior y, se escribe

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)z^{n+r}+3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n z^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{n+r}-\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}z^{n+r}=0$$

Los términos correspondientes a n = 0 y n = 1 se escriben por separado a fin de comenzar desde n = 2 en adelante. Resulta

$$a_0[2r(r-1)+3r-1]z^r+a_1[2(r+1)r+3(r+1)+1]z^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\{[2(n+r)(n+r-1)+3(n+r)-1]a_n-a_{n-2}\}z^{n+r}=0$$

Como $a_0 \neq 0$ debe ser $[2r(r-1)+3r-1]=0$ ecuación indicial, con las raíces ya obtenidas $r_1=\frac{1}{2}$ y $r_2=-1$. Con cualquiera de estas raíces el coeficiente de a_1 no se anula, razón por la cual debe ser $a_1=0$

La expresión encerrada entre llaves del último término debe ser nula, de donde se obtiene, luego de operar algebraicamente, la siguiente relación de recurrencia.

$$a_n=\frac{a_{n-2}}{2(n+r)^2+(n+r)-1}$$

Haciendo $r=\frac{1}{2}$ se tiene

$$a_n=\frac{a_{n-2}}{2n^2+3n}$$

y, haciendo $r=-1$ se tiene

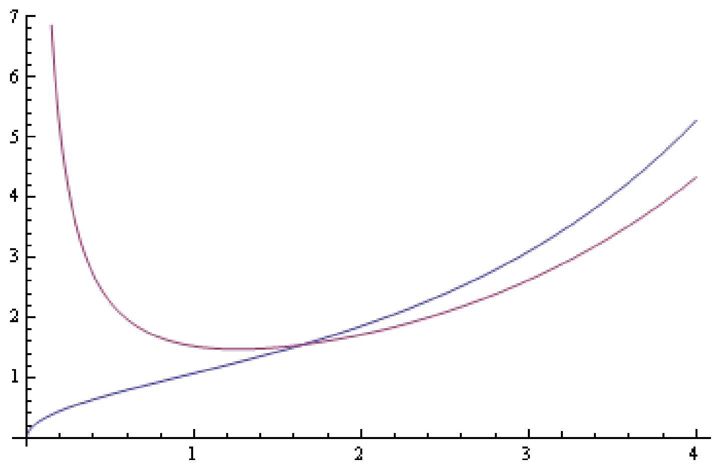
$$a_n=\frac{a_{n-2}}{2n^2-3n}$$

173 Con estas dos relaciones de recurrencia se encuentran de inmediato los coeficientes de las dos series solución del problema. Obsérvese que, por ser $a_1=0$ todos los coeficientes de índice impar son nulos.

$$w_1(z)=\sqrt{z}\left(1+\frac{z^2}{14}+\frac{z^4}{616}+\frac{z^6}{55440}+\dots\right)$$

$$w_2(z)=\frac{1}{z}\left(1+\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{40}+\frac{z^6}{2160}+\dots\right)$$

que coinciden con las halladas aplicando "canónicamente" la expresión de recurrencia general (excepto los términos correspondientes a potencias sextas).
Se agregan a continuación las gráficas de ambas expresiones.



174 Se ha obviado el estudio de la convergencia de las dos series halladas, haciendo la suposición que ambas son convergentes.

RAICES IGUALES

175 Si las dos raíces de la ecuación indicial son iguales $r_1 = r_2$ no hay problema en hallar la primera solución

$$w_1(z) = \sum_{n=0^\circ}^{\infty} a_n(r) z^{r+n}$$

aplicando alguno de los procedimientos vistos en el caso anterior.

Para hallar la segunda solución el tema se complica pues, al ser coincidentes las raíces, un segundo procedimiento de cálculo necesariamente deberá ser igual al primero. El camino evidentemente no lleva a ninguna parte.

176 Sin embargo la búsqueda de la segunda solución puede encararse de la siguiente forma.: si las raíces de la ecuación indicial son coincidentes es porque dicha ecuación toma la forma

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = (r - r_1)^2$$

y r_1 es una raíz doble. Y cuando esto ocurre, la raíz hallada es también raíz de la función derivada.

177 Entonces se considera que la expresión

$$a_0(r)F(r)z^r + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n(r)F(r+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(r)[p_{n-k}(r+k) + q_{n-k}]\right\}z^{r+n} = 0$$

es una función de la variable r cuya derivada con respecto a r también debe anularse en r_1

178 Ese cálculo produce, teniendo en cuenta que $a_0(r) = a_0$ es una constante no nula

$$a_0 F'(r)z^r + a_0 F(r)(\ln z)z^r + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n'(r)F(r+n) + a_n(r)F'(r+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k'(r)[p_{n-k}(r+k) + q_{n-k}] + a_k(r)p_{n-k}\right\}z^{n+r}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n(r)F(r+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(r)[p_{n-k}(r+k) + q_{n-k}]\right\}(\ln z)z^{n+r} = 0$$

Tomando como factor $\ln z$ se tiene

$$a_0 F'(r)z^r + (\ln x)\left\{a_0 F(r)z^r + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n(r)F(r+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(r)[p_{n-k}(r+k) + q_{n-k}]\right]z^{r+n}\right\} +$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n'(r)F(r+n) + a_n(r)F'(r+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k'(r)[p_{n-k}(r+k) + q_{n-k}] + a_k(r)p_{n-k}\right\}z^{r+n} = 0$$

Si en la expresión anterior se hace $r = r_1$ ocurre lo siguiente:

1º $F'(r_1) = 0$ por ser r_1 una raíz doble

2º La expresión entre llaves que tiene como factor a $\ln x$ es la EDO resuelta para $w_1(z)$. En consecuencia vale cero.

Queda entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n'(r)F(r+n)+a_n(r)F'(r+n)+\sum_{k=0}^{n-1}a_k'(r)\left[p_{n-k}(r+k)+q_{n-k}\right]+a_k(r)p_{n-k}\right\}z^{r+n}=0$$

Siendo $F'(r)=2r-1+p_0$ y $F'(r_1)=0$ resulta $F'(r_1+n)=2n$ y entonces

$$a_n'(r_1)F(r_1+n)+2na_n(r_1)+\sum_{k=0}^{n-1}a_k'(r)\left[p_{n-k}(r_1+k)+q_{n-k}\right]+a_k(r_1)p_{n-k}=0$$

Y, de esta última

$$a_n'(r_1)=-\frac{2na_n(r_1)+\sum_{k=0}^{n-1}a_k'(r_1)\left[p_{n-k}(r_1+k)+q_{n-k}\right]+a_k(r_1)p_{n-k}}{F(r_1+n)}$$

la relación general de recurrencia que permite calcular los coeficientes de una nueva serie.

179 Resulta así, como segunda solución cuando las raíces de la ecuación indicial son iguales

$$w_2(z)=w_1(z)\ln(z)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(r_1)z^{n+r_1} \qquad a_n'(r_1)=\left.\frac{da_n(r)}{dr}\right|_{r=r_1}$$

Donde la sumatoria comienza en n=1 dado que $a_0(r_1) = a_0$ constante y, en consecuencia $a'_0(r_1) = 0$

180 Se desarrolla a continuación un ejemplo en variable real. Documento ACM95b/100 b Lecture Notes – Caltech.

$$xy''+y'-y=0$$

$$P(x)=x \qquad p(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{1}{x} \qquad xp(x)=1$$

$$Q(x)=1 \qquad q(x)=\frac{R(x)}{P(x)}=-\frac{1}{x} \qquad x^2q(x)=-x$$

$$R(x)=-1$$

El origen es un punto singular regular. Las funciones $xp(x)$ y $x^2q(x)$ son analíticas en dicho punto.

181 En consecuencia, se busca una solución del tipo

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Derivando se tiene

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial propuesta, operando y agrupando se llega a la ecuación indicial

$$r(r-1) + r = 0$$

Esta ecuación de segundo orden tiene dos raíces iguales. Ambas valen 0.

182 En consecuencia se plantea la búsqueda de una primera solución de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial propuesta queda

$$xy'' + y' - y = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Cambiando el índice de las dos primeras sumatorias para trabajar con iguales potencias de x, se tiene

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)ka_{k+1}x^k+\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}\{a_{k+1}[(k+1)k+(k+1)]-a_k\}x^k=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\{a_{k+1}(k+1)^2-a_k\}x^k=0$$

De donde

$$a_{k+1}=\frac{a_k}{(k+1)^2}$$

$$a_1=\frac{a_0}{1}$$

$$a_2=\frac{a_1}{2^2}=\frac{a_0}{1.2^2}$$

$$a_3=\frac{a_2}{3^2}=\frac{a_0}{1.2^2.3^2}$$

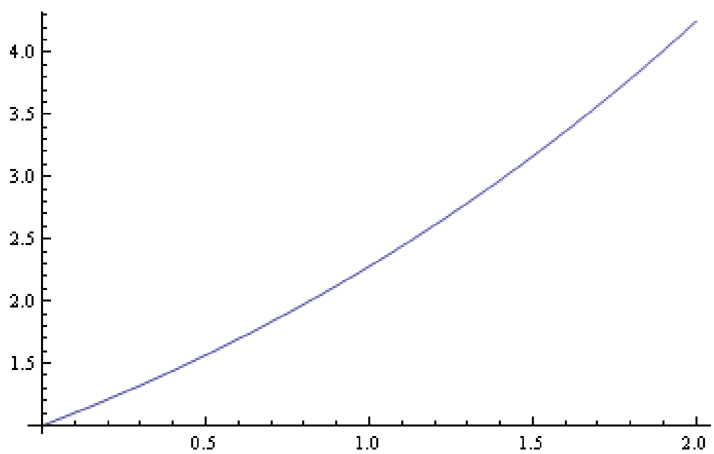
$$a_4=\frac{a_3}{4^2}=\frac{a_0}{1.2^2.3^2.4^2}$$

....

$$a_n=\frac{a_0}{(n!)^2}$$

Resulta finalmente

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}x^n=1+x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{36}x^3+\frac{1}{576}x^4+\dots$$



183 Habiendo encontrado la primera solución, la segunda, linealmente independiente de la primera, se obtiene mediante la expresión

$$y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_1)x^{n+r_1} \qquad a_n'(r) = \left.\frac{da_n(r)}{dr}\right|_{r=r_1}$$

Para evitar el cálculo de $a_n'(r) = \left.\frac{da_n(r)}{dr}\right|_{r=r_1}$ puede procederse mediante la sustitución

$$y = y_1(x)\ln(x) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k$$

De modo que

$$y' = \ln(x)\frac{dy_1(x)}{dx} + \frac{y_1(x)}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} kb_k x^{k-1}$$

$$y'' = \frac{1}{x}\frac{dy_1(x)}{dx} + \ln(x)\frac{d^2y_1(x)}{dx^2} + \frac{x\frac{dy_1(x)}{dx} - y_1(x)}{x^2} + \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)b_k x^{k-2}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial propuesta queda

$$x\left[\frac{1}{x}\frac{dy_1(x)}{dx} + \ln(x)\frac{d^2y_1(x)}{dx^2} + \frac{x\frac{dy_1(x)}{dx} - y_1(x)}{x^2} + \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)b_k x^{k-2}\right] + \ln(x)\frac{dy_1(x)}{dx} + \frac{y_1(x)}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} kb_k x^{k-1}$$

$$- y_1(x)\ln(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k = 0$$

Factoreando

$$\ln(x)\left[x\frac{d^2y_1(x)}{dx^2}+\frac{d\ y_1(x)}{dx}-y_1(x)\right]+\frac{dy_1(x)}{dx}+\frac{dy_1(x)}{dx}-\frac{y_1(x)}{x}+\frac{y_1(x)}{x}+$$

$$x\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)b_kx^{k-2}+\sum_{k=1}^{\infty}kb_kx^{k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}b_kx^k=0$$

El primer corchete es nulo puesto que es la ecuación diferencial dada con $y=y_1(x)$ primera solución. En definitiva queda

$$x\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)b_kx^{k-2}+\sum_{k=1}^{\infty}kb_kx^{k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}b_kx^k=-2\frac{dy_1(x)}{dx}$$

Siendo $y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}x^n=1+x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{36}x^3+\frac{1}{576}x^4+..$ resulta

$$\frac{dy_1(x)}{dx}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{144}x^3+...$$

Entonces, haciendo $k-1=n$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(n+1)nb_{n+1}x^n+\sum_{k=1}^{\infty}(n+1)b_{n+1}x^n-\sum_{k=1}^{\infty}b_{n+1}x^{n+1}=-2-x-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{72}x^3-.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(n+1)nb_{n+1}x^n+\sum_{k=1}^{\infty}(n+1)b_{n+1}x^n-\sum_{k=1}^{\infty}b_{n+1}x^{n+1}=-2-x-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{72}x^3-...$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2b_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}b_{n+1}x^{n+1}=-2-x-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{72}x^3-...$$

Desarrollando algunos términos se tiene

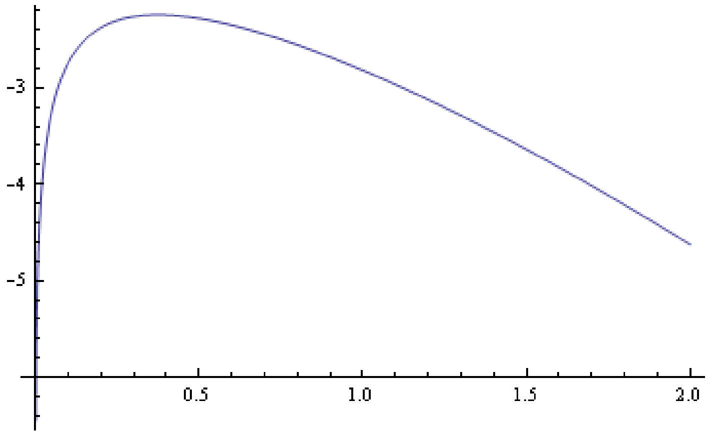
$$b_1-b_1x+4b_2x-b_2x^2+9b_3x^3-b_3x^4+...=-2-x-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{72}x^3-..$$

Y, de esta última

$$
\begin{aligned}
&b_1 = -2 && \\
&4b_2 - b_1 = -1 && \Rightarrow b_2 = -\frac{3}{4} \\
&9b_3 - b_2 = -\frac{1}{6} && \Rightarrow b_3 = \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{6}-\frac{3}{4}\right) = -\frac{11}{108} \\
&16b_4 - b_3 = -\frac{1}{72} && \Rightarrow b_4 = \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{72}-\frac{11}{108}\right) = -\frac{25}{3456} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &&
\end{aligned}
$$

En consecuencia, la segunda solución linealmente independiente es

$$y_2(x) = \left(1 + x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{36}x^3 + \frac{1}{576}x^4 + \dots\right)\ln(x) + \left(-2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{11}{108}x^3 - \frac{25}{3456}x^4 - \dots\right)$$



184 Al mismo resultado puede llegarse aplicando "canónicamente" lo demostrado por Frobenius, planteando la solución dependiendo de la variable de la ecuación diferencial propuesta, z en este caso, y de la raíz genérica r de la ecuación indicial; derivando luego la expresión resultante con respecto a la "variable" r y, por último, reemplazando r por el valor coincidente hallado.

En este caso la expresión es

$$y(x,r) = 1 + \frac{x}{(r+1)^2} + \frac{x^2}{(r+1)^2(r+2)^2} + \frac{x^3}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2} + \frac{x^4}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2(r+4)^2} + $$
$$+ \frac{x^5}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2(r+4)^2(z+5)^2} + \dots$$

Calculando la derivada parcial con respecto a r resulta

$$\frac{\partial y(z,r)}{\partial r}=-\frac{2x}{(r+1)^2}-\frac{2x^2}{(r+1)^2(r+2)^3}-\frac{2x^2}{(r+1)^3(r+2)^2}-\frac{2x^3}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^3}-$$
$$-\frac{2x^3}{(r+1)^2(r+2)^3(r+3)^2}-\frac{2x^3}{(r+1)^3(r+2)^2(r+3)^2}-\frac{2x^4}{(r+1)^3(r+2)^2(r+3)^2(r+4)^2}-$$
$$-\frac{2x^4}{(r+1)^2(r+2)^3(r+3)^2(r+4)^2}-\frac{2x^4}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^3(r+4)^2}-\frac{2x^4}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2(r+4)^3}-$$
$$-\frac{2x^5}{(r+1)^3(r+2)^2(r+3)^2(r+4)^2(r+5)^2}-\frac{2x^5}{(r+1)^2(r+2)^3(r+3)^2(r+4)^2(r+5)^2}-$$
$$-\frac{2x^5}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^3(r+4)^2(r+5)^2}-\frac{2x^5}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2(r+4)^3(r+5)^2}-$$
$$-\frac{2x^5}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2(r+4)^2(r+5)^3}$$

Haciendo ahora r = 0 resulta finalmente

$$\left.\frac{\partial y(x,r)}{\partial r}\right|_{r=0}=-2x-\frac{3}{4}x^2-\frac{11}{108}x^3-\frac{25}{3456}x^4-\frac{137}{432000}x^5-\ldots$$

De forma tal que combinada con $y_1(x)\ln(x)$ permite escribir como segunda solución linealmente independiente de la primera

$$y_2(x)=\left(1+x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{36}x^3+\frac{1}{576}x^4+\ldots\right)\ln(x)+\left(-2x-\frac{3}{4}x^2-\frac{11}{108}x^3-\frac{25}{3456}x^4-\frac{137}{432000}x^5-\ldots\right)$$

que coincide con la hallada anteriormente.

Queda por discutir cual de los dos caminos es más fácil o menos trabajoso. Conste que la derivada antes consignada fue calculada mediante MATHEMATICA así como lo fue su valor numérico para r = 0

Cualquiera de los dos caminos es una trampa especialmente montada para inducir un error, equivocarse y no llegar a nada.

RAICES QUE DIFIEREN EN UN ENTERO $r_1 - r_2 = m \qquad m \in N$

185 El caso en que las dos raíces de la ecuación indicial difieren en un entero es, tal vez, el más complejo de este tema, de por si complejo. La complejidad se aprecia al considerar la expresión general

$$a_n(r) = -\frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k(r)[p_{n-k}(r+k) + q_{n-k}]}{F(r+n)}$$

y observar que $F(r+n)$, cuando $r = r_2 \quad y \quad n = m$ se transforma en la "cola del escorpión" dado que $F(r+n) = F(r_2 + m) = F(r_1) = 0$ nada menos que un **¡denominador nulo!**

186 Naturalmente esto ocurre al buscar la segunda solución, dado que la primera

$$w_1(z) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1) z^n$$

se encuentra mediante el procedimiento ya desarrollado en los casos anteriores.

187 La segunda solución presenta dos alternativas.

1° La expresión $\sum_{k=0}^{n-1} a_k(r)[p_{n-k}(r+k) + q_{n-k}]$ es divisible por $r - r_2$ y, dado que $F(r)$ también lo es, la indeterminación queda salvada y es posible calcular mediante la fórmula de recurrencia los coeficientes $a_m(r_2), a_{m+1}(r_2), a_{m+3}(r_2),...$ de forma tal que la segunda solución sea $w_2(z) = z^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2) z^n$. Obsérvese que en este caso no existe factor logaritmo.

2° La expresión $\sum_{k=0}^{n-1} a_k(r)[p_{n-k}(r+k) + q_{n-k}]$ no es divisible por $r - r_2$.

En este caso es necesario el trabajo que se consigna en párrafos siguientes.

188 Conocida la primera solución $w_1(x)$ la segunda solución se puede buscar por dos métodos distintos. El primero de ellos utilizando el Wronskiano y el segundo mediante la técnica de derivación con respecto a r (Frobenius).

189 Se desarrolla a continuación el primero de los mencionados.

WRONSKIANO

190 Es un hecho conocido de la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales que las soluciones de una EDO lineal de segundo orden son linealmente independientes y que, por ese motivo el Wronskiano de las mismas debe ser distinto de cero en el intervalo de validez de las mismas.

$$W[w_1(z), w_2(z)] = W(z) = \begin{vmatrix} w_1(z) & w_2(z) \\ w_1'(z) & w_2'(z) \end{vmatrix} = w_1(z)w_2'(z) - w_2(z)w_1'(z) \neq 0$$

Derivando se tiene

$$W'(z) = w_1(z)w_2''(z) + w_1'(z)w_2'(z) - w_2'(z)w_1'(z) - w_1''(z)w_2(z) = w_1(z)w_2''(z) - w_1''(z)w_2(z)$$

Teniendo en cuenta que la EDO puede escribirse

$$w''(z) + p(z)w'(z) + q(z)w(z) = 0$$

Despejando de esta $w''(z)$ y reemplazando en la expresión del Wronskiano se tiene

$$W'(z) = -w_1(z)[p(z)w_2'(z) + q(z)w_2(z)] + w_2(z)[p(z)w_1'(z) + q(z)w_1(z)] =$$

$$= -p(z)[w_1(z)w_2'(z) - w_1'(z)w_2(z)] = -p(z)W(z)$$

De donde, resolviendo la EDO de primer orden $W'(z) = -p(z)W(z)$

$$W(z) = Ce^{-\int_0^z p(z)dz}$$

191 Teniendo la primera solución $w_1(z)$ el cálculo de la segunda puede buscarse de la siguiente forma:

Siendo

$$W(z) = w_1(z)w_2'(z) - w_2(z)w_1'(z)$$

Se dividen ambos miembros por $[w_1(x)]^2$ obteniéndose

$$\frac{W(z)}{w_1^2(z)} = \frac{w_2'(z)}{w_1(z)} - \frac{w_2(z)w_1'(z)}{w_1^2(z)} = \frac{w_2'(z)}{w_1(z)} - \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{w_1(z)}\right]w_2(z) = \frac{d}{dz}\left[\frac{w_2(z)}{w_1(z)}\right]$$

De esta última se obtiene

$$w_2(z) = w_1(z)\int_0^z \frac{W(z)}{w_1^2(z)}dz = w_1(z)\int_0^z \frac{e^{-\int_0^{zx} p(z)dz}}{w_1^2(z)}dz$$

Siendo esta última expresión la que permite el cálculo de $w_2(z)$. No puede dejar de mencionarse que $w_1(z)$ es una serie lo que permite imaginar qué es su cuadrado y después su inversa para, luego calcular la integral. Sencillamente horrible.

FROBENIUS

192 Se desarrolla a continuación el método de Frobenius aplicado a este caso.

193 Primero, se considera la ecuación diferencial $\frac{d^2w}{dz^2} + p(z)\frac{dw}{dz} + q(z)w = 0$ y se toma el operador $L = \frac{d^2}{dz^2} + p(z)\frac{d}{dz} + q(z) = 0$. Llamando $w(z,r)$ a la solución, deberá ser

$$L[w(z,r)] = a_0(r - r_1)(r - r_2)z^r$$

194 Esta expresión se anula para $r = r_1$ y $r = r_2$ pero para el segundo caso $r = r_2$ también se anula el denominador de la fórmula de recurrencia, -párrafo 185- hecho que no hace posible la búsqueda de la segunda solución linealmente independiente por este camino.

195 Sin embargo, el hecho que el operador L sólo contenga derivadas con respecto a la variable independiente z, hace que la expresión no sea afectada al ser multiplicado por expresiones en otra variable distinta de z, en particular la variable supuesta continua r.

196 Si se toma $L[(r-r_2)w(z,r)] = a_0(r-r_1)(r-r_2)^2 z^r$ también es solución de la ecuación diferencial propuesta pero no es una solución linealmente independiente de la primera.

197 Sin embargo, derivando con respecto a r se tiene

$$\frac{\partial}{\partial r}[L[(r-r_2)w(z,r)]] = L\left[\frac{\partial}{\partial r}[(r-r_2)w(z,r)]\right] =$$
$$= a_0(r-r_2)^2 z^r + 2a_0(r-r_1)(r-r_2)z^r + a_0(r-r_1)(r-r_2)z^r \ln(z)$$

Esta expresión es nula para $r = r_2$. Entonces también es una solución de la ecuación diferencial en estudio.

198 Entonces, cuando las raíces r_1 y r_2 difieren en un entero se tienen las soluciones linealmente independientes

$$w_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r_1}$$

$$w_2(z) = \frac{\partial}{\partial r}[(r-r_2)w_1(z)] = \mu w_1(z)\ln(z) + z^{r_2}\sum_{0}^{\infty} b_n z^n$$

199 A título de ejemplo se resuelven a continuación EDO que se corresponden con lo escrito.

200 La primera de ellas es la ecuación $z^2 w'' + zw' + \left(z^2 - \frac{1}{4}\right)w = 0$. El punto $z = 0$ es un punto singular regular puesto que en él $P(0) = 0$ y, luego de dividir la ecuación dada por z^2 se tiene

$$w'' + \frac{w'}{z} + \left(1 - \frac{1}{4z^2}\right)w = 0$$

y las funciones $p(z)=\frac{1}{z}$ y $q(z)=\left(1-\frac{1}{4z^2}\right)$ son analíticas en el origen al ser multiplicadas por z y z^2 respectivamente.

201 Se propone entonces una solución de la forma

$$w_1(z)=z^r\sum_0^\infty a_n z^n=\sum_0^\infty a_n z^{n+r}$$

reemplazando estos valores en la EDO propuesta queda

$$\sum_{n=0}^\infty a_n(n+r)(n+r-1)z^{n+r-2}+\sum_{n=0}^\infty a_n(n+r)z^{n+r-2}+\sum_{n=0}^\infty a_n z^{n+r}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^\infty a_n z^{n+r-2}=0$$

operando se llega a:

$$\sum\left[(n+r)^2-\frac{1}{4}\right]a_n z^{n+r-2}+\sum a_n z^{n+r}=0$$

202 Haciendo explícitos algunos primeros términos se escribe

$$\left(r^2-\frac{1}{4}\right)a_0 z^{r-2}+\left[(1+r)^2-\frac{1}{4}\right]a_1 z^{r-1}+\left[(2+r)^2-\frac{1}{4}\right]a_2 z^{r}+\left[(3+r)^2-\frac{1}{4}\right]a_3 z^{r+1}+\sum_{n=4}^\infty\left[(n+r)^2-\frac{1}{4}\right]a_n z^{n+r-2}$$
$$+a_0 z^r+a_1 z^{r+1}+a_2 z^{r+2}+a_3 z^{r+3}+\sum_{n=4}^\infty a_n z^{n+r}=0$$

dado que a_0 es distinto de cero, debe ser $r^2-\frac{1}{4}=0$. Esta es la ecuación indicial de la EDO planteada. Sus soluciones son $r_1=\frac{1}{2}$ $\quad r_2=-\frac{1}{2}$

203 Estas raíces difieren en el entero 1, razón por la cual la solución correspondiente a r_1 se puede obtener fácilmente (es una forma de decir) mientras que la segunda dependerá en que caso de los planteados esté el problema.

Observando que en el desarrollo anterior existe un solo término en potencias de z^{r-1} puede escribirse

$$\left[(1+r)^2-\frac{1}{4}\right]a_1=0 \qquad \rightarrow \qquad a_1=0$$

$$\left[(3+r)^2-\frac{1}{4}\right]a_3+a_1=0 \qquad \rightarrow a_3=0$$

$$\left[(5+r)^2-\frac{1}{4}\right]a_5+a_3=0 \qquad \rightarrow a_5=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left[(k+r)^2-\frac{1}{4}\right]a_k+a_{k-2}=0 \qquad \rightarrow a_k=0 \qquad k=7,9,11,13,\ldots$$

204 De la última expresión anterior puede plantearse la relación de recurrencia

$$a_k=-\frac{a_{k-2}}{\left[(k+r)^2-\frac{1}{4}\right]}$$

De aplicación para índices pares con lo que resulta para la raíz $r_1=\frac{1}{2}$

$$a_k=-\frac{a_{k-2}}{\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]}=-\frac{a_{k-2}}{k(k+1)}$$

De donde

$$a_2=-\frac{a_0}{2.3}$$

$$a_4=-\frac{a_2}{4.5}=\frac{a_0}{5.4.3.2}$$

$$a_6=-\frac{a_4}{6.7}=-\frac{a_0}{7.6.5.4.3.2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{2j}=(-1)^j\frac{a_0}{(2j+1)!}$$

Con lo cual la primera solución es

$$w_1(z) = \sqrt{z}\sum_0^{\infty}(-1)^j \frac{z^{2j}}{(2j+1)!} = \sqrt{z}\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \frac{z^8}{9!} - \ldots\right)$$

Donde no se ha escrito a_0 por haberlo supuesto igual a uno.

205 Para el cálculo de la segunda solución se parte del supuesto que la misma es de la forma

$$w_2(z) = \frac{\partial}{\partial r}\left[(r - r_2)w_1(z)\right] = \mu w_1(z)\ln(z) + z^{r_2}\sum_0^{\infty} b_n z^n$$

según se ha establecido en el párrafo 198.

206 Para la determinación de los coeficientes b, se calculan la primera y segunda derivada de w_2, se reemplaza en la EDO dada y se buscan relaciones de recurrencia que permitan el cálculo de dichos coeficientes en función de los dos primeros.

207 Se agrega el cálculo mencionado

$$\begin{aligned}
w_2 &= \mu w_1 \ln(z) + z^{r_2}\sum_0^{\infty} b_k z^k \\
w_2' &= \mu w_1' \ln(z) + \mu w_1' \frac{1}{z} + \frac{d}{dz}\left(z^{r_2}\sum_0^{\infty} b_k z^k\right) \\
w_2'' &= \mu w_1'' \ln(z) + \mu w_1' \frac{1}{z} + \mu w_1'' \frac{1}{z} - \mu w_1' \frac{1}{z^2} + \frac{d^2}{dz^2}\left(z^{r_2}\sum_0^{\infty} b_k z^k\right) = \\
&= \mu w_1'' \ln(z) + 2\mu\frac{w_1'}{z} - \mu\frac{w_1}{z^2} + \frac{d^2}{dz^2}\left(z^{r_2}\sum_0^{\infty} b_k z^k\right)
\end{aligned}$$

reemplazando estos valores en la EDO dada resulta

$$\mu w_1'' \ln(z) + 2\mu\frac{w_1'}{z} - \mu\frac{w_1}{z^2} + \frac{d^2}{dz^2}\left(z^{r_2}\sum_0^{\infty} b_k z^k\right) + \frac{1}{z}\left[\mu w_1' \ln(z) + \mu w_1 \frac{1}{z} + \frac{d}{dz}\left(z^{r_2}\sum_0^{\infty} b_k z^k\right)\right] +$$
$$+\left(1 - \frac{1}{4z^2}\right)\left(\mu w_1 \ln(z) + z^{r_2}\sum_0^{\infty} b_k z^k\right) = 0$$

sacando factores comunes y cancelando términos queda

$$\mu \ln(z)\left[w_1'' + \frac{w_1'}{z} + \left(1 - \frac{1}{4z^2}\right)w_1\right] + 2\mu\frac{w_1'}{z} +$$
$$+\left[\frac{d^2}{dz^2}\left(z^{r_2}\sum_0^\infty b_k z^k\right) + \frac{1}{z}\frac{d^2}{dz^2}\left(z^{r_2}\sum_0^\infty b_k z^k\right) + \left(1 - \frac{1}{4z^2}\right)\frac{d^2}{dz^2}\left(z^{r_2}\sum_0^\infty b_k z^k\right)\right] = 0$$

Como w_1 es solución de la EDO dada, el primer corchete es nulo mientras que el segundo corresponde a la aplicación del operador

$$L = \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d}{dz} + \left(1 - \frac{1}{4z^2}\right)$$

A la expresión $z^{r_2}\sum_0^\infty b_k z^k$ de esa forma resulta finalmente

$$L\left[z^{r_2}\sum_0^\infty b_k z^k\right] = L\left[z^{-\frac{1}{2}}\sum_0^\infty b_k z^k\right] = -2\frac{\mu w_1'}{z}$$

208 Aplicando el operador L se obtiene

$$\frac{3}{4}z^{-\frac{5}{2}}\sum_0^\infty b_k z^k - \frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}\sum_0^\infty k b_k z^{k-1} - \frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}\sum_0^\infty k b_k z^{k-1} + z^{-\frac{1}{2}}z^{-\frac{3}{2}}\sum_0^\infty k(k-1)b_k z^{k-2} +$$
$$+\frac{1}{z}\left(-\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}\sum_0^\infty b_k z^k + z^{-\frac{1}{2}}\sum_0^\infty k b_k z^{k-1}\right) + \left(1 - \frac{1}{4z^2}\right)\sum_0^\infty b_k z^k = 0$$

Sacando factor común

$$z^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{3}{4}\sum_0^\infty b_k z^k - \frac{1}{2}\sum_0^\infty b_k z^k - \frac{1}{4}\sum_0^\infty b_k z^k\right) +$$
$$+ z^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{1}{2}\sum_0^\infty k b_k z^{k-1} - \frac{1}{2}\sum_0^\infty k b_k z^{k-1} + \sum_0^\infty k b_k z^{k-1}\right) +$$
$$+ z^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_0^\infty k(k-1)z^{k-2} + \sum_0^\infty b_k z^k\right) = 0$$

Los dos primeros paréntesis se anulan, razón por la cual todo se reduce a

$$z^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{0}^{\infty}k(k-1)z^{k-2}+\sum_{0}^{\infty}b_k z^k\right)=0$$

Escribiendo algunos primeros términos queda finalmente

$$2.1b_2 z^{-\frac{1}{2}}+2.3b_3 z^{\frac{1}{2}}+3.4b_4 z^{\frac{3}{2}}+4.5b_5 z^{\frac{5}{2}}+\ldots+b_0 z^{-\frac{1}{2}}+b_1 z^{\frac{1}{2}}+b_2 z^{\frac{3}{2}}+b_3 z^{\frac{5}{2}}+\ldots=$$
$$(2b_2+b_0)z^{-\frac{1}{2}}+(6b_3+b_1)z^{\frac{1}{2}}+(12b_4+b_2)z^{\frac{3}{2}}+(20b_5+b_3)z^{\frac{5}{2}}+\ldots$$

209 Trabajando ahora con el segundo miembro de la igualdad

$$L\left[z^{-\frac{1}{2}}\sum_{0}^{\infty}b_k z^k\right]=-2\frac{\mu w_1'}{z}$$

Resulta

$$-2\frac{\mu}{z}w_1'=-2\frac{\mu}{z}\left(-\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}\sum_{0}^{\infty}b_k z^k+z^{-\frac{1}{2}}\sum_{0}^{\infty}kb_k z^{k-1}\right)=\mu\left(z^{-\frac{5}{2}}\sum_{0}^{\infty}b_k z^k-2z^{-\frac{3}{2}}\sum_{0}^{\infty}kb_k z^{k-1}\right)$$

Desarrollando primeros términos queda

$$\mu\left(z^{-\frac{3}{2}}-\frac{5}{3!}z^{\frac{1}{2}}+\frac{9}{5!}z^{\frac{5}{2}}-\frac{13}{7!}z^{\frac{9}{2}}+..\right).$$

210 Igualando

$$(2b_2+b_0)z^{-\frac{1}{2}}+(6b_3+b_1)z^{\frac{1}{2}}+(12b_4+b_2)z^{\frac{3}{2}}+(20b_5+b_3)z^{\frac{5}{2}}+\ldots=\mu\left(z^{-\frac{3}{2}}-\frac{5}{3!}z^{\frac{1}{2}}+\frac{9}{5!}z^{\frac{5}{2}}-\frac{13}{7!}z^{\frac{9}{2}}+..\right).$$

Tomando coeficientes de potencias iguales de z puede escribirse el sistema

$$\begin{aligned}
&\mu = 0 \\
&2b_2 + b_0 = 0 \\
&6b_3 + b_1 = -\frac{5}{6}\mu = 0 \\
&12b_4 + b_2 = 0 \\
&20b_5 + b_3 = \frac{9}{120}\mu = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

De donde puede afirmarse que la segunda solución no tiene término logarítmico y que los coeficientes b_k pueden hallarse calculando

$$\begin{aligned}
2b_2 + b_0 = 0 \quad &\rightarrow \quad b_2 = -\frac{b_0}{2} \\
6b_3 + b_1 = 0 \quad &\rightarrow \quad b_3 = -\frac{b_1}{6} \\
12b_4 + b_2 = 0 \quad &\rightarrow \quad b_4 = -\frac{b_2}{12} = \frac{b_0}{24} \\
20b_5 + b_3 = 0 \quad &\rightarrow \quad b_5 = -\frac{b_3}{20} = \frac{b_1}{120}
\end{aligned}$$

211 Por fin puede escribirse como segunda solución de la EDO dada

$$w_2 = z^{-\frac{1}{2}}\left[b_0 \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} + b_1 \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \right]$$

Como b_1 es arbitrario puede tomarse nulo, con lo cual resulta

$$w_2(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}\left[b_0 \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \right]$$

La solución general es entonces

$$w(z) = C_1\sqrt{z}\sum_0^\infty (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} + C_2\frac{1}{\sqrt{z}}\left[\sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}\right]$$

las constantes a_0 y b_1 se han consolidado en las constantes de integración C_1 y C_2 respectivamente. Por supuesto, el valor de estas constantes depende de las condiciones iniciales del problema en consideración y/o del problema físico en tratamiento. No debe olvidarse que se trata de ecuaciones diferenciales de segundo orden, problema de valores iniciales, cuya solución general depende de los valores de la función solución y de su derivada en un punto z_0.

212 Se desarrolla a continuación un segundo ejemplo. Se trata de resolver la ecuación

$$zw'' + w = 0$$

para la que se propone una solución del tipo

$$w = z^r\sum_0^\infty a_n z^n = \sum_0^\infty a_n z^{n+r}$$

cuyas derivadas son

$$w' = \sum_0^\infty (n+r)a_n z^{n+r-1}$$
$$w'' = \sum_0^\infty (n+r)(n+r-1)a_n z^{n+r-2}$$

213 Introduciendo estos valores en la ecuación propuesta queda

$$z\sum_0^\infty (n+r)(n+r-1)a_n z^{n+r-2} + \sum_0^\infty a_n z^{n+r} = 0$$
$$\sum_0^\infty (n+r)(n+r-1)a_n z^{n+r-1} + \sum_0^\infty a_n z^{n+r} = 0$$

escribiendo el primer término y agrupando queda

$$r(r-1)a_0 z^{r-1} + \sum_1^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n z^{n+r-1} + \sum_0^{\infty} a_n z^{n+r} = 0$$

$$r(r-1)a_0 z^{r-1} + \sum_1^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n z^{n+r-1} + \sum_1^{\infty} a_{n-1} z^{n+r-1} =$$

$$r(r-1)a_0 z^{r-1} + \sum_1^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1)a_n + a_{n-1}\right] z^{n+r-1} = 0$$

214 El primer término contiene la ecuación indicial, que se escribe a continuación junto a sus raíces

$$r(r-1) = 0$$
$$r_1 = 1$$
$$r_2 = 0$$

que difieren en un entero

215 Asimismo, el corchete de la última expresión debe ser nulo, entonces

$$(n+r)(n+r-1)a_n + a_{n-1} = 0$$

De donde se deduce que

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{(n+r)(n+r-1)}$$

Y, de esta última para r=1

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{(n+1)n}$$

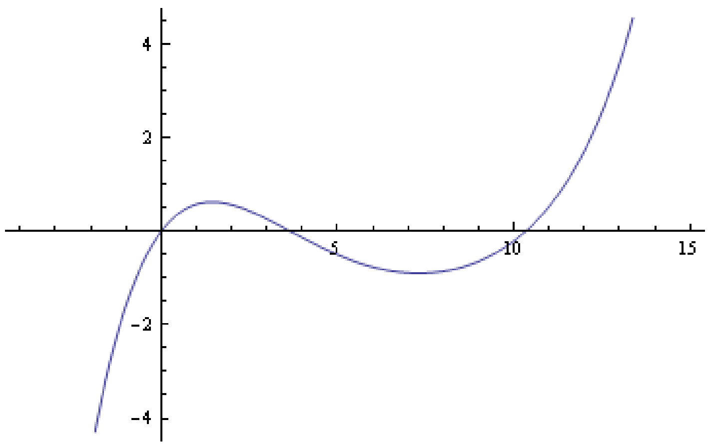
De donde

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{a_0}{2.1} \\
a_2 &= -\frac{a_1}{3.2} = \frac{a_0}{3.2.2.1} \\
a_3 &= -\frac{a_2}{4.3} = -\frac{a_0}{4.3.3.2.2.1} \\
a_4 &= -\frac{a_3}{5.4} = \frac{a_0}{5.4.4.3.3.2.2.1} \\
a_5 &= -\frac{a_4}{6.5} = -\frac{a_0}{6.5.5.4.4.3.3.2.2.1} \\
a_6 &= -\frac{a_5}{7.6} = \frac{a_0}{7.6.6.5.5.4.4.3.3.2.2.1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_n &= -\frac{a_{n-1}}{(n+1)n} = (-1)^n \frac{a_0}{(n+1)(n!)^2}
\end{aligned}
$$

Y se puede escribir

$$
w_1 = a_0\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{12} - \frac{z^4}{144} + \frac{z^5}{2880} - \frac{z^6}{86400} + \frac{z^7}{3628800} - \ldots \right)
$$

216 Cuya gráfica es, haciendo $a_0 = 1$



217 Toca ahora calcular la segunda solución, correspondiente a la raíz $r=0$. Como se explicara en el párrafo 201, la segunda solución linealmente independiente de la primera puede calcularse mediante la siguiente expresión

$$w_2(z)=\frac{\partial}{\partial r}[(r-r_2)w_1(z)]=\mu w_1(z)\ln(z)+z^{r_2}\sum_0^\infty b_n z^n$$

Y recordando que la solución $w_1(z)$ es

$$w_1(z)=\sum_0^\infty a_n z^{n+1} \qquad a_n=\frac{(-1)^n a_0}{(n+1)(n!)^2}$$

Que, una vez expandida queda

$$w_1(z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{12}-\frac{z^4}{144}+\frac{z^5}{2880}-\frac{z^6}{86400}+\ldots$$

Además, se recuerda que la ecuación diferencial es $zw''(z)+w(z)=0$ con lo cual, el operador correspondiente es

$$L=zD^2+1$$

218 Se plantea entonces como segunda solución

$$w_2(z)=w_2=\mu w_1(z)\ln(z)+z^0\sum_0^\infty b_n z^n$$

Donde resulta necesario calcular los coeficientes b_n

Para poder reemplazar en la ecuación diferencial dada es necesario calcular

$$w_2'=\mu w_1'\ln(z)+\mu\frac{w_1}{z}+\frac{d}{dz}\left[\sum_0^\infty b_n z^n\right]$$
$$w_2''=\mu w_1''\ln(z)+2\mu\frac{w_1'}{z}-\mu\frac{w_1}{z^2}+\frac{d^2}{dz^2}\left[\sum_0^\infty b_n z^n\right]$$

Llevando estos valores a la ecuación diferencial en estudio, resulta

$$zw_2'' + w_2 = \mu z w_1'' \ln(z) + 2\mu w_1' - \mu \frac{w_1}{z} + z\frac{d^2}{dz^2}\left[\sum_0^\infty b_n z^n\right] + \mu w_1 \ln(z) + z^0 \sum_0^\infty b_n z^n =$$

$$\mu \ln(z)(zw_1'' + w_1) + 2\mu w_1' - \mu \frac{w_1}{z} + L\left[\sum_0^\infty b_n z^n\right] = 0$$

219 Dado que $zw_1'' + w_1 = 0$ ¿Por qué? resulta

$$L\left[\sum_0^\infty b_n z^n\right] = -2\mu w_1' + \mu \frac{w_1}{z}$$

Calculando $L\left[\sum_0^\infty b_n z^n\right]$ queda

$$L\left[\sum_0^\infty b_{n+} z^n\right] = zD^2\left[\sum_0^\infty b_n z^n\right] + \sum_0^\infty b_n z^n = z\sum_0^\infty n(n-1) b_n z^{n-2} + \sum_0^\infty b_n z^n =$$

$$= \sum_0^\infty n(n-1) b_n z^{n-1} + \sum_0^\infty b_n z^n = 2.1 b_2 z + 3.2 b_3 z^2 + 4.3 b_4 z^3 + 5.4 b_5 z^4 + 6.5 b_6 z^5 + ... +$$
$$+ b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4 + b_5 z^5 + ... =$$

$$b_0 + (2b_2 + b_1)z + (6b_3 + b_2)z^2 + (12b_4 + b_3)z^3 + (20b_5 + b_4)z^4 + (30b_6 + b_5)z^5 + ...$$

220 Calculando el segundo miembro de la ecuación inicial de este párrafo resulta:

$$-2\mu w_1' + \mu \frac{w_1}{z} = -2\mu\left(1 - z + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{36} + \frac{z^4}{576} - \frac{z^5}{14400} + ...\right) + \mu\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12} - \frac{z^3}{144} + \frac{z^4}{2880} - \frac{z^5}{86400} + ..\right)$$

obsérvese que el primer paréntesis de la expresión anterior es la derivada de w_1

Se puede ahora escribir

$$-2\mu w_1' + \mu \frac{w_1}{z} = -\mu + \frac{3}{2}\mu z - \frac{5}{12}\mu z^2 + \frac{7}{144}\mu z^3 - \ldots$$

221 Igualando la última expresión del párrafo 373 y la del anterior a éste, según potencias de z, se plantea el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} b_0 = -\mu \\ 2b_2 + b_1 = \dfrac{3}{2}\mu \\ 6b_3 + b_2 = -\dfrac{5}{12}\mu \\ 12b_4 + b_3 = \dfrac{7}{144}\mu \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

De la segunda resulta

$$b_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\mu - b_1\right) = -\left(\frac{3}{4}b_0 + \frac{1}{2}b_1\right)$$

De la tercera

$$b_3 = \frac{1}{6}\left(-\frac{5}{12}\mu - b_2\right)$$

reemplazando b_2 por la su expresión en función de b_1, se obtiene

$$b_3 = \frac{1}{12}\left(\frac{7}{3}b_0 + b_1\right)$$

De la misma forma se llega a

$$b_4 = -\frac{1}{12}\left(\frac{35}{144}b_0 + \frac{1}{12}b_1\right)$$

Reemplazando entonces en

$$w_2(z) = w_2 = \mu w_1(z)\ln(z) + z^0\sum_0^\infty b_n z^n$$

Se tiene finalmente

$$w_2(z)=\mu\left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{12}-\frac{z^4}{144}+\frac{z^5}{2880}-\frac{z^6}{86400}+\frac{z^7}{3628800}-...\right)\ln(z)+b_0+b_1z$$
$$-\left(\frac{3}{4}b_0+\frac{1}{2}b_1\right)z^2+\frac{1}{12}\left(\frac{7}{3}b_0+b_1\right)z^3-\frac{1}{12}\left(\frac{35}{144}b_0+\frac{1}{12}b_1\right)z^4+...$$

Tomando arbitrariamente b_0 y b_1 iguales a 1 lo que implica tomar μ =-1 se tiene

$$w_2(z)=\left(-z+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{12}z^3+\frac{1}{144}z^4-\frac{1}{2880}z^5+...\right)Ln(z)+1+z-\frac{5}{4}z^2+\frac{5}{18}z^3-\frac{47}{1728}z^4+...$$

Obsérvese que b_0 y μ están relacionados por la igualdad $b_0=-\mu$ mientras que b_1 si es arbitrario. Podría haberse tomado b_1 =0 con lo cual la segunda solución hubiese sido

$$w_2(z)=\left(-z+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{12}z^3+\frac{1}{144}z^4-\frac{1}{2880}z^5+...\right)Ln(z)+1-\frac{3}{4}z^2+\frac{7}{36}z^3-\frac{35}{1728}z^4+...$$

No debe causar sorpresa al lector esta aparente disparidad de resultados. Téngase en cuenta que, como ya se ha anticipado en el ejemplo anterior, una ecuación diferencial de segundo orden tiene como solución general una combinación lineal de dos funciones linealmente independientes, siendo las constantes que definen esa combinación lineal el resultado de la adecuación de la solución general a los valores iniciales del problema planteado. En la medida que se tomen otros valores en forma arbitraria, como en este caso, los resultados dispares serán esperables.

Además se debe prestar atención al hecho que se ha tomado a_0=1 hecho que condiciona el valor posible de b_0 según el siguiente desarrollo.

$$w_2(z)=z^{r_2}\sum_0^{\infty}b_kz^k=z^0(b_0+b_1z+b_2z^2+b_3z^3+...)=b_0+z^{r_1}(b_1+b_2z+b_3z^3+...)$$

Con lo que $b_0 = a_0 = 1 = -\mu$

222 A continuación se resuelve nuevamente el ejercicio utilizando la técnica propuesta por Frobenius. Para ello se considera la forma general del término enésimo determinada en párrafo 218 precedente

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{(n+r)(n+r-1)}$$

$$a_1 = -\frac{a_0}{(1+r)r}$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{(2+r)(1+r)} = \frac{a_0}{(2+r)(1+r)^2 r}$$

$$a_3 = -\frac{a_2}{(3+r)(2+r)} = -\frac{a_0}{(3+r)(2+r)^2(1+r)^2 r}$$

----

y, con él se expresa

$$w(z,r) = a_0 z^r \left[1 - \frac{z}{r(1+r)} + \frac{z^2}{r(1+r)^2(2+r)} - \frac{z^3}{r(1+r)^2(2+r)^2(3+r)} + \frac{z^4}{r(1+r)^2(2+r)^2(3+r)^2(4+r)} - \ldots\right]$$

Resulta obvio que, al tomar $r = 0$ los términos dentro del corchete se indeterminan. Siguiendo lo propuesto por Frobenius, esta expresión se multiplica por r evitándose así las indeterminaciones mencionadas. Resulta

$$rw(z,r) = a_0 z^r \left[r - \frac{z}{(1+r)} + \frac{z^2}{(1+r)^2(2+r)} - \frac{z^3}{(1+r)^2(2+r)^2(3+r)} + \frac{z^4}{(1+r)^2(2+r)^2(3+r)^2(4+r)} - \ldots\right]$$

223 Corresponde ahora calcular $\frac{\partial[rw(z,r)]}{\partial r}$. Este cálculo da, haciendo arbitrariamente $a_0 = 1$

$$\frac{\partial[rw(z,r)]}{\partial r}=z^r+\frac{z^{1+r}}{(1+r)^2}-\frac{z^{2+r}}{(1+r)^2(2+r)^2}-\frac{2z^{2+r}}{(1+r)^3(2+r)}+\frac{z^{3+r}}{(1+r)^2(2+r)^2(3+r)^2}+$$
$$+\frac{2z^{3+r}}{(1+r)^3(2+r)^2(3+r)}+\frac{2z^{3+r}}{(1+r)^2(2+r)^2(3+r)}-\frac{z^{4+r}}{(1+r)^2(2+r)^2(3+r)^2(4+r)^2}-$$
$$-\frac{2z^{4+r}}{(1+r)^2(2+r)^2(3+r)^3(4+r)}-\frac{2z^{4+r}}{(1+r)^2(2+r)^3(3+r)^2(4+r)}-\frac{2z^{4+r}}{(1+r)^3(2+r)^2(3+r)^2(4+r)}+$$
$$rz^r\ln(z)-\frac{z^{1+r}\ln(z)}{1+r}+\frac{z^{2+r}\ln(z)}{(1+r)^2(2+r)}-\frac{z^{3+r}\ln(z)}{(1+r)^2(2+r)^2(3+r)}+\frac{z^{4+r}\ln(z)}{(1+r)^2(2+r)^2(3+r)^2(4+r)}$$

por supuesto, el cálculo ha sido hecho con MATHEMATICA.

224 Haciendo r=0 en la expresión anterior se tiene

$$w_2(z)=1+z-\frac{5}{4}z^2+\frac{5}{18}z^3-\frac{47}{1728}z^4+...+\left(-z+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{12}z^3+\frac{1}{144}z^4-\frac{1}{2880}z^5+...\right)\ln(z)$$

que coincide con una de las soluciones halladas anteriormente

WRONSKIANO

225 Para aplicar la técnica de cálculo de la segunda solución mediante el Wronskiano, se recuerda que la expresión correspondiente a esta segunda solución es

$$w_2(z)=w_1(z)\int_0^z\frac{e^{\int_0^z p(z)dz}}{[w_1(z)]^2}dz$$

en el caso en estudio es $p(z)=0$, entonces queda

$$w_2(z)=w_1(z)\int_0^z\frac{dz}{[w_1(z)]^2}$$

226 Teniendo en cuenta que $w_1(z)$ es una serie de potencias, su cuadrado es de muy laboriosa obtención, naturalmente operando solamente sobre algunos primeros términos.

Luego corresponde calcular su inversa efectuando para ello una división de polinomios hasta alguna potencia coherente con el cuadrado antes calculado.

A continuación una integral definida con límite superior variable y límite inferior que la fórmula establece como cero pero que en la parte operatoria debe ser otro valor por la indeterminación que el cero produce en la evaluación del resultado de la integración. No ha sido posible encontrar referencia sobre este punto en la bibliografía ni tampoco establecer relación alguna de este valor con alguna de las constantes arbitrarias antes definidas.

Luego, nada menos que multiplicar la serie representativa de la primera solución, mejor dicho, alguno de sus primeros términos, por el resultado de la integración para obtener la segunda solución.

El autor recorrió varias veces este laborioso camino, llegando a resultados poco satisfactorios con relación a los previamente calculados (b_0 y b_1 y aplicación de la metodología propuesta por Frobenius, etc.). Su colaboradora hizo lo propio, verificando numéricamente resultados calculados con iguales discrepancias finales.

Tal vez, en estos párrafos esté la razón por la cual en los textos consultados esta técnica no se aplica o, si se aplica, se lo hace con prescindencia de otras.

Claramente este parece ser un tema a resolver, por supuesto, ajeno al alcance de estas notas sobre el tema.

Por lo expuesto, **no se presenta** en estas páginas el cálculo de la segunda solución mediante el Wronskiano.

GRAN RESUMEN

227 Sea z_0 un punto singular regular para una ecuación diferencial de segundo orden, homogénea de la forma $w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$, sea ρ el radio de convergencia de los desarrollos en serie de los coeficientes (el menor de ellos) y sean r_1 y r_2 las raíces de la ecuación indicial o de índices ordenados de forma tal que $Re(r_1) \geq Re(r_2)$. Entonces existen en $(z_0, z_0 + \rho)$ dos soluciones linealmente independientes dadas por

1 Si $r_1 - r_2$ no es un número entero

$$w_1(z) = (z - z_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$w_2(z) = (z - z_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

2 Si $r_1 = r_2 = r$ las soluciones son

$$w_1(z) = (z - z_0)^{r} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$w_2(z) = w_1(z)\, ln(z - z_0) + (z - z_0)^{r} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

3 Si $r_1 - r_2$ es un número entero

$$w_1(z) = (z - z_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$w_2(z) = \gamma w_1(z)\, ln(z - z_0) + (z - z_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

y γ puede ser cero

(página dejada intencionalmente en blanco)

CAPITULO CUARTO

FUNCIONES ESPECIALES

Ecuaciones diferenciales con nombre propio

228 En la física matemática y en la ingeniería se presentan problemas cuyos modelos matemáticos son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Sus respectivas soluciones son necesarias para predecir o simular el comportamiento de los sistemas que responden a dichos modelos. Esto, desde el punto de vista de la ingeniería, es fundamental porque tanto predicciones como simulaciones permiten la realización y la operación de los ingenios necesarios para la aplicación práctica de modelos teóricos debidamente aceptados.

229 Los casos de simetría axial o central existentes llevan en forma inexorable a la utilización de sistemas de coordenadas cilíndricas o esféricas respectivamente, sistemas de referencia que, cuando se aplica a aquellas ecuaciones el método de separación de variables llevan a ecuaciones diferenciales de segundo orden de formas especiales, que se identifican con los nombres propios de aquellos que las estudiaron en sus orígenes.

230 Las soluciones de estas últimas ecuaciones diferenciales definen funciones a las que suele denominarse funciones especiales.

231 Obsérvese que las muy trilladas funciones trigonométricas pueden, en este orden de ideas, ser definidas como las soluciones de la ecuación diferencial

$$y''(x) + y(x) = 0$$

con adecuadas condiciones iniciales.

232 Naturalmente las funciones definidas por las ecuaciones diferenciales que serán expuestas no son tan elementales como las trigonométricas, aunque algunas tienen comportamientos oscilatorios similares, aparte de otras propiedades fundamentales para el tratamiento de los problemas que las generan.

233 A título ilustrativo, no completo, este tipo de ecuaciones diferenciales aparecen en el estudio de potenciales en campos conservativos; en campos no conservativos; esfuerzos de torsión; distribución de temperaturas en régimen estacionario; propagación del calor; vibraciones de cuerdas y membranas; propagación de ondas sonoras, luminosas, de radio, de señales telegráficas; etc.

234 Aunque todas estas funciones tienen importantes propiedades matemáticas las mismas no se exponen ni se desarrollan porque el objetivo de este trabajo es ver la solución de EDO por medio de series de potencias. Nada más. El lector interesado puede sin duda alguna recurrir a la muy amplia y variada bibliografía existente para cada una de ellas.

ECUACION DE HERMITE

235 La ecuación de Hermite así llamada en honor a **Charles Hermite** (24 de diciembre de 1822 - 14 de enero de 1901) un matemático francés que investigó en el campo de la teoría de números, sobre las formas cuadráticas, polinomios ortogonales y funciones elípticas, y en el álgebra. Varias entidades matemáticas se llaman *hermitianas* en su honor.

236 Le fueron concedidos los honores de Gran Oficial de la Legión de Honor y la Gran Cruz de la Estrella polar de Suecia.

237 La ecuación de Hermite

$$\frac{d^2 w(z)}{dz^2} - 2z\frac{dw(z)}{dz} + \lambda w(z) = 0$$

donde λ es un parámetro real, está íntimamente relacionada con diversos problemas de Mecánica Cuántica

238 Se hace

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$w'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

$$w''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$$

Y se reemplaza en el EDO dada, quedando

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} - 2t\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$$

239 Haciendo

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1) a_{i+2} z^i$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) a_{i+1} z^{i+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{i}$$

resulta

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left\{\left[(i+2)(i+1)a_{i+2}+\lambda a_i\right]z^i-2(i+1)a_{i+1}z^{i+1}\right\}=0$$

De donde

$$\begin{array}{ll}
i=0 & \Rightarrow (2.1a_2+\lambda a_0)-2a_1z+ \\
i=1 & +(3.2a_3+\lambda a_1)z-2.2a_2z^2+ \\
i=2 & +(4.3a_4+\lambda a_2)z^2-2.3a_3z^3+ \\
i=3 & +(5.4a_5+\lambda a_3)z^3-2.4a_4z^4+\ldots
\end{array}$$

Agrupando según potencias de z se tiene

$$2a_2+\lambda a_0=0 \qquad \Rightarrow a_2=-\frac{\lambda}{2}a_0$$

$$(i+2)(i+1)a_{i+2}-(2i-\lambda)a_i=0 \qquad \Rightarrow a_{i+2}=\frac{2i-\lambda}{(i+2)(i+1)}a_i$$

Con lo cual

$$a_3=\frac{2-\lambda}{3.2}a_1$$

$$a_4=\frac{4-\lambda}{4.3}a_2=-\frac{(4-\lambda)}{4.3}\frac{\lambda}{2}a_0=-\frac{\lambda(4-\lambda)}{4!}a_0$$

$$a_5=\frac{6-\lambda}{5.4}a_3=\frac{6-\lambda}{5.4}\frac{2-\lambda}{3.2}a_1=\frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}a_1$$

$$a_6=\frac{8-\lambda}{6.5}a_4=-\frac{\lambda(4-.\lambda)(8-\lambda)}{6!}a_0$$

....

240 En general se puede escribir

$$a_{2i} = -\frac{\lambda(2.2-\lambda)\ldots[2(2i-2)-\lambda]}{(2i)!}a_0$$

$$a_{2i+1} = \frac{(2.1-\lambda)\ldots[2(2i-1)-\lambda]}{(2i+1)!}a_1$$

241 Tomando como factores comunes a a_0 y a_1 se escribe como solución general de la EDO de Hermite

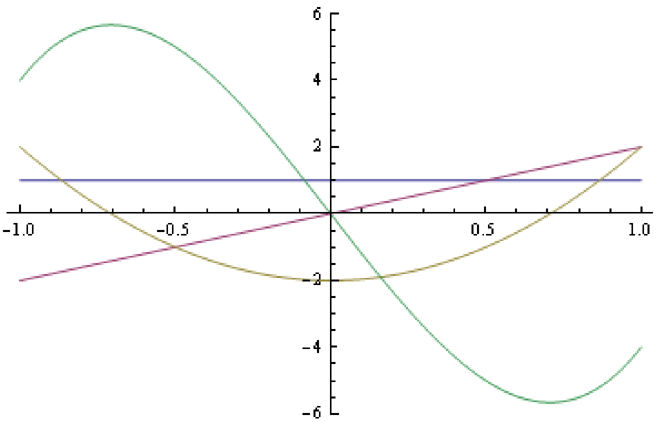
$$y(x) = a_0\left[1 - \frac{\lambda}{2}z^2 - \frac{\lambda(4-\lambda)}{4!}z^4 - \frac{\lambda(4-\lambda)(8-\lambda)}{6!}z^6 - \ldots\right] +$$
$$a_1\left[z + \frac{2-\lambda}{3!}z^3 + \frac{(2-\lambda)(6-\lambda)}{5!}z^5 + \ldots\right]$$

242 Un caso interesante se da cuando el parámetro λ es par, de la forma λ = 2 k En ese caso la relación de recurrencia muestra que $a_{k+2} = a_{k+4} = \ldots = 0$ y, si se toma $a_1 = 0$ la solución se reduce a un polinomio de grado k. De la misma forma, si k es impar y se toma $a_0 = 0$ la solución se reduce a otro polinomio de grado k

243 Con una elección especial de a_0 y a_1 para que el coeficiente de z^k sea 2^k resultan los denominados polinomios de Hermite.

$$H_0(z) = 1$$
$$H_1(z) = 2z$$
$$H_2(z) = -2 + 4z^2$$
$$H_3(z) = -12z + 8z^3$$
$$H_4(z) = 12 - 48z^2 + 16z^4$$
$$H_5(z) = 120z - 160z^3 + 32z^5$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cuyas respectivas representaciones gráficas se agregan a continuación



ECUACION DE LAGUERRE

244 **Edmond Nicolás Laguerre** (Francia, 9 de abril de 1834, Bar-le-Duc - 14 de agosto de 1886), fue un matemático francés, conocido principalmente por la introducción de los polinomios que llevan su nombre.

245 Comenzó sus estudios en la École Polytechnique (Promoción 1853). Efectuó una carrera militar de 1854 a 1864 como oficial de artillería. Luego, fue tutor de la escuela en la que se formó.

246 Laguerre publicó más de 140 artículos sobre los diferentes aspectos de la geometría y del análisis. Sus obras completas fueron publicadas en diez volúmenes entre 1898 y 1905 por encargo de Charles Hermite, Henri Poincaré y Eugène Rouché.

247 La ecuación diferencial de Laguerre es

$$zw'' + (1-z)w' + \lambda w = 0 \qquad \lambda \in R$$

en la que $z=0$ es un punto singular regular dado que $z\dfrac{(1-z)}{z}$ y $z^2\dfrac{\lambda}{z}$ son funciones analíticas en el origen

La ecuación indicial es

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

donde

$$p_0 = \lim_{z\to 0} z\frac{(1-z)}{z} = 1$$

$$q_0 = \lim_{z\to 0} z^2\frac{\lambda}{z} = 0$$

en consecuencia $r(r-1) + p_0 r + q_0 = r(r-1) + r = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 0$ con lo que resultan dos raíces iguales a cero

248 De acuerdo a lo visto, la ecuación de Laguerre tiene dos soluciones linealmente independientes dadas por

$$w_1(z) = \sum_0^\infty a_n z^n \qquad w_2(z) = w_1(z)\ln(z) + \sum_0^\infty b_n z^n$$

249 La primer solución se busca haciendo

$$w_1(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial propuesta, resulta

$$z\sum_{2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2} + (1-z)\sum_{1}^{\infty} n a_n z^{n-1} + \lambda\sum_{0}^{\infty} a_n z^n =$$

$$= \sum_{2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-1} + \sum_{1}^{\infty} n a_n z^{n-1} - \sum_{1}^{\infty} n a_n z^n + \lambda\sum_{0}^{\infty} a_n z^n = 0$$

250 Haciendo explícitos algunos términos se tiene

$$2.1a_2 z + 3.2a_3 z^2 + 4.3a_4 z^3 + ... + 1a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + ... - 1a_1 z - 2a_2 z^2 - 3a_3 z^3 - ... +$$
$$+ \lambda a_0 + \lambda a_1 z + \lambda a_2 z^2 + \lambda a_3 z^3 + ... = 0$$

agrupando según potencias de z

$$(a_1 + \lambda a_0) + (2.1a_2 + 2a_2 - a_1 + \lambda a_1)z + (3.2a_3 + 3a_3 - 2a_2 + \lambda a_2)z^2 + (4.3a_4 + 4a_4 - 4a_4 + \lambda a_4)z^3 + ... = 0$$

De donde

$$a_1 + \lambda a_0 = 0 \qquad \to \qquad a_1 = -\lambda a_0$$
$$2.1a_2 + 2a_2 - a_1 + \lambda a_1 = 0 \qquad \to \qquad a_2 = \frac{\lambda(\lambda-1)}{4} a_0$$
$$3.2a_3 + 3a_3 - 2a_2 + \lambda a_2 = 0 \qquad \to \qquad a_3 = -\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{4.9} a_0$$

En general, para la potencia z^k se tiene (habría que probarlo por inducción)

$$(k+1)k a_{k+1} + (k+1)a_{k+1} - k a_k + \lambda a_k = 0$$

de donde se obtiene la relación de recurrencia

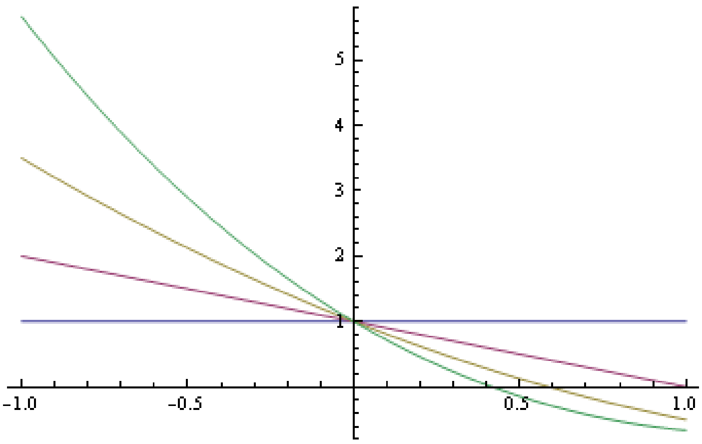
$$a_{k+1} = (-1)^k \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)...(\lambda-k)}{[(k+1)!]^2} a_0$$

Haciendo $a_0 = 1$ se tiene

$$w_1(z) = 1 + \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)...(\lambda-n+1)}{(n!)^2} z^n$$

251 Si λ es un número natural, las soluciones son polinomios.

$$L_0(z) = 1$$
$$L_1(z) = 1 - z$$
$$L_2(z) = 1 - 2z + \frac{1}{2}z^2$$
$$L_3(z) = 1 - 3z + \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{6}z^3$$



ECUACION DE LEGENDRE

252 **Adrien-Marie Legendre**, París, 18 de septiembre de 1752 - Auteuil, Francia, 10 de enero de 1833) fue un matemático francés. Hizo importantes contribuciones a la estadística, la teoría de números, el álgebra abstracta y el análisis matemático.

253 Se lo conoce también por la transformada de Legendre, utilizada para pasar de la formulación lagrangiana a la hamiltoniana de la mecánica clásica. También se usa en termodinámica para obtener la entalpía de las energías libres de Helmholtz y Gibbs partiendo de la energía interna.

254 La ecuación diferencial de Legendre es de la forma

$$\left(1-z^2\right)w'' - 2zw' + \alpha(\alpha+1)w = 0$$

dividiendo por $1-z^2$ se tiene

$$p(z) = -\frac{2z}{1-z^2}$$

$$q(z) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-z^2}$$

que son funciones analíticas en el origen, en consecuencia la ecuación admite una solución en serie de potencias de la forma

$$w(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$$

$$w'(z) = \sum_1^\infty n a_n z^{n-1}$$

$$w''(z) = \sum_2^\infty n(n-1) a_n z^{n-2}$$

255 Reemplazando en el ecuación diferencial dada se tiene

$$\left(1-z^2\right)\sum_2^\infty n(n-1)a_n z^{n-2} - 2z\sum_1^\infty n a_n z^{n-1} + \alpha(\alpha+1)\sum_0^\infty a_n z^n = 0$$

Observando que

$$\sum_2^\infty n(n-1)a_n z^{n-2} = \sum_0^\infty (n+2)(n+1)a_{n+2} z^{n+2}$$

y que

$$\sum_1^\infty n a_n z^{n-1} = \sum_0^\infty (n+1)a_{n+1} z^n$$

256 Resulta, reemplazando nuevamente en la ecuación diferencial

$$\sum_0^\infty \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2a_n + \alpha(\alpha+1)a_n\right]z^n = 0$$

operando en el corchete se obtiene

$$\sum_0^\infty \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\alpha+n+1)(\alpha-n)a_n\right]z^n = 0$$

de donde

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\alpha+n+1)(\alpha-n)a_n = 0$$

$$a_{n+2} = -\frac{(\alpha+n+1)(\alpha-n)}{(n+2)(n+1)}a_n$$

que es la relación de recurrencia que permite calcular los coeficientes del desarrollo en serie de la solución conocidos a_0 y a_1.

257 Tomando valores n= 0,1,2,3,4,5,... se tiene

$$a_2 = -\frac{(\alpha+1)\alpha}{2\cdot 1}a_0$$

$$a_3 = -\frac{(\alpha+2)(\alpha-1)}{3\cdot 2}a_1$$

$$a_4 = -\frac{(\alpha+3)(\alpha-2)}{4\cdot 3}a_2 = \frac{(\alpha+3)(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}a_0$$

$$a_5 = -\frac{(\alpha+4)(\alpha-3)}{5\cdot 4}a_3 = \frac{(\alpha+4)(\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-3)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}a_1$$

Por inducción es posible demostrar que

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{(\alpha+2n-1)(\alpha+2n-3)...(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)...(\alpha-2n+2)}{(2n!)}a_0$$

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{(\alpha+2n)(\alpha+2n-2)...(\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-3)...(\alpha-2n+1)}{(2n+1)!}a_1$$

258 Se definen

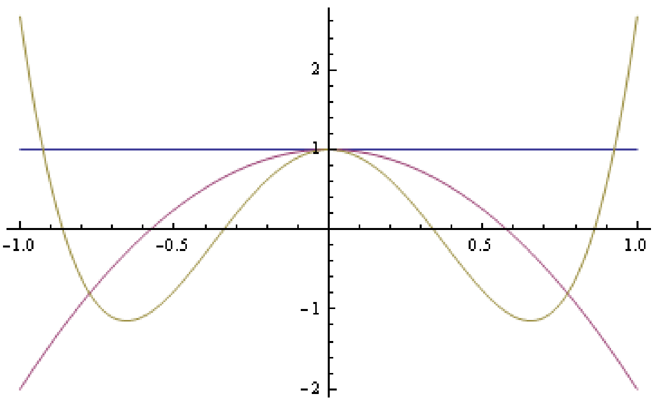
$$\varphi_1(z) = 1 + \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{(\alpha+2n-1)(\alpha+2n-3)...(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)...(\alpha-2n+2)}{(2n!)} z^{2n}$$
$$\varphi_2(z) = z + \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{(\alpha+2n)(\alpha+2n-2)...(\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-3)...(\alpha-2n+1)}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

entonces, la solución general de la ecuación de Legendre es

$$\varphi(z) = a_0\varphi_1(z) + a_1\varphi_2(z)$$

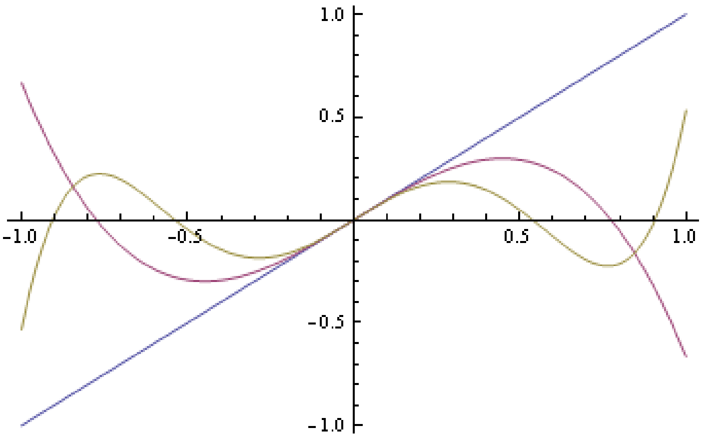
259 Si α es un número par, de la forma $\alpha = 2m, m$ natural, entonces la función $\varphi_1(z)$ es un polinomio de grado $2m$ con potencias pares de z. La otra función $\varphi_2(z)$ es una serie de potencias. Se listan a continuación algunos polinomios

$$\alpha = 0 \to \varphi_1(z) = 1$$
$$\alpha = 2 \to \varphi_1(z) = 1 - 3z^2$$
$$\alpha = 4 \to \varphi_1(z) = 1 - 10z^2 + \frac{35}{3}z^4$$



260 Si $\alpha = 2m+1, m$ natural entonces $\varphi_1(z)$ es una serie de potencias y $\varphi_2(z)$ es un polinomio de grado $2m+1$ que contiene solo potencias impares de z. Se listan a continuación algunos de ellos

$$\alpha = 1 \to \varphi_2(z) = z$$
$$\alpha = 3 \to \varphi_2(z) = z - \frac{5}{3}z^3$$
$$\alpha = 5 \to \varphi_2(z) = z - \frac{14}{3}z^3 + \frac{21}{5}z^5$$



261 Se puede concluir que, para todo número natural m existe un polinomio de ese grado que es solución de la ecuación diferencial de Legendre.

ECUACIÓN DE AIRY

262 Así llamada en honor a George Biddell Airy (Alnwick, 27 de julio de 1801 - Greenwich, 2 de enero de 1892, Reino Unido de la Gran Bretaña, Gales y Escocia) fue un astrónomo y matemático inglés.

263 Es una ecuación relacionada con la ecuación de Schrödinger y con el movimiento unidimensional de una partícula cuántica afectada por una fuerza constante.

264 La ecuación es de la forma

$$w'' - zw = 0$$

cuyos puntos son regulares, admitiendo en consecuencia una solución en serie de potencias del tipo:

$$w = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n$$

$$w' = \sum_{1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

$$w'' = \sum_{2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial se tiene

$$\sum_{2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} - z\sum_{0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} - \sum_{0}^{\infty} a_n z^{n+1} =$$

$$= 2.1 a_2 + \sum_{1}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} z^k + \sum_{1}^{\infty} a_{k-1} z^k = 0$$

265 Donde, a fin de encontrar una relación de recurrencia entre los coeficientes de la serie solución, se hace, en la primera sumatoria $k = n-2$ y en la segunda $k = n+1$ y se escribe explícitamente el término correspondiente a z^0. Con esas igualdades resulta

$$\sum_{0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} z^k + \sum_{0}^{\infty} a_{k-1} z^k = 0$$

$$\sum_{0}^{\infty} \left[(k+2)(k+1) a_{k+2} + a_{k-1}\right] z^k = 0$$

Para satisfacer la igualdad, deberá ser

$$(k+2)(k+1) a_{k+2} + a_{k-1} = 0$$

De donde

$$a_{k+2} = -\frac{a_{k-1}}{(k+2)(k+1)}$$

266 Puede escribirse entonces

$$
\begin{aligned}
a_3 &= -\frac{a_0}{3.2} \\
a_4 &= -\frac{a_1}{4.3} \\
a_5 &= -\frac{a_2}{5.4} = 0 \\
a_6 &= -\frac{a_3}{6.5} = \frac{a_0}{2.3.5.6} \\
a_7 &= -\frac{a_4}{7.6} = \frac{a_1}{3.4.6.7} \\
a_8 &= -\frac{a_5}{8.7} = \frac{a_2}{4.5.7.8} = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Y de allí

$$w(z) = a_0\left(1 - \frac{1}{3.2}z^3 + \frac{1}{2.3.5.6}z^6 - \frac{1}{2.3.5.6.8.9}z^9 + \ldots\right) + a_1\left(z - \frac{1}{4.3}z^4 + \frac{1}{3.4.6.7}z^7 - \frac{1}{3.4.6.7.9.10}z^{10} + \ldots\right)$$

En general, después de larga especulación y grandes cantidades de prueba y ensayo

$$w(z) = a_0\left(1 + \sum_1^{\infty}(-1)^k \frac{[1.4.7....(3k-2)]}{(3k)!}z^{3k}\right) + a_1\left(z + \sum_1^{\infty}(-1)^k \frac{[2.5.8....(3k-1)]}{(3k+1)!}z^{3k+1}\right)$$

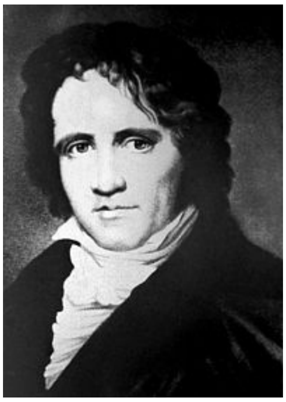
ECUACIÓN DE BESSEL

267 La Ecuación de Bessel aparece cuando se buscan soluciones a la ecuación de Laplace o a la ecuación de Helmholtz por el método de separación de variables en coordenadas cilíndricas o esféricas. Por ello, las funciones de Bessel son especialmente importantes en muchos problemas de propagación de ondas, potenciales estáticos y cualquier otro problema descrito por las ecuaciones de Helmholtz o Laplace en simetrías cilíndricas o esféricas. Cuando se resuelven sistemas en coordenadas cilíndricas, se obtienen funciones de

Bessel de orden entero $(\infty = n)$ y en problemas resueltos en coordenadas esféricas, se obtienen funciones de Bessel de orden semientero $(\alpha = n+1/2)$, por ejemplo:

- Ondas electromagnéticas en guías de onda cilíndricas.
- Modos transversales electromagnéticos en guías ópticas.
- Conducción del calor en objetos cilíndricos.
- Modos de vibración de una membrana delgada circular (o con forma de anillo).
- Difusión en una red.

También se usan funciones de Bessel en otro tipo de problemas como en procesamiento de señales.



268 La ecuación de Bessel es de la forma

$$z^2 w'' + zw' + (z^2 - \alpha^2)w = 0 \qquad \alpha \in R$$

y se la suele denominar "de orden α" aunque es una ecuación diferencial de segundo orden, donde $z = 0$ es un punto singular regular dado que

$$zp(z) = z\frac{z}{z^2} = 1$$

$$z^2 q(z) = z^2 \frac{(z^2 - \alpha^2)}{z^2} = (z^2 - \alpha^2)$$

son funciones analíticas en el origen de coordenadas.

269 Se toma entonces como solución

$$w(z) = w = z^r \sum_0^\infty a_n z^n = \sum_0^\infty a_n z^{n+r}$$

$$w'(z) = w' = \sum_0^\infty (n+r) a_n z^{n+r-1}$$

$$w''(z) = w'' = \sum_0^\infty (n+r)(n+r-1) a_n z^{n+r-2}$$

reemplazando en la ecuación diferencial queda

$$z^2 \sum_0^\infty (n+r)(n+r-1) a_n z^{n+r-2} + z \sum_0^\infty (n+r) a_n z^{n+r-1} + (z^2 - \alpha^2) \sum_0^\infty a_n z^{n+r} = 0$$

De esta última se obtiene

$$\sum_0^\infty (n+r)(n+r-1) a_n z^{n+r} + \sum_0^\infty (n+r) a_n z^{n+r} + \sum_0^\infty a_n z^{n+r+2} - \alpha^2 \sum_0^\infty a_n z^{n+r} = 0$$

270 Haciendo sucesivamente n = 0, 1, 2, 3, 4, 5,... queda, agrupando según potencias crecientes de z

$$\begin{array}{ll} z^r & a_0 r(r-1) + a_0 r - a_0 \alpha^2 = 0 \\ z^{r+1} & a_1 (r+1)(r+2) + a_1 (r+1) - a_1 \alpha^2 = 0 \\ z^{r+2} & a_0 + a_2 (r+2)(r+1) + a_2 (r+2) - a_2 \alpha^2 = 0 \\ z^{r+3} & a_1 + a_3 (r+3)(r+2) + a_3 (r+3) - a_3 \alpha^2 = 0 \end{array}$$

de la primera

$$a_0 [r(r-1) + r - \alpha^2] = 0$$

Como se postula que $a_0 \neq 0$ queda

$$r(r-1) + r - \alpha^2 = 0$$

Esta es la ecuación indicial que se escribe como

$$r^2 - \alpha^2 = 0$$

de donde $r_1 = \alpha$ y $r_2 = -\alpha$.

271 De los coeficientes correspondientes a la potencia z^{r+1} resulta

$$a_1[(r+1)(r+2)+(r+2)-\alpha^2]=0$$

Como el corchete no se anula para las raíces de la ecuación indicial, deberá ser $a_1=0$.

De los correspondientes a la potencia z^{r+2} resulta

$$a_0+a_2[(r+2)(r+1)+(r+2)-\alpha^2]=0$$
$$a_0+a_2[(r+2)[(r+1)+1]-\alpha^2]=0$$
$$a_0+a_2[(r+2)^2-\alpha^2]=0$$

con lo cual

$$a_2=-\frac{a_0}{(r+2)^2-\alpha^2}$$

De los correspondientes a la potencia z^{r+3} resulta

$$a_1+a_3\{(r+3)[(r+2)+1]-\alpha^2\}=0$$

Como $a_1=0$ resulta que también $a_3=0$

De la misma forma salen

$$a_4=-\frac{a_2}{(r+4)^2-\alpha^2}=\frac{a_0}{[(r+2)^2-\alpha^2][(r+4)^2-\alpha^2]}$$

$$a_5=0$$

$$a_6=-\frac{a_0}{[(r+2)^2-\alpha^2][(r+4)^2-\alpha^2][(r+6)^2-\alpha^2]}$$

$$a_7=0$$

272 Se analizan casos según el valor de α

I α real no entero

En este caso se tiene $r_1=\alpha$ y $r_2=-\alpha$

$$a_2 = -\frac{a_0}{(r_1+2)^2 - \alpha^2}$$

Tomando $r_1 = \alpha$ y desarrollando cuadrados se tiene

$$a_2 = -\frac{a_0}{\alpha^2 + 4\alpha + 4 - \alpha^2} = -\frac{a_0}{4(\alpha+1)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{(\alpha+4)^2 - \alpha^2} = -\frac{a_2}{\alpha^2 + 8\alpha + 16 - \alpha^2} = -\frac{a_2}{8(\alpha+2)} = \frac{a_0}{4.8.(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{(\alpha+6)^2 - \alpha^2} = -\frac{a_4}{\alpha^2 + 12\alpha + 36 - \alpha^2} = -\frac{a_4}{12(\alpha+3)} = -\frac{a_0}{4.8.12(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}$$

....

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k!(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)...(\alpha+k)}$$

Reemplazando estos valores en la serie solución se obtiene

$$w_1(z) = a_0 \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k!(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)...(\alpha+k)} z^{2k+\alpha}$$

En la bibliografía se suele tomar como valor arbitrario de a_0 el valor

$$a_0 = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}$$

Donde Γ es un símbolo que representa a la denominada función Gamma definida como, también llamada factorial generalizado

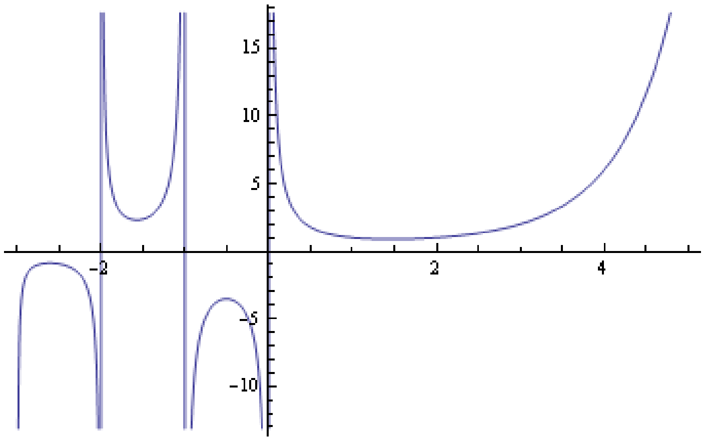
$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

cuya propiedad fundamental es

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

a partir de la cual se deduce

$$\Gamma(n+1) = n!$$



En base a esta función se escribe la función de Bessel de orden α

$$J_\alpha(z) = \sum \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\alpha}$$

Para lo otra raíz $r_2 = -\alpha$ se puede demostrar que

$$J_{-\alpha}(z) = \sum \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\alpha+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\alpha}$$

es linealmente independiente de la primera. En consecuencia, la solución general de la ecuación diferencial de Bessel en este caso es

$$w(z) = c_1 J_\alpha(z) + c_2 J_{-\alpha}(z)$$

II Caso en que $\alpha = 0 \rightarrow r_1$ y $r_2 = 0$

De acuerdo a lo visto en párrafo anterior, será

$$a1 = a3 = a5 = \cdots = 0$$

a_0 arbitrario

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2}$$

$$a_4 = -\frac{a_0}{2^2 4^2}$$

$$a_6 = -\frac{a_0}{2^2 4^2 6^2}$$

……………………………

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{2^2 4^2 6^2 \ldots (2n)^2}$$

Por ser

$$2^2 4^2 6^2 \ldots (2n)^2 = 2^2 (2\cdot 2)^2 (2\cdot 3)^2 (2\cdot 4)^2 \ldots (2n)^2 =$$

$$2^2 (2^{2\cdot 2^2})(2^2 3^2)(2^2 4^2)\ldots(2^2 n^2) = 2^{2n}(1\cdot 2^{2\cdot 3^{2\cdot 4^2}} \ldots n^2) = 2^{2n}(n!)^2$$

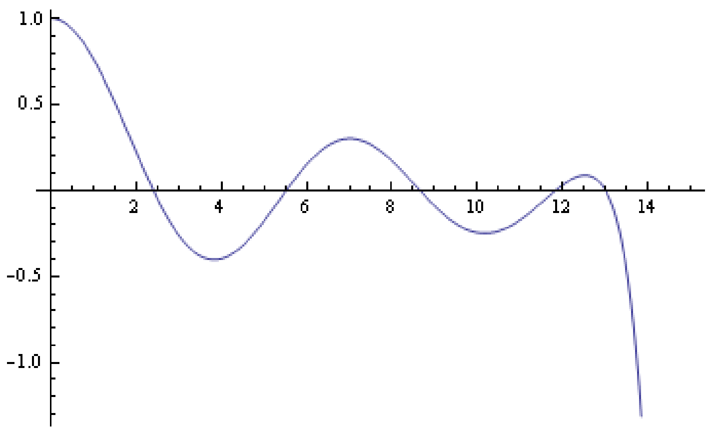
Puede escribirse finalmente tomando arbitrariamente $a_0 = 1$

$$J_0(z) = 1 - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 4^2} - \frac{z^6}{2^2 4^2 6^2} + \ldots (-1)^n \frac{z^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} + \ldots$$

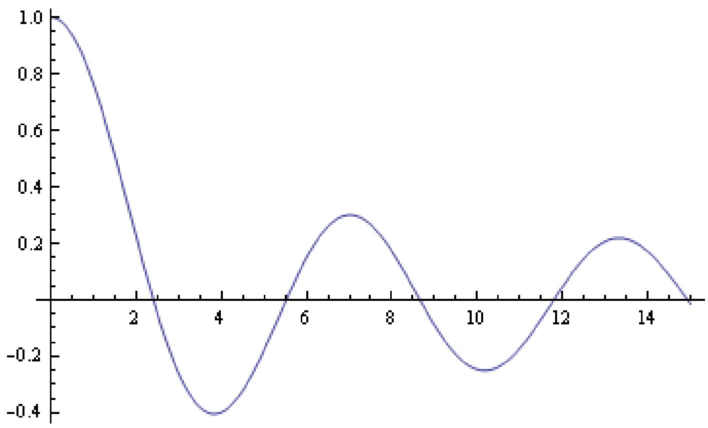
Esta misma ecuación puede escribirse

$$J_0(z) = 1 - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{(2!)^2} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^8}{(4!)^2} - \ldots$$

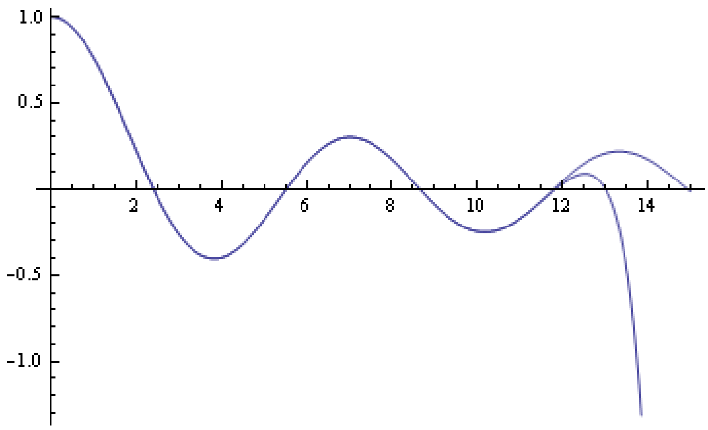
Se grafica a continuación $J_0(z)$ con 15 términos.



La misma función según MATHEMATICA



Superposición de los dos gráficos



273 Corresponde ahora encontrar la segunda solución, solución que por tratarse de raíces iguales de la ecuación indicial se puede buscar mediante el procedimiento propuesto por Frobenius.

Para ello se establece la expresión

$$w(z,r)=z^r\left[1-\frac{z^2}{(r+2)^2}+\frac{z^4}{(r+2)^2(r+4)^2}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(r+2)^2(r+4)^2\ldots(r+2n)^2}\right]$$

Se la deriva con respecto a r y luego se hace r=0. Procediendo de esa forma se tiene

$$\frac{\partial w(z,r)}{\partial r}=z^r\left[\begin{array}{l}\dfrac{2z^2}{(r+2)^3}-\dfrac{2z^4}{(r+2)^2(r+4)^3}-\dfrac{2z^4}{(r+2)^3(r+4)^2}-\dfrac{2z^6}{(r+2)^2(r+4)^2(r+6)^3}-\\ \dfrac{2z^6}{(r+2)^2(r+4)^3(r+6)^2}-\dfrac{2z^6}{(r+2)^3(r+4)^2(r+6)^2}-\ldots\end{array}\right]+$$

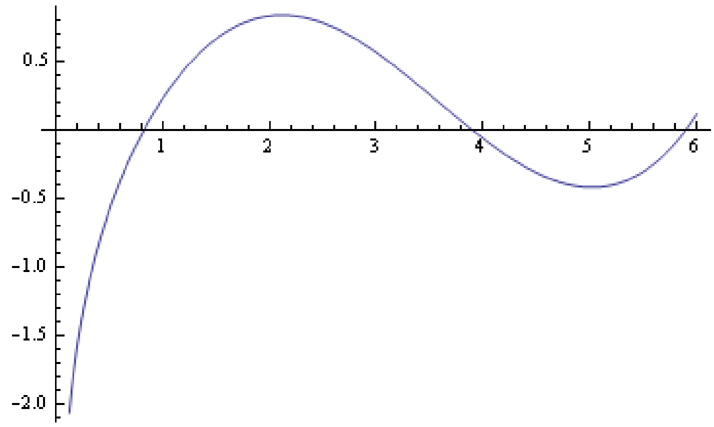
$$z^r\left[1-\frac{z^2}{(r+2)^2}+\frac{z^4}{(r+2)^2(r+4)^2}+\frac{z^6}{(r+2)^2(r+4)^2(r+6)^2}\right]Log(z)$$

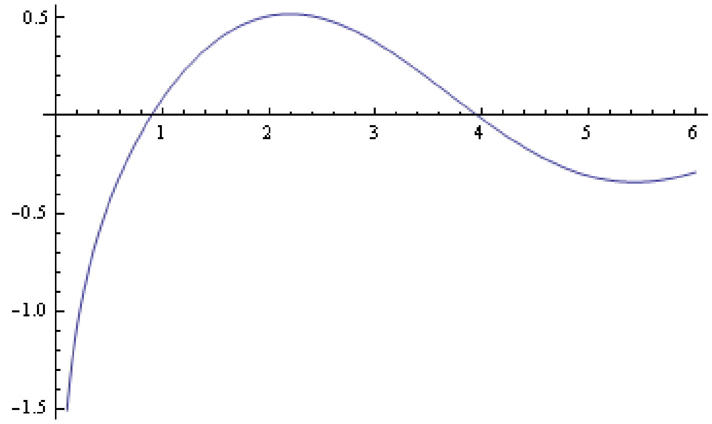
Haciendo ahora r=0 queda, como segunda solución

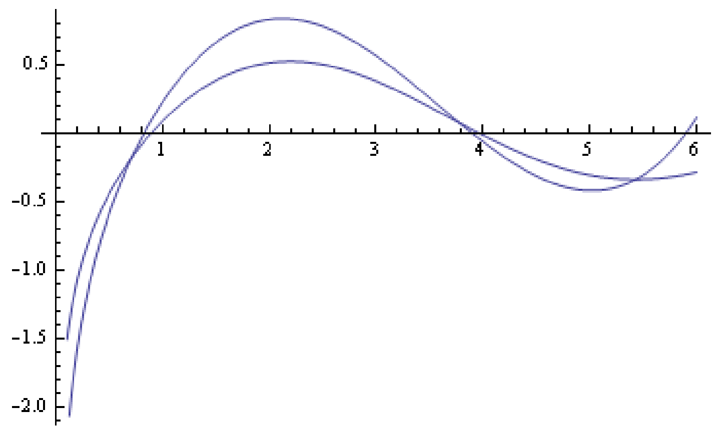
$$w_2(z)=\ln(z)\left(1-\frac{z^2}{4}+\frac{z^4}{64}-\frac{z^6}{2304}+\frac{z^8}{147456}-\frac{z^{10}}{1474560}+\ldots\right)+$$

$$+\frac{z^2}{4}-\frac{3z^4}{128}+\frac{11z^6}{13824}-\frac{25z^8}{1769472}+\frac{137z^{10}}{884736000}-\ldots$$

274 Se grafican a continuación la función $w_2(z)$ obtenida, la que se obtiene en MATHEMATICA y la superposición de ambas







Por último se escribe lo que algunos textos hacen figurar como expresión general para esta segunda solución, mencionando además que se trata de una expresión de trabajosa prueba.

$$J_0(z)\ln(z)+\sum_1^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$$

III Caso n=1.

275 En este caso la ecuación indicial es

$$r^2-1=0$$

Con raíces $r_1=1$ y $r_2=-1$ que difieren en un entero $r_1-r_2=1-(-1)=2$ lo que indica que la segunda solución debe ser hallada aplicando el método de Frobenius o el del wronskiano.

Tomando $a_0\neq 0$ resulta $a_1=0$ y, junto a él todos los coeficientes de subíndice impar.

Con relación a los de subíndice par ocurre lo siguiente:

$$a_2=-\frac{a_0}{(r_1+2)^2-r_1^2}=-\frac{a_0}{3^2-1^2}=-\frac{a_0}{8}$$

$$a_4=-\frac{a_2}{(r_1+4)^2-r_1^2}=\frac{a_0}{8(5^2-1^2)}=\frac{a_0}{8\cdot 24}$$

De la misma forma se obtienen

$$a_6=-\frac{a_0}{8\cdot 24\cdot 48}$$

$$a_8=\frac{a_0}{8\cdot 24\cdot 48\cdot 80}$$

Puede escribirse entonces

$$J_1(z)=a_0\left(z-\frac{z^3}{8}+\frac{z^5}{192}-\frac{z^7}{9216}+\frac{z^9}{737280}-\ldots\right)$$

276 Para hallar la segunda solución se hace

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{(r+n)^2-1^2}=-\frac{a_{n-2}}{[(r+n)-1][r+n)+1]}=-\frac{a_{n-2}}{(r+n-1)(r+n+1)}$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{(r+1)(r+3)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{(r+5)(r+3)} = \frac{a_0}{(r+5)(r+3)^2(r+1)}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{(r+7)(r+5)} = -\frac{a_0}{(r+7)(r+5)^2(r+3)^2(r+1)}$$

…………………………………………………………………………………………………

Entonces

$$w(z,r) = z^r a_0\left(1 - \frac{z^2}{(r+1)(r+3)} + \frac{z^4}{(r+5)(r+3)^2(r+1)} - \frac{z^6}{(r+7)(r+5)^2(r+3)^2(r+1)} + \dots\right)$$

Si se hace $r=-1$ se anulan todos los denominadores, no siendo posible, en consecuencia continuar por este camino para la determinación de la segunda solución. Ver párrafo 185 en el capítulo 3.

277 Sin embargo, siguiendo lo demostrado por Frobenius, se puede tomar

$$(r+1)w(z,r) = a_0\left((r+a)z^r - \frac{z^{r+2}}{(r+3)} + \frac{z^{r+4}}{(r+5)(r+3)^2} - \frac{z^{r+6}}{(r+7)(r+5)^2(r+3)^2} + \dots\right)$$

Y derivar esta expresión con respecto a^r y luego hacer $r=-1$. Se tiene así

$$\begin{aligned}\frac{\partial[(r+1)w(z,r)]}{\partial r} = z^r &+ \frac{z^{r+2}}{(r+3)^2} - \frac{z^{r+4}}{(r+3)^2(r+5)^2} - \frac{2z^{r+4}}{(r+3)^3(r+5)} + \frac{z^{r+6}}{(r+3)^2(r+5)^2(r+7)^2} + \\ &\frac{2z^{r+6}}{(r+3)^2(r+5)^3(r+7)} + \frac{2z^{r+6}}{(r+3)^3(r+5)^2(r+7)} + (r+1)z^r\ln(z) - \\ &- \frac{z^{r+2}\ln(z)}{r+3} + \frac{z^{r+4}\ln(z)}{(r+3)^2(r+5)} - \frac{z^{r+6}\ln(z)}{(r+3)^2(r+5)^2(r+7)}\end{aligned}$$

Dándole a r el valor -1 se tiene finalmente

$$w_2(z)=\left(-\frac{1}{2}z+\frac{1}{16}z^3-\frac{1}{384}z^5+\ldots\right)\ln(z)+\frac{1}{z}+\frac{z}{4}-\frac{5}{64}z^3+\frac{5}{1152}z^5+\ldots$$

y esto es igual a

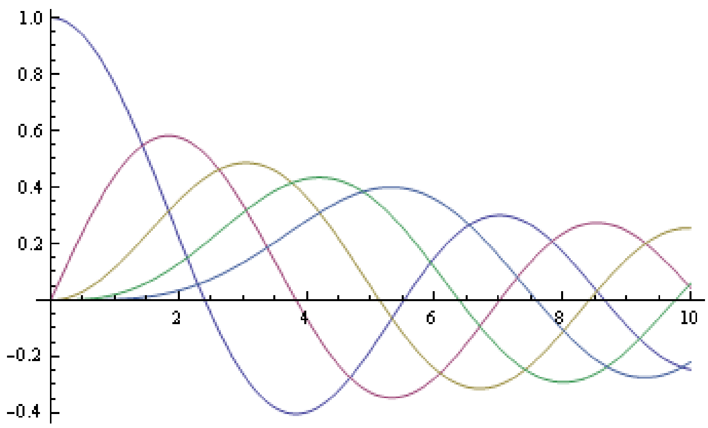
$$Y_1(z)=-\frac{1}{2}\ln(z)J_1(z)+\frac{1}{z}\left(1+\frac{z^2}{4}-\frac{5z^4}{64}+\frac{5z^6}{1152}-\frac{47z^8}{442368}+\frac{131z^{10}}{88473600}+\ldots\right)$$

278 En los textos en los que se trata en profundidad la ecuación diferencial de Bessel, sus soluciones y propiedades, se demuestran las siguientes relaciones de recurrencia:

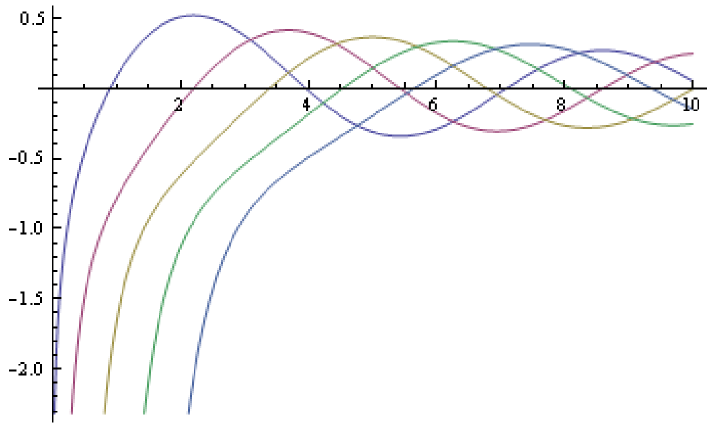
$$J_{n-1}(z)+J_{n+1}(z)=\frac{2n}{z}J_n(z)$$
$$J_{n-1}(z)-J_{n+1}(z)=2J_n^{'}(z)$$

Lo que permite afirmar que, conocidas J_0 y J_1 todas las funciones de Bessel de orden entero pueden conocerse a través de esas relaciones.

279 El siguiente gráfico representa las funciones de Bessel J_0, J_1, J_2, J_3 y J_4



Y el siguiente las segundas soluciones correspondientes



280 Caso en que $\alpha = \frac{1}{2}$. En este caso la ecuación de Bessel toma la forma

$$z^2 w'' + zw' + (z^2 - \frac{1}{4})w = 0$$

Se toma como solución en serie de potencias

$$w(z) = w = \sum_0^\infty a_n z^{r+n}$$

tomando, como siempre $a_0 \neq 0$.

Sustituyendo en la ecuación diferencial, se tiene

$$\sum_0^\infty (r+n)(r+n-1)a_n z^{r+n} + \sum_0^\infty (r+n)a_n z^{r+n}$$

$$+\sum_0^\infty a_n z^{r+n+2} - \frac{1}{4}\sum_0^\infty a_n z^{r+n} = 0$$

De esta última resulta

$$\sum_0^\infty \left[(r+n)(r+n-1) + (r+n) - \frac{1}{4}\right] a_n z^{r+n} + \sum_0^\infty a_n z^{r+n+2} = 0$$

Haciendo explícitos los dos primeros términos de la serie queda

$$\left(r^2 - \frac{1}{4}\right) a_0 z^r + \left[(r+1)^2 - \frac{1}{4}\right] a_1 z^{r+1} + \sum_2^\infty \left\{\left[(r+n)^2 - \frac{1}{4}\right] a_n + a_{n-2}\right\} z^{r+n} = 0$$

La ecuación indicial o de índices es

$$r^2 - \frac{1}{4} = 0$$

Cuyas raíces son $r_1 = \frac{1}{2}$ y $r_2 = -\frac{1}{2}$ y cuya diferencia es $r1 - r2 = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$ ¡un entero positivo!

281 Se considera en primer lugar la raíz $r_1 = \frac{1}{2}$. En este caso $(r+1)^2 - \frac{1}{4}$, factor numérico de a_1 es distinto de cero. En consecuencia a_1 debe ser nula y, por recurrencia también deben serlo todos los coeficientes de índice impar de la serie propuesta como solución.

Para los coeficientes pares se tiene, despejando de la llave de la expresión anterior

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{\left(-\frac{1}{2} + n\right)^2 - \frac{1}{4}}$$

Haciendo n=2m queda

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{\left(\frac{1}{2} + 2m\right)^2 - \frac{1}{4}} = -\frac{a_{2m-2}}{2m(2m+1)} \qquad m=1,2,3,4, \ldots$$

Resulta así

$$a_2 = -\frac{a_0}{2 \cdot 3}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{5 \cdot 4} = \frac{a_0}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{a_0}{5!}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{7 \cdot 6} = -\frac{a_0}{7!}$$

En general

$$a_{2m} = (-1)^m - \frac{a_0}{(2m+1)!}$$

282 Entonces se puede escribir como primer solución, con $a_0 = 1$

$$w_1(z) = z^{\frac{1}{2}}\left[1+\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}z^{2m}\right] = z^{-\frac{1}{2}}\left[\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}z^{2m+1}\right]$$

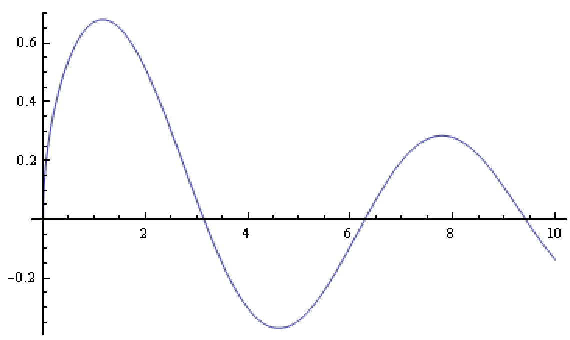
y esto último por el conocido desarrollo en serie de potencias de la función seno, resulta

$$w_1(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}\,sen(z)$$

Definiendo

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} w_1(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}sen(z)$$

Cuya gráfica se agrega a continuación



283 Corresponde ahora encontrar la segunda solución. Para ello se parte de la expresión

$$\left(r^2-\frac{1}{4}\right)\,a_0 z^r + \left[(r+1)^2-\frac{1}{4}\right]\,a_1 z^{r+1} + \sum_{2}^{\infty}\left\{\left[(r+n)^2-\frac{1}{4}\right]\,a_n + a_{n-2}\right\}z^{r+n}=0$$

deducida en párrafo 280 precedente.

Siendo en este caso $r=-\frac{1}{2}$ el corchete

$$\left[(r+1)^2-\frac{1}{4}\right]=\left[\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2-\frac{1}{4}\right]=0$$

se anula, lo que indica que el coeficiente a_1 puede ser elegido arbitrariamente.

284 Entonces, para los coeficientes pares puede escribirse, como antes

$$a_{2m}=-\frac{a_{2m-2}}{\left(\frac{1}{2}+2m\right)^2-\frac{1}{4}}=-\frac{a_{2m-2}}{2m(2m+1)} \qquad m=1,2,3,4,\ \ldots$$

$$a_{2m}=-\frac{a_{2m-2}}{\left(-\frac{1}{2}+2m\right)^2-\frac{1}{4}} \qquad m=1,2,3,4,\ \ldots$$

De donde

a_0 *arbitrario*

$$a_2=-\frac{a_0}{\left(-\frac{1}{2}+2\right)^2-\frac{1}{4}}=-\frac{a_0}{2}$$

$$a_4=-\frac{a_2}{\left(-\frac{1}{2}+4\right)^2-\frac{1}{4}}=-\frac{a_2}{4\cdot 3}=\frac{a_0}{4\cdot 3\cdot 2}$$

$$a_{2m}=-\frac{(-1)^m a_0}{(2m)!} \qquad m=1,2,3,4,\ \ldots$$

285 Con relación a los coeficientes impares, mediante un cálculo similar al anterior, resulta

$$a_{2m+1}=\frac{(-1)^m a_1}{(2m+1)!} \qquad m=1,2,3,4,\ \ldots$$

286 Finalmente resulta, como segunda solución

$$w_2(z) = z^{-\frac{1}{2}}\left[a_0\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!} + a_1\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!}\right]$$

$$w_2(z) = z^{-\frac{1}{2}}\left[a_0\cos(z) + a_1 sen(z)\right]$$

Sin embargo se suele tomar como segunda solución a

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(z)$$

Y se toma como solución general de la ecuación de Bessel de orden ½

$$w(z) = c_1 J_{\frac{1}{2}}(z) + c_2 J_{-\frac{1}{2}}(z)$$

287 Por último se hace notar que el comportamiento de las funciones de Bessel similares a las trigonométricas usuales tiene su fundamento en que, para valores crecientes de z la ecuación diferencial que las define se transforma en la ecuación correspondiente a la ecuación diferencial que puede definir a las funciones trigonométricas.

$$z^2 w''(z) + zw'(z) + (z^2 - \alpha^2)w(z) = 0$$

$$w''(z) + \frac{w'(z)}{z} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{z^2}\right)w(z) = 0$$

Cuando z ->∞ resulta la ecuación diferencial que satisfacen las funciones trigonométricas.

$$w''(z) + w(z) = 0$$

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

I Páginas WEB

Bessel Functions. Project for the Penn State - Göttingen Summer School on Number Theory. Martin Kreh

Partial Differential Equations in Polar and Cylindrical Coordinates. Cap IV, Bessel's Equations and Bessel Functions

Universidad de Antioquía. Departamento de Matemática. Soluciones por Series, Cap V.

Department of Mathematics, Creighton University. Method of Frobenius. L. Nielsen.

ACM95B/100b Lecture Notes. The Method of Frobenius. CALTECH

Power Series Solutions I: Basic Computational Methods

Power Series Solutions II: Generalizations and Theory

Modified Power Series Solutions and the Basic Method of Frobenius

The Big Theorem on the Frobenius Method, and Some Applications.

METODOS DE LA FISICA MATEMATICA II Departamento de Física Facultad de Ciencias Universidad de Chile Víctor Muñoz G. José Rogan C.

Lecture XIV:□Frobenius series: Regular Singular Points, S. Ghorai

Problemas resueltos de AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS Ingeniería Industrial Departamento de Matemática Aplicada II. Universidad de Sevilla.

Lecture 13: Series Solutions near Singular Points, March 28, 2007

Soluciones en forma de series de potencias. Eduardo Martínez.

II Textos

Ordinary Differential Equations. E.L. INCE, Heliópolis, Diciembre 1926

Apuntes de Ecuaciones Diferenciales, Departamento de Matemática, Universidad de Extremadura, Badajoz, 25 de Octubre de 2012

Ecuaciones Diferenciales I Artemio González López. Madrid.

Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems. Gerald Teschl. American Mathematical Society . Providence, Rhode Island

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias para estudiantes de Física. Juan M. Aguirregabiria. Servicio Editorial, Universidad del país Vasco

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Álvaro Tejero Cantero y Pablo Ruiz Múzquiz. Alqua.com la red en estudio

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Luis Ángel Zaldívar Cruz. Instituto Tecnológico de Tehuacán.

Ecuaciones Diferenciales Modernas. Richard Bronson. Serie SCHAUM

Differential Equations and their Applications. Martin Braun. Springer Verlag.

Ecuaciones Diferenciales. Una perspectiva de modelación. Robert Borelli y Courtney S. Coleman. OXFORD.

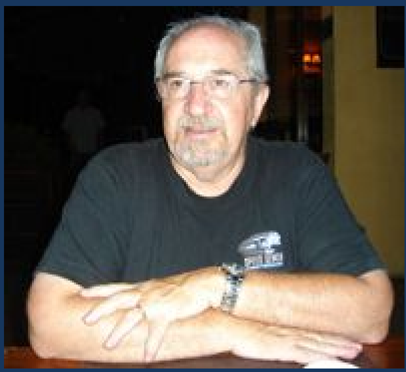
Ecuaciones Diferenciales. Problemas con valores en la frontera. Cómputo y modelado. C. Henry Edwards y David E. Penney. Prentice Hall

Una publicación de edUTecne

la editorial de la Universidad Tecnológica Nacional,
República Argentina.

Sarmiento 440, Piso 6
(C 1041AAJ) Buenos Aires, República Argentina
http://www.edutecne.utn.edu.ar

ACERCA DEL AUTOR



Jorge J. L. Ferrante es ingeniero civil graduado el 26 de Julio de 1965 en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires. Académico de Número. Academia Argentina de Ciencias Aeronáuticas y Espaciales. Administrador General en el Régimen para el Personal de Investigación y Desarrollo de las Fuerzas Armadas. Director de Gestión Tecnológica, designado por el Consejo Superior Universitario de la Universidad Tecnológica Nacional. Miembro de la Junta de Clasificación. Régimen para el Personal de Investigación y Desarrollo de las Fuerzas Armadas. Integrante Banco de Evaluadores Por Resolución conjunta de la Secretaría de Educación Superior y de la Secretaría para la Tecnología, la Ciencia y la Innovación Productiva. Profesor Titular Ordinario, Cátedra de Análisis Matemático, Cálculo Numérico y Fundamentos para el Análisis de Señales. Ex Secretario de Ciencia y Tecnología. Universidad Tecnológica Nacional, desde el 12 de Diciembre de 1997 hasta el 16 de Febrero de 2006. Ex Decano de la Facultad Regional Tucumán. Universidad Tecnológica Nacional. Ex Director Nacional de Planificación Científica y Tecnológica. Secretaría de Ciencia y Tecnología. Ex Jefe de Departamento Planificación y Control. Comisión Nacional de Investigaciones Espaciales. CNIE. Ha dirigido proyectos de investigación y desarrollo, dictado conferencias, publicado artículos científicos y de divulgación y libros de su especialidad.